

Homogeneização da Equação de Schrödinger. Teoremas de Massa Efetiva Estendidas para Materiais Não Cristalinos

por

Vernny Uriel Chavez Ccajma

Orientadores: Wladimir Neves e Jean Silva

*Tese de Doutorado
apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto
de Matemática, da Universidade Federal
do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do
Título de Doutor em Matemática.*

**Rio de Janeiro
Junho de 2020**

Homogeneização da Equação de Schrödinger. Teoremas de Massa Efetiva Estendidas para Materiais Não Cristalinos

por

Vernny Uriel Chavez Ccajma

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado por:

Prof. Dr. Wladimir Neves - IM-UFRJ
(Orientador)

Prof. Dr. Jean Silva - DMAT-UFMG
(Orientador)

Prof. Dr. Xavier Carvajal - IM-UFRJ

Prof. Dr. Glauco Valle - IM-UFRJ

Prof. Dr. Hermano Frid - IMPA

Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva - UFES

Prof. Dr. Boyan Sirakov - PUC-Rio

Prof. Dr. Henrique Versieux - DMAT-UFMG

Rio de Janeiro
Junho de 2020

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a mis padres Elvira Ccajma y Antonio Chavez por todo lo que me enseñaron y por canjear ese esfuerzo del día a día por aquella chance que me permitió crecer. A mis hermanos, Alex y Katherine, por el apoyo incondicional.

Agradezco a Ketty, la persona que coloreó mis días, por su soporte en cada momento y las innumerables enseñanzas.

A los profesores del instituto de matemática de la UFRJ, en especial a mis orientadores Wladimir Neves y Jean Silva.

Finalmente, a mis amigos de la Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro,
Vernny Uriel Chavez Ccajma

A mi familia.

Homogeneização da Equação de Schrödinger. Teoremas de Massa Efetiva Estendidas para Materiais Não Cristalinos

Vernny Uriel Chavez Ccajma

Orientadores: Wladimir Neves e Jean Silva

Resumo

Resumo da Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

O objetivo principal deste trabalho é estudar o problema de homogeneização da equação de Schrödinger linear para materiais com estrutura não-cristalina, onde os coeficientes são dados pela composição de funções estacionárias com deformações estocásticas. Como resultado final, são apresentados teoremas que descrevem o comportamento assintótico da solução com dados iniciais bem preparados concentrados em ondas de Bloch.

Palavras-chave: Homogeneização, Equação de Schrödinger Linear, Deformações Estocásticas e Convergência duas Escalas.

**Rio de Janeiro
Junho de 2020**

Homogenization of Schrödinger equations. Extended Effective Mass Theorems for non-crystalline matter

Vernny Uriel Chavez Ccajma

Advisors: Wladimir Neves and Jean Silva

Abstract

Abstract da Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

The main objective of this work is to study the homogenization's problem of the Schrödinger equation for materials with non-crystalline structure, where the coefficients are given by the composition of stationary functions with stochastic deformations. As final result, we show theorems that describe the asymptotic behavior of the solution with well-prepared initial data concentrating on Bloch functions.

Keywords: Homogenization, Linear Schrödinger Equations, Stochastic Deformations and Two-Scale Convergence.

**Rio de Janeiro
June 2020**

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares & Background	10
1.1 Equação de Schrödinger	10
1.2 Configuração Estocástica	13
1.2.1 Teorema Ergódico	16
1.2.2 Cálculo para funções estacionárias	18
1.3 Convergência Duas Escalas Estocástica	23
1.4 Um Teorema de Perturbação	34
2 Análise Assintótica Formal	50
2.1 Ondas de Bloch	50
2.1.1 Método WKB	56
2.2 Espaços de Sobolev sobre Grupos	60
2.2.1 Sistemas Dinâmicos e Grupos AC	63
2.2.2 Teorema de Rellich–Kondrachov	65
3 Homogeneização da Equação de Schrödinger	72
3.1 Teorema de Homogeneização	73
3.2 Aplicação: Funções Quasi-Periódicas	94
4 Perturbação da Identidade	96
4.1 Análise Espectral da Equação Celular: Caso Periódico Perturbado	97
4.2 Expansão numa vizinhança de $\eta = 0$	104

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em estudar as equações de Schrödinger lineares que descrevem a dinâmica de um elétron em materiais não-cristalinos. Os materiais cristalinos (chamados *materiais perfeitos*) possuem uma estrutura microscópica que se repete de forma regular, e podem ser modeladas pelas funções periódicas. Porém, materiais perfeitos são raros na natureza. Uma parte dos materiais não-cristalinos são cristais que apresentam defeitos, isto é, o padrão regular microscópico do cristal é interrompido. Por exemplo, pode haver uma partícula em um local normalmente desocupado na estrutura do cristal (partícula situada em um local “errado”), chamado *defeito intersticial*. E, como era de se esperar, esses defeitos atribuem novas propriedades físicas (dureza, condutividade elétrica, condutividade térmica, propriedades ópticas, etc.) ao material (ver Cancès & Le Bris [13] e Myers [35]).

Uma proposta para modelar esses fenômenos é que cada partícula no cristal puro seja localizada em uma posição aleatória (ver Fig 1). Desde que este fenômeno ocorra ao nível

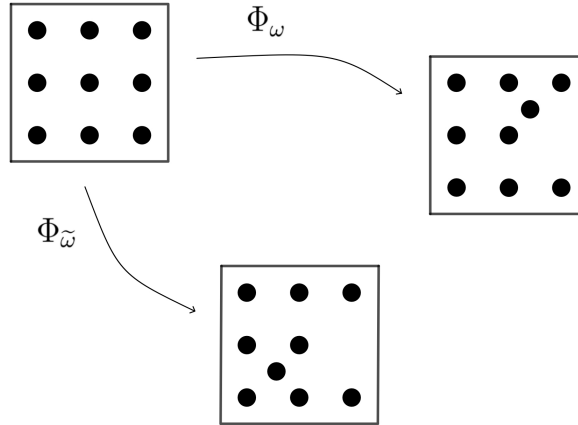


Figura 1: Defeito auto-intersticial, duas possíveis situações para uma partícula.

microscópico, será necessária uma análise assintótica de operadores diferenciais, a qual coloca nosso estudo no contexto da teoria de homogeneização.

As funções que utilizamos para modelar os meios não-cristalinos têm a seguinte forma

$$(x, \omega) \mapsto f\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right), \quad \varepsilon > 0,$$

onde f é uma função estacionária e Φ uma *deformação estocástica*. Esta última, introduzida por Blanc, Le Bris & Lions em [10, 11], no qual consideram o problema de

homogeneização de um operador elíptico cujos coeficientes são composições de funções periódicas (ou estacionárias) com a deformação estocástica.

Funções estacionárias são funções mensuráveis com respeito ao produto $\mathbb{R}^n \times \Omega$ que satisfazem a seguinte relação

$$\forall y \in \mathbb{Z}^n, \quad f(x + y, \omega) = f(x, \tau_y \omega), \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega,$$

onde $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade e $\{\tau_y : \Omega \rightarrow \Omega\}_{y \in \mathbb{Z}^n}$ um sistema dinâmico que é ergódico. Estas funções generalizam as funções periódicas ($\tau_y = I_\Omega$, $\forall y \in \mathbb{Z}^n$). Uma família importante de funções estacionárias se obtém a partir da célula unitária, $Y = [0, 1]^n$, mediante um processo de extensão, de forma semelhante ao contexto periódico. Isto é, no caso unidimensional, por exemplo, se $\varphi \in C_c^\infty(0, 1)$ e $\rho \in L^\infty(\Omega)$, a extensão $f(y, \omega) := \varphi(y - \llbracket y \rrbracket) \rho(\tau_{\llbracket y \rrbracket} \omega)$ é uma função estacionária ($\llbracket \cdot \rrbracket$ denota o máximo inteiro). Propriedades essenciais da análise, tais como diferenciação, convolução com *mollifiers* e limites, preservam a propriedade de função estacionária. Porém, há outras propriedades importantes para descrever fenômenos físicos que não a preservam. Por exemplo, em geral, a função $g(y, \omega) := \int_0^y f(s, \omega) ds$, f função estacionária, não é estacionária. De fato, se $f(y)$ é uma função $[0, 1]$ -periódica, então

$$g \text{ é } Y\text{-periódica} \Leftrightarrow M(f) = 0 \quad (M(f) \text{ denota o valor médio de } f).$$

Em geral, além do contexto periódico, o valor médio igual a zero não implica que $g(y, \omega)$ seja estacionária, para um exemplo, ver Andrade, Neves & Silva [6].

A *deformação estocástica* Φ é uma aplicação tal que $\Phi(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo, para quase todo ponto $\omega \in \Omega$, e a matriz Jacobiana $\nabla \Phi(y, \omega)$ é estacionária com condições adicionais que controlam a deformação. As definições anteriores e propriedades serão dadas de forma precisa na Seção 1.2.

Assim, neste trabalho, propomos o estudo do comportamento assintótico (isto é, quando $\varepsilon > 0$ tende para zero) da equação de Schrödinger

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left[A \left(\Phi^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right), \omega \right) \nabla u_\varepsilon \right] \\ \quad + \left[\frac{1}{\varepsilon^2} V \left(\Phi^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right), \omega \right) + U \left(\Phi^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right), \omega \right) \right] u_\varepsilon = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}_T^{n+1} \times \Omega, \\ u_\varepsilon(0, x, \omega) = u_\varepsilon^0(x, \omega), \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde $T > 0$, $\mathbb{R}_T^{n+1} := (0, T) \times \mathbb{R}^n$ e a função incógnita $u_\varepsilon(t, x, \omega)$ é complexa. A composição dos coeficientes é dada por $A = (A_{k\ell})$, com $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$, V e U funções estacionárias, e Φ uma deformação estocástica. Adicionalmente, consideramos $A_{k\ell}, V, U \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ e A uma matriz simétrica coersiva, ou seja, $A_{k\ell} = A_{\ell k}$ e existe $a_0 > 0$ tal que

$$\sum_{k, \ell=1}^n A_{k\ell}(y, \omega) \xi_k \xi_\ell \geq a_0 |\xi|^2,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Problemas de homogeneização com estas características são conhecidas como os *Teoremas de Massa Efetiva*, isto é, sob considerações convenientes sobre o dado inicial u_ε^0 , a solução de (1) pode ser aproximada (quando $\varepsilon > 0$ próximo de zero) pela informação obtida de uma equação de Schrödinger homogeneizada, esta com estrutura mais simples, também chamada *equação de massa efetiva*.

Contextualização

Este trabalho é a continuação do Projeto cuja primeira parte resultou no artigo Andrade, Neves & Silva [6]. Este último, estuda o problema de homogeneização da equação de Liouville para materiais não-cristalinos cujos coeficientes são dados pela composição de funções estacionárias com deformações estocásticas.

Até onde pudemos verificar, o presente trabalho é o primeiro a estudar o comportamento assintótico de (1), além do periódico. De fato, tudo até o presente momento estudado sobre este assunto considera o contexto periódico. Abaixo, listamos alguns destes trabalhos:

O comportamento assintótico de (1), quando a equação modela a dinâmica do elétron no material cristalino, isto é, quando os coeficientes são funções periódicas ($A_{\text{per}}(y)$, $V_{\text{per}}(y)$ e $U_{\text{per}}(y)$) acopladas com a deformação estocástica sendo a identidade $\Phi(y, \omega) = y$, foi estudado em Allaire & Piatnitski [5] e Barletti & Ben Abdallah [8], quando o *potencial externo* depende da variável lenta x . Ambos por métodos diferentes, e neste último com $A_{\text{per}}(y) = I_{n \times n}$. Em Allaire & Vanninathan [4], estuda-se um modelo para semicondutores “excitados” por uma onda eletromagnética externa em um meio periódico, para isto, os autores consideraram um potencial externo dependendo do tempo e da variável lenta x . Em Chabu, Fermanian-Kammerer & Marcià [16], considera-se um potencial externo que modela os efeitos de impurezas no estudo da dinâmica de um elétron em um cristal. Importante destacar que quando a matriz $A_{\text{per}}(y)$ não é a identidade, $A_{\text{per}}(y) \neq I_{n \times n}$, os métodos utilizados em [16] e [8] não funcionam.

As referências acima citadas, encontram-se baseadas, principalmente, no estudo da *equação celular espectral de Bloch*

$$\begin{cases} L_{\text{per}}(\theta)[\psi] = \lambda\psi & \text{em } Y, \\ \psi(y) \neq 0 & Y\text{-periódico}, \end{cases} \quad (2)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^n$ e $L_{\text{per}}(\theta)$ é o *Hamiltoniano* dado por

$$L_{\text{per}}(\theta)[f] := -\left(\text{div}_y + 2i\pi\theta\right)\left[A_{\text{per}}(y)\left(\nabla_y + 2i\pi\theta\right)f\right] + V_{\text{per}}(y)f, \quad f \text{ } Y\text{-periódico}.$$

Uma consequência da regularidade dos coeficientes é a existência de uma sequência de autovalores (chamados *energias de Bloch*)

$$\lambda_1(\theta) \leq \lambda_2(\theta) \leq \dots \leq \lambda_k(\theta) \leq \dots$$

tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, a aplicação $\lambda_k(\theta)$ é analítica. Uma discussão sobre a analiticidade é encontrada em Bensoussan, Lions & Papanicolaou [9]. O parâmetro θ chama-se a *frequência de Bloch* e a função $y \mapsto e^{2i\pi\theta \cdot y}\psi_k(y, \theta)$ a *onda plana de Bloch*.

Em Allaire & Piatnitski [5], a estratégia empregada para o comportamento assintótico, passa pela consideração de uma frequência de Bloch e uma energia de Bloch convenientes. Os autores consideram a existência do par $(\theta^*, \lambda_{\text{per}}(\theta^*))$, tal que

- $\lambda_{\text{per}}(\theta^*)$ é simples
- $\nabla_{\theta} \lambda_{\text{per}}(\theta^*) = 0$.

Dado isto, consideram o dado inicial *bem preparado* da forma

$$u_{\varepsilon}^0(x) := e^{2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \psi_{\text{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \theta^*\right) v^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

onde $\varepsilon > 0$, $v^0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\psi_{\text{per}}(\theta^*)$ é autofunção de $L_{\text{per}}(\theta^*)$ com relação a $\lambda_{\text{per}}(\theta^*)$.

E, para passar ao limite, isto é, fazer $\varepsilon \rightarrow 0$, usaram o método de convergência duas escalas, o que essencialmente é um tipo de convergência fraca onde os coeficientes da equação agem como funções teste (ver Allaire [1]). No limite, o comportamento assintótico da solução de (1) satisfaz

$$u_{\varepsilon}(t, x) \approx e^{i \frac{\lambda_{\text{per}}(\theta^*) t}{\varepsilon^2} + 2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \psi_{\text{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \theta^*\right) v(t, x),$$

quando $\varepsilon > 0$ tende a zero, onde $v(t, x)$ é a única solução da equação de Schrödinger homogeneizada

$$\begin{cases} i \frac{\partial v}{\partial t} - \text{div}(A_{\text{per}}^* \nabla v) + U_{\text{per}}^* v = 0, & \text{em } \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ v(0, x) = v^0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

com a matriz homogeneizada A_{per}^* e o potencial U_{per}^* dependendo do par $(\theta^*, \lambda_{\text{per}}(\theta^*))$, ou seja, os coeficientes efetivos dependem da escolha do dado inicial.

Contexto Estocástico

Conforme visto, nosso interesse é estudar a equação (1) quando os coeficientes são funções estacionárias compostas com deformações estocásticas. Naturalmente, aparecem algumas perguntas, tais como:

- é possível implementar uma “nova equação celular espectral de Bloch”?
- se for possível, essa nova equação tem soluções?
- como adaptar a clássica convergência duas escalas periódica para o contexto estocástico deformado? Embora tenha-se uma teoria desenvolvida para convergência duas escalas estocástica (ver Bourgeat, Mikelić & Wright [12] e Zhikov & Piatnitskii [46]), a mesma não se aplica nesse contexto, devido a presença da deformação Φ .

Com o objetivo de responder a primeira questão, conduzido pelo método formal de expansão assintótica duas escalas, chamado *método WKB* (desenvolvida pelos físicos Wentzel,

Kramers e Brillouin, veja Bensoussan, Lions & Papanicolaou [9] e Allaire [3]), propõe-se a escolha natural do seguinte operador

$$L^\Phi(\theta)[F] := -\left(\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta\right)\left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)\left(\nabla_z + 2i\pi\theta\right)F\right] + V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)F,$$

para $F(z, \omega) = f(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)$, f estacionária. Daí, para $\theta \in \mathbb{R}^n$, consideramos também

$$\begin{cases} L^\Phi(\theta)[\Psi] = \lambda\Psi & \text{em } \mathbb{R}^n \times \Omega, \\ \Psi(z, \omega) = \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega), & \psi \text{ função estacionária,} \end{cases} \quad (4)$$

chamada a *equação celular espectral de Bloch* (estocástica). Todo esse assunto será estudado na Seção 2.1.1.

A existência de solução de (4) é equivalente à análise espectral do operador $L^\Phi(\theta)$. Quando nos situamos no contexto periódico, a análise espectral de $L_{\text{per}}(\theta)$ depende fortemente da imersão compacta de $H_{\text{per}}^1(\mathbf{Y})$ em $L^2(\mathbf{Y})$. Em ambientes estocásticos mais gerais, essa imersão compacta, em geral, é perdida.

Assim, como era de se esperar, a análise espectral do operador $L^\Phi(\theta)$ precisa da implementação de outras técnicas. Neste trabalho, se propõem duas técnicas, as quais têm a finalidade de estudar uma parte dos ambientes puramente estocásticos (o que nos posiciona no estudo de materiais não-cristalinos):

- A primeira, passa pelo estudo de sistemas dinâmicos (contínuos) no ambiente dos grupos Abelianos compactos, motivado pela análise assintótica de operadores diferenciais com coeficientes *quase-periódicos*. Pois, funções quase-periódicas em $\mathbb{R}^n$, $AP(\mathbb{R}^n)$, são caracterizadas por funções contínuas na *compactificação de Bohr* do espaço $\mathbb{R}^n$, G_B , por meio do homomorfismo $\varphi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow G_B$ que mergulha $\mathbb{R}^n$ como um subgrupo denso de G_B (ver Hewitt & Ross [30] e Pankov [37]). Conclui-se que, o par (G_B, φ_B) caracteriza todas as funções quase-periódicas em $\mathbb{R}^n$. Na verdade, todo par (G, φ) , G um grupo Abeliano compacto e $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow G$ um homomorfismo contínuo, gera funções quase-periódicas (uma parte delas). Por exemplo, as funções $\mathbf{Y}$ -periódicas são caracterizadas pelo par $(\mathbb{T}^n, \pi)$, $\mathbb{T}^n$ o toro n -dimensional e π o homomorfismo canônico.

Tem-se o interesse na análise espectral de operadores definidos, agora, sobre grupos Abelianos compactos. Ferramentas potenciais para tal análise são as imersões do tipo Sobolev. A pergunta natural, quais são as condições a considerar para ter imersões do tipo Sobolev? Espaços de Sobolev são bem entendidos sobre (domínios) o espaço $\mathbb{R}^n$, variedades de Riemann compactas e completas e sobre espaços métricos. No entanto, espaços de Sobolev sobre conjuntos sem qualquer estrutura diferencial são pouco conhecidos. Nessa direção, os primeiros trabalhos foram no contexto dos números p -ádicos, em Rodríguez-Vega & Zúñiga-Galindo [41], e dos grupos de Heisenberg, em Bahouri, Fermanian-Kammerer & Gallagher [7]. No sentido mais amplo, e que é tomado como referência aqui, é o trabalho de Górká & Reyes [27], onde são introduzidos os espaços de Sobolev sobre grupos Abelianos localmente compactos. Em relação com o ambiente estocástico descrito acima, o par (G, φ) permite situá-lo neste ambiente. Em [27], os autores exibem uma condição suficiente para garantir uma imersão compacta do tipo Sobolev sobre grupos

compactos. Nesta tese, inspirados em Folland [25], é provado uma caracterização da imersão compacta, o Teorema de Rellich-Kondrachov sobre grupos Abelianos compactos (Teorema 2.4). O resultado, além de ser uma caracterização, passa por técnicas diferentes às utilizadas por Górká & Reyes [27].

Com as técnicas descritas acima, somos capazes de fazer a análise assintótica da equação (1), com os seus coeficientes sendo funções quase-periódicas de espectro finito compostas com uma deformação estocástica Φ . Ressaltamos que esse resultado é novo na literatura mesmo quando a deformação Φ é a identidade.

- A segunda, passa pela consideração de A_{per} , V_{per} e U_{per} sendo funções Y -periódicas. E também, a deformação estocástica Φ_η , $\eta \in (0, 1)$, definida por

$$\Phi_\eta(y, \omega) := y + \eta Z(y, \omega) + O(\eta^2), \quad (5)$$

quando $\eta \rightarrow 0$, onde $Z(y, \omega)$ é uma deformação estocástica, sendo Φ_η chamada *perturbação estocástica da identidade*. Este conceito foi introduzido em Blanc, Le Bris & Lions [11], ver também a seção de Aplicações em Andrade, Neves & Silva [6]. Uma das vantagens de trabalhar com Φ_η é que o operador $L^{\Phi_\eta}(\theta)$, em uma vizinhança de $(0, \theta_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tem a expansão

$$L^{\Phi_\eta}(\theta) = L_{\text{per}}(\theta_0) + \sum_{|\varrho|=1}^3 ((\eta, \theta) - (0, \theta_0))^{\varrho} L_{\varrho} + O(\eta^2),$$

quando $\eta \rightarrow 0$, onde $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_n, \varrho_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ e o operador L_{ϱ} , $|\varrho| \in \{1, 2, 3\}$, é limitado. Aqui $|\varrho| = \sum_{k=1}^{n+1} \varrho_k$. Isso diz que o operador $L^{\Phi_\eta}(\theta)$ é uma perturbação do operador $L_{\text{per}}(\theta_0)$, com o qual, conclui-se que o espectro pontual do operador $L^{\Phi_\eta}(\theta)$ estará influenciado pelo espectro pontual do operador $L_{\text{per}}(\theta_0)$. De forma mais precisa, se $\lambda_{\text{per}}(\theta_0)$ tem multiplicidade finita, então, o espectro pontual de $L^{\Phi_\eta}(\theta)$ é não vazio em uma vizinhança de $(0, \theta_0)$. Esta última afirmação encontra-se baseada em um Teorema de Perturbação, o qual descreve localmente o espectro pontual de um operador perturbado (ver Kato [33, Pág. 392] e Rellich [40, Pág. 57]). Este teorema será estudado com detalhes na Seção 1.4.

Em Barletti & Ben Abdallah [8], o estudo do espectro pontual de um operador perturbado já foi estudado no contexto periódico (quando $A_{\text{per}}(y) = I_{n \times n}$) e foi resolvido utilizando a transformada de Fourier. O resultado aqui generaliza esse resultado.

Superado o desafio anterior, i.e., a existência de solução para a equação (4), tem-se a permissão de propor dados iniciais envolvendo autofunções do operador $L^\Phi(\theta)$. Aqui ressalta-se que, com o exposto acima, este trabalho estende o conceito de ondas de Bloch, tanto na Física quanto na Matemática, a um contexto muito além do periódico.

Em relação ao método utilizado para fazer o processo limite (quando $\varepsilon > 0$ tende a zero), ressaltamos que, a convergência fraca utilizada nesta tese, a *convergência duas escalas estocástica*, é uma generalização da convergência duas escalas (ver Allaire [1] e

Nguetseng [36]) desenvolvida para este ambiente estocástico (funções estacionárias compostas com deformações estocásticas). Esta generalização se suporta, essencialmente, no Teorema Ergódico, convergência fraca da sequência

$$\left\{ f\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \right\}_{\varepsilon > 0}$$

q.t.p. $\omega \in \Omega$, para um número dependendo apenas da função estacionária f e a deformação estocástica Φ (ver Blanc, Le Bris & Lions [10, 11]). Esta nova convergência, permite capturar as oscilações aleatórias da solução de (1), por meio de funções teste da forma

$$(x, \omega) \mapsto \varphi(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right),$$

onde $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\zeta(y, \omega)$ uma função estacionária suave.

Resultados Principais

Primeiro Resultado Principal: Para uma análise assintótica da equação (1), considerando a equação celular espectral de Bloch (4), assumimos um dado inicial bem preparado, isto é,

$$u_\varepsilon^0(x, \omega) := e^{2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta^*\right) v^0(x), \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega, \quad (6)$$

onde $\varepsilon > 0$, $v^0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e o par $(\theta^*, \lambda(\theta^*)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ satisfazendo

- $\lambda(\theta^*)$ é simples
- $\nabla_\theta \lambda(\theta^*) = 0$.

Aqui, a regularidade da aplicação $\theta \mapsto \lambda(\theta)$, em uma vizinhança de θ^* , é uma consequência da multiplicidade finita de $\lambda(\theta^*)$. Este assunto será estudado na Seção 1.4.

Nessas condições, será provado no Teorema 3.1 que a solução de (1) satisfaz

$$u_\varepsilon(t, x, \omega) \approx e^{i \frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta^*\right) v(t, x), \quad \text{q.t.p. } \omega \in \Omega, \quad (7)$$

onde $v(t, x)$ é a única solução da equação de Schrödinger homogeneizada

$$\begin{cases} i \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(A^* \nabla v) + U^* v = 0, & \text{em } \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ v(0, x) = v^0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

com a matriz homogeneizada $A^* = D_\theta^2 \lambda(\theta^*)$ e o potencial U^* dependendo do par $(\theta^*, \lambda(\theta^*))$. Aspectos tais como tipo de solução da equação e a unicidade serão abordados no Capítulo 1. No estudo da *física em estado sólido*, a matriz A^* é chamada *matriz de massa efetiva*. Observemos que a matriz A^* não é necessariamente coersiva. Isso mostra que os resultados obtidos aqui não podem ser alcançados via H (ou G)-convergência. A aproximação (7) é uma das conclusões principais do teorema e para obtê-la foi necessário passar por técnicas de regularidade elíptica (ver De Giorgi [26] e Stampacchia [20]). Em conclusão, este resultado generaliza o resultado descrito na seção anterior.

Segundo Resultado Principal: Como foi dito no começo, uma parte dos materiais não-cristalinos são cristais que apresentam algum defeito. Materiais que apresentem “pequenos” defeitos serão aqui chamados de *quase-perfeitos* (como em Andrade, Neves & Silva [6]). A utilização da palavra “pequeno” faz referência ao “tamanho” da deformação. Por exemplo, ser for um defeito auto-intersticial, quão longe encontra-se a partícula do “local certo”. A magnitude da deformação é controlada pelo módulo do gradiente da função deformação.

Para modelar matematicamente este fenômeno, considera-se a perturbação estocástica da identidade Φ_η , $\eta \in (0, 1)$,

$$\Phi_\eta(y, \omega) = y + \eta Z(y, \omega) + O(\eta^2),$$

quando $\eta \rightarrow 0$, onde $Z(y, \omega)$ é uma deformação estocástica. Adicionalmente, assume-se a existência do par $(\theta^*, \lambda_{\text{per}}(\theta^*))$ tal que

- $\lambda_{\text{per}}(\theta^*)$ é simples
- $\nabla_\theta \lambda_{\text{per}}(\theta^*) = 0$.

Essas considerações implicam a existência de solução para a equação celular (4), isto é, para cada η , existem λ_η e Ψ_η satisfazendo (4). Além disso, essas aplicações dependem analiticamente de η . Também, é garantida a existência de uma aplicação analítica $\eta \mapsto \theta_\eta^*$, tal que o par $(\theta_\eta^*, \lambda_\eta(\theta_\eta^*))$ satisfaz a condição de simplicidade e criticidade exigidas na definição do dado inicial, como em (6). Assim, as suposições consideradas sobre $(\theta^*, \lambda_{\text{per}}(\theta^*))$ são suficientes para garantir a existência de dados iniciais bem preparados, isto é, para cada η fixado, considera-se

$$u_{\eta\varepsilon}^0(x, \omega) := e^{2i\pi \frac{\theta_\eta^* \cdot x}{\varepsilon}} \Psi_\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) v^0(x), \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega,$$

onde $\varepsilon > 0$ e $v^0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além de uma aproximação do tipo (7), devido à dependência analítica em relação à variável η de λ_η e Ψ_η , a matriz homogeneizada A_η^* e o potencial homogeneizado U_η^* dependem, também, analiticamente de η . Mais do que isso, é possível expandi-las ao redor de $\eta = 0$, o qual possibilitará uma análise computacional dos coeficientes efetivos,

- $A_\eta^* = A_{\text{per}}^* + \eta A^{(1)} + O(\eta^2)$,
- $U_\eta^* = U_{\text{per}}^* + \eta U^{(1)} + O(\eta^2)$,

onde

- A_{per}^* e U_{per}^* são os coeficientes homogeneizados no caso periódico,
- $A^{(1)}$ e $U^{(1)}$ são determinados por soluções de equações com condição de fronteira periódicas.

Capítulo 1

Preliminares & Background

1.1 Equação de Schrödinger

Nesta seção serão abordados duas versões da equação de Schrödinger, e analisaremos algumas propriedades inerentes a estas. As referências para estudar este assunto são diversas, aqui foram utilizadas, particularmente, os livros de Cazenave [14], Cazenave & Haraux [15], Evans [21] e R. Iorio & V. Iorio [31]. Começaremos com o problema de Cauchy abaixo, descrito pela equação de Schrödinger

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \operatorname{div}[A(x) \nabla u(t, x)] + V(x) u(t, x) = 0, & \text{em } \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde a função incógnita $u(t, x)$ é complexa e $\mathbb{R}_T^{n+1} = (0, T) \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$. Os coeficientes $A_{k\ell}$ e V são funções reais sendo essencialmente limitadas, $A_{k\ell}, V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e a matriz $A = (A_{k\ell})$ é simétrica e coersiva, ou seja, $A_{k\ell} = A_{\ell k}$ e existe $a_0 > 0$, tal que

$$\sum_{k, \ell=1}^n A_{k\ell}(y) \xi_k \xi_\ell \geq a_0 |\xi|^2,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Agora, o conceito de solução para o problema acima.

Definição 1.1. *Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Uma função complexa $u : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é dita solução leve (mild-solution) em H^1 no intervalo $[0, T]$ da equação (1.1) se*

$$u \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\mathbb{R}^n))$$

e

$$i \frac{\partial u}{\partial t}(t) - \operatorname{div}[A(x) \nabla u(t)] + V(x) u(t) = 0, \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^n), \quad \forall t \in (0, T),$$

e $u(0) = u_0$.

Para uma revisão da teoria clássica de existência e unicidade ver, por exemplo, Cazenave [14] e Cazenave & Haraux [15]. Como já foi visto na introdução, a estrutura da

equação de Schrödinger (1.1) é o ambiente onde serão assentados os principais resultados deste trabalho.

Em seguida, estudaremos também, a equação de Schrödinger

$$\begin{cases} i \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \operatorname{div}(A \nabla v(t, x)) + U v(t, x) = 0, & \text{em } \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ v(0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde a função incógnita $v(t, x)$ é complexa, a matriz A é simétrica, real e constante, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o potencial U é real e constante, $U \in \mathbb{R}$, e $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Note que sobre a matriz A , aqui constante, não foi imposta uma condição de coersiva.

Definição 1.2. *Seja $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Uma função $v : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é dita solução fraca da equação (1.2) se $v \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ e satisfaz*

$$\begin{aligned} i \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x) \overline{\varphi}(0, x) dx - i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v(t, x) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t}(t, x) dx dt \\ - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v(t, x) \langle A, D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U v(t, x) \overline{\varphi}(t, x) dx dt = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

para todo $\varphi \in C_c^1((-\infty, T)) \otimes C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Aqui $\langle P, Q \rangle := \operatorname{tr}(P \overline{Q}^t)$, $P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

A importância do estudo da equação acima será evidenciada na demonstração do Teorema de Homogeneização (Teorema 3.1), onde serão utilizados apenas dois aspectos desta, a conservação da energia e a unicidade de solução. Não será do nosso interesse estudar a existência de solução.

Primeiramente, estudaremos a conservação da energia e, em seguida, a unicidade de solução. Esta última será obtida a partir da primeira. O seguinte resultado pode ser obtido usando, por exemplo, a transformada de Fourier.

Lema 1.1. *Seja $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Se a função $v \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ é solução fraca da equação (1.2), então $v \in H^1((0, T); L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Uma consequência imediata deste lema é a continuidade da solução como uma função sobre $[0, T]$ (a menos de um conjunto de medida nula) com valores em $L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, $v \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}^n))$, veja Evans [21, Pag. 302].

Teorema 1.1. *Se a função $v \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ é uma solução fraca da equação (1.2) com dado inicial $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então v satisfaz*

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{q.t.p. } t \in [0, T].$$

Demonstração. Para cada $\delta > 0$, definimos as funções

$$v_0^\delta(x) := \eta_\delta * v_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\delta(y) v_0(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

e

$$v^\delta(t, x) := \eta_\delta * v(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\delta(y) v(t, x - y) dy, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n,$$

convoluções das funções $v_0(x)$ e $v(t, x)$ com a função *mollifier* $\eta_\delta(y) = \delta^{-n} \eta(y/\delta)$, $\delta > 0$, onde $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) dz = 1$. Colocando a função teste $x \mapsto \varphi(x + y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ na equação (1.3) e fazendo mudança de variável tem-se

$$\begin{aligned} & i \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x - y) \overline{\varphi}(0, x) dx - i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v(t, x - y) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t}(t, x) dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle Av(t, x - y), D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U v(t, x - y) \overline{\varphi}(t, x) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Daí, multiplicando pela função mollifier η_δ , $\delta > 0$, e integrando sobre $\mathbb{R}^n$ em relação à variável y , encontra-se

$$\begin{aligned} & i \int_{\mathbb{R}^n} v_0^\delta(x) \overline{\varphi}(0, x) dx - i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v^\delta(t, x) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t}(t, x) dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle Av^\delta(t, x), D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U v^\delta(t, x) \overline{\varphi}(t, x) dx dt = 0, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C_c^1((-\infty, T)) \otimes C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Note que v^δ é mensurável nas duas variáveis. Daí, é possível encontrar

$$\begin{aligned} & i \int_{\mathbb{R}^n} v_0^\delta(x) \overline{v_0^\delta(x)} dx - i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v^\delta(t, x) \frac{\partial \overline{v^\delta}}{\partial t}(t, x) dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle Av^\delta(t, x), D^2 v^\delta(t, x) \rangle dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U v^\delta(t, x) \overline{v^\delta}(t, x) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Daí, considerando a parte imaginária, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_0^\delta(x) \overline{v_0^\delta(x)} dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v^\delta(t, x) \frac{\partial \overline{v^\delta}}{\partial t}(t, x) dx dt = 0,$$

consequentemente, conclui-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v^\delta(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |v_0^\delta(x)|^2 dx, \quad \forall \delta > 0,$$

q.t.p. $t \in [0, T]$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$, conclui-se a prova do teorema. $\square$

Corolário 1.1. *Se $v \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ é uma solução da equação (1.2), com dado inicial $v^0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então v é a única solução.*

Demonstração. Segue do Teorema 1.1. $\square$

1.2 Configuração Estocástica

Nesta seção, serão tratados conceitos tais como os processos estocásticos estacionários, as deformações estocásticas e o teorema ergódico. Detalharemos os resultados que são de nosso interesse e que podem ser achados em Blanc, Le Bris & Lions [10, 11], Jikov, Kozlov & Oleinik [32, Chapter 7] e Andrade, Neves & Silva [6].

