INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRJ

Um resultado de existência implicada de órbitas de Reeb na esfera tridimensional tight

João Alfredo Pereira Caminada

Rio de Janeiro, Brasil

14 de abril de 2021

Um resultado de existência implicada de órbitas de Reeb na esfera tridimensional tight

João Alfredo Pereira Caminada

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Cesar Javier Niche Mazzeo

Coorientador: Umberto Leone Hryniewicz

Rio de Janeiro, Brasil

14 de abril de 2021

Este trabalho é dedicado à Fernanda,
junto com o resto da minha vida.

CIP - Catalogação na Publicação

CC183r

Caminada, João Alfredo Pereira
Um resultado de existência implicada de órbitas de Reeb na esfera tridimensional tight / João Alfredo Pereira Caminada. -- Rio de Janeiro, 2021.
131 f.

Orientador: Cesar Javier Niche Mazzeo.
Coorientador: Umberto Leone Hryniewicz.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Matemática, 2021.

1. Topologia de Contato. 2. Dinâmica Integrável. I. Mazzeo, Cesar Javier Niche, orient. II. Hryniewicz, Umberto Leone, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Umberto Leone Hryniewicz pela proposição do tema. Agradeço ao corpo docente e demais membros do Instituto de Matemática da Universidade do Rio de Janeiro por terem me auxiliado no meus estudos em geral e na composição deste trabalho em particular. Um agradecimento em especial aos Professores Cesar Javier Niche Mazzeo, Nilson da Costa Bernardes, Felipe Acker e Leonardo Macarini que foram decisivos para o formação matemática.

Resumo

Mostramos que se um campo de Reeb na esfera $\mathbb{S}^3$ tight possui 3 órbitas fechadas geometricamente distintas, K_1, K_2 e $K_{p,q}$, tais que $K1 \cup K2$ formam um link de Hopf e $K_{p,q}$ é um nó toroidal de tipo (p,q) cujo número de enlaçamento com K_1 e K_2 é p e q, respectivamente, então sob certas condições envolvendo (p,q) e os número de rotação de K_1 e K_2, este campo possui infinitas órbitas fechadas geometricamente fechadas.

Palavras-chave: Topologia de Contato, Dinâmica Integrável

Abstract

We show that if a Reeb vector field on the sphere $\mathbb{S}^3$ tight has 3 close geometrically distinct orbits, K_1, K_2 and $K_{p,q}$, such that $K_1 \cup K_2$ forms a Hopf link and $K_{p,q}$ forms a toroidal knot of type (p, q) whose linking number with K_1 and K_2 is p and q, respectively, then under some condition on (p, q) and the rotation numbers of K_1 and K_2, this vector field has infinitely many geometrically distinct closed orbits.

Keywords: Contact Topology, Integrable Dynamics

Sumário

1 Enunciado dos resultados

1.1 Definições básicas

Em todo este trabalho, todas as variedades, funções, fibrados, formas, etc, são assumidos suaves (C^∞) salvo menção contrária.

Sejam M uma variedade e λ uma forma de contato em M. Denotaremos por X_λ o campo de Reeb em M induzido pela forma de contato λ e por ϕ^{X_λ} seu fluxo. Escreveremos $\phi_t^{X_\lambda}(p) = \phi^{X_\lambda}(t,p)$ para todo $(t,p) \in \mathbb{R} \times M$ para o qual o fluxo está definido. Resultados básicos sobre variedades de contato estão coletados no apêndice A. Note que

$$(\phi_t^{X_\lambda})^* \lambda = \lambda \text{ e } d\phi_t^{X_\lambda}(\xi_p) = \xi_{\phi_t^{X_\lambda}(p)}.$$

Definição 1.1.1. Uma órbita de Reeb fechada de X_λ é uma classe de equivalência de pares (x,T), onde $T > 0$ e $x : \mathbb{R} \to M$ é uma função T-periódica satisfazendo que

$$\dot{x} = X_\lambda \circ x,$$

e declaramos que os pares (x_1, T_1) e (x_2, T_2) são equivalentes se $T_1 = T_2$ e as imagens de x_1 e x_2 são iguais. O conjunto destas classes de equivalência será denotado por $\mathscr{P}(M,\lambda)$.

Seja $P = (x,T) \in \mathscr{P}(M,\lambda)$. Dizemos que T é a ação desta órbita e chamamos o conjunto de ações de todas as órbitas fechadas de espectro de ação de λ. Denotamos por $\mathscr{O}(P)$ o conjunto $x([0,T])$ visto como subvariedade mergulhada de M. Dado $k \in \mathbb{N}$, denotamos a órbita fechada (x,kT) por P^k. A órbita $P = (x,T)$ será dita prima se T é o menor período de x. O conjunto de órbitas de Reeb primas será denotado por $\mathscr{P}_{prim}(M,\lambda)$. Dado $T > 0$, definimos também o conjunto

$$\mathscr{P}_{prim}(M,\lambda,T) = \{(x,S) \in \mathscr{P}_{prim}(M,\lambda) \mid S \leq T\}.$$

O número $\nu \in \mathbb{C}$ é dito um multiplicador de Floquet transversal da órbita $P = (x,T)$ se $\nu \in \sigma(d\phi_T^X(x(0)))$, onde $\sigma(d\phi_T^X(x(0))|\xi_{x(0)})$ denota o espectro de $d\phi_T^X(x(0))|\xi_{x(0)}$. A órbita $P = (x,T)$ é dita não-degenerada se 1 não é um multiplicador de Floquet transversal desta órbita. Diremos que a forma de contato λ é não-degenerada se todas as suas órbitas de Reeb fechadas são não-degeneradas.

Diremos que a órbita não-degenerada $P = (x,T)$ é

1. positivamente hiperbólica se $\sigma(d\phi_T^X(x(0))|\xi_{x(0)}) = \{\nu, \nu^{-1}\}$ com $\nu > 1$;

2. negativamente hiperbólica se $\sigma(d\phi_T^X(x(0))|\xi_{x(0)}) = \{\nu, \nu^{-1}\}$ com $\nu < -1$;

3. elíptica se $\sigma(d\phi_T^X(x(0))|\xi_{x(0)}) = \{\nu, \nu^{-1}\} = \{\nu, \bar{\nu}\}$ com $|\nu| = 1$.

(veja Proposição A.2.1).

Observação 1.1.1. Notamos que a definição acima não depende do representante. Com efeito, se $P = (x, T) = (y, T)$ e $y(0) = x(t_0)$, então

$$\phi_T^{X_\lambda}(y(0)) = y(0) \iff \phi_T^{X_\lambda} \circ \phi_{t_0}(x(0)) = \phi_{t_0}^{X_\lambda}(x(0)) \iff \phi_T^{X_\lambda}(x(0)) = x(0)$$

e

$$\begin{aligned} d\phi_T^{X_\lambda}(x(0)) &= d\phi_{-t_0}^{X_\lambda}(y(0)) \circ d\phi_T^{X_\lambda}(y(0)) \circ d\phi_{t_0}^{X_\lambda}(x(0)) \\ &= [d\phi_{t_0}^{X_\lambda}(x(0))]^{-1} \circ d\phi_T^{X_\lambda}(y(0)) \circ d\phi_{t_0}^{X_\lambda}(x(0)). \end{aligned}$$

No que segue vamos estudar especificamente a esfera tridimensional

$$\mathbb{S}^3 = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1\} \cong \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

munida da estrutura de contato tight padrão ξ_0, ou seja, a estrutura de contato induzida pela forma

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2).$$

restrita a $\mathbb{S}^3$. Sempre consideraremos $\mathbb{S}^3$ orientado por $\lambda_0 \wedge d\lambda_0$. Notamos que esta é exatamente a orientação de $\mathbb{S}^3$ como bordo da bola unitária de $\mathbb{R}^4$ orientada por $d\lambda_0 \wedge d\lambda_0$.

Notação 1.1.1. No caso em que λ é uma forma de contato em $\mathbb{S}^3$ induzindo ξ_0, vamos escrever

$$\mathscr{P}(\lambda) = \mathscr{P}(\mathbb{S}^3, \lambda), \quad \mathscr{P}_{prim}(\lambda) = \mathscr{P}_{prim}(\mathbb{S}^3, \lambda) \quad \text{e} \quad \mathscr{P}_{prim}(\lambda, T) = \mathscr{P}_{prim}(\mathbb{S}^3, \lambda, T)$$

Dada uma órbita de Reeb $P \in \mathscr{P}(\lambda)$, vamos denotar seu número de rotação como $\rho(P, \lambda)$ calculado de acordo com uma trivialização global de $(\xi_0, d\lambda)$ (veja Definição 2.5.2).

Observação 1.1.2. O número de rotação não depende da escolha de trivialização global.

Definição 1.1.2. Dizemos que o vetor $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é coprimo se não existe $k \in \mathbb{N}$ com $k > 1$ tal que

$$(p/k, q/k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Considere os nós transversais em $(\mathbb{S}^3, \xi_0)$

$$K_i = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \mid z_i = 0\}, \quad i = 1, 2$$

e

$$K_{p,q} = \{(e^{2\pi i p t}/\sqrt{2}, e^{2\pi i q t}/\sqrt{2}) \in \mathbb{S}^3 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

onde (p, q) é coprimo.

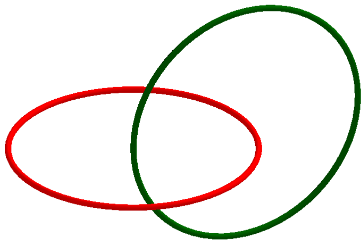

Figura 1.1.1 – Enlace de Hopf

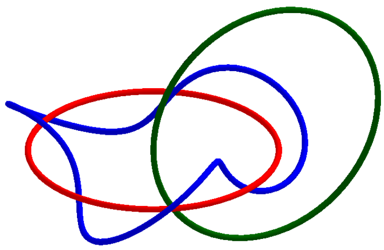

Figura 1.1.2 – Enlace de tipo (1,3)

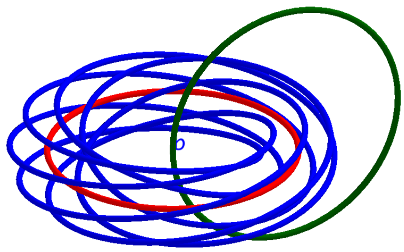

Figura 1.1.3 – Enlace de tipo (7,5)

Definição 1.1.3. O enlace $L_0 = K_1 \cup K_2$ é chamado do enlace de Hopf padrão em $(\mathbb{S}^3, \xi_0)$. Dizemos que um enlace transversal em $(\mathbb{S}^3, \xi_0)$ é um enlace de Hopf se é transversalmente isotópico a L_0. O nó $K_{p,q}$ é chamado de um nó de tipo (p, q) padrão em $(\mathbb{S}^3, \xi_0)$. Dizemos que um nó transversal em $(\mathbb{S}^3, \xi_0)$ é um nó de tipo (p, q) se é transversalmente isotópico a $K_{p,q}$. O enlace $L_{p,q} = L_0 \cup K_{p,q}$ será chamado de enlace de tipo (p, q) padrão em $(\mathbb{S}^3, \xi_0)$. Dizemos que um enlace transversal em $(\mathbb{S}^3, \xi_0)$ é um enlace de tipo (p, q) se é transversalmente isotópico a $L_{p,q}$.

Resultados e definições relevantes sobre teoria de nós estão coletados no Apêndice B.

Seja

$$N = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \leq 0\}.$$

Em $\mathbb{R}^2 \backslash N$ denotamos por $\arg : \mathbb{R}^2 \backslash N \to (-\pi, \pi)$ a função argumento satisfazendo que

$$v = \|v\| \, (\cos \arg(v), \ \mathrm{sen} \arg(v)).$$

Definição 1.1.4. Dados $u, v \in \mathbb{R}^2 \backslash N$ escrevemos

$$u \prec v$$

se

$$\arg(u) < \arg(v).$$

Escrevemos

$$u \preceq v$$

se

$$\arg(u) \leq \arg(v).$$

1.2 Alguns resultados sobre dinâmica de Reeb na esfera $\mathbb{S}^3$ tight

Vamos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.1. Sejam $a, b \in (0, \infty)$ e defina a hiperfície em $\mathbb{R}^4$

$$E = E(a,b) = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{|z_1|^2}{a} + \frac{|z_2|^2}{b} = 1 \right\}$$

munida da forma de contato

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2).$$

Um cálculo simples mostra que

$$\bar{K}_1 = \{(z_1, z_2) \in E \mid z_1 = 0\} \quad \text{e} \quad \bar{K}_2 = \{(z_1, z_2) \in E \mid z_2 = 0\}$$

são órbitas fechadas de X_{λ_0}. Se $a/b \in \mathbb{Q}$, então $E(a,b)$ é folheada por órbitas fechadas de X_{λ_0}. Se $a/b \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, então X_{λ_0} possui somentes estas duas órbitas periódicas. Existe um difeomorfismo $\Psi : \mathbb{S}^3 \to E(a,b)$ dado por

$$\Psi(z_1, z_2) = f(z_1, z_2)(z_1, z_2),$$

onde $f : \mathbb{S}^3 \to (0, \infty)$. Temos que

$$\lambda = \Psi^* \lambda_0 = g(z_1, z_2) \lambda_0.$$

Portanto, as propriedades acima são herdadas por X_λ. Este exemplo mostra que a dinâmica de Reeb pode mudar drasticamente quando se muda a forma de contato induzindo ξ_0.

Seja agora

$$K_i = \Psi^{-1}(\bar{K}_i) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_i = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Claramente, X_λ herda as propriedades de X_{λ_0} discutidas acima. Note que $K_1 \cup K_2$ forma um enlace de Hopf (veja o Apêndice B). Ademais, se $a/b \in \mathbb{Q}$ todas as órbitas de Reeb em $\mathbb{S}^3 \backslash (K_1 \cup K_2)$ vistas como órbitas primas formam nós de tipo (p, q), para algum vetor (p, q) coprimo que não depende da órbita.[1].

Seja λ uma forma de contato induzindo a estrutura de contato ξ_0 em $\mathbb{S}^3$. Em todos os exemplos conhecidos, X_λ possui duas órbitas periódicas ou X_λ possui infinitas órbitas periódicas. Um resultado de Cristofaro-Gardiner e Hutchings ([7]) mostra que X_λ tem sempre pelo menos duas órbitas geometricamente distintas, porém é uma pergunta em aberto se é possível que o número de órbitas periódicas de X_λ seja finito e maior do que 2. Além disso, em todos os exemplos conhecidos, X_λ admite duas órbitas formando um enlace de Hopf. A validade deste resultado em geral também não é sabida.

Vamos considerar agora a seguinte conjectura:

Se a forma de contato λ, induzindo a estrutura de contato ξ_0 em $\mathbb{S}^3$, é tal que X_λ admite duas órbitas fechadas formando um enlace de Hopf, então X_λ possui duas ou infinitas órbitas fechadas geometricamente distintas.

Em [20], os autores provaram que se as órbitas que formam um enlace de Hopf satisfazem uma situação de não-ressonância, então existem infinitas órbitas. Vamos explicar o que significa esta condição de não-ressonância. Sejam K_1 e K_2 as órbitas formando o enlace de Hopf e sejam $\theta_1 = \rho(K_1) - 1$ e $\theta_2 = \rho(K_2) - 1$ seus números de rotação. Diremos que estas órbitas são não-ressonantes se os vetores $(\theta_1, 1)$ não é um múltiplo positivo de $(1, \theta_2)$.

Na realidade o resultado de [20] é ainda mais preciso. O Teorema 1.2 de [20] pode ser enunciado como:

Teorema 1.2.1. *Seja λ uma forma de contato em $\mathbb{S}^3$ induzindo ξ_0 e tal que X_λ possui duas órbitas periódicas formando um enlace de Hopf $K_1 \cup K_2$. Seja $\theta_i = \rho(K_i) - 1$, $i = 1, 2$. Se $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é tal que p, q é coprimo e*

$$(\theta_1, 1) \prec (p, q) \prec (1, \theta_2) \quad \text{ou} \quad (1, \theta_2) \prec (p, q) \prec (\theta_1, 1),$$

[1] O vetor (p, q) é tal que $p/q = b/a$

então existe uma órbita P de X_{λ_0} tal que

$$\mathrm{lk}(P, K_1) = p \quad e \quad \mathrm{lk}(P, K_2) = q,$$

onde lk *denota o número de enlaçamento de dois nós (veja Apêndice B).*

1.3 Enunciado dos resultados

O objetivo do presente trabalho é entender o que ocorre no caso em que há ressonância entre as componentes do enlace de Hopf, ou seja, em que $(\theta_1, 1)$ e $(1, \theta_2)$ são colineares, ou seja, existe $\theta > 0$ tal que

$$\theta_2 = \frac{1}{\theta_1} = \theta.$$

Como o Exemplo 1.2.1 acima mostra, não podemos esperar a existência de infinitas órbitas fechadas geometricamente distintas neste caso. Portanto, vamos adicionar a hipótese de que além do enlace de Hopf existe uma órbita adicional $K_{p,q}$ tal que $L_{p,q} = K_1 \cup K_2 \cup K_{p,q}$ forme um enlace de tipo (p, q) em $\mathbb{S}^3$. Vamos adicionar ainda a hipótese técnica que $p + q\theta > 0$. O principal resultado deste trabalho é:

Teorema 1.3.1. *Seja λ uma forma de contato em $\mathbb{S}^3$ induzindo a estrutura de contato tight ξ_0. Suponha que existam órbitas de Reeb periódicos $K_1, K_2, K_{p,q} \in \mathscr{P}_{prim}(\lambda)$ tais que $L_0 = K_1 \cup K_2$ seja um enlace de Hopf, (p, q) é coprimo e $L_{p,q} = L_0 \cup K_{p,q}$ forme um enlace de tipo (p, q). Suponha ainda que exista $\theta > 0$ tal que*

$$\frac{1}{\theta} = \rho(K_1, \lambda) - 1 \quad e \quad \theta = \rho(K_2, \lambda) - 1$$

e $p + q\theta > 0$. Então, dado $(\hat{p}, \hat{q})$ coprimo satisfazendo que

$$(1, \theta) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (p, q) \text{ ou } (p, q) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (1, \theta)$$

existe uma órbita de Reeb $P \in \mathscr{P}_{prim}(\lambda)$ tal que

$$\mathrm{lk}(P, K_1) = \hat{p} \quad e \quad \mathrm{lk}(P, K_2) = \hat{q}.$$

Corolário 1.3.2. *Sob as hipóteses do Teorema 1.3.1, $\mathscr{P}_{prim}(\lambda)$ é infinito.*

Na verdade, mais do que afirmar que há infinitas órbitas fechadas geometricamente distintas, podemos mostrar que o número de órbitas primas cresce pelo menos polinomialmente como função do período. Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.3.3. *Sob as hipóteses do Teorema 6.3.2, temos que*

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{\log \# \mathscr{P}_{prim}(\lambda, T)}{\log T} \geq 1.$$

O Teorema 6.3.2 segue de um enunciado aparentemente mais restrito. Para enunciá-lo precisamos da seguinte definição:

Definição 1.3.1. Seja (p,q) coprimo e $L_{p,q}$ um enlace de tipo (p,q) padrão. Definimos o conjunto

$$\mathscr{F}_{p,q} = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{S}^3, (0,\infty)) \mid df(v) = 0, \forall v \in \xi_0|L_{p,q}\}.$$

Notamos que se $f \in \mathscr{F}_{p,q}$, então $\lambda = f\lambda_0$ é uma forma de contato em $\mathbb{S}^3$ associada a estrutura de contato ξ_0 realizando as componentes de $L_{p,q}$ como órbitas do seu campo de Reeb.

Proposição 1.3.4. *Se λ é uma forma de contato em $\mathbb{S}^3$ induzindo a estrutura de contato tight ξ_0 e realizando as componentes de um enlace do tipo (p,q), $\tilde{L}_{p,q}$, como órbitas de seu campo de Reeb. Então, existe $f \in \mathscr{F}_{p,q}$ e um difeomorfismo $\varphi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ tal que $\varphi(L_{p,q}) = \tilde{L}_{p,q}$ e*

$$\varphi^*\lambda = f\lambda_0.$$

Demonstração. Por hipótese, existe $g : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\lambda = g\lambda_0$. Como $\tilde{L}_{p,q}$ é um enlace de tipo (p,q), existe uma isotopia transversal $\eta_t : L_{p,q} \to \mathbb{S}^3$ satisfazendo que $\eta_0 = id$ e $\eta_1(L_{p,q}) = \tilde{L}_{p,q}$. Pelo Teorema 2.6.12 de [12], existe uma isotopia de contato $\Phi_t : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ satisfazendo que $\Phi_0 = id$, $\Phi_t|L_{p,q} = \eta_t$. Logo,

$$\Phi_1^*(g\lambda_0) = h\lambda_0,$$

para algum $h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Se h é positiva, podemos tomar $f = h$ e $\varphi = \Phi_1$. Se h é negativa, consideramos o difeomorfismo $T : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ dado por $T(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1, -y_1, x_2, -y_2)$ e notamos que $T^*\lambda_0 = -\lambda_0$. Basta tomar, $\varphi = \Phi_1 \circ T$ e $f = -k \circ T$. $\square$

A proposição acima mostra que no Teorema 1.3.1 podemos nos restringir a considerar somente formas de contato em $\mathbb{S}^3$ da forma $f\lambda_0$ com $f \in \mathscr{F}_{p,q}$.

1.4 Descrição dos demais capítulos

No capítulo 2 discutiremos o conceito de índice de Conley-Zehnder. Apresentaremos uma definição axiomática, uma definição geométrica e uma definição analítica do índice de Conley-Zehnder para caminhos de matrizes simplécticas em Sp. Cada definição tem sua vantagem nos problemas concretos e utilizaremos as três definições convenientemente. Neste capítulo também definimos o número de rotação de um caminho simpléctico em $\mathbb{R}^2$ e sua relação com o índice de Conley-Zehnder. Depois aplicaremos estas noções à linearização do fluxo de Reeb ao longo de órbitas periódicas em variedades de contato em dimensão 3, definindo assim o índice de Conley-Zehnder e o número de rotação para órbitas periódicas do campo de Reeb. Na última seção definiremos a noção de número de enrolamento de dois vetores.

No capítulo 3 discutiremos os conceitos de curvas pseudo-holomorfas em simplectizações, em cobordismos simpléticos com fins cilíndricos e em cobordismos simplécticos divididos (*splitting cobordism*), junto com as noções de energia. Depois estudaremos o comportamento assintótico de curvas pseudo-holomorfas.

No capítulo 4 seguindo os trabalhos de [27] e [20], feitas certas hipóteses sobre a forma de contato, definimos um complexo de cadeias formado pelas órbitas periódicas de Reeb e um operador de bordo para este complexo que será construído a partir do espaço de cilindros pseudo-holomorfos que são assintóticos às órbitas de Reeb periódicas. Com esses dados construiremos uma homologia associada a este complexo. Estudamos, também, os morfismos entre estes complexos de cadeias.

No capítulo 5 construímos formas de contato em $\mathbb{S}^3$ nas quais podemos calcular a homologia construída no capítulo 4. Na primeira seção construímos formas de contato Morse-Bott, nas quais o fluxo de Reeb é integrável. Na segunda seção, perturbamos estas formas de contato de forma a fazê-las satisfazer as hipóteses para a construção da homologia. Nas seções seguintes calculamos a homologia utilizando as formas de contato perturbadas, mostramos que esta homologia é não-nula e estudamos os morfismos entre complexos de cadeias aplicados a este caso específico.

No capítulo 6 mostraremos o resultado principal. Na primeira seção provamos alguns lemas preparatórios. Na segunda seção provamos o caso em que a forma de contato é não-degenerada. Na terceira seção, utilizando um resultado de aproximação por formas de contato não-degeneradas provamos o resultado geral. Na quarta seção estudamos o crescimento de órbitas periódicas em função do período.

O trabalho termina com dois apêndices, um onde coletamos resultados básicos de geometria simplética e de contato e outro em que coletamos resultados de teoria de nós.

2 O índice de Conley-Zehnder em dimensão 2

Neste capítulo estudaremos o índice de Conley-Zehnder em dimensão 2 seguindo a apresentação do índice de [20]. O índice de Conley-Zehnder tem o papel de índice de Morse na construção da homologia no capítulo 4. Na primeira seção introduziremos a definição axiomática do número de Conley-Zehnder para caminhos de matrizes simpléticas em $\mathbb{R}^2$. Como será necessário adiante obter uma caracterização mais concreta deste índice, discutimos nas seções 2.2 e 2.3 a definição geométrica e a definição analítica, respectivamente, e obtemos algumas propriedades do índice. Na quarta seção estudamos o número de rotação e sua relação com o índice de Conley-Zehnder. Na seção 2.5 definimos o índice de Conley-Zehnder e o número de rotação para órbitas periódicas de Reeb utilizando a linearização do fluxo e uma trivialização simpléctica da estrutura de contato ao longo da órbita. Estudamos também como estas noções dependem da trivilialização escolhida. Na seção 2.6 estudamos o número de enrolamento e suas propriedades.

2.1 Definição axiomática

No que segue vamos identificar $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ via o isomorfismo

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy \in \mathbb{C}.$$

Notamos que sob esta identificação

$$i \cong J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Começamos distinguindo um subespaço do grupo de matrizes simpléticas $\mathrm{Sp}(1)$ que nos será particularmente útil,

$$\mathrm{Sp}^*(1) = \{A \in \mathrm{Sp}(1) \mid \det(A - \mathbb{1}) \neq 0\}.$$

Da Proposição A.2.1, se $A \in \mathrm{Sp}^*(1)$ há 3 possibilidades:

(a) $\sigma(A) = \{\nu, \nu^{-1}\}$ com $\nu > 1$;

(b) $\sigma(A) = \{\nu, \nu^{-1}\}$ com $\nu < 0$;

(c) $\sigma(A) = \{\nu, \nu^{-1}\} = \{\nu, \bar{\nu}\}$ com $|\nu| = 1$ e $\mathrm{Im}(\nu) \neq 0$.

Definição 2.1.1. No caso (a) dizemos que A é positivamente hiperbólica, no caso (b) dizemos que A é negativamente hiperbólica e no caso (c) dizemos que A é elíptica.

Definimos o conjunto de caminhos contínuos

$$\Sigma^* = \{\varphi : [0,1] \to \mathrm{Sp}(1) \mid \varphi(0) = \mathbb{1},\ \varphi(1) \in \mathrm{Sp}^*(1)\}.$$

Em [15], Teorema 3.2, encontramos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.1. *Existe um único mapa $\mu_{CZ} : \Sigma^* \to \mathbb{Z}$ satisfazendo que*

(a) Se φ_s é uma homotopia em Σ^*, então $\mu_{CZ}(\varphi_s)$ é constante;

(b) Se $\psi : [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$ satisfaz $\psi(0) = \psi(1) = \mathbb{1}$ e $\varphi \in \Sigma^*$, então

$$\mu_{CZ}(\psi\varphi) = 2\mu(\psi) + \mu_{CZ}(\varphi),$$

onde μ denota o índice de Maslov (Definição A.2.2);

(c) Se $\varphi \in \Sigma^*$ e $\varphi^{-1}(t) = \varphi(t)^{-1}$, então

$$\mu_{CZ}(\varphi^{-1}) = -\mu_{CZ}(\varphi);$$

(d)

$$\mu_{CZ}(t \mapsto e^{i\pi t}) = 1.$$

Além disso, μ_{CZ} induz uma bijeção das classes de homotopia de Σ^* em $\mathbb{Z}$.

Definição 2.1.2. O mapa μ_{CZ} descrito no Teorema 2.1.1 é chamado de índice de Conley-Zehnder.

Observação 2.1.1. O índice de Conley-Zehnder pode ser definido em qualquer dimensão par (veja [15]). Contudo, esta definição mais geral não terá utilidade para nós.

□

Nas próximas seções daremos duas descrições mais concretas do índice de Conley-Zehnder que serão necessárias no resto do trabalho.

2.2 Definição geométrica

Seja $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$, um caminho contínuo. Seja $\theta : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o único mapa satisfazendo que

$$\frac{\varphi(t)e^{2\pi i s}}{\|\varphi(t)e^{2\pi i s}\|} = e^{2\pi i\theta(t,s)}, \tag{2.2.1}$$

e $\theta(0,s) = s$ para todo $s \in [0,1]$. Observamos que

$$\frac{\varphi(t)e^{2\pi i(s+1/2)}}{\|\varphi(t)e^{2\pi i(s+1/2)}\|} = -\frac{\varphi(t)e^{2\pi i s}}{\|\varphi(t)e^{2\pi i s}\|} = -e^{2\pi i\theta(t,s)}.$$

Logo,

$$\theta(t, s+1/2) = \theta(t,s) + (2k+1)/2,$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Como

$$\theta(0, s+1/2) = s + \frac{1}{2},$$

concluímos que

$$\theta(t, s+1/2) = \theta(t,s) + 1/2, \tag{2.2.2}$$

para todo $t \in [0,1]$ e para todo $s \in \mathbb{R}$. Considere a função $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta(s) = \theta(1,s) - \theta(0,s) = \theta(1,s) - s. \tag{2.2.3}$$

Claramente, Δ é contínua e por (2.2.2), $\Delta(s+1/2) = \Delta(s)$, para todo $s \in [0,1]$.

Definição 2.2.1. Dado φ e Δ como acima, definimos o intervalo de rotação de φ por

$$I(\varphi) = \{\Delta(s) \mid s \in [0,1]\}.$$

Observação 2.2.1. O conjunto $I(\varphi)$ é a imagem do intervalo $[0,1]$ pela função contínua Δ, donde se conclui que $I(\varphi)$ é de fato um intervalo.

□

Em [14] Lema 3.2, os autores provam:

Lema 2.2.1. *O intervalo de rotação $I(\varphi)$ tem comprimento estritamente menor do que $1/2$. Em particular, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $I(\varphi) \cap \mathbb{Z} = \{k\}$ ou $I(\varphi) \subset (k, k+1)$.*

Definição 2.2.2. Se $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$ é contínuo, definimos o índice geométrico de Conley-Zehnder

$$\mu_g(\varphi) = \begin{cases} 2k & \text{se } k \in I(\varphi) \cap \mathbb{Z} \\ 2k+1 & \text{se } I(\varphi) \subset (k, k+1),\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

O teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [14], Teorema 3.5, afirma que o índice definido acima é exatamente o índice de Conley-Zehnder.

Teorema 2.2.2. *O índice μ_g restrito a Σ^* satisfaz o Teorema 2.1.1 e, portanto, $\mu_g|\Sigma^* = \mu_{CZ}$.*

Observação 2.2.2. Notamos que o Teorema 2.2.2 garante que μ_g é um variante homotópico somente restrito a Σ^*. De fato, em [14] há um exemplo de caminhos de matrizes simpléticas homotópicos relativamente a $\{0\}$ e partindo da identidade possuindo índices geométricos de Conley-Zehnder diferentes. Contudo, se $\varphi_0, \varphi_1 : [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$ são homotópicos relativamente a $\{0,1\}$, então os mapas θ_0 e θ_1 definidos em (2.2.1), para φ_0 e φ_1, respectivamente, satisfazem que

$$\theta_0(1,s) - s = \theta_1(1,s) - s.$$

Portanto, segue que

$$\mu_g(\varphi_0) = \mu_g(\varphi_1).$$

$\square$

Observação 2.2.3. O item (b) do Teorema 2.1.1 vale para μ_g mesmo que $\varphi \notin \Sigma^*$. De fato, suponha que $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$ satisfaz que $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e $\psi : [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$ satisfaz que $\psi(0) = \psi(1) = \mathbb{1}$. Seja $\alpha : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\psi(t)e^{2\pi i s}}{\|\psi(t)e^{2\pi i s}\|} = e^{2\pi i \alpha(t,s)}$$

e $\alpha(0,s) = s$. Note que

$$\alpha(1,s) - s = \mu(\psi).$$

Então

$$\frac{\psi(t)\varphi(t)e^{2\pi i s}}{\|\psi(t)\varphi(t)e^{2\pi i s}\|} = e^{2\pi i \alpha(t,\theta(t,s))},$$

onde θ é definido como em (2.2.1). Logo,

$$\alpha(t,\theta(t,s)) - s = \alpha(t,\theta(t,s)) - \theta(t,s) + \theta(t,s) - s = \mu(\psi) + \theta(t,s) - s.$$

Daí, vemos que

$$I(\psi\varphi) = \mu(\psi) + I(\varphi).$$

Concluímos que

$$\mu_g(\psi\varphi) = \mu_g(\varphi) + 2\mu(\psi).$$

$\square$

O próximo lema será utilizado nas próximas seções.

Lema 2.2.3. *Suponha que* $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$ *satisfaz que* $\varphi(0) = \mathbb{1}$ *e que* $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, *então*

$$\mu_g(\varphi_A) = \mu_g(\varphi),$$

onde $\varphi_A(t) = A^{-1}\varphi(t)A$.

Demonstração. Considere a homotopia

$$u \in [0,1] \mapsto A^{-u}\varphi(t)A^u.$$

Vamos considerar a função contínua $\theta : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz que

$$\frac{A^{-u}\varphi(t)A^u e^{2\pi i s}}{\|A^{-u}\varphi(t)A^u e^{2\pi i s}\|} = e^{2\pi i \theta(u,t,s)}$$

e $\theta(u,0,s) = s$ para todo $(u,s) \in [0,1] \times \mathbb{R}$. Vamo supor por absurdo que $\mu_g(\varphi_A) \neq \mu_g(\varphi)$.

Caso $I(\varphi) \subset (k, k+1)$, então $\sigma(\varphi(1)) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$. Por hipótese, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\theta(1,1,s) - s \leq k \quad \text{ou} \quad \theta(1,1,s) - s \geq k+1.$$

Logo, existe $u \in [0,1]$ tal que $\theta(u,1,s) - s \in \mathbb{Z}$. Mas isto implica que

$$\sigma(\varphi(1)) \cap \mathbb{R}_+ = \sigma(A^{-u}\varphi(1)A^u) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset,$$

o que é um absurdo.

Caso $k \in I(\varphi) \cap \mathbb{Z}$, então $\sigma(\varphi(1)) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$. Por hipótese, $k \notin I(\varphi_A)$. Pelo Lema 2.2.1, existe $u \in [0,1]$ tal que $I(A^{-u}\varphi(1)A^u) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Logo,

$$\sigma(\varphi(1)) \cap \mathbb{R}_+ = \sigma(A^{-u}\varphi(1)A^u) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset,$$

o que é um absurdo.

$\square$

Dado $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$ contínuo podemos estender este caminho a um caminho contínuo de $[0,\infty)$ em $\mathrm{Sp}(1)$, que continuamos denotando por φ, definido por

$$t \in [0,\infty) \mapsto \varphi(t - \lfloor t \rfloor)\varphi(1)^{\lfloor t \rfloor},$$

$\lfloor t \rfloor = k \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $k \leq t < k+1$. Definimos o map

$$\varphi^{(k)} : [0,1] \to \mathrm{Sp}(2), \quad t \in [0,1] \mapsto \varphi(kt),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Notamos que se $t \in [(j-1)/k, j/k]$, $j = 1, \ldots, j$, temos

$$\varphi^{(k)}(t) = \varphi(kt - (j-1))\varphi(1)^{j-1}. \tag{2.2.4}$$

Em particular, $\varphi^{(k)} \in \Sigma^*$ se, e somente se, $\varphi(1)$ não possui raízes k-ésimas da unidade no seu espectro.

Vamos denotar por $\theta^{(k)}$ e $\Delta^{(k)}$, os mapas associados a $\varphi^{(k)}$ como em (2.2.1) e (2.2.3), $\theta^{(1)}$ e $\Delta^{(1)}$ vamos continuar grafando como θ e Δ, respectivamente. Convencionamos ainda que $\theta^{(0)}(t,s) = s$. De (2.2.4) segue que

$$\theta^{(k)}(t,s) = \theta(kt - (j-1), \theta^{(j-1)}(1,s)),$$

se $t \in [(j-1)/k, j/k]$. Concluímos que

$$\begin{aligned}\Delta^{(k)}(s) &= \theta^{(k)}(1,s) - \theta^{(k)}(0,s) \\ &= \sum_{j=1}^{k}[\theta^{(k)}(j/k,s) - \theta^{(k)}((j-1)/k,s)] \\ &= \sum_{j=1}^{k}[\theta(1,\theta^{(j-1)}(1,s)) - \theta(0,\theta^{(j-1)}(1,s))] \\ &= \sum_{j=1}^{k}\Delta(\theta^{(j-1)}(1,s)).\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Lema 2.2.4. *Suponha que* $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$.

(a) Se $\sigma(\varphi(1)) \subset (0,\infty)$, *então existe* $l \in \mathbb{Z}$ *tal que* $kl \in I(\varphi^{(k)})$ *e* $\mu_g(\varphi^{(k)}) = 2kl$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

(b) Se $\sigma(\varphi(1)) \subset (-\infty,0)$, *então existe* $l \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\mu_g(\varphi^{(k)}) = k(2l+1)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Ademais, se* k *é ímpar, então*

$$I(\varphi^{(k)}) \subset (\lfloor k(l+1/2)\rfloor, \lfloor k(l+1/2)\rfloor + 1),$$

e se k *é par, então*

$$k(l+1/2) \in I(\varphi^{(k)}).$$

(c) Se $\varphi(t) = e^{2\pi i\eta(t)} \in \mathrm{U}$, *onde* $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$ *é contínua com* $\eta(0) = 0$ *e* $\eta(1) = \alpha$, *então*

$$I(\varphi^{(k)}) = \{k\alpha\}$$

e

$$\mu_g(\varphi^{(k)}) = \begin{cases} 2k\alpha, & \text{se } k\alpha \in \mathbb{Z} \\ 2\lfloor k\alpha\rfloor + 1 & \text{se } k\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. *Se* $k\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, *então*

$$I(\varphi^{(k)}) \subset (\lfloor k\alpha\rfloor, \lfloor k\alpha\rfloor + 1).$$

(d) Se $\varphi(1) \subset \mathbb{S}^1$, *então existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\mu_g(\varphi^{(k)}) = \begin{cases} 2k\alpha, & \text{se } k\alpha \in \mathbb{Z} \\ 2\lfloor k\alpha\rfloor + 1 & \text{se } k\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\end{cases},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. *Se* $k\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, *então*

$$I(\varphi^{(k)}) \subset (\lfloor k\alpha\rfloor, \lfloor k\alpha\rfloor + 1).$$

Demonstração. No caso (a), podemos encontrar $s \in [0,1]$ e $\nu > 0$ tal que

$$\varphi(1)^k e^{2\pi s} = \nu^k e^{2\pi i s},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$e^{2\pi i \theta^{(k)}(1,s)} = e^{2\pi i s}$$

e existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta(1,s) = s + l$. Logo, $\Delta(s) = l$. Temos ainda que $\theta^{(k)}(1,s) - s \in \mathbb{Z}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (2.2.5),

$$\Delta^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^{k} \Delta(\theta^{(j-1)}(1,s)) = \sum_{j=1}^{k} \Delta(s) = kl \in I(\varphi^{(k)}).$$

Por definição, $\mu_g(\varphi^{(k)}) = 2kl$.

No caso (b), podemos encontrar $s \in [0,1]$ e $\nu < 0$ tal que

$$\varphi(1)^k e^{2\pi s} = \nu^k e^{2\pi i s},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$e^{2\pi i \theta^{(k)}(1,s)} = e^{2\pi i (s + k/2)}$$

e existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta(1,s) = s + l + 1/2$. Observamos que

$$\frac{\varphi(t) e^{2\pi i (s+k/2)}}{\|\varphi(t) e^{2\pi i (s+k/2)}\|} = (-1)^k \frac{\varphi(t) e^{2\pi i s}}{\|\varphi(t) e^{2\pi i s}\|} = (-1)^k e^{2\pi i \theta(t,s)} = e^{2\pi i (\theta(t,s) + k/2)}.$$

Logo, $\Delta(s) = l + 1/2$ e

$$\Delta^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^{k} \Delta(\theta^{(j-1)}(1,s)) = \sum_{j=1}^{k} \Delta(s) = k(l + 1/2) \in I(\varphi^{(k)}).$$

Pelo Lema 2.2.1, se k é par, então

$$I(\varphi^{(k)}) \cap \mathbb{Z} = \{k(l + 1/2)\}.$$

e se k é ímpar, então

$$I(\varphi^{(k)}) \cap \mathbb{Z} = \emptyset.$$

Neste caso, temos ainda que

$$I(\varphi^{(k)}) \subset (\lfloor k(l + 1/2) \rfloor, \lfloor k(l + 1/2) \rfloor + 1).$$

Assim, $\mu_g(\varphi^{(k)}) = k(2l + 1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

No caso (c), dado $s \in \mathbb{R}$, temos que

$$\varphi(t) e^{2\pi i s} = e^{2\pi i (\eta(t) + s)}.$$

Logo, para φ, vale que $\Delta(s) = \alpha$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Concluímos que, para $\varphi^{(k)}$,

$$\Delta^{(k)}(s) = k\alpha,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, o que implica que $I(U^{(k)}) = \{k\alpha\}$. Por conseguinte,

$$\mu_g(\varphi^{(k)}) = \begin{cases} 2k\alpha, & \text{se } k\alpha \in \mathbb{Z} \\ 2\lfloor k\alpha \rfloor + 1 & \text{se } k\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $k\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, então

$$I(\varphi^{(k)}) \subset (\lfloor k\alpha \rfloor, \lfloor k\alpha \rfloor + 1),$$

pela definição do índice geométrico.

