INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRJ

Funcionais de Curvatura e o Funcional Norma L^2 da Segunda Forma Fundamental Sem Traço

Thiago Lourenço Pires

Rio de Janeiro, Brasil

2022

Funcionais de Curvatura e o Funcional Norma L^2 da Segunda Forma Fundamental Sem Traço

Thiago Lourenço Pires

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de em Doutor Matemática.

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Instituto de Matemática

Orientador: Prof. Dra. Walcy Santos

Rio de Janeiro, Brasil

2022

CIP - Catalogação na Publicação

P667f

Pires, Thiago Lourenço
Funcionais de Curvatura e o Funcional Norma L^2 da Segunda Forma Fundamental Sem Traço / Thiago Lourenço Pires. -- Rio de Janeiro, 2022.
127 f.

Orientadora: Walcy Santos.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Matemática, 2022.

1. : Primeira e segunda variações. 2. Curvatura média. 3. Estabilidade. 4. Gap. I. Santos, Walcy, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Funcionais de Curvatura e o Funcional Norma L^2 da Segunda Forma Fundamental Sem Traço

Thiago Lourenço Pires

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de em Doutor Matemática.

Aprovado em 25/07/2022:

Walcy Santos
Walcy Santos
Doutor - IM/UFRJ, Presidente

Carlos Diosdado Espinoza Peñafiel
Doutor - IM/UFRJ

Maria Fernanda Elbert
Maria Fernanda Elbert Guimarães
Doutor - IM/UFRJ

Abdênago Alves de Barros
Doutor - UFC

José N. V. Gomes
José Nazareno Vieira Gomes
Doutor - UFSCar

Lucas Coelho Ambrozio
Lucas Coelho Ambrozio
Doutor - IMPA

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a minha companheira de vida Marina, uma vez que sem o seu apoio e suporte ao longo dos últimos oito anos, nem este trabalho e nem eu existiríamos.

Agradeço a minha mãe por tudo que fez por mim ao longo de toda a minha vida, inclusive, pelo suporte ao longo de todo o doutorado.

Agradeço a minha orientadora Walcy Santos que esteve presente na minha vida acadêmica desde a minha primeira aula na graduação até o dia da minha defesa, formando um total de quase 20 anos entre aulas, orientação e amizade.

Agradeço a todos os membros da banca de defesa deste trabalho pela disponibilidade e pelas suas contribuições para o texto. Em particular, quero deixar um agradecimento especial ao professor José Nazareno Vieira Gomes pelo trabalho incansável pré e pós defesa, e sem o qual esse texto simplesmente não existiria.

Agradeço a todos os amigos que estiveram ao meu lado ao longo da árdua jornada que foi esse doutorado. Em particular, quero agradecer aos meus amigos Caio, Maria Clara, Lucas, Duda e Luis Felipe que, entre jogatinas e fofocas, me ajudaram a manter um mínimo de sanidade mental ao longo da pandemia.

Agradeço a todos os professores e funcionários que trabalharam no IM-UFRJ ao longo dos últimos 20 anos.

Agradeço ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da UFES pelo período de afastamento para qualificação que me foi concedido.

Resumo

Funcionais que dependem das curvaturas de uma superfície são objeto com aplicações em física e matemática. Em particular, é de interesse natural estudar os minimizantes desses funcionais, bem como a estabilidade dos seus pontos críticos. Definimos um funcional dependente das curvaturas média e escalar, para hipersuperfíces de dimensão n imersas em uma variedade Riemanniana, e calculamos sua primeira variação, obtendo a equação de Euler-Lagrange que caracteriza os pontos críticos. No caso em que o ambiente é uma forma espacial de curvatura constante, calculamos também a segunda variação, obtendo um critério para definir a estabilidade destes pontos em termo de invariantes geométricos que dependem apenas da primeira e da segunda forma fundamental. Como forma de demonstrar a aplicabilidade dos resultados obtidos anteriormente, estudamos o funcional de curvatura dado pela integral da norma ao quadrado da segunda forma fundamental sem traço. Usando a equação de Euler-Lagrange, obtivemos informações sobre pontos críticos com duas curvaturas principais distintas, com uma atenção particular para as hipersuperfícies de rotação e os toros de Clifford. Além disso, estudamos a estabilidade de alguns pontos críticos conhecidos. Por fim, reinterpretamos alguns teoremas de gap de modo a obter mais informações sobre os pontos críticos, dando uma ênfase maior às imersões na esfera Euclidiana.

Palavras-chave: Primeira e segunda variações; Estabilidade; Toros de Clifford; Curvatura média; Hipersuperfícies rotacionais; Gap

Abstract

Functionals involving surface curvatures are objects with applications in physics and mathematics. It is then natural to study the minimizers of these functionals, as well as the stability of its critical points. We consider a general functional on n-dimensional hypersurfaces immersed in a Riemannian manifold, which is dependent on the mean and scalar curvatures, and we calculate its first variation obtaining its Euler-Lagrange equation that characterize the critical points. When the ambient space is a space form we also calculate its second variation obtaining its a stability criteria in terms of geometric invariants dependent on the first and the second fundamental form. As a way to demonstrate the applicability of the results, we studied the functional given by the integral of the square norm of the traceless second fundamental form. Using the Euler-Lagrange equation, we obtained information about critical points with two distinct principal curvatures, with particular attention to rotational hypersurfaces and Clifford tori. Furthermore, we study the stability of some known critical points. At the end we reinterpret some gap theorems for immersions in the Euclidean Sphere, to obtain some information about the critical points of the functional.

Keywords: First and second variations; Stability; Clifford Tori; Mean curature; Rotationals hypersurfaces; Gap

Sumário

Introdução

Problemas de otimização estão entre os principais no desenvolvimento da matemática. A questão de, dentre possíveis soluções, encontrar uma solução "ótima", isto é, a que melhor se enquadra em características pré-estabelecidas, permeia todo o nosso desenvolvimento.

Na busca da resolução desse tipo de questão, o cálculo variacional é um dos principais pilares. Embora se relacione sua origem ao Problema da Braquistócrona [29] proposto por Johann Bernoulli em 1696, com o passar do tempo as técnicas do cálculo das variações se mostraram muito versáteis, podendo ser utilizadas pare resolver desde problemas da antiguidade, como o problema isoperimétrico [19, p.37], até problemas modernos da mecânica quântica [42] .

Na geometria, seja por motivações vindas das ciências aplicadas, como o trabalho de elasticidade de Sophie Germain no início do século XIX, ou por questões teóricas relacionadas à estrutura das superfícies em $\mathbb{R}^3$, como os trabalhos de Willmore nos anos 60 do século XX [62], problemas envolvendo a busca de minimizantes para certos tipos de energia são importantes objetos de estudo.

Sabemos que a geometria local de uma superfície M em $\mathbb{R}^3$ em torno de um ponto $p \in M$ é descrita por suas curvaturas principais k_1 e k_2, que são as curvaturas máxima e mínima entre todas as interseções da superfície com planos perpendiculares à mesma passando por p.

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix},$$

é chamada segunda forma fundamental da superfície. As funções $H = \operatorname{tr} A = (k_1 + k_2)$ e $K = \det A = k_1 k_2$, das curvaturas principais são chamadas **curvatura média** e **curvatura de Gauss**, respectivamente.

Em 1811, Sophie Germain [24] propôs que a energia elástica de placas finas deveria ser medida pela integral sobre a superfície de uma função par e simétrica sobre as curvaturas principais. Mais especificamente:

$$E(M) = \frac{1}{4}\int_M (k_1 - k_2)^2 d\mu = \int_M \left(H^2 - K\right) d\mu,$$

onde $d\mu$ é o elemento de área de M.

Em 1973, Helfrich [31], após a confirmação da existência das bicapas lipídicas nos anos de 1950, propôs um modelo para o comportamento dessas biomembranas (que são finas o suficiente para serem aproximadas por superfícies bidimensionais), cuja energia por unidade de área era dada pela integral de um funcional que dependia de certas constantes físicas e das curvaturas principais da superfície.

Willmore [62], nos anos de 1960, buscava imersões de superfícies compactas no $\mathbb{R}^3$ que fossem minimizantes para uma certa energia natural. Willmore associou a cada superfície compacta $M \subset \mathbb{R}^3$ o funcional que veio a ser conhecido como Energia de Willmore:

$$W(M) = \int_M H^2 d\mu. \tag{1}$$

Esse funcional já vinha sendo estudado independentemente desde os anos de 1920 por Blaschke [9] e seu aluno Thomsen [55], que estudavam invariantes pela ação de grupos de transformações na teoria das superfícies. Nesse contexto, a energia de Willmore se mostrava um objeto muito interessante, uma vez que é invariante pela ação de transformações conformes, como demonstrado por White [61].

Tanto os problemas relacionados à elasticidade e ao comportamento das biomembranas ([57], [47] [13], [12] [56]), quanto o funcional de Willmore ([10], [11], [44], [27], [40]), ainda hoje motivam uma extensa literatura científica.

Do ponto de vista matemático, todos esses problemas são intimamente conectados. Uma vez que o teorema de Gauss-Bonnet implica que a integral da curvatura Gaussiana sobre a superfície M é determinada pela topologia da superfície, temos que em uma superfície fechada as energias citadas coincidem a menos de uma constante.

Além disso, como observado por Marques e Neves em [41], a energia de Willmore é o exemplo mais simples possível nas condições propostas por Germain (com exceção do funcional área).

Apesar de ainda haverem muitas questões a serem respondidas no que diz respeito ao funcional de Willmore, em várias áreas aparecem também motivos para considerar generalizações do mesmo, ou ainda funcionais de curvatura cada vez mais complicados ([58], [51]).

Uma vez que vários problemas físicos ocorrem em espaços não Euclidianos, faz sentido generalizar o estudo dos funcionais de curvatura para superfícies imersas em espaços de curvatura constante mais gerais, como feito por Gruber et al. em [26].

Do ponto de vista teórico, generalizar o problema para variedades n-dimensionais imersas em espaços de dimensão $n+1$ é um passo natural. Considerando S_1 a soma das curvaturas principais, e S_2 a soma dos produtos dois a dois, temos que em um certo sentido S_1 e S_2 generalizam as curvaturas médias e escalar da imersão, respectivamente. Assim, indo além do proposto em [26], vamos considerar funcionais da forma

$$\mathcal{F}(M) := \int_M \mathcal{E}(S_1, S_2)d\mu, \tag{2}$$

onde M é uma variedade n-dimensional imersa em um espaço de dimensão $n+1$, com curvatura seccional constante e $d\mu$ é o elemento de volume de M. O primeiro capítulo estabelece as notações e contém uma coletânea de resultados conhecidos que serão usados ao longo do texto. No início do capítulo 2 generalizamos as fórmulas da primeira e segunda variação obtidas em [26], para imersões do tipo $M^n \to Q_c^{n+1}$, onde Q_c^{n+1} representa os espaços completos, simplesmente conexos de curvatura seccional constante c, onde $c = 0$, 1 ou -1.

Ainda no capítulo 2, indo além do proposto nos artigos citados anteriormente, generalizamos o cálculo da 1ª variação de funcionais da forma (2) para imersões do tipo $M^n \to N^{n+1}$, nos casos em que N é uma variedade de Einstein e em que N é uma variedade Riemanniana qualquer. Além disso, obtivemos a equação de Euler-Lagrange para funcionais da forma (2) em ambos os casos.

Mais especificamente, seja M^n uma hipersuperfície isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana N^{n+1}, e considere uma variação suave à um parâmetro, normal de M^n, isto é, uma aplicação $r : M \times \mathbb{R} \to N^{n+1}$ dada por

$$r(x,t) := \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_0(x) + tu(x)\xi, \tag{3}$$

onde $\mathbf{r}_0$ é a imersão original, ξ é um campo unitário normal à M, e $u \in C_c^\infty(M)$.

Nessas condições, temos os seguintes resultados:

Teorema A (**Fórmula da Primeira Variação**). *Seja $M \subset N^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana N^{n+1}, e seja $r(\cdot,t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (3). Então, a primeira variação do funcional (2), é dada por*

$$\delta \int_M \mathcal{E}(S_1,S_2)d\mu =$$

$$= \int_M \left[\left(\mathcal{E}_{S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_2}\right)\Delta u - \mathcal{E}_{S_2}\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle\right] d\mu + \int_M \Big[\left(S_1^2 - 2S_2 + \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\xi)\right)\mathcal{E}_{S_1} + \left(S_1S_2 - 3S_3 + S_1\widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\xi) - \alpha^{ij}\widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j}\right)\mathcal{E}_{S_2} - S_1\mathcal{E}\Big] u d\mu,$$

onde $\widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j}$ são os coeficientes da curvatura Riemanniana interpretada como um $(1,3)$-tensor, $\widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\xi)$ é o tensor de Ricci e α^{ij} são os termos do tensor de tipo $(0,2)$ $g^{-1}\cdot g^{-1}\cdot\alpha$, obtido contraindo duas vezes a segunda forma fundamental α com o inverso da métrica Riemanniana.

Teorema B (**Equação de Euler-Lagrange**). *Seja $M \subset N^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana N^{n+1}, e seja $r(\cdot,t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (3). Então, a equação de Euler-Lagrange do funcional (2) é dada por*

$$\begin{aligned}&\Delta\mathcal{E}_{S_1} + \left(S_1^2 - 2S_2 + \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\xi)\right)\mathcal{E}_{S_1} + \left(S_1S_2 - 3S_3 + S_1\widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\xi) - \alpha^{ij}\widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j}\right)\mathcal{E}_{S_2}\\ &- S_1\mathcal{E} + S_1\Delta\mathcal{E}_{S_2} - \mathcal{E}_{S_2}\operatorname{div}(X_2) - \langle\alpha, \operatorname{Hess}\mathcal{E}_{S_2}\rangle - 2\widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\nabla\mathcal{E}_{S_2}) = 0,\end{aligned}$$

onde $X_2 \in TM$ é definido por $\langle X_2, Y\rangle = \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi, Y)$, para todo $Y \in TM$.

Ao final do capítulo 2, novamente considerando imersões do tipo $M^n \to Q_c^{n+1}$, calculamos a fórmula geral da variação das curvaturas r-médias, o que nos fornece imediatamente o suficiente para calcular a 1ª variação para funcionais de curvatura na forma

$$\mathcal{L}(M) \coloneqq \int_M \mathcal{E}(S_1,\ldots,S_n)d\mu, \tag{4}$$

onde S_k é a soma dos produtos de k curvaturas principais, para cada $k = 1,...,n$. Esse resultado foi originalmente obtido por Reilly [49] nos anos de 1970, e forneceu uma boa ferramenta para o cálculo da variação de funcionais da forma (4), em variedades com ou sem bordo. Aqui apresentaremos uma demonstração diferente, que usa apenas resultados elementares da teoria dos polinômios simétricos e o princípio da indução.

Ainda no contexto das possíveis generalizações do funcional de Willmore, embora a definição (1) faça sentido para imersões em espaços mais gerais, ela não se mantém um invariante conforme.

Em [16], Chen mostrou que, do ponto de vista das aplicações conformes, a melhor maneira de generalizar o funcional de Willmore para superfícies imersas em variedades mais gerais é estudar o funcional [1]

$$\Phi(M) = \int_M ||\phi||^2 d\mu, \tag{5}$$

onde $||\phi||^2 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)^2$ é a norma da segunda forma fundamental sem traço, isto é, $\phi = A - \frac{1}{2}Hg$.

Ao longo dos anos, vários trabalhos referentes a generalizações do funcional de Willmore surgiram. Em [27], Guo estudou generalizações do funcional (5) que se mantinham invariantes conformes em espaços de dimensão e codimensão arbitrárias. Essas mesmas generalizações aparecem em [32], onde Li e Hu, usando o método do referencial móvel, calcularam a equação de Euler-Lagrange dos funcionais

$$W(M) = \int_M \left(||\alpha||^2 - \frac{||H||^2}{n} \right)^{n/2} d\mu,$$

para imersões da forma $r : M^n \to N^{n+p}$, onde M e N são variedades Riemannianas de dimensões n e $n+p$ respectivamente.

Observação. *Quando $n = 2$, o funcional W coincide com o funcional Φ.*

Vários resultados referentes a existência de pontos críticos do funcional de Willmore em formas espaciais surgiram com o passar do tempo ([38], [28], [60]). Em [43], Mondino obteve resultados de existência de superfícies que são pontos críticos do funcional Φ em variedades de curvatura seccional não constante.

[1] Em [17] o funcional aparece na forma $\Phi(M) = \frac{1}{2}\int_M ||\phi||^2 d\mu$.

Nesse trabalho vamos abordar outra possível generalização para o funcional (5). Do ponto de vista geométrico, Φ é um funcional que mede o quanto M deixa de ser totalmente umbílica, isto é, de ter as curvaturas principais iguais em todo ponto.

No capítulo 3 nos dedicamos principalmente a estudar o funcional Φ para hipersuperfícies imersas em formas espaciais de curvatura constante. A primeira seção deste capítulo é dedicada às definições básicas e resultados elementares relacionados ao funcional (5).

Existem vários exemplos interessantes de variedades com apenas duas curvaturas principais distintas, como as hipersuperfícies rotacionais (definição 1.39) e os toros de Clifford (definição D.1). Com essa motivação, a seção 3.2 tem como objetivo fazer um estudo inicial dos pontos críticos do funcional Φ com duas curvaturas principais distintas.

A seção 3.3 é dedicada a discussão sobre possíveis soluções rotacionais com curvatura média constante para a equação de Euler-Lagrange do funcional Φ. Nela mostramos que essa condição é muito restritiva quando o espaço ambiente tem curvatura constante não-negativa. Quando o ambiente é Euclidiano, as únicas soluções são as esferas (Corolário 3.13). Para imersões em $\mathbb{S}^{n+1}$, as soluções são as hipersuperfícies totalmente umbílicas ou, quando $n = 2$, as superfícies mínimas (Corolário 3.15).

Existe uma extensa literatura relacionando toros de Clifford a funcionais que dependem das curvaturas da variedade ([40], [41], [34]). A seção 3.4 se dedica a estudar as condições para que um toro de Clifford imerso em $\mathbb{S}^{n+1}$ seja ponto crítico do funcional (5). Esse tipo de solução fica caracterizada pelo seguinte resultado:

Teorema C. *Se $M^n = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ é ponto crítico do funcional Φ, então ou $n_1 = n_2 = 2$, ou $n \neq 4$ e*

$$r_1^2 = \frac{n_2 - 2}{n - 4} \text{ e } r_2^2 = \frac{n_1 - 2}{n - 4}.$$

Em particular, se M é mínima, então $n_1 = n_2$ e $r_1^2 = r_2^2 = \dfrac{1}{2}$.

A seção 3.5 é direcionada a testar a aplicabilidade da fórmula da 2ª variação obtida no capítulo 2 como ferramenta de estudo da estabilidade dos pontos críticos do funcional (5). Em particular, sobre os toros de Clifford estudados na seção anterior, vale o seguinte:

Teorema D. *Seja n um número par, e suponha que o toro de Clifford mínimo*

$$\mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1},$$

seja ponto crítico de Φ. Então ele é um mínimo local estável se, e somente se, $n = 2$.

Por último, na seção 3.6 reinterpretamos alguns teoremas clássicos de gap na esfera Euclidiana, obtendo algumas restrições aos pontos críticos de baixa energia do funcional Φ.

Quando M é uma hipersuperfície fechada com curvatura escalar constante imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$, analisando o operador linearizado L_1 (1.18), obtivemos o seguinte resultado:

Teorema E. *Seja M^n uma hipersuperfície fechada isometricamente imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$, com curvatura escalar constante $s = n(n-1)$ (equivalentemente $S_2 = 0$). Suponhamos que M é ponto crítico de Φ, e que está orientada de modo que $S_1 \geq 0$. Se $S_1^2 \leq 2n$, então:*

(i) M é totalmente geodésica; ou

(ii) $n = 4$ e $M = \mathbb{S}^2(r_1) \times \mathbb{S}^2(r_2) \subset \mathbb{S}^5$, onde

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{3+\sqrt{3}}} \quad e \quad r_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}, \quad ou \quad r_1 = \sqrt{\frac{1}{3-\sqrt{3}}} \quad e \quad r_2 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}.$$

Por último, como a equação de Euler-Lagrange não depende da curvatura do ambiente, usando a desigualdade de Okumura [46], provamos os seguinte teoremas de gap para imersões em espaço de curvatura seccional constante:

Teorema F. *Dado $n \geq 5$, seja M^n hipersuperfície conexa, fechada, isometricamente imersa em Q_c^{n+1} e com curvatura média $h \geq 0$. Se M é ponto crítico de Φ satisfazendo*

$$||\phi|| \leq \frac{(n-4)\sqrt{n(n-1)}}{2n(n-2)} h,$$

então M tem curvatura média constante e

(a) M é totalmente umbílica; ou

(b) $||\phi|| = \dfrac{(n-4)\sqrt{n(n-1)}}{2n(n-2)}h$, e M está contida em uma hipersuperfície de revolução.

Teorema G. *Seja M^3 hipersuperfície conexa, fechada, isometricamente imersa em Q_c^4 e com curvatura média $h \geq 0$. Se M é ponto crítico de Φ satisfazendo*

$$||\phi|| \leq \frac{1}{\sqrt{6}}h,$$

então M tem curvatura média constante e

(a) M é totalmente umbílica; ou

(b) $||\phi|| = \dfrac{1}{\sqrt{6}}h$, e M está contida em uma hipersuperfície de revolução.

Os apêndices contém algumas definições e informações auxiliares que podem ser úteis no entendimento do texto.

1 Preliminares

Neste capítulo fixaremos as principais notações usadas na teoria, e revisaremos algumas noções e definições básicas da teoria das variedades Riemannianas que serão utilizadas posteriormente.

Observação 1.1. *Notações:*

- *Uma variedade Riemanniana M de dimensão n será denotada por M^n, exceto em casos em que a dimensão seja irrelevante ou esteja subentendida.*
- *Usaremos a notação de Einstein. Assim, sempre que um índice que aparece duas vezes em uma expressão matemática, uma em cima e outra em baixo, isso significa que aquela expressão deve ser considerada como um somatório nesse índice. Por exemplo, $\Gamma_{ij}^k r_k = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k r_k$.*

1.1 Variedades diferenciáveis

1.1.1 Introdução

Essa subseção teve como base principal do Carmo [20] e Lee [36].

Definição 1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que*

(a) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.

(b) Para todo par α e β, com $x_\alpha(U_\alpha) \bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as funções $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis.

(c) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal relativamente a (a) e (b).

A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é chamada **parametrização** de M. Os pares $\{(U_\alpha, x_\alpha^{-1})\}$ são chamadas **cartas locais**, e a união de cartas cujos domínios cobrem M é chamada **atlas**.

O sistema de cartas permite que a diferenciabilidade das funções reais seja estendida para funções entre variedades:

Definição 1.2. *Uma aplicação $f : M^m \to N^n$ entre variedades diferenciáveis é dita **diferenciável** em $p \in M$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^n \to N^n$ em $f(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^m \to M^m$ em p tal que $f(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ f \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

é diferenciável.

Uma grande parte da teoria básica das variedades diferenciáveis consiste em tentar estender conceitos da teoria das superfícies em $\mathbb{R}^3$. Vejamos alguns casos.

Definição 1.3. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma **curva** em M. Suponha que $\gamma(0) = p \in M$, e seja $C^\infty(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis em M. O vetor tangente à curva γ em $t = 0$ é a função $\gamma'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\gamma'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(M).$$

*Um **vetor tangente em p** é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\gamma(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.*

É possível mostrar [20, p.9], que o vetor tangente a uma curva γ em p depende apenas das derivadas de γ em um sistema de coordenadas. Além disso, também é possível verificar que o conjunto T_pM, com as operações usuais de funções, formam um espaço vetorial de dimensão n chamado **espaço tangente** de M em p. A união $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ é chamado **fibrado tangente** de M.

Definição 1.4. *A **diferencial** de uma função diferenciável $f : M^m \to N^n$ é a aplicação $df : TM \to TN$ cuja restrição a $p \in M$ é dada por $df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(p)}N$ para qualquer $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.*

Podemos classificar alguns tipos de funções diferenciáveis de acordo com as propriedades da sua diferencial.

Definição 1.5. *Uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ é uma **imersão** se df_p é injetiva para todo $p \in M$. A diferença $n - m$ é chamada **codimensão** da imersão.*

Se, além disso, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$, dizemos que f é um **mergulho** de M em N e que M é uma **subvariedade** de N.

Definição 1.6. *Um **campo vetorial** X em M é uma função $X : M \to TM$ tal que $X_p \in T_pM$ para todo $p \in M$.*

Chamamos de **fibrado cotangente** o espaço dual $T^*M = (TM)^*$ dos funcionais lineares em TM. Assim, uma 1-forma diferenciável dx em M é uma seção diferenciável de T^*M.

Vamos finalizar essa subseção relembrando a importante noção de orientabilidade para variedades.

Definição 1.7. *Uma variedade diferenciável M é **orientável** se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que, para cada par de índices α, β tais que $x_\alpha(U_\alpha) \bigcap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_a$ tem determinante positivo. Caso contrário, M é não orientável. Se M é orientável, uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição acima é denominada uma **orientação** para M.*

1.1.2 Integração em variedades

Nosso objetivo nessa subseção é enunciar alguns resultados clássicos de integração da teoria das variedades. Para isso, vamos começar estendendo para variedades o conceito das formas diferenciais do espaço Euclidiano (para um aprofundamento maior no caso real recomendamos Lima [39], e para o estudo em variedades do Carmo [21], que serviu como base para essa subseção).

Definição 1.8. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma k-forma exterior ω em M é a escolha, para cada $p \in M$, de um elemento $\omega(p)$ do espaço $\Lambda^k(T_pM)^*$ de formas k-lineares alternadas definidas no espaço tangente T_pM.*

Definição 1.9. *Uma k-forma diferenciável em uma variedade diferenciável M^n é uma k-forma exterior tal que, em algum sistema de coordenadas, sua representação é diferenciável.*

Agora, seja M uma variedade compacta com estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$, coberta por uma família de vizinhanças coordenadas $\{V_\alpha\}$, tal que $V_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$, e ω uma n-forma diferencial em M com suporte K. Se K está contido em uma vizinhança coordenada V_α, e a representação local ω_α de ω em U_α é

$$\omega_\alpha = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

definimos

$$\int_M \omega = \int_{V_\alpha} \omega_\alpha = \int_{U_\alpha} a_\alpha dx_1 \cdots dx_n,$$

onde o lado direito é uma integral múltipla em $\mathbb{R}^n$. Se K está contido em outra vizinhança coordenada V_β, é possível mostrar que a definição acima independe da escolha da vizinhança [21, p.70].

Definição 1.10. *Seja M^n uma variedade orientável com uma cobertura $\{V_\alpha\}$ e ω uma n-forma sobre M^n. Definimos*

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \varphi_i \omega,$$

onde $\{\varphi_i\}$ é uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$.

Observação 1.2. *Para verificar que a integral está bem definida e outros detalhes ver [21, pp.69-75].*

Outro conceito importante para a teoria de integração em variedades é o conceito de **variedade com bordo**. Seja $H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}$ um semi-espaço de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.11. *Uma variedade diferenciável n-dimensional com bordo (regular) é um conjunto M, juntamente com uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset H^n \to M$, de conjuntos abertos de H^n em M, tais que:*

(a) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$,

(b) Para todo o par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em H^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.

(c) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal relativamente às propriedades dos itens (a) e (b).

Um ponto $p \in M$ é chamado um ponto de bordo em M se, para alguma parametrização $x : U \subset H^n \to M$ em torno de p, tivermos que $x(0, x_2, \ldots, x_n) = p$. O conjunto dos pontos de bordo em M é denominado **bordo** de M e denotado por ∂M. O resultado abaixo pode ser encontrado em [21, p.79].

Proposição 1.12. *O bordo ∂M de uma variedade diferenciável n-dimensional M com bordo é uma variedade diferenciável $(n-1)$-dimensional. Além disso, se M é orientável, então a orientação de M induz uma orientação em ∂M.*

Vamos enunciar agora o teorema de Stokes, que será utilizado muitas vezes nesse texto.

Teorema 1.13. *(**Teorema de Stokes**) Seja M^n uma variedade diferenciável n-dimensional com bordo, compacta e orientada. Seja ω uma $(n-1)$-forma diferencial em M, e seja $i : \partial M \to M$ a aplicação de inclusão de ∂M em M. Então*

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \int_M d\omega.$$

Demonstração. Ver [21, p.80]. □

1.1.3 Variedades Riemannianas

Uma vez estabelecidos os principais conceitos referentes às variedades diferenciáveis, vamos nos restringir àquelas que possuem certas propriedades métricas. As principais fontes de estudo para essa subseção foram do Carmo [20] e Lee [37].

Definição 1.14. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma **métrica Riemanniana** ou **1ª forma fundamental** $g(\cdot,\cdot)$ em M é um $(0,2)$-tensor simétrico, diferenciável e positivo definido.*

A métrica Riemanniana define um produto interno em cada espaço tangente T_pM, escrito como $\langle X,Y\rangle = g(X,Y)$ para $X,Y \in T_pM$. Em coordenadas locais a métrica Riemanniana pode ser escrita como

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j, \tag{1.1}$$

onde $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ é base uma coordenada de T_pM, $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle$ é uma matriz simétrica positiva definida de funções suaves e $\{dx^i\}$ são as diferenciais coordenadas em $\mathbb{R}^m$ definidas por $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$. O par (M,g) é chamado **variedade Riemanniana** (quando possível omitiremos g).

Observação 1.3. *A métrica (1.1) possui uma inversa $g^{-1} = g^{ij}\partial_i \otimes \partial_j$ cujas componentes são determinados pela relação $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$.*

Observação 1.4. *Se M é uma variedade Riemanniana, então existe um isomorfismo canônico entre TM e T^*M. Com efeito, dado $X = X^i \otimes \partial_i \in TM$, esse isomorfismo (chamado aplicação bemol $\flat$) leva $X \to \langle X,\cdot\rangle = g_{ij}X^j \otimes dx^i = X_i \otimes dx^j \in T^*M$, a 1-forma associada à X. Analogamente sua inversa (chamada aplicação sustenido $\sharp$), leva $w = X_j dx^j \in T^*M$ em $g^{ij}X_j \otimes \partial x_i = X^j \otimes \partial x_j \in TM$. No cálculo tensorial, com um certo abuso de notação e expressão, esses isomorfismos são usados para "subir" ou "descer" os índices de um tensor.*

A importante noção de conexão surge como uma maneira de definir uma espécie de operação de derivação de campos vetoriais.