A letra $\mathcal{I}$ denotará o grupo $\mathbb{Z}^n$ ou $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.3. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Diz-se que uma família de aplicações $\{\tau(x) : \Omega \rightarrow \Omega ; x \in \mathcal{I}\}$ é um sistema dinâmico n -dimensional se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (Propriedade de grupo) $\tau(0)$ é a aplicação identidade sobre Ω e

$$\tau(x + y) = \tau(x) \circ \tau(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{I},$$

- (Invariância) Para cada $x \in \mathcal{I}$, a aplicação $\tau(x)$ é uma transformação que preserva medida, ou seja, para todo conjunto $\mathcal{F}$ -mensurável E tem-se

$$\tau(x)E \text{ é } \mathcal{F}\text{-mensurável e } \mathbb{P}(\tau(x)E) = \mathbb{P}(E).$$

Aqui $\mathcal{L}^n$ denotará a sigma álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.4. *Diz-se que uma função $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{F}$ -mensurável $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é estacionária se*

$$\forall x \in \mathcal{I}, \quad f(y + x, \omega) = f(y, \tau(x)\omega), \quad \text{q.t.p. } (y, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega. \quad (1.4)$$

Observação 1.1. *Se f é uma função estacionária, então para qualquer conjunto finito $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, a distribuição do vetor aleatório*

$$f(x_1 + h, \cdot), f(x_2 + h, \cdot), \dots, f(x_k + h, \cdot),$$

não depende de $h \in \mathcal{I}$, ou seja, f é um processo estocástico estacionário. A recíproca é verdadeira acrescentando algumas hipóteses estocásticas naturais, veja Bourgeat, Mikelić & Wright [12, Pág. 21].

Note que o produto de duas funções estacionárias é também uma função estacionária.

Exemplo 1.1 (Toro de dimensão n). *Dados $\Omega = [0, 1)^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}^n \cap [0, 1)^n$ e $\mathbb{P} = m_{[0, 1)^n}$ (medida de Lebesgue restringida ao cubo unitário semi-aberto $[0, 1)^n$), $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade e a família $\{\tau(x)\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ definida por $\tau(x)\omega := x + \omega - \llbracket x + \omega \rrbracket$, $(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$, é um sistema dinâmico contínuo, onde $\llbracket \cdot \rrbracket$ denota a função máximo inteiro. De fato, a propriedade de grupo segue das propriedades da função máximo inteiro e a invariância pela invariância por translações da medida de Lebesgue. Além disso, dada a função $[0, 1)^n$ -periódica $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, isto é, φ uma função $\mathcal{L}^n$ -mensurável tal que*

$$\varphi(x + e_k) = \varphi(x), \quad \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},$$

onde $e_1, e_2, \dots, e_n$ são as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^n$, a função $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x, \omega) := \varphi(\tau(x)\omega)$ é uma função estacionária.

Exemplo 1.2. Seja $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = 2^{\{0,1\}}$ e

$$\mathbb{P}(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset, \\ 1/2 & \text{se } E = \{0\} \text{ ou } \{1\}, \\ 1 & \text{se } E = \Omega. \end{cases}$$

Claramente, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade e a família $\{\tau(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ definida por

$$\tau(k)\omega := \begin{cases} 0 & \text{se } |k + \omega| \text{ é par,} \\ 1 & \text{se } |k + \omega| \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

é um sistema dinâmico. Denotaremos $\tau_k\omega \equiv \tau(k)\omega$. Queremos explicitar uma função estacionária, para isso consideremos as funções $\varphi_0, \varphi_1 \in C_c(0, 1)$. A função $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, \omega) := \varphi_{\tau_{\lfloor x \rfloor}\omega}(x - \lfloor x \rfloor), \quad (x, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a função máximo inteiro, possui as seguintes propriedades:

- para cada $x \in \mathbb{R}$ fixo, $\omega \mapsto f(x, \omega)$ é $\mathcal{F}$ -mensurável,
- para cada $\omega \in \Omega$ fixo, $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, \omega)$ é contínua,
- para todo $k \in \mathbb{Z}$, $f(x + k, \omega) = f(x, \tau(k)\omega)$, $\forall (x, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$.

Pelos dois primeiros itens, f é uma função Carathéodory (contínua com respeito à variável espacial x e $\mathcal{F}$ -mensurável com respeito à variável probabilística ω), o qual implica que f é $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{F}$ -mensurável. Portanto, considerando também o terceiro item, concluímos que f é uma função estacionária.

Definição 1.5. Um conjunto $E \in \mathcal{F}$ tal que $\tau(x)E = E$, para todo $x \in \mathcal{I}$, é chamada τ -invariante. Ainda, uma função $\mathcal{F}$ -mensurável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é chamada τ -invariante se

$$f(\tau(x)\omega) = f(\omega), \quad \text{q.t.p. } \omega \in \Omega, \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

No Exemplo 1.2, note que $\emptyset$ e Ω são os únicos conjuntos τ -invariantes. Pois, para $\{0\}$, tem-se $\tau_1\{0\} = \{1\} \neq \{0\}$. Analogamente para $\{1\}$.

Proposição 1.1. Seja $\{\tau(x) : \Omega \rightarrow \Omega ; x \in \mathcal{I}\}$ um sistema dinâmico n -dimensional (discreto ou contínuo). Então, são equivalentes:

- (i) Se E é τ -invariante, então $\mathbb{P}(E) = 0$ ou $\mathbb{P}(E) = 1$,
- (ii) Se f é τ -invariante, então f é uma constante para q.t.p. $\omega \in \Omega$.

Demonstração. Veja Shiryaev [42]. □

Definição 1.6. Diz-se que um sistema dinâmico n -dimensional $\{\tau(x) : \Omega \rightarrow \Omega ; x \in \mathcal{I}\}$ é ergódico se satisfaz alguma das condições da Proposição 1.1.

O sistema dinâmico definido no Exemplo 1.2 é ergódico, pois os conjuntos τ -invariantes ($\emptyset$ e Ω) tem probabilidade 0 ou 1, ou seja, a condição (i) da Proposição 1.1 é satisfeita.

Daqui em diante, só consideraremos sistemas dinâmicos ergódicos.

Em Blanc, Le Bris & Lions [10, 11] foi introduzido o conceito de difeomorfismo aleatório estacionário, o qual, neste trabalho, será denominado deformação estocástica.

Definição 1.7. Diz-se que uma aplicação $\Phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma deformação estocástica se satisfaz

- para q.t.p. $\omega \in \Omega$, $\Phi(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo,
- $\inf_{(y, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega} \text{ess} \det[\nabla_y \Phi(y, \omega)] \geq \nu > 0$,
- $\sup_{(y, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega} \text{ess} |\nabla_y \Phi(y, \omega)| \leq M < \infty$,
- $(y, \omega) \mapsto \nabla_y \Phi(y, \omega)$ é uma matriz estacionária.

Note que a deformação estocástica satisfaz as seguintes propriedades:

- $(y, \omega) \mapsto \det[\nabla_y \Phi(y, \omega)]$ é uma função estacionária,
- $(y, \omega) \mapsto [\nabla_y \Phi]^{-1}(y, \omega)$ é uma matriz estacionária,
- $\sup_{(y, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega} \text{ess} |[\nabla_y \Phi]^{-1}(y, \omega)| < \infty$.

De fato, no primeiro item, pela continuidade da função determinante, a função

$$(y, \omega) \mapsto \det[\nabla_y \Phi](y, \omega)$$

é $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{F}$ -mensurável e, evidentemente, satisfaz (1.4). Os dois últimos itens seguem da relação

$$[\nabla_y \Phi]^{-1} = \frac{1}{\det[\nabla_y \Phi]} \{\mathbf{cof}([\nabla_y \Phi])\}^t,$$

onde $\mathbf{cof}([\nabla_y \Phi])$ denota a matriz de cofactores de $[\nabla_y \Phi]$.

O próximo exemplo encontra-se em Jing [44, Remark 2.1].

Exemplo 1.3. Seja $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)$ um espaço de probabilidade e $X := \{X_k : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ uma família de variáveis de Bernoulli de parâmetro $1/2$ independentes e identicamente distribuídas, isto é,

- para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, a função X_k é $\mathcal{F}_0$ -mensurável e assume os valores 0 ou 1, com $\mathbb{P}_0(\{X_k = 0\}) = 1/2$ e $\mathbb{P}_0(\{X_k = 1\}) = 1/2$,
- a coleção de eventos $\{X_k \in B\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$, $B \subset \{0, 1\}$, é independente.

Seja $\Omega := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^n}$, $\mathcal{F}$ a σ -álgebra produto, isto é, a σ -álgebra gerada por conjuntos da seguinte forma: $\prod_{k \in \mathbb{Z}^n} E_k$, onde $E_k \subset \{0, 1\}$ é diferente de $\{0, 1\}$ para uma quantidade finita de índices k , chamado cilindro. Seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos cilindros, daí, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$. Por último, para qualquer $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) := \mathbb{P}_0(\{X \in A\})$.

Segue das hipóteses sobre X que, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ define um espaço de probabilidade e a família $\{\tau(k) : \Omega \rightarrow \Omega\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ definida por: dado $k \in \mathbb{Z}^n$, $(\tau(k)\omega)(\ell) := \omega(\ell + k)$, $\forall \ell \in \mathbb{Z}^n$, onde $\omega = (\omega(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$, é um sistema dinâmico ergódico.

Finalmente, o exemplo de deformação estocástica $\Phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Aqui $\mathbf{Y}$ denotará o conjunto $[0, 1]^n$. Considerem-se as funções $\Phi_0 : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$, $\Phi_0 = I_{\mathbf{Y}}$, e $\Phi_1 : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ que satisfaz

- $\Phi_1 - I_Y \neq 0$,
- $\Phi_1 - I_Y \in C_c^1(\mathring{Y})$, $\mathring{Y}$ denota o interior topológico de Y ,
- existe $M > 0$ tal que $\sup_{x \in Y} |\nabla \Phi_1(x)| \leq M$, e
- existe $\nu > 0$ tal que $\inf_{x \in Y} \det[\nabla \Phi(x)] \geq \nu$.

A aplicação Φ , definida por

$$\Phi(y, \omega) := \llbracket y \rrbracket + \Phi_{\omega(\llbracket y \rrbracket)}(y - \llbracket y \rrbracket),$$

é uma deformação estocástica.

Estamos, particularmente, interessados em estudar as propriedades das funções do tipo

$$(z, \omega) \mapsto f(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega),$$

onde f é uma função estacionária e Φ uma deformação estocástica, ambas com a mesma natureza estacionária. Na subseção seguinte, será visto que estas funções possuem a propriedade do valor médio, a qual é essencial para a análise assintótica discutida na introdução.

1.2.1 Teorema Ergódico

Em conexão com a noção de função estacionária e função estacionária composta com uma deformação estocástica, tem-se o conceito de valor médio.

Definição 1.8. Dizemos que uma função $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ possui valor médio se existe um número $M(f)$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = |A| M(f) \quad (1.5)$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $\mathcal{L}^n$ -mensurável (aqui $|A|$ denota a medida de Lebesgue de A). Também, se $A_t := \{x \in \mathbb{R}^n ; t^{-1}x \in A\}$, com $t > 0$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, $|A| \neq 0$, a convergência acima é equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^n |A|} \int_{A_t} f(x) dx = M(f). \quad (1.6)$$

Observação 1.2. Se a função $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, possui valor médio, tem-se

$$f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M(f) \text{ em } L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n),$$

isto é devido ao fato de que as combinações lineares das funções características de conjuntos $\mathcal{L}^n$ -mensuráveis limitados são densas em $L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n)$, $q \geq 1$, onde $1/p + 1/q = 1$. Note que no caso $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{*} M(f) \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1.7)$$

Para maiores detalhes, veja Jikov, Kozlov & Oleinik [32, Chapter 7].

A propriedade do valor médio encontra-se presente nas funções periódicas e é generalizada para o contexto estocástico.

No que se segue, descreveremos algumas propriedades que serão essenciais para a análise assintótica descrita na introdução. Antes, uma consideração. Daqui em diante, Y denotará o cubo unitário semi-aberto em $\mathbb{R}^n$, isto é, $Y = [0, 1)^n$, também chamado *célula unitária*.

Os seguintes resultados encontram-se em Blanc, Le Bris & Lions [10, 11] e Andrade, Neves & Silva [6].

Teorema 1.2. *Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^1(\Omega))$ ou $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n; L^1(\Omega))$ uma função estacionária. Então, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, a função $f(\cdot, \tilde{\omega})$ possui um valor médio no sentido (1.5). Além disso, o valor médio $M(f(\cdot, \tilde{\omega}))$ satisfaz*

$$M(f(\cdot, \tilde{\omega})) = \int_Y \int_\Omega f(y, \omega) d\mathbb{P} dy, \quad \text{q.t.p. } \tilde{\omega} \in \Omega.$$

O teorema deixa claro que as funções estacionárias possuem a propriedade do valor médio na variável espacial para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$. Mas, como já foi adiantado, há uma classe maior de funções que possuem esta propriedade. Agora, será visto também que esta é uma propriedade inerente às funções estacionárias compostas com uma deformação estocástica.

Lema 1.2. *Seja Φ uma deformação estocástica. Então*

$$\varepsilon \Phi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S(\cdot) \text{ em } L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad \text{q.t.p. } \tilde{\omega} \in \Omega,$$

onde $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definido por

$$S(x) = \left(\int_Y \int_\Omega \nabla_y \Phi(y, \omega) d\mathbb{P} dy \right) x.$$

Demonstração. Veja Blanc, Le Bris & Lions [10, Pág. 720] ou Andrade, Neves & Silva [6]. $\square$

Teorema 1.3. *Seja Φ uma deformação estocástica e uma função $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^1(\Omega))$ ou $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n; L^1(\Omega))$ estacionária. Então, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, a função $f(\Phi^{-1}(\cdot, \tilde{\omega}), \tilde{\omega})$ possui um valor médio no sentido (1.5). Além disso, o valor médio $M(f(\Phi^{-1}(\cdot, \tilde{\omega}), \tilde{\omega}))$ satisfaz*

$$M(f(\Phi^{-1}(\cdot, \tilde{\omega}), \tilde{\omega})) = c_\Phi^{-1} \int_\Omega \int_{\Phi(Y, \omega)} f(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P}, \quad \text{q.t.p. } \tilde{\omega} \in \Omega,$$

onde

$$c_\Phi := \det \left(\int_Y \int_\Omega \nabla_y \Phi(y, \omega) d\mathbb{P} dy \right).$$

Demonstração. Para uma prova, veja Blanc, Le Bris & Lions [10, Pág. 720] ou Andrade, Neves & Silva [6]. $\square$

1.2.2 Cálculo para funções estacionárias

Definição 1.9. Se $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função estacionária, para cada $\omega \in \Omega$ fixado, a função $y \in \mathbb{R}^n \mapsto f(y, \omega)$ será chamada realização de f .

Segundo o que foi visto no Teorema 1.2, quase toda realização tem a propriedade do valor médio. Por outro lado, note que se f é uma função estacionária, então

$$y \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\Omega} f(y, \omega) d\mathbb{P}$$

é $\mathbb{Y}$ -periódica.

É importante dizer que os teoremas desta subseção serão utilizados unicamente na caracterização do limite duas escalas estocástica, a qual será estudada na próxima seção.

Algumas propriedades das funções estacionárias podem ser inteiramente descritas analisando unicamente suas realizações. Em particular, o teorema seguinte faz uma caracterização da derivada fraca de uma função estacionária. As técnicas usadas na prova do teorema foram inspiradas nas referências Cioranescu & Dondato [17] e Blanc, Le Bris & Lions [11].

Teorema 1.4. Sejam $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^p(\Omega))$, $p > 1$, funções estacionárias e $i \in \{1, \dots, n\}$. Então

$$\int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} u(y, \omega) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(y, \omega) d\mathbb{P} dy = - \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} v(y, \omega) \zeta(y, \omega) d\mathbb{P} dy, \quad (1.8)$$

para toda $\zeta \in C^1(\mathbb{R}^n; L^q(\Omega))$ função estacionária, $1/p + 1/q = 1$, se, e somente se

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} v(y, \omega) \varphi(y) dy, \quad (1.9)$$

para todo $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, q.t.p. $\omega \in \Omega$.

A prova da primeira implicação (suficiência) está inspirada em um procedimento frequentemente utilizado no contexto periódico (ver Cioranescu & Dondato [17, Pag. 83]). A prova da implicação contrária está inspirada na prova da Proposição 3.1 em Blanc, Le Bris & Lions [11, Pag. 46], a qual se suporta na existência do valor médio para quase toda realização de funções estacionárias, garantida pelo Teorema 1.2.

Demonstração. Suponhamos que u e v satisfazem (1.8). Logo, é possível obter a seguinte afirmação:

Afirmção: Para $\gamma \in \mathbb{R}^n$ existe um conjunto $\mathcal{F}$ -mensurável N_γ tal que $\mathbb{P}(N_\gamma) = 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} v(y, \omega) \varphi(y) dy, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathring{\mathbb{Y}} + \gamma),$$

para todo $\omega \in \Omega \setminus N_\gamma$, onde $\mathring{\mathbb{Y}}$ denota o interior topológico da célula unitária, e $\mathring{\mathbb{Y}} + \gamma$ a translação de $\mathring{\mathbb{Y}}$ na direção γ .

A prova desta afirmação começa inspirada em um raciocínio bem utilizado para encontrar as extensões periódicas de funções definidas em um cubo (ver Cioranescu & Donato [17, Pág. 56]). Consideremos as funções $\varphi \in C_c^1(\mathring{Y} + \gamma)$, $\rho \in L^q(\Omega)$ e definamos a função $\zeta_\gamma : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\zeta_\gamma(y, \omega) := \varphi(y - \llbracket y - \gamma \rrbracket) \rho(\tau(\llbracket y - \gamma \rrbracket)\omega), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \omega \in \Omega,$$

onde $\llbracket \cdot \rrbracket$ denota a função máximo inteiro. Esta função é estacionária (discreta). De fato, é claro que ζ_γ obedece o seguinte:

- para cada $\omega \in \Omega$ fixo, $y \in \mathbb{R}^n \mapsto \zeta_\gamma(y, \omega)$ é contínua,
- para cada $y \in \mathbb{R}^n$ fixo, $\omega \in \Omega \mapsto \zeta_\gamma(y, \omega)$ é $\mathcal{F}$ -mensurável, e
- para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, $\zeta_\gamma(y + k, \omega) = \zeta_\gamma(y, \tau(k)\omega)$, $\forall (y, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$.

Daí, pelos dois primeiros itens, a função ζ_γ é do tipo Caratheodory, por conseguinte $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}$ -mensurável. Assim, adicionando o terceiro item, concluímos que ζ_γ é uma função estacionária discreta. Note que $\zeta_\gamma \in C^1(\mathbb{R}^n; L^q(\Omega))$ e, como $\llbracket y - \gamma \rrbracket = 0$ para todo $y \in \mathring{Y} + \gamma$,

$$\zeta_\gamma(y, \omega) = \varphi(y) \rho(\omega), \quad (y, \omega) \in (\mathring{Y} + \gamma) \times \Omega. \quad (1.10)$$

Suponha-se que u e v satisfazem (1.8). Logo, em particular, temos

$$\int_Y \int_\Omega u(y, \omega) \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial y_i}(y, \omega) d\mathbb{P} dy = - \int_Y \int_\Omega v(y, \omega) \zeta_\gamma(y, \omega) d\mathbb{P} dy. \quad (1.11)$$

Como o produto de duas funções estacionárias é uma função estacionária, temos que as funções

$$y \mapsto \int_\Omega u(y, \omega) \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial y_i}(y, \omega) d\mathbb{P} \quad \text{e} \quad y \mapsto \int_\Omega v(y, \omega) \zeta_\gamma(y, \omega) d\mathbb{P}$$

são Y -periódicas. Logo, como a média é invariante por translações, por (1.11), segue

$$\int_{\mathring{Y} + \gamma} \int_\Omega u(y, \omega) \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial y_i}(y, \omega) d\mathbb{P} dy = - \int_{\mathring{Y} + \gamma} \int_\Omega v(y, \omega) \zeta_\gamma(y, \omega) d\mathbb{P} dy.$$

Consequentemente, por (1.10),

$$\int_{\mathring{Y} + \gamma} \int_\Omega u(y, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) \rho(\omega) d\mathbb{P} dy = - \int_{\mathring{Y} + \gamma} \int_\Omega v(y, \omega) \varphi(y) \rho(\omega) d\mathbb{P} dy.$$

Daí, pelo Teorema de Fubini, conclui-se que

$$\int_\Omega \left[\int_{\mathring{Y} + \gamma} u(y, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) dy + \int_{\mathring{Y} + \gamma} v(y, \omega) \varphi(y) dy \right] \rho(\omega) d\mathbb{P} = 0,$$

para todo $\varphi \in C_c^1(\mathring{Y} + \gamma)$ e $\rho \in L^p(\Omega)$. Portanto, para cada φ , existe um conjunto $N_\varphi \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(N_\varphi) = 0$ e

$$\int_{\mathring{Y} + \gamma} u(y, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) dy = - \int_{\mathring{Y} + \gamma} v(y, \omega) \varphi(y) dy, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N_\varphi.$$

Precisamos tirar a dependência de N_φ na função φ . Para isso, observa-se que o espaço $H_0^1(\mathring{Y} + \gamma)$ é separável e que é possível escolher um conjunto denso e enumerável no subespaço $C_c^1(\mathring{Y} + \gamma)$, i.e., existe $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ subconjunto de $C_c^1(\mathring{Y} + \gamma)$ denso em $H_0^1(\mathring{Y} + \gamma)$. Assim, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, existe $N_\ell \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(N_\ell) = 0$ e

$$\int_{\mathring{Y}+\gamma} u(y, \omega) \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial y_i}(y) dy = - \int_{\mathring{Y}+\gamma} v(y, \omega) \varphi_\ell(y) dy, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N_\ell.$$

Definindo $N := \cup_{\ell \in \mathbb{N}} N_\ell$, temos $\mathbb{P}(N) = 0$ e

$$\int_{\mathring{Y}+\gamma} u(y, \omega) \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial y_i}(y) dy = - \int_{\mathring{Y}+\gamma} v(y, \omega) \varphi_\ell(y) dy, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N.$$

Daí, considerando uma subsequência de $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ convergindo à função $\varphi \in C_c^1(\mathring{Y} + \gamma)$, na norma do espaço $H_0^1(\mathring{Y} + \gamma)$, tem-se

$$\int_{\mathring{Y}+\gamma} u(y, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) dy = - \int_{\mathring{Y}+\gamma} v(y, \omega) \varphi(y) dy,$$

para todo $\omega \in \Omega \setminus N$. Isto finaliza a prova da afirmação.

Para o caso geral, consideramos $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Logo, como $\{\mathring{Y} + \gamma; \gamma \in \mathbb{R}^n\}$ é um recobrimento de abertos de $\text{supp } \varphi$, existe $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\text{supp } \varphi \subset \bigcup_{j=1}^m (\mathring{Y} + \gamma_j).$$

Pelo Teorema da Partição da Unidade, existe $\{\theta_j\}_{j=1}^m$ em $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

1. $0 \leq \theta_j \leq 1$, $j = 1, \dots, m$,
2. $\sum_{j=1}^m \theta_j(y) = 1$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, e
3. $\text{supp } \theta_j \subset \mathring{Y} + \gamma_j$, para $j = 1, \dots, m$.

Pela Afirmação e o item 3, existem conjuntos $N_{\gamma_1}, \dots, N_{\gamma_m} \in \mathcal{F}$ tais que $\mathbb{P}(N_{\gamma_j}) = 0$, $j \in \{1, \dots, m\}$, e

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, \omega) \frac{\partial(\varphi \theta_j)}{\partial y_i} dy = - \int_{\mathbb{R}^n} v(\cdot, \omega) (\varphi \theta_j) dy, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N_{\gamma_j}, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Definindo $N := \cup_{j=1}^m N_{\gamma_j}$ (conjunto dependendo de φ) temos $\mathbb{P}(N) = 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, \omega) \frac{\partial(\varphi \theta_j)}{\partial y_i} dy = - \int_{\mathbb{R}^n} v(\cdot, \omega) (\varphi \theta_j) dy, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Fazendo o somatório de 1 até m , tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, \omega) \frac{\partial(\varphi\theta_j)}{\partial y_i} dy &= - \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} v(\cdot, \omega) (\varphi\theta_j) dy, \\ \int_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, \omega) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_{j=1}^m \varphi\theta_j \right) dy &= - \int_{\mathbb{R}^n} v(\cdot, \omega) \left(\sum_{j=1}^m \varphi\theta_j \right) dy, \end{aligned}$$

para todo $\omega \in \Omega \setminus N$, consequentemente, pelo item 2,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = - \int_{\mathbb{R}^n} v(\cdot, \omega) \varphi dy, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N.$$

Portanto, conclui-se que, para $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, existe $N \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(N) = 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} v(y, \omega) \varphi(y) dy,$$

para todo $\omega \in \Omega \setminus N$. Novamente, para tirar a dependência de φ realizamos um processo similar ao feito na Afirmação anterior. Dessa forma a demonstração da primeira implicação é concluída.

Antes de fazer a prova da implicação contrária, tomemos algumas considerações. Para $\ell \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto $Q_\ell := (-\ell, \ell)^n$ e a função $\chi_\ell \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo $\chi_\ell \equiv 1$ em Q_ℓ , $\chi_\ell \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus Q_{\ell+1}$ e $\|\nabla \chi_\ell\|_\infty \leq 2$.

Suponhamos agora que (1.9) é satisfeito. Fixando $\zeta \in C^1(\mathbb{R}^n; L^q(\Omega))$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, consideramos a função teste $\zeta(\cdot, \omega)\chi_\ell$, para $\ell \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \Omega$ (fixado convenientemente), encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, \omega) \frac{\partial}{\partial y_i} (\zeta(\cdot, \omega)\chi_\ell) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} v(\cdot, \omega) (\zeta(\cdot, \omega)\chi_\ell) dy.$$

Logo, pela definição da função χ_ℓ ,

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\ell+1}} u(\cdot, \omega) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(\cdot, \omega) \chi_\ell \right) dy + \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_\ell} u(\cdot, \omega) \left(\zeta(\cdot, \omega) \frac{\partial \chi_\ell}{\partial y_i} \right) dy = \\ - \int_{Q_{\ell+1}} v(\cdot, \omega) (\zeta(\cdot, \omega)\chi_\ell) dy, \end{aligned}$$

novamente, pela definição de χ_ℓ , é claro que

$$\begin{aligned} \int_{Q_\ell} u(\cdot, \omega) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(\cdot, \omega) dy + \int_{Q_\ell} v(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega) dy = \\ - \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_\ell} u(\cdot, \omega) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(\cdot, \omega) \chi_\ell dy - \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_\ell} u(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega) \frac{\partial \chi_\ell}{\partial y_i} dy \\ - \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_\ell} v(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega) \chi_\ell dy. \quad (1.12) \end{aligned}$$

Nota-se que, para a segunda integral do lado direito da igualdade em (1.12), é possível encontrar

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|Q_{\ell}|} \left| \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_{\ell}} u(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega) \frac{\partial \chi_{\ell}}{\partial y_i} dy \right| d\mathbb{P} = 0, \quad (1.13)$$

isso como uma consequência da desigualdade

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{|Q_{\ell}|} \left| \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_{\ell}} u(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega) \frac{\partial \chi_{\ell}}{\partial y_i} dy \right| d\mathbb{P} \\ & \leq \frac{1}{|Q_{\ell}|} \int_{\Omega} \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_{\ell}} \left| u(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega) \frac{\partial \chi_{\ell}}{\partial y_i} \right| dy d\mathbb{P} \\ & \leq \frac{1}{|Q_{\ell}|} \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_{\ell}} \int_{\Omega} |u(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega)| \|\nabla \chi_{\ell}\|_{\infty} d\mathbb{P} dy \\ & \leq \frac{2}{|Q_{\ell}|} \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_{\ell}} \int_{\Omega} |u(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega)| d\mathbb{P} dy \\ & = \frac{2 \{ [2(\ell+1)]^n - (2\ell)^n \}}{(2\ell)^n} \int_{\Upsilon} \int_{\Omega} |u(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega)| d\mathbb{P} dy \\ & = 2 \left[\left(1 + \frac{1}{\ell} \right)^n - 1 \right] \int_{\Upsilon} \int_{\Omega} |u(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega)| d\mathbb{P} dy. \end{aligned}$$

De maneira completamente análoga, podem-se encontrar os resultados análogos para a primeira e a terceira integral do lado direito da igualdade em (1.12), ou seja,

$$\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|Q_{\ell}|} \left| \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_{\ell}} u(\cdot, \omega) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(\cdot, \omega) \chi_{\ell} dy \right| d\mathbb{P} = 0 \quad (1.14)$$

e

$$\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{|Q_{\ell}|} \left| \int_{Q_{\ell+1} \setminus Q_{\ell}} v(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega) \chi_{\ell} dy \right| d\mathbb{P} = 0. \quad (1.15)$$

Daí, pelas equações (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15), é possível concluir

$$\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \frac{1}{|Q_{\ell}|} \int_{Q_{\ell}} u(\cdot, \omega) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(\cdot, \omega) dy + \frac{1}{|Q_{\ell}|} \int_{Q_{\ell}} v(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega) dy \right| d\mathbb{P} = 0.$$

Mas, pelo Lema de Fatou,

$$\int_{\Omega} \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{|Q_{\ell}|} \int_{Q_{\ell}} u(\cdot, \omega) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(\cdot, \omega) dy + \frac{1}{|Q_{\ell}|} \int_{Q_{\ell}} v(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega) dy \right| d\mathbb{P} = 0,$$

daí, existe um conjunto de medida total $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$ tal que

$$\liminf_{\ell \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{|Q_{\ell}|} \int_{Q_{\ell}} u(\cdot, \omega) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(\cdot, \omega) dy + \frac{1}{|Q_{\ell}|} \int_{Q_{\ell}} v(\cdot, \omega) \zeta(\cdot, \omega) dy \right| = 0,$$

para todo $\omega \in \tilde{\Omega}$. Daí, por (1.6) e o Teorema 1.2, temos

$$\int_{\Upsilon} \int_{\Omega} u(y, \omega) \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}(y, \omega) d\mathbb{P} dy + \int_{\Upsilon} \int_{\Omega} v(y, \omega) \zeta(y, \omega) d\mathbb{P} dy = 0.$$

Isto finaliza a prova. □

O Teorema seguinte faz uma caracterização das derivadas fracas das funções estacionárias compostas com a deformação estocástica.

Teorema 1.5. *Sejam $u, v \in [L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^p(\Omega))]^n$, $p > 1$, funções estacionárias e $k \in \{1, \dots, n\}$. Então*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} u(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \frac{\partial(\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega))}{\partial z_k} dz d\mathbb{P} \\ = - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} v(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

para todo $\zeta \in C^1(\mathbb{R}^n; L^q(\Omega))$ função estacionária, $1/p + 1/q = 1$, se, e somente se,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(z) dz = - \int_{\mathbb{R}^n} v(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(z) dz,$$

para todo $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, q.t.p. $\omega \in \Omega$.

Demonstração. Depois de fazer a mudança de variável $y = \Phi^{-1}(z, \omega)$, $\omega \in \Omega$, a prova continua seguindo bem de perto o raciocínio utilizado na prova do teorema anterior. □

1.3 Convergência Duas Escalas Estocástica

O conteúdo desta seção generaliza o conceito de convergência duas escalas estudado em Allaire [1] e Ngutseng [36]. Aqui, particularmente, a construção é feita tomando como base o Teorema Ergódico e a propriedade do valor médio para funções estacionárias compostas com a deformação estocástica (Teorema 1.3).

Em Allaire [1], foi visto que um dos elementos fundamentais no desenvolvimento do conceito da convergência duas escalas (periódico) é a determinação de um espaço de funções teste. Tal espaço precisa conter um subconjunto enumerável e denso no espaço onde se espera que estejam os limites duas escalas. Particularmente, no ambiente estocástico exigiremos que todas as funções teste satisfaçam a convergência (1.7) simultaneamente, isto é, será exigida a existência de um conjunto de medida total $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$ tal que a convergência (1.7) aconteça, simultaneamente, para toda função teste e todo $\omega \in \tilde{\Omega}$. O nosso ponto de partida será estabelecer o espaço das funções teste e para esse fim vejamos a seguinte proposição.

Proposição 1.2. *Existe um conjunto de funções estacionárias suaves (diferenciabilidade na variável espacial) $\mathcal{S} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ denso em $L^2(Y \times \Omega)$.*

Demonstração. Definamos

$$\mathcal{S} := \{(y, \omega) \mapsto \varphi(y - \llbracket y \rrbracket) \rho(\tau(\llbracket y \rrbracket) \omega) ; \varphi \in C_c^\infty(Y) \text{ e } \rho \in L^\infty(\Omega)\}.$$

Como já foi visto na prova do Teorema 1.4, os elementos de $\mathcal{S}$ são funções estacionárias e, claramente, essencialmente limitados em $\mathbb{R}^n \times \Omega$. Agora, provaremos que $\mathcal{S}$ é denso em

$L^2(\mathbf{Y} \times \Omega)$. Antes, note que $C_c^\infty(\mathbf{Y})$ e $L^\infty(\Omega)$ são densos em $L^2(\mathbf{Y})$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Daí, se $f \in \mathcal{S}^\perp$,

$$\int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} f(y, \omega) \zeta(y, \omega) d\mathbb{P} dy = 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{S},$$

isto é,

$$\int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} f(y, \omega) \varphi(y) \rho(\omega) d\mathbb{P} dy = 0, \quad \forall (\varphi, \rho) \in C_c^\infty(\mathbf{Y}) \times L^\infty(\Omega).$$

Daí, é claro que $f(y, \omega) = 0$ para q.t.p. $(y, \omega) \in \mathbf{Y} \times \Omega$, consequentemente, $\mathcal{S}^\perp = \{0\}$. Portanto, $\mathcal{S}$ é denso em $L^2(\mathbf{Y} \times \Omega)$. $\square$

Observação 1.3. Note que, se $L^2(\Omega)$ é separável, existe um conjunto de funções estacionárias suaves $\mathcal{S} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ enumerável e denso em $L^2(\mathbf{Y} \times \Omega)$. De fato, considerando um conjunto $\mathcal{M} \subset C_c^\infty(\mathbf{Y})$ enumerável e denso em $L^2(\mathbf{Y})$, e um conjunto $\mathcal{N} \subset L^\infty(\Omega)$ enumerável e denso em $L^2(\Omega)$, definimos

$$\mathcal{S} := \{(y, \omega) \mapsto \varphi(y - \llbracket y \rrbracket) \rho(\tau(\llbracket y \rrbracket) \omega) ; \varphi \in \mathcal{M} \text{ e } \rho \in \mathcal{N}\},$$

o qual, evidentemente, é um conjunto de funções estacionárias suaves que é enumerável e denso em $L^2(\mathbf{Y} \times \Omega)$.

Evidentemente, devido à generalidade do espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, o espaço $L^2(\Omega)$ não precisa ser separável. Mas, se $L^2(\Omega)$ é separável, pela observação anterior, é garantido que $\mathcal{S}$ pode ser escolhido enumerável. Daqui em diante, $L^2(\Omega)$ será assumido separável. Portanto, escolhendo $\mathcal{S}$ enumerável, pelo Teorema 1.3, tem-se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx = c_\Phi^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} \varphi(x) \zeta\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega\right) dz d\mathbb{P} dx, \quad (1.16)$$

para todo $(\varphi, \zeta) \in L^1(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}$, q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, consequentemente,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx = c_\Phi^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} \left| \varphi\left(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega\right) \right|^2 dz d\mathbb{P} dx, \quad (1.17)$$

para todo $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}$, q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$. Além disso, pela densidade de $\mathcal{S}$ no espaço $L^2(\mathbf{Y} \times \Omega)$, tem-se que $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbf{Y} \times \Omega)$. Claramente, $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}$ (ou um subespaço conveniente dele) é o candidato para ser o espaço das funções teste.

Na introdução, vimos que será feita uma análise assintótica de uma equação de Schrödinger, de coeficientes sendo funções estacionárias compostas com uma deformação estocástica e apresentando uma oscilação muito alta. Consequentemente, é natural pensar em um tipo de convergência onde as funções teste sejam funções apresentando o mesmo comportamento. Daqui em diante, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ é aberto (não necessariamente limitado).

