



VIGAS TERMOELÁSTICAS DO TIPO III

Leandro Tomaz de Araujo

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, PGPIM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Rio de Janeiro

Março de 2023

Araujo, Leandro Tomaz de

A663v

Vigas Termoelásticas do tipo III/Leandro Tomaz de
Araujo. – Rio de Janeiro, 2023.

88 f.

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-
Graduação em Matemática, 2023.

Referências Bibliográficas: p. 86 – 88.

1. Semigrupo.
 2. Semigrupo Analítico.
 3. Estabilidade Exponencial.
 4. Sistemas Termoelástico.
- I. E. Muñoz Rivera, Jaime. II. Título.

VIGAS TERMOELÁSTICAS DO TIPO III

Leandro Tomaz de Araujo

AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA (PGPIM) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS.

Área de Concentração: **Matemática Pura.**

Aprovada por:

Prof.Jaime E. Muñoz Rivera (UFRJ) D.Sc.(presidente)

Prof.Hugo Danilo Fernández Sare (UFJF) D.Sc.

Prof.Marcelo Moreira Cavalcanti (UEM) D.Sc.

Prof.Valeria Cavalcanti(UEM) D.Sc.

Prof.Xavier Carvajal Paredes (UFRJ) D.Sc.

Rio de Janeiro,

Março de 2023.

Dedico este trabalho ao meu pai,
João Mendes de Araujo (in memoriam),
com todo amor e gratidão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado força, sabedoria e coragem para superar mais essa etapa da minha vida.

Agradeço aos meus filhos Leandro e Irapuan pelo carinho e amor, que sem o qual não poderia viver.

Agradeço a minha esposa, Andréa Luiza Gonçalves Martinho pelo amor e compreensão.

Agradeço a minha mãe, Geni Tomaz de Araujo, e meu pai, João Mendes de Araujo (In memoriam), pelo amor e o exemplo de vida.

Agradeço ao meu orientador o Professor Jaime Edilberto Muñoz Rivera pela amizade, paciência e apoio ao longo destes anos.

Agradeço ao Professor Hugo Danilo Fernández Sare pelo apoio e as sugestões sobre a interpretação física do modelo.

Agradeço a todos os professores e os funcionários da Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Em especial aos professores Pedro Gamboa e Xavier Carbajal pela revisão e as sugestões para a versão final desta tese.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro pelo apoio e amizade.

Rio de Janeiro,
Leandro Tomaz de Araujo

Mas é claro que o Sol vai voltar
amanhã

Mais uma vez, eu sei

Renato Russo/Flávio Venturini

RESUMO

Neste trabalho, investigaremos um problema de transmissão para uma viga termoelástica do tipo III, mais precisamente, estudaremos um problema acoplado em dois intervalos distintos com uma fronteira em comum aonde fluxo de calor ocorre por pulsos de calor como um especie de *ondas térmicas* em velocidade finita de propagação. Em uma extremidade temos uma parte termoelástica pequena e o restante de material elástico. Nesta viga procuraremos o comportamento assintótico. Assim, estamos interessados no mecanismo dissipativo efetivo que atua na parte termoelástica e que permite demonstrar a estabilidade exponencial bem como existência e unicidade de solução.

Palavras Chaves: Estabilidade Exponencial; Semigrupos; Semigrupos Analíticos e Sistema Termoelástico.

ABSTRACT

In this work, we will investigate a transmission problem for a type III thermoelastic beam, more precisely, we will study a problem coupled in two distinct intervals with a common boundary where heat flow occurs by heat pulses as a kind of *thermal waves* at finite speed of propagation. On one side we have a small thermoelastic part and the rest of elastic material. In this beam will provide for asymptotic behavior. Thus, we are interested in the efficient dissipative mechanism that exists in the thermoelastic part that allows us to demonstrate exponential stability as well as the existence and uniqueness of the solution.

Keywords: Exponential Stability; Semigroups; Analytical Semigroups and Thermoelastic System.

Lista de Figuras

1.1	Viga totalmente termoelástica	12
1.2	Viga parcialmente termoelástica	15
2.1	Região Δ	38
2.2	Regiões Δ_δ e Σ	40
3.1	Viga totalmente termoelástica	45
4.1	Viga parcialmente termoelástica	65

Sumário

Lista de Figuras	8
1 Introdução	10
2 Preliminares	19
2.1 Definições e Propriedade em espaços de Hilbert	19
2.2 Espaços de Sobolev	22
2.3 Teoria do Traço	23
2.4 Desigualdades	24
2.5 Teoria de Semigrupos	28
2.6 Semigrupos Analíticos	38
2.7 Estabilidade de Semigrupos	40
3 Viga Termoelástica do tipo III	44
3.1 Boa Colocação do Problema	45
3.2 Estabilidade Forte	51
3.3 Analiticidade do Semigrupo	52
4 Viga Termoelástica do tipo III com dissipação localizada	64
4.1 Boa Colocação do Problema	66
4.2 Estabilidade Forte	69
4.3 Estabilidade Exponencial	72
5 Conclusões e trabalhos futuros	84
Referências Bibliográficas	86

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese investigaremos o comportamento assintótico de uma viga unidimensional composta de materiais termoelástico e/ou elástico. Estes tipos de materiais estão presentes em muitas situações da Engenharia, por exemplo, desde plataformas de petróleo até satélites artificiais cuja construção está relacionada a deformações e tensões induzidas termicamente na estrutura, o que podem causar danos que levam a falhas irrecuperáveis. Por essa razão, o estudo do comportamento assintótico (estabilidade exponencial, falta de estabilidade ou estabilidade polinomial) e os efeitos regularizantes (diferenciabilidade ou analiticidade) são de grande importância.

A estabilidade dos sistemas em uma estrutura são baseados em um projeto e através das combinações adequadas de materiais e controle térmico adequado podem limitar os problemas causados pela temperatura dos suportes estruturais e instrumentos. Portanto, estes materiais são de interesse em várias áreas da ciência e da engenharia.

Note que muitos problemas interessantes podem surgir quando a dissipação atua ou mesmo não existe em diferentes intervalos da viga; por exemplo, se a viga for de material elástico não há dissipação efetiva. Por outro lado, uma viga de material totalmente termoelástico apresentaria dissipação em todo intervalo $]0, \ell[$, já no modelo localizado, a dissipação estaria apenas no intervalo $]\ell_0, \ell[$.

Um problema do tipo III

Um problema do tipo III é um problema onde o fluxo de calor ocorre por pulsos de calor em sólidos rígidos e/ou materiais elásticos como um especie de *ondas térmicas* em velocidade finita de propagação, por exemplo, são como os efeitos térmicos em uma viga em balanço. Note que experimentalmente em baixas temperaturas, o calor se propagam como ondas térmicas. Esse fenômeno é conhecido *second sound*, e é semelhante a propagação de ondas no ar o que justifica o nome (veja [19]). A condição do Tipo III que também consideramos é a resposta deste material a este fenômeno térmico o qual é baseado nas funções constitutivas. Este tipo de condição foi apresentada em 1991 quando Green & Naghdi [7, 8] apresentaram as três teorias termoelásticas que a denominaram do tipo I, II e III.

Os materiais elásticos são aqueles apresentam um tipo de *memória* cujas as equações constitutivas para o tensor *stress* são dadas da seguinte forma $T = T(F)$, onde F é o gradiente de deformação. Por outro lado, materiais termoelásticos são aqueles sensíveis a variação de temperatura, que deformam o sólido pelo aumento ou diminuição de temperatura. Assim, quando a condução de calor é levada em consideração nos materiais com propriedades elásticas devemos considerar a temperatura θ e o gradiente de temperatura g como variáveis constitutivas, deste modo, um material termoelástico é caracterizado com equações constitutivas da forma $\mathcal{C} = \mathcal{F}(F, \theta, g)$.

Vale destacar que as equações para um determinado sistema são baseadas em um sistemas de equações consistindo das Leis de Balanço de massa, de momento e de energia, e para maiores detalhes veja [12]. Em nosso contexto, são equações de balanço de momento e de energia envolvendo variáveis constitutivas u_x , θ e θ_x .

As funções constitutivas para estas três teorias termoelásticas quando linearizadas nos dizem que: as de tipo I são o mesmo que a teoria clássica de condução de calor (Lei de Fourier), e as do tipo II e III são as que permitem propagação de ondas térmicas em velocidade finita. Em outros termos, as do tipo I o fluxo de calor é análogo ao fluxo “viscoso” em dinâmicas dos fluidos, as do tipo II é análogo a propagação de ondas em um meio elástico¹ e as do tipo III, que é o caso desta tese, o fluxo de calor em um sólido

¹O que não tem nada haver com a termoelasticidade padrão de um sólido deformável.

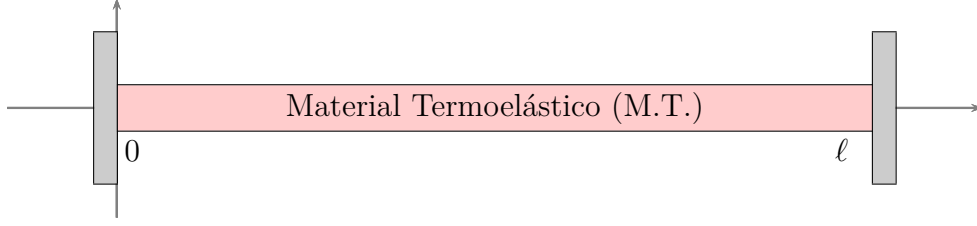


Figura 1.1: Viga totalmente termoelástica

estacionário rígido é análogo ao fluxo de um tipo de fluido viscoelástico [7].

Vigas Termoelástica do Tipo III

Nesta tese estudaremos duas situações para vigas termoelásticas do tipo III. A primeira quando o material é completamente termoelástico o modelo fica definido pelo seguinte sistema de equações

$$\rho u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + m\theta_{txx} = 0 \quad \text{para } x \in (0, \ell), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$c\theta_{tt} - \kappa\theta_{xx} - \kappa_0\theta_{xxt} - mu_{xxt} = 0 \quad \text{para } x \in (0, \ell), \quad t > 0, \quad (1.2)$$

com as condições iniciais da forma

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad \text{em } (0, \ell), \quad (1.3)$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x), \quad \theta_t(0, x) = \theta_1(x) \quad \text{em } (0, \ell), \quad (1.4)$$

e munida as condições de contorno:

$$u(t, 0) = u(t, \ell) = u_x(t, 0) = u_x(t, \ell) = 0 \quad \text{em } (0, \infty). \quad (1.5)$$

$$\theta_x(t, 0) = \theta_x(t, \ell) = 0 \quad \text{em } (0, \infty). \quad (1.6)$$

Para este caso provaremos que o semigrupo é analítico. As hipóteses que assumimos no caso totalmente termoelástico é que ρ , α , c , κ , m e κ_0 são constantes positivas definindo

funções contínuas. Note que u representa o deslocamento longitudinal e θ o deslocamento de temperatura da viga em vibração engastada(fixada) em suas extremidades e não isoladas adequadamente o que permite a passagem de calor. Para uma aplicação, por exemplo, podemos considerar uma viga de aço afetada pelo fogo. O aço perde suas propriedades acima de uma determinada temperatura, neste caso uma viga ou um elemento estrutural com mesmas características deixa de atuar como viga, isto é, perde a capacidade de suportar o seu peso e seu carregamento. Agora, uma viga de material termoelástico que pode ser considerada, a saber, uma viga de aço protegida por um revestimento de pintura o qual estará sujeito a altas temperaturas pode ter um tempo maior de integridade para a viga. Todavia, este tempo será determinado pelo mecanismo de dissipação.

Modelo Localizado

O principal sistema termoelástico do tipo III que consideramos neste trabalho é o composto de dois materiais (elástico e termoelástico) governado pelo sistema abaixo com condições iniciais da forma (1.3)-(1.4).

$$\rho u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + m\theta_{txx} = 0 \quad \text{para } x \in]0, \ell[, \quad t > 0, \quad (1.7)$$

$$c\theta_{tt} - \kappa\theta_{xx} - \kappa_0\theta_{xxt} - mu_{xxt} + \delta\theta = 0 \quad \text{para } x \in]\ell_0, \ell[, \quad t > 0. \quad (1.8)$$

As condições de fronteira para u são da forma (1.5), e para a variável térmica θ são dadas abaixo,

$$\theta_x(t, \ell_0) = \theta_x(t, \ell) = 0 \quad \text{para } t \in (0, \infty). \quad (1.9)$$

A equação para temperatura é dada por uma equação de segunda ordem no tempo e, juntamente com a primeira equação, asseguram a consistência do modelo. Assumiremos neste caso que $\rho, \alpha, c, \kappa, \kappa_0$ e δ são constantes positivas e assim definindo funções contínuas, porém a diferença significativa com o caso anterior é que $m = m(x)$ definirá uma função

descontinua da forma abaixo,

$$m(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < \ell_0, \\ m_0 & \text{se } \ell_0 < x \leq \ell, \end{cases}$$

que indica a mudança do material termoelástico para o elástico. Uma outra diferença é acréscimo do termo $\delta\theta$ na segunda equação que representa uma especie de *mecanismo de amortecimento térmico* uma vez que θ representa o deslocamento de temperatura ao longo do intervalo termoelástico, onde δ é a contante de condutividade térmica. Note que a equação do calor acoplada ao modelo de vigas termoelásticas é do tipo Kelvin-Voight e o funcional de energia para o problema com o termo $\delta\theta$ é equivalente ao funcional de energia para o problema sem este termo, uma vez que temos a validade da Desigualdade de Poincaré. Em outras palavras, este mecanismo poderia ser retirado sem prejuízo a validade do resultado.

Agora, observando que este modelo é descontínuo então para tratar este problema no contexto da teoria de semigrupos precisamos além das condições iniciais e de contorno outras condições: as condições de transmissão. Estas surgem para manter boas propriedades físicas do sistema. Por essa razão, devemos incorporar condições de continuidade do material e do tensor *stress*. Para esse objetivo, introduzimos seguinte a notação:

$$M = \alpha u_{xx} + m\theta.$$

Por consequência, consideramos condições de continuidade:

$$u(\ell_0^-) = u(\ell_0^+), \quad u_x(\ell_0^-) = u_x(\ell_0^+),$$

e a condição de ação e reação:

$$M(\ell_0^-) = M(\ell_0^+), \quad M_x(\ell_0^-) = M_x(\ell_0^+).$$

Na figura 1.2, a viga esta configurada no intervalo $]0, \ell_0[$ de material elástico; já no intervalo $]\ell_0, \ell[$ de material termoelástico do tipo III. Para fazer uma aplicação breve

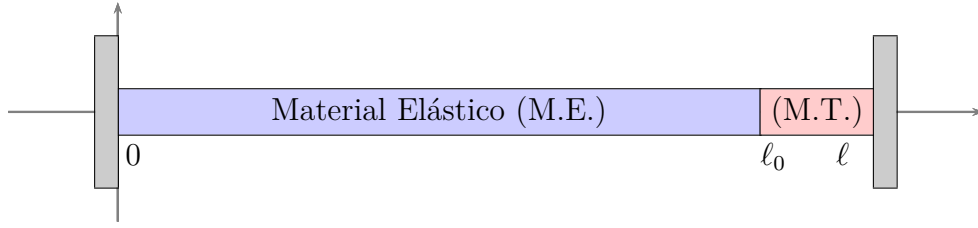


Figura 1.2: Viga parcialmente termoelástica

deste modelo considere a situação de uma viga de aço onde num intervalo que pode ser pequeno é aplicado uma pintura de proteção. Note que nesta situação o revestimento (a parte considera termoelástica) não é suficiente para assegurar um tempo maior para integridade da viga.

Mecanismo Dissipativo Efetivo

Podemos visualizar o mecanismo dissipativo de uma viga totalmente termoelástica através do funcional de energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 + \kappa |\theta_x|^2 + c |\theta_t|^2 \right) dx.$$

Neste caso é simples verificar que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^\ell \kappa_0 |\theta_{tx}|^2 dx. \quad (1.10)$$

Já no caso parcialmente termoelástico a energia deve ser definida como

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\ell_0}^\ell \left(\kappa |\theta_x|^2 + c |\theta_t|^2 + \delta |\theta|^2 \right) dx$$

cuja derivada do sistema obtemos o seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_{\ell_0}^\ell \kappa_0 |\theta_{tx}|^2 dx \quad (1.11)$$

Finalmente, a dificuldade é mostrar que a dissipação concentrada no intervalo $]\ell_0, \ell[$ é suficiente para estabilizar todo o sistema.

Pesquisa Bibliográfica

Vejamos a seguir um breve apresentação da pesquisa bibliografia feita para compor a presente tese, organizada por cronologia.

1. Em 2002, Quintanilla & Racke [34] provaram a estabilidade exponencial para diferentes condições de contorno com o Método da Energia e Métodos espectrais para um sistema hiperbólico termoelástico. Os mesmos também investigaram a estabilidade para duas ou três dimensões e a equiparação de energia.
2. Em 2010, Liu & Quintanilha [26] analisaram um sistema de equações de evolução que governa placas termoelásticas do tipo III protendidas isotrópicas e homogêneas. Provaram que o semigrupo que gera soluções analíticas, que implica na impossibilidade de localização de soluções. Diferentes condições de contorno também foram consideradas. Por outro lado, no mesmo ano, Sare, Rivera & Quintanilla [10] investigam o comportamento assintótico do semigrupo associado ao soluções do problema de valor de contorno inicial para um termoelástico unidimensional material não simples. Os autores mostraram que o semigrupo é exponencialmente estável, mas não é analítico para determinadas condições de contorno e mostraram a impossibilidade de localização no tempo das soluções.
3. Em 2012, Sare & Rivera [11] consideram um sistema linear de placas termoelásticas onde o fluxo de calor é dado por modelo de Cattaneo. Os autores mostraram que o sistema resultante é exponencialmente estável se, e somente se, o coeficiente de inércia rotacional for positivo, e quando este for nulo obtiveram resultados de estabilidade polinomial dando taxas ótimas de decaimento para inicial dados no domínio do gerador infinitesimal do semigrupo termoelástico.
4. Em 2015, os autores em [17] investigaram vibrações de uma estrutura flexível não homogênea modelado por uma equação viscoelástica 1D com Kelvin-Voigt, juntamente com um efeito dissipativo esperado: condução de calor regida pela lei de Cattaneo.
5. Em 2017, Rivera & Vega [36] provaram que o modelo termoelástico não simples, com a lei de Cattaneo ou Gurtin-Pipkin, é indiferente à presença do termo inercial;

ou seja, considerando ou não o termo irrotacional, existe perda estabilidade da exponencial.