No caso (d), podemos escrever $\sigma(\varphi(1)) = \{e^{2\pi i\beta}, e^{-2\pi i\beta}\}$, onde $\beta \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema de Jordan existe $M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ tal que

$$M^{-1}\varphi(1)M = e^{2\pi i\beta}.$$

Defina $\psi(t) = M^{-1}\varphi(t)M$. Note que

$$\psi^{(k)}(t) = M^{-1}\varphi^{(k)}(t)M$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Do Lema 2.2.3, temos que

$$\mu_g(\psi^{(k)}) = \mu_g(\varphi^{(k)}),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Usando a decomposição polar (veja [26], Observação 2.2.5), existem $P, U : [0, 1] \to \mathrm{Sp}(1)$ tais que $P(t)$ é positiva para todo $t \in [0, 1]$, $U(t)$ é unitária para todo $t \in [0, 1]$ e

$$\psi(t) = U(t)P(t).$$

Por unicidade da decomposição polar, $P(0) = P(1) = U(0) = \mathbb{1}$ e $U(1) = e^{2\pi i\beta}$. O mapa

$$u \in [0, 1] \mapsto U(t)P(t)^u$$

define uma homotopia entre ψ e U relativamente a $\{0, 1\}$. Concluímos que existe uma homotopia entre φ e U em relativamente a $\{0, 1\}$. Claramente, esta homotopia induz homotopias entre $\varphi^{(k)}$ e $U^{(k)}$ relativamente a $\{0, 1\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela Observação 2.2.2,

$$\mu_g(\psi^{(k)}) = \mu_g(\varphi^{(k)}),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos escrever,

$$U(t) = e^{2\pi i\eta(t)},$$

onde $\eta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ satisfaz $\eta(0) = 0$ e $\eta(1) = \beta + m$, com $m \in \mathbb{Z}$. Defina $\alpha = \beta + m$. Pelo caso (c), aplicado a $U^{(k)}$, concluímos que

$$\mu_g(\varphi^{(k)}) = \begin{cases} 2k\alpha, & \text{se } k\alpha \in \mathbb{Z} \\ 2\lfloor k\alpha \rfloor + 1 & \text{se } k\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \end{cases},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $k\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, então

$$I(\varphi^{(k)}) \subset (\lfloor k\alpha \rfloor, \lfloor k\alpha \rfloor + 1).$$

$\square$

Corolário 2.2.5. *Suponha que $\varphi \in \Sigma^*$ e que não possua raízes da unidade no seu espectro.*

(a) Se $\varphi(1)$ é positivamente hiperbólica, então existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $kl \in I(\varphi^{(k)})$ e $\mu_{CZ}(\varphi^{(k)}) = 2kl$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Se $\varphi(1)$ é negativamente hiperbólica, então existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu_{CZ}(\varphi^{(k)}) = k(2l+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ademais, se k é ímpar, então

$$I(\varphi^{(k)}) \subset (\lfloor k(l+1/2) \rfloor, \lfloor k(l+1/2) \rfloor + 1),$$

e se k é par, então

$$k(l+1/2) \in I(\varphi^{(k)}).$$

(c) Se $\varphi(1)$ é elíptica, então existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que

$$I(\varphi^{(k)}) \subset (\lfloor k\alpha \rfloor, \lfloor k\alpha \rfloor + 1)$$

e $\mu_{CZ}(\varphi^{(k)}) = 2\lfloor k\alpha \rfloor + 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

2.3 Definição analítica

Suponha que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{Sp}(1)$ é um mapa suave satisfazendo que $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e que $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Defina o caminho suave de matrizes $S(t) = -i\dot{\varphi}(t)\varphi(t)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Da equação

$$\varphi^T i \varphi = i,$$

obtemos que

$$\dot{\varphi}(t)^T i \varphi(t) + \varphi(t)^T i \dot{\varphi}(t) = 0 \implies \dot{\varphi}(t)^T i = -\varphi(t)^T i \dot{\varphi}(t)\varphi(t)^{-1}$$

Daí,

$$S^T(t) = (\varphi(t)^{-1})^T \dot{\varphi}(t)^T i = -\varphi(t)^T (\varphi(t)^{-1})^T i \dot{\varphi}(t)\varphi(t)^{-1} = S(t).$$

Vemos que S é um caminho de matrizes simétricas. Ademais, dado $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$S(t+1) = -i\dot{\varphi}(t+1)\varphi(t+1)^{-1} = -i\dot{\varphi}(t)\varphi(1)\varphi(1)^{-1}\varphi(t)^{-1} = -i\dot{\varphi}(t)\varphi(t)^{-1} = S(t).$$

Defina

$$L_\varphi = -i\partial_t - S(t).$$

Notamos que

$$L_\varphi \varphi(t) = -i\dot{\varphi}(t) + i\dot{\varphi}(t)\varphi(t)^{-1}\varphi(t) = 0.$$

Reciprocamente, se S é um caminho suave e 1-periódico de matrizes simétricas,

$$L = \partial_t - S(t) \tag{2.3.1}$$

e φ satisfaz que

$$L\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(0) = \mathbb{1},$$

temos que

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)^T i\varphi(t)) = \dot{\varphi}(t)^T i\varphi(t) + \varphi(t)^T i\dot{\varphi}(t) = \varphi(t)^T S(t)\varphi(t) - \varphi(t)^T S(t)\varphi(t) = 0.$$

Como φ satisfaz a equação diferencial ordinária linear (2.3.1) podemos supor que seu domínio é $\mathbb{R}$. Além disso, $\psi(t) = \varphi(t)\varphi(1)$ satisfaz que $\psi(0) = \varphi(1)$ e

$$L\psi(t) = \dot{\varphi}(t)\varphi(1) - S(t)\varphi(t)\varphi(1) = (L\varphi(t))\varphi(1) = 0.$$

Por unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, temos que

$$\varphi(t)\varphi(1) = \psi(t) = \varphi(t+1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Isto mostra que caminhos simpléticos partindo da identidade estão em bijeção com operadores da forma (2.3.1). Usaremos as propriedades espectrais de L_φ para obter uma caracterização do índice de Conley-Zehnder de φ.

Vamos fixar $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{Sp}(1)$ suave satisfazendo que $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$ e escreveremos $L = L_\varphi$. Temos que L é um operador linear, auto-adjunto e ilimitado em $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ com domínio $W^{1,2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$, cujo espectro é real e contém somente auto-valores que se acumulam somente em $\pm\infty$ (veja a seção 3 de [15]). Pelo teorema de regularidade elíptica e pelo teorema de unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, se v é um auto-vetor de L, então v não se anula. Portanto, existe uma função $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{v(t)}{\|v(t)\|} = e^{i\eta(t)}.$$

O número

$$\mathrm{wind}(v) = \frac{\eta(1) - \eta(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

e não depende da escolha de η. O Lema 3.4 de [15] prova que se v_1 e v_2 são dois auto-vetores associados aos mesmos auto-valores, então $\mathrm{wind}(v_1) = \mathrm{wind}(v_2)$. Logo, dado $\nu \in \sigma(L)$, podemos definir $\mathrm{wind}(\nu)$ como sendo $\mathrm{wind}(v)$ para qualquer auto-vetor de L associado a ν. Além disso, se $\nu_1, \nu_2 \in \sigma(L)$ com $\nu_1 \leq \nu_2$, então temos que $\mathrm{wind}(\nu_1) \leq \mathrm{wind}(\nu_2)$ (Lema 3.7, [15]). Consideramos os números

$$\nu^-(L) = \max\{\nu \in \sigma(L) \mid \nu < 0\} \quad \text{e} \quad \nu^+(L) = \min\{\nu \in \sigma(L) \mid \nu \geq 0\}.$$

Que estes números estão bem definidos, segue das propriedades já enunciadas sobre o espectro de L. Definimos

$$\text{wind}^-(L) = \text{wind}(\nu^-(L)) \quad \text{e} \quad \text{wind}^+(L) = \text{wind}(\nu^+(L)).$$

Observamos que $\text{wind}^-(L) \leq \text{wind}^+(L)$. Definimos, também,

$$p(L) = \begin{cases} 0 & \text{se wind}^-(L) = \text{wind}^+(L) \\ 1 & \text{se wind}^-(L) < \text{wind}^+(L). \end{cases}$$

Definição 2.3.1. Definimos o índice analítico de Conley-Zehnder de φ como

$$\mu_a(\varphi) = 2\text{wind}^-(L) + p(L).$$

No Teorema 3.10 de [15], segue o seguinte resultado:

Teorema 2.3.1. *Se $\varphi \in \Sigma^*$, $\mu_a(\varphi) = \mu_{CZ}(\varphi)$.*

Usaremos no que segue as notação $\varphi^{(k)}$ introduzida na seção 2.2. Como estamos supondo que $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$, segue que

$$\varphi^{(k)}(t) = \varphi(kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vamos denotar por $L^{(k)}$ o operador associado a $\varphi^{(k)}$ como explicado acima. O próximo resultado e sua demonstração são encontrados em [20], Corolário 2.4:

Proposição 2.3.2. *Se $\varphi \in \Sigma^*$ é suave por partes e tal que o espectro de $\varphi(1)$ não contém raízes da unidade, então*

(a) Se $\varphi(1)$ é positivamente hiperbólica e $l \in \mathbb{Z}$ satisfaz que $\mu(\varphi^{(k)}) = 2kl$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$\text{wind}^-(L^{(k)}) = \text{wind}^+(L^{(k)}) = kl,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Se $\varphi(1)$ é negativamente hiperbólica e $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu(\varphi^{(k)}) = k(2l+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$\text{wind}^-(L^{(k)}) = \text{wind}^+(L^{(k)}) = k(l+1/2)$$

se k é par e

$$\text{wind}^-(L^{(k)}) = \lfloor k(l+1/2) \rfloor \quad e \quad \text{wind}^+(L^{(k)}) = \lfloor k(l+1/2) \rfloor + 1$$

se k é ímpar.

(c) Se $\varphi(1)$ é elíptica e $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tal que $\mu(\varphi^{(k)}) = 2\lfloor k\alpha \rfloor + 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$\text{wind}^-(L^{(k)}) = \lfloor k\alpha \rfloor \quad e \quad \text{wind}^+(L^{(k)}) = \lfloor k\alpha \rfloor + 1.$$

Do Lema 3.6 de [15], temos

Proposição 2.3.3. *Se $\varphi \in \Sigma^*$ é suave por partes, então para cada $k \in \mathbb{Z}$ existem exatamente dois autovalores (contados com multiplicidade) $\nu_1, \nu_2 \in \sigma(L)$ tais que*

$$\operatorname{wind}(\nu_1) = k = \operatorname{wind}(\nu_2).$$

Corolário 2.3.4. *Se $\varphi \in \Sigma^*$ é suave por partes e $p(L) = 0$, então o auto-espaço associado a $\nu^-(L)$ e $\nu^+(L)$ é unidimensional.*

2.4 O número de rotação

Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{Sp}(1)$ um caminho contínuo satisfazendo que $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$. Seja $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a única função suave satisfazendo que

$$\frac{\varphi(t)e^{2\pi i s}}{\|\varphi(t)e^{2\pi i s}\|} = e^{2\pi i \theta(t,s)}$$

e $\theta(0, s) = s$. Defina $f(s) = \theta(1, s)$, $s \in \mathbb{R}$. Por (2.2.2), segue que $f(s+1) = f(s) + 1$. Dado que

$$\varphi(1)e^{2\pi i s_1} = \varphi(1)e^{2\pi i s_2}$$

se, e somente se, $s_2 - s_1 \in \mathbb{Z}$, temos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induz um homeomorfismo de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Seja Δ como em (2.2.3). Pela Proposição 11.1.1 de [22], dado $s \in [0, 1]$, o limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta(s) + \Delta(f(s)) + \cdots + \Delta(f^{k-1}(s))}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{f^k(s) - s}{k}$$

existe e não depende da escolha de s.

Definição 2.4.1. Dado φ como acima definimos seu número de rotação como

$$\rho(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{\Delta(s) + \Delta(f(s)) + \cdots + \Delta(f^{k-1}(s))}{k}.$$

Usando as notações $\varphi^{(k)}$, $\theta^{(k)}$ e $\Delta^{(k)}$ introduzidas no seção 2.2, temos que

$$f^k(s) = \theta^{(k)}(1, s).$$

Portanto,

$$\frac{\Delta(s) + \Delta(f(s)) + \cdots + \Delta(f^{k-1}(s))}{k} = \frac{f^k(s) - s}{k} = \frac{\Delta^{(k)}(s)}{k}$$

e, assim,

$$\rho(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{\Delta^{(k)}(s)}{k}.$$

Pelo Lema 2.2.1 e pela Definição 2.2.2, temos que

$$\frac{\mu_g(\varphi^{(k)})}{2} - 1 \le \Delta^{(k)}(s) \le \frac{\mu_g(\varphi^{(k)})}{2} + 1.$$

Por conseguinte,

$$2\rho(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_g(\varphi^{(k)})}{k}.$$

Definição 2.4.2. Dado φ como acima, definimos seu índice médio como

$$\bar{\mu}(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_g(\varphi^{(k)})}{k}.$$

Da discussão acima obtemos:

Lema 2.4.1. *$\bar{\mu}(\varphi) = 2\rho(\varphi)$.*

Observação 2.4.1. Da Observação 2.2.3 e do Lema 2.4.1, concluímos que se $\psi : \mathbb{R} \to \mathrm{Sp}(1)$ é tal que $\psi(0) = \mathbb{1}$ e $\psi(t+1) = \psi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$\rho(\psi\varphi) = \rho(\varphi) + \mu(\psi).$$

Do Lema 2.2.3 e do Lema 2.4.1, concluímos que

$$\rho(A^{-1}\varphi A) = \rho(\varphi)$$

para toda $A \in \mathrm{Sp}(1)$.

$\square$

Do Lema 2.4.1 e do Lema 2.2.4 segue que:

Corolário 2.4.2. *Suponha que φ é como acima. Vale que:*

(a) Se $\sigma(\varphi(1)) \subset (0,\infty)$, então $\rho(\varphi) = l \in \mathbb{Z}$, onde $\mu_g(\varphi) = 2l$.

(b) Se $\sigma(\varphi(1)) \subset (-\infty, 0)$, então $\rho(\varphi) = l + 1/2$, onde $l \in \mathbb{Z}$ é dado por $\mu_g(\varphi) = 2l+1$.

(c) Se $\varphi(t) = e^{2\pi i \eta(t)} \in \mathrm{U}(1)$, para todo $t \in [0,1]$, onde $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$, então $\rho(\varphi) = \alpha$, para $\alpha = \eta(1) \in \mathbb{R}$. Além disso, α satisfaz que

$$\mu_g(\varphi) = \begin{cases} 2\alpha, & \text{se } \alpha \in \mathbb{Z} \\ 2\lfloor \alpha \rfloor + 1 & \text{se } \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \end{cases}$$

(d) Se $\varphi(1)$ é elíptica e não possui raízes da unidade no seu espectro, então $\rho(\varphi) = \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é tal que $\mu_g(\varphi) = 2\lfloor\alpha\rfloor + 1$.

2.5 O índice de Conley-Zehnder e número de rotação de órbitas de Reeb periódicas

Seja M uma variedade de dimensão 3, λ uma forma de contato em M e X_λ o campo de Reeb associado a λ. Vamos denotar por ϕ^{X_λ} o fluxo de X_λ. Considere $P = (x,T) \in \mathscr{P}(M,\lambda)$. Como o fluxo de Reeb preserva λ, temos que $d\phi_t^{X_\lambda}(x(0)) : \xi_{x(0)} \to \xi_{x(t)}$ são mapas lineares simpléticos para cada $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.5.1.

Vamos escrever $x_T(t) = x(Tt)$. Tome $\Psi : \xi|\mathscr{O}(P) \to \mathbb{R}^2$ uma trivialização $d\lambda$-simplética (veja Lema 2.6.6 de [26]). Podemos, assim, definir o caminho suave de matrizes simpléticas

$$\varphi_{(x,T)} : \mathbb{R} \to \mathrm{Sp}(1), \quad \varphi_{(x,T)}(t) = \Psi_{x_T(t)} \circ d\phi^{X_\lambda}_{Tt}(x(0)) \circ (\Psi_{x_T(0)})^{-1}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\varphi_{(x,T)}(t+1) &= \Psi_{x_T(t+1)} \circ d\phi^{X_\lambda}_{T(t+1)}(x(0)) \circ (\Psi_{x_T(0)})^{-1} \\ &= \Psi_{x_T(t)} \circ d\phi^{X_\lambda}_{Tt}(x(0)) \circ (\Psi_{x_T(0)})^{-1} \circ \Psi_{x_T(1)} \circ d\phi^{X_\lambda}_{T}(x(0)) \circ (\Psi_{x_T(0)})^{-1} \\ &= \varphi_{(x,T)}(t)\varphi_{(x,T)}(1).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}_{(x,T)}(t) &= \varphi_{(x,T)}(kt) \\ &= \Psi_{x_T(kt)} \circ d\phi^{X_\lambda}_{Tkt}(x(0)) \circ (\Psi_{x_T(0)})^{-1} \\ &= \Psi_{x_{kT}(t)} \circ d\phi^{X_\lambda}_{(kT)t}(x(0)) \circ (\Psi_{x_T(0)})^{-1} \\ &= \varphi_{(x,kT)}(t).\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Notamos que

$$\varphi_{(x,T)}(0) = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad \varphi_{(x,T)}(t+1) = \varphi_{(x,T)}(t)\varphi_{(x,T)}(1),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que $P = (y, T)$ e seja $t_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo que $y(0) = x(t_0)$. Temos a homotopia entre $A(1,0) \circ \varphi_{(y,T)}(t) \circ A(1,0)^{-1}$ e $\varphi_{(x,T)}$ dada por

$$A(s,t) \circ A(s,0)^{-1} \circ A(1,0) \circ \varphi_{(y,T)}(t) \circ A(1,0)^{-1}$$

onde

$$A(s,t) = \Psi_{x_T(t)} \circ [d\phi_{st_0}(x_T(t))]^{-1} \circ \Psi^{-1}_{x_T(t+st_0)}.$$

Observamos ainda que $A(s,1) = A(s,0)$ e que, portanto a homotopia acima é relativa a $\{0,1\}$. Pela Observação 2.2.2, pelo Lema 2.2.3 e pela Observação 2.4.1 obtemos que

$$\mu_g(\varphi_{(x,T)}) = \mu_g(\varphi_{(y,T)}) \quad \text{e} \quad \rho(\varphi_{(x,T)}) = \rho(\varphi_{(y,T)}).$$

Suponha agora que Ψ' seja outra trivialização $d\lambda$-simplética do fibrado vetorial $\xi|\mathscr{O}(P)$. Temos que o caminho

$$\varphi'_{(x,T)}(t) = \Psi'_{x_T(t)} \circ d\phi^{X_\lambda}_{Tt}(x(0)) \circ (\Psi'_{x_T(0)})^{-1}.$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}\varphi'_{(x,T)}(t) &= \Psi'_{x_T(t)} \circ d\phi^{X_\lambda}_{Tt}(x(0)) \circ (\Psi'_{x_T(0)})^{-1} \\ &= B(t) \circ B(0)^{-1} \circ B(0) \circ \varphi_{(x,T)}(t) \circ B(0)^{-1},\end{aligned}$$

onde

$$B(t) = \Psi'_{x_T(t)} \circ (\Psi_{x_T(t)})^{-1}.$$

Segue da Observação 2.2.3, do Lema 2.2.3 e da Observação 2.4.1 que

$$\mu_g(\varphi'_{(x,T)}) = \mu_g(\varphi_{(x,T)}) + 2\mu(B(\cdot) \circ B(0)^{-1}) = \mu_g(\varphi_{(x,T)}) + 2\mu(\Psi'_{x_T(\cdot)} \circ (\Psi_{x_T(\cdot)})^{-1})$$

e

$$\rho(\varphi'_{(x,T)}) = \rho(\varphi_{(x,T)}) + \mu(\Psi'_{x_T(\cdot)} \circ (\Psi_{x_T(\cdot)})^{-1}).$$

Em particular, se Ψ e Ψ' são homotópicas, então

$$\mu_g(\varphi'_{(x,T)}) = \mu_g(\varphi_{(x,T)}) \quad \text{e} \quad \rho(\varphi'_{(x,T)}) = \rho(\varphi_{(x,T)}).$$

Definição 2.5.2. Se $P = (x, T) \in \mathscr{P}(M, \lambda)$ e β é uma classe de homotopia de trivializações $d\lambda$-simpléticas de $\xi|\mathscr{O}(P)$, então definimos o índice de Conley-Zehnder do par (P, β) como

$$\mu_{CZ}(P, \lambda, \beta) = \mu_g(\varphi_{(x,T)})$$

e seu número de rotação como

$$\rho(P, \lambda, \beta) = \rho(\varphi_{(x,T)}),$$

onde $\varphi_{(x,T)}$ é definido usando-se uma trivialização Ψ na classe β.

Observação 2.5.1. Da equação (2.5.1) e do Lema 2.4.1, obtemos que

$$\rho(P, \lambda, \beta) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_{CZ}(P^k, \lambda, \beta)}{2k},$$

onde utilizamos a notação $P^k = (x, kT)$.

□

Da discussão acima ainda obtemos que:

Proposição 2.5.1. *Se β e β' são classes de homotopia trivializações $d\lambda$-simpléticas de $\xi|\mathscr{O}(P)$, então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\mu_{CZ}(P, \lambda, \beta') = \mu_{CZ}(P, \lambda, \beta) + 2m \quad \text{e} \quad \rho(P, \lambda, \beta') = \rho(P, \lambda, \beta) + m,$$

onde

$$m = \mu(\Psi'_{x_T(\cdot)} \circ (\Psi_{x_T(\cdot)})^{-1})$$

para qualquer escolha de trivializações simpléticas Ψ em β e Ψ' em β'.

Se λ é uma forma de contato em $\mathbb{S}^3$ induzindo a estrutura de contato tight padrão ξ_0. Como $\pi_3(\mathrm{Sp}(1)) = 0$, segue que todas as todas as trivializações globais $d\lambda$-simpléticas são homotópicas (veja Proposição A.4.4 e Proposição 2.2.4 de [26]). Se $P = (x, T) \in \mathscr{P}(\mathbb{S}^3, \lambda)$, vamos escrever seu número de rotação e seu índice de Conley-Zehnder calculados em qualquer trivialização global como

$$\rho(P, \lambda) \quad \text{e} \quad \mu_{CZ}(P, \lambda),$$

respectivamente.

2.6 O número de enrolamento

Seja E um fibrado vetorial orientado de dimensão 2 sobre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Sejam Z, W seções contínuas que não se anulam de E. Como E é trivializado existe Z' tal que $\{Z, Z'\}$ forma uma base global contínua de E induzindo a sua orientação. Existem funções $a, b : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tais que

$$W(t) = a(t)Z(t) + b(t)Z'(t).$$

Como Z não se anula, a curva $a(t) + ib(t)$ também não se anula. Seja $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que

$$\frac{a(t) + ib(t)}{\|a(t) + ib(t)\|} = e^{2\pi i\theta(t)}.$$

O número

$$\operatorname{wind}(W, Z) = \theta(1) - \theta(0) \in \mathbb{Z}$$

depende somente da classe de homotopia de $a(t) + ib(t)$ como curva fechada em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Suponha que Z'' seja outra seção de E tal que $\{Z, Z''\}$ forma uma base global contínua de E induzindo a sua orientação. Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tais que

$$Z''(t) = \alpha(t)Z(t) + \beta(t)Z'.$$

Como $\{Z, Z'\}$ e $\{Z, Z''\}$ induzem a mesma orientação, temos que $\beta(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Daí,

$$W(t) = \left(a(t) - \frac{\alpha(t)b(t)}{\beta(t)}\right) Z(t) + \frac{b(t)}{\beta(t)} Z''(t)$$

A homotopia

$$(s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \left(a(t) - \frac{\alpha(t)b(t)}{\beta(t)} s\right) + i\frac{b(t)}{\beta(t)^s}$$

mostra que $\operatorname{wind}(W, Z)$ não depende da escolha de Z''. É imediato que $\operatorname{wind}(W, Z)$ depende somente das classes de homotopia de W e Z.

Definição 2.6.1. Nas condições acima chamamos o número $\operatorname{wind}(W, Z)$ de número de enrolamento de W e Z.

Observação 2.6.1. Se E possui uma estrutura complexa ou uma estrutura simplética, então tomamos a orientação de E induzida por estas estruturas.

$\square$

Proposição 2.6.1. *Seja $P = (x, T) \in \mathscr{P}(M, \lambda)$. Se Ψ e Ψ' são trivializações $d\lambda$-simpléticas de $\xi|\mathscr{O}(P)$ e $u, v \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, então*

$$\mu(\Psi' \circ \Psi^{-1}) = \operatorname{wind}((\Psi_{x_T(\cdot)})^{-1}u, (\Psi'_{x_T(\cdot)})^{-1}v).$$

Demonstração. Existe uma homotopia entre $\Psi'_{x_T(t)} \circ \Psi^{-1}_{x_T(t)}$ e $e^{2\pi i\alpha(t)}$, onde $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua (veja Proposição 2.2.4 em [26]). Temos que

$$\mu(\Psi' \circ \Psi^{-1}) = \alpha(1) - \alpha(0).$$

Como wind é invariante por homotopia, podemos supor que $(\Psi_{x_T(t)})^{-1} = (\Psi'_{x_T(t)})^{-1} e^{2\pi i\alpha(t)}$. Por invariância homotópica também podemos supor que $v = u$. Note que $\{(\Psi'_{x_T(t)})^{-1}u, (\Psi'_{x_T(t)})^{-1}iu\}$ formam uma base global de $\xi|\mathscr{O}(P)$ induzindo a orientação deste fibrado. Temos que

$$(\Psi_{x_T(t)})^{-1}u = (\Psi'_{x_T(t)})^{-1}e^{2\pi i\alpha(t)}u = \cos(2\pi\alpha(t))(\Psi'_{x_T(t)})^{-1}u + \operatorname{sen}(2\pi\alpha(t))(\Psi'_{x_T(t)})^{-1}iu.$$

Como

$$\cos(2\pi\alpha(t)) + i\operatorname{sen}(2\pi\alpha(t)) = e^{2\pi i\alpha(t)},$$

obtemos que

$$\operatorname{wind}((\Psi_{x_T(\cdot)})^{-1}u, (\Psi'_{x_T(\cdot)})^{-1}u) = \alpha(1) - \alpha(0) = \mu(\Psi' \circ \Psi^{-1}).$$

$\square$

3 Curvas pseudo-holomorfas

Neste capítulo apresentamos as definições básicas de curvas pseudo-holomorfas que serão necessárias para se construir a homologia no próximo capítulo. Na seção 3.1 definimos a noção de uma estrutura quase-complexa e de uma curva pseudo-holomorfa e apresentamos algumas propriedades básicas destas curvas. Na seção 3.2, 3.3 e 3.4 estudamos curvas pseudo-holomorfas em simplectizações, cobordismos com fins cilíndrico e cobordismos divididos, respectivamente, junto com a noção de energia apropriada em cada caso. Na seção 3.5 introduzimos uma classe especial de estruturas quase-complexas. Na seção 3.6 estudamos operadores assintóticos e definimos o índice de Conley-Zehnder de uma órbita de Reeb periódica a partir destes operadores. Na seção 3.7, discutimos o comportamento assintótico de curvas pseudo-holomorfas.

3.1 Estruturas quase-complexas e curvas pseudo-holomorfas

Definição 3.1.1. Dado um fibrado vetorial E sobre uma variedade M, uma estrutura complexa em E é um automorfismo $J : E \to E$ satisfazendo que $J^2 = -\mathbb{1}$. Se $E = TM$ e J é uma estrutura complexa em TM, dizemos que J é uma estrutura quase complexa em M e chamamos o par (M, J) de uma variedade quase complexa.

Se (E, ω) é um fibrado vetorial simplético, dizemos que a estrutura J é compatível com ω se

$$\omega(v, Jv) > 0, \quad \forall v \in E \backslash \{0\}$$

e

$$\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w), \quad \forall v, w \in E.$$

Vamos denotar o conjunto das estruturas quase complexas de E compatíveis com ω como $\mathscr{J}(E, \omega)$. No caso em que $E = TM$ e ω é uma forma simplética em M escrevemos $\mathscr{J}(M, \omega) = \mathscr{J}(TM, \omega)$.

Dado um fibrado vetorial simplético, vamos considerar que $\mathscr{J}(E, \omega)$ está munido da topologia induzida pela topologia fraca em $C^\infty(M, \mathrm{Aut}(E))$, onde a topologia fraca está definida no capítulo 2 de [13] e com $\mathrm{Aut}(E)$ denotamos o fibrado de automorfismos de E. A próxima proposição se encontra em [26], Proposição 4.1.1 (i).

Proposição 3.1.1. *Se (E, ω) é um fibrado vetorial simplético, então $\mathscr{J}(E, \omega)$ é não-vazia e contrátil.*

Definição 3.1.2. Seja (W, J) uma variedade quase-complexa e (Σ, j) uma superfície de Riemann. Se $u : \Sigma \to W$, definimos

$$\bar{\partial}_J(u) = du + J \circ du \circ j$$

e chamamos $\bar{\partial}_J$ do operador de Cauchy-Riemann. Uma curva J-holomorfa é um mapa $u : \Sigma \to W$ satisfazendo que

$$\bar{\partial}_J(u) = 0. \tag{3.1.1}$$

Observação 3.1.1. Se (s, t) são coordenadas holomorfas em Σ, então a equação (3.1.1) é equivalente a equação

$$\partial_s u + J\partial_t u = 0.$$

□

Se Σ é fechada, $\Gamma \subset \Sigma$ é um conjunto finito e $u : \Sigma \backslash \Gamma \to W$ é uma curva J-holomorfa, diremos que u é uma curva J-holomorfa com furos e chamaremos os elementos de Γ de furos.

Observação 3.1.2. Um mapa de uma superficie de Riemann em uma variedade quase-complexa é chamado genericamente de uma curva pseudo-holomorfa. Quando a estrutura quase complexa J está especificada preferimos dizer que a curva em questão se chama uma curva J-holomorfa.

Definição 3.1.3. Sejam $u : (\Sigma \backslash \Gamma, j) \to (W, J)$, $v : (\Sigma' \backslash \Gamma', j') \to (W, J)$ curvas J-holomorfas com furos e $k \in \mathbb{N}$. Diremos que v é um k-recobrimento de u se existe um mapa holomorfo $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ tal que

$$v = u \circ \phi \text{ e } \deg \phi = k^1.$$

Dizemos que u é simples se não pode ser escrita como um k-recobrimento de uma curva J-holomorfa com $k > 1$.

Terminamos esta seção com um resultado que é consequência do Princípio de Similaridade de Carleman (veja [25], Teorema 2.3.5, e [35], Teorema 2.3).

Teorema 3.1.2. *Sejam $u : (\Sigma, j) \to (W, J)$ e $u' : (\Sigma', j') \to (W, J)$ duas curvas J-holomorfas. Se $z \in \Sigma$ e $z' \in \Sigma'$ são tais que $u(z) = u'(z)$, então existem vizinhanças U e U' de z e z', respectivamente tais que*

$$u(U) = u'(U')$$

ou

$$u(U \backslash \{z\}) \cap u'(U' \backslash \{z'\}) = \emptyset.$$

[1] Uma definição de $\deg \phi$ pode ser encontrada em [11]

Um estudo aprofundado de curvas pseudo-holomorfas é feito em [25], referimos o leitor para este trabalho para obter mais informações.

3.2 Estruturas quase-complexas e curvas pseudo-holomorfas em simplectizações

No que segue fixaremos uma variedade de contato de dimensão 3, (M, ξ), com estrutura de contato coorientada. Seja (W_ξ, ω_ξ) a simplectização de (M, ξ) como na definição A.5.1. Dada uma forma de contato λ em M satisfazendo que $d\lambda = \xi$ e induzindo a coorientação de ξ, temos um simplectomorfismo

$$\Psi_\lambda : (W_\xi, \omega_\xi) \to (\mathbb{R} \times M, d(e^t\lambda)), \quad \theta \mapsto (\log(\theta/\lambda_{\pi(\theta)}), \pi(\theta)),$$

como no Teorema A.5.1. Note que temos uma ação livre de $\mathbb{R}$ em W_ξ dada por

$$(c, \theta) \mapsto e^c\theta,$$

que pelo mapa Ψ_λ se transforma na ação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R} \times M$ dada pela translação na primeira coordenada.

Como $(\xi, d\lambda)$ é um fibrado vetorial simplético sobre M podemos falar do espaço $\mathscr{J}(\xi, d\lambda)$ das estruturas complexas de ξ compatíveis com $d\lambda$. Note que se $\tilde{\lambda}$ é outra forma de contato em M satisfazendo que $\xi = d\tilde{\lambda}$ e induzindo a coorientação de ξ, existe $f : M \to (0, \infty)$ tal que $\tilde{\lambda} = f\lambda$. Portanto, $d\tilde{\lambda}|\xi = fd\lambda$ e $\mathscr{J}(\xi, d\lambda) = \mathscr{J}(\xi, d\tilde{\lambda})$. Escreveremos

$$\mathscr{J}_+(\xi) = \mathscr{J}(\xi, d\lambda). \tag{3.2.1}$$

A Proposição 3.1.1 implica que $\mathscr{J}_+(\xi)$ é não-vazio e contrátil. Toda $J \in \mathscr{J}_+(\xi)$ induz uma estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ em $\mathbb{R} \times M$ compatível com $d(e^t\lambda)$ satisfazendo que

$$\tilde{J}\partial_t = X_\lambda \quad \text{e} \quad \tilde{J}|\xi = J,$$

onde estamos identificando ξ com um subfibrado vetorial de TW_ξ invariante pela ação de $\mathbb{R}$. Daí, $\hat{J} = (\Psi_\lambda)^*\tilde{J}$ é uma estrutura quase complexa em W_ξ compatível com ω_ξ. Definimos o conjunto

$$\mathscr{J}(\lambda) = \{\hat{J} \in \mathscr{J}(W_\xi, \omega_\xi) \mid J \in \mathscr{J}_+(\xi)\}.$$

Considere o conjunto

$$\Lambda = \{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \phi(\mathbb{R}) \subset [0, 1],\ \phi' \geq 0\}.$$

Para cada $\phi \in \Lambda$, tome a 1-forma em W_ξ dada por $\lambda_\phi = (\Psi_\lambda)^*(\phi\lambda)$, onde $\phi\lambda$ denota a 1-forma

$$(t, p) \mapsto \phi(t)\lambda_p$$

em $\mathbb{R} \times M$.

Definição 3.2.1. Sejam (Σ, j) uma superfície de Riemann fechada, $\Gamma \subset \Sigma$ um conjunto finito, $\hat{J} \in \mathscr{J}(\lambda)$ e $\tilde{u} : (\Sigma \backslash \Gamma, j) \to (W_\xi, \hat{J})$ uma curva $\hat{J}$-holomorfa com furos. Definimos a energia de Hofer de $\tilde{u}$ como

$$E(\tilde{u}) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\Sigma \backslash \Gamma} \tilde{u}^* d\lambda_\phi.$$

Dizemos que $\tilde{u}$ tem energia finita se

$$0 < E(\tilde{u}) < \infty.$$

Observação 3.2.1. Dada $\tilde{u}$ como acima sempre temos que $E(\tilde{u}) \geq 0$. Ademais, $E(\tilde{u}) = 0$ se, e somente se, $\tilde{u}$ é constante (veja seção 1.4 em [2]).

Seja $\tilde{u} : (\Sigma \backslash \Gamma, j) \to (W_\xi, \hat{J})$ uma curva $\hat{J}$-holomorfa com furos. Dado $z \in \Gamma$ tome uma carta holomorfa (U, ψ) ao redor de z satisfazendo que $\psi(z) = 0$. Se s_0 é grande o suficiente, o mapa

$$(s,t) \in [s_0, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \psi^{-1}(e^{-2\pi(s+it)})$$

é um difeomorfismo sobre uma vizinhança furada de z, i.e., um conjunto da forma $V \backslash \{z\}$, onde V é uma vizinhança de z em Σ. Chamaremos (s,t) de coordenadas cilíndricas positivas centradas em z. Analogamente, se s_0 é grande o suficiente, o mapa

$$(s,t) \in (-\infty, -s_0] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \psi^{-1}(e^{2\pi(s+it)})$$

é um difeomorfismo sobre uma vizinhança furada de z. Neste caso, chamamos (s,t) de coordenadas cilíndricas negativas centradas em z. Cometendo um ligeiro abuso de notação, escreveremos as representações locais de $\tilde{u}$ nestas coordenadas como

$$\tilde{u}(s,t) = \tilde{u} \circ \psi^{-1}(e^{-2\pi(s+it)}) \quad \text{ou} \quad \tilde{u}(s,t) = \tilde{u} \circ \psi^{-1}(e^{2\pi(s+it)}),$$

no caso positivo e negativo, respectivamente.

Definição 3.2.2. Sejam $\tilde{u} : (\Sigma \backslash \Gamma, j) \to (W_\xi, \hat{J})$ uma curva $\hat{J}$-holomorfa com furos e com energia finita, $z \in \Gamma$ e (s,t) coordenadas cilíndricas positivas centradas em z. Escrevamos

$$(a(s,t), u(s,t)) = \Psi_\lambda \circ \tilde{u}(s,t) \in \mathbb{R} \times M.$$

Definimos a massa de $\tilde{u}$ em z como sendo

$$m(z) = \lim_{s \to \infty} \int_{\{s\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}} u^* \lambda.$$

O furo z é dito positivo se $m(z) > 0$, negativo se $m(z) < 0$ e removível se $m(z) = 0$.

Como, por hipótese, $E(\tilde{u}) < \infty$, o limite acima sempre existe e não depende da escolha da coordenada cilíndrica. Pode-se mostrar ainda que

$$\lim_{s \to \infty} a(s,t) = \pm\infty,$$

quando $m(z) > 0$ e $m(z) < 0$, respectivamente, e quando z é um furo removível, então $\tilde{u}$ pode se estende suavemente sobre $(\Sigma \backslash \Gamma) \cup \{z\}$ (veja a discussão em [18]).

3.3 Estruturas quase-complexas e curvas pseudo-holomorfas em cobordismos com fins cilíndricos

Introduziremos uma ordem nas fibras de $\pi : W_\xi \to M$, declarando-se que

$$\theta_0 \preceq \theta_1$$

se existe $a \geq 1$ tal que $\theta_1 = a\theta_0$, onde $\theta_0, \theta_1 \in \pi^{-1}(p)$ para algum $p \in M$. Vamos escrever, $\theta_0 \prec \theta_1$ se $\theta_0 \preceq \theta_1$ e $\theta_0 \neq \theta_1$. Dadas duas formas de contato λ_- e λ_+ em M, induzindo ξ, escreveremos que $\lambda_- \prec \lambda_+$ se $(\lambda_-)_x \prec (\lambda_+)_x$ para todo $x \in M$ e, neste caso, definimos as variedades com bordo

$$\overline{W}(\lambda_-, \lambda_+) = \{\theta \in W_\xi \mid (\lambda_-)_{\pi(\theta)} \preceq \theta \preceq (\lambda_+)_{\pi(\theta)}\},$$

$$W^-(\lambda_-) = \{\theta \in W_\xi \mid \theta \preceq (\lambda_-)_{\pi(\theta)}\}$$

e

$$W^+(\lambda_+) = \{\theta \in W_\xi \mid (\lambda_+)_{\pi(\theta)} \preceq \theta\}.$$

É imediato da definição que

$$W_\xi = W^-(\lambda_-) \cup \overline{W}(\lambda_-, \lambda_+) \cup W^+(\lambda_+)$$

e que

$$\overline{W}(\lambda_-, \lambda_+) \cap W^-(\lambda_-) = \partial\overline{W}(\lambda_-, \lambda_+) \cap \partial W^-(\lambda_-)$$

e

$$\overline{W}(\lambda_-, \lambda_+) \cap W^-(\lambda_+) = \partial\overline{W}(\lambda_-, \lambda_+) \cap \partial W^-(\lambda_+).$$

Fixe agora, $\hat{J}_- \in \mathscr{J}(\lambda_-)$ e $\hat{J}_+ \in \mathscr{J}(\lambda_+)$. Vamos definir o subespaço de estruturas quase-complexas de W_ξ, denotado por $\mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+)$, tendo como elementos $\bar{J} \in \mathscr{J}(W_\xi, \omega_\xi)$ satisfazendo que $\bar{J} = \hat{J}_-$ em uma vizinhança de $W^-(\lambda_-)$ e $\bar{J} = \hat{J}_+$ em uma vizinhança de $W^+(\lambda_+)$. Pode-se adaptar a demonstração da Proposição 3.1.1 para mostrar que $\mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+)$ é não-vazio e contrátil. Se $\bar{J} \in \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+)$, dizemos que $(W_\xi, \bar{J})$ é um cobordismo com fins cilíndricos e dizemos que $W^-(\lambda_-)$ e $W^+(\lambda_+)$ são os fins cilíndricos de $(W_\xi, \bar{J})$.