Definição 1.10. Dizemos que uma sequência $\{u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon > 0} \subset L^2(\mathcal{O})$, $\tilde{\omega} \in \Omega$, converge duas escalas estocástica se, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, existe uma função estacionária $u_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \\ = c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx, \end{aligned} \quad (1.18)$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{O}) \otimes \mathcal{S}$. As funções

$$(x, y, \omega) \mapsto u_{\tilde{\omega}}(x, y, \omega) \quad \text{e} \quad (x, z, \omega) \mapsto u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega)$$

serão chamadas (sem distinção) limite duas escalas estocástica da sequência $\{u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0}$. A convergência duas escalas estocástica será denotada por

$$u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} u_{\tilde{\omega}}.$$

Note que o limite duas escalas da sequência $\{u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0}$, $\tilde{\omega} \in \Omega$, gera uma família de funções estacionárias indexada por Ω (q.t.p.). Por outro lado, o limite duas escalas estocástico é único, isto é, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, a função estacionária $u_{\tilde{\omega}}$ é única. De fato, para $\tilde{\omega} \in \Omega$, se assumimos que $u_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$ e $v_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$ são tais que

$$u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} u_{\tilde{\omega}} \quad \text{e} \quad u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} v_{\tilde{\omega}},$$

então

$$\begin{aligned} c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \\ = c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{O}) \otimes \mathcal{S}$. Daí, fazendo mudança de variável e reorganizando as integrais, temos

$$\int_{\mathcal{O}} \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} (u_{\tilde{\omega}}(x, y, \omega) - v_{\tilde{\omega}}(x, y, \omega)) \varphi(x, y, \omega) \det[\nabla_y \Phi(y, \omega)] dx dy d\mathbb{P} = 0,$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{O}) \otimes \mathcal{S}$. É claro que o espaço $C_c^\infty(\mathcal{O}) \otimes \mathcal{S}$ é denso em $L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$, por isso

$$\int_{\mathcal{O}} \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} |u_{\tilde{\omega}}(x, y, \omega) - v_{\tilde{\omega}}(x, y, \omega)|^2 \det[\nabla_y \Phi(y, \omega)] dx dy d\mathbb{P} = 0,$$

ou seja, $u_{\tilde{\omega}}(x, y, \omega) = v_{\tilde{\omega}}(x, y, \omega)$ para q.t.p. $(x, y, \omega) \in \mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega$.

Exemplo 1.4. Seja $v \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega))$ uma função estacionária. Como o espaço das funções estacionárias é uma álgebra, $(y, \omega) \mapsto v(y, \omega) \zeta(y, \omega)$ é uma função estacionária para todo $\zeta \in \mathcal{S}$. Daí, pelo Teorema 1.3 e a enumerabilidade de $\mathcal{S}$, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} v\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \varphi(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \\ = c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} v(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx, \end{aligned}$$

para todo $(\varphi, \zeta) \in C_c^\infty(\mathcal{O}) \times \mathcal{S}$, ou seja, a sequência $v_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega}) := v\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)$, $\varepsilon > 0$, satisfaz

$$v_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} v.$$

Note que a função limite duas escalas estocástica dessa sequência $(y, \omega) \mapsto v(y, \omega)$ (ou $(z, \omega) \mapsto v(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)$) não depende de $\tilde{\omega}$. Esta observação diz que toda função estacionária gera uma sequência de funções convergindo duas escalas estocástica.

Teorema 1.6 (Teorema de Compacidade). *Seja $\{u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0} \subset L^2(\mathcal{O})$, $\tilde{\omega} \in \Omega$, uma sequência tal que*

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{\mathcal{O}} |u_\varepsilon(x, \tilde{\omega})|^2 dx < \infty, \quad q.t.p. \tilde{\omega} \in \Omega. \quad (1.19)$$

Então, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, existe uma subsequência $\{\varepsilon'\}$ (dependendo apenas de $\tilde{\omega}$) e uma função estacionária $u_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$ tais que

$$u_{\varepsilon'}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon' \rightarrow 0]{2-s} u_{\tilde{\omega}}.$$

Demonstração. É claro que existe um conjunto de medida total (contido em Ω) no qual as condições (1.17), (1.18) e (1.19) são satisfeitas simultaneamente.

Dado $\tilde{\omega} \in \Omega$, por (1.19), existe $c(\tilde{\omega}) > 0$ tal que

$$\|u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c(\tilde{\omega}), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Seja $\mathcal{E} \subset C_c^\infty(\mathcal{O})$ enumerável e denso em $L^2(\mathcal{O})$, daí, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}$ é denso e enumerável em $L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$. Para $\varphi \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{S}$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, encontramos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{O}} u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right| &\leq \|u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\|_{L^2(\mathcal{O})} \left[\int_{\mathcal{O}} \left| \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx \right]^{1/2} \\ &\leq c(\tilde{\omega}) \left[\int_{\mathcal{O}} \left| \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Logo, por (1.17),

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon>0} \left| \int_{\mathcal{O}} u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right| &\leq c(\tilde{\omega}) \left[\limsup_{\varepsilon>0} \int_{\mathcal{O}} \left| \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx \right]^{1/2} \\ &= c(\tilde{\omega}) \left[c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} \left| \varphi(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right|^2 dz d\mathbb{P} dx \right]^{1/2}. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Daí, é possível encontrar uma subsequência $\{\varepsilon'\}$ (dependendo de $\varphi \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{S}$) tal que

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon'}(x, \tilde{\omega}) \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon'}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx$$

existe. Por meio de um processo de diagonalização, como $\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}$ é enumerável, existe uma subsequência $\{\varepsilon''\}$ tal que o limite

$$\lim_{\varepsilon'' \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx$$

existe, para todo $\varphi \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{S}$. Note que a subsequência $\{\varepsilon''\}$ depende apenas de $\tilde{\omega}$. Agora, definimos o funcional

$$\ell(\varphi) := \lim_{\varepsilon'' \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx, \quad \varphi \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{S},$$

o qual, por (1.20), é limitado, pois

$$\begin{aligned}
|\ell(\varphi)| &\leq c(\tilde{\omega}) \left[c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} |\varphi(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega)|^2 dz d\mathbb{P} dx \right]^{1/2} \\
&= c(\tilde{\omega}) \left[c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} |\varphi(x, y, \omega)|^2 \det [\nabla_y \Phi(y, \omega)] d\mathbb{P} dy dx \right]^{1/2} \\
&\leq c(\tilde{\omega}, \Phi) \left[\int_{\mathcal{O}} \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} |\varphi(x, y, \omega)|^2 d\mathbb{P} dy dx \right]^{1/2},
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{S}$. Como $\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}$ é denso em $L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$, existe um único funcional limitado $\tilde{\ell} : L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\ell}(\varphi) = \ell(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{S}$.

Por outro lado, considerando $L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$ como o espaço de Hilbert equipado com o produto interno

$$\langle u, v \rangle := c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} u(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx,$$

pelo teorema de Riesz, podemos encontrar uma única função $u_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$ tal que

$$\tilde{\ell}(v) = c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx,$$

para todo $v \in L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\tilde{\ell}(\varphi) &= \lim_{\varepsilon'' \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \\
&= c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{S}$.

Afirmção: Para $(\varphi, \zeta) \in L^2(\mathcal{O}) \times \mathcal{S}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon'' \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \\
= c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx.
\end{aligned}$$

De fato, seja $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ tal que $\varphi_k \rightarrow \varphi$ em $L^2(\mathcal{O})$, quando $k \rightarrow \infty$. Como

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx - \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi_k(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right| \\
&\leq \|u_{\varepsilon''}(\cdot, \tilde{\omega})\|_{L^2(\mathcal{O})} \left[\int_{\mathcal{O}} |\varphi(x) - \varphi_k(x)|^2 \left| \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx \right]^{1/2} \\
&\leq c(\tilde{\omega}) \|\zeta(\cdot, \tilde{\omega})\|_{\infty} \left[\int_{\mathcal{O}} |\varphi(x) - \varphi_k(x)|^2 dx \right]^{1/2},
\end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon'' > 0} \left| \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx - \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi_k(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right| \\ \leq c(\tilde{\omega}) \|\zeta(\cdot, \tilde{\omega})\|_{\infty} \left[\int_{\mathcal{O}} |\varphi(x) - \varphi_k(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que os limites comutam, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon'' \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi_k(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon'' \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi_k(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, usando a convergência $\varphi_k \rightarrow \varphi$ em $L^2(\mathcal{O})$ no lado esquerdo da igualdade, e (1.21) no lado direito da igualdade, encontramos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon'' \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi_k(x) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando mais uma vez a convergência $\varphi_k \rightarrow \varphi$ em $L^2(\mathcal{O})$,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon'' \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon''}(x, \tilde{\omega}) \varphi(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon''}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \\ = c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx, \end{aligned}$$

o qual conclui a prova da afirmação e, consequentemente, a prova do teorema. $\square$

Em geral, a regularidade que apresentam os coeficientes da equação de Schrödinger, descrita na introdução, não é a mesma do que a regularidade das funções testes. Daí, é necessário “acrescentar o espaço das funções teste”, isto é, acrescentar o conjunto de funções para as quais a convergência (1.18) acontece. Nesse sentido, a seguinte definição.

Definição 1.11. Dizemos que uma sequência $\{u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon > 0} \subset L^2(\mathcal{O})$, $\tilde{\omega} \in \Omega$, converge duas escalas estocástica forte se, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, existe uma função $u_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathcal{O} \times Y \times \Omega)$ tal que

$$u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} u_{\tilde{\omega}}$$

e a sequência satisfaz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K |u_{\varepsilon}(x, \tilde{\omega})|^2 dx = c_{\Phi}^{-1} \int_K \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega)|^2 dz d\mathbb{P} dx,$$

para todo $K \subset \mathcal{O}$ compacto. A convergência duas escalas estocástica forte será denotada por

$$u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} u_{\tilde{\omega}}.$$

Exemplo 1.5. Seja $v \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega))$ uma função estacionária. Foi visto que a composição de uma função contínua com uma estacionária é também estacionária. Daí, pelo Teorema 1.3, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, tem-se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{K}} \left| v\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx = c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |v(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)|^2 dz d\mathbb{P} dx,$$

para todo $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ compacto. Daí, pelo Exemplo 1.4, a sequência $v_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega}) := v\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)$, $\varepsilon > 0$, satisfaz

$$v_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} v.$$

Note que a função limite duas escalas estocástica forte dessa sequência $(y, \omega) \mapsto v(y, \omega)$ (ou $(z, \omega) \mapsto v(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)$) não depende de $\tilde{\omega}$.

Teorema 1.7. Sejam $\{u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon > 0}$ e $\{v_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon > 0}$, $\tilde{\omega} \in \Omega$, sequências no espaço $L^2(\mathcal{O})$ tais que, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, existem funções estacionárias $u_{\tilde{\omega}}$ e $v_{\tilde{\omega}}$ no espaço $L^2(\mathcal{O} \times Y \times \Omega)$ satisfazendo

$$u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} u_{\tilde{\omega}} \quad \text{e} \quad v_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} v_{\tilde{\omega}}. \quad (1.22)$$

Então, se, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, $\{u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon > 0}$ é limitada em $L^2(\mathcal{O})$, isto é, existe $c(\tilde{\omega}) > 0$ tal que

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega})\|_{L^2(\mathcal{O})} < c(\tilde{\omega}),$$

obtem-se

$$u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega}) v_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} c_{\Phi}^{-1} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(\cdot, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(\cdot, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P}$$

em $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon}(x, \tilde{\omega}) v_{\varepsilon}(x, \tilde{\omega}) \xi(x) dx \\ = c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \xi(x) dz d\mathbb{P} dx, \end{aligned}$$

para todo $\xi \in C_c^{\infty}(\mathcal{O})$.

Demonstração. Note que é possível encontrar um conjunto de medida total tal que as convergências em (1.22) e a limitação da sequência $\{u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon > 0}$ sejam satisfeitas simultaneamente.

Dado $\tilde{\omega} \in \Omega$, seja $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^{\infty}(\mathcal{O}) \otimes \mathcal{S}$ uma sequência de funções convergindo para a função estacionária $v_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathcal{O} \times Y \times \Omega)$ na norma L^2 . Da igualdade

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \left| v_{\varepsilon}(x, \tilde{\omega}) - \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx &= \int_{\mathcal{K}} |v_{\varepsilon}(x, \tilde{\omega})|^2 dx \\ &\quad - 2 \int_{\mathcal{K}} v_{\varepsilon}(x, \tilde{\omega}) \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx + \int_{\mathcal{K}} \left| \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx, \end{aligned}$$

para todo $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ compacto, junto com a convergência duas escalas forte de $\{v_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0}$ e a convergência (1.17), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{K}} \left| v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) - \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx = \\ c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \left| v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) - \varphi_k(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right|^2 dz d\mathbb{P} dx, \end{aligned}$$

para todo $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ compacto. Daí, fazendo $k \rightarrow \infty$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{K}} \left| v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) - \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx = 0, \quad (1.23)$$

para todo $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ compacto.

Por outro lado, para $\xi \in C_c^\infty(\mathcal{O})$ e $\mathcal{K} := \text{supp } \xi$, tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) dx \right. \\ \left. - c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right| \\ \leq \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) dx - \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right| \\ + \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right. \\ \left. - c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right|, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) dx \right. \\ \left. - c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right| \\ \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) dx - \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right| \\ + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right. \\ \left. - c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right|, \end{aligned}$$

daí, como $u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} u_{\tilde{\omega}}$, temos

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) dx \right. \\ & \quad \left. - c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right| \\ & \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) dx - \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right| \\ & \quad + \left| c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi_k(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right. \\ & \quad \left. - c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right|. \end{aligned}$$

Analisando a sequência no limite do lado direito, como

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) dx - \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right| \\ & \leq \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \left[v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) - \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right] dx \\ & \leq \left[\int_{\mathcal{K}} |\xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega})|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{\mathcal{K}} \left| v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) - \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx \right]^{1/2} \\ & \leq \left[\sup_{x \in \mathcal{K}} |\xi(x)| \right] \left[\sup_{\varepsilon > 0} \|u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\|_{L^2(\mathcal{K})} \right] \left[\int_{\mathcal{K}} \left| v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) - \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

segue da limitação da função ξ e a limitação da sequência $\{u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon > 0}$ em $L^2(\mathcal{O})$ que

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) dx \right. \\ & \quad \left. - c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right| \\ & \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) dx - \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \right| \\ & \leq \left[\sup_{x \in \mathcal{K}} |\xi(x)| \right] \left[\sup_{\varepsilon > 0} \|u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\|_{L^2(\mathcal{K})} \right] \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\mathcal{K}} \left| v_\varepsilon(x, \tilde{\omega}) - \varphi_k\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right|^2 dx \right]^{1/2} \\ & \quad + \left| c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi_k(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right. \\ & \quad \left. - c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right|, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, por (1.23), fazendo $k \rightarrow \infty$ encontramos

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{K}} \xi(x) u_{\varepsilon}(x, \tilde{\omega}) v_{\varepsilon}(x, \tilde{\omega}) dx - c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{K}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \xi(x) u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx \right| = 0,$$

o qual finaliza a demonstração. $\square$

O Teorema 1.7 e o Exemplo 1.5 proporcionam o seguinte resultado.

Corolário 1.2. *Seja $\{u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon > 0} \subset L^2(\mathcal{O})$, $\tilde{\omega} \in \Omega$, tal que, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, existe $u_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathcal{O} \times Y \times \Omega)$ satisfazendo*

$$u_{\varepsilon}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} u_{\tilde{\omega}}.$$

Se $v \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega))$ é uma função estacionária, então, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon}(x, \tilde{\omega}) \varphi(x) v\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \\ = c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x) v(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dz d\mathbb{P} dx, \end{aligned} \quad (1.24)$$

para todo $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathcal{O})$.

Note que o corolário anterior não afirma que o limite (1.24) esteja acontecendo simultaneamente para todas as funções estacionárias no espaço $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega))$. O corolário diz que o limite (1.24) é válido apenas para uma função estacionária ou, na melhor das hipóteses, simultaneamente para uma quantidade enumerável de funções estacionárias. Isto é devido à exigência do conjunto de medida total envolvido na definição de convergência duas escalas estocástica e o conjunto de medida total associado a cada função estacionária no Teorema Ergódico.

Consideremos os espaços vetoriais de funções reais (ou complexas)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= \{(y, \omega) \mapsto w(y, \omega) ; w \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega)) \text{ função estacionária}\}, \\ \mathcal{H} &:= \{(y, \omega) \mapsto w(y, \omega) ; w \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega)) \text{ função estacionária}\}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

os quais são espaços de Hilbert com os produtos internos

$$\begin{aligned} \langle w, v \rangle_{\mathcal{L}} &:= \int_Y \int_{\Omega} w(y, \omega) \overline{v(y, \omega)} d\mathbb{P} dy, \\ \langle w, v \rangle_{\mathcal{H}} &:= \int_Y \int_{\Omega} \nabla_y w(y, \omega) \cdot \overline{\nabla_y v(y, \omega)} d\mathbb{P} dy + \int_Y \int_{\Omega} w(y, \omega) \overline{v(y, \omega)} d\mathbb{P} dy, \end{aligned}$$

respectivamente.

O seguinte teorema é útil para caracterizar o limite duas escalas estocástico. Como esta seção encontra-se no contexto das funções estacionárias reais, considera-se $\mathcal{H}$ no ambiente das funções reais.

Teorema 1.8. *Sejam $\{u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0}$ e $\{\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0}$, $\tilde{\omega} \in \Omega$, sequências em $L^2(\mathcal{O})$ e $[L^2(\mathcal{O})]^n$, respectivamente, limitadas para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$. Então, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, existem $\{\varepsilon'\}$ (dependendo apenas de $\tilde{\omega}$) e $u_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathcal{O}, \mathcal{H})$ tais que*

$$u_{\varepsilon'}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon' \rightarrow 0]{2-s} u_{\tilde{\omega}},$$

e

$$\varepsilon' \nabla u_{\varepsilon'}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon' \rightarrow 0]{2-s} [\nabla_y \Phi]^{-1} \nabla_y u_{\tilde{\omega}}.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema de Compacidade, Teorema 1.6, nas sequências $\{u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0}$ e $\{\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0}$, $\tilde{\omega} \in \Omega$, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, pode-se encontrar uma subsequência $\{\varepsilon'\}$, uma função $u_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)$ e um campo $V_{\tilde{\omega}} \in [L^2(\mathcal{O} \times \mathbf{Y} \times \Omega)]^n$, $V_{\tilde{\omega}} = (v_{\tilde{\omega}}^{(1)}, \dots, v_{\tilde{\omega}}^{(n)})$, tais que

$$u_{\varepsilon'}(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon' \rightarrow 0]{2-s} u_{\tilde{\omega}}, \quad (1.26)$$

e

$$\varepsilon' \frac{\partial u_{\varepsilon'}}{\partial x_k} \xrightarrow[\varepsilon' \rightarrow 0]{2-s} v_{\tilde{\omega}}^{(k)}, \quad (1.27)$$

para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Então, fixando $k \in \{1, \dots, n\}$ e fazendo integração por partes, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \varepsilon' \frac{\partial u_{\varepsilon'}}{\partial x_k}(x, \tilde{\omega}) \varphi(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon'}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx = \\ - \varepsilon' \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon'}(x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon'}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) dx \\ - \int_{\mathcal{O}} u_{\varepsilon'}(x, \tilde{\omega}) \varphi(x) [\nabla_y \Phi]^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon'}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \nabla_y \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon'}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \cdot e_k dx, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon' > 0$ e para todo $(\varphi, \zeta) \in C_c^\infty(\mathcal{O}) \times \mathcal{S}$. Daí, por (1.26) e (1.27), encontra-se

$$\begin{aligned} c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} v_{\tilde{\omega}}^{(k)}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dx d\mathbb{P} dz = \\ - c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x) [\nabla_y \Phi]^{-1}(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \nabla_y (\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot e_k dx d\mathbb{P} dz, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} v_{\tilde{\omega}}^{(k)}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) dx d\mathbb{P} dz = \\ - c_\Phi^{-1} \int_{\mathcal{O}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(x) \frac{\partial}{\partial z_k} (\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)) dx d\mathbb{P} dz. \end{aligned}$$

Logo, para $\zeta \in \mathcal{S}$ fixado e reordenando, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} v_{\tilde{\omega}}^{(k)}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) d\mathbb{P} dz \right] \varphi(x) dx = \\ - \int_{\mathcal{O}} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(\mathbf{Y}, \omega)} u_{\tilde{\omega}}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \frac{\partial}{\partial z_k} (\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)) d\mathbb{P} dz \right] \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{O})$. Consequentemente, existe $N_\zeta \subset \mathcal{O}$ tal que $|N_\zeta| = 0$ e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} v_{\omega}^{(k)}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) d\mathbb{P} dz = \\ - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} u_{\omega}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \frac{\partial}{\partial z_k} (\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)) d\mathbb{P} dz, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{O} \setminus N_\zeta$. Como $\mathcal{S}$ é enumerável, existe $N \subset \mathcal{O}$ tal que $|N| = 0$ e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} v_{\omega}^{(k)}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) d\mathbb{P} dz = \\ - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} u_{\omega}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \frac{\partial}{\partial z_k} (\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)) d\mathbb{P} dz, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{O} \setminus N$ e para todo $\zeta \in \mathcal{S}$. Daí, para $x \in \mathcal{O} \setminus N$ fixado, pelo Corolário 1.5,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_{\omega}^{(k)}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(z) dz = - \int_{\mathbb{R}^n} u_{\omega}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(z) dz,$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, q.t.p. $\omega \in \Omega$. Logo, como $\Phi(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo para q.t.p. $\omega \in \Omega$, existe $M \subset \Omega$ (dependendo apenas de x) com $\mathbb{P}(M) = 0$ tal que $\Phi(\cdot, \omega)$ é um difeomorfismo e

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_{\omega}^{(k)}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \varphi(z) dz = - \int_{\mathbb{R}^n} u_{\omega}(x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(z) dz,$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e para todo $\omega \in \Omega \setminus M$. Daí, pela derivação fraca para a composição de funções, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\nabla_y \Phi](y, \omega) V_{\omega}(x, y, \omega) \cdot e_k \varphi(y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} u_{\omega}(x, y, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(y) dy,$$

para todo $\omega \in \Omega \setminus M$ e para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Portanto, para $x \in \mathcal{O} \setminus N$ fixado, tem-se

$$\nabla_y u_{\omega}(x, \cdot, \omega) \cdot e_k = [\nabla_y \Phi](x, \cdot, \omega) V_{\omega}(x, \cdot, \omega) \cdot e_k,$$

para todo $\omega \in \Omega \setminus M$ e para $k \in \{1, \dots, n\}$, ou seja, $u_{\omega}(x) \in \mathcal{H}$ e

$$V_{\omega}(x) = [\nabla_y \Phi]^{-1} \nabla_y u_{\omega}(x),$$

para todo $x \in \mathcal{O} \setminus N$.

□

1.4 Um Teorema de Perturbação

Nesta seção, estamos interessados em estudar as características do espectro pontual de um operador submetido a pequenas perturbações. Mais precisamente, dado H um espaço de Hilbert complexo e $\{A_\alpha ; \alpha \in \mathbb{N}^*\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, uma família de operadores em $\mathcal{B}(H)$ (o

espaço dos operadores lineares limitados de H em H), analisaremos o espectro pontual da série de potências em n variáveis complexas, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$,

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathbf{z}^\alpha A_\alpha \equiv \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=0}^{\infty} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n},$$

a partir das propriedades do espectro pontual do operador $A_{0, \dots, 0}$. Este tipo de análise foi estudado amplamente em T. Kato [33] e F. Rellich [40], esta última será tomada como principal referência para a construção desta seção. Aqui será apresentada uma adaptação do Teorema 1 em F. Rellich [40, Pág. 57]. Outras referências utilizadas na seção são R. C. Gunning e H. Rossi [29] e S. G. Krantz e H. R. Parks [34].

Antes, uma análise do raio de convergência da série de potências. O valor de uma série de potências depende (em geral) do ordenamento dos termos da série, mas como em $\mathbb{N}^n$ não existe um ordenamento canônico para efetuar dita soma, convém estudar a *convergência absoluta* da série. Também, diferenciando-se das séries de potências de uma variável complexa, as séries de potências em n variáveis complexas podem ter regiões de convergência com formas muito mais diversas. Mas, nosso estudo é local, assim, só precisamos encontrar uma vizinhança de convergência. A fim de encontrar e descrever dita vizinhança, a seguinte definição:

$$\frac{1}{r} := \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{\|\alpha\|_\infty > k} \sqrt[|\alpha|]{\|A_\alpha\|} \right\}, \quad (1.28)$$

aqui $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, e $\|\alpha\|_\infty := \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. No que segue desta seção, dado $R > 0$, $B(0, R)$ denota a bola aberta complexa de raio R , i.e.,

$$B(0, R) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < R\}$$

e

$$\Delta_R := \prod_{\nu=1}^n B(0, R) = \underbrace{B(0, R) \times B(0, R) \times \dots \times B(0, R)}_{n \text{ vezes}}.$$

Teorema 1.9. *A série de potências*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathbf{z}^\alpha A_\alpha$$

é convergente $\forall \mathbf{z} \in \Delta_r$ (r definido em (1.28)).

Demonstração. A demonstração é feita seguindo uma ideia similar ao caso $n = 1$. Para $\mathbf{z} \in \Delta_r$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right) |z_\nu| < 1, \quad \forall \nu \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.29)$$

Por outro lado, por (1.28), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{\|\alpha\|_\infty > k} \sqrt[|\alpha|]{\|A_\alpha\|} < \frac{1}{r} + \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0,$$

i.e.

$$\|A_\alpha\| < \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)^{|\alpha|}, \quad \text{se } \|\alpha\|_\infty > k_0.$$

Daí,

$$|z_1|^{\alpha_1} \dots |z_n|^{\alpha_n} \|A_\alpha\| < \left[\left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)|z_1|\right]^{\alpha_1} \dots \left[\left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)|z_n|\right]^{\alpha_n}, \quad \text{se } \|\alpha\|_\infty > k_0,$$

e fazendo o somatório para $\|\alpha\|_\infty > k_0$, encontra-se

$$\begin{aligned} \sum_{\|\alpha\|_\infty > k_0} |z|^\alpha \|A_\alpha\| &\leq \sum_{\|\alpha\|_\infty > k_0} \left\{ \left[\left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)|z_1|\right]^{\alpha_1} \dots \left[\left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)|z_n|\right]^{\alpha_n} \right\} \\ &\leq \left\{ \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)|z_1|\right]^{\alpha_1} \right\} \dots \left\{ \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)|z_n|\right]^{\alpha_n} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, por (1.29), a série de potências

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} z^\alpha A_\alpha$$

é absolutamente convergente $\forall z \in \Delta_r$.

□

Observação 1.4. *Da prova anterior, a série de potências*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} z^\alpha A_\alpha$$

converge uniformemente em Δ_{r_0} , para $r_0 < r$.

Observação 1.5. *Existe $c > 0$ tal que*

$$\|A_\alpha\| \leq c^{|\alpha|+1}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Segue da definição (1.28).

Seja $\mathcal{O}$ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$.

Definição 1.12. *Uma função $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ é dita holomorfa em $w \in D$ se existe um aberto U , $w \in U \subset \mathcal{O}$, tal que a função f possui uma expansão em série de potências, i.e.,*

$$f(z) \equiv f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (z - w)^\alpha A_\alpha \equiv \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=0}^{\infty} (z_1 - w_1)^{\alpha_1} \dots (z_n - w_n)^{\alpha_n} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$$

para todo $z \in U$. A função f é dita holomorfa em D se ela é holomorfa para todo $w \in D$.

Teorema 1.10 (Lemma de Osgood). *Seja $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e holomorfa em cada variável separadamente, então f é holomorfa.*

Definição 1.13. *Uma função $(\varrho, \mathbf{z}) \mapsto W(\varrho, \mathbf{z})$, holomorfa numa vizinhança de $(0, \mathbf{0}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, é chamada de polinômio de Weierstrass de grau m se temos*

$$W(\varrho, \mathbf{z}) = \varrho^m + a_1(\mathbf{z})\varrho^{m-1} + \dots + a_{m-1}(\mathbf{z})\varrho + a_m(\mathbf{z}),$$

onde $\mathbf{z} \mapsto a_1(\mathbf{z}), \dots, a_m(\mathbf{z})$ são funções holomorfas numa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ tais que se anulam em $\mathbf{z} = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$.

Teorema 1.11 (Teorema de Preparação de Weierstrass). *Seja $m \in \mathbb{N}^*$ e $(\varrho, \mathbf{z}) \mapsto F(\varrho, \mathbf{z})$ uma função holomorfa numa vizinhança de $(0, \mathbf{0}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Se $\varrho \mapsto F(\varrho, \mathbf{0})/\varrho^m$ é holomorfa numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ tal que não se anula em $0 \in \mathbb{C}$, então existem um polinômio de Weierstrass $(\varrho, \mathbf{z}) \mapsto W(\varrho, \mathbf{z})$ de grau m e uma função holomorfa $(\varrho, \mathbf{z}) \mapsto E(\varrho, \mathbf{z})$, que não se anula numa vizinhança U de $(0, \mathbf{0}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, tal que*

$$F(\varrho, \mathbf{z}) = W(\varrho, \mathbf{z})E(\varrho, \mathbf{z})$$

para todo $(\varrho, \mathbf{z}) \in U$.

Demonstração. Para uma prova veja S. G. Krantz e H. R. Parks [34, Pág. 96]. $\square$

Suponhamos $A \in \mathcal{B}(H)$ um operador simétrico e $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de multiplicidade finita h do operador A . Claramente, $A - \lambda I$ é não inversível, mas existe um operador Hermitiano $R \in \mathcal{B}(H)$ (unicamente definido) tal que

- $R\psi_k = 0, \forall k \in \{1, \dots, h\}$, e
- $R(A - \lambda I)f = f - \sum_{k=1}^h \langle f, \psi_k \rangle \psi_k, \forall f \in H$,

onde $\{\psi_1, \dots, \psi_h\}$ é uma base ortonormal de $\text{Ker}(A - \lambda I)$. O operador R é chamado a *pseudo-inversa* de $A - \lambda I$. Uma caracterização deste operador é dada em F. Rellich [40, Pág. 60]. Note que $AR = RA$.

O espectro de um operador $A \in \mathcal{B}(H)$ é definido por

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; A - \lambda I \text{ não é bijetivo}\}.$$

Agora, apresentamos o teorema principal desta seção.

Teorema 1.12. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A_\alpha \in \mathcal{B}(H)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, uma sequência de operadores limitados em H . Consideremos a série de potências em n variáveis complexas*

$$A(\mathbf{z}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathbf{z}^\alpha A_\alpha$$

convergente, e autoadjunto, para $\mathbf{z}$ numa vizinhança de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Então, se λ é um autovalor de $A \equiv A(\mathbf{0})$ de multiplicidade finita h , existem, uma vizinhança U de $\mathbf{0}$, $\mathbf{0} \in U \subset \mathbb{C}^n$,

$$\mathbf{z} \in U \mapsto \lambda_1(\mathbf{z}), \lambda_2(\mathbf{z}), \dots, \lambda_h(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}$$

e

$$\mathbf{z} \in U \mapsto \psi_1(\mathbf{z}), \psi_2(\mathbf{z}), \dots, \psi_h(\mathbf{z}) \in H \setminus \{0\},$$

funções holomorfas em U tais que

- (i) $A(\mathbf{z})\psi_i(\mathbf{z}) = \lambda_i(\mathbf{z})\psi_i(\mathbf{z}), \forall \mathbf{z} \in U \text{ e } i \in \{1, \dots, h\},$
- (ii) $\lambda_i(\mathbf{z} = \mathbf{0}) = \lambda, i \in \{1, \dots, h\}, \text{ e}$
- (iii) $\dim\{w \in H ; A(\mathbf{z})w = \lambda_i(\mathbf{z})w\} \leq h, \forall \mathbf{z} \in U \text{ e } i \in \{1, \dots, h\}.$

Além disso, se existe $d > 0$ tal que

$$\sigma(A) \cap (\lambda - d, \lambda + d) = \{\lambda\},$$

então, para cada $d' \in (0, d)$, existe uma vizinhança V de $\mathbf{0}$, satisfazendo $\mathbf{0} \in V \subset U$, tal que

$$\sigma(A(\mathbf{z})) \cap (\lambda - d', \lambda + d') = \{\lambda_1(\mathbf{z}), \dots, \lambda_h(\mathbf{z})\},$$

para todo $\mathbf{z} \in V$.

Demonstração. A demonstração será feita vários em passos. Seja

$$B(\mathbf{z}) := A(\mathbf{z}) - A = \sum_{|\alpha| \neq 0} \mathbf{z}^\alpha A_\alpha.$$

Passo 1: Existe uma vizinhança de $(\varrho, \mathbf{z}) = (0, \mathbf{0})$ tal que a função complexa

$$(\varrho, \mathbf{z}) \mapsto \sum_{l=0}^{\infty} [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l \in \mathcal{B}(H)$$

é bem definida. Além disso, a função é holomorfa nessa vizinhança. De fato, pela Observação 1.5, sabemos que existe $c > 0$ tal que $\|A_\alpha\| \leq c^{|\alpha|+1}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$. Também

$$\begin{aligned} \|B(\mathbf{z})\| &\leq \sum_{|\alpha| \neq 0} |\mathbf{z}_1|^{\alpha_1} \dots |\mathbf{z}_n|^{\alpha_n} \|A_\alpha\| \\ &\leq \sum_{|\alpha| \neq 0} |\mathbf{z}|^{|\alpha|} \|A_\alpha\| \\ &\leq \sum_{|\alpha| \neq 0} |\mathbf{z}|^{|\alpha|} c^{|\alpha|+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} |\mathbf{z}|^{|\alpha|} c^{|\alpha|+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{|\alpha|=k} |\mathbf{z}|^k c^{k+1} \right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\#\{\alpha \in \mathbb{N}^n ; |\alpha| = k\} |\mathbf{z}|^k c^{k+1} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^n |\mathbf{z}|^k c^{k+1} \\ &= |\mathbf{z}| c^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^n |\mathbf{z}|^{k-1} c^{k-1} \\ &\leq |\mathbf{z}| c^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^n |\mathbf{z}|^k c^k. \end{aligned}$$

Por critério de convergência, para $\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{c^{n+1}})$, tem-se que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^n |\mathbf{z}|^k c^k$$

é convergente. Além disso, como

$$\mathbf{z} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^n |\mathbf{z}|^k c^k$$

é uma função contínua em $B(\mathbf{0}, \frac{1}{c^{n+1}}) \subset \mathbb{C}^n$, existe $\tilde{c} > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^n |\mathbf{z}|^k c^k \right| \leq \tilde{c}, \quad \forall \mathbf{z} \in B\left(0, \frac{1}{2c^{n+1}}\right).$$

Logo,

$$\|R(\varrho - B(\mathbf{z}))\| \leq \|R\|(|\varrho| + |\mathbf{z}|c^2\tilde{c}) \leq \|R\|\max\{1, c^2\tilde{c}\}(|\varrho| + |\mathbf{z}|), \quad (1.30)$$

para $\varrho \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{z} \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{2c^{n+1}})$. Definimos

$$r := \frac{1}{8\|R\|\max\{1, c^2\tilde{c}\}},$$

e

$$\Delta_r := B(0, r) \times B(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n.$$

Para $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, tem-se

$$\left\| \sum_{l=0}^m [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l - \sum_{l=0}^n [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l \right\| \leq \sum_{l=n+1}^m \|R(\varrho - B(\mathbf{z}))\|^l.$$

Se, adicionalmente, considera-se $(\varrho, \mathbf{z}) \in \Delta_r$, por (1.30), obtém-se

$$\left\| \sum_{l=0}^m [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l - \sum_{l=0}^n [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l \right\| \leq \sum_{l=n+1}^m \left(\frac{1}{4}\right)^l.$$

Daí, para $(\varrho, \mathbf{z}) \in \Delta_r$,

$$\left(\sum_{l=0}^m [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(H)$, logo converge em $\mathcal{B}(H)$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ encontramos que

$$\left\| \sum_{l=0}^{\infty} [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l - \sum_{l=0}^n [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l \right\| \leq \sum_{l=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^l,$$

para todo $(\varrho, \mathbf{z}) \in \Delta_r$. Notamos que a sequência de funções holomorfas

$$\left\{ (\varrho, \mathbf{z}) \in \Delta_r \mapsto \sum_{l=0}^m [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l ; m \in \mathbb{N} \right\}$$

converge uniformemente para

$$(\varrho, \mathbf{z}) \in \Delta_r \mapsto \sum_{l=0}^{\infty} [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l.$$

Portanto,

$$(\varrho, \mathbf{z}) \in \Delta_r \mapsto \sum_{l=0}^{\infty} [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l$$

é holomorfa, pois ela é limite uniforme de funções holomorfas.