6. Em 2018, os autores em [18] consideram um problema de transmissão de uma viga de Timoshenko composto por N componentes, cada um deles sendo ou puramente elástico, ou um Material viscoelástico Kelvin-Voigt, ou um material elástico inserido com um mecanismo de amortecimento friccional tradicional. Observe que o principal resultado é que a taxa de decaimento depende da posição de cada componente. Mais precisamente, provaram que o o modelo de Timoshenko é exponencialmente estável se e somente se todos os componentes elásticos são conectados com um componente com amortecimento por atrito. Caso contrário, não há estabilidade exponencial, mas um decaimento polinomial da energia.

Contribuições e Estrutura da Tese

No capítulo 2, vamos colocar os resultados básicos de espaços Hilbert e espaços de Sobolev e algumas referências da Teoria de Semigrupo; bem como resultados de Estabilidade e Analiticidade para que o trabalho seja auto-suficiente. Todavia, omitiremos várias demonstrações e apresentado a que acreditamos ser mais relevante para o contexto da presente tese.

No capítulo 3, vamos apresentar a existência e unicidade para o sistema da viga termoelástico do tipo III da forma (1.1)–(1.6) na situação em que o elemento estrutural é completamente de material termoelástico e uma das principais dificuldades deste problema é que o domínio não pode ser representado na forma de um espaço de Sobolev, mas na forma de um espaço vetorial dependendo dos operadores diferenciais da equação. No que se segue, vamos mostrar a analiticidade do sistema (1.1)–(1.4) usando o Teorema 2.36. Este problema já foi estudado antes para a situação das placas em [26] com uma regularidade mais alta e outras condições de contorno. A abordagem que escolhemos utiliza uma regularidade para u em $H^3(0, \ell)$ o que acarreta a necessidade de obtermos estimativas para u_{xxx} e para os termos pontuais, $u_{xxx}(0)$ e $u_{xxx}(\ell)$.

No capítulo 4, consideraremos um problema de transmissão para um viga engastada em suas extremidades composta de dois materiais: um elástico e outro termoelástico

onde componente termoelástica pode ocupar uma parte pequena da viga na qual ocorre a dissipação do sistema. Apresentaremos a boa colocação do modelo localizado dado pelo sistema (1.7)–(1.9) o que é um resultado de grande relevância, uma vez que abordagem é similar ao capítulo anterior. Todavia, a contribuição mais significativa é mostrar a estabilidade exponencial usando o Teorema de Pruss 2.41 cujas dificuldades são para obter uma estimativa u_{xxx} sobre o intervalo termoelástico e outra para os seus termos pontuais na fronteira do intervalo $I =]0, \ell_0[\cup]\ell_0, \ell[$ e, com isso, obter uma desigualdade para a energia sobre o intervalo elástico, $I_E =]0, \ell_0[$ e outra sobre o intervalo termoelástico, $I_T =]\ell_0, \ell[$.

Finalmente, no último capítulo faremos comentários a respeito das conclusões do trabalho e das perspectivas futuras de novas contribuições.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo faremos um breve resumo dos conceitos e assuntos tratados na presente tese, e foram baseados em [1, 3, 28, 30, 35].

2.1 Definições e Propriedade em espaços de Hilbert

Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 2.1. Dizemos que $\mathcal{H}$ é munido de um produto escalar se existe uma função

$$(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$$

satisfazendo:

1. Para cada $y \in \mathcal{H}$,

$$(\cdot, y)_{\mathcal{H}} : x \in \mathcal{H} \longmapsto (x, y)_{\mathcal{H}} \in \mathbb{K}.$$

é linear.

2. Para cada $x, y \in \mathcal{H}$,

$$(x, y)_{\mathcal{H}} = \overline{(y, x)_{\mathcal{H}}}.$$

3. Para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$(x, x)_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

4. Para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$(x, x)_{\mathcal{H}} = 0 \iff x = 0.$$

Nota 2.2. Pelas condições (1) e (2) da definição acima, a aplicação $y \mapsto (x, y)$ é antilinear, isto é, para todo $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$

$$(x, \lambda y_1 + y_2)_{\mathcal{H}} = \bar{\lambda}(x, y_1)_{\mathcal{H}} + (x, y_2)_{\mathcal{H}}.$$

Seja $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. A partir do produto interno, defini-se uma norma¹ de $x \in \mathcal{H}$,

$$\|x\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{(x, x)_{\mathcal{H}}}.$$

Proposição 2.1. 1. Para todo $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\|x + y\|_{\mathcal{H}}^2 = \|x\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\operatorname{Re}\{(x, y)_{\mathcal{H}}\} + \|y\|_{\mathcal{H}}^2.$$

2. (Desigualdade de Cauchy-Schwartz) Para todo $x, y \in \mathcal{H}$,

$$|(x, y)_{\mathcal{H}}| \leq \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}}.$$

Proposição 2.2 (Desigualdade de Minkowski). Para todo $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\|x + y\|_{\mathcal{H}} \leq \|x\|_{\mathcal{H}} + \|y\|_{\mathcal{H}}.$$

Corolário 2.1. Seja $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de um produto escalar. Então $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ é um espaço vetorial normado.

Definição 2.3. Seja $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ um espaço vetorial. Dizemos que $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ é um espaço de Banach se $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Banach com a norma proveniente do produto interno.

¹Essa norma é chamada norma proveniente do produto interno

Teorema de Representação de Riesz

Teorema 2.4 (Representação de Riesz-Frechet). *Para cada $\varphi \in \mathcal{H}^*$, existe um único $f \in \mathcal{H}$ tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u)_{\mathcal{H}} \quad (\forall u \in \mathcal{H}).$$

Além disso, $\|\varphi\|_{\mathcal{H}^} = \|f\|_{\mathcal{H}}$.*

Demonstração. Veja [3], p.135. □

Corolário 2.2. *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, então $\mathcal{H}$ é reflexivo.*

Demonstração. Veja [3], p.132. □

Teorema de Lax-Milgram

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$.

Definição 2.5. *Seja $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação. Dizemos que*

1. a é contínua se existe $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}} \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}).$$

2. a é coerciva se existe $\alpha > 0$ tal que

$$|a(u, u)| \geq \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (\forall u \in \mathcal{H}).$$

Teorema 2.6 (Lax-Milgram). *Seja $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação bilinear (ou sesquilinear), contínua e coerciva. Então para todo $f \in \mathcal{H}^*$, existe um único $u \in \mathcal{H}$ tal que*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (\forall v \in \mathcal{H}).$$

Demonstração. Veja [3], p.140. □

Corolário 2.3. *Nas condições do Teorema de Lax-Milgram. Se $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ é simétrica, então u é caracterizado por*

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle = \inf_{v \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle \right\}.$$

Consequentemente, obtemos um argumento elementar e direto para provar $\langle f, v \rangle = a(u, v)$ ($\forall v \in \mathcal{H}$) possui uma unica solução. (Veja [3], p.140).

2.2 Espaços de Sobolev

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto com fronteira $\partial\Omega$.

Definição 2.7. *Sejam $m > 0$ um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev é dado por*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) | D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Isto , $W^{m,p}$  a coleção de todas funções em $L^p(\Omega)$ tal que todas derivadas distribuonais até ordem m são todas em $L^p(\Omega)$.

É sabido que $\mathcal{D}(\Omega)$, o espaço de todas funções infinitamente diferenciável com suporte compacto em Ω , é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Suponha que $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, segue que toda derivada $D^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ para qualquer multi-ndice α . Consequentemente, vemos que $\mathcal{D}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Claramente $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial. Defina a norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$ da seguinte forma:

$$\|u\|_{W^{m,p}} \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

1. Para $p = 2$, denotamos por $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.
2. Para $m = 0$, temos $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e a L^p -norma de $u \in L^p(\Omega)$ é denotado por $\|u\|_{L^p}$.
3. O espaço $H^m(\Omega)$ tem um produto interno definido por

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int D^\alpha u D^\alpha v, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

4. A norma $\|\cdot\|_{H^m}$ é proveniente do produto interno.

Teorema 2.8 (Desigualdade de Holder). *Seja $f \in L^q(\Omega)$, $g \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. Veja [3], p.56-57. □

Teorema 2.9. *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^m . Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então, temos as seguintes imersões compactas:*

- (a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, q^*], \text{ onde } \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$
- (b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, \infty].$
- (c) $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$ Neste caso,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \quad e \quad k = \left[\left[m - \frac{n}{p} \right] \right].$$

Demonstração. Veja [28], p.84-85. □

2.3 Teoria do Traço

Nesta seção desenvolveremos a teoria do traço restringindo a nossa atenção no caso $p = 2$ e esta baseado em [14]. Para tal objetivo assuma que ou $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, ou Ω é um aberto limitado com fronteira Γ bem regular.

Proposição 2.3. *Seja $\Omega = \mathbb{R}_+^n$. Então existe uma aplicação linear continua com $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que*

1. *Se v é continua sobre $\mathbb{R}_+^n$, então $\gamma_0(v) = v|_{\mathbb{R}^{n-1}}$.*

2. *A imagem de γ_0 é o espaço*

$$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

3. *$\ker(\gamma_0) = H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$.*

Demonstração. Veja [14], p.96-101. □

Note que o resultado anterior pode ser provado se $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$, então o núcleo de γ em $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ é precisamente o conjunto $H_0^m(\mathbb{R}_+^n)$. A seguir apresentaremos o caso Ω um aberto limitado com fronteira regular.

Teorema 2.10 (Teorema do Traço). *Seja Ω um aberto limitado com fronteira de classe C^1 . Então existe uma aplicação linear continua com $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}) : H^m(\Omega) \longrightarrow (L^2(\Omega))^m$ tal que*

1. *Se $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então*

$$\gamma_0(v) = v|_\Gamma, \gamma_1(v) = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_\Gamma, \dots, \gamma_{m-1}(v) = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}}|_\Gamma.$$

2. *A imagem de γ é o espaço*

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

3. *$\ker(\gamma) = H_0^m(\Omega)$.*

Demonstração. Veja [14], p.101-102. □

2.4 Desigualdades

Esta seção é dedicada a realizar uma revisão das principais desigualdades, e está baseada em [30] e [32].

Desigualdades do tipo Young

Teorema 2.11.

(a) *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

(b) *Para todo $a, b > 0$ e $\epsilon > 0$,*

$$ab \leq \frac{\epsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\epsilon}.$$

(c) Para todo $a, b > 0$ e $\epsilon > 0$,

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

Demonstração. Veja [20], p.622. □

Teorema 2.12. [Young]

(a) Seja $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então para todo $a, b > 0$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(b) Seja $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então para todo $a, b > 0$,

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q. \quad (2.1)$$

para $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

Demonstração. Veja [20], p.622. □

Desigualdades de Poincaré

Teorema 2.13. Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então existe uma constante C dependendo apenas de Ω e n tal que

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2} \quad (\forall u \in H_0^1(\Omega)).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p}$ é a norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ o qual é equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}}$; para $H_0^1(\Omega)$ a expressão $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$ é um produto interno o qual induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ que é equivalente $\|u\|_{H^1}$.

Demonstração. Veja [3], p.174. □

Teorema 2.14. Seja Ω um domínio limitado de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$. Se $1 \leq p \leq \infty$ então existe uma constante C dependendo apenas de Ω e n tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}.$$

onde $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx$.

Demonstração. Veja [20], p.275. □

Teorema 2.15. *Seja Ω um domínio limitado de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante C dependendo apenas de Ω e n tal que para todo $u \in H^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2} + C \left| \int_{\Omega} u dx \right|.$$

Demonstração. Segue do Teorema 2.14. □

Desigualdades de Gagliardo-Nirenberg

Teorema 2.16. *Sejam j e m inteiros satisfazendo $0 \leq j < m$, e seja $1 \leq q, r \leq \infty$, e $p \in \mathbb{R}$, $\frac{j}{m} \leq a \leq 1$ tais que*

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = a \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1-a) \frac{1}{q}.$$

Então

1. *Para qualquer $u \in W^{m,r}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante positiva C dependendo somente de n, m, j, q, r e a tal que seguinte desigualdade satisfeita*

$$\|D^j u\|_p \leq C \|D^m u\|_r^a \|u\|_q^{1-a}, \quad (2.2)$$

com os seguintes casos excepcionais:

- (a) *Se $j = 0$ e $rm < n$, $q = \infty$ então fazemos uma hipótese adicional que ou u tende a zero no infinito, ou $u \in L^{\tilde{q}}$ para algum $\tilde{q} > 0$.*
- (b) *Se $1 < r < \infty$ e $m - j - \frac{n}{r}$ é um inteiro negativo, então (2.2) é válida apenas para a satisfazendo $\frac{j}{m} \leq a < 1$.*

Demonstração. Veja [29], p.125-126. □

2. *Para qualquer $u \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave, existe duas constantes positivas C_1, C_2 tais que a seguinte desigualdade*

é satisfeita

$$\|D^j u\|_p \leq C_1 \|D^m u\|_r^a \cdot \|u\|_q^{1-a} + C_2 \|u\|_q, \quad (2.3)$$

com a mesma exceção do item anterior. Em particular, para qualquer $u \in W_0^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, a constante C_2 em (2.3) pode ser tomada zero.

Demonstração. Veja [21]. □

Usaremos com muita frequência a desigualdade das derivadas intermediárias que em sua versão N-dimensional esta demonstrada no livro de [1]. Para nossos propósitos nos limitaremos a enunciar a versão no caso unidimensional.

Teorema 2.17. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $u, u^{(m)} \in L^2(a, b)$ então, $u^{(j)} \in L^2(a, b)$, para $j = 1, \dots, m$, onde $u^{(j)} = \frac{d^j}{dx^j} u$. Além do mais, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ temos*

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq C\epsilon \|u^{(m)}\|_{L^2} + C\epsilon^{-\frac{j}{m-j}} \|u\|_{L^2}, \quad (2.4)$$

o que implica

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2} + C\|u\|_{L^2}^{1-\frac{j}{m}} \|u^{(m)}\|_{L^2}^{\frac{j}{m}}. \quad (2.5)$$

Demonstração. Do Teorema 4.14 of [1] segue (2.4). Denotando por

$$\|u\|_m := \|u\|_{L^2} + \|u^{(m)}\|_{L^2}$$

e tomando ϵ

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{\|u\|_{L^2}}{\|u\|_m} \right)^{\frac{m-j}{m}},$$

em (2.4) obtemos

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}^{1-\frac{j}{m}} \|u\|_m^{\frac{j}{m}},$$

de onde pela definição da norma $\|\cdot\|_m$ segue (2.5). □

Corolário 2.4. *Seja $u \in H^2(a, b)$, então temos*

$$\|u\|_\infty = \sup_{s \in [a, b]} |u(s)| \leq C\|u\|_{L^2} + C\|u\|_{L^2}^{3/4} \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/4}. \quad (2.6)$$

$$\|u_x\|_\infty = \sup_{s \in [a, b]} |u_x(s)| \leq C\|u\|_{L^2} + C\|u\|_{L^2}^{1/4} \|u_{xx}\|_{L^2}^{3/4}. \quad (2.7)$$

Demonstração. Das desigualdades de Gagliardo-Nirenberg temos

$$|u_x(b)|^2 \leq C \|u_x\|_{L^2} (\|u\|_{L^2} + \|u_{xx}\|_{L^2}) \leq C \|u\|_{L^2}^{1/2} (\|u\|_{L^2} + \|u_{xx}\|_{L^2})^{3/2},$$

onde temos usado implicitamente o Lema 2.17 para obter $\|u_x\| \leq C \|u\|^{1/2} (\|u\| + \|u_{xx}\|)^{1/2}$. De onde segue a desigualdade (2.7). Mais ainda, usando os mesmos argumentos podemos chegar a desigualdade (2.6). $\square$

2.5 Teoria de Semigrupos

Algumas Definições

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert equipado com o produto interno $(\cdot, \cdot)$ e norma induzida $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, e $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ a álgebra dos operadores lineares limitados em $\mathcal{H}$.

Definição 2.18. *Uma família de operadores linear limitados $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um semigrupo de operadores linear limitados em $\mathcal{H}$ quando:*

1. $S(0) = I$ ²
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo t, s não negativos.³

Alem disso,

Definição 2.19. *Um semigrupo $S(t)$ em $\mathcal{H}$ é um uniformemente contínuo quando*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 0.$$

Definição 2.20. *Um semigrupo $S(t)$ em $\mathcal{H}$ é um semigrupo de classe C_0 (ou simplesmente, um semigrupo C_0) quando*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|S(t)x - x\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Veja uma definição importante a seguir.

² $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador identidade

³Propriedade que caracteriza Semigrupos.

Definição 2.21. *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo em $\mathcal{H}$. O operador linear $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por*

$$1. D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} \right\}.$$

$$2. \mathcal{A}x := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad x \in D(\mathcal{A}).$$

Dizemos que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$.

Dado um operador $\mathcal{A}$, se este coincide com gerador infinitesimal de $S(t)$, então dizemos que A gera um semigrupo $C_0 S(t)$, $t \geq 0$. Algumas vezes também denotaremos $S(t)$ por e^{At} .

Definição 2.22. *Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitado é limitado, se existe $M \geq 1$ tal que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M.$$

Quando $M = 1$, $S(t)$ é dito semigrupo de contrações.

Espectro e resolvente

Aqui relembremos algumas definições e resultado pertinentes. Para tal fim, assuma que $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Banach.

Definição 2.23. *1. O conjunto resolvente de $\mathcal{A}$ é dado por*

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

2. O conjunto espectral (ou espectro) de A é dado por

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} - \rho(\mathcal{A}).$$

Pela definição anterior, os pontos $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ são os valores em que $(\lambda I - \mathcal{A})$ é invertível; já os pontos que não são invertíveis são os pontos espectrais. Uma propriedade importante de $\rho(\mathcal{A})$ e $\sigma(\mathcal{A})$ é dada abaixo.

Proposição 2.4. *O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ é um conjunto aberto e o espectro $\sigma(\mathcal{A})$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Veja [35], p.108 □

Vale destacar que se $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ então o operador $(\lambda I - \mathcal{A})$ não é injetor, ou $(\lambda I - \mathcal{A})$ é injetor, mas não sobrejetor o qual pode ter imagem densa em $\mathcal{H}$ ou não. O que pode ser resumido na seguinte definição.

Definição 2.24.

1. *O espectro discreto é dado por*

$$\sigma_d(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - \mathcal{A}) \text{ não é injetor}\}$$

2. *O espectro contínuo é dado por*

$$\sigma_c(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} (\lambda I - \mathcal{A}) \text{ é injetor, mas} \\ \text{não sobrejetor com imagem densa} \end{array} \right\}.$$

3. *O espectro Residual é dado por*

$$\sigma_r(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} (\lambda I - \mathcal{A}) \text{ é injetor} \\ \text{com imagem não densa.} \end{array} \right\}$$

Note que

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_d(\mathcal{A}) \cup \sigma_c(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A}).$$

Por fim,

Definição 2.25. *O operador resolvente associado a $\mathcal{A}$ no ponto $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ é dado por*

$$R(\lambda, \mathcal{A}) := (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : \mathcal{H} \longrightarrow D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}.$$

Tipo do semigrupo e cota superior do Espectro

A seguir veja um resultado para Teoria de Semigrupos, que assegura que para todo $x \in \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto T(t)x \in \mathcal{H}$ é uma função contínua (Veja [30], p.4).