Definição 3.3.1. Sejam (Σ, j) uma superfície de Riemann fechada, $\Gamma \subset \Sigma$ um conjunto finito e $\tilde{u} : \Sigma\backslash\Gamma \to W_\xi$ uma curva $\bar{J}$-holomorfa com furos. Dizemos que $\tilde{u}$ tem energia finita se

$$0 < E_-(\tilde{u}) + E_0(\tilde{u}) + E_+(\tilde{u}) < \infty,$$

onde

$$E_-(\tilde{u}) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\tilde{u}^{-1}(W^-(\lambda_-))} \tilde{u}^* d(\lambda_-)_\phi,$$

$$E_0(\tilde{u}) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\tilde{u}^{-1}(\overline{W}(\lambda_-, \lambda_+))} \tilde{u}^* \omega_\xi$$

e

$$E_+(\tilde{u}) = \sup_{\phi\in\Lambda} \int_{\tilde{u}^{-1}(W^+(\lambda_+))} \tilde{u}^* d(\lambda_+)_\phi.$$

Novamente, dado um furo $z \in \Gamma$, temos a tricotomia entre furos positivo, furos negativos e furos removíveis. Neste contexto, dizemos que z é um furo positivo se existe vizinhança U de z tal que $\tilde{u}(U\backslash\{z\}) \subset W^+(\lambda_+)$ e, escrevendo $(a,u) = \Psi_{\lambda_+} \circ \tilde{u}$, temos que

$$\lim_{\zeta\to z} a(\zeta) = \infty.$$

Dizemos que z é um furo negativo se existe vizinhança U de z tal que $\tilde{u}(U\backslash\{z\}) \subset W^-(\lambda_-)$ e, escrevendo $(a,u) = \Psi_{\lambda_-} \circ \tilde{u}$, temos que

$$\lim_{\zeta\to z} a(\zeta) = -\infty.$$

Finalmente, dizemos que z é removível se $\tilde{u}$ pode ser estendida suavemente em $(\Sigma\backslash\Gamma)\cup\{z\}$. Para mais detalhes, veja [6].

3.4 Estruturas quase-complexas e curvas pseudo-holomorfas em cobordismos divididos

Suponha que $\lambda_- \prec \lambda \prec \lambda_+$ sejam formas de contato em M induzindo ξ. Fixe $\hat{J}_- \in \mathscr{J}(\lambda_-)$, $\hat{J} \in \mathscr{J}(\lambda)$, $\hat{J}_+ \in \mathscr{J}(\lambda_+)$, $J_1 \in \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J})$ e $J_2 \in \mathscr{J}(\hat{J}, \hat{J}_+)$. Denote por $g_c(\theta) = e^c\theta$ a ação de $\mathbb{R}$ em W_ξ definida na seção 3.2. Defina a família de estruturas quase-complexas

$$J_1 \circ_R J_2 = \begin{cases} (g_R)^* J_1 \text{ em } W^-(\lambda_-) \\ (g_{-R})^* J_2 \text{ em } W^-(\lambda_+), \end{cases}$$

onde $R \geq 0$. Como $\hat{J}$ é invariante pela ação de $\mathbb{R}$ e $J_1 \circ_R J_2 = \hat{J}$ em $\bar{W}(e^{-R}\lambda_-, e^R\lambda_+)$, vemos que $J_1 \circ_R J_2$ é suave.

Dado que $J_1 = \hat{J}_-$ em uma vizinhança de $W^-(\lambda_-)$ e $J_2 = \hat{J}_+$ em uma vizinhança de $W^+(\lambda_+)$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $0 < R \leq \varepsilon_0$, então $J_1 \circ_R J_2 \in \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+)$. Dado $R > 0$, tome uma função $\varphi_R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo que $\varphi_R(a) = a + R$ se $a \leq -R - \varepsilon_0$, $\varphi_R(a) = a - R$ se $a \geq R + \varepsilon_0$ e $\varphi_R' > 0$ em $\mathbb{R}$. Podemos ainda assumir que a família $\{\varphi_R\}$ satisfaz que

$$\sup_{R,a} |\varphi_R'(a)| \leq 1$$

e

$$\inf\{\varphi_R'(a) \mid a \in (-\infty, -R] \cup [R, \infty),\ R > 0\} \geq \frac{1}{2}.$$

Sob estas condições, temos que φ_R é invertível e sua inversa φ_R^{-1} tem derivada limitada nos intervalos

$$(-\infty, \varphi_R(-R)] \text{ e } [\varphi_R(R), \infty)$$

uniformemente em R. Considere o difeomorfismo

$$\psi_R : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R} \times M, \quad (t,p) \mapsto (\varphi_R(t), p).$$

Este difeomorfismo induz o difeomorfismo

$$\Phi_R = \Psi_\lambda^{-1} \circ \psi_R \circ \Psi_\lambda : W_\xi \to W_\xi.$$

Pode-se mostrar que

$$J'_R = (\Phi_R)_*(J_1 \circ_R J_2) \in \mathscr{J}(\hat{J}_1, \hat{J}_2)$$

se R é grande o suficiente.

Definição 3.4.1. Sejam (Σ, j) uma superfície de Riemann fechada, $\Gamma \subset \Sigma$ um conjunto finito e $\tilde{u} : \Sigma \backslash \Gamma \to W_\xi$ uma curva $(J_1 \circ_R J_2)$-holomorfa com furos. Dizemos que $\tilde{u}$ tem energia finita se

$$0 < E_{\lambda_-}(\tilde{u}) + E_{\lambda_+}(\tilde{u}) + E_\lambda(\tilde{u}) + E_{(\lambda,\lambda_+)}(\tilde{u}) + E_{(\lambda_-,\lambda)}(\tilde{u}) < \infty,$$

onde

$$E_{\lambda_-}(\tilde{u}) = \sup_{\phi\in\Lambda} \int_{\tilde{u}^{-1}(W^-(e^{-R}\lambda_-))} \tilde{u}^* d(\lambda_-)_\phi,$$

$$E_\lambda(\tilde{u}) = \sup_{\phi\in\Lambda} \int_{\tilde{u}^{-1}(\bar{W}(e^{-R}\lambda, e^R\lambda))} \tilde{u}^* d\lambda_\phi,$$

$$E_{\lambda_-}(\tilde{u}) = \sup_{\phi\in\Lambda} \int_{\tilde{u}^{-1}(W^-(e^R\lambda_+))} \tilde{u}^* d(\lambda_+)_\phi,$$

$$E_{(\lambda,\lambda_+)}(\tilde{u}) = \int_{\tilde{u}^{-1}(\bar{W}(e^R\lambda, e^R\lambda_+))} \tilde{u}^*(e^{-R}\omega_\xi)$$

e

$$E_{(\lambda_-,\lambda)}(\tilde{u}) = \int_{\tilde{u}^{-1}(\bar{W}(e^{-R}\lambda_-, e^{-R}\lambda))} \tilde{u}^*(e^R\omega_\xi).$$

Novamente, os furos podem ser divididos entre positivos, negativos e removíveis, analogamente ao que foi feito nas seções anteriores ([6]).

3.5 Uma classe restrita de estruturas quase-complexas

Considere $\hat{J}_\pm \in \mathscr{J}(\lambda_\pm)$, onde $\lambda_\pm = f_\pm\lambda_0$ são formas de contato em $\mathbb{S}^3$ com $f_\pm \in \mathscr{F}$ (veja 1.3.1) satisfazendo que $f_- < f_+$ pontualmente. Vamos considerar o subconjunto

$$\mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+; L_{p,q}) \subset \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+)$$

das estruturas quase-complexas em $(W_{\xi_0}, \bar{J})$ para as quais $\pi^{-1}(K_{p,q})$ é uma subvariedade complexa de W_{ξ_0}. Uma variante da Proposição 3.1.1 mostra que $\mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+; L_{p,q})$ é não-vazio e contrátil.

Se $\lambda = f\lambda_0$ é outra forma de contato para $f \in \mathscr{F}$ satisfazendo que $f_- < f < f_+$ pontualmente, $\hat{J}_- \in \mathscr{J}(\lambda_-)$, $\hat{J} \in \mathscr{J}(\lambda)$, $\hat{J}_+ \in \mathscr{J}(\lambda_+)$, $J_1 \in \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}; L_{p,q})$ e $J_2 \in \mathscr{J}(\hat{J}, \hat{J}_+; L_{p,q})$, então $\pi^{-1}(L_{p,q})$ é também uma subvariedade complexa de $(W_{\xi_0}, J_1 \circ_R J_2)$. Ademais, $J'_R \in \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+; L_{p,q})$.

3.6 Operadores assintóticos e o índice de Conley-Zehnder

Seja λ uma forma de contato em M satisfazendo que $d\lambda = \xi$ e induzindo a coorientação de ξ e $P = (x, T) \in \mathscr{P}(\lambda)$. Vamos escrever $x_T(t) = x(Tt)$. Uma estrutura quase-complexa $J \in \mathscr{J}_+(\xi)$ induzirá um produto interno nas seções de $(x_T)^*\xi$ dado por

$$\langle \eta, \zeta \rangle = \int_0^1 (d\lambda)_{x_T(t)}(\eta(t), J_{x_T(t)}\zeta_t)dt.$$

Dada uma seção de η de $(x_T)^*\xi$, temos que

$$\mathscr{L}_{TX_\lambda}\eta(t) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} d\phi^{X_\lambda}_{-sT}(x_T(t+s))\eta(t+s)$$

é uma seção de $(x_T)^*\xi$. Definimos

$$A_P^\lambda = A_P \cdot \eta = -J \cdot \mathscr{L}_{TX_\lambda}\eta.$$

Se ∇ é um conexão livre de torção em TM, então

$$A_P \cdot \eta = -J(\nabla_{TX_\lambda} - \nabla_\eta(TX_\lambda)) = -J(\nabla_t\eta - T\nabla_\eta X_\lambda).$$

Ademais, note que

$$\begin{aligned}
\langle \eta, A_P \cdot \zeta \rangle &= \int_0^1 (d\lambda)_{x_T(t)}(\eta(t), J_{x_T(t)}A_P \cdot \zeta_t)dt \\
&= \int_0^1 (d\lambda)_{x_T(t)}(\eta(t), \mathscr{L}_{TX_\lambda}\zeta(t))dt \\
&= \int_0^1 [\mathscr{L}_{TX_\lambda}(d\lambda)_{x_T(t)}(\eta(t), \zeta(t)) - (TX_\lambda)(d\lambda(\eta, \zeta))(t) - (d\lambda)_{x_T(t)}(\mathscr{L}_{TX_\lambda}\eta(t), \zeta(t))]dt.
\end{aligned}$$

Porém,

$$\mathscr{L}_{TX_\lambda}(d\lambda) = di_{TX_\lambda}d\lambda + i_{TX_\lambda}d^2\lambda = 0$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (X_\lambda)(d\lambda(\eta, \zeta))(t)dt &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(d\lambda(\eta, \zeta)(x_T(t)))dt \\
&= (d\lambda)_{x_T(1)}(\eta(1), \zeta(1)) - (d\lambda)_{x_T(0)}(\eta(0), \zeta(0)) = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \eta, A_P \cdot \zeta \rangle &= \int_0^1 (d\lambda)_{x_T(t)}(-\mathscr{L}_{TX_\lambda}\eta(t), \zeta(t))dt \\
&= \int_0^1 (d\lambda)_{x_T(t)}(-J_{x_T(t)}\mathscr{L}_{TX_\lambda}\eta(t), J_{x_T(t)}\zeta(t))dt \\
&= \langle A_P \cdot \eta, \zeta \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, A_P induz um operador ilimitado auto-adjunto no espaço de Hilbert formado pelas seções de $(x_T)^*\xi$ que são quadrado integráveis que continuaremos denotando por A_P.

Fixe uma classe de homotopia β de trivializações simpléticas de $(\xi|\mathscr{O}(P), d\lambda)$. Esta classe induz uma classe de homotopia de trivializações de $(x_T)^*\xi, d\lambda$. Sempre existe uma trivialização Ψ nesta classe na qual o operador A_P se escreve na forma

$$-i\partial_t - S(t)$$

com $S(t)$ é um caminho 1-periódico de matrizes simétricas (veja Lema 2.6.6 de [26]). Por outro lado, dado $v \in \xi_{x_T(0)}$ defina $\eta(t) = d\phi^{X_\lambda}_{Tt}(x_T(0))v$. Temos

$$\begin{aligned} A_P \cdot \eta(t) &= -J_{x_T(t)} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} d\phi^{X_\lambda}_{-sT}(x_T(t+s)) d\phi^{X_\lambda}_{T(t+s)}(x_T(0))v \\ &= -J_{x_T(t)} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} d\phi^{X_\lambda}_{Tt}(x_T(0))v = 0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos usar as propriedades espectrais do operador A_P para calcular o índice de Conley-Zehnder de $P = (x, T)$ como explicado na seção 2.3. Mais concretamente, seja $\nu \in \sigma(A_P)$ e η autovetor associado a ν. Se $v(t) = \Psi_t \eta(t)$, temos que v não se anula e podemos encontrar uma função $\vartheta : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{v(t)}{\|v(t)\|} = e^{i\vartheta(t)}.$$

Definimos o número

$$\mathrm{wind}(\nu, P, \lambda, \beta) = \mathrm{wind}(\eta, P, \lambda, \beta) = \frac{\vartheta(1) - \vartheta(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

Como visto na seção 2.3, este número não depende de η e de ϑ. Definimos

$$\nu^- = \max\{\nu \in \sigma(A_P) \mid \nu < 0\} \quad \text{e} \quad \nu^+ = \min\{\nu \in \sigma(A_P) \mid \nu \geq 0\},$$

$$\mathrm{wind}^-(P, \lambda, \beta) = \mathrm{wind}(\nu^-, P, \lambda, \beta) \quad \text{e} \quad \mathrm{wind}^+(P, \lambda, \beta) = \mathrm{wind}(\nu^+, P, \lambda, \beta)$$

e

$$p(P, \lambda, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{wind}^-(P, \beta) = \mathrm{wind}^+(P, \lambda, \beta) \\ 1 & \text{se } \mathrm{wind}^-(P, \beta) < \mathrm{wind}^+(P, \lambda, \beta). \end{cases}$$

Do Teorema 2.3.1 e da Definição 2.3.1 obtemos:

Proposição 3.6.1. *Se $P = (x, T)$ é uma órbita não degenerada, então*

$$\mu_{CZ}(P, \lambda, \beta) = 2\mathrm{wind}^-(P, \lambda, \beta) + p(P, \lambda, \beta).$$

Da Proposição 2.3.2 obtemos:

Proposição 3.6.2. *Se $P^k = (x, kT)$ é não-degenerada para todo $k \in \mathbb{N}$, vale que:*

(a) P é elíptica se, e somente se, $\rho(P, \lambda, \beta) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Neste caso,

$$\mathrm{wind}^-(P^k, \lambda, \beta) = \lfloor k\alpha \rfloor + 1 \ \text{e}\ \mathrm{wind}^+(P^k, \lambda, \beta) = \lfloor k\alpha \rfloor \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(b) *P é positivamente hiperbólica se, e somente se, $\rho(P,\lambda,\beta)=l\in\mathbb{Z}$. Neste caso,*

$$\mathrm{wind}^-(P^k,\lambda,\beta)=kl=\mathrm{wind}^+(P^k,\lambda,\beta)\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

(c) *P é negativamente hiperbólica se, e somente se, existe $l\in\mathbb{Z}$ tal que $\rho(P,\lambda,\beta)=l+1/2$. Neste caso,*

$$\mathrm{wind}^-(P^k,\lambda,\beta)=k(l+1/2)=\mathrm{wind}^+(P^k,\lambda,\beta)$$

se k é par e

$$\mathrm{wind}^-(P^k,\lambda,\beta)=\lfloor k(l+1/2)\rfloor \text{ e } \mathrm{wind}^+(P^k,\lambda,\beta)=\lfloor k(l+1/2)\rfloor+1$$

se k é ímpar.

Observação 3.6.1. No caso em que $M=\mathbb{S}^3$, $\xi=\xi_0$ e estivermos usando uma trivialização global, vamos omitir da notação a dependência na classe de homotopia.

3.7 Comportamento assintótico

Sejam λ uma forma de contato em M satisfazendo que $d\lambda=\xi$ e induzindo a coorientação de ξ e $\hat{J}\in\mathscr{J}(\lambda)$. Fixemos uma curva $\hat{J}$-holomorfa com furos com energia finita, $\tilde{u}:(\Sigma\backslash\Gamma,j)\to(W_\xi\,\hat{J})$. Seja $z\in\Gamma$ não-removível. Tomemos coordenadas cilíndricas, (s,t), positivas ou negativas caso z seja positivo ou negativo, respectivamente, e vamos escrever $\Psi_\lambda\circ\tilde{u}(s,t)=(a(s,t),u(s,t))$. Vamos definir $\epsilon(z)=1$ se z é furo positivo e $\epsilon(z)=-1$ se z é furo negativo

No Teorema 2.74 de [1] encontramos o seguinte resultado:

Teorema 3.7.1. *Dada um sequência $\{s'_n\}$ tal que $s'_n\xrightarrow{n\to\infty}\epsilon(z)\infty$, existe uma subsequência $\{s_n\}$, $t_0\in\mathbb{R}$ e $P=(x,T)\in\mathscr{P}(\lambda)$ tal que $u(s_n,\cdot)\xrightarrow{n\to\infty}x(T(\cdot+t_0))$ em $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Definição 3.7.1. Se $P=(x,T)\in\mathscr{P}(\lambda)$ é tal que $u(s,\cdot)\xrightarrow{s\to\infty}x(T(\cdot+t_0))$ em $C^\infty(\mathbb{R})$, então dizemos que $\tilde{u}$ é positivamente assintótica à órbita P em z. Se $P=(x,T)\in\mathscr{P}(\lambda)$ é tal que $u(s,\cdot)\xrightarrow{s\to-\infty}x(T(\cdot+t_0))$ em $C^\infty(\mathbb{R})$, então dizemos que $\tilde{u}$ é negativamente assintótica à órbita P em z.

Caso a órbita P seja não-degenerada, temos um resultado muito mais fino. Começamos com o seguinte conceito:

Definição 3.7.2. Sejam $P=(\bar{x},T)\in\mathscr{P}(\lambda)$ e T_0 o período mínimo de $\bar{x}$. Um tubo de Martinet para P é um par $(\mathcal{U},\Phi)$, onde $\mathcal{U}$ é uma vizinhança de $\bar{x}(\mathbb{R})$ em M,

$$\Phi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times B,$$

B é um disco aberto centrado na origem de $\mathbb{R}^2$ satisfazendo que existe uma função

$$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B \to (0, \infty)$$

tal que $\Phi^*(f(d\vartheta + xdy)) = \lambda$, $f|(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}) \equiv T_0$, $df|(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}) \equiv 0$ e

$$\Phi(\bar{x}(T_0 t)) = (t, 0, 0).$$

Lema 3.7.2. *Sejam $P = (\bar{x}, T) \in \mathscr{P}(\lambda)$, T_0 o período mínimo de $\bar{x}$ e η uma seção de $\bar{x}^*\xi_0$, tal que $\eta(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}/T_0\mathbb{Z}$. Então, existe um tubo de Martinet $(\Phi, \mathcal{U})$ para P, tal que*

$$d\Phi_{\bar{x}(T_0 t)}\eta(T_0 t) = \partial_x.$$

Demonstração. Tome $J \in \mathscr{J}_+(\xi)$ e $\eta' : \mathbb{R}/T_0\mathbb{Z} \to \xi_{\bar{x}(Tt)}$ tal que

$$d\lambda(\eta(t), \eta'(t)) = T_0.$$

Defina o mapa $\Psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to M$ dado por

$$\Psi(\vartheta, x, y) = \exp_{\bar{x}(T_0\vartheta)}(x\eta(T_0\vartheta) + y\eta'(T_0\vartheta)),$$

onde exp é o mapa exponencial associado a métrica $\lambda \oplus \lambda + d\lambda(\cdot, J\cdot)$. Se $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ é um disco centrado na origem, pequeno o suficiente, então Ψ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B_1$ sobre uma vizinhança $\mathcal{U}_1$ de $\bar{x}(\mathbb{R})$ em M. Ademais,

$$\Psi(\vartheta, 0, 0) = \bar{x}(T_0\vartheta), \quad d\Psi_{(\vartheta,0,0)}(\partial_x) = \eta(T_0\vartheta) \quad \text{e} \quad d\Psi_{(\vartheta,0,0)}(\partial_y) = \eta'(T_0\vartheta).$$

Defina $\lambda_1 = \Psi^*\lambda$ e $\lambda_0 = d\vartheta + xdy$ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B_1$. Temos que em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$

$$\lambda_1 = T\lambda_0 \quad \text{e} \quad d\lambda_1 = Td\lambda_0.$$

Vamos mostrar que, existe um disco centrado na origem B tal que podemos encontrar um difeomorfismo $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B_1$ tal que

$$\psi(\vartheta, 0, 0) = (\vartheta, 0, 0) \quad \text{e} \quad \psi^*\lambda_1 = f\lambda_0,$$

onde $f|(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}) \equiv T_0$ e $df|(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}) \equiv 0$. Uma vez construído ψ, tomando-se $\Phi = (\psi \circ \Psi)^{-1}$ e $\mathcal{U} = \Phi(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B)$ obtemos o lema.

A ideia é utilizar o truque de Moser para construir ψ. Começamos definindo

$$\lambda_t = T_0\lambda_0 + t(\lambda_1 - T_0\lambda_0), \quad t \in [0, 1].$$

Como em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$

$$\lambda_t = \lambda_0 \quad \text{e} \quad d\lambda_t = d\lambda_0,$$

segue que, tomando-se B pequeno o suficiente, podemos supor que λ_t é uma forma de contato em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times B$ para todo $t \in [0,1]$. Queremos encontrar $Y_t \in \ker(\lambda_t)$ e $f_t : \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times B \to \mathbb{R}$ tal que

$$(\phi_t^{Y_t})^*\lambda_t = f_t\lambda_0. \tag{3.7.1}$$

Note que necessariamente devemos ter $f_0 \equiv T$ e que f_t nunca se anula para todo $t \in [0,1]$. Derivando a equação acima e usando a fórmula mágica de Cartan, obtemos

$$(\phi_t^{Y_t})^*(d\lambda_t(Y_t,\cdot) + \dot\lambda_t) = \dot f_t\lambda_0 = (\phi_t^{Y_t})^*\left[\frac{\dot f_t}{f_t}\circ(\phi_t^{Y_t})^{-1}\lambda_t\right]. \tag{3.7.2}$$

Defina

$$g_t = \dot\lambda_t(X_{\lambda_t}),$$

onde X_{λ_t} é o campo de Reeb associado a λ_t. Note que

$$\dot\lambda_t(X_{\lambda_t}) - g_t\lambda_t(X_{\lambda_t}) = 0.$$

Mais ainda, como

$$(\dot\lambda_t)_{(\vartheta,0,0)} = (\lambda_1)_{(\vartheta,0,0)} - (T\lambda_0)_{(\vartheta,0,0)} = 0, \tag{3.7.3}$$

concluímos que

$$g_t(\vartheta,0,0) = 0. \tag{3.7.4}$$

Pela condição de contato, podemos encontrar um único campo $Y_t \in \xi$ satisfazendo que

$$d\lambda_t(Y_t,\cdot) + \dot\lambda_t = g_t\lambda_t.$$

Usando (3.7.3) junto com (3.7.4), obtemos que

$$(Y_t)_{(\vartheta,0,0)} = 0.$$

Reduzindo-se B, podemos supor que $\phi_t^{Y_t}$ está definida para $[0,1]$ e

$$\phi_t^{Y_t}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times B) \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times B_1.$$

Defina f_t como a solução do problema de valor inicial (parametrizado)

$$\frac{\dot f_t}{f_t} = g_t\circ\phi_t^{Y_t}, \quad f_0 = T.$$

Aqui, novamente reduzimos B, se necessário, para que f_t esteja definido para todo $t \in [0,1]$. Sob estas definições, (3.7.2) é válida e integrando esta equação obtemos a equação (3.7.1). Seja $\psi = \phi_1^{Y_1}$ e $f = f_1$. Como $Y_1 = 0$ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\{0\}$, concluímos que

$$T_0\lambda_0 = \lambda_1 = \psi^*\lambda_1 = f\lambda_0$$

e

$$T_0 d\lambda_0 = d\lambda_1 = d(\psi^*\lambda_1) = df\wedge\lambda_0 + f\lambda_0$$

em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\{0\}$. Portanto, $f \equiv T_0$ e $df \equiv 0$ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\{0\}$. □

O Lema 3.7.2, mostra que existe uma grande flexibilidade na construção de tubos de Martinet, mais adiante vamos querer tirar vantagem desta flexibilidade. O próximo corolário vai nesta direção.

Corolário 3.7.3. *Sejam $P = (\bar{x}, T) \in \mathscr{P}(\lambda)$, onde T é o período mínimo de $\bar{x}$ e $k \in \mathbb{N}$. Então, existe um tubo de Martinet Φ,$\mathcal{U}$ para P^k, tal que $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathcal{U}\backslash\{0\}$, então*

$$\mathrm{lk}(\gamma, P) = \mathrm{Ind}(\zeta, 0),$$

onde escrevemos

$$\Phi \circ \gamma(t) = (\alpha(t), \zeta(t)) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B,$$

e onde $\mathrm{Ind}(\zeta, 0)$ *denota o índice da curva $t \mapsto \zeta(t)$ com respeito a* 0 *(veja Teorema 10.10 de [30]). Além disso, se Ψ denota uma trivialização global de $(\xi_0, d\lambda)$ e Ψ' denota a trivialização induzida pelo tubo de Martinet de $(\bar{x}^*\xi_0, d\lambda)$ e Ψ', temos que*

$$\mu(\Psi'_{\bar{x}_T(\cdot)} \circ (\Psi_{\bar{x}_T(\cdot)})^{-1}) = \mathrm{slk}(P).$$

Demonstração. Seja Σ uma superfície de Seifert para P. Seja η uma seção de $\bar{x}^*\xi_0$, tal que, $\eta(t) \in T_{\bar{x}(t)}\Sigma$ é um vetor apontando para fora para todo $t \in \mathbb{R}/\backslash T\mathbb{Z}$. Tome $(\mathcal{U}, \Phi)$, tubo de Martinet para P de forma que

$$d\Phi_{\bar{x}(Tt)}(\eta(Tt)) = \partial_x.$$

Se $\varepsilon > 0$ é pequeno o suficiente, considere as curvas $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathcal{U}\backslash\{0\}$ dadas por

$$\Phi \circ \tau_1(t) = (0, \varepsilon e^{2\pi i t}) \quad \text{e} \quad \Phi \circ \tau_2(t) = (t, \varepsilon, 0).$$

Temos que $[\tau_1]$ e $[\tau_2]$ geram o grupo de homologia $H_1(\mathcal{U}\backslash\{0\})$. Pelo Teorema B.1.2, $[\tau_1]$ gera o grupo de homologia $H_1(\mathbb{S}^3\backslash P)$. Por outro lado, se $\varepsilon > 0$ é pequeno o suficiente, pela escolha de η temos que

$$\tau_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \Sigma = \emptyset.$$

Pelo Teorema B.1.4, segue que $[\kappa_2] = 0$ em $H_1(\mathbb{S}^3\backslash P)$. Agora,

$$[\gamma] = \mathrm{Ind}(\zeta, 0)[\tau_1] + k[\tau_2] \in H_1(\mathcal{U}\backslash\{0\}).$$

Logo,

$$[\gamma] = \mathrm{Ind}(\zeta, 0)[\tau_1] \in H_1(\mathbb{S}^3\backslash P).$$

Concluímos que

$$\mathrm{lk}(\gamma, P) = \mathrm{Ind}(\zeta, 0).$$

Agora seja, Z uma seção global de ξ_0 que não se anula. Para $s > 0$ pequeno o suficiente,

$$\phi_s^Z(\bar{x}(Tt)) \in \mathcal{U},$$

para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, onde ϕ^Z denota o fluxo de Z. Para $s > 0$ pequeno o suficiente, $\Phi \circ \phi_s^Z(\bar{x}(Tt))$ é homotópico ao mapa

$$t \mapsto (t, 0, 0) + sd\Phi_{\bar{x}(Tt)} \circ Z(\bar{x}(Tt)).$$

Pela B.1.5, pelo que mostramos acima, pela Definição 2.6.1 e pela Proposição 2.6.1, temos

$$\mathrm{slk}(P) = \mathrm{lk}(\phi_s^Z, P) = \mathrm{wind}(d\Phi_{\bar{x}_T} Z, \partial_x) = \mu(\Psi'_{\bar{x}_T(\cdot)} \circ (\Psi_{\bar{x}_T(\cdot)})^{-1}).$$

$\square$

O principal resultado de [16] é

Teorema 3.7.4. *Seja $P = (x, T)$ a órbita do Teorema 3.7.1 é não-degenerada e $(\mathcal{U}, \Phi)$ é um tubo de Martinet para P. Então $u(s, \cdot) \xrightarrow{s \to \epsilon(z)\infty} x(T(\cdot + t_0))$ em $C^\infty(\mathbb{R})$. Seja $s_0 > 0$ grande o suficiente tal que para $\epsilon(z)s > s_0$, temos que $u(s, t) \in \mathcal{U}$. Neste caso, existem constantes $r, a_0 \in \mathbb{R}$ tais que, se escrevermos $\Phi \circ u(s, t) = (\vartheta(s, t), z(s, t))$, então*

$$\lim_{s \to \epsilon(z)\infty} e^{r|s|}(\sup_{t \in \mathbb{R}} |\partial^\gamma(a(s, t) - Ts - a_0)|) = 0$$

e

$$\lim_{s \to \epsilon(z)\infty} e^{r|s|}(\sup_{t \in \mathbb{R}} |\partial^\gamma(\vartheta(s, t) - k(t - t_0))|) = 0$$

para todo multi-índice $\gamma \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, onde k é a multiplicidade de P. Ademais, aumentando-se s_0, se necessário, ou $(\pi \circ \tilde{u})^* d\lambda = 0$ ou existem $\nu \in \sigma(A_P)$, η autovetor associado a ν e funções reais

$$\alpha : [s_0, \infty) \to \mathbb{R}$$

e

$$R : [s_0, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$$

tais que $\nu\epsilon(z) < 0$,

$$z(s, t) = e^{\int_{s_0}^s \alpha(\tau) d\tau}(e(t) + R(s, t)),$$

$e : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ é a representação de η nas coordenadas acima,

$$\lim_{s \to \epsilon(z)\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\partial^\gamma R(s, t)| = 0,$$

para todo multi-índice $\gamma \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ e

$$\lim_{s \to \epsilon(z)\infty} |\partial^j(\alpha(s) - \nu)| = 0$$

para todo $j \in \mathbb{Z}_+$.

Observação 3.7.1. Os resultados acima valem também no caso de cobordismos com fins cilíndricos e em cobordismos divididos. De fato, como assumimos que z é um furo não-removível, temos que $\lim_{\zeta \to z} |a(\zeta)| = \infty$, portanto, se s_0 é grande o suficiente $\tilde{u}(s, t)$ está nos fins cilíndricos e o resultado acima é aplicável.

Uma consequência do Teorema 3.7.4 que será útil é o conteúdo do Teorema 5.1 de [16]:

Corolário 3.7.5. *Nas hipóteses do Teorema 3.7.4, temos que $u(s,t) \notin P$ se s é grande o suficiente.*

Outra consequência é a de que a energia da curva $\tilde{u}$ é limitada pelas ações das órbitas às quais ela é assintótica nos furos positivos. Isto segue do fato de que todas as 2-formas que aparecem nas integrais definindo a energia são exatas em com conjunto com o uso do Teorema de Stokes. Mais formalmente:

Corolário 3.7.6. *Se $\lambda_- \prec \lambda \prec \lambda$ são formas de contato induzindo ξ e a sua coorientação, então existe $C > 0$ tal que para todo $\hat{J}_+ \in \mathscr{J}(\lambda_+)$, $\hat{J} \in \mathscr{J}(\lambda)$, $\hat{J}_- \in \mathscr{J}(\lambda_-)$, $\bar{J}_1 \in \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J})$, $\bar{J}_2 \in \mathscr{J}(\hat{J}, \hat{J}_+)$, $R > 0$ e para toda curva $\bar{J}_1 \circ_R \bar{J}_2$-holomorfa, $\tilde{u}$, com energia finita, temos que*

$$E(\tilde{u}) \leq C\mathscr{A}(\tilde{u}),$$

onde $\mathscr{A}(\tilde{u})$ denota a soma das λ_+-ações das órbitas de Reeb fechadas às quais $\tilde{u}$ é assintótica nos furos positivos.

Um resultado análogo vale para curvas $\bar{J}_1$-holomorfas com energia finita.

Um complemento importante ao Teorema 3.7.4 é o seguinte resultado que pode ser encontrado no Teorema 6.11 de [18].

Teorema 3.7.7. *Vamos denotar por Γ^+ e Γ^- os furos positivos e negativos de $\tilde{u}$, respectivamente. Se*

$$\int_{\Sigma \backslash \Gamma} u^* d\lambda = 0,$$

então existe $(x, T) \in \mathscr{P}(\lambda)$ tal que $T = E(\tilde{u})$ e existe um mapa holomorfo não constante $\phi : \Sigma \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ satisfazendo que

$$\phi^{-1}(\infty) = \Gamma^+ \quad e \quad \phi^{-1}(0) = \Gamma^-$$

e que podemos escrever

$$\tilde{u} = \tilde{\eta} \circ \phi | \Sigma \backslash \Gamma,$$

onde $\tilde{\eta} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \times M$ é definida por

$$\tilde{\eta}(e^{2\pi(s+it)}) = (Ts + c, x(Tt)),$$

para uma dada constante $c \in \mathbb{R}$.

Definição 3.7.3. O mapa como η do Teorema 3.7.7 é chamado um cilindro trivial.

4 Definição da homologia de contato no complementar do enlace de tipo (p, q)

Neste capítulo construiremos uma teoria de homologia adaptada ao nosso problema baseada em [27] e [20]. Esta homologia será definida a partir de um complexo de cadeias cujos geradores serão órbitas de Reeb periódicas em certas classes de homotopia específicas no complementar do enlace de tipo p, q e cujo operador de bordo contará modulo 2 os cilindros pseudo-holomorfos entre estas órbitas e sob algumas hipóteses sobre a forma de contato. Na seção 4.1 definiremos o complexo e mostraremos que a homologia está bem definida. Na seção 4.2 definiremos uma noção de morfismos entre complexos de cadeias. Na seção 4.3 estudaremos um morfismo entre complexos de cadeias especial.

4.1 O complexo de cadeias

Neste capítulo vamos considerar $\mathbb{S}^3$ munida com a sua estrutura de contato tight padrão ξ_0 e vamos escrever

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(x_0 dy_0 - y_0 dx_0 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1).$$

Vamos fixar $(p, q), (\hat{p}, \hat{q}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimos tais que $(\hat{p}, \hat{q}) \neq (p, q)$. Vamos denotar por $L_0 = K_1 \cup K_2$ o enlace de Hopf padrão e por $L_{p,q} = L_0 \cup K_{p,q}$ o enlace de tipo (p, q) padrão como na Definição 1.1.3. Vamos escrever também

$$\mathscr{F}_{p,q} = \{f \in C^\infty(\mathbb{S}^3, (0, \infty)) \mid df(v) = 0, \forall v \in \xi_0|L_{p,q}\}$$

como na Definição 1.3.1. Se $f \in \mathscr{F}_{p,q}$, vamos escrever

$$\theta_i(f) = \rho(K_i, f\lambda_0) - 1, \quad i = 1, 2,$$

onde ρ é o número de rotação K_i visto como órbita prima de $X_{f\lambda_0}$ com respeito a alguma trivialização global do fibrado ξ_0 (veja seção 2.5).

Tome $\lambda = h\lambda_0$, onde $h \in \mathscr{F}_{p,q}$. Para construir a homologia de contato no complementar do enlace de tipo (p, q) vamos supor que existe $T > 0$ tal que:

(a) Toda órbita de Reeb fechada de λ com ação menor ou igual a T é não-degenerada;

(b) Não existem órbitas contráteis de λ em $\mathbb{S}^3 \backslash L_{p,q}$ com ação menor ou igual a T;

(c) Os multiplicadores de Floquet transversais das órbitas K_1 e K_2, vistas como órbitas primas de λ, são da forma $e^{2\pi i\alpha}$ com $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Observação 4.1.1. Note que a condição (c) acima garante que K_i^n são não-degeneradas e elípticas para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Definição 4.1.1. Vamos definir por

$$\mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda) = \{P = (x,S) \in \mathscr{P}(\lambda) \mid \mathscr{O}(P) \subset \mathbb{S}^3 \backslash L_{p,q}, S \leq T, \mathrm{lk}(P,K_1) = \hat{p} \text{ e } \mathrm{lk}(P,K_2) = \hat{q}\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ denotamos por $C_k(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ livremente gerado pelas órbitas em $\mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)$ com índice de Conley-Zehnder igual a $k+1$. Ou seja, os elementos de $C_k(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)$ são da forma

$$\sum_{\substack{P \in \mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda) \\ \mu_{CZ}(P,\lambda) = k+1}} a_P |P|,$$

onde $a_P \in \mathbb{Z}_2$. Aqui o índice de Conley-Zehnder é calculado com respeito a alguma trivialização global de ξ_0.

Seja agora J uma estrutura quase-complexa em ξ_0 compatível com $d\lambda_0$. Defina a estrutura quase-complexa em W_{ξ_0} (veja A.5.1), $\hat{J} \in \mathscr{J}(\lambda)$ como na seção 3.2. Lembramos que existe uma ação livre de $\mathbb{R}$ em W_{ξ_0} dada por

$$g : \mathbb{R} \times W_{\xi_0} \to W_{\xi_0}, \quad (c,\theta) \mapsto g_c(\theta) = e^c \theta.$$

Vamos denotar por $\pi : W_{\xi_0} \to \mathbb{S}^3$ a projeção do fibrado.

Vamos usar a identificação $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0,\infty\}$ via o mapa $(s,t) \mapsto e^{2\pi(s+it)}$, onde $\hat{\mathbb{C}}$ denota a esfera de Riemann (plano complexo estendido). Lembramos que $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$. Se $P, P' \in \mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)$ e

$$\tilde{u}, \tilde{v} : \mathbb{S}^2 \backslash \{0,\infty\} \to W_{\xi_0}$$

são curvas $\hat{J}$-holomorfas com energia finita, assintóticas positivamente a P em ∞, assintóticas negativamente a P' em 0 e tais que

$$\tilde{u}(\mathbb{S}^2 \backslash \{0,\infty\}) \cap \pi^{-1}(K_{p,q}) = \emptyset \text{ e } \tilde{v}(\mathbb{S}^2 \backslash \{0,\infty\}) \cap \pi^{-1}(K_{p,q}) = \emptyset,$$

dizemos que $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são equivalentes se existe um biholomorfismo $\phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ satisfazendo que $\phi(0) = \phi(0)$, $\phi(\infty) = \infty$ e

$$\tilde{v} = \tilde{u} \circ \phi.$$

Como os biholomorfismos da esfera de Riemann que fixam 0 e ∞ são homotetias, concluímos que $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são equivalentes exatamente quando existem $(s_0, t_0) \in \mathbb{R}$ tais que

$$\tilde{v}(s,t) = \tilde{u}(s + s_0, t + t_0).$$

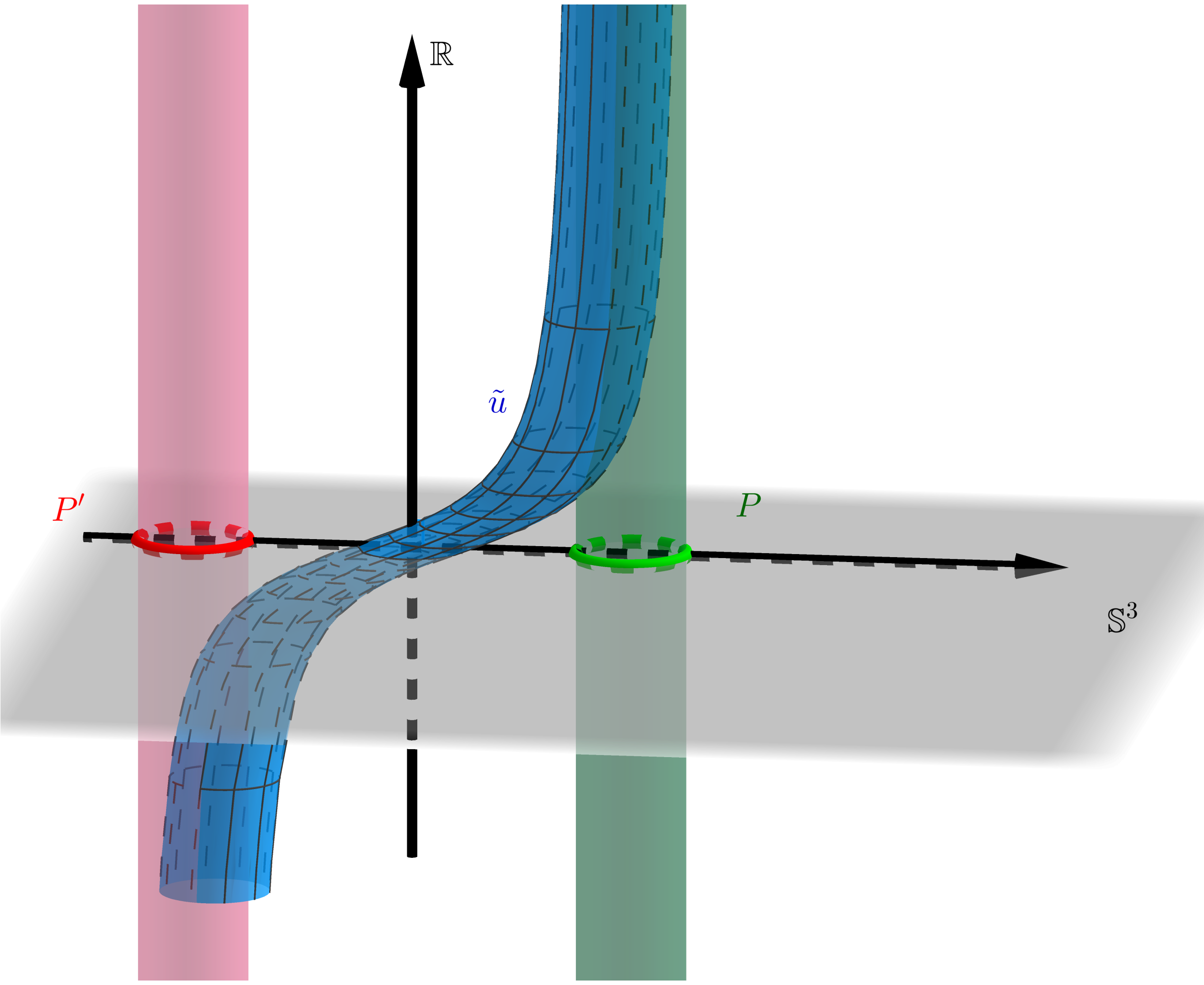

Figura 4.1.1 – Elementos de $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P, P')$.