Definição 1.15. *Uma **conexão afim** em (M,g) é uma aplicação $TM \times TM \to TM$, denotada por $(X,Y) \to \nabla_X Y$ satisfazendo*

(a) $\nabla_{fX+hY}Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$,

(b) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde X, Y, $Z \in TM$, e f e h são funções diferenciáveis em M.

A **torção** de uma conexão é dada por

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$

onde $[X,Y] = XY - YX$. Dizemos que uma conexão é compatível com a métrica g se satisfaz

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

para todos $X, Y, Z \in TM$. O teorema de Levi-Civita [20, p.61], diz que dada uma variedade Riemanniana existe uma única conexão compatível com a métrica e cuja torção é nula. Essa conexão é chamada **conexão Riemanniana** em (M,g). As componentes de uma conexão Riemanniana são representados em termos de uma base $\{\partial_k\}$ como $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$, onde Γ_{ij}^k são os chamados **símbolos de Christoffel** da conexão. Esses símbolos podem ser escritos em função da métrica [20, p.62] da seguinte forma:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l} \right), \tag{1.2}$$

onde $g_{ij,l} = \partial_l g_{ij}$.

Definição 1.16. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in TM$ uma aplicação $R(X,Y) : TM \to TM$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{1.3}$$

Em [36, p.118] prova-se que a curvatura Riemanniana pode ser interpretada com o (1,3)-tensor

$$R(X,Y)Z = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})Z = R_{ijk}^l dx^i(X) \otimes dx^j(Y) \otimes dx^k(Z) \otimes \partial_l,$$

onde os R_{ijk}^l são definidos por

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l.$$

Observação 1.5. *Em alguns casos a curvatura Riemanniana é interpretada como o (0,4)-tensor definido por*

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = R_{ijkl} dx^i(X) \otimes dx^j(Y) \otimes dx^k(Z) \otimes dx^l(W),$$

onde $R_{ijkl} = \langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l\rangle$.

Dentre as propriedades da curvatura Riemanniana destacamos o resultado abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [20, pp.101-102].

Proposição 1.17. *O tensor curvatura satisfaz*

(a) $R(X,Y) = -R(Y,X)$,

(b) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$,

(c) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$,

(d) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(Primeira Identidade de Bianchi).*

O traço do tensor curvatura sobre os índices 2 e 3 (ou 1 e 4) é chamado **tensor de Ricci**, e pode ser escrito como em Petersen [48, p.29]:

$$Ric(\partial_i, \partial_j) = g^{lk} R^j_{ikl} = R^{kj}_{ik} = R^j_i.$$

O traço do tensor de Ricci, que denotaremos por s, é chamado **curvatura escalar** de M.

Outra noção importante de curvatura é a que segue abaixo.

Definição 1.18. *Seja $p \in M$ e seja $\sigma \in T_pM$ um subespaço bidimensional de T_pM. A* ***curvatura seccional*** *de M em p com relação a σ é definida por*

$$K_p(\sigma) = \frac{\langle R(x,y)y, x\rangle}{|x \wedge x|^2},$$

onde $\{x,y\}$ é uma base de σ, e $|x \wedge y|^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2$.

Observação 1.6. *É possível mostrar que a definição da curvatura seccional independe da escolha da base $\{x,y\}$ de σ [20, p.105].*

Observação 1.7. *Quando $n = 2$, K é conhecida como curvatura de Gauss da superfície.*

Definição 1.19. *Uma variedade Riemanniana M^n é chamada* ***variedade de Einstein*** *se para todo X, $Y \in TM$*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \lambda\langle X,Y\rangle,$$

onde $\lambda : M \to \mathbb{R}$ é uma função real.

Dentre as principais propriedades das variedades de Einstein destacamos o seguinte resultado:

Proposição 1.20. *(a) Se M^n é conexa e de Einstein com $n \geq 3$, então λ é constante.*

(b) Se M^3 é uma variedade de Einstein conexa, então M^3 tem curvatura seccional constante.

Demonstração. Ver [37, p.125]. □

Vamos estabelecer agora definições importantes para enunciarmos alguns resultados da teoria de integração em variedades Riemannianas.

Definição 1.21. *Sejam M uma variedade Riemanniana, $X \in TM$ e $f \in C^\infty(M)$. Definimos o* ***divergente*** *de X como a função $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$ dada por $\operatorname{div} X(p) =$ traço da aplicação linear $Y(p) \to \nabla_Y X(p)$, $p \in M$, o* ***gradiente*** *de f como o campo vetorial $\operatorname{grad} f = \nabla f$ em M definido por*

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, \ v \in T_pM,$$

o operador $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ (o ***Laplaciano*** *de M) por*

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f, \quad f \in C^\infty(M),$$

e o ***Hessiano*** *$Hessf$ de f em p como um operador linear*

$$Hessf : T_pM \to T_pM, \ (Hessf)Y = \nabla_Y \operatorname{grad} f, \ Y \in T_pM.$$

Observação 1.8. *Dada uma variedade Riemanniana M e um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$, é possível mostrar que o operador Laplaciano é dado por*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left(e_i e_i(f) - (\nabla_{e_i} e_i) f \right).$$

Em cada ponto p, usando coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n)$, o Laplaciano pode ser escrito como

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right),$$

onde $g = det(g_{ij})$.

Observação 1.9. *Dados $X \in TM$ e $f, g \in C^\infty(M)$, valem as seguintes relações:*

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + \langle \nabla f, X \rangle, \tag{1.4}$$

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle,$$

e

$$\Delta f = \operatorname{tr} Hessf.$$

Observação 1.10. *$Hessf$ restrito a T_pM é auto-adjunto, logo determina uma forma bilinear simétrica em TM dada por $(Hessf)(X,Y) = \langle (Hessf)X, Y \rangle$, onde $X, Y \in TM$.*

O teorema a seguir é consequência do teorema de Stokes (Teorema 1.13):

Teorema 1.22. *Seja M^n uma variedade Riemanniana com bordo, compacta, conexa e orientada. Para $u, v \in C^\infty(M)$ e N campo de vetores normais unitários apontando para fora do bordo de M temos*

(a) ***Primeira Identidade de Green***

$$\int_M u\Delta v d\mu + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mu = \int_{\partial M} uNv d\tau. \tag{1.5}$$

(b) ***Segunda Identidade de Green***

$$\int_M u\Delta v - v\Delta u d\mu = \int_{\partial M} (uNv - vNu)\, d\tau, \tag{1.6}$$

onde $d\mu$ representa o elemento de volume de M e $d\tau$ representa o elemento de área de ∂M induzido por N.

1.2 Teoria das imersões isométricas

Essa seção é dedicada a descrever a teoria básica das imersões e suas equações fundamentais. Após isso nos restringiremos ao caso das hipersuperfícies, que será de suma importância em capítulos posteriores. Para um aprofundamento maior no assunto recomendamos do Carmo [20] e Dajczer [18].

Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+p}$ uma imersão entre variedades diferenciáveis. Se $\widetilde{M}$ tem uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\widetilde{M}}$, então f induz uma métrica Riemanniana em M dada por

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle df(X), df(Y) \rangle_{\widetilde{M}},$$

para todo $p \in M$ e para todo $X, Y \in T_pM$. Nesse caso, a métrica de M é chamada **métrica induzida** por f, e a aplicação f é chamada uma **imersão isométrica**.

Agora, seja $f : M \to \widetilde{M}$ uma imersão isométrica. Pela forma local das imersões, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que $f|_U$ é um mergulho. Logo, podemos identificar U com $f(U)$, ou seja, f é localmente uma inclusão. Uma vez feito isso, podemos considerar o espaço tangente de M em p como um subespaço do espaço tangente de $\widetilde{M}$ em $f(p)$ identificado com p, e escrevemos

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp},$$

onde $T_pM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\widetilde{M}$. Podemos então definir o **fibrado normal** $TM^{\perp} = \bigcup_{p \in M} T_pM^{\perp}$.

Sejam $\widetilde{M}^{n+p}$ uma variedade Riemanniana com conexão $\widetilde{\nabla}$, e $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+p}$ imersão isométrica. Dados $X, Y \in TM$, sejam $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões locais em $T\widetilde{M}$. Uma vez que

$$\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \left(\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\top} + \left(\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\perp}, \tag{1.7}$$

definimos

$$\nabla_X Y = \left(\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\top}. \tag{1.8}$$

Da unicidade da conexão de Levi-Civita verifica-se que essa é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M. De (1.7) e (1.8), (identificando $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ com X e Y), podemos escrever a chamada **fórmula de Gauss**:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \tag{1.9}$$

que define a aplicação $\alpha : TM \times TM \to TM^{\perp}$ chamada **segunda forma fundamental** dada por

$$\alpha(X, Y) = \left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)^{\perp}.$$

Proposição 1.23. *A aplicação α definida em (1.9) está bem definida, é bilinear e simétrica sobre o anel $C^{\infty}(M)$.*

Demonstração. Ver [20, p.140]. □

Dados $X \in TM$, $\xi \in TM^\perp$, denotamos por $A_\xi X$ a componente tangencial de $-\widetilde{\nabla}_X \xi$. Assim, pela fórmula de Gauss vale

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle.$$

Dessa forma, a aplicação $A_\xi : TM \times TM \to C^\infty(M)$ é uma forma bilinear e simétrica, e portanto a aplicação $A_\xi : TM \to TM$ é linear sobre $C^\infty(M)$ e simétrica, ou seja, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle X, A_\xi Y\rangle$. A aplicação A_ξ é chamada **operador forma**, ou segunda forma fundamental na direção ξ.

A componente normal de $\widetilde{\nabla}_X \xi$, denotada por $\widetilde{\nabla}^\perp_X \xi$, define uma conexão compatível com a métrica no fibrado normal $TM^\perp$. Chamamos $\nabla^\perp$ de **conexão normal** de f. Por (1.7) temos a **fórmula de Weingarten**

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \widetilde{\nabla}^\perp_X \xi. \tag{1.10}$$

Através da segunda forma fundamental conseguimos estabelecer relações entre as curvaturas de M e $\widetilde{M}$. Com efeito, usando (1.9), (1.10), a definição de curvatura Riemanniana (1.3), e olhando para a componente tangencial [18, pp.4-5], , temos a **equação de Gauss**

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \widetilde{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle.$$

Tomando as componentes normais de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ temos a **equação de Codazzi**

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z), \tag{1.11}$$

onde $(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) := \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$.

Se $R^\perp$ denota o tensor curvatura no fibrado normal $TM^\perp$, isto é

$$R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi - \nabla^\perp_{[X,Y]} \xi,$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$, usando (1.9) e (1.10) e observando a componente normal de $\widetilde{R}(X,Y)\xi$, segue a **equação de Ricci**

$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^\perp = R^\perp(X,Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y). \tag{1.12}$$

Daqui em diante vamos denotar por Q_c^{n+p} uma variedade Riemanniana de dimensão $n+p$, completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional constante c. Com essa notação temos

- $Q_1^{n+p} = \mathbb{S}^{n+p}$ é a esfera Euclidiana;
- $Q_0^{n+p} = \mathbb{R}^{n+p}$ é o espaço Euclidiano;
- $Q_{-1}^{n+p} = \mathbb{H}^{n+p}$ é o espaço hiperbólico.

Nesse caso, o tensor curvatura $\widetilde{R}$ de Q_c^{n+p} é dado por

$$\widetilde{R}(X,Y) = c(X \wedge Y),$$

para todo X, $Y \in TQ_c^{n+p}$, onde para todo $Z \in TQ_c^{n+p}$ temos

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y.$$

Assim, no caso em que $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ é uma imersão isométrica, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são, respectivamente,

- $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = c\langle (X \wedge Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle$,
- $(\nabla_X A)(Y,\xi) = (\nabla_Y A)(X,\xi)$,
- $R^\perp(X,Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y)$.

É possível mostrar que para imersões em espaços de curvatura seccional constante, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci (chamadas **equações fundamentais das imersões**) funcionam de maneira análoga as equações de compatibilidade na teoria das superfícies, ou seja, definem inteiramente a imersão isométrica a menos de isometria [18, p.7].

Quando a codimensão de uma imersão isométrica $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ é igual a 1, dizemos que M é uma **hipersuperfície** de $\widetilde{M}$. Nesse caso, se $\xi \in TM^\perp$ e $X, Y \in TM$, as equações de Gauss e Codazzi podem ser reescritas, respectivamente, como

- $R(X,Y)Z = (\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\top} + (A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z$,
- $(\widetilde{R}(X,Y\xi)^{\top} = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y$,

onde $(\nabla_X A_\xi)Y \coloneqq \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi \nabla_X Y$.

No caso das hipersuperfícies em espaços de curvatura seccional constante, isto é, $f : M^n \to Q_c^{n+1}$, as equações de Gauss e Codazzi são, respectivamente,

$$R(X,Y) = c(X \wedge Y) + A_\xi X \wedge A_\xi Y, \tag{1.13}$$

$$(\nabla_Y A_\xi)X = (\nabla_X A_\xi)Y. \tag{1.14}$$

1.2.1 Curvaturas r-médias de uma imersão e tensores de Newton

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+p}$, definimos o **vetor curvatura média** $H_1(x)$ em $x \in M$ como

$$H_1(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i, X_i),$$

onde α é a segunda forma fundamental de f e $X_1, \ldots, X_n \in T_xM$ é uma base ortonormal. É possível mostrar que $H_1(x)$ não depende da base tangencial. Além disso, para um conjunto de vetores ortonormais $\xi_1, \ldots, \xi_p \in T_xM^{\perp}$ temos que

$$H_1(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} (\operatorname{Tr} A_{\xi_i})\xi_i,$$

Dizemos que uma imersão isométrica é **mínima** quando $H_1(x) = 0$ para todo $x \in M$. Quando a segunda forma fundamental é nula para todo $x \in M$, dizemos que f é uma imersão **totalmente geodésica**. Se para todo $x \in M$, $A_\xi = \lambda_\xi Id$ para todo $\xi \in T_xM^{\perp}$, onde $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ e Id é a aplicação identidade em T_xM, dizemos que f é **totalmente umbílica**.

Observação 1.11. *Quando f é totalmente geodésica é possível mostrar que as geodésicas de M são as geodésicas de $\widetilde{M}$ contidas em M [20, p.145].*

Consideremos agora uma hipersuperfície $f : M \to \widetilde{M}^{n+1}$, e seja ξ vetor normal unitário definido em uma vizinhança de $p \in M$. Podemos escrever a segunda forma fundamental como $\alpha = \langle \alpha, \xi \rangle \xi$. Os autovalores de sua representação matricial $k_1, \ldots, k_n$ são chamados **curvaturas principais** de f em p, e as **direções principais** são seus autovalores correspondentes.

Associado a segunda forma fundamental temos n invariantes algébricos dados por

$$S_r(p) = \sigma_r(k_1(p), \ldots, k_n(p)), \qquad 1 \leq r \leq n,$$

onde $\sigma_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são as funções elementares simétricas em $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\sigma_r(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}.$$

(Ver Apêndice A).

Observação 1.12. *Se $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ é uma imersão isométrica note que S_r não está definido para $r > n$. Nesse caso assumiremos $S_r = 0$.*

Definição 1.24. *A r-ésima curvatura média H_r (normalizada) da hipersuperfície M é definida por*

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r, \qquad 1 \leq r \leq n. \tag{1.15}$$

Em particular, quando $r = 1$, $H_1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k_i$ é a curvatura média de M, e quando $r = n$, $H_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} k_i$ é chamada **curvatura de Gauss-Kronecker**.

Observação 1.13. *Ocasionalmente a curvatura média pode aparecer em sua versão não normalizada. Assim, denotaremos por $H = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i, X_i)$ o vetor curvatura média (não normalizado) e $h = S_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} k_i$ a curvatura média (não normalizada).*

Observação 1.14. *Quando o espaço ambiente é Einstein, S_2 é, a menos de uma constante, a curvatura escalar de M. A demonstração para esse fato pode ser encontrada no trabalho de Elbert [23, 3.9] e será reproduzida aqui. Com efeito, se*

s e $\widetilde{s}$ são, respectivamente, as curvaturas escalares de M e $\widetilde{M}$, e N é um campo normal ao longo de M, pela equação de Gauss temos

$$s = \widetilde{s} - \widetilde{\mathrm{Ric}}(N) + S_2.$$

É possível verificar que $\widetilde{s} - \widetilde{\mathrm{Ric}}(N) = nk_0$, e portanto

$$S_2 = s - nk_0.$$

Observação 1.15. *Uma vez que $S_r = \sigma_r(k_1, \ldots, k_n)$, são válidos para S_r os resultados análogos contidos no apêndice A. Assim temos*

$$kS_k = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_{k-i}p_i, \tag{1.16}$$

e

$$p_k = (-1)^{k-1}kS_k + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-1+i}S_{k-1}p_i, \tag{1.17}$$

onde $p_k = \sum_{i=1}^{n} k_i^k$.

Definição 1.25. *Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Definimos o r-**ésimo** tensor de Newton $P_r : T_pM \to T_pM$ indutivamente por*

$$\begin{aligned} &P_0 = Id;\\ &P_r = S_r Id - AP_{r-1}, \qquad 1 \le r \le n, \end{aligned}$$

onde A é o operador forma.

Se $k_1, \ldots, k_n$ são autovalores de A, denotamos

$$S_r(A_i) = S_r(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_n),$$

a r-ésima função elementar simétrica associada a restrição A_i de A ao subespaço ortogonal ao autovetor correspondente e_i.

Os resultados a seguir fornecem algumas propriedades dos tensores de Newton e das curvaturas r-médias (não normalizadas). As demonstrações se encontram no apêndice A.

Proposição 1.26. *P_r é um operador linear auto-adjunto que comuta com A.*

Proposição 1.27. *Para cada $i = 1, \ldots, n$ temos*

$$S_r(A_i) = S_r - k_i S_{r-1}(A_i).$$

Proposição 1.28. *Para cada $1 \leq r \leq n-1$ temos que*

$$P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i.$$

Proposição 1.29. *Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ imersão isométrica e A o operador forma. O r-ésimo tensor de Newton associado a A satisfaz*

(a) $\mathrm{Tr}(P_r) = (n-r)S_r$*;*

(b) $\mathrm{Tr}(AP_r) = (r+1)S_{r+1}$*;*

(c) $\mathrm{Tr}(A^2 P_r) = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$*.*

O divergente de P_r é definido por

$$\operatorname{div} P_r(p) = \mathrm{Tr}(\nabla P_r)(p) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i} P_r(e_i)(p),$$

onde $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Além disso, vale o seguinte lema:

Lema 1.30 (Lema 3.1 de [6])**.** *Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. O divergente das transformações de Newton P_r é definido pela seguinte fórmula indutiva:*

$$\begin{cases} \operatorname{div} P_0 = 0, \\ \operatorname{div} P_r = A(\operatorname{div} P_{r-1}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{R}(\xi, P_{r-1}e_i)e_i\right)^{\top}. \end{cases}$$

Quando o espaço ambiente tem curvatura seccional constante vale $\left(\widetilde{R}(\xi, X)Y\right)^{\top} = 0$ para todos $X, Y \in TM$, e portanto vale o seguinte corolário:

Corolário 1.31. *Se $\widetilde{M}$ tem curvatura seccional constante então as transformações de Newton são livres de divergência, isto é,*

$$\operatorname{div} P_r = 0,$$

para todo r.

1.2.2 O operador linearizado L_r

Associado a cada transformação de Newton P_r temos um operador diferencial de segunda ordem $L_r : C^\infty(M^n) \to \mathbb{R}$ definido por

$$L_r f = \operatorname{Tr}\left(P_r(Hess f)\right), \tag{1.18}$$

que chamamos **operador linearizado $\mathbf{L_r}$**.

Observação 1.16. *O operador linearizado L_r foi introduzido por Voss [59], em 1956.*

Observação 1.17. *Para $r = 0$, temos $L_0 f = \Delta f$, e portanto, em certo sentido, podemos dizer que L_r generaliza o operador Laplaciano.*

Note que

$$\begin{aligned} L_r f = \operatorname{Tr}(P_r Hess f) &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} f), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, P_r(e_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{P_r(e_i)} \nabla f, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle Hess f(P_r e_i), e_i\rangle \\ &= \operatorname{Tr}\left(Hess f \circ P_r\right), \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial (local) ortonormal tangente à M. Além disso, quando o espaço ambiente tem curvatura seccional constante temos o seguinte resultado:

Proposição 1.32. *Se $\varphi : M^n \to Q_c^{n+1}$ é uma imersão em um espaço de curvatura seccional constante, então*

$$L_r f = \operatorname{div}\left(P_r \nabla f\right).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(P_r \nabla f\right) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{e_i} P_r)\nabla f, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} \nabla f), e_i\rangle \\ &= \langle \operatorname{div} P_r, \nabla f\rangle + L_r f \\ &= L_r f, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o corolário 1.31. $\square$

Destacamos as seguintes propriedades dos operadores L_r, cujas demonstrações podem ser encontradas nos trabalhos de Rosenberg [50], e Alencar e Colares [2]:

Proposição 1.33. *Se $f, h : M^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

$$L_r(fh) = fL_rh + hL_rf + 2\langle P_r(\nabla f), \nabla h\rangle.$$

Proposição 1.34. *Seja $\varphi : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica onde M é compacta. Então, para quaisquer funções f e h em M, o operador L_r satisfaz*

(a) $\int_M L_r f d\mu = 0,$

(b) $\int_M fL_rhd\mu = \int_M hL_rfd\mu,$

(c) $\int_M fL_rh + \langle P_r(\nabla f), \nabla h\rangle d\mu = 0.$

1.3 Cálculo variacional

Nesta seção vamos estabelecer as principais noções do cálculo variacional em variedades. As principais referências para a construção dessa seção foram Neto [45] e Gruber [25].

Definição 1.35. *Seja M uma variedade Riemanniana. Dada uma função $u : M \to \mathbb{R}$, a variação de u na direção $\xi : M \to \mathbb{R}$ é definida por $u + t\xi$, para $t > 0$ suficientemente pequeno.*

Definimos também a derivada de um funcional $\mathcal{F}$ na direção ξ por

$$\delta\mathcal{F} = \frac{d}{dt}\mathcal{F}(u + t\xi)\Big|_{t=0}.$$

Definição 1.36. *Sejam $x = (x^i)$ coordenadas locais de M, $u : M \to \mathbb{R}$ e $L(x, u, \nabla u)$ funções suaves. Se*

$$\mathcal{F}_L(u) = \int_M L(x, u, \nabla u)d\mu,$$

então a derivada variacional de $\mathcal{F}_L$ na direção ξ é

$$\delta\mathcal{F}_L = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_M L\big(x, u + t\xi, \nabla(u + t\xi)\big)d\mu = \int_M \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial u_i}\right)\xi d\mu,$$

onde u_i é a i-ésima componente de ∇u. A equação diferencial

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial u_i}\right) = 0,$$

é chamada ***Equação de Euler-Lagrange*** *associada ao funcional $\mathcal{F}_L$, e as funções que a satisfazem são chamado* ***pontos críticos*** *do funcional $\mathcal{F}$.*

Definição 1.37. *Seja $f : M \to \widetilde{M}$ uma imersão isométrica. Uma variação suave de M à um parâmetro é uma aplicação $r : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to \widetilde{M}$ de classe C^∞, tal que*

(a) Para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$,

$$\begin{aligned} f_t &: M \to \widetilde{M} \\ x &\to r(t, x), \end{aligned}$$

é uma imersão.

(b) $r_0 = f$.

Uma variação r é **própria** se existe um compacto $K \subset M$, chamado **suporte** de r, tal que $r_t = f$ sobre K^c para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. O campo variacional de r é o campo

$$\delta r = \left.\frac{\partial r}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Dado um funcional $\mathcal{F}$ definido em M e r variação suave à um parâmetro de M, se $M_t = r(t, M)$ e $M = M_0$, definimos a variação de $\mathcal{F}$ por

$$\delta\mathcal{F} = \frac{d}{dt}\mathcal{F}(M_t)\Big|_{t=0}.$$

Uma variedade M tal que

$$\delta\mathcal{F}(M) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}(M_t)\Big|_{t=0} = 0,$$

para toda variação M_t de M, é chamado ponto crítico do funcional $\mathcal{F}$.

Definição 1.38. *Se M é um ponto crítico de um funcional $\mathcal{F}$, dizemos que M é* ***estável*** *com relação à $\mathcal{F}$ se*

$$\delta^2\mathcal{F}(M) = \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}(M_t)\Big|_{t=0} \geq 0,$$

para toda variação M_t de M. Caso contrário, dizemos que M é instável.

1.4 Hipersuperfícies rotacionais

1.4.1 A primeira forma fundamental

Dado um subgrupo G do grupo de isometrias de $\mathbb{R}^{n+1}$, e uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que M é invariante pela ação de G se $g(M) = M$, $\forall g \in G$.

Seja $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; A^t A = Id\}$ o grupo ortogonal. As órbitas principais da ação de $O(n)$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ são esferas $\mathbb{S}^{n-1}$ com um raio x e uma altura y. Nesse caso, o espaço de órbitas pode ser identificado com $Q = \{(x, y); x \geq 0\}$, de forma que cada ponto interior de Q corresponde a uma órbita principal.

Definição 1.39. *Dizemos que M^n é uma hipersuperfície rotacional de $\mathbb{R}^{n+1}$ se M é invariante pela ação de $O(n)$.*

Nesse caso, existe uma curva geratriz parametrizada por comprimento de arco $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definida em Q, tal que M é parametrizada por

$$X(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (x(t)\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), y(t)) = x\Theta \oplus y, \tag{1.19}$$

onde $\Theta = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ é uma parametrização ortogonal da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$.

Em cada ponto $p \in M$, usando coordenadas locais $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, uma métrica Riemanniana de M pode ser escrita como $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Vamos calcular a métrica Riemanniana dada pela parametrização (1.19). Nesse caso podemos escrever $ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} g_{ti} dt dx^i + \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} dx^i dx^j$. Calculando as derivadas parciais obtemos

$$\begin{aligned} X_t &= x'\Theta \oplus y', \\ X_i &= x\Theta_i \oplus 0, \ \forall i = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Os termos g_{ij} da métrica (1.19) são dados por

$$g_{tt} = \langle X_t, X_t \rangle = x'^2 \langle \Theta, \Theta \rangle \oplus y'^2 = x'^2 + y'^2 = 1,$$

$$g_{ti} = \langle X_t, X_i \rangle = 0, \ \forall i = 1, \dots, n-1,$$

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = 0 \ \forall i, j = 1, \dots, n-1, i \neq j,$$

$$g_{ii} = \langle X_i, X_i \rangle = x^2 ||\Theta_i||^2, \ \forall i = 1, \dots, n-1.$$

Logo, a primeira forma fundamental para hipersuperfícies rotacionais em $\mathbb{R}^{n+1}$ é dada por

$$ds^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x^2 ||\Theta_i||^2 (dx^i)^2.$$

Além disso, se $g = det(g_{ij})$, o elemento de volume da métrica (1.19) é dado por

$$\sqrt{g} = \sqrt{x^{2(n-1)} \prod_{i=1}^{n-1} ||\Theta_i||^2} = x^{(n-1)} \prod_{i=1}^{n-1} ||\Theta_i||.$$

1.4.2 A segunda forma fundamental

A aplicação normal N de (1.19) é dada por

$$N = y'\Theta \oplus -x',$$

e suas derivadas são

$$\begin{aligned} N_t &= y''\Theta \oplus -x'', \\ N_i &= y'\Theta_i \oplus 0, \ \forall i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Portanto, suas curvaturas principais são

$$k_1 = \frac{\langle N_t, X_t \rangle}{\langle X_t, X_t \rangle} = y''x' - x''y', \tag{1.20}$$

$$k_{i+1} = \frac{\langle N_i, X_i \rangle}{\langle X_i, X_i \rangle} = \frac{y'}{x}, \ \forall i = 1, \dots, n-1. \tag{1.21}$$

Observação 1.18. *Podemos escrever a parametrização de uma hipersuperfície rotacional como*

$$Z(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (f(t)\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), t) = f(t)\Theta \oplus t. \tag{1.22}$$

Nesse caso, fazendo uma mudança de variáveis em (1.20) e (1.21) obtemos

$$k_1 = \frac{f''}{\sqrt{1 - f'^2}}, \tag{1.23}$$

$$k_{i+1} = -\frac{\sqrt{1 - f'^2}}{f}, \ \forall i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.24}$$

Observação 1.19. *A construção acima pode ser estendida para espaços de curvatura seccional constante com poucas alterações. Segundo do Carmo e Dajczer [22] temos:*

Teorema 1.40. *Seja $M^n_{c,\delta}$ hipersuperfície rotacional em um espaço de curvatura seccional constante Q^{n+1}_c, com parametrização como em (1.22), onde para $c \geq 0$, $\delta = 1$, e para $c = -1$, $\delta = 1$, se a rotação for esférica, $\delta = 0$ se a rotação for parabólica, e $\delta = -1$ se a rotação for hiperbólica. Então a primeira forma fundamental de $M_{c,\delta}$ é dada por*

$$I = dt^2 + f(t)\sum_{i=1}^{n-1} ||\Theta_i||^2 dx_i^2,$$

onde

$$\delta - cf^2 - f'^2 > 0,$$

e as curvaturas principais são dadas por

$$k_1 = \frac{f'' + cf}{\sqrt{\delta - cf^2 - f'^2}}, \tag{1.25}$$

$$k_{i+1} = \frac{\sqrt{\delta - cf^2 - f'^2}}{f}, \ \forall i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.26}$$

Como as curvaturas r-médias dependem apenas das curvaturas principais, usando o teorema 1.40 temos a seguinte proposição:

Proposição 1.41. *Se M é hipersuperfície de rotação com parametrização da forma (1.22) e curvaturas principais (1.25) e (1.26), então para cada $r \leq n$, H_r satisfaz*

$$nH_r f^r = (n-r)(\delta - cf^2 - f'^2)^{r/2} - r(\delta - cf^2 - f'^2)^{\frac{r-2}{2}}(f'' + cf)f. \tag{1.27}$$

Demonstração. Basta substituir (1.25) e (1.26) em (1.15). □

2 Propriedades variacionais de funcionais de curvatura

Este capítulo está dividido em quatro partes. As duas primeiras seções tem como objetivo calcular a primeira e a segunda variação de funcionais de curvatura do tipo

$$\mathcal{F}(M) := \int_M \mathcal{E}(S_1, S_2) d\mu, \tag{2.1}$$

onde M é uma variedade n-dimensional isometricamente imersa em um espaço de dimensão $n+1$, com curvatura seccional constante e $d\mu$ é o elemento de volume de M, generalizando as expressões obtidas por Gruber et al. [26] no caso de superfícies isometricamente imersas em Q_c^3.