Proposição 2.5. *Seja $T(t)$ um semigrupo C_0 . Então existe uma constante $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Me^{\omega t}, \quad (\forall t \geq 0). \quad (2.8)$$

Demonstração. Veja [30], p.4. □

Consequentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Me^{n^2 + \omega t}, \quad (\forall t \geq 0).$$

Por essa razão, é interessante encontrar o menor elemento $\omega \in \mathbb{R}$ que verifica (2.8); o que motiva a definição abaixo.

Definição 2.26. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 . Dizemos que $\omega_0(A)$ é o tipo do semigrupo gerado por A quando*

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}{t}.$$

Vejamos outra definição.

Definição 2.27. *Seja $\mathcal{A}$ um operador definido sobre espaço de Banach. A cota superior do espectro de T é dada por*

$$\omega_\sigma = \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

Proposição 2.6. *Seja $\mathcal{A}$ um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 . Então*

$$\omega_\sigma(\mathcal{A}) \leq \omega_0(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Veja [35], p.112. □

Definição 2.28. *Dizemos que um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 possui a Propriedade de Crescimento definido pelo Espectro (PCDE) quando $\omega_\sigma = \omega_0$.*

Propriedades de Semigrupos

Proposição 2.7 (Propriedade de semigrupos). *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo C_0 de contrações e $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de T .*

(i) Para $x \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

(ii) Para todo $x \in \mathcal{H}$, $\int_0^t T(s)x ds \in D(\mathcal{A})$ e

$$\mathcal{A} \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

(iii) Para todo $x \in D(\mathcal{A})$, $T(t)x \in D(\mathcal{A})$, e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x.$$

(iv) Para todo $x \in D(\mathcal{A})$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)\mathcal{A}x = \int_s^t \mathcal{A}T(\tau)x d\tau.$$

Demonstração. Veja [30], p.414-415. □

Observação 2.29.

1. Se $\mathcal{A}$ é fechado, então $R(\lambda, \mathcal{A})$ é fechado.
2. Se $\mathcal{A}$ é fechado, pelo item anterior e pelo teorema do Gráfico Fechado, $R(\lambda, \mathcal{A})$ é linear e limitado.

Teorema 2.30 (Propriedades de Operador Resolvente).

1. Se $z, z' \in \rho(\mathcal{A})$,

$$R(\mathcal{A}; z) - R(\mathcal{A}; z') = (z - z')R(\mathcal{A}; z)R(\mathcal{A}; z'),$$

e

$$R(\mathcal{A}; z)R(\mathcal{A}; z') = R(\mathcal{A}; z')R(\mathcal{A}; z).$$

2. Se $\lambda > 0$, então $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$,

$$R(\mathcal{A}; \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \quad (x \in \mathcal{H}).$$

Demonstração. Veja [20]. □

Teorema de Hille-Yosida

Teorema 2.31. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Banach. Um operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ linear, não limitado é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações C_0 se, e somente se,*

1. $\mathcal{A}$ é fechado e densamente definido.

2. $(0, +\infty) \subset \rho(\mathcal{A})$ e para todo $\lambda > 0$,

$$\|(\lambda - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{\lambda} \quad (\forall \lambda > 0)$$

Demonstração. Veja [30]. □

Teorema de Lumer-Phillips

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Banach e $\mathcal{H}^*$ o dual de $\mathcal{H}$. Denote $x \in \mathcal{H}$, $x^* \in \mathcal{H}^*$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dualidade entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$. Para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$Jx := \{x^* \in \mathcal{H}^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|_{\mathcal{H}}^2 = \|x^*\|_{\mathcal{H}^*}^2\}.$$

Pelo corolário⁴ do Teorema de Hanh-Banach, segue que $Jx \neq \emptyset$.

Definição 2.32. *Um operador linear $\mathcal{A}$ é dissipativo se para todo $x \in D(\mathcal{A})$, existe $x^* \in Jx$ tal que*

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}x, x^* \rangle \leq 0.$$

⁴Seja $\mathcal{H}$ espaço vetorial normado e $x \in \mathcal{H}$. Então existe $x^* \in \mathcal{H}^*$ tal que $\langle x^*, x \rangle = \|x\|_{\mathcal{H}}^2$ e $\|x^*\|_{\mathcal{H}^*} = \|x\|_{\mathcal{H}}$

Proposição 2.8. *Um operador $\mathcal{A}$ é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - A)x\|_{\mathcal{H}} \geq \|x\|_{\mathcal{H}} \quad (\forall x \in D(A))(\forall \lambda > 0). \quad (2.9)$$

Demonstração. Veja [30], p.14. □

A proposição anterior mostrar que se $\mathcal{A}$ é dissipativo, então $\lambda I - \mathcal{A}$ é injetor. Logo, para provar que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ é suficiente provar que $\lambda I - \mathcal{A}$ é sobrejetora. A continuidade é imediata pela proposição 2.8.

Teorema 2.33 (Lumer-Phillips). *Seja A um operador linear densamente definido.*

1. *Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$, então $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de semigrupos C_0 de Contrações sobre $\mathcal{H}$*
2. *Se $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de semigrupo- C_0 de Contrações sobre $\mathcal{H}$, então $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ ($\forall \lambda > 0$) e $\mathcal{A}$ dissipativo. Além disso,*

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}x, x^* \rangle \leq 0 \quad (\forall x \in D(\mathcal{A}))(\forall x^* \in Jx).$$

Demonstração. Veja [30], p.14-15. □

Corolário 2.5. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Banach, e $\mathcal{A}$ um operador linear, fechado e densamente definido. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são dissipativos, então $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de semigrupos C_0 de contrações sobre $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Veja [30], p.15. □

Proposição 2.9. *Seja $\mathcal{A}$ um operador dissipativo em $\mathcal{H}$*

- (a) *Se $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $R(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ para todo $\lambda > 0$.*
- (b) *Se A é fechável então $\overline{\mathcal{A}}$, o fecho de $\mathcal{A}$, é também dissipativo.*
- (c) *Se $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, então $\mathcal{A}$ é fechável.*

Demonstração. Veja [30], p.15-p.16. □

O próximo resultado pode ser encontrado em [30], Teorema 4.6, p. 16.

Proposição 2.10. *Seja $\mathcal{A}$ um operador dissipativo com $R(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Se $\mathcal{H}$ é reflexivo então $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.*

Demonstração. Para mostrar que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$ usaremos o corolário 1.8⁵ de [3]. Assim, tome $x^* \in \mathcal{H}^*$ tal que $\langle x^*, x \rangle = 0$ para todo $x \in D(\mathcal{A})$. Queremos mostrar que $x^* = 0$. Como $R(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ é suficiente mostrar

$$\langle x^*, x - \mathcal{A}x \rangle = 0, \quad (\forall x \in D(\mathcal{A})).$$

o que é equivalente a

$$\langle x^*, \mathcal{A}x \rangle = 0, \quad (\forall x \in D(\mathcal{A})),$$

pois $\langle x^*, x \rangle = 0$. Seja $x \in D(\mathcal{A})$, pelo teorema anterior (a), existe uma sequência x_n tal que

$$x = x_n - (1/n)\mathcal{A}x_n. \quad (2.10)$$

Note que

- $\mathcal{A}x_n = n(x_n - x) \in D(\mathcal{A})$,
- $x_n \in D(\mathcal{A}^2)$, e
- $\mathcal{A}x = \mathcal{A}x_n - (1/n)\mathcal{A}^2x_n$ ou $\mathcal{A}x_n = (I - (1/n)\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}x$.

Como A é dissipativo,

$$\|(I - (1/n)\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq 1.$$

Então,

$$\|\mathcal{A}x_n\|_{\mathcal{H}} \leq \|(I - (1/n)\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{A}x\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{A}x\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.11)$$

Por (2.10) e (2.11),

$$\|x_n - x\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{n} \|\mathcal{A}x_n\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{n} \|\mathcal{A}x\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo, $x_n \rightarrow x$ em $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ é espaço reflexivo e $\{\mathcal{A}x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada,

⁵Corolário 1.8 é usado para demonstrar que um subespaço vetorial $F \subset E$ é denso. Bastando demonstrar que todo funcional linear sobre E que se anula sobre F é nulo sobre E .

existe uma subsequencia $\{\mathcal{A}x_{n_k}\}$ de $\{\mathcal{A}x_n\}$ tal que

$$\mathcal{A}x_{n_k} \rightarrow y \text{ fracamente.}$$

Como $\mathcal{A}$ é fechado segue que $y = \mathcal{A}x$. Finalmente, uma vez que $\langle x^*, z \rangle = 0$ para todo $z \in D(\mathcal{A})$ obtemos

$$\langle x^*, \mathcal{A}x_{n_k} \rangle = n_k \langle x^*, x_{n_k} - x \rangle = 0$$

Fazendo $n_k \rightarrow +\infty$ obtemos $\langle x^*, \mathcal{A}x \rangle = 0$; o que acontece para todo $x \in D(\mathcal{A})$ e portanto $x^* = 0$. Logo, $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. $\square$

Proposição 2.11. *Seja $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear e contínuo com inversa contínua, onde $\mathcal{H}$ um espaço de Banach. Se $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que*

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}, \quad (2.12)$$

então $S + B$ é linear contínua e invertível.

Demonstração. Suponha que $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ seja um operador linear e contínuo com inversa contínua, onde $\mathcal{H}$ um espaço de Banach.

1. Afirmamos que $S + B$ é um operador injetor. De fato, se $(S + B)(x) = 0$, temos $x = -S^{-1}(Bx)$. Então, por (2.12),

$$\|x\|_{\mathcal{H}} \leq \alpha \|x\|_{\mathcal{H}}, \text{ onde } \alpha < 1.$$

A desigualdade só é possível quando $x = 0$.

2. Afirmamos que $S + B$ é um operador sobrejetor. De fato, dado $w \in \mathcal{H}$ e denotaremos por P a aplicação

$$P(v) = S^{-1}w - S^{-1}Bv.$$

Logo, P é um operador linear e limitado. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|P(v) - P(u)\|_{\mathcal{H}} &= \|S^{-1}Bv - S^{-1}Bu\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|Bv - Bu\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \underbrace{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}_{\alpha} \|v - u\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \alpha \|v - u\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

onde $\alpha < 1$. Pelo Teorema de Ponto Fixo, existe um único ponto x tal que $Px = x$, segue que

$$Bx + Sx = w$$

Logo, para todo $w \in \mathcal{H}$, existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $(S + B)x = w$, ou seja, $S + B$ é sobrejetor.

□

Corolário 2.6. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear, dissipativo e com domínio denso em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.*

Demonstração. Como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ é invertível. Note que

$$\lambda I - \mathcal{A} = \mathcal{A}(\lambda \mathcal{A}^{-1} - I). \quad (2.13)$$

Tomando $B = \lambda \mathcal{A}^{-1}$ e $S = -I$. Para $|\lambda| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}$, temos que $B + S = \lambda \mathcal{A}^{-1} - I$ é invertível. Por (2.13), encontramos que $\lambda I - \mathcal{A}$ é também invertível, por ser uma composição de operadores invertíveis; segue que

$$R(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}.$$

Logo, pelo Teorema de Lumer-Phillips, $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo de contrações sobre $\mathcal{H}$.

□

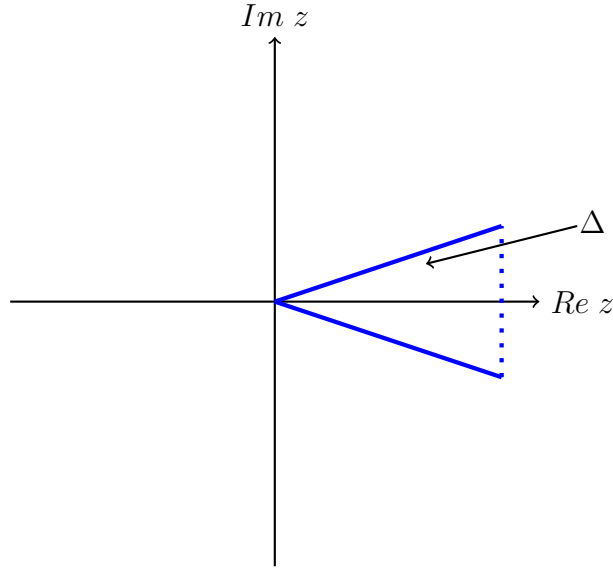


Figura 2.1: Região Δ .

2.6 Semigrupos Analíticos

Nesta seção apresentaremos alguns comentários sobre analiticidade conforme apresentado em [6, 30]. Para tal, considere $T(t)$ um semigrupo- C_0 e o conjunto

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}.$$

Definição 2.34. Para $z \in \Delta$, $T(z)$ um operador linear limitado. A família $\{T(z) : z \in \Delta\}$ é um semigrupo analítico em Δ quando

1. a aplicação $z \in \Delta \mapsto T(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é analítico em Δ ;
2. $T(0) = I$ e $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Delta} T(z)x = x$ ($\forall x \in \mathcal{H}$);
3. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todo $z_1, z_2 \in \Delta$.

Um semigrupo $T(t)$ será dito analítico em algum setor Δ contendo o eixo real não negativo.

Observe que a restrição de um semigrupo analítico ao eixo real é um C_0 -semigrupo. Estamos interessados em estender um dado C_0 -semigrupo para um semigrupo analítico

em algum setor Δ em torno do eixo real não negativo. Em [30] vemos uma caracterização para semigrupo analítico, que enunciamos abaixo.

Teorema 2.35. *Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo uniformemente limitado. Para todo $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de $T(t)$ e assumindo que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $T(t)$ pode ser estendida a um semigrupo analítico em um setor

$$\Delta_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\},$$

e $\|T(z)\|_{\mathcal{L}\mathcal{H}}$ é uniformemente limitado em todo setor $\overline{\Delta_{\delta'}}$ de Δ_δ com $\delta' < \delta$.

2. Existe uma constante C tal que para todo $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$,

$$\|(\sigma + i\tau - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

3. Existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{A}) \supset \Sigma =: \left\{ \lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\} \text{ e} \\ \|(\lambda - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad (\forall \lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0). \end{aligned}$$

4. $T(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e existe uma constante C tal que

$$\|\mathcal{A}T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t} \quad (\forall t > 0).$$

Demonstração. Veja [30], p.61-63. □

Pelo Teorema acima observamos que a região de analiticidade é um setor do plano complexo contido na região $\Sigma \subset \rho(\mathcal{A})$ conforme a figura 2.2.

Por fim, o próximo resultado mais prático para demonstrar, ou não, a analiticidade de um C_0 -semigrupo de contrações.

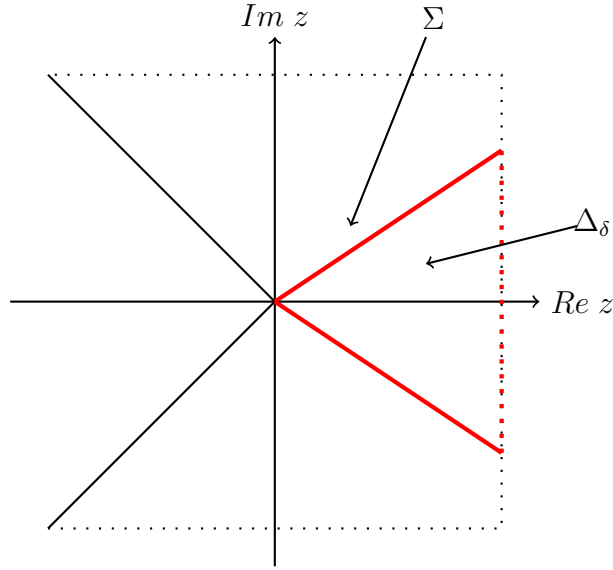


Figura 2.2: Regiões Δ_δ e Σ .

Teorema 2.36. *Seja $\rho(A)$ o conjunto resolvente do operador $\mathcal{A}$. Suponhamos que*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Então, um C_0 -semigrupo de contrações $T(t)$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é analítico se, e somente se,

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Demonstração. Veja [25], p.5. □

2.7 Estabilidade de Semigrupos

Nesta seção comentaremos algumas definições e resultados sobre estabilidade conforme visto em [27, 35]. Para tal, considere ao seguinte problema de Cauchy sobre um espaço de Banach $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} U_t &= \mathcal{A}U \\ U(0) &= U_0 \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é um operador linear o qual é um gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo, $S(t)$, sobre $\mathcal{H}$. Usando a Teoria de Semigrupos, pode-se mostrar a existência e unicidade de solução do problema acima a qual pode ser expressa da forma

$$U(t) = S(t)U_0.$$

Note que na medida que o tempo t avança, o C_0 -semigrupo $S(t)$ determina a estabilidade da solução $U(t)$. Vejamos a definição a seguir.

Definição 2.37.

1. Um C_0 -semigrupo $S(t)$ é dito *assintoticamente estável* (ou *fortemente estável*) se para todo $U_0 \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

2. O C_0 -semigrupo $S(t)$ é dito *exponencialmente estável* quando existem constantes $\gamma > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Me^{-\gamma t}, \quad (\forall t \geq 0).$$

A seguir vejamos uma caracterização para um semigrupo exponencialmente estável.

Teorema 2.38. *Seja $S(t)$ um C_0 -semigrupo com gerador infinitesimal A . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $S(t)$ é exponencialmente estável;
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 0$; e
3. existe $t_0 > 0$ tal que $\|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < 1$.

Demonstração. Veja [27], p.134-135. □

Vale ressaltar que, para $S(t)$ um semigrupo de contrações analítico de um gerador infinitesimal $\mathcal{A}$, uma condição que terá um papel importante na presente tese é dada abaixo:

$$0 \in \rho(\mathcal{A}). \tag{2.14}$$

Visto que, se (2.14) é satisfeita, então $S(t)$ é exponencialmente estável. De fato, como $\rho(\mathcal{A})$ é um conjunto aberto e (2.14) é satisfeita, então existe um numero real $-\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ tal que $-\lambda_0 I + \mathcal{A}$ é também um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ satisfazendo $\|S(t)\| \leq e^{-\lambda_0 t}$, pois $S(t) = T(t)e^{-\lambda_0 t}$. Logo, $S(t)$ é exponencialmente estável. Por essa razão, quando se demonstra analiticidade de um C_0 -semigrupo de contrações usando o Teorema 2.36 obtemos também o decaimento exponencial do sistema associado a este semigrupo

Vejamos um resultado que pode ser encontrado em [27].