A curva $\tilde{u}$ aparece em azul e os cilindros triviais sobre P e P' aparecem em verde e vermelho, respectivamente. Aqui identificamos W_{ξ_0} com $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$

O espaço destas classes de equivalência de curvas $\hat{J}$-holomorfas como definido acima será denotado por $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P, P')$.

Como $(\hat{p}, \hat{q})$ é coprimo temos que P e P' são órbitas de Reeb primas. Logo, se $[\tilde{u}] \in \mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P, P')$, então $\tilde{u}$ é simples. Resultados de [8] (veja também o capítulo 3 de [25]) obtemos que

Teorema 4.1.1. *Existe um conjunto residual $\mathscr{J}_{reg}(\lambda) \subset \mathscr{J}(\lambda)$ tal que se $\hat{J} \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda)$ e se $\mu_{CZ}(P, \lambda) - \mu_{CZ}(P', \lambda) \geq 0$, então então $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P, P')$ tem a estrutura de uma variedade de dimensão $\mu_{CZ}(P, \lambda) - \mu_{CZ}(P', \lambda)$.*

Se $\mu_{CZ}(P, \lambda) - \mu_{CZ}(P', \lambda) > 0$ a ação g induz uma ação suave e livre em $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P, P')$.

Se $\mu_{CZ}(P, \lambda) - \mu_{CZ}(P', \lambda) = 0$ e $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P, P') \neq \emptyset$, então $P = P'$, os elementos de $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P, P')$ são cilindros triviais e g induz a ação trivial.

Observação 4.1.2. O conjunto $\mathscr{J}_{reg}(\lambda)$ depende de (p, q), $(\hat{p}, \hat{q})$ e de T, mas por simplicidade não explicitaremos esta dependência na notação.

Observação 4.1.3. Aqui cabe ressaltar, que $\hat{J} \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda)$ significa exatamente que para todo cilindro $[\tilde{u}] \in \mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')$, a linearização do operador de Cauchy-Riemann é um operador de Fredholm sobrejetivo. Para ver o contexto analítico-funcional desta discussão veja [8] e [34].

Lema 4.1.2. *Sejam $\hat{J} \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda)$ e $P, P' \in \mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)$.*

(a) Se

$$\mu_{CZ}(P,\lambda) - \mu_{CZ}(P',\lambda) = 1,$$

então $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')/\mathbb{R}$ é compacto e portanto é um conjunto finito.

(b) Se

$$\mu_{CZ}(P,\lambda) - \mu_{CZ}(P',\lambda) = 2,$$

então $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')/\mathbb{R}$ admite uma compactificação que é uma variedade de dimensão 1 cujo bordo pode ser identificado com o conjunto

$$\bigcup_{\substack{P'' \in \mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda) \\ \mu_{CZ}(P,\lambda) - \mu_{CZ}(P'',\lambda) = 1}} (\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P'')/\mathbb{R}) \times (\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P'',P')/\mathbb{R}).$$

Demonstração. A demonstração é uma pequena variação das demonstrações do Teorema 3.2 e Teorema 3.3 de [20]. A única observação que precisamos fazer é que os cilindros quebrados que possivelmente aparecem na compactificação do espaço $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')/\mathbb{R}$ não podem quebrar em órbitas $P \cap K_{p,q}$, pois caso contrário, teríamos que $P = K^r_{p,q}$ para $r \geq 1$ e

$$\text{link}(P, K_1) = \text{link}(K^r_{p,q}, K_1) = rp$$

e

$$\text{link}(P, K_2) = \text{link}(K^r_{p,q}, K_2) = rq.$$

Contudo, estes cilindros podem ser aproximados por cilindros em $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')/\mathbb{R}$ e que força que

$$\text{link}(P, K_1) = \hat{p} \quad \text{e} \quad \text{link}(P, K_2) = \hat{q},$$

contradizendo que $(\hat{p},\hat{q}) \neq \mathbb{R}_+(p,q)$. □

Teorema 4.1.3. *Se $\hat{J} \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda)$, a sequência de mapas $\partial_k = \partial_k(\lambda, J) : C_k(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda) \to C_{k-1}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)$ satisfazendo que*

$$\partial_k(|P|) = \sum_{P' \in C_{k-1}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)} [\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')/\mathbb{R}]_2 |P'|,$$

está bem definida, onde $[\cdot]_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ denota o mapa quociente. Ademais, $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$.

Demonstração. O mapa está bem definido, pois pelo Lema 4.1.2 (a).

Suponha agora que $P \in C_k(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)$. Então

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1}\circ\partial_k(|P|) &= \sum_{P'\in C_{k-1}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)} [\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')/\mathbb{R}]_2\partial_{k-1}(|P'|)\\
&= \sum_{\substack{P'\in C_{k-1}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)\\ P''\in C_{k-2}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)}} [\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')/\mathbb{R}]_2[\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P',P'')/\mathbb{R}]_2|P''|\\
&= \sum_{\substack{P'\in C_{k-1}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)\\ P''\in C_{k-2}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda)}} [(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')/\mathbb{R})(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P',P'')/\mathbb{R})]_2|P''|
\end{aligned}$$

Pelo item (b) do Lema 4.1.2,

$$(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')/\mathbb{R})(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P',P'')/\mathbb{R})$$

é exatamente o número de elementos do bordo da variedade de dimensão 1, a saber, $\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P'')/\mathbb{R}$. Logo,

$$[(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P,P')/\mathbb{R})(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}}(P',P'')/\mathbb{R})]_2 = 0.$$

□

Do Teorema 4.1.3, concluímos que $(C_k(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda),\partial_k)$ forma um complexo de cadeias.

Definição 4.1.2. A homologia do complexo $(C_k(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda),\partial_k)$ será denotada por

$$H_*(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda,J).$$

4.2 Morfismos entre complexos de cadeias

Sejam $h_+,h_-\in\mathscr{F}_{p,q}$ e escrevemos $\lambda_\pm = h_\pm\lambda_0$. Supomos que existe $T>0$ tal que as condições (a), (b) e (c) da seção são satisfeitas para ambas as formas de contato $\lambda_\pm$ para alguma escolha de $T>0$. Vamos supor ainda que $h_+>h_-$ em cada ponto e que

$$\theta_i(h_+)\geq\theta_i(h_-),\quad i=1,2.$$

Escolhemos $J_\pm\in\mathscr{J}_+(\xi_0)$ tais que $\hat{J}_\pm\in\mathscr{J}_{reg}(\lambda_\pm)$ como explicado no Teorema 4.1.1.

Dados $\bar{J}\in\mathscr{J}(\hat{J}_-,\hat{J}_+;L_{p,q})$, $P\in\mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_+)$ e $P'\in\mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_-)$ definimos $\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P,P')$ como o espaço de de classes de equivalência de cilindro $\bar{J}$-holomorfos com energia finita que são positivamente assintóticos a P e negativamente assintóticos a P' e com imagem contida em $W_{\xi_0}\backslash\pi^{-1}(L_{p,q})$, onde dois destes cilindros são ditos equivalentes se um é a reparametrização do outro, ou seja, se um é obtido a partir do outro via composição com um biholomorfismo. Usando que $(\hat{p},\hat{q})$ é coprimo e que, portanto, os cilindro que aparecem em $\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P,P')$ são simples (veja [33]) e usando resultados de [5], [8], [26] e [27], obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1. *Existe um conjunto residual $\mathscr{J}_{reg}(\hat{J}_-, \hat{J}_+; L_{p,q}) \subset \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+; L_{p,q})$ tal que se $\bar{J} \in \mathscr{J}_{reg}(\hat{J}_-, \hat{J}_+; L_{p,q})$ e se $\mu_{CZ}(P, \lambda_+) - \mu_{CZ}(P', \lambda_-) \geq 0$, então então $\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P, P')$ tem a estrutura de uma variedade de dimensão $\mu_{CZ}(P, \lambda_+) - \mu_{CZ}(P', \lambda_-)$.*

Uma pequena adaptação da demonstração do Teorema 3.4 e do Teorema 3.5 de [20] nos dá que

Lema 4.2.2. *Sejam $\hat{J}_\pm \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda_\pm)$, $\bar{J} \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda_-, \lambda_+; L_{p,q})$, $P \in \mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda_+)$ e $P' \in \mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda_-)$.*

(a) Se

$$\mu_{CZ}(P, \lambda_+) = \mu_{CZ}(P', \lambda_-),$$

então $\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P, P')$ é compacto e portanto é um conjunto finito.

(b) Se

$$\mu_{CZ}(P, \lambda_+) - \mu_{CZ}(P', \lambda_-) = 1,$$

então $\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P, P')$ admite uma compactificação que é uma variedade de dimensão 1 cujos bordo pode ser identificado com a união dos conjuntos

$$\bigcup_{\substack{P^+ \in \mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_+) \\ \mu_{CZ}(P,\lambda_+) - \mu_{CZ}(P^+,\lambda_+) = 1}} (\mathscr{M}^T_{\hat{J}_+}(P, P^+)/\mathbb{R}) \times (\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P^+, P'))$$

e

$$\bigcup_{\substack{P^- \in \mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_-) \\ \mu_{CZ}(P^-,\lambda_-) - \mu_{CZ}(P',\lambda_-) = 1}} (\mathscr{M}^T_{\bar{J}_+}(P, P^-)) \times (\mathscr{M}^T_{\hat{J}_-}(P^-, P')/\mathbb{R}).$$

Teorema 4.2.3. *Se $\hat{J}_\pm \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda_\pm)$ e $\bar{J} \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda_-, \lambda_+; L_{p,q})$ a sequência de mapas*

$$\Phi(\bar{J})_k : C_k(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda_+) \to C_k(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda_-),$$

satisfazendo que

$$\Phi(\bar{J})_k(|P|) = \sum_{P' \in C_k(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_-)} [\#\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P, P')]_2 |P'|$$

está bem definida. Ademais

$$\Phi(\bar{J})_{k-1} \circ \partial_k(\lambda_+, J_+) - \partial_k(\lambda_-, J_-) \circ \Phi(\bar{J})_k = 0.$$

Demonstração. Que o mapa $\Phi(\bar{J})_k$ está bem definido segue do Lema 4.2.2 (a).

Suponha que $P \in C_k(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda_+)$. Temos que

$$\Phi(\bar{J})_{k-1} \circ \partial_k(\lambda_+, J_+)(|P|) = \sum_{\substack{P' \in C_{k-1}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_+) \\ P'' \in C_{k-1}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_-)}} [(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}_+}(P, P'')/\mathbb{R})(\#\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P', P''))]_2 |P''|$$

e

$$\partial_k(\lambda_-, J_-) \circ \Phi(\bar{J})_k(|P|) = \sum_{\substack{P' \in C_k(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_-) \\ P'' \in C_{k-1}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_-)}} [(\#\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P, P''))(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}_-}(P', P'')/\mathbb{R})]_2 |P''|.$$

Assim, se $P'' \in C_{k-1}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda_-)$ o coeficiente associado a $|P''|$ em

$$\Phi(\bar{J})_{k-1} \circ \partial_k(\lambda_+, J_+)(|P|) - \partial_k(\lambda_-, J_-) \circ \Phi(\bar{J})_k(|P|)$$

é

$$[(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}_+}(P, P'')/\mathbb{R})(\#\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P', P'')) - (\#\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P, P''))(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}_-}(P', P'')/\mathbb{R})]_2 = 0,$$

pois

$$(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}_+}(P, P'')/\mathbb{R})(\#\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P', P'')) + (\#\mathscr{M}^T_{\bar{J}}(P, P''))(\#\mathscr{M}^T_{\hat{J}_-}(P', P'')/\mathbb{R})$$

é o número de elementos no bordo de uma variedade de dimensão 1 compacto, pelo Lema 4.2.2 (b), e é, por conseguinte, um número par. □

Vamos mostrar agora que o mapa induzido em homologia pelo morfismo de cadeias $\Phi(\bar{J})$ não depende da escolha de $\bar{J} \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda_-, \lambda_+; L_{p,q})$. Para este fim, tome $\bar{J}_0, \bar{J}_1 \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda_-, \lambda_+; L_{p,q})$. Vamos denotar o espaço de homotopias suaves entre $\bar{J}_0$ e $\bar{J}_1$ em $\mathscr{J}(\lambda_-, \lambda_+; L_{p,q})$ como

$$\tilde{\mathscr{J}}(\bar{J}_0, \bar{J}_1; L_{p,q}).$$

Dados $P \in \mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda_+)$, $P' \in \mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda_-)$ e $\{\bar{J}_t\} \in \tilde{\mathscr{J}}(\bar{J}_0, \bar{J}_1; L_{p,q})$ definimos

$$\mathscr{M}^T_{\{\bar{J}_t\}}(P, P') = \{(t, [\tilde{u}]) \mid t \in [0, 1] \text{ e } [\tilde{u}] \in \mathscr{M}^T_{\bar{J}_t}(P, P')\}.$$

Variações dos resultados da seção 3.2 de [26] provam que

Teorema 4.2.4. *Existe um conjunto residual $\tilde{\mathscr{J}}_{reg}(\bar{J}_0, \bar{J}_1; L_{p,q}) \subset \tilde{\mathscr{J}}(\bar{J}_0, \bar{J}_1; L_{p,q})$ tal que se*

$$\mu_{CZ}(P, \lambda_+) - \mu_{CZ}(P', \lambda_-) + 1 \geq 0,$$

então $\mathscr{M}^T_{\{\bar{J}_t\}}(P, P')$ é uma variedade de dimensão $\mu_{CZ}(P, \lambda_+) - \mu_{CZ}(P', \lambda_-) + 1$.

Aqui é usado fortemente o fato de $(\hat{p}, \hat{q})$ ser coprimo e, logo, todo cilindro pseudo-holomorfo em $\mathscr{M}^T_{\{\bar{J}_t\}}(P, P')$ é simples.

Novamente, usando uma pequena modificação da demonstração do Teorema 3.6 e Teorema 3.7 de [20], obtemos

Lema 4.2.5. *Nas condições acima, se $\mu_{CZ}(P, \lambda_+) - \mu_{CZ}(P', \lambda_-) + 1 = 0$, então $\mathscr{M}^T_{\{\bar{J}_t\}}(P, P')$ é finito. Se $\mu_{CZ}(P, \lambda_+) - \mu_{CZ}(P', \lambda_-) + 1 = 1$, então $\mathscr{M}^T_{\{\bar{J}_t\}}(P, P')$ admite uma compactificação que é uma variedade compacta de dimensão 1 cujo bordo pode ser identificado com a união dos conjuntos*

$$\bigcup_{\substack{P^+ \in \mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_+) \\ \mu_{CZ}(P^+,\lambda_+) = \mu_{CZ}(P,\lambda_+) - 1}} (\mathscr{M}^T_{\hat{J}_+}(P, P')/\mathbb{R}) \times (\mathscr{M}^T_{\{\bar{J}_t\}}(P^+, P')),$$

$$\bigcup_{\substack{P^- \in \mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_+) \\ \mu_{CZ}(P^-,\lambda_+)=\mu_{CZ}(P',\lambda_+)+1}} (\mathscr{M}^T_{\hat{J}_-}(P^-, P')/\mathbb{R}) \times (\mathscr{M}^T_{\{\bar{J}_t\}}(P, P^-))$$

e

$$\mathscr{M}^T_{\bar{J}_0}(P, P') \cup \mathscr{M}^T_{\bar{J}_1}(P, P').$$

Uma demonstração análoga ao do Teorema 4.2.3 prova que

Teorema 4.2.6. *Nas condições acima a sequência de mapas*

$$T(\{J_t\})_k : C_k(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda_+) \to C_{k+1}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda_-),$$

satisfazendo que

$$T(\{J_t\})_k(|P|) = \sum_{P' \in C_{k+1}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_-)} [\#\mathscr{M}^T_{\{\bar{J}_t\}}(P, P')]_2 |P'|$$

está bem definida. Ademais

$$\Phi(\bar{J}_1)_k - \Phi(\bar{J}_0)_k = T(\{J_t\})_{k-1} \circ \partial(\lambda_+, J_+) - \partial(\lambda_-, J_-) \circ T(\{J_t\})_k.$$

Como o espaço $\mathscr{J}_{reg}(\lambda_-, \lambda_+; L_{p,q})$ é contrátil, obtemos que

Corolário 4.2.7. *Dados $\bar{J}_0, \bar{J}_1 \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda_-, \lambda_+; L_{p,q})$, então $\Phi(\bar{J}_0)$ e $\Phi(\bar{J}_1)$ induzem o mesmo mapa em homologia.*

4.3 Um morfismo entre cadeias especial

Seja $h \in \mathscr{F}_{p,q}$ e $c > 0$. Vamos escrever $\lambda = h\lambda_0$. Suponha λ satisfaz (a), (b) e (c), trocando-se T por T/c. Dado $J \in \mathscr{J}_+(\xi_0)$, sejam $\hat{J}_+ \in \mathscr{J}(\lambda)$ e $\hat{J}_- \in \mathscr{J}(c\lambda)$ induzidos por J. Se $\hat{J}_+ \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda)$ com respeito a T/c, então $\hat{J}_- \in \mathscr{J}_{reg}(\lambda)$ com respeito a T. Para ver isto, note que o difeomorfismo

$$\Theta = \Psi_\lambda^{-1} \circ \Psi_{c\lambda} : W_{\xi_0} \to W_{\xi_0}$$

satisfaz que

$$\Theta^* \hat{J}_+ = \hat{J}_-,$$

(veja seção 3.2). Portanto, se $\tilde{u}$ é uma curva $\hat{J}_+$-holomorfo, definindo $\tilde{v} = \Theta^{-1} \circ \tilde{u}$, temos que

$$\begin{aligned} d\tilde{v} + \hat{J}_- \circ d\tilde{v} \circ j &= d\Theta^{-1} \circ d\tilde{u} + \hat{J}_- \circ d\Theta^{-1} \circ d\tilde{u} \circ j \\ &= d\Theta^{-1} \circ (d\tilde{u} + \hat{J}_+ \circ d\tilde{u} \circ j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
E(\tilde{v}) &= \sup_{\phi\in\Lambda} \int \tilde{v}^* d(c\lambda)_\phi \\
&= c \sup_{\phi\in\Lambda} \int \tilde{u}^* d\lambda_\phi \\
&= cE(\tilde{u}).
\end{aligned}
$$

Agora, a bijeção

$$j : \mathscr{P}(\lambda) \to \mathscr{P}(c\lambda), \quad (x, T') \mapsto (x_{c^{-1}}, cT'),$$

onde

$$x_{c^{-1}}(t) = x(c^{-1}t),$$

induz a família de isomorfismos

$$j_* : C_*(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T/c, \lambda) \to C_*(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, c\lambda). \tag{4.3.1}$$

Como Θ induz uma identificação dos espaços cilindro holomorfos usados na definição de $\partial(c\lambda, J) \circ j_*$ e $j_* \circ \partial(\lambda, J)$, temos que j_* é um isomorfismo de cadeias e, portanto, induz um isomorfismo em homologia.

Agora suponha que $0 < c < 1$. Vamos considerar a inclusão

$$i_* : C_*(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, \lambda) \to C_*(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T/c, \lambda).$$

Temos o seguinte resultado, cuja demonstração é idêntica à demonstração do Lema 4.7 de [20]:

Lema 4.3.1. *Dado $\bar{J} \in \mathscr{J}_{reg}(\hat{J}_-, \hat{J}_+; L_{p,q})$, então $\Phi(\bar{J})_*$ e $j_* \circ i_*$ induzem os mesmos mapas em homologia.*

Observe que o morfismo $\Phi(\bar{J})_*$ está bem definido pois $\theta_i(ch) = \theta_i(c)$, $i = 1, 2$.

5 Modelos Morse-Bott

Neste capítulo construímos formas de contato nas quais a homologia definida no capítulo 4 esteja definida e seja não-nula. Na seção 5.1, construímos formas de contato Morse-Bott nas quais o fluxo de Reeb é integrável e realiza um enlace de tipo (p, q) como órbitas periódicas. Na seção 5.2, utilizando uma adaptação do Teorema 4.2 de [20], perturbamos estas formas para obter formas de contato satisfazendo as hipóteses para a construção da homologia. Na seção 5.3, utilizamos a teoria de interseção de Siefring para calcular esta homologia e mostrar que ela é não-nula. Na seção 5.4, construímos um isomorfismo entre estas homologias quando uma das formas de contato é um múltiplo positivo da outra.

5.1 Construção de modelos Morse-Bott

Começaremos introduzindo uma definição que será útil.

Definição 5.1.1. Dizemos que o vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ é incomensurável se

$$\mathbb{R}_+(a, b) \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \emptyset,$$

caso contrário dizemos que o vetor é comensurável.

Teorema 5.1.1. *Dados $\theta > 0$ e $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com $\arg(p, q) \neq \arg(1, \theta)$ e $p + q\theta > 0$, existe uma curva $\gamma_{(\theta,p,q)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, que escrevemos $\gamma_{(\theta,p,q)}(t) = (x(t), y(t))$, satisfazendo que:*

(1) $x(0) = \theta$, $y(0) = 0$ *e* $y'(0) > 0$;

(2) $x(1) = 0$, $y(1) = 1$ *e* $x'(1) < 0$;

(3) $x > 0$ *e* $y > 0$ *em* $(0, 1)$;

(4) $xy' - x'y > 0$ *para todo* $t \in [0, 1]$;

(5) *existem* $t_-, t_1, t_2, t_+ \in (0, 1)$ *com* $t_- < t_1 < t_2 < t_+$, *tais que* $x'y'' - x''y' < 0$ *em* $(t_-, t_1) \cup (t_2, t_+)$ *e* $x'y'' - x''y' > 0$ *em* (t_1, t_2);

(6) $(y', -x') = (1, \theta)$ *para* $t \in [0, t_-] \cup [t_+, 1]$;

(7) *existe* $t_{p,q} \in (0, 1)$ *com* $t_1 < t_{p,q} < t_2$ *e tal que* $(y'(t_{p,q}), -x'(t_{p,q})) \in \mathbb{R}_+(p, q)$;

(8) $(y'(t_1), -x'(t_1))$ *e* $(y'(t_2), -x'(t_2))$ *são irracionais e* $(y'(t_1), -x'(t_1)) \prec (y'(t), -x'(t)) \prec (y'(t_2), -x'(t_2))$ *para todo* $t \in [0, 1]\backslash\{t_1, t_2\}$;

(9) *Para cada vetor v satisfazendo que $(y'(t_1), -x'(t_1)) \prec v \prec (1,\theta)$ ou $(1,\theta) \prec v \prec (y'(t_2), -x'(t_2))$ existem exatamente dois valores $t_v, t'_v \in [0,1]$ para os quais $(y', -x') \in \mathbb{R}_+ v$. Ademais, $t_v < t_1 < t'_v$ se $(y'(t_1), -x'(t_1)) \prec v \prec (1,\theta)$ e $t_v < t_2 < t'_v$ se $(1,\theta) \prec v \prec (y'(t_2), -x'(t_2))$. Além disso, existe exatamente um valor $t_\theta \in (t_1, t_2)$ para o qual $(y', -x') \in \mathbb{R}_+(1,\theta)$.*

Demonstração. Considere

$$\rho(t) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{t^2-1}\right) & \text{se } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos

$$\rho'(t) = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\rho(t) \quad \text{e} \quad \rho''(t) = \frac{(6t^2+2\sqrt{3})(t-s_1)(t-s_2)}{(t^2-1)^4}\rho(t),$$

onde

$$s_2 = -s_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Para simplificar a notação adiante, vamos escrever.

$$P(t) = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} \quad \text{e} \quad Q(t) = \frac{(6t^2+2\sqrt{3})(t-s_1)(t-s_2)}{(t^2-1)^4}.$$

Fixe $\theta > 0$. Dado $0 < \varepsilon < \min(\theta^2(1+\theta^2)^{-1}, 1-\theta^2(1+\theta^2)^{-1})$, vamos definir $\rho_{\theta,\varepsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\rho_{\theta,\varepsilon}(t) = \rho(\varepsilon^{-1}[t - \theta^2(1+\theta^2)^{-1}]).$$

Defina $\gamma_{\theta,\varepsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, como

$$\gamma_{\theta,\varepsilon}(t) = (x(t), y(t)) = ((1-t)\theta + \rho_{\theta,\varepsilon}(t), t + \theta\rho_{\theta,\varepsilon}(t)).$$

Vamos mostrar que existe $\gamma_{\theta,\varepsilon}$ satisfaz as condições (1)-(9) para alguma escolha de ε (ver Figura 5.1.1). As condições (1), (2) e (3) são imediatas. Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} xy' - x'y &= \theta + (1+\theta^2)\rho_{\theta,\varepsilon}(t) + [\theta^2 - (1+\theta^2)t]\rho'_{\theta,\varepsilon}(t) \\ &= \theta + (1+\theta^2)\rho_{\theta,\varepsilon}(t) + \varepsilon^{-1}[\theta^2 - (1+\theta^2)t]P(\varepsilon^{-1}[t-\theta^2(1+\theta^2)^{-1}])\rho_{\theta,\varepsilon}(t) \\ &= \theta + (1+\theta^2)\rho_{\theta,\varepsilon}(t) - (1+\theta^2)(\varepsilon^{-1}[t-\theta^2(1+\theta^2)^{-1}])P(\varepsilon^{-1}[t-\theta^2(1+\theta^2)^{-1}])\rho_{\theta,\varepsilon}(t) \end{aligned}$$

Como $-tP(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, vemos que a condição (4) é satisfeita. Novamente, um cálculo direto mostra que

$$x'y'' - x''y' = -(1+\theta^2)\rho_{\theta,\varepsilon}(t) = -\varepsilon^{-2}(1+\theta^2)Q(\varepsilon^{-1}[t-\theta^2(1+\theta^2)^{-1}])\rho_{\theta,\varepsilon}(t).$$

Sejam $t_\pm = \theta^2(1+\theta^2)^{-1} \pm \varepsilon$ e $t_i = \varepsilon s_i + \theta^2(1+\theta^2)^{-1}$, $i = 1, 2$. Da fórmula de Q, segue (5). Note que, se $t \in (-\infty, t_-] \cup [t_+, +\infty)$, temos que $\rho_{\theta,\varepsilon} \equiv 0$. Logo,

$$\gamma'_{\theta,\varepsilon}(t) = (-\theta, 1),$$

para todo $t \in (-\infty, t_-] \cup [t_+, +\infty)$. Isto verifica a condição (6). Para verificarmos (7), (8) e (9) começamos observando que

$$(y', -x') = (1, \theta) + \rho'_{\theta,\varepsilon}(t)(\theta, -1) = (1, \theta) + \varepsilon^{-1} P(\varepsilon^{-1}[t - (1 + \theta^2)^{-1}])\rho_{\theta,\varepsilon}(t)(\theta, -1).$$

Como

$$\varepsilon^{-1} P(\varepsilon^{-1}[t_i - \theta^2(1 + \theta^2)^{-1}])\rho_{\theta,\varepsilon}(t_i) = \varepsilon^{-1} P(s_i)\rho(s_i) \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} (-1)^{i-1}\infty$$

e $p + q\theta > 0$, podemos escolher $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $\varepsilon < \varepsilon_0$, então

$$(y'(t_1), -x'(t_1)) \prec (p, q) \prec (y'(t_2), -x'(t_2)).$$

Por continuidade da função argumento, (7) é verificada quando $\varepsilon < \varepsilon_0$. Ademais, como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é enumerável, podemos escolher $\varepsilon < \varepsilon_0$ para o qual $(y'(t_1), -x'(t_1))$ e $(y'(t_2), -x'(t_2))$ são incomensuráveis, ou seja, a condição (8) se verifica. Analisando o comportamento da função $\rho'_{\theta,\varepsilon}(t)$ (veja as fórmulas de P e Q acima) e usando o fato de que

$$(\theta, -1) \prec (1, \theta),$$

temos que $\arg(y'(t), -x'(t))$ é decrescente em $(t_-, t_1) \cup (t_2, t_+)$ e crescente em (t_1, t_2), donde segue (9). Note que

$$t_\theta = (1 + \theta^2)^{-1}.$$

□

Teorema 5.1.2. *Podemos escolher a curva $\gamma_{(\theta,p,q)} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ no Teorema 5.1.1 de modo que exista uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que 0 é um valor regular de F,*

$$\gamma_{\theta,p,q}([0, 1]) = F^{-1}(0) \cap [0, \infty) \times [0, \infty)$$

e

$$\nabla F(\gamma_{(\theta,p,q)}(t)) \in \mathbb{R}_+(y'(t), -x'(t)), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Demonstração. Defina as função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $Tz = Az + z_0$, onde

$$A = \begin{pmatrix} \theta & 1 \\ -1 & \theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z_0 = (\theta, 0).$$

e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $G(x, y) = y - \rho_{\theta,\varepsilon}(-x)$, onde θ e ε são dados pela demonstração do Teorema 5.1.1. Tome $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, como $F(x, y) = G(T^{-1}(x, y))$. Note que

$$0 = F(T(x, y)) = G(x, y) \iff y = \rho_{\theta,\varepsilon}(-x) \iff (x, y) \in \zeta(\mathbb{R}),$$

onde $\zeta(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é dada por $\zeta(t) = (-t, \rho_{\theta,\varepsilon}(t))$. Já que

$$T\zeta(t) = \gamma_{(\theta,p,q)}(t),$$

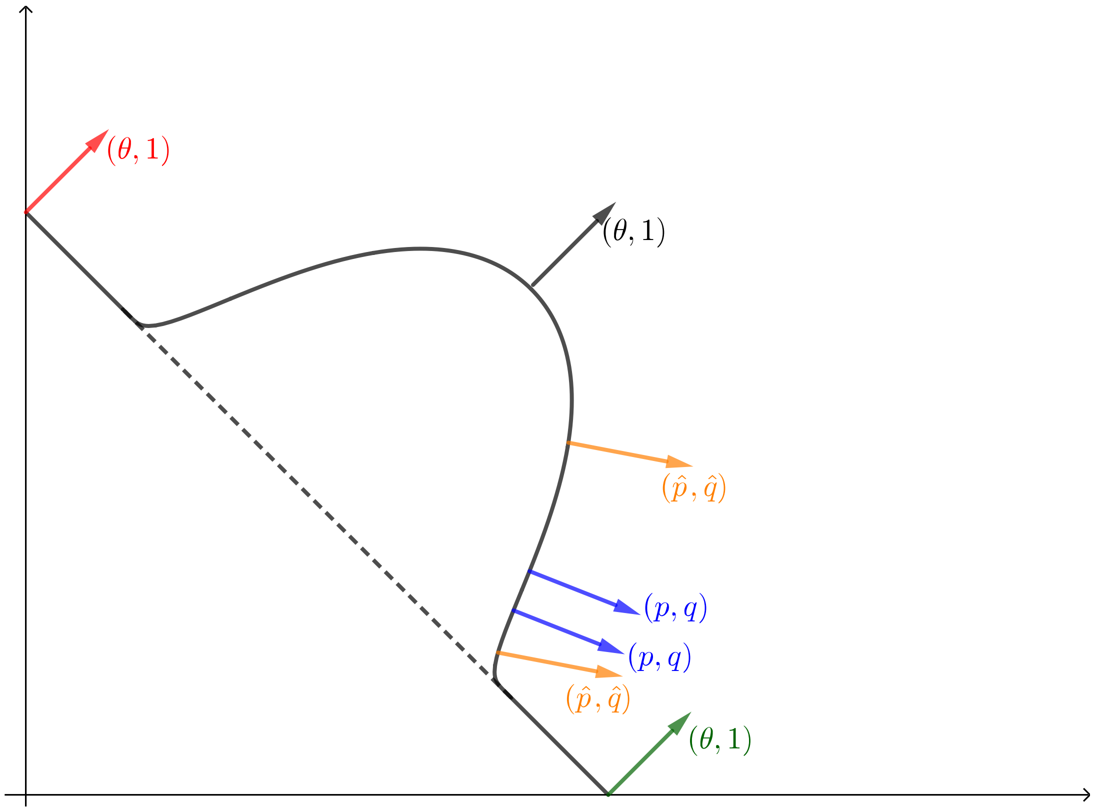

Figura 5.1.1 – Curva $\gamma_{\theta,p,q}$.

segue que $F^{-1}(0) = \gamma_{(\theta,p,q)}(\mathbb{R})$. Daí,

$$F^{-1}(0) \cap [0,\infty) \times [0,\infty) = \gamma_{(\theta,p,q)}(\mathbb{R}) \cap [0,\infty) \times [0,\infty) = \gamma_{(\theta,p,q)}([0,1]).$$

Que 0 é um valor regular de F é imediato. Multiplicando F por -1, se necessário, obtemos que

$$\nabla F(\gamma_{(\theta,p,q)}(t)) \in \mathbb{R}_+(y'(t), -x'(t)), \quad \forall t \in [0,1].$$

$\square$

No que segue, utilizaremos livremente coordenadas polares em $\mathbb{R}^4$ dadas por

$$x_i = r_i \cos\phi_i \quad \text{e} \quad y_i = r_i \operatorname{sen}\phi_i, \quad i = 1,2.$$

Fixamos $\theta > 0$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo com $p + q\theta > 0$, a curva $\gamma(t) = \gamma_{(\theta,p,q)}(t) = (x(t), y(t))$ como no Teorema 5.1.1 e a função F como no Teorema 5.1.2 e definimos a hiperfície em $\mathbb{R}^4$ dada por

$$S_\gamma = \{(x_1,y_1,x_2,y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid (r_1^2, r_2^2) \in \gamma([0,1])\}.$$

Proposição 5.1.3. *S_γ é uma hiperfície suave, compacta e estrelada.*

Demonstração. Defina $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(x_1, y_1, x_2, y_2) = F(r_1^2, r_2^2).$$

Temos que

$$S_\gamma = H^{-1}(0).$$

Isto prova que S_γ é hiperfície suave e compacta.

Agora, fixe $v \in \mathbb{S}^3$ e escreva $v = (a_1, b_1, a_2, b_2)$ e considere a reta

$$l_v = \{tv \mid t \in (0, \infty)\}.$$

Defina o vetor $u(t) = t^2(a_1^2 + b_1^2, a_2^2 + b_2^2)$. Como $\gamma(0) = (\theta, 0)$ e $\gamma(1) = (0, 1)$, temos que

$$\gamma(0) \preceq u(t) \preceq \gamma(1).$$

Pela continuidade da função argumento, existe $s_0 \in [0, 1]$ e $t_0 \in (0, \infty)$ tal que

$$\gamma(s_0) = u(t_0).$$

Logo, $l_v \cap S_\gamma \neq 0$. Se esta intercessão contém mais de um ponto, então existe $s_1 \in [0, 1]$ e $t_1 \in (0, \infty)$ com $t_1 \neq t_0$, tal que

$$\gamma(s_1) = u(t_1).$$

Pela condição (3) do Teorema 5.1.1 e como, $u(t_1) \neq u(t_0)$, devemos ter $0 < s_1 \neq s_0 < 1$. Assuma, sem perda de generalidade que $s_0 < s_1$. Então, a função

$$f(s) = \frac{y(s)}{x(s)},$$

satisfaz que

$$f(s_0) = f(s_1) = \frac{a_2^2 + b_2^2}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Logo, existe $s \in (s_0, s_1)$ tal que

$$0 = f'(s) = \frac{x'(s)y(s) - x(s)y'(s)}{y(s)^2},$$

o que contradiz a condição (4) do Teorema 5.1.1. Logo, $l_v \cap S_\gamma = \{t_0 v\}$. Por fim, observe que

$$dH_{t_0 v}(v) = 2\langle \nabla F(\gamma(s_0)), \gamma(s_0)\rangle > 0,$$

pelo Teorema 5.1.2 e pela condição (4) do Teorema 5.1.1, o que prova que l_v intersecta S_γ transversalmente. Sendo $v \in \mathbb{S}^3$ arbitrário, provamos que S_γ é estrelada. $\square$

Usando estes resultados junto com Exemplo A.3.4, temos que

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2) = \frac{1}{2}(r_1^2 d\phi_1 + r_2^2 d\phi_2),$$

restringe a uma forma de contato em S_γ que induz uma estrutura de contato $\xi_0 = \ker \lambda_0$. Usando a Proposição A.3.3, obtemos que campo de Reeb associado é dado por

$$\begin{aligned} X_0 &= a_1(r_1^2, r_2^2)(x_1\partial_{y_1} - y_1\partial_{x_1}) + a_2(r_1^2, r_2^2)(x_2\partial_{y_2} - y_2\partial_{x_2}) \\ &= a_1(r_1^2, r_2^2)\partial_{\phi_1} + a_2(r_1^2, r_2^2)\partial_{\phi_2}, \end{aligned}$$

onde

$$a_i(r_1^2, r_2^2) = \frac{2\partial_i F(r_1^2, r_2^2)}{r_1^2\partial_1 F(r_1^2, r_2^2) + r_2^2\partial_2 F(r_1^2, r_2^2)}, \quad i = 1, 2. \tag{5.1.1}$$

Observe que se $t \in [0,1]$ é determinado pela equação $\gamma(t) = (r_1^2, r_2^2)$, resultados da Proposição 5.1.2 e a condição (4) do Teorema 5.1.1, mostram que

$$(a_1(r_1^2, r_2^2), a_2(r_1^2, r_2^2)) \in \mathbb{R}_+(y'(t), -x'(t)).$$

Usando a identificação natural de $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, o fluxo de X_0 é dado por

$$\phi^{X_0}(t, z_1, z_2) = \phi_t^{X_0}(z_1, z_2) = (e^{ia_1(r_1^2, r_2^2)t} z_1, e^{ia_2(r_1^2, r_2^2)t} z_2),$$

e em coordenadas polares, é dado por

$$\phi_t^{X_0}(r_1, \phi_1, r_2, \phi_2) = (r_1, \phi_1 + a_1(r_1^2, r_2^2)t, r_2, \phi_2 + a_2(r_1^2, r_2^2)t).$$

Portanto, os conjuntos

$$\bar{K}_1 = S_\gamma \cap (0 \oplus \mathbb{C}) \quad \text{e} \quad \bar{K}_2 = S_\gamma \cap (\mathbb{C} \oplus 0)$$

são órbitas fechadas de X_0 cujos os perídos como órbitas primas são

$$T_1 = \frac{2\pi}{a_2(0, r_2^2)} \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{2\pi}{a_1(r_1^2, 0)},$$

respectivamente. Escrevemos $\bar{L}_0 = \bar{K}_1 \cup \bar{K}_2$. O complementar destas órbitas, $S_\gamma \backslash \bar{L}_0$, é folheado pelos toros invariantes

$$\mathbb{T}_t = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in S_\gamma \mid (r_1^2, r_2^2) = \gamma(t)\}, \quad t \in (0, 1).$$

Em cada um destes toros o fluxo de X_0 se restringe a um fluxo linear. Esta dinâmica linear será racional ou irracional exatamente quando o vetor $(a_1(r_1^2, r_2^2), a_2(r_1^2, r_2^2))$ for comensurável ou incomensurável, respectivamente. Por conseguinte, nos toros em que a dinâmica é racional temos infinitas órbitas periódicas de mesmos períodos, a saber, os números $T \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo que

$$T(a_1(r_1^2, r_2^2), a_2(r_1^2, r_2^2)) \in 2\pi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}),$$

e nos toros em que a dinâmica é irracional temos infinitas órbitas densas. Se $(\hat{p}, \hat{q}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é coprimo e $t \in [0, 1]$ são tais que

$$(a_1(\gamma(t)), a_2(\gamma(t)) \in \mathbb{R}_+(\hat{p}, \hat{q}),$$

então vamos dizer que o toro $\mathbb{T}_t$ é de tipo $(\hat{p},\hat{q})$. Além disso, se

$$(y'(t_1),-x'(t_1)) \prec (\hat{p},\hat{q}) \prec (1,\theta) \quad \text{ou} \quad (1,\theta) \prec (\hat{p},\hat{q}) \prec (y'(t_2),-x'(t_2)),$$

existem exatamente dois toros de tipo $(\hat{p},\hat{q})$. Se $\mathbb{T}_t$ é um toro de tipo $(\hat{p},\hat{q})$ o período mínimo de suas órbitads é o número $T_t > 0$ tal que

$$T_t(a_1(r_1^2,r_2^2),a_2(r_1^2,r_2^2)) = 2\pi(\hat{p},\hat{q}).$$

Ademais, se

$$(p,q) \prec (\hat{p},\hat{q}) \prec (1,\theta) \quad \text{ou} \quad (1,\theta) \prec (\hat{p},\hat{q}) \prec (p,-q),$$

então os toros de tipo $\hat{p},\hat{q}$ serão da forma $\mathbb{T}_{t^1_{\hat{p},\hat{q}}}$ e $\mathbb{T}_{t^2_{\hat{p},\hat{q}}}$ com $t^1_{\hat{p},\hat{q}} < t_{p,q} < t^2_{\hat{p},\hat{q}}$.

