# Semigrupos da classe de Gevrey

Andrea Luiza Gonçalves Martinho

# Sumário


**1 Preliminares** **7**

1.1 Espaços de Sobolev . . . . . 7

1.1.1 Imersões de Sobolev . . . . . 9

1.2 Análise Funcional . . . . . 12

1.2.1 Operadores lineares limitados e não limitados . . . . . 12

1.2.2 Espectro e resolvente de um operador linear . . . . . 14

1.2.3 Espaços de Hilbert . . . . . 15

1.2.4 Teorema de Representação de Riesz e Teorema de Lax-Milgram . . 17

1.3 Semigrupos . . . . . 19

1.3.1 O problema de Cauchy . . . . . 24

1.3.2 Teorema de Hille-Yosida . . . . . 27

1.3.3 Teorema de Lummer Phillips . . . . . 28

1.4 Estabilidade exponencial de um semigrupo $C_0$ . . . . . 29

1.5 Semigrupos Diferenciáveis . . . . . 30

1.6 Semigrupos Analíticos . . . . . 33

1.6.1 Caraterização dos semigrupos analíticos . . . . . 33

1.7 Funções Gevrey . . . . . 34

1.8 Semigrupos de Gevrey . . . . . 37

**2 Estabilidade exponencial da viga com amortecimento viscoso** **40**

2.1 Introdução . . . . . 40

2.2 Existência e Unicidade . . . . . 42

2.3 Desigualdades de Interpolação . . . . . 44

2.4 Estabilidade Exponencial . . . . . 45

2.5 Estabilidade Forte . . . . . 46

2.6 Desigualdades de Observabilidade . . . . . 48

2.7 Estabilidade Exponencial . . . . . 53

**3 Semigrupo de Gevrey** **55**
3.1 O Operador Resolvente . . . . . . . . . . 57
3.2 Resultado Principal . . . . . . . . . . 68

**4 Conclusões** **70**
4.1 Pontos abertos . . . . . . . . . . 70

# Resumo


**Doutoranda**: Andréa Luiza Gonçalves Martinho.

**Orientador**: Jaime E. Muñoz Rivera.

Neste trabalho estudamos as propriedades regularizantes produzidas por mecanismos dissipativos localizados sobre uma viga. Neste trabalho nos concentraremos no mecanismo viscoso localizado, isto é, este mecanismo é efetivo apenas num subintervalo do conjunto aberto onde está configurada a viga. Provamos que esta dissipação faz com que o semigrupo seja da classe 4 de Gevrey. Em particular isto significa que o semigrupo associado ao modelo é imediatamente diferenciável, isto é, o semigrupo $S(t)$ é diferenciável para todo $t > 0$. Que implica que o semigrupo é infinitamente diferenciável. Isto mostra que o modelo de vigas possui um efeito regularizante sobre os dados iniciais. Mais ainda o resultado implica na estabilidade exponencial.



**Palavras chaves:** Semigrupos diferenciáves, Gevrey, efeito regularizante, estabilidade exponencial.

# Abstract

In this work we study the regularizing properties produced by localized dissipative mechanisms. In this work we will focus on the localized viscous mechanism, that is, this mechanism is effective only in a subinterval of the open set where the beam is configured. We proved that this dissipation makes the semigroup to be Gevrey's class 4. In particular this means that the semigroup associated with the model is immediately differentiable, that is, the semigroup $S(t)$ is differentiable for every $t > 0$. Which implies that the semigroup is infinitely differentiable. This shows that the beam model has a regularizing effect on the initial data. Furthermore, the result implies exponential stability.

**KeyWord:** Differentiable semigroups, Gevrey, regularizing effect, exponential stability.

# Introdução

Neste trabalho estudaremos as propriedades regularizantes de sistemas de vigas quando a dissipação está localizada. Até o momento praticamente os estudos de modelos com dissipação localizada foram feitos para analisar os casos de decaimento, à saber, decaimento exponencial e decaimemto polinomial, ou mesmo a falta de decaimento. Veja por exemplo [15, 18, 19, 23–26, 30, 33]

Pensamos que o efeito regularizante, analiticidade ou mesmo a diferenciabilidade são temas que não tem sido estudados quando a dissipação é localizada.

Aqui consideramos o modelo de Euler Bernoulli com componente viscosa efetiva apenas numa parte do material. Consideremos que a viga está configurada no intervalo $[0, \ell]$ e que esta viga está dividida em duas componentes cada uma delas ocupando os subintervalos $\widetilde{I} = ]0, \ell_0[ \cup ]\ell_0, \ell[$.

Para ser mais precisos, a parte elástica está configurada sobre o intervalo $]0, \ell_0[$ enquanto que a componente viscosa está configurada sobre o intervalo $]\ell_0, \ell[$. Note que aqui a ordem, assim como o comprimento de cada componente não são importantes. Com isto queremos afirmar que nosso resultado permanece o mesmo independentemente da posição ou o tamanho da componente viscosa. Vamos ilustar como segue na figura abaixo.

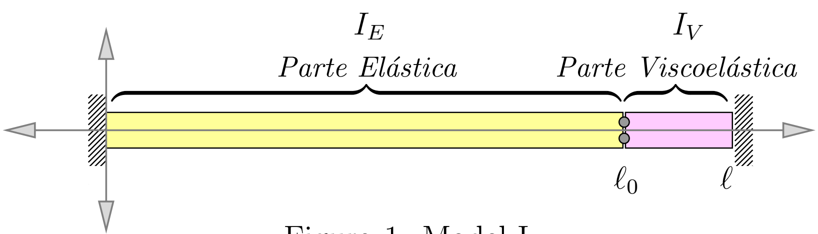


Figura 1: Model I

O modelo que aqui estudamos é definido por

$$\rho\, u_{tt} + M_{xx} = 0, \text{ in } \widetilde{I} \times \mathbb{R}_+ \tag{0.0.1}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \text{ in } \mathbb{R}_+ \tag{0.0.2}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x),\ u(x,0) = u_0(x), \text{ in } \widetilde{I}, \tag{0.0.3}$$

onde $M = (\alpha u_{xx} - \alpha_0 u_t)$, verificando as seguintes condições de transmissão

$$u(\ell_0^-) = u(\ell_0^+) \qquad u_x(\ell_0^-) = u_x(\ell_0^+) \tag{0.0.4}$$

$$M(\ell_0^-) = M(\ell_0^+) \qquad M_x(\ell_0^-) = M_x(\ell_0^+). \tag{0.0.5}$$

Aqui as funções $\rho$, $\alpha$, $\alpha_0$, são possivelmente descontínuas no ponto $x = \ell_0$, isto é,

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 & x \in ]0, \ell_0[ \\ \rho_2 & x \in ]\ell_0, \ell[ \end{cases}, \quad \alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1 & x \in ]0, \ell_0[ \\ \alpha_2 & x \in ]\ell_0, \ell[ \end{cases}, \quad \alpha_0(x) = \begin{cases} 0 & x \in ]0, \ell_0[ \\ \beta & x \in ]\ell_0, \ell[ \end{cases},$$

onde $\rho_i$, $\alpha_i$ e $\beta$ são constantes positivas.

Sistemas com dissipação localizada tem sido estudados por muitos autores em centenas de artigos. Veja por exemplo [15,18,19,23–26,30,33] munidas as referências nelas contidas, para citar apenas alguns deles. O principal resultado dos artigos acima tratam sobre o comportamento assintótico. Em [23] os autores também consideram o modelo de vigas com dissipação viscosa do tipo Kelvin Voigh quando $M = \alpha u_{xx} - \alpha_0 u_{xxt}$. Neste trabalho os autores mostraram que o sistema é sempre exponencialmente estável não importando a posição do mecanismo dissipativo nem o comprimento do subintervalo onde este mecanismo é efetivo. Isto nos mostra que o comportamento assintótico é bem conhecido para este modelo.

Nós aqui estamos interessados nas propriedades regularizantes que este mecanismo produz na solução do modelo definido pelo sistema (0.0.1)–(0.0.3) com $M = \alpha u_{xx} + \alpha_0 u_t$. Observe que o mecanismo dissipativo aqui considerado é mais fraco que aquele estudado em [23].

O principal resultado deste trabalho é mostrar que o semigrupo definido pelo modelo (0.0.1)–(0.0.3) é de classe 4 de Gevrey. Nossa demonstração em particular implica que o semigrupo é imediatamente diferenciável, além de ser exponencialmente estável.

# Capítulo 1

# Preliminares

Nesse capítulo vamos apresentar os resultados que serão necessários para a realização desse trabalho. Os tópicos a serem abordados são os seguintes: Espaços de Sobolev, Análise Funcional, Semigrupos, Semigrupos diferenciáveis, Semigrupos analíticos e Funções e Semigrupos de Gervrey. Os resultados apresentados são resultados clássicos desses tópicos, sendo assim não serão apresentadas demonstrações formais dos mesmos, contudo colocaremos as referências para os conceitos os quais serão citados. Além disso, faremos de tal forma a deixar esse trabalho o mais autossuficiente possível. Vale ressaltar que esse capítulo possui natureza introdutória e por esse motivo deixamos a cargo do leitor a apreciação desse capítulo.
Nas seções que seguem estudaremos a teoria de semigrupos com ênfase nas aplicações às equações diferenciais parciais.

## 1.1 Espaços de Sobolev

Vamos primeiro fixar as seguintes notações

1. $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \; ; \; n \geq 1\}$
2. $\hookrightarrow$ imersão contínua
3. $\overset{c}{\hookrightarrow}$ imersão contínua e compacta

**Teorema 1.1.1 (Du-Bois-Raymond).** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se $\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty$ então $u = 0$ quase sempre em $\Omega$.*

*Demonstração.* Ver [1]. $\square$

**Lema 1.1.2.** *Seja $f \in L^1_{loc}(I)$ tal que*

$$\int_I f\varphi' dx = 0 \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

*Então existe uma constante $C$ tal que $f = C$ q.t.p em I.*

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Proposição 1.1.3.** *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ limitado ou não, $g \in L^1_{loc}(I)$, para $y_0 \in I$ fixo definimos*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, \ \ x \in I.$$

*Então $v \in C(I)$ e*

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi, \ \ \varphi \in C_c^\infty(I).$$

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Teorema 1.1.4 (Desigualdade de Poincaré).** *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $1 \leq p < +\infty$. Então existe uma constante $C$ que depende de $\Omega$ e $p$ tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Teorema 1.1.5 (Regularidade Elíptica).** *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto regular $L$ um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$ e $f \in L^2(\Omega)$. Se $v$ é solução de $Lu = f$ no sentido distribucional então $v \in H^{2m}(\Omega)$.*

*Demonstração.* Ver [3]. $\square$

**Corolário 1.1.6.** *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto regular e $f \in L^2(\Omega)$. Se $v$ é solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ em \ \Omega \\ u = 0 \ em \ \partial\Omega, \end{cases}$$

*então $v \in H^2(\Omega)$ e $||v||_{H^2(\Omega)} \leq C||f||_{L^2(\Omega)}$ onde $C \geq 0$.*

*Demonstração.* Ver [3]. $\square$

**Teorema 1.1.7.** *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < +\infty$ e $I$ intervalo limitado ou não, então existe uma função $\overline{u} \in C(I)$ tal que*

$$u = \bar{u} \quad q.t.p \ em \ \ I,$$

$$\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_x^y u'(t)dt \ \ \ \forall x, y \in \bar{I}.$$

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Teorema 1.1.8.** *Seja $u \in W_{1,p}(I)$ com $1 \leq p < +\infty$. Então existe uma sequência $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,p}(I)$.*

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Teorema 1.1.9.** *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se e somente se $u = 0$ em $\partial I$.*

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Teorema 1.1.10.** *Sejam $1 \leq p < +\infty$ e $u \in L^p(I)$. Definimos $\bar{u}$ por*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in I \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash I \end{cases}$$

*Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se e somente se $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

### 1.1.1 Imersões de Sobolev

**Teorema 1.1.11 (Imersão Contínua).** *Tem-se os seguintes casos:*

1. **Caso:** *$n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < +\infty$. Se verificam:*
   (a) *Se $m\,p < n$ e $p \leq q \leq \frac{n\,p}{n - m\,p}$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.*
   (b) *Se $m\,p = n$ e $p \leq q < +\infty$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.*
   (c) *Se $m\,p > n$ e $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$, $k$ é inteiro não negativo, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, onde*
      i. *$0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{p}$ se $m - k - \frac{n}{p} < 1$.*
      ii. *$0 < \lambda < 1$ se $m - k - \frac{n}{p} = 1$.*
2. **Caso:** *$n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < +\infty$. Se verificam:*
   (a) *Se $p = 1$, então $W^{m,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b^{m-1}(\mathbb{R})$.*
   (b) *Se $1 < p < +\infty$ e $0 < \lambda < 1 - \frac{1}{p}$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\mathbb{R})$.*
3. **Caso:** *$n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ e $p = +\infty$. Verifica-se: $W^{m,+\infty}(\mathbb{R}^n)$ é isomorfo a $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$*

*Demonstração.* Ver [4]. $\square$

**Teorema 1.1.12 (Imersão Contínua).** *Tem-se os seguintes casos:*

1. **Caso:** *$n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < +\infty$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^m$. Se verificam:*

   (a) *Se $m\,p < n$ e $p \leq q \leq \frac{n\,p}{n-m\,p}$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.*

   (b) *Se $m\,p = n$ e $p \leq q < +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.*

   (c) *Se $m\,p > n$ e $k < m - \frac{n}{p} \leq k+1$, $k$ é inteiro não negativo, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, onde*

      i. *$0 < \lambda \leq m - k - np$ e $m - k - \frac{n}{p} < 1$.*

      ii. *$0 < \lambda < 1$ se $m - k - \frac{n}{p} = 1$.*

2. **Caso:** *$n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < +\infty$. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto limitado. Se verificam:*

   (a) *Se $p = 1$, então $W^{m,1}(I) \hookrightarrow C^{m-1}(\bar{I})$.*

   (b) *Se $1 < p < +\infty$ e $0 < \lambda \leq 1 - \frac{1}{p}$, então $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\bar{I})$.*

3. **Caso:** *$n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ e $p = +\infty$. Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^m$. Verifica-se: $W^{m,+\infty}(\Omega)$ é isomorfo a $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.*

*Demonstração.* Ver [4]. □

**Corolário 1.1.13.** *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $m \in \mathbb{N}$. Então $W_0^{m,+\infty}(\Omega)$ é isomorfo a $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.*

*Demonstração.* Ver [4]. □

**Definição 1.1.14.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ um aberto e $M \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que $M$ **está fortemente incluído**, denotado $M \subset\subset \Omega$, quando $\overline{M} \subset \Omega$ e $\overline{M}$ é compacto.*

**Teorema 1.1.15. [Fréchet - Kolmogorov]** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$ limitado, onde $1 \leq p < +\infty$. Suponha-se que*

1. *$\forall \epsilon > 0$, $\exists \Lambda \subset\subset \Omega$ tal que $||f||_{L^p(\Omega/\Lambda)} < \epsilon$, $\forall f \in \mathcal{F}$.*

2. *$\forall \epsilon > 0$ e $\forall \Lambda \subset\subset \Omega$ existe $\delta > 0$ com $\delta < dist(\Lambda, \mathbb{R}^n \backslash \Omega)$ tal que $||\tau_h f - f||_{L^p(\Omega/\Lambda)} < \epsilon$, $\forall f \in \mathcal{F}$ e $\forall h \in \mathbb{R}^n$ com $|h| < \delta$.*

*Então $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$, i.e $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto em $L^p(\Omega)$.*

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Teorema 1.1.16 (Rellich - Kondrachov).** *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^1$. Se verificam:*

1. *Se $p < n$ e $1 \leq q < \frac{n\,p}{n-p}$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*
2. *Se $p = n$ e $1 \leq q < +\infty$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*
3. *Se $n < p \leq +\infty$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega})$*

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Corolário 1.1.17.** *Sejam $n,\ m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^m$. Se verificam:*

1. *Se $p < n$ e $1 \leq q < \frac{n\,p}{n-p}$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m-1,q}(\Omega)$.*
2. *Se $p = n$ e $1 \leq q < +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m-1,q}(\Omega)$.*
3. *Se $n < p \leq +\infty$ então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m-1}(\overline{\Omega})$.*

*Demonstração.* Ver [4]. $\square$

**Corolário 1.1.18.** *Sejam $n,\ m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se verificam:*

1. *Se $\Omega$ é de classe $C^{m+1}$, então $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,p}(\Omega)$.*
2. *$W_0^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W_0^{m,p}(\Omega)$.*

*Demonstração.* Ver [4]. $\square$

**Teorema 1.1.19** (Imersão Compacta)**.** *Sejam $n,\ m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^m$. Se verificam:*

1. *Se $m\,p < n$ e $1 \leq q < \frac{n\,p}{n-m\,p}$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*
2. *Se $m\,p = n$ e $1 \leq q < +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*
3. *Se $m\,p > n$ e $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$, $k$ é um inteiro não negativo, então $W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$.*

*Demonstração.* Ver [4]. $\square$

## 1.2 Análise Funcional

Nesta seção, todos os espaços vetoriais podem ser definidos sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, assim como também resultados da Teoria de semigrupo que usaremos neste trabalho.