Teorema 2.39. *Sejam $S(t)$ um C_0 -semigrupo uniformemente limitado sobre um espaço de Banach $\mathcal{H}$ e $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal. Então*

1. *Se $S(t)$ é assintoticamente estável então $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(\mathcal{A})$.*
2. *Se $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(\mathcal{A})$, e $\sigma_c(\mathcal{A})$ é enumerável, então $S(t)$ é assintoticamente estável.*
3. *Se $R(\lambda; \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ é um operador compacto, então $S(t)$ é assintoticamente estável se, e somente se, $\operatorname{Re} \lambda < 0$ para todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Veja [27], p.130-133. □

Note que, pelo segundo item do teorema anterior, se tivemos a propriedade de $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ então $S(t)$ é fortemente estável. Por fim, apresentaremos uma coletânea de resultados para espaço de Hilbert no que se refere a condições necessárias e suficientes para um C_0 -semigrupo ser exponencialmente estável que serão usados ao longo desta tese.

Teorema 2.40. *Suponha que $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$ é um semigrupo C_0 definido num espaço de Hilbert. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

- (a) $\sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0$
- (b) $\sup_{\operatorname{Re} \lambda \geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$.

Demonstração. Veja [22]. □

Teorema 2.41. *Seja $\rho(\mathcal{A})$ o conjunto resolvente do operador $\mathcal{A}$. Suponha que $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$ é um C_0 -semigrupo de contrações definido num espaço de Hilbert. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$(a) \quad i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$$

$$(b) \quad \limsup_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Demonstração. Veja [25], p.4. □

Capítulo 3

Viga Termoelástica do tipo III

O objetivo deste capítulo, em um primeiro momento, é provar a boa colocação do modelo termoelástico do tipo III. Mais precisamente, estudaremos a existência e unicidade de solução para o problema abaixo:

$$\rho u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + m\theta_{txx} = 0, \quad (x, t) \in]0, \ell[\times]0, +\infty[, \quad (3.1)$$

$$c\theta_{tt} - \kappa\theta_{xx} - \kappa_0\theta_{txx} - mu_{xxt} = 0, \quad (x, t) \in]0, \ell[\times]0, +\infty[. \quad (3.2)$$

Aqui assumimos que ρ , α , c , κ , κ_0 e m são constantes positivas, e consideraremos as seguintes condições de contorno

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0, u(\ell, t) = u_x(\ell, t) = 0, \theta_x(0, t) = \theta_x(\ell, t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad (3.3)$$

e munido das condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), \quad x \in (0, \ell). \quad (3.4)$$

O sistema termoelástico do tipo III foi estudado por muitos autores para provar sua boa colocação e sua estabilidade exponencial quando o tempo vai para o infinito. Neste capítulo provaremos uma propriedade muito importante que é a analiticidade do semi-grupo associando ao sistema (3.1)-(3.4). A principal ferramenta que usaremos é, portanto, a caracterização de semigrupos analíticos dada na seção 2.6: o teorema 2.36. Em vista

dito, o resultado mais importante deste capítulo pode ser resumido na forma Teorema 3.3.

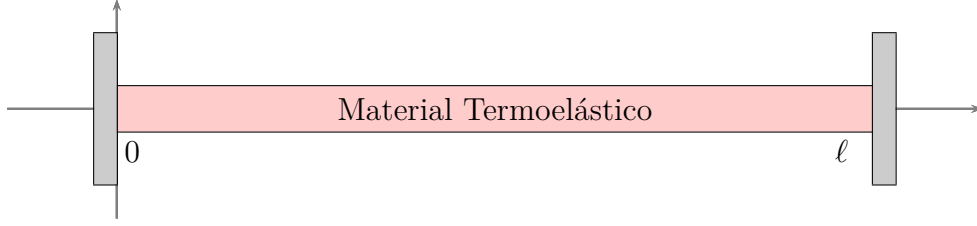


Figura 3.1: Viga totalmente termoeelástica

Para fazer uma aplicação deste conceito, uma vez provado analiticidade, temos que o semigrupo é exponencialmente estável, isto é, existem constantes $\gamma > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$E(t) \leq E(0)e^{-\gamma t}.$$

Observe que se as soluções são funções analíticas, temos que a única solução que pode ser idênticamente zero depois de um tempo finito é a solução nula.

Vale ressaltar que este problema já foi estudado antes em [26], mas a regularidade e abordagem feita aqui é diferente.

3.1 Boa Colocação do Problema

A energia associada ao modelo (3.1)-(3.4) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 + c |\theta_t|^2 + \kappa |\theta_x|^2 \right) dx.$$

De onde temos

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^\ell \kappa_0 |\theta_{xt}|^2 dx. \quad (3.5)$$

Denotando por $u_t = v$, $\theta_t = \Theta$, e $U = (u, v, \theta, \Theta)$. Definimos o espaço de fase $\mathcal{H}$ da seguinte forma

$$\mathcal{H} = H_0^2(0, \ell) \times L^2(0, \ell) \times H_*^1(0, \ell) \times L_*^2(0, \ell),$$

onde

$$L_*^2(0, \ell) = \left\{ g \in L^2(0, \ell); \int_0^\ell g(s) ds = 0 \right\},$$

$$H_*^m(0, \ell) = H^m(0, \ell) \cap L_*^2(0, \ell), \quad m = 1, 2, \dots$$

Note que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert equipado com o produto interno

$$(U, U^*)_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell \left(\rho v \overline{v^*} + \alpha u_{xx} \overline{u_{xx}^*} + c \Theta \overline{\Theta^*} + \kappa \theta_x \overline{\theta_x^*} \right) dx,$$

onde $U = (u, v, \theta, \Theta)$ e $U^* = (u^*, v^*, \theta^*, \Theta^*)$. O operador $\mathcal{A}$, para $\rho = c = 1$ é dado pela seguinte expressão

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ \Theta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha u_{xxx} - m\Theta_{xx} \\ \Theta \\ \kappa \theta_{xx} + \kappa_0 \Theta_{xx} + m v_{xx} \end{pmatrix}.$$

Portanto, o sistema (3.1)-(3.4) pode ser reescrito como

$$U_t - \mathcal{A}U = 0, \quad U(0) = U_0. \quad (3.6)$$

com domínio $D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H}; \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}$ é dado por

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} v \in H_0^2(0, \ell), \quad \boxed{u \in H^3(0, \ell)} \\ -\alpha u_{xx} - m\Theta \in H^2(0, \ell), \\ \Theta \in H_*^1(0, \ell) \\ \kappa \theta + \kappa_0 \Theta + m v \in H_*^2(0, \ell). \end{array} \right. \right\} \quad (3.7)$$

Uma das principais dificuldades deste problema é que o domínio não pode ser representado na forma de um espaço de Sobolev, mas na forma de um espaço vetorial dependendo dos operadores diferenciais da equação. Além disso, podemos verificar que o operador $\mathcal{A}$

definido acima é dissipativo e vale

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = - \int_0^\ell \kappa_0 |\Theta_x|^2 dx \leq 0. \quad (3.8)$$

Para mostrar que o modelo é bem posto usamos o sistema resolvente associado ao modelo

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F. \quad (3.9)$$

Em termos de suas componentes, o sistema resolvente pode ser escrito como

$$i\lambda u - v = f_1, \quad (3.10)$$

$$i\lambda v + \alpha u_{xxxx} + m\Theta_{xx} = f_2, \quad (3.11)$$

$$i\lambda \theta - \Theta = f_3, \quad (3.12)$$

$$i\lambda \Theta - \kappa \theta_{xx} - \kappa_0 \Theta_{xx} - mv_{xx} = f_4, \quad (3.13)$$

verificando a condição de contorno

$$u(0) = u(\ell) = u_x(0) = u_x(\ell) = \theta_x(0) = \theta_x(\ell) = 0. \quad (3.14)$$

Note que as relações (3.8) e (3.9) implicam

$$\int_0^\ell \kappa_0 |\Theta_x|^2 dx = \operatorname{Re} (U, F)_{\mathcal{H}} \quad (3.15)$$

Um dos pontos mais complexo deste capítulo é mostrar a densidade do domínio do operador $\mathcal{A}$. Para esta finalidade, usaremos uma adaptação da Proposição 2.10 que fornece condições suficientes para $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ e pode se encontrado em [30].

Teorema 3.1. *Seja $\mathcal{A}$ um operador dissipativo verificando $R(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Se o espaço $\mathcal{H}$ é reflexivo então $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.*

Demonstração. Tome $x^* \in \mathcal{H}$ tal que $(x^*, x) = 0$ para todo $x \in D(\mathcal{A})$. Queremos mostrar que $x^* = 0$. Como $R(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ é suficientemente mostrar

$$(x^*, \mathcal{A}x) = 0, \quad (\forall x \in D(\mathcal{A})).$$

Para cada $x \in D(\mathcal{A})$, existe uma sequência x_n tal que

$$x = x_n - (1/n)\mathcal{A}x_n. \quad (3.16)$$

Note que

- $\mathcal{A}x_n = n(x_n - x) \in D(\mathcal{A})$,
- $x_n \in D(\mathcal{A}^2)$, e
- $\mathcal{A}x = \mathcal{A}x_n - (1/n)\mathcal{A}^2x_n$ ou $\mathcal{A}x_n = (I - (1/n)\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}x$.

Como A é dissipativo,

$$\|(I - (1/n)\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq 1.$$

Então,

$$\|\mathcal{A}x_n\|_{\mathcal{H}} \leq \|(I - (1/n)\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{A}x\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{A}x\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.17)$$

Por (3.16) e (3.17),

$$\|x_n - x\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{n} \|\mathcal{A}x_n\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{n} \|\mathcal{A}x\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo, $x_n \rightarrow x$ em $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ é espaço reflexivo e $\{\mathcal{A}x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, existe uma subsequência $\{\mathcal{A}x_{n_k}\}$ de $\{\mathcal{A}x_n\}$ tal que

$$\mathcal{A}x_{n_k} \rightarrow y \text{ fracamente.}$$

Como $\mathcal{A}$ é fechado segue que $y = \mathcal{A}x$. Finalmente, uma vez que $(x^*, z) = 0$ para todo $z \in D(\mathcal{A})$ e $n_k(x_{n_k} - x) \in D(\mathcal{A})$ obtemos

$$(x^*, \mathcal{A}x_{n_k}) = n_k (x^*, x_{n_k} - x) = 0.$$

Fazendo $n_k \rightarrow +\infty$ obtemos $(x^*, \mathcal{A}x) = 0$; o que acontece para todo $x \in D(\mathcal{A})$ e portanto $x^* = 0$. Logo, $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.

□

Convém observar que na demonstração da Proposição 2.10 considera a hipótese $R(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$, mas a mesma demonstração é válida para hipótese $R(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$, uma vez que sua

demonstração faz uso do corolário 1.8, p.8 de [3] provando que $\langle x^*, Ax \rangle = 0$ implica que $x^* = 0$ de onde segue a densidade de $D(\mathcal{A})$ sob o espaço de fase.

Finalmente, estamos em condições de provar o resultado principal deste capítulo que pode ser resumido na forma do Teorema a seguir.

Teorema 3.2. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo- C_0 de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$ sobre o espaço $\mathcal{H}$. Além disso, para todo dado inicial $U_0 \in D(\mathcal{A})$ existe uma única solução do problema (3.6) verificando*

$$U \in C^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty[, D(\mathcal{A})).$$

Demonstração. Como o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo. É suficiente mostrar que o domínio $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$ e que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Para este propósito, provaremos que para todo $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ existe um único $U = (u, v, \theta, \Theta) \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U = F$, ou equivalentemente em termos de suas componentes,

$$-v = f_1, \tag{3.18}$$

$$\alpha u_{xxxx} + m\Theta_{xx} = f_2, \tag{3.19}$$

$$-\Theta = f_3, \tag{3.20}$$

$$-\kappa\theta_{xx} - \kappa_0\Theta_{xx} - mv_{xx} = f_4. \tag{3.21}$$

De fato, substituindo a equação (3.20) em (3.19), e depois as equações (3.18) e (3.20) em (3.21) obtemos

$$\alpha u_{xxxx} = -mf_3'' + f_2, \tag{3.22}$$

$$-\kappa\theta_{xx} = -\kappa_0 f_3'' + mf_1'' + f_4. \tag{3.23}$$

Note que o sistema anterior é desacoplado. Então, usando as condições de contorno obtemos

$$\alpha u_{xxxx} = -mf_3'' + f_2 \in H^{-1}(0, \ell), \quad (3.24)$$

$$u(0) = u(\ell) = u_x(0) = u_x(\ell) = 0, \quad (3.25)$$

$$-\kappa \theta_{xx} = -\kappa_0 f_3'' + mf_1'' + f_4 \in H^{-1}(0, \ell), \quad (3.26)$$

$$\theta_x(0) = \theta_x(\ell) = 0. \quad (3.27)$$

Usando o Lema de Lax-Milgran, não é difícil de verificar que o sistema (3.26)-(3.27) possui uma única solução $\theta \in H_*^1(0, \ell)$ verificando

$$-\kappa \theta_{xx} = mf_1'' - \kappa_0 f_3'' + f_4 \in L^2(0, \ell). \quad (3.28)$$

A seguir resolvemos (3.22)-(3.25). Para isto introduzimos a seguinte forma sesquilinear

$$a(u, v) = \int_0^\ell \alpha u_{xx} \overline{v_{xx}} dx.$$

Note que $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica, continua e coerciva sobre o espaço $H_0^2(0, \ell) \times H_0^2(0, \ell)$. Então, a forma linear

$$T(v) = \int_0^\ell (mf_3' \overline{v_x} + f_2 \overline{v}) dx,$$

verifica $T \in H^{-2}$. Portanto, pelo Lema de Lax-Milgran, existe uma única solução $u \in H^3(0, \ell)$ tal que

$$\int_0^\ell \alpha u_{xx} \overline{v_{xx}} dx = \int_0^\ell (mf_3' \overline{v_x} + f_2 \overline{v}) dx, \quad \forall v \in H_0^2(0, \ell). \quad (3.29)$$

Tomando $v \in C_0^\infty(0, \ell)$ temos que u verifica (3.22) no sentido das distribuições e

$$\alpha u_{xxxx} + mf_3'' = f_2 \in L^2(0, \ell). \quad (3.30)$$

Usando (3.28)-(3.30) concluímos que $U = (u, v, \theta, \Theta) \in D(\mathcal{A})$. Logo, $R(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$; e como $\mathcal{H}$ é reflexivo e $\mathcal{A}$ é dissipativo, então $D(\mathcal{A})$ é denso, por causa do Teorema 3.1. Portanto, o resultado segue pelo Corolário 2.6, ou seja, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um

semigrupo- C_0 de contrações. □

3.2 Estabilidade Forte

Nosso ponto de partida é provar a estabilidade forte que resumimos na forma da seguinte Proposição:

Proposição 3.1 (Estabilidade Forte). *Com as notações da seção 3.1, o operador $\mathcal{A}$ verifica*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Denotemos por

$$\mathcal{N} = \{s \in \mathbb{R}^+ :] - is, is[\subset \rho(\mathcal{A})\}.$$

Note que $\mathcal{N} \neq \emptyset$, pois $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Fazendo

$$\sigma = \sup \mathcal{N}.$$

Temos apenas duas possibilidades: $\sigma = +\infty$ o que implica que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A})$, ou que $0 < \sigma < \infty$. Suponhamos por contradição que $\sigma < \infty$. Então existe uma sequência $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lambda_n \rightarrow \sigma < \infty$. Além disso, verifica

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \rightarrow \infty.$$

Portanto existe uma sequência $\{f_n\} \subseteq \mathcal{H}$ verificando $\|f_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ e $\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}f_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$. Denotemos por

$$\tilde{U}_n = (i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}f_n \quad \Rightarrow \quad f_n = i\lambda_n \tilde{U}_n - \mathcal{A}\tilde{U}_n$$

e $U_n = \frac{\tilde{U}_n}{\|\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}}}$, $F_n = \frac{f_n}{\|\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}}}$ é simples verificar que U_n satisfaz

$$i\lambda_n U_n - \mathcal{A}U_n = F_n \rightarrow 0. \tag{3.31}$$

Como $\|\mathcal{A}U_n\|_{\mathcal{H}} \leq C$, segue que U_n é limitado em $D(\mathcal{A})$. Usando (3.15) temos

$$(\Theta_n, \theta_n) \rightarrow (0, 0) \quad \text{forte em} \quad H^1(0, \ell) \times H^1(0, \ell).$$

Usando a equação (3.13) concluímos que

$$v_n \rightarrow 0 \quad \text{forte em} \quad H^1(0, \ell).$$

Multiplicando a equação (3.11) por u_n e aplicando as convergências anteriores obtemos

$$u_n \rightarrow 0 \quad \text{forte em} \quad H^2(0, \ell).$$

Portanto

$$U_n = (u_n, v_n, \theta_n, \Theta_n) \rightarrow (0, 0, 0, 0) \quad \text{forte em} \quad \mathcal{H}.$$

O que contradiz $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

□

Convém observar que a proposição anterior implica que a solução do sistema tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = 0.$$

O que significa que o sistema tende a zero para um tempo suficientemente grande.

3.3 Analiticidade do Semigrupo

Antes de provarmos a analiticidade o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.4) vamos precisar de alguns resultados técnicos. Para tal fim, assuma que $U = (u, v, \theta, \Theta) \in D(\mathcal{A})$ solução da equação resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$, onde $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$.

Lema 3.3.1. *Sob as condições anteriores,*

$$\int_0^\ell |v_x|^2 dx \leq C |\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.32)$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração. Como $v \in H_0^2(0, \ell)$, segue pelo teorema 2.16 e usando a equação (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\ell |v_x|^2 dx &\leq C \left(\int_0^\ell |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\ell |v_{xx}|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int_0^\ell |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\ell |\lambda u_{xx} - f_{1,xx}|^2 dx \right)^{1/2}, \\ &\leq C |\lambda| \left(\int_0^\ell |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\ell |u_{xx}|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

De onde segue (3.32). □

Proposição 3.2 (1ª Estimativa). *Suponha as condições anteriores, então para todo $\epsilon > 0$,*

$$\int_0^\ell |\lambda \theta_x|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.33)$$

$$\int_0^\ell |\lambda \Theta|^2 dx \leq 2\epsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.34)$$

onde C e C_ϵ são constantes positivas.

Demonstração.

1. Usando (3.12) na equação (3.15) segue a primeira desigualdade.

$$\int_0^\ell |\lambda \theta_x|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Portanto é válido (3.33).