Vamos calcular os números de rotação das órbitas $\bar{K}_1$ e $\bar{K}_2$. Para isto começamos observando que

$$Y_1(z_1,z_2) = Y(z_1,z_2) + A_1(z_1,z_2)Z(z_1,z_2) \text{ e } Y_2(z_1,z_2) = iY(z_1,z_2) + A_2(z_1,z_2)Z(z_1,z_2)$$

formam uma base global de ξ_0, onde

$$\begin{aligned} Y(z_1,z_2) &= y_2\partial_{x_1} + x_2\partial_{y_1} - y_1\partial_{x_2} - x_1\partial_{y_2}, \\ Z(z_1,z_2) &= x_1\partial_{x_1} + y_1\partial_{y_1} + x_2\partial_{x_2} + y_2\partial_{y_2} \end{aligned}$$

e

$$A_1 = -\frac{dH(Y)}{dH(Z)} \quad \text{e} \quad A_2 = -\frac{dH(iY)}{dH(Z)}.$$

Ao longo de $\bar{K}_1$, temos que $A_1 = A_2 = 0$ e, portanto,

$$Y_1(0,z_2) = Y(0,z_2) = y_2\partial_{x_1} + x_2\partial_{y_1}$$

e

$$Y_2(0,z_2) = iY(0,z_2) = -x_2\partial_{x_1} + y_2\partial_{y_1}.$$

Ademais,

$$Y_i(\phi_t^{X_0}(0,z_2)) = e^{-a_2(0,r_2^2)t}Y_i, \quad i=1,2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} d\phi_t^{X_0}(0,z_2)(Y_i) &= e^{ia_1(0,r_2^2)t}Y_i(0,z_2) \\ &= e^{i(a_1(0,r_2^2)+a_2(0,r_2^2))t}Y_i(\phi_t^{X_0}(0,z_2)) \\ &= \cos((a_1(0,r_2^2)+a_2(0,r_2^2))t)Y_i(\phi_t^{X_0}(0,z_2)) \\ &\quad + \operatorname{sen}((a_1(0,r_2^2)+a_2(0,r_2^2))t)iY_i(\phi_t^{X_0}(0,z_2)). \end{aligned}$$

Portanto, se Ψ denotar a trivialização induzida por $\{Y_1,Y_2\}$, temos que

$$\Psi_t \circ d\phi_t^{X_0}(0,z_2) \circ \Psi_0 = e^{i(a_1(0,r_2^2)+a_2(0,r_2^2))t}.$$

Logo, se $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\Psi_{T_1 kt} \circ d\phi^{X_0}_{T_1 kt}(0, z_2) \circ \Psi_0 = e^{2\pi ik(1+1/\theta)t}. \tag{5.1.2}$$

Pelo Lema 2.4.1, concluímos que

$$\rho(\bar{K}_1, \lambda_0) = 1 + 1/\theta.$$

Se $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, temos que

$$\mu_{CZ}(\bar{K}_1^k, \lambda_0) = 2\lfloor k(1 + 1/\theta)\rfloor + 1.$$

De maneira análoga,

$$\rho(\bar{K}_2, \lambda_0) = 1 + \theta$$

e, se $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, temos que

$$\mu_{CZ}(\bar{K}_2^k, \lambda_0) = 2\lfloor k(1 + \theta)\rfloor + 1.$$

Da Proposição A.3.4, concluímos que existe uma função $f_{(\theta,p,q)} : \mathbb{S}^3 \to (0, \infty)$ tal que

$$\Psi_\gamma : \mathbb{S}^3 \to S_\gamma, \quad z \mapsto f_{(\theta,p,q)}(z_1, z_2)(z_1, z_2) \tag{5.1.3}$$

é um difeomorfismo satisfazendo que

$$\Psi_\gamma^* \lambda_0 = f_{(\theta,p,q)}\lambda_0.$$

Definimos

$$\lambda_{\theta,p,q} = f_{(\theta,p,q)}\lambda_0$$

e denotamos

$$X_{\theta,p,q} = X_{\lambda_{\theta,p,q}}$$

Note que o fluxo de $X_{\theta,p,q}$ será dado por

$$\phi_t^{X_{\theta,p,q}}(z_1, z_2) = (e^{ia_1(s_1^2,s_2^2)t}z_1, e^{ia_2(s_1^2,s_2^2)t}z_2),$$

onde

$$s_i = |f(z_1, z_2)z_i|^2, \quad i = 1, 2.$$

Observe que

$$K_1 = \Psi_\gamma^{-1}(\bar{K}_1) = \mathbb{S}^3 \cap (0 \oplus \mathbb{C})$$

e

$$K_2 = \Psi_\gamma^{-1}(\bar{K}_2) = \mathbb{S}^3 \cap (\mathbb{C} \oplus 0).$$

Logo, $L_0 = K_1 \cup K_2$ for um enlace de Hopf padrão em $\mathbb{S}^3$. Se $\bar{K}_{\hat{p},\hat{q}}$ é uma órbita em um toro de tipo $(\hat{p}, \hat{q})$ em S_γ e se escrevermos

$$K_{\hat{p},\hat{q}} = \Psi_\gamma^{-1}(\bar{K}_{\hat{p},\hat{q}}),$$

então $L_{\hat{p},\hat{q}} = L_0 \cup K_{\hat{p},\hat{q}}$ é um enlace do tipo $(\hat{p},\hat{q})$. Em particular, o mesmo vale para (p,q). Por conjugação, as propriedades dinâmicas de X_0 em S_γ são herdadas por $X_{\theta,p,q}$ em $\mathbb{S}^3$.

Agora vamos obter coordenadas em $S_\gamma \backslash \bar{L}_0$ adaptadas ao nosso problema que simplificarão consideravelmente as contas a seguir. Considere o difeomorfismo $\Phi : (0,1) \times \mathbb{T} \to S_\gamma \backslash \bar{L}_0$ dado por

$$\Phi(t, z_1, z_2) = (\sqrt{x(t)}z_1, \sqrt{y(t)}z_2)$$

cujo difeomorfismo inverso é dado por

$$\Phi^{-1}(z_1, z_2) = (\gamma^{-1}(r_1^2, r_2^2), z_1/r_1, z_2/r_2).$$

Se denotarmos

$$\tau(x_1, y_1, x_2, y_2) = \gamma^{-1}(r_1^2, r_2^2),$$

temos que (τ, ϕ_1, ϕ_2) induzem coordenadas ao redor de qualquer ponto em $S_\gamma \backslash \bar{L}_0$. Note que

$$\tau = \tau(x_1, y_1, x_2, y_2) \quad \text{se, e somente se,} \quad \gamma(\tau) = (r_1^2, r_2^2).$$

Portanto, nestas coordenadas,

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(x(\tau)d\phi_1 + y(\tau)d\phi_2) \quad \text{e} \quad X_0 = \frac{2}{x(\tau)y'(\tau) - x'(\tau)y(\tau)}(y'(\tau)\partial_{\phi_1} - x'(\tau)\partial_{\phi_2}).$$

Observe que para $t \in (0,1)$, temos que

$$\mathbb{T}_t = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in S_\gamma \backslash \bar{L}_0 \mid \tau(x_1, y_1, x_2, y_2) = t\}.$$

Fixado $\tau_0 \in (0,1)$, considere o mapa no recobrimento universal de $\mathbb{T}$ dado por

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x'(\tau_0) & y'(\tau_0) \\ x(\tau_0) & y(\tau_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \tag{5.1.4}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} &= \frac{2}{x(\tau_0)y'(\tau_0) - x'(\tau_0)y(\tau_0)} \begin{pmatrix} -y(\tau_0) & y'(\tau_0) \\ x(\tau_0) & -x'(\tau_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} \qquad (5.1.5) \\ &= \frac{2}{x(\tau_0)y'(\tau_0) - x'(\tau_0)y(\tau_0)} \begin{pmatrix} -y(\tau_0) \\ x(\tau_0) \end{pmatrix} \vartheta_1 + \frac{2}{x(\tau_0)y'(\tau_0) - x'(\tau_0)y(\tau_0)} \begin{pmatrix} y'(\tau_0) \\ -x'(\tau_0) \end{pmatrix} \vartheta_2. \end{aligned}$$

Vamos considerar as coordenadas $(\tau, \vartheta_1, \vartheta_2)$ ao redor de pontos de $\mathbb{T}_{\tau_0}$. Nestas coordenadas

$$\lambda_0 = \Delta_1(\tau)d\vartheta_1 + \Delta_2(\tau)d\vartheta_2 \quad \text{e} \quad X_0 = \frac{1}{\Delta(\tau)}(-\Delta_2'(\tau)\partial_{\vartheta_1} + \Delta_1'(\tau)\partial_{\vartheta_2}), \tag{5.1.6}$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_1(\tau) &= \frac{y(\tau_0)x(\tau) - x(\tau_0)y(\tau)}{x'(\tau_0)y(\tau_0) - x(\tau_0)y'(\tau_0)}, \\ \Delta_2(\tau) &= \frac{x'(\tau_0)y(\tau) - y'(\tau_0)x(\tau)}{x'(\tau_0)y(\tau_0) - x(\tau_0)y'(\tau_0)} \end{aligned}$$

e $\Delta = \Delta_1'\Delta_2 - \Delta_1\Delta_2'$. Note que

$$\begin{pmatrix} \Delta_1'(\tau_0) & \Delta_1(\tau_0) \\ \Delta_2'(\tau_0) & \Delta_2(\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.1.7}$$

Em particular,

$$X_0|\mathbb{T}_{\tau_0} = \partial_{\vartheta_2}.$$

O fluxo de X_0 nestas coordenadas é dado por

$$\phi_t^{X_0}(\tau, \vartheta_1, \vartheta_2) = \left(\tau, \vartheta_1 - \frac{\Delta_2'(\tau)}{\Delta(\tau)}t, \vartheta_2 + \frac{\Delta_1'(\tau)}{\Delta(\tau)}t\right). \tag{5.1.8}$$

Quando $\tau = \tau_0$, segue da equação (5.1.7) que

$$\phi_t^{X_0}(\tau_0, \vartheta_1, \vartheta_2) = (\tau_0, \vartheta_1, \vartheta_2 + t). \tag{5.1.9}$$

Concluímos deste fato que os levantamentos da órbita de X_0 que passam por $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{T}_{\tau_0}$ no levantamento universal são da forma

$$\mathscr{R}_{k_1,k_2} = \left\{ \frac{2}{x(\tau_0)y'(\tau_0) - x'(\tau_0)y(\tau_0)} \begin{pmatrix} y'(\tau_0) \\ -x'(\tau_0) \end{pmatrix} \vartheta_2 + \begin{pmatrix} \phi_1 + 2k_1\pi \\ \phi_2 + 2k_2\pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \vartheta_2 \in \mathbb{R} \right\}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Suponha agora que $\mathbb{T}_{\tau_0}$ é um toro da forma $\hat{p}, \hat{q}$ e T_{τ_0} é o período mínimo das órbitas de Reeb em $\mathbb{T}_{\tau_0}$. Considere o mapa

$$\zeta(\vartheta_1) = \frac{2}{x(\tau_0)y'(\tau_0) - x'(\tau_0)y(\tau_0)} \begin{pmatrix} -y(\tau_0) \\ x(\tau_0) \end{pmatrix} \vartheta_1 + \begin{pmatrix} \phi_1 + 2k_1\pi \\ \phi_2 + 2k_2\pi \end{pmatrix}.$$

Note que $\zeta(0) \in \mathscr{R}_{0,0}$ e $\zeta(\vartheta_1) \in \mathscr{R}_{k_1,k_2}$ exatamente quando

$$\vartheta_1 = \frac{\pi^2(x(\tau_0)y'(\tau_0) - x'(\tau_0)y(\tau_0))}{T_{\tau_0}}(k_2\hat{p} - k_1\hat{q}).$$

Vamos escrever

$$L = L(\tau_0) = \frac{\pi^2(x(\tau_0)y'(\tau_0) - x'(\tau_0)y(\tau_0))}{T_{\tau_0}}. \tag{5.1.10}$$

Como $(\hat{p}, \hat{q})$ é coprimo, vemos que os levantamentos da órbita de X_0 que passam por $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{T}_{\tau_0}$ no levantamento universal são da forma

$$\{(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \vartheta_1 = kL + \vartheta_1(\phi_1, \phi_2)\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, a equação (5.1.5) induz um difeomorfismo $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to \mathbb{T}_{\tau_0}$. Nas coordenadas $(\tau, \vartheta_1, \vartheta_2)$ as órbitas de Reeb fechadas em $\mathbb{T}_{\tau_0}$ são exatamente os conjuntos da forma

$$\{(\tau_0, \vartheta_1, \vartheta_2) \mid \vartheta_1 = c\}, \quad c \in [0, L)$$

Definição 5.1.2. Seja λ uma forma de contato em uma variedade M. Vamos denotar por N_T a união de órbitas de Reeb fechadas de Λ de ação T. Dizemos que λ é Morse-Bott se

(1) o espectro de ação de λ é discreto;

(2) dado uma ação T, o conjunto de órbitas fechadas que tem ação T é uma subvariedade mergulhada N_T de M;

(3) o posto de $d\lambda|TN_T$ é localmente constante ao longo de N_T;

(4) $\ker(d\phi_T^{X_\lambda}(p) - \mathbb{1}) = T_pN_T$, para todo $p \in N_T$.

Teorema 5.1.4. *Se $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então $\lambda = f_{\theta,p,q}\lambda_0$ é uma forma de contato Morse-Bott em $\mathbb{S}^3$.*

Demonstração. Continuaremos trabalhando na hiperfície (S_γ, λ_0) definida acima. Utilizaremos as notações definidas no Teorema 5.1.1. Continuamos denotando por T_1 e T_2 os períodos primos das órbitas $\bar{K}_1$ e $\bar{K}_2$. Vamos denotar o espectro de ação de λ_0 por $\sigma(\lambda_0)$.

Pela propriedade (6) do Teorema 5.1.1 e pela hipótese de que $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, não existem órbitas periódicas de X_0 no conjunto

$$\{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in S_\gamma \mid (r_1^2, r_2^2) \in \gamma((0, t_-] \cup [t_+, 1))\}.$$

Considere o campo de vetores $v : [t_-, t_+] \to \mathbb{R}^2$ dada por $v(t) = (a_1(\gamma(t)), a_2(\gamma(t)))$. Seja

$$M = \max\{\|v(t)\| \mid t \in [t_-, t_+]\}.$$

Fixe $S > 0$. Temos que

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda_0) \cap [0, S] = \{0 < T \leq S \mid Tv(t) \in 2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}\}\\ \cup \{kT_1 \mid k \in \mathbb{N} \cup [0, S/T_1]\} \cup \{kT_2 \mid k \in \mathbb{N} \cap [0, S/T_2]\}.\end{aligned}$$

O segundo e terceiro conjunto do lado direito são claramente finitos. O primeiro conjunto também é finito, pois sua cardinalidade é menor do que a do conjunto

$$\{(a, b) \in 2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z} \mid a^2 + b^2 \leq (SM)^2\},$$

que é finito. Como $S > 0$ é arbitrário, provamos que $\sigma(\lambda_0)$ é um conjunto discreto. Isto mostra a propriedade (1) da Definição 5.1.2.

Agora fixe $T \in \sigma(\lambda_0)$. O conjunto N_T é a união (possivelmente vazia) de componentes de $\bar{K}_1 \cup \bar{K}_2$ com toros $\mathbb{T}_t$ para os quais

$$T(a_1(\gamma(t)), a_2(\gamma(t))) \in 2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}.$$

Para este t vale que

$$T(a_1(\gamma(t)), a_2(\gamma(t))) \in \{(a, b) \in 2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z} \mid a^2 + b^2 \leq (SM)^2\}.$$

Além disso, pela propriedade (9) do Teorema 5.1.1, a cada elemento de

$$\{(a,b) \in 2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z} \mid a^2 + b^2 \leq (SM)^2\}$$

corresponde no máximo dois toros da forma $\mathbb{T}_t$. Daí, o número de toros que entram na união acima é finita e, portanto, N_T é uma subvariedade mergulhada de S_γ. Observe que se $T \in \sigma(\lambda_0)$ e $k \in \mathbb{N}$, então N_T é uma união de componentes de N_{kT}. Isto mostra a propriedade (2) da Definição 5.1.2.

Como $\bar{K}_1$ e $\bar{K}_2$ são órbitas de X_0 é imediato que $d\lambda_0|T\bar{L}_i = 0$, $i = 1,2$. Em um toro da forma $\mathbb{T}_t$ também temos que $d\lambda_0|T\mathbb{T}_t = 0$, pois, em coordenadas polares,

$$d\lambda_0 = r_1 dr_1 \wedge d\phi_1 + r_2 dr_2 \wedge d\phi_2$$

ao passo que em $\mathbb{T}_t$, $(r_1^2, r_2^2) = \gamma(t)$ e, portanto, $dr_i|T\mathbb{T}_t = 0$, $i = 1,2$. Isto mostra a propriedade (3) da Definição 5.1.2.

Seja $p \in \bar{K}_i$, $i = 1,2$ e tome $T = kT_i$ com $k \in \mathbb{N}$. Pela equação (5.1.2), $d\phi_T^{X_0}(p)|\xi$ se representa como $e^{2\pi i k(1+\theta_i)}$ na trivialização induzida por $\{Y_1, Y_2\}$, onde $\theta_1 = 1/\theta$ e $\theta_2 = \theta$. Como estamos assumindo que $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, segue que

$$\ker(d\phi_T^{X_0}(p) - \mathbb{1})|\xi_p = \{0\}.$$

Por outro lado

$$d\phi_T^{X_0}(p) \cdot X_0 = X_0(\phi_T^X(p)).$$

Daí, obtemos que

$$\ker(d\phi_T^{X_0}(p) - \mathbb{1}) = T_p\bar{L}_i, \quad i = 1,2.$$

Sejam agora $\mathbb{T}_{\tau_0} \subset N_T$ e $p \in \mathbb{T}_{\tau_0}$. Vamos trabalhar nas coordenadas $(\tau, \vartheta_1, \vartheta_2)$ definidas em (5.1.4). Seja

$$V = A\partial_\tau + B_1\partial_{\vartheta_1} + B_2\partial_{\vartheta_2}.$$

Usando (5.1.7) e (5.1.8), temos que

$$d\phi_T^{X_0}(p)V = A\partial_\tau + (B_1 - AT\Delta_2''(\tau_0))\partial_{\vartheta_1} + B_2\partial_{\vartheta_2}.$$

Por outro lado,

$$\Delta_2''(\tau_0) = \frac{x'(\tau_0)y''(\tau_0) - y'(\tau_0)x''(\tau_0)}{(x'(\tau_0)y(\tau_0) - x(\tau_0)y'(\tau_0))}.$$

Pela condição (8) do Teorema 5.1.1, temos que $\tau_0 \in (t_-, t_+)\backslash\{t_1, t_2\}$. Pela condição (5) do Teorema 5.1.1, temos que

$$\Delta_2''(\tau_0) \neq 0.$$

Logo,

$$d\phi_T^{X_0}(p)V = V \iff A = 0.$$

Desta condição obtemos que

$$\ker(d\phi_T^{X_0}(p) - \mathbb{1}) = T_p\mathbb{T}_{\tau_0}.$$

Isto mostra a condição (4) da Definição 5.1.2 e conclui o teorema. □

Observação 5.1.1. Note que nenhuma órbita fechada de Reeb da forma de contato $\lambda = f_{\theta,p,q}\lambda_0$ em $\mathbb{S}^3\backslash L_0$ é contrátil em $\mathbb{S}^3\backslash L_0$. De fato, se K denota uma destas órbitas, então K é um k-recobrimento de uma órbita fechada prima em um toro de tipo $\hat{p}, \hat{q}$, onde $k \in \mathbb{N}$. Logo, pelas equações (B.2.4) e (B.2.5) temos

$$\text{link}(K, K_1) = k\hat{p} \quad \text{e} \quad \text{link}(K, K_2) = k\hat{q}.$$

e, por hipótese, pelo menos um destes números é diferente de zero. □

5.2 Perturbação dos modelos

Continuamos com $\theta > 0$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo com $p + q\theta > 0$ fixados. Vamos assumir que $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e vamos tomar $t_{p,q}$ como no Teorema 5.1.1 (g). Fixe ainda $(\hat{p}, \hat{q}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo tal que

$$(p, q) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (1, \theta) \quad \text{ou} \quad (1, \theta) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (p, -q).$$

Como vimos acima, os toros de tipo $\hat{p}, \hat{q}$ serão da forma $\mathbb{T}_{t^1_{\hat{p},\hat{q}}}$ e $\mathbb{T}_{t^2_{\hat{p},\hat{q}}}$ com $t^1_{\hat{p},\hat{q}} < t_{p,q} < t^2_{\hat{p},\hat{q}}$. Vamos denotar por $T^i_{\hat{p},\hat{q}}$ o período mínimos das órbitas do toro $\mathbb{T}_{t^i_{\hat{p},\hat{q}}}$, $i = 1, 2$.

Teorema 5.2.1. *Fixe $S > \max\{T_{t^1_{\hat{p},\hat{q}}}, T_{t^2_{\hat{p},\hat{q}}}\}$ e $\delta > 0$. Existe uma função $f_S : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:*

(a) f_S é igual a $f_{\theta,p,q}$ em uma vizinhança de $L_0 = K_1 \cup K_2$, onde

$$\rho(K_1, f_S\lambda_0) = 1 + \frac{1}{\theta} \quad e \quad \rho(K_2, f_S\lambda_0) = 1 + \theta;$$

(b) Existem uma órbita de Reeb fechadas de $f_S\lambda_0$, $K_{p,q}$, disjunta de L_0, tal que $L_{p,q} = L_0 \cup K_{p,q}$ forma um enlace de tipo (p, q).

(c) $f_S\lambda_0$ não possui órbitas de Reeb fechadas com ação menor do que S que são contráteis em $\mathbb{S}^3\backslash L_0$;

(d) $f_S\lambda_0$ não possui órbitas de Reeb fechadas com ação menor do que S que são não-degeneradas;

(e) $\mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, S, f_S\lambda_0)$ possui exatamente quatro elementos. Estes elementos podem ser organizados em pares $\{P^i_{min}, P^i_{max}\}$ contendo uma órbita elíptica e uma órbita

positivamente hiperbólica, cujos períodos estão no intervalo $(T^i_{\hat{p},\hat{q}} - \delta, T^i_{\hat{p},\hat{q}} + \delta)$ *e tais que*

$$\mu_{CZ}(P^i_{max}, f_{S,\varepsilon}\lambda_0) - \mu_{CZ}(P^i_{min}, f_{S,\varepsilon}\lambda_0) = 1,$$

$i = 1, 2$. *Além disso, órbitas em pares distintos estão em classes de homotopias diferentes em* $\mathbb{S}^3 \backslash L_{p,q}$.

(f) f_S *pode ser escolhida arbitrariamente próxima de* $f_{\theta,p,q}$ *na topologica* C^∞.

Demonstração. Novamente trabalharemos em (S_γ, λ_0). Lembramos que $\bigcup_{T \leq S} N_T$ é formado por uma coleção finita de toros, digamos $\mathbb{T}_{\tau_1}, \dots, \mathbb{T}_{\tau_N}$, e por $\bar{L}_0$. Fixe um toro $\mathbb{T}_{\tau^*}$ com $\tau^* \in \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$. Tome uma vizinhança $\mathcal{O}$ de $\mathbb{T}_{\tau^*}$ tal que

$$\bar{\mathcal{O}} \cap \bigcup_{T \leq S} N_T = \mathbb{T}_{\tau^*}. \tag{5.2.1}$$

Utilizaremos as coordenadas definidas em (5.1.4) adaptadas ao toro $\mathbb{T}_{\tau^*}$. Supomos que $\mathcal{O}$ foi escolhido de forma que estas coordenadas estejam definidas em $\mathcal{O}$. Existe um intervalo aberto I centrado em τ^* tal que

$$\tau^{-1}(I) \subset \mathcal{O}.$$

Tomando I menor, se necessário, podemos supor que

$$\Delta_2''(\tau) \neq 0 \tag{5.2.2}$$

para todo $\tau \in I$. Defina $\mathcal{O}_{\tau^*} = \tau^{-1}(I)$. Seja $\beta : I \to [0,1]$ uma função com suporte compacto satisfazendo que $\beta \equiv 1$ em uma vizinhança de τ^*. Defina a função $g_{\tau^*} : S_\gamma \to \mathbb{R}$ satisfazendo que $g_{\tau^*} \equiv 0$ em $S_\gamma \backslash \mathcal{O}_{\tau^*}$ e

$$g_{\tau^*}(\tau, \vartheta_1, \vartheta_2) = \beta(\tau) \cos\left(\frac{2\pi\vartheta_1}{L}\right), \tag{5.2.3}$$

onde $L = L(\tau^*)$ é definido em (5.1.10). Defina,

$$g = \sum_{i=1}^{N} g_{\tau_i}. \tag{5.2.4}$$

Dado $\varepsilon > 0$ definimos

$$f_\varepsilon = 1 + \varepsilon g.$$

Note que $f_\varepsilon \equiv 1$ no complementar de $\bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_{\tau_i}$. Se $\epsilon_0 > 0$ é pequeno o suficiente, f_ε estará suficientemente próximo 1 na topologia C^∞ para todo $0 < \varepsilon < \epsilon_0$. Em particular, f_ε não se anula e $\lambda_\varepsilon = f_\varepsilon \lambda_0$ é uma forma de contato em S_γ que é igual a λ_0 no complementar de $\bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_{\tau_i}$. Vamos denotar por X_ε o campo de Reeb de λ_ε. Pela construção de $\mathcal{O}_{\tau_i}$ a dinâmica de X_ε é idêntica a dinâmica de X_0 em $S_\gamma \backslash \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_{\tau_i}$. Vamos estudar a dinâmica de X_ε nas vizinhanças $\mathcal{O}_{\tau_i}$, $i = 1, \dots, N$. Fixe $\tau^* \in \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$.

Em $\mathcal{O}_{\tau^*}$, temos que

$$f_\varepsilon = 1 + \varepsilon\beta(\tau)\cos\left(\frac{2\pi\vartheta_1}{L}\right).$$

Nesta vizinhança, podemos escrever $X_\varepsilon = X_\varepsilon^\tau \partial_\tau + X_\varepsilon^{\vartheta_1}\partial_{\vartheta_1} + X_\varepsilon^{\vartheta_2}\partial_{\vartheta_2}$, onde

$$X_\varepsilon^\tau = \frac{(\partial_{\vartheta_1} f_\varepsilon)\Delta_2}{f_\varepsilon^2\Delta}, \quad X_\varepsilon^{\vartheta_1} = -\frac{\partial_\tau(f_\varepsilon\Delta_2)}{f_\varepsilon^2\Delta} \quad \text{e} \quad X_\varepsilon^{\vartheta_2} = \frac{\partial_\tau(f_\varepsilon\Delta_1)}{f_\varepsilon^2\Delta}. \tag{5.2.5}$$

Como X_ε não depende de ϑ_2, as órbitas periódicas de X_ε se projetam em órbitas periódicas e pontos singulares do campo de vetores $Z_\varepsilon = Z_\varepsilon^\tau\partial_\tau + Z_\varepsilon^{\vartheta_1}\partial_{\vartheta_1}$ no anel $A = I \times \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, onde

$$Z_\varepsilon^\tau(\tau,\vartheta_1) = \frac{(\partial_{\vartheta_1} f_\varepsilon(\tau,\vartheta_1))\Delta_2(\tau)}{f_\varepsilon(\tau,\vartheta_1)^2\Delta(\tau)} = -\frac{2\pi\varepsilon\beta(\tau)\Delta_2(\tau)}{f_\varepsilon(\tau,\vartheta_1)^2\Delta(\tau)}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\vartheta_1}{L}\right)$$

e

$$Z_\varepsilon^{\vartheta_1}(\tau,\vartheta_1) = -\frac{\partial_\tau(f_\varepsilon(\tau,\vartheta_1)\Delta_2(\tau))}{f_\varepsilon(\tau,\vartheta_1)^2\Delta(\tau)} = -\frac{1}{f_\varepsilon(\tau,\vartheta_1)^2\Delta(\tau)}\left[\Delta_2'(\tau) + \varepsilon\frac{d}{d\tau}(\beta(\tau)\Delta_2(\tau))\cos\left(\frac{2\pi\vartheta_1}{L}\right)\right]$$

Pela condição (5.2.2), temos que $\Delta_2'(\tau) = 0$ em I se, e somente se, $\tau = \tau^*$. Considere o intervalo $I_0 \subset I$ centrado em τ^* no qual $\beta \equiv 1$. Defina

$$m = \inf\{|\Delta_2(\tau)| \mid \tau \in I\backslash I_0\} = \min\{|\Delta_2(\tau)| \mid \tau \in I\backslash I_0\} > 0,$$

$$M = \sup\left\{\frac{d}{d\tau}(\beta(\tau)\Delta_2(\tau)) \mid \tau \in I\backslash I_0\right\} = \max\left\{\frac{d}{d\tau}(\beta(\tau)\Delta_2(\tau)) \mid \tau \in I\backslash I_0\right\} < \infty$$

e

$$\epsilon_{\tau^*} = \min\{m/M, \epsilon_0, 1\}.$$

Tome $0 < \varepsilon < \epsilon_{\tau^*}$. Se $\tau \in I_0\backslash\{\tau^*\}$, temos que

$$\left|\Delta_2'(\tau) + \varepsilon\frac{d}{d\tau}(\beta(\tau)\Delta_2(\tau))\cos\left(\frac{2\pi\vartheta_1}{L}\right)\right| \geq |\Delta_2'(\tau)|(1-\varepsilon) > 0.$$

Se $\tau \in I\backslash I_0$, temos que

$$\left|\Delta_2'(\tau) + \varepsilon\frac{d}{d\tau}(\beta(\tau)\Delta_2(\tau))\cos\left(\frac{2\pi\vartheta_1}{L}\right)\right| > |\Delta_2'(\tau)| - m > 0.$$

Se $\tau = \tau^*$, temos que pela equação (5.1.7) que

$$Z_\varepsilon^\tau(\tau^*,\vartheta_1) = \frac{2\pi\varepsilon}{f_\varepsilon(\tau^*,\vartheta_1)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\vartheta_1}{L}\right) \quad \text{e} \quad Z_\varepsilon^{\vartheta_1}(\tau^*,\vartheta_1) = 0.$$

Logo, se $0 < \varepsilon < \epsilon_{\tau^*}$, temos que

$$Z_\varepsilon = 0 \iff (\tau,\vartheta_1) = (\tau^*,0) \text{ ou } (\tau^*, L/2).$$

Vamos escrever $p_{max} = (\tau^*,0)$ e $p_{min} = (\tau^*, L/2)$. Logo, os pontos p_{max} e p_{min} estão associadas às órbitas fechadas primas de X_ε

$$P_{max} = P_{max}^{\tau^*} = (x_{max}, T_{max}) \quad \text{e} \quad P_{min} = P_{min}^{\tau^*} = (x_{min}, T_{min}),$$

respectivamente, onde

$$T_{max} = (1+\varepsilon)T_{\tau^*} \quad \text{e} \quad T_{min} = (1-\varepsilon)T_{\tau^*},$$

$$x_{max}(t) = (\tau^*, 0, (1+\varepsilon)^{-1}t) \quad \text{e} \quad x_{min}(t) = (\tau^*, L/2, (1-\varepsilon)^{-1}t).$$

Observe que P_{max} e P_{min} são órbitas de X_0 reparametrizadas no toro $\mathbb{T}_{\tau^*}$. Pela análise que fizemos acima e por (5.2.1) estas são as únicas órbitas de X_0 com ação menor do que ou igual a S que sobrevivem como órbitas de X_ε em $\bar{\mathcal{O}}$. Tomando $\epsilon_{\tau^*} > 0$ menor ainda, se necessário, podemos supor que

$$T_{max}, T_{min} \in (T_{\tau^*} - \delta, T_{\tau^*} + \delta).$$

Observamos agora que

$$dZ_\varepsilon(\tau^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{(2\pi)^2\varepsilon}{(1+\varepsilon)L} \\ -\dfrac{\Delta''(\tau^*)}{1+\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$dZ_\varepsilon(\tau^*, L/2) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(2\pi)^2\varepsilon}{(1-\varepsilon)L} \\ -\dfrac{\Delta''(\tau^*)}{1-\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}$$

A equação característica de $dZ_\varepsilon(\tau^*, 0)$ e $dZ_\varepsilon(\tau^*, L/2)$ são, respectivamente,

$$t^2 - \frac{(2\pi)^2\Delta''(\tau^*)}{(1+\varepsilon)^2L}\varepsilon \quad \text{e} \quad t^2 + \frac{(2\pi)^2\Delta''(\tau^*)}{(1-\varepsilon)^2L}\varepsilon.$$

Assim, $\sigma(dZ_\varepsilon(\tau^*, 0)) = \{\nu_{max}(\varepsilon), -\nu_{max}(\varepsilon)\}$ e $\sigma(dZ_\varepsilon(\tau^*, L/2)) = \{\nu_{min}(\varepsilon), -\nu_{min}(\varepsilon)\}$, onde

$$\nu_{max}(\varepsilon) = \frac{2\pi}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{\Delta''(\tau^*)\varepsilon}{L}} \quad \text{e} \quad \nu_{min}(\varepsilon) = \frac{2\pi}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{-\Delta''(\tau^*)\varepsilon}{L}}$$

Como $\ker(\lambda_\varepsilon)_{(\tau^*, \vartheta_1, \vartheta_2)}$ é gerado por $\{\partial_\tau, \partial_{\vartheta_1}\}$, temos que se $p \in \{p_{max}, p_{min}\}$ e $\varphi_p(t) = d\phi_t^{X_\varepsilon}(p, 0)|\xi_0$ satisfaz que

$$\dot{\varphi}_p(t) = dZ(p)\varphi_p(t), \quad \varphi_p(0) = \mathbb{1}.$$

Logo,

$$\varphi_p(t) = e^{dZ(p)t}. \tag{5.2.6}$$

A equação (5.2.6) mostra que os multiplicadores de Floquet transversais de P_{max} são $\{e^{\tilde{\nu}_{max}(\varepsilon)}, e^{-\tilde{\nu}_{max}(\varepsilon)}\}$ e os multiplicadores de Floquet transversais de P_{min} são $\{e^{\tilde{\nu}_{min}(\varepsilon)}, e^{-\tilde{\nu}_{min}(\varepsilon)}\}$, onde

$$\tilde{\nu}_{max}(\varepsilon) = 2T_{\tau^*}\pi\sqrt{\frac{\Delta''(\tau^*)\varepsilon}{L}} \quad \text{e} \quad \tilde{\nu}_{min}(\varepsilon) = 2T_{\tau^*}\pi\sqrt{\frac{-\Delta''(\tau^*)\varepsilon}{L}}$$

Daí, concluímos que podemos escolher $\epsilon_{\tau^*} > 0$ tal que P^k_{max} e P^k_{min} são órbitas não-degeneradas de X_ε para todo $k \geq 1$ satisfazendo que

$$k(1-\delta)T_{\tau^*} \leq S,$$

sempre que $0 < \varepsilon < \epsilon_{\tau^*}$. Obtemos destas fórmulas também que se $\Delta''(\tau^*) > 0$, então P_{max} é órbita positivamente hiperbólica e que P_{min} é órbita elíptica. Neste caso, obtemos também que p_{max} é singularidade hiperbólica de Z e p_{min} é singularidade elíptica de Z. Analogamente, se $\Delta''(\tau^*) < 0$, então P_{max} é órbita elíptica, P_{min} é órbita positivamente hiperbólica, p_{max} é singularidade elíptica e p_{min} é singularidade hiperbólica. Da Observação 5.1.1, obtemos que P_{max} e P_{min} não são contráteis em $S_\gamma \backslash \bar{L}_0$.