### 1.2.1 Operadores lineares limitados e não limitados

**Definição 1.2.1.** *Suponhamos que $X, Y$ são dois espaços vetoriais normados. A aplicação $\mathcal{A} : X \longrightarrow Y$ que satisfaz*

1. *Para todo $f \in X$, existe um único $g \in Y$ tal que $\mathcal{A}f = g$,*

2. *$\mathcal{A}(\lambda f + g) = \lambda\mathcal{A}f + \mathcal{A}g$, $\forall f; g \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,*

*é chamado de **operador linear**.*

**Definição 1.2.2.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:*

1. *$A$ é dito **limitado** quando existe uma constante $C \geq 0$ tal que $||\mathcal{A}u||_Y \leq C||u||_X$; $\forall\ u\ \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Caso contrário, $\mathcal{A}$ é dito **não limitado**.*

2. *$\mathcal{A}$ é dito **densamente definido** quando $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = X$.*

3. *$\mathcal{A}$ é dito **fechado** quando o gráfico de $\mathcal{A}$, $G(\mathcal{A}) = \{(u, \mathcal{A}u) \in X \times Y : u \in D(A)\}$ , é um subespaço fechado de $X \times Y$, onde $X \times Y$ é um espaço de Banach com a norma $||.||_{X\times Y} = (||.||_X^2 + ||.||_Y^2)^{1/2}$.*

Sejam $X$ e $Y$ espaços normados. Representa-se por

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{\mathcal{A} : X \longrightarrow Y \text{ tal que } \mathcal{A} \text{ é linear e limitado}\}.$$

$\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço normado com a norma definida por

$$||\mathcal{A}||_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{||u||_X \leq 1} ||\mathcal{A}u||_Y.$$

Além disso, se $Y$ é um espaço de Banach então $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço de Banach. Denotar-se-á por $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

**Teorema 1.2.3 (Teorema da Aplicação Aberta).** *Sejam $X$ e $Y$ espaços Banach e $\mathcal{A} : X \longrightarrow Y$ uma operador linear, limitado e sobrejetivo. Então existe $r > 0$ tal que $B_Y(0; r) \subset \mathcal{A}(B_X(0; 1))$.*

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Corolário 1.2.4.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços Banach e $\mathcal{A} : X \longrightarrow Y$ uma operador linear, limitado e bijetivo. Então $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado.*

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Teorema 1.2.5 (Teorema do Gráfico Fechado).** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $\mathcal{A} : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Se $\mathcal{A}$ é fechado então é limitado.*

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Teorema 1.2.6 (Operador Fechado).** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $\mathcal{A} : X \longrightarrow Y$ um operador linear.*

1. *Se $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é um subconjunto fechado de $X$ ; então $\mathcal{A}$ é fechado.*

2. *Se $\mathcal{A}$ é fechado e $Y$ é um espaço de Banach, então $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é um subconjunto fechado de $X$.*

*Demonstração.* Ver [6]. $\square$

**Teorema 1.2.7 (Teorema da Limitação Uniforme).** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $Y$ um espaço normado e $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ uma família (não necessariamente contável) em $\mathcal{L}(X, Y)$. Suponha que*

$$\sup_{i\in I} ||\mathcal{A}_i u||_Y < \infty; \quad \forall u \in X.$$

*Então*

$$\sup_{i\in I} ||\mathcal{A}_i||_{L(X,Y)} < \infty.$$

*Demonstração.* Ver [2]. $\square$

**Teorema 1.2.8.** *Sejam $X$ um espaço normado e $Y$ um subespaço de $X$. Então*

1. *Se $X$ é reflexivo, então é completo.*

2. *Se $X$ um espaço de Banach, então [$Y$ é completo $\Leftrightarrow$ $Y$ é fechado em $X$].*

3. *Se o espaço dual $X'$ é separável, então $X$ é separável.*

4. *Se $Y$ tem dimensão finita, então é completo, reflexivo e fechado em $X$.*

*Demonstração.* Ver [6]. $\square$

**Proposição 1.2.9.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $Y$ um subespaço de $X$ e $0 < r < 1$. Se $\overline{Y} \neq X$, então existe um $y_0 \in X$ tal que $||y_0|| = 1$ e $||y - y_0|| \geq r$; $\forall y \in \overline{Y}$.*

*Demonstração.* Ver [9]. □

**Teorema 1.2.10.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$. Se $||\mathcal{A}|| < 1$, então $(I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e $(I - \mathcal{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$.*

*Demonstração.* Ver [6]. □

### 1.2.2 Espectro e resolvente de um operador linear

**Definição 1.2.11.** *Seja $\mathcal{A}$ um operador definido sobre um espaço de Banach $X$. Denotemos por $\rho(\mathcal{A})$,* ***o conjunto resolvente de*** $\mathcal{A}$

$$\rho(\mathcal{A}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X) \text{ e } (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{ com domínio denso em } X\right\}.$$

*Denotemos por $\sigma(\mathcal{A})$* ***o espectro de*** *$\mathcal{A}$, que definiremos como o complemento de $\rho(\mathcal{A})$ respeito a $\mathbb{C}$, isto é, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.*

**Lema 1.2.12.** *Seja $\mathcal{A}$ um operador de $X$, então $\rho(\mathcal{A})$ é um conjunto aberto e portanto o espectro de $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A})$ é um conjunto fechado em $\mathbb{C}$.*

*Demonstração.* Ver [8]. □

Um elemento $\lambda$ pertence ao espectro $\sigma(\mathcal{A})$ se uma das seguintes propriedades se verifica

O operador $\lambda I - \mathcal{A}$ não é injetor

O operador $\lambda I - \mathcal{A}$ é injetor mas não é sobre.

Este último caso ainda pode ser decomposto em dois casos, dependendo das propriedades da imagem do operador. Isto é, quando a imagem é densa ou não. Assim, podemos denotar como

$$\begin{aligned}
\sigma_d(\mathcal{A}) &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - \mathcal{A}) \text{ não é injetor}\} \\
\sigma_c(\mathcal{A}) &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - \mathcal{A}) \text{ é injetor não é sobre mas a imagem é densa em X}\} \\
\sigma_r(\mathcal{A}) &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - \mathcal{A}) \text{ é injetor mas a imagem não é densa}\}.
\end{aligned}$$

O conjunto $\sigma_d$ é chamado de espectro discreto, o conjunto $\sigma_c$ é chamado de espectro contínuo e finalmente $\sigma_r$ é chamado de espectro residual. Claramente estes três subconjuntos do espectro de $\mathcal{A}$ são disjuntos e sua união é igual a $\sigma(\mathcal{A})$. Muitos autores costumam chamar de espectro contínuo a união de $\sigma_c \cup \sigma_r$.

**Lema 1.2.13.** *Suponhamos que $\mathcal{A}$ seja um operador contínuo, então o espectro de $\mathcal{A}$ é um conjunto fechado e limitado, isto é, um conjunto compacto. Mais precisamente*

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset B_{\|\mathcal{A}\|}(0) = \{z \in \mathbb{C};\ \|z\| \leq \|S\|\}.$$

*Demonstração.* Ver [8]. □

**Definição 1.2.14.** *Seja $\mathcal{A}$ um operador num espaço de Banach. Chamaremos de* ***cota superior do espectro de*** $\mathcal{A}$ *o valor*

$$\omega_\sigma(\mathcal{A}) = \sup\{\text{Re}\ \lambda;\ \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

**Definição 1.2.15.** *Diremos que $R_\sigma(\mathcal{A})$ é o* ***raio espectral*** *do operador $\mathcal{A}$ se ele é o raio do menor círculo complexo, centrado na origem, que contém todos os elementos do espectro de $\mathcal{A}$.*

A seguir, a fórmula de Gelfand para o raio espectral.

**Lema 1.2.16 (Fórmula de Gelfand).** *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear e contínuo. Denotemos por $R_\sigma(\mathcal{A})$ o raio espectral de $\mathcal{A}$. Então, temos*

$$R_\sigma(\mathcal{A}) = \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{A}^k\|^{1/k}.$$

*Demonstração.* Ver [8]. □

### 1.2.3 Espaços de Hilbert

**Definição 1.2.17.** *Um* ***produto interno*** *num espaço vetorial $X$ é um aplicação*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

*de maneira que satisfaz para $u, v, w \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. $\langle \lambda u + vw\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
2. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$
3. $\langle u, u\rangle \geq 0$
4. $\langle u, u\rangle = 0$ *se e somente se* $u = 0$

*Num espaço com produto interno $(H, \langle\cdot\rangle)$ a função $u \to \sqrt{\langle u, u\rangle}$, $u \in X$ é uma norma, chamada* ***norma induzida pelo produto interno****.*

**Definição 1.2.18.** *Um espaço de* ***Hilbert*** *$H$ é um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno.*

**Teorema 1.2.19.** *Sejam $H$ um espaço de Hilbert e $Y$ um subespaço de $H$ então,*

1. *$H$ é reflexivo.*

2. *Se $H$ é separável, então $Y$ é separável.*

3. *Se $Y$ é fechado em $H$, então $Y = (Y^{\perp})^{\perp}$ e $H = Y \oplus Y^{\perp}$.*

4. *$Y$ é denso em $H \Longleftrightarrow Y^{\perp} = 0$.*

*Demonstração.* Ver [6]. $\square$

**Definição 1.2.20.** *Sejam $H$ um espaço de Hilbert $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq H \longrightarrow H$ um operador linear, tal que $D, \mathcal{D}(\mathcal{A})$ subespaços de $H$, $D \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $B \in \mathcal{L}(H)$*

1. *$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ quando $\langle \mathcal{A}u, v \rangle_H = \langle u, \mathcal{A}v \rangle_H$ ; $\forall u; v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

2. *$\mathcal{A}$ é dito* ***simétrico*** *quando $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$.*

3. *$\mathcal{A}$ é dito* ***autoadjunto*** *quando $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.*

4. *$B$ é dito* ***unitário*** *quando $B^* = B^{-1}$.*

5. *$\mathcal{A}$ é dito* ***não negativo*** *se $\langle \mathcal{A}x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

6. *$\mathcal{A}$ é dito* ***positivo*** *se $\langle \mathcal{A}x, x \rangle > 0$, $\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ $x \neq 0$.*

7. *A variação numérica de $\mathcal{A}$ é o conjunto*
   *$\Theta(\mathcal{A}) = \{\langle \mathcal{A}x, x \rangle$ tal que $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $||x|| = 1\}$.*

8. *A é dito* ***limitado inferiormente*** *se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle \mathcal{A}x, x \rangle \geq m||x||^2 \;\; x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

   *Neste caso escrevemos $\mathcal{A} \geq m$ é dizemos que $m$ é uma cota inferior para $\mathcal{A}$. A maior cota inferior de $\mathcal{A}$ é denotada por $m_{\mathcal{A}}$ a qual é dada por $m_{\mathcal{A}} = \inf \Theta(\mathcal{A})$.*

9. *$D$ é um* ***cerne*** *de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ se $D$ é denso em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ para a norma $||\cdot|| = ||\cdot||_H + ||\mathcal{A}(\cdot)||_H$.*

**Teorema 1.2.21.** *Seja $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq H \longrightarrow H$ um operador linear e simétrico, são equivalentes*

1. $\mathcal{A}$ *é autoadjunto.*

2. $\mathcal{A}$ *é fechado e* $Ker(\mathcal{A}^* \pm i) = \{0\}$.

3. $Im(A \pm i) = H$.

*Demonstração.* Ver [11]. □

**Definição 1.2.22.** *Seja* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq H \longrightarrow H$ *um operador linear.*

1. $\mathcal{A}$ *é dito* ***dissipativo*** *se*

$$Re\,\langle \mathcal{A}x, x\rangle \leq 0 \;\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

2. $\mathcal{A}$ *é dito* ***maximal monótono*** *se* $Im(I + \mathcal{A}) = H$.

**Proposição 1.2.23.** *Seja* $\mathcal{A}$ *um operador maximal monótono. Então*

1. $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *é denso em H.*

2. $\mathcal{A}$ *é um operador fechado.*

3. *Para todo* $\lambda > 0$, $(I + \lambda\mathcal{A})$ *é uma bijeção de* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *sobre* $H$, $(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}$ *é um operador limitado e* $||(I + \lambda\mathcal{A})||^{-1} \leq 1$.

*Demonstração.* Ver [6]. □

**Proposição 1.2.24.** *Seja* $\mathcal{A}$ *um operador maximal monótono. Se* $\mathcal{A}$ *é simétrico então* $A$ *é autoadjunto.*

*Demonstração.* Ver [6]. □

### 1.2.4 Teorema de Representação de Riesz e Teorema de Lax-Milgram

**Teorema 1.2.25 (Teorema de Representação de Riesz).** *Sejam* $(H, \langle\, \cdot, \cdot\, \rangle_H)$ *um espaço de Hilbert e* $f \in H'$. *Então existe um único* $v_f \in H$ *tal que* $f(u) = \langle u, v_f\rangle_H$, $\forall u \in H$ *e* $||f||_{H'} = ||v_f||$. *Por outro lado; para cada* $v \in H$ *a aplicação* $g_v(u) = \langle u, v\rangle_H$ $\forall u \in H$ *pertence a* $H'$ *e* $||g_v||_{H'} = ||v||$.

*Demonstração.* Ver [6]. □

**Definição 1.2.26.** *Sejam* $X$ *um espaço normado,* $B(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ *e* $f : X \to C$ *aplicações.*

1. $B(\cdot,\cdot)$ *é* ***uma forma sesquilinear*** *quando* $\forall u, v, w \in X$ *e* $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$*, se verifica:*

$$B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v).$$
$$B(u, \alpha v + \beta w) = \bar{\alpha} B(u, v) + \bar{\beta} B(u, w).$$

2. *Se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, B(\cdot,\cdot)$ *é chamada* ***uma forma bilinear****.*

3. $f$ *é dita* ***uma forma antilinear*** *quando* $f(\alpha u + v) = \bar{\alpha} f(u) + f(v),\ \forall u, v \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

**Observação 1.2.27.** *Se* $f$ *é antilinear e* $g \in X'$*, então* $f \in X'$ *e* $g$ *é antilinear, onde* $X$ *é um espaço normado complexo.*

**Definição 1.2.28.** *Sejam* $X$ *um espaço normado,* $B(\cdot,\cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ *uma forma sesquilinear.*

1. $B(\cdot,\cdot)$ *é dita* ***contínua ou limitada*** *quando existe* $M > 0$ *tal que* $|B(u, v)| \leq M||u||||v||,\ \forall u, v \in X$.

2. $B(\cdot,\cdot)$ *é dita* ***coerciva*** *quando existe* $c > 0$ *tal que* $|B(u, u)| \geq c||u||^2,\ \forall u \in X$.

**Teorema 1.2.29** (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sejam* $H$ *um espaço de Hilbert e* $B(\cdot,\cdot)$ *uma forma sesquilinear, contínua e coerciva. Então existe um único isomorfismo de espaços de Hilbert* $T : H \to H$ *tal que* $B(u, v) = \langle u, Tv \rangle \quad \forall\ u$ *e* $v \in H$.

*Demonstração.* Ver [13]. □

**Corolário 1.2.30** (Caso real)**.** *Sejam* $H$ *um espaço de Hilbert real e* $B(\cdot,\cdot)$ *uma forma bilinear, contínua e coerciva. Se* $f \in H'$ *então existe uma única* $u \in H$ *tal que* $B(u, v) = f(v),\ \forall v \in H$.

*Demonstração.* Ver [6]. □

**Corolário 1.2.31** (Caso complexo)**.** *Sejam* $H$ *um espaço de Hilbert complexo e* $B(\cdot,\cdot)$ *uma forma, sesquilinear contínua e coerciva. Se* $f : H \longrightarrow \mathbb{C}$ *é uma aplicação antilinear continua, então existe uma única* $u \in H$ *tal que* $B(u, v) = f(v)\ \forall v \in H$.

*Demonstração.* Ver [14]. □

## 1.3 Semigrupos

**Definição 1.3.1.** *Seja $X$ um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de $X$. Uma família de operadores $T(s) : X \to X$, com $s \in \mathbb{R}^+$ satisfazendo*

$T(0) = I$, *onde $I$ é o operador identidade de*

$T(s) \circ T(t) = T(s + t)$

*é chamado de **semigrupo**.*

**Definição 1.3.2.** *Diremos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo $T$, se*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X; \quad \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \text{existe em } X \right\}$$

*e para cada $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ temos*

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt} T(t)x \bigg|_{t=0}.$$

Da definição anterior podemos reescrever o domínio do operador como

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = w \in X; \quad \mathcal{A}w \in X.$$

**Proposição 1.3.3.** *$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é um subespaço vetorial de $X$ e $\mathcal{A}$ é um operador linear.*

*Demonstração.* Ver [8]. □

**Definição 1.3.4.** *Diremos que um semigrupo $T(t)$ é uniformemente contínuo se*

$$||T(t) - I||_{\mathcal{L}(X)} \ \to \ 0.$$

**Teorema 1.3.5.** *Um semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ é uniformemente contínuo se, e somente se $A$ é limitado.*

*Demonstração.* Ver [8]. □

**Observação 1.3.6.** *O resultado acima será de fundamental importância quando motivarmos a definição de semigrupos diferenciáveis.*

Para tratar de semigrupos gerados por operadores não limitados introduzimos a seguinte definição.

**Definição 1.3.7.** *Diremos que um semigrupo $T(t)$ é de **classe** $C_0$, ou simplismente semigrupo $C_0$, se*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \quad \textit{forte em} \qquad X.$$

É simples verificar que todo semigrupo uniformemente limitado é semigrupo $C_0$. O recíproco como vimos no teorema 1.3.5 não é verdadeiro. Isto é, quando o semigrupo é gerado por um operador não limitado, o limite depende de $x$.

A definição de semigrupo $C_0$ implica que o semigrupo é continuo em $t = 0$. Usando a propriedade de semigrupo concluimos que o semigrupo é contínuo sobre toda a semireta $\mathbb{R}_+$.

Mostraremos a seguir que são válidas para os semigrupos $C_0$ as propriedades fundamentais da função exponencial.

**Proposição 1.3.8.** *Se $T$ é um semigrupo $C_0$, então $||T(t)||$ é uma função limitada em todo intervalo $[0, T]$.*

*Demonstração.* Ver [8]. □

**Corolário 1.3.9.** *Todo semigrupo $C_0$ é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x \quad \forall\, x \in X.$$

*Demonstração.* Ver [8]. □

**Observação 1.3.10.** *Vamos a algumas observações importantes:*

1. *Os semigrupos $C_0$ são conhecidos por semigrupos fortemente contínuos o que encontra justificativa no corolário anterior.*

2. *Uma propriedade importante pode ser visto na demonstração da* **Proposição*1.3.8***, *a saber, existem $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que*

   $$||T(t)|| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0,$$

   *resultado que será melhorado no próximo resultado.*

**Proposição 1.3.11.** *Seja $T$ um semigrupo $C_0$. Então*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{log||T(t)||}{t} = \inf_{t>0} \frac{log||T(t)||}{t} = \omega_0,$$

*e para cada $\omega > \omega_0$, existe uma constante $M \geq 1$ tal que*

$$||T(t)|| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \tag{1.3.1}$$

*Demonstração.* Ver [8]. □

O ínfimo de todos os expoentes $w$ para os quais uma estimativa da forma (1.3.1) vale para um dado semigrupo fortemente contínuo desempenhará um papel importante na sequência.

**Definição 1.3.12.** *Suponhamos que $X$ é um espaço de Banach e $T(t)$ é um semigrupo $C_0$, então o seguinte número*

$$\omega_0(T(t)) := \{\omega \in \mathbb{R}; \exists M_\omega \geq 1 \text{ tal que } ||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\omega e^{\omega t}, \forall t \geq 0\}.$$

*representa o tipo do semigrupo $T(t)$ e pode ser calculado mediante o limite*

$$\omega_0(T(t)) = \lim_{t\to\infty} \frac{ln||T(t)||_{\mathcal{L}(X)}}{t}.$$

**Observação 1.3.13.** *Quando $\mathcal{A}$ é um operador não limitado o semigrupo $T(t)$ gerado por $\mathcal{A}$ não pode ser extendido analíticamente a todo o plano complexo em geral. Quando o operador não é limitado, veremos na seção 1.6 as condições que deve satisfazer o gerador infinitesimal para que o semigrupo possa ser extendido analíticamente sobre um subconjunto do plano complexo. Mas não será analítica sobre todo o plano complexo a não ser que $A$ seja um operador limitado.*

**Teorema 1.3.14.** *Seja $T(t)$ um semigrupo $C_0$, ou seja, existem constantes $w \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ tal que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}$$

*para todo $t \geq 0$. Para $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal seguem as seguintes propriedades:*

1. *se $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\, ds$ existe para todo $x \in X$, então $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e $R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda)$.*

2. *Se $Re\ \lambda > w$, então $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e o resolvente é dado pela expressão integral como no item 1.*

3. *$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{Re\ \lambda - w}$ para todo $\Re\ \lambda > w$.*

*Demonstração.* Ver [12]. □

A fórmula para $R(\lambda, \mathcal{A})$ no item 1 do teorema acima é chamada de representação integral do resolvente. É claro que a integral deve ser entendida como uma integral de Riemann, ou seja,

$$R(\lambda, \mathcal{A})x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\, ds$$

para todo $x \in X$. Tendo em mente esta interpretação, escreveremos frequentemente

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)\, ds.$$

**Definição 1.3.15.** *Seja um operador linear $\mathcal{A}$. Definimos seu limite espectral como*

$$s(\mathcal{A}) := \sup\{Re\ \lambda\ :\ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

Como consequência imediata do Teorema 1.3.14 item 2 é mantida a seguinte relação entre o limite de crescimento de um semigrupo fortemente contínuo e o limite espectral do seu gerador.