Considerando

$$f_{ij}(\varrho, \mathbf{z}) := \left\langle \sum_{l=0}^{\infty} (\varrho - B(\mathbf{z})) [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l \psi_i, \psi_j \right\rangle, \quad i, j = 1, \dots, h,$$

para $(\varrho, \mathbf{z}) \in \Delta_r$, podemos concluir que $F : \Delta_r \rightarrow \mathbb{C}$, definido por

$$(\varrho, \mathbf{z}) \in \Delta_r \mapsto F(\varrho, \mathbf{z}) := \det[(f_{ij}(\varrho, \mathbf{z}))],$$

é holomorfa, pois o determinante de uma matriz é obtido mediante uma quantidade finita de operações algébricas com as coordenadas da matriz, as quais são funções holomorfas.

Passo 2:

$$f_{ij}(\varrho, \mathbf{z}) = \overline{f_{ji}(\bar{\varrho}, \mathbf{z})}, \quad i, j = 1, \dots, h,$$

para $(\varrho, \mathbf{z}) \in \Delta_r$.

Seja $(\varrho, \mathbf{z}) \in \Delta_r$. Notamos que, para $i, j \in \{1, \dots, h\}$,

$$\begin{aligned} f_{ij}(\varrho, \mathbf{z}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\langle (\varrho - B(\mathbf{z})) [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l \psi_i, \psi_j \right\rangle \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\langle [R(\varrho - B(\mathbf{z}))]^l \psi_i, (\bar{\varrho} - B(\mathbf{z})) \psi_j \right\rangle \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\langle \psi_i, [(\bar{\varrho} - B(\mathbf{z})) R]^l (\bar{\varrho} - B(\mathbf{z})) \psi_j \right\rangle \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\langle \psi_i, [(\bar{\varrho} - B(\mathbf{z})) R]^{l-1} [(\bar{\varrho} - B(\mathbf{z})) R] (\bar{\varrho} - B(\mathbf{z})) \psi_j \right\rangle \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left\langle \psi_i, (\bar{\varrho} - B(\mathbf{z})) [R(\bar{\varrho} - B(\mathbf{z}))]^l \psi_j \right\rangle \\ &= \left\langle \psi_i, \sum_{l=0}^{\infty} (\bar{\varrho} - B(\mathbf{z})) [R(\bar{\varrho} - B(\mathbf{z}))]^l \psi_j \right\rangle \\ &= \overline{f_{ji}(\bar{\varrho}, \mathbf{z})}. \end{aligned}$$

Como uma consequência do Passo 2, temos que $F(\varrho, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}$, se $\varrho \in \mathbb{R}$.

Passo 3:

$$F(\varrho, \mathbf{0}) = \det[\varrho(\delta_{ij})] = \varrho^h,$$

para todo $\varrho \in B(0, r)$.

Para $\varrho \in B(0, r)$, temos que

$$\begin{aligned} f_{ij}(\varrho, \mathbf{0}) &= \left\langle \sum_{l=0}^{\infty} (\varrho - B(\mathbf{0})) [R(\varrho - B(\mathbf{0}))]^l \psi_i, \psi_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{l=0}^{\infty} \varrho^{l+1} R^l \psi_i, \psi_j \right\rangle \\ &= \langle \varrho \psi_i, \psi_j \rangle + \sum_{l=1}^{\infty} \langle \varrho^{l+1} R^l \psi_i, \psi_j \rangle \\ &= \varrho \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(\varrho, \mathbf{0}) &= \det[(f_{ij}(\varrho, \mathbf{0}))] \\ &= \det[\varrho(\delta_{ij})] \\ &= \varrho^h, \end{aligned}$$

para todo $\varrho \in B(0, r)$.

Passo 4: Existem h funções holomorfas

$$\mathbf{z} \mapsto \varrho_1(\mathbf{z}), \varrho_2(\mathbf{z}), \dots, \varrho_h(\mathbf{z})$$

definidas numa vizinhança de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ tais que

$$\lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}} \varrho_k(\mathbf{z}) = 0 \quad \text{e} \quad F(\varrho_k(\mathbf{z}), \mathbf{z}) = 0,$$

para $k \in \{1, \dots, h\}$.

De fato, pelo Passo 3 e o Teorema de Preparação de Weierstrass, Teorema 1.11, existe um polinômio de Weierstrass de grau h

$$W(\varrho, \mathbf{z}) = \varrho^h + a_1(\mathbf{z})\varrho^{h-1} + \dots + a_{h-1}(\mathbf{z})\varrho + a_h(\mathbf{z})$$

e uma função holomorfa $(\varrho, \mathbf{z}) \mapsto E(\varrho, \mathbf{z})$, que não se anula numa vizinhança $U \times V$ de $(0, \mathbf{0})$, com $U \subset B(0, r) \subset \mathbb{C}$ e $V \subset B(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{C}^n$, tais que

$$F(\varrho, \mathbf{z}) = (\varrho^h + a_1(\mathbf{z})\varrho^{h-1} + \dots + a_{h-1}(\mathbf{z})\varrho + a_h(\mathbf{z}))E(\varrho, \mathbf{z}),$$

para todo $(\varrho, \mathbf{z}) \in U \times V$. Fatorando o polinômio de Weierstrass é possível encontrar

$$\mathbf{z} \mapsto \varrho_1(\mathbf{z}), \dots, \varrho_h(\mathbf{z}),$$

funções definidas em V , tais que

$$\varrho^h + a_1(\mathbf{z})\varrho^{h-1} + \dots + a_{h-1}(\mathbf{z})\varrho + a_h(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^h (\varrho - \varrho_i(\mathbf{z})).$$

Daí, como os coeficientes do polinômio de Weierstrass são funções holomorfas que se anulam em $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ obtém-se que a função ϱ_k , $k \in \{1, \dots, h\}$, é holomorfa e

$$\lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}} \varrho_k(\mathbf{z}) = 0, \quad k = 1, \dots, h. \quad (1.31)$$

Passo 5: Seja $k \in \{1, \dots, h\}$. Existe $\mathbf{z} \mapsto \psi_k(\mathbf{z}) \in H - \{0\}$ tal que

$$A(\mathbf{z})\psi_k(\mathbf{z}) = (\lambda + \varrho_k(\mathbf{z}))\psi_k(\mathbf{z}),$$

para $\mathbf{z}$ numa vizinhança de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Fixando $k \in \{1, \dots, h\}$, pelo Passo 4 existe $V \subset \mathbb{C}$, vizinhança do $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, tal que

$$\det[(f_{ij}(\varrho_k(\mathbf{z}), \mathbf{z}))] = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in V,$$

do qual conclui-se que a equação $(f_{ji}(\varrho_k(\mathbf{z}), \mathbf{z}))(c_1, \dots, c_n)^T = 0$, $\forall \mathbf{z} \in V$, possui uma solução não nula, consequentemente, existem h funções holomorfas $\mathbf{z} \in V \mapsto c_1^k(\mathbf{z}), \dots, c_h^k(\mathbf{z})$ tais que

$$\sum_{i=1}^h f_{ij}(\varrho_k(\mathbf{z}), \mathbf{z}) c_i^k(\mathbf{z}) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, h,$$

e (convenientemente)

$$\sum_{i=1}^h |c_i^k(\mathbf{z})|^2 = 1. \quad (1.32)$$

Por (1.31) é possível encontrar uma vizinhança $\tilde{V}$ de $\mathbf{0}$, $\tilde{V} \subset \subset V$, tal que

$$\sup_{\mathbf{z} \in \tilde{V}} |\varrho_k(\mathbf{z})| < \frac{1}{8\|R\|\max(1, c^2\tilde{c})},$$

para todo $\mathbf{z} \in \tilde{V}$ e para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Logo

$$\|R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))\| \leq \|R\|\max(1, c^2\tilde{c})(|\varrho_k(\mathbf{z})| + |\mathbf{z}|) \leq \frac{1}{4}, \quad (1.33)$$

para todo $\mathbf{z} \in \tilde{V}$, consequentemente,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))\|^l \leq \frac{4}{3}, \quad \forall \mathbf{z} \in \tilde{V}. \quad (1.34)$$

Definimos

$$\phi_k(\mathbf{z}) := \sum_{i=1}^h c_i^k(\mathbf{z})\psi_i$$

e

$$\psi_k(\mathbf{z}) := \sum_{l=0}^{\infty} [R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))]^l \phi_k(\mathbf{z}),$$

para $\mathbf{z} \in \tilde{V}$. Notamos que

$$\begin{aligned}
\psi_k(\mathbf{z}) &= \phi_k(\mathbf{z}) + \sum_{l=1}^{\infty} [R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))]^l \phi_k(\mathbf{z}) \\
&= \phi_k(\mathbf{z}) + [R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))] \sum_{l=1}^{\infty} [R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))]^{l-1} \phi_k(\mathbf{z}) \\
&= \phi^k(\mathbf{z}) + [R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))] \psi_k(\mathbf{z}),
\end{aligned}$$

para $\mathbf{z} \in \tilde{V}$. Logo

$$\begin{aligned}
(A - \lambda)\psi_k(\mathbf{z}) &= (A - \lambda)\phi^k(\mathbf{z}) + (A - \lambda)[R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))]\psi_k(\mathbf{z}) \\
&= \sum_{i=1}^h c_i^k(\mathbf{z})(A - \lambda)\psi^i + (A - \lambda)R[(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))\psi_k(\mathbf{z})] \\
&= R(A - \lambda)[(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))\psi^k(\mathbf{z})] \\
&= (\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))\psi_k(\mathbf{z}) - \sum_{j=1}^h \langle (\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))\psi_k(\mathbf{z}), \psi^j \rangle \psi^j,
\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}
&\langle (\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))\psi^k(\mathbf{z}), \psi^j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^h \left\langle \sum_{l=0}^{\infty} (\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))[R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))]^l \psi^i, \psi^j \right\rangle c_i^k(\mathbf{z}) \\
&= \sum_{i=1}^h f_{ij}(\varrho_k(\mathbf{z}), \mathbf{z}) c_i^k(\mathbf{z}) = 0,
\end{aligned}$$

para $\mathbf{z} \in \tilde{V}$, tem-se

$$(A - \lambda)\psi_k(\mathbf{z}) = (\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))\psi_k(\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \tilde{V}.$$

Portanto,

$$A(\mathbf{z})\psi_k(\mathbf{z}) = (\lambda + \varrho_k(\mathbf{z}))\psi_k(\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \tilde{V}.$$

Por outro lado, como

$$\psi_k(\mathbf{z}) = \phi_k(\mathbf{z}) + [R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))] \sum_{l=1}^{\infty} [R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))]^{l-1} \phi^k(\mathbf{z})$$

por (1.32), (1.33), e (1.34), tem-se

$$\begin{aligned}
\|\psi_k(\mathbf{z}) - \phi^k(\mathbf{z})\| &\leq \|R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))\| \sum_{l=0}^{\infty} [R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))]^l \|\phi_k(\mathbf{z})\| \\
&\leq \frac{4}{3} \|R(\varrho_k(\mathbf{z}) - B(\mathbf{z}))\| \\
&\leq \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

para $\mathbf{z} \in \tilde{V}$. Daí $\psi_k(\mathbf{z}) \neq 0, \forall \mathbf{z} \in \tilde{V}$, pois

$$1 = \|\phi^k(\mathbf{z})\| \leq \|\phi_k(\mathbf{z}) - \psi_k(\mathbf{z})\| + \|\psi_k(\mathbf{z})\| \leq \frac{1}{3} + \|\psi_k(\mathbf{z})\|,$$

para todo $\mathbf{z} \in \tilde{V}$.

Passo 6: Prova do item (iii). Pelo item anterior, vimos que existe $\lambda_k(\mathbf{z}) := \lambda + \varrho_k(\mathbf{z})$, $k \in \{1, \dots, h\}$, autovalor do operador $A(\mathbf{z})$, para $\mathbf{z}$ em uma vizinhança de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Seja $\lambda(\mathbf{z}) = \lambda_k(\mathbf{z})$, para qualquer $k \in \{1, \dots, h\}$ fixado, e $\psi(\mathbf{z})$ um autovetor correspondente a $\lambda(\mathbf{z})$ ($\psi(\mathbf{z})$ não é necessariamente a $\psi_k(\mathbf{z})$ construída no item anterior). Então existem uma vizinhança V de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ e um operador holomorfo $S : V \rightarrow \mathcal{B}(H)$ tais que $S(\mathbf{z})$ é invertível e

$$\psi(\mathbf{z}) \in \text{span}\{S(\mathbf{z})\psi_1, S(\mathbf{z})\psi_2, \dots, S(\mathbf{z})\psi_h\}, \quad \forall \mathbf{z} \in V.$$

Para provar essa afirmação, considerando $\varrho(\mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{z}) - \lambda$, como

$$\varrho(\mathbf{z})I - B(\mathbf{z}) = \varrho(\mathbf{z})I - (A(\mathbf{z}) - A) = (\lambda(\mathbf{z})I - A(\mathbf{z})) + (A - \lambda I),$$

tem-se

$$(\varrho(\mathbf{z})I - B(\mathbf{z}))\psi(\mathbf{z}) = (A - \lambda)\psi(\mathbf{z}).$$

Aplicando R , a pseudo-inversa de $A - \lambda I$, encontra-se

$$R(\varrho(\mathbf{z})I - B(\mathbf{z}))\psi(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z}) - \sum_{i=1}^h \langle \psi(\mathbf{z}), \psi_i \rangle \psi_i,$$

equivalentemente,

$$[I - R(\varrho(\mathbf{z})I - B(\mathbf{z}))]\psi(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^h \langle \psi(\mathbf{z}), \psi_i \rangle \psi_i.$$

Por outro lado, por (1.30), é possível encontrar uma vizinhança V de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ tal que $\|R(\varrho(\mathbf{z})I - B(\mathbf{z}))\| < 1, \forall \mathbf{z} \in V$. Portanto, considerando o operador invertível

$$S(\mathbf{z}) := [I - R(\varrho(\mathbf{z})I - B(\mathbf{z}))]^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} [R(\varrho(\mathbf{z})I - B(\mathbf{z}))]^{\nu},$$

tem-se

$$\psi(\mathbf{z}) = S(\mathbf{z}) \left(\sum_{i=1}^h \langle \psi(\mathbf{z}), \psi_i \rangle \psi_i \right) = \sum_{i=1}^h \langle \psi(\mathbf{z}), \psi_i \rangle [S(\mathbf{z})\psi_i].$$

Isto finaliza a prova do item (iii).

Passo 7: Para $\mathbf{z} \in \tilde{V}$, consideremos o espaço

$$N(\mathbf{z}) := \text{span}\{\psi_1(\mathbf{z}), \psi_2(\mathbf{z}), \dots, \psi_h(\mathbf{z})\},$$

o operador $P(\mathbf{z}) : H \rightarrow H$, projeção do espaço $N(\mathbf{z})$, dado pela relação

$$P(\mathbf{z})u = \sum_{i=1}^h \langle u, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}),$$

e o operador $D(\mathbf{z}) : H \rightarrow H$ definido por

$$D(\mathbf{z}) := A(\mathbf{z}) - 2dP(\mathbf{z}).$$

Nota-se que o operador $D(\mathbf{z})$ é dado pela relação

$$D(\mathbf{z})u = \sum_{i=1}^h (\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) + A(\mathbf{z})u_2, \quad (1.35)$$

onde se está considerando a decomposição $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in N(\mathbf{z})$ e $u_2 \in N(\mathbf{z})^\perp$.

Afirmção 1. Para $\mathbf{z} \in \tilde{V}$.

a) Se $\xi \in \mathbb{R}$ e $\xi \neq \{\lambda_1(\mathbf{z}), \lambda_2(\mathbf{z}), \dots, \lambda_h(\mathbf{z})\}$,

$$D(\mathbf{z}) - \xi \text{ é bijetivo} \Rightarrow A(\mathbf{z}) - \xi \text{ é bijetivo},$$

b) Se $\xi \in \mathbb{R}$ e $\xi \neq \{\lambda_1(\mathbf{z}) - 2d, \lambda_2(\mathbf{z}) - 2d, \dots, \lambda_h(\mathbf{z}) - 2d\}$,

$$A(\mathbf{z}) - \xi \text{ é bijetivo} \Rightarrow D(\mathbf{z}) - \xi \text{ é bijetivo}.$$

Para provar o item (a) fixa-se $\mathbf{z} \in \tilde{V}$ e $\xi \in \mathbb{R}$, com $\xi \neq \lambda_i(\mathbf{z})$, para $i \in \{1, \dots, h\}$, tais que $D(\mathbf{z}) - \xi$ é bijetivo.

Injetividade: Seja $u \in \text{Ker}(A(\mathbf{z}) - \xi)$. Como $\xi \neq \lambda_i(\mathbf{z})$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, tem-se

$$\langle u, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

ou seja, $u \in N(\mathbf{z})^\perp$. Logo, por (1.35),

$$(D(\mathbf{z}) - \xi)u = (A(\mathbf{z}) - \xi)u = 0.$$

Portanto, da injetividade de $D(\mathbf{z}) - \xi$, conclui-se que $u = 0$.

Sobrejetividade: Pela sobrejetividade de $D(\mathbf{z}) - \xi$, para cada $v \in H$ existe $u \in H$ tal que

$$(D(\mathbf{z}) - \xi)u = v. \quad (1.36)$$

Por outro lado, o vetor $u \in H$ pode se decompor como $u = u_1 + u_2$, onde $u_1 \in N(\mathbf{z})$ e $u_2 \in N(\mathbf{z})^\perp$, logo, pelas equações (1.35) e (1.36), tem-se

$$v = \sum_{i=1}^h (\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) + (A(\mathbf{z}) - \xi)u_2. \quad (1.37)$$

Além disso, como $\xi \neq \lambda_i(\mathbf{z})$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, segue que

$$(A(\mathbf{z}) - \xi) \left[\frac{\psi_i(\mathbf{z})}{\lambda_i(\mathbf{z}) - \xi} \right] = \psi_i(\mathbf{z}).$$

Daí, voltando à equação (1.37),

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{i=1}^h (A(\mathbf{z}) - \xi) \left[\left(\frac{\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi}{\lambda_i(\mathbf{z}) - \xi} \right) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) \right] + (A(\mathbf{z}) - \xi)u_2 \\
&= (A(\mathbf{z}) - \xi) \left[\sum_{i=1}^h \left(\frac{\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi}{\lambda_i(\mathbf{z}) - \xi} \right) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) \right] + (A(\mathbf{z}) - \xi)u_2 \\
&= (A(\mathbf{z}) - \xi) \left[\sum_{i=1}^h \left(\frac{\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi}{\lambda_i(\mathbf{z}) - \xi} \right) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) + u_2 \right].
\end{aligned}$$

Portanto, para $\mathbf{z} \in \tilde{V}$, o operador $A(\mathbf{z} - \xi)$ é sobrejetivo.

Agora, para provar o item (b), fixam-se $\mathbf{z} \in \tilde{V}$ e $\xi \in \mathbb{R}$, com $\xi \neq \lambda_i(\mathbf{z}) - 2d$, para $i \in \{1, \dots, h\}$, tais que $A(\mathbf{z}) - \xi$ é bijetivo.

Injetividade: Seja $u \in H$ tal que $(D(\mathbf{z}) - \xi)u = 0$. Pode-se escrever $u = u_1 + u_2$, onde $u_1 \in N(\mathbf{z})$ e $u_2 \in N(\mathbf{z})^\perp$, logo, pela equação (1.35), encontra-se

$$0 = \sum_{i=1}^h (\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) + (A(\mathbf{z}) - \xi)u_2. \quad (1.38)$$

Daí, obtém-se que $(A(\mathbf{z}) - \xi)u_2 \in N(\mathbf{z})$, consequentemente,

$$\begin{aligned}
(A(\mathbf{z}) - \xi)u_2 &= P(\mathbf{z})[(A(\mathbf{z}) - \xi)u_2] \\
&= P(\mathbf{z})A(\mathbf{z})u_2 - \xi P(\mathbf{z})u_2 \\
&= \sum_{i=1}^h \langle A(\mathbf{z})u_2, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) - \xi P(\mathbf{z})u_2, \\
&= \sum_{i=1}^h \langle u_2, A(\mathbf{z})\psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) - \xi P(\mathbf{z})u_2 \\
&= \sum_{i=1}^h \lambda_i(\mathbf{z}) \langle u_2, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) - \xi P(\mathbf{z})u_2,
\end{aligned}$$

ou seja, $(A(\mathbf{z}) - \xi)u_2 = 0$ pois $u_2 \in N(\mathbf{z})^\perp$. Em seguida, notamos que, pela injetividade de $A(\mathbf{z}) - \xi$, conclui-se que $u_2 = 0$. Logo, voltando à equação (1.38), tem-se

$$\sum_{i=1}^h (\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) = 0,$$

e como $\{\psi_i(\mathbf{z})\}_{i=1}^h$ é uma família de vetores linearmente independentes, daí, encontra-se

$$(\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, h\},$$

o que juntamente com a hipótese, $\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi \neq 0$, fornece $\langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, h\}$. Isto mostra que $u_1 = 0$.

Sobrejetividade: Pela sobrejetividade de $A(\mathbf{z}) - \xi$, para cada $v \in H$ existe $u \in H$ tal que

$$(A(\mathbf{z}) - \xi)u = v. \quad (1.39)$$

Por outro lado, considera-se a decomposição $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in N(\mathbf{z})$ e $u_2 \in N(\mathbf{z})^\perp$, logo, pelas equações (1.35) e (1.39), encontra-se

$$v = \sum_{i=1}^h (\lambda_i(\mathbf{z}) - \xi) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) + (D(\mathbf{z}) - \xi)u_2. \quad (1.40)$$

Além disso, como $\xi \neq \lambda_i(\mathbf{z}) - 2d$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, tem-se

$$(D(\mathbf{z}) - \xi) \left[\frac{\psi_i(\mathbf{z})}{\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi} \right] = \psi_i(\mathbf{z}).$$

Daí, voltando à equação (1.40), encontra-se a forma explícita da pré-imagem

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^h (D(\mathbf{z}) - \xi) \left[\left(\frac{\lambda_i(\mathbf{z}) - \xi}{\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi} \right) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \phi^i(\mathbf{z}) \right] + (D(\mathbf{z}) - \xi)u_2 \\ &= (D(\mathbf{z}) - \xi) \left[\sum_{i=1}^h \left(\frac{\lambda_i(\mathbf{z}) - \xi}{\lambda_i(\mathbf{z}) - 2d - \xi} \right) \langle u_1, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}) + u_2 \right]. \end{aligned}$$

Portanto, para $\mathbf{z} \in \tilde{V}$, o operador $D(\mathbf{z}) - \xi$ é sobrejetivo.

Afirmção 2. O espectro do operador $D(\mathbf{0})$ não contém elementos no intervalo $(\lambda - d, \lambda + d)$, i.e.,

$$\sigma(D(\mathbf{0})) \cap (\lambda - d, \lambda + d) = \emptyset.$$

Pelo item (b) da Afirmção anterior, para $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, tem-se $\sigma(D(\mathbf{0})) \subset \sigma(A(\mathbf{0}))$. Logo, conclui-se

$$\sigma(D(\mathbf{0})) \cap (\lambda - d, \lambda + d) \subset \sigma(A(\mathbf{0})) \cap (\lambda - d, \lambda + d) = \{\lambda\}.$$

Se $\lambda \in \sigma(D(\mathbf{0}))$, conclui-se, pelo Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos, que λ é um autovalor do operador $D(\mathbf{0})$, mas isso não é possível, pois $D(\mathbf{0}) - \lambda$ é injetivo (fato que foi mostrado na demonstração do item (b) da afirmação anterior), ou seja,

$$\sigma(D(\mathbf{0})) \cap (\lambda - d, \lambda + d) = \emptyset.$$

Para levar o resultado até uma vizinhança de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, precisamos da continuidade da função $\mathbf{z} \mapsto D(\mathbf{z})$ em $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, e essa propriedade se pode concluir da continuidade da função $\mathbf{z} \mapsto P(\mathbf{z})$ em $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, a qual é dada pela afirmação seguinte.

Afirmção 3. A função $\mathbf{z} \in \tilde{V} \mapsto P(\mathbf{z}) \in \mathcal{B}(H)$ é contínua¹.

¹Mais do que isso, a função é holomorfa.

De fato, para $u \in H$, tem-se

$$P(\mathbf{w})u - P(\mathbf{z})u = \sum_{i=1}^h \langle u, \psi_i(\mathbf{w}) \rangle \psi_i(\mathbf{w}) - \sum_{i=1}^h \langle u, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z}).$$

Daí, para $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \tilde{V}$, encontra-se

$$\begin{aligned} \|(P(\mathbf{w}) - P(\mathbf{z}))u\| &\leq \sum_{i=1}^h \|\langle u, \psi_i(\mathbf{w}) \rangle \psi_i(\mathbf{w}) - \langle u, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle \psi_i(\mathbf{z})\| \\ &= \sum_{i=1}^h \|\langle u, \psi_i(\mathbf{w}) \rangle (\psi_i(\mathbf{w}) - \psi_i(\mathbf{z})) + (\langle u, \psi_i(\mathbf{w}) \rangle - \langle u, \psi_i(\mathbf{z}) \rangle) \psi_i(\mathbf{z})\| \\ &\leq \sum_{i=1}^h (|\langle u, \psi_i(\mathbf{w}) \rangle| \|\psi_i(\mathbf{w}) - \psi_i(\mathbf{z})\| + |\langle u, \psi_i(\mathbf{w}) - \psi_i(\mathbf{z}) \rangle| \|\psi_i(\mathbf{z})\|) \\ &\leq \sum_{i=1}^h (\|u\| \|\psi_i(\mathbf{w})\| \|\psi_i(\mathbf{w}) - \psi_i(\mathbf{z})\| + \|u\| \|\psi_i(\mathbf{w}) - \psi_i(\mathbf{z})\| \|\psi_i(\mathbf{z})\|) \\ &= \|u\| \left[\sum_{i=1}^h \|\psi_i(\mathbf{w}) - \psi_i(\mathbf{z})\| (\|\psi_i(\mathbf{w})\| + \|\psi_i(\mathbf{z})\|) \right]. \end{aligned}$$

Concluimos que a continuidade da função $\mathbf{z} \in \tilde{V} \mapsto P(\mathbf{z}) \in \mathcal{B}(H)$ é consequência da continuidade da função $\mathbf{z} \in \tilde{V} \mapsto \psi_i(\mathbf{z}) \in H$, para $i \in \{1, \dots, h\}$. Isto prova a afirmação.

Evidentemente, como consequência da afirmação anterior, a função $\mathbf{z} \mapsto D(\mathbf{z}) \in \mathcal{B}(H)$ é contínua. Um fato bem conhecido é que o subconjunto de $\mathcal{B}(H)$ dos operadores inversíveis é um conjunto aberto do espaço $\mathcal{B}(H)$. Segue-se que existe um aberto $\tilde{V}_1$, $\mathbf{0} \in \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}$, tal que a função $\mathbf{z} \in \tilde{V}_1 \mapsto (D(\mathbf{z}) - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$ é contínua. Por outro lado, tem-se

$$\|(D(\mathbf{0}) - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(D(\mathbf{0})))} \leq \frac{1}{d} < \frac{1}{d'},$$

o resultado pode ser encontrado em M. Reed e B. Simon [39, Capítulo VIII]. Segue, pela continuidade $\mathbf{z} \in \tilde{V}_1 \mapsto (D(\mathbf{z}) - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$, que existe $\tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1$, $\mathbf{0} \in \tilde{V}_2$, tal que

$$\|(D(\mathbf{z}) - \lambda)^{-1}\| < \frac{1}{d'}, \quad \forall \mathbf{z} \in \tilde{V}_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u\| = \|(D(\mathbf{z}) - \lambda)^{-1}[(D(\mathbf{z}) - \lambda)u]\| &\leq \|(D(\mathbf{z}) - \lambda)^{-1}\| \|(D(\mathbf{z}) - \lambda)u\| \\ &< \frac{1}{d'} \|(D(\mathbf{z}) - \lambda)u\|, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{z} \in \tilde{V}_2$ e para todo $u \in H$. Daí, para $e \in (0, d')$ e $\xi \in (\lambda - e, \lambda + e)$, como $D(\mathbf{z}) - \xi = (D(\mathbf{z}) - \lambda) + (\lambda - \xi)$, tem-se

$$\begin{aligned} \|(D(\mathbf{z}) - \xi)u\| &\geq \|(D(\mathbf{z}) - \lambda)u\| - |\lambda - \xi| \|u\| \\ &\geq d' \|u\| - e \|u\| \\ &= (d' - e) \|u\|, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{z} \in \tilde{V}_2$ e para todo $u \in H$. Isso mostra que $\xi \in \rho(D(\mathbf{z}))$, $\forall \xi \in (\lambda - e, \lambda + e)$ e $\forall \mathbf{z} \in \tilde{V}_2$, ou seja, $(\lambda - e, \lambda + e) \subset \rho(D(\mathbf{z}))$, $\forall \mathbf{z} \in \tilde{V}_2$. Segue que $(\lambda - d', \lambda + d') \subset \rho(D(\mathbf{z}))$, $\forall \mathbf{z} \in \tilde{V}_2$, pois, para $\mathbf{z} \in \tilde{V}_2$, $(\lambda - e, \lambda + e) \subset \rho(D(\mathbf{z}))$ para qualquer $e \in (0, d')$.

Portanto, como

$$\sigma(A(\mathbf{z})) \setminus \{\lambda_1(\mathbf{z}), \dots, \lambda_h(\mathbf{z})\} \subset \sigma(D(\mathbf{z})) \setminus \{\lambda_1(\mathbf{z}), \dots, \lambda_h(\mathbf{z})\}, \quad \forall \mathbf{z} \in \tilde{V}_2,$$

pelo item (a) da Afirmação 1, encontra-se

$$\sigma(A(\mathbf{z})) \setminus \{\lambda_1(\mathbf{z}), \dots, \lambda_h(\mathbf{z})\} \cap (\lambda - d', \lambda + d') = \emptyset, \quad \forall \mathbf{z} \in \tilde{V}_2.$$

□

Observação 1.6. *Em particular, se λ é um autovalor de A de multiplicidade 1 e também é um ponto isolado do espectro de A , ou seja, existe $d > 0$ tal que*

$$\sigma(A) \cap (\lambda - d, \lambda + d) = \{\lambda\},$$

então existem uma vizinhança U de $\mathbf{0}$, uma função holomorfa

$$\mathbf{z} \in U \mapsto \lambda(\mathbf{z}) \in \mathbb{R},$$

e $d' > 0$ tais que a multiplicidade do autovalor $\lambda(\mathbf{z})$ é 1, para todo $\mathbf{z} \in U$, e

$$\sigma(A(\mathbf{z})) \cap (\lambda - d', \lambda + d') = \{\lambda(\mathbf{z})\},$$

para todo $\mathbf{z} \in U$.

Capítulo 2

Análise Assintótica Formal

Este capítulo está dedicado ao estudo da equação celular de Bloch no contexto de funções estacionárias compostas com deformações estocásticas. Na seção 1, daremos um conceito de equação de Bloch no contexto de funções estacionárias compostas com deformações estocásticas. Estuda-se a regularidade dos autovalores e autofunções em relação à frequência de Bloch e as consequências de tais regularidades. Na seção 2, estuda-se os espaços de Sobolev sobre grupos e as imersões do tipo Sobolev. Daremos uma generalização do Teorema de Rellich-Kondrachov para grupos Abelianos compactos. Também, será exibido um exemplo que envolve funções quase-periódicas de espectro finito.

2.1 Ondas de Bloch

Consideremos os espaços vetoriais complexos,

$$\mathcal{L}_\Phi := \left\{ (z, \omega) \mapsto f(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) ; f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega)) \text{ função estacionária} \right\}$$

e

$$\mathcal{H}_\Phi := \left\{ (z, \omega) \mapsto f(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) ; f \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega)) \text{ função estacionária} \right\},$$

os quais são espaços de Hilbert, munidos dos produtos internos

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{L}_\Phi} := \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} F(z, \omega) \overline{G(z, \omega)} dz d\mathbb{P}$$

e

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{H}_\Phi} := \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \nabla_z F(z, \omega) \cdot \overline{\nabla_z G(z, \omega)} dz d\mathbb{P} + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} F(z, \omega) \overline{G(z, \omega)} dz d\mathbb{P},$$

respectivamente.

Definição 2.1. Para cada $\theta \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} -(\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta) \Psi \right] + V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \Psi = \lambda \Psi & \text{em } \mathbb{R}^n \times \Omega, \\ \Psi(z, \omega) = \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega), & \psi \text{ função estacionária,} \end{cases} \quad (2.1)$$

é chamada a **equação celular espectral de Bloch** associada à equação (1), onde a incógnita é o par $(\lambda, \Psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_\Phi$, e $L(\theta)$ dado por

$$L(\theta)[F] := -\left(\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta\right) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left(\nabla_z + 2i\pi\theta \right) F \right] + V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) F, \quad F \in \mathcal{H}_\Phi,$$

é chamado o operador associado à equação (2.1), com formulação variacional

$$\begin{aligned} \langle L(\theta)[F], G \rangle &:= \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left(\nabla_z + 2i\pi\theta \right) F(z, \omega) \cdot \overline{\left(\nabla_z + 2i\pi\theta \right) G(z, \omega)} dz d\mathbb{P} \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Phi(\Upsilon, \omega)} V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) F(z, \omega) \overline{G(z, \omega)} dz d\mathbb{P}, \quad F, G \in \mathcal{H}_\Phi. \end{aligned}$$

Dizemos que a equação (2.1) possui solução se o espectro pontual de $L(\theta)$ é não vazio, isto é, se existem $\lambda(\theta) \in \mathbb{R}$ e $\Psi(\theta) \in \mathcal{H}_\Phi \setminus \{0\}$ tais que $L(\theta)[\Psi(\theta)] = \lambda(\theta)\Psi(\theta)$. Neste caso, a função $(z, \omega) \mapsto e^{2i\pi z \cdot \theta} \Psi(\theta)(z, \omega)$ é chamada **onda de Bloch** e θ a **frequência de Bloch**.

Observação 2.1. As seguintes observações são importantes, descrevem a relação entre os espaços $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}_\Phi$, e dos espaços $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_\Phi$ (os espaços $\mathcal{L}$ e $\mathcal{H}$ foram definidos em (1.25)):

- $F \in \mathcal{L}_\Phi \Leftrightarrow F \circ \Phi \in \mathcal{L}$,
- existem $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \|F \circ \Phi\|_{\mathcal{L}} \leq \|F\|_{\mathcal{L}_\Phi} \leq c_2 \|F \circ \Phi\|_{\mathcal{L}},$$

para todo $F \in \mathcal{L}_\Phi$,

- $F \in \mathcal{H}_\Phi \Leftrightarrow F \circ \Phi \in \mathcal{H}$, e
- existem $\tilde{c}_1 > 0$ e $\tilde{c}_2 > 0$ tais que

$$\tilde{c}_1 \|F \circ \Phi\|_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}_\Phi} \leq \tilde{c}_2 \|F \circ \Phi\|_{\mathcal{H}},$$

para todo $F \in \mathcal{H}_\Phi$.

Seguem da definição da deformação estocástica Φ e suas propriedades.

Proposição 2.1. Dado $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$, tal que $\lambda(\theta_0)$ tem multiplicidade finita. Então existem uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ de θ_0 e as funções analíticas

$$\theta \in \mathcal{U} \mapsto \Psi(\theta) \in \mathcal{H}_\Phi \quad \text{e} \quad \theta \in \mathcal{U} \mapsto \lambda(\theta) \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Além disso, $\theta \in \mathcal{U} \mapsto \psi(\theta) \in \mathcal{H}$ também é analítica.

A prova desta proposição segue um raciocínio semelhante ao utilizado na demonstração do Teorema 4.1.