Vamos calcular os índices de Conley-Zehnder de P_{max} e P_{min}. Começamos observando que

$$\{\partial_\tau, (\Delta_2(\tau)\partial_{\vartheta_1} - \Delta_1(\tau)\partial_{\vartheta_2})f_\varepsilon(\tau,\vartheta_1)^{-1}\}$$

formam uma base de ξ_0 em $\mathcal{O}_{\tau^*}$. Vamos denotar por β a classe de equivalência desta base. Quando $\tau = \tau^*$, temos que

$$\Delta_2(\tau^*)\partial_{\vartheta_1} - \Delta_1(\tau^*)\partial_{\vartheta_2} = \partial_{\vartheta_1}.$$

Começaremos supondo que $\Delta''(\tau^*) > 0$. Neste caso, $dZ(p_{max})$ possui um autovetor v. Da equação (5.2.6) vemos que

$$d\phi^{X_\varepsilon}_{T_{max}t}(p_{max},0)v = e^{\nu_{max}(\varepsilon)T_{max}t}v,$$

donde concluímos que

$$\mu_{CZ}(P_{max},\lambda_\varepsilon,\beta) = 0.$$

Da equação (5.2.6) com $p = p_{min}$, obtemos que

$$\varphi_{p_{min}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(\varepsilon)t) & \omega(\varepsilon)^{-1}\operatorname{sen}(\omega(\varepsilon)t) \\ -\omega(\varepsilon)\operatorname{sen}(\omega(\varepsilon)t) & \cos(\omega(\varepsilon)t) \end{pmatrix},$$

onde

$$\omega(\varepsilon) = \frac{2\pi}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{\Delta''(\tau^*)\varepsilon}{L}} > 0.$$

Se

$$v = (\cos(2\pi s), \omega(\varepsilon)\operatorname{sen}(2\pi s)),$$

temos que

$$d\phi^{X_\varepsilon}_{T_{min}t}(p_{min},0)v = \varphi_{p_{min}}(t)v = (\cos(2\pi s - \omega(\varepsilon)t), \omega(\varepsilon)\operatorname{sen}(2\pi s - \omega(\varepsilon)t)).$$

Concluímos que o intervalo de rotação de $\varphi_{p_{min}}$ satisfaz que

$$I(\varphi_{p_{min}}) = \{-(1-\varepsilon)T^{\tau^*}\omega(\varepsilon)\}.$$

Como $\omega(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, podemos escolher $\epsilon_{\tau^*} > 0$ pequeno o suficiente tal que

$$\mu_{CZ}(P_{min}, \lambda_\varepsilon, \beta) = -1.$$

Neste caso, note que

$$\mu_{CZ}(P_{max}, \lambda_\varepsilon) - \mu_{CZ}(P_{min}, \lambda_\varepsilon) = \mu_{CZ}(P_{max}, \lambda_\varepsilon, \beta) - \mu_{CZ}(P_{min}, \lambda_\varepsilon, \beta) = 1.$$

Analogamente, se $\Delta''(\tau^*) < 0$ mostra-se que, para uma escolha de $\epsilon_{\tau^*} > 0$ pequeno o suficiente,

$$\mu_{CZ}(P_{max}, \lambda_\varepsilon, \beta) = 1 \quad \text{e} \quad \mu_{CZ}(P_{min}, \lambda_\varepsilon, \beta) = 0$$

donde segue que

$$\mu_{CZ}(P_{max}, \lambda_\varepsilon) - \mu_{CZ}(P_{min}, \lambda_\varepsilon) = 1.$$

Afirmamos que existe $\epsilon_{\tau^*} > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \epsilon_{\tau^*}$, então não existem órbitas de X_ε em $\mathcal{O}$ com ação menor do que S que não sejam recobrimentos de P_{max} e P_{min}. Suponha, por contradição, que tal ϵ_{τ^*} não existe. Portanto, podemos encontrar uma sequência de números positivos $\{\varepsilon_n\}$ satisfazendo que $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e tal que para todo n exista uma órbita $P_n = (x_n, T_n)$ de X_{ε_n} em $\mathcal{O}$ com $T_n \leq S$ que não é um recobrimento de P_{max} e P_{min}. Como $X_{\varepsilon_n} \to X_0$ quando $n \to \infty$ na topologia C^∞, uma aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli nos garante que, a menos de tomar uma subsequência, x_n converge na topologia C^∞ a uma trajetória fechada x de X_0 com período $T \leq S$ em $\bar{\mathcal{O}}$. Porém, as únicas trajetórias fechadas de X_0 com período menor do que S em $\bar{\mathcal{O}}$ são da forma

$$t \mapsto (\tau^*, \vartheta_1, \vartheta_2 + t).$$

Vamos denotar por z_n a projeção de x_n no anel A. Temos que z_n é uma trajetória de Z_{ε_n} fechada com período mínimo $0 < T_n' \leq T_n \leq S$ convergindo para a função constante $z(t) \equiv p^* = (\tau^*, \vartheta_1) \in A$. Afirmarmos que $p^* = p_{min}$ se $\Delta_2''(\tau^*) > 0$ e $p^* = p_{max}$ se $\Delta_2''(\tau^*) < 0$. Caso contrário, tomando-se n grande o suficiente, obteríamos que $z_n([0, T_n'])$ é um círculo mergulhado em um disco aberto contendo p^* e, pelo Teorema de Jordan-Schoënflies, limita um disco que por hipótese ou não contém nenhuma singularidade do campo Z ou contém somente uma singularidade hiperbólica, contradizendo que a característica de Euler de um disco é 1 (veja seção 5.2 de [13]; note que Z não é tangente ao bordo do disco limitado por $z_n([0, T_n'])$ em nenhum ponto). Isto mostra a afirmação e como subproduto mostra ainda que para n grande o suficiente, $z_n([0, T_n'])$ é um círculo limitando um disco em A que contém p^* no seu interior. Tomando coordenadas ao redor de p^*, podemos supor que para n grande o suficiente $z_n : [0, T_n'] \to \mathbb{C}$ parametriza uma curva simples homeomorfa a um círculo e contendo $p^* = 0 \in \mathbb{C}$ no seu interior. Pela fórmula integral de Cauchy

$$\left| \int_0^{T_n'} \frac{\dot{z}_n(t)}{z_n(t)} dt \right| = 2\pi.$$

Fixe $\eta > 0$ arbitrário. Como Z_{ε_n} converge na topologia C^∞, existe $r > 0$ tal que se $|z| < r$, então

$$|dZ_{\varepsilon_n}(z) - dZ_{\varepsilon_n}(p^*)| \leq \eta,$$

para todo n. Daí, concluímos que se n é grande o suficiente, então

$$|\dot{z}_n(t)| = |Z_{\varepsilon_n}(z_n(t))| \leq (\eta + |dZ_\varepsilon(p^*)|)|z_n(t)| \leq (\eta + \nu(\varepsilon_n))|z_n(t)|,$$

onde

$$\nu(\varepsilon_n) = \nu_{min}(\varepsilon_n) \quad \text{ou} \quad \nu(\varepsilon_n) = \nu_{max}(\varepsilon_n),$$

dependendo se $\Delta_2''(\tau^*) > 0$ ou se $\Delta_2''(\tau^*) < 0$. Daí,

$$2\pi \leq \int_0^{T_n'} (\eta + \nu(\varepsilon_n))dt = (\eta + \nu(\varepsilon_n))T_n' \implies T_n' \geq \frac{2\pi}{\eta + \nu(\varepsilon_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2\pi}{\eta}.$$

Como $\eta > 0$ é arbitrário, isto contradiz a hipótese de que $T_n' \leq S$ para todo n. Esta contradição mostra que as únicas órbitas com período menor ou igual a S em $\mathcal{O}_{\tau^*}$ são iteradas de P_{max} e P_{min}.

Para cade $0 < \varepsilon < \min\{\epsilon_{\tau_1}, \ldots, \epsilon_{\tau_n}\}$ consideramos a forma de contato $\lambda_\varepsilon = f_\varepsilon \lambda_0$ em S_γ. Tomamos

$$f_S = (f_\varepsilon \circ \Psi_\gamma) f_{\theta,p,q},$$

onde Ψ_γ está definida em (5.1.3). Note que

$$\Psi_\gamma^*(f_\varepsilon \lambda_0) = f_S \lambda_0.$$

Do que foi mostrado acima, claramente $f_S\lambda_0$ satisfaz (a), (c), (d) e (f). Se $S < T_{t_{p,q}}$, o item (b) segue tomando-se como $K_{p,q}$ qualquer uma das órbitas no toro $\mathbb{T}_{t_{p,q}}$, se $S > T_{t_{p,q}}$, o teorema segue tomandos-se

$$K_{p,q} = \Psi_\gamma^{-1}(\mathscr{O}(P_{max}^{t_{p,q}})).$$

Usando $t^1_{\hat{p},\hat{q}}, t^2_{\hat{p},\hat{q}} \in \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$, podemos tomar

$$P^i_{max} = \Psi_\gamma^- 1(P_{max}^{t^i_{\hat{p},\hat{q}}}) \quad \text{e} \quad P^i_{min} = \Psi_\gamma^- 1(P_{min}^{t^i_{\hat{p},\hat{q}}}).$$

Como $t^1_{\hat{p},\hat{q}} < t_{p,q} < t^2_{\hat{p},\hat{q}}$, segue das relações (B.2.6) e (B.2.7) que

$$\text{lk}(K_{p,q}, P^1) = p\hat{q} \quad \text{e} \quad \text{lk}(K_{p,q}, P^2) = \hat{p}q,$$

onde $P^i \in \{P^i_{max}, P^i_{min}\}$, $i = 1, 2$. Mas $p\hat{q} \neq \hat{p}q$, pois

$$(p,q) \prec (\hat{p},\hat{q}) \prec (1,\theta) \quad \text{ou} \quad (1,\theta) \prec (\hat{p},\hat{q}) \prec (p,q).$$

Isto prova (e).

$\square$

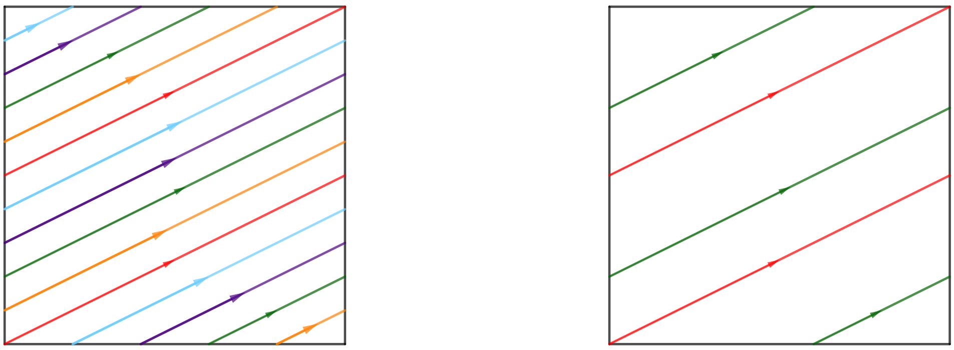

Figura 5.2.1 – Dinâmica em um toro invariante antes e depois da perturbação.

Observação 5.2.1. Aplicando a Proposição 1.3.4, podemos supor que o enlace $L_{p,q}$ encontrado acima é um enlace de de tipo (p,q) padrão e que $f_{S,\varepsilon} \in \mathscr{F}_{p,q}$.

□

Observação 5.2.2. Pela construção da superfície S_γ, temos que $\Delta_2''(t^1\hat{p},\hat{q})\Delta_2''(t^1\hat{p},\hat{q}) < 0$. Logo, se $i,j \in \{1,2\}$, $i \neq j$ e P^i_{max} é positivamente hiperbólica e P^i_{min} é elíptica, então P^j_{max} é elíptica e P^j_{min} é positivamente hiperbólica.

□

5.3 Cálculo da homologia nos modelos

Continuamos com as mesmas convenções da seção anterior e usaremos livremente a notação da seção 4.1. Nas condições do Teorema 5.2.1, vemos que $\lambda_S = f_S\lambda_0$ satisfaz as condições (a), (b) e (c) da seção 4.1 para a definição da homologia com $T = S$. Nosso objetivo nesta seção é mostrar o seguinte teorema

Teorema 5.3.1. *Existe $J_S \in \mathscr{J}_+(\xi_0)$ tal que $\hat{J}_S \in \mathscr{J}_{reg}(f_S\lambda_0)$ (veja Teorema 4.1.1) e $H_*(p,q,\hat{p},\hat{q},S,\lambda_S,J_S) \neq 0$.*

Do Teorema 5.2.1, tomando-se $\delta > 0$ pequeno o suficiente, temos que $\mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},S,\lambda_S) = \{P^1_{max},P^1_{min},P^2_{max},P^2_{min}\}$, onde cada par $\{P^i_{max},P^i_{min}\}$ contém uma órbita positivamente hiperbólica e um órbita elíptica. Se $P^i \in \{P^i_{max},P^i_{min}\}$, $i=1,2$, como P^1 e P^2 estão em classes de homotopia distintas de $\mathbb{S}^3\backslash L_{p,q}$, então para qualquer escolha de $J \in \mathscr{J}_+(\xi_0)$ temos que

$$\mathscr{M}^S_{\hat{J}}(P^i,P^j) = \emptyset$$

sempre que $i \neq j$. Além disso,

$$\mu_{CZ}(P^i_{max},\lambda_S) - \mu_{CZ}(P^i_{min},\lambda_S) = 1, \quad i = 1,2.$$

Portanto, basta estudarmos os espaços

$$\mathscr{M}^S_{\tilde{J}}(P^i_{max}, P^i_{min}), \quad i = 1, 2.$$

Vamos fixar $i = 1, 2$ e escrever $P_{max} = P^i_{max}$ e $P_{min} = P^i_{min}$ para simplificar a notação. Existe uma vizinhança $\mathcal{O} \cong I \times \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, com coordenadas $(\tau, \vartheta_1, \vartheta_2)$, de $\{P^i_{max}, P^i_{min}\}$, onde I é um intervalo aberto, $L > 0$ e $T > 0$, tais que

$$f_S(\vartheta_1) = 1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi\vartheta_1}{L}\right),$$

onde $\varepsilon > 0$,

$$(\lambda_S)_{(\tau,\vartheta_1,\vartheta_2)} = f_S(\vartheta_1)(\Delta_1(\tau)d\vartheta_1 + \Delta_2(\tau)d\vartheta_2)$$

e o campo de Reeb de λ_S se escreve como

$$X_{\lambda_S} = X^\tau \partial_\tau + X^{\vartheta_1}\partial_{\vartheta_1} + X^{\vartheta_2}\partial_{\vartheta_2},$$

onde

$$X^\tau(\tau, \vartheta_1) = \frac{d}{d\vartheta_1}\left(-\frac{1}{f_S(\vartheta_1)}\right)\frac{\Delta_2(\tau)}{\Delta(\tau)},$$

$$X^{\vartheta_1}(\tau, \vartheta_1) = -\frac{1}{f_S(\vartheta_1)}\frac{\Delta_2'(\tau)}{\Delta(\tau)}$$

e

$$X^{\vartheta_2}(\tau, \vartheta_1) = \frac{1}{f_S(\vartheta_1)}\frac{\Delta_1'(\tau)}{\Delta(\tau)};$$

veja (5.2.3), (5.2.4) e (5.2.5). Aqui usamos que a vizinhança $\mathcal{O}_i$ pode ser escolhida de forma que $\beta \equiv 1$. Nestas coordenadas, temos que

$$P_{max} = (x_{max}, T_{max}) \quad \text{e} \quad P_{min} = (x_{min}, T_{min}),$$

onde $T_{max} = (1 + \varepsilon)T$, $T_{min} = (1 - \varepsilon)T$,

$$x_{max}(t) = (\tau^*, \vartheta_1, (1 + \varepsilon)^{-1}t) \quad \text{e} \quad x_{min}(t) = (\tau^*, \vartheta_1, (1 - \varepsilon)^{-1}t).$$

Em $\mathcal{O}$, temos a base de ξ_0 dada por $\{e_1, e_2\}$, onde

$$e_1 = \partial_\tau \quad \text{e} \quad e_2 = \frac{1}{f_S}(\Delta_2\partial_{\vartheta_1} - \Delta_1\partial_{\vartheta_2}).$$

Tomamos $J_S \in \mathscr{J}_+(\xi_0)$ satisfazendo que

$$J_S e_1 = e_2,$$

em $\mathcal{O}$. Estendemos J_S a uma estrutura quase-complexa $\tilde{J}_S$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ $\mathbb{R}$-invariante da maneira usual definindo

$$\tilde{J}_S\partial_a = X_{\lambda_S} \quad \text{e} \quad \tilde{J}_S|\xi_0 = J_S,$$

onde denotamos por a a coordenada em $\mathbb{R}$ e pensamos ξ_0 como um subfibrado $\mathbb{R}$-invariante de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$.

Denotaremos por $\mathscr{M}$ o espaço de classes de equivalência de soluções do problema

$$\begin{cases} \tilde{u} = (a, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3 \\ \bar{\partial}_{\tilde{J}_S}(\tilde{u}) = 0 \\ 0 < E(\tilde{u}) < \infty \\ \tilde{u} \text{ é positivamente assintótica a } P_{max} \text{ em } \infty \\ \tilde{u} \text{ é negativamente assintótica a } P_{min} \text{ em } 0, \end{cases}$$

onde consideramos as soluções $\tilde{u} = (a, u)$ e $\tilde{v} = (b, v)$ equivalentes se existem $c_0, s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$b(s, t) = a(s + s_0, t + t_0) + c_0 \quad \text{e} \quad v(s, t) = u(s + s_0, t + t_0).$$

Observação 5.3.1. O mapa Ψ_{λ_S} da seção A.5 induz uma identificação do espaço $\mathscr{M}$ com o espaço $\mathscr{M}^S_{\tilde{J}_S}(P^i, P^j)/\mathbb{R}$.

Lema 5.3.2. *Existem* $[\tilde{u}_1], [\tilde{u}_2] \in \mathscr{M}$, $[\tilde{u}_1] \neq [\tilde{u}_2]$ *tais que:*

(a) $\tilde{u}_i$ *e* u_i *são mergulhos,* $i = 1, 2$*;*

(b) $u_i(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap P_{max} = \emptyset$ *e* $u_i(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap P_{min} = \emptyset$*,* $i = 1, 2$*;*

(c) $u_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap u_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \emptyset$*.*

Demonstração. Dado $c \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, seja $\vartheta_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ a solução de

$$\dot{\vartheta}_1 = \left(-\frac{T}{f_S}\right)' \circ \vartheta_1, \quad \vartheta_1(0) = c.$$

Definimos $\tilde{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ dada por

$$\tilde{u}(s, t) = (a(s), \tau^*, \vartheta_1(s), Tt),$$

onde

$$a(s) = T \int_0^s f_S(\vartheta_1(r)) dr.$$

Note que a função $-T/f_S$ é uma função de Morse em $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ com somente dois pontos críticos, a saber, 0 e $L/2$. Além disso, se $c \in (0, L/2)$, temos que

$$\left(-\frac{T}{f_S}\right)'(c) = -\frac{T}{f_S(c)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi c}{L}\right) < 0$$

e se $c \in (L/2, L)$, temos que

$$\left(-\frac{T}{f_S}\right)'(c) = -\frac{T}{f_S(c)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi c}{L}\right) > 0.$$

Logo, se $c \in (0, L/2)$, então $\dot\vartheta_1(s) < 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e

$$\vartheta_1(s) \xrightarrow{s\to\infty} 0 \quad \text{e} \quad \vartheta_1(s) \xrightarrow{s\to-\infty} L/2.$$

Se $c \in (L/2, L)$, então $\dot\vartheta_1(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e

$$\vartheta_1(s) \xrightarrow{s\to\infty} L \quad \text{e} \quad \vartheta_1(s) \xrightarrow{s\to-\infty} L/2.$$

Supomos de agora em diante que $c \neq 0, L/2$. Em particular, $\tilde u$ não é constante. Vamos mostrar então que $\tilde u$ é um cilindro $\tilde J_S$-holomorfo.

Notamos que

$$\begin{aligned}\partial_{\vartheta_1} &= f_S\Delta_1 X_{\lambda_S} - f_S\Delta_1 X^\tau e_1 + f_S^2 X^{\vartheta_2} e_2\\ \partial_{\vartheta_2} &= f_S\Delta_2 X_{\lambda_S} - f_S\Delta_2 X^\tau e_1 - f_S^2 X^{\vartheta_1} e_2.\end{aligned}$$

Daí,

$$\tilde J_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f_S\Delta_1 & -f_S\Delta_2\\ X^\tau & 0 & -f_S^2X^{\vartheta_2} & f_S^2X^{\vartheta_1}\\ X^{\vartheta_1} & \frac{\Delta_2}{f_S} & -X^\tau\Delta_1\Delta_2 & -X^\tau\Delta_2^2\\ X^{\vartheta_2} & -\frac{\Delta_1}{f_S} & X^\tau\Delta_1^2 & X^\tau\Delta_1\Delta_2\end{pmatrix}$$

e

$$\tilde J_S(\tilde u(s,t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -f_S(\vartheta_1(s))\\ T^{-1}\dot\vartheta_1(s) & 0 & -f_S(\vartheta_1(s)) & 0\\ 0 & \frac{1}{f_S(\vartheta_1(s))} & 0 & -T^{-1}\dot\vartheta_1(s)\\ \frac{1}{f_S(\vartheta_1(s))} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Por outro lado,

$$\partial_s\tilde u(s,t) = \begin{pmatrix} Tf_S(\vartheta_1(s))\\ 0\\ \dot\vartheta_1(s)\\ 0\end{pmatrix}$$

e

$$\partial_t\tilde u(s,t) = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\T\end{pmatrix}.$$

Concluímos que

$$\tilde J_S(\tilde u(s,t))\partial_t\tilde u(s,t) = \begin{pmatrix} -Tf_S(\vartheta_1(s))\\ 0\\ -\dot\vartheta_1(s)\\ 0\end{pmatrix} = -\partial_s\tilde u(s,t).$$

Vamos calcular $E(\tilde{u})$. Dado $\phi \in \Lambda$ (veja seção 3.2), temos que

$$\begin{aligned}
(\tilde{u})^* d(\lambda_S)_\phi &= d[(\tilde{u})^*(\lambda_S)_\phi] \\
&= d[\phi(a(s))(u)^*\lambda_S] \\
&= Td[\phi(a(s))f_S(\vartheta_1(s))dt] \\
&= T(\phi(a(s))f_S(\vartheta_1(s)))' ds \wedge dt
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}} (\tilde{u})^* d(\lambda_S)_\phi &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 T(\phi(a(s))f_S(\vartheta_1(s)))' dsdt \\
&= T\int_{-\infty}^{\infty} (\phi(a(s))f_S(\vartheta_1(s)))' ds \\
&= T\lim_{R\to\infty}[\phi(a(R))f_S(\vartheta_1(R)) - \phi(a(-R))f_S(\vartheta_1(-R))] \\
&\leq T(1+\varepsilon).
\end{aligned}$$

Tomando, $c = L/4$ e $c = 3L/4$, respectivamente, definimos elementos $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$. Pelo que vimos acima $[\tilde{u}_1], [\tilde{u}_2] \in \mathscr{M}$.

Do fato que $\dot{\vartheta}_1(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, segue que u_i é uma imersão injetiva, $i = 1, 2$. Isto também mostra que

$$\vartheta_1(s) \notin \{0, L/2\}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e, por conseguinte, mostra que $u_i(\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap P_{max} = \emptyset$ e $u_i(\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap P_{min} = \emptyset$, $i = 1, 2$. Que $u_1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap u_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \emptyset$ segue do fato que a função ϑ_1 é tomada como parametrizações de órbitas distintas de um mesmo campo de vetores nos caso $i = 1$ e $i = 2$. Isto também mostra que $[\tilde{u}_1] \neq [\tilde{u}_2]$. Suponha que $\{(s_n, t_n)\}$ é uma sequência em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ satisfazendo que

$$\lim_{n\to\infty} u_i(s_n, t_n) = (\tau^*, \vartheta_1(s_0), Tt_0) \in u_i(\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

É imediato que $t_n \to t_0$ quando $n \to \infty$. Suponha que $s_n \not\to s_0$ quando $n \to \infty$. Então existe $\delta > 0$ tal que, tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $s_n > s_0 + \delta$ ou $s_n < s_0 - \delta$ para todo n. Mas isto implicaria a existência de $\eta > 0$ tal que

$$\vartheta_1(s_n) > \vartheta_1(s_0) + \eta \text{ ou } \vartheta_1(s_n) < \vartheta_1(s_0) - \eta,$$

para todo n. Esta contradição, mostra que $s_n \to s_0$ quando $n \to \infty$ e, portanto, que u_i é um mergulho para $i = 1, 2$. A fortiori, $\tilde{u}_i$ também é um mergulho para $i = 1, 2$. □

Lema 5.3.3. *Dado $[\tilde{u}] \in \mathscr{M}$, onde $\tilde{u} = (a, u)$, existe um difeomorfismo $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $s_0 > 0$ tais que*

$$u \circ \psi = \exp_{x_{T_min(t)}}[U_+(s,t)], \quad s < -s_0,$$

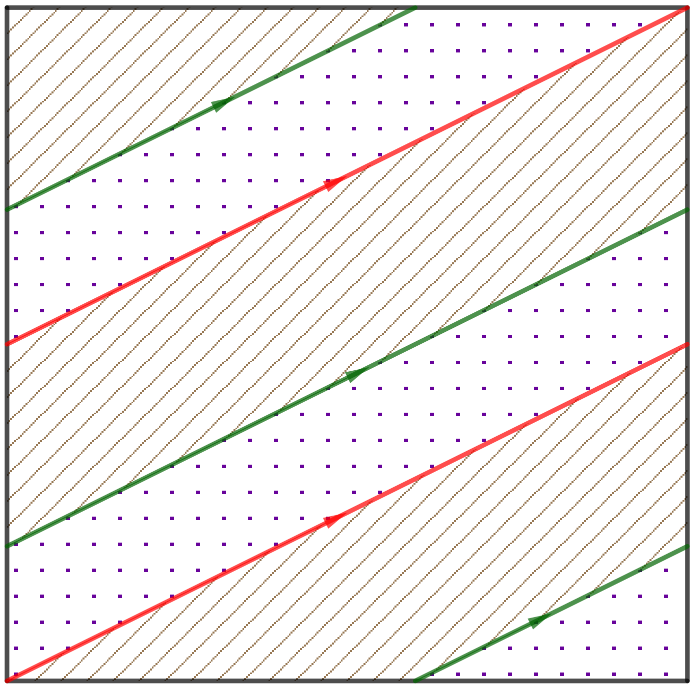

Figura 5.3.1 – Projeção dos cilindros $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ em $\mathbb{S}^3$.

$$u \circ \psi = \exp_{x_{T_{max}}(t)}[U_-(s,t)], \quad s > s_0$$

e

$$\partial^\gamma[\psi(s,t) - (s,t)] \xrightarrow{|s|\to\infty} 0,$$

uniformemente em t, para todo multi-índice $\gamma \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, onde exp *denota o mapa exponencial associado à métrica $\lambda_\varepsilon \oplus \lambda_\varepsilon + d\lambda_\varepsilon(\cdot, J_\varepsilon \cdot)$ e*

$$U_\pm(s,t) = e^{\mu_\pm s}(\eta_\pm(t) + r_\pm(s,t))$$

de forma que $\mu_+ > 0$, $\mu_- < 0$, $\eta_+ : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to (x_{T_{min}})^*\xi_0$, $\eta_- : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to (x_{T_{max}})^*\xi_0$, $A_{P_{min}}\eta_+ = \mu_+\eta_+$, $A_{P_{max}}\eta_- = \mu_-\eta_-$ e

$$\partial^\gamma r_\pm(s,t) \xrightarrow{s\to\mp\infty} 0$$

uniformemente em t, para todo multi-índice $\gamma \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$.

Além disso,

$$\mathrm{wind}(\eta_+, P_{min}, \lambda_S) = \mathrm{wind}^+(P_{min}, \lambda_S) \quad e \quad \mathrm{wind}(\eta_-, P_{max}, \lambda_S) = \mathrm{wind}^-(P_{max}, \lambda_S).$$

Demonstração. A existência de (U_+, U_-, ψ) segue da Proposição 5.1 de [31] e do fato das órbitas P_{max} e P_{min} serem não degeneradas.

Vamos provar a segunda parte. Por definição

$$\text{wind}(\eta_+, P_{min}, \lambda_S) \geq \text{wind}^+(P_{min}, \lambda_S) \quad \text{e} \quad \text{wind}(\eta_-, P_{max}, \lambda_S) \leq \text{wind}^-(P_{max}, \lambda_S)$$

Lembramos que

$$\mu_{CZ}(P_{max}, \lambda_S) = 2\text{wind}^-(P_{max}, \lambda_S) + p_{max}$$

e

$$\mu_{CZ}(P_{min}, \lambda_S) = 2\text{wind}^-(P_{min}, \lambda_S) + p_{min},$$

onde $p_{max}, p_{min} \in \{0, 1\}$. Como $\{P_{max}, P_{min}\}$ contém uma órbita hiperbólica positiva e uma órbita elíptica, concluímos, pela Proposição 3.6.2, temos que $p_{max} + p_{min} = 1$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
2\text{wind}^-(P_{max}, \lambda_S) + p_{max} &= \mu_{CZ}(P_{max}, \lambda_S) \\
&= \mu_{CZ}(P_{min}, \lambda_S) + 1 \\
&= 2\text{wind}^-(P_{min}, \lambda_S) + p_{min} + 1
\end{aligned}$$

Pela Proposição 5.6 de [15], temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \text{wind}(\eta_-, P_{max}, \lambda_S) - \text{wind}(\eta_+, P_{min}, \lambda_S) \\
&\leq \text{wind}^-(P_{max}, \lambda_S) - \text{wind}^+(P_{min}, \lambda_S) \\
&= \text{wind}^-(P_{min}, \lambda_S) + \frac{1 + p_{min} - p_{max}}{2} - \text{wind}^-(P_{min}, \lambda_S) - p_{min} \\
&= \frac{1 - p_{max} - p_{min}}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\text{wind}(\eta_+, P_{min}, \lambda_S) = \text{wind}(\eta_-, P_{max}, \lambda_S) \leq \text{wind}^-(P_{max}, \lambda_S) = \text{wind}^+(P_{min}, \lambda_S) \leq \text{wind}(\eta_+, P_{min}, \lambda_S).$$

Concluímos que

$$\text{wind}(\eta_-, P_{max}, \lambda_S) = \text{wind}^-(P_{max}, \lambda_S)$$

e

$$\text{wind}^+(P_{min}, \lambda_S) = \text{wind}(\eta_+, P_{min}, \lambda_S).$$

□

Definição 5.3.1. A tripla (U_+, U_-, ψ), como no Lema 5.3.3, será chamada de um representante assintótico para $\tilde{u}$.

Observação 5.3.2. Neste trabalho, diferentemente de [31], o representante assintótico é dado para os dois fins do cilindro ao mesmo tempo.

Lema 5.3.4. *Dado* $[\tilde{u}] \in \mathscr{M}$, *onde* $\tilde{u} = (a, u)$, *então*

$$u(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap (P_{max}) \cup P_{min}) = \emptyset.$$

Demonstração. Começamos observando que $u(s,t) \notin P_{max} \cup P_{min}$ se $|s|$ é grande o suficiente. De fato, isto segue do Corolário 3.7.5 ou da fórmula assíntótica do Lema 5.3.3, pois $\eta_\pm$ nunca se anulam.

Vamos escrever

$$\tilde{u}_{max}(s,t) = (s, x_{T_{max}}(t)) \quad \text{e} \quad \tilde{u}_{min}(s,t) = (s, x_{T_{min}}(t)),$$

os cilindros triviais sobre P_{max} e P_{min}, respectivamente.

Vamos construir uma homotopia entre u e u_1 de forma que nenhuma interseção com $P_{max} \cup P_{min}$ é criada ou destruída quando $|s|$ é grande o suficiente. Sejam (U_+, U_-, ψ) e (U_+^1, U_-^1, ψ^1) os representantes assintóticos de $\tilde{u}$ e $\tilde{u}_1$, respectivamente. Sejam (η_+, η_-) e (η_+^1, η_-^1) os autovetores associados aos representantes assintóticos (U_+, U_-, ψ) e (U_+^1, U_-^1, ψ^1), respectivamente. Temos 3 possibilidades (veja seção 2.3):

(i) $\eta_+ = c\eta_+^1$, com $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$;

(ii) $\{\eta_+(t), \eta_+^1(t)\}$ são linearmente independentes para todo t;

(iii) $\eta_+ = c\eta_+^1$, com $c \in \mathbb{R}$, $c < 0$.

Suponha que estamos no caso (i) ou (ii). Para $M > 0$, tome uma função $\gamma_M : \mathbb{R} \times [0,1] \to [0,1]$ satisfazendo que $\gamma_M(s,\zeta) = \zeta$ se $s > M$ e $\gamma_M(s,\zeta) = 0$ se $s < M - 1$. Se M é grande o suficiente, defina a homotopia

$$H : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^3$$

dada por

$$H(\zeta, s, t) = \exp_{x_{T_{max}(t)}}[(1 - \gamma_M(s,\zeta))U_-(s,t) + \gamma_M(s,\zeta)U_-^1(s,t)], \quad s \geq M - 1$$

e

$$H(\zeta, s, t) = u \circ \psi(s,t), \quad s < M - 1.$$

Observe que, para $s > M$,

$$\begin{aligned}(1 - \gamma_M(s,\zeta))U_-(s,t) + \gamma_M(s,\zeta)U_-^1(s,t) &= (1-\zeta)U_-(s,t) + \zeta U_-^1(s,t) \\ &= (1-\zeta)e^{\mu_- s}(\eta_-(t) + r_-(s,t)) + \zeta e^{\mu_+^1 s}(\eta_-^1(t) + r_-^1(s,t)) \\ &= (1-\zeta)e^{\mu_- s}\eta_-(t) + \zeta e^{\mu_+^1 s}\eta_-^1(t) + r(s,t),\end{aligned}$$

onde

$$r(s,t) = (1-\zeta)e^{\mu_- s} r_-(s,t) + \zeta e^{\mu_+^1 s} r_-^1(s,t).$$

Como, por hipótese

$$(1-\zeta)e^{\mu_- s}\eta_-(t) + \zeta e^{\mu_+^1 s}\eta_-^1(t) \neq 0$$

para todo t e ζ e $r(s,t) \to 0$ quando $s \to \infty$ uniformemente em t, tomando-se $M > 0$ grande o suficiente, não criamos ou destruímos nenhuma inteseção com P_{max} em $s > M$. Ademais, para $M > 0$ grande a homotopia tem suporte em uma vizinhança de P_{max} que não contém P_{min}, logo, a homotopia também não cria ou destrói interseções com P_{min}.

Supomos agora que estamos no caso (iii). Dado $\tau > 0$ e $M > 0$, defina a homotopia

$$H : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^3$$

dada por

$$H(\zeta, s, t) = \exp_{x_{T_{max}(t)}}[R(\tau\gamma_M(s,\zeta))U_-(s,t)], \quad s \geq M-1$$

e

$$H(\zeta, s, t) = u \circ \psi(s,t), \quad s < M-1,$$

onde $R(\theta)$ é um morfismo de $T\mathbb{S}^3$ dado pela rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário calculada com respeito a alguma base global de ξ_0 e que preserva a direção de X_λ. Tomando-se $\tau > 0$ pequeno o suficiente e $M > 0$ grande o suficiente, esta homotopia não cria nem destrói interseções com P_{max} e P_{min} e reduz o caso (iii) ao caso (ii). Podemos, portanto, aplicar o procedimento acima.

Utilizando a construção análoga próximo a P_{min}, obtemos um mapa $\bar{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^3$ homotópico a u e tal que $\bar{u} = u_1$ se $|s| > M$, $\bar{u} = u$ se $s < M-1$ para alguma escolha de M grande o suficiente e tal que $\bar{u}$ tenha exatamente as mesmas interseções com P_{max} e P_{min} que u. Daí, vemos que $\tilde{u} = (a, u)$ é homotópico ao mapa $(a, \bar{u})$ e estes mapas possuem o mesmo número de interseção com $\tilde{u}_{max}$ e $\tilde{u}_{min}$.

Tome $p \in \mathbb{S}^3$ que não está na imagem de $\bar{u}$ e u_1 e considere a projeção estereográfica $\Psi : \mathbb{S}^3 \backslash \{p\} \to \mathbb{R}^3$. Defina a homotopia

$$(\zeta, s, t) \mapsto \Psi^{-1}((1-\zeta)\Psi(\bar{u}(s,t)) + \zeta\Psi(u_1(s,t))).$$

Observe que esta homotopia tem suporte na região $|s| \leq M$. Pela invariância homotópica do número interseção em domínios compactos, concluímos que $\tilde{u}$ possui o mesmo número de interseção com $\tilde{u}_{max}$ e $\tilde{u}_{min}$ que $\tilde{u}_1$. Como vimos no Lema 5.3.2, $\tilde{u}_1$ não intersecta $\tilde{u}_{max}$ e $\tilde{u}_{min}$. Por positividade de interseção de curvas pseudo-holomorfas (veja [25], Apêndice E), u não intersecta P_{max} e P_{min}. □

Lema 5.3.5. *Se $[\tilde{u}], [\tilde{v}] \in \mathscr{M}$, com $[\tilde{u}] \neq [\tilde{v}]$, então $[\tilde{u}] * [\tilde{v}] = 0$, onde $*$ denota o número de interseção de Siefring como definido em [32].*

Demonstração. Nas condições do enunciado, temos pelo Lema 5.3.4, temos que $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ satisfazem as condições 3(a) e 3(b) do Corolário 5.9 de [32] e pelo Lema 5.3.3, temos que $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ satisfazem a condição 3(c) do Corolário 5.9 de [32]. Segue da condição 1 do Corolário 5.9 de [32] que $[\tilde{u}] * [\tilde{v}] = 0$. $\square$

Lema 5.3.6. $\mathscr{M} = \{[\tilde{u}_1], [\tilde{u}_2]\}$.

Demonstração. Suponha que exista um terceiro elemento $[\tilde{u}_3]$ em $\mathscr{M}$. Sejam U_+^i, U_-^i, ψ_i representantes assintóticos de $\tilde{u}_i$, $i = 1, 2, 3$. Em $\{P_{max}, P_{min}\}$, pelo menos uma das órbitas é positivamente hiperbólica. Assuma que P_{max} é esta órbita. O caso de P_{min} é análogo. Seja η_i o autovertor associado a U_-^i, $i = 1, 2, 3$. Do Lema 5.3.3 temos que

$$\text{wind}(\eta_1, P_{max}, \lambda_S) = \text{wind}(\eta_2, P_{max}, \lambda_S) = \text{wind}(\eta_3, P_{max}, \lambda_S) = \text{wind}^-(P_{max}, \lambda_S).$$

Do Corolário 2.3.4, dados existem $c_{ij} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ tais que

$$\eta_i = c_{ij} \eta_j,$$

$i, j = 1, 2, 3$. Logo, existem $i \neq j$ com $c_{ij} > 0$. Na nomenclatura de [32] dizemos que $\tilde{u}_i$ e $\tilde{u}_j$ se aproximam de P_{max} na mesma direção. Logo, $\tilde{u}_i$ e $\tilde{u}_j$ satisfazem as condições do Teorema 2.5 de [32]. Portanto,

$$[\tilde{u}_i] * [\tilde{u}_j] \neq 0,$$

contradizendo o Lema 5.3.5. $\square$

Lema 5.3.7. *Temos que $\hat{J}_S \in \mathscr{J}_{reg}(f_S \lambda_0)$ (veja Teorema 4.1.1).*

Demonstração. Aqui apelaremos ao Teorema 1 de [33]. Vamos identificar $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com $\mathbb{C}P^1 \backslash \Gamma$, $\Gamma = \{[1:0], [0:1]\}$, via o mapa

$$(s, t) \mapsto [e^{2\pi(s+it)} : 1].$$

Na notação de [33], temos que para qualquer $[\tilde{u}] \in \mathscr{M}$, $\#\Gamma_0 = 1$ (as curva $\tilde{u}$ possuem somente um furo positivo) e $Z(d\tilde{u}) = 0$ (pelo Lema lema: somente dois elementos no moduli space e Lema 5.3.2, $\tilde{u}$ é um mergulho e sua diferencial não se anula). Logo,

$$\mu_{CZ}(P_{max}, \lambda_S) - \mu_{CZ}(P_{min}, \lambda_S) = 1 > -1 = -\chi(\mathbb{C}P^1) + \#\Gamma_0 + Z(d\tilde{u}).$$

As hipóteses do Teorema 1 de [33] são satisfeitas, donde segue que todos os elementos $[\tilde{u}] \in \mathscr{M}$ são regulares no sentido de que a linearização da equação de Cauchy-Riemann em $\tilde{u}$ é um operador de Fredholm sobrejetivo no contexto especificado em [33]. Em particular, concluímos que $\hat{J}_S \in \mathscr{J}_{reg}(f_S \lambda_0)$. $\square$

Demonstração do Teorema 5.3.1. . Do Lema 5.3.7, temos que $\hat{J}_S \in \mathscr{J}_{reg}(f_S\lambda_0)$, portanto podemos definir $H_*(p,q,\hat{p},\hat{q},S,\lambda_S,J_S)$ como na definição 4.1.2. Por hipótese, temos que $(C_k(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda),\partial_k)$ possui exatamente quanto geradores $\{P^1_{max},P^1_{min},P^2_{max},P^2_{min}\}$. Da discussão acima, vemos que

$$[\#\mathscr{M}^S_{\hat{J}_S}(P,P')\backslash\mathbb{R}]_2 = 0,$$

para qualquer escolha de $P,P' \in \{P^1_{max},P^1_{min},P^2_{max},P^2_{min}\}$ com $P \neq P'$. Logo,

$$\partial(|P|) = 0,$$

para qualquer $P \in \{P^1_{max},P^1_{min},P^2_{max},P^2_{min}\}$. Temos três possibilidades:

(i) Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$H_j(p,q,\hat{p},\hat{q},S,\lambda_S,J_S) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{se } j = k, k+1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(ii) Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$H_j(p,q,\hat{p},\hat{q},S,\lambda_S,J_S) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se } j = k, k+2 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{se } j = k+1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(iii) Existem $k,l \in \mathbb{Z}$, $l > k+1$ tais que

$$H_j(p,q,\hat{p},\hat{q},S,\lambda_S,J_S) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se } j = k, k+1, l, l+1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em todos os casos, segue que $H_*(p,q,\hat{p},\hat{q},S,\lambda_S,J_S) \neq 0$. □

5.4 Morfismos entre cadeias não-triviais no modelo

Continuamos sob as mesmas hipóteses das seções anteriores. Sejam $0 < c < 1$ e $T > 0$ tais que $T \geq \max T_{t^1_{\hat{p},\hat{q}}}, T_{t^2_{\hat{p},\hat{q}}}$. Tomando $S > T/c$, podemos encontrar, pelo Teorema 5.2.1, $f_S \in \mathscr{F}_{p,q}$ tal que $\lambda_S = f_S\lambda_0$ satisfaz todos os resultados da seção 5.3 e tal que

$$\mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},S,\lambda_S) = \mathscr{P}(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_S).$$

Logo, as inclusões

$$(C_*(p,q,\hat{p},\hat{q},T_1,\lambda_S),\partial(\lambda_S,J_S)) \hookrightarrow (C_*(p,q,\hat{p},\hat{q},T_2,\lambda_S),\partial(\lambda_S,J_S))$$

com $T \leq T_1 \leq T_2 \leq S$ induzem isomorfimos. Daí, temos que

$$H_*(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_S,J_S) = H_*(p,q,\hat{p},\hat{q},T/c,\lambda_S,J_S) = H_*(p,q,\hat{p},\hat{q},S,\lambda_S,J_S) \neq 0$$

Vamos escrever

$$i_* : (C_*(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_S),\partial(\lambda_S,J_S)) \hookrightarrow (C_*(p,q,\hat{p},\hat{q},T/c,\lambda_S),\partial(\lambda_S,J_S)).$$

Se j_* denota o isomorfismo de cadeias definido em 4.3.1, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 5.4.1. *Se c, T, S, f_S e J_S são como acima então*

$$j_* \circ i_* : H_*(p,q,\hat{p},\hat{q},T,\lambda_S,J_S) \to H_*(p,q,\hat{p},\hat{q},T/c,c\lambda_S,J_S),$$

é um isomorfismo. Em particular, $j_* \circ i_* \neq 0$.