**Corolário 1.3.16.** *Para um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ com gerador $\mathcal{A}$ temos que*

$$-\infty \leq s(\mathcal{A}) \leq w_0 \leq +\infty.$$

*onde $w_0$ é o tipo do semigrupo.*

*Demonstração.* Ver [12]. $\square$

**Definição 1.3.17.** *Quando $\omega_0 < 0$, existe $M \geq 1$ tal que*

$$||T(t)|| \leq M,\ \forall t \geq 0.$$

*Nesse caso diz-se que $T$ é um semigrupo $C_0$ uniformemente limitado. Se, além disso $M = 1$, $T$ é dito semigrupo $C_0$ de contrações.*

**Teorema 1.3.18.** *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores, então $\mathcal{A}$ comuta com $T$, isto é,*

$$T(t)\mathcal{A}w = \mathcal{A}T(t)w, \qquad \forall\ t \in \mathbb{R} \quad w \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

*Demonstração.* Ver [8]. $\square$

Seja $T$ um semigrupo $C_0$ com $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Vamos mostrar algumas propriedades desse semigrupo e de seu gerador infinitesimal.

**Proposição 1.3.19.** *Seja $T$um semigrupo $C_0$ e $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de $T$.*

1. *Se $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então $T(t)x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x.$$

2. *Se $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \mathcal{A}T(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)\mathcal{A}xd\tau.$$

3. *Se $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então $\int_0^t T(\tau)xd\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e*

$$T(t)x - x = \mathcal{A}\int_0^t T(\tau)xd\tau.$$

*Demonstração.* Ver [8]. □

**Proposição 1.3.20.** 1. *O gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ de $T(t)$ um semigrupo $C_0$ é um operador linear fechado e seu domínio é denso em $X$.*

2. *Um operador linear $\mathcal{A}$, fechado e com domínio denso em $X$, é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo $T(t)$ de classe $C_0$.*

*Demonstração.* Ver [8]. □

**Definição 1.3.21.** *Seja $T(t)$ um semigrupo $C_0$ e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Ponhamos $\mathcal{A}^0 = I$, $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$ e supondo que $\mathcal{A}^{n-1}$ esteja definido, vamos definir $\mathcal{A}^n$ por:*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{x;\ x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \ \text{ e } \ \mathcal{A}^{n-1}x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}$$

$$\mathcal{A}^n x = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}x), \ \ \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n).$$

**Proposição 1.3.22.** *Seja $T(t)$ um semigrupo $C_0$ e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Temos que:*

1. *$\mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$ é um subespaço de $X$ e $\mathcal{A}^n$ é um operador linear de $X$.*

2. *Se $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, então $T(t)x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, $\forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n}T(t)x = \mathcal{A}^n T(t)x = T(t)\mathcal{A}^n x, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. *É válida a formula de Taylor se: $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, então*

$$T(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!}T^k T(a)x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}\mathcal{A}^n T(\tau)xd\tau.$$

4. *$T(t)^n x = \int_0^t \ldots \int_0^t T(\tau_1 + \cdots + \tau_n)\mathcal{A}^n x d\tau_1 \ldots d\tau_n$, $\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$.*

*5.* $\cap_n \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$ *é denso em* $X$.

*Demonstração.* Ver [8]. $\square$

**Lema 1.3.23.** *Seja* $\mathcal{A}$ *um operador linear fechado de* $X$. *Pondo para cada* $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^k)$,

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} ||\mathcal{A}^j x|| \tag{1.3.2}$$

*o funcional* $|\cdot|_k$ *é uma norma em* $\mathcal{D}(\mathcal{A}^k)$ *e* $(\mathcal{D}(\mathcal{A}^k), |\cdot|_k)$ *é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Ver [8]. $\square$

**Definição 1.3.24.** *A norma em 1.3.2 é dita* ***norma do gráfico****. O espaço de Banach que se obtém de* $(\mathcal{D}(\mathcal{A}^k), |\cdot|_k)$ *vamos denotar por* $[\mathcal{D}(\mathcal{A}^k)]$.

**Proposição 1.3.25.** *Se* $\mathcal{A}$ *é o gerador infinitesimal de um* $T(t)$ *semigrupo* $C_0$, *então* $\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^k)$ *temos que* $T(t)x \in C^{n-k}([0,\infty); [\mathcal{D}(\mathcal{A}^k)])$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

*Demonstração.* Ver [8]. $\square$

**Observação 1.3.26.** *Denotemos por* $T(t)$ *o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$. *É simples verificar que derivadas de ordem* $k$ *deste operador verificam*

$$\frac{d^2}{dt^2}T(t)x = \mathcal{A}^2 T(t)x, \quad \frac{d^k}{dt^k}T(t)x = \mathcal{A}^k T(t)x,$$

*para* $x \in D(\mathcal{A}^k)$. *Portanto, para calcular a derivada de ordem* $k$ *do operador* $T$, *basta compor o semigrupo* $T$ *com o operador* $\mathcal{A}$ $k$*-vezes. Assim podemos escrever*

$$\frac{d^k}{dt^k}T(t)x = [\mathcal{A}T(\frac{t}{k})]^k x, \quad ou \quad \frac{d^k}{dt^k}T(t)x = [\frac{d}{dt}T(\frac{t}{k})]^k x.$$

### 1.3.1 O problema de Cauchy

**Definição 1.3.27.** *Diremos que a equação*

$$U_t = \mathcal{A}U, \quad U(0) = U_0$$

*é autônoma, quando* $\mathcal{A}$ *é um operador independente de* $t$.

**Proposição 1.3.28.** *Seja* $\mathcal{A}$ *um operador num espaço* $X$. *Suponhamos que para todo* $U_0 \in X$ *existe uma única solução da equação* $U : [0, \infty[ \quad \to \quad X$ *satisfazendo*

$$U_t = \mathcal{A}U, \quad U(0) = U_0.$$

*Então o operador* $S(t)$, *dado por* $S(t)U_0 = U(t)$ *define um semigrupo em* $X$.

*Demonstração.* Ver [8]. $\square$

**Corolário 1.3.29.** *Seja $T$ um semigrupo gerado por $\mathcal{A}$, então $D(\mathcal{A})$ é invariante por $T(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é,*

$$T(t)(D(\mathcal{A})) \subset D(\mathcal{A}).$$

*Demonstração.* Ver [8]. $\square$

Denotemos por $U(t) = T(t)w$, é simples verificar que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}U(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{U(t+h)-U(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)w-T(t)w}{h} \\
&= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-w}{h} \\
&= T(t)\mathcal{A}w \\
&= \mathcal{A}T(t)w = \mathcal{A}U.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U \ , \ U(0) = w. \tag{1.3.3}$$

Em resumo, dado um semigrupo $T$, é possível encontrar um operador $\mathcal{A}$, gerador infinitesimal de $T$ e a função $U(t) = T(t)w$ é solução de (1.3.3). Este é um problema simples, porém sem interesse nas aplicações. Porém mais a frente, mais precisamente nas subseções **1.3.2** e **1.3.3** veremos que dado um operador $\mathcal{A}$ quais condições ele deve ter para que ele seja o gerador infinitesimal de um semigrupo.

## Regularidade

Seja $T$ um semigrupo $C_0$, então é válido o limite

$$\lim_{h\to 0^+} T(h)w = w \text{ em } X.$$

Pelas propriedades de semigrupos, temos que

$$\lim_{t\to t_0} T(t)w = T(t_0)w.$$

De fato, denotemos por $h = t - t_0$, então

$$\lim_{h\to 0} T(t_0+h)w = \lim_{h\to 0}(t_0)T(h)w = T(t_0)\lim_{h\to 0} T(h)w = T(t_0)w,$$

para todo $x \in X$. Isto quer dizer que a função $U(t) = T(t)w$ é contínua para todo elemento $w \in X$. Isto é,

$$t \longmapsto T(t)w \in C(0, \infty; X).$$

Se $w \in D(\mathcal{A})$ existe o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(h)w - w}{h} = \mathcal{A}w.$$

Usando as propriedades de semigrupos, encontramos

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(t+h)w - T(t)w}{h} = T(t) \lim_{h \to 0} \frac{T(h)w - w}{h} = T(t)\mathcal{A}w.$$

Analogamente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(t+h)w - T(t)w}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{T(h)[T(t)w] - [T(t)w]}{h} = \mathcal{A}T(t)w.$$

Da unicidade do limite, encontramos

$$T(t)\mathcal{A}w = \mathcal{A}T(t)w, \ \ \forall w \in D(\mathcal{A}).$$

Isto implica que o semigrupo comuta com seu gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ sobre $D(\mathcal{A})$ e que a função $U(t) = T(t)w$ é uma função diferenciável isto é,

$$t \longmapsto T(t)w \in C^1([0, +\infty[; X).$$

Finalmente, se dotamos o domínio de $\mathcal{A}$, $D(\mathcal{A})$ com a norma do gráfico, isto é,

$$\|w\|^2_{D(\mathcal{A})} = \|w\|^2 + \|\mathcal{A}w\|^2,$$

é simples verificar que $D(\mathcal{A})$ e um espaço completo se $\mathcal{A}$ é fechado. Tomando $w \in D(\mathcal{A})$, temos que $t \longmapsto T(t)$ é uma função contínua na norma $D(\mathcal{A})$. De fato

$$\lim_{t \to t_0} \mathcal{A}T(t)w = \lim_{t \to t_0} T(t)\mathcal{A}w = T(t_0)\mathcal{A}w = \mathcal{A}T(t_0)w.$$

Portanto,

$$t \longmapsto T(t)w \in C^0([0, +\infty[; D(\mathcal{A})).$$

Em resumo, se denoramos por $U(t) = T(t)w$ obtemos

$$\begin{aligned} &w \in X \Rightarrow U \in C([0, +\infty[; X) \\ &w \in D(A) \Rightarrow U \in C^1([0, +\infty[; X) \cap C([0, +\infty[; D(A)). \end{aligned}$$

### 1.3.2 Teorema de Hille-Yosida

Sabemos que dado um semigrupo é simples encontrar seu gerador, basta apenas avaliar o limite da definição de gerador infinitesimal, mas o problema inverso é mais complexo e o resolvemos usando o teorema de Hille-Yosida. Antes de apresentarmos o Teorema de Hille-Yosida, consideremos as seguintes definições

**Definição 1.3.30.** *Seja $\mathcal{A}$ um operador em $X$, um espaço de Banach. Chamaremos de conjunto resolvende de $\mathcal{A}$, ao conjunto:*

$$\varrho(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C};\ \ w \mapsto (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} w \in \mathcal{L}(X) \right\}.$$

*Chamaremos de espectro de $\mathcal{A}$ ao conjunto $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \varrho(\mathcal{A})$.*

**Definição 1.3.31.** *1.26. Sejam $X$ um espaço de Banach $X'$ seu dual e $\mathcal{A}$ $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq X \quad \rightarrow \quad X$ um operador linear. Denota-se o valor de $u^* \in X^*$ em $u \in X$ por $\langle u, u^* \rangle_{X \times X^*}$. Para cada $u \in X$ define-se o conjunto dualidade $F(u) \subset X^*$ como $F(u) = \{u^* \in X^* : \langle u, u^* \rangle_{X \times X^*} = ||u||^2 = ||u||^{*2}\}$.*
*$\mathcal{A}$ é chamado dissipativo quando $Re \, \langle \mathcal{A}u, u^* \rangle_{X \times X^*} \leq 0$ ; $\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ com $u^* \in F(u)$.*

**Observação 1.3.32.** *Seja $H$ um espaço de Hilbert, então usando o* **Teorema de Representação de Riesz***, temos que*

$$\mathcal{A} \text{ é dissipativo quando } Re(\mathcal{A}U, U)_H \leq 0, \quad \forall\, U \in H.$$

Abaixo veremos uma caracterização muito útil de operadores dissipativos.

**Teorema 1.3.33.** *Seja $H$ um espaço de Hilbert e $S(t)$ o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$. Então, $S$ é um semigrupo de contrações se, e somente se $\mathcal{A}$ é dissipativo.*

*Demonstração.* Ver [8]. □

A seguir estabeleceremos uma condição necessária e suficiente para que um operador não limitado $A$ seja o gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$ de contrações.

**Teorema 1.3.34.** *(Hille-Yosida) Um operador $\mathcal{A}$ linear, não limitado é um gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$ de contrações se, e somente se*

*(i) $\mathcal{A}$ é fechado e $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.*

*(ii) O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$, é válido*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

*Demonstração.* Ver [8]. $\square$

**Corolário 1.3.35.** *Se $\mathcal{A}$ é o generador infinitesimal de um semigrupo $C_0$ de contrações, temos*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}; \;\; \text{Re } \lambda > 0\} \subset \varrho(\mathcal{A}) \\ \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{Re } \lambda} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}_+ \end{aligned}$$

*Demonstração.* Ver [8]. $\square$

### 1.3.3 Teorema de Lummer Phillips

Estudaremos outra caracterização dos geradores infinitesimais de semigrupos de contrações. Para isto introduziremos às seguintes notações. Denotaremos por $H$, um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e por $H^*$ seu dual.

Uma caracterização util dos operadores dissipativos é dada a seguir.

**Teorema 1.3.36.** *Um operador $\mathcal{A}$ é dissipativo se, e somente se*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall \quad x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \lambda > 0.$$

*Demonstração.* Ver [7]. $\square$

**Teorema 1.3.37.** *(Teorema de Lummer Phillips) Seja $\mathcal{A}$ um operador linear com domínio denso em $X$*

*(i) Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que Im $(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$ de contrações.*

*(ii) Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$ de contrações sobre $X$, então* Im $(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ *para todo $\lambda > 0$ e $\mathcal{A}$ é dissipativo.*

*Demonstração.* Ver [7]. $\square$

**Corolário 1.3.38.** *Seja $\mathcal{A}$ um operador fechado densamente definido em $X$. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são dissipativos, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações em $X$.*

*Demonstração.* Ver [7]. $\square$

**Teorema 1.3.39** (Versão simples do Teorema de Lummer Phillips)**.** *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear, dissipativo e com domínio denso. Se $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$ de contrações.*

*Demonstração.* Ver [7]. $\square$

## 1.4 Estabilidade exponencial de um semigrupo $C_0$

**Definição 1.4.1.** *Suponhamos que $X$ é um espaço de Banach e $T(t)$ é um semigrupo $C_0$, então $T(t)$ é dito*

1. *Uniformemente estável se*
$$\lim_{t\to\infty} ||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

2. *Fortemente estável se*
$$\lim_{t\to\infty} ||T(t)x||_X = 0 \ \ \textit{para cada} \ \ x \in X.$$

**Observação 1.4.2.** *É comum que estabilidade uniforme também seja dita de estabilidade exponencial, é dizer, um semigrupo $C_0$ T(t) é exponencialmente estável se existem constantes positivas $\gamma$ e $M \geq 1$ tal que*
$$||T(t)||_X \leq Me^{-\gamma t}, \forall t \geq 0.$$

**Proposição 1.4.3.** *Suponhamos que $X$ é um espaço de Banach e T(t) um semigrupo $C_0$, então T(t) é uniformemente estável se e somente se $\omega_0(S) < 0$.*

*Demonstração.* Ver [7]. □

### Estabilidade exponencial de semigrupos $C_0$ em dimensão infinita

Sabemos que uma condição necessária e suficiente para que um semigrupo $C_0$ gerado por $\mathcal{A}$ onde $\mathcal{A}$ é uma matriz, o resultado também é válido se $\mathcal{A}$ é um operdor limitado, é que se verifique
$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{\sigma(A)}.$$

Quando $\mathcal{A}$ é um operador não limitado só temos a seguinte inclusão
$$e^{\sigma(A)t} \subset \sigma(T(t)). \tag{1.4.1}$$

Já que não temos a igualdade 1.4.1 precisaremos de outra forma para caracterizar a estabilidade exponencial de um $T(t)$ semigrupo $C_0$ gerado por um operador $\mathcal{A}$ não limitado. E precisaremos utilizar o espectro e o resolvente deste operador e as relações deste com a estabilidade exponencial.

Assim temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.4.4.** ***(Prüss)*** *Suponhamos que $(H, \langle ., . \rangle_H)$ é um espaço de Hilbert e $T(t)$ é um semigrupo $C_0$ de contrações em $H$ com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$. Então $T(t)$ é uniformemente estável se e somente se*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

*e satisfaz a seguinte condição:*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} ||(i\lambda I - \mathcal{A})||_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

*Demonstração.* Ver [10] . □

## 1.5 Semigrupos Diferenciáveis

Para motivar a definição de semigrupos diferenciáveis, lembramos que para um semigrupo ser fortemente contínuo temos que ter que

$$t \longmapsto T(t)x \tag{1.5.1}$$

diferenciável para todo $t \geq 0$ se (e somente se) $x \in D(\mathcal{A})$, como já vimos na **Proposição 1.3.19**. Portanto, (1.5.1) é diferenciável para todo $x \in X$ somente se $\mathcal{A}$ é limitado e $D(\mathcal{A}) = X$. No que segue, a próxima definição, vamos requerer que (1.5.1) seja diferenciável para todo $x \in X$, mas não para todo $t \geq 0$.

**Definição 1.5.1.** *Diremos que um semigrupo $T$ de classe $C_0$ é eventualmente diferenciável se existe $t_0 \geq 0$ tal que 1.5.1 é diferenciável para todo $t > t_0$ e para todo $x \in X$. O semigrupo é chamado imediatamente diferenciável se $t_0$ pode ser escolhido como $t_0 = 0$. E neste caso podemos dizer simplismente que $T$ é diferenciável se $T$ é diferenciável para todo $t \geq 0$.*

Usando a definição de $D(\mathcal{A})$ e a lei do semigrupo, dizer que $T(t)$ é eventuamente diferenciável significa que os operadores $T(t)$ mapeiam $X$ em $D(\mathcal{A})$ assim que $t > t_0 > 0$. Do mesmo modo, dizer que $T(t)$ é imediatamente diferenciável (ou diferenciável) significa que os operadores $T(t)$ mapeiam $X$ em $D(\mathcal{A})$ assim que $t \geq 0$.

Desde de que $\mathcal{A}$ seja fechado e $T(t)$ seja limitado, segue do **Teorema do Gráfico Fechado** que $\mathcal{A}T(t)$ é limitado em $X$ para $t > t_0$, em outras palavras, $T(t) \in \mathcal{L}([X], [D(\mathcal{A})])$ (veja Definição 1.3.24). Usando a lei do semigrupo segue que:

**Teorema 1.5.2.** *Seja $T$ um semigrupo diferenciável, para $t > t_0$ e $T^n(t)$ o operador definido por $T^n(t) = \mathcal{A}^n T(t)$, $\mathcal{A}^0 = I$, $n = 0, 1, \ldots$ Então,*

1. *O operador $T^n(t)$ tem as seguintes propriedades:*

   *$\forall t > (n+1)t_0$ e todo $s$ tal que $t - t_0 > s > nt_0$ tem-se*

$$T^n(t)x = T(t-s)T^n(s)x, \;\; \forall x \in X, \;\; n = 0, 1, \ldots;$$

   *$T^n(t)x$ é limitado para todo $t > nt_0$, $n = 0, 1, \ldots$;*

   *$T^n(t) = \mathcal{A}^n T(t) = \left[\mathcal{A}\left[\mathcal{A}T\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[T^{(1)}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n\right.$ para todo $t > nt_0$, $n = 0, 1, \ldots$;*

2. *$\forall x \in X$ a função $T(t)x$ é $n$ vezes continuamente diferenciável em todo $t > nt_0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n}T(t)x = T^n(t)x, \;\; n = 0, 1, \ldots$$

3. *$T^{(n)}$ é um função contínua na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ em todo $t > (n+1)t_0$, n=0,1,...*

4. *A função $T$ é $n$ vezes diferenciável na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$ em todo $t > (n+1)t_0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n}T(t) = T^n(t), \;\; n = 0, 1, \ldots$$

*Demonstração.* Ver [12]. □

**Observação 1.5.3.** *Em particular, do item 2 do teorema anterior para um semigrupo $T(t)$ que é imediatamente diferenciável temos que $T^n(t)$ é infinitamente diferenciável em $t > 0$ para cada $x \in X$.*

Agora procuramos uma caracterização de semigrupos diferencíaveis em termos de espectro e o crescimento do resolvente de seu operador. Obtemos que o espectro tem que ser limitado por uma função de (no máximo) crescimento exponencial. Isto deve ser comparado com o fato que o espectro está incluido em um semiplano esquerdo se o semigrupo for fortemente contínuo ou em um setor se o semigrupo for analítico (este veremos mais a frente).