2. Multiplicando a equação (3.13) por $\overline{i\lambda\Theta}$ e tomando a parte real segue

$$\int_0^\ell |\lambda \Theta|^2 dx - \operatorname{Re} i\lambda \int_0^\ell \kappa \theta_x \overline{\Theta}_x dx - \operatorname{Re} i\lambda \int_0^\ell m v_x \overline{\Theta}_x dx = \operatorname{Re} \int_0^\ell f_4 \overline{i\lambda\Theta} dx.$$

Usando a equação (3.12) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\ell |\lambda \Theta|^2 dx &= \underbrace{\int_0^\ell \kappa |\Theta_x|^2 dx + \operatorname{Re} \int_0^\ell \kappa f_3' \overline{\Theta}_x dx - \operatorname{Re} \left(i \lambda \int_0^\ell f_4 \overline{\Theta} dx \right)}_{:=J_1} \\ &\quad + \underbrace{\operatorname{Re} i \lambda \int_0^\ell m v_x \overline{\Theta}_x dx}_{:=J_2}. \end{aligned}$$

Então,

$$\int_0^\ell |\lambda \Theta|^2 dx = J_1 + J_2 \quad (3.35)$$

Pela desigualdade de Young (2.1) e pela equação (3.15),

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq C \|\Theta_x\|_{L^2(0,\ell)} + C \|F\|_{\mathcal{H}} \|\Theta_x\|_{L^2(0,\ell)} + C |\lambda| \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Novamente, pela desigualdade de Young (2.1) e pela equação (3.15), e usando a desigualdade (3.32) do Lema (3.3.1),

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq C |\lambda| \|v_x\|_{L^2(0,\ell)} \|\Theta_x\|_{L^2(0,\ell)}, \\ &\leq 2\epsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Finalmente, usando as desigualdades anteriores na relação (3.35) obtemos (3.34).

Portanto segue nossa conclusão para λ grande.

□

Para encontrar as limitações que implica na analiticidade do semigrupo, introduzimos o funcional

$$\mathcal{J}(x) = \frac{1}{2} \left(|v(x)|^2 + \alpha |u_{xx}(x)|^2 \right).$$

Sob estas notações temos

Lema 3.3.2. *Sob as condições anteriores, então para todo $\epsilon > 0$,*

$$\left| \frac{\ell}{2} \mathcal{J}(0) + \frac{\ell}{2} \mathcal{J}(\ell) - \int_0^\ell \left(\mathcal{J}(x) + \alpha |u_{xx}|^2 \right) dx \right| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \int_0^\ell \mathcal{J}(x) dx \quad (3.36)$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração. Multiplicando (3.11) por $q\overline{u_x}$ onde $q(x) = x - \frac{\ell}{2}$ e integrando por partes obtemos

$$i\lambda \int_0^\ell v q \overline{u_x} dx + \int_0^\ell \alpha u_{xxx} q \overline{u_x} dx + \int_0^\ell m \Theta_{xx} q \overline{u_x} dx = \int_0^\ell f_2 q \overline{u_x} dx.$$

Usando a equação (3.10) e as condições de contorno (3.14) temos

$$-\frac{1}{2} \int_0^\ell q \frac{d}{dx} |v|^2 dx - \int_0^\ell \alpha (u_{xxx} \overline{u_x} + u_{xxx} q \overline{u_{xx}}) dx - \int_0^\ell m \Theta_x (q \overline{u_x})_x dx = \int_0^\ell q (v \overline{f_{1,x}} + f_2 \overline{u_x}) dx.$$

Integrando por partes obtemos

$$-\frac{1}{2} \int_0^\ell q \frac{d}{dx} |v|^2 dx + \int_0^\ell \alpha |u_{xx}|^2 dx - \underbrace{\int_0^\ell q \frac{d}{dx} (\alpha |u_{xx}|^2) dx}_{:=I_1} - \underbrace{\int_0^\ell m \Theta_x (q \overline{u_x})_x dx}_{:=I_2} = \int_0^\ell q (v \overline{f_{1,x}} + f_2 \overline{u_x}) dx.$$

Assim,

$$-\frac{1}{2} \int_0^\ell q \frac{d}{dx} (|v|^2 + \alpha |u_{xx}|^2) dx + \int_0^\ell \alpha |u_{xx}|^2 dx = I_1 + I_2. \quad (3.37)$$

Note que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \int_0^\ell |u_{xx}|^2 dx, \\ |I_2| &\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Finalmente, passando o valor absoluto em (3.37) e depois usando as desigualdades anteriores obtemos

$$\left| - \int_0^\ell q \frac{d}{dx} \mathcal{J}(x) dx + \int_0^\ell |u_{xx}|^2 dx \right| \leq C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \int_0^\ell |u_{xx}|^2 dx.$$

De onde segue (3.36). □

A proposição a seguir é necessária para dar significado $u_{xxx}(0)$ e $u_{xxx}(\ell)$ uma vez que para aplicar o Teorema 2.10 precisaríamos de uma regularidade maior. Porém, neste trabalho $u \in H^3(0, \ell)$.

Lema 3.3.3. *Suponha as condições anteriores, então para todo $\epsilon > 0$,*

$$\left| u_{xx}(0) - \frac{u_{xxx}(0)}{i\sigma} \right| \leq \epsilon |u_{xx}(0)| + \epsilon \left| \frac{u_{xxx}(0)}{i\sigma} \right| + C \|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2} + \frac{1}{\sigma^{1/2}} \|F\|. \quad (3.38)$$

$$\left| u_{xx}(\ell) - \frac{u_{xxx}(\ell)}{i\sigma} \right| \leq \epsilon |u_{xx}(\ell)| + \epsilon \left| \frac{u_{xxx}(\ell)}{i\sigma} \right| + C \|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2} + \frac{1}{\sigma^{1/2}} \|F\|. \quad (3.39)$$

onde C é uma contante positiva e σ suficientemente grande.

Demonstração. Provaremos aqui a relação (3.38). A prova de (3.39) é análoga e a obtemos considerando a transformação $\tilde{u}(x) = u(\ell - x)$. Usando as equações (3.10) e (3.11) temos

$$u_{xxxx} - \sigma^4 u = G, \quad \text{com} \quad G = \frac{1}{\alpha} (i\lambda f_1 + f_2 - m\Theta_{xx}), \quad \sigma = \left(\frac{\lambda^2}{\alpha} \right)^{1/4}. \quad (3.40)$$

Denotando o operador derivada como $D = \frac{d}{dx}$, a equação anterior pode ser reescrita como

$$(D^4 - \sigma^4)u = G, \quad \Rightarrow \quad (D^2 + \sigma^2) \underbrace{(D - \sigma)(D + \sigma)u}_{:=\varphi} = G. \quad (3.41)$$

Note que

$$\varphi = (D - \sigma) \underbrace{(D + \sigma)u}_{:=z} = u_{xx} - \sigma^2 u. \quad (3.42)$$

Como $u_x(0) = u(0) = u(\ell) = u_x(\ell) = 0$ temos

$$\varphi(0) = u_{xx}(0), \quad \varphi_x(0) = u_{xxx}(0), \quad \varphi(\ell) = u_{xx}(\ell), \quad \varphi_x(\ell) = u_{xxx}(\ell). \quad (3.43)$$

Além do mais (3.41) implica que φ verifica

$$(D^2 + \sigma^2)\varphi = G.$$

A solução geral do modelo é dado por

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= C_1 e^{i\sigma x} + C_2 e^{-i\sigma x} + \int_0^x e^{-i\sigma s} G(s) ds \frac{e^{i\sigma x}}{2i\sigma} - \int_0^x e^{i\sigma s} G(s) ds \frac{e^{-i\sigma x}}{2i\sigma} \\ &:= J_1 + J_2 + J_3 + J_4,\end{aligned}\quad (3.44)$$

onde

$$C_1 = \frac{i\sigma\varphi(0) + \varphi_x(0)}{2i\sigma}, \quad C_2 = \frac{i\sigma\varphi(0) - \varphi_x(0)}{2i\sigma} \quad \Rightarrow \quad |C_i| \leq \frac{|\varphi(0)|}{2} + \frac{|u_{xxx}(0)|}{2\sigma}, \quad (3.45)$$

para $i = 1, 2$. Analisaremos caso a caso.

De (3.42) $z = (D + \sigma)u = u_x + \sigma u$ verifica $z_x - \sigma z = \varphi$ portanto z pode ser escrita como

$$z(x) = e^{\sigma(x-\ell)} z(\ell) + \int_\ell^x e^{\sigma(x-s)} \varphi(s) ds, \quad (3.46)$$

Tomando $x = 0$ in (3.46), uma vez que $z(\ell) = u_x(\ell) + \sigma u(\ell) = 0$ e $z(0) = 0$, obtemos

$$0 = \int_0^\ell e^{-\sigma s} (J_1(s) + J_2(s) + J_3(s) + J_4(s)) ds. \quad (3.47)$$

A seguir estimaremos cada termo da relação (3.47)

$$\begin{aligned}\int_0^\ell e^{-\sigma s} (J_1(s) + J_2(s)) ds &= C_1 \int_0^\ell e^{\sigma(-1+i)s} ds + C_2 \int_0^\ell e^{-\sigma(1+i)s} ds \\ &= \frac{C_1}{\sigma(-1+i)} (e^{-\ell\sigma+i\ell\sigma} - 1) - \frac{C_2}{\sigma(1+i)} (e^{-\ell\sigma-i\ell\sigma} - 1) \\ &= K_2 - \frac{C_1}{\sigma(-1+i)} + \frac{C_2}{\sigma(1+i)},\end{aligned}$$

onde

$$K_2 = \frac{C_1 e^{-\ell\sigma+i\ell\sigma}}{\sigma(-1+i)} - \frac{C_2 e^{-\ell\sigma-i\ell\sigma}}{\sigma(1+i)}, \quad \Rightarrow \quad |K_2| \leq \frac{ce^{-\ell\sigma}}{\sigma} (\sigma|\varphi(0^+)| + |u_{xxx}(0^+)|). \quad (3.48)$$

Aqui usamos que $\varphi_x(0) = u_{xxx}(0)$. Lembrando a definição de C_1 e C_2 em (3.45) temos

$$\begin{aligned} \int_0^\ell e^{-\sigma s} (J_1 + J_2) ds &= K_2 - \frac{i\sigma\varphi(0) + u_{xxx}(0)}{2i\sigma^2(-1+i)} + \frac{i\sigma\varphi(0) - u_{xxx}(0)}{2i\sigma^2(1+i)} \\ &= K_2 + \frac{\varphi(0)}{2\sigma} - \frac{u_{xxx}(0^+)}{2i\sigma^2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell e^{-\sigma s} J_3(s) ds &= \frac{1}{2i\sigma} \int_0^\ell e^{-\sigma(1-i)s} \int_0^s e^{-i\sigma\tau} G(\tau) d\tau ds \\ &= \frac{1}{-2i\sigma^2(1-i)} \int_0^\ell \int_0^s e^{-i\sigma\tau} G(\tau) d\tau d(e^{-\sigma(1-i)s}) \\ &= \frac{-e^{-\ell\sigma+i\ell\sigma}}{2i\sigma^2(1-i)} \int_0^\ell e^{-i\sigma\tau} G(\tau) d\tau + \frac{1}{2i\sigma^2(1-i)} \int_0^\ell e^{-\sigma s} G(s) ds. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Analogamente,

$$\int_0^\ell e^{-\sigma s} J_4(s) ds = \frac{e^{-\ell\sigma-i\ell\sigma}}{2i\sigma^2(1+i)} \int_0^\ell e^{i\sigma\tau} G(\tau) d\tau - \frac{1}{2i\sigma^2(1+i)} \int_0^\ell e^{-\sigma s} G(s) ds. \quad (3.51)$$

Somando as identidades anteriores temos

$$\int_0^\ell e^{-\sigma s} (J_3(s) + J_4(s)) ds = K_3 + \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^\ell e^{-\sigma s} G(s) ds, \quad (3.52)$$

onde

$$K_3 = \frac{e^{-\ell\sigma-i\ell\sigma}}{2i\sigma^2(1+i)} \int_0^\ell e^{-i\sigma\tau} G(\tau) d\tau - \frac{e^{-\ell\sigma+i\ell\sigma}}{2i\sigma^2(1-i)} \int_0^\ell e^{-i\sigma\tau} G(\tau) d\tau.$$

Lembrando a definição de G descrita em (3.40) e usando $\|i\lambda f_1\| \leq C\sigma^2\|F\|$ temos

$$|K_3| \leq C \frac{e^{-\ell\sigma}}{\sigma^2} \left(\sigma^2 \|F\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \right). \quad (3.53)$$

Integrando por partes e lembrando $f_1(0) = f_1(\ell) = f_1'(0) = f_1'(\ell) = 0$, $\Theta_x(0) = \Theta_x(\ell) = 0$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^\ell e^{-\sigma s} G(s) ds &= \frac{1}{2\sigma^2\alpha} \int_0^\ell e^{-\sigma s} [i\lambda f_1 + f_2 - m\Theta_{xx}] ds \\ &= \underbrace{\frac{i\lambda}{2\alpha\sigma^4} \int_0^\ell e^{-\sigma s} f_{1,ss}(s) ds + \frac{1}{2\sigma^2\alpha} \int_0^\ell e^{-\sigma s} f_2(s) ds}_{:=I_2} - \underbrace{\frac{1}{2\sigma\alpha} \int_0^\ell e^{-\sigma s} [m\Theta_x] ds}_{I_3}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz obtemos

$$|I_2| \leq \frac{C}{\sigma^{5/2}} [1 - e^{-\ell_0 \sigma}]^{1/2} (\|f_1\|_2 + \|f_2\|), \quad |I_3| \leq \frac{C}{\sigma^{3/2}} \|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2}. \quad (3.54)$$

Para λ grande. Portanto, aplicando (3.52) obtemos

$$\int_0^\ell e^{-\sigma s} (J_3(s) + J_4(s)) \, ds = K_3 + I_2 + I_3, \quad (3.55)$$

para λ grande. Substituindo as desigualdades (3.49) e (3.55) na relação (3.47) obtemos

$$-\sigma u(0) = K_2 + \frac{\varphi(0)}{2\sigma} - \frac{u_{xxx}(0^+)}{2i\sigma^2} + K_3 + \frac{i\lambda}{2\alpha\sigma^3} f_1(0) + I_2 + I_3. \quad (3.56)$$

Como $\frac{i\lambda}{2\alpha\sigma^3} = i\frac{\sigma}{2\lambda}$ e $\varphi = u_{xx} - \sigma^2 u$, a identidade (3.56) pode ser reescrita como

$$0 = K_2 + \frac{u_{xx}(0)}{2\sigma} - \frac{u_{xxx}(0^+)}{2i\sigma^2} + K_3 + I_2 + I_3.$$

Portanto temos

$$0 = K_2 + \frac{u_{xx}(0)}{2\sigma} - \frac{u_{xxx}(0^+)}{2i\sigma^2} + K_3 + I_2 + I_3. \quad (3.57)$$

Usando (3.48), (3.53) e (3.54) temos

$$\begin{aligned} \left| u_{xx}(0) - \frac{u_{xxx}(0)}{i\sigma} \right| &\leq 2\sigma(|K_2| + |K_3| + |I_2| + |I_3|) \\ &\leq \epsilon |u_{xx}(0)| + \epsilon \left| \frac{u_{xxx}(0)}{i\sigma} \right| + C\|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2} + \frac{1}{\sigma^{1/2}} \|F\|. \end{aligned}$$

Para λ grande (σ grande). De onde segue o resultado. $\square$

O seguinte Lema ocupa um papel importante na demonstração do nosso resultado.

Lema 3.3.4. *Sob as mesmas condições anteriores temos que a solução do sistema resolvente verifica*

$$\int_0^\ell |u_{xxx}|^2 dx \leq C|\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração. Multiplicando a equação (3.11) por $\overline{u_{xx}}$ e integrando por partes

$$i\lambda \int_0^\ell v_x \overline{v_x} dx + [\alpha u_{xxx} \overline{u_{xx}}]_0^\ell - \int_0^\ell \alpha |u_{xxx}|^2 dx + \int_0^\ell m \Theta_x \overline{u_{xxx}} dx = \int_0^\ell f_2 \overline{u_{xx}} dx.$$

Usando (3.10),

$$\int_0^\ell \alpha |u_{xxx}|^2 dx = \int_0^\ell |v_x|^2 dx - \int_0^\ell (v_x \overline{f_{1,x}} + f_2 \overline{u_{xx}}) dx + [\alpha u_{xxx} \overline{u_{xx}}]_0^\ell - \int_0^\ell m \Theta_x \overline{u_{xxx}} dx.$$

Usando a Proposição 3.2 e a equação (3.15)

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \alpha |u_{xxx}|^2 dx &= \underbrace{\int_0^\ell |v_x|^2 dx}_{\text{Usando (3.32)}} - \underbrace{\int_0^\ell (v_x \overline{f_{1,x}} + f_2 \overline{u_{xx}}) dx}_{\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}} + [\alpha u_{xxx} \overline{u_{xx}}]_0^\ell - \underbrace{\int_0^\ell m \Theta_x \overline{u_{xxx}} dx}_{\leq C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \|u_{xxx}\|^2} \\ &\leq C |\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \left| \alpha u_{xxx} \overline{u_{xx}} \right|_0^\ell + \epsilon \int_0^\ell |u_{xxx}|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Pelo Lema 3.3.2 obtemos

$$|u_{xx}(0)| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.59)$$

Agora, pelo Lema 3.3.3 obtemos

$$\left| \frac{u_{xxx}(0)}{i\sigma} \right| \leq C |u_{xx}(0)| + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|^{1/4}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad (3.60)$$

Multiplicando a desigualdade (3.60) por $|u_{xx}(0)|$ e lembrando que $\sigma = \left(\frac{\lambda^2}{\alpha}\right)^{1/4}$ temos

$$\begin{aligned} |u_{xxx}(0) u_{xx}(0)| &\leq C |\lambda|^{1/2} |u_{xx}(0)|^2 + C |\lambda|^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} |u_{xx}(0)| \\ &\quad + C |\lambda|^{1/4} \|F\|_{\mathcal{H}} |u_{xx}(0)|. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Substituindo a desigualdade (3.59) em (3.61) obtemos

$$\begin{aligned} |u_{xxx}(0)u_{xx}(0)| &\leq C|\lambda|^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C|\lambda|\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

para λ suficientemente grande. Analogamente, obtemos

$$|u_{xxx}(\ell)u_{xx}(\ell)| \leq C|\lambda|\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para λ suficientemente grande. Portanto, substituindo as desigualdades acima na equação (3.58) concluímos nosso resultado. $\square$

A seguinte Proposição estima parte da energia potencial elástica, que é um ponto importante na prova da analiticidade.

Proposição 3.3 (2ª Estimativa). *Suponha as condições anteriores, então para todo $\epsilon > 0$,*

$$\int_0^\ell |\lambda u_{xx}|^2 dx \leq 2\epsilon|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde C_ϵ é uma constante positiva.