A terceira seção é dedicada ao estudo da primeira variação de funcionais do tipo $\mathcal{F}(M)$ para hipersuperfícies isometricamente imersas em uma variedade Riemanniana qualquer. Nesse caso, além da fórmula da primeira variação, apresentaremos também a equação de Euler-Lagrange do funcional, e suas versões no caso em que a variedade ambiente é Einstein.

A quarta e última seção tem como objetivo exibir resultados que permitam o cálculo da primeira variação para funcionais do tipo

$$\mathcal{L}(M) := \int_M \mathcal{E}(S_1, \ldots, S_n) d\mu.$$

Mais especificamente, exibiremos a equação de evolução das curvaturas r-médias em geral, usando uma abordagem diferente da utilizada por Reilly em [49].

Salvo menção em contrário, todas as variedades Riemannianas neste capítulo serão assumidas como orientáveis.

2.1 A 1ª variação para funcionais do tipo $\mathcal{F}(M)$ em Q_c^{n+1}

Sejam M^n uma variedade Riemanniana isometricamente imersa em Q_c^{n+1}. Consideremos uma variação suave à um parâmetro, normal de M, isto é, uma aplicação

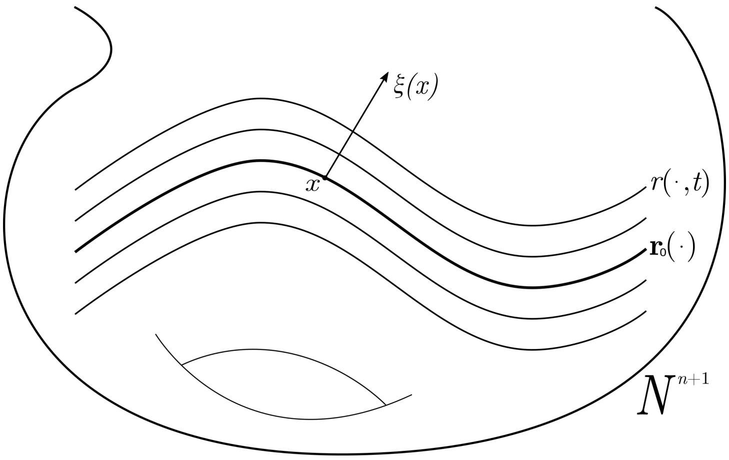

Figura 1 – Variações normais de $\mathbf{r}_0(\cdot) = M^n$ em N^{n+1}.

$r : M \times \mathbb{R} \to Q_c^{n+1}$ dada por

$$r(x,t) := \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_0(x) + tu(x)\xi, \tag{2.2}$$

onde $\mathbf{r}_0$ é a imersão original, ξ é um campo unitário normal à M, e $u \in C_c^\infty(M)$. Note que o vetor velocidade dessa família normal é $\delta r := (d/dt)|_{t=0}\mathbf{r}_t = u\xi$. O lema a seguir contém alguns cálculos variacionais bem conhecidos que serão necessários para o nosso objetivo, e as versões aqui apresentadas são generalizações dos resultados obtidos em [26].

Lema 2.1. *Dado $\epsilon > 0$, seja $r : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to Q_c^{n+1}$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.2). Temos as seguintes equações de evolução:*

$$\begin{aligned}
&\delta g = -2u\alpha,\\
&\delta g^{-1} = 2u\hat{\alpha},\\
&\delta(d\mu) = -S_1 u d\mu,\\
&\delta(\alpha_{ij}) = u_{ij} - u\alpha_{il}\alpha_j^l + cg_{ij}u,\\
&\delta||\alpha||^2 = 2(S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 + cS_1)u + 2\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle.
\end{aligned}$$

onde $d\mu$ é o elemento de volume, $\alpha = \alpha_{ij}dx^i \otimes dx^j$ é a segunda forma fundamental e $\hat{\alpha}$ é o tensor de tipo $(0,2)$ $g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \alpha$, obtido contraindo duas vezes a segunda forma fundamental com o inverso da métrica.

Demonstração. Ver Apêndice B. □

No próximo resultado vamos calcular a variação das funções elementares simétricas S_1 e S_2 dos autovalores do operador forma em M. Uma vez que S_1 é a curvatura média de M, e que, quando a variedade ambiente é Einstein, S_2 é igual a curvatura escalar s a menos de uma constante (ver observação 1.14), o resultado abaixo essencialmente nos dá a variação das curvaturas média e escalar. Manteremos a notação das funções simétricas por propósitos didáticos.

Proposição 2.2. *Dado $\epsilon > 0$, seja $r : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to Q_c^{n+1}$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.2). Temos as seguintes equações de evolução:*

$$\delta(S_1) = \Delta u + u(S_1^2 - 2S_2 + nc), \tag{2.3}$$

$$\delta(S_2) = S_1 \Delta u - \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle + u(S_1 S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1), \tag{2.4}$$

onde Δu é o Laplaciano de u com respeito a métrica g da hipersuperfície, e $\langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle$ é o produto entre α e a Hessiana de u.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\delta(S_1) &= \delta(g^{ij}\alpha_{ij}) = \delta(g^{ij})\alpha_{ij} + g^{ij}\delta(\alpha_{ij}) \\
&= 2u\alpha^{ij}\alpha_{ij} + g^{ij}(u_{ij} - u\alpha_{il}\alpha_j^l + cg_{ij}u) \\
&= g^{ij}u_{ij} + u(\alpha_{ij}\alpha^{ij} + g_{ij}g^{ij}c) \\
&= \Delta u + u(||\alpha||^2 + nc) \\
&= \Delta u + u(S_1^2 - 2S_2 + nc).
\end{aligned}$$

Além disso, como $||\alpha||^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = S_1^2 - 2S_2$ temos

$$\begin{aligned}
\delta(S_2) &= \frac{1}{2}\left(\delta(S_1^2) - \delta||\alpha||^2\right) = S_1\delta(S_1) - \frac{1}{2}\delta||\alpha||^2 \\
&= S_1\Delta u + S_1(S_1^2 - 2S_2 + nc)u - u(S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 + cS_1) - \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle \\
&= S_1\Delta u - \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle + u(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1).
\end{aligned}$$

□

Em posse dessas equações podemos calcular a primeira variação do funcional $\mathcal{F}(M)$, definido em (2.1).

Teorema 2.3 (**Fórmula da Primeira Variação**). *Seja $M \subset Q_c^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma forma espacial de curvatura seccional constante c, e seja $r(\cdot, t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.2). Então, a primeira variação do funcional (2.1), é dada por*

$$\delta \int_M \mathcal{E}(S_1, S_2) d\mu = \int_M \left[\left(\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2} \right) \Delta u - \mathcal{E}_{S_2} \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle \right] d\mu$$
$$+ \int_M \left[\left(S_1^2 - 2S_2 + nc \right) \mathcal{E}_{S_1} + \left(S_1 S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1 \right) \mathcal{E}_{S_2} - S_1 \mathcal{E} \right] u d\mu. \quad (2.5)$$

Demonstração. Usando o lema 2.1 e a proposição 2.2 temos que

$$\delta \int_M \mathcal{E}(S_1, S_2) d\mu = \int_M \left[\mathcal{E}_{S_1}(\delta S_1) + \mathcal{E}_{S_2}(\delta S_2) \right] d\mu + \int_M \mathcal{E} \delta(d\mu) =$$

$$= \int_M \left[\mathcal{E}_{S_1} \left(\Delta u + u(S_1^2 - 2S_2 + nc) \right) + \mathcal{E}_{S_2} \left(S_1 \Delta u - \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle \right) \right.$$
$$\left. + \mathcal{E}_{S_2} \left(u(S_1 S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1) \right) - u S_1 \mathcal{E} \right] d\mu$$
$$= \int_M \left[\left(\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2} \right) \Delta u - \mathcal{E}_{S_2} \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle \right] d\mu$$
$$+ \int_M \left[(S_1^2 - 2S_2 + nc) \mathcal{E}_{S_1} + (S_1 S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1) \mathcal{E}_{S_2} - S_1 \mathcal{E} \right] u d\mu.$$

□

Observação 2.1. *O teorema 2.3 generaliza para hipersuperfícies o teorema 1.1 obtido em [26]. Com efeito, para $n = 2$ temos*

$$S_1 = nH = 2H, \quad S_2 = K - c, \quad 2\mathcal{E}_{S_1} = \mathcal{E}_H, \quad \mathcal{E}_{S_2} = \mathcal{E}_K, \quad S_3 = 0,$$

e o resultado é imediato.

É importante destacar que o teorema 2.3 não faz nenhuma hipótese sobre a fronteira de M, e portanto a fórmula (2.5) é válida para variedades com ou sem fronteira. Além disso, esse resultado é compatível com o clássico resultado obtido por Reilly [49].

2.2 A 2ª variação para funcionais do tipo $\mathcal{F}(M)$ em Q_c^{n+1}

Os resultados a seguir serão necessários para o cálculo da segunda variação dos funcionais de curvatura da forma (2.1). O próximo lema é a generalização para hipersuperfícies de resultado apresentado em [26].

Lema 2.4. *Dado $\epsilon > 0$, seja $r : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to Q_c^{n+1}$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.2). Para cada função suave $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, as evoluções do Laplaciano Δf e do produto escalar $\langle \alpha, \operatorname{Hess} f\rangle$ são dadas por*

$$\delta(\Delta f) = \Delta f' + 2u\langle \alpha, \operatorname{Hess} f\rangle + u\langle \nabla S_1, \nabla f\rangle + 2\alpha(\nabla u, \nabla f) - S_1\langle \nabla u, \nabla f\rangle,$$

$$\begin{aligned}\delta\langle \alpha, \operatorname{Hess} f\rangle =& \langle \alpha, \operatorname{Hess} f'\rangle + \langle \operatorname{Hess} u, \operatorname{Hess} f\rangle + 3u\langle \alpha^2, \operatorname{Hess} f\rangle \\ &+ uc\Delta f + 2\alpha^2(\nabla u, \nabla f) + \frac{1}{2}u\langle \nabla ||\alpha||^2, \nabla f\rangle - ||\alpha||^2\langle \nabla u, \nabla f\rangle,\end{aligned}$$

onde f' denota a derivada parcial de f com respeito ao parâmetro variacional t, e $\alpha^2 = g^{kl}\alpha_{il}\alpha_{kj}dx^i \otimes dx^j$ é o tensor do tipo $(0,2)$ obtido contraindo α com sua matriz de representação.

Demonstração. Ver Apêndice B. □

Observação 2.2. *Quando $f = u(x)$ temos*

$$\delta(\Delta u) = 2u\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + u\langle \nabla S_1, \nabla u\rangle + 2\alpha(\nabla u, \nabla u) - S_1|\nabla u|^2,$$

$$\begin{aligned}\delta\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle =& |\operatorname{Hess} u|^2 + 3u\langle \alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle + uc\Delta u \\ &+ 2\alpha^2(\nabla u, \nabla u) + \frac{1}{2}u\langle \nabla ||\alpha||^2, \nabla u\rangle - ||\alpha||^2|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Podemos agora calcular a variação de S_3, que será fundamental para o cálculo da segunda variação do funcional $\mathcal{F}(M)$.

Proposição 2.5. *Dado $\epsilon > 0$, seja $r : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to Q_c^{n+1}$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.2). Temos a seguinte equação de evolução:*

$$\delta(S_3) = \langle \alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle - S_1\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + S_2\Delta u + u\left(S_1 S_3 - 4S_4 + (n-2)cS_2\right).$$

Demonstração. Por (B.8), temos que

$$\begin{aligned}3S_3 &= \alpha^{ik}\alpha_k^j\alpha_{ij} + 3S_1S_2 - S_1^3\\ &= g^{im}g^{kn}g^{jl}\alpha_{mn}\alpha_{lk}\alpha_{ij} + 3S_1S_2 - S_1^3.\end{aligned}$$

Derivando a expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}3\delta(S_3) &= 3(\delta g^{im})g^{kn}g^{jl}\alpha_{mn}\alpha_{lk}\alpha_{ij} + 3g^{im}g^{kn}g^{jl}\alpha_{mn}\alpha_{lk}(\delta\alpha_{ij})\\ &\quad - 3(S_1^2 - S_2)\delta(S_1) + 3S_1\delta(S_2)\\ &= 6ug^{kn}g^{jl}\alpha^{im}\alpha_{mn}\alpha_{lk}\alpha_{ij} + 3g^{im}g^{kn}g^{jl}\alpha_{mn}\alpha_{lk}(u_{ij} + g_{ij}uc - u\alpha_{is}\alpha_j^s)\\ &\quad - 3(S_1^2 - S_2)\delta(S_1) + 3S_1\delta(S_2)\\ &= 3\left(u\alpha^{il}\alpha_l^k\alpha_k^j\alpha_{ij} + uc\alpha^{ij}\alpha_{ij} + \alpha^{ik}\alpha_k^j u_{ij} + -(S_1^2 - S_2)\delta(S_1) + S_1\delta(S_2)\right).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Como

$$\alpha^{il}\alpha_l^k\alpha_k^j\alpha_{ij} = \sum_{i=1}^n k_i^4 = S_1^4 - 4S_1^2S_2 + 2S_2^2 + 4S_1S_3 - 4S_4, \tag{2.7}$$

usando (2.3), (2.4), (B.8) e (2.6) temos

$$\begin{aligned}\delta(S_3) &= \langle\alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle + u(S_1^4 - 4S_1^2S_2 + 2S_2^2 + 4S_1S_3 - 4S_4)\\ &\quad + uc(S_1^2 - 2S_2) - (S_1^2 - S_2)\left(\Delta u + u(S_1^2 - 2S_2 + nc)\right)\\ &\quad + S_1\left(S_1\Delta u - \langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + u(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1\right)\\ &= \langle\alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle - S_1\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + S_2\Delta u\\ &\quad + u(S_1S_3 - 4S_4 + (n-2)cS_1).\end{aligned}$$

□

Temos agora informação suficiente para provar o resultado principal dessa seção, que generaliza para hipersuperfícies o resultado obtido por Gruber et al. em [26]:

Teorema 2.6 **(Fórmula da 2ª Variação).** *Seja $M \subset Q_c^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma forma espacial de curvatura seccional constante c, e seja $r(\cdot, t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.2). Se M é ponto crítico de (2.1), então a segunda variação do funcional é dada por*

$$
\begin{aligned}
&\delta^2 \int_M \mathcal{E}(S_1, S_2) d\mu = \\
&\int_M (\mathcal{E}_{S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_2}) \left(u\langle \nabla S_1, \nabla u\rangle + 2\alpha(\nabla u, \nabla u)\right) + \mathcal{E}_{S_2S_2}\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle^2 d\mu \\
&- \int_M \mathcal{E}_{S_2}\left(|\operatorname{Hess} u|^2 + 2\alpha^2(\nabla u, \nabla u) + \frac{u}{2}\langle \nabla ||\alpha||^2, \nabla u\rangle\right) d\mu \\
&+ \int_M \left(\mathcal{E}_{S_1S_1} + 2S_1\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1^2\mathcal{E}_{S_2S_2} + \mathcal{E}_{S_2}\right)(\Delta u)^2 d\mu - \int_M 6S_2 u\langle \alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&- \int_M 2\left(\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2}\right)\Delta u\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu + \int_M \mathcal{E}_{S_2}||\alpha||^2|\nabla u|^2 d\mu \\
&- \int_M S_1(\mathcal{E}_{S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_2})|\nabla u|^2 d\mu + \int_M \Big[4\mathcal{E}_{S_1} + 6S_1\mathcal{E}_{S_2} \\
&\quad - 2(S_1^2 - 2S_2 + nc)\mathcal{E}_{S_1S_2} - 2(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2S_2}\Big] u\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&+ \int_M \Big[-\mathcal{E} - 2S_1\mathcal{E}_{S_1} - (4S_2 - 2(n-1)c)\mathcal{E}_{S_2} + 2(S_1^2 - 2S_2 + nc)\mathcal{E}_{S_1S_1} \\
&\quad + 2(S_1^3 - S_1S_2 - 3S_3 + (2n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_1S_2} \\
&\quad + 2S_1(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2S_2}\Big] u\Delta u d\mu \\
&+ \int_M \Big[(2S_2 - nc)\mathcal{E} - 2(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_1} \\
&\quad + \left(12S_4 - 2S_2^2 - 4(n-2)cS_2 + n(n-1)c^2\right)\mathcal{E}_{S_2} + (S_1^2 - 2S_2 + nc)^2\mathcal{E}_{S_1S_1} \\
&\quad + 2(S_1^2 - 2S_2 + nc)(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_1S_2} \\
&\quad + (S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)^2\mathcal{E}_{S_2S_2}\Big] u^2 d\mu. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Demonstração. Combinando os lemas 2.1 e 2.4, e as proposições 2.2 e 2.5 com o teorema 2.3, o objetivo é calcular

$$
\begin{aligned}
\delta^2 \int_M \mathcal{E}(S_1, S_2) d\mu &= \delta \int_M \left[\left(\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2} \right) \Delta u - \mathcal{E}_{S_2} \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle \right] d\mu \\
&+ \delta \int_M \Big[(S_1^2 - 2S_2 + nc)\mathcal{E}_{S_1} + (S_1 S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2} - S_1 \mathcal{E} \Big] u d\mu \\
&= \int_M \overbrace{A(S_1, S_2)\delta(d\mu)}^{(a)} + \int_M \overbrace{\delta \Big[\left(\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2} \right) \Delta u \Big]}^{(b)} d\mu \\
&+ \int_M \overbrace{\delta \left[-\mathcal{E}_{S_2} \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle \right] d\mu}^{(c)} + \int_M \overbrace{\delta \Big[(S_1^2 - 2S_2 + nc)\mathcal{E}_{S_1} u \Big]}^{(d)} d\mu \\
&+ \int_M \overbrace{\delta \left[-S_1 \mathcal{E} u \right]}^{(e)} d\mu + \int_M \overbrace{\delta \Big[(S_1 S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2} u \Big]}^{(f)} d\mu,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A(S_1, S_2) = &\left(\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2} \right) \Delta u - \mathcal{E}_{S_2} \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle \\
&+ \Big[(S_1^2 - 2S_2 + nc)\mathcal{E}_{S_1} + (S_1 S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2} - S_1 \mathcal{E} \Big] u.
\end{aligned}
$$

Calcularemos cada termo separadamente. Vamos começar por (a):

$$
\begin{aligned}
\int_M A(S_1, S_2)\delta(d\mu) &= \int_M \left(\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2} \right) \Delta u \delta(d\mu) - \int_M \mathcal{E}_{S_2} \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle \delta(d\mu) \\
&- \int_M S_1 \mathcal{E} u \delta(d\mu) + \int_M \Big((S_1^2 - 2S_2 + nc)\mathcal{E}_{S_1} \Big) u \delta(d\mu) \\
&+ \int_M (S_1 S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2} u \delta(d\mu) \\
&= \int_M S_1 \mathcal{E}_{S_2} u \langle \alpha, \operatorname{Hess} u \rangle d\mu - \int_M \Big(S_1 \mathcal{E}_{S_1} + S_1^2 \mathcal{E}_{S_2} \Big) u \Delta u d\mu \\
&+ \int_M S_1^2 \mathcal{E} u^2 d\mu - \int_M \Big[(S_1^3 - 2S_1 S_2 + ncS_1)\mathcal{E}_{S_1} \Big] u^2 d\mu \\
&- \int_M \Big[(S_1^2 S_2 - 3S_1 S_3 + (n-1)cS_1^2)\mathcal{E}_{S_2} \Big] u^2 d\mu. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Na sequência (b):

$$
\begin{aligned}
\int_M \delta \Big[\left(\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2} \right) \Delta u \Big] d\mu &= \int_M (\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2})\delta(\Delta u) + \delta \left(\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2} \right) \Delta u d\mu \\
&= \int_M (\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2})\delta(\Delta u) + \left(\delta(\mathcal{E}_{S_1}) + \delta(S_1)\mathcal{E}_{S_2} + S_1 \delta(\mathcal{E}_{S_2}) \right) \Delta u d\mu \\
&= \int_M (\mathcal{E}_{S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_2})\delta(\Delta u) d\mu + \int_M (\mathcal{E}_{S_1 S_1} + S_1 \mathcal{E}_{S_1 S_2} + \mathcal{E}_{S_2})\delta(S_1)\Delta u d\mu \\
&+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1 S_2} + S_1 \mathcal{E}_{S_2 S_2})\delta(S_2)\Delta u d\mu.
\end{aligned}
$$

Usando a proposição 2.2 e o lema 2.4 temos:

$$
\begin{aligned}
&\int_M \delta\Big[\left(\mathcal{E}_{S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_2}\right)\Delta u\Big]d\mu \\
&\quad= \int_M (\mathcal{E}_{S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_2})\Big(2u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + u\langle\nabla S_1, \nabla u\rangle + 2\alpha(\nabla u, \nabla u) - S_1|\nabla u|^2\Big)d\mu \\
&\qquad+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_1S_2} + \mathcal{E}_{S_2})(\Delta u + u(S_1^2 - 2S_2 + nc))\Delta u d\mu \\
&\qquad+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2})(S_1\Delta u - \langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + u(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1))\Delta u d\mu \\
&\quad= \int_M (\mathcal{E}_{S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_2})\Big(2u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + u\langle\nabla S_1, \nabla u\rangle + 2\alpha(\nabla u, \nabla u) - S_1|\nabla u|^2\Big)d\mu \\
&\qquad+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_1} + 2S_1\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1^2\mathcal{E}_{S_2S_2} + \mathcal{E}_{S_2})(\Delta u)^2 d\mu \\
&\qquad- \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2})\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle\Delta u d\mu \\
&\quad+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_1S_2} + \mathcal{E}_{S_2})(S_1^2 - 2S_2 + nc)u\Delta u d\mu \\
&\qquad+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2})(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)u\Delta u d\mu. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

(c):

$$
\begin{aligned}
&\int_M \delta\left[-\mathcal{E}_{S_2}\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle\right]d\mu = \int_M -\delta(\mathcal{E}_{S_2})\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle - \mathcal{E}_{S_2}\delta(\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle)d\mu \\
&\quad= \int_M -\left(\mathcal{E}_{S_1S_2}\delta(S_1) + \mathcal{E}_{S_2S_2}\delta(S_2)\right)\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle - \mathcal{E}_{S_2}\delta(\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle)d\mu \\
&\quad= \int_M -\mathcal{E}_{S_2}\Big[|\operatorname{Hess} u|^2 + 3u\langle\alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle + uc\Delta u + 2\alpha^2(\nabla u, \nabla u) \\
&\qquad+ \frac{1}{2}u\langle\nabla||\alpha||^2, \nabla u\rangle - ||\alpha||^2|\nabla u|^2\Big]d\mu \\
&\qquad- \int_M \mathcal{E}_{S_1S_2}(\Delta u + u(S_1^2 - 2S_2 + nc))\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&\qquad- \int_M \mathcal{E}_{S_2S_2}\Big(S_1\Delta u - \langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + u(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\Big)\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&\quad= \int_M -\mathcal{E}_{S_2}\Big[|\operatorname{Hess} u|^2 + 3u\langle\alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle + uc\Delta u + 2\alpha^2(\nabla u, \nabla u) \\
&\qquad+ \frac{1}{2}u\langle\nabla||\alpha||^2, \nabla u\rangle - ||\alpha||^2|\nabla u|^2\Big]d\mu + \int_M \mathcal{E}_{S_2S_2}\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle^2 d\mu \\
&\qquad- \int_M \Big(\mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1^2 - 2S_2 + nc) + \mathcal{E}_{S_2S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\Big)u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&\qquad- \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2})\Delta u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Para os próximos cálculos, observe que $\delta u = d/dt|_{t=0}u(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
(d) : \int_M \delta\Big[(S_1^2 - 2S_2 + nc)\mathcal{E}_{S_1} u\Big] d\mu \\
&= \int_M \Big[\delta(S_1^2 - 2S_2 + nc)\mathcal{E}_{S_1} + (S_1^2 - 2S_2 + nc)\delta(\mathcal{E}_{S_1})\Big] u d\mu \\
&= \int_M \Big(\mathcal{E}_{S_1S_1}(S_1^2 - 2S_2 + nc) + 2S_1\mathcal{E}_{S_1}\Big)\delta(S_1) u d\mu \\
&\quad + \int_M \Big(\mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1^2 - 2S_2 + nc) - 2\mathcal{E}_{S_1}\Big)\delta(S_2) u d\mu \\
&= \int_M \Big(\mathcal{E}_{S_1S_1}(S_1^2 - 2S_2 + nc) + 2S_1\mathcal{E}_{S_1}\Big)\Big(\Delta u + u(S_1^2 - 2S_2 + nc)\Big) u d\mu \\
&\quad + \int_M \mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1^2 - 2S_2 + nc)(S_1\Delta u - \langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle) u d\mu \\
&\quad + \int_M \mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1^2 - 2S_2 + nc)(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1) u^2 d\mu \\
&\quad - \int_M 2\mathcal{E}_{S_1}\Big(S_1\Delta u - \langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + u(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\Big) u d\mu \\
&= \int_M \Big(- \mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1^2 - 2S_2 + nc) + 2\mathcal{E}_{S_1}\Big) u\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&\quad + \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_1S_2}) \Big(S_1^2 - 2S_2 + nc\Big) u\Delta u d\mu \\
&\quad + \int_M \mathcal{E}_{S_1S_1}(S_1^2 - 2S_2 + nc)^2 u^2 d\mu \\
&\quad + \int_M \mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)(S_1^2 - 2S_2 + nc) u^2 d\mu \\
&\quad + \int_M 2\mathcal{E}_{S_1}(S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 + cS_1) u^2 d\mu. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

(e):

$$
\begin{aligned}
\int_M \delta\left[-S_1\mathcal{E}u\right] d\mu &= \int_M \Big(- \mathcal{E}\delta(S_1) - S_1\delta(\mathcal{E})\Big) u d\mu \\
&= \int_M \Big[(-\mathcal{E} - S_1\mathcal{E}_{S_1})\,\delta(S_1) - S_1\mathcal{E}_{S_2}\delta(S_2)\Big] u d\mu \\
&= \int_M (-\mathcal{E} - S_1\mathcal{E}_{S_1}) \Big(\Delta u + u(S_1^2 - 2S_2 + nc)\Big) u d\mu \\
&\quad - \int_M S_1\mathcal{E}_{S_2}\left(S_1\Delta u - \langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + u(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\right) u d\mu \\
&= \int_M S_1\mathcal{E}_{S_2} u\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu - \int_M (\mathcal{E} + S_1\mathcal{E}_{S_1} + S_1^2\mathcal{E}_{S_2}) u\Delta u d\mu \qquad (2.13) \\
&\quad - \int_M \Big[(\mathcal{E} + S_1\mathcal{E}_{S_1})(S_1^2 - 2S_2 + nc) + S_1\mathcal{E}_{S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\Big] u^2 d\mu.
\end{aligned}
$$

(f):

$$
\begin{aligned}
&\int_M \delta\Big[(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2}u\Big]d\mu \\
&\quad= \int_M \delta(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2}u + (S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\delta(\mathcal{E}_{S_2})ud\mu \\
&\quad= \int_M \Big[(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_1S_2} + (S_2 + (n-1)c)\mathcal{E}_{S_2}\Big]\delta(S_1)ud\mu \\
&\qquad+ \int_M \Big[(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2}\Big]\delta(S_2)ud\mu - \int_M 3\mathcal{E}_{S_2}\delta(S_3)ud\mu \\
&\quad= \int_M (S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_1S_2}\Big(\Delta u + u(S_1^2 - 2S_2 + nc)\Big)ud\mu \\
&\qquad+ \int_M (S_2 + (n-1)c)\mathcal{E}_{S_2}\Big(\Delta u + u(S_1^2 - 2S_2 + nc)\Big)ud\mu \\
&\qquad- \int_M 3\mathcal{E}_{S_2}\Big(\langle\alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle - S_1\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + S_2\Delta u\Big)ud\mu \\
&\qquad- \int_M 3\mathcal{E}_{S_2}(S_1S_3 - 4S_4 + (n-2)cS_2)u^2d\mu \\
&\qquad+ \int_M \Big[(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2}\Big]\left(S_1\Delta u - \langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle\right)ud\mu \\
&\qquad+ \int_M \Big[(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2}\Big](S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)u^2d\mu \\
&\quad= \int_M -3\mathcal{E}_{S_2}u\langle\alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&\qquad+ \int_M \Big(2S_1\mathcal{E}_{S_2} - \mathcal{E}_{S_2S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\Big)u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&\qquad+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2})(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)u\Delta ud\mu \\
&\qquad+ \int_M \mathcal{E}_{S_2}(S_1^2 - 2S_2 + (n-1)c)u\Delta ud\mu \\
&\qquad+ \int_M \mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)(S_1^2 - 2S_2 + nc)u^2d\mu \\
&\qquad+ \int_M \mathcal{E}_{S_2S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)^2u^2d\mu \\
&\qquad+ \int_M \mathcal{E}_{S_2}\Big[(S_2 + (n-1)c)(S_1^2 - 2S_2 + nc) + S_1(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1) \\
&\qquad- 3(S_1S_3 - 4S_4 + (n-2)cS_2)\Big]u^2d\mu. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Vamos agrupar os termos semelhantes de (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14) e utilizar que (2.5) se anula em imersões críticas.