Esta proposição permitirá deduzir, a partir da equação celular (2.1), outras equações que chamaremos equações celulares auxiliares. Antes, para uma análise mais clara,

consideremos o operador $\mathbb{A}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, definido em $\mathcal{H}_\Phi^*$ (dual topológico de $\mathcal{H}_\Phi$), com $D(\mathbb{A}(\theta)) = \mathcal{H}_\Phi$ e dado por

$$\mathbb{A}(\theta)[F] = -(\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)(\nabla_z + 2i\pi\theta)F] + V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)F - \lambda(\theta)F,$$

para $F \in \mathcal{H}_\Phi$. Se derivamos a equação celular (2.1), em relação à variável θ , na direção do vetor canônico e_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, e seguidamente na direção do vetor canônico e_ℓ , $\ell \in \{1, \dots, n\}$, é possível encontrar as equações

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\theta) \left[\frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_k} \right] &= (\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)(2i\pi e_k \Psi(\theta))] \\ &\quad + (2i\pi e_k) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)(\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta) \Psi(\theta)] + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_k}(\theta) \Psi(\theta), \end{aligned} \quad (2.2)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\theta) \left[\frac{\partial^2 \Psi(\theta)}{\partial \theta_\ell \partial \theta_k} \right] &= (\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left(2i\pi e_\ell \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_k} \right) \right] \\ &\quad + (\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left(2i\pi e_k \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_\ell} \right) \right] \\ &\quad + (2i\pi e_k) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_\ell} \right] \\ &\quad + (2i\pi e_\ell) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_k} \right] \\ &\quad + (2i\pi e_k) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)(2i\pi e_\ell \Psi(\theta))] \\ &\quad + (2i\pi e_\ell) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)(2i\pi e_k \Psi(\theta))] \\ &\quad + \frac{\partial \lambda(\theta)}{\partial \theta_k} \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_\ell} + \frac{\partial \lambda(\theta)}{\partial \theta_\ell} \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_k} + \frac{\partial^2 \lambda(\theta)}{\partial \theta_\ell \partial \theta_k} \Psi(\theta). \end{aligned} \quad (2.3)$$

De fato, para $\theta \in \mathcal{U}$ e $k \in \{1, \dots, n\}$, derivando a formulação variacional da equação (2.1) em relação à variável θ na direção do vetor canônico e_k , tem-se

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_k} \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta)G} dz d\mathbb{P} \\ &+ \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_k} \overline{G} dz d\mathbb{P} - \lambda(\theta) \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_k} \overline{G} dz d\mathbb{P} \\ &= - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta) \Psi(\theta) \cdot \overline{(2i\pi e_k G)} dz d\mathbb{P} \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (2i\pi e_k \Psi(\theta)) \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta)G} dz d\mathbb{P} \\ &\quad + \frac{\partial \lambda(\theta)}{\partial \theta_k} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \Psi(\theta) \overline{G} dz d\mathbb{P}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

para todo $G \in \mathcal{H}_\Phi$, a qual corresponde à formulação variacional da equação (2.2). Utilizando mais uma vez a Proposição 2.1, podemos derivar a equação (2.4) em relação à

variável θ na direção do vetor canônico e_ℓ , $\ell \in \{1, \dots, n\}$, encontrando

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta) \frac{\partial^2 \Psi(\theta)}{\partial \theta_\ell \partial \theta_k} \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta)G} dz d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \frac{\partial^2 \Psi(\theta)}{\partial \theta_\ell \partial \theta_k} \overline{G} dz d\mathbb{P} - \lambda(\theta) \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \frac{\partial^2 \Psi(\theta)}{\partial \theta_\ell \partial \theta_k} \overline{G} dz d\mathbb{P} \\
& = - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (2i\pi e_\ell) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_k} \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta)G} dz d\mathbb{P} \\
& \quad - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (2i\pi e_k) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_\ell} \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta)G} dz d\mathbb{P} \\
& \quad - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_k} \cdot \overline{(2i\pi e_\ell)G} dz d\mathbb{P} \\
& \quad - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta) \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_\ell} \cdot \overline{(2i\pi e_k)G} dz d\mathbb{P} \\
& \quad - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (2i\pi e_k) \Psi(\theta) \cdot \overline{(2i\pi e_\ell)G} dz d\mathbb{P} \\
& \quad - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (2i\pi e_\ell) \Psi(\theta) \cdot \overline{(2i\pi e_k)G} dz d\mathbb{P} \\
& \quad + \frac{\partial \lambda(\theta)}{\partial \theta_\ell} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_k} \overline{G} dz d\mathbb{P} + \frac{\partial \lambda(\theta)}{\partial \theta_k} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \frac{\partial \Psi(\theta)}{\partial \theta_\ell} \overline{G} dz d\mathbb{P} \\
& \quad + \frac{\partial^2 \lambda(\theta)}{\partial \theta_\ell \partial \theta_k} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \Psi(\theta) \overline{G} dz d\mathbb{P},
\end{aligned}$$

para todo $G \in \mathcal{H}_\Phi$, a qual é a formulação variacional da equação (2.3).

Dado $\theta \in \mathbb{R}^n$ e $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$, denotamos

$$\Lambda_k(z, \omega, \theta) := \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_k}(z, \omega, \theta) \quad \text{e} \quad \chi_{k\ell}(z, \omega, \theta) := -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_k \partial \theta_\ell}(z, \omega, \theta). \quad (2.5)$$

Daí, as equações (2.2) e (2.3) podem ser reescritas,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(\theta) [\Lambda_k(\theta)] &= (\text{div}_z + 2i\pi\theta) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_k \Psi(\theta))] \\
&\quad + (e_k) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\text{div}_z + 2i\pi\theta) \Psi(\theta)] + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_k}(\theta) \Psi(\theta)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(\theta) [\chi_{k\ell}(\theta)] &= \\
& (\text{div}_z + 2i\pi\theta) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_\ell \Lambda_k(\theta))] + (\text{div}_z + 2i\pi\theta) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_k \Lambda_\ell(\theta))] \\
& + (e_k) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\text{div}_z + 2i\pi\theta) \Lambda_\ell(\theta)] + (e_\ell) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\text{div}_z + 2i\pi\theta) \Lambda_k(\theta)] \\
& + (e_k) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_\ell \Psi(\theta))] + (e_\ell) [A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_k \Psi(\theta))] \\
& + \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda(\theta)}{\partial \theta_\ell} \Lambda_k(\theta) + \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda(\theta)}{\partial \theta_k} \Lambda_\ell(\theta) - \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \lambda(\theta)}{\partial \theta_\ell \partial \theta_k} \Psi(\theta)
\end{aligned}$$

as quais serão chamadas de *primeira e segunda equação celular auxiliar*, respectivamente.

A seguinte observação será útil na hora de caracterizar a Matriz Homogeneizada, aquela que será determinada no Teorema de Homogeneização (Teorema 3.1).

Observação 2.2. *Dado $\theta \in \mathcal{U}$, multiplicando a segunda equação celular auxiliar pela autofunção $\Psi(\theta)$, encontramos*

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_{\ell} \Lambda_k(\theta)) \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta) \Psi(\theta)} dz d\mathbb{P} \\
& - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_k \Lambda_{\ell}(\theta)) \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta) \Psi(\theta)} dz d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta) \Lambda_k(\theta) \cdot \overline{(e_{\ell} \Psi(\theta))} dz d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta) \Lambda_{\ell}(\theta) \cdot \overline{(e_k \Psi(\theta))} dz d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_k \Psi(\theta)) \cdot \overline{(e_{\ell} \Psi(\theta))} dz d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_{\ell} \Psi(\theta)) \cdot \overline{(e_k \Psi(\theta))} dz d\mathbb{P} \\
& + \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda(\theta)}{\partial \theta_{\ell}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \Lambda_k(\theta) \overline{\Psi(\theta)} dz d\mathbb{P} + \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda(\theta)}{\partial \theta_k} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \Lambda_{\ell}(\theta) \overline{\Psi(\theta)} dz d\mathbb{P} \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \lambda(\theta)}{\partial \theta_{\ell} \partial \theta_k} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |\Psi(\theta)|^2 dz d\mathbb{P}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Por outro lado, faremos a dedução de duas equações variacionais que também serão utilizadas na demonstração do Teorema de Homogeneização (Teorema 3.1). Da formulação variacional da primeira equação celular auxiliar, seguindo um procedimento semelhante ao realizado na demonstração do Corolário 1.5, pode-se concluir que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta) \Lambda_k(z, \omega, \theta) \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta) \xi(z)} dz \\
& + \int_{\mathbb{R}^n} V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \Lambda_k(z, \omega, \theta) \overline{\xi(z)} dz - \lambda(\theta) \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda_k(z, \omega, \theta) \overline{\xi(z)} dz \\
& = - \int_{\mathbb{R}^n} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta) \Psi(z, \omega, \theta) \cdot \overline{(e_k \xi(z))} dz \\
& - \int_{\mathbb{R}^n} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_k \Psi(z, \omega, \theta)) \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta) \xi(z)} dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_k}(\theta) \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(z, \omega, \theta) \overline{\xi(z)} dz,
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, q.t.p. $\omega \in \Omega$. Daí, considerando a função $\xi(z) := \varphi(\varepsilon z)$, onde $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(x)$ pertence ao espaço $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, temos $\varepsilon(\nabla \varphi)(\varepsilon z) = \nabla_z \xi(z)$, $z \in \mathbb{R}^n$, conse-

quentemente,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z \Lambda_k(z, \omega, \theta) + 2i\pi\theta \Lambda_k(z, \omega, \theta)) \cdot \overline{(\varepsilon(\nabla\varphi)(\varepsilon z) + 2i\pi\theta\varphi(\varepsilon z))} dz \\
& + \int_{\mathbb{R}^n} V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \Lambda_k(z, \omega, \theta) \overline{\varphi(\varepsilon z)} dz - \lambda(\theta) \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda_k(z, \omega, \theta) \overline{\varphi(\varepsilon z)} dz \\
& = - \int_{\mathbb{R}^n} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z \Psi(z, \omega, \theta) + 2i\pi\theta \Psi(z, \omega, \theta)) \cdot \overline{(e_k \varphi(\varepsilon z))} dz \\
& - \int_{\mathbb{R}^n} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_k \Psi(z, \omega, \theta)) \cdot \overline{(\varepsilon(\nabla\varphi)(\varepsilon z) + 2i\pi\theta\varphi(\varepsilon z))} dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_k}(\theta) \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(z, \omega, \theta) \overline{\varphi(\varepsilon z)} dz.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo mundaça de variável $z = x/\varepsilon$, encontra-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \left((\nabla_z \Lambda_k)\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right) + 2i\pi\theta \Lambda_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right) \right) \cdot \overline{(\varepsilon \nabla \varphi(x) + 2i\pi\theta \varphi(x))} dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^n} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \Lambda_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right) \overline{\varphi(x)} dx - \lambda(\theta) \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right) \overline{\varphi(x)} dx \\
& = - \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \left((\nabla_z \Psi)\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right) + 2i\pi\theta \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right) \right) \cdot \overline{(e_k \varphi(x))} dx \\
& - \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) (e_k \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right)) \cdot \overline{(\varepsilon(\nabla\varphi)(x) + 2i\pi\theta\varphi(x))} dx \\
& + \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_k}(\theta) \int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right) \overline{\varphi(x)} dx,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, q.t.p. $\omega \in \Omega$. Denotando

$$\Lambda_{k,\varepsilon}(x, \omega, \theta) := \Lambda_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right) \quad \text{e} \quad \Psi_\varepsilon(x, \omega, \theta) := \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right),$$

temos

$$\varepsilon \nabla \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \omega, \theta) = (\nabla_z \Lambda_k)\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right) \quad \text{e} \quad \varepsilon \nabla \Psi_\varepsilon(x, \omega, \theta) = (\nabla_z \Psi)\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta\right),$$

consequentemente, utilizando isso em (2.7) e multiplicando a equação por ε^{-2} , obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta}{\varepsilon} \right) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \omega, \theta) \cdot \overline{\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta}{\varepsilon} \right) \varphi(x)} dx \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \omega, \theta) \overline{\varphi(x)} dx - \frac{\lambda(\theta)}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \omega, \theta) \overline{\varphi(x)} dx \\
& = - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta}{\varepsilon} \right) \Psi_\varepsilon(x, \omega, \theta) \cdot \overline{(e_k \varphi(x))} dx \\
& - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) (e_k \Psi_\varepsilon(x, \omega, \theta)) \cdot \overline{\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta}{\varepsilon} \right) \varphi(x)} dx \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_k}(\theta) \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(x, \omega, \theta) \overline{\varphi(x)} dx,
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, q.t.p. $\omega \in \Omega$. Portanto,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta}{\varepsilon}\right) \Lambda_{k,\varepsilon}(\theta) \cdot \overline{\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta}{\varepsilon}\right) \varphi} dx \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \Lambda_{k,\varepsilon}(\theta) \bar{\varphi} dx - \frac{\lambda(\theta)}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda_{k,\varepsilon}(\theta) \bar{\varphi} dx \\
& = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta}{\varepsilon}\right) \Psi_\varepsilon(\theta) \cdot \overline{(e_k \varphi)} dx \\
& - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) (e_k \Psi_\varepsilon(\theta)) \cdot \overline{\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta}{\varepsilon}\right) \varphi} dx \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_k}(\theta) \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(\theta) \bar{\varphi} dx,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, q.t.p. $\omega \in \Omega$.

Analogamente, para $\theta \in \mathcal{U}$, se consideramos a formulação variacional da equação celular e seguimos um raciocínio semelhante ao utilizado acima, é possível verificar que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta}{\varepsilon}\right) \Psi_\varepsilon(\theta) \cdot \overline{\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta}{\varepsilon}\right) \varphi} dx \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \Psi_\varepsilon(\theta) \bar{\varphi} dx - \frac{\lambda(\theta)}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_\varepsilon(\theta) \bar{\varphi} dx = 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, q.t.p. $\omega \in \Omega$.

2.1.1 Método WKB

O método utilizado aqui segue um procedimento formal de expansão assintótica, veja Bensoussan, Lions & Papanicolaou [9] e Allaire [3]. Para cada $\varepsilon > 0$, assumimos que a solução $u_\varepsilon(t, x, \omega)$ de (1) tem a seguinte expansão

$$u_\varepsilon(t, x, \omega) = e^{2i\pi \frac{S_\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k\left(t, x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right), \tag{2.10}$$

onde cada $u_k(t, x, y, \omega)$, $k \in \mathbb{N}$, é uma função estacionária complexa com respeito a (y, ω) , e $S_\varepsilon(t, x)$ uma expansão de funções reais, isto é, para funções reais S_0 e S_1 ,

$$S_\varepsilon(t, x) := S_0(t, x) + \varepsilon S_1(t, x), \tag{2.11}$$

a qual chamaremos *função de fase*, e que será determinada posteriormente.

Calculando a derivada espacial da expansão (2.10)

$$\begin{aligned}
\nabla u_\varepsilon(t, x, \omega) &= e^{2i\pi \frac{S_\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2}} \left\{ 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \Big|_{z=x/\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[(\nabla_x u_k)(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \Big|_{z=x/\varepsilon} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_z [u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega)] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right] \right\} \\
&= e^{2i\pi \frac{S_\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[\left(\frac{\nabla_z}{\varepsilon} + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2} \right) u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\nabla_x u_k)(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \Big|_{z=x/\varepsilon} \right\},
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \nabla u_\varepsilon(t, x, \omega) &= \\
e^{2i\pi \frac{S_\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \left(\frac{\nabla_z}{\varepsilon} + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2} \right) u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) (\nabla_x u_k)(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega)] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right\}.
\end{aligned}$$

Derivando mais uma vez em relação à variável x

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left[A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \nabla u_\varepsilon(t, x, \omega) \right] &= \\
2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon^2} e^{2i\pi \frac{S_\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \left(\frac{\nabla_z}{\varepsilon} + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) (\nabla_x u_k)(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega)] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right\} \\
+ e^{2i\pi \frac{S_\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \operatorname{div}_x \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \left(\frac{\nabla_z}{\varepsilon} + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right. \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \operatorname{div}_z \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \left(\frac{\nabla_z}{\varepsilon} + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \operatorname{div}_x [A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) (\nabla_x u_k)(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega)] \Big|_{z=x/\varepsilon} \\
&\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \operatorname{div}_z [A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) (\nabla_x u_k)(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega)] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right\},
\end{aligned}$$

reordenando, convenientemente,

$$\begin{aligned}
& e^{-2i\pi \frac{S_\varepsilon(t,x)}{\varepsilon^2}} \operatorname{div} \left[A \left(\Phi^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right), \omega \right) \nabla u_\varepsilon(t, x, \omega) \right] = \\
& \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\frac{\operatorname{div}_z}{\varepsilon} + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \left(\frac{\nabla_z}{\varepsilon} + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\frac{\operatorname{div}_z}{\varepsilon} + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) (\nabla_x u_k)(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \operatorname{div}_x \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \left(\frac{\nabla_z}{\varepsilon} + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \operatorname{div}_x \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) (\nabla_x u_k)(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
& e^{-2i\pi \frac{S_\varepsilon(t,x)}{\varepsilon^2}} \operatorname{div} \left[A \left(\Phi^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right), \omega \right) \nabla u_\varepsilon(t, x, \omega) \right] = \\
& \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \left\{ \left(\operatorname{div}_z + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \left(\nabla_z + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon} \right) u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right\} \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-1} \left\{ \left(\operatorname{div}_z + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) (\nabla_x u_k)(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right. \\
& \quad \left. + \operatorname{div}_x \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \left(\nabla_z + 2i\pi \frac{\nabla S_\varepsilon}{\varepsilon} \right) u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right\} \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left\{ \operatorname{div}_x \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) (\nabla_x u_k)(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \right] \Big|_{z=x/\varepsilon} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Agora, calculando a derivada temporal em (2.10), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t, x, \omega) &= e^{2i\pi \frac{S_\varepsilon(t,x)}{\varepsilon^2}} \left[\frac{2i\pi}{\varepsilon^2} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t, x) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \Big|_{z=x/\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial u_k}{\partial t}(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \Big|_{z=x/\varepsilon} \right].
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
e^{-2i\pi \frac{S_\varepsilon(t,x)}{\varepsilon^2}} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t, x, \omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-2} \left(2i\pi \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t}(t, x) \right) u_k(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \Big|_{z=x/\varepsilon} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial u_k}{\partial t}(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \omega), \omega) \Big|_{z=x/\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Colocando as expressões (2.10), (2.11), (2.12) e (2.13) na equação de Schrödinger (1), encontra-se que o termo de ordem ε^{-4} satisfaz

$$(2i\pi\nabla S_0(t, x)) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (2i\pi\nabla S_0(t, x)) u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right] = 0.$$

Logo, pela coersividade da matriz A , conclui-se $\nabla S_0(t, x) = 0$, conseqüentemente S_0 não depende da variável x . O termo de ordem ε^{-2} satisfaz

$$\begin{aligned} -\left(\operatorname{div}_z + 2i\pi\nabla S_1(t, x)\right) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left(\nabla_z + 2i\pi\nabla S_1(t, x)\right) u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right] \\ + V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) = \left(2\pi\frac{\partial S_0}{\partial t}(t)\right) u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Esta equação, para $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ fixado, pode ser escrita na forma

$$L(\nabla S_1(t, x)) \left[u_0(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \cdot), \cdot) \right] = \left(2\pi\frac{\partial S_0}{\partial t}(t)\right) u_0(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \cdot), \cdot) \text{ em } \mathbb{R}^n \times \Omega.$$

Portanto, $2\pi\partial_t S_0(t)$ é um autovalor do operador $L(\nabla S_1(t, x))$. Conseqüentemente, se a equação (2.1) possui solução, isto é, existe $\lambda(\theta)$ um autovalor de $L(\theta)$ (o qual assumimos suficientemente regular em θ), a seguinte equação de Hamilton-Jacobi deve ser satisfeita

$$2\pi\frac{\partial S_0}{\partial t}(t) - \lambda(\nabla S_1(t, x)) = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^n. \quad (2.15)$$

Agora, considerando o termo de ordem ε^{-1} tem-se

$$\begin{aligned} -\left(\operatorname{div}_z + 2i\pi\nabla S_1(t, x)\right) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left(\nabla_z + 2i\pi\nabla S_1(t, x)\right) u_1(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right] \\ + V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) u_1(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) - \left(2\pi\frac{\partial S_0}{\partial t}(t)\right) u_1(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \\ = \left(\operatorname{div}_z + 2i\pi\nabla S_1(t, x)\right) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \nabla_x u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right] \\ + (\operatorname{div}_x) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left(\nabla_z + 2i\pi\nabla S_1(t, x)\right) u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right] \\ + \left(2\pi\frac{\partial S_1}{\partial t}(t, x)\right) u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega), \end{aligned} \quad (2.16)$$

reescrevendo

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\nabla S_1(t, x)) = \left(\operatorname{div}_z + 2i\pi\nabla S_1(t, x)\right) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \nabla_x u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right] \\ + (\operatorname{div}_x) \left[A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left(\nabla_z + 2i\pi\nabla S_1(t, x)\right) u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right] \\ + \left(2\pi\frac{\partial S_1}{\partial t}(t, x)\right) u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega). \end{aligned}$$

Portanto, pela equação (2.2), deduzimos a equação

$$2\pi\frac{\partial S_1}{\partial t}(t, x) - \sum_{k=0}^n \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_k}(\nabla S_1(t, x)) = 0 \text{ em } (0, T) \times \mathbb{R}^n. \quad (2.17)$$

Para resolver as equações (2.15) e (2.17), assumimos a existência da frequência de Bloch $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo

- $\lambda(\theta^*)$ é simples,
- $\nabla_{\theta}\lambda(\theta^*) = 0$.

Daí, pelo primeiro item, existe $v(t, x)$ tal que

$$u_0(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) = v(t, x)\Psi(z, \omega, \theta^*),$$

e pelo segundo item $\partial_t S_1(t, x) = 0$, ou seja, S_1 não depende da variável t . Portanto,

$$S_0(t) = \frac{\lambda(\theta^*)}{2\pi} \quad \text{e} \quad S_1(x) = \theta^* \cdot x,$$

ou seja,

$$S_{\varepsilon}(t, x) = \frac{\lambda(\theta^*)}{2\pi} + \varepsilon\theta^* \cdot x.$$

2.2 Espaços de Sobolev sobre Grupos

A análise assintótica de operadores diferenciais, cujos coeficientes são funções quase-periódicas, nos leva à análise de operadores da mesma estrutura, agindo sobre funções definidas em um grupo topológico compacto, chamado a compactificação de Bohr do espaço $\mathbb{R}^n$. Grupos Abelianos localmente compactos são as réplicas naturais abstratas dos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$. Essas réplicas euclidianas herdam toda a estrutura topológica, diferencial e da teoria da medida de seus homólogos euclidianos. Com isso, podemos transportar toda a análise harmônica euclidiana para grupos Abelianos localmente compactos e, dessa maneira, tratar e estudar a estrutura dos objetos diferenciais colocados sobre eles. No nosso caso, vamos focar nos espaços de Sobolev sobre grupos topológicos localmente compactos. Como estamos interessados na análise espectral de operadores diferenciais colocados sobre grupos, uma ferramenta essencial para tal análise são as imersões do tipo Sobolev. A grande questão a ser tratada nessa seção é: que condição devemos considerar para que imersões do tipo Sobolev ocorram? Espaços de Sobolev são bem entendidos sobre (domínios) o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, variedades Riemmanianas compactas e completas e sobre espaços métricos. No entanto, espaços de Sobolev sobre conjuntos sem qualquer referência diferencial são pouco conhecidos ainda. Nessa direção, os primeiros trabalhos foram no contexto dos números p -ádicos em J. J. Rodríguez-Vega & W. A. Zúñiga-Galindo [41] e dos grupos de Heisenberg em H. Bahouri, C. Fermanian-Kammerer & I. Gallagher [7].

No sentido mais amplo, e que é tomado como referência aqui, é o trabalho de P. Górká e E. G. Reyes [27], onde são introduzidos os espaços de Sobolev sobre grupos Abelianos localmente compactos arbitrários. No trabalho de P. Górká e E. G. Reyes [27] é considerado a questão das imersões compactas do tipo Sobolev. Para sermos mais precisos, o objetivo dessa seção é o seguinte: Seja G um grupo Abeliano localmente compacto, $\{\tau(x) : G \rightarrow G\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ é um sistema dinâmico e $\Phi : \mathbb{R}^n \times G \rightarrow G$ uma deformação estocástica. Será mostrado que o espaço de Sobolev $\mathcal{H}_{\Phi}$ é equivalente a um espaço de

Sobolev $H_\gamma^1(G)$ sobre G . Portanto, o problema da imersão compacta de $\mathcal{H}_\Phi$ em $\mathcal{L}_\Phi$, que é essencial no problema de homogeneização (1), é transferido para um problema de imersão compacta de $H_\gamma^1(G)$ em $L^2(G)$, que é o contexto natural a ser considerado. O teorema de imersão compacta (Teorema 2.4) é uma generalização do teorema de Rellich-Kondrachov. A prova foi inspirada em G. B. Folland [25].

Iniciamos resumindo algumas definições e propriedades da teoria de grupos e grupos topológicos, necessárias para o estudo do Grupos Abelianos Localmente Compactos. Para provas e maiores detalhes, referimos a E. Hewitt, A. Ross [30] e G. B. Folland [24].

Um *grupo* é um conjunto não vazio G munido da aplicação $*$: $G \times G \rightarrow G$ que satisfaz:

- $(f * g) * h = f * (g * h), \forall f, g, h, \in G,$
- $\exists e \in G$ tal que $g * e = e * g = e, \forall g \in G,$
- $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e.$

Se, adicionalmente, $g * h = h * g, \forall g, h \in G$, dizemos que G é um *grupo Abeliano*. A função complexa $\chi : G \rightarrow \mathbb{S}^1$ é chamada de *carater* de G se $\chi(g * h) = \chi(g)\chi(h), \forall g, h \in G$. Aqui $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$, grupo Abeliano com o produto de números complexos. Note que o conjunto de carateres de G é um grupo Abeliano (com o produto usual de funções) com elemento neutro 1 e elemento inverso $\chi^{-1} = \bar{\chi}$, para todo carater χ de G . Daqui em diante, usaremos a notação $gh := g * h$.

Um *grupo topológico* é um grupo G munido de uma topologia tal que as aplicações $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ e $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ são contínuas. O *grupo de carateres* de um grupo topológico G , denotado por $\mathbf{X}$, é dado por todos os carateres que são contínuos, isto é,

$$\mathbf{X} := \{\chi : G \rightarrow \mathbb{S}^1 ; \chi \text{ caráter contínuo de } G\}.$$

Seja G um grupo Abeliano localmente compacto (grupo ALC). Sem perda de generalidade, podemos assumir que a topologia associada é Hausdorff (ver Corolário 2.3 em G. B. Folland [24, Pág. 33]). Além disso, é possível munir $\mathbf{X}$ com uma topologia localmente compacta, sendo assim um grupo ALC. Isto segue do fato que todo grupo ALC possui uma medida de Haar (à esquerda), ver G. B. Folland [24, Pág. 37]. Nota-se que, no contexto de grupos ALC, não há distinção entre a medida de Haar à esquerda e à direita. Daqui em diante, a medida de Haar associada a G será denotada por μ .

Definição 2.2. *Seja G um grupo ALC. Para $u \in L^1(G, \mu)$, a função $\hat{u} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$, dada pela relação*

$$\hat{u}(\chi) := \int_G u \bar{\chi} d\mu, \chi \in \mathbf{X},$$

é chamada a transformada de Fourier de u .

Uma propriedade topológica elementar permite munir $\mathbf{X}$ com a menor topologia que torna todas as transformadas de Fourier contínuas. De fato, $\mathbf{X}$ é um espaço topológico junto à topologia gerada pela família $\{\hat{u} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C} ; u \in L^1(G, \mu)\}$. O grupo de carateres $\mathbf{X}$ munido com essa topologia, denotado por $G^\wedge$, será chamado *grupo dual*. O próximo teorema estabelece que $G^\wedge$ é, de fato, um grupo ALC (para uma prova, veja E. Hewitt e A. Ross [30, Pág. 361]).

Teorema 2.1. *Se G é um grupo ALC, então $G^\wedge$ é um grupo ALC.*

A medida de Haar associada ao grupo ALC $G^\wedge$ será denotada por ν . Uma propriedade importante para recordar é que, para um grupo Abelian compacto (grupo AC), o respectivo grupo dual é discreto, ou seja, se G é um grupo AC, então $G^\wedge$ é um grupo discreto (isto é, ν é a medida de contagem). Para uma prova, veja E. Hewitt, A. Ross [30, Pág. 362].

Agora, trataremos os espaços de Sobolev sobre grupos ALC, os quais foram estudados em P. Górká, T. Kostrzewa [28]. Antes, lembre-se que, dado um conjunto X , uma função real não-negativa γ é uma pseudo-métrica sobre X se $\gamma : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ e

- para $a, b \in X$, $\gamma(a, b) = 0$ se $a = b$,
- $\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$, $\forall a, b \in X$,
- $\gamma(a, b) \leq \gamma(a, c) + \gamma(c, b)$, $\forall a, b, c \in X$.

Definição 2.3 (Espaços de Sobolev). *Seja G um grupo ALC e γ uma pseudo-métrica mensurável sobre $G^\wedge$. Denotando $\gamma(\chi) := \gamma(\chi, 1)$, dizemos que $u \in L^2(G, \mu)$ pertence ao espaço $H_\gamma^1(G)$ se*

$$\int_{G^\wedge} (1 + \gamma(\chi)^2) |\widehat{u}(\chi)|^2 d\nu < \infty.$$

Se $u \in H_\gamma^1(G)$, definimos sua norma por

$$\|u\|_{H_\gamma^1(G)} := \left(\int_{G^\wedge} (1 + \gamma(\chi)^2) |\widehat{u}(\chi)|^2 d\nu \right)^{1/2}.$$

Claramente, como uma consequência da identidade de Parseval, tem-se que $H_\gamma^1(G)$ é um espaço de Banach.

Exemplo 2.1. *O grupo dual do $\mathbb{R}^d$ (grupo ALC) é dado por $(\mathbb{R}^d)^\wedge = \{e_y ; y \in \mathbb{R}^d\}$, onde, para $y \in \mathbb{R}^d$,*

$$e_y(x) = e^{2i\pi y \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

O grupo ALC $\mathbb{R}^d$ e a métrica $\gamma(e_y, e_z) := 2\pi\|y - z\|_d$, $y, z \in \mathbb{R}^d$ geram o espaço de Sobolev $H_\gamma^1(\mathbb{R}^d)$ que coincide com o espaço de Sobolev da teoria clássica $H^1(\mathbb{R}^d)$, pois $(\mathbb{R}^d)^\wedge \cong \mathbb{R}^d$.

Exemplo 2.2 (Toro Finito e Infinito). *Sabe-se que, conjunto $[0, 1)^d$ munido da operação binária*

$$(g, h) \in [0, 1)^d \times [0, 1)^d \mapsto g + h - \llbracket g + h \rrbracket \in [0, 1)^d$$

é um grupo Abelian, e que a função $\Lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1)^d$, dada por $\Lambda(y) := y - \llbracket y \rrbracket$, é um homomorfismo de grupos. Sabe-se também que $[0, 1)^d$ é compacto com a topologia induzida por Λ , isto é, $[0, 1)^d$ é um grupo Abelian compacto com a topologia induzida por Λ ,

$$\{U \subset [0, 1)^d ; \Lambda^{-1}(U) \text{ é um aberto de } \mathbb{R}^d\}.$$

Este grupo AC é chamado o toro de dimensão d denotado por $\mathbb{T}^d$. O grupo dual de $\mathbb{T}^d$ é caracterizado pelos inteiros, isto é, $(\mathbb{T}^d)^\wedge = \{e_m ; m \in \mathbb{Z}^d\}$. A métrica usual na teoria

clássica dos espaços de Sobolev é dada por $\gamma^d(e_m, e_n) = 2\pi \sum_{j=1}^d |m_j - n_j|$, $m \in \mathbb{Z}^d$, a menos de uma certa equivalência.

Seguindo esta linha, o toro infinito $\mathbb{T}^I$, onde I é um conjunto indexador infinito, é um grupo AC (pelo teorema de Tychonoff). Aqui a operação binária é definida coordenada por coordenada, isto é,

$$(g_\ell)_{\ell \in I} \oplus (h_\ell)_{\ell \in I} := (g_\ell + h_\ell - \llbracket g_\ell + h_\ell \rrbracket)_{\ell \in I}, \quad (g_\ell)_{\ell \in I}, (h_\ell)_{\ell \in I} \in \mathbb{T}^I.$$

O conjunto

$$\mathbb{Z}_c^I := \{m \in \mathbb{Z}^I ; \text{supp } m \text{ compacto}\}$$

caracteriza os elementos do grupo dual de $\mathbb{T}^I$,

$$(\mathbb{T}^I)^\wedge = \{e_m ; m \in \mathbb{Z}_c^I\}.$$

Isto segue do Teorema 23.21 em E. Hewitt, K. A. Ross [30, Pág. 364]. A métrica natural para este grupo é dada por

$$\gamma(e_m, e_n) := 2\pi \sum_{\ell \in I} |m_\ell - n_\ell|, \quad m, n \in \mathbb{Z}_c^I.$$

Com tudo isso temos definido $H_\gamma^1(\mathbb{T}^I)$ o espaço de Sobolev sobre o toro infinito $\mathbb{T}^I$.

No subseção seguinte será evidenciada a importância do estudo dos grupos AC.

2.2.1 Sistemas Dinâmicos e Grupos AC

Sejam G um grupo AC e $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow G$ um homomorfismo.

Note que (G, μ) é um espaço de probabilidade com a medida de Haar normalizada. Claramente, a família $\{\tau(x) : G \rightarrow G\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ definida por $\tau(x)g := \varphi(x)g$, $x \in \mathbb{R}^n$, $g \in G$, é um sistema dinâmico. De fato, como φ preserva a operação de grupo, a propriedade de grupo é satisfeita e, como a medida de Haar μ é invariante por translações, a propriedade de invariância também é satisfeita. Assim, encontra-se (ver (1.25)) o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \{w \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega)) ; w \text{ função estacionária}\}$, com produto interno

$$\langle w, v \rangle_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega} \nabla_y w(0, g) \cdot \overline{\nabla_y v(0, g)} d\mu + \int_{\Omega} w(0, g) \overline{v(0, g)} d\mu.$$

Por outro lado, este sistema dinâmico, isto é, o par (G, φ) , define uma métrica γ sobre $G^\wedge$ tal que $\mathcal{H}$ e $H_\gamma^1(G)$ podem se identificar. De fato, para definir essa γ , note que se $\xi \in G^\wedge$, então a composição $\xi \circ \varphi$ é um carater contínuo de $\mathbb{R}^n$, isto é, $\xi \circ \varphi \in (\mathbb{R}^n)^\wedge$, consequentemente, temos encontrado a função $\xi \in G^\wedge \mapsto x(\xi) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi \circ \varphi = e_{x(\xi)}$, ou seja,

$$\xi \circ \varphi(y) = e^{2i\pi x(\xi) \cdot y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Daí, a aplicação $\gamma : G^\wedge \times G^\wedge \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$\gamma(\xi, \chi) := |2i\pi x(\xi \chi^{-1})| = 2\pi |x(\xi) - x(\chi)|, \quad \xi, \chi \in G^\wedge, \quad (2.18)$$

é uma métrica sobre $G^\wedge$. Com tudo isto, os espaços $\mathcal{H}$ e $H_\gamma^1(G)$ se identificam no seguinte sentido: se w é uma função estacionária, então

$$w \in \mathcal{H} \Leftrightarrow w(0, \cdot) \in H_\gamma^1(G), \quad (2.19)$$

e

$$\|w\|_{\mathcal{H}} = \|w(0, \cdot)\|_{H_\gamma^1(G)},$$

para $w \in \mathcal{H}$. Antes de mostrar a equivalência (2.19), notemos que dado $\xi \in G^\wedge$, temos

$$\frac{\xi(\tau(re_k)g) - \xi(\tau(0)g)}{r} = \left[\frac{\xi \circ \varphi(re_k) - \xi \circ \varphi(0)}{r} \right] \xi(g), \quad \forall r \neq 0 \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

daí, identificando $\xi(y, g) \equiv \xi(\tau(y)g)$, encontramos $\partial_{y_k} \xi(0, g) = 2i\pi(e_k \cdot x(\xi))\xi(0, g)$. Consequentemente, $(\widehat{\partial_{y_k} w(0, \cdot)})(\xi) = 2i\pi(e_k \cdot x(\xi))\widehat{w(0, \cdot)}(\xi)$, para todo $w \in \mathcal{H}$ e $k \in \{1, \dots, n\}$. Isto segue da definição de transformada de Fourier.