**Teorema 1.5.4.** *Para um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ satisfazendo a estimativa de norma $\|T(t)| \leq Me^{wt}$ e tendo gerador $\mathcal{A}$ as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *$T(t)$ é eventualmente diferenciável.*

2. *Existem constantes $a > 0$, $b > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\Sigma := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : ae^{-bRe\,\lambda} \leq |Im\ \lambda|\right\}$$

*e*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq C|Im\ \lambda|$$

*para todo $\lambda \in \Sigma$ com $Re\ \lambda \leq w$.*

*Demonstração.* Ver [12]. □

**Teorema 1.5.5.** *Para um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ satisfazendo a estimativa de norma $\|T(t)| \leq Me^{wt}$ e tendo gerador $\mathcal{A}$ as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *$T(t)$ é imediatamente diferenciável.*

2. *Para todo $b > 0$ existem constantes $a_b > 0$ e $C_b > 0$ tais que*

$$\Sigma_b := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : a_b e^{-bRe\,\lambda} \leq |Im\ \lambda|\right\}$$

*e*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq C_b|Im\ \lambda|$$

*para todo $\lambda \in \Sigma_b$ com $Re\ \lambda \leq w$.*

*Demonstração.* Ver [7]. □

**Teorema 1.5.6.** *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$ $C_0$ satisfazendo*

$$\|T(t)\| \leq Ce^{\gamma t}$$

*se para algum $\mu > \gamma$ se verifica que*

$$\limsup_{\tau\to\infty} \log|\tau| \|((\mu + i\tau)I - \mathcal{A})^{-1}\| = C < \infty.$$

*então*

1. *$T(t)$ é eventualmente diferenciável para $t > 3C$ se $C > 0$.*

2. *$T(t)$ é imediatamente diferenciável se $C = 0$.*

*Demonstração.* Ver [12]. □

**Observação 1.5.7.** *Quando o semigrupo é de contrações a condição suficiente para que o semigrupo seja diferenciável, pode ser escrita como*

$$\limsup_{\tau\to\infty} \log|\tau| \|(i\tau I - \mathcal{A})^{-1}\| = C < \infty.$$

## 1.6 Semigrupos Analíticos

O gerador infinitesimal pode ter tantas derivadas, como regularidade tenha o vetor $x$ onde este se aplica. Por exemplo, se $x \in D(A^\infty)$ então a função $t \mapsto T(t)x$, será infinitamente derivável. Um ponto importante aqui é saber quando um semigrupo poderá estender-se analiticamente sobre o conjunto dos números complexos, ou pelo menos a um subconjunto complexo e quais são às condições necessárias e suficientes que devem satisfazer o gerador infinitesimal para que o correspondente semigrupo possa ser estendido analiticamente sobre um subconjunto dos números complexos. Nesta seção trataremos estes pontos. Denotemos por $J$ o conjunto de números complexos da forma

$$J = \left\{ w \in \mathbb{C}; w = \rho e^{i\theta}, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad \theta_1 < 0 < \theta_2 \right\}.$$

Nestas condições, temos

**Definição 1.6.1.** *Diremos que um semigrupo $T$ é analítico em $J$, se*

*(i)* $z \mapsto T(z)$ *é analítico em $J$.*

*(ii)* $T(0) = I$ *e ainda*

$$\lim_{z \to 0,\ z \in J} T(z)x = x,$$

*para todo $x \in X$.*

*(iii)* $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, *para $z_1, z_2 \in J$.*

Sem perda de generalidade, podemos supor que o semigrupo é uniformemente limitado e que $0 \in \rho(A)$.

### 1.6.1 Caraterização dos semigrupos analíticos

Estabeleceremos a seguir uma condição necessária e suficiente para que um operador $A$ não limitado seja o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

**Teorema 1.6.2.** *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente limitado com $0 \in \rho(\mathcal{A})$ então $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ pode ser estendido analiticamente a um setor $J_\delta = \left\{ z \in \mathbb{C}; z = re^{i\theta}, \quad |\theta| \leq \delta \right\}$ se, e somente se existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$, tal que*

$$\left\{ w = re^{i\theta}; \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad e$$

$$\|R(\lambda; \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \text{para} \quad \lambda \in \left\{ w = re^{i\theta}, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \ \lambda \neq 0$$

*Demonstração.* Ver [8]. $\square$

Pelo resultado anterior temos que nos semigrupos analíticos a região de analiticidade é um setor do plano complexo (para mais detalhes ver [8]).

**Observação 1.6.3.** *Da demonstração que pode ser consultada em [8] concluímos que se $T$ é analítico então para todo $x \in X$, $T(t)x \in D(\mathcal{A}^\infty)$ onde $D(\mathcal{A}^\infty) = \cap_{i=0}^{\infty} D(\mathcal{A}^i)$. De fato como $T'(t) = \mathcal{A}T(t)$ concluímos que $T^{(n)}(t) = \mathcal{A}^n T(t)$. De onde segue que para todo $x \in X$, temos*

$$\|\mathcal{A}^n T(t)x\| = \|T^{(n)}(t)x\| \leq \|T'\left[\frac{t}{n}\right]^n x\| \leq \|T'\|\left[\frac{t}{n}\right] x\|^n \leq \frac{cn^n}{t^n}$$

*Nestas condições, dizemos que $T$ possui efeito regularizante.*

**Observação 1.6.4.** *Por outro lado, se $0 \in \rho(\mathcal{A})$ então temos que*

$$\|T(t)\| \leq ce^{-\delta t}.$$

*De fato, se $0 \in \rho(\mathcal{A})$ então existe $-\delta \in \rho(\mathcal{A})$, tal que $-\mathcal{A} + \delta I$ é também um gerador infinitesimal de um semigrupo $S$ que é uniformente limitado. Como $T(t) = S(t)e^{-\delta t}$, segue nossa conclusão.*

Uma caracterização mais simples de semigrupos analíticos é devido a Liu e Zheng [29].

**Teorema 1.6.5.** *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo $C_0$ de contrações definido sobre um espaço de Hilbert. Suponhamos que*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}.$$

*Então, $S(t)$ é um semigrupo analítico se, e somente se*

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} ||\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}|| < \infty$$

*onde $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$.*

*Demonstração.* Ver [8]. $\square$

## 1.7 Funções Gevrey

Na classe das funções infinitamente diferenciais temos aquelas que podem ser escritas através de uma serie de potências convergentes, mais conhecidas como series de Taylor.

Mas na classe de funções infinitamente diferenciáveis temos um grupo grande de funções que não podem ser expressadas como uma série de potências. Estas funções as podemos classificar de acordo com a dificuldade que existe para que esta série seja convergente. Essa dificuldade da convergencia da série de potências associadas a função nos fornecerá um espaços de funções chamado **Espaço de Gevrey**.
Primeiro vamos observar as seguintes definições:

**Definição 1.7.1** (Funções $C^\infty$ e Espaços das funções $C^\infty$)**.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto. O espaço das funções suaves(ou funções $C^\infty$), o qual será denotado por $C^\infty(\Omega)$, é o espaço das funções que possuem em $\Omega$ derevadas parciais contínuas de todas as ordens.*

**Definição 1.7.2** (Funções analíticas e Espaços das funções analíticas)**.** *Seja $\omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto. O espaço das funções analíticas, o qual será denotado por $C^\Omega(\omega)$, é o subespaço das funções $C^\infty(\omega)$ tais que para cada compacto $K \subset \omega$, existe uma constante $C = C(K) > 0$ tal que*

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!), \textit{para quaisquer} \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

**Observação 1.7.3.** *E assim temos que*

$$C^\omega(\Omega) \subset C^\infty(\Omega).$$

**Exemplo 1.7.4.** *Como podemos observar neste exemplo existem funções que são infinitamente diferencíaveis mas que não podem ser escritas como uma série de potências. Por exemplo, para $s > 1$, considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^{\frac{1}{s-1}}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Mas podemos classicar estas funções para cada $S > 1$ em um subespaço de $C^\omega(\Omega)$.

**Definição 1.7.5** (Funções de Gevrey e Espaços das funções Gevrey)**.** *Sejam $\omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto e $s \geq 1$ um número real. O espaço das funções Gevrey, o qual será denotado por $G^S(\Omega)$, é o subespaço das funções $C^\infty(\omega)$ tais que para cada compacto $K \subset \omega$, existe uma constante $C = C(K) > 0$ tal que*

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s, \textit{para quaisquer} \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

**Observação 1.7.6.** *Pela definição acima temos as seguintes observações:*

1. *Se $s = 1$ temos que $G^1(\Omega) = C^\omega(\Omega)$.*

*2. Se $s_1 < s_2$ então $G^{s_1}(\Omega) \subset G^{s_2}(\Omega)$.*

Pelos itens da observação acima podemos concluir que

$$G^1(\Omega) = C^\omega(\Omega) \subset G^s(\Omega);\, s > 1 \;\subset C^\infty(\Omega).$$

**Observação 1.7.7.** *Voltando ao* ***Exemplo1.7.4*** *obtemos para cada $s > 1$ a função correspondente a cada s mora em um Espaço de Gevrey diferente correspondente ao s.*

# Uma outra perspectiva

Vamos agora olhar essas funções e esse espaços de funções por outra perspectiva. Analisaremos os termos gerais das séries de potências dessas funções que pertencem aos Espaços de Gevrey e veremos que a classe de Gevrey é extamamente onde a série de potências associada a função deixa de ser convergente. E para tal vamos começar com uma boa motivação.

**Motivação**

1)Encontrar f analítica definida em uma vizinhança do 0 tal que

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

A função f procurada pode ser escrita como esta série de potências

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Logo, é possível usar a série para definir a função f que procuramos.

2)Encontrar f analítica definida em uma vizinhança do 0 tal que

$$\begin{cases} x^2 f' + f = x \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

A função f procurada pode ser escrita como esta série de potências

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n-1)! x^n.$$

Logo, não é possível usar a série para definir a função f que procuramos.

3)Se consideramos por exemplo a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \; x^n$ absolutamente convergente em $[-R, R]$, onde $R > 0$ é o raio de convergência dessa série, sabemos que ela define uma função análitica em $]-R, R[$ com $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Considerando o raio de convergência $R$ temos que

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \rho^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{R^n}.$$

Portanto para que uma função seja analítica deve satisfazer a seguinte desigualdade

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{c\, n!}{R^n}.$$

Em particular, temos também

$$|a_n| \leq \frac{c}{R^n}.$$

Desse modo, consideremos a definição abaixo:

**Definição 1.7.8** (Séries de Gevrey)**.** *Seja $s \geq 1$. Uma série formal $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ é dita de Gervrey de ordem $s$ se existem constantes positivas $M, C$ tais que*

$$|a_n| \leq M\, C^n\, (n!)^{s-1}.$$

Voltando no item 2) da **Motivação**, que é conhecida como série de Euler, obtivemos uma série de Gevrey de ordem 2. E como podemos ver em 3) que toda série absolutamente convergente é Gevrey de ordem 1.

## 1.8 Semigrupos de Gevrey

Nessa parte vamos falar de Semigrupos de Gevrey. No que segue veremos teoremas que foram de fundamental importancia para o desenvolvimento dessa tese, assim como sua consequencias mais relevantes para o desenvolvimento desse tema.

**Definição 1.8.1** (Semigrupo de Gevrey)**.** *Seja $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$, $S(t)$ sobre um espaço de Banach $X$. Dizemos que $S(t)$ é de classe $\delta$ (com $\delta > 1$) de Gevrey para $t > t_0$, se é infinitamente diferenciável para $t > t_0$ e, para cada conjunto compacto $K \subset (t_0, +\infty)$ e para todo $\theta > 0$, existe uma constante $C = C(\theta, K)$, tal que*

$$\|S^n(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\mathcal{A}^n S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C\theta^n (n!)^{\delta}, \quad \forall t \in K,\ n \geq 0.$$

**Observação 1.8.2.** *Lembrando que $t_0 \geq 0$ e assim*

1. *$t_0 \geq 0$ chamamos de eventualmente diferencíavel.*

2. *$t_0 = 0$ chamamos de imediatamente diferencíavel.*

A classe de Gevrey de um semigrupo possui propriedades mais forte que as propriedades regularizantes de um semigrupo diferenciável, mais é mais fraco que as de um semigrupo analítico. Seu efeito regularizante é instantaneo. Mais ainda sua ordem de regularidade é $C^\infty$. Quando $\delta = 1$, o semigrupo é analítico.

**Caracterização da calasse de Gevrey de um semigrupo** O teorema abaixo nos fornece condições necessárias e suficientes utilizando o resolvente do gerador infinitesimal dos semigrupos para identificá-los.Nossa principal ferramenta é o seguinte Teorema:

**Teorema 1.8.3** (Condição necessária e suficiente para classificar a classe de Gevrey de um Semigrupo)**.** *Seja $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$, $S(t)$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. $S(t)$ é de classe $\delta > 1$ de Gevrey se e somente se para todo $b, \tau > 0$, existem constantes $a \in \mathbb{R}$ e $C > 0$ dependendo apenas de $b, \tau, \delta$ tais que*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \Sigma_b(\delta) \equiv \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; Re\lambda > a - b|\mathrm{Im}\,\lambda|^{\frac{1}{\delta}} \right\},$$

*e*

$$\|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| \leq C\left(e^{-\tau Re\lambda} + 1\right), \quad \forall \lambda \in \Sigma_b(\delta).$$

Contudo, se já tivermos informações do semigrupo não é preciso usarmos as condições necessárias basta as condições suficientes. Sendo assim se já temos a informação que o nosso semigrupo é $C_0$ podemos usar o seguinte resultado:

**Teorema 1.8.4.** *Seja $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$, $S(t)$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Suponha $\alpha \geq \omega$ e $\delta$ satisfazendo $0 < \delta \leq 1$ e*

$$\limsup_{\lambda \in \mathbb{R},\, |\lambda| \to \infty} |\lambda|^{\mu} \|[(\alpha + i\lambda)I - \mathcal{A}]^{-1}\| < \infty. \tag{1.8.1}$$

*Então $S(t)$ é de classe de Gervrey $\gamma$ para $t > 0$, para cada $\gamma > \frac{1}{\mu}$.*

E se já temos a informação que o nosso semigrupo é $C_0$ de contrações podemos usar o resultado abaixo:

**Teorema 1.8.5.** *Seja $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$ de contrações, $S(t)$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Suponha $\alpha \geq \omega$ e $\delta$ satisfazendo $0 < \delta \leq 1$ e*

$$\limsup_{\lambda \in \mathbb{R},\, |\lambda| \to \infty} |\lambda|^{\mu} \|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \tag{1.8.2}$$

*Então $S(t)$ é de classe de Gervrey $\gamma$ para $t > 0$, para cada $\gamma > \frac{1}{\mu}$.*

**Observação 1.8.6.** *Note que quando se verifica que*

$$\limsup_{\lambda \in \mathbb{R},\, |\lambda| \to \infty} |\lambda|^{\mu} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| = c < \infty.$$

*e o $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ então o semigrupo é exponencialmente estável.*

## Relação importante entre Semigrupos de Gevrey e Semigrupo Diferenciáveis

Vamos relembrar a caracterização de semigrupos diferenciáveis.

**Teorema 1.8.7.** *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ de classe $C_0$ satisfazendo*

$$\|S(t)\| \leq Ce^{\gamma t},$$

*se para algum $\mu > \gamma$ se verifica que*

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \log|\lambda| \|(\mu + i\lambda)I - \mathcal{A})^{-1}\| = C < \infty.$$

*Então $T(t)$ é diferenciável para $t > 3C$.*

Mas observando que

$$\log|\lambda| \leq c_\alpha |\lambda|^\alpha,$$

logo para que o semigrupo seja diferenciável, basta se verifique (1.8.1) se o semigrupo é $C_0$. E que se verifique (1.8.2) se o semigrupo é $C_0$ de contrações.

# Capítulo 2

# Estabilidade exponencial da viga com amortecimento viscoso

## 2.1 Introdução

Neste capítulo provaremos a boa colocação do modelo usando a teoria de semigrupos. Isto é, mostraremos que o operador principal do modelo, que está descrito na introdução, é gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$ de contrações. Mais ainda, provaremos neste capítulo, como uma motivação para o capítulo subsequente, que o correspondente semigrupo é exponencialmente estável. Para provar a estabilidade exponencial nos basearemos no **Teorema de Prüss**.

Vamos considerar o modelo de Euler Bernoulli com efeito dissipativo localizado do tipo viscoelástico. A viga que consideraremos é configurada sobre um conjunto $\widetilde{I}$ de comprimento $\ell$.

$$\widetilde{I} = ]0, \ell_0[ \cup ]\ell_0, \ell[ := I_E \cup I_V.$$

Mais precisamente, a parte elástica é configurada ao longo do intervalo $I_E = ]0, \ell_0[$ enquanto a componente viscoelástica é configurada sobre $I_V = ]\ell_0, \ell[$.

Mais a frente veremos que as leis constitutivas têm coeficiente descontínuo em $x = l_0$, ou seja, as funções que compõem os coeficientes da equação diferencial correspondente a viga são descontínuas no ponto $\ell_0$.

Abaixo segue uma ilustração de como está cofigurada a viga e dos intervalos onde ocorre o efeito dissipativo viscoelástico.

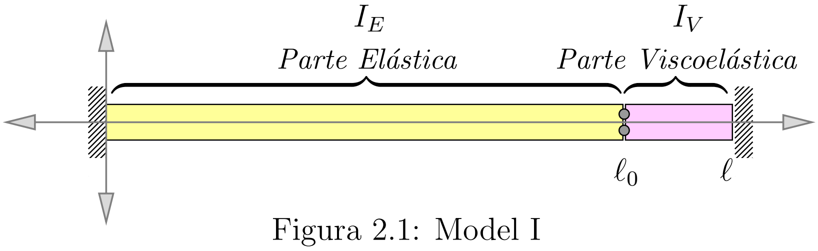


Figura 2.1: Model I

A equação diferencial parcial correspondente é a seguinte:

$$\rho\, u_{tt} + \alpha\, u_{xxxx} - \alpha_0\, u_{txx} = 0, \text{ em } \widetilde{I} \times \mathbb{R}_+, \tag{2.1.1}$$

com $\alpha_0 = 0$ sobre $I_E = ]0, \ell_0[$ e positiva sobre o intervalo $I_V = ]\ell_0, \ell[$. Consideraremos as seguintes condições de contorno:

$$u(0,t) = u(\ell,t) = u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0. \tag{2.1.2}$$

E as condições iniciais:

$$u_t(x,0) = u_1(x),\ u(x,0) = u_0(x). \tag{2.1.3}$$

Além disso, temos as condições de transmissão:

$$u(\ell_0^-) = u(\ell_0^+) \qquad u_x(\ell_0^-) = u_x(\ell_0^+) \tag{2.1.4}$$

$$\alpha_1 u_{xx}(\ell_0^-) = \alpha_2 u_{xx}(\ell_0^+) \qquad M_x(\ell_0^-) = M_x(\ell_0^+) \tag{2.1.5}$$

onde

$$M(x) = (\alpha u_{xx} - \alpha_0 u_t)(x),\ \forall x \in \tilde{I}.$$

Aqui as funções $\rho$, $\alpha$, $\alpha_0$, são descontínuas no ponto $\ell_0$. Elas são da forma

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 & x \in ]0, \ell_0[ \\ \rho_2 & x \in ]\ell_0, \ell[ \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1 & x \in ]0, \ell_0[ \\ \alpha_2 & x \in ]\ell_0, \ell[ \end{cases} \qquad \alpha_0(x) = \begin{cases} 0 & x \in ]0, \ell_0[ \\ \alpha_3 & x \in ]\ell_0, \ell[ \end{cases}$$

onde $\rho_i$ e $\alpha_i$ são constantes positivas.
Note que com estas funções a equação (2.1.1) não pode ser definida em todo o intervalo $]0, \ell[$ a não ser que consideremos soluções fracas no contexto de formulações variacionais. Para considerar soluções fortes e trabalhar no contexto de semigrupos é necessário trabalhar sob o conjunto $\widetilde{I} = ]0, \ell_0[ \cup ]\ell_0, \ell[$.