Os seguintes termos aparecem apenas uma vez nos cálculos anteriores:

$$\begin{aligned}
&\int_M (\mathcal{E}_{S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_2})\Big(u\langle\nabla S_1, \nabla u\rangle + 2\alpha(\nabla u, \nabla u) - S_1|\nabla u|^2\Big)d\mu \\
&+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_1} + 2S_1\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1^2\mathcal{E}_{S_2S_2} + \mathcal{E}_{S_2})(\Delta u)^2 d\mu \\
&\int_M -\mathcal{E}_{S_2}\Big(|\operatorname{Hess} u|^2 + 2\alpha^2(\nabla u, \nabla u) + \frac{1}{2}u\langle\nabla||\alpha||^2, \nabla u\rangle - ||\alpha||^2|\nabla u|^2\Big)d\mu \\
&+ \int_M \mathcal{E}_{S_2S_2}\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle^2 d\mu. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

De (2.10) e (2.11) temos

$$\begin{aligned}
&- \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2})\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle\Delta u d\mu - \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2})\Delta u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu = \\
&- \int_M 2(\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2})\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle\Delta u d\mu. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

De (2.11) e (2.14) temos

$$- \int_M 3\mathcal{E}_{S_2}u\langle\alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu - \int_M 3\mathcal{E}_{S_2}u\langle\alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu = - \int_M 6\mathcal{E}_{S_2}u\langle\alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu. \qquad (2.17)$$

De (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14) temos

$$\begin{aligned}
&\int_M S_1\mathcal{E}_{S_2}u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu + \int_M 2(\mathcal{E}_{S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_2})u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu + \int_M S_1\mathcal{E}_{S_2}u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&\quad - \int_M \Big(\mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1^2 - 2S_2 + nc) + \mathcal{E}_{S_2S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\Big)u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&\quad + \int_M \Big(-\mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1^2 - 2S_2 + nc) + 2\mathcal{E}_{S_1}\Big)u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&\quad + \int_M \Big(2S_1\mathcal{E}_{S_2} - \mathcal{E}_{S_2S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\Big)u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&= \int_M \Big(4\mathcal{E}_{S_1} + 6S_1\mathcal{E}_{S_2} - 2(S_1^2 - 2S_2 + nc)\mathcal{E}_{S_1S_2}\Big)u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \\
&\quad - \int_M 2(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2S_2}u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Também de (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14) temos

$$
\begin{aligned}
&-\int_M \left(S_1\mathcal{E}_{S_1} + S_1^2\mathcal{E}_{S_2}\right) u\Delta u d\mu - \int_M \mathcal{E}_{S_2} cu\Delta u d\mu - \int_M (\mathcal{E} + S_1\mathcal{E}_{S_1} + S_1^2\mathcal{E}_{S_2}) u\Delta u d\mu \\
&+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_1S_2}) \left(S_1^2 - 2S_2 + nc\right) u\Delta u d\mu \\
&+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_1S_2} + \mathcal{E}_{S_2})(S_1^2 - 2S_2 + nc) u\Delta u d\mu \\
&+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2})(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1) u\Delta u d\mu \\
&+ \int_M (\mathcal{E}_{S_1S_2} + S_1\mathcal{E}_{S_2S_2})(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1) u\Delta u d\mu \\
&+ \int_M \mathcal{E}_{S_2}(S_1^2 - 2S_2 + (n-1)c) u\Delta u d\mu \\
&= \int_M \Big[- \mathcal{E} - 2S_1\mathcal{E}_{S_1} - (4S_2 - 2(n-1)c)\mathcal{E}_{S_2} + 2(S_1^2 - 2S_2 + nc)\mathcal{E}_{S_1S_1} \\
&\quad + 2(S_1^3 - S_1S_2 - 3S_3 + (2n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_1S_2} \\
&\quad + 2S_1(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2S_2}\Big] u\Delta u d\mu. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

De (2.9), (2.12), (2.13) e (2.14) temos

$$
\begin{aligned}
&\int_M \Big[S_1^2\mathcal{E} - (S_1^3 - 2S_1S_2 + ncS_1)\mathcal{E}_{S_1} - (S_1^2S_2 - 3S_1S_3 + (n-1)cS_1^2)\mathcal{E}_{S_2}\Big] u^2 d\mu \\
&+ \int_M \Big[\mathcal{E}_{S_1S_1}(S_1^2 - 2S_2 + nc)^2 + 2\mathcal{E}_{S_1}(S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 + cS_1)\Big] u^2 d\mu \\
&+ \int_M \mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)(S_1^2 - 2S_2 + nc) u^2 d\mu \\
&- \int_M \Big[(\mathcal{E} + S_1\mathcal{E}_{S_1})(S_1^2 - 2S_2 + nc) + S_1\mathcal{E}_{S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\Big] u^2 d\mu \\
&+ \int_M \mathcal{E}_{S_1S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)(S_1^2 - 2S_2 + nc) u^2 d\mu \\
&+ \int_M \mathcal{E}_{S_2S_2}(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)^2 u^2 d\mu \\
&+ \int_M \mathcal{E}_{S_2}\Big[(S_2 + (n-1)c)(S_1^2 - 2S_2 + nc) + S_1(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\Big] u^2 d\mu \\
&- \int_M 3(S_1S_3 - 4S_4 + (n-2)cS_2) u^2 d\mu. \\
&= \int_M \Big[(2S_2 - nc)\mathcal{E} - 2(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_1} \\
&\quad + \left(12S_4 - 2S_2^2 - 4(n-2)cS_2 + n(n-1)c^2\right)\mathcal{E}_{S_2} + (S_1^2 - 2S_2 + nc)^2\mathcal{E}_{S_1S_1} \\
&\quad + 2(S_1^2 - 2S_2 + nc)(S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_1S_2} \\
&\quad + (S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)cS_1)^2\mathcal{E}_{S_2S_2}\Big] u^2 d\mu. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Combinando (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) e (2.20) obtemos (2.8). □

Esse resultado, que é válido para variedades com ou sem fronteira, generaliza para hipersuperfícies em geral, o resultado obtido em [26, Teorema 1.2], no caso em que M é uma superfície. Ele fornece uma ferramenta para estudar a estabilidade dos pontos críticos de uma ampla gama de funcionais de curvatura em espaços n-dimensionais de curvatura constante. Isso inclui não só o estudo de propriedades elásticas de superfícies como citado em [26], mas também funcionais de energia em espaços mais gerais como citado por Simanca em [52]. Na seção 3.5 verificaremos a aplicabilidade do teorema 2.6, estudando a estabilidade de alguns pontos críticos do funcional

$$\Phi = \int_M ||\phi||^2 d\mu = \int_M \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) S_1^2 - 2S_2\right] d\mu.$$

2.3 A 1ª variação para funcionais do tipo $\mathcal{F}(M)$ em ambientes gerais.

O objetivo dessa seção é generalizar o teorema 2.3, e estabelecer a fórmula da primeira variação de funcionais da forma

$$\mathcal{F}(M) := \int_M \mathcal{E}(S_1, S_2) d\mu,$$

para hipersuperfícies isometricamente imersas uma variedade Riemanniana qualquer, e calcular a sua Equação de Euler-Lagrange. Seguindo os mesmos passos das seções anteriores, vamos começar reestabelecendo algumas equações básicas de evolução, mas dessa vez sem suposições sobre o espaço ambiente.

Para isso, seja M^n uma hipersuperfície isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana N^{n+1}, e considere uma variação suave à um parâmetro, normal de M^n, isto é, uma aplicação $r : M \times \mathbb{R} \to N^{n+1}$ dada por

$$r(x,t) := \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_0(x) + tu(x)\xi, \tag{2.21}$$

onde $\mathbf{r}_0$ é a imersão original, ξ é um campo unitário normal à M, e $u \in C_c^\infty(M)$.

Lema 2.7. *Dado $\epsilon > 0$, seja $r : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to N^{n+1}$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.21). Temos as seguintes equações de evolução:*

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha_{ij}) &= u_{ij} - u\alpha_{il}\alpha^l_j + \widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j}u,\\
\delta||\alpha||^2 &= 2\left(S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 + \alpha^{ij}\widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j}\right)u + 2\langle\alpha, \mathrm{Hess}\, u\rangle,
\end{aligned}$$

onde $\widetilde{R}$ é o tensor curvatura Riemanniana de N.

Demonstração. Ver apêndice B . □

Observação 2.3. *Se $N^{n+1} = Q_c^{n+1}$ temos que*

$$\widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j} = c\left(\langle r_i, r_j\rangle\langle\xi,\xi\rangle - \langle r_i,\xi\rangle\langle r_j,\xi\rangle\right) = cg_{ij},$$

$$\alpha^{ij}\widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j} = c\alpha^{ij}g_{ij} = cS_1,$$

o que é compatível com os resultados obtidos no lema 2.1.

Assim, para M^n uma hipersuperfície de uma variedade Riemanniana N^{n+1}, as curvaturas S_1 e S_2 tem as seguintes equações de evolução:

Proposição 2.8. *Dado $\epsilon > 0$, seja $r : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to N^{n+1}$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.21). Temos as seguintes equações de evolução:*

$$\begin{aligned}
\delta(S_1) &= \Delta u + u\left(S_1^2 - 2S_2 + \widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi,\xi)\right),\\
\delta(S_2) &= S_1\Delta u - \langle\alpha, \mathrm{Hess}\, u\rangle + u\left(S_1S_2 - 3S_3 + S_1\widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi,\xi) - \alpha^{ij}\widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j}\right),
\end{aligned}$$

onde $\widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi,\xi) = \widetilde{R}^{\xi}_{\xi}$ é a curvatua de Ricci de N.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\delta(S_1) = \delta(g^{ij}\alpha_{ij}) &= \delta(g^{ij})\alpha_{ij} + g^{ij}\delta(\alpha_{ij})\\
&= 2u\alpha^{ij}\alpha_{ij} + g^{ij}\left(u_{ij} - u\alpha_{il}\alpha^l_j + \widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j}u\right)\\
&= g^{ij}u_{ij} + u\left(\alpha_{ij}\alpha^{ij} + g^{ij}\widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j}\right)\\
&= \Delta u + u\left(||\alpha||^2 + \widetilde{R}^{\xi}_{\xi}\right)\\
&= \Delta u + u\left(S_1^2 - 2S_2 + \widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi,\xi)\right).
\end{aligned}$$

Além disso, como $||\alpha||^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = S_1^2 - 2S_2$ temos

$$\begin{aligned}\delta(S_2) &= \frac{1}{2}\left(\delta(S_1^2) - \delta||\alpha||^2\right) = S_1\delta(S_1) - \frac{1}{2}\delta||\alpha||^2 \\ &= S_1\Delta u + S_1\left(S_1^2 - 2S_2 + \widetilde{R}_{\xi}^{\xi}\right)u - u\left(S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 + \alpha^{ij}\widetilde{R}_{i\xi j}^{\xi}\right) \\ &\quad - \langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle \\ &= S_1\Delta u - \langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle + u\left(S_1S_2 - 3S_3 + S_1\widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\xi) - \alpha^{ij}\widetilde{R}_{i\xi j}^{\xi}\right).\end{aligned}$$

□

Prosseguindo de maneira análoga ao teorema 2.3, usando a proposição 2.8, obtemos o primeiro resultado citado em nossa introdução:

Teorema 2.9 (**Fórmula da Primeira Variação**). *Seja $M \subset N^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana N^{n+1}, e seja $r(\cdot,t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.21). Então, a primeira variação do funcional (2.1), é dada por*

$$\delta\int_M \mathcal{E}(S_1,S_2)d\mu =$$

$$\begin{aligned}&= \int_M \left[(\mathcal{E}_{S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_2})\Delta u - \mathcal{E}_{S_2}\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle\right]d\mu + \int_M \Big[\left(S_1^2 - 2S_2 + \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\xi)\right)\mathcal{E}_{S_1} \\ &\qquad + \left(S_1S_2 - 3S_3 + S_1\widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\xi) - \alpha^{ij}\widetilde{R}_{i\xi j}^{\xi}\right)\mathcal{E}_{S_2} - S_1\mathcal{E}\Big]ud\mu.\end{aligned}$$

Utilizando o teorema 2.9 podemos obter a equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$\Phi(M) = \int_M ||\phi||^2 d\mu,$$

que será estudado no próximo capítulo. Para isso precisamos primeiramente utilizar integração por parte nos dois primeiros termos de (2.5). Com relação ao primeiro termo, uma vez que $u \in C_c^{\infty}(M)$, pela 1ª identidade de Green (1.5) temos

$$\int_M f\Delta u d\mu = \int_M u\Delta f d\mu, \tag{2.22}$$

para $f \in C^{\infty}(M)$. Com relação ao segundo, primeiramente observemos que

$$\begin{aligned}\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle &= \alpha^{ik}u_{ik} = (\alpha^{ik}u_i)_k - (\alpha^{ik}{}_{,i})u_k \\ &= \operatorname{div} X_1 - \operatorname{div}\alpha(\nabla u),\end{aligned} \tag{2.23}$$

onde $X_1 \in TM$ é definido por $\langle X_1, Y\rangle = \alpha(\nabla u, Y)$, para todo $Y \in TM$. Por outro lado, tomando o traço da equação de Codazzi (1.11), temos

$$\operatorname{div}\alpha - \nabla S_1 = \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi, \cdot), \tag{2.24}$$

o que implica

$$\operatorname{div}\alpha(\nabla u) = \langle \nabla S_1, \nabla u\rangle + \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi, \nabla u). \tag{2.25}$$

Agora, seja $X_2 \in TM$ dado por $\langle X_2, Y\rangle = \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi, Y)$, para todo $Y \in TM$. Nesse caso, por 1.4, vale

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(uX_2) &= u\operatorname{div}(X_2) + \langle X_2, \nabla u\rangle \\ &= u\operatorname{div}(X_2) + \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi, Y).\end{aligned} \tag{2.26}$$

Além disso, também por (1.4) vale

$$\operatorname{div}(u\nabla S_1) = u\Delta S_1 + \langle \nabla S_1, \nabla u\rangle. \tag{2.27}$$

Logo, por (2.23), (2.25), (2.26) e (2.27) temos

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle &= \operatorname{div} X_1 - \operatorname{div}(uX_2) - \operatorname{div}(u\nabla S_1) + u\left(\Delta S_1 + \operatorname{div}(X_2)\right) \\ &= \operatorname{div}\mathbf{X} + u\left(\Delta S_1 + \operatorname{div}(X_2)\right),\end{aligned}$$

onde $\mathbf{X} = (X_1 + uX_2 - u\nabla S_1)$, que tem suporte compacto contido no interior de M (ver definição de X_1 acima). Portanto, pelo teorema da divergência

$$\int_M \langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu = \int_M u\left(\Delta S_1 + \operatorname{div}(X_2)\right) d\mu. \tag{2.28}$$

Assim, se

$$\mathcal{E}(S_1, S_2) = ||\phi||^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) S_1^2 - 2S_2,$$

o teorema 2.9 nos dá

$$\begin{aligned}\delta \int_M ||\phi||^2 d\mu = &\int_M \left[-\frac{2}{n} S_1 \Delta u + 2\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle\right] d\mu \\ &+ \int_M \left[2\left(\frac{n-1}{n}\right) S_1\left(S_1^2 - 2S_2 + \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\xi)\right) - \left(\frac{n-1}{n}\right) S_1^3 + 2S_1S_2\right. \\ &\left. - 2\left(S_1S_2 - 3S_3 + S_1\widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi,\xi) - \alpha^{ij}\tilde{R}^{\xi}_{i\xi j}\right)\right] u d\mu.\end{aligned}$$

Utilizando (2.22), (2.28) e simplificando obtemos

$$\begin{aligned}\delta\int_M ||\phi||^2 d\mu = \int_M \Big[& 2\left(\frac{n-1}{n}\right)\Delta S_1 + 2\operatorname{div} X_2 + \left(\frac{n-1}{n}\right) S_1^3 - 4\left(\frac{n-1}{n}\right) S_1 S_2 \\ & +6S_3 - \frac{2}{n} S_1 \widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi,\xi) + 2\alpha_{ij} R^{\xi}_{i\xi j}\Big] u d\mu,\end{aligned}$$

que nos fornece a equação de Euler-Lagrange

$$2\Delta S_1 + S_1^3 - 4S_1S_2 + \frac{6n}{n-1}S_3 - \frac{2}{n-1}\left(S_1\widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi,\xi) - n\alpha_{ij}R^{\xi}_{i\xi j} - n\operatorname{div} X_2\right) = 0.$$

Provamos então o seguinte resultado:

Teorema 2.10 (**Equação de Euler-Lagrange de Φ em ambiente qualquer**). *Seja $M \subset N^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana N^{n+1}, e seja $r(\cdot, t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.21). Então, a equação de Euler-Lagrange do funcional*

$$\Phi(M) = \int_M ||\phi||^2 d\mu,$$

é dada por

$$2\Delta S_1 + S_1^3 - 4S_1S_2 + \frac{6n}{n-1}S_3 - \frac{2}{n-1}\left(S_1\widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi,\xi) - n\alpha_{ij}R^{\xi}_{i\xi j} - n\operatorname{div} X_2\right) = 0, \tag{2.29}$$

onde $X_2 \in TM$ é definido por $\langle X_2, Y\rangle = \widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi, Y)$, para todo $Y \in TM$.

Observação 2.4. *No caso em que a variedade ambiente é Einstein temos*

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi,\xi) = (K_{\tilde g}(r_1,\xi) + \ldots + K_{\tilde g}(r_n,\xi)) = \sum_{i=1}^{n} K_{\tilde g}(r_i,\xi),$$

e

$$\alpha^{ij}\widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j} = k_1 K_{\tilde g}(r_1,\xi) + \ldots + k_n K_{\tilde g}(r_n,\xi) = \sum_{i=1}^{n} k_i K_{\tilde g}(r_i,\xi),$$

onde $k_1, \ldots, k_n$ são as curvaturas principais associadas a base ortonormal de direções principais $r_1, \ldots, r_n$ e, para cada $i = 1, \ldots, n$, $K_{\tilde g}(r_i, \xi)$ é a curvatura seccional do espaço gerado por $\{r_i, \xi\}$.

Quando a variedade ambiente é Einstein, as expressões obtidas nos teoremas 2.9 e 2.10 podem ser simplificadas. Nesse caso valem os seguintes resultados:

Teorema 2.11 (**Fórmula da Primeira Variação**). *Seja $M \subset N^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana Einstein N^{n+1}, e seja $r(\cdot,t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.21). Então, a primeira variação do funcional (2.1), é dada por*

$$\delta \int_M \mathcal{E}(S_1,S_2)d\mu =$$

$$= \int_M \left[(\mathcal{E}_{S_1} + S_1\mathcal{E}_{S_2})\,\Delta u - \mathcal{E}_{S_2}\langle \alpha, \mathrm{Hess}\, u\rangle\right] d\mu + \int_M \Bigg[\left(S_1^2 - 2S_2 + \sum_{i=1}^{n} K_{\tilde{g}}(r_i,\xi)\right)\mathcal{E}_{S_1} + \left(S_1S_2 - 3S_3 + S_1\sum_{i=1}^{n}K_{\tilde{g}}(r_i,\xi) - \sum_{i=1}^{n}k_iK_{\tilde{g}}(r_i,\xi)\right)\mathcal{E}_{S_2} - S_1\mathcal{E}\Bigg] u d\mu. \tag{2.30}$$

Corolário 2.12 (**Equação de Euler-Lagrange de Φ em ambiente Einstein**). *Seja $M \subset N^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana Einstein N^{n+1}, e seja $r(\cdot,t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.21). Então, a equação de Euler-Lagrange do funcional*

$$\Phi(M) = \int_M ||\phi||^2 d\mu,$$

é dada por

$$2\Delta S_1 + S_1^3 - 4S_1S_2 + \frac{6n}{n-1}S_3 - \frac{2}{n-1}\left(S_1\sum_{i=1}^{n}K_{\tilde{g}}(r_i,\xi) - n\sum_{i=1}^{n}k_iK_{\tilde{g}}(r_i,\xi)\right) = 0. \tag{2.31}$$

Se $\widetilde{M} = Q_c^{n+1}$, temos que $K_{\tilde{g}}(e_i,\xi) = c$ para todo i. Nesse caso, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.13 (**Equação de Euler-Lagrange de Φ em Q_c^{n+1}**). *Seja M hipersuperfície imersa em Q_c^{n+1}, e seja $r(\cdot,t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.21). Então, a equação de Euler-Lagrange do funcional*

$$\Phi(M) = \int_M ||\phi||^2 d\mu,$$

é dada por

$$2\Delta S_1 + S_1^3 - 4S_1S_2 + \frac{6n}{n-1}S_3 = 0. \tag{2.32}$$

Para obter a equação de Euler-Lagrange para o funcional (2.1) no caso geral, é necessário utilizar integração por partes em um termo da forma

$$\int_M f\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu,$$

onde $f = \mathcal{E}_{S_2}$. Utilizando (2.23) e a regra do produto (1.4) temos

$$\begin{aligned} f\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle &= f\left[\operatorname{div} X_1 - \operatorname{div}(uX_2) - \operatorname{div}(u\nabla S_1) + u\left(\Delta S_1 + \operatorname{div}(X_2)\right)\right] \\ &= \operatorname{div}(fX_1) - \operatorname{div}(fuX_2) - \operatorname{div}(fu\nabla S_1) + u\left(f\Delta S_1 + f\operatorname{div}(X_2)\right) \\ &\quad - \langle X_1, \nabla f\rangle + \langle X_2, \nabla f\rangle u + \langle \nabla S_1, \nabla f\rangle u, \end{aligned} \tag{2.33}$$

onde $\langle X_1, \nabla f\rangle = \alpha(\nabla u, \nabla f)$ e $\langle X_2, \nabla f\rangle = \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi, \nabla f)$.

Seja $X_3 \in TM$ tal que $\langle X_3, Y\rangle = \alpha(Y, \nabla f)$ para todo $Y \in TM$. Nesse caso, utilizando novamente a regra do produto temos

$$\operatorname{div}(uX_3) = u \operatorname{div} X_3 + \langle X_3, \nabla u\rangle.$$

Além disso, $X_3 = \alpha^{ik} f_k$, logo

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X_3 &= \alpha^{ik}{}_i f_k + \alpha^{ik} f_{ik} \\ &= \operatorname{div} \alpha \nabla f + \langle \alpha, \operatorname{Hess} f\rangle \\ &= \langle \nabla S_1, \nabla f\rangle + \langle \alpha, \operatorname{Hess} f\rangle + \widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi, \nabla f), \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde a última igualdade é consequência da contração da equação de Codazzi como em (2.24). Substituindo (2.34) e (2.24) em (2.33) temos

$$\begin{aligned} f\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle &= \operatorname{div}(fX_1) - \operatorname{div}(fuX_2) - \operatorname{div}(fu\nabla S_1) - \operatorname{div}(uX_3) + uf\Delta S_1 \\ &\quad + \left[f\operatorname{div}(X_2) + \langle \alpha, \operatorname{Hess} f\rangle + 2\widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi, \nabla f)\rangle + 2\langle \nabla S_1, \nabla f\rangle\right] u \\ &= \left[f\Delta S_1 + f\operatorname{div}(X_2) + \langle \alpha, \operatorname{Hess} f\rangle + 2\widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi, \nabla f) + 2\langle \nabla S_1, \nabla f\rangle\right] u \\ &\quad + \operatorname{div}(\mathscr{X}) \end{aligned}$$

onde $\mathscr{X} = fX_1 + fuX_2 - fu\nabla S_1 - uX_3$, que tem suporte compacto no interior de M. Portanto, pelo teorema da divergência

$$\begin{aligned} &\int_M f\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu = \\ &\qquad = \int_M \left[f\Delta S_1 + f\operatorname{div}(X_2) + \langle \alpha, \operatorname{Hess} f\rangle + 2\widetilde{\operatorname{Ric}}(\xi, \nabla f) + 2\langle \nabla S_1, \nabla f\rangle\right] u d\mu. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Aplicando (2.22) e (2.35) ao resultado obtido no teorema 2.9 e simplificando, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.14 (**Equação de Euler-Lagrange para $\mathcal{F}(M)$**). *Seja $M \subset N^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana N^{n+1}, e seja $r(\cdot, t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.21). Então, a equação de Euler-Lagrange do funcional*

$$\mathcal{F}(M) := \int_M \mathcal{E}(S_1, S_2) d\mu,$$

é dada por

$$\Delta \mathcal{E}_{S_1} + \left(S_1^2 - 2S_2 + \widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi,\xi)\right)\mathcal{E}_{S_1} + \left(S_1 S_2 - 3S_3 + S_1\widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi,\xi) - \alpha^{ij}\widetilde{R}^{\xi}_{i\xi j}\right)\mathcal{E}_{S_2}$$
$$- S_1\mathcal{E} + S_1\Delta\mathcal{E}_{S_2} - \mathcal{E}_{S_2}\operatorname{div}(X_2) - \langle \alpha, \operatorname{Hess}\mathcal{E}_{S_2}\rangle - 2\widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi, \nabla\mathcal{E}_{S_2}) = 0,$$

onde $X_2 \in TM$ é definido por $\langle X_2, Y\rangle = \widetilde{\mathrm{Ric}}(\xi, Y)$, para todo $Y \in TM$.

2.4 Funcionais de curvatura em formas espaciais de curvatura constante

Na primeira seção desse capítulo nos limitamos a calcular a fórmula da primeira variação para funcionais que dependem apenas das curvaturas S_1 e S_2, isto é, da forma

$$\mathcal{F}(M) := \int_M \mathcal{E}(S_1, S_2) d\mu,$$

onde M é uma hipersuperfície imersa em um espaço de curvatura seccional constante. Podemos reformular esse resultado para funcionais mais gerais uma vez que calculemos a variação de outras curvaturas r-médias. Assim, por exemplo, usando a proposição 2.5, e procedendo de maneira análoga a da demonstração do teorema 2.3 temos

Teorema 2.15. *Seja $M \subset Q_c^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma forma espacial de curvatura seccional constante c, e seja $\boldsymbol{r}(\cdot, t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.2). Então, a primeira variação do funcional*

$$\mathcal{G}(M) := \int_M \mathcal{E}(S_1, S_2, S_3) d\mu,$$

é dada por

$$\delta\int_M \mathcal{E}(S_1,S_2,S_3)d\mu =$$

$$= \int_M \Big[\langle\alpha^2,\mathrm{Hess}\,u\rangle\mathcal{E}_{S_3} - (\mathcal{E}_{S_2}+S_1\mathcal{E}_{S_3})\langle\alpha,\mathrm{Hess}\,u\rangle + (\mathcal{E}_{S_1}+S_1\mathcal{E}_{S_2}+S_2\mathcal{E}_{S_3})\,\Delta u\Big]\,d\mu$$
$$+\int_M \Big[(S_1^2-2S_2+nc)\mathcal{E}_{S_1} + (S_1S_2-3S_3+(n-1)cS_1)\mathcal{E}_{S_2}$$
$$+ (S_1S_3-4S_4+(n-2)cS_2)\mathcal{E}_{S_3} - S_1\mathcal{E}\Big]ud\mu.$$

Nesta subseção vamos calcular a equação de evolução de uma curvatura S_k, para $k\leq n$. Acreditamos que tal equação é de interesse independente. Em particular, ela é a principal ferramenta necessária para calcular a fórmula da primeira variação para funcionais mais gerais da forma

$$\mathcal{L}(M) \coloneqq \int_M \mathcal{E}(S_1,\ldots,S_n)d\mu,$$

uma vez que

$$\delta\int_M \mathcal{E}(S_1,\ldots,S_n)d\mu = \int_M\sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{S_k}(\delta S_k)d\mu + \int_M \mathcal{E}\delta(d\mu),$$

O leitor interessado em obter tal variação deve seguir os passos do teorema 2.3.

Esse resultado foi obtido pela primeira vez por Reilly em [49]. Aqui apresentaremos uma demonstração diferente e que, embora exija cálculos trabalhosos, usa ferramentas mais acessíveis. Mais especificamente, nosso objetivo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2.16. *Dado $\epsilon>0$, seja $r: M\times(-\epsilon,\epsilon)\to Q_c^{n+1}$ uma variação suave à um parâmetro com suporte compacto e velocidade normal $\delta r = u\xi$. Temos as seguintes equações de evolução:*
Para $k<n$

$$\delta(S_k) = \sum_{i=1}^k(-1)^{k-i}\langle\alpha^{k-i},Hessu\rangle S_{i-1}+u\left(S_1S_k-(k+1)S_{k+1}+(n-k+1)\,cS_{k-1}\right);$$

para $k=n$

$$\delta(S_n) = \sum_{i=1}^n(-1)^{n-i}\langle\alpha^{n-i},Hessu\rangle S_{i-1}+u(S_1S_n+cS_{n-1}),$$

onde $\alpha^{k-i} = g^{\sigma_{k-i+1}}\alpha_{k-i}$*, e*

$$\begin{aligned} g^{\sigma_N} &= g^{a_1 b_1} \cdot \ldots \cdot g^{a_N b_N} \\ \alpha_{\sigma_N} &= \alpha_{c_1 d_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{c_N, c_N}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

com $\{a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N\} = \{c_1, d_1, \ldots, c_N, d_N\}$ *conjuntos de índices tais que*

$$(a_i, b_i) \neq (c_j, d_j), \quad \forall i, j = 1, \ldots, N.$$

O primeiro passo para obter esse resultado é, dado $N \in \mathbb{N}$, $N \leq n$, obter a equação de evolução da N-ésima soma de potências das curvaturas principais,

$$p_N \coloneqq \sum_{i=1}^{n} k_i^N.$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$, sejam g^{σ_N} e α_{σ_N} como descritos em (2.36).