Agora mostramos a equivalência (2.19), a qual é feita inspirada na teoria clássica da transformada de Fourier. Para a primeira implicação, seja $w \in \mathcal{H}$. Então, por Parseval e o que foi visto acima, tem-se

$$\begin{aligned} \int_G |w(0, g)|^2 d\mu + \int_G |\nabla_y w(0, g)|^2 d\mu &= \int_{G^\wedge} |\widehat{w(0, \cdot)}(\xi)|^2 d\nu + \int_{G^\wedge} |(\widehat{\nabla_y w(0, \cdot)})(\xi)|^2 d\nu \\ &= \int_{G^\wedge} |\widehat{w(0, \cdot)}(\xi)|^2 d\nu + \int_{G^\wedge} |2i\pi x(\xi) \widehat{w(0, \cdot)}(\xi)|^2 d\nu \\ &= \int_{G^\wedge} [1 + (\gamma(\xi))^2] |\widehat{w(0, \cdot)}(\xi)|^2 d\nu, \end{aligned}$$

isto é, $w(0, \cdot) \in H_\gamma^1(G)$.

Para a implicação contrária, considere a função estacionária w tal que $w(0, \cdot) \in H_\gamma^1(G)$. Segue da definição e por Pontryagin que $(2i\pi x(\xi) \widehat{w(0, \cdot)}(\xi))^\vee \in L^2(G)$. Agora, considerando $\zeta \in C^1(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega))$ uma função estacionária, pela identidade de Parseval e a polarização desta, temos

$$\int_G \partial_{y_k} \zeta(0, g) \overline{w(0, g)} d\mu = - \int_{G^\wedge} (\partial_{y_k} \widehat{\zeta(0, \cdot)})(\xi) \overline{\widehat{w(0, \cdot)}(\xi)} d\nu.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_G \partial_{y_k} \zeta(0, g) \overline{w(0, g)} d\mu &= - \int_{G^\wedge} 2i\pi x(\xi) \widehat{\zeta(0, \cdot)}(\xi) \overline{\widehat{w(0, \cdot)}(\xi)} d\nu \\ &= \int_{G^\wedge} \widehat{\zeta(0, \cdot)}(\xi) \overline{2i\pi x(\xi) \widehat{w(0, \cdot)}(\xi)} d\nu \\ &= \int_G \zeta(0, g) \overline{v(0, g)} d\mu, \end{aligned}$$

onde $v := (2i\pi x(\xi) \widehat{w(0, \cdot)}(\xi))^\vee$. Daí, pelo Teorema 1.4, conclui-se que $w \in \mathcal{H}$.

Observação 2.3 (Relação entre os espaços $\mathcal{H}_\Phi$ e $H_\gamma^1(G)$). *Analogamente ao que foi feito acima e usando a Observação 2.1, podemos concluir que:*

- $W \in \mathcal{H}_\Phi \Leftrightarrow W \circ \Phi(0, \cdot) \in H_\gamma^1(G)$,
- $\mathcal{H}_\Phi \subset \mathcal{L}_\Phi \Leftrightarrow \mathcal{H} \subset \mathcal{L} \Leftrightarrow H_\gamma^1(G) \subset L^2(G)$.

2.2.2 Teorema de Rellich–Kondrachov

Foi visto na seção anterior que a análise espectral da equação celular é feita no ambiente $\mathcal{H}$. Um caminho para fazer a análise espectral dessa equação seria seguir o raciocínio utilizado no caso periódico, isto é, via imersão compacta. No entanto, a generalidade dos espaços de probabilidade envolvidos dificulta a busca de condições apropriadas para que a imersão de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{L}$ seja compacta.

Nesse sentido, o operador $T : L^2(G^\wedge) \rightarrow L^2(G^\wedge)$, $w \mapsto T(w)$, definido por

$$[T(w)](\chi) := \frac{w(\chi)}{\sqrt{1 + \gamma(\chi)^2}}, \quad w \in L^2(G^\wedge),$$

será de vital importância para obter a generalização do Teorema de Rellich–Kondrachov para o contexto dos grupos AC, pois esta análise irá recair na compacidade deste operador. A introdução desse operador foi uma sugestão do matemático G. B. Folland através de uma comunicação pessoal.

Observação 2.4. *Nota-se que T é um operador linear limitado e autoadjunto satisfazendo $\|T\| \leq 1$. Além disso, T é injetivo e satisfaz*

$$\int_{G^\wedge} (1 + \gamma(\chi)^2) |[T(w)](\chi)|^2 d\nu = \int_{G^\wedge} |w(\chi)|^2 d\nu, \quad \forall w \in L^2(G^\wedge). \quad (2.20)$$

Lema 2.1. *Seja G um grupo ALC e γ uma pseudo-métrica mensurável sobre $G^\wedge$. Então, $u \in H_\gamma^1(G)$ se, e somente se, $\hat{u}$ pertence à imagem do operador T , i.e.,*

$$\hat{u} \in T(L^2(G^\wedge)).$$

Demonstração. Seja $u \in H_\gamma^1(G)$. Vamos mostrar que $\hat{u} \in T(L^2(G^\wedge))$. Como $u \in H_\gamma^1(G)$, encontra-se

$$\int_{G^\wedge} (1 + \gamma(\chi)^2) |\hat{u}(\chi)|^2 d\nu = \int_{G^\wedge} |\sqrt{1 + \gamma(\chi)^2} \hat{u}(\chi)|^2 d\nu.$$

Daí, definindo $w := \sqrt{1 + \gamma^2} \hat{u}$, tem-se $w \in L^2(G^\wedge)$ e

$$\hat{u}(\chi) = \frac{w(\chi)}{\sqrt{1 + \gamma(\chi)^2}}, \quad \chi \in G^\wedge.$$

Portanto $\hat{u} \in T(L^2(G^\wedge))$.

Para a prova da implicação contrária, consideraremos $\hat{u} \in T(L^2(G^\wedge))$ e mostraremos que $u \in H_\gamma^1(G)$. Como $\hat{u} \in T(L^2(G^\wedge))$, existe $w \in L^2(G^\wedge)$ tal que $\hat{u} = T(w)$. Logo, por (2.20),

$$\int_{G^\wedge} (1 + \gamma(\chi)^2) |\hat{u}(\chi)|^2 d\nu = \int_{G^\wedge} |w(\chi)|^2 d\nu.$$

Daí, conclui-se que $u \in H_\gamma^1(G)$. □

Teorema 2.2. *O espaço $H_\gamma^1(G)$ está imerso compactamente em $L^2(G)$ se, e somente se, o operador T é compacto.*

Demonstração. Considerando $H_\gamma^1(G) \subset\subset L^2(G)$, mostraremos que $T : L^2(G^\wedge) \rightarrow L^2(G^\wedge)$ é compacto. Seja $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2(G^\wedge)$. Para $m \in \mathbb{N}$, tem-se $T(w_m) \in L^2(G^\wedge)$. Daí, por Pontryagin, $u_m := T(w_m)^\vee \in L^2(G)$. Também, por (2.20), encontra-se

$$\int_{G^\wedge} |w_m|^2 d\nu = \int_{G^\wedge} (1 + \gamma^2) |T(w_m)|^2 d\nu = \int_{G^\wedge} (1 + \gamma^2) |\widehat{u_m}|^2 d\nu, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Como $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(G^\wedge)$, tem-se que $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_\gamma^1(G)$. Logo, pela hipótese, existe $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $u \in L^2(G)$ tais que

$$u_{m_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u \text{ em } L^2(G),$$

o que implica que

$$\widehat{u_{m_i}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \widehat{u} \text{ em } L^2(G^\wedge),$$

i.e.,

$$T(w_{m_i}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \widehat{u} \text{ em } L^2(G^\wedge).$$

Portanto, T é um operador compacto.

Para a implicação contrária, assumindo T compacto mostraremos que $H_\gamma^1(G) \subset\subset L^2(G)$. Seja $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $H_\gamma^1(G)$. Pelo Lema 2.1, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $w_m \in L^2(G^\wedge)$ tal que $\widehat{u_m} = T(w_m)$. Logo, pela equação (2.20),

$$\int_{G^\wedge} |w_m|^2 d\nu = \int_{G^\wedge} (1 + \gamma^2) |T(w_m)|^2 d\nu = \int_{G^\wedge} (1 + \gamma^2) |\widehat{u_m}|^2 d\nu, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Daí, como $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitado em $H_\gamma^1(G)$, a sequência $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(G^\wedge)$. Consequentemente, pela compacidade do operador T , existe $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $w \in L^2(G^\wedge)$ tais que

$$T(w_{m_i}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} w \text{ em } L^2(G^\wedge),$$

i.e.,

$$\widehat{u_{m_i}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} w \text{ em } L^2(G^\wedge),$$

o que resulta

$$u_{m_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} w^\vee \text{ em } L^2(G).$$

Portanto, $H_\gamma^1(G)$ está imerso compactamente em $L^2(G)$. □

Agora começaremos a analisar as propriedades dos grupo Abelianos compactos. Seja G um grupo AC. Nota-se que a medida de Haar ν é a medida de contagem, pois, como $\{\xi\}$ é aberto, tem-se $\nu(\{\xi\}) > 0$, $\forall \xi \in G^\wedge$, e como ν é invariante por translações, tem-se $\nu(\{\xi\}) = \nu(\{\chi\})$, $\forall \xi, \chi \in G^\wedge$. Logo, é claro que ν é a medida contagem. A função delta de Dirac, definida $G^\wedge$ e concentrada em $\xi \in G^\wedge$, é dada por $\delta_\xi(\chi) := 1$, se $\chi = \xi$, e $\delta_\xi(\chi) := 0$, se $\chi \neq \xi$. Notemos que o conjunto $\{\delta_\xi ; \xi \in G^\wedge\}$ é uma base ortonormal para $L^2(G^\wedge)$, ou seja, ortonormal e denso em $L^2(G^\wedge)$. De fato, a ortonormalidade segue de

$$\langle \delta_\xi, \delta_\chi \rangle_{L^2(G^\wedge)} = \int_{G^\wedge} \delta_\xi \delta_\chi d\nu = \int_{\{\chi\}} \delta_\xi d\nu = \delta_\xi(\chi) \nu(\{\chi\}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi = \chi, \\ 0 & \text{se } \xi \neq \chi. \end{cases} \quad (2.21)$$

Para a densidade, considerando $w \in \{\delta_\xi ; \xi \in G^\wedge\}^\perp$, temos

$$0 = \langle \delta_\xi, w \rangle_{L^2(G^\wedge)} = \int_{G^\wedge} \delta_\xi w \, d\nu = \int_{\{\xi\}} w \, d\nu = w(\xi) \nu(\{\xi\}), \quad \forall \xi \in G^\wedge,$$

ou seja, $w = 0$. Isto implica que $\{\delta_\xi ; \xi \in G^\wedge\}^\perp = \{0\}$.

Proposição 2.2. *Seja G um grupo AC. Então, para todo $\xi \in G^\wedge$, a função δ_ξ é um autovetor de T correspondente ao autovalor $(1 + \gamma(\xi)^2)^{-1/2}$, i.e., $\delta_\xi \neq 0$ e*

$$T(\delta_\xi) = \frac{\delta_\xi}{\sqrt{1 + \gamma(\xi)^2}}, \quad \forall \xi \in G^\wedge. \quad (2.22)$$

Demonstração. Claramente, pela definição do operador T , a relação (2.22) é satisfeita. Daí, como

$$\int_{G^\wedge} |\delta_\xi|^2 d\nu = \int_{G^\wedge} \delta_\xi d\nu = \nu(\{\xi\}) > 0, \quad \forall \xi \in G^\wedge, \quad (2.23)$$

a função δ_ξ é o autovetor correspondente ao autovalor $(1 + \gamma(\xi)^2)^{-1/2}$.

□

O teorema seguinte dá as condições necessárias para ter imersão compacta. Antes, lembremos que um grupo G (não precisa ser um grupo topológico) é *gerado* por S (ou S é *gerador* G) se $S \subset G$ e

$$G = \{g_1^{\varepsilon_1} g_2^{\varepsilon_2} \dots g_k^{\varepsilon_k} ; k \in \mathbb{N}, \{g_1, \dots, g_k\} \subset S \text{ e } \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} \subset \{+1, -1\}\}.$$

Se adicionalmente S é finito, diz-se que G é finitamente gerado. Esta não é a definição usual de conjunto gerador de um grupo (veja Dummit & Foote [19, Pag. 63]).

Teorema 2.3. *Seja G um grupo AC tal que*

$$H_\gamma^1(G) \subset\subset L^2(G),$$

então, $G^\wedge$ é enumerável. Além disso, se γ é limitado em um conjunto gerador de $G^\wedge$ (e ainda é verdadeira a imersão compacta), então $G^\wedge$ é finitamente gerado.

Demonstração. Pela imersão compacta e o Teorema 2.2, concluímos que o operador T é compacto. Sabe-se que $\{\delta_\xi ; \xi \in G^\wedge\}$ é uma base ortonormal de $L^2(G^\wedge)$, daí, pela Proposição 2.2, conclui-se que este é o conjunto de todos os autovetores, consequentemente, $\{\delta_\xi ; \xi \in G^\wedge\}$ é enumerável. Por outro lado, é claro que a função $\xi \in G^\wedge \mapsto \delta_\xi \in L^2(G^\wedge)$ é injetiva, daí, $G^\wedge$ é enumerável.

Suponhamos $S_0 \subset G^\wedge$ um conjunto gerador de $G^\wedge$ tal que γ é limitado em S_0 , i.e., existe $d_0 \geq 0$ tal que

$$\gamma(\xi) \leq d_0, \quad \forall \xi \in S_0.$$

Como T é compacto e $\|T\| \leq 1$, pelo Teorema Espectral para Operadores Compactos Limitados, o conjunto de autovalores

$$\left\{ \delta_\xi ; \xi \in G^\wedge \text{ e } \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma(\xi)^2}} \geq c \right\}$$

é finito, para $0 < c \leq 1$, equivalentemente,

$$\left\{ \delta_\xi ; \xi \in G^\wedge \text{ e } \gamma(\xi) \leq \sqrt{\frac{1}{c^2} - 1} \right\}$$

é finito, $0 < c \leq 1$. Daí, por

$$\{\delta_\xi ; \xi \in S_0\} \subset \{\delta_\xi ; \xi \in G^\wedge \text{ e } \gamma(\xi) \leq d_0\},$$

conclui-se que S_0 é finito. Portanto, $G^\wedge$ é finitamente gerado. $\square$

Exemplo 2.3. Nas condições do Exemplo 2.2, o toro infinito $H_\gamma^1(\mathbb{T}^I)$ não está imerso compactamente em $L^2(\mathbb{T}^I)$. De fato, dado $k \in I$, definimos $1_k \in \mathbb{Z}^I$ tal que é **zero** na coordenada $\ell \neq k$ e **um** na coordenada k . Daí, note que o conjunto

$$S_0 := \{e_{1_k} ; k \in I\}$$

é gerador do grupo dual $(\mathbb{T}^I)^\wedge$. Além disso, $\gamma(e_{1_k}) = 1, \forall k \in I$. Portanto, como a métrica γ é limitada no conjunto gerador infinito S_0 , pelo Teorema 2.3, nossa afirmação é justificada. Observe que para o caso I não enumerável era suficiente notar que $(\mathbb{T}^I)^\wedge$ é não enumerável.

Observação 2.5 (Funções quase-periódicas e compactificação de Bohr). Dado um grupo localmente compacto G , denotamos por $C_b(G)$ o espaço das funções definidas em G com valores reais (ou complexos) que são contínuas e limitadas. Uma função $f \in C_b(G)$ é dita **quase-periódica** se o conjunto das translações $\{g \mapsto f(gh) ; h \in G\}$ é relativamente compacto em $C_b(G)$, isto é, o fecho é compacto. O espaço destas funções é denotado por $AP(G)$. Note que, para X denotando o grupo de caracteres de G , a aplicação

$$\varphi_B : g \in G \mapsto (\xi(g))_{\xi \in X} \in (\mathbb{S}^1)^X \quad (2.24)$$

é um homomorfismo contínuo (injetivo) e o fecho do grupo $\varphi_B(G)$ em $(\mathbb{S}^1)^X$ é um grupo compacto, este último chamado a **compactificação de Bohr** de G e denotado por G_B . É claro que se $F \in C(G_B)$, então $F \circ \varphi_B \in AP(G)$. A implicação contrária é verdadeira, ou seja, se $f \in AP(G)$, então existe $F \in C(G_B)$ tal que $f = F \circ \varphi_B$, veja A. Pankov [37]. Isto diz que toda função em $AP(G)$ pode-se identificar com uma única função em $C(G_B)$.

Quando G^n é a compactificação de Bohr de $\mathbb{R}^n$ e φ_n é dado por (2.24), o par (G^n, φ_n) define o sistema dinâmico (contínuo) $\{\tau(x)\}_{x \in \mathbb{R}^n}$, $\tau(x)g = \varphi_n(x)g$, $(x, g) \in \mathbb{R}^n \times G^n$, onde (G^n, μ) é o espaço de probabilidade com μ a medida de Haar de G^n normalizada. Assim, podemos observar que as realizações de funções definidas sobre G^n pertencem ao espaço $AP(\mathbb{R}^n)$. Também, tem-se definido os espaços $\mathcal{L} \equiv L^2(G)$ e $\mathcal{H} \equiv H_\gamma^1(G)$, onde γ é uma métrica induzida pelo par (G^n, φ_n) , ver equação (2.18). A importância do estudo das funções quase-periódicas é porque são as generalizações imediatas das funções periódicas. Agora, a pergunta que nós fazemos é, **será possível, para funções quase-periódicas, fazer uma análise espectral da equação celular, seguindo o mesmo raciocínio do caso periódico?** Isto é, via Teorema de Rellich-Kondrachov, $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$. A resposta é não, a menos que condições mais restritivas sejam impostas. O próximo corolário justifica essa afirmação.

Corolário 2.1. *Seja G_B a compactificação de Bohr de $\mathbb{R}^n$. Então não existe uma pseudo-métrica γ tal que*

$$H_\gamma^1(G_B) \subset\subset L^2(G_B).$$

Demonstração. Segue de $G_B^\wedge$ não enumerável. □

Corolário 2.2. *Seja G um grupo AC tal que*

$$H_\gamma^1(G) \subset\subset L^2(G),$$

então $L^2(G)$ é separável.

Demonstração. Claramente $L^2(G^\wedge)$ é separável, pois $\{\delta_\xi ; \xi \in G^\wedge\}$ é uma base ortonormal enumerável de $L^2(G^\wedge)$. A prova do corolário segue da identidade de Parseval. □

Teorema 2.4. *Seja G um grupo AC. Se, $\forall d > 0$, o conjunto $\{\xi \in G^\wedge ; \gamma(\xi) \leq d\}$ é finito, então*

$$H_\gamma^1(G) \subset\subset L^2(G).$$

Demonstração. Como $\{\xi \in G^\wedge ; \gamma(\xi) \leq d\}$ é finito, $\forall d > 0$, e

$$G^\wedge = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\xi \in G^\wedge ; \gamma(\xi) \leq k\},$$

tem-se que $G^\wedge$ é enumerável, assim, pode-se considerar $G^\wedge = \{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Novamente, como $\{\xi \in G^\wedge ; \gamma(\xi) \leq d\}$ é finito, $\forall d > 0$, encontra-se que o conjunto

$$\left\{ \xi \in G^\wedge ; \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma(\xi)^2}} \geq c \right\} \quad (2.25)$$

é finito para todo $c \in (0, 1)$. Daí, temos que $\{\delta_{\xi_i} ; i \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal enumerável de autovetores com autovalores satisfazendo

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \gamma(\xi_i)^2}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \quad (2.26)$$

este último é consequência de (2.25). Portanto, T é compacto. □

Aplicação 1: Toro Infinito Enumerável

No caso do toro infinito enumerável $\mathbb{T}^\mathbb{N}$, existe uma métrica tal que o espaço de Sobolev encontra-se imerso compactamente em $L^2(\mathbb{T}^\mathbb{N})$. De fato, dado $\alpha := (\alpha_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \alpha_\ell = +\infty,$$

definimos a métrica com peso sobre o grupo dual $(\mathbb{T}^\mathbb{N})^\wedge$ por

$$\gamma_0(e_m, e_n) = 2\pi \sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell| |m_\ell - n_\ell|, \quad m, n \in \mathbb{Z}_c^\mathbb{N}. \quad (2.27)$$

Note que $\{m \in \mathbb{Z}_c^\mathbb{N} ; \gamma_0(e_m) \leq d\}$, $\forall d > 0$, é finito. Daí, pelo Teorema 2.4, o espaço de Sobolev $H_{\gamma_0}^1(\mathbb{T}^\mathbb{N})$ encontra-se imerso compactamente no espaço $L^2(\mathbb{T}^\mathbb{N})$.

Aplicação 2: Funções quasi-periódicas

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^n$ vetores quaisquer linearmente independentes com relação a $\mathbb{Z}$, e a matriz

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}_{m \times n}$$

satisfazendo

$$\{k \in \mathbb{Z}^m ; |\Lambda^T k| \leq d\} \quad (2.28)$$

finito para todo $d > 0$, onde Λ^T denota a transposta de Λ . A família $\{\tau(x) : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ definida por

$$\tau(x)\omega := \omega + \Lambda x - \llbracket \omega + \Lambda x \rrbracket \quad (2.29)$$

é um sistema dinâmico ergódico. Note que a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^m$, $\varphi(x) := \Lambda x - \llbracket \Lambda x \rrbracket$, é um homomorfismo de grupos contínuo e $\tau(x)\omega = \varphi(x) * \omega$ (* operação de grupo de $\mathbb{T}^m$). O grupo dual está caracterizado por $\mathbb{Z}^m$, isto é, o caráter natural do toro $\mathbb{T}^m$ é

$$\xi_k(y) = e^{2i\pi k \cdot y}, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad k \in \mathbb{Z}^m.$$

A métrica induzida pelo sistema dinâmico acima é

$$\gamma(\xi_k) = \left| \frac{\partial}{\partial x} \xi_k(\varphi(x)) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial x} e^{2i\pi k \cdot \Lambda x} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial x} e^{2i\pi \Lambda^T k \cdot x} \right| = 2\pi |\Lambda^T k|, \quad k \in \mathbb{Z}^m.$$

Portanto, pelo Teorema (2.4) e a condição (2.28), conclui-se que

$$H_\gamma^1(\mathbb{T}^m) \subset\subset L^2(\mathbb{T}^m).$$

Daí,

$$\mathcal{H} \subset\subset \mathcal{L},$$

espaços associados ao sistema dinâmico definido em (2.29). Também, se Φ é uma deformação estocástica, tem-se

$$\mathcal{H}_\Phi \subset\subset \mathcal{L}_\Phi.$$

Portanto, a análise espectral da equação de Bloch, no ambiente das funções quasi-periódicas que satisfazem a condição (2.28), e também para as quasi-periódicas compostas com a deformação estocástica Φ , segue desses resultados de imersão compacta.

Aplicação 3: Uma métrica γ definida pelo Folland

Aqui será estudado uma métrica particular, a qual é a generalização natural do toro $\mathbb{T}^n$, $n \in \mathbb{N}$, para o contexto dos grupos AC. Será apresentada uma caracterização da imersão compacta do espaço de Sobolev associado a esta métrica.

Seja G um grupo AC. Se $\xi \in G^\wedge$ e $S_0 \subset G^\wedge$ é um conjunto gerador de $G^\wedge$, existem $k \in \mathbb{N}$, $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k \in S_0$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\xi = \chi_1^{\alpha_1} \chi_2^{\alpha_2} \dots \chi_k^{\alpha_k}. \quad (2.30)$$

Queremos, inicialmente, definir a distância de $\xi \in G^\wedge$ à origem. Para isso, como a escrita do $\xi \in G^\wedge$ pode não ser única, é conveniente considerar o conjunto

$$N_\xi := \{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_k| ; k \in \mathbb{N} \text{ e } \xi = \chi_1^{\alpha_1} \chi_2^{\alpha_2} \dots, \chi_k^{\alpha_k}\} \subset \mathbb{N},$$

daí, pelo Princípio da Boa Ordenação, para cada $\xi \in G^\wedge$, o conjunto N_ξ possui um (único) elemento mínimo que será denotado por m_ξ . Definimos a *métrica de Folland* γ_F em $G^\wedge$ por

$$\gamma_F(\xi, \chi) := m_{\xi\chi^{-1}}, \forall \xi, \chi \in G^\wedge.$$

Teorema 2.5. *Seja G um grupo AC e γ_F a métrica de Folland. Então, $H_{\gamma_F}^1(G) \subset\subset L^2(G)$ se, e somente se, $G^\wedge$ é finitamente gerado.*

Demonstração. Primeiro, assumimos que $H_{\gamma_F}^1(G)$ está imersa compactamente em $L^2(G)$. Será mostrado que $G^\wedge$ é finitamente gerado. Pela definição de γ_F é claro que $\gamma_F(\xi) = 1$, para todo $\xi \in S_0$, i.e., γ_F limitado em S_0 . Daí, pelo Teorema 2.3, deduz-se $G^\wedge$ finitamente gerado.

Para o sentido contrário, suponhamos $G^\wedge$ finitamente gerado. Logo, devemos provar que $H_{\gamma_F}^1(G)$ está imerso compactamente em $L^2(G)$. Se $S_0 = \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, é o conjunto que gera $G^\wedge$, pelo Teorema 2.4, é suficiente mostrar que $\{\xi \in G^\wedge ; \gamma_F(\xi) \leq d\}$ é finito, para todo $d > 0$.

Afirmção: O conjunto $\{\xi \in G^\wedge ; \gamma_F(\xi) = l\}$ é finito, para todo $l \in \mathbb{N}$. De fato, por (2.30) e a definição de γ_F , note que cada $\xi \in G^\wedge$ identifica-se com o conjunto

$$\left\{(\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{Z}^k ; \xi = \chi_1^{\beta_1} \dots \chi_k^{\beta_k} \text{ e } |\beta_1| + \dots + |\beta_k| = \gamma_F(\xi)\right\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^k),$$

sendo esta identificação uma aplicação injetiva. Note também que

$$\#\mathcal{P}(\{(\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{Z}^k ; |\beta_1| + \dots + |\beta_k| = l\}) < \infty,$$

pois $\#\{(\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{Z}^k ; |\beta_1| + \dots + |\beta_k| = l\} < \infty$. Daí, conclui-se

$$\#\{\xi \in G^\wedge ; \gamma_F(\xi) = l\} < \infty,$$

o que mostra a afirmação.

Pela afirmação anterior, é simples concluir que o conjunto $\{\xi \in G^\wedge ; \gamma_F(\xi) \leq d\}$ é finito, para todo $d > 0$. Isto finaliza a prova do teorema. $\square$

Capítulo 3

Homogeneização da Equação de Schrödinger

Neste capítulo, estamos interessados em fazer uma análise assintótica rigorosa (isto é, $\varepsilon > 0$ tende para zero) da equação de Schrödinger (1). Isto será apresentado no Teorema 3.1 (Teorema de Homogeneização), o qual generaliza o Teorema 3.2 em Allaire & Piatnitski [5], para o contexto onde os coeficientes da equação são funções estacionárias compostas com a deformação estocástica. Na prova do Teorema de Homogeneização foi necessário adaptar técnicas de convergência duas escalas (ver Allaire [1]), homogeneização estocástica (ver Blanc, Le Bris & Lions [10, 11]) e teoria de regularidade elíptica (ver De Giorgi [26] e Stampacchia [20]).

Lembremos algumas estimativas satisfeitas pela solução da equação de Schrödinger (1).

Lema 3.1 (Conservação da Energia). *A solução u_ε de (1) satisfaz*

$$(i) \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon^0(x, \omega)|^2 dx, \text{ e}$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}^n} |\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varepsilon \nabla u_\varepsilon^0(x, \omega)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon^0(x, \omega)|^2 dx \right),$$

para todo $t \in [0, T]$, *q.t.p.* $\omega \in \Omega$, onde $C = 2a_0^{-1} \max\{\|A\|_\infty, \|V\|_\infty, \|U\|_\infty\}$ constante que não depende de $\varepsilon > 0$.

Estamos interessados em estudar a equação de Schrödinger (1) com dado inicial do tipo

$$u_\varepsilon^0(x, \omega) = e^{2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta^*\right) v^0(x), \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega,$$

onde $v^0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ e $\Psi(\theta^*)$ é uma autofunção da equação celular (2.1). Esta função será chamada *dado inicial bem preparado*, e a importância desta concentra-se em permite se aproximar a u_ε (quando $\varepsilon \approx 0$) pela informação obtida de uma *equação de massa efetiva* (equação com coeficientes que não apresentam as mesmas oscilações da equação (1)). A busca de dados iniciais bem preparados foi amplamente estudada, entre algumas das referências podemos citar Allaire & Piatnitski [5], Bensoussan, Lions & Papanicolaou [9, Chapter 4] e Poupaud & Ringhofer [38].

Importante lembrar que existe $\psi(\theta^*) \in \mathcal{H}$ tal que

$$\Psi(z, \omega, \theta^*) \equiv \Psi(\theta^*)(z, \omega) = \psi(\theta^*)(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \equiv \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*).$$

Observação 3.1. As seqüências $\{u_\varepsilon^0(\cdot, \omega)\}_{\varepsilon>0}$ e $\{\varepsilon \nabla u_\varepsilon^0(\cdot, \omega)\}_{\varepsilon>0}$ são seqüências limitadas em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $[L^2(\mathbb{R}^n)]^n$, respectivamente, para q.t.p. $\omega \in \Omega$. Segue do Teorema 1.3.

3.1 Teorema de Homogeneização

Nesta seção, como já foi adiantado, uma das principais ferramentas utilizadas para a prova do seguinte teorema é a convergência duas escalas estocástica, tratada na Seção 1.3. Por tal motivo, o espaço $L^2(\Omega)$ será assumido separável.

Teorema 3.1 (Teorema de Homogeneização). *Seja $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ uma frequência de Bloch a qual é um ponto crítico de $\lambda(\theta)$, i.e., $\nabla_\theta \lambda(\theta^*) = 0$, e $\lambda(\theta^*)$ um autovalor simples. Assumimos que, para $\varepsilon > 0$, o dado inicial u_ε^0 tem a forma*

$$u_\varepsilon(x, \omega) = e^{2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \theta^*\right) v^0(x) \equiv e^{2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega, \theta^*\right) v^0(x), \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega,$$

onde $v^0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então, se u_ε é a única solução de (1), $\varepsilon > 0$, a seqüência

$$v_\varepsilon(t, x, \omega) = e^{-\left(i \frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}\right)} u_\varepsilon(t, x, \omega), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_T^{n+1}, \quad \omega \in \Omega,$$

converge duas escalas estocástica para $v(t, x) \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*)$ e satisfaz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left| v_\varepsilon(t, x, \omega) - v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega, \theta^*\right) \right|^2 dx dt = 0,$$

para q.t.p. $\omega \in \Omega$, onde $v \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}^n))$ é a única solução da equação de Schrödinger homogeneizada

$$\begin{cases} i \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(A^* \nabla v) + U^* v = 0, & \text{em } \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ v(0, x) = v^0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

com a matriz homogeneizada $A^* = D_\theta^2 \lambda(\theta^*)$ e

$$U^* = c_\psi^{-1} \int_\Omega \int_{\Phi(Y, \omega)} U(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) |\psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*)|^2 dz d\mathbb{P},$$

onde

$$c_\psi = \int_\Omega \int_{\Phi(Y, \omega)} |\psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*)|^2 dz d\mathbb{P}.$$

Demonstração. A prova será feita em 5 passos:

Passo 1. Estimativas e Limite Duas Escalas. Definimos

$$v_\varepsilon(t, x, \omega) := e^{-\left(i \frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}\right)} u_\varepsilon(t, x, \omega), \quad (t, x, \omega) \in \mathbb{R}_T^{n+1} \times \Omega. \quad (3.1)$$

Calculando a primeira derivada em relação à variável x

$$\varepsilon \nabla v_\varepsilon(t, x, \omega) = \varepsilon \nabla u_\varepsilon(t, x, \omega) e^{-\left(i \frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}\right)} - 2i\pi \theta^* u_\varepsilon(t, x, \omega) e^{-\left(i \frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}\right)},$$

consequentemente,

$$\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t, x, \omega) e^{-\left(i \frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}\right)} = (\varepsilon \nabla + 2i\pi \theta^*) v_\varepsilon(t, x, \omega) \quad (3.2)$$

e

$$\begin{aligned} |\varepsilon \nabla v_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 &\leq (|\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t, x, \omega)| + 2\pi |\theta^*| |u_\varepsilon(t, x, \omega)|)^2 \\ &\leq 2|\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 + 8\pi^2 |\theta^*|^2 |u_\varepsilon(t, x, \omega)|^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Daí, pela igualdade $|u_\varepsilon(t, x, \omega)| = |v_\varepsilon(t, x, \omega)|$ e a desigualdade (3.3), tem-se

- $\int_{\mathbb{R}^n} |v_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 dx,$
- $\int_{\mathbb{R}^n} |\varepsilon \nabla v_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 dx + 8\pi^2 |\theta^*|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 dx,$

para todo $t \in [0, T)$, $\omega \in \Omega$, $\varepsilon > 0$. Portanto, pelo Lema 3.1, conclui-se

- $\int_{\mathbb{R}^n} |v_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon^0(x, \omega)|^2 dx,$
- $\int_{\mathbb{R}^n} |\varepsilon \nabla v_\varepsilon(t, x, \omega)|^2 dx \leq \tilde{C} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varepsilon \nabla u_\varepsilon^0(x, \omega)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon^0(x, \omega)|^2 dx \right),$

para todo $t \in [0, T)$, onde $\tilde{C}$ depende apenas de A, V, U e θ^* . Agora, juntamente com a Observação 3.1, temos que $\{v_\varepsilon(\cdot, \cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0}$ e $\{\varepsilon \nabla v_\varepsilon(\cdot, \cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0}$ são sequências limitadas nas normas dos espaços $L^2(\mathbb{R}_T^{n+1})$ e $[L^2(\mathbb{R}_T^{n+1})]^n$, respectivamente, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$. Daí, pelo Teorema de Compacidade (Teorema 1.8), para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, existe uma subsequência $\{\varepsilon'\}$ e uma função estacionária $v_\omega^* \in L^2(\mathbb{R}_T^{n+1}, \mathcal{H})$ tais que

$$v_{\varepsilon'}(t, x, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon' \rightarrow 0]{2-s} v_\omega^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega),$$

e

$$\varepsilon' \frac{\partial v_{\varepsilon'}}{\partial x_k}(t, x, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon' \rightarrow 0]{2-s} \frac{\partial}{\partial z_k} \left(v_\omega^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right),$$

ou seja, para $k \in \{1, \dots, n\}$, verifica-se

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_{\varepsilon'}(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi\left(t, x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon'}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} dx dt = \\ c_\Phi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_\Omega \int_{\Phi(Y, \omega)} v_\omega^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \overline{\varphi(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega)} dz d\mathbb{P} dx dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \varepsilon' \frac{\partial v_{\varepsilon'}}{\partial x_k}(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi\left(t, x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon'}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} dx dt = \\ c_\Phi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_\Omega \int_{\Phi(Y, \omega)} \frac{\partial}{\partial z_k} \left(v_\omega^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \right) \overline{\varphi(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega)} dz d\mathbb{P} dx dt, \end{aligned} \quad (3.5)$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty((-\infty, T) \times \mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}$. Por outro lado, note também que a sequência $\{v_\varepsilon^0(\cdot, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0}$,

$$v_\varepsilon^0(x, \omega) := \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega, \theta^*\right) v^0(x), \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega, \quad (3.6)$$

satisfaz

$$v_\varepsilon^0(\cdot, \tilde{\omega}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{2-s} v^0(x) \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*), \quad (3.7)$$

pois $\psi(\theta^*)$ é estacionária.