## 2.2 Existência e Unicidade

O primeiro ponto a definir é o espaço de fase sobre o qual vamos trabalhar. Um critério para definir este espaço de fase é como o maior espaço sobre o qual está bem definida a energia total (energia cinética e potencial elástica) do sistema.
A energia associada ao sistema (2.1.1) é definida por

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \rho|u_t|^2 + \alpha|u_{xx}|^2 dx.$$

Assumindo que as soluções sejam regulares sobre $\widetilde{I} = ]0,\ell_0[\cup]\ell_0,\ell[$, temos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -\int_{\ell_0}^{\ell} \alpha_0|u_{tx}|^2 dx.$$

Denotando por $U = (u,v)^t$ onde $v = u_t$, vamos introduzir o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^2(0,\,\ell)\times L^2(0,\,\ell),$$

e para todo $U = (u,v)^t \in \mathcal{H}$, onde $v = u_t$, definimos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\ell \rho|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2 dx.$$

Seja $\mathcal{A}\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sendo o operador

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ -\rho^{-1}[\alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx}] \end{pmatrix},$$

com

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ H^4(\widetilde{I}) \cap H_0^2(0,\ell)\times H_0^2(0,\ell) \;\middle|\; \begin{array}{l} u(\ell_0^-) = u(\ell_0^+) \\ u_x(\ell_0^-) = u_x(\ell_0^+) \\ \alpha_1 u_{xx}(\ell_0^-) = \alpha_2 u_{xx}(\ell_0^+) \\ M_x(\ell_0^-) = M_x(\ell_0^+). \end{array} \right\}.$$

Portanto sistema (2.1.1) –(2.1.3) pode ser escrito como um sistema de primeira ordem no espaço Hilbert $\mathcal{H}$

$$U_t(t) = \mathcal{A}U(t), \qquad U(0) = U_0.$$

Não é difícil ver que

$$\mathrm{Re}\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_{I_V} \alpha_0 |v_x|^2 dx \leq 0. \tag{2.2.1}$$

Vamos agora fazer algumas considerações que serão muito pertinentes no decorrer desse trabalho.

1. Tomemos $F = (f_1, f_2)^t \in \mathcal{H}$. Agora, observando que a equação do resolvente $(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F = U$ é equivalente a $i\lambda U - \mathcal{A}U = F, \quad \lambda \in \mathbb{R}$, temos que em termos das componentes pode ser escrito como

$$i\lambda u - v = f_1 \in H^2(0, \ell) \tag{2.2.2}$$
$$i\lambda \rho v + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = \rho f_2 \in L^2(0, \ell), \tag{2.2.3}$$

   satisfazendo (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5).

2. Tomando o produto interno da equação do resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = F, \ \lambda \in \mathbb{R}$ com $U$, tomando a parte real e usando (2.2.1) temos que

$$\int_{I_V} \alpha_0 |v_x|^2 dx = \mathrm{Re}\,\langle F, U\rangle_{\mathcal{H}}\,, \tag{2.2.4}$$

   e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\int_{I_V} \alpha_0 |v_x|^2 dx \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}, \tag{2.2.5}$$

   onde $C > 0$ é uma constante. Assim temos estimada a norma de $v_x$.

A seguir provamos que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações e portanto que o sistema (2.1.1) está bem definido.

**Teorema 2.2.1.** *Para qualquer $U_0 \in \mathcal{H}$ a solução $U$ satisfaz $U \in C([0,T]; \mathcal{H})$. Quando $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então $U \in C^1([0,T]; \mathcal{H}) \cap C([0,T]; D(\mathcal{A}))$.*

Prova.-Primeiro provaremos que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Provaremos que para todo $F = (f_1, f_2)^t \in \mathcal{H}$ existe uma única solução $U \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$\mathcal{A}U = F.$$

Em termos das componentes temos que

$$-v = f_1 \in H^2(0,\ell) \tag{2.2.6}$$

$$\alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = \rho f_2 \in L^2(0,\ell). \tag{2.2.7}$$

Da primeira equação temos $v = -f_1 \in H^2(0,\ell)$. Portanto de (2.2.7) segue que

$$\alpha u_{xxxx} + \alpha_0 f_{1,xx} = \rho f_2 \in L^2(0,\ell).$$

Usando o Lema de Lax Milgran para a forma bilinear

$$a(u,w) = \int_0^\ell \alpha u_{xx} w_{xx}\, dx,$$

encontramos que existe uma única função $u \in H_0^2(0,\ell)$ verificando as equações acima. Note que pela regularidade elíptica temos que $u \in H^4(0,\ell)$. Portanto existe $U = (u, -f_1) \in D(\mathcal{A})$ verificando a equação resolvente. Como $\mathcal{A}$ é fechado, dissipativo e $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, temos que para algum $\epsilon > 0$, Im $(\epsilon I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Usando o Teorema 4.6 Capítulo 1 pag. 16 of [7] concluimos que $D(\mathcal{A})$ é denso sobre $\mathcal{H}$. Então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$ de contrações. Portanto, segue o resultado.

Em particular temos o seguinte resultado de existência e regularidade

**Teorema 2.2.2.** *Para qualquer* $(u_0, u_1) \in H^4(\widetilde{I}) \cap H_0^2(0,\ell) \times H_0^2(0,\ell)$ *existe uma única solução forte do problema* (2.1.1)-(2.1.5) *verificando*

$$u \in C(0,T; H^4(\widetilde{I}) \cap H_0^2(0,\ell)) \cap C^1(0,T; H_0^2(0,\ell)) \cap C^2(0,T; L^2(0,\ell))$$

*Enquanto se* $(u_0, u_1) \in H_0^2(0,\ell) \times L^2(0,\ell)$ *existe uma única solução fraca do problema* (2.1.1)-(2.1.5) *verificando*

$$u \in C(0,T; H_0^2(0,\ell)) \cap C^1(0,T; L^2(0,\ell))$$

## 2.3 Desigualdades de Interpolação

A seguir, estabelecemos o teorema da derivada intermediária, veja o Teorema 4.14, capítulo IV, pag. 75 do [5].

**Teorema 2.3.1.** *Seja $u$ tal que $u$, $u^{(m)} \in L^2(a,b)$ então $u^{(j)} \in L^2(a,b)$, para $j = 1, \ldots, m$, onde $u^{(j)} = \frac{d^j}{dx^j}u$. Além disso para qualquer $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ temos*

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq c\epsilon\|u^{(m)}\|_{L^2} + c\epsilon^{-\frac{j}{m-j}}\|u\|_{L^2}, \tag{2.3.1}$$

*o que implica*

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq c\|u\|_{L^2} + c\|u\|_{L^2}^{1-\frac{j}{m}}\|u^{(m)}\|_{L^2}^{\frac{j}{m}}. \tag{2.3.2}$$

*Demonstração.* Pelo teorema 4.14 of [5] segue (2.3.1). Denotando por $\|u\|_m := \|u\|_{L^2} + \|u^{(m)}\|_{L^2}$ e tomando $\epsilon$ tal que

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{\|u\|}{\|u\|_m}\right)^{\frac{m-j}{m}} \quad \Rightarrow \quad \|u^{(j)}\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}^{1-\frac{j}{m}}\|u\|_m^{\frac{j}{m}}.$$

Substituindo em (2.3.1) e usando a definição de $\|\cdot\|_m$ temos (2.3.2). □

**Corolário 2.3.2.** *Seja $u \in H^2(a,b)$, então temos*

$$\|u\|_\infty = \sup_{s\in[a,b]}|u(s)| \leq c\|u\|_{L^2} + c\|u\|_{L^2}^{3/4}\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/4} \tag{2.3.3}$$

$$\|u_x\|_\infty = \sup_{s\in[a,b]}|u_x(s)| \leq c\|u\|_{L^2} + c\|u\|_{L^2}^{1/4}\|u_{xx}\|_{L^2}^{3/4}. \tag{2.3.4}$$

## 2.4 Estabilidade Exponencial

Nesta seção mostraremos que o problema de transmissão (2.1.1)-(2.1.5) é exponencialmente estável. Gostariamos de enfatizar que a estabilidade exponencial pode ser mostrado como uma consequencia do semigrupo ser diferenciável. Ponto que provaremos no seguinte capítulo. Porém a demostração desta propriedade é muito mais delicada e bastante técnica. Por este motivo faremos uma demonstração simples do decaimento exponencial do semigrupo associado ao problema transmissão definido pelas equações (2.1.1)-(2.1.5).

A nossa principal ferramenta será a caracterização de Pruss [10], que estabelecemos a seguir

**Teorema 2.4.1.** *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo $C_0$ de contrações sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então $S(t)$ é exponencialmente estável, se e somente se,*

$$\varrho(\mathcal{A}) \supset \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \qquad e \qquad \overline{\lim}_{|\beta|\to\infty}\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} < \infty. \tag{2.4.1}$$

Este teorema estabelece que um semigrupo de contrações é exponencialmente estável se e somente se o semigrupo está fortemente estável e o operador resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Portanto nossa prova será divida nestas duas etapas primeiro provaremos a estabilidade forte. Depois a limitação do operador resolvente sobre o eixo imaginário.

Para isto mostraremos primeiro que o Domínio do operador tem imersão compacta no espaço de fase. Com esta propriedade a estabilidade forte

$$\varrho(\mathcal{A}) \supset \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$$

se reduz a provar que não existem autovalores imaginários.

**Lema 2.4.2.** *O domínio $D(\mathcal{A})$ tem imersão compacta no espaço de fase $\mathcal{H}$.*

Prova.- Suponhamos que uma sequência elementos $U_n = (u_n, v_n)^t$ está limitada em $D(\mathcal{A})$. Provaremos que existe uma subsequência que converge forte em $\mathcal{H}$. De fato, como existe uma constante $C$ tal que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\mathcal{A}U_n\|^2 \leq C,$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^\ell \rho|v_n|^2 + \alpha|u_{n,xx}|^2 dx + \int_0^\ell \rho|v_{n,xx}|^2 + |\alpha u_{n,xxxx} + \alpha_0 v_{n,xx}|^2 dx \leq C.$$

Como $v_{n,xx}$ está limitado em $L^2$, temos que $\alpha u_{n,xxxx}$ está limitado em $L^2$. De onde concluímos que está limitado em $H^4(\widetilde{I})$. Usando a compacidade de $H^2$ em $L^2$ e $H^4$ em $H^2$, concluímos que existem subsequências $(u_{n_k}, v_{n_k})^t = U_{n_k}$ que convergem forte em $H^2(0,\ell) \times L^2(0,\ell)$. Portanto $D(\mathcal{A})$ tem imersão compacta em $\mathcal{H}$.

**Observação 2.4.3.** *O Lema 2.4.2 implica que o espectro de $\mathcal{A}$ é formado exclusivamente por autovalores. Isto porque resolvente é um operador compacto.*

## 2.5 Estabilidade Forte

O seguinte Lema mostra a estabilidade forte do sistema.

**Lema 2.5.1.** *Com as notações anteriores temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$.*

Prova.- Pelo Lema 2.4.2 bastará mostrar que não existem autovalores imaginários. De fato, suponhamos que exista um autovalor imaginário, isto é, existe $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{A}U = i\lambda U \quad \text{com } U \neq 0.$$

Tomando produto interno na equação anterior com $U$ concluimos que

$$\text{Re } \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Usando (2.2.4) temos

$$\int_{I_V} \alpha_0 |v_x|^2 dx = 0.$$

Logo $v = 0$ o que implica que $u = 0$ sobre o intervalo $]\ell_0, \ell[$, ou seja, $U = (u, v) = (0, 0)$ em $]\ell_0, \ell[$. Provaremos que $U = 0$ em $]0, \ell_0[$ o que implicaria que o autovetor é identicamente nulo o que é uma contradição. Portanto não pode existir autovalores imaginários.

Observando que $\mathcal{A}U = i\lambda U$ em $]0, \ell_0[$ pode ser escrita em termos de componentes como

$$i\lambda u - v = 0, \quad i\lambda v - \alpha u_{xxxx} = 0, \quad \text{sobre} \quad ]0, \ell_0[,$$

que é equivalente à

$$-\lambda^2 u - \alpha u_{xxxx} = 0, \quad \text{sobre} \quad ]0, \ell_0[. \tag{2.5.1}$$

Mas como $U = 0$ in $]\ell_0, \ell[$ temos que

$$u(\ell_0) = u_x(\ell_0) = u_{xx}(\ell_0) = u_{xxx}(\ell_0) = 0.$$

Considerando (2.5.1) como um problema de valor final concluimos que $u = 0$ em $]0, \ell_0[$ e assim temos que $v = 0$ em $]0, \ell_0[$. Portanto $U = 0$ em $]0, \ell_0[$. De onde segue o resultado.

**Observação 2.5.2.** *O Lema 2.5.1 implica que a solução da equação* (2.1.1) *vai para zero, isto é,*

$$\lim_{t\to\infty} (u(\cdot, t), u_t(\cdot, t)) = 0$$

*no espaço $\mathcal{H}$.*

Finalmente, para mostrar a estabilidade exponencial temos que mostrar que o operador resolvente está uniformemente limitado sobre todo o eixo imaginário. O método padrão aqui é usar as desigualdades de observabilidade, para isto introduzimos a função

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{2}\left(\rho|v(x)|^2 + \alpha|u_{xx}(x)|^2\right).$$

## 2.6 Desigualdades de Observabilidade

Os mecanismos localizados produzem dissipação apenas num subintervalo do domínio da equação. Esta dissipação implica na estimativa requerida nas hipóteses do teorema de Pruss. Porém a parte onde o mecanismo dissipativo não é efetivo não temos esta estimativa e temos que encontrar alguma forma de poder passar esta limitação para a parte onde o mecanismo dissipativo não é efetivo. É precisamente neste ponto que entra em jogo as estimativas de observabilidade.

Esta estimativa consiste em provar que se a energia num ponto está estimada, então a energia sobre todo o intervalo que contém este ponto também está estimada,. Dito de outra forma, se $\mathcal{I}(\ell)$ está estimada então a energia $\int_0^\ell \mathcal{I}(s)\, ds$ está estimada e vice versa.

É esta propriedade que provamos no Lema a seguir.

**Observação 2.6.1.** *Por simplicidade, denotaremos por* $\mathfrak{R}$ *a expressão*

$$\mathfrak{R} = \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|^2_{\mathcal{H}}.$$

**Lema 2.6.2.** *Sob as condições anteriores, temos que para todo* $\epsilon > 0$ *existe um* $c_\epsilon > 0$ *tal que*

$$\left|\ell\mathcal{I}(\ell) - \int_0^\ell \mathcal{I}(x) + \alpha|u_{xx}|^2\, dx\right| \leq c_\epsilon\,\mathfrak{R} + \epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\, dx. \tag{2.6.1}$$

*Demonstração.* A equação é dada por

$$i\lambda\rho v + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = \rho f_2, \quad x \in \;]0,\ell[. \tag{2.6.2}$$

Multiplicando a equação (2.6.2) por $x\overline{u}_x$ e integrando de $]0,\ell[$ temos

$$\int_0^\ell i\lambda x\rho v\overline{u}_x\, dx + \int_0^\ell x\alpha u_{xxxx}\, dx - \int_0^\ell x\alpha_0 v_{xx}\overline{u}_x\, dx = \int_0^\ell x\rho f_2\overline{u}_x\, dx$$

e assim

$$-\frac{1}{2}\int_0^\ell x\frac{d}{dx}\left(\rho|v|^2+\alpha|u_{xx}|^2\right)\,dx-\int_0^\ell \alpha u_{xxx}\overline{u}_x\,dx+\int_0^\ell \alpha_0 v_x\overline{u}_x\,dx+\int_0^\ell x\alpha_0 v_x\overline{u}_{xx}\,dx$$
$$=\int_0^{\ell_0} x\rho f_2\overline{u}_x\,dx+\int_0^{\ell_0} xv\overline{f}_{1,x}\,dx.$$

De onde temos

$$-\frac{1}{2}\int_0^\ell x\frac{d}{dx}\left(\rho|v|^2+\alpha|u_{xx}|^2\right)\,dx+\int_0^\ell \alpha|u_{xx}|^2dx+\int_0^\ell \alpha_0 v_x\overline{u}_x\,dx+\int_0^\ell x\alpha_0 v_x\overline{u}_{xx}\,dx$$
$$=\int_0^{\ell} x\rho f_2\overline{u}_x\,dx+\int_0^{\ell} xv\overline{f}_{1,x}\,dx.$$

Assim fazendo integração por partes temos

$$\ell\mathcal{I}(\ell)-\int_0^\ell \mathcal{I}(x)+\alpha|u_{xx}|^2\,dx=\int_0^\ell \alpha_0 v_x\overline{u}_x\,dx+\int_0^\ell x\alpha_0 v_x\overline{u}_{xx}\,dx \tag{2.6.3}$$
$$-\int_0^\ell x\rho f_2\overline{u}_x\,dx-\int_0^\ell xv\overline{f}_{1,x}\,dx.$$

Usando a desigualdade triangular, a desigualdade de Poincaré, a desigualdade de Young com $\epsilon$, para p e q adequados, e ainda usando que $v_x$ está limitado em $]\ell_0,\ell[$ obtemos as duas desigualdades que seguem abaixo

$$\left|\int_{\ell_0}^\ell \alpha_0 v_x\overline{u}_x\,dx+\int_{\ell_0}^\ell x\alpha_0 v_x\overline{u}_{xx}\,dx\right|\leq c_\epsilon\,\mathfrak{R}+\epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\,dx.$$

$$\left|-\int_0^\ell x\rho f_2\overline{u}_x\,dx-\int_0^\ell xv\overline{f}_{1,x}\,dx\right|\leq c_\epsilon\,\mathfrak{R}+\epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\,dx.$$

Das duas últimas desigualdades concluímos que

$$\left|\ell\mathcal{I}(\ell)-\int_{I_V}\mathcal{I}(x)+\alpha|u_{xx}|^2\,dx\right|\leq c_\epsilon\,\mathfrak{R}+\epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\,dx.$$

E observando em (2.6.3) que $\alpha_0=0$ em $]0,\ell_0[$, temos que

$$\left|\ell\mathcal{I}(\ell)-\int_{I_E}\mathcal{I}(x)+\alpha|u_{xx}|^2\,dx\right|\leq\left|\int_0^\ell \rho f_2\overline{u}_x\,dx+\int_0^\ell xv\overline{f}_{1,x}\,dx\right|\leq c_\epsilon\,\mathfrak{R}+\epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\,dx.$$

De onde segue o resultado.

□

Aplicaremos a observabilidade sobre a componente viscosa. A principal diferença com relação a estimativa anterior é que nós não temos condição de contorno no ponto $\ell_0$ o que introduz um termo pontual que precisa ser estimado.