Demonstração. Substituindo a equação (3.10) na equação (3.13), e depois multiplicando a equação por $\overline{i\lambda u_{xx}}$ temos

$$-\int_0^\ell i\lambda\Theta\overline{i\lambda u_{xx}}dx - \underbrace{\int_0^\ell (\kappa\theta_{xx} + \kappa_0\Theta_{xx})\overline{i\lambda u_{xx}}dx}_{:=J} - \int_0^\ell m|\lambda u_{xx}|^2 dx = \int_0^\ell (f_4 + mf_1'')\overline{i\lambda u_{xx}}dx.$$

Assim, tomando a parte real obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\ell m|\lambda u_{xx}|^2 dx &= -\operatorname{Re} \int_0^\ell i\lambda\Theta\overline{i\lambda u_{xx}}dx - \operatorname{Re} J - \operatorname{Re} \int_0^\ell (f_4 + mf_1'')\overline{i\lambda u_{xx}}dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^\ell m|\lambda u_{xx}|^2 dx + C \int_0^\ell |\lambda\Theta|^2 dx + C|\lambda|\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} - \operatorname{Re} J. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Então,

$$\int_0^\ell |\lambda u_{xx}|^2 dx \leq C \int_0^\ell |\lambda\Theta|^2 dx - \operatorname{Re} J + \epsilon|\lambda|\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.63)$$

Usando a desigualdade de Young (2.1) e a equação (3.15) obtemos

$$\begin{aligned}
|J| &= \left| \int_0^\ell (\kappa\theta_x + \kappa_0\Theta_x) \overline{i\lambda u_{xxx}} dx \right|, \\
&\leq c_\epsilon |\lambda| \|\kappa\theta_x + \kappa_0\Theta_x\|_{L^2}^2 + \epsilon |\lambda| \|u_{xxx}\|_{L^2}^2, \\
&\leq c_\epsilon |\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon |\lambda| \|u_{xxx}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Usando Proposição 3.2 e o Lema 3.3.4 obtemos

$$|J| \leq \epsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.64)$$

Finalmente, usando a relação (3.64) em (3.63) e usando o Proposição 3.2 segue o resultado. $\square$

Proposição 3.4 (3^a Estimativa). *Sob as mesmas condições anteriores temos que a solução do sistema resolvente verifica para todo $\epsilon > 0$,*

$$\int_0^\ell |\lambda v|^2 dx \leq 2\epsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

onde C_ϵ é uma contante positiva.

Demonstração. Multiplicando a equação (3.11) por $\overline{i\lambda v}$ e integrando sobre o intervalo $(0, \ell)$ temos

$$\int_0^\ell |\lambda v|^2 dx = \underbrace{\int_0^\ell \alpha i \lambda u_{xx} \overline{v_{xx}} dx}_{:=I_3} + \underbrace{\int_0^\ell i \lambda m \Theta \overline{v_{xx}} dx}_{:=I_4} - \underbrace{\int_0^\ell f_2 \overline{i\lambda v} dx}_{:=I_5}. \quad (3.65)$$

Pela Proposição 3.3,

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \int_0^\ell \alpha i \lambda u_{xx} \overline{(i\lambda u_{xx} - f_{1,xx})} dx \\
&\leq C \int_0^\ell |\lambda u_{xx}|^2 dx + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \epsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Agora, pelas Proposições 3.2 e 3.3,

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \int_0^\ell mi\lambda\Theta(\overline{i\lambda u_{xx} - f_{1,xx}})dx \\
&\leq C \int_0^\ell |\lambda\Theta|^2 + |\lambda u_{xx}|^2 dx + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \epsilon|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$I_5 \leq \epsilon \int_0^\ell |\lambda v|^2 dx + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Usando as desigualdades anteriores em (3.65) segue o resultado. $\square$

Finalmente, estamos em condições de mostrar o principal resultado desta tese.

Teorema 3.3. *O semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.4) é analítico.*

Demonstração. Note que da Proposição 3.1, $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Agora pelas Proposição 3.2, Proposição 3.3 e Proposição 3.4 obtemos

$$\begin{aligned}
|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^\ell (|\lambda v|^2 + \alpha|\lambda u_{xx}|^2 + |\lambda\Theta|^2 + \kappa|\lambda\theta|^2)dx \\
&\leq 2\epsilon|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

assim temos que $|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2$. De onde segue o resultado. $\square$

Capítulo 4

Viga Termoelástica do tipo III com dissipação localizada

O objetivo inicial deste capítulo é provar a boa colocação do modelo para viga termoelástica do tipo III com dissipação localizada. Mas precisamente, estudaremos a existência e unicidade de solução para o modelo abaixo,

$$\rho u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + m\theta_{txx} = 0, \quad (x, t) \in I \times]0, +\infty[. \quad (4.1)$$

$$c\theta_{tt} - \kappa\theta_{xx} - \kappa_0\theta_{txx} - mu_{xxt} + \delta\theta = 0, \quad (x, t) \in]\ell_0, \ell[\times]0, +\infty[, \quad (4.2)$$

onde $I =]0, \ell_0[\cup]\ell_0, \ell[$. Aqui assumimos que ρ , α , c , κ , κ_0 e δ são constantes positivas e as seguintes condições de contorno,

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \quad \theta_x(\ell_0, t) = \theta_x(\ell, t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (4.3)$$

Além disso, consideraremos também as seguintes condições de transmissão,

$$\begin{aligned} u(\ell_0^-) &= u(\ell_0^+), & M(\ell_0^-) &= M(\ell_0^+), \\ u_x(\ell_0^-) &= u_x(\ell_0^+), & M_x(\ell_0^-) &= M_x(\ell_0^+), \end{aligned}$$

onde

$$M(x, t) = \alpha u_{xx}(x, t) + m\theta_t(x, t), \quad (x, t) \in I \times]0, +\infty[,$$

e a função $m(x)$ é definida como

$$m(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < \ell_0, \\ m_0, & \text{se } \ell_0 < x < \ell, \end{cases}$$

com $m_0 > 0$. Por fim, assumiremos as seguintes condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), \quad x \in (0, \ell). \quad (4.4)$$

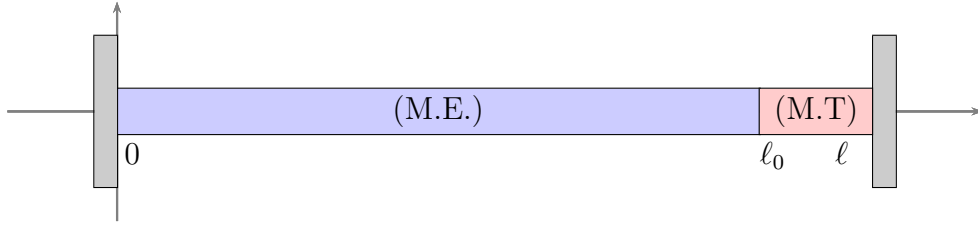


Figura 4.1: Viga parcialmente termoelástica

As principais características para este modelo são as seguintes: a família de operadores resolventes associados ao gerador infinitesimal não são operadores compactos e a equação do calor acoplada ao modelo de vigas termoelásticas é do tipo Kelvin-Voight, para o qual não existe uma caracterização do domínio na forma de um espaço de Sobolev. Este fato determina que a função deslocamento u da solução forte do modelo não pertença ao espaço $H^4(0, \ell)$. Para resolver estes problemas devemos definir o domínio do operador dependendo dos operadores diferenciais associados ao modelo. Além disso, se faz necessário como no capítulo anterior usar alguns resultados mais sofisticados de densidade que desenvolveremos ao longo deste capítulo.

Finalmente, provaremos que o modelo localizado para viga termoelástica do tipo III é exponencialmente estável através do Teorema 2.41. Para tal fim, na seção 4.2 mostraremos que o presente modelo é fortemente estável, ou seja, $i\mathbb{R}$ está contido no resolvente. Na seção 4.3 mostraremos que o operador resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário, ou seja,

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C.$$

para depois poder aplicar o Teorema 2.41

4.1 Boa Colocação do Problema

O funcional de energia associado ao modelos (4.1)-(4.4) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\ell_0}^\ell \left(c |\Theta|^2 + \kappa |\theta_x|^2 + \delta |\theta|^2 \right) dx.$$

cuja derivada é dada abaixo,

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_{\ell_0}^\ell \kappa_0 |\Theta_x|^2 dx.$$

Denotando como $u_t = v$, $\theta_t = \Theta$ e $U = (u, v, \theta, \Theta)$. A seguir, defina o espaço de fase como segue

$$\mathcal{H} = H_0^2(0, \ell) \times L^2(0, \ell) \times H_*^1(\ell_0, \ell) \times L_*^2(\ell_0, \ell).$$

Note que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert equipado com o produto interno

$$(U, U^*)_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell (\rho v \bar{v}^* + \alpha u_{xx} \bar{u}_{xx}^*) dx + \int_{\ell_0}^\ell (c \Theta \bar{\Theta}^* + \kappa \theta_x \bar{\theta}_x^* + \delta \theta \bar{\theta}^*) dx,$$

onde $U = (u, v, \theta, \Theta)$ e $U^* = (u^*, v^*, \theta^*, \Theta^*)$. Agora, introduzimos o operador $\mathcal{A}$,

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ \Theta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha u_{xxx} - m \Theta_{xx} \\ \Theta \\ \kappa \theta_{xx} + \kappa_0 \Theta_{xx} + m v_{xx} - \delta \theta \end{pmatrix}.$$

Por simplicidade, assuma que $\rho = c = 1$. O domínio de $\mathcal{A}$ é dado por

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} v \in H_0^2(0, \ell), \quad \boxed{u \in H^3(0, \ell)}, \theta, \Theta \in H_*^1(\ell_0, \ell) \\ -\alpha u_{xx} - m \Theta \in H^2(0, \ell), \\ \kappa \theta_{xx} + \kappa_0 \Theta_{xx} + m v_{xx} - \delta \theta \in L_*^2(\ell_0, \ell), \\ \alpha u_{xx}(\ell_0^-) = \alpha u_{xx}(\ell_0^+) + m_0 \Theta(\ell_0^+) \\ \alpha u_{xxx}(\ell_0^-) = \alpha u_{xxx}(\ell_0^+) \end{array} \right. \right\}.$$

Portanto, o sistema (4.1)-(4.3) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{A}U = 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

É simples de verificar que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo verificando

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = - \int_{\ell_0}^{\ell_1} \kappa_0 |\Theta_x|^2 dx \leq 0. \quad (4.6)$$

Para mostrar que o sistema está bem colocado usamos o sistema resolvente.

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F. \quad (4.7)$$

Em termos dos coeficientes,

$$i\lambda u - v = f_1, \quad (4.8)$$

$$i\lambda v + \alpha u_{xxxx} + m\Theta_{xx} = f_2, \quad (4.9)$$

$$i\lambda \theta - \Theta = f_3, \quad (4.10)$$

$$i\lambda \Theta - \kappa \theta_{xx} - \kappa_0 \Theta_{xx} - mv_{xx} + \delta \theta = f_4. \quad (4.11)$$

Em particular, note que a relação (4.6) e (4.7) implicam

$$\int_{\ell_0}^{\ell} \kappa_0 |\Theta_x|^2 dx = \operatorname{Re} (U, F)_{\mathcal{H}}. \quad (4.12)$$

Usaremos uma adaptação do Teorema 2.10 visto na seção 2.5, do mesmo modo que no capítulo 3, e pode se encontrado em [30].

Teorema 4.1. *Seja $\mathcal{A}$ um operador dissipativo tal que $R(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Se $\mathcal{H}$ é reflexivo então $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.*

Demonstração. É análoga a demonstração do Teorema 2.10. □

Novamente, destaco que a prova feita em [30] considera uma hipótese equivalente cuja prova é também válida quando $R(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ de onde segue a nossa conclusão.

Finalmente, mostraremos a boa colocação do modelo. Note que aqui usamos fortemente o acoplamento do tipo Kelvin-Voight.

Teorema 4.2. *O operador $\mathcal{A}$ definido anteriormente é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$ definido sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Além disso, para todo dado inicial $U_0 \in D(\mathcal{A})$ existe uma única solução de (4.5) verificando*

$$U \in C^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty[, D(\mathcal{A})).$$

Demonstração. Como $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. É suficiente mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$. Para este propósito, provaremos que para toda $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ existe uma única solução $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U = F$. De fato, das equações (4.8)–(4.11) temos que $v \in H_0^2(0, \ell)$, $\theta \in H^1(\ell_0, \ell)$ e

$$-\alpha u_{xxxx} - m\Theta_{xx} = f_2 \in L^2(0, \ell), \quad (4.13)$$

$$\kappa\theta_{xx} + \kappa_0\Theta_{xx} + mv_{xx} - \delta\theta = f_4 \in L^2(\ell_1, \ell). \quad (4.14)$$

Note que o sistema anterior é desacoplado. Então, usando as condições de contorno obtemos

$$\alpha u_{xxxx} = -mf_3'' + f_2 \in H^{-1}(0, \ell), \quad (4.15)$$

$$u(0) = u(\ell) = u_x(0) = u_x(\ell) = 0 \quad (4.16)$$

$$-\kappa\theta_{xx} + \delta\theta = -\kappa_0 f_3'' + mf_1'' + f_4 \in H^{-1}(0, \ell) \quad (4.17)$$

$$\theta_x(\ell_0) = \theta_x(\ell) = 0. \quad (4.18)$$

Usando o Lema de Lax-Milgran, não é difícil de verificar que o sistema (4.17)–(4.14) possui uma única solução $\theta \in H_*^1(\ell_0, \ell)$ verificando

$$-\kappa\theta_{xx} + \delta\theta = -mf_1'' - \kappa_0 f_3'' + f_4 \in L^2(\ell_0, \ell). \quad (4.19)$$

Por outro lado, introduzindo a forma sesquilinear

$$a(u, w) = \int_0^\ell \alpha u_{xx} \overline{w_{xx}} dx.$$

Verificamos que $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica, continua e coerciva sobre $H_0^2(0, \ell) \times H_0^2(0, \ell)$ e que a forma linear

$$T(w) = \int_0^\ell (m f_3' \overline{w_x} + f_2 \overline{w}) dx,$$

verifica $T \in H^{-2}(0, \ell)$. Portanto, pelo o Lema de Lax-Milgram's existe uma única solução $u \in H^3(0, \ell)$ tal que

$$\int_0^\ell (\alpha u_{xx} \overline{w_{xx}}) dx = \int_0^\ell (m f_3' \overline{w_x} + f_2 \overline{w}) dx, \quad \forall w \in H_0^2(0, \ell). \quad (4.20)$$

Tomando $v \in C_0^\infty(0, \ell)$ temos que u verifica (3.22) no sentido das distribuições e

$$\alpha u_{xxxx} + m f_3'' = f_2 \in L^2(0, \ell). \quad (4.21)$$

Usando as equações (4.19) e (4.21) concluimos que $U = (u, v, \theta, \Theta) \in D(\mathcal{A})$. Logo, $R(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$; e como $\mathcal{H}$ é reflexivo e $\mathcal{A}$ é dissipativo, então $D(\mathcal{A})$ é denso, por causa do Teorema 3.1. Portanto, o resultado segue pelo Corolário 2.6, ou seja, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. $\square$

4.2 Estabilidade Forte

Teorema 4.3 (Estabilidade Forte). *O semigrupo associado com o modelo (4.1)–(4.3) verifica*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Denotemos por

$$\mathcal{N} = \{s \in \mathbb{R}^+ :] - is, is[\subset \rho(\mathcal{A})\}.$$

Como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, $\mathcal{N} \neq \emptyset$. denotando $\sigma = \sup \mathcal{N}$ temos as seguintes possibilidades: primeiro que $\sigma = +\infty$ o que implica que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A})$, segundo que $0 < \sigma$ seja finito. Aqui

argumentaremos por contradição. Suponhamos que $\sigma < \infty$. Então existe uma sequência $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lambda_n \rightarrow \sigma < \infty$ e

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \rightarrow \infty.$$

Portanto, podemos construir a seguinte sequência $\{f_n\} \subseteq \mathcal{H}$ verificando $\|f_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ and $\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}f_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$. Denotando por $\tilde{U}_n = (i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}f_n$, obtemos

$$f_n = i\lambda_n \tilde{U}_n - \mathcal{A}\tilde{U}_n.$$

Sejam

$$U_n = \frac{\tilde{U}_n}{\|\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}}} \text{ e } F_n = \frac{f_n}{\|\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}}}.$$

Logo, U_n verifica $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ e

$$i\lambda_n U_n - \mathcal{A}U_n = F_n \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Como $\|\mathcal{A}U_n\|_{\mathcal{H}} \leq C$, segue que U_n é limitado em $D(\mathcal{A})$. Em particular temos que $\alpha u_{n,xx} + m\Theta_n$ é limitado em $H^2(0, \ell)$ e u_n é limitado em $H^3(0, \ell)$. Usando (4.10) e (4.12) temos

$$(\Theta_n, \theta_n) \rightarrow (0, 0) \text{ forte em } H^1(\ell_0, \ell) \times H^1(\ell_0, \ell).$$

Portanto, existe uma subsequência de U_n tal que

$$U_n \rightarrow U, \text{ forte em } \mathcal{H}.$$

Portanto, temos que $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$. Além do mais, como $\mathcal{A}U_n = i\lambda_n U_n - F_n$ concluímos que $\mathcal{A}U_n$ converge forte em $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{A}$ é fechado concluímos que U verifica

$$i\sigma U - \mathcal{A}U = 0.$$

Usando (4.11) obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda \int_{\ell_0}^{\ell} \Theta_n \overline{v_{n,xx}} \, dx - \int_{\ell_0}^{\ell} (\kappa \theta_{n,xx} - \kappa_0 \Theta_{n,xx}) \overline{v_{n,xx}} \, dx - m \int_{\ell_0}^{\ell} |v_{n,xx}|^2 \, dx \\ + \delta \int_{\ell_0}^{\ell} \theta_n \overline{v_{n,xx}} \, dx = \int_{\ell_0}^{\ell} f_{4,n} \overline{v_{n,xx}} \, dx. \end{aligned}$$

Usando (4.11) na equação acima concluímos que

$$\begin{aligned} m \int_{\ell_0}^{\ell} |v_{n,xx}|^2 \, dx = i\lambda_n \int_{\ell_0}^{\ell} \Theta_n \overline{v_{n,xx}} \, dx + \int_{\ell_0}^{\ell} (\kappa \theta_{n,xx} - \kappa_0 \Theta_{n,xx}) \overline{i\lambda_n u_{n,xxx}} \, dx \\ - \int_{\ell_0}^{\ell} (\kappa \theta_{n,xx} - \kappa_0 \Theta_{n,xx}) \overline{f_{1,n}''} \, dx + \delta \int_{\ell_0}^{\ell} \theta_n \overline{v_{n,xx}} \, dx - \int_{\ell_0}^{\ell} f_{4,n} \overline{v_{n,xx}} \, dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_{n,xx}, \quad v_{n,xx} \rightarrow 0 \quad \text{forte em} \quad L^2(\ell_0, \ell).$$

Então $u_{xx} = v_{xx} = 0$ no intervalo $] \ell_0, \ell[$. Logo,

$$u = v = 0 \text{ sobre }] \ell_0, \ell[.$$

Agora, no intervalo termoelástico

$$i\sigma u - v = 0, \quad \text{em} \quad]0, \ell_0[. \quad (4.22)$$

$$i\sigma v + \alpha u_{xxxx} = 0, \quad \text{em} \quad]0, \ell_0[. \quad (4.23)$$

Então, $u_{xx} = v_{xx} = 0$ no intervalo $] \ell_0, \ell[$. Logo

$$u = v = 0 \text{ sobre }] \ell_0, \ell[.$$

Note que no intervalo $]0, \ell_0[$ temos que u verifica

$$\begin{cases} -\sigma^2 u + \alpha u_{xxxx} = 0, & \text{em} \quad]0, \ell_0[, \\ u(\ell_0) = u_x(\ell_0) = u_{xx}(\ell_0) = u_{xxx}(\ell_0) = 0. \end{cases}$$

Pela unicidade do problema de valor final, $u = 0$ no intervalo $]0, \ell_0[$. Assim, temos que

$U = 0$, o que é uma contradição com $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

□

4.3 Estabilidade Exponencial

A seguir é necessário fornecer significado $u_{xxx}(0)$ e $u_{xxx}(\ell)$. Por essa razão, usaremos um Lema do capítulo anterior que novamente o enunciamos:

Lema 4.3.1. *A solução do sistema resolvente verifica*

$$\left| u_{xx}(0) - \frac{u_{xxx}(0)}{i\sigma} \right| \leq \epsilon |u_{xx}(0)| + \epsilon \left| \frac{u_{xxx}(0)}{i\sigma} \right| + C \|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2} + \frac{1}{\sigma^{1/2}} \|F\|, \quad (4.24)$$

$$\left| u_{xx}(\ell) - \frac{u_{xxx}(\ell)}{i\sigma} \right| \leq \epsilon |u_{xx}(\ell)| + \epsilon \left| \frac{u_{xxx}(\ell)}{i\sigma} \right| + C \|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2} + \frac{1}{\sigma^{1/2}} \|F\|, \quad (4.25)$$

onde C é uma contante positiva e σ suficientemente grande.