Passo 2. Fatoração do Limite Duas Escalas. Neste passo será provado que o limite duas escalas estocástica $v_\omega^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega)$ (encontrado no passo anterior) será paralelo à autofunção $\Psi(\theta^*)$. Isto é resumido na afirmação seguinte:

Afirmação: Existe $v_\omega \in L^2(\mathbb{R}_T^{n+1})$ tal que

$$v_\omega^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) = v_\omega(t, x) \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*) \equiv v_\omega(t, x) \Psi(z, \omega, \theta^*),$$

para q.t.p. $(z, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$, q.t.p. $(t, x) \in \mathbb{R}_T^{n+1}$.

Para mostrar essa afirmação colocamos a função teste

$$Z_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) = \varepsilon^2 e^{i\frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi\frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right), \quad (3.8)$$

na formulação variacional da equação (1), onde $\varphi \in C_c^\infty((-\infty, T) \times \mathbb{R}^n)$ e $\zeta \in \mathcal{S}$, encontrando

$$\begin{aligned} & \left[i \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon^0(x, \tilde{\omega}) \overline{Z_\varepsilon}(0, x, \tilde{\omega}) dx - i \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \overline{Z_\varepsilon}}{\partial t}(t, x, \tilde{\omega}) dx dt \right] \\ & + \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \nabla u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \cdot \nabla \overline{Z_\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) dx dt \right] \\ & + \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{Z_\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) dx dt \right. \\ & \quad \left. + \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} U\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{Z_\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) dx dt \right] = 0. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial t}(t, x, \tilde{\omega}) = i\lambda(\theta^*) e^{i\frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi\frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) + O(\varepsilon^2), \quad (3.9)$$

e

$$\nabla Z_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) = \varepsilon e^{i\frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi\frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} (\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) \left(\varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right). \quad (3.10)$$

Segue, por (3.1), (3.2), (3.6), (3.8), (3.9) e (3.10), que

$$\begin{aligned}
& \left[i\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon^0(x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi(0, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} dx \right. \\
& \quad \left. - \lambda(\theta^*) \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} dx dt + O(\varepsilon^2) \right] \\
& + \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) (\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \cdot \right. \\
& \quad \left. (\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) \left(\overline{\varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} \right) dx dt \right] \\
& + \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} dx dt + O(\varepsilon^2) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned}
& \left[-\lambda(\theta^*) \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} dx dt + O(\varepsilon^2) \right] \\
& + \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} (\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \cdot \right. \\
& \quad \left. A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) (\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) \left(\overline{\varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} \right) dx dt \right] \quad (3.11) \\
& + \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi(t, x) V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} dx dt \right. \\
& \quad \left. + O(\varepsilon^2) \right] = 0.
\end{aligned}$$

No segundo colchete, note que

$$\begin{aligned}
& A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) \left(\overline{\varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} \right) \right] \\
& = A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\varepsilon \nabla \overline{\varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)} \right. \\
& \quad + \varphi(t, x) [\nabla_y \Phi]^{-1} \left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) (\nabla_y \zeta) \left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \\
& \quad \left. + 2i\pi\theta^* \varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right],
\end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}
& A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) (\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*)\left(\varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \left\{ \varepsilon A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[e_k \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right] \right\} \\
&+ \varphi(t, x) \left\{ A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[[\nabla_y \Phi]^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) (\nabla_y \zeta)\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right] \right\} \\
&+ \varphi(t, x) \left\{ A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[2i\pi\theta^* \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Note que as sequências

- $\left\{ \varepsilon A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[e_k \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right] \right\}_{\varepsilon>0},$
- $\left\{ A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[[\nabla_y \Phi]^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) (\nabla_y \zeta)\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right] \right\}_{\varepsilon>0},$ e
- $\left\{ A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[2i\pi\theta^* \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \right] \right\}_{\varepsilon>0},$

convergem duas escalas forte para

- $0 \in \mathbb{R}^n$ (vetor nulo),
- $(z, \omega) \mapsto A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [\nabla_z (\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega))],$
- $(z, \omega) \mapsto A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [2i\pi\theta^* \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)],$

respectivamente, pois

- $(y, \omega) \mapsto A(y, \omega) [e_k \zeta(y, \omega)],$
- $(y, \omega) \mapsto A(y, \omega) [[\nabla_y \Phi]^{-1}(y, \omega) (\nabla_y \zeta)(y, \omega)] \cdot e_\ell, \ell \in \{1, \dots, n\},$
- $(y, \omega) \mapsto A(y, \omega) [2i\pi\theta^* \zeta(y, \omega)] \cdot e_\ell, \ell \in \{1, \dots, n\},$

são funções estacionárias. Daí, para q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$, a sequência

$$\left\{ A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) (\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*)\left(\varphi(t, x) \zeta\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right)\right) \right\}_{\varepsilon>0}$$

converge duas escalas forte para

$$(z, \omega) \mapsto A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [(\nabla_z + 2i\pi\theta^*)(\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega))].$$

Portanto, para cada $\tilde{\omega} \in \Omega$, considerando as convergências (3.4) e (3.5), o Corolário 1.2, e fazendo $\varepsilon' \rightarrow 0$ na equação (3.11), encontra-se

$$\begin{aligned}
& -\lambda(\theta^*) c_{\Phi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} v_{\tilde{\omega}}^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \overline{\varphi(t, x) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)} dz d\mathbb{P} dx dt \\
& + c_{\Phi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} (\nabla_z + 2i\pi\theta^*) (v_{\tilde{\omega}}^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \\
& \quad \overline{\varphi(t, x) A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [(\nabla_z + 2i\pi\theta^*)(\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega))]} dz d\mathbb{P} dx dt \\
& + c_{\Phi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} v_{\tilde{\omega}}^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \\
& \quad \overline{\varphi(t, x) V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)} dz d\mathbb{P} dx dt = 0
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty((-\infty, T) \times \mathbb{R}^n)$ e $\zeta \in \mathcal{S}$. Por conseguinte, para cada $\zeta \in \mathcal{S}$ existe $N_{\zeta} \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ tal que $|N_{\zeta}| = 0$ ($|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue em $(0, T) \times \mathbb{R}^n$) e

$$\begin{aligned}
& -\lambda(\theta^*) \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} v_{\tilde{\omega}}^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \overline{\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)} dz d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (\nabla_z + 2i\pi\theta^*) (v_{\tilde{\omega}}^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \\
& \quad \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta^*)(\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \overline{\zeta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)} dz d\mathbb{P} = 0,
\end{aligned}$$

para todo $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \setminus N_{\zeta}$. Segue da enumerabilidade do conjunto $\mathcal{S}$ que existe $N \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ (sem depender de ζ) tal que $|N| = 0$ e a equação acima é satisfeita para todo $(t, x) \in \mathbb{R}_T^{n+1} \setminus N$ e para todo $\zeta \in \mathcal{S}$, isto é,

$$L^{\Phi}(\theta^*)[v_{\tilde{\omega}}^*(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \cdot), \cdot)] = \lambda(\theta^*) v_{\tilde{\omega}}^*(t, x, \Phi^{-1}(\cdot, \cdot), \cdot), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_T^{n+1} \setminus N.$$

Daí, pela simplicidade do autovalor $\lambda(\theta^*)$, para cada $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \setminus N$, a função $(z, \omega) \mapsto v_{\tilde{\omega}}^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega)$ (que pertence ao espaço $\mathcal{H}$) é paralela à autofunção $\Psi(\theta^*)$, i.e., existe $v_{\tilde{\omega}}(t, x) \in \mathbb{C}$ tal que

$$v_{\tilde{\omega}}^*(t, x, \Phi^{-1}(z, \omega), \omega) = v_{\tilde{\omega}}(t, x) \Psi(z, \omega, \theta^*) \equiv v_{\tilde{\omega}}(t, x) \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*), \quad \text{q.t.p. } (z, \omega).$$

Portanto, como $v_{\tilde{\omega}}^* \in L^2(\mathbb{R}_T^{n+1}, \mathcal{H})$, conclui-se que $v_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathbb{R}_T^{n+1})$. Isto prova a afirmação.

Passo 3. Processo de Homogeneização. O procedimento utilizado neste passo será postular uma função teste conveniente e, inserindo esta na formulação variacional de (1), mediante um processo limite, permitirá obter a equação de Schrödinger homogeneizada.

Iniciamos considerando $\Lambda_k(\theta^*)$, $k \in \{1, \dots, n\}$, definida por (2.5),

$$\Lambda_k(z, \omega, \theta^*) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_k}(z, \omega, \theta^*) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_k}(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*), \quad (z, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega,$$

e definindo a função

$$Z_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) = e^{i\frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi\frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right),$$

onde $\varphi \in C_c^\infty((-\infty, T) \times \mathbb{R}^n)$,

$$\Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) = \Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}, \theta^*\right) \text{ e } \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) = \Lambda_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}, \theta^*\right).$$

Note que $Z_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega})$ satisfaz $Z_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \in C^1([0, T]; H^1(\mathbb{R}^n))$, para cada $\tilde{\omega} \in \Omega$ fixado. Logo, colocando Z_ε na formulação variacional da equação (1), encontramos

$$\begin{aligned} & \left[i \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon^0(x, \tilde{\omega}) \overline{Z_\varepsilon}(0, x, \tilde{\omega}) dx - i \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \overline{Z_\varepsilon}}{\partial t}(t, x, \tilde{\omega}) dx dt \right] \\ & + \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \nabla u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \cdot \nabla \overline{Z_\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) dx dt \right] \\ & + \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{Z_\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) dx dt \right. \\ & \quad \left. + \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} U\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{Z_\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) dx dt \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vamos denotar o primeiro colchete por C_1 , o segundo colchete por C_2 , e o terceiro colchete por C_3 , tendo $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.

Analisando o primeiro colchete da equação (3.12), como

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial t}(t, x, \tilde{\omega}) &= e^{i\frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi\frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \left[i \frac{\lambda(\theta^*)}{\varepsilon^2} \left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right], \end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[i \int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon^0(x, \tilde{\omega}) \overline{\left(\varphi(0, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(0, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx \right. \\ & \quad - \frac{\lambda(\theta^*)}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx dt \\ & \quad \left. - i \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx dt \right]. \end{aligned}$$

Analizando o segundo colchete na equação (3.12), calculando

$$\begin{aligned}
\nabla Z_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) &= e^{i\frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi\frac{\theta^*x}{\varepsilon}} \left[\nabla\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varphi(t, x) \nabla\Psi_\varepsilon(z, \tilde{\omega}, \theta^*) \right. \\
&\quad + \varepsilon \sum_{k=1}^n \nabla \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t, x) \right) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t, x) \nabla \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \\
&\quad \left. + 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right) \right] \\
&= e^{i\frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi\frac{\theta^*x}{\varepsilon}} \left[\varphi(t, x) \left(\nabla + 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right. \\
&\quad + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t, x) \left(\nabla + 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \nabla\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \\
&\quad \left. + \varepsilon \sum_{k=1}^n \nabla \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t, x) \right) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right],
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \nabla u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \cdot \overline{\nabla Z_\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) &= \\
A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\nabla u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) e^{-\left(i\frac{\lambda(\theta^*)t}{\varepsilon^2} + 2i\pi\frac{\theta^*x}{\varepsilon}\right)} \right] \cdot \left[\overline{\varphi}(t, x) \left(\nabla - 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi}_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right. \\
&\quad + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \left(\nabla - 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Lambda}_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \nabla\overline{\varphi}(t, x) \overline{\Psi}_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \\
&\quad \left. + \varepsilon \sum_{k=1}^n \nabla \left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda}_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right].
\end{aligned}$$

Reordenando convenientemente e considerando (3.2), encontramos

$$\begin{aligned}
A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \nabla u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \cdot \overline{\nabla Z_\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) &= \\
A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \left[\overline{\varphi}(t, x) \left(\nabla - 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi}_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
&\quad + \varepsilon A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \left(\nabla - 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Lambda}_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
&\quad + A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \left[\nabla\overline{\varphi}(t, x) \overline{\Psi}_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
&\quad + \varepsilon A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi\frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^n \nabla \left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda}_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right],
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
& A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \nabla u_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \cdot \overline{\nabla Z_{\varepsilon}}(t, x, \tilde{\omega}) = \\
& A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) (v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi}(t, x)) \right] \cdot \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& - A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \overline{\varphi}(t, x) \right] \cdot \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& + \varepsilon \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \left(v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \right] \cdot \\
& \quad \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& - \varepsilon \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& + \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \left(v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& - \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& + \varepsilon A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^n \nabla \left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right],
\end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned}
& A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \nabla u_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \cdot \overline{\nabla Z_{\varepsilon}}(t, x, \tilde{\omega}) = \\
& A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) (v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi}(t, x)) \right] \cdot \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& - \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) e_k \right] \cdot \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& + \varepsilon \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \left(v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \right] \cdot \\
& \quad \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& - \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[(\varepsilon \nabla - 2i\pi \theta^*) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& + \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \left(v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& - \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& + A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi \theta^*) v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^n \nabla \left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right].
\end{aligned}$$

Logo, reordenando, tem-se

$$\begin{aligned}
& A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \nabla u_{\varepsilon} \cdot \overline{\nabla Z_{\varepsilon}} = \\
& A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) (v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi}(t, x)) \right] \cdot \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& + \varepsilon \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \left(v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \right] \cdot \\
& \quad \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& - \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) e_k \right] \cdot \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& + \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \left(v_{\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_{\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& - \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[(\varepsilon \nabla - 2i\pi\theta^*) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] \\
& + \sum_{k=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right],
\end{aligned}$$

integrando obtemos o termo que aparece no segundo colchete, C_2 ,

$$\begin{aligned}
& \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \nabla u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \cdot \overline{\nabla Z_\varepsilon}(t, x, \tilde{\omega}) dx dt = C_2 = \\
& \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) (v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \bar{\varphi}(t, x)) \right] \cdot \\
& \quad \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi_\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& + \varepsilon \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \left(v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \right] \cdot \\
& \quad \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& - \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) e_k \right] \cdot \\
& \quad \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi_\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& + \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \left(v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \right] \cdot \quad (3.13) \\
& \quad \left[e_k \overline{\Psi_\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& - \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& - \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \\
& \quad \left[(\varepsilon \nabla - 2i\pi\theta^*) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& + \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \\
& \quad \left[\nabla \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt.
\end{aligned}$$

O próximo passo será reduzir esta expressão, utilizando convenientemente a equação ce-

lular em θ^* e a primeira equação celular auxiliar (estudadas na Seção 2.1). Note que para cada $t \in (0, T)$ tem-se $v_\varepsilon(t, \cdot, \tilde{\omega}) \bar{\varphi}(t, \cdot) \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Daí, na equação (2.9), tomando $v_\varepsilon(t, \cdot, \tilde{\omega}) \bar{\varphi}(t, \cdot)$, $t \in (0, T)$, como função teste, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) & \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) (v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \bar{\varphi}(t, x)) \right] \cdot \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} \right] dx \\ &= \frac{\lambda(\theta^*)}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} (v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \bar{\varphi}(t, x)) \overline{\Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} dx \\ & \quad - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^n} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) (v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \bar{\varphi}(t, x)) \overline{\Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Na primeira equação celular (2.8), pela hipótese $\nabla_\theta \lambda(\theta^*) = 0$, os termos de ordem um na variável θ são zerados, daí, de forma análoga, considerando convenientemente a função teste $v_\varepsilon(t, \cdot, \tilde{\omega}) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, \cdot)$, $t \in (0, T)$ e $k \in \{1, \dots, n\}$, encontra-se

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) & \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \left(v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \right] \cdot \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} \right] dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) e_k \right] \cdot \left[\left(\nabla - 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \overline{\Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} \right] dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[\left(\nabla + 2i\pi \frac{\theta^*}{\varepsilon} \right) \left(v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} \right] dx \\ &= \frac{\lambda(\theta^*)}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \left(v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} dx \\ & \quad - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left(v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} dx. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Daí, por (3.13), (3.14) e (3.15),

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) & \nabla u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \cdot \overline{\nabla Z_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega})} dx dt = C_2 = \\ & \frac{\lambda(\theta^*)}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} dx dt \\ & - \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} dx dt \\ & + \frac{\lambda(\theta^*)}{\varepsilon} \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} dx dt \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} dx dt \\ & - \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} \right] dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[(\varepsilon \nabla - 2i\pi\theta^*) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& + \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt.
\end{aligned}$$

Portanto, reordenando as quatro primeiras integrais do lado direito, encontra-se

$$\begin{aligned}
C_2 = & \left[\frac{\lambda(\theta^*)}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right) dx dt \right. \\
& - \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \\
& \quad \left. \left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right) dx dt \right. \\
& - \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& - \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[(\varepsilon \nabla - 2i\pi\theta^*) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& + \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \\
& \quad \left. \left[\nabla \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda_{k,\varepsilon}}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \right].
\end{aligned}$$

Agora, analisando o terceiro colchete na equação (3.12), temos

$$\begin{aligned}
C_3 = & \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right. \\
& \quad \left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right) dx dt \\
& + \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} U\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \\
& \quad \left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right) dx dt \right].
\end{aligned}$$

Voltando na equação (3.12), como $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
& \left[i \int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon^0(x, \tilde{\omega}) \overline{\left(\varphi(0, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(0, x) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx \right. \\
& \quad - \frac{\lambda(\theta^*)}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx dt \\
& \quad \left. - i \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_k}(t, x) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} \right] \\
& + \left[\frac{\lambda(\theta^*)}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx dt \right. \\
& \quad - \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \\
& \quad \quad \quad \overline{\left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx dt \\
& \quad - \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[e_k \bar{\Psi}_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& \quad - \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[(\varepsilon \nabla - 2i\pi\theta^*) \bar{\Lambda}_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \\
& \quad + \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \bar{\Lambda}_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right] dx dt \Big] \\
& + \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} V\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right. \\
& \quad \quad \quad \overline{\left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx dt \\
& \quad + \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} U\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \\
& \quad \quad \quad \overline{\left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx dt \Big] = 0.
\end{aligned}$$

Cortando os termos correspondentes, segue

$$\begin{aligned}
& \left[i \int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon^0(x, \tilde{\omega}) \overline{\left(\varphi(0, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(0, x) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx \right. \\
& \quad \left. - i \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_k}(t, x) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx \right] \\
& + \left[- \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[e_k \overline{\Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} \right] dx dt \right. \\
& - \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \nabla \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right] \cdot \left[(\varepsilon \nabla - 2i\pi\theta^*) \overline{\Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} \right] dx dt \\
& + \sum_{k=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right] \cdot \\
& \quad \left[\nabla \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_k}(t, x) \right) \overline{\Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} \right] dx dt \Big] \\
& + \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} U\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \right. \\
& \quad \left. \overline{\left(\varphi(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t, x) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right)} dx dt \right] = 0,
\end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}
& \left[i \int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon^0(x, \tilde{\omega}) \overline{\varphi(0, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} dx - i \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} + O(\varepsilon) \right] \\
& + \left[- \sum_{k, \ell=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) e_\ell \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_\ell \partial x_k}(t, x) \right] \cdot \overline{A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[e_k \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right]} dx dt \right. \\
& - \sum_{k, \ell=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left[v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) e_\ell \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_\ell \partial x_k}(t, x) \right] \cdot \overline{A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right]} dx dt \\
& + \sum_{k, \ell=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_\ell \partial x_k}(t, x) \right] \cdot \overline{A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[e_\ell \Lambda_{k, \varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*) \right]} dx dt \Big] \\
& + \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \bar{\varphi}(t, x) \overline{U\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)} dx dt + O(\varepsilon) \right] = 0. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Note que as sequências, $\varepsilon > 0$,

- $\Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) = \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right),$
- $A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[e_k \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*)\right] = A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[e_k \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right)\right],$
- $A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[(\varepsilon \nabla + 2i\pi\theta^*) \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*)\right] =$

$$\sum_{\ell=1}^n A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[[\nabla_y \Phi]^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left(e_\ell \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\ell \partial \theta_k} \left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right)\right) \right]$$

$$+ A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[2i\pi\theta^* \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_k} \left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) \right],$$
- $A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) [e_\ell \Lambda_{k,\varepsilon}(x, \tilde{\omega}, \theta^*)] = A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \left[e_\ell \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_k} \left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right)\right],$
- $U\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \Psi_\varepsilon(x, \tilde{\omega}, \theta^*) = U\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}\right) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right),$

convergem duas escalas estocástica forte para as funções, $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$,

- $(z, \omega) \mapsto \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*) = \Psi(z, \omega, \theta^*),$
- $(z, \omega) \mapsto A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [e_k \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*)] = A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [e_k \Psi(z, \omega, \theta^*)],$
- $(z, \omega) \mapsto \sum_{\ell=1}^n A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left[[\nabla_y \Phi]^{-1}(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left(e_\ell \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\ell \partial \theta_k} \right) (\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*) \right]$

$$+ A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left[2i\pi\theta^* \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_k} (\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*) \right]$$

$$= A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [(\nabla_z + 2i\pi\theta^*) \Lambda_k(z, \omega, \theta^*)],$$
- $(z, \omega) \mapsto A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \left[e_\ell \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_k} (\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*) \right]$

$$= A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [e_\ell \Lambda_k(z, \omega, \theta^*)],$$
- $(z, \omega) \mapsto U(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*) = U(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \Psi(z, \omega, \theta^*),$

respectivamente, pois as funções (envolvidas em cada um desses limites)

- $(y, \omega) \mapsto \psi(y, \omega, \theta^*),$
- $(y, \omega) \mapsto A(y, \omega) [e_k \psi(y, \omega, \theta^*)] \cdot e_\ell, \ell \in \{1, \dots, n\},$
- $(y, \omega) \mapsto A(y, \omega) \left[[\nabla_y \Phi]^{-1}(y, \omega) \left(e_\ell \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\ell \partial \theta_k} \right) (y, \omega, \theta^*) \right] \cdot e_j,$
- $(y, \omega) \mapsto A(y, \omega) \left[2i\pi\theta^* \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_k} (y, \omega, \theta^*) \right] \cdot e_j, j \in \{1, \dots, n\},$
- $(y, \omega) \mapsto A(y, \omega) \left[e_\ell \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_k} (y, \omega) \right] \cdot e_j, j \in \{1, \dots, n\},$
- $(y, \omega) \mapsto U(y, \omega) \psi(y, \omega),$

são estacionárias. Portanto, novamente pelas convergências (3.4), (3.5) e (3.7), o Corolário 1.2, e fazendo $\varepsilon' \rightarrow 0$ na equação (3.16), encontramos

$$\begin{aligned}
& \left\{ c_{\Phi}^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} v^0(x) \Psi(z, \omega, \theta^*) \overline{\varphi(0, x) \Psi(z, \omega, \theta^*)} dz d\mathbb{P} dx \right. \\
& \quad \left. - i c_{\Phi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} v_{\tilde{\omega}}(t, x) \Psi(z, \omega, \theta^*) \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \Psi(z, \omega, \theta^*)} dz d\mathbb{P} dx dt \right\} \\
& + \left\{ - \sum_{k, \ell=1}^n c_{\Phi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \left[v_{\tilde{\omega}}(t, x) \Psi(z, \omega, \theta^*) e_{\ell} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_{\ell} \partial x_k}(t, x) \right] \cdot \right. \\
& \quad \left. \overline{A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [e_k \Psi(z, \omega, \theta^*)]} dz d\mathbb{P} dx dt \right. \\
& - \sum_{k, \ell=1}^n c_{\Phi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \left[v_{\tilde{\omega}}(t, x) \Psi(z, \omega, \theta^*) e_{\ell} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_{\ell} \partial x_k}(t, x) \right] \cdot \\
& \quad \left. \overline{A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [(\nabla_z + 2i\pi\theta^*) \Lambda_k(z, \omega, \theta^*)]} dz d\mathbb{P} dx dt \right. \\
& + \sum_{k, \ell=1}^n c_{\Phi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \left[(\nabla_z + 2i\pi\theta^*)(v_{\tilde{\omega}}(t, x) \Psi(z, \omega, \theta^*)) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_{\ell} \partial x_k}(t, x) \right] \cdot \\
& \quad \left. \overline{A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) [e_{\ell} \Lambda_k(z, \omega, \theta^*)]} dz d\mathbb{P} dx dt \right\} \\
& + \left\{ c_{\Phi}^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} U(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) v_{\tilde{\omega}}(t, x) \Psi(z, \omega, \theta^*) \overline{\varphi(t, x) \Psi(z, \omega, \theta^*)} dz d\mathbb{P} dx dt \right\} \\
& = 0,
\end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |\Psi(z, \omega, \theta^*)|^2 dz d\mathbb{P} \right] v^0(x) \bar{\varphi}(0, x) dx \right. \\
& \quad \left. - i \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |\Psi(z, \omega, \theta^*)|^2 dz d\mathbb{P} \right] v_{\tilde{\omega}}(t, x) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}(t, x) dx dt \right\} \\
& + \left\{ - \sum_{k, \ell=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_{\ell} \Psi(z, \omega, \theta^*)) \cdot (e_k \bar{\Psi}(z, \omega, \theta^*)) dz d\mathbb{P} \right] \right. \\
& \quad \left. v_{\tilde{\omega}}(t, x) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_{\ell} \partial x_k}(t, x) dx dt \right. \\
& - \sum_{k, \ell=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) (e_{\ell} \Psi(z, \omega, \theta^*)) \cdot (\nabla_z - 2i\pi\theta^*) \bar{\Lambda}_k(z, \omega, \theta^*) dz d\mathbb{P} \right] \\
& \quad \left. v_{\tilde{\omega}}(t, x) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_{\ell} \partial x_k}(t, x) dx dt \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k,\ell=1}^n \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega) [(\nabla_z + 2i\pi\theta^*)\Psi(z,\omega,\theta^*)] \cdot (e_{\ell} \overline{\Lambda_k}(z,\omega,\theta^*)) dz d\mathbb{P} \right] \\
& \qquad \qquad \qquad v_{\omega}(t,x) \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial x_{\ell} \partial x_k}(t,x) dx dt \Big\} \\
& + \left\{ \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} U(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega) |\Psi(z,\omega,\theta^*)|^2 dz d\mathbb{P} \right] v_{\omega}(t,x) \overline{\varphi}(t,x) dx dt \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

a qual corresponde à formulação variacional da equação de Schrödinger

$$\begin{cases} i \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \operatorname{div}[B^* \nabla v(t,x)] + U^* v(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ v(0,x) = v^0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.18}$$

onde B é uma matriz complexa definida por

$$\begin{aligned}
B_{k,\ell} &:= \frac{1}{c_{\psi}} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega) (e_{\ell} \Psi(z,\omega,\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\Psi}(z,\omega,\theta^*)) dz d\mathbb{P} \right. \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega) (e_{\ell} \Psi(z,\omega,\theta^*)) \cdot [(\nabla_z - 2i\pi\theta^*) \overline{\Lambda_k}(z,\omega,\theta^*)] dz d\mathbb{P} \\
& \left. - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega) [(\nabla_z + 2i\pi\theta^*) \Psi(z,\omega,\theta^*)] \cdot (e_{\ell} \overline{\Lambda_k}(z,\omega,\theta^*)) dz d\mathbb{P} \right],
\end{aligned} \tag{3.19}$$

para $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$, e

$$U^* = c_{\psi}^{-1} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} U(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega) |\Psi(z,\omega,\theta^*)|^2 dz d\mathbb{P},$$

com

$$c_{\psi} = \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} |\Psi(z,\omega,\theta^*)|^2 dz d\mathbb{P} \equiv \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} \left| \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \right|^2 dz d\mathbb{P}.$$

Temos achado que $v_{\omega} \in L^2(\mathbb{R}_T^{n+1})$ é solução da equação de Schrödinger (3.18). Notemos também que (3.17) é a formulação variacional da equação

$$\begin{cases} i \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \operatorname{div}[(B^*)^t \nabla v(t,x)] + U^* v(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ v(0,x) = v^0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.20}$$

consequentemente, $v_{\omega} \in L^2(\mathbb{R}_T^{n+1})$ é também solução desta equação de Schrödinger. Daí, somando as equações (3.18) e (3.20), encontramos que $v_{\omega} \in L^2(\mathbb{R}_T^{n+1})$ é solução de

$$\begin{cases} i \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \operatorname{div}[A^* \nabla v(t,x)] + U^* v(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ v(0,x) = v^0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.21}$$

onde

$$A^* = \frac{B^* + (B^*)^t}{2},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (A^*)_{k,\ell} := & \frac{1}{2c_\psi} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) (e_\ell \Psi(z,\omega, \theta^*)) \cdot (e_k \bar{\Psi}(z,\omega, \theta^*)) dz d\mathbb{P} \right. \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) (e_\ell \Psi(z,\omega, \theta^*)) \cdot [(\nabla_z - 2i\pi\theta^*) \bar{\Lambda}_k(z,\omega, \theta^*)] dz d\mathbb{P} \\ & - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) [(\nabla_z + 2i\pi\theta^*) \Psi(z,\omega, \theta^*)] \cdot (e_\ell \bar{\Lambda}_k(z,\omega, \theta^*)) dz d\mathbb{P} \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) (e_k \Psi(z,\omega, \theta^*)) \cdot (e_\ell \bar{\Psi}(z,\omega, \theta^*)) dz d\mathbb{P} \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) (e_k \Psi(z,\omega, \theta^*)) \cdot [(\nabla_z - 2i\pi\theta^*) \bar{\Lambda}_\ell(z,\omega, \theta^*)] dz d\mathbb{P} \\ & \left. - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) [(\nabla_z + 2i\pi\theta^*) \Psi(z,\omega, \theta^*)] \cdot (e_k \bar{\Lambda}_\ell(z,\omega, \theta^*)) dz d\mathbb{P} \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

para $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$. A equação (3.21) será chamada de equação de Schrödinger homogeneizada.

Passo 4. Caracterização da Matriz Homogeneizada e v_ω independente de $\tilde{\omega} \in \Omega$.

A matriz homogeneizada é uma matriz real e coincide com a segunda derivada de $\theta \mapsto \lambda(\theta)$ avaliada em θ^* , $A^* = D_\theta^2 \lambda(\theta^*)$. De fato, como $\nabla_\theta \lambda(\theta^*) = 0$, a equação (2.6), é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \lambda(\theta^*)}{\partial \theta_\ell \partial \theta_k} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} |\Psi(z,\omega, \theta^*)|^2 dz d\mathbb{P} \right] = \\ \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) (e_\ell \Psi(z,\omega, \theta^*)) \cdot (e_k \bar{\Psi}(z,\omega, \theta^*)) dz d\mathbb{P} \\ + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) (e_\ell \Psi(z,\omega, \theta^*)) \cdot [(\nabla_z - 2i\pi\theta^*) \bar{\Lambda}_k(z,\omega, \theta^*)] dz d\mathbb{P} \\ - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) [(\nabla_z + 2i\pi\theta^*) \Psi(z,\omega, \theta^*)] \cdot (e_\ell \bar{\Lambda}_k(z,\omega, \theta^*)) dz d\mathbb{P} \quad (3.23) \\ + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) (e_k \Psi(z,\omega, \theta^*)) \cdot (e_\ell \bar{\Psi}(z,\omega, \theta^*)) dz d\mathbb{P} \\ + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) (e_k \Psi(z,\omega, \theta^*)) \cdot [(\nabla_z - 2i\pi\theta^*) \bar{\Lambda}_\ell(z,\omega, \theta^*)] dz d\mathbb{P} \\ - \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y,\omega)} A(\Phi^{-1}(z,\omega), \omega) [(\nabla_z + 2i\pi\theta^*) \Psi(z,\omega, \theta^*)] \cdot (e_k \bar{\Lambda}_\ell(z,\omega, \theta^*)) dz d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Daí, pode-se concluir que

$$A^* = \frac{1}{8\pi^2} D_\theta^2 \lambda(\theta^*),$$

ou seja, A^* é uma matriz de componentes reais. Por outro lado, como A^* é uma matriz real, pelo Corolário 1.1, a equação de Schrödinger homogeneizada (3.21) possui

uma única solução, daí, conclui-se que a função $v_{\tilde{\omega}} \in L^2(\mathbb{R}_T^{n+1})$ não depende de $\tilde{\omega} \subset \Omega$. Denotando por v esta solução única da equação (3.21), temos que a sequência (toda) $\{v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega})\}_{\varepsilon>0} \subset L^2(\mathbb{R}_T^{n+1})$ converge duas escalas estocástica para a função

$$(t, x, z, \omega) \mapsto v(t, x) \Psi(z, \omega, \theta^*) \equiv v(t, x) \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*).$$

Passo 5. Aproximação em $L^2(\mathbb{R}_T^{n+1})$.

Agora mostraremos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left| v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) - v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) \right|^2 dx dt = 0,$$

q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$.

Notemos que

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left| v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) - v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) \right|^2 dx dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} |v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega})|^2 dx dt - \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right)} dx dt \\ & \quad - \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \overline{v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega})} v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) dx dt \\ & \quad + \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left| v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) \right|^2 dx dt. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Pela conservação da energia da equação de Schrödinger (1), a primeira integral do lado direito satisfaz

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega})|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega})|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon^0(x, \tilde{\omega})|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |v_\varepsilon^0(x, \tilde{\omega})|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| v^0(x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) \right|^2 dx, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$, q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$. Observe que, pela regularidade elíptica (ver E. De Giorgi [26] e G. Stampacchia [20]), a solução da equação de Bloch satisfaz $\psi(\theta) \in L^\infty(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega))$.

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} |v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega})|^2 dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} |v^0(x)|^2 \left| \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) \right|^2 dx dt = \\ &= c_\Phi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |v^0(x) \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*)|^2 dz d\mathbb{P} dx dt \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left| v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) \right|^2 dx dt &= \\ &= c_\Phi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |v(t, x) \psi(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*)|^2 dz d\mathbb{P} dx dt. \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) \overline{v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right)} dx dt = \\ & c_\Phi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right) \overline{v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right)} dz d\mathbb{P} dx dt, \end{aligned}$$

q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$. Daí, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ na equação (3.24), encontramos

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left| v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) - v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) \right|^2 dx dt \\ &= c_\Phi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |v^0(x) \psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right)|^2 dz d\mathbb{P} dx dt \\ & \quad - c_\Phi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right) \overline{v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right)} dz d\mathbb{P} dx dt \\ & \quad - c_\Phi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} \overline{v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right)} v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right) dz d\mathbb{P} dx dt \\ & \quad + c_\Phi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right)|^2 dz d\mathbb{P} dx dt, \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left| v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) - v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) \right|^2 dx dt \\ &= c_\Phi^{-1} \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} |v^0(x)|^2 dx dt \right] \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |\psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right)|^2 dz d\mathbb{P} \right] \\ & \quad - c_\Phi^{-1} \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} |v(t, x)|^2 dx dt \right] \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |\psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right)|^2 dz d\mathbb{P} \right] \\ & \quad - c_\Phi^{-1} \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} |v(t, x)|^2 dx dt \right] \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |\psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right)|^2 dz d\mathbb{P} \right] \\ & \quad + c_\Phi^{-1} \left[\iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} |v(t, x)|^2 dx dt \right] \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} |\psi\left(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega, \theta^*\right)|^2 dz d\mathbb{P} \right], \end{aligned}$$

q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$. Portanto, pela conservação da energia da equação de Schrödinger homogeneizada (3.21), Corolário 1.1,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |v^0(x)|^2 dx,$$

para todo $t \in [0, T]$, conclui-se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left| v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) - v(t, x) \psi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \tilde{\omega}\right), \tilde{\omega}, \theta^*\right) \right|^2 dx dt = 0,$$

q.t.p. $\tilde{\omega} \in \Omega$.

□

3.2 Aplicação: Funções Quasi-Periódicas

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^n$ e $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\Lambda^t := (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)_{n \times m}$, tais que

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ são vetores linearmente independentes relativos a $\mathbb{Z}$,
- para todo $d > 0$, $\{k \in \mathbb{Z}^m ; |\Lambda^t k| \leq d\}$ é finito.