**Lema 2.6.3.** *Sob as condições anteriores, temos que para todo $\epsilon > 0$ existe um $c_\epsilon > 0$ tal que*

$$\left|(\ell-\ell_0)\mathcal{I}(\ell) - \int_{\ell_0}^{\ell} \mathcal{I}(x) + \alpha|u_{xx}|^2\, dx\right| \leq c_\epsilon\, \mathfrak{R} + \epsilon \int_{\ell_0}^{\ell} \mathcal{I}(x)\, dx. \tag{2.6.4}$$

*Demonstração.* A equação é dada por

$$i\lambda\rho v + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = \rho f_2, \quad x \in \ ]\ell_0, \ell[. \tag{2.6.5}$$

Multiplicando a equação (2.6.5) por $(x-\ell_0)\overline{u}_x$ temos

$$\int_{\ell_0}^{\ell} i\lambda\rho(x-\ell_0)v\overline{u}_x\, dx + \int_{\ell_0}^{\ell}(x-\ell_0)\alpha u_{xxxx}\overline{u}_x\, dx - \int_{\ell_0}^{\ell}(x-\ell_0)\alpha_0 v_{xx}\overline{u}_x\, dx = \int_{\ell_0}^{\ell}\rho(x-\ell_0)f_2\overline{u}_x\, dx,$$

e assim

$$-\frac{1}{2}\int_{\ell_0}^{\ell_0}(x-\ell_0)\frac{d}{dx}\left(\rho|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2\right)\, dx - \int_{\ell_0}^{\ell}\alpha u_{xxx}\overline{u}_x\, dx + \int_{\ell_0}^{\ell}\alpha_0 v_x\overline{u}_x\, dx + \int_{\ell_0}^{\ell}(x-\ell_0)\alpha_0 v_x\overline{u}_{xx}\, dx$$
$$= \int_{\ell_0}^{\ell_0}\rho(x-\ell_0)f_2\overline{u}_x\, dx + \int_{\ell_0}^{\ell_0}(x-\ell_0)v\overline{f}_{1,x}\, dx.$$

De onde temos

$$-\frac{1}{2}\int_{\ell_0}^{\ell}(x-\ell_0)\frac{d}{dx}\left(\rho|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2\right)\, dx + \int_{\ell_0}^{\ell}\alpha|u_{xx}|^2\, dx + \alpha_2 u_{xx}(\ell_0^+)\overline{u}_x(\ell_0^+) + \int_{\ell_0}^{\ell}\alpha_0 v_x\overline{u}_x\, dx$$
$$+ \int_{\ell_0}^{\ell}(x-\ell_0)\alpha_0 v_x\overline{u}_{xx}\, dx = \int_{\ell_0}^{\ell}(x-\ell_0)\rho f_2\overline{u}_x\, dx + \int_{\ell_0}^{\ell_0}(x-\ell_0)v\overline{f}_{1,x}\, dx.$$

E assim fazendo integração por pates temos

$$(\ell-\ell_0)\mathcal{I}(\ell) - \int_{\ell_0}^{\ell}\mathcal{I}(x) + \alpha|u_{xx}|^2\, dx = \alpha_2 u_{xx}(\ell_0^+)\overline{u}_x(\ell_0^+) + \int_{\ell_0}^{\ell}\alpha_0 v_x\overline{u}_x\, dx$$
$$+ \int_{\ell_0}^{\ell}(x-\ell_0)\alpha_0 v_x\overline{u}_{xx}\, dx - \int_{\ell_0}^{\ell}(x-\ell_0)\rho f_2\overline{u}_x\, dx - \int_{\ell_0}^{\ell_0}(x-\ell_0)v\overline{f}_{1,x}\, dx. \tag{2.6.6}$$

Observe que todos os termos acima podem ser estimados da mesma forma que no Lema 2.6.2 excepto o termo pontual

$$\alpha_2 u_{xx}(\ell_0^+)\overline{u}_x(\ell_0^+).$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Niremberg para $b \in ]\ell_0, \ell[$ temos que

$$\begin{aligned} |u_x(b)| &\leq c\|u_x\|_{L^2} + c\|u_x\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|}\|i\lambda u_x\|_{L^2} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|i\lambda u_x\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|}\|v_x + f_{1,x}\|_{L^2} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|v_x + f_{1,x}\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}. \end{aligned}$$

E assim conclímos que

$$|u_x(b)| \leq \frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\mathfrak{R}^{1/2} + \frac{\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\|u_{xx}\|_{L^2}, \tag{2.6.7}$$

para $\lambda$ grande. De forma analoga temos

$$|u_{xx}(b)| \leq c\|u_{xx}\|_{L^2} + c\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xxx}\|_{L^2}^{1/2}. \tag{2.6.8}$$

Usando a equação na componente viscosa e o Teorema das derivadas intermediarias temos

$$\begin{aligned} \|u_{xxx}\|_{L^2} &\leq c\|u_{xx}\|_{L^2} + c\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xxxx}\|_{L^2}^{1/2} \\ &\leq c\|u_{xx}\|_{L^2} + c\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}\left\|\frac{\rho}{\alpha}f_2 - \frac{i\lambda\rho}{\alpha}v + \frac{\alpha_0}{\alpha}v_{xx}\right\|_{L^2}^{1/2} \\ &\leq c\|u_{xx}\|_{L^2} + c\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}\left\|\frac{\rho}{\alpha}f_2 - \frac{i\lambda\rho}{\alpha}v + \frac{\alpha_0 i\lambda}{\alpha}u_{xx} - \frac{\alpha_0}{\alpha}f_{1,xx}\right\|_{L^2}^{1/2} \\ &\leq c\|u_{xx}\|_{L^2} + c\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}\|f_2\|_{L^2}^{1/2} + c|\lambda|^{1/2}\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}\|v\|_{L^2}^{1/2} + c|\lambda|^{1/2}\|u_{xx}\|_{L^2} + c\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}\|f_{1,xx}\|_{L^2}^{1/2}. \end{aligned}$$

De onde concluimos que

$$\|u_{xxx}\|_{L^2} \leq \epsilon|\lambda|^{1/2}\|u_{xx}\|_{L^2} + \epsilon|\lambda|^{1/2}\|v\|_{L^2} + c_\epsilon|\lambda|^{1/2}\mathfrak{R}^{1/2},$$

para $\lambda$ grande. Substituindo esta expressão em (2.6.8) temos

$$|u_{xx}(b)| \leq \epsilon\|u_{xx}\|_{L^2} + \epsilon\|v\|_{L^2} + c_\epsilon\, \mathfrak{R}^{1/2}, \tag{2.6.9}$$

para $\lambda$ grande. De (2.6.7) e (2.6.9) temos

$$\begin{aligned} |\alpha_2 u_{xx}(\ell_0^+)\overline{u}_x(\ell_0^+)| &\leq \epsilon\, \left(\|u_{xx}\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2\right) + c_\epsilon\, \mathfrak{R} \\ &\leq \epsilon \int_{\ell_0}^{\ell} \mathcal{I}(x)\, dx + c_\epsilon\, \mathfrak{R}. \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Inserindo esta desigualdade na equação (2.6.6) e usando os mesmos argumento que no Lema 2.6.2 segue o resultado.

□

## Estimativa sobre a componente viscosa

**Lema 2.6.4.** *Sobre o intervalo viscoelástico temos que*

$$\int_{\ell_0}^{\ell} \mathcal{I}(x)\, dx \leq c_\epsilon\, \mathfrak{R} + \epsilon \int_{\ell_0}^{\ell} \mathcal{I}(x)\, dx \tag{2.6.11}$$

*Demonstração.* Primeiro vamos lembrar a definição de $\mathcal{I}(x)$

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{2}(\rho|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2)(x).$$

Lembrando a desigualdade (2.2.5) temos

$$\int_{I_V} \alpha_0|v_x|^2 dx \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.$$

Usando a desigualdade de Poincaré temos

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |v|^2 dx \leq \int_{\ell_0}^{\ell} \alpha_0|v_x|^2 dx \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{2.6.12}$$

Pelo Teorema das derivadas intermediarias temos

$$\begin{aligned}
\|u_{xx}\|_{L^2} &\leq c\|u\|_{L^2} + c\|u\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xxxx}\|_{L^2}^{1/2} \\
&\leq c\|u\|_{L^2} + c\|u\|_{L^2}^{1/2}\left\|\frac{\rho}{\alpha}f_2 - \frac{i\lambda\rho}{\alpha}v + \frac{\alpha_0}{\alpha}v_{xx}\right\|_{L^2}^{1/2} \\
&\leq \frac{c}{|\lambda|}\|i\lambda u\|_{L^2} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|i\lambda u\|_{L^2}^{1/2}\left\|\frac{\rho}{\alpha}f_2 - \frac{i\lambda\rho}{\alpha}v + \frac{\alpha_0 i\lambda}{\alpha}u_{xx} - \frac{\alpha_0}{\alpha}f_{1,xx}\right\|_{L^2}^{1/2} \\
&\leq \frac{c}{|\lambda|}\|v + f_1\|_{L^2} + c\|v + f_1\|_{L^2}^{1/2}\left\|\frac{\alpha_0}{\alpha}u_{xx} - \frac{\rho}{\alpha}v\right\|_{L^2}^{1/2} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|v + f_1\|_{L^2}^{1/2}\left\|\frac{\rho}{\alpha}f_2 - \frac{\alpha_0}{\alpha}f_{1,xx}\right\|_{L^2}^{1/2} \\
&\leq \frac{c}{|\lambda|}\|v\|_{L^2} + c\|v + f_1\|_{L^2}^{1/2}\left[c\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} + c\|v\|_{L^2}^{1/2}\right] + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|v + f_1\|_{L^2}^{1/2}\left[c\|f_2\|_{L^2}^{1/2} + c\|f_{1,xx}\|_{L^2}^{1/2}\right].
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Young temos

$$\|u_{xx}\|_{L^2} \leq \epsilon\|u_{xx}\| + \epsilon\|v\|_{L^2} + c_\epsilon\mathfrak{R}^{1/2}.$$

E assim temos que

$$\int_{I_V} \alpha|u_{xx}|^2 dx \leq c_\epsilon\, \mathfrak{R} + \epsilon \int_{\ell_0}^{\ell} \mathcal{I}(x)\, dx. \tag{2.6.13}$$

Usando a desigualdade acima junto com (2.6.12) segue nossa conclusão.

□

## 2.7 Estabilidade Exponencial

**Teorema 2.7.1.** *O semigrupo definido pela equação* (2.1.1) *é exponencialmente estável.*

*Demonstração.* Do Lema 2.6.2 temos que

$$\left|\ell\mathcal{I}(\ell) - \int_0^\ell \mathcal{I}(x) + \alpha|u_{xx}|^2\, dx\right| \leq c_\epsilon \|U\|_\mathcal{H}\|F\|_\mathcal{H} + c_\epsilon\|F\|_\mathcal{H}^2 + \epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\, dx,$$

donde temos que

$$\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\, dx \leq \ell\mathcal{I}(\ell) + \int_0^\ell \alpha|u_{xx}|^2\, dx + c_\epsilon \|U\|_\mathcal{H}\|F\|_\mathcal{H} + c_\epsilon\|F\|_\mathcal{H}^2 + \epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\, dx. \quad (2.7.1)$$

Do Lema 2.6.3 segue que

$$(\ell-\ell_0)\mathcal{I}(\ell) \leq \int_{\ell_0}^\ell \mathcal{I}(x) + \alpha|u_{xx}|^2\, dx + c_\epsilon \|U\|_\mathcal{H}\|F\|_\mathcal{H} + c_\epsilon\|F\|_\mathcal{H}^2 + \epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\, dx.$$

e assim

$$(\ell-\ell_0)\mathcal{I}(\ell) \leq \int_{\ell_0}^\ell \mathcal{I}(x)\, dx + \int_{\ell_0}^\ell \alpha|u_{xx}|^2\, dx + c_\epsilon \|U\|_\mathcal{H}\|F\|_\mathcal{H} + c_\epsilon\|F\|_\mathcal{H}^2 + \epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\, dx.$$

Do Lema 2.6.4 e pela desigualdade (2.6.13) temos que

$$\int_{\ell_0}^\ell \mathcal{I}(x)\, dx + \int_{\ell_0}^\ell \alpha|u_{xx}|^2\, dx \leq c_\epsilon \|U\|_\mathcal{H}\|F\|_\mathcal{H} + c_\epsilon\|F\|_\mathcal{H}^2 + \epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\, dx.$$

Pelas duas desigualdades anteriores concluimos que

$$\ell\mathcal{I}(\ell) \leq c_\epsilon \|U\|_\mathcal{H}\|F\|_\mathcal{H} + c_\epsilon\|F\|_\mathcal{H}^2 + \epsilon\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\, dx.$$

Finalmente substituindo esta desigualdade em (2.7.1) segue que

$$\int_0^\ell \mathcal{I}(x)\, dx \leq c_\epsilon \|U\|_\mathcal{H}\|F\|_\mathcal{H} + c_\epsilon\|F\|_\mathcal{H}^2.$$

De onde segue que

$$\|U\|_\mathcal{H}^2 \leq c_\epsilon \|U\|_\mathcal{H}\|F\|_\mathcal{H} + c_\epsilon\|F\|_\mathcal{H}^2.$$

aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\|U\|_\mathcal{H}^2 \leq \frac{1}{2}\|U\|_\mathcal{H}^2 + c_\epsilon\|F\|_\mathcal{H}^2.$$

Assim temos que
$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$
Lembrando que $U = (i\lambda U - \mathcal{A})^{-1}F$. Temos que

$$\|(i\lambda U - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

De onde segue que

$$\|(i\lambda U - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \leq c.$$

O que completa a demonstração. □

# Capítulo 3

# Semigrupo de Gevrey

Neste capítulo provaremos o resultado principal desta tese, que o semigrupo definido pelo modelo (0.0.1)–(0.0.3) verificando as seguintes condições de transmissão (0.0.4)–(0.0.5) é de classe 4 de Gevrey. Nossa demonstração adicionalmente implica que o semigrupo é diferenciável no sentido da definição 1.5.1. Nosso resultado é baseado no Teorema 1.8.3, o qual vamos relembrar no teorema que segue abaixo, para fazermos algumas observações que serão pertinentes para a obtenção do resultado dessa tese.

**Teorema 3.0.1.** *Seja $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$, $T(t)$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. $T(t)$ é de classe $\delta > 1$ de Gevrey se e somente se para todo $b, \tau > 0$, existem constantes $a \in \mathbb{R}$ e $C > 0$ dependendo apenas de $b, \tau, \delta$ tais que*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \Sigma_b(\delta) \equiv \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; \operatorname{Re}\lambda > a - b|\operatorname{Im}\lambda|^{\frac{1}{\delta}}\Big\}, \tag{3.0.1}$$

*e*

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq C\left(e^{-\tau \operatorname{Re}\lambda} + 1\right), \quad \forall \lambda \in \Sigma_b(\delta). \tag{3.0.2}$$

*Este é o caso, em particular, se para algum $\mu \in (\delta^{-1}, 1)$, se verifica*

$$\limsup_{\lambda\in\mathbb{R},\, |\lambda|\to\infty} |\lambda|^{\mu}\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \tag{3.0.3}$$

*Demonstração.* Ver [32]. □

Embora o teorema acima nós forneça condições necessarias e suficientes utilizando o resolvente do gerador infinitesimal do semigrupo, o mesmo não é de fácil aplicação. Por isso vamos utilizar um resultado que nos fornece condições suficientes para encontrar a classe de Gevrey do semigrupo associado ao nosso sistema pois temos informações do semigrupo em questão, que nesse caso é um semigrupo $C_0$ de contrações (como provamos no Lema VERRRRRRRRRRRRRR)

**Teorema 3.0.2.** *Seja $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de um semigrupo $C_0$ de contrações, $S(t)$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Suponha $\alpha \geq \omega$ e $\delta$ satisfazendo $0 < \delta \leq 1$ e*

$$\limsup_{\lambda \in \mathbb{R},\, |\lambda| \to \infty} |\lambda|^{\mu} \|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty.$$

*Então $S(t)$ é de classe de Gervrey $\gamma$ para $t > 0$, para cada $\gamma > \frac{1}{\mu}$.*

Portanto, provaremos que

$$\limsup_{\lambda \in \mathbb{R},\, |\lambda| \to \infty} |\lambda|^{1/4} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty, \tag{3.0.4}$$

o que mostrará que o semigrupo, é diferenciável e ainda de classe 4 de Gevrey.

Note que de acordo com o teorema 1.8.7 para que seja diferenciável bastará que

$$\limsup_{\tau \to \infty} \log|\tau| \|(i\tau I - \mathcal{A})^{-1}\| = C < \infty,$$

pois o semigrupo é de contrações (veja observação 1.5.7). Isto munido ao fato que

$$\log|\tau| \leq c_\alpha |\tau|^\alpha,$$

concluimos o seguinte: para que o semigrupo seja diferenciável, bastará provar que (3.0.4) se verifique. Observe também que isto significa que o semigrupo é imediatamente diferenciável.

Nós consideramos a viga da forma

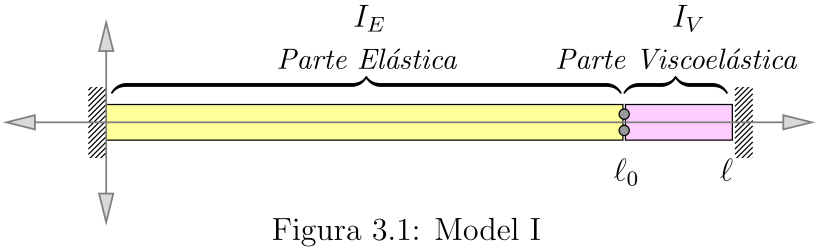


Figura 3.1: Model I

**Observação 3.0.3.** *Observe que a ordem das componentes não altera o resultado. Assim como o comprimento do intervalo viscoso $\ell - \ell_0$. Podemos resumir isto da seguinte forma: O semigrupo é diferenciável independentemente da posição ou o comprimento da parte viscosa. A mesma observação serve para a classe de Gevrey.*

## 3.1 O Operador Resolvente

Nosso ponto de partida é estudar o operador resolvente:

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F,$$

onde $U$, $F$ e $\mathcal{A}$ são dados da mesma forma que nas páginas 34 e 35. Em termos de coordenadas o operador resolvente é dado por

$$i\lambda u - v = f_1 \in H^2(0,\ell) \tag{3.1.1}$$

$$i\lambda\rho v + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = \rho f_2 \in L^2(0,\ell). \tag{3.1.2}$$

Primeiro vamos verificar a estabilidade forte, ou seja, se o eixo imaginário está contido no conjunto resolvente do operador $\mathcal{A}$.