O lema abaixo generaliza parte dos resultados obtidos no lema 2.1.

Lema 2.17. *Dado* $\epsilon > 0$*, seja* $r : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to Q_c^{n+1}$ *uma variação suave à um parâmetro com suporte compacto e velocidade normal* $\delta r = u\xi$*. Temos as seguintes equações de evolução:*

$$\delta\left(g^{\sigma_N}\right) = 2Nug^{\sigma_{N+1}}\alpha_{ij} \tag{2.37}$$

$$\delta\left(\alpha_{\sigma_N}\right) = N\left(\alpha_{\sigma_{N-1}}u_{ij} - ug^{ij}\alpha_{\sigma_{N+1}} + ucg_{ij}\alpha_{\sigma_{N-1}}\right). \tag{2.38}$$

Demonstração. Usando o lema 2.1 e a regra do produto temos

$$\begin{aligned} \delta(g^{\sigma_N}) &= Ng^{\sigma_{N-1}}\delta(g^{ij}) = 2Nug^{\sigma_{N-1}}\alpha^{ij} \\ &= 2Nug^{\sigma_{N+1}}\alpha_{ij}. \end{aligned}$$

Analogamente, novamente usando o lema 2.1, temos

$$\begin{aligned} \delta\left(\alpha_{\sigma_N}\right) &= N\alpha_{\sigma_{N-1}}(u_{ij} - ug^{ij}\alpha_{ix}\alpha_{jy} + ucg_{ij}) \\ &= N\left(\alpha_{\sigma_{N-1}}u_{ij} - ug^{ij}\alpha_{\sigma_{N+1}} + ucg_{ij}\alpha_{\sigma_{N-1}}\right). \end{aligned}$$

□

Lema 2.18. *Dado $\epsilon > 0$, seja $r : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to Q_c^{n+1}$ uma variação suave à um parâmetro com suporte compacto e velocidade normal $\delta r = u\xi$. Temos a seguinte equação de evolução:*

$$\delta(p_N) = N\left(\langle \alpha^{N-1}, Hessu\rangle + up_{N+1} + ucp_{N-1}\right).$$

Demonstração. Uma vez que

$$p_N = \sum_{i=1}^{n} k_i^N = g^{\sigma_N}\alpha_{\sigma_N},$$

usando (2.37) temos

$$\begin{aligned}
\delta(p_N) &= \delta\left(g^{\sigma_N}\alpha_{\sigma_N}\right) = \delta(g^{\sigma_N})\alpha_{\sigma_N} + g^{\sigma_N}\delta(\alpha_{\sigma_N}) \\
&= N\left(\alpha_{\sigma_N}(2ug^{\sigma_{N+1}}\alpha_{ij}) + g^{\sigma_N}(\alpha_{\sigma_{N-1}}u_{ij} - ug^{ij}\alpha_{\sigma_{N+1}} + ucg_{ij}\alpha_{\sigma_{N-1}})\right) \\
&= N\left(g^{\sigma_N}\alpha_{\sigma_{N-1}}u_{ij} + ug^{\sigma_{N+1}}\alpha_{\sigma_{N+1}} + ucg^{\sigma_{N-1}}\alpha_{\sigma_{N-1}}\right) \\
&= N\left(\langle \alpha^{N-1}, Hessu\rangle + u\sum_{i=1}^{n} k_i^{N+1} + uc\sum_{i=1}^{n} k_i^{N-1}\right) \\
&= N\left(\langle \alpha^{N-1}, Hessu\rangle + up_{N+1} + ucp_{N-1}\right).
\end{aligned}$$

□

Observação 2.5. *Nessa notação temos*

$$p_0 = \sum_{i=1}^{n} k_i^0 = n.$$

Demonstração do teorema 2.16. Faremos a demonstração por indução. O resultado já foi demonstrado para $k = 1$. Suponhamos que o resultado é válido para todo $r < k$, $r \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que ele é válido para k. Por (1.16), temos que

$$kS_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} S_{k-i} p_i.$$

Derivando temos

$$
\begin{aligned}
k\delta(S_k) &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\left(\delta(S_{k-i})p_i + S_{k-i}\delta(p_i)\right)\\
&= (-1)^{k+1}\delta(p_k) + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\left(\delta(S_{k-i})p_i + S_{k-i}\delta(p_i)\right)\\
&= (-1)^{k+1}k\left(\langle\alpha^{k-1}, \operatorname{Hess} u\rangle + up_{k+1} + ucp_{k-1}\right)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}iS_{k-i}\left(\langle\alpha^{i-1}, \operatorname{Hess} u\rangle + up_{i+1} + ucp_{i-1}\right)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-i}(-1)^{k-j+1}p_iS_{j-1}\langle\alpha^{k-i-j}, \operatorname{Hess} u\rangle\\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}p_iu\left(S_1S_{k-i} - (k-i+1)S_{k-i+1} + (n-(k-i-1))\,cS_{k-i-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= &\overbrace{(-1)^{k+1}k\langle\alpha^{k-1}, \operatorname{Hess} u\rangle + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-i+1}(k-i)S_i\langle\alpha^{k-i-1}, \operatorname{Hess} u\rangle}^{(a)}\\
&+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-i}(-1)^{k-j+1}p_iS_{j-1}\langle\alpha^{k-i-j}, \operatorname{Hess} u\rangle\\
&\overbrace{+\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}uip_{i+1}S_{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}up_i\left(S_1S_{k-i} - (k-i+1)S_{k-i+1}\right)}^{(b)}\\
&+(-1)^{k+1}ukp_{k+1}\\
&\overbrace{+\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}ucip_{i-1}S_{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}ucp_i\left(n-(k-i-1)\right)S_{k-i-1}}^{(c)}\\
&+(-1)^{k+1}uckp_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Vamos fazer o cálculo das três partes em separado.

(a):

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1}k\langle\alpha^{k-1}, \operatorname{Hess} u\rangle + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}iS_{k-i}\langle\alpha^{i-1}, \operatorname{Hess} u\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-i}(-1)^{k-j+1}p_iS_{j-1}\langle\alpha^{k-i-j}, \operatorname{Hess} u\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1}k\langle\alpha^{k-1}, \operatorname{Hess} u\rangle + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}kS_{k-i}\langle\alpha^{i-1}, \operatorname{Hess} u\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}(k-i)S_{k-i}\langle\alpha^{i-1}, \operatorname{Hess} u\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-i}(-1)^{k-j+1}p_iS_{j-1}\langle\alpha^{k-i-j}, \operatorname{Hess} u\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j}\langle\alpha^{j-1}, \operatorname{Hess} u\rangle\left[(k-j)S_{k-j} - \sum_{i=1}^{k-j}(-1)^{i-1}S_{k-j-i}p_i\right] \\
&\quad + k\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\langle\alpha^{k-i}, \operatorname{Hess} u\rangle S_{i-1} \\
&= k\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\langle\alpha^{k-i}, \operatorname{Hess} u\rangle S_{i-1},
\end{aligned}
$$

onde na última igualdade usamos a identidade de Newton (1.16).

(b):

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}up_i\left(S_1S_{k-i} - (k-i+1)S_{k-i+1}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}uip_{i+1}S_{k-i} + (-1)^{k+1}ukp_{k+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1}uk\left((-1)^{k}(k+1)S_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+i}p_iS_{k-i+1}\right) \\
&\quad + u\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}ip_{i+1}S_{k-i} + u\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}p_iS_1S_{k-i} \\
&\quad + u\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i}p_i(k-i+1)S_{k-i+1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= uk(-1)^{k+1}S_1p_k + u(k-1)(-1)^kS_1p_k - uk(k+1)S_{k+1}\\
&\quad + uk\sum_{i=2}^{k-1}(-1)^{i+1}p_iS_{k-i+1} + u\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{i+1}ip_{i+1}S_{k-i}\\
&\quad + u\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}p_iS_1S_{k-i} + u\sum_{i=2}^{k-1}(-1)^ip_i(k-i+1)S_{k-i+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u(-1)^{k+1}S_1\left((-1)^{k-1}kS_k + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k+i-1}p_iS_{k-i}\right)\\
&\quad - uk(k+1)S_{k+1} + uk\sum_{i=2}^{k-1}(-1)^{i+1}p_iS_{k-i+1}\\
&\quad + u\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{i+1}ip_{i+1}S_{k-i} + u\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}S_1p_iS_{k-i}\\
&\quad + u\sum_{i=2}^{k-1}(-1)^ip_i(k-i+1)S_{k-i+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= uk\left(S_1S_k - (k+1)S_{k+1}\right) + uk\sum_{i=2}^{k-1}(-1)^{i+1}p_iS_{k-i+1}\\
&\quad + u\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{i+1}ip_{i+1}S_{k-i} + u\sum_{i=2}^{k-1}(-1)^ip_i(k-i+1)S_{k-i+1}\\
&\quad + u\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}S_1p_iS_{k-i} + uk\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^iS_1p_iS_{k-i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{i+1}p_iS_{k-i+1}(k-(k-i+1)+(1-i))\\
&\quad + u\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^iS_1p_iS_{k-i}(k-(k-1)-1)\\
&\quad + uk\left(S_1S_k - (k+1)S_{k+1}\right)
\end{aligned}$$

$$= uk\left(S_1S_k - (k+1)S_{k+1}\right),$$

onde usamos (1.17) na segunda e na quarta igualdade.

(c):

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1}uckp_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}ucip_{i-1}S_{k-i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}ucp_i\left(n-(k-i-1)\right)S_{k-i-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1}uck\left((-1)^{k-2}(k-1)S_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{k+i-2}p_iS_{k-i-1}\right) \\
&\quad + uc\sum_{i=2}^{k-1}(-1)^{i+1}ip_{i-1}S_{k-i} + uc\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{i+1}p_i\left(n-(k-i-1)\right)S_{k-i-1} \\
&\quad + ucnS_{k-1} + uc(-1)^knp_{k-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= uc(-1)^{k+1}k\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{k+i-2}p_iS_{k-i-1} + uc\sum_{i=2}^{k-1}(-1)^{i+1}ip_{i-1}S_{k-i} \\
&\quad + uc(-1)^kn\left((-1)^{k-2}(k-1)S_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{k+i-2}p_iS_{k-i-1}\right) \\
&\quad + uc\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{i+1}p_i\left(n-(k-i-1)\right)S_{k-i-1} - uck(k-1)S_{k-1} + ucnS_{k-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= uc\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{i+1}kp_iS_{k-i-1} + +uc\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{i+1}p_i\left(n-(k-i-1)\right)S_{k-i-1} \\
&\quad + uc\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{i}np_iS_{k-i-1}uc\sum_{i=2}^{k-1}(-1)^{i+1}ip_{i-1}S_{k-i} \\
&\quad + uc\left(-k(k-1)+n+n(k-1)\right)S_{k-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= uc\sum_{i=1}^{k-2}(-1)^{i+1}p_i\left(k-(i+1)-n+n-(k-i-1)\right) \\
&\quad + uck\left(n-(k-1)\right)S_{k-1}
\end{aligned}
$$

$$
= uck\left(n-(k-1)\right)S_{k-1}.
$$

Usando os resultados obtidos em (a), (b) e (c) temos

$$\delta(S_k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\langle\alpha^{k-i}, \mathrm{Hess}\, u\rangle S_{i-1} + u\left(S_1 S_k - (k+1)S_{k+1} + (n-k+1)\, c S_{k-1}\right).$$

A fórmula para $k = n$ é imediata observando que se $k = n$, então $S_{k+1} = 0$. $\square$

3 O funcional norma L^2 da segunda forma fundamental sem traço

3.1 Definições iniciais

Assim como no capítulo anterior, estaremos considerando apenas variedades orientáveis.

Apesar de nos restringirmos ao estudo em hipersuperfícies, inicialmente vamos apresentar a seguinte definição geral:

Definição 3.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana, $r : M^n \to \widetilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica, α a segunda forma fundamental da imersão e H o vetor curvatura média (não normalizada). Definimos a* ***segunda forma fundamental sem traço*** *$\phi : TM \times TM \to TM^\perp$ como*

$$\phi(X, Y) \coloneqq \alpha(X, Y) - \frac{1}{n}\langle X, Y\rangle H,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica de M.

É possível verificar (ver Apêndice C) que

$$\begin{aligned} &||\phi||^2 = ||\alpha||^2 - \frac{||H||^2}{n}, \\ &\operatorname{Tr}\phi = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Quando a imersão tem codimensão $p = 1$, dado um vetor $\xi \in TM^\perp$ unitário, uma vez que, para cada $X, Y \in TM$ vale $\phi(X, Y) \in TM^\perp$ e $H \in TM^\perp$, temos

$$\begin{aligned} \langle \phi(X, Y), \xi\rangle &= \langle \alpha(X, Y), \xi\rangle - \frac{1}{n}\langle X, Y\rangle\langle H, \xi\rangle \\ \langle \phi(X)(Y)\xi, \xi\rangle &= \langle A_\xi X, Y\rangle - \frac{1}{n}\langle X, Y\rangle\langle h\xi, \xi\rangle \\ \phi(X)(Y) &= \langle A_\xi X - \frac{h}{n}X, Y\rangle, \end{aligned}$$

ou seja

$$\phi(X) = A_\xi X - \frac{h}{n} X.$$

Além disso, se M é uma hipersuperfície, e $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são os autovalores de ϕ, isto é, $\phi e_i = \mu_i e_i$, para $i = 1, \ldots, n$, então $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$ e

$$||\phi||^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i<j=1}^{n} (k_i - k_j)^2,$$

onde $k_1, \ldots, k_n$ são as curvaturas principais de M. Assim $||\phi|| = 0$ se, e somente se, todas as curvaturas principais de M são iguais, isto é, se M é totalmente umbílica.

Seja $\Phi(M)$ a integral de $||\phi||^2$ sobre M, isto é,

$$\Phi(M) = \int_M ||\phi||^2 d\mu,$$

onde $d\mu$ é o elemento de volume de M.

Se $r : M \times I \to \widetilde{M}$ é uma família à um parâmetro de deformações de M, e $M_t = r(M, t)$ para, $t \in I \subset \mathbb{R}$ e $M_0 = M$, definimos então o funcional

$$\Phi(M_t) := \int_{M_t} ||\phi_t||^2 d\mu_t.$$

Observação 3.1. *M é totalmente umbílica se, e somente se, $||\phi|| = 0$, logo*

$$\Phi(M) = 0 \leq \int_{M_t} ||\phi_t||^2 d\mu_t = \Phi(M_t),$$

para qualquer variação M_t de M. Portanto, variedades totalmente umbílicas são mínimos absolutos do funcional Φ.

Consideremos o caso em que M é uma hipersuperfície isometricamente imersa em Q_c^{n+1}. Nesse caso, o corolário (2.13) nos dá a equação de Euler-Lagrange do funcional Φ:

$$2\Delta S_1 + S_1^3 - 4S_1S_2 + \frac{6n}{n-1} S_3 = 0. \tag{3.2}$$

Podemos reescrever a equação (3.2) em função da curvatura média $S_1 = h$, de $||\alpha||$ e das curvaturas principais $k_1, \ldots, k_n$ da seguinte forma:

$$2(n-1)\Delta h - (n+2)h||\alpha||^2 + h^3 + 2n\left(k_1^3 + \ldots + k_n^3\right) = 0. \tag{3.3}$$

Também será interessante reescrever a equação de Euler-Lagrange em função dos autovalores de ϕ. Pela definição de ϕ, observe que se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são os seus autovalores, então

$$k_i = \mu_i + \frac{h}{n}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n,$$

com

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = ||\phi||^2.$$

Logo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} k_i^3 = \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i + \frac{h}{n}\right)^3 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i^3 + 3\mu_i^2 \frac{h}{n} + \frac{h^3}{n^3}\right) \\ &= 3||\phi||^2 \frac{h}{n} + \frac{h^3}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i^3. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Assim, substituindo (3.1) e (3.4), temos que a equação de Euler-Lagrange (3.3) pode ser escrita como

$$2(n-1)\Delta h - (n-4)h||\phi||^2 + 2n\left(\mu_1^3 + \ldots + \mu_n^3\right) = 0. \tag{3.5}$$

Diretamente de (3.2) temos o seguinte resultado:

Corolário 3.2. *Seja M hipersuperfície isometricamente imersa em Q_c^{n+1}, que é ponto crítico de Φ. Se M é mínima, então M é 3-mínima, isto é, $S_3 = 0$.*

Outra consequência direta de (3.2) é o fato de que variedades austeras são pontos críticos do funcional Φ, uma vez que a definição de variedade austera implica diretamente que $S_k = 0$, para todo k ímpar.

Observação 3.2. *O conceito de variedades austeras foi introduzido por Harvey e Lawson [30, p.102]. A condição apresentada é equivalente à seguinte definição:*

Definição 3.3. *Uma subvariedade M^n é austera se, para cada vetor normal ξ, o conjunto dos autovalores de A_ξ é invariante por multiplicação por -1, isto é, é da forma*

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \{a, -a, b, -b, \ldots, c, -c, 0, 0, \ldots, 0\}.$$

Em particular, segue diretamente da definição que toda subvariedade austera é uma subvariedade mínima.

A seguir, vamos provar algumas fórmulas de interesse independente que consideramos relevantes para o completamento da teoria. Os lemas a seguir são adaptações dos resultados obtidos por Gruber em [25].

Lema 3.4. *Seja $r : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica, e seja ξ vetor unitário normal à M^n. Então, os Laplacianos de r e de ξ são dados, respectivamente, por*

$$\begin{aligned}\Delta r &= S_1\xi - ncr,\\ \Delta\xi &= -\nabla_{\nabla S_1} r - (S_1^2 - 2S_2)\xi + S_1 cr.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Demonstração. Considere um sistema local $\{r_1, \ldots, r_n\}$, tangente à $M \subset Q_c^{n+1}$ e ξ vetor normal à M em todo ponto. Nesse caso, a fórmula de Weingarten (1.10) e a equação de Gauss (1.13) nos dão

$$\xi_i = -\alpha_i^j r_j, \tag{3.7}$$

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^k r_k + \alpha_{ij}\xi - g_{ij}cr. \tag{3.8}$$

Como os símbolos de Christoffel são antisimétricos em i, j, usando (3.8) temos que

$$\Delta r = \sum_{i=1}^{n} r_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\xi - g_{ii}cr = S_1\xi - ncr.$$

Derivando (3.7), e usando a notação de Einstein temos

$$\xi_{ij} = -a_{i;j}^k r_k - \alpha_i^k r_{kj} = -\alpha_{i;j}^k r_k - \alpha_i^k \Gamma_{kj}^l r_l - \alpha_i^k \alpha_{jk}\xi + \alpha_i^k g_{kj} cr. \tag{3.9}$$

Quando o espaço ambiente é dado por Q_c^{n+1} a equação de Codazzi (1.14) implica

$$\alpha_{ik;j} = \alpha_{ij;k} - c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il})\xi^l,$$

logo, por (3.9), temos

$$\begin{aligned}\Delta\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ii} &= \sum_{i,k=1}^{n} -\alpha_{i;i}^k r_k - \alpha_i^k \alpha_{ik}\xi + \alpha_i^k g_{ik} cr\\ &= -\nabla_{\nabla S_1} r - ||\alpha||^2\xi + S_1 cr\\ &= -\nabla_{\nabla S_1} r - (S_1^2 - 2S_2)\xi + S_1 cr.\end{aligned}$$

□

Lema 3.5. *Seja $r : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica, tal que M é compacta e ponto crítico de Φ, e seja V um campo vetorial constante em M. Se ξ é normal à M, e $\mathbf{n}$ é o vetor conormal em ∂M, compatível com a orientação da variedade, então valem as seguintes igualdades:*

$$\int_M \left[\frac{6n}{n-1} S_3 \langle V, \xi\rangle + (n+2)cS_1^2 \langle V, r\rangle\right] d\mu = \int_{\partial M} \Big[S_1^2 \langle \nabla_{\mathbf{n}} r, V\rangle + 2S_1 \langle \nabla_{\mathbf{n}} \xi, V\rangle - 2\nabla_{\mathbf{n}} S_1 \langle V, \xi\rangle\Big] d\tau. \tag{3.10}$$

$$\int_M \Big[(n-2)(1-c)S_1^2 + \frac{6n}{n-1} S_3 \langle r, \xi\rangle - 2ncS_1 \langle r, \xi\rangle\Big] d\mu = \\ = \int_{\partial M} \Big[S_1^2 \langle \nabla_{\mathbf{n}} r, r\rangle + 2S_1 \langle \nabla_{\mathbf{n}} \xi, r\rangle - 2\nabla_{\mathbf{n}} S_1 \langle r, \xi\rangle\Big] d\tau, \tag{3.11}$$

onde $d\tau$ é o elemento de área.

Demonstração. Pela equação de Euler-Lagrange (3.2), a identidade de Green (1.6), e usando o fato de V ser constante temos

$$\begin{aligned} -\int_M \left(S_1^3 - 4S_1S_2\right) \langle V,\xi\rangle d\mu - \int_M \frac{6n}{n-1} S_3 \langle V, \xi\rangle d\mu &= 2\int_M \Delta S_1 \langle V, \xi\rangle d\mu \\ &= 2\int_M S_1 \langle V, \Delta\xi\rangle d\mu + 2\int_{\partial M} \langle \nabla S_1, \mathbf{n}\rangle \langle V, \xi\rangle - S_1 \langle \nabla_{\mathbf{n}} \xi, V\rangle d\tau \\ &= \overbrace{2\int_M S_1 \langle V, \Delta\xi\rangle}^{(a)} d\mu + 2\int_{\partial M} \nabla_{\mathbf{n}} S_1 \langle V, \xi\rangle - S_1 \langle \nabla_{\mathbf{n}} \xi, V\rangle d\tau. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Vamos calcular (a) em separado. Usando (3.6) e a identidade de Green (1.5) temos

$$
\begin{aligned}
&2\int_M S_1\langle V, \Delta\xi\rangle d\mu = \\
&= -2\int_M S_1\langle V, \nabla_{\nabla S_1} r + (S_1^2 - 2S_2)\xi - S_1 c r\rangle d\mu \\
&= -\int_M 2S_1\langle \nabla_{\nabla S_1} r, V\rangle d\mu - \int_M \left(2S_1^3 - 4S_1S_2\right)\langle V, \xi\rangle d\mu + 2c\int_M S_1^2\langle V, r\rangle d\mu. \\
&= -\int_M \langle \nabla_{\nabla S_1^2} r, V\rangle d\mu - \int_M \left(2S_1^3 - 4S_1S_2\right)\langle V, \xi\rangle d\mu + 2c\int_M S_1^2\langle V, r\rangle d\mu. \\
&= -\int_{\partial M} S_1^2\langle \nabla_{\nabla \mathbf{n}} r, V\rangle d\tau - \int_M S_1^2\langle \Delta r, V\rangle d\mu - \int_M \left(2S_1^3 - 4S_1S_2\right)\langle V, \xi\rangle d\mu \\
&\quad + 2c\int_M S_1^2\langle V, r\rangle d\mu \\
&= -\int_{\partial M} S_1^2\langle \nabla_{\nabla \mathbf{n}} r, V\rangle d\tau - \int_M \left(S_1^3 - 4S_1S_2\right)\langle V, \xi\rangle d\mu + (n+2)c\int_M S_1^2\langle V, r\rangle d\mu,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

uma vez que $S_1^2\langle \Delta r, V\rangle = S_1^3\langle V, \xi\rangle - ncS_1^2\langle V, r\rangle$. Substituindo (3.13) em (3.12) obtemos (3.10).

A demonstração de (3.11) é similar. Novamente utilizando a equação de Euler-Lagrange (3.2), a identidade de Green (1.6) e o lema 3.5 temos

$$
\begin{aligned}
-\int_M &\left(S_1^3 - 4S_1S_2\right)\langle r, \xi\rangle d\mu - \int_M \frac{6n}{n-1} S_3\langle r, \xi\rangle d\mu = 2\int_M \Delta S_1\langle r, \xi\rangle d\mu \\
&= 2\int_M S_1\Delta\langle r, \xi\rangle d\mu + 2\int_{\partial M}\Big[\langle \nabla S_1, \mathbf{n}\rangle\langle r, \xi\rangle - S_1\left(\langle \nabla_{\mathbf{n}} r, \xi\rangle + \langle \nabla_{\mathbf{n}}\xi, r\rangle\right)\Big] d\tau \\
&= \overbrace{2\int_M S_1\Delta\langle r, \xi\rangle}^{(b)} d\mu + 2\int_{\partial M}\left[\nabla_{\mathbf{n}} S_1\langle r, \xi\rangle - S_1\langle \nabla_{\mathbf{n}}\xi, r\rangle\right] d\tau,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

onde na segunda passagem usamos que $\xi \perp \nabla_{\mathbf{n}} r$. Para calcular (b) novamente usamos (1.5) e o lema 3.5. Assim

$$\begin{aligned}
2\int_M S_1\Delta\langle r,\xi\rangle d\mu &= 2\int_M S_1\left(\langle\Delta r,\xi\rangle + \langle r,\Delta\xi\rangle + 2\langle\nabla r,\nabla\xi\rangle\right)d\mu\\
&= \int_M \left[2S_1^2 - 2ncS_1\langle r,\xi\rangle - 2S_1\langle r, \nabla_{\nabla S_1} r + \left(S_1^2-2S_2\right)\xi - S_1 cr\rangle - 4S_1^2\right]d\mu\\
&= \int_M \left[-2S_1^2 + 2cS_1^2 - \langle\nabla_{\nabla S_1^2} r, r\rangle - \left(2S_1^3 - 4S_1S_2 + 2ncS_1\right)\langle r,\xi\rangle\right]d\mu\\
&= \int_M \left[-2(1-c)S_1^2 + S_1^2\left(||\nabla r||^2 + \langle\Delta r, r\rangle\right) - \left(2S_1^3 - 4S_1S_2 + 2ncS_1\right)\langle r,\xi\rangle\right]d\mu\\
&\quad - \int_{\partial M} S_1^2\langle\nabla_{\mathbf{n}} r, r\rangle d\tau\\
&= \int_M \left[(n-2)(1-c)S_1^2 - \left(S_1^3 - 4S_1S_2\right)\langle r,\xi\rangle - 2ncS_1\langle r,\xi\rangle\right]d\mu\\
&\quad - \int_{\partial M} S_1^2\langle\nabla_{\mathbf{n}} r, r\rangle d\tau, \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

uma vez que $||\nabla r||^2 = n$ e $S_1^2\langle\Delta r, r\rangle = S_1^3\langle r,\xi\rangle - ncS_1^2$. Substituindo (3.15) em (3.14) obtemos (3.11). □

Observação 3.3. *Uma consequência do lema anterior é que não existe hipersuperfície compacta do $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, ponto crítico de Φ, tal que $S_3 = 0$ em M e $S_1 = \nabla_{\boldsymbol{n}} S_1 = 0$ em ∂M.*

Com efeito, caso tal hipersuperfície existisse, (3.11) implicaria que $S_1 = 0$ em M, o que é impossível uma vez que não existem hipersuperfícies mínimas compactas em $\mathbb{R}^{n+1}$.

3.2 Equação de Euler Lagrange para variedades com no máximo duas curvaturas distintas

Nessa seção vamos reescrever a equação de Euler-Lagrange de Φ para hipersuperfícies imersas em espaços de curvatura constante no caso em que existem no máximo três curvatura principais distintas a menos de multiplicidade. Essa formulação nos permitirá estudar como casos particulares, as hipersuperfícies rotacionais (que possuem no máximo duas curvaturas principais distintas) e os toros de Clifford.

Sejam p, q e r números naturais tais que $p + q + r = n$, e suponhamos que M tenha p curvaturas principais iguais a k_1, q curvaturas principais iguais a k_2 e r

curvaturas principais iguais a k_3. Nesse caso (3.3) toma a forma

$$\begin{aligned}&2(n-1)\Delta h-(n+2)(pk_1+qk_2+rk_3)(pk_1^2+qk_2^2+rk_3^2)\\&+2n(pk_1^3+qk_2^3+rk_3^3)+(pk_1+qk_2+rk_3)^3=0.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}-2(n-1)\Delta h=&-(n+2)\Big(p^2k_1^3+q^2k_2^3+r^2k_3^3+pqk_1^2k_2+pqk_1k_2^2+prk_1^2k_3+prk_1k_3^2\\&+qrk_2^2k_3+qrk_2k_3^2\Big)+2n(pk_1^3+qk_2^3+rk_3^3)+p^3k_1^3+q^3k_2^3+r^3k_3^3\\&+3p^2qk_1^2k_2+3pq^2k_1k_2^2+3p^2rk_1^2k_3+3q^2rk_2^2k_3+3r^2pk_1k_3^2+3r^2qk_3^2k_2\\&+6pqrk_1k_2k_3\\=&k_1^3\overbrace{(-(n+2)p^2+2np+p^3)}^{(a)}+k_2^3\overbrace{(-(n+2)q^2+2nq+q^3)}^{(b)}\\&+k_3^3\overbrace{(-(n+2)r^2+2nr+r^3)}^{(c)}+6pqrk_1k_2k_3\\&+k_1^2k_2\overbrace{(-pq(n+2)+3p^2q)}^{(d)}+k_1k_2^2\overbrace{(-pq(n+2)+3pq^2)}^{(e)}\\&+k_1^2k_3\overbrace{(-pr(n+2)+3p^2r)}^{(f)}+k_1k_3^2\overbrace{(-pr(n+2)+3pr^2)}^{(g)}\\&+k_2^2k_3\overbrace{(-qr(n+2)+3q^2r)}^{(h)}+k_2k_3^2\overbrace{(-qr(n+2)+3qr^2)}^{(i)}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Temos então

$$\begin{aligned}&(a)=pq(2-p)+pr(2-p); && (f)=-pr((2-p)-(p-r))-pqr;\\&(b)=pq(2-q)+qr(2-q); && (g)=-pr((2-r)+(p-r))-pqr;\\&(c)=pr(2-r)+qr(2-r); && (h)=-qr((2-q)-(q-r))-pqr;\\&(d)=-pq((2-p)-(p-q))-pqr; && (i)=-qr((2-r)+(q-r))-pqr;\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&k_1^3(2-p) - k_1^2k_2((2-p)-(p-q)) + k_2^3(2-q) - k_1k_2^2((2-q)+(p-q)) \\
&= k_1^2(2-p)(k_1-k_2) - k_2^2(2-q)(k_1-k_2) + k_1k_2(p-q)(k_1-k_2) \\
&= (k_1-k_2)(k_1^2(2-p) - k_2^2(2-q) + k_1k_2(p-q)) \\
&= (k_1-k_2)(2k_1^2 - 2k_2^2 - pk_1^2 + qk_2^2 + pk_1k_2 - qk_1k_2) \\
&= (k_1-k_2)(2(k_1-k_2)(k_1+k_2) - pk_1(k_1-k_2) - qk_2(k_1-k_2) \\
&= (k_1-k_2)^2\left((2-p)k_1 + (2-q)k_2\right). \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
&= k_1^3(2-p) - k_1^2k_3((2-p)-(p-r)) + k_3^3(2-r) - k_1k_3^2((2-r)+(p-r)) \\
&= (k_1-k_3)^2\left((2-p)k_1 + (2-r)k_3\right), \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&= k_2^3(2-q) - k_2^2k_3((2-q)-(q-r)) + k_3^3(2-r) - k_2k_3^2((2-r)+(q-r)) \\
&= (k_2-k_3)^2\left((2-q)k_2 + (2-r)k_3\right). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&pqr(6k_1k_2k_3 - k_1k_2^2 - k_1k_3^2 - k_2k_1^2 - k_2k_3^2 - k_3k_1^2 - k_3k_2^2) \\
&= pqr(-k_1(k_2-k_3)^2 - k_2(k_1-k_3)^2 - k_3(k_1-k_2)^2. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20) em (3.16) temos

$$\begin{aligned}
-2(n-1)\Delta h = pq(k_1-k_2)^2((2-p)k_1 + (2-q)k_2 - rk_3) \\
+ pr(k_1-k_3)^2((2-p)k_1 + (2-r)k_3 - qk_2) \\
+ qr(k_2-k_3)^2((2-q)k_2 + (2-r)k_3 - pk_1),
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$2(n-1)\Delta h + \sum_{i<j=1}^{3} n_in_j(k_i-k_j)^2(2k_i+2k_j-h) = 0, \qquad (3.21)$$

onde $n_1 = p$, $n_2 = q$ e $n_3 = r$.