Demonstração. É análoga ao Teorema 3.3.3. □

Para facilitar a estimação dos termos pontuais, assuma que $\rho = c = 1$ e $\mathcal{E}^2$ é a energia do sistema sobre a parte termoelástica.

Notação 1.

$$1. \quad \mathcal{E} = \left(\int_{\ell_0}^{\ell} (|v|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 + |\Theta|^2 + \kappa |\theta_x|^2 + \delta |\theta|^2) dx \right)^{1/2},$$

$$2. \quad \mathcal{R} = \left(C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{1/2},$$

$$3. \quad \mathcal{J}(x) = \frac{1}{2} \left(|v(x)|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 \right).$$

Assim temos os seguintes resultados.

Lema 4.3.2. *A solução sobre a parte elástica do material verifica:*

$$|v_x(\ell_0)|^2 + |u_{xxx}(\ell_0)|^2 \leq \mathcal{Q}_0, \quad (4.26)$$

onde

$$\mathcal{Q}_0 = C|\lambda| (\mathcal{J}(0) + \mathcal{J}(\ell_0)) + C|\lambda|^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Demonstração. Multiplicando (4.9) por $\overline{u_{xxx}}$ e integrando em $]0, \ell_0[$ obtemos

$$i\lambda \int_0^{\ell_0} v \overline{u_{xxx}} dx + \int_0^{\ell_0} \alpha u_{xxxx} \overline{u_{xxx}} dx = \int_0^{\ell_0} f_2 \overline{u_{xxx}} dx.$$

Então,

$$i\lambda v(\ell_0) \overline{u_{xx}(\ell_0)} + \int_0^{\ell_0} v_x \overline{v_{xx}} dx + \int_0^{\ell_0} \alpha u_{xxxx} \overline{u_{xxx}} dx = \int_0^{\ell_0} f_2 \overline{u_{xxx}} dx + \int_0^{\ell_0} v_x \overline{f_1''} dx.$$

Usando equação (4.8) e as condições de contorno (4.3) temos

$$i\lambda v(\ell_0) \overline{u_{xx}(\ell_0)} + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_0} \frac{d}{dx} |v_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_0} \frac{d}{dx} \alpha |u_{xxx}|^2 dx = \int_0^{\ell_0} f_2 \overline{u_{xxx}} dx + \int_0^{\ell_0} v_x \overline{f_1''} dx.$$

De onde segue

$$|v_x(\ell_0)|^2 + \alpha |u_{xxx}(\ell_0)|^2 = \alpha |u_{xxx}(0)|^2 + 2i\lambda v(\ell_0) \overline{u_{xx}(\ell_0)} + 2 \int_0^{\ell_0} f_2 \overline{u_{xxx}} dx + 2 \int_0^{\ell_0} v_x \overline{f_1''} dx.$$

Agora, usando Lema 4.3.1 e a desigualdade $\|u_{xxx}\| \leq C\|u_{xx}\|^{1/2}\|u_{xxxx}\|^{1/2}$ temos

$$|v_x(\ell_0)|^2 + |u_{xxx}(\ell_0)|^2 \leq C|\lambda| (\mathcal{J}(0) + \mathcal{J}(\ell_0)) + C|\lambda|^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

De onde segue a relação (4.26). □

Lema 4.3.3. *Suponha as condições anteriores, então para todo $\epsilon > 0$,*

$$|u_x(\ell_0)|^2 \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} |v(\ell_0)|^2 + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{E}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2. \quad (4.27)$$

onde C é uma contante positiva e λ suficientemente grande.

Demonstração. Multiplicando por $q\overline{v_x}$ a equação (4.11), onde $q = x - \ell$, e integrando por partes em $]\ell_0, \ell[$ obtemos

$$i\lambda \int_{\ell_0}^{\ell} \Theta q \overline{v_x} dx - \int_{\ell_0}^{\ell} (\kappa \theta_{xx} + \kappa_0 \Theta_{xx}) q \overline{v_x} dx - m \int_{\ell_0}^{\ell} v_{xx} q \overline{v_x} dx + \int_{\ell_0}^{\ell} \delta \theta q v_x dx = \int_{\ell_0}^{\ell} f_4 q \overline{v_x} dx.$$

Então,

$$i\lambda \int_{\ell_0}^{\ell} \Theta q \bar{v}_x \, dx - \int_{\ell_0}^{\ell} [(\kappa \theta_x + \kappa_0 \Theta_x) q \bar{v}_{xx} + (\kappa \theta_x + \kappa_0 \Theta_x) \bar{v}_x] dx - \frac{m}{2} \int_{\ell_0}^{\ell} q \frac{d}{dx} |v_x|^2 \, dx \\ + \int_{\ell_0}^{\ell} \delta \theta q v_x \, dx = \int_{\ell_0}^{\ell} q f_4 \bar{v}_x \, dx.$$

Logo,

$$\frac{m}{2} \int_{\ell_0}^{\ell} q \frac{d}{dx} |v_x|^2 \, dx = - \int_{\ell_0}^{\ell} [(\kappa \theta_x + \kappa_0 \Theta_x) q \bar{v}_{xx} + (\kappa \theta_x + \kappa_0 \Theta_x) \bar{v}_x] dx \\ + \int_{\ell_0}^{\ell} \delta \theta q v_x \, dx - \int_{\ell_0}^{\ell} q f_4 \bar{v}_x \, dx + i\lambda \int_{\ell_0}^{\ell} \Theta q \bar{v}_x \, dx$$

Para λ grande suficiente temos

$$\left| \int_{\ell_0}^{\ell} (\kappa \theta_x + \kappa_0 \Theta_x) q \bar{v}_{xx} + (\kappa \theta_x + \kappa_0 \Theta_x) \bar{v}_x \, dx \right| \leq C\lambda \mathcal{E} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} + C\mathcal{R}^2.$$

Portanto segue que

$$\left| \int_{\ell_0}^{\ell} q \frac{d}{dx} |v_x|^2 \, dx \right| \leq \frac{2}{m} \left| C\lambda \mathcal{E} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} + C\mathcal{R}^2 + \int_{\ell_0}^{\ell} \delta \theta q v_x \, dx - \int_{\ell_0}^{\ell} q f_4 \bar{v}_x \, dx + i\lambda \int_{\ell_0}^{\ell} \Theta q \bar{v}_x \, dx \right| \\ \leq +C|\lambda| \mathcal{E} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} + C\mathcal{R}^2 + \left| i\lambda \Theta(\ell_0) q(\ell_0) \bar{v}(\ell_0) - i\lambda \int_{\ell_0}^{\ell} (\Theta q)_x \bar{v} dx \right|.$$

Usando a equação (4.8) na desigualdade acima obtemos

$$\left| q(\ell_0) |u_x(\ell_0)|^2 - \int_{\ell_0}^{\ell} |u_x|^2 \, dx \right| \leq \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{E} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} + \frac{C}{|\lambda|^2} \mathcal{R}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} |v(\ell_0)| + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{E}^2.$$

Usando a relação (4.12) temos

$$\left| q(\ell_0) |u_x(\ell_0)|^2 - \int_{\ell_0}^{\ell} |u_x|^2 \, dx \right| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} |v(\ell_0)|^2 + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{E}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2.$$

De onde segue (4.27), para λ grande. □

Proposição 4.1 (1^a Estimativa). *Sob as mesmas condições anteriores temos que a*

solução do sistema resolvente sobre o intervalo elástico verifica para todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \left| C(\mathcal{J}(0) + \mathcal{J}(\ell_0)) - \int_0^{\ell_0} (\mathcal{J}(x) + \alpha |u_{xx}|^2) dx \right| &\leq C\epsilon(\mathcal{J}(0) + \mathcal{J}(\ell_0)) \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \mathcal{R}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{1/4}} \|U\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde C é uma constante positiva e λ é suficientemente grande.

Demonstração. Multiplicando (4.9) por $q\overline{u_x}$ para $q = x - \frac{\ell_0}{2}$ e integrando por partes obtemos

$$i\lambda \int_0^{\ell_0} v q \overline{u_x} dx + \int_0^{\ell_0} q \alpha u_{xxx} \overline{u_x} dx = \int_0^{\ell_0} f_2 \overline{u_x} dx.$$

Usando a equação (4.8) e as condições de contorno (4.3) temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^{\ell_0} q \frac{d}{dx} |v|^2 dx &+ \underbrace{q \alpha \overline{u_x}(\ell_0^-) u_{xxx}(\ell_0^-) - \alpha \overline{u_x}(\ell_0^-) u_{xx}(\ell_0^-)}_{:=I_1} - \frac{1}{2} \int_0^{\ell_0} q \alpha \frac{d}{dx} |u_{xx}|^2 dx \\ &+ \int_0^{\ell_0} \alpha |u_{xx}|^2 dx = \underbrace{\int_0^{\ell_0} q (v \overline{f_{1,x}} + f_2 \overline{u_x}) dx}_{:=I_2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$- \int_0^{\ell_0} q \frac{d}{dx} \underbrace{\frac{1}{2} (|v|^2 + \alpha |u_{xx}|^2)}_{\mathcal{J}(x)} dx + \int_0^{\ell_0} \alpha |u_{xx}|^2 dx = I_2 - I_1 \quad (4.29)$$

Dos Lemas 4.3.2 e o Lema 4.3.3 temos

$$\begin{aligned} \left| q(\ell_0^-) u_{xxx}(\ell_0^-) \overline{u_x}(\ell_0^-) \right| &\leq C \mathcal{Q}_0^{1/2} |\overline{u_x}(\ell_0^-)| \\ &\leq C\epsilon(\mathcal{J}(0) + \mathcal{J}(\ell_0)) + \frac{C}{|\lambda|^{1/4}} \mathcal{R}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{1/4}} \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

De forma análoga, pelo Lema 4.3.3,

$$\left| u_{xx}(\ell_0^-) \overline{u_x}(\ell_0^-) \right| \leq C\epsilon \mathcal{J}(\ell_0) + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \mathcal{R}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Portanto, para λ suficientemente grande temos

$$|I_1| \leq C\epsilon(\mathcal{J}(0) + \mathcal{J}(\ell_0)) + \frac{C}{|\lambda|^{1/4}}\mathcal{R}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{1/4}}\|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Além disso,

$$|I_2| \leq C\epsilon(\mathcal{J}(0) + \mathcal{J}(\ell_0)) + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}}\mathcal{R}^2.$$

Finalmente, aplicando estas desigualdades em (4.29) segue a relação (4.28). $\square$

Corolário 4.1. *A solução do sistema resolvente sobre o intervalo elástico verifica*

$$\mathcal{J}(\ell_0) + \mathcal{J}(0) \leq C \int_0^{\ell_0} (|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2) dx + \frac{C}{|\lambda|^{1/4}}\mathcal{R}^2,$$

onde C é uma contante positiva e λ suficientemente grande.

Demonstração. O resultado segue da Proposição 4.1. $\square$

Corolário 4.2. *A solução do sistema resolvente sobre o intervalo elástico verifica*

$$|v_x(\ell_0)|^2 + |u_{xxx}(\ell_0)|^2 \leq C|\lambda|\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração. O resultado segue do Lema 4.3.2 e da Proposição 4.1. $\square$

Lema 4.3.4. *A solução do sistema resolvente sobre o intervalo termoelástico verifica*

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |v_x|^2 dx \leq C|\lambda|\mathcal{E}^2 + C\mathcal{E}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.30)$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração. Como $v \in H_0^2(0, \ell)$, segue pelo teorema 2.16 e usando a equação (4.8)

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\ell_0}^{\ell} |v_x|^2 dx &\leq C \left(\int_{\ell_0}^{\ell} |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\ell_0}^{\ell} |v_{xx}|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\int_{\ell_0}^{\ell} |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\ell_0}^{\ell} |\lambda u_{xx} - f_{1,xx}|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq C |\lambda| \underbrace{\left(\int_{\ell_0}^{\ell} |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\ell_0}^{\ell} |u_{xx}|^2 dx \right)^{1/2}}_{\leq \mathcal{E}^2} + C \mathcal{E} \|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

De onde segue (4.30). □

Lema 4.3.5. *A solução do sistema resolvente sobre a parte termoelástica verifica para todo $\epsilon > 0$,*

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |\lambda \theta_x|^2 dx \leq \mathcal{R}, \quad (4.31)$$

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |\Theta|^2 dx \leq \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2 + \epsilon \mathcal{E}^2. \quad (4.32)$$

onde C é uma constante positiva e λ suficientemente grande.

Demonstração.

1. Aplicando a desigualdade (4.10) em (4.12) obtemos

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |\lambda \theta_x|^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo, segue (4.31).

2. Da equação (4.11) segue

$$i\lambda\Theta - \kappa\theta_{xx} - \kappa_0\Theta_{xx} - mv_{xx} + \delta\theta = f_4.$$

Multiplicando a equação (4.11) por $\overline{i\lambda\Theta}$ e tomando a parte real temos

$$\begin{aligned}
\int_{\ell_0}^{\ell} |\lambda\Theta|^2 dx + \operatorname{Re} i\lambda \int_{\ell_0}^{\ell} \kappa\theta_x \overline{\Theta}_x dx + \operatorname{Re} i\lambda \int_{\ell_0}^{\ell} mv_x \overline{\Theta}_x dx \\
+ \operatorname{Re} i\lambda\delta \int_{\ell_0}^{\ell} |\theta|^2 dx = \operatorname{Re} \int_{\ell_0}^{\ell} f_4 \overline{i\lambda\Theta} dx.
\end{aligned}$$

Usando a equação (4.10) segue que

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{\ell} |\lambda \Theta|^2 dx &= \underbrace{\operatorname{Re} i \lambda \int_{\ell_0}^{\ell} m v_x \overline{\Theta_x} dx}_{:=J_2} \\ + \underbrace{\int_{\ell_0}^{\ell} \kappa |\Theta_x|^2 dx + \operatorname{Re} \int_{\ell_0}^{\ell} \kappa f'_3 \overline{\Theta_x} dx - \operatorname{Re} i \lambda \int_{\ell_0}^{\ell} f_4 \overline{\Theta} dx + \int_{\ell_0}^{\ell} \delta |\Theta|^2 dx + \operatorname{Re} i \lambda \delta \int_{\ell_0}^{\ell} \bar{\theta} f_3 dx}_{:=J_1}. \end{aligned}$$

Então,

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |\Theta|^2 dx = \frac{1}{|\lambda|^2} (J_1 + J_2). \quad (4.33)$$

Note que $|J_1| \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{\epsilon} \|F\|_{\mathcal{H}}^2$. Além disso, pelo Lema 4.3.4,

$$\begin{aligned} |J| &\leq C |\lambda| \underbrace{\|v_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)}}_{\text{Usando (4.30)}} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} \\ &\leq C |\lambda| \left(|\lambda|^{1/2} \mathcal{E}^2 + C \mathcal{E}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \right) \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)}. \end{aligned}$$

Dividindo por $|\lambda|^2$ obtemos que:

$$\frac{1}{|\lambda|^2} |J| \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \mathcal{E} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{E}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)}$$

Então,

$$\frac{1}{|\lambda|^2} |J| \leq \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2 + \epsilon \mathcal{E}^2.$$

Usando as desigualdades anteriores na equação (4.33) temos a equação (4.32).

□

A seguir, um resultado de grande importância.