**Lema 3.1.1.** *$i\,\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.*

*Demonstração.* O domínio de $\mathcal{A}$, $D(\mathcal{A})$ possui imersão compacta no espaço de fase $\mathcal{H}$, então o espectro $\sigma(\mathcal{A})$ é formado apenas por autovalores. Por isso mostraremos que não existe autovalores imaginários. De fato, suponhamos por contradição que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $i\lambda U - \mathcal{A}U = 0$. Usando (2.2.1) temos que $U = 0$ em $]\ell_0, \ell[$. Para mostrar a contradição, resta mostrar que $U$ é zero em $]0, \ell_0[$. De fato,

$$i\lambda u - v = 0, \quad i\lambda v - \alpha u_{xxxx} = 0, \quad \text{em} \quad I_E = ]0, \ell_0[ \tag{3.1.3}$$

mas como $U = 0$ in $]\ell_0, \ell[$ temos que

$$u(b) = u_x(b) = u_{xx}(b) = u_{xxx}(b) = 0, \ \ \forall\ b\ \in ]\ell_0, \ell[.$$

Em particular

$$u(\ell_0) = u_x(\ell_0) = u_{xx}(\ell_0) = u_{xxx}(\ell_0) = 0.$$

Considerando (3.1.3) como um problema de valor final, concluimos que $u = 0$ in $I_E$. Portanto $U = 0$ em $]0, \ell[$ o que completa nossa prova. □

**Observação 3.1.2.** *Por simplicidade, denotaremos por* $\mathfrak{R}$ *a expressão*

$$\mathfrak{R} = \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Iniciamos nossas estimativas sobre o componente viscoelástico.

$$i\lambda u - v = f_1 \in H^2(\widetilde{I}) \tag{3.1.4}$$

$$i\lambda\rho v + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = \rho f_2 \in L^2(I_V). \tag{3.1.5}$$

Para $f_2 \in L^2(]\ell_0, \ell[)$, seja $v_1$ solução de

$$i\lambda\rho v_1 - \alpha_0 v_{1,xx} = \rho f_2, \quad v_1(\ell_0) = v_1(\ell) = 0. \tag{3.1.6}$$

**Lema 3.1.3.** *Vamos decompor* $v = v_1 + (v - v_1) := v_1 + v_2$. *Então temos que* $v_2 = v - v_1$ *verifica*

$$i\lambda\rho v_2 + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{2,xx} = 0 \quad \in L^2(]\ell_0, \ell[). \tag{3.1.7}$$

*Mais ainda*

$$|\lambda|^2 \int_{\ell_0}^{\ell} |v_1|^2 \, dx + \int_{\ell_0}^{\ell} |v_{1,xx}|^2 \, dx \le c\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{3.1.8}$$

$$|v_1(b)| \le \frac{c}{|\lambda|^{3/4}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad |v_{1,x}(b)| \le \frac{c}{|\lambda|^{1/4}}\|F\|_{\mathcal{H}} \quad \textit{para } v \in \,]\ell_0, \ell[ \tag{3.1.9}$$

$$\|v_2\|_{L_2} \le \|v\|_{L^2} + \frac{c}{|\lambda|}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \|v_{1,x}\| \le \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \|v_{2,x}\|_{L^2} \le c\,\mathfrak{R}^{1/2}. \tag{3.1.10}$$

Prova.- Multiplicando (3.1.6) por $\overline{v_{1,xx}}$ e tomando a parte real temos

$$-\int_{\ell_0}^{\ell} \alpha_0 |v_{1,xx}|^2 \, dx = \int_{\ell_0}^{\ell} \rho f_2 \overline{v_{1,xx}} \, dx, \quad \Rightarrow \quad \int_{\ell_0}^{\ell} |v_{1,xx}|^2 \, dx \le c\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Por outro lado multiplicando (3.1.6) por $\overline{i\lambda v_1}$ e tomando a parte real temos

$$-\int_{\ell_0}^{\ell} \rho|\lambda v_1|^2 \, dx = \int_{\ell_0}^{\ell} \rho f_2 \overline{i\lambda v_1} \, dx, \quad \Rightarrow \quad |\lambda|^2 \int_{\ell_0}^{\ell} |v_1|^2 \, dx \le c\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Daí segue a desigualdade (3.1.8). Usando (2.3.4) temos que

$$|v_1(b)| \leq c\|v_1\|_{L^2}^{1/2}\|v_{1,x}\|_{L^2}^{1/2} \leq c\|v_1\|_{L^2}^{3/4}\|v_{1,xx}\|_{L^2}^{1/4} \leq \frac{c}{|\lambda|^{3/4}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Analogamente

$$|v_{1,x}(b)| \leq c\|v_{1,x}\|_{L^2}^{1/2}\|v_{1,xx}\|_{L^2}^{1/2} \leq c\|v_1\|_{L^2}^{1/4}\|v_{1,xx}\|_{L^2}^{3/4} \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, (3.1.9) segue. Recordando a definição de $v_2$ e usando (3.1.8) obtemos

$$\|v_2\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2} + \frac{c}{|\lambda|}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando o Teorema 2.3.1 e a desigualdade (3.1.8) obtemos

$$\|v_{1,x}\|_{L^2} \leq c\|v_1\|_{L^2}^{1/2}\|v_{1,xx}\|_{L^2}^{1/2} \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, lembrando a definição de $v_2$ e usando a desigualdade acima obtemos

$$\|v_{2,x}\|_{L^2} \leq \|v_x\|_{L^2} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|_{\mathcal{H}} \leq c\,\mathfrak{R}^{1/2}.$$

De onde segue (3.1.10) para $\lambda$ grande.

**Lema 3.1.4.** *Sobre o intervalo viscoso temos*

$$\begin{aligned}
\|v_2\|_{L^2} &\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\|u_{xxx}\|_{L^2} + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\mathfrak{R}^{1/2} && (3.1.11)\\
\|v_2\|_{\infty} &\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^{1/4}}\|u_{xxx}\|_{L^2} + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/4}}\mathfrak{R}^{1/2} && (3.1.12)\\
\|v_{2,x}\|_{\infty} &\leq \epsilon|\lambda|^{1/4}\|u_{xxx}\|_{L^2} + c_\epsilon|\lambda|^{1/4}\mathfrak{R}^{1/2}. && (3.1.13)
\end{aligned}$$

Proof.- Usando (3.1.7) temos

$$\|\lambda v_2\|_{-1} \leq c\|u_{xxx}\|_{L^2} + c\|v_{2,x}\|_{L^2}. \tag{3.1.14}$$

Usando interpolação e a desigualdade (3.1.14) obtemos

$$\|v_2\|_{L^2}^2 \leq \|v_2\|_{-1}\|v_{2,x}\|_{L^2} \leq \frac{c}{|\lambda|}\left(\|u_{xxx}\|_{L^2} + \|v_{2,x}\|_{L_2}\right)\|v_{2,x}\|_{L^2}, \tag{3.1.15}$$

em particular

$$\|v_2\|_{L^2}^2 \leq \frac{c}{|\lambda|}\|u_{xxx}\|_{L^2}\|v_{2,x}\|_{L^2} + \frac{c}{|\lambda|}\|v_{2,x}\|_{L^2}^2 \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|}\|u_{xxx}\|_{L^2}^2 + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|}\|v_{2,x}\|_{L^2}^2. \tag{3.1.16}$$

Usando a desigualdade (3.1.10) do Lema 3.1.3 chegamos a (3.1.11). De (2.2.4), (2.3.3) do Lema 2.3.2 obtemos

$$\|v_2\|_\infty \leq c\|v_2\|_{L^2}^{1/2}\|v_{2,x}\|_{L^2}^{1/2}.$$

Usando (3.1.11) obtemos

$$\|v_2\|_\infty \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}}\left(\|u_{xxx}\|_{L^2}\|v_{2,x}\|_{L^2} + \|v_{2,x}\|_{L^2}^2\right)^{1/4}\|v_{2,x}\|_{L^2}^{1/2}.$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}
\|v_2\|_\infty &\leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}}\|u_{xxx}\|_{L^2}^{1/4}\|v_{2,x}\|_{L^2}^{3/4} + \frac{c}{|\lambda|^{1/4}}\|v_{2,x}\|_{L^2} \\
&\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^{1/4}}\|u_{xxx}\|_{L^2} + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/4}}\,\mathfrak{R}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Usando (3.1.10) do Lema 3.1.3 chegamos a (3.1.12). Da mesma forma, usando $\|u_{xx}\|_{L^2} \leq c\|u_x\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xxx}\|_{L^2}^{1/2}$ temos

$$\begin{aligned}
\|v_{2,x}\|_\infty^2 &\leq c\|v_{2,x}\|_{L^2}\|v_{2,xx}\|_{L^2} \\
&= c\|v_{2,x}\|_{L^2}\|v_{xx} - v_{1,xx}\|_{L^2} \\
&\leq c\|v_{2,x}\|_{L^2}\|v_{1,xx}\|_{L^2} + c\|v_{2,x}\|_{L^2}\|i\lambda u_{xx} - f_{1,xx}\|_{L^2} \\
&\leq c\underbrace{\|v_{2,x}\|_{L^2}\|v_{1,xx}\|_{L^2}}_{:=J_1} + c\underbrace{|\lambda|\|v_{2,x}\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xxx}\|_{L^2}^{1/2}}_{:=J_2} + c\underbrace{\|v_{2,x}\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}}}_{:=J_3}.
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Note que

$$J_3 \leq c\,\mathfrak{R}.$$

Usando a desigualdade de Young segue

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq |\lambda|^{1/2}\|v_{2,x}\|_{L^2}\|i\lambda u_x\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xxx}\|_{L^2}^{1/2} \\
&\leq |\lambda|^{1/2}\|v_{2,x}\|_{L^2}\|v_x + f_{1,x}\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xxx}\|_{L^2}^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2}|\lambda|^{1/2}\|v_{2,x}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\lambda|^{1/2}\|v_x + f_{1,x}\|_{L^2}\|u_{xxx}\|_{L^2} \\
&\leq \epsilon|\lambda|^{1/2}\|u_{xxx}\|_{L^2}^2 + c_\epsilon\,|\lambda|^{1/2}\mathfrak{R}.
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Finalmente, usando a desigualdade (3.1.8) do Lema 3.1.3 obtemos que

$$J_1 \leq c\,\mathfrak{R}.$$

A substituição das desigualdades acima em (3.1.17) produz (3.1.13).

A prova está concluída.

**Observação 3.1.5.** *Vamos introduzir a função $Y$ ao sistema (3.1.7).*

$$Y = -\frac{1}{i\lambda}\left(\alpha u_{xx} - \alpha_0 v_2\right). \tag{3.1.18}$$

*Assim temos*

$$Y_{xx} = \rho v_2 \in H^1, \tag{3.1.18}$$

*derivando uma vez mais obtemos*

$$Y_{xxx} = \rho v_{2,x} \in L^2. \tag{3.1.18}$$

**Lema 3.1.6.** *Sobre o intervalo viscoelástico temos que*

$$\begin{aligned}
\int_{\ell_0}^{\ell_1} |u_{xxx}|^2\, dx &\leq c_\epsilon \mathfrak{R} && (3.1.19)\\
|u_{xxx}(b)| &\leq c_\epsilon |\lambda|^{1/4}\, \mathfrak{R}^{1/2} && (3.1.20)\\
|u_{xx}(b)| &\leq \frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/4}} \mathfrak{R}^{1/2} && (3.1.21)\\
|u_x(b)| &\leq \frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{3/4}} \mathfrak{R}^{1/2}. && (3.1.22)
\end{aligned}$$

PROOF.- Usando o Corolario 2.3.2 temos

$$\begin{aligned}
|Y(b)| &\leq c\|Y\|_{L_2} + c\|Y\|_{L_2}^{3/4}\|Y_{xx}\|_{L_2}^{1/4}\\
&\leq c\|Y\|_{L_2} + c\|Y\|_{L_2}^{3/4}\|v_2\|_{L_2}^{1/4}.
\end{aligned}$$

Relembrando a definição de $Y$, (3.1.5) multiplicando por $\lambda$ e usando a desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned}
\|\alpha u_{xx} - \alpha_0 v_2\|_\infty &\leq c\|\alpha u_{xx} - \alpha_0 v_2\|_{L_2} + c|\lambda|^{1/4}\|\alpha u_{xx} - \alpha_0 v_2\|_{L_2}^{3/4}\|v_2\|_{L_2}^{1/4}\\
&\leq c|\lambda|^{1/4}\|\alpha u_{xx} - \alpha_0 v_2\|_{L_2} + c|\lambda|^{1/4}\|v_2\|_{L_2}\\
&\leq c|\lambda|^{1/4}\|u_{xx}\|_{L_2} + c|\lambda|^{1/4}\|v_2\|_{L_2}.
\end{aligned}$$

Para $\lambda$ grande o suficiente. Da desigualdade triangular temos

$$\|u_{xx}\|_\infty \leq c|\lambda|^{1/4}\|u_{xx}\|_{L^2} + c|\lambda|^{1/4}\|v_2\|_{L^2} + c\|v_2\|_\infty. \tag{3.1.23}$$

De (3.1.4) e usando a desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned}
\|u_{xx}\|_{L^2} &\leq c\|u_x\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xxx}\|_{L^2}^{1/2}\\
&\leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|v_x\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xxx}\|_{L^2}^{1/2} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|f_{1,x}\|_{L^2}^{1/2}\|u_{xxx}\|_{L^2}^{1/2}\\
&\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\|u_{xxx}\|_{L^2} + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\mathfrak{R}^{1/2}. && (3.1.24)
\end{aligned}$$

Multiplicando a desigualdade acima por $|\lambda|^{1/4}$

$$|\lambda|^{1/4}\|u_{xx}\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^{1/4}}\|u_{xxx}\|_{L^2}+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/4}}\mathfrak{R}^{1/2}. \tag{3.1.25}$$

Por outro lado, usando a desigualdade (3.1.11) obtemos

$$|\lambda|^{1/4}\|v_2\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^{1/4}}\|u_{xxx}\|_{L^2}+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/4}}\mathfrak{R}^{1/2}. \tag{3.1.26}$$

A substituição de (3.1.12), (3.1.25), (3.1.26), em (3.1.23) rende

$$\|u_{xx}\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^{1/4}}\|u_{xxx}\|_{L^2}+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/4}}\mathfrak{R}^{1/2}. \tag{3.1.27}$$

Finalmente, do Lema 2.3.2 temos

$$|Y_x(b)| \leq c\|Y\|_{L^2}+c\|Y\|_{L^2}^{1/4}\|Y_{xx}\|_{L^2}^{3/4} \leq c\|Y\|_{L^2}+c\|Y\|_{L^2}^{1/2}\|Y_{xxx}\|_{L^2}^{1/2}.$$

Relembrando a definição de $Y$ e usando $Y_{xxx}=\rho v_{2,x}$ e multiplicando por $|\lambda|$ temos

$$\begin{aligned}|\alpha u_{xxx}(b)-\alpha_0 v_{2,x}(b)| &\leq c\|\alpha u_{xx}-\alpha_0 v_2\|_{L^2}+c|\lambda|^{1/2}\|\alpha u_{xx}-\alpha_0 v_2\|_{L^2}^{1/2}\|v_{2,x}\|_{L^2}^{1/2}\\ &\leq \underbrace{c\|u_{xx}\|_{L^2}}_{:=J_1}+\underbrace{c\|v_2\|_{L^2}}_{:=J_2}+\underbrace{c|\lambda|^{1/2}\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}\|v_{2,x}\|^{1/2}}_{:=J_3}+\underbrace{c|\lambda|^{1/2}\|v_2\|_{L^2}^{1/2}\|v_{2,x}\|_{L_2}^{1/2}}_{:=J_4}.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (3.1.11) do Lema 3.1.4 obtemos

$$\begin{aligned}J_4 &\leq c|\lambda|^{1/4}\|u_{xxx}\|_{L^2}^{1/4}\|v_{2,x}\|_{L^2}^{3/4}+c|\lambda|^{1/4}\mathfrak{R}^{1/2}\\ &\leq \epsilon|\lambda|^{1/4}\|u_{xxx}\|_{L^2}+c|\lambda|^{1/4}\mathfrak{R}^{1/2}.\end{aligned}$$

Pela mesma desigualdade temos que

$$J_2 \leq c|\lambda|^{1/2}\|u_{xxx}\|_{L^2}^2\|+c|\lambda|^{1/2}\mathfrak{R}^{1/2}.$$

Similarlmente usando (3.1.24) temos

$$J_1 \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\|u_{xxx}\|_{L^2}+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\mathfrak{R}^{1/2}.$$

Usando a desigualdade acima chegamos a

$$J_3 \leq \epsilon|\lambda|^{1/4}\|u_{xxx}\|+c|\lambda|^{1/4}\mathfrak{R}^{1/2}.$$

Usando as desigualdades anteriores chegamos a

$$|u_{xxx}(b)| \leq c|v_{2,x}(b)|+J_1+J_2+J_3+J_4.$$

Recordando a desigualdade (3.1.13) do Lema 3.1.4

$$|v_{2,x}(b)| \leq \epsilon|\lambda|^{1/4}\|u_{xxx}\|_{L^2} + c|\lambda|^{1/4}\mathfrak{R}^{1/2}.$$

Portanto para $\lambda$ grande temos

$$|u_{xxx}(b)| \leq \epsilon|\lambda|^{1/4}\|u_{xxx}\|_{L^2} + c|\lambda|^{1/4}\mathfrak{R}^{1/2}. \tag{3.1.28}$$

Das desigualdade (3.1.27), (3.1.28) temos

$$|u_{xxx}(b)u_{xx}(b)| \leq \epsilon\|u_{xxx}\|_{L^2}^2 + c_\epsilon\mathfrak{R}, \tag{3.1.29}$$

para $\lambda$ grande. Analogamente multiplicando (3.1.12) com (3.1.13) temos

$$|v_2(b)v_{2,x}(b)| \leq \epsilon\|u_{xxx}\|_{L^2}^2 + c_\epsilon\mathfrak{R}, \tag{3.1.30}$$

para $\lambda$ grande. Por outro lado multiplicando a equação (3.1.7) por $\overline{u}_{xx}$ temos

$$\int_{\ell_0}^{\ell} i\lambda\rho v_2\overline{u}_{xx}\,dx + \int_{\ell_0}^{\ell} \alpha u_{xxxx}\overline{u}_{xx}\,dx - \int_{\ell_0}^{\ell} \alpha_0 v_{2,xx}\overline{u}_{xx}\,dx = 0.$$

Integrando por partes

$$\int_{\ell_0}^{\ell} i\lambda\rho v_2\overline{u}_{xx}\,dx + \alpha u_{xxx}\overline{u}_{xx}|_{\ell_0}^{\ell} - \int_{\ell_0}^{\ell} \alpha|u_{xxx}|^2\,dx - \int_{\ell_0}^{\ell} \alpha_0 v_{2,xx}\overline{u}_{xx}\,dx = 0. \tag{3.1.31}$$

Lembrando a definição de $v_1$ e $v_2$ e usando (3.1.4) temos

$$\text{Re}\int_{\ell_0}^{\ell} \alpha_0 v_{2,xx}\overline{u}_{xx}\,dx = -\text{Re}\int_{\ell_0}^{\ell} \alpha_0 f_{1,xx}\overline{u}_{xx}\,dx - \text{Re}\int_{\ell_0}^{\ell} \alpha_0 v_{1,xx}\overline{u}_{xx}\,dx.$$

Usando (3.1.8)e (3.1.23), para $\lambda$ grande temos

$$\left|\text{Re}\int_{\ell_0}^{\ell} v_{2,xx}\overline{u}_{xx}\,dx\right| \leq \epsilon\|u_{xxx}\|^2 + c_\epsilon\mathfrak{R}.$$

Agora observe que integrando por partes a primeira parcela de (3.1.31) temos que

$$\int_{\ell_0}^{\ell} i\lambda\rho v_2\overline{u}_{xx}\,dx = -\rho v_2\overline{v_x}|_{\ell_0}^{\ell} + \int_{\ell_0}^{\ell} \rho v_{2,x}\overline{v_x}\,dx - \int_{\ell_0}^{\ell} \rho v_2\overline{f_{1,xx}}. \tag{3.1.32}$$

Substituindo (3.1.32) em (3.1.31) e usando (3.1.10), (3.1.12) a desigualdade de dissipação (2.2.4) temos

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |u_{xxx}|^2\,dx \leq \epsilon\|u_{xxx}\|^2 + c_\epsilon\mathfrak{R} + c|u_{xxx}(\ell_0^+)\overline{u}_{xx}(\ell_0^+)| + c|v_2(\ell_0^+)\overline{v}_x(\ell_0^+)|.$$

Usando (3.1.29) e (3.1.30) temos

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |u_{xxx}|^2 \, dx \le \epsilon \|u_{xxx}\|^2 + c_\epsilon \mathfrak{R},$$

para $\lambda$ grande. Portanto segue (3.1.19). Substituição de (3.1.19) em (3.1.28) resulta em

$$|u_{xxx}(b)| \le c_\epsilon |\lambda|^{1/4} \mathfrak{R}^{1/2}.$$

Então segue (3.1.20). Substituindo (3.1.19) em (3.1.27) obtemos (3.1.21). Finalmente, lembrando a desigualdade (3.1.13) do Lema 3.1.4 e usando (3.1.19) obtemos

$$|v_{2,x}(b)| \le c|\lambda|^{1/4} \mathfrak{R}^{1/2}.$$

De (3.1.9) segue

$$|v_{1,x}(b)| \le c|\lambda|^{-1/4} \mathfrak{R}^{1/2}.$$

Relembrando a definição de $v_1$ e $v_2$ temos

$$\begin{aligned} |v_x(b)| &\le |v_{1,x}(b)| + |v_{2,x}(b)| \\ &\le c|\lambda|^{1/4} \mathfrak{R}^{1/2}. \end{aligned}$$

Para $\lambda$ grande. Como $i\lambda u - v = f_1$ obtemos

$$|i\lambda u_x(b) - f_1(b)| \le c|\lambda|^{1/4} \mathfrak{R}^{1/2}$$

.