Quando M tem curvaturas principais k_1 e k_2 com multiplicidades n_1 e n_2 respectivamente, podemos reescrever (3.21) como

$$2\left(\frac{n-1}{n_1 n_2}\right)\Delta h + (k_1 - k_2)^2((2-n_1)k_1 + (2-n_2)k_2) = 0. \tag{3.22}$$

Em particular, para n par, se $n_1 = n_2 = n/2$ temos

$$16\,(n-1)\,\Delta h + n^2(4-n)(k_1-k_2)^2(k_1+k_2) = 0. \tag{3.23}$$

Quando $n = 4$ a equação (3.23) pode ser reescrita como

$$\Delta h = 0,$$

e nesse caso temos o seguinte resultado:

Corolário 3.6. *Seja M^4 hipersuperfíce fechada isometricamente imersa em Q_c^5, cujas curvaturas principais são k_1 e k_2, ambas distintas e com multiplicidade 2. Nesse caso, M é ponto crítico de Φ se, e somente se, M tem curvatura média constante.*

Observação 3.4. *Para $n > 4$, seja M^n hipersuperfíce fechada isometricamente imersa em Q_c^{n+1}, n par, cujas curvaturas principais são k_1 e k_2, ambas distintas e com multiplicidade $n/2$. Nesse caso, se M é ponto crítico de Φ, então a curvatura média de M não pode ter sinal definido. Esse fato segue da integração de (3.23). Em particular, temos que M não pode ter curvatura média constante não nula.*

Quando o ambiente é $\mathbb{S}^{n+1}$, embora nós não consigamos obter uma caracterização por meio da equação 3.23, nada impede que ela seja mínima (ver teorema 3.17 e observação 3.8).

Para $n = 2$ obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.7. *Seja M^2 superfície isometricamente imersa em Q_c^3, ponto crítico de Φ, cujas curvaturas principais são k_1 e k_2, ambas distintas. Então M tem curvatura média constante se, e somente se, M é mínima.*

Demonstração. Se $n = 2$ em (3.23), a equação de Euler-Lagrange de Φ é dada por

$$2\Delta h + h(k_1 - k_2)^2 = 0, \tag{3.24}$$

de onde segue o resultado. □

A proposição a seguir é um resultado de rigidez para superfícies fechadas que são pontos críticos de Φ.

Proposição 3.8. *Seja M^2 uma superfície fechada isometricamente imersa em Q_c^3, que é ponto crítico do funcional Φ. Se a sua curvatura média h tem sinal definido, então M é totalmente umbílica.*

Demonstração. Uma vez que M é uma superfície, vale a equação (3.24). Como M é fechada, integrando (3.24) e usando o teorema de Stokes temos

$$\int_M h(k_1 - k_2)^2 d\mu = 0.$$

Como h tem sinal definido temos $k_1 = k_2$, e portanto M^2 é totalmente umbílica. □

Observação 3.5. *É um resultado bastante conhecido que $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é totalmente umbílica se, e somente se, está contida em um plano ou uma esfera [18, p.31]. A classificação das superfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^3$, é devido a Cecil e Ryan [14], e pode ser encontrada sintetizada no trabalho de Izumiya et al. [33, p.134]. No caso de $M^2 \subset \mathbb{S}^3$, é possível mostrar que se M é totalmente umbílica então M está contida em uma esfera $\mathbb{S}^2$. Para isso basta usar que $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ é totalmente umbílica, e que uma subvariedade $M^n \subset \mathbb{R}^m$ totalmente umbílica está contida em um n-plano ou uma n-esfera.*

Agora vamos considerar o caso em que M^n é um ponto crítico de Φ em Q_c^{n+1}, com duas curvaturas principais distintas k_1 e k_2 tais que k_2 tem multiplicidade $n-1$. Nesse caso, por (3.22), a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$2\Delta h + (k_1 - k_2)^2(k_1 - (n-3)k_2) = 0. \tag{3.25}$$

A proposição a seguir caracteriza os pontos críticos de Φ que satisfazem (3.25), e possuem curvatura média constante no caso em que $n = 3$.

Proposição 3.9. *Seja M^3 uma hipersuperfície conexa, isometricamente imersa em Q_c^4, que é ponto crítico do funcional Φ. Suponhamos que M possui duas curvaturas principais distintas k_1 e k_2 tais que k_2 tem multiplicidade 2. Nesse caso, se M tem curvatura média constante, então $k_1 = 0$.*

Demonstração. Quando $n = 3$, podemos reescrever a equação de Euler-Lagrange como (3.25) como

$$2\Delta h + (k_1 - k_2)^2 k_1 = 0. \tag{3.26}$$

Se M tem curvatura média constante, então (3.26) implica

$$(k_1 - k_2)^2 k_1 = 0.$$

Como $h = k_1 + 2k_2$, substituindo temos

$$(h - 3k_2)^2 (h - 2k_2) = 0.$$

Portanto, em cada ponto $p \in M$, temos $k_2 = h/3$ ou $k_2 = h/2$. Como h é constante, a continuidade de k_2, e a conexidade de M implicam que k_2 é constante em M, e vale $k_2 = h/3$ em M, ou $k_2 = h/2$ em M. Se $k_2 = h/3$, então $k_1 = k_2$, o que é impossível por hipótese. Logo $k_2 = h/2$, e portanto $k_1 = 0$. □

Observação 3.6. *A recíproca da proposição 3.9 é imediata no caso em que M é fechada.*

O próximo resultado mostra que, no caso em que $n = 4$ em (3.25), a hipótese de que M é um ponto crítico de Φ que possui curvatura média constante se torna muito restritiva.

Proposição 3.10. *Seja M^4 uma hipersuperfície isometricamente imersa em Q_c^5 tal que M possui duas curvaturas principais distintas k_1 e k_2, onde k_2 tem multiplicidade 3. Se M tem curvatura média constante, então M não é ponto crítico de Φ.*

Demonstração. Quando $n = 4$ podemos reescrever a equação de Euler-Lagrange (3.25) como

$$2\Delta h + (k_1 - k_2)^3 = 0.$$

Assim, se M tem curvatura média constante e é ponto crítico de Φ, teríamos $k_1 = k_2$ em todos os pontos de M, o que é impossível. □

Observação 3.7. *No caso geral, um famoso resultado obtido por Do Carmo e Dajczer [22, p.701], nos diz que qualquer hipersuperfície de Q_c^{n+1} com curvaturas principais $\mu = k_1$ e $k_2 = \ldots = k_n = \lambda$, com $\lambda \neq \mu$ está contida em uma hipersuperfície de revolução. Portanto, resultados obtidos para hipersuperfícies de revolução se estendem naturalmente para todas as hipersuperfícies com $n-1$ curvaturas repetidas.*

3.3 Soluções rotacionais para a equação de Euler-Lagrange

Nessa seção vamos investigar possíveis soluções rotacionais de curvatura média constante para a equação de Euler-Lagrange. Antes disso vamos enunciar um resultado geral para hipersuperfícies mínimas:

Proposição 3.11. *Não existem hipersuperfícies mínimas rotacionais que sejam pontos críticos do funcional Φ em Q_c^{n+1}, $n > 2$.*

Demonstração. De fato, suponha por contradição que existe uma hipersuperfície mínima rotacional M ponto crítico do funcional Φ. Pela proposição 3.2, M deve ser tal que $H_1 = H_3 = 0$. Por (1.27) temos então que

$$(n-1)(\delta - cf^2 - f'^2)^{1/2} - (\delta - cf^2 - f'^2)^{-\frac{1}{2}}(f'' + cf)f = 0$$
$$(n-3)(\delta - cf^2 - f'^2)^{3/2} - 3(\delta - cf^2 - f'^2)^{\frac{1}{2}}(f'' + cf)f = 0,$$

onde f é tal que $M = (f(t)\Theta, t)$. Multiplicando a primeira equação por $3(\delta - cf^2 - f'^2)$ e subtraindo a segunda da primeira obtemos

$$2n(\delta - cf^2 - f'^2)^{3/2} = 0,$$

o que é um absurdo pois $(\delta - cf^2 - f'^2) \neq 0$. □

Uma vez que não existem pontos críticos mínimos rotacionais para a equação de Euler-Lagrange, é natural perguntar se existem pontos críticos rotacionais de curvatura média constante.

No teorema 1.40 vimos que uma hipersuperfície rotacional de dimensão n em Q_c^{n+1} tem pelo menos $n-1$ curvaturas principais iguais. Se todas as curvaturas principais são iguais, então M é totalmente umbílica, e portanto é ponto crítico de Φ. Em particular, as esferas Euclidianas são hipersuperfícies rotacionais que são pontos críticos de Φ com curvatura média constante.

Se M é uma hipersuperfície rotacional de curvatura média constante com duas curvaturas principais distintas, que é ponto crítico de Φ, então pela equação (3.25), temos que

$$k_1 = k_2 \text{ ou } k_1 = (n-3)k_2.$$

Como $k_1 \neq k_2$, temos que, para $\beta = n-3$, as curvaturas principais de M satisfazem

$$\beta k_n = \beta k_{n-1} = \ldots = \beta k_2 = k_1. \tag{3.27}$$

Nas duas proposições a seguir estamos interessados em analisar as hipersuperfícies rotacionais de curvatura média constante que são pontos críticos de Φ em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{S}^{n+1}$ para $n > 2$. Portanto, as principais ferramentas a serem utilizadas são a proposição 3.11 e a equação (3.27).

No caso $c = 0$ temos o seguinte resultado:

Proposição 3.12. *Se M é uma hipersuperfície rotacional conexa imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, com curvatura média constante $h \neq 0$, tal que suas curvaturas principais satisfazem*

$$\beta k_n = \beta k_{n-1} = \ldots = \beta k_2 = k_1,$$

para algum número real $\beta \neq 0$, então M está contida em uma esfera Euclidiana de dimensão n.

Demonstração. A curvatura média de M é dada por

$$h = k_1 + (n-1)k_2 = (n+\beta-1)k_2,$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{h}{n+\beta-1} = a.$$

Como $h \neq 0$,então $\beta \neq 1-n$ e $a \neq 0$. Usando (1.24) temos a seguinte equação diferencial:

$$-\sqrt{1-f'^2} = af.$$

Resolvendo essa equação, e tomando a constante de integração igual a zero, temos

$$f(t) = \pm \frac{\operatorname{sen}(at)}{a}.$$

Por (1.23) temos

$$k_1 = \frac{f''}{\sqrt{1 - f'^2}} = a$$
$$\Rightarrow k_1 = k_2 = a.$$

Como $k_1 = \beta k_2$ temos que $\beta = 1$, e portanto M é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvaturas seccionais constantes não nulas, o que implica que M está contida em uma esfera. □

Corolário 3.13. *Seja M é uma hipersuperfície rotacional conexa isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2$ com curvatura média constante. Se M é ponto crítico de Φ, então M está contida em uma esfera Euclidiana de dimensão n.*

Demonstração. Se M é uma hipersuperfície rotacional de curvatura média constante que é ponto crítico de Φ, pela proposição 3.11 temos que $h \neq 0$. Suponhamos inicialmente que M tem duas curvaturas principais distintas. Então M satisfaz (3.27) para $\beta = n - 3$, e pela proposição 3.12 temos que M está contida em uma esfera. Note agora que se M não tem duas curvaturas principais distintas obtemos o mesmo resultado. □

O corolário anterior implica que não existe hipersuperfície rotacional de curvatura média constante que seja ponto crítico de Φ em $\mathbb{R}^{n+1}$, e que tenha duas curvaturas principais distintas. Além disso, a observação 3.7 nos permite estender essa conclusão para qualquer hipersuperfície de curvatura média constante M de $\mathbb{R}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas, sendo uma delas de multiplicidade $n - 1$, uma vez que esse tipo de hipersuperfície está necessariamente contida em uma hipersuperfície de revolução.

Para $c = 1$ temos um resultado similar:

Proposição 3.14. *Se M é uma hipersuperfície rotacional imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$, com curvatura média constante $h \neq 0$, tal que suas curvaturas principais satisfazem*

$$\beta k_n = \beta k_{n-1} = \ldots = \beta k_2 = k_1,$$

para algum número real $\beta \neq 0$, então $\beta = \pm 1$.

Demonstração. Analogamente ao que foi feito na proposição 3.12, se

$$k_2 = \frac{h}{n+\beta-1} = a,$$

usando (1.24) temos a equação diferencial

$$f'^2 + (1+a^2)f^2 - 1 = 0,$$

cuja solução é dada por

$$f(t) = \pm \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{1+a^2}t\right)}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Por (1.23) temos

$$k_1 = \frac{f'' + f}{\sqrt{1 - f^2 - f'^2}} = -|a|.$$

Assim, para $k_2 > 0$ temos $k_1 = -k_2$ e portanto $\beta = -1$, e para $k_2 < 0$ temos $k_1 = k_2$, e portanto $\beta = 1$. $\square$

Corolário 3.15. *Seja M uma hipersuperfície rotacional isometricamente imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante. Se M é ponto crítico de Φ, então M é totalmente umbílica ou $n = 2$ e M é mínima.*

Demonstração. Note que basta analisar o caso em que M não é totalmente umbílica. Se M não é totalmente umbílica, por (3.27) temos que $k_1 = (n-3)k_2$. Usando a proposição 3.14 temos que $\beta = n - 3 = \pm 1$, o que implica $\beta = 1$ e $n = 4$, ou $\beta = -1$ e $n = 2$. O primeiro caso não pode ocorrer pois teríamos M totalmente umbílica. No segundo temos $h = k_1 + k_2 = 0$, e portanto M é mínima. $\square$

3.4 O toro de Clifford

Dentre os possíveis pontos críticos de Φ com curvaturas repetidas vamos destacar o exemplo dos Toros de Clifford imersos em $\mathbb{S}^{n+1}$. Pela definição D.1 e a proposição

D.2, ambas contidas no apêndice D, um toro de Clifford é uma variedade M da forma

$$M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \subset \mathbb{S}^{n+1}, \tag{3.28}$$

tal que $n_1 + n_2 = n$, $r_1^2 + r_2^2 = 1$, e cujas curvaturas principais são $k_1 = \dfrac{r_2}{r_1}$ e $k_2 = -\dfrac{r_1}{r_2}$, com multiplicidades n_1 e n_2 respectivamente. Uma vez que toros da forma (3.28) tem curvatura média constante e apenas duas curvaturas principais distintas, quando $n_1 = n_2 = 2$, obtemos a seguinte consequência do corolário 3.6:

Corolário 3.16. *Se M é um toro de Clifford da forma*

$$M = \mathbb{S}^2(r_1) \times \mathbb{S}^2(r_2),$$

isometricamente imerso $\mathbb{S}^5$, então M é ponto crítico de Φ.

O teorema a seguir utiliza a equação de Euler-Lagrange (3.22), obtida para pontos críticos do funcional Φ com duas curvaturas principais distintas, para classificar os toros de Clifford que são pontos críticos de Φ:

Teorema 3.17. *Se $M^n = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ é ponto crítico do funcional Φ, então ou $n_1 = n_2 = 2$, ou $n \neq 4$ e*

$$r_1^2 = \frac{n_2 - 2}{n - 4} \text{ e } r_2^2 = \frac{n_1 - 2}{n - 4}. \tag{3.29}$$

Em particular, se M é mínima, então $n_1 = n_2$ e $r_1^2 = r_2^2 = \dfrac{1}{2}$.

Demonstração. Se M é da forma (3.28), utilizando a Equação de Euler-Lagrange (3.22) e os valores das curvaturas principais de M temos que

$$\left(\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}\right)^2 \left((2 - n_1)\frac{r_2}{r_1} - (2 - n_2)\frac{r_1}{r_2}\right) = 0.$$

Essa equação implica

$$(2 - n_1)r_2^2 = (2 - n_2)r_1^2.$$

Assim temos $n_1 = n_2 = 2$, ou n_1 e n_2 são ambos diferentes de 2 e

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{n_1 - 2}{n_2 - 2}, \tag{3.30}$$

Como $r_1^2 + r_2^2 = 1$, isso implica

$$r_1^2 = \frac{n_2 - 2}{n - 4} \text{ e } r_2^2 = \frac{n_1 - 2}{n - 4}.$$

No caso em que M é mínima, por (3.30), e pela observação D.1 contida no apêndice B, temos que

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{2 - n_1}{2 - n_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

de onde

$$n_1 = n_2, \text{ e } r_1^2 = r_2^2 = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Observação 3.8. *Pelo corolário 3.16 temos que*

$$\mathbb{S}^2(r_1) \times \mathbb{S}^2(r_2),$$

é ponto crítico de Φ para todos r_1 e r_2 tais que $r_1^2 + r_2^2 = 1$.

Se $n_1 = 1$, como $r_2^2 < 1$, por (3.29), vale

$$0 < \frac{1}{4 - n} < 1,$$

o que implica $n = 2$. Assim, $\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^{n-1}(r_2)$ é ponto crítico de Φ se, e somente se, $n = 2$ e $r_1 = r_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Pela equação (3.30) temos também que, para $n_1 = n_2 \neq 2$, vale $r_1^2 = r_2^2 = \frac{1}{2}$. Portanto, temos que:

- *Se $n_1 = 1$, então $n_2 = 1$, e o único toro de Clifford ponto crítico de Φ é da forma*

$$\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \subset \mathbb{S}^3.$$

- *Se $n_1 = n_2 = 2$ os ponto críticos possíveis são da forma*

$$\mathbb{S}^2(r_1) \times \mathbb{S}^2(r_2) \subset \mathbb{S}^5,$$

onde $r_1^2 + r_2^2 = 1$.

- *Se $n_1 = n_2 \neq 2$, então n é par e os pontos críticos possíveis são mínimos e têm a forma*
$$\mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1}.$$

- *Se $n_1 \neq n_2$, ambos maiores que 2, os pontos críticos são da forma*
$$\mathbb{S}^{n_1}\left(\sqrt{\frac{n_2-2}{n-4}}\right) \times \mathbb{S}^{n_2}\left(\sqrt{\frac{n_1-2}{n-4}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1}.$$

3.5 Estabilidade

Usando o teorema 2.6 podemos calcular a segunda variação para imersões críticas do funcional Φ. Como $||\phi||^2 = \left(1-\frac{1}{n}\right)S_1^2 - 2S_2$, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.18. *Seja $M \subset Q_c^{n+1}$ hipersuperfície imersa em uma forma espacial de curvatura seccional constante c, e seja $r(\cdot,t)$ uma variação à um parâmetro de imersões como em (2.2). Então, a segunda variação do funcional $\Phi(M)$, é dada por*
$$\begin{aligned}
&\delta^2 \int_M ||\phi||^2 d\mu = \\
&\int_M -\frac{2}{n}S_1\left(u\langle\nabla S_1, \nabla u\rangle + 2\alpha(\nabla u, \nabla u)\right)d\mu \\
&+ \int_M 2\left(|\operatorname{Hess} u|^2 + 2\alpha^2(\nabla u,\nabla u) + \frac{u}{2}\langle\nabla||\alpha||^2, \nabla u\rangle\right)d\mu \\
&+ \int_M -\frac{2}{n}(\Delta u)^2 - 6S_2 u\langle\alpha^2, \operatorname{Hess} u\rangle - 2||\phi||^2|\nabla u|^2 d\mu \\
&- \int_M 4S_1\left(1+\frac{2}{n}\right)u\langle\alpha, \operatorname{Hess} u\rangle d\mu - \int_M \left(||\phi||^2 - \frac{8}{n}S_2\right)u\Delta u d\mu \\
&+ \int_M 2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[(S_1^4 - 5S_1^2S_2 + 4S_2^2 + 6S_1S_3)\right]u^2 - 24S_4u^2 d\mu \\
&- \int_M (n-4)||\phi||^2 c u^2 d\mu.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Demonstração. Basta fazer
$$\mathcal{E} = \left(1-\frac{1}{n}\right)S_1^2 - 2S_2; \quad \mathcal{E}_{S_1} = 2\left(1-\frac{1}{n}\right)S_1; \quad \mathcal{E}_{S_2} = -2;$$
$$\mathcal{E}_{S_1S_1} = 2\left(1-\frac{1}{n}\right); \qquad \mathcal{E}_{S_1S_2} = 0; \qquad \mathcal{E}_{S_2S_2} = 0.$$
na fórmula do teorema 2.6. □

Uma vez que as hipersuperfícies totalmente umbílicas são mínimos absolutos do funcional Φ, é imediato que elas sejam mínimos locais estáveis para o funcional Φ.

Como forma de demonstrar a aplicabilidade da fórmula da segunda variação (3.31), vamos demonstrar esse fato. Começaremos com o seguinte lema de álgebra linear:

Lema 3.19. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$. Então*

$$||A||^2 \geq \frac{(\mathrm{tr}\, A)^2}{n}.$$

Demonstração. Basta aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz aos vetores a_{ij} e δ_{ij} em $\mathbb{R}^{n^2}$. □

Como consequência, temos que

$$|Hessu|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n} \geq 0. \tag{3.32}$$

Observação 3.9. *Se M é hipersuperfície imersa em Q_c^{n+1} totalmente umbílica, então M é um mínimo estável do funcional Φ.*

Demonstração. Seja M totalmente umbílica com curvaturas principais iguais a k. Nesse caso temos

$$S_1 = nk; \qquad S_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}k^3; \qquad \alpha^2(\nabla u, \nabla u) = k^2||\nabla u||^2;$$

$$S_2 = \frac{n(n-1)}{2}k^2; \quad S_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}k^4; \quad \langle \alpha^2, Hessu\rangle = k^2\Delta u;$$

$$||\alpha||^2 = nk^2; \qquad \alpha(\nabla u, \nabla u) = k||\nabla u||^2; \qquad \langle \alpha, Hessu\rangle = k\Delta u.$$

Substituindo em (3.31) e usando que $||\phi|| = 0$, para M totalmente umbílica temos

$$\begin{aligned}\delta^2 \int_M ||\phi||^2 d\mu = \int_M \Bigg[2\left(|Hessu|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n}\right) - 3n(n-1)^2k^4 u\Delta u \\ -12k^2 u\Delta u + 2n(n-1)(n-2)k^4u^2\Bigg] d\mu \geq 0,\end{aligned}$$

uma vez que vale (3.32), e que $\int_M u\Delta u d\mu = -\int_M ||\nabla u||^2 d\mu$ é não positiva para $u \in C_c^\infty(M)$. □

Na subseção 3.4 mostramos que se M é um toro de Clifford mínimo imerso em $\mathbb{S}^{n+1}$, ponto crítico de Φ, então n é par e M é da forma forma

$$M = \mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1}. \tag{3.33}$$

Ao contrário das hipersuperfícies totalmente umbílicas, é possível demonstrar que toros da forma (3.33) não são mínimos estáveis de Φ em geral. Para isso vamos usar o resultado abaixo, que é devido a Barros [7], e é consequência do teorema de Takahashi [54] e da fórmula de Bochner [45, p.63]:

Teorema 3.20 (Teorema 1.1 [7])**.** *Seja $r : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$ imersão mínima de uma variedade compacta na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+p}$. Se f é uma 1ª autofunção do Laplaciano de M associado ao 1º autovalor λ, então*

$$\int_M |Hessf|^2 d\mu \leq \int_M \left(|\nabla f|^2 + |A(\nabla f)|^2\right) d\mu, \tag{3.34}$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $\lambda = n$.

Corolário 3.21. *Se f é uma 1ª autofunção do Laplaciano no toro de Clifford mínimo*

$$M = \mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1},$$

então

$$\int_M 2|Hessf|^2 d\mu \leq \int_M 4|\nabla f|^2 d\mu. \tag{3.35}$$

Demonstração. Pelo teorema 3.17 temos que M tem curvaturas principais $k_1 = 1$ e $k_2 = -1$, ambas com multiplicidade $\dfrac{n}{2}$. Portanto a matriz da segunda forma fundamental α é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

Logo

$$|A(\nabla f)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle A\nabla f, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f, Ae_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle \nabla f, e_i\rangle|^2 = |\nabla f|^2.$$

Substituindo em (3.34), obtemos (3.35). $\square$

Teorema 3.22. *Seja n um número par, e suponha que o toro de Clifford mínimo*

$$\mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1}, \tag{3.37}$$

seja ponto crítico de Φ. Então ele é um mínimo local estável se, e somente se, $n = 2$.

Demonstração. Seja M o toro de Clifford mínimo dado por (3.37). Por (3.36) temos que

$$S_1 = S_3 = 0; \qquad \alpha^2 = Id; \qquad ||\alpha||^2 = n;$$

$$S_2 = -\frac{1}{2}||\alpha||^2 = -\frac{n}{2}; \quad S_4 = \frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} k_i^4 = \frac{n(n-2)}{8}.$$

Substituindo estes valores em (3.31), obtemos

$$\begin{aligned}
\delta^2 \int_M ||\phi||^2 d\mu &= \int_M \Big(2|\operatorname{Hess} u|^2 + 4|\nabla u|^2 - \frac{2}{n}(\Delta u)^2\Big)\, d\mu \\
&+ \int_M \Big(3nu\Delta u - 2n|\nabla u|^2 - (n+4)u\Delta u\Big)\, d\mu \\
&+ \int_M \Big[2n(n-1) - 3n(n-2) - n(n-4)\Big] u^2 d\mu, \\
&= \int_M \Big[2|\operatorname{Hess} u|^2 - \frac{2}{n}(\Delta u)^2 - 2(n-2)|\nabla u|^2\Big] d\mu \\
&+ \int_M \Big[2(n-2)u\Delta u - 2n(n-4)u^2\Big] d\mu \qquad (3.38) \\
&\geq \int_M \Big[-2(n-2)|\nabla u|^2 + 2(n-2)u\Delta u - 2n(n-4)u^2\Big] d\mu,
\end{aligned}$$

de onde concluímos que, para $n = 2$, vale

$$\delta^2 \int_M ||\phi||^2 d\mu \geq 0,$$

e portanto M é estável.

Para $n \geq 4$, como M é o produto de duas esferas, ambas com raio $r = 1/\sqrt{2}$, usando o espectro do Laplaciano da esfera como descrito por Chavel em [15, p.35] e a fórmula do Laplaciano de variedades produto como descrita por Berger et al. em [8, p.144], temos que existe u, 1^{a} autofunção de Δ, tal que $\Delta u + 2nu = 0$. Nesse caso a expressão (3.38) pode ser escrita como

$$\delta^2 \int_M ||\phi||^2 d\mu = \int_M \left(2|\operatorname{Hess} u|^2 - 2(n-2)|\nabla u|^2 - 2n(3n-4)u^2\right) d\mu$$
$$\leq \int_M \Big(-2(n-4)|\nabla u|^2 - 2n(3n$$

onde na primeira desigualdade usamos o corolário 3.21. □

3.6 Teoremas de gap para o funcional Φ

Nessa seção vamos analisar alguns teoremas de gap clássicos e suas técnicas, com o objetivo de obter versões similares para os pontos críticos do funcional Φ em imersões na esfera. No final vamos apresentar também um teorema de gap para imersões em formas espaciais de curvatura constante em geral.

3.6.1 O teorema de Alencar-do Carmo-Santos

Observação 3.10. *Os resultados citados nesta seção tiveram seus enunciados reescritos de modo a seguir o resto da notação deste texto (ver observação 1.14).*

Em [5], analisando o operador L_1, Alencar et al. provaram o seguinte resultado referente a imersões de hipersuperfícies com curvatura escalar constante em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Teorema 3.23 (Teorema 1.1 de [5]). *Seja $r : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ hipersuperfície fechada orientável com curvatura escalar $s = n(n-1)$ (equivalentemente $S_2 = 0$). Suponha que S_1 não muda de sinal e a escolha orientação tal que $S_1 \geq 0$. Suponha que*

$$||\sqrt{P_1}A||^2 \leq \operatorname{Tr} P_1.$$

Então

(a) $||\sqrt{P_1}A||^2 = \operatorname{Tr} P_1$;

(b) M^n *é totalmente geodésica ou* $M^n = \mathbb{S}^{n_1}(r_1)\times\mathbb{S}^{n_2}(r_2) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, *onde* $n_1+n_2 = n$, $r_1^2+r_2^2 = 1$ *e* $\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 = \beta$ *satisfaz a equação quadrática*

$$n(n_1-1)\beta^2 - 2n_1n_2\beta + n_2(n_2-1) = 0. \tag{3.39}$$

Observação 3.11. *Note que no caso de curvatura escalar constante, podemos assumir sem perda de generalidades que* $s = n(n-1)$.