Lema 4.3.6. *A solução do sistema resolvente verifica*

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |u_{xxx}|^2 dx \leq C |\lambda| \mathcal{E}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C |\lambda|^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração. Multiplicando (4.9) por $\overline{u_{xx}}$ e usando (4.8) obtemos

$$\underbrace{i\lambda \int_{\ell_0}^{\ell} v \overline{u_{xx}} \, dx}_{|\lambda| \mathcal{E}^2} + \underbrace{\int_{\ell_0}^{\ell} \alpha u_{xxx} \overline{u_{xx}} \, dx}_{[\alpha u_{xxx} \overline{u_{xx}}]_{\ell_0}^{\ell} - \int_{\ell_0}^{\ell} \alpha |u_{xxx}|^2 \, dx} + \underbrace{\int_{\ell_0}^{\ell} m \Theta_{xx} \overline{u_{xx}} \, dx}_{-\int_{\ell_0}^{\ell} m \Theta_x \overline{u_{xxx}} \, dx} = \int_{\ell_0}^{\ell} f_2 \overline{u_{xx}} \, dx.$$

De onde segue

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{\ell} \alpha |u_{xxx}|^2 \, dx &= i\lambda \underbrace{\int_{\ell_0}^{\ell} v \overline{u_{xx}} \, dx}_{|\lambda| \mathcal{E}^2} - \underbrace{\int_{\ell_0}^{\ell} f_2 \overline{u_{xx}} \, dx}_{\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}} + [\alpha u_{xxx} \overline{u_{xx}}]_{\ell_0}^{\ell} - \underbrace{\int_{\ell_0}^{\ell} m \Theta_x \overline{u_{xxx}} \, dx}_{\leq c_{\epsilon} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \|u_{xxx}\|^2}, \\ &\leq C |\lambda| \mathcal{E}^2 + \left| [\alpha u_{xxx} \overline{u_{xx}}]_{\ell_0}^{\ell} \right| + c_{\epsilon} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \int_{\ell_0}^{\ell} |u_{xxx}|^2 \, dx. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Do Lema 4.3.2 e do Corolário 4.2 temos para λ grande suficiente,

$$|u_{xxx}(\ell_0) u_{xx}(\ell_0)| \leq C |\lambda|^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \mathcal{R}^2,$$

Finalmente, substituindo as desigualdades anteriores em (4.34) segue nossa conclusão. $\square$

Lema 4.3.7. *O sistema sobre o intervalo termoelástico verifica*

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |u_{xx}|^2 \, dx \leq \frac{C}{|\lambda|^{3/4}} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2 + \epsilon \mathcal{E}^2$$

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |v|^2 \, dx \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|^{2/3}} \mathcal{R}^2 + \epsilon \mathcal{E}^2.$$

onde C é uma contante positiva e λ suficientemente grande.

Demonstração.

1. Substituindo a equação (4.8) em (4.11) obtemos

$$\Theta - \frac{1}{i\lambda} (\kappa \theta_{xx} + \kappa_0 \Theta_{xx}) - m u_{xx} + \frac{\delta \theta}{i\lambda} = \frac{1}{i\lambda} (f_4 - m f_1'').$$

Multiplicando a equação acima por $\overline{u_{xx}}$ e integrando em $]\ell_0, \ell[$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{\ell} m|u_{xx}|^2 dx &= \int_{\ell_0}^{\ell} \Theta \overline{u_{xx}} dx + \underbrace{\frac{1}{\lambda i} \int_{\ell_0}^{\ell} (\kappa \theta_x + \kappa_0 \Theta_x) \overline{u_{xxx}} dx}_J \\ &\quad + \frac{\delta}{\lambda i} \int_{\ell_0}^{\ell} \theta \overline{u_{xx}} dx - \frac{1}{\lambda i} \int_{\ell_0}^{\ell} (f_4 - m f_1'') \overline{u_{xx}} dx. \end{aligned}$$

Tomando a parte real temos

$$\int_{\ell_0}^{\ell} m|u_{xx}|^2 dx = \operatorname{Re} \int_{\ell_0}^{\ell} \Theta \overline{u_{xx}} dx + \operatorname{Re} J + \operatorname{Re} \frac{\delta}{i\lambda} \int_{\ell_0}^{\ell} \theta \overline{u_{xx}} dx + \operatorname{Re} \frac{1}{i\lambda} \int_{\ell_0}^{\ell} (f_4 - m f_1'') \overline{u_{xx}} dx$$

Assim, tomando o valor absoluto

$$\int_{\ell_0}^{\ell} m|u_{xx}|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\ell_0}^{\ell} m|u_{xx}|^2 dx + C \int_{\ell_0}^{\ell} |\Theta|^2 dx + \operatorname{Re} J + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{E}^2 + \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{R}^2, \quad (4.35)$$

para λ grande. Pelo Lema 4.3.6

$$\begin{aligned} |J| &= \left| \frac{1}{i\lambda} \int_{\ell_0}^{\ell} (\kappa \theta_x + \kappa_0 \Theta_x) \overline{u_{xxx}} dx \right| \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\kappa \theta_x + \kappa_0 \Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} \left(C|\lambda|^{1/2} \mathcal{E} + C|\lambda|^{1/4} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C\|F\|_{\mathcal{H}} \right) \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} (\mathcal{E}^2 + \|\kappa_0 \Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)}) \left(C|\lambda|^{1/2} \mathcal{E} + C|\lambda|^{1/4} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C\|F\|_{\mathcal{H}} \right) \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \mathcal{E}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{3/4}} \mathcal{E}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} \mathcal{E} + \frac{C}{|\lambda|^{3/4}} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

De onde temos

$$|J| \leq \epsilon \mathcal{E}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{3/4}} \mathcal{E}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2. \quad (4.36)$$

Finalmente, aplicando a desigualdade (4.36) em (4.35) e usando o Lema 4.3.5 segue nossa conclusão.

2. Multiplicando a equação (4.9) por $\bar{u}$ e integrando sobre $]\ell_0, \ell[$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{\ell} |v|^2 dx &= [\alpha u_{xxx}(\ell) \underbrace{\bar{u}(\ell)}_0 - \alpha u_{xxx}(\ell_0) \bar{u}(\ell_0)] - [\alpha u_{xx}(\ell) \underbrace{\bar{u}_x(\ell)}_0 - \alpha u_{xx}(\ell_0) \bar{u}_x(\ell_0)] \\ &\quad + \int_{\ell_0}^{\ell} \alpha |u_{xx}|^2 dx + \int_{\ell_0}^{\ell} m \Theta_x \bar{u}_x dx - \int_{\ell_0}^{\ell} f_2 \bar{u} dx. \end{aligned}$$

Pela condição de contorno (4.3)

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{\ell} |v|^2 dx &= -\alpha u_{xxx}(\ell_0) \bar{u}(\ell_0) + \alpha u_{xx}(\ell_0) \bar{u}_x(\ell_0) \\ &\quad + \underbrace{\int_{\ell_0}^{\ell} \alpha |u_{xx}|^2 dx}_{:=I_4} + \underbrace{\int_{\ell_0}^{\ell} m \Theta_x \bar{u}_x dx}_{:=I_5} - \underbrace{\int_{\ell_0}^{\ell} f_2 \bar{u} dx + \int_{\ell_0}^{\ell} f_1 \bar{u} dx}_{:=I_6}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Usando a equação (4.8) e o Lema 4.3.2 temos

$$|u_{xxx}(\ell_0) \bar{u}(\ell_0)| = \frac{1}{|\lambda|} |u_{xxx}(\ell_0)(\bar{v}(\ell_0) + \bar{f}_1(\ell_0))| \leq \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{Q}_0^{1/2} \mathcal{J}^{1/2}(\ell_0) + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{Q}_0^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Lembrando a definição de $\mathcal{Q}_0 \leq C|\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2$ temos para λ suficientemente grande

$$|u_{xxx}(\ell_0) \bar{u}(\ell_0)| \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2.$$

Analogamente, para λ suficientemente grande

$$|u_{xx}(\ell_0) \bar{u}_x(\ell_0)| \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2.$$

Para λ suficientemente grande, observe que

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \epsilon \mathcal{E}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|^{2/3}} \mathcal{R}^2, \\ |I_6| &\leq \epsilon \int_{\ell_0}^{\ell} |v|^2 dx + \frac{1}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

Além disso, usando a desigualdade de interpolação,

$$\begin{aligned}
|I_5| &\leq \int_{\ell_0}^{\ell} m \Theta_x \overline{u_x} dx \\
&\leq C \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} \|u\|^{1/2} \|u_{xx}\|^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} \underbrace{\|v\|^{1/2} \|u_{xx}\|^{1/2}}_{\leq \mathcal{E}} + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|\Theta_x\|_{L^2(\ell_0, \ell)} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \underbrace{\|u_{xx}\|^{1/2}}_{\leq \mathcal{E}^{1/2}} \\
&\leq \epsilon \mathcal{E}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2,
\end{aligned}$$

para λ grande. Finalmente, inserindo as desigualdades acima em (4.37) segue o resultado. □

Proposição 4.2 (2^{a} Estimativa). *Sob as mesmas condições anteriores temos que a energia sobre o intervalo termoelástico verifica*

$$\mathcal{E}^2 \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{2/3}} \mathcal{R}^2 + \epsilon \mathcal{E}^2,$$

onde C é uma contante positiva e λ suficientemente grande.

Demonstração. Do Lema 4.3.7,

$$\begin{aligned}
\int_{\ell_0}^{\ell} |u_{xx}|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/4}} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2 + \epsilon \mathcal{E}^2 & \text{e} \\
\int_{\ell_0}^{\ell} |v|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{2/3}} \mathcal{R}^2 + \epsilon \mathcal{E}^2.
\end{aligned}$$

Do Lema 4.3.5,

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |\theta_x|^2 dx \leq \frac{1}{|\lambda|^2} \mathcal{R} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{e} \quad \int_{\ell_0}^{\ell} |\Theta|^2 dx \leq \frac{C}{|\lambda|} \mathcal{R}^2 + \epsilon \mathcal{E}^2$$

Ainda, usando a desigualdade de Poincaré,

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |\theta|^2 dx \leq C_p \int_{\ell_0}^{\ell} |\theta_x|^2 dx \leq \frac{1}{|\lambda|^2} \mathcal{R} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

Portanto, lembrando a definição de $\mathcal{E}^2$, tomando λ grande segue o resultado. □

Proposição 4.3 (3ª Estimativa). *Sob as mesmas condições anteriores temos que a solução do sistema resolvente sobre o intervalo termoelástico verifica*

$$\left| C(\mathcal{J}(\ell_0) + \mathcal{J}(\ell)) - \int_{\ell_0}^{\ell} (\mathcal{J}(x) + \alpha|u_{xx}|^2) dx \right| \leq C\epsilon(\mathcal{J}(\ell_0) + \mathcal{J}(\ell)) + C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}}\mathcal{R}^2,$$

onde C é uma constante positiva e λ suficientemente grande.

Demonstração. Usando os mesmos procedimentos como na Proposição 4.1 segue o resultado. $\square$

Finalmente, estamos em condições de mostrar a estabilidade exponencial.

Teorema 4.4. *O sistema termoelástico (4.1)-(4.3) é exponencialmente estável.*

Demonstração. Do Proposição 4.2 temos

$$\mathcal{E}^2 \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{2/3}}\mathcal{R}^2. \quad (4.38)$$

Pela Proposição 4.1 para λ grande,

$$\int_0^{\ell_0} (|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2) dx \leq C(\mathcal{J}(0) + \mathcal{J}(\ell_0)) + C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\mathcal{R}^2, \quad (4.39)$$

Novamente, pela Proposição 4.1 para λ grande

$$\mathcal{J}(0) + \mathcal{J}(\ell_0) \leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\mathcal{R}^2. \quad (4.40)$$

Pelas desigualdades (4.38), (4.39) e (4.40) temos para λ grande,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{E}^2 + \int_0^{\ell_0} (|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2) dx \leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\mathcal{R}^2.$$

Tomando ϵ pequeno, segue o resultado. $\square$

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho mostramos a boa colocação dos modelos de vigas termoelásticas do tipo III global e localizada. Para tal demonstração, utilizamos a teoria clássica de Semigrupos e Análise Funcional que pode ser encontrada em [3, 30], que também são mencionados no capítulo 2.

No capítulo 3, aonde consideramos a viga de material completamente termoelástico mostramos que a dissipação produzida é suficiente para que o modelo seja analítico. Esta propriedade é muito importante porque em particular implica nas seguintes propriedades: estabilidade exponencial do modelo, o semigrupo possui a propriedade de crescimento definido pelo espectro, a solução possui efeito regularizante sobre os dados iniciais e a solução admite uma expansão em séries de potências convergentes no tempo. Essas propriedades são muito importantes para tratar problemas semi lineares; bem como problemas numéricos. Por este razão, acreditamos que nosso resultado é de muita importância nas aplicações.

Finalmente, no capítulo 4 tratamos de um modelo localizado, ou seja, quando a componente termoelástica ocupa apenas uma pequena parte da viga. Neste caso o problema é muito mais complexo e conseguimos provar apenas que o modelo é exponencialmente estável. Não julgamos que o modelo seja analítico, eventualmente poderia ser que defina um semigrupo diferenciável. Porém, são pontos complexos e o problema está em aberto.

Trabalhos futuros

Nosso trabalho foi desenvolvido para vigas em modelos unidimensionais. Entre os pontos que acreditamos podem ser tratados em casos de dimensão maior que um estão:

1. Placas do tipo retangulares.
2. Aplicar métodos numéricos para verificar as propriedades analíticas encontradas no caso das vigas.
3. Estender ou verificar estas propriedades para as vigas de Timoshenko e vigas curvas de Bresse.
4. Estudar a fundo a diferença do modelamento das vigas de Euler Bernoulli e de Timoshenko.

Vale destacar que modelos bidimensionais (placas) ou materiais mais gerais, bem como N-dimensionais são muitos mais complexos por causa das condições de contorno e as derivadas tangenciais que aparecem nas integrações por partes e na análise do traço sobre a interface.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J.J. F, *Sobolev Spaces*. Second Edition. Academic Press, 2003.
- [2] APPEL, S. & WIJCKER, J. *Simulation of Thermoelastic Behaviour of Spacecraft Structures Fundamentals and Recommendations*. Springer, 2022.
- [3] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, (1983)
- [4] CAVALCANTI, M.M. e Domigos Cavalcanti. *Introdução a Teoria das Distribuições e aos espaços de Sobolev*, Maringá: Textos do Depto. de Matemática-UEM, 2007.
- [5] CATTANEO, C. *Sulla conduzione de calore*. Atti del Semin. Mat. e Fis. Univ. Modena 3, 83-101 (1948)
- [6] GOMES, A. M. *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações as Equações de Evolução*, UFRJ / IM, 2012.
- [7] GREEN, A.E. & NAGHDI, P.M.: *A re-examination of the basic postulates of thermo-mechanics*. Proc. Royal Society London A 432(1991), 171-194.
- [8] GREEN, A. E. & NAGHDI, P. M. 1993 *Thermoelasticity without energy dissipation*. J. Elasticity 31, 189–208.
- [9] RIVERA, J.E. & OQUENDO, H.P. *The Transmission Problem of Viscoelastic Waves* Acta Applicandae Mathematicae 62: 1–21, 2000.
- [10] SARE, H.D.F, RIVERA, J.E. & QUINTANILLA, R. *Decay of solutions in nonsimple thermoelastic bars*, International Journal of Engineering Science, Volume 48, Issue 11, 2010, Pages 1233-1241,
- [11] SARE, H.D.F & RIVERA, J.E. *Optimal rates of decay in 2-d thermoelasticity with second sound* J. Math. Phys. 53, 073509 (2012); doi: 10.1063/1.4734239
- [12] LIU,. & ZHENG,S. *Continuum mechanic*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002 .

- [13] LIU,. & ZHENG,S. *On Entrpoy Flux-Heat Relation in Thermodynamics with Lagrange Multipliers*, Continuum mechanic. Thermdoyn, 1996 .
- [14] KESAVAN,S. *Topics in Functional Analysis and applications*, 1989.
- [15] LIONS, J.L. *Problème aux Limites dans les Équations aux Dérivees Partilles*. Les Presses de l'Universite de Montreal, Montreal, 1965.
- [16] LIONS, J.L. *Problème aux Limites non homogènes et applications*. Volume 1, Dunod, Paris,1968.
- [17] ALVES, M. S. , GAMBOA, P., GORAIN, G. C., RAMBAUD, A., & VERA, O. *Asymptotic behavior of a flexible structure with Cattaneo type of thermal effect*. Indagationes Mathematicae 27 (2016) 821 - 834.
- [18] MARYATI, TK, RIVERA, JE, RAMBAUD, A., & VERA, O. (2018). Estabilidade de uma viga Timoshenko N-componente com Kelvin-Voigt localizado e dissipação por atrito. *Jornal Eletrônico de Equações Diferenciais*, 2018 (136), pp. 1-18.
- [19] MONTANARO, a. *On the constitutive relations for second sound in thermo-electroelasticity*. Arch. Mech. 63 (3) (2011).
- [20] EVANS, L.C., *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, v.19, 1999.
- [21] FRIEDMAN, A. *Partial Diferential Equations*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [22] HUANG, F.L. Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, *Ann. of Diff. Eqs.* 1 (I), 43-56, (1985).
- [23] JOSEPH, D.D., & PREZIOSI, L.: *Heat waves*. Rev. Mod. Phys. 61, 41-73 (1988).
- [24] LIONS, J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non-linéaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [25] LIU,Z. & ZHENG,S. *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, CRC Research Notes in Mathematics, vol. 398, Chapman and Hall, 1999.
- [26] LIU,Z. & QUINTANILLA, R. *Analyticity of solutions in type III thermoelastic plates*. IMA Journal of Applied Mathematics (2010) 75, 356-365.
- [27] LUO, Z.H.; GUO, B.Z. & MORGUL, O. *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Appllications*. Springer Verlag London, 1999.

- [28] MEDEIROS, L.A.;& MILA, M.M. *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos*. Rio de Janeiro:UFRJ/IM, 2010.
- [29] NIRENBERG, L. *On elliptic partial differential equations*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3 ed série, tome 13, nº2 (1959), p. 115-162
- [30] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York,1983.
- [31] PRÜSS, J. *On the Spectrum of C_0 -Semigroups*. Transaction of the American Mathematical Society, 284,Nro. 2,pp 847-857,1984.
- [32] QIN, Yuming. *Nonlinear Parabolic-Hyperbolic Coupled Systems and Their Attractors*. Birkhäuser Verlag AG, 2008.
- [33] QUINTANILLA, R. & MARTINEZ,F. *On the incremental problem in thermoelasticity of nonsimple materials*. Z. Angew. Math. Mech., 78 (1998), 703-710.
- [34] QUINTANILLA, R. & RACKE,R. *Stability for thermoelasticity of type III*. Konstanzer Schriften in Mthematik und Informatik, Nr 180, 2002.
- [35] RIVERA, J. Muñoz. *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*, Serie de Métodos Matemáticos, LNCC, 2008.
- [36] RIVERA, J.E. & VEGA, J. C. *Large Time Behaviour for non-simple Thermolascity with secound sound*. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 259, pp. 1-7.
- [37] RUDIN, W. *Functional Analysis* McGraw-Hill Book Company, USA (1973).
- [38] SUSSEKIND, J.C. *Curso de Análise Estrutural*. 4.ed. Porto Alegre, v.1 -Globo, 1979.
- [39] TEMAM, R., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics* Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo (1997)
- [40] TOUPIN,R.A. *Elastic materials with couple-stresses*. Areh. Rational Meeh. Anal., 11 (1962), 385-414.
- [41] TOUPIN,R.A. *Theories of elasticity with couple-stress*. Arch. Rational Mech.Anal., 17 (1964), 85-112.
- [42] ZHENG, S. *Nonlinear Evolution Equations*. Pitman Monogr. Survey. Pure Appl. Math, Vol. 133, CRC Press, USA, 2004