Portanto segue (3.1.22). A prova está concluída.

**Lema 3.1.7.** *No intervalo viscoelástico temos que*

$$\int_{\ell_0}^{\ell} \mathcal{I}(x) + \, dx \le \frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{3/4}} \mathfrak{R}. \tag{3.1.33}$$

Proof.- Do Lema 3.1.4 temos

$$\int_{\ell_0}^{\ell} |v_2|^2 \, dx \le \frac{c}{|\lambda|} |\lambda|^{-1} \mathfrak{R}. \tag{3.1.34}$$

Multiplicando equação (3.1.7) por $\overline{u}$ obtemos

$$\int_{\ell_0}^{\ell} i\lambda\rho v_2 \overline{u} \, dx + \int_{\ell_0}^{\ell} \alpha u_{xxxx} \overline{u} \, dx - \alpha_0 \int_{\ell_0}^{\ell} v_{2,xx} \overline{u} \, dx = 0.$$

Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\ell_0}^{\ell} \alpha|u_{xx}|^2\,dx &= \alpha u_{xx}\overline{u}_x|_{\ell_0}^{\ell} - \alpha u_{xxx}\overline{u}|_{\ell_0}^{\ell} + \alpha_0 v_{2,x}\overline{u}|_{\ell_0}^{\ell} - \int_{\ell_0}^{\ell} \alpha_0 v_{2,x}\overline{u}_x\,dx + \\ &+ \int_{\ell_0}^{\ell} \rho|v_2|^2\,dx + \int_{\ell_0}^{\ell} \rho v_2\overline{v_1}\,dx + \int_{\ell_0}^{\ell} \rho v_2\overline{f_1}\,dx. \qquad (3.1.35)\end{aligned}$$

Note que $u(\ell) = v(\ell) = 0$. Usando (3.1.12) e (3.1.20) temos

$$\begin{aligned}\left|\alpha u_{xxx}(\ell_0^+)\overline{u}(\ell_0^+)\right| &= \left|\frac{\alpha}{i\lambda}u_{xxx}(\ell_0^+)(\overline{v}(\ell_0^+) + \overline{f_1}(\ell_0^+))\right| \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|}\mathfrak{R} + \frac{c}{|\lambda|^{3/4}}\mathfrak{R} \leq \frac{c}{|\lambda|^{3/4}}\mathfrak{R},\end{aligned}$$

para $\lambda$ grande. Da mesma forma, usando (3.1.21) e (3.1.22) obtemos

$$\left|\alpha u_{xx}(\ell_0^+)\overline{u_x}(\ell_0^+)\right| \leq \frac{c}{|\lambda|}\mathfrak{R}.$$

Usando (3.1.13) e (3.1.12) temos

$$\begin{aligned}\left|\alpha_0 v_{2,x}(\ell_0^+)\overline{u}(\ell_0^+)\right| &= \left|\frac{\alpha_0}{i\lambda}v_{2,x}(\ell_0^+)(\overline{v}(\ell_0^+) + \overline{f_1}(\ell_0^+))\right| \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|}\mathfrak{R} + \frac{c}{|\lambda|^{3/4}}\mathfrak{R} \leq \frac{c}{|\lambda|^{3/4}}\mathfrak{R}\end{aligned}$$

Substituição das desigualdades acima em (3.1.35) mostra (3.1.33).

**Lema 3.1.8.** *Sobre o intervalo elástico temos que*

$$\left|\int_0^{\ell_0} \rho v\overline{f}_{1,x}\,dx\right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \qquad (3.1.36)$$

$$\left|\int_0^{\ell_0} \rho f_2\overline{u}_x\,dx\right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \qquad (3.1.37)$$

PROOF.- Sobre o intervalo elástico temos

$$i\lambda\rho v + \alpha u_{xxxx} = \rho f_2, \quad x \in \; ]0, \ell_0[. \qquad (3.1.38)$$

Usando (3.1.38) na igualdade abaixo obtemos

$$\int_0^{\ell_0} \rho v\overline{f}_{1,x}\,dx = \frac{1}{i\lambda}\int_0^{\ell_0} i\lambda\rho v\overline{f}_{1,x}\,dx = -\frac{1}{i\lambda}\int_0^{\ell_0} \alpha u_{xxxx}\overline{f}_{1,x}\,dx + \frac{1}{i\lambda}\int_0^{\ell_0} f_2\overline{f}_{1,x}\,dx. \qquad (3.1.39)$$

Integrando por partes e lembrando que $f_{1,x}(0)=0$ temos

$$\frac{1}{i\lambda}\int_0^{\ell_0}\alpha u_{xxxx}\overline{f}_{1,x}\,dx=\underbrace{\frac{1}{i\lambda}\alpha u_{xxx}(\ell_0^-)\overline{f}_{1,x}(\ell_0^-)}_{:=B}-\frac{1}{i\lambda}\int_0^{\ell_0}\alpha u_{xxx}\overline{f}_{1,xx}\,dx.$$

Para estimar B, primeiro observe que como $u(\ell_0^-)=u(\ell_0^+)$ e $v(\ell_0^-)=v(\ell_0^+)$, consequentemente temos que $f_1(\ell_0^-)=f_1(\ell_0^+)$. Lembrando que $M(x)=(\alpha u_{xx}-\alpha_0 u_t)(x)$, $\forall x\in\tilde{I}$ e que $M_x(\ell_0^-)=M_x(\ell_0^+)$ temos que

$$|\alpha u_{xxx}(\ell_0^-)\overline{f}_{1,x}(\ell_0^-)|=|[\alpha u_{xxx}(\ell_0^+)-\alpha_0 v_x(\ell_0^+)]\overline{f}_{1,x}(\ell_0^+)|$$

Usando a desigualdade triangular e os Lemas 3.1.6 e 3.1.4 obtemos

$$|B|\le\frac{c}{|\lambda|^{3/4}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|^{3/4}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Pelo Teorema das derivadas intermediárias temos que

$$\begin{aligned}\|u_{xxx}\|_{L^2(I_E)} &\le c\|u_{xx}\|_{L^2(I_E)}+c\|u_{xx}\|_{L^2(I_E)}^{1/2}\|u_{xxxx}\|_{L^2(I_E)}^{1/2}\\ &\le c\|u_{xx}\|_{L^2(I_E)}+c\|u_{xx}\|_{L^2(I_E)}^{1/2}\|i\lambda v\|_{L^2(I_E)}^{1/2}+c\|u_{xx}\|_{L^2(I_E)}^{1/2}\|f_2\|_{L^2(I_E)}^{1/2}.\end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{1}{|\lambda|}$ temos

$$\frac{1}{|\lambda|}\|u_{xxx}\|_{L^2(I_E)}\le\frac{1}{|\lambda|}\|u_{xx}\|_{L^2(I_E)}+\frac{c}{|\lambda|}\|u_{xx}\|_{L^2(I_E)}^{1/2}\|i\lambda v\|_{L^2(I_E)}^{1/2}+\frac{c}{|\lambda|}\|u_{xx}\|_{L^2(I_E)}^{1/2}\|f_2\|_{L^2(I_E)}^{1/2}.$$

$$\frac{1}{|\lambda|}\int_0^{\ell_0}\alpha|u_{xxx}|^2\,dx.\le\frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Usando a desigualdade acima em 3.1.39 temos que

$$\left|\int_0^{\ell_0}v\overline{f}_{1,x}\,dx\right|\le\frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Para $\lambda$ grande, de donde segue a desigualdade (3.1.36). Usando um procedimento semelhante obtemos

$$\left|\int_0^{\ell_0}\rho f_2\overline{u}_x\,dx\right|\le\frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Assim obtemos (3.1.37).

Finalmente, para mostrar a diferenciabilidade, introduzimos a seguinte notação

$$\mathcal{I}(x)=\frac{1}{2}\left(\rho|v(x)|^2+\alpha|u_{xx}(x)|^2\right)$$

**Lema 3.1.9.** *Sobre o intervalo elástico temos*

$$\left|\ell_0\mathcal{I}(\ell_0^-) - \int_0^{\ell_0} \mathcal{I}(x) + \alpha|u_{xx}|^2\, dx\right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.1.40}$$

Proof.- Multiplicando a equação (3.1.38) por $x\overline{u}_x$ chegamos a

$$\int_0^{\ell_0} i\lambda x\rho v\overline{u}_x\, dx + \int_0^{\ell_0} x\alpha u_{xxxx}\overline{u}_x\, dx = \int_0^{\ell_0} x\rho f_2\overline{u}_x\, dx$$

De onde segue

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^{\ell_0} x\frac{d}{dx}\left(|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2\right) dx - \int_0^{\ell_0} \alpha u_{xxx}\overline{u}_x\, dx + \alpha\ell_0 u_{xxx}(\ell_0^-)\overline{u}_x(\ell_0^-)\\ = \int_0^{\ell_0} x\rho f_2\overline{u}_x\, dx + \int_0^{\ell_0} v\overline{f}_{1,x}\, dx.\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^{\ell_0} x\frac{d}{dx}\left(|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2\right) ds + \int_0^{\ell_0} \alpha|u_{xx}|^2 ds - \alpha u_{xx}(\ell_0^-)\overline{u}_x(\ell_0^-) + \alpha\ell_0 u_{xxx}(\ell_0^-)\overline{u}_x(\ell_0^-)\\ = \int_0^{\ell_0} x\rho f_2\overline{u}_x\, dx + \int_0^{\ell_0} v\overline{f}_{1,x}\, dx.\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

$$\begin{aligned}\ell_0\mathcal{I}(\ell_0) - \int_0^{\ell_0} \mathcal{I}(s) + |u_{xx}|^2\, ds \quad &= \quad \underbrace{\ell_0\alpha u_{xxx}(\ell_0^-)\overline{u_x}(\ell_0^-) - \alpha u_{xx}(\ell_0^-)\overline{u_x}(\ell_0^-)}_{:=B_1}\\ &\quad \underbrace{-\int_{I_E} f_2 x\overline{u}_x\, dx - \int_{I_E} x\rho v\overline{f}_{1,x}\, dx}_{:=B_2}\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

Para obter a estimativa de $B_1$, primeiro lembremos que $\alpha_1 u_{xx}(\ell_0^-) = \alpha_2 u_{xx}(\ell_0^+)$ e com argumentos análogos que usamos para estimar B no Lema 3.1.8, obtemos

$$|B_1| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Usando o Lema 3.1.8 obtemos

$$|B_2| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|^2_{\mathcal{H}}.$$

A prova está concluída.

## 3.2 Resultado Principal

Finalmente para extender a limitação da energia para a parte elástica usaremos as desigualdades de obsevabilidade. Note que a desigualdade (3.1.40) nos diz que se temos estimado o termo pontual, segue a estimativa da energia sobre todo o correspondente subintervalo e vice versa. Isto é se temos limitado $\mathcal{I}(\ell_0)$ então a desigualdade (3.1.40) implica a limitação de $\int_0^{\ell_0} \mathcal{I}(x)\, dx$, tendo em vista que já temoa estimado $\int_0^{\ell_0} \alpha|u_{xx}|^2\, dx$. Esta é a ideia que desenvolvemos na prova do nosso resultado.

**Teorema 3.2.1.** *O semigrupo associado a* (2.1.1)–(2.1.3) *é da classe de Gevrey* 4.

*Demonstração.* Do Lema 3.1.7 temos

$$\int_{\ell_0}^{\ell} \mathcal{I}(x) + \alpha|u_{xx}|^2\, dx \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.2.1}$$

Usando o Lema 3.1.9 temos que

$$\int_0^{\ell_0} \mathcal{I}(x) + \alpha|u_{xx}|^2\, dx \quad \leq \quad \mathcal{I}(\ell_0^-) + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|^2_{\mathcal{H}}). \tag{3.2.2}$$

Das condições de transmissão temos que

$$v(\ell_0^-) = v(\ell_0^+), \quad \alpha_1 u_{xx}(\ell_0^-) = \alpha_2 u_{xx}(\ell_0^+).$$

Usando o Lema (3.1.6) e as desigualdades (3.1.20), (3.1.22) obtemos

$$\mathcal{I}(\ell_0^-) \leq C|\lambda|^{-1/2}\mathfrak{R}.$$

Substituindo a desigualdade acima em (3.2.2) obtemos

$$\int_0^{\ell_0} \mathcal{I}(x) + \alpha|u_{xx}|^2\, dx \quad \leq \quad \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|^2_{\mathcal{H}}). \tag{3.2.3}$$

Portanto, de (3.2.1) e (3.2.3) concluímos que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} = \int_0^{\ell_0} \mathcal{I}(x)\, dx \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|^2_{\mathcal{H}})$$

daí temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Lembrando que $U = (i\lambda U - \mathcal{A})^{-1}F$. Temos que

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

De onde segue que

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}}.$$

O que completa a demonstração.

Portanto, usando o Teorema 1.8.3 concluímos que o semigrupo é de Gevrey classe 4. Em particular diferenciável. Além disso, como $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, usando o resultado de Pruess [10] obtemos a estabilidade exponencial.

$\square$

# Capítulo 4

# Conclusões

A primeira conclusão que chegamos é que mecanismos dissipativos localizados podem produzir regularidade das soluções. Isto é de singular importância não somente para fines teóricos mais para as correspondentes aplicações numéricas.

Damos através de nosso estudo um exemplo não trivial de semigrupos differenciável.

Finalmente mostramos que é possivel obter soluções de Gevrey mesmo que os dados iniciais não sejam desta classe.

## 4.1 Pontos abertos

Um problema natural sería extender este resultado para o caso bi ou tridimensional. A situação não parece simples devido a necesidade de estimar $u_{xx}(x,t)$ no bordo do dominio, aqui se fez usando métodos de EDO. No caso n-dimensional resulta complexo ou muito particular encontrar soluções exatas onde possam ser estimados de forma conveniente estes terminos na fronteira.

Outro ponto em aberto é procurar outros modelos com viscosidade localizada que possuam este efeito regularizante, ou pertençam a classe de Gevrey ou sejam differenciáveis.

# Referências Bibliográficas


[1] M. Cavalcanti and V. Cavalcanti, Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, UEM / DMA, 2010.

[2] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin (2011).

[3] S. Agmon, H. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure Appl. Math, 17, 35-92, 1964.

[4] A. Medeiros and M. Miranda, Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos), UFRJ / IM, 2011.

[5] R. A. Adams, Sobolev Spaces. Academic Press, New York 1975.

[6] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, Jhon Wiley e Sons, 1978

[7] Pazy, A. *Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New york, (1983).

[8] J. Muñoz Rivera, Estabilização de Semigrupos e Aplicações, Serie de Métodos Matemáticos, LNCC, 2008.

[9] A. Moreira Gomes, Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações as Equações de Evolução, UFRJ / IM, 2012

[10] J. Pruss; On the spectrum of $C_0$-semigroups, *Transactions of the American Mathematical Society Vol. 284, (2), pages 847- 857, (1984).*

[11] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1. London: Academic Press, 1979.

[12] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, March 1999.

[13] Cesar R. De Oliveira, Introdução à Analise Funcional, Rio de Janeiro, Projesto Euclides,IMPA, 2010.

[14] K. Yosida, Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[15] M. Alves, J. M. Rivera, M. Sepúlveda, O. V. Villagrán and M. Z. Garay, *The asymptotic behavior of the linear transmission problem in viscoelasticity,* Math. Nachr., **287** (2014), No.5-6, pp. 483-497.

[16] C.Bardos, G.Lebeau and J.Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary,* SIAM J. Control Optim., **30** (1992), No.5, pp.1024-1065.

[17] N. Burq, *Decay for Kelvin-Voigt damped wave equations I: The black box perturbative method*, Preprint.

[18] G. Chen, S. A. Fulling, F. J. Narcowich, and S. Sun (1991), *Exponential decay of the energy of evolution equation with locally distributed damping*, SIAM J. Appl. Math. 51, pp. 266-301.

[19] S. Chen, K. Liu and Z. Liu, *Spectrum and stability for elastic systems with global or local Kelvin-Voigt damping,* SIAM J. Appl. Math., **59** (1998), No.2, pp. 651-668.

[20] F. Huang, *On the mathematical model for linear elastic systems with analytic damping,* SIAM J. Control Optim., **26** (1988), No.3, pp. 714-724.

[21] F. Huang and K. Liu, *Holomorphic property and exponential stability of the semigroup associated with linear elastic systems with damping.* Ann. Differential Equations 4 (1988), No.4, pp. 411-424.

[22] Z. Han, Z. Liu, and J. Wang, *Finer energy decay rate for an elastic string with localized Kelvin-Voigt damping*, Preprint.

[23] K. Liu and Z. Liu, *Exponential decay of energy of the Euler-Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping*, SIAM J. Control. Optim., **36** (1998), No.3, pp. 1086-1098.

[24] K. Liu and Z. Liu, *Exponential decay of energy of vibrating strings with local viscoelasticity*, Z. Angew. Math. Phys., **53** (2002), No.2, pp. 265-280.

[25] K. Liu, Z. Liu, and Q. Zhang, *Eventual differentiability of wave equation with local Kelvin-Voigt damping*, ESAIM COCV, Volume 23, No.2 (2017), 443-454.

[26] K. Liu and B. Rao, *Exponential stability for the wave equation with local Kelvin-Voigt damping,* Z. Angew. Math. Phys., **57** (2006), No.3, pp. 419-432.

[27] Z. Liu and B. Rao, *Frequency domain characterization of rational decay rate for solution of linear evolution equations*, Z. Angew. Math. Phys., **56** (2005), No.4, pp. 630-644.

[28] Z. Liu and Q. Zhang *Stability of a string with local Kelvin-Voigt damping and nonsmooth coefficient at interface*, SIAM J. Control Optim, Vol. 54, No.4 (2016), pp. 1859-1871.

[29] Z. Liu and S. Zheng; Semigroups associated to dissipative systems. Chapman e Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 398, (1999).

[30] M. Renardy, *On localized Kelvin-Voigt damping,* Z. Angew. Math. Mech, **84** (2004), No.4, pp. 280-283.

[31] L. Robbiano and Q. Zhang, *Logarithmic decay of a wave equation with Kelvin-Voigt damping*, Preprint

[32] S. Taylor, Ph.D. Thesis, Chapter "Gevrey semigroups", School of Mathematics, University of Minnesota, 1989.

[33] L. Tebou, *Stabilization of some elastodynamic systems with localized Kelvin-Voigt damping*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **36**(12), (2016), pp. 7117-7136.

[34] Q. Zhang, *Polynomial decay of an elastic/viscoelastic interaction system*, Z. Angew. Math. Phys., **69** (2018), No.4, Art. 88, 10 pp.