6 O Teorema Principal

Neste capítulo mostramos o teorema principal do trabalho. Começamos com alguns resultados técnicos na seção 6.1. Em especial, usamos a técnica de stretching the neck para garantir que órbitas de tipo $(\hat{p}, \hat{q})$ sobrevivem quando aproximamos formas de contato. Na seção 6.2, utilizamos todos os resultados anteriores para mostrar que o Teorema 6.3.2 vale quando a forma de contato é não degenerada. Conseguimos ainda mostrar que a órbita de tipo $(\hat{p}, \hat{q})$ tem seu período controlado. A partir de um resultado de aproximação de formas degeneradas por formas não-degeneradas, mostramos o Teorema 6.3.2 na seção 6.3. Finalmente, utilizando a controle do período das órbitas obtidas e estrutura do modelos de Morse-Bott construídos no capítulo 5, estudamos o crescimento do número de órbitas de Reeb periódicas com respeito ao período e mostramos que este crescimento é pelo menos polinomial.

6.1 Resultados preparatórios

Vamos fixar $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo. Dado $f \in \mathscr{F}_{p,q}$, escrevemos

$$\theta_i(f) = \rho(K_i, f\lambda_0) - 1,$$

$i = 1, 2$, onde vemos K_i como órbita de Reeb prima de $f\lambda_0$.

Suponha que $h \in \mathscr{F}_{p,q}$ é não-degenerada. Temos que $K_1 = (x_1, T_1)$ e $K_2 = (x_2, T_2)$ como órbitas de Reeb primas de $h\lambda_0$. Suponha que $\tilde{u} : \Sigma \backslash \Gamma \to W_{\xi_0}$ é uma curva pseudo-holomorfa com furos, assintótica a K_i^k, $i = 1, 2$, em $z \in \Gamma$ (aqui não importa se vemos W_{ξ_0} como simplectização, como cobordismo com fins cilíndrico ou como cobordismo dividido). Vamos denotar por $\pi : W_{\xi_0} \to \mathbb{S}^3$ o mapa projeção. Seja $(\mathcal{U}, \Phi)$ um tubo de Martinet para K_i^k como no Corolário 3.7.3. Pelo Teorema 3.7.4, podemos escrever em coordenadas apropriadas próximas de z

$$\Phi \circ \pi \circ \tilde{u}(s, t) = (a(s, t), \vartheta(s, t), z(s, t)),$$

com

$$z(s, t) = e^{\int_{s_0}^{s} \alpha(\tau) d\tau}(e(t) + R(s, t)),$$

onde e é expressão de um autovetor η do operador assintótico $A_{K_i^k}$ associado ao autovalor ν e s_0, α e R tem o comportamento explicado no Teorema 3.7.4. Vamos considerar que $|s|$ é grande o suficiente de forma que $\pi \circ \tilde{u}(s, \cdot)$ não intersecte L_0 (veja Corolário 3.7.5) e tal que $z(s, t)$ seja homotópico a $\varepsilon e(t)$ em $\mathcal{U} \backslash \{0\}$, para alguma escolha de $\varepsilon > 0$. Para simplificar a notação, vamos escrever $\gamma(\cdot) = \pi \circ \tilde{u}(s, \cdot)$.

Lema 6.1.1. *Suponha*

$$m = \mathrm{lk}(\gamma, K_1) \quad e \quad n = \mathrm{lk}(\gamma, K_2).$$

Se $i = 1$, então $n = k > 0$ e

$$\nu > 0 \implies \frac{m}{n} \geq \theta_1(h) \quad e \quad \nu < 0 \implies \frac{m}{n} \leq \theta_1(h).$$

Se $i = 2$, então $m = k > 0$ e

$$\nu > 0 \implies \frac{n}{m} \geq \theta_2(h) \quad e \quad \nu < 0 \implies \frac{n}{m} \leq \theta_2(h).$$

Demonstração. Provaremos o caso $i = 1$. O caso $i = 2$ é análogo.

Como γ está C^∞ próxima de K_1^k, temos que

$$n = \mathrm{lk}(\gamma, K_2) = \mathrm{lk}(K_1^k, K_2) = k \quad \text{veja B.2.1}.$$

Vamos denotar por β a classe de trivialização de $(x_i)^*_{T_i}\xi_0$ induzida pelo tubo de Martinet. Como $\mathrm{slk}(K_1) = -1$ (B.2.2), segue do Corolário 3.7.3 e da Proposição 2.5.1 que

$$\rho(K_1, h\lambda_0, \beta) = \rho(K_1, h\lambda_0) - 1 = \theta_1(h).$$

Se $\nu > 0$, temos que

$$m = \mathrm{lk}(\gamma, K_1) = \mathrm{wind}(e, \partial_x) = \mathrm{wind}(\nu, K_i^n, h\lambda_0, \beta) \geq \mathrm{wind}^+(K_i^n, h\lambda_0, \beta).$$

Se $\nu < 0$, temos que

$$m = \mathrm{lk}(\gamma, K_1) = \mathrm{wind}(e, \partial_x) = \mathrm{wind}(\nu, K_i^n, h\lambda_0, \beta) \leq \mathrm{wind}^-(K_i^n, h\lambda_0, \beta).$$

Segue da Proposição 3.6.2 que:

- Se K_1 é elíptica, então $\theta_1(h) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,

  $$\mathrm{wind}^+(K_i^n, h\lambda_0, \beta) = \lfloor n\theta_1(h) \rfloor + 1 > n\theta_1(h)$$

  e

  $$\mathrm{wind}^-(K_i^n, h\lambda_0, \beta) = \lfloor n\theta_1(h) \rfloor < n\theta_1(h).$$

- Se K_1 é positivamente hiperbólica, então $\theta_1(h) \in \mathbb{Z}$ e

  $$\mathrm{wind}^+(K_i^n, h\lambda_0, \beta) = \mathrm{wind}^-(K_i^n, h\lambda_0, \beta) = n\theta_1(h)$$

- Se K_1 é negativamente hiperbólica, então $2\theta_1(h) \in \mathbb{Z}$,

$$\text{wind}^+(K_i^n, h\lambda_0, \beta) = \text{wind}^-(K_i^n, h\lambda_0, \beta) = n\theta_1(h),$$

se n é par,

$$\text{wind}^+(K_i^n, h\lambda_0, \beta) = \lfloor n\theta_1(h) \rfloor + 1 > n\theta_1(h)$$

e

$$\text{wind}^-(K_i^n, h\lambda_0, \beta) = \lfloor n\theta_1(h) \rfloor < n\theta_1(h),$$

se n é ímpar.

Em qualquer caso, que

$$\nu > 0 \implies m \geq n\theta_1(h) \quad \text{e} \quad \nu < 0 \implies m \leq n\theta_1(h).$$

$\square$

Considere agora $f, f_+ \in \mathscr{F}_{p,q}$ e $0 < c < 1$ são tais que $cf_+ < f < f_+$ em todos pontualmente. Vamos escrever, $\lambda = f\lambda_0$, $\lambda_+ = f_+\lambda_0$, $\lambda_- = cf_+\lambda_0$, $\theta_i = \theta_i(f)$ e $\bar{\theta}_i = \theta_i(f_+) = \theta_i(cf_+)$, $i = 1, 2$.

Tome $\hat{J}_\pm \in \mathscr{J}(\lambda_\pm)$, $\hat{J} \in \mathscr{J}(\lambda)$, como explicado na seção 3.2, e $J_1 \in \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}; L_{p,q})$ e $J_2 \in \mathscr{J}(\hat{J}, \hat{J}_+; L_{p,q})$, como explicado na seção 3.5. Para cada $R > 0$, considere $\bar{J}_R = J_1 \circ_R J_2$ como explicado na seção 3.4.

Lema 6.1.2. *Seja $(\hat{p}, \hat{q}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo com $(\hat{p}, \hat{q}) \neq (p, q)$. Suponha que $\lambda, \lambda_+, \lambda_-$ sejam não-degeneradas. Sejam $\bar{P}_+ \in \mathscr{P}(\lambda_+)$ e $\bar{P}_- \in \mathscr{P}(\lambda_-)$. Suponha que $\{R_n\}$ é uma sequência de números positivos tal que $R_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Suponha que $\tilde{u}_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to W_{\xi_0}$ sejam uma sequência de cilindros $\bar{J}_{R_n}$-holomorfos satisfazendo que*

$$\pi \circ \tilde{u}_n(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap L_{p,q} = \emptyset,$$

com energia uniformemente limitada, positivamente assintótica a $\bar{P}_+$ em ∞ e negativamente assintótica a $\bar{P}_-$ em $-\infty$ e tais que

$$\text{lk}(\pi \circ \tilde{u}_n(s, \cdot), K_1) = \hat{p} \quad e \quad \text{lk}(\pi \circ \tilde{u}_n(s, \cdot), K_2) = \hat{q},$$

para todo s e para todo n. Se as condições

(A) $(\hat{q}\theta_1 - \hat{p})(\hat{q}\bar{\theta}_1 - \hat{p}) > 0$ *ou* $\hat{q} \leq 0$

(B) $(\hat{p}\theta_2 - \hat{q})(\hat{p}\bar{\theta}_2 - \hat{q}) > 0$ *ou* $\hat{p} \leq 0$

são ambas satisfeitas, então existe $P \in \mathscr{P}(\lambda)$, tal que $P \cap L_{p,q} = \emptyset$ tal que

$$\text{lk}(P, K_1) = \hat{p} \quad e \quad \text{lk}(P, K_2) = \hat{q}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 10.6 de [6], temos que, a menos de tomar uma subsequência, $\tilde{u}_n$ converge para o que os autores chamam de um "stable holomorphic building". Como nossas curvas pseudo-holomorfas envolvem somente cilindros, podemos dar uma descrição mais simples deste limite como no Lema 5.3 de [20].

Este limite é composto dos seguintes elementos: um número inteiro positivo $m \geq 2$, uma coleção $\{\Gamma^1, \dots, \Gamma^m\}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, uma coleção $\{\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^m\}$ de mapas

$$\tilde{v}^i : Z_i = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \backslash \Gamma^i \to W_{\xi_0}$$

e números $1 \leq k' < k'' \leq m$ satisfazendo que:

(a) $\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^{k'-1}$ são $\hat{J}_+$-holomorfos;

(b) $\tilde{v}^{k'}$ é J_1-holomorfo;

(c) $\tilde{v}^{k'+1}, \dots, \tilde{v}^{k''-1}$ são $\hat{J}$-holomorfos;

(d) $\tilde{v}^{k''}$ é J_2-holomorfo;

(e) $\tilde{v}^{k''+1}, \dots, \tilde{v}^m$ são $\hat{J}_-$-holomorfos;

(f) $0 < E(\tilde{v}^i) < \infty$ e $\tilde{v}^i$ tem um furo positivo em $\{\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e um furo negativo em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo $i = 1, \dots, m$;

(g) Existem órbitas de Reeb $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_{k'-1} \in \mathscr{P}(\lambda_+)$, $\bar{P}_{k'}, \dots, \bar{P}_{k''-1} \in \mathscr{P}(\lambda)$ e $\bar{P}_{k''}, \dots, \bar{P}_{k^m} \in \mathscr{P}(\lambda_-)$ tais que $\tilde{v}^i$ é negativamente assintótica a $\bar{P}_i$ em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\tilde{v}^{i+1}$ é positivamente assintótica a $\bar{P}_i$ em $\{\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$;

(h) $\tilde{v}^1$ é positivamente assintótica a $\bar{P}_+$ em $\{\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\tilde{v}^m$ é negativamente assintótica a $\bar{P}_-$ em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$;

(i) para cada i existem $s_n^i, c_n^i \in \mathbb{R}$ tais que os mapas

$$(s,t) \mapsto g_{c_n^i} \circ \tilde{u}_n(s + s_n^i, t)$$

converge para $\tilde{v}^i$ em $C^\infty_{loc}((\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \backslash \Gamma^i)$ quando $n \to \infty$, onde g denota a ação de $\mathbb{R}$ em W_{ξ_0}.

Afirmamos que $\bar{P}_i \cap L_{p,q} = \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, m$. Vamos argumentar por absurdo. Suponha que $\bar{P}_i \subset L_{p,q}$. Defina

$$i_0 = \min\{i \in \{1, \dots, m\} \mid \bar{P}_i \subset L_{p,q}\}.$$

Se $1 \leq i \leq i_0$, temos que $\tilde{v}^i(Z_i) \not\subset \pi^{-1}(K_1)$ pois, caso contrário, teríamos que $\tilde{v}^i$ seria positivamente assintótica a uma iterada de K_1, K_2 ou $K_{p,q}$ em $\{\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, contradizendo a escolha de i_0. Vamos considerar, portanto, o conjunto

$$D_i = \{(z,x) \in Z_i \times \pi^{-1}(L_{p,q}) \mid \tilde{v}^i(z) = x\}.$$

O conjunto D_i é discreto pelo Teorema 3.1.2. Aqui usamos que $\pi^{-1}(L_{p,q})$ é uma coleção de três cilindros pseudo-holomorfos disjuntos mergulhados para $\hat{J}_\pm$, $\hat{J}$, J_1 e J_2, o que segue de $f, f_+ \in \mathscr{F}_{p,q}$ e da hipótese de que $J_1 \in \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}; L_{p,q})$ e $J_2 \in \mathscr{J}(\hat{J}, \hat{J}_+; L_{p,q})$. Se $D_i \neq \emptyset$, teríamos por (i) e por positividade e estabilidade de interseção que

$$\tilde{u}_n(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \pi^{-1}(K_0) \neq \emptyset,$$

o que contradiz as hipóteses sobre $\tilde{u}_n$.

Observe que $\bar{P}_{i_0} \cap K_{p,q} = \emptyset$. Caso contrário, existiria $m \in \mathbb{N}$ para o qual $\bar{P}_{i_0} = K_{p,q}^m$. Pelo que mostramos acima, $\bar{P}_{i_0}$ é homotópica a $\bar{P}_+$ em $\mathbb{S}^3 \backslash L_{p,q}$. Logo,

$$mp = \operatorname{lk}(K_{p,q}^m, K_1) = \operatorname{lk}(\bar{P}_{i_0}, K_1) = \operatorname{lk}(\bar{P}_+, K_1) = \hat{p}$$

e

$$mq = \operatorname{lk}(K_{p,q}^m, K_2) = \operatorname{lk}(\bar{P}_{i_0}, K_2) = \operatorname{lk}(\bar{P}_+, K_2) = \hat{q},$$

contradizendo a hipótese de que $(\hat{p}, \hat{q}) \neq (p,q)$.

Vamos supor que $\bar{P}_{i_0} \subset K_1$. O caso $\bar{P}_{i_0} \subset K_2$ é análogo. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{P}_{i_0} = K_1^m$. Segue que

$$mp = \operatorname{lk}(K_1^m, K_2) = \operatorname{lk}(\bar{P}_{i_0}, K_2) = \operatorname{lk}(\bar{P}_+, K_2) = \hat{q}.$$

Donde obtemos que $\hat{q} > 0$. Pelas hipóteses, podemos assumir de agora em diante que $(\hat{q}\theta_1 - \hat{p})(\hat{q}\bar{\theta}_1 - \hat{p}) > 0$.

Defina

$$i_1 = \max\{i \in \{1, \ldots, m\} \mid \bar{P}_{i_1} = K_1^{\hat{q}}\}.$$

Temos que $\tilde{v}^{i_1+1}(Z_{i_1+1}) \not\subset \pi^{-1}(L_{p,q})$. Caso contrário, teríamos que $\tilde{v}^{i_1+1}(Z_{i_1+1}) \subset \pi^{-1}(K_1)$ e $\bar{P}_{i_1+1} = K_1^r$, onde $r \in \mathbb{N}$. Pela escolha de i_1, teríamos $r \neq \hat{q}$. Usando (i), temos que

$$t \mapsto \pi \circ \tilde{u}_n(s + s_n^{i_1+1}, t)$$

é homotópico a $K_1^{\hat{q}}$ se $s > 0$ grande o suficiente e homotópica a K_1^r se $s < 0$ é grande o suficiente. Como $\tilde{u}_n(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathbb{S}^3 \backslash L_{p,q}$, teríamos que

$$\hat{q} = \operatorname{lk}(K_1^{\hat{q}}, K_2) = \operatorname{lk}(K_1^r, K_2) = r,$$

o que é um absurdo.

Agora considere $s_0 > 0$ grande o suficiente, de forma que $\tilde{v}^{i_0}$ esteja definida em $[s_0, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e

$$\tilde{v}^{i_0}([s_0, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \pi^{-1}(K_1) = \emptyset.$$

Que tal s_0 existe segue do Corolário 3.7.5. Para qualquer $s \geq s_0$, segue de (i) que

$$\mathrm{lk}(\pi \circ \tilde{v}^{i_0}(s, \cdot), K_1) = \hat{p}.$$

Um raciocínio análogo, mostra que se $s_1 > 0$ é grande o suficiente e $s < -s_1$, então

$$\mathrm{lk}(\pi \circ \tilde{v}^{i_1+1}(s, \cdot), K_1) = \hat{p}.$$

Utilizando o Lema 6.1.1, temos que

$$\begin{aligned}
i_1 + 1 < k' &\implies \hat{p} \leq \bar{\theta}_1 \hat{q} \quad \text{e} \quad \hat{p} \geq \bar{\theta}_1 \hat{q} \\
i_0 < k' \quad \text{e} \quad k' \leq i_1 + 1 < k'' &\implies \hat{p} \leq \bar{\theta}_1 \hat{q} \quad \text{e} \quad \hat{p} \geq \theta_1 \hat{q} \\
k' \leq i_0 < i_1 + 1 < k'' &\implies \hat{p} \leq \theta_1 \hat{q} \quad \text{e} \quad \hat{p} \geq \theta_1 \hat{q} \\
k' \leq i_0 < k'' \leq i_1 + 1 &\implies \hat{p} \leq \theta_1 \hat{q} \quad \text{e} \quad \hat{p} \geq \bar{\theta}_1 \hat{q} \\
i_0 \geq k'' &\implies \hat{p} \leq \bar{\theta}_1 \hat{q} \quad \text{e} \quad \hat{p} \geq \bar{\theta}_1 \hat{q}
\end{aligned}$$

Em todos os casos temos uma contradição com a condição $(\hat{q}\theta_1 - \hat{p})(\hat{q}\bar{\theta}_1 - \hat{p}) > 0$. Esta contradição mostra a afirmação.

Tome $P = \bar{P}_{k'} \in \mathscr{P}(\lambda)$. Temos que $P \notin \mathbb{S}^3 \backslash L_{p,q}$. Usando a condição (i), concluímos que

$$\mathrm{lk}(P, K_1) = \hat{p} \quad \text{e} \quad \mathrm{lk}(P, K_1) = \hat{q}.$$

□

6.2 O caso não-degenerado

Teorema 6.2.1. *Seja $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo. Se $\theta > 0$ é tal que $p + q\theta > 0$, $m, M > 0$ e $(\hat{p}, \hat{q}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é tal que*

$$(1, \theta) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (p, q) \quad \textit{ou} \quad (p, q) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (1, \theta),$$

então existem $T = T(\theta, p, q, \hat{p}, \hat{q}, m, M) > 0$ e $\delta = \delta(\theta, p, q, \hat{p}, \hat{q}, m, M) > 0$ satisfazendo que, se $f \in \mathscr{F}_{p,q}$ é tal que $\lambda = f\lambda_0$ é não degenerada,

$$m < \inf_p f(p) < \sup_p f(p) < M$$

e

$$|\theta_2(f) - \theta| < \delta \quad \textit{e} \quad \left| \theta_1(f) - \frac{1}{\theta} \right| < \delta,$$

então, existe $P \in \mathscr{P}(\lambda)$ com período menor ou igual a T e tal que

$$\mathrm{lk}(P, K_1) = \hat{p} \quad \textit{e} \quad \mathrm{lk}(P, K_2) = \hat{q}.$$

Demonstração. Tome $\theta, p, q, \hat{p}, \hat{q}, m, M$ como no enunciado. Suponha que $f \in \mathscr{F}_{p,q}$ é tal que $\lambda = f\lambda_0$ é não degenerada e

$$m \leq \inf_p f(p) \leq \sup_p f(p) < M.$$

Vamos escrever $\theta_i = \theta_i(f)$, $i = 1, 2$. Tome $\bar{\theta} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tão próximo de θ de forma que $p\bar{\theta} + q > 0$ e

$$(1, \bar{\theta}) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (p, q) \quad \text{ou} \quad (p, q) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (1, \bar{\theta}).$$

Existe $\delta > 0$ for pequeno o suficiente, tal que se

$$|\theta_2 - \theta| < \delta \quad \text{e} \quad \left|\theta_1 - \frac{1}{\theta}\right| < \delta,$$

podemos também assumir que e as condições (A) e (B) do Lema 6.1.2 sejam satisfeitas com

$$\bar{\theta}_2 = \frac{1}{\bar{\theta}_1} = \bar{\theta}.$$

Considere $f_{\bar{\theta},p,q}$ como no seção 5.1. Multiplicando $f_{\bar{\theta},p,q}$ por uma constante positiva (que depende de θ, p, q e M), podemos supor que $f < f_{\bar{\theta},p,q}$ pontualmente. Tome $0 < c = c(\theta, p, q, m, M) < 1$ tal que $cf_{\bar{\theta},p,q} < f$, pontualmente. Usando o Teorema 5.2.1 e argumentando como na seção 5.4, podemos encontrar $f_+ \in \mathscr{F}_{p,q}$ tal que $cf_+ < f < f_+$ pontualmente, existem $J_+ \in \mathscr{J}_+(\xi_0)$ e $T = T(\theta, p, q, \hat{p}, \hat{q}, m, M) > 0$ tais que

$$H_*(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, f_+\lambda_0, J_+) = H_*(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T/c, f_+\lambda_0, J_+) \neq 0.$$

Lembramos que J_+ induz estruturas quase-complexas $\hat{J}_+ \in \mathscr{J}_{reg}(f_+\lambda_0)$ e $\hat{J}_- \in \mathscr{J}_{reg}(cf_+\lambda_0)$. Pela Proposição 5.4.1, o morfismo entre cadeias

$$j_* \circ i_* : (C_*(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, f_+\lambda_0), \partial(f_+\lambda, J_+)) \to (C_*(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, cf_+\lambda_0), \partial(cf_+\lambda_0, J_+)),$$

induz um morfismo não nulo em homologia.

Sejam $\hat{J} \in \lambda$, $\bar{J}_1 \in \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}; L_0)$ e $\bar{J}_2 \in \mathscr{J}(\hat{J}, \hat{J}_+;)$. Dado $R > 0$ grande defina

$$\bar{J}_R = \bar{J}_1 \circ_R \bar{J}_2$$

e $J'_R \in \mathscr{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+; L_{p,q})$, como explicado na seção 3.4. Afirmamos que existe um cilindro J'_R-holomorfo assintótico positivamente a uma órbita em $\mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, f_+\lambda_0)$ e assintótico negativamente a um órbita em $\mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, cf_+\lambda_0)$ e tal que sua imagem não intersecta $\pi^{-1}(L_{p,q})$. Suponha, por contradição, que tal cilindro não exista. Concluímos daí que, $J'_R \in \mathscr{J}_{reg}(\hat{J}_-, \hat{J}_+; L_{p,q})$ e, portanto, o morfismo entre cadeias

$$\Phi(J'_R) : (C_*(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, f_+\lambda_0), \partial(f_+\lambda, J_+)) \to (C_*(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, cf_+\lambda_0), \partial(cf_+\lambda_0, J_+))$$

está definido e é nulo (veja Teorem 4.2.3). Contudo, pelo Lema 4.3.1, $\Phi(J'_R)$ e $j_* \circ i_*$ induzem o mesmo mapa em homologia, o que nos leva a um absurdo e prova a afirmação.

Portanto, encontramos, para cada $R > 0$ grande o suficiente um cilindro J'_R-holomorfo assintótico positivamente a uma órbita em $\mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, f_+\lambda_0)$ e assintótico negativamente a um órbita em $\mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, cf_+\lambda_0)$ e tal que sua imagem não intersecta $\pi^{-1}(L_{p,q})$. Como cada os conjuntos $\mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, f_+\lambda_0)$ e $\mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, cf_+\lambda_0)$ são finitos, existem $P_+ \in \mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, f_+\lambda_0)$, $P_- \in \mathscr{P}(p, q, \hat{p}, \hat{q}, T, cf_+\lambda_0)$ e uma sequência de números positivos $\{R_n\}$ com que $R_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, tais que para cada n existe um cilindro J'_{R_n}-holomorfo assintótico positivamente a P_+ e assintótico negativamente a P_-. Usando que $f_+ = f_{\bar{\theta},p,q}$ em uma vizinhança de L_0, temos que

$$\theta_2(f_+) = \bar{\theta} = \frac{1}{\theta_1(f_+)}.$$

Pelas hipóteses sobre $\bar{\theta}$, podemos aplicar o Lema 6.1.2 e concluir a demonstração. $\square$

Observação 6.2.1. Note que o Teorema 6.2.1 demonstra o Teorema 6.3.2 no caso em que λ é não degenerada.

Corolário 6.2.2. *Sejam $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo e $\{f_n\}$ uma sequência em $\mathscr{F}_{p,q}$ tal que $\lambda_n = f_n\lambda_0$ é não-degenerada para todo n e tal que existam $m, M \in \mathbb{R}$ tais que*

$$0 < m \leq \inf_{n,p} f_n(p) \leq \sup_{n,p} f_n(p) < M.$$

Suponha que $\theta > 0$ e que $\hat{p}, \hat{q} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo satisfazem que

$$p + q\theta > 0$$

e

$$(1, \theta) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (p, q) \quad \text{ou} \quad (p, q) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (1, \theta).$$

Se

$$\lim_{n\to\infty} \theta_2(f_n) = \theta \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \theta_1(f_n) = \frac{1}{\theta},$$

então existe $T = T(\theta, p, q, \hat{p}, \hat{q}, m, M) > 0$ para o qual se n é suficientemente grande, então existe uma órbita $P_n \in \mathscr{P}(\lambda_n)$ com período menor ou igual a T satisfazendo que $P_n \cap L_{p,q} = \emptyset$ e

$$\operatorname{lk}(P_n, K_1) = \hat{p} \quad \text{e} \quad \operatorname{lk}(P_n, K_2) = \hat{q}.$$

Demonstração. Tome $T = T(\theta, p, q, \hat{p}, \hat{q}, m, M) > 0$ e $\delta = \delta(\theta, p, q, \hat{p}, \hat{q}, m, M) > 0$ como no Teorema 6.2.1. Se n é grande o suficiente de forma que

$$|\theta_2(f_n) - \theta| < \delta \quad \text{e} \quad \left|\theta_1(f_n) - \frac{1}{\theta}\right| < \delta,$$

obtemos o resultado. $\square$

Observação 6.2.2. Analisando a demonstração do Teorema 6.2.1 e referindo a seção 5.4, temos que $f_+ = f_T$, onde $T = T(\theta, p, q, \hat{p}, \hat{q}, m, M)$ pode ser tomado como qualquer valor

$$T > c(\theta, p, q, m, M)^{-1} \max\{T_{t^1_{\hat{p},\hat{q}}}, T_{t^2_{\hat{p},\hat{q}}}\},$$

onde $t^1_{\hat{p},\hat{q}}, t^2_{\hat{p},\hat{q}}$ foram definidos na seção 5.2.

6.3 O caso degenerado

Suponha que $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo. Suponha que $f \in \mathscr{F}_{p,q}$ é tal que existe $\theta > 0$ satisfazendo que $p + q\theta > 0$ e tal que

$$\theta_2(f) = \frac{1}{\theta_1(f)} = \theta.$$

Vamos escrever $\lambda = f\lambda_0$.

Lema 6.3.1. *Existe uma função $g \in \mathscr{F}_{p,q}$ arbitrariamente próxima de f na topologia C^∞ tal que $g\lambda_0$ é não-degenerada.*

Demonstração. Pelo Lemma 6.8 de [17], podemos aproximar f por $g' \in \mathscr{F}_{p,q}$ de forma que $L_{p,q}$ seja formado por órbitas não-degeneradas de $\lambda = g'\lambda_0$. Pela Proposição 6.1 de [17], existe uma função $g'' : \mathbb{S}^3 \to (0,\infty)$ arbitrariamente próxima de g' tal que $g''\lambda_0$ é não-degenerada. Como assumimos que $L_{p,q}$ é composto de órbitas não-degeneradas, tomando-se g'' suficientemente próxima de g', existe um enlace $L'_{p,q}$ formado por órbitas de g'' arbitrariamente próximo de $L_{p,q}$ (veja Proposição 3.5 e a discussão da página 105 de [28]). Logo, tomando-se uma isotopia transversal próxima da identidade levamos $L'_{p,q}$ em $L_{p,q}$ e g'' em uma função $g \in \mathscr{F}_{p,q}$ tal que $g\lambda_0$ é não-degenerada e g está próxima de f. $\square$

Teorema 6.3.2. *Seja $(\hat{p},\hat{q}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo tal que*

$$(1,\theta) \prec (\hat{p},\hat{q}) \prec (p,q) \quad \text{ou} \quad (p,q) \prec (\hat{p},\hat{q}) \prec (1,\theta).$$

Existe uma órbita $P \in \mathscr{P}(\lambda)$, tal que $P \in \mathbb{S}^3 \backslash L_{p,q}$ tal que

$$\operatorname{lk}(P,K_1) = \hat{p} \quad \text{e} \quad \operatorname{lk}(P,K_2) = \hat{q}.$$

Demonstração. Pelo Lema 6.3.1, existe uma sequência $f_n \in \mathscr{F}_{p,q}$ tal que $\lambda_n = f_n\lambda_0$ é não-degenerada para todo n e $f_n \to f$ quando $n \to \infty$ na topologia C^∞. Para qualquer escolha de $m, M > 0$ com

$$m < \inf_p f(p) \quad \text{e} \quad M > \sup_p f(p),$$

tomando-se n grande o suficiente, podemos supor que

$$0 < m \leq \inf_{n,p} f_n(p) \leq \sup_{n,p} f_n(p) < M.$$

Ademais, como temos convergência na topologia C^∞, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \theta_2(f_n) = \theta \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \theta_1(f_n) = \frac{1}{\theta}.$$

Pelo Corolário 6.2.2, existe $\bar{T} > 0$ tal que para cada n grande o suficiente existe uma órbita $P_n \in \mathscr{P}(\lambda_n)$ com período menor ou igual a T, tal que $P_n \in \mathbb{S}^3 \backslash L_{p,q}$ e

$$\operatorname{lk}(P_n,K_1) = \hat{p} \quad \text{e} \quad \operatorname{lk}(P_n,K_2) = \hat{q}.$$

Vamos escrever $P_n = (x_n, T_n)$, onde $T_n \leq T$. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma órbita $P = (x, T) \in \mathscr{P}(\lambda)$ tal que $T_n \leq T$ quando $n \to \infty$ e $x_n \to x$ quando $n \to \infty$ na topologia C^∞. Isto implica que $T \leq \bar{T}$

Basta mostrar que $P \in \mathbb{S}^3 \backslash L_0$. De fato, se isto for verificado, como P pode ser aproximado por P_n na topologia C^∞, então

$$\mathrm{lk}(P, K_1) = \hat{p} \quad \text{e} \quad \mathrm{lk}(P, K_2) = \hat{q}.$$

Se $P = K_{p,q}^k$, para alguma escolha de $k \in \mathbb{N}$, então

$$\mathrm{lk}(P, K_1) = kp \quad \text{e} \quad \mathrm{lk}(P, K_2) = kq.$$

Mas isto contradiz a hipótese

$$(\hat{p}, \hat{q}) \prec (p, q) \quad \text{ou} \quad (p, q) \prec (\hat{p}, \hat{q}).$$

Vamos assumir por contradição que $P \subset L_0$. Vamos tratar o caso $P \subset K_1$. O caso $P \subset K_2$ é análogo. Por hipótese, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $P = K_1^k$. Observe que

$$\hat{q} = \mathrm{lk}(P, K_2) = \mathrm{lk}(K_1^k, K_2) = k.$$

Seja $(\mathcal{U}, \Phi)$ um tubo de Martinet como no Corolário 3.7.3 para K_1 pensada como órbita de Reeb de λ de período mínimo T_0. Temos que $T = \hat{q} T_0$. Nestas coordenadas, $\mathcal{U} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$, onde B é um disco centrado na origem de $\mathbb{R}^2$ e $K_1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$. Tome $U \subset \bar{U} \subset \mathcal{U}$, vizinhança de K_1, tal que $\phi_t^{X_\lambda}(U) \subset \mathcal{U}$ para todo $0 \leq t \leq \bar{T}$. Se n é grande o suficiente, podemos supor que $P_n \subset U$ e esta órbita é parametrizada por $\phi_t^{X_{\lambda_n}}(0, w_n)$, onde

$$(0, w_n) \in (\{0\} \times B) \cap U.$$

Por hipótese, $w_n \neq 0$ e $w_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e

$$\phi_{T_n}^{X_{\lambda_n}}(0, w_n) = (0, w_n).$$

Tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que existe $h \neq 0$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{w_n}{\|w_n\|} = h.$$

Aqui e no que segue $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana em $\mathbb{R}^2$. Se

$$\Pi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (\vartheta, z) \mapsto z$$

vamos escrever

$$\psi_t = \Pi \circ \phi_t^{X_\lambda} \quad \text{e} \quad \psi_t^n = \Pi \circ \phi_t^{X_{\lambda_n}}.$$

Como $f_n \in \mathscr{F}_{p,q}$ para todo n, temos que

$$\phi_t^{X_{\lambda_n}}(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\},$$

para todo n. Em particular,

$$\psi_t(\vartheta, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi_t^n(\vartheta, 0) = 0,$$

para todo $\vartheta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Vamos mostrar que

$$d(\psi_T)_{(0,0)}(0, h) = (0, h).$$

Temos que

$$d(\psi_T)_{(0,0)}(0, h) = \lim_{n\to\infty} d(\psi_{T_n}^n)_{(0,0)}(0, w_n/\left\|w_n\right\|) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left\|w_n\right\|} d(\psi_{T_n}^n)_{(0,0)}(0, w_n),$$

aqui é fundamental o fato de que $0 \le T_n \le \bar{T}$. Pela Fórmula de Taylor, temos que existe constante $C > 0$ tal que

$$\left\|\psi_t^n(0, w_n) - d(\psi_t^n)_{(0,0)}(0, w_n)\right\| \le C\left\|w_n\right\|^2,$$

para todo $t \in [0, \bar{T}]$ e para todo n. Aqui usamos que a norma da segunda derivada dos mapas ψ_t^n está uniformemente limitada em $\bar{U}$ para todo $t \in [0, \bar{T}]$. Portanto,

$$\left\|(0, w_n) - d(\psi_{T_n}^n)_{(0,0)}(0, w_n)\right\| = \left\|\psi_{T_n}^n(0, w_n) - d(\psi_{T_n}^n)_{(0,0)}(0, w_n)\right\| \le C\left\|w_n\right\|^2,$$

donde concluímos que

$$\left\|(0, w_n/\left\|w_n\right\|) - d(\psi_{T_n}^n)_{(0,0)}(0, w_n/\left\|w_n\right\|)\right\| \le C\left\|w_n\right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

e provamos que

$$d(\psi_T)_{(0,0)}(0, h) = (0, h).$$

Pela escolha de tubo de Martinet (veja o enunciado de 3.7.3), temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{wind}(d(\psi_{T(\cdot)})_{(0,0)}(0, h), \partial_x) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{wind}(d(\psi_{T_n(\cdot)}^n)_{(0,0)}(0, w_n/\left\|w_n\right\|), \partial_x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{wind}(d(\psi_{T_n(\cdot)}^n)_{(0,0)}(0, w_n), \partial_x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ind}(\psi_{T_n(\cdot)^n}(0, w_n), 0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{lk}(P_n, K_1) \\
&= \hat{p}.
\end{aligned}$$

Vamos agora escrever $\varphi(t) = d(\psi_{T(t)})_{(0,0)}$. Pelos resultados da seção 2.2, temos que

$$\mu_g(\varphi) = 2\mathrm{wind}(d(\varphi_{T(\dot{c})})_{(0,0)}(0, h), \partial_x) = 2\hat{p}.$$

Logo, se denotarmos por β a classe de trivialização induzida pelo tubo de Martinet ao longo de K_1, temos pelo Lema 2.4.1 que

$$\rho(K_1, \lambda, \beta) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_g(\varphi^k)}{2k\hat{q}} = \frac{\hat{p}}{\hat{q}}.$$

Novamente pela escolha de tubo de Martinet e por (B.2.2), segue que

$$\frac{1}{\theta} = \theta_1(f) = \rho(K_1,\lambda) - 1 = \rho(K_1,\lambda) + \mathrm{sk}(K_1) = \rho(K_1,\lambda,\beta) = \frac{\hat{p}}{\hat{q}},$$

que contradiz a hipótese de que

$$(1,\theta) \prec (\hat{p},\hat{q}) \quad \text{ou} \quad (\hat{p},\hat{q}) \prec (1,\theta).$$

Esta contradição termina a demonstração. □

6.4 Crescimento de órbitas

Vamos fixar $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ seja coprimo e $\theta \in \mathbb{R}$, tais que $\theta > 0$ e $p + q\theta > 0$. Tome $f \in \mathscr{F}_{p,q}$ e vamos escrever $\lambda = f\lambda_0$. Suponha que

$$\theta_2(f) = \frac{1}{\theta_1(f)} = \theta.$$

Vamos considerar $f_{\theta,p,q}$ como na seção 5.1. Definimos o conjunto $\mathrm{Orb}(f_{\theta,p,q},T)$ contendo todos os elementos $(\hat{p},\hat{q}) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ coprimos tais que

$$(1,\theta) \prec (\hat{p},\hat{q}) \prec (p,q) \quad \text{ou} \quad (p,q) \prec (\hat{p},\hat{q}) \prec (1,\theta),$$

e

$$\max\{T_{t^1_{\hat{p},\hat{q}}}, T_{t^2_{\hat{p},\hat{q}}}\} \leq T,$$

onde os números $T_{t^i_{\hat{p},\hat{q}}}$, $i = 1,2$ foram definidos na seção 5.2.

Lema 6.4.1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\#\mathscr{P}_{prim}(\lambda, CT) \geq \#\mathrm{Orb}(f_{\theta,p,q},T).$$

Demonstração. Suponha que $m, M > 0$ são tais que

$$m < \inf_p f(p) \quad \text{e} \quad M > \sup_p f(p).$$

Suponha que $(\hat{p},\hat{q}) \in \mathrm{Orb}(f_{\theta,p,q},T)$. Pelo Teorema 6.3.2, temos que existe $P_{\hat{p},\hat{q}} \in \mathscr{P}_{prim}(\lambda)$, tal que

$$\mathrm{lk}(P,K_1) = \hat{p} \quad \text{e} \quad \mathrm{lk}(P,K_2) = \hat{q}.$$

Pela demonstração do Teorema 6.3.2 e pela Observação 6.2.2, temos que o período de $P_{\hat{p},\hat{q}}$ é menor ou igual que

$$(1 + c(\theta,p,q,m,M)^{-1}) \max\{T_{t^1_{\hat{p},\hat{q}}}, T_{t^2_{\hat{p},\hat{q}}}\} \leq (1 + c(\theta,p,q,m,M)^{-1})T.$$

Tomando $C = (1 + c(\theta,p,q,m,M)^{-1})$, segue que

$$P_{\hat{p},\hat{q}} \in \mathscr{P}_{prim}(\lambda, CT).$$

Observe que C não depende de $(\hat{p}, \hat{q})$. Como $P_{\hat{p}_1,\hat{q}_1} \neq P_{\hat{p}_2,\hat{q}_2}$ se $(\hat{p}_1, \hat{q}_1) \neq (\hat{p}_2, \hat{q}_2)$, concluímos que

$$\#\mathscr{P}_{prim}(\lambda, CT) \geq \#\mathrm{Orb}(f_{\theta,p,q}, T).$$

□

Lema 6.4.2.