Para isso foram utilizados os seguintes resultados auxiliares:

Lema 3.24 (Lema 3.7 de [4])**.** *Seja* $r : M^n \to Q_c^{n+1}$ *uma imersão com curvatura escalar constante* s. *Então*

$$L_1S_1 = ||\nabla\alpha||^2 - ||\nabla S_1||^2 + (nc+S_2)||\alpha||^2 - \frac{1}{2}S_1^2S_2 + 3S_1S_3 - S_1^2c. \tag{3.40}$$

Lema 3.25 (Lema 4.1 de [4])**.** *Seja* $r : M^n \to Q_c^{n+1}$ *imersão com curvatura escalar constante* s. *Suponha* $s - n(n-1)c \geq 0$. *Então*

$$||\nabla\alpha||^2 - ||\nabla S_1||^2 \geq 0. \tag{3.41}$$

Teorema 3.26 (Teorema 4 de [35])**.** *Seja* M^n *hipersuperfície isometricamente imersa de* $\mathbb{S}^{n+1}$ *tal que a segunda forma fundamental é covariante constante. Então, a menos de isometrias de* $\mathbb{S}^{n+1}$, M^n *é um subconjunto aberto de um toro da forma* $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)\times\mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, *com* $r_1^2+r_2^2 = 1$ *e* $n_1+n_2 = n$.

Lema 3.27. *Um toro de Clifford* $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)\times\mathbb{S}^{n_2}(r_2) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ *tem curvatura escalar constante* $s = n(n-1)$ *(equivalentemente* $S_2 = 0$*) se, e somente se,* $\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 = \beta$ *satisfaz a equação*

$$n_1(n_1-1)\beta^2 - 2n_1n_2\beta + n_2(n_2-1) = 0. \tag{3.42}$$

Demonstração. Para uma demonstração do resultado ver [5, p.5-6]. □

Vamos analisar o operador linearizado L_1 para obter resultado semelhante ao teorema 3.23 para pontos críticos de Φ. Primeiramente vamos refinar o teorema 3.17 para o caso em que $S_2 = 0$.

Proposição 3.28. *Seja M^n um toro de Clifford isometricamente imerso em $\mathbb{S}^{n+1}$ tal que $S_2 = 0$. Se M é ponto crítico de Φ, então*

$$M = \mathbb{S}^2(r_1) \times \mathbb{S}^2(r_2) \subset \mathbb{S}^5,$$

onde

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{3+\sqrt{3}}} \quad e \quad r_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}, \quad ou \quad r_1 = \sqrt{\frac{1}{3-\sqrt{3}}} \quad e \quad r_2 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}.$$

Demonstração. Pelo teorema 3.17, temos que $n_1 = n_2 = 2$ ou $\beta = \dfrac{n_2 - 2}{n_1 - 2}$, $n_1, n_2 \neq 2$. Se $n_1 = n_2 = 2$, substituindo em (3.42) temos $\beta^2 - 4\beta + 1 = 0$, e portanto $\beta = 2 \pm \sqrt{3}$. Nesse caso, como $r_1^2 + r_2^2 = 1$, segue que

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{3+\sqrt{3}}} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}, \quad ou \quad r_1 = \sqrt{\frac{1}{3-\sqrt{3}}} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}.$$

Se $\beta = \dfrac{n_2 - 2}{n_1 - 2}$, substituindo em (3.42) temos

$$n_1(n_1-1)(2-n_2)^2 - 2n_1n_2(2-n_2)(2-n_1) + n_2(n_2-1)(2-n_1)^2 = 0. \tag{3.43}$$

Simplificando e usando que $n_1 + n_2 = n$ obtemos

$$n_1 n_2 = \frac{4n(n-1)}{n+8}.$$

Portanto, caso existam, n_1 e n_2 são raízes inteiras positivas da equação

$$(n+8)x^2 - n(n+8)x + 4n(n-1) = 0, \tag{3.44}$$

diferentes de 2. Mas as raízes dessa equação são

$$r = \frac{n}{2} \pm \frac{\sqrt{n^2(n+8)^2 - 16n(n-1)(n+8)}}{2(n+8)}.$$

Em particular, a menor das raízes é

$$r(n) = \frac{n}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16(n-1)}{n(n+8)}}\right).$$

Essa função é crescente e $\lim_{n\to+\infty} r(n) = 4$, portanto

$$r(n) < 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como 1 e 3 não são raízes da equação (3.44), temos que não existem n_1 e n_2 inteiros positivos diferentes de 2 satisfazendo (3.43). $\square$

Temos então o seguinte resultado referente ao funcional Φ:

Teorema 3.29. *Seja M^n uma hipersuperfície fechada isometricamente imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$, com curvatura escalar constante $s = n(n-1)$ (equivalentemente $S_2 = 0$). Suponhamos que M é ponto crítico de Φ, e que está orientada de modo que $S_1 \geq 0$. Se $S_1^2 \leq 2n$, então:*

(i) M é totalmente geodésica; ou

(ii) $n = 4$ e $M = \mathbb{S}^2(r_1) \times \mathbb{S}^2(r_2) \subset \mathbb{S}^5$, onde

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{3+\sqrt{3}}} \ \ e \ \ r_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}, \quad ou \quad r_1 = \sqrt{\frac{1}{3-\sqrt{3}}} \ \ e \ \ r_2 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}.$$

Demonstração. Pelo lema 3.40, usando que $S_2 = 0$ temos

$$\begin{aligned} L_1 S_1 &= ||\nabla\alpha||^2 - ||\nabla S_1||^2 + n||\alpha||^2 + 3S_1S_3 - S_1^2 \\ &= ||\nabla\alpha||^2 - ||\nabla S_1||^2 + (n-1)S_1^2 + 3S_1S_3. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Por outro lado, a equação de Euler-Lagrange (3.2) nos dá

$$2(n-1)\Delta S_1 + (n-1)S_1^3 + 6nS_3 = 0,$$

o que implica

$$3S_1S_3 = -\left(\frac{n-1}{n}\right) S_1\Delta S_1 - \left(\frac{n-1}{2n}\right) S_1^4. \tag{3.46}$$

Substituindo (3.46) em (3.45) obtemos

$$L_1S_1 = ||\nabla\alpha||^2 - ||\nabla S_1||^2 + (n-1)S_1^2 - \left(\frac{n-1}{n}\right) S_1\Delta S_1 - \left(\frac{n-1}{2n}\right) S_1^4.$$

Somando $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)||\nabla S_1||^2$ em ambos os lados obtemos

$$L_1S_1+\left(\frac{n-1}{2n}\right)\Delta S_1^2=||\nabla\alpha||^2-||\nabla S_1||^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)||\nabla S_1||^2+(n-1)S_1^2\left(1-\frac{S_1^2}{2n}\right).$$

Como M é fechada, usando (1.34), (1.5) e integrando temos

$$0=\int_M\left[||\nabla\alpha||^2-||\nabla S_1||^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)||\nabla S_1||^2+(n-1)S_1^2\left(1-\frac{S_1^2}{2n}\right)\right]d\mu.$$

Uma vez que, por hipótese, $S_1^2\leq 2n$ e, pelo lema (3.25), $||\nabla\alpha||^2-||\nabla S_1||^2\geq 0$, temos que o lado direito da equação acima é não negativo. Daí concluímos que

$$\left(||\nabla\alpha||^2-||\nabla S_1||^2\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)||\nabla S_1||^2+(n-1)S_1^2\left(1-\frac{S_1^2}{2n}\right)=0.$$

Como todos os termos são não negativos temos

$$||\nabla S_1||^2=0,$$

e portanto S_1 é constante, e

$$S_1^2\left(1-\frac{S_1^2}{2n}\right)=0. \tag{3.47}$$

Como S_1 é constante, (3.47) implica $S_1=0$ (e portanto M é mínima e totalmente geodésica), ou $S_1^2=2n$ em M.

Se $S_1^2=2n$, como $||\nabla\alpha||^2=||\nabla\alpha||^2-||\nabla S_1||^2=0$, temos que a segunda forma fundamental de M é covariante constante. Pelo teorema 3.26, temos que M é parte de um toro de Clifford com $S_2=0$. Nesse caso, o lema 3.27 e a proposição 3.28 implicam que $M=\mathbb{S}^2(r_1)\times\mathbb{S}^2(r_2)\subset\mathbb{S}^5$, onde

$$r_1=\sqrt{\frac{1}{3+\sqrt{3}}}\quad\text{e}\quad r_2=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}},\quad \textit{ou}\quad r_1=\sqrt{\frac{1}{3-\sqrt{3}}}\quad\text{e}\quad r_2=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}.$$

□

Observação 3.12. *Note que uma variedade tal que $S_2=0$ é totalmente geodésica se, e somente se, é totalmente umbílica. De fato, basta lembrar que $||\alpha||^2=S_1^2-2S_2$ e que $||\phi||^2=||\alpha||^2-\dfrac{S_1^2}{n}$.*

3.6.2 O teorema de Alencar-do Carmo

Seja h constante, e para cada valor de $h \geq 0$, considere o polinômio

$$P_h(x) = x^2 + \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} hx - n\left(\frac{h^2}{n^2} + 1\right),$$

e seja B_h o quadrado da raiz positiva da equação $P_h(x) = 0$. Em [3], com o objetivo de estender o teorema de gap de Simons [53, p.94] para hipersuperfícies de curvatura média constante, no caso $p = 1$, Alencar e do Carmo demonstraram o seguinte teorema:

Teorema 3.30 (Teorema 1.2 de [3])**.** *Seja M^n fechada, orientável e $r : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ imersão isométrica com curvatura média constante, orientada de modo que $h \geq 0$. Suponha que $||\phi||^2 \leq B_h$ para todo $p \in M$. Então:*

(a) M é totalmente umbílica, ou $||\phi||^2 \equiv B_h$.

(b) $||\phi||^2 \equiv B_h$ se, e somente se:

(i) $h = 0$ e M^n é localmente um toro de Clifford.

(ii) $h \neq 0$, $n \geq 3$, e M^n é localmente um $H(r)$-toro com $r^2 < \dfrac{n-1}{n}$.

(iii) $h \neq 0$, $n = 2$, e M^n é localmente um $H(r)$-toro para todo $r^2 \neq \dfrac{n-1}{n}$.

Observação 3.13. *A definição do polinômio $P_h(x)$ foi alterada de modo a seguir a notação para a curvatura média presente no resto deste texto.*

Observação 3.14. *Um $H(r)$-toro em $\mathbb{S}^{n+1}$ é obtido considerando as imersões canônicas $\mathbb{S}^1(r_1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^{n-1}(r_2) \subset \mathbb{R}^n$, com $r_1^2 + r_2^2 = 1$, e tomando o produto*

$$\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^{n-1}(r_2) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n;$$

Dessa forma podemos enxergar os $H(r)$-toros como imersos em $\mathbb{S}^{n+1}$, e portanto, um $H(r)$-toro é um toro de Clifford como dado pela definição D.1, onde $n_1 = n - 1$ e $n_2 = 1$.

Observação 3.15. *Em vista da nossa classificação, pela observação 3.8, temos que o único $H(r)$-toro ponto crítico de Φ é o toro*

$$\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\times\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\subset\mathbb{S}^3,$$

que é um toro mínimo, e portanto não satisfaz nem a condição (ii), e nem a condição (iii) do teorema 3.30.

Além disso, pelo teorema 3.17, temos que os toros mínimos que são pontos críticos de Φ são da forma

$$M=\mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\times\mathbb{S}^{n/2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\subset\mathbb{S}^{n+1}, \tag{3.48}$$

onde n é par.

Portanto, se M é um ponto crítico de Φ que satisfaz as condições do teorema de Alencar-do Carmo, então:

(a) M é totalmente umbílica ou;

(b) $||\phi||^2\equiv B_h$, $h=0$, n é par, e M^n é localmente um toro de Clifford da forma (3.48).

Para demonstrar o teorema 3.30, os autores utilizaram o seguinte lema devido a Okumura [46]:

Lema 3.31 (Lema 1 de [3]). *Sejam μ_i, $i=1,\dots,n$ números reais tais que*

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i=0 \quad e \quad \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2=\beta^2,$$

onde $\beta\geq 0$ é uma constante. Então

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3\leq\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3\leq\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3, \tag{3.49}$$

e a igualdade do lado direito (esquerdo) é válida se, e somente se, $(n-1)$ dos μ_i's são não positivos e iguais ($(n-1)$ dos μ_i's são não negativos e iguais).

Vamos usar o lema de Okumura e a equação de Euler-Lagrange (3.5)

$$2(n-1)\Delta h - (n-4)h||\phi||^2 + 2n\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3 = 0,$$

para obter alguns resultados referentes ao funcional Φ. Ao contrário do teorema 3.30, inicialmente não iremos fazer nenhuma suposição sobre a curvatura do espaço ambiente.

Teorema 3.32. *Dado $n \geq 5$, seja M^n hipersuperfície conexa, fechada, isometricamente imersa em Q_c^{n+1} e com curvatura média $h \geq 0$. Se M é ponto crítico de Φ satisfazendo*

$$||\phi|| \leq \frac{(n-4)\sqrt{n(n-1)}}{2n(n-2)}h,$$

então M tem curvatura média constante e

(a) M é totalmente umbílica; ou

(b) $||\phi|| = \dfrac{(n-4)\sqrt{n(n-1)}}{2n(n-2)}h$, e M está contida em uma hipersuperfície de revolução.

Demonstração. Multiplicando a equação (3.5) por h, somando $2(n-1)||\nabla h||^2$, utilizando (3.49) e o fato de que $h \geq 0$ obtemos

$$\begin{aligned} 2(n-1)h\Delta h + 2(n-1)||\nabla h||^2 &= 2(n-1)||\nabla h||^2 + (n-4)h^2||\phi||^2 - 2nh\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3 \\ &\geq 2(n-1)||\nabla h||^2 + (n-4)h^2||\phi||^2 - \frac{2n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}h||\phi||^3, \end{aligned} \tag{3.50}$$

Como M é fechada, integrando e utilizando a 1ª Identidade de Green (1.5), temos que

$$0 \geq \int_M 2(n-1)||\nabla h||^2 d\mu + \int_M h||\phi||^2\left((n-4)h - \frac{2n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}||\phi||\right)d\mu. \tag{3.51}$$

Como por hipótese ambos os termos da desigualdade acima são não negativos temos que

$$||\nabla h|| = 0. \tag{3.52}$$

Como M é conexa, segue que h é constante em M. Se $h = 0$, então M é totalmente umbílica. Se $h > 0$ o segundo termo da desigualdade (3.51) nos fornece:

$$||\phi||^2 \left((n-4)h - \frac{2n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}||\phi|| \right) = 0.$$

Se existe $p \in M$ tal que $||\phi||(p) \neq 0$, então

$$||\phi||(p) = \frac{(n-4)\sqrt{n(n-1)}}{2n(n-2)}h > 0.$$

Assim, a continuidade de $||\phi||$ implica que

$$||\phi|| = 0 \text{ ou } ||\phi|| = \frac{(n-4)\sqrt{n(n-1)}}{2n(n-2)}h.$$

No caso em que $||\phi|| = 0$ temos que M é totalmente umbílica. Se

$$||\phi|| = \frac{(n-4)\sqrt{n(n-1)}}{2n(n-2)}h,$$

então ocorre a igualdade em (3.51) e (3.50). Assim, pelo lema 3.31, temos que M possui $n-1$ curvaturas principais iguais, e pela observação 3.7 temos que M está contida em uma hipersuperfície de revolução. □

Para $c \in \{0, 1\}$, o teorema pode ser simplificado da seguinte forma:

Teorema 3.33. *Dado $n \geq 5$, seja M^n hipersuperfície conexa, fechada, isometricamente imersa em Q_c^{n+1}, com $c \in \{0,1\}$, e curvatura média $h \geq 0$. Se M é ponto crítico de Φ satisfazendo*

$$||\phi|| \leq \frac{(n-4)\sqrt{n(n-1)}}{2n(n-2)}h,$$

então M é totalmente umbílica.

Demonstração. Pelo teorema anterior temos que M tem curvatura média constante e

(i) M é totalmente umbílica; ou

(ii) $||\phi|| = \dfrac{(n-4)\sqrt{n(n-1)}}{2n(n-2)}h$, e M está contida em uma hipersuperfície de revolução.

Se M tem curvatura média constante e está contida em uma hipersuperfície de revolução, para $c = 1$, temos que M está contida em um $H(r)$-toro. Mas pela observação 3.8, o único $H(r)$-toro ponto crítico de Φ é o toro mínimo

$$\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \subset \mathbb{S}^3,$$

que não satisfaz $n \geq 5$.

Para $c = 0$, pelo corolário 3.13 temos que M está contida em uma esfera Euclidiana de dimensão n, o que implica $||\phi|| = 0$, e M totalmente umbílica. □

Como último resultado, para $n = 3$, temos versões similares dos teoremas 3.32 e 3.33:

Teorema 3.34. *Seja M^3 hipersuperfície conexa, fechada, isometricamente imersa em Q_c^4 e com curvatura média $h \geq 0$. Se M é ponto crítico de Φ satisfazendo*

$$||\phi|| \leq \frac{1}{\sqrt{6}}h,$$

então M tem curvatura média constante e

(a) M é totalmente umbílica; ou

(b) $||\phi|| = \dfrac{1}{\sqrt{6}}h$, e M está contida em uma hipersuperfície de revolução.

Demonstração. Usando a equação (3.5) para $n = 3$ e (3.49) obtemos

$$4\Delta h = -h||\phi||^2 - 6\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3 \leq ||\phi||^2\left(-h + \sqrt{6}||\phi||\right) \leq 0. \tag{3.53}$$

Como M é fechada e $\Delta h \leq 0$, pelo princípio do máximo de Hopf temos que h é constante em M, e portanto

$$|\phi||^2\left(-h + \sqrt{6}||\phi||\right) = 0. \tag{3.54}$$

Argumentando por continuidade como na prova do teorema 3.32 obtemos

$$||\phi|| = 0, \text{ ou } ||\phi|| = \frac{1}{\sqrt{6}}h.$$

No caso em que $||\phi|| = 0$ temos que M é totalmente umbílica. Se

$$||\phi|| = \frac{1}{\sqrt{6}}h,$$

então ocorre a igualdade (3.53). Assim, utilizando o lema 3.31 para $n = 3$, temos que M possui 2 curvaturas principais iguais, e pela observação 3.7 temos que M está contida em uma hipersuperfície de revolução. □

Para $c \in \{0, 1\}$ o teorema 3.34 pode ser simplificado de maneira análoga ao teorema 3.32.

Teorema 3.35. *Seja M^3 hipersuperfície conexa, fechada, isometricamente imersa em Q_c^4, com $c \in \{0, 1\}$ e curvatura média $h \geq 0$. Se M é ponto crítico de Φ satisfazendo*

$$||\phi|| \leq \frac{1}{\sqrt{6}}h,$$

então M é totalmente umbílica.

Demonstração. Pelo teorema anterior temos que M tem curvatura média constante e

(i) M é totalmente umbílica; ou

(ii) $||\phi|| = \frac{1}{\sqrt{6}}h$, e M está contida em uma hipersuperfície de revolução.

Se M tem curvatura média constante e está contida em uma hipersuperfície de revolução, para $c = 1$, temos que M está contida em um $H(r)$-toro. Mas pela observação 3.8, o único $H(r)$-toro ponto crítico de Φ é o toro mínimo

$$\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \subset \mathbb{S}^3,$$

que não satisfaz $n = 3$.

Para $c = 0$, pelo corolário 3.13 temos que M está contida em uma esfera Euclidiana de dimensão 3, o que implica $||\phi|| = 0$, e M totalmente umbílica. $\square$

Apêndices

APÊNDICE A – Polinômios simétricos e tensores de Newton

Nesse apêndice descreveremos algumas propriedades básicas dos polinômios simétricos e dos tensores de Newton que são importantes no estudo das r-curvaturas médias.

Definição A.1. *Seja $K[x_1, \ldots, x_n]$ um anel comutativo. Um polinômio $P(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ é dito um **polinômio simétrico** quando, para toda permutação σ dos índices $1, 2, \ldots, n$, temos*

$$P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = P(x_1, \ldots, x_n).$$

Definição A.2. *Dadas as variáveis $x_1, \ldots, x_n$, definimos os **polinômios simétricos elementares** $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$ pelas fórmulas*

$$\begin{aligned}
&\sigma_0 = 1,\\
&\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n,\\
&\vdots\\
&\sigma_r = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_r},\\
&\vdots\\
&\sigma_n = x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.
\end{aligned}$$

Teorema A.3. *(Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos) Todo polinômio simétrico $K[x_1, \ldots, x_n]$ pode ser escrito unicamente como um polinômio nos polinômios simétricos elementares $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.*

Demonstração. Ver [1, p.347]. □

Definição A.4. *Para $k \geq 1$, definimos a k-ésima soma de potências nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ por*

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k = x_1^k + \ldots + x_n^k.$$

É imediato verificar que p_k são polinômios simétricos para todo $k \geq 1$. Logo, pelo Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos, p_k admite representação polinomial nos polinômios simétricos elementares para todo k. Para obter essa representação usamos as conhecidas **identidades de Newton** [64]:

$$k\sigma_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sigma_{k-i}(x_1,\ldots,x_n)p_i(x_1,\ldots,x_n),$$

se $n \geq 1$ e $n \geq k \geq 1$, e

$$0 = \sum_{i=k-n}^{n}(-1)^{i-1}\sigma_{k-i}(x_1,\ldots,x_n)p_i(x_1,\ldots,x_n),$$

se $k > n$. Usando a recursividade podemos inverter as fórmulas para escrever os p_k em função dos polinômios elementares simétricos σ_n. Em geral temos

$$p_k(x_1,\ldots,x_n) = (-1)^{k-1}k\sigma_k(x_1,\ldots,x_k)+\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-1+i}\sigma_{k-1}(x_1,\ldots,x_n)p_i(x_1,\ldots,x_n),$$

para $n \geq 1$ e $n \geq k \geq 1$, e

$$p_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=k-n}^{k-1}(-1)^{k-1+i}\sigma_{k-i}(x_1,\ldots,x_n)p_i(x_1,\ldots,x_{n-1}),$$

se $k \geq n$.

Em particular, para $n \geq 3$ temos

$$\begin{aligned}
p_0 &= 1,\\
p_1 &= \sigma_1,\\
p_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2,\\
p_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,\\
p_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4.
\end{aligned}$$

Demonstração da proposição 1.26. Primeiramente vamos mostrar que P_r e A comutam. Faremos isso por indução. Como $P_0 = Id$ é imediato que o resultado é válido para P_0. Suponhamos que $AP_{r-1} = P_{r-1}A$. Temos então

$$\begin{aligned}
AP_r &= A(S_rId - AP_{r-1}) = A(S_rId - P_{r-1}A)\\
&= S_rA - AP_{r-1}A = (S_rId - AP_{r-1})A\\
&= P_rA.
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que P_r é auto-adjunta. Novamente usaremos o método de indução. Como $P_0 = Id$ é imediato que o resultado é válido para P_0. Suponhamos que P_{r-1} seja auto-adjunta, ou seja,

$$\langle P_{r-1}X, Y\rangle = \langle X, P_{r-1}Y\rangle \quad X, Y \in TM.$$

Então

$$\begin{aligned}\langle P_rX, Y\rangle &= \langle (S_rId - AP_{r-1})X, Y\rangle = \langle S_rIdX, Y\rangle - \langle AP_{r-1}X, Y\rangle \\ &= \langle X, S_rIdY\rangle - \langle P_{r-1}X, AY\rangle = \langle X, S_rIdY\rangle - \langle X, P_{r-1}AY\rangle \\ &= \langle X, (S_r - P_{r-1})Y\rangle = \langle X, P_rY\rangle.\end{aligned}$$

□

Demonstração da proposição 1.27. Dado k_i, temos que S_r pode ser dividido entre termos que não contem k_i e termos que contém k_i. Então temos

$$S_r = B + k_iC.$$

B é exatamente $S_r(A_i)$. C é composto pelo produto de $r-1$ curvaturas com exceção de k_i, logo $C = S_{r-1}(A_i)$. Portanto

$$S_r = S_r(A_i) + k_iS_{r-1}(A_i),$$

e o resultado é imediato. □

Demonstração da proposição 1.28. Faremos a demonstração por indução. De imediato temos que $P_0(e_i) = Ide_i = e_i$ e $S_0(A_i)e_i = e_i$. Suponhamos que $P_{r-1}(e_i) = S_{r-1}(A_i)e_i$. Temos então

$$\begin{aligned}P_r(e_i) = S_re_i = AP_{r-1}e_i &= S_re_i - A(S_r(A_i)e_i) = S_re_i - S_{r-1}(A_i)A(e_i) \\ &= S_re_i - S_{r-1}(A_i)k_ie_i = (S_r - S_{r-1}(A_i)k_i)e_i \\ &= S_r(A_i)e_i.\end{aligned}$$

□

Demonstração da proposição 1.29. Temos

(a)

$$\mathrm{tr}(P_r) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle S_r(A_i)e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = (n-r)S_r.$$

(b)

$$\mathrm{tr}(P_{r+1}) = \mathrm{tr}(S_{r+1}Id - AP_r) = \mathrm{tr}(S_{r+1}Id) - \mathrm{tr}(AP_r),$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}(AP_r) = \mathrm{tr}(S_{r+1}Id) - \mathrm{tr}(P_{r+1}) = nS_{r+1} - (n-(r+1))S_{r+1} = (r+1)S_{r+1}.$$

(c)

$$tr(AP_{r+1}) = \mathrm{tr}\,(A(S_{r+1}Id - AP_r) = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}.$$

$\square$

APÊNDICE B – Cálculos variacionais

Demonstração do lema 2.1. Salvo menção em contrário vamos usar a notação de Einstein. Dada uma base $\{r_i\}$ base do espaço tangente em cada ponto $p \in M_t$, sem perda de generalidade, suponhamos que $\langle r_i, r_j \rangle = 0$ em M_t. Como $\xi \perp r_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$, temos que $\langle \xi, r_j \rangle = 0$. Logo,

$$0 = (\langle \xi, r_j \rangle)_i = \langle \xi, r_{ij} \rangle + \langle \xi_i, r_j \rangle,$$

o que implica

$$\langle \xi_i, r_j \rangle = -\langle \xi, r_{ij} \rangle.$$

Podemos então calcular a variação da métrica g como se segue:

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} = \frac{d}{dt} \langle r_i, r_j \rangle \bigg|_{t=0} &= 2\langle (\delta r)_i, r_j \rangle = 2\langle u_i \xi + u \xi_i, r_j \rangle \\ &= 2u_i \langle \xi, r_j \rangle + 2u \langle \xi_i, r_j \rangle = -2u \langle \xi, r_{ij} \rangle = -2u\alpha_{ij}. \end{aligned}$$

Para calcular a variação da inversa da métrica lembremos que $g^{il} g_{lk} = \delta^i_k$. Derivando obtemos

$$\begin{aligned} 0 = (\delta g^{il}) g_{lk} + g^{il} (\delta g_{lk}) &= (\delta g^{il}) g_{lk} - 2u g^{il} \alpha_{lk}, \\ \Rightarrow (\delta g^{il}) g_{lk} &= 2u g^{il} \alpha_{lk}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\delta g^{ij} = 2u g^{il} g^{jk} \alpha_{lk} = 2u \alpha^{ij}.$$

Para calcular a variação do elemento de volume faremos uso da **fórmula de Jacobi** [63, p.8]:

$$\frac{d}{dt} \det A = \det A \operatorname{tr} \left(A^{-1} \frac{dA}{dt} \right).$$

Seja $g = g_i^j$ a matriz de representação da métrica. Temos então

$$\frac{d}{dt} \det(g) = \det(g) \operatorname{tr} \left(g^{-1} \frac{dg}{dt} \right) = \det(g)(-2u g^{ij} \alpha_{ij}) = -S_1 u \det(g). \tag{B.1}$$

A variação do funcional volume então é dada por

$$\begin{aligned}\delta V &= \delta\int_M d\mu = \int_U \delta\sqrt{\det(g)}dA = \int_U \frac{1}{2\sqrt{\det(g)}}\delta(\det(g))dA \qquad \text{(B.2)}\\ &= -\int_U S_1\sqrt{\det(g)}dA = \int_M -S_1 u d\mu.\end{aligned}$$

Usando (B.2) temos que

$$\delta(d\mu) = d(\delta V) = d\int_M -S_1 u d\mu = -S_1 u d\mu.$$

Agora vamos calcular a derivada dos coeficientes da segunda forma fundamenta. Por definição

$$\delta(\alpha_{ij}) = \delta\langle\xi, r_{ij}\rangle = \langle\delta\xi, r_{ij}\rangle + \langle\xi, \delta r_{ij}\rangle. \qquad \text{(B.3)}$$

Vamos calcular os dois termos em separado. Como $\langle\xi,\xi\rangle = 1$, temos que

$$0 = \frac{\partial_t\langle\xi,\xi\rangle}{2} = \langle\xi,\delta\xi\rangle. \qquad \text{(B.4)}$$

Em notação tensorial a equação de Gauss (1.13) pode ser escrita como

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^k r_k + \alpha_{ij}\xi - g_{ij}cr.$$

Além disso, usando coordenadas normais os símbolos de Christofell se anulam, logo

$$\begin{aligned}\langle\delta\xi, r_{ij}\rangle &= \left\langle\delta\xi, \left(\Gamma_{ij}^k r_k + \alpha_{ij}\xi - g_{ij}cr\right)\right\rangle = \langle\delta\xi, -g_{ij}cr\rangle\\ &= -cg_{ij}\langle\delta\xi, r\rangle = cg_{ij}\langle\xi,\delta r\rangle = cg_{ij}u. \qquad \text{(B.5)}\end{aligned}$$

Pela fórmula de Weingarten (1.10), temos

$$\begin{aligned}\langle\xi,\delta r_{ij}\rangle &= \langle\xi,(u\xi)_{ij}\rangle = \langle\xi, u_{ij}\xi + u_i\xi_j + u_j\xi_i + u\xi_{ij}\rangle\\ &= u_{ij} + u\langle\xi,\xi_{ij}\rangle = u_{ij} - u\langle\alpha_i^l r_l, \alpha_j^k r_k\rangle \qquad \text{(B.6)}\\ &= u_{ij} - u\alpha_{il}\alpha_j^l.\end{aligned}$$

Portanto, usando (B.3), (B.5) e (B.6), temos que a variação da segunda forma fundamental é dada por

$$\delta(\alpha_{ij}) = u_{ij} - u\alpha_{il}\alpha_j^l + cg_{ij}u. \qquad \text{(B.7)}$$

Assim, por (2.1) e (B.7) temos

$$\begin{aligned}
\delta||a||^2 &= \delta(\alpha^{ij}\alpha_{ij}) = \delta(g^{ik}g^{jl}\alpha_{kl}\alpha_{ij}) = 2u\alpha^{ik}g^{jl}\alpha_{kl}\alpha_{ij} + 2u\alpha^{jl}g^{ik}\alpha_{kl}\alpha_{ij}\\
&+ g^{ik}g^{jl}(u_{kl} - u\alpha_{ks}\alpha^s_l + cg_{kl}u)\alpha_{ij} + g^{ik}g^{jl}\alpha_{kl}(u_{ij} - u\alpha_{is}\alpha^s_j + cg_{ij}u)\\
&= 2u\alpha^{ik}\alpha^j_k\alpha_{ij} + 2cg^{ij}\alpha_{ij}u + 2\alpha^{ij}u_{kl}\\
&= 2(S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 + cS_1)u + 2\langle\alpha, \mathrm{Hess}\, u\rangle,
\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos

$$\alpha^{ik}\alpha^j_k\alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{n} k_i^3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3. \tag{B.8}$$

□

Demonstração do lema 2.4. Temos

$$\delta(\Delta f) = \delta\left(g^{ij}(f_{ij} - \Gamma^k_{ij}f_k)\right) = \delta(g^{ij}f_{ij}) - \delta(g^{ij}\Gamma^k_{ij}f_k). \tag{B.9}$$

Escrevendo $\delta f = \dot f$, temos

$$\begin{aligned}
\delta(g^{ij}f_{ij}) &= (\delta g^{ij})f_{ij} + g^{ij}(\delta f_{ij})\\
&= 2u\alpha^{ij}f_{ij} + g^{ij}\nabla_i\nabla_j\dot f\\
&= 2u\langle\alpha, \mathrm{Hess}\, f\rangle + \Delta\dot f.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Para o segundo termo vamos calcular a variação dos símbolos de Christofell definidos em (1.2). Assumindo um sistema de coordenadas normais temos

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\delta g^{kl}\right)(g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) + \frac{1}{2}g^{kl}\left((\delta g_{jl})_i + (\delta g_{il})_j - (\delta g_{ij})_l\right)\\
&= u\alpha^{kl}(g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) - ug^{kl}(\alpha_{jl,i} + \alpha_{il,j} - \alpha_{ij,l})\\
&\quad - g^{kl}(u_i\alpha_{jl} + u_j\alpha_{il} - u_l\alpha_{ij})\\
&= -ug^{kl}(\alpha_{jl,i} + \alpha_{il,j} - \alpha_{ij,l}) - g^{kl}(u_i\alpha_{jl} + u_j\alpha_{il} - u_l\alpha_{ij}).
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\delta(g^{ij}\Gamma^k_{ij}f_k) &= \delta(g^{ij})\Gamma^k_{ij}f_k + g^{ij}(\delta\Gamma^k_{ij})f_k + g^{ij}\Gamma^k_{ij}\delta(f_k) = 0 + g^{ij}(\delta\Gamma^k_{ij})f_k + 0\\
&= -g^{ij}(ug^{kl}(\alpha_{jl,i} + \alpha_{il,j} - \alpha_{ij,l}))f_k - g^{ij}g^{kl}(u_i\alpha_{jl} + u_j\alpha_{il} - u_l\alpha_{ij})f_k\\
&= -2ug^{ij}g^{kl}\alpha_{jl,i}f_k + ug^{ij}g^{kl}\alpha_{ij,l}f_k - 2g^{ij}g^{kl}u_i\alpha_{jl}f_k + g^{ij}g^{kl}u_l\alpha_{ij}f_k.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Como

$$-2ug^{ij}g^{kl}\alpha_{jl,i} + ug^{ij}g^{kl}\alpha_{ij,l}f_k = -ug^{ij}g^{kl}\alpha_{ij,l}f_k,$$

temos

$$\delta(g^{ij}\Gamma^k_{ij}f_k) = -ug^{ij}g^{kl}\alpha_{ij,l}f_k - 2g^{ij}g^{kl}u_i\alpha_{jl}f_k + g^{ij}g^{kl}u_l\alpha_{ij}f_k. \tag{B.12}$$

Pela equação de Codazzi (1.14)

$$\alpha_{ij,k} - \alpha_{ik,j} = \nabla_k\alpha_{ij} - \nabla_j\alpha_{ik} = \widetilde{R}_{ijkl}\xi^l = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il})\xi^l,$$

onde ξ^l são as componentes do vetor unitário normal ξ. Daí segue que

$$\begin{aligned} ug^{ij}g^{kl}\nabla_j\alpha_{il}f_k &= u(\nabla^i\alpha_i^j)f_j = u(\nabla^j\alpha_i^i + \widetilde{R}^{ij}{}_{li}\xi^l)f_j = uS_1^jf_j - uf_j\widetilde{R}^j_l\xi^l \\ &= uS_1^jf_j - ucf_jg^j_l\xi^l = u\langle\nabla S_1, \nabla f\rangle - uc\langle\nabla f, \xi\rangle \\ &= u\langle\nabla S_1, \nabla f\rangle, \end{aligned}$$

pois $\nabla f \perp \xi$. Além disso

$$S_{1l} = \nabla_l(g^{ij}\alpha_{ij}) = (\nabla_l g^{ij})\alpha_{ij} + g^{ij}(\nabla_l\alpha_{ij}) = 0 + g^{ij}\nabla_l\alpha_{ij} = g^{ij}\alpha_{ij,l},$$

pois estamos em um sistema de coordenadas normais. Logo, (B.12) é tal que

$$\begin{aligned} \delta(g^{ij}\Gamma^k_{ij}f_k) &= -ug^{ij}g^{kl}\alpha_{ij,l}f_k - 2g^{ij}g^{kl}u_i\alpha_{jl}f_k + g^{ij}g^{kl}u_l\alpha_{ij}f_k \\ &= -u\langle\nabla S_1, \nabla f\rangle - 2\alpha(\nabla u, \nabla f) + S_1\langle\nabla u, \nabla f\rangle. \end{aligned} \tag{B.13}$$

Por (B.10) e (B.13) temos que (B.9) é dado por

$$\delta(\Delta f) = \Delta\dot{f} + 2u\langle\alpha, \operatorname{Hess} f\rangle + u\langle\nabla S_1, \nabla f\rangle + 2\alpha(\nabla u, \nabla f) - S_1\langle\nabla u, \nabla f\rangle.$$

Para calcular a variação de $\langle\alpha, \operatorname{Hess} f\rangle$ primeiro observemos que

$$\nabla_l||\alpha||^2 = \nabla_l(\alpha^{ij}\alpha_{ij}) = (\nabla_l\alpha^{ij})\alpha_{ij} + \alpha^{ij}\nabla_l(\alpha_{ij}) = 2\alpha^{ij}(\nabla_l\alpha_{ij}), \tag{B.14}$$

pois $\alpha^{ij} = g^{ik}g^{jl}\alpha_{ij}$ e $\nabla_l g^{ij} = 0$ em coordenadas normais. Além disso, pela equação de Codazzi (1.14)

$$\begin{aligned} \alpha^{ij}(\nabla_i\alpha_{jl})f^l &= \alpha^{ij}\nabla_i(\alpha_{lj})f^l = \alpha^{ij}(\nabla_l\alpha_{ij} - R_{iljk}\xi^k)f^l \\ &= \frac{1}{2}\langle\nabla||\alpha||^2, \nabla f\rangle - S_1c\langle\xi, \nabla u\rangle - c\alpha(\xi, \nabla f) = \frac{1}{2}\langle\nabla||\alpha||^2, \nabla f\rangle, \end{aligned} \tag{B.15}$$

pois $\xi \perp \nabla f$.

Analogamente a (B.11) temos:

$$\begin{aligned}
-\delta(\alpha^{ij}\Gamma^k_{ij}f_k &= -\delta(\alpha^{ij})\Gamma^k_{ij}f_k - \alpha^{ij}(\delta\Gamma^k_{ij})f_k - \alpha^{ij}\Gamma^k_{ij}\delta(f_k) = 0 - \alpha^{ij}(\delta\Gamma^k_{ij})f_k + 0 \\
&= \alpha^{ij}(ug^{kl}(\alpha_{jl,i} + \alpha_{il,j} - \alpha_{ij,l}))f_k + \alpha^{ij}g^{kl}(u_i\alpha_{jl} + u_j\alpha_{il} - u_l\alpha_{ij})f_k \\
&= 2u\alpha^{ij}g^{kl}\alpha_{jl,i}f_k - u\alpha^{ij}g^{kl}\alpha_{ij,l}f_k + 2\alpha^{ij}g^{kl}u_i\alpha_{jl}f_k - \alpha^{ij}g^{kl}u_l\alpha_{ij}f_k.
\end{aligned}$$

Por (B.14) e (B.15) temos que

- $2u\alpha^{ij}g^{kl}\alpha_{jl,i}f_k = \langle\nabla||\alpha||^2, \nabla f\rangle$;
- $\alpha^{ij}g^{kl}\alpha_{ij,l}f_k = \frac{1}{2}\langle\nabla||\alpha||^2, \nabla f\rangle$;
- $2\alpha^{ij}g^{kl}u_i\alpha_{jl}f_k = 2\alpha^2(\nabla u, \nabla f)$;
- $\alpha^{ij}g^{kl}u_l\alpha_{ij}f_k = ||\alpha||^2\langle\nabla u, \nabla f\rangle$.

Logo

$$-\alpha^{ij}\delta(\Gamma^k_{ij})f_k = 2\alpha^2(\nabla u, \nabla f) + \frac{1}{2}\langle\nabla||\alpha||^2, \nabla f\rangle - ||\alpha||^2\langle\nabla u, \nabla f\rangle.$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\delta\langle\alpha, \mathrm{Hess}\, f\rangle &= \delta(g^{il}g^{jk}\alpha_{kl}(f_{ij} - \Gamma^k_{ij}f_k)) \\
&= 4u\alpha^{kj}\alpha^i_k f_{ij} + g^{il}g^{jk}(\nabla_k\nabla_l u - u\alpha^s_k\alpha_{sl} + g_{kl}uc)f_{ij} + \alpha^{ij}\dot{f}_{ij} \\
&\quad - \alpha^{ij}(\delta\Gamma^k_{ij})f_k \\
&= \langle\alpha, \mathrm{Hess}\, \dot{f}\rangle + \langle\mathrm{Hess}\, u, \mathrm{Hess}\, f\rangle + 3u\langle\alpha^2, \mathrm{Hess}\, f\rangle \\
&\quad + uc\Delta f + 2\alpha^2(\nabla u, \nabla f) + \frac{1}{2}u\langle\nabla||\alpha||^2, \nabla f\rangle - ||\alpha||^2\langle\nabla u, \nabla f\rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Demonstração do lema 2.7. Pela fórmula de Gauss (1.9) e usando (B.4) temos

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha_{ij}) &= \delta\langle \alpha_{ij}\xi, \xi\rangle \\
&= \delta\langle \widetilde{\nabla}_{r_i} r_j - \nabla_{r_i} r_j, \xi\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{\nabla}_{r_i} r_j - \nabla_{r_i} r_j, \delta\xi\right\rangle + \langle \delta\left(\widetilde{\nabla}_{r_i} r_j - \nabla_{r_i} r_j\right), \xi\right\rangle \\
&= \left\langle \delta\left(\widetilde{\nabla}_{r_i} r_j\right), \xi\right\rangle - \left\langle \delta\left(\nabla_{r_i} r_j\right), \xi\right\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{\nabla}_{u\xi}\widetilde{\nabla}_{r_i} r_j, \xi\right\rangle - \left\langle \delta\left(\nabla_{r_i} r_j\right), \xi\right\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{\nabla}_{r_i}\widetilde{\nabla}_{r_j}(u\xi) - \widetilde{R}(u\xi, r_i) r_j, \xi\right\rangle - \delta\left\langle \nabla_{r_i} r_j, \xi\right\rangle + \left\langle \nabla_{r_i} r_j, \delta\xi\right\rangle,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a definição da curvatura Riemanniana (1.3). Como $\langle \xi, \xi\rangle = 1$ temos $\langle \xi_i, \xi\rangle = 0$. Além disso, usando a fórmula de simetria (1.17) temos

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha_{ij}) &= \left\langle u_{ij}\xi + u_j\xi_i + u_i\xi_j + u\xi_{ij} + u\widetilde{R}(r_i, \xi) r_j, \xi\right\rangle \\
&= u_{ij} - u\langle \xi_i, \xi_j\rangle + u\langle \widetilde{R}(r_i, \xi) r_j, \xi\rangle \\
&= u_{ij} - u\langle \alpha_i^l r_l, \alpha_j^k r_k\rangle + u\langle \widetilde{R}(r_i, \xi) r_j, \xi\rangle \\
&= u_{ij} - u\alpha_{il}\alpha_j^l + u\widetilde{R}_{i\xi j}^{\xi}. \qquad \text{(B.16)}
\end{aligned}$$

Usando (2.1) e (B.16) temos

$$\begin{aligned}
\delta||a||^2 = \delta(\alpha^{ij}\alpha_{ij}) &= \delta(g^{ik}g^{jl}\alpha_{kl}\alpha_{ij}) = 2u\alpha^{ik}g^{jl}\alpha_{kl}\alpha_{ij} + 2u\alpha^{jl}g^{ik}\alpha_{kl}\alpha_{ij} \\
&\quad + g^{ik}g^{jl}(u_{kl} - u\alpha_{ks}\alpha_l^s + u\widetilde{R}_{k\xi l\xi})\alpha_{ij} + g^{ik}g^{jl}\alpha_{kl}(u_{ij} - u\alpha_{is}\alpha_j^s + u\widetilde{R}_{i\xi j\xi}) \\
&= 2u\alpha^{ik}\alpha_k^j\alpha_{ij} - 2u\alpha^{ij}\widetilde{R}_{i\xi j\xi} + 2\alpha^{ij}u_{kl} \\
&= 2(S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 + \alpha^{ij}\widetilde{R}_{i\xi j\xi})u + 2\langle \alpha, \operatorname{Hess} u\rangle,
\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos

$$\alpha^{ik}\alpha_k^j\alpha_{ij} = \sum_{i=1}^n k_i^3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3.$$

□

APÊNDICE C – A segunda forma fundamental sem traço

Afirmação C.1. $||\phi||^2 = ||\alpha||^2 - \dfrac{||H||^2}{n}$.

Demonstração. Com efeito, o produto interno de $T, G : TM \times TM \to TM^\perp$ é dado por

$$\langle T, G\rangle = g^{ij}g^{kl}\langle T(\partial_i, \partial_k), G(\partial_j, \partial_l)\rangle.$$

Assim

$$\begin{aligned} ||\phi||^2 &= g^{ij}g^{kl}\langle \phi(\partial_i, \partial_k), \phi(\partial_j, \partial_l)\rangle \\ &= g^{ij}g^{kl}\Big\langle \alpha_{ik} - g_{ik}\frac{H}{n}, \alpha_{jl} - g_{jl}\frac{H}{n}\Big\rangle \\ &= ||\alpha||^2 - \frac{||H||^2}{n}, \end{aligned}$$

uma vez que $g^{ij}\alpha_{ij} = H$. □

Afirmação C.2. $\operatorname{Tr}\phi = 0$.

Demonstração. De fato,

$$\operatorname{Tr}\phi = \operatorname{Tr}\left(\alpha - \frac{1}{n}HId\right) = \operatorname{Tr}(\alpha) - \frac{H}{n} = 0,$$

onde Id é a matriz identidade. □

Afirmação C.3.

$$n||\phi||^2 = \sum_{i<j=1}^{n}(k_i - k_j)^2.$$

Demonstração. Primeiramente notemos que

$$n||\phi||^2 = n||\alpha||^2 - ||H||^2 = n\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2,$$

onde $k_1, \ldots, k_n$ são as curvaturas principais de M. Vamos mostrar por indução que

$$\sum_{i<j=1}^{n} (k_i - k_j)^2 = n\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2. \tag{C.1}$$

Para $k = 2$ o resultado é imediato uma vez que

$$(k_1 - k_2)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2) - (k_1 + k_2)^2.$$

Suponhamos (C.1) válido para $(n-1)$, ou seja

$$\sum_{i<j=1}^{n-1} (k_i - k_j)^2 = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i\right)^2.$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j=1}^{n} (k_i - k_j)^2 &= \sum_{i<j=1}^{n-1} (k_i - k_j)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (k_i - k_n)^2 \\
&= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i\right)^2 + (n-1)k_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} k_i^2 - 2k_n\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i\right) \\
&= n\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2\right) + nk_n^2 - \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i\right)^2 + 2k_n\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i\right) + k_n^2\right] \\
&= n\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2
\end{aligned}$$

□

APÊNDICE D – O toro de Clifford

Definição D.1. *Dados dois números inteiros positivos* n_1 *e* n_2 *com* $n_1 + n_2 = n$, *e dois números reais* r_1 *e* r_2 *tais que* $r_1^2 + r_2^2 = 1$, *chamamos a hipersuperfície produto* $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ *das esferas* $\mathbb{S}^{n_i}(r_i) = \{p_i \in \mathbb{R}^{n_i+1}, |p_i| = r_i\}$, $i = 1, 2$, *de* ***Toro de Clifford****.*

Nosso objetivo nessa seção é calcular as curvaturas principais para Toros de Clifford em geral. Seja $p = (p_1, p_2)$ um ponto de $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$. Um vetor unitário normal à M nesse ponto é dado por

$$\xi = \left(-\frac{r_2}{r_1} p_1, \frac{r_1}{r_2} p_2 \right).$$

Afirmação D.1. ξ *é ortogonal à* M *em todo ponto.*

Com efeito, dado $v = (v_1, v_2) \in T_pM$, seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ definida por

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)),$$

parametrização de uma curva em M tal que $\gamma(0) = p = (p_1, p_2)$ e $\gamma'(0) = v = (v_1, v_2)$. Como $\gamma_i \in S^{n_i}(r_i)$ para $i = 1, 2$, temos

$$\langle \gamma_i(t), \gamma_i(t) \rangle = r_i^2, \qquad i = 1, 2.$$

Derivando, obtemos

$$\langle \gamma_i(t), \gamma_i'(t) \rangle = 0,$$

o que implica $\langle p_i, v_i \rangle = 0$ para $i = 1, 2$, e portanto $\xi \perp M$.

Como

$$\xi(\gamma(t)) = \left(-\frac{r_2}{r_1} \gamma_1(t), \frac{r_1}{r_2} \gamma_2(t) \right),$$

isso implica

$$Av = A_\xi v = -\frac{\partial \xi(\gamma(t))}{\partial t} = \left(\frac{r_2}{r_1} \gamma_1'(t), -\frac{r_1}{r_2} \gamma_2'(t) \right).$$

Assim, se $v = (\gamma_1'(0), 0)$ temos $Av = \frac{r_2}{r_1}v$, e portanto $\frac{r_2}{r_1}$ é curvatura principal de M com multiplicidade n_1. Analogamente temos $-\frac{r_1}{r_2}$ é curvatura principal com multiplicidade n_2. Provamos então o seguinte resultado:

Proposição D.2. *Se M é um Toro de Clifford, então M tem curvaturas principais $k_1 = \frac{r_2}{r_1}$ e $k_2 = -\frac{r_1}{r_2}$, com multiplicidades n_1 e n_2 respectivamente.*

Observação D.1. *Se M é um toro de Clifford, então M é uma variedade mínima se, e somente se,*

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Referências

[1] Cox David A., Little John, and Donal Oshea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 4 edition, 2015. Citado na página 105.

[2] Hilário Alencar and A. Gervasio Colares. Integral formulas for the r-mean curvature linearized operator of a hypersurface. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 16:203–220, 01 1998. Citado na página 35.

[3] Hilário Alencar and Manfredo P. do Carmo. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 120:1223–1229, 04 1994. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 98.

[4] Hilário Alencar, Manfredo P. do Carmo, and Antonio G. Colares. Stable hypersurfaces with constant scalar curvature. *Mathematische Zeitschrift*, 213:117–131, 05 1993. Citado na página 93.

[5] Hilário Alencar, Manfredo P. do Carmo, and Walcy Santos. A gap theorem for hypersurfaces with constant scalar curvature one. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 81:101–103, 01 2006. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 93.

[6] Luis Alías, Aldir Brasil, and A. Colares. Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 46:465 – 488, 06 2003. Citado na página 33.

[7] Abdênago A. de Barros. Applications of Bochner formula to minimal submanifold of the sphere. *Journal of Geometry and Physics*, 44(2):196 – 201, 2002. Citado na página 90.

[8] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Edmond Mazet. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1971. Citado na página 92.

[9] Gerhard Blaschke and Gerhard Thomsem. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie III*, volume 29 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, Berlim, 1929. Citado na página 10.

[10] Robert L. Bryant. A duality theorem for Willmore surfaces. *J. Differential Geom.*, 20(1):23–53, 1984. Citado na página 10.

[11] Robert L. Bryant. Surfaces in conformal geometry. In *The Mathematical Heritage of Hermann Weyl*, volume 48 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 227–240. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988. Citado na página 10.

[12] Peter B. Canham. The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell. *Journal of Theoretical Biology*, 26(1):61 – 81, 1970. Citado na página 10.

[13] Riccardo Capovilla. Elastic bending energy: A variational approach. *J. Geom. Symmetry Phys.*, 45:1–45, 2017. Citado na página 10.

[14] Thomas E. Cecil and Patrick J. Ryan. Distance functions and umbilic submanifolds of hyperbolic space. *Nagoya Mathematical Journal*, 74:67–75, 1979. Citado na página 80.

[15] Issac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. ISSN. Elsevier Science, 1984. Citado na página 92.

[16] Bang-Yen Chen. Some conformal invariants of submanifolds and their applications. *Bollettino dell Unione Matematica Italiana*, 10:380–385, 05 1974. Citado na página 13.

[17] Bang-Yen Chen. On the total curvature of immersed manifolds. VI. Submanifolds of finite type and their applications. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 11(3):309–328, 1983. Citado na página 13.

[18] Marcos Dajczer. *Submanifolds and Isometric Immersions*, volume 13 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish, Houston, 1 edition, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 26, 28, 29 e 80.

[19] Manfredo P. do Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários. SBM, Rio de Janeiro, 2 edition, 2005. Citado na página 9.

[20] Manfredo P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 5 edition, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 17, 18, 21, 23, 24, 26, 28 e 30.

[21] Manfredo P. do Carmo. *Formas Diferenciais e Aplicações*. Coleção Fronteiras da Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 1 edition, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

[22] Manfredo P. do Carmo and Marcos Dajczer. Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, 277-2:685–709, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 82.

[23] Maria Fernanda Elbert. Constant positive 2-mean curvature hypersurfaces. *Illinois Journal of Mathematics*, 46:247–267, 2002. Citado na página 31.

[24] Sophie Germain. *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge University Press, 2013. Citado na página 9.

[25] Anthony Gruber. Curvature functionals and p-Willmore energy. *TTU ETD Repository*, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 73.

[26] Anthony Gruber, Magdalena Toda, and Hung Tran. On the variation of curvature functionals in a space form with application to a generalized Willmore energy. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 56, 07 2019. Citado 7 vezes nas páginas 11, 41, 42, 44, 45, 46 e 54.

[27] Zhen Guo. Generalized willmore functionals and related variational problems. *Differential Geometry and its Applications*, 25(5):543 – 551, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 13.

[28] Zhen Guo, Changping Wang, and Haizhong Li. The second variation formula for Willmore submanifolds in sn. *Results in Mathematics*, 40:205–225, 10 2001. Citado na página 13.

[29] S. Gómez-Aíza, Raúl W. Gómez, and Vivianne Marquina. A simplified approach to the brachistochrone problem. *European Journal of Physics*, 27:1091, 07 2006. Citado na página 9.

[30] Reese Harvey and Hebert B. Lawson Jr. Calibrated geometries. *Acta Math.*, 148:47–157, 1982. Citado na página 72.

[31] Wolfgang Helfrich. Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible experiments. *Z. Naturforsch. C*, 28:693–703, 12 1973. Citado na página 10.

[32] Zejun Hu and Haizhong Li. *Willmore submanifolds in a Riemannian manifold*, pages 251–275. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2004. Citado na página 13.

[33] Shyuichi Izumiya, Donghe Pei, and Masatomo Takahashi. Singularities of evolutes of hypersurfaces in hyperbolic space. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 47:131–153, 02 2004. Citado na página 80.

[34] Pushkar Joshi and Carlo Sequin. Energy minimizers for curvature-based surface functionals. *Computer-Aided Design and Applications*, 4, 08 2013. Citado na página 14.

[35] Hebert B. Lawson Jr. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. *Annals of Mathematics*, 89(1):187–197, 1969. Citado na página 93.

[36] John M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts In Mathematics. Springer, New York, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.

[37] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts In Mathematics. Springer, New York, 2 edition, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 25.

[38] Haizhong Li and Luc Vrancken. New examples of Willmore surfaces in sn. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 23:205–225, 01 2003. Citado na página 13.

[39] Elon Lages Lima. *Curso de Análise*, volume 2 of *Projeto Euclides*. IMPA, Rio de Janeiro, 11 edition, 2018. Citado na página 20.

[40] Fernando C. Marques and André Neves. The min-max theory and the Willmore conjecture. *Annals of Mathematics*, 179:683–782, 02 2012. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.

[41] Fernando C. Marques and André Neves. The Willmore conjecture. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 116:201–222, 09 2014. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.

[42] Michio Masujima. *Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics*, chapter 10, pages 353–566. . Wiley-VCH, Weinheim, 2 edition, 2009. Citado na página 9.

[43] Andrea Mondino. The conformal Willmore functional: A perturbative approach. *Journal of Geometric Analysis*, 23, 10 2010. Citado na página 13.

[44] Andrea Mondino and Huy Nguyen. A gap theorem for Willmore tori and an application to the Willmore flow. *Nonlinear Analysis*, 102:220–225, 08 2013. Citado na página 10.

[45] Antonio C. Muniz Neto. *Tópicos de Geometria Diferencial*. Coleção Fronteiras da Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 1 edition, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 90.

[46] Masafumi Okumura. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor. *American Journal of Mathematics*, 96:207–213, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 98.

[47] Thanuja H. Paragoda. Application of the moving frame method to deformed Willmore surfaces in space forms. *Journal of Geometry and Physics*, 128:199–208, 2018. Citado na página 10.

[48] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 3 edition, 2006. Citado na página 24.

[49] Robert C. Reilly. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms. *J. Differential Geom.*, 8(3):465–477, 1973. Citado 4 vezes nas páginas 12, 41, 44 e 62.

[50] Harold Rosenberg. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. SciI. Math*, 117:211–239, 1993. Citado na página 35.

[51] David Siegel. Determining the ratio of the Gaussian curvature and bending elastic moduli of phospholipids from qii phase unit cell dimensions. *Biophysical journal*, 91:608–18, 08 2006. Citado na página 11.

[52] Santiago R. Simanca. Isometric embeddings i: General theory. *Rivista di Matematica della Universita di Parma*, 8:307–343, 01 2017. Citado na página 54.

[53] James Simons. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, 88(1):62–105, 1968. Citado na página 97.

[54] Tsunero Takahashi. Minimal immersions of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 18(4):380–385, 10 1966. Citado na página 90.

[55] Gehard Thomsen. *Über konforme Geometrie I: Grundlagen der konformen Flächentheorie*. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb., 1923. Citado na página 10.

[56] Magdalena Toda and Bhagya Athukorallage. Geometric models for secondary structures in proteins. In *Proceedings of the Sixteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*, pages 282–300, Sofia, Bulgaria, 2015. Avangard Prima. Citado na página 10.

[57] Zhanchun Tu and Zhongcan Ou-Yang. A geometric theory on the elasticity of bio-membranes. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(47):11407–11429, 2004. Citado na página 10.

[58] Kadayam S. Viswanathan and Ragavachariar Parthasarathy. A conformal field theory of extrinsic geometry of 2-d surfaces. *Annals of Physics*, 244(2):241 – 261, 1995. Citado na página 11.

[59] Konrad Voss. Einige differentialgeometrische kongruenzsätze für geschlossene flächen und hyperflächen. *Mathematische Annalen*, 131:180–218, 1956. Citado na página 34.

[60] Guoxin Wei. New examples of Willmore hypersurfaces in a sphere. *Houston J. Math.*, 35(1):81–92, 2009. Citado na página 13.

[61] James H. White. A global invariant of conformal mappings in space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38:162–164, 1973. Citado na página 10.

[62] Thomas J. Willmore. Note on embedded surfaces. *An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat.*, 11B:493–496, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

[63] Yuanlong L. Xin. *Minimal Submanifolds and Related Topics.* Nankai tracts in mathematics. World Scientific, New Jersey, 1 edition, 2003. Citado na página 109.

[64] Doron Zeilberger. A combinatorial proof of Newton's identities. *Discrete Mathematics*, 49:319, 1984. Citado na página 106.

Índice