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\log \#\mathrm{Orb}(f_{\theta,p,q}, T)}{\log T} \geq 1.$$

Demonstração. Seja $\gamma_{\theta,p,q}(t) = (x(t), y(t))$ como no Teorema 5.1.1. Vamos supor $(p, q) \prec (1, \theta)$. O caso $(1, \theta) \prec (p, q)$ é análogo. Pela propriedade (9) do Teorema 5.1.1 existe $t_\theta \in (t_1, t_2)$, $t^1_{p,q} \in (t_-, t_1)$ e $t^2_{p,q} \in (t_1, t_\theta)$ tais que

$$(y'(t_\theta), -x'(t_\theta)) \in \mathbb{R}_+(1, \theta),$$

e

$$(y'(t^i_{p,q}), -x'(t^i_{p,q})) \in \mathbb{R}_+(p, q), \quad i = 1, 2$$

e para cada $(\hat{p}, \hat{q}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimo com $(p, q) \prec (\hat{p}, \hat{q}) \prec (1, \theta)$ existem $t^1_{\hat{p},\hat{q}} \in (t_-, t_{p,q})$ e $t^2_{\hat{p},\hat{q}} \in (t_{p,q}, t_\theta)$, tais que

$$(y'(t^i_{\hat{p},\hat{q}}), -x'(t^i_{\hat{p},\hat{q}})) \in \mathbb{R}_+(p, q), \quad i = 1, 2.$$

Seja $v : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $v(t) = (y'(t), -x'(t))$. Pela discussão da seção 5.1, temos que $\mathrm{Orb}(f_{\theta,p,q}, T)$ está em bijeção com o conjunto $\widetilde{\mathrm{Orb}}(f_{\theta,p,q}, T)$ composto por elementos (t_1, T_1, t_2, T_2), onde $t_1 \in (t_-, t^1_{p,q})$, $t_2 \in (t^2_{p,q}, t_\theta)$, $T_1, T_2 > 0$, $(2\pi)^{-1}T_1 v(t_1) = (2\pi)^{-1}T_2 v(t_2) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ são coprimos e $\max\{T_1, T_2\} \leq T$. Como $\theta > 0$, existe $s_1 \in (t_-, t^1_{p,q})$ e $s_2 \in (t^2_{p,q}, t_\theta)$ tais que $y'(t) > 0$ e $-x'(t) > 0$ para todo $t \in [t_-, s_1] \cup [s_2, t_\theta]$. Podemos assumir também que

$$\alpha = \arg(v(s_1)) = \arg(v(s_2)).$$

Vamos escrever

$$\beta = \arg(v(t_-)) = \arg(v(t_\theta)) = \arg(1, \theta).$$

Considere também $(p_0, q_0), (p_1, q_1) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ coprimos, tais que

$$\mathrm{tg}(\alpha) < \frac{q_0}{p_0} < \frac{q_1}{p_1} < \mathrm{tg}(\beta).$$

Tome

$$m = \min\{-(2\pi)^{-1}x'(t) \mid t \in [t_-, s_1] \cup [s_2, t_\theta]\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina

$$T_k = \frac{kp_0p_1}{m}.$$

Tome $\zeta_k = kp_0p_1$ e escreva

$$\xi_{j,k} = kp_1q_0 + j, \quad j = 0, \ldots, k(p_0q_1 - p_1q_0) =: \tau_k.$$

Note que $\tau_k > 0$ pois
$$0 < \frac{q_1}{p_1} - \frac{q_0}{p_0} = \frac{p_0 q_1 - p_1 q_0}{p_0 p_1}.$$
Temos que
$$\mathrm{tg}(\alpha) < \frac{q_0}{p_0} = \frac{\xi_{0,k}}{\zeta_k} \leq \frac{\xi_{j,k}}{\zeta_k} \leq \frac{\xi_{\tau_k,k}}{\zeta_k} = \frac{q_1}{p_1} < \mathrm{tg}(\beta)$$
e
$$\frac{\xi_{j,k}}{\zeta_k} < \frac{\xi_{l,k}}{\zeta_k},$$
se $j < l$. Pela continuidade de v, existem $(t_1^0, T_1^0, t_2^0, T_2^0), \ldots, (t_1^{\tau_k}, T_1^{\tau_k}, t_2^{\tau_k}, T_2^{\tau_k})$ tais que
$$v(t_1^j), v(t_2^j) \in \mathbb{R}_+(\zeta_k, \xi_{j,k})$$
e
$$(2\pi)^{-1} T_1^j v(t_1^j) = (2\pi)^{-1} T_2^j v(t_2^j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
são coprimos para $j = 0, \ldots, \tau_k$. Ademais,
$$(2\pi)^{-1} T_l^j (-x'(t_j^l)) \leq \xi_{j,k} \leq \zeta_k = k p_0 p_1 \implies T_l^j \leq \frac{k p_0 p_1}{-(2\pi)^{-1} x'(t_j^l)} \leq \frac{k p_0 p_1}{m} = T_k$$
para $l = 1, 2$ e $j = 0, \ldots, \tau_k$. Concluímos que
$$(t_1^0, T_1^0, t_2^0, T_2^0), \ldots, (t_1^{\tau_k}, T_1^{\tau_k}, t_2^{\tau_k}, T_2^{\tau_k}) \in \widetilde{\mathrm{Orb}}(f_{\theta,p,q}, T).$$
Portanto,
$$\begin{aligned}
\limsup_{T\to\infty} \frac{\log \#\mathrm{Orb}(f_{\theta,p,q}, T)}{\log T} &\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log \#\mathrm{Orb}(f_{\theta,p,q}, T_k)}{\log T_k} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{\log \#\widetilde{\mathrm{Orb}}(f_{\theta,p,q}, T_k)}{\log T_k} \\
&\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log \tau_k}{\log T_k} \\
&\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(k(p_0 q_1 - p_1 q_0))}{\log(k p_0 p_1)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\log k + \log(p_0 q_1 - p_1 q_0)}{\log k + \log(p_0 p_1)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 6.4.3.
$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\log \#\mathscr{P}_{prim}(\lambda, T)}{\log T} \geq 1.$$

Demonstração. Pelo Lema 6.4.1 e pelo Lema 6.4.2, temos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{T\to\infty} \frac{\log \#\mathscr{P}_{prim}(\lambda, T)}{\log T} &= \limsup_{T\to\infty} \frac{\log \#\mathscr{P}_{prim}(\lambda, CT)}{\log(CT)} \\
&\geq \limsup_{T\to\infty} \frac{\log \#\mathrm{Orb}(f_{\theta,p,q}, T)}{\log T + \log C} \\
&= \limsup_{T\to\infty} \frac{\log \#\mathrm{Orb}(f_{\theta,p,q}, T)}{\log T} \frac{\log T}{\log T + \log C} \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Referências

[1] C. Abbas. *An Introduction to Compactness Results in Symplectic Field Theory*. Springer-Verlag, 2014.

[2] C. Abbas and H. Hofer. *Holomorphic Curves and Global Questions in Contact Geometry*. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Birkhäuser, 2010.

[3] A. Banyaga and D. F. Houenou. *A Brief Introduction to Symplectic and Contact Manifolds*. Number Vol. 15 in Nankai Tracts in Mathematics. World Scientific, 2016.

[4] D. Bennequin. Entrelacements et équations de Pfaff. *Astérique, Société Mathématique de France*, (107-108):87–161, 1983.

[5] F. Bourgeois. Contact homology and homotopy groups of the space of contact structures. *Math. Res. Lett.*, 13(1):71–85, 2006.

[6] F. Bourgeois, Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Compactness results in Symplectic Field Theory. *Geometry and Topology*, 7:799–888, 2003.

[7] D. Cristofaro-Gardiner and M. Hutchings. From one reeb orbit to two. *Journal of Differential Geometry*, (102):25–36, 2016.

[8] D. L. Dragnev. Fredholm theory and transversality for noncompact pseudoholomorphic maps in symplectizations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, LVII:726–762, 2004.

[9] Y. Eliashberg. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. *Inventiones mathematicae*, 98(3):623–637, October 1989.

[10] Y. Eliashberg. Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work. *Annales de l'institut Fourier*, 42(1-2):165–192, 1992.

[11] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann Surfaces*. Number 71 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.

[12] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Number 109 in Cambridge studies in advanced matematics. Cambridge University Press, 2008.

[13] M. W. Hirsch. *Differential topology*. Number 33 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1976.

[14] H. Hofer and M. Kriener. Holomorphic curves in contact dynamics. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 65, pages 77–132. American Mathematical Society, 1999.

[15] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudo-holomorphic curves in symplectisations II: Embberding controls and algebraic invariants. *Geometric and Functional Analysis*, 5(2):270–328, 1995.

[16] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudo-holomorphic curves in symplectisations I: Asymptotics. *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire*, 13(3):337–379, 1996.

[17] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. The dynamics on three-dimensional strictly convex energy surfaces. *Annals of Mathematics*, (148):197–289, 1998.

[18] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Finite energy foliations of tight three-sphere and Hamiltonian dynamics. *Annals of Mathematics*, (157):125–257, 2003.

[19] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser, 1994.

[20] U. L. Hryniewicz, A. Momin, and P. A. S. Salomão. A poincaré-birkhoff theorem for tight reeb flows on S^3. *Inventions mathematicae*, 199(2):333–422, February 2015.

[21] U. L. Hryniewicz and P. A. S. Salomão. *Uma Introdução à Topologia de Contato*. Publicações Matemáticas. IMPA, 2009.

[22] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Number 54 in Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1997.

[23] W. B. R. Lickorish. *An Introduction to Knot Theory*. Number 175 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1991.

[24] J. Martinet. Formes de contact sur le variétés de dimension trois. In C. T. C. Wall, editor, *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II*, volume 209 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 142–163. Springer, 1971.

[25] D. McDuff and D. Salamon. *J-Holomorphic Curves and Symplectic Topology*. Number 52 in Colloquium Publications. American Mathematical Society, 2nd edition, 2012.

[26] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Number 27 in Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 3rd edition, 2017.

[27] A. Momin. Contact homology of orbit complements and implied existence. *Journal of Modern Dynamics*, 5(3):409–472, 2011.

[28] Jacob Palis and Welington de Melo. *Introdução aos sistemas dinâmicos.* Projeto Euclides. IMPA, 1978.

[29] D. Rolfsen. *Knots and Links.* American Mathematical Society, 2003.

[30] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Education, 3rd edition, 1986.

[31] R. Siefring. Relative asymptotic behavior of pseudoholomorphic half-cylinders. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, LXI:1631–1684, 2008.

[32] R. Siefring. Intersection theory of punctured pseudoholomorphic curves. *Geometry and Topology*, (15):2351–2457, 2011.

[33] C. Wendl. Automatic transversality and orbifolds of puncture holomorphic curves in dimension four. *Comment. Math. Helv.*, 85(2):347–407, 2010.

[34] C. Wendl. Lectures on symplectic field theory. *arXiv preprint arXiv:1612.01009*, 2016.

[35] C. Wendl. *Lectures on contact 3-manifolds, holomorphic curves and intersection theory.* Number 220 in Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2020.

Apêndices

APÊNDICE A – Geometria simplética e de contato

Neste apêndice coletamos alguns resultados de geometria simplética e de contato que serão utilizados neste trabalho. Estudos bem completos destes temas, assim como extensas bibliografias, podem ser encontrados em [3], [12], [19], [21], [26].

A.1 Variedades simpléticas

Definição A.1.1. Seja V um espaço vetorial real. Uma 2-forma ω em V é dita uma forma simplética se ω é não-degenerada, ou seja,

$$\omega(v,w)=0, \quad \forall w\in V \implies v=0.$$

Neste caso dizemos que (V,ω) é um espaço vetorial simplético.

Seja E um espaço vetorial sobre uma variedade M. Uma seção ω de $\bigwedge^2 E$ é dita uma forma simplética em E se (E_p,ω_p) é um fibrado vetorial simplético para todo $p\in M$. Neste caso dizemos que (E,ω) é um fibrado vetorial simplético sobre M.

Se M é uma variedade, dizemos $\omega\in\Omega^2(M)$ é uma forma simplética em M se (TM,ω) é um fibrado vetorial simplético sobre M e $d\omega=0$.

Exemplo A.1.1. Identificamos $\mathbb{R}^{2n}\cong\bigoplus_{i=1}^n\mathbb{R}^2$ com coordenadas $(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)$. Considere a 2-forma

$$\omega_0=\sum_{i=1}^n dx_i\wedge dy_i.$$

Temos que $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ é um espaço vetorial simplético e uma variedade simplética. Note que

$$\omega_0=\langle J_0\cdot,\cdot\rangle,$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{2n}$ e

$$J_0\partial_{x_i}=\partial_{y_i} \text{ e } J_0\partial_{y_i}=-\partial_{x_i}, \quad i=1,\dots,n.$$

Definição A.1.2. A matriz J_0 do exemplo acima é a chamada a estrutura quase-complexa padrão de $\mathbb{R}^{2n}$.

Exemplo A.1.2. Seja M uma variedade de dimensão n e $\pi: T^*M\to M$ seu fibrado cotangente. Definimos a 1-forma

$$(\alpha_{\text{taut}})_\theta=(\pi^*\theta)_{\pi(\theta)}, \quad \forall\theta\in T^*M,$$

chamada de forma tautológica em T^*M. Note que se $(q_1,\dots,q_n)$ for um sistema de coordenadas em M e $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ for o sistema de coordenadas induzido em T^*M, então

$$(\alpha_{\text{taut}})_\theta = \sum_{i=1}^n p_i(\theta)dq_i, \quad \forall\theta\in T^*M.$$

Portanto,

$$\omega_{\text{can}} = d\alpha_{\text{taut}} = \sum_{i=1}^n dp_i\wedge dq_i,$$

é uma forma simplética, chamada de forma simplética canônica em T^*M.

Definição A.1.3. Sejam (V_i,ω_i), $i=1,2$ espaços vetoriais simpléticos. Um simplectomorfismo $T:(V_1,\omega_1)\to(V_2,\omega_2)$ é um isomorfismo entre V_1 e V_2 tal que

$$T^*\omega_2=\omega_1.$$

Sejam (E_i,ω_i), $i=1,2$ fibrados vetoriais simpléticos sobre variedades M_i, $i=1,2$. Um simplectomorfismo $\Phi:(E_1,\omega_1)\to(E_2,\omega_2)$ é um isomorfismo entre E_1 e E_2 tal que $\Phi_p:(E_1)_p\to(E_2)_p$ é um simplectomorfismo para todo $p\in M_1$.

Sejam (M_i,ω_i), $i=1,2$ variedades simpléticos. Um simplectomorfismo $\varphi:(M_1,\omega_1)\to(M_2,\omega_2)$ é um difeomorfismo entre M_1 e M_2 tal que tal que $d\varphi:TM_1\to TM_2$ é um simplectomorfismo, i.e., $\varphi^*\omega_2=\omega_1$.

Em [26] Teorema 2.1.3 e Teorema 3.2.2 encontramos o seguinte resultado, conhecido com Teorema de Darboux:

Teorema A.1.1. *(a) Se (V,ω) é um espaço vetorial, então existem $n\in\mathbb{N}$ e um simplectomorfismo $T:(V,\omega)\to(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$.*

(b) Sejam (M,ω) uma variedade simplética e $p\in M$. Então existem $n\in\mathbb{N}$, U uma vizinhança de p em M, V uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^{2n}$ e um simplectomorfismo $\varphi:(U,\omega)\to(V,\omega_0)$ satisfazendo que $\varphi(p)=0$.

Dada uma variedade simplética e uma função nesta variedade, a não-degenerescência da forma simplética permite que se faça a seguinte definição (veja [26] página 21):

Definição A.1.4. Sejam (M,ω) uma variedade simplética e $H:M\to\mathbb{R}$. O campo Hamiltoniano associado a H é o campo de vetores X_H unicamente definido por

$$i_{X_H}\omega = dH.$$

Observação A.1.1. Não há consenso na literatura quanto a definição acima. Aqui seguimos a convenção de sinais de [26]. Por exemplo, na referências [12] X_H é definido pela identidade

$$i_{X_H}\omega=-dH.$$

Obviamente, as duas definições levam a resultados equivalentes.

Exemplo A.1.3. Se $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, temos que o campo Hamiltoniano X_H com respeito à forma simplética ω_0 é dado por

$$X_H = J_0 \nabla H = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} H \partial_{y_i} - \partial_{y_i} H \partial_{x_i}).$$

A.2 O grupo simplético e o índice de Maslov

Definição A.2.1. O grupo simplético de $\mathbb{R}^{2n}$ é o subgrupo de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ dado por

$$\mathrm{Sp}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid A^T J_0 A = J_0\},$$

onde J_0 é a estrutura quase-complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n}$.

O espectro de uma matriz simplética é descrito na proposição abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [26], Lema 2.2.2:

Proposição A.2.1. *Se $A \in \mathrm{Sp}(n)$, então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ tais que*

$$\sigma(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda_i, \lambda_i^{-1}\}.$$

O seguinte teorema foi retirado de [26], Teorema 2.2.12.

Teorema A.2.2. *Existe uma única função μ que associa a cada caminho fechado de matrizes simpléticas*

$$\varphi : \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \to \mathrm{Sp}(n)$$

um inteiro e que satisfaz os seguintes axiomas:

(a) Dois caminhos fechados de matrizes simpléticas φ_1 e φ_2 são homotópicos se, e somente se,

$$\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_1).$$

(b) Dados dois caminhos fechados de matrizes simpléticas φ_1 e φ_2, então

$$\mu(\varphi_1 \varphi_2) = \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2).$$

(c) Se $n = n' + n''$, φ' é um caminho fechado de matrizes simpléticas em $\mathrm{Sp}(n')$ e φ'' é um caminho fechado de matrizes simpléticas em $\mathrm{Sp}(n'')$, então

$$\mu(\varphi' \oplus \varphi'') = \mu(\varphi') + \mu(\varphi''),$$

onde interpretamos $\varphi' \oplus \varphi''$ como um caminho simplético em $\mathrm{Sp}(n)$ da maneira óbvia.

(d) O caminho fechado de matrizes simpléticas em $\mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$ satisfaz que

$$\mu(\varphi) = 1.$$

Definição A.2.2. O índice do Teorema A.2.2 é chamado de índice de Maslov.

A.3 Variedades de contato

Definição A.3.1. Sejam M uma variedade e ξ um subfibrado vetorial de TM de codimensão 1. Dizemos que ξ é uma estrutura de contato em M se para todo $p \in M$ existe uma 1-forma λ definida em uma vizinhança U de p, tal que

$$\xi = \ker \lambda \text{ em } U$$

e $(\xi|U, d\lambda)$ é um fibrado vetorial simplético sobre U. Neste caso, dizemos que (M, ξ) é uma variedade de contato.

Uma forma λ como acima é chamada de uma forma de contato local associada a ξ. Se $U = M$, dizemos simplesmente que λ é uma forma de contato associada a ξ.

Observação A.3.1. (a) Do Teorema A.1.1 concluímos que uma variedade de contato necessariamente tem dimensão ímpar.

(b) Se $\dim M = 2n+1$, a condição $(\xi|U, \lambda)$ ser um fibrado vetorial simplético é equivalente à condição de que

$$\lambda \wedge (d\lambda)^n \neq 0.$$

Se λ é uma forma de contato definida globalmente, temos que $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ é uma forma de volume em M e, portanto, esta forma induz uma orientação em M.

(c) Note que uma forma associada a uma dada estrutura de contato não é única. De fato, duas formas de contato λ_1 e λ_2 são associadas à mesma estrutura de contato ξ se, e somente se, existe uma função real f que não se anula tal que $\lambda_2 = f\lambda_1$.

(d) Quando quisermos salientar o papel de uma forma de contato λ específica, escreveremos que (M, λ) é uma variedade de contato. Fica subentendido que a estrutura de contato em consideração é a dada por $\xi = \ker; \lambda$.

O seguinte resultado, que se encontra em [12], Lema 1.1.1, nos diz exatamente quando uma estrutura de contato admite uma forma de contato globalmente definida.

Proposição A.3.1. *Seja (M, ξ) uma variedade de contato. Então ξ está associada a uma forma de contato (global) se, e somente se, ξ é coorientável em TM, i.e., TM/ξ é orientável.*

Neste trabalho só consideraremos estruturas de contato coorientáveis.

Exemplo A.3.1. Toda variedade de dimensão 1 é uma variedade de contato com $\xi = 0$.

Exemplo A.3.2. Identificando $\mathbb{R}^{2n+1}$ com $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$ com coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$, temos que

$$\lambda = dz + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i dy_i - y_i dx_i)$$

é uma forma de contato em $\mathbb{R}^{2n+1}$.

O próximo teorema conhecido como teorema de Darboux, nos diz que localmente o único invariante de uma variedade de contato é a sua dimensão. Para uma demonstração veja Teorema 2.5.1 em [12].

Teorema A.3.2. *Seja λ uma forma de contato em uma variedade M de dimensão $2n+1$. Dado $p \in M$, existem vizinhanças U de p em M e V de 0 em $\mathbb{R}^{2n+1}$ e um difeomorfismo $\varphi : V \to U$ tal que $\varphi(p) = 0$ e*

$$\varphi^* \lambda = dz + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i dy_i - y_i dx_i).$$

Associado a uma forma de contato temos sempre um campo, no espírito da seguinte definição (veja [12] Definição 1.1.9):

Definição A.3.2. Seja λ é uma forma de contato em uma variedade M. O campo de Reeb associado a λ é o campo de vetores X_λ definido unicamente por

$$i_{X_\lambda} \lambda = 1 \text{ e } i_{X_\lambda} d\lambda = 0.$$

Observação A.3.2. Note que dada uma variedade de contato (M, ξ) e λ uma forma de contato associada ξ, temos uma decomposição em soma direta

$$TM \cong \xi \oplus \langle X_\lambda \rangle ,$$

onde $\langle X_\lambda \rangle$ denota o fibrado vetorial gerado pelo campo de vetores X_λ.

Definição A.3.3. Sejam (W, ω) uma variedade simplética e Y um campo de vetores definido em algum aberto U de W. Dizemos que Y é um campo de Liouville de (W, ω) se

$$\mathscr{L}_Y \omega = \omega$$

em U.

Para nós a importância desta definição reside na seguinte proposição que foi retirada de [12] Lema 1.4.5 e Lema 1.4.10:

Proposição A.3.3. *Sejam (W, ω) uma variedade simplética, M uma hiperfície de W e U uma vizinhança de M em W. Suponha que Y é um campo de Liouville de (W, ω) definido em U e transversal a M. Então $\lambda = i_Y \omega | M$ é uma forma de contato em M. Ademais, se existe $H : W \to \mathbb{R}$ tal que $H^{-1}(c) = M$ para algum valor regular c de H, então existe $g : M \to \mathbb{R}$ tal que $X_\lambda = g X_H$.*

Uma hiperfície como M no enunciado do teorema é chamada de uma hiperfície de contato de (W, ω).

Exemplo A.3.3. O campo

$$Y = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i\partial_{x_i} + y_i\partial_{y_i}),$$

é um campo de Liouville de $(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}, \omega_0)$ transversal a esfera unitária $\mathbb{S}^{2n-1} = \{z \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|z\|^2 = 1\}$, onde escrevemos $z = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$. Logo, a 1-forma

$$i_Y\omega_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i dy_i - y_i dx_i)$$

define uma forma de contato em $\mathbb{S}^{2n-1}$. Denotaremos esta forma de contato por λ_0 e a estrutura de contato associada de ξ_0 e as chamaremos respectivamente de forma de contato padrão e estrutura de contato padrão em $\mathbb{S}^{2n-1}$. Portanto, $\mathbb{S}^{2n-1}$ é uma hiperfície de contato de $\mathbb{R}^{2n}$. Como $\mathbb{S}^{2n-1} = H^{-1}(1)$, onde $H(z) = \|z\|^2$, temos que

$$X_0 = X_{\lambda_0} = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i\partial_{y_i} - y_i\partial_{x_i}).$$

O caso de $\mathbb{S}^{2n-1}$ é uma instância de uma família de exemplos.

Definição A.3.4. Seja S uma hiperfície compacta de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Dizemos que S é estrelada se para todo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ a reta

$$l_v = \{tv \mid t \in (0, \infty)\}$$

intersecta S transversalmente em exatamente um ponto.

Exemplo A.3.4. Se S uma hiperfície compacta estrelada, então S é uma hiperfície de contato de $\mathbb{R}^{2n}$, pois S é transversal ao campo de Liouville Y do Exemplo A.3.3 com estrutura de contato induzida pela forma de contato dada pela restrição à S da 1-forma

$$\lambda_S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i dy_i - y_i dx_i).$$

Claramente, $\mathbb{S}^{2n-1}$ é uma hiperfície compacta estrelada e temos $\lambda_{\mathbb{S}^{2n-1}} = \lambda_0$.

Do ponto de vista da estrutura de contato (não das formas de contato), o Exemplo A.3.4 é equivalente ao Exemplo A.3.3, como a próxima proposição mostra (veja [2] Teorema 9.3.1).

Proposição A.3.4. *Seja S uma hiperfície compacta estrelada de $\mathbb{R}^{2n}$ e considere a função $f : \mathbb{S}^{2n-1} \to (0, \infty)$, dada por*

$$f(z)z \in S.$$

Então o difeomorfismo $\varphi : \mathbb{S}^{2n-1} \to S$, dado por

$$\varphi(z) = f(z)z,$$

satisfaz que

$$\varphi^* \lambda_S = f^2 \lambda_0.$$

Reciprocamente, se $g : \mathbb{S}^{2n-1} \to (0, \infty)$, *defina a hiperfície estrelada*

$$S_g = \{\sqrt{g(z)} z \in \mathbb{R}^{2n} \mid z \in \mathbb{S}^{2n-1}\}.$$

Então, o difeomorfismo $\psi : \mathbb{S}^{2n-1} \to S$ *dado por*

$$\psi(z) = \sqrt{g(z)} z,$$

satisfaz que

$$\psi^* \lambda_{S_g} = g \lambda_0.$$

Definição A.3.5. Uma variedade de contato (M', ξ') é dita uma subavariedade de contato de uma variedade de contato (M, ξ) se existe um mergulho $\varphi : M' \to M$ tal que

$$\varphi_*(\xi') = T\varphi(M') \cap \xi.$$

A.4 Variedades de contato de dimensão 3

Uma apresentação bem aprofundada deste tema, contendo muitas demonstrações completas, pode ser encontrada no capítulo 4 de [12].

O próximo teorema foi demonstrado por Martinet em [24].

Teorema A.4.1 (Martinet)**.** *Toda variedade fechada e orientável de dimensão 3 admite uma estrutura de contato.*

Em [9], Eliashberg introduz uma dicotomia na classificação de estruturas de contato em variedades em dimensão 3 que agora discutimos.

Definição A.4.1. Seja (M, ξ) uma variedade de contato de dimensão 3. Um disco fechado D mergulhado em M é dito um disco *overtwisted*[1] se

$$T\partial D \subset \xi \quad \text{e} \quad T_p D \neq \xi_p, \quad \forall p \in \partial D.$$

A estrutura de contato ξ é chamada de *overtwisted*, se admite algum disco overtwisted. Caso contrário, dizemos que ξ é *tight*. Se λ é uma forma de contato em M associada a estrutura de contato ξ, diremos que λ é tight ou overtwisted caso ξ seja tight ou overtwisted, respectivamente.

[1] Aqui decidimos manter as nomenclaturas em inglês, tight e overtwisted, como tem sido a prática em português.

Observação A.4.1. Na literatura, em geral um disco overtwisted é definido adicionando-se a condição que existe exatamente um ponto no interior do disco cujo plano tangente seja o plano de contato neste ponto. As duas definições são equivalentes como se mostra em [2], Theorem 3.5.7.

Neste contexto, dois teoremas nos interessam. O primeiro é devido a Bennequin [4] e diz que:

Teorema A.4.2. *A estrutura de contato ξ_0 de $\mathbb{S}^3$ (veja Exemplo A.3.3) é tight.*

O segundo resultado está contido em [10] e diz que:

Teorema A.4.3. *Seja λ uma forma de contato em $\mathbb{S}^3$ e induzindo uma estrutura de contato tight. Então existem $f : \mathbb{S}^3 \to (0, \infty)$ e um difeomorfismo $\varphi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ tais que $\varphi^*\lambda = f\lambda_0$.*

Outra propriedade da estrutura de contato padrão em $\mathbb{S}^3$ que nos será útil é:

Proposição A.4.4. *Qualquer estrutura de contato tight em $\mathbb{S}^3$ é trivial.*

Demonstração. Basta mostrar que a estrutura padrão ξ_0 é trivial. Para isto, basta encontrar um base global de ξ_0. De fato, os campos de vetores

$$y_2\partial_{x_1} + x_2\partial_{y_1} - y_1\partial_{x_2} - x_1\partial_{y_2} \text{ e } -x_2\partial_{x_1} + y_2\partial_{y_1} + x_1\partial_{x_2} - y_1\partial_{y_2}$$

formam tal base. □

A.5 Simplectização de variedades de contato

Seja (M, ξ) uma variedade de contato com ξ coorientada, i.e., como uma escolha de orientação em TM/ξ. Consideramos o subfibrado vetorial de T^*M dado por

$$\xi^\perp = \{\theta \in T^*M \mid \theta|\xi \equiv 0\}.$$

Temos o isomorfismo entre fibrados vetoriais $\Phi : \xi^\perp \to TM/\xi$ dado por $\Phi(\theta) = [\theta]$. Como por hipótese TM/ξ é um fibrado de linhas orientado, podemos orientar $\xi^\perp$ através do isomorfismo Φ. Logo podemos falar de covetores positivos e negativos em $\xi^\perp \backslash \{0\}$. Seja

$$W_\xi = \{\theta \in \xi^\perp \backslash \{0\} \mid \theta \text{ é positivo}\}.$$

Definição A.5.1. A variedade (W_ξ, ω_ξ) é chamada de simplectização de (M, ξ), onde $\omega_\xi = \omega_{\text{can}}|W_\xi$ é a restrição da forma simplética canônica em $T * M$ (veja Exemplo A.1.2).

Teorema A.5.1. *Seja (M, ξ) uma variedade de contato com ξ coorientada. Se λ é uma forma de contato induzindo a orientação de $\xi^{\perp}$, então*

$$\Psi_\lambda : (W_\xi, \omega_\xi) \to (\mathbb{R} \times M, d(e^t\lambda)), \quad \theta \mapsto (\log(\theta/\lambda_{\pi(\theta)}), \pi(\theta)).$$

é um simplectomorfismo.

Demonstração. É imediato checar que

$$\Psi_\lambda^{-1} : \mathbb{R} \times M \to W_\xi, \quad (t, p) \mapsto e^t\lambda_p.$$

Ademais, se $\theta \in T^*M$, então

$$\begin{aligned} (\Psi_\lambda)^*(e^t\lambda)_\theta &= (\theta/\lambda_{\pi(\theta)})(\pi^*\lambda)_{\pi(\theta)} \\ &= (\pi^*\theta)_{\pi(\theta)} \\ &= (\alpha_{\text{taut}})_\theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\Psi_\lambda)^* d(e^t\lambda) = d\alpha_{\text{taut}} = \omega_\xi.$$

□

APÊNDICE B – Teoria de nós e enlaces em $\mathbb{S}^3$

Neste apêndice coletamos os resultados sobre a teoria de nós que precisaremos para desenvolver o trabalho. Usamos como referência os livros [12], [29] e [23].

B.1 Nós e enlaces em $\mathbb{S}^3$

No que segue consideramos $\mathbb{S}^3$ munida da sua estrutura de contato tight padrão ξ_0 (veja A.4.2) e orientada como bordo da bola unitária de $\mathbb{R}^4$ com a orientação canônica. Muito da teoria descrita abaixo poderia ser desenvolvida em contextos mais gerais (veja o capítulo 3 de [12]).

Definição B.1.1. Um conjunto $K \subset \mathbb{S}^3$ é dito um nó se existe um mergulho $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3$ tal que $K = \gamma(\mathbb{S}^1)$. Dizemos que um nó K é tranversal se para todo $p \in K$

$$T_p\mathbb{S}^3 = T_pK \oplus (\xi_0)_p.$$

Um subconjunto $L \subset \mathbb{S}^3$ é dito um enlace se é a união finita de nós disjuntos. Um enlace é dito transversal se é composto por nós transversais.

Observação B.1.1. Note que um enlace transversal é automaticamente uma subvariedade de contato.

□

Definição B.1.2. Uma isotopia (transversal) entre os nós (transversais), L_0 e L_1, é um mapa $\Gamma : [0,1] \times L_0 \to \mathbb{S}^3$ satisfazendo que $\Gamma(\{0\} \times L_0) = L_0$, $\Gamma(\{1\} \times L_0) = L_1$ (e $\Gamma(\{t\} \times L_0)$ é um enlace transversal para todo $t \in [0,1]$).

Dados dois enlaces (transversais), L_0 e L_1, diremos que eles são equivalentes se existe uma isotopia (transversal) entre eles.

O seguinte teorema será útil (veja Teorema 1.3 do capítulo 8 de [13] e Teorema 2.6.12 de [12]):

Teorema B.1.1. *Sejam L_0 e L_1 enlaces disjuntos de um subconjunto fechado $C \subset \mathbb{S}^3$ e $\Gamma : [0,1] \times L_0 \to \mathbb{S}^3 \backslash C$ é uma isotopia entre L_0 e L_1, então existe uma isotopia $\Psi : [0,1] \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ satisfazendo que $\Psi([0,1] \times C) = C$ e*

$$\Psi_t \circ \Gamma_0 = \Gamma_t,$$

onde

$$\Psi_t = \Psi(t, \cdot) \quad e \quad \Gamma_t = \Gamma(t, \cdot).$$

Se L_0, L_1 e Γ forem transversais, podemos assumir que

$$(\Psi_t)_*(\xi_0) = \xi_0.$$

O próximo teorema se encontra em [23], Teorema 1.5.

Teorema B.1.2. *Sejam K um nó orientado e D um disco fechado e mergulhado em $\mathbb{S}^3$ que intersecta K somente em um ponto no seu interior. Oriente D de forma que*

$$\#(K, D) = 1,$$

onde $\#(\cdot, \cdot)$ denota o número de interseção como definido no capítulo 5 de [13]. Então a classe de homologia $[\partial D]$ gera $H_1(\mathbb{S}^3 \backslash K)$ e esta classe de homologia não depende da escolha de D. Em particular, $H_1(\mathbb{S}^3 \backslash K)$ é canonicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Definição B.1.3. Sejam K e K_2 dois nós orientados e disjuntos. Definimos o número de enlaçamento entre K_1 e K_2 como

$$\mathrm{lk}(K_1, K_2) = [K_1] \in H_1(\mathbb{S}^3 \backslash K) \cong \mathbb{Z}.$$

Observação B.1.2. Se $K_1 \cup K_2$ e $K_1' \cup K_2'$ são enlaces equivalentes, então

$$\mathrm{lk}(K_1, K_2) = \mathrm{lk}(K_1', K_2').$$

□

Uma segunda maneira de definir o número de enlaçamento é utilizando as superfícies de Seifert de um enlace, noção que agora definimos.

Definição B.1.4. Dado um enlace L em $\mathbb{S}^3$, uma superfície de Seifert para L é uma superfície orientável, conexa e compacta Σ mergulhada em $\mathbb{S}^3$ tal que $\partial\Sigma = L$.

No Teorema 4 da seção A do capítulo 5 de [29], temos que:

Teorema B.1.3. *Se L é um enlace em $\mathbb{S}^3$, então existe uma superfície de Seifert para L.*

Sejam K um nós e Σ uma superfície de Seifert para K. Se K for orientado, sempre orientaremos Σ de forma que a orientação de K coincida com a orientação de $\partial\Sigma$.

Teorema B.1.4. *Dados dois nós $K_1, K_2 \subset \mathbb{S}^3$ disjuntos e orientados vale que*

$$\mathrm{lk}(K_1, K_2) = \#(K_1, \Sigma_2),$$

onde Σ_2 é uma superfície de Seifert para K_2.

Para uma demonstração deste teorema veja Proposição 3.4.11 de [12].

No Corolário 3.4.12 em [12] encontramos o resultado:

Proposição B.1.5. *Dados dois nós* K_1 *e* K_2 *disjuntos em* $\mathbb{S}^3$ *temos que*

$$\operatorname{lk}(K_1, K_2) = \operatorname{lk}(K_2, K_1).$$

Lema B.1.6. *Seja* K *um nó transversal em* $\mathbb{S}^3$ *e* X *uma seção global de* ξ_0 *que não se anula e vamos denotar por* ϕ^X *seu fluxo. Existe* $\varepsilon > 0$ *tal que se* $|t| < \varepsilon$, *então* $K_{X,t} = \phi_t^X(K)$ *é um nó disjunto de* K. *Além disso,* $\operatorname{link}(K, K_{X,t})$ *não depende de* X *e de* t.

Demonstração. Que $K_{X,t}$ é um nó segue do fato de ϕ_t^X ser um difeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$. Que $K_{X,\varepsilon} \cap K = \emptyset$ para $\varepsilon > 0$ segue da hipótese de K ser compacto e transversal e $X \in \xi_0$ não se anular. Se $|t_1|, |t_2| < \varepsilon$, então

$$(s, p) \in [0, 1] \times K_{X,t_1} \mapsto \phi^X_{s(t_2-t_1)}(p) \in \mathbb{S}^3,$$

induz uma isotopia entre $K \cup K_{X,t_1}$ e $K \cup K_{X,t_2}$. Suponha agora que Y é outra seção global de ξ_0 que não se anula. Seja Z_s, $s \in [0, 1]$, uma homotopia entre X e Y por seções de ξ_0 que não se anulam. Podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que se $|t| < \varepsilon$ então $\phi_t^{Z_s}(K)$ é um nó disjunto de K. O mapa

$$(s, p) \in [0, 1] \times K_{X,t} \mapsto \phi_t^{Z_s}(p) \in \mathbb{S}^3$$

induz uma isotopia entre $K \cup K_{X,t}$ e $K \cup K_{Y,t}$. □

Definição B.1.5. Seja K um nó transversal em $\mathbb{S}^3$, então definimos o número de auto-enlaçamento de K como

$$\operatorname{slk}(K) = \operatorname{lk}(K, K_{X,t}),$$

onde $K_{X,t}$ é como no enunciado do Lema B.1.6.

Observação B.1.3. Por construção, o número $\operatorname{slk}(K)$ é invariante por isotopias transversais.

□

B.2 Alguns enlaces especiais em $\mathbb{S}^3$

Definição B.2.1. Um nós K é dito trivial se admite um disco como superfície de Seifert.

Vamos considerar os seguintes nós em $\mathbb{S}^3$

$$K_i = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \mid z_i = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Vamos considerar K_i orientado como bordo do disco

$$D_i = \{(z_1, z_2) \in B(0;1) \mid z_i = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Os nós K_1 e K_2 são nós triviais satisfazendo que $\operatorname{lk}(K_1, K_2) = 1$. Para ver isto, defina

$$\Sigma_i = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \mid \operatorname{Re}(z_i) = 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z_i) \leq 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Note que Σ_i é um disco e é superfície de Seifert para K_i. Além disso, $K_1 \cap \Sigma_2 = \{(0, -i)\}$, $K_2 \cap \Sigma_1 = \{(-i, 0)\}$ e

$$\#(K_1, \Sigma_2) = 1 = \#(K_2, \Sigma_1).$$

Pelo B.1.2, temos que

$$\operatorname{lk}(K_1, K_2) = 1. \tag{B.2.1}$$

Para calcular, $\operatorname{slk}(K_1)$, vamos usar a seção global de ξ_0 dada por

$$X = -x_2\partial_{x_1} + y_2\partial_{y_1} + x_1\partial_{x_2} - y_1\partial_{y_2}.$$

Se $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\phi_t^X(0, z_2) = ((\operatorname{sen} t)\bar{z}_2, (\cos t)z_2).$$

Logo, $\phi_t^X(K_1)$ é homólogo a $-K_2$ em $H_1(\mathbb{S}^3 \backslash K_1)$. Logo, se t é pequeno o suficiente,

$$\operatorname{slk}(K_1) = \operatorname{lk}(K_1, K_{X,t}) = -\operatorname{lk}(K_1, K_2) = -1. \tag{B.2.2}$$

Um cálculo análogo mostra que

$$\operatorname{slk}(K_2) = -1. \tag{B.2.3}$$

Escreveremos $L_0 = K_1 \cup K_2$.

Fixe agora $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ coprimos. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tais que $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Defina o mapa

$$\tilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^3, \quad t \mapsto (z_1 e^{2\pi i p t}, z_2 e^{2\pi i q t}).$$

Este mapa $\tilde{\phi}$ induz um mergulho $\phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^3$. Vamos denotar por $K_{p,q}$ o nó $\phi(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Note que dada qualquer escolha de z_1 e z_2 como acima obtemos nós transversalmente isotópicos via uma isotopia que fixa o enlace L_0 (Teorema B.1.1). Como $[K_{p,q}]$ é homólogo a $p[K_2]$ em $\mathbb{S}^3\backslash K_1$, temos que

$$\operatorname{lk}(K_{p,q}, K_1) = p. \tag{B.2.4}$$

Analogamente,

$$\operatorname{lk}(K_{p,q}, K_2) = q. \tag{B.2.5}$$

Pela discussão acima, vemos que $K_{p,q}$ e $K_{\hat{p},\hat{q}}$ estão em classes de homotopia diferentes em $\mathbb{S}^3\backslash L_0$ se $(p, q) \neq (\hat{p}, \hat{q})$.

Agora, seja $(\hat{p}, \hat{q}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Construimos $K_{\hat{p},\hat{q}}$ como acima com alguma escolha de $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, com $|\hat{z}_1| \neq |z_1|$. Se $|\hat{z}_1| < |z_1|$, então $[K_{\hat{p},\hat{q}}]$ é homólogo a $\hat{q}[K_1]$ em $\mathbb{S}^3\backslash K_{p,q}$, segue que

$$\mathrm{lk}(K_{p,q}, K_{\hat{p},\hat{q}}) = p\hat{q}. \tag{B.2.6}$$

Analogamente, se $|\hat{z}_1| > |z_1|$, então

$$\mathrm{lk}(K_{p,q}, K_{\hat{p},\hat{q}}) = \hat{p}q. \tag{B.2.7}$$

Uma discussão mais detalhada dos nós $K_{p,q}$ pode ser encontrada na seção C do capítulo 3 de [29].