Considera-se o sistema dinâmico $\{\tau(y) : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m ; y \in \mathbb{R}^n\}$ definido por

$$\tau(y)g := g + \Lambda y - \lfloor g + \Lambda y \rfloor,$$

Também, $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)$ um espaço de probabilidade e $\{\tau^{(0)}(\ell) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_0 ; \ell \in \mathbb{Z}^n\}$ um sistema dinâmico (discreto) ergódico. Então, encontramos o espaço de probabilidade $\Omega_0 \times \mathbb{T}^m$ e o sistema dinâmico ergódico $\{T(y) : \Omega_0 \times \mathbb{T}^m \rightarrow \Omega_0 \times \mathbb{T}^m ; y \in \mathbb{R}^n\}$ definido por

$$T(y)(\omega_0, g) := (\tau^{(0)}(\lfloor g + \Lambda y \rfloor)\omega_0, \tau(y)g).$$

Usaremos a notação $\Omega := \Omega_0 \times \mathbb{T}^m$ e $\omega = (\omega_0, g)$.

Por outro lado, consideramos $B_{\text{per}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\Upsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma deformação τ -estocástica satisfazendo $\nabla_y \Upsilon(y, g) = B_{\text{per}}(\tau(y)g)$. Definimos a deformação T -estocástica $\Phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\Phi(y, \omega) = \Upsilon(y, g) + X(\omega_0).$$

Agora definiremos os coeficientes da equação de Schrödinger que será estudado. Sejam $A_{\text{per}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ e $U_{\text{per}}, V_{\text{per}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funções $[0, 1]^m$ -periódicas limitadas. Tomando

- $A(y, \omega) = A_{\text{per}}(\tau(y)g)$,
- $U(y, \omega) = U_{\text{per}}(\tau(y)g)$,
- $V(y, \omega) = V_{\text{per}}(\tau(y)g)$,

obtemos funções T -estacionárias. Daí, podem-se definir os coeficientes da equação de Schrödinger (1) como segue

- $(z, \omega) \mapsto A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)$,
- $(z, \omega) \mapsto U(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)$,
- $(z, \omega) \mapsto V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)$.

Consequentemente, logo de algumas simplificações, a equação celular espectral da equação de Schrödinger (1) é dado por

$$\begin{cases} -(\text{div}_{QP} + 2i\pi\theta) [A_{\text{per}}(\cdot)(\nabla^{QP} + 2i\pi\theta)\psi_{\text{per}}(\cdot)] \\ \quad + V_{\text{per}}(\cdot)\psi_{\text{per}}(\cdot) = \lambda \psi_{\text{per}}(\cdot) \text{ in } \mathbb{T}^m, \\ \psi_{\text{per}}(\cdot) \text{ is } \mathbb{T}^m\text{-periodic function,} \end{cases}$$

onde os operadores div_{QP} e ∇^{QP} são definidos por:

- $(\nabla^{QP} u_{\text{per}})(y) := B_{\text{per}}^{-1}(y) \Lambda^t (\nabla u_{\text{per}})(y),$
- $(\text{div}_{QP} F)(y) := \text{div}(\Lambda B_{\text{per}}^{-1}(\cdot) F(\cdot))(y).$

Como o par $(\mathbb{T}^m, \varphi)$, com $\varphi(y) = \Lambda y - \lfloor \Lambda y \rfloor$, garante que $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ (ver Aplicações 2 na Subseção 2.2.2), a equação celular acima possui soluções.

Considera-se o dado inicial bem preparado

$$u_\varepsilon^0(x, \omega) = e^{2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} \psi_{\text{per}}\left(\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right) \omega, \theta^*\right) v_0(x), \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega,$$

onde $v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $(\theta^*, \lambda(\theta^*))$ satisfaz:

- $\lambda(\theta^*)$ é um autovalor simples,
- $\nabla_{\theta} \lambda(\theta^*) = 0.$

Daí, pelo Teorema 3.1 (teorema de homogeneização), a sequência

$$v_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega}) = e^{-i \frac{\lambda(\theta^*) t}{\varepsilon^2} + 2i\pi \frac{\theta^* \cdot x}{\varepsilon}} u_\varepsilon(t, x, \tilde{\omega})$$

converge duas escalas estocástico para $v(t, x) \psi_{\text{per}}(\tau(\Phi^{-1}(z, \omega)) \omega, \theta^*)$. Os coeficientes efetivos são $A^* = D_\theta^2 \lambda(\theta^*)$ e

$$U^* = \int_{\mathbb{T}^m} U_{\text{per}}(y) |\psi_{\text{per}}(y, \theta^*)|^2 \det[B_{\text{per}}(y)] dy.$$

Capítulo 4

Perturbação da Identidade

No capítulo anterior, vimos que o principal teorema dessa tese (Teorema 3.1) depende fortemente do estudo espectral do operador $L^\Phi(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, definido em $\mathcal{H}^*$ com domínio $D(L^\Phi(\theta)) = \mathcal{H}$ e dado por

$$L^\Phi(\theta)[f] := -(\operatorname{div}_z + 2i\pi\theta) \left[A(\Phi^{-1}(\cdot, \cdot), \cdot)(\nabla_z + 2i\pi\theta)f(\Phi^{-1}(\cdot, \cdot), \cdot) \right] \\ + V(\Phi^{-1}(\cdot, \cdot), \cdot)f(\Phi^{-1}(\cdot, \cdot), \cdot), \quad f \in \mathcal{H},$$

onde A e V são funções estacionárias essencialmente limitadas. Aqui,

$$\langle L^\Phi(\theta)[f], g \rangle :=$$

$$\int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} A(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)(\nabla_z + 2i\pi\theta)f(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta)g(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)} dz d\mathbb{P} \\ + \int_{\Omega} \int_{\Phi(Y, \omega)} V(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)f(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega) \overline{g(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega)} dz d\mathbb{P}, \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

Mais precisamente, foi exigida a existência de um par $(\theta^*, \lambda(\theta^*)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que

- $\lambda(\theta^*)$ é um autovalor simples de $L^\Phi(\theta^*)$,
- $\nabla_{\theta}\lambda(\theta^*) = 0$ (criticidade), e
- $L^2(\Omega)$ é separável.

Para ambientes estacionários gerais não é clara a existência do par $(\theta^*, \lambda(\theta^*))$ tendo as propriedades acima. A principal dificuldade é a falta de imersão compacta $\mathcal{H}$ em $\mathcal{L}$. O objetivo desse capítulo será mostrar a existência de alguns modelos estocásticos interessantes onde se garante a existência de um espectro crítico para $L^\Phi(\theta^*)$.

Na seção 1, será estudada uma versão do operador $L^\Phi(\theta)$, onde as funções estacionárias A e V são Y -periódicas, e a deformação estocástica é uma perturbação estocástica da identidade, modelo estocástico introduzido em Blanc, Le Bris & Lions [11, Section 3]. A estratégia para a análise espectral neste ambiente será obter o espectro pontual estocástico a partir do espectro periódico com ajuda do Teorema 1.12 (Teorema de Perturbação).

Na seção 2, será estudada a influência da perturbação estocástica da identidade sobre os coeficientes homogeneizados. Estas serão expressadas como uma expansão e exibiremos algoritmos para determinar os primeiros termos dessa expansão.

4.1 Análise Espectral da Equação Celular: Caso Periódico Perturbado

Nesta seção estudaremos uma versão da equação celular espectral onde a deformação estocástica é uma perturbação estocástica da identidade. Esta deformação foi estudada em X. Blanc, C. Le Bris e P.-L. Lions [11, Section 3] na homogeneização clássica de equações elípticas. Apresentamos, seguidamente, o que entenderemos por perturbação estocástica da identidade.

No que se segue, $B(0, r)$ denota a bola aberta em $\mathbb{R}$ de raio $r > 0$ centrada na origem, isto é, $B(0, r) = \{\eta \in \mathbb{R} ; |\eta| < r\}$.

Definição 4.1. *Dado $\eta \in B(0, 1)$ e Z uma deformação estocástica. Dizemos que uma aplicação $\Phi_\eta : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma perturbação estocástica da identidade se é uma deformação estocástica e satisfaz*

$$\Phi_\eta(y, \omega) = y + \eta Z(y, \omega) + O(\eta^2), \quad (y, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega,$$

em $C^1(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega))$ quando $\eta \rightarrow 0$, isto é, para cada $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, existem $c > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\sup_{y \in \mathcal{O}} \|\Phi_\eta(y, \cdot) - y - \eta Z(y, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{y \in \mathcal{O}} \|\nabla_y \Phi_\eta(y, \cdot) - I - \eta \nabla_y Z(y, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq c \eta^2,$$

para todo $\eta \in B(0, \delta)$.

Lema 4.1. *Dado $\eta \in B(0, 1)$. A perturbação estocástica da identidade Φ_η , satisfaz*

$$[\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} = I - \eta [\nabla_y Z] + O(\eta^2) \quad \text{e} \quad \det[\nabla_y \Phi_\eta] = 1 + \eta \operatorname{div}_y Z + O(\eta^2), \quad (4.1)$$

em $C(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega))$ quando $\eta \rightarrow 0$.

A partir deste momento, A_{per} denotará uma matriz simétrica de componentes reais e V_{per} uma função real, as duas sendo $\mathbf{Y}$ -periódicas e essencialmente limitadas, isto é, $A_{\text{per}} = (A_{k\ell})$, $A_{k\ell} \in L_{\text{per}}^\infty(\mathbf{Y})$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$, e $V_{\text{per}} \in L_{\text{per}}^\infty(\mathbf{Y})$. Adicionalmente, assumiremos que A_{per} satisfaz a condição de coercividade, isto é, existe $a_0 > 0$ tal que

$$\sum_{k, \ell=1}^n A_{k\ell}(y) \xi_j \xi_\ell \geq a_0 |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Lembremos de algumas propriedades espectrais básicas referentes ao contexto periódico.

Lema 4.2 (Versão Periódica). *Dado $\theta \in \mathbb{R}^n$. O operador $L_{\text{per}}(\theta)$ definido em $(H_{\text{per}}^1(\mathbf{Y}))^*$ por*

$$L_{\text{per}}(\theta)[\cdot] := -(\operatorname{div}_y + 2i\pi\theta)[A_{\text{per}}(y)(\nabla_y + 2i\pi\theta)(\cdot)] + V_{\text{per}}(y)(\cdot), \quad (4.2)$$

com domínio $D(L_{\text{per}}(\theta)) = H_{\text{per}}^1(\mathbf{Y})$ e formulação variacional

$$\begin{aligned} \langle L_{\text{per}}(\theta)[f], g \rangle &:= \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y)(\nabla_y + 2i\pi\theta)f(y) \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta)g(y)} dy \\ &\quad + \int_{\mathbf{Y}} V_{\text{per}}(y) f(y) \overline{g(y)} dy, \end{aligned}$$

tem as seguintes propriedades:

(i) para cada $\theta \in \mathbb{R}^n$, existem $\gamma_0 > 0$ e $b_0 > 0$ tais que $L_{\gamma_0} := L_{\text{per}}(\theta) + \gamma_0 I$ satisfaz

$$\langle L_{\gamma_0}[f], f \rangle \geq b_0 \|f\|_{H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y})}^2, \quad \forall f \in H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y}).$$

(ii) para cada $\theta \in \mathbb{R}^n$, o espectro pontual do operador $L_{\text{per}}(\theta)$ é não vazio e os autoespaços têm dimensão finita.

Demonstração. A prova do item (i) será baseada na seguinte afirmação.

Afirmação: Seja $\theta \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\int_{\mathcal{Y}} |(\nabla_y + 2i\pi\theta)f|^2 dy + \frac{16\pi^2|\theta|^2}{\delta} \int_{\mathcal{Y}} |f|^2 dy \geq \min\{1 - \delta, 4\pi^2|\theta|^2\} \|f\|_{H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y})}^2,$$

para todo $f \in H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y})$ e $\delta > 0$. Com efeito, se $f \in H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y})$ e $\delta > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} |(\nabla_y + 2i\pi\theta)f|^2 &= (\nabla_y + 2i\pi\theta)f \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta)f} \\ &= |\nabla_y f|^2 + (2i\pi\theta f) \cdot \overline{\nabla_y f} + \nabla_y f \cdot \overline{(2i\pi\theta f)} + 4\pi^2|\theta|^2|f|^2 \\ &\geq |\nabla_y f|^2 - 4\pi|\theta||f||\nabla_y f| + 4\pi^2|\theta|^2|f|^2 \\ &\geq |\nabla_y f|^2 - \frac{16\pi^2|\theta|^2|f|^2}{\delta} - \delta|\nabla_y f|^2 + 4\pi^2|\theta|^2|f|^2 \\ &= (1 - \delta)|\nabla_y f|^2 - \frac{16\pi^2|\theta|^2|f|^2}{\delta} + 4\pi^2|\theta|^2|f|^2. \end{aligned}$$

Daí, a prova da afirmação é concluída integrando em $\mathcal{Y}$.

Definindo

$$\gamma_0 := a_0 \left(\frac{16\pi^2|\theta|^2}{\delta} + \|V_{\text{per}}\|_{\infty} \right) \quad \text{e} \quad L_{\gamma_0} := L_{\text{per}}(\theta) + \gamma_0 I,$$

para algum δ tal que $0 < \delta < 1$. Notamos

$$\langle L_{\gamma_0}[f], f \rangle = \langle L_{\text{per}}(\theta)[f], f \rangle + \langle \gamma_0 f, f \rangle,$$

daí, pela coersividade da matriz A_{per} ,

$$\langle L_{\gamma_0}[f], f \rangle \geq a_0 \int_{\mathcal{Y}} |(\nabla_y + 2i\pi\theta)f|^2 dy + \int_{\mathcal{Y}} V_{\text{per}}(y)|f|^2 dy + \gamma_0 \int_{\mathcal{Y}} |f|^2 dy,$$

logo, da definição de γ_0

$$\langle L_{\gamma_0}[f], f \rangle \geq a_0 \left[\int_{\mathcal{Y}} |(\nabla_y + 2i\pi\theta)f|^2 dy + \frac{16\pi^2|\theta|^2}{\delta} \int_{\mathcal{Y}} |f|^2 dy \right] + \int_{\mathcal{Y}} (V_{\text{per}}(y) + \|V_{\text{per}}\|_{\infty})|f|^2 dy.$$

Portanto, pela afirmação, conclui-se

$$\langle L_{\gamma_0}[f], f \rangle \geq \min\{a_0(1 - \delta), 4\pi^2 a_0|\theta|^2\} \|f\|_{H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y})}^2, \quad \forall f \in H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y}).$$

A prova do item (ii) segue do item (i) e a imersão compacta do espaço $H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y})$ no espaço $L_{\text{per}}^2(\mathcal{Y})$. $\square$

Claramente, o operador $L_{\text{per}}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, se estende naturalmente para o espaço $\mathcal{H}$ com todas as propriedades do Lema 4.2 preservadas.

Teorema 4.1. *Dados $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$ e Φ_η uma perturbação estocástica da identidade. O operador $L^{\Phi_\eta}(\theta)$, $\eta \in B(0, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, satisfaz: se λ_0 é um autovalor de multiplicidade $k_0 \in \mathbb{N}$ do operador $L_{\text{per}}(\theta_0)$, isto é,*

$$\dim\{f \in H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y}) ; L_{\text{per}}(\theta_0)[f] = \lambda_0 f\} = k_0,$$

então existem $\mathcal{U}$ vizinhança de $(0, \theta_0)$, k_0 aplicações reais analíticas

$$(\eta, \theta) \in \mathcal{U} \mapsto \lambda_k(\eta, \theta) \in \mathbb{R}, \quad k \in \{1, \dots, k_0\},$$

e k_0 aplicações vetoriais analíticas

$$(\eta, \theta) \in \mathcal{U} \mapsto \psi_k(\eta, \theta) \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \quad k \in \{1, \dots, k_0\},$$

tais que

$$(i) \quad \lambda_k(0, \theta_0) = \lambda_0,$$

$$(ii) \quad L^{\Phi_\eta}(\theta)[\psi_k(\eta, \theta)] = \lambda_k(\eta, \theta)[\psi_k(\eta, \theta)], \quad \forall (\eta, \theta) \in \mathcal{U},$$

$$(iii) \quad \dim\{f \in \mathcal{H} ; L^{\Phi_\eta}(\theta)[f] = \lambda_k(\eta, \theta)f\} \leq k_0, \quad \forall (\eta, \theta) \in \mathcal{U},$$

para $k \in \{1, \dots, k_0\}$.

Demonstração. Note que $L^{\Phi_\eta}(\theta) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$, para $\eta \in B(0, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}^n$. A prova seguirá em 3 passos:

Passo 1: Provaremos que o operador auxiliar $L^{\Phi_\eta}(\theta)$ é uma expansão de operadores em $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$. De fato, fazendo mudança de variável, encontra-se

$$\begin{aligned} \langle L^{\Phi_\eta}(\theta)[f], g \rangle_{\mathcal{H}^*, \mathcal{H}} &= \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) ([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1}(y, \omega) \nabla_y f(y, \omega) + 2i\pi\theta f(y, \omega)) \cdot \\ &\quad \overline{([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1}(y, \omega) \nabla_y g(y, \omega) + 2i\pi\theta g(y, \omega))} \det[\nabla_y \Phi_\eta(y, \omega)] d\mathbb{P} dy \\ &\quad + \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} V_{\text{per}}(y) f(y, \omega) \overline{g(y, \omega)} \det[\nabla_y \Phi_\eta(y, \omega)] d\mathbb{P} dy. \end{aligned}$$

A expressão obtida sugere olhar na expansão em η das funções $[\nabla_y \Phi_\eta]^{-1}$ e $\det[\nabla_y \Phi_\eta]$, logo, por (4.1), fazendo a expansão em η numa vizinhança de $\eta = 0$, encontra-se

$$\begin{aligned} \langle L^{\Phi_\eta}(\theta)[f], g \rangle &= \left[\int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta) f \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta) g} d\mathbb{P} dy + \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} V_{\text{per}}(y) f \bar{g} d\mathbb{P} dy \right] \\ &\quad + \eta \left[\int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (-[\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y f) \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta) g} d\mathbb{P} dy \right. \\ &\quad + \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta) f \cdot \overline{(-[\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y g)} d\mathbb{P} dy \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta) f \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta) g} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) d\mathbb{P} dy \right] \\ &\quad + O(\eta^2), \end{aligned}$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$, para cada $w, v \in \mathcal{H}$. Agora, continuando com a expansão em θ numa vizinhança de $\theta = \theta_0$, onde consideraremos $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ e $\theta_0 = (\theta_{01}, \theta_{02}, \dots, \theta_{0n})$, acha-se

$$\begin{aligned}
\langle L^{\Phi_\eta}(\theta)[f], g \rangle = & \left[\left(\int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta_0) f \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta_0)g} d\mathbb{P} dy \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} V_{\text{per}}(y) f \bar{g} d\mathbb{P} dy \right) \right. \\
& + \sum_{k=1}^n (\theta_k - \theta_{0k}) \left(\int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta_0) f \cdot \overline{(2i\pi e_k g)} d\mathbb{P} dy \right. \\
& \left. + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (2i\pi e_k f) \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta_0)g} d\mathbb{P} dy \right) \\
& + \sum_{k,\ell=1}^n (\theta_k - \theta_{0k}) (\theta_\ell - \theta_{0\ell}) \left(\int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (2i\pi e_k f) \cdot \overline{(2i\pi e_\ell g)} d\mathbb{P} dy \right) \Big] \\
& + \eta \left[\left(\int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (-[\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y f) \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta_0)g} d\mathbb{P} dy \right. \right. \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta_0) f \cdot \overline{(-[\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y g)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta_0) f \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta_0)g} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) d\mathbb{P} dy \Big) \\
& + \sum_{k=1}^n (\theta_k - \theta_{0k}) \left(\int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (-[\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y f) \cdot \overline{(2i\pi e_k g)} d\mathbb{P} dy \right. \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (2i\pi e_k f) \cdot \overline{(-[\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y g)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta_0) f \cdot \overline{(2i\pi e_k g)} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (2i\pi e_k f) \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta_0)g} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) d\mathbb{P} dy \Big) \\
& + \sum_{k,\ell=1}^n (\theta_k - \theta_{0k}) (\theta_\ell - \theta_{0\ell}) \left(\int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (2i\pi e_k w) \cdot \overline{(2i\pi e_\ell v)} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) d\mathbb{P} dy \right) \Big] \\
& + O(\eta^2),
\end{aligned}$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$, para cada $w, v \in \mathcal{H}$.

Utilizando a notação de multi-índice, para $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ temos

$$((\eta, \theta) - (0, \theta_0))^{(\alpha, \beta)} = \eta^\alpha \prod_{k=1}^n (\theta_k - \theta_{0k})^{\beta_k}.$$

Também utilizaremos a notação $|(\alpha, \beta)| = \alpha + \sum_{k=1}^n \beta_k$. Daí, a expansão anterior pode

ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
\langle L^{\Phi_\eta}(\theta)[f], g \rangle = & ((\eta, \theta) - (0, \theta_0))^{(0,0)} \left(\int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta_0) f \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta_0)g} d\mathbb{P} dy \right. \\
& \left. + \int_Y \int_\Omega V_{\text{per}}(y) f \bar{g} d\mathbb{P} dy \right) \\
& + \sum_{k=1}^n ((\eta, \theta) - (0, \theta_0))^{(0,e_k)} \left(\int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta_0) f \cdot \overline{(2i\pi e_k g)} d\mathbb{P} dy \right. \\
& \left. + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (2i\pi e_k f) \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta_0)g} d\mathbb{P} dy \right) \\
& + \sum_{k,\ell=1}^n ((\eta, \theta) - (0, \theta_0))^{(0,e_k+e_\ell)} \left(\int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (2i\pi e_k f) \cdot \overline{(2i\pi e_\ell g)} d\mathbb{P} dy \right) \\
& + ((\eta, \theta) - (0, \theta_0))^{(1,0)} \left(\int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (-[\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y f) \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta_0)g} d\mathbb{P} dy \right. \\
& + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta_0) f \cdot \overline{(-[\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y g)} d\mathbb{P} dy \\
& \left. + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta_0) f \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta_0)g} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) d\mathbb{P} dy \right) \\
& + \sum_{k=1}^n ((\eta, \theta) - (0, \theta_0))^{(1,e_k)} \left(\int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (-[\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y f) \cdot \overline{(2i\pi e_k g)} d\mathbb{P} dy \right. \\
& + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (2i\pi e_k f) \cdot \overline{(-[\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y g)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta_0) f \cdot \overline{(2i\pi e_k g)} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) d\mathbb{P} dy \\
& \left. + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (2i\pi e_k f) \cdot \overline{(\nabla_y + 2i\pi\theta_0)g} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) d\mathbb{P} dy \right) \\
& + \sum_{k,\ell=1}^n ((\eta, \theta) - (0, \theta_0))^{(1,e_k+e_\ell)} \left(\int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (2i\pi e_k f) \cdot \overline{(2i\pi e_\ell g)} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) d\mathbb{P} dy \right) \\
& + O(\eta^2),
\end{aligned}$$

quando $\eta \rightarrow 0$ em $\mathbb{C}$, a qual é uma expansão nas variáveis (η, θ) numa vizinhança de $(0, \theta_0)$.

Notamos que os coeficientes da expansão são formulações variacionais, avaliadas nas funções $f, g \in \mathcal{H}$, de operadores que pertencem ao espaço $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$, onde o primeiro termo é o correspondente à extensão do operador $L_{\text{per}}(\theta_0)$, definido em (4.2). Logo, podemos reescrever a expansão na forma

$$L^{\Phi_\eta}(\theta) = L_{\text{per}}(\theta_0) + \sum_{|(\alpha, \beta)|=1}^3 ((\eta, \theta) - (0, \theta_0))^{(\alpha, \beta)} L_{(\alpha, \beta)} + O(\eta^2), \quad (4.3)$$

em $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$ quando $\eta \rightarrow 0$, onde $L_{(\alpha, \beta)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$, $|(\alpha, \beta)| \in \{1, 2, 3\}$.

Passo 2: Aqui modificaremos ligeiramente a expansão (4.3) para obter uma expansão com o primeiro termo invertível.

Tendo em conta a expansão (4.3) e o item (iii) do Lema 4.2, encontramos

$$L^{\Phi_\eta}(\theta) + \gamma_0 I = (L_{\text{per}}(\theta_0) + \gamma_0 I) + \sum_{|(\alpha, \beta)|=1}^3 ((\eta, \theta) - (0, \theta_0))^{(\alpha, \beta)} L_{(\alpha, \beta)} + O(\eta^2), \quad (4.4)$$

quando $\eta \rightarrow 0$ em $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$, uma expansão onde seu primeiro termo é invertível. Agora, convenientemente, consideramos esta expansão como uma expansão numa vizinhança complexa de $(0, \theta_0)$, daí, como o operador $L_{\text{per}}(\theta_0) + \gamma_0 I$ é invertível, conclui-se que existe $\delta > 0$ tal que $L^{\Phi_\eta}(\theta) + \gamma_0 I$ é invertível, para todo $(\eta, \theta) \in B_{\mathbb{C}}(0, \delta) \times B_{\mathbb{C}^n}(\theta_0, \delta)$, isto é porque o conjunto dos operadores invertíveis é um conjunto aberto no espaço dos operadores contínuos. Denotaremos por $S(\eta, \theta)$ o operador inverso de $L^{\Phi_\eta}(\theta) + \gamma_0 I$, $(\eta, \theta) \in B_{\mathbb{C}}(0, \delta) \times B_{\mathbb{C}^n}(\theta_0, \delta)$. Sabe-se também que a aplicação que leva operadores invertíveis no seu operador inverso (aplicação inversa) é um homeomorfismo, logo, tem-se que a aplicação

$$(\eta, \theta) \in B_{\mathbb{C}}(0, \delta) \times B_{\mathbb{C}^n}(\theta_0, \delta) \mapsto S(\eta, \theta) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^*, \mathcal{H})$$

é contínua. Além disso, veja-se que para $(\tilde{\eta}, \tilde{\theta}) = (\tilde{\eta}, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n) \in B_{\mathbb{C}}(0, \delta) \times B_{\mathbb{C}^n}(\theta_0, \delta)$ fixado, a aplicação $\eta \in B_{\mathbb{C}}(0, \delta) \mapsto S(\eta, \tilde{\theta})$ satisfaz

$$\frac{S(\eta, \tilde{\theta}) - S(\tilde{\eta}, \tilde{\theta})}{\eta - \tilde{\eta}} = -S(\eta, \tilde{\theta}) \left[\frac{(L^{\Phi_\eta}(\tilde{\theta}) + \gamma_0 I) - (L^{\Phi_{\tilde{\eta}}}(\tilde{\theta}) + \gamma_0 I)}{\eta - \tilde{\eta}} \right] S(\tilde{\eta}, \tilde{\theta}), \quad \forall \eta \in B_{\mathbb{C}}(0, \delta),$$

isto, pela continuidade de $\eta \mapsto S(\eta, \tilde{\theta})$ em $\tilde{\eta}$, implica que $\eta \mapsto S(\eta, \tilde{\theta})$ é holomorfa (holomorfa na variável η). Da mesma maneira, para $j \in \{1, \dots, n\}$, pode-se provar que

$$\theta_j \mapsto S(\tilde{\eta}, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_{j-1}, \theta_j, \tilde{\theta}_{j+1}, \dots, \tilde{\theta}_n)$$

é holomorfa (holomorfa na variável θ_j). Daí, pelo Lemma de Osgood, ver [29, Pag. 2], o qual afirma que uma função que é contínua e holomorfa em cada variável por separado é holomorfa, conclui-se que

$$(\eta, \theta) \in B_{\mathbb{C}}(0, \delta) \times B_{\mathbb{C}^n}(\theta_0, \delta) \mapsto S(\eta, \theta) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^*, \mathcal{H}) \quad (4.5)$$

é uma aplicação holomorfa.

Passo 3: Prova dos itens (i), (ii) e (iii) (análise espectral do operador $S(\eta, \theta)$).

No seguinte, vamos colocar a aplicação holomorfa $(\eta, \theta) \mapsto S(\eta, \theta)$ nas hipóteses do Teorema 1.12, o qual deixará concluído a análise espectral do operador $L^{\Phi_\eta}(\theta)$, para (η, θ) em uma vizinhança de $(0, \theta_0)$.

Um resultado que é conveniente considerar: o operador restrição

$$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^*, \mathcal{H}) \mapsto T|_{\mathcal{L}} \in \mathcal{B}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$$

é contínuo e satisfaz

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{L}, \mathcal{L})} \leq \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^*, \mathcal{H})}, \quad \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^*, \mathcal{H}). \quad (4.6)$$

Por (4.5) e (4.6), conclui-se que a aplicação

$$(\eta, \theta) \in B_{\mathbb{C}}(0, \delta) \times B_{\mathbb{C}^n}(\theta_0, \delta) \mapsto S(\eta, \theta) \in \mathcal{B}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$$

é holomorfa. Sabemos que localmente as aplicações holomorfas podem-se escrever como uma expansão em séries de potências, por essa razão existe uma vizinhança $\mathcal{U}$, $(0, \theta_0) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, e uma família $\{S_\sigma\}_{\sigma \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n}$ contida em $\mathcal{B}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$, tal que

$$S(\eta, \theta) = S_0 + \sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \\ |\sigma| \neq 0}} (\eta, \theta)^\sigma S_\sigma, \quad \forall (\eta, \theta) \in \mathcal{U}. \quad (4.7)$$

Nota-se que $S_0 = (L_{\text{per}}(\theta_0) + \gamma_0 I)^{-1}|_{\mathcal{L}}$, isto é consequência de (4.4) e (4.7). Note também que $\mu_0 := (\lambda_0 + \gamma_0)^{-1}$ é autovalor de S_0 , pois λ_0 é autovalor de $L_{\text{per}}(\theta_0)$ (item (ii) do Lema 4.2) e

$$g \in \{f \in \mathcal{L} ; S_0[f] = \mu_0 f\} \Leftrightarrow g \in \{f \in \mathcal{L} ; L_{\text{per}}(\theta_0)[f] = \lambda_0 f\}.$$

A finalização da prova segue do Teorema 1.12. Efetivamente, sabe-se que a multiplicidade do autovalor μ_0 é finita, assim, denotando essa multiplicidade por m_0 , pelo Teorema 1.12 existe uma vizinhança $\tilde{\mathcal{U}}$ de $(0, \theta_0)$ satisfazendo $(0, \theta_0) \in \tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$, e existem também as funções holomorfas

$$\begin{aligned} (\eta, \theta) \in \tilde{\mathcal{U}} &\longmapsto \mu_{01}(\eta, \theta), \mu_{02}(\eta, \theta), \dots, \mu_{0m_0}(\eta, \theta) \in (0, \infty), \text{ e} \\ (\eta, \theta) \in \tilde{\mathcal{U}} &\longmapsto \psi_{01}(\eta, \theta), \psi_{02}(\eta, \theta), \dots, \psi_{0m_0}(\eta, \theta) \in \mathcal{L} - \{0\}, \end{aligned}$$

tais que

- $\mu_{0\ell}(0, \theta_0) = \mu_0$,
- $S(\eta, \theta)[\psi_{0\ell}(\eta, \theta)] = \mu_{0\ell}(\eta, \theta)\psi_{0\ell}(\eta, \theta), \quad \forall (\eta, \theta) \in \tilde{\mathcal{U}}, \text{ e}$
- $\dim\{f \in \mathcal{L} ; S(\eta, \theta)[f] = \mu_{0\ell}(\eta, \theta)f\} \leq k, \quad \forall (\eta, \theta) \in \tilde{\mathcal{U}},$

para todo $\ell \in \{1, \dots, m_0\}$. Logo,

$$\begin{aligned} (L^{\Phi_\eta}(\theta) + \gamma_0 I)[\psi_{0\ell}(\eta, \theta)] &= \frac{1}{\mu_{0\ell}(\eta, \theta)} (L^{\Phi_\eta}(\theta) + \gamma_0 I) \{S(\eta, \theta)[\psi_{0\ell}(\eta, \theta)]\} \\ &= \frac{1}{\mu_{0\ell}(\eta, \theta)} \psi_{0\ell}(\eta, \theta), \end{aligned}$$

para todo $(\eta, \theta) \in \tilde{\mathcal{U}}$ e $\ell \in \{1, \dots, m_0\}$, assim,

$$L^{\Phi_\eta}(\theta)[\psi_{0\ell}(\eta, \theta)] = \left(\frac{1}{\mu_{0\ell}(\eta, \theta)} - \gamma_0 \right) \psi_{0\ell}(\eta, \theta),$$

para todo $(\eta, \theta) \in \tilde{\mathcal{U}}$ e $\ell \in \{1, \dots, m_0\}$. Portanto, como uma aplicação complexa é holomorfa se, e somente, é analítica, definindo

$$\lambda_{0\ell}(\eta, \theta) := \frac{1}{\mu_{0\ell}(\eta, \theta)} - \gamma_0, \quad (\eta, \theta) \in \tilde{\mathcal{U}}, \quad \ell \in \{1, \dots, m_0\},$$

finalizamos a prova dos itens (i) e (ii).

Note que, da definição do operador $S(\eta, \theta)$, $(\eta, \theta) \in \tilde{\mathcal{U}}$, a sua imagem está contida no espaço $\mathcal{H}$, daí, os autovalores pertencem ao espaço $\mathcal{H}$.

Para provar o item (iii) devemos observar que, para cada $(\eta, \theta) \in \tilde{\mathcal{U}}$,

$$g \in \{f \in \mathcal{H} ; S(\eta, \theta)[f] = \mu_{0\ell}(\eta, \theta)f\} \Leftrightarrow g \in \{f \in \mathcal{H} ; L^{\Phi_\eta}(\theta)[f] = \lambda_{0\ell}(\eta, \theta)f\}.$$

Portanto,

$$\dim\{f \in \mathcal{H} ; S(\eta, \theta)[f] = \mu_{0\ell}(\eta, \theta)f\} = \dim\{f \in \mathcal{H} ; L^{\Phi_\eta}(\theta)[f] = \lambda_{0\ell}(\eta, \theta)f\}$$

o qual finaliza a prova do item (iii). □

4.2 Expansão numa vizinhança de $\eta = 0$

Nesta seção estamos interessados em analisar as características da estrutura homogeneizada da equação

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial u_{\eta\varepsilon}}{\partial t} - \operatorname{div} \left[A_{\text{per}} \left(\Phi_\eta^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \right) \nabla u_{\eta\varepsilon} \right] + \left[\frac{1}{\varepsilon^2} V_{\text{per}} \left(\Phi_\eta^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \right) \right. \\ \left. + U_{\text{per}} \left(\Phi_\eta^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \right) \right] u_{\eta\varepsilon} = 0, \text{ em } \mathbb{R}_T^{n+1} \times \Omega, \\ u_{\eta\varepsilon}(0, x, \omega) = u_\varepsilon^0(x, \omega), \text{ } (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

onde Φ_η é a perturbação estocástica da identidade, Definição 4.1, e $u_{\eta\varepsilon}^0$ é um dado inicial bem preparado. O caso $\eta = 0$, isto é, quando a perturbação estocástica é a identidade, foi estudado em G. Allaire e A. Piatnitski [5], o qual é *o caso periódico*. Em geral, quando a perturbação estocástica Φ_η é diferente da identidade (ambiente periódico estocasticamente perturbado) precisa-se de uma análise não trivial que vai além do caso periódico, e os parâmetros da equação homogeneizada para cada η serão perturbações do caso periódico.

Para cada η , há uma equação celular espectral associada à equação (4.8), e Teorema 4.1 garante a existência de soluções para esta equação celular, isto é, existe uma aplicação autovalor holomorfa dependendo de η e θ (frequência de Bloch). Uma das ferramentas que utilizaremos para analisar a estrutura homogeneizada da equação (4.8) será o Teorema 3.1, mas lembre-se que esse teorema é válido se são satisfeitas duas hipóteses, uma condição de simplicidade e outra de criticidade. Ambas hipóteses podem ser obtidas a partir do caso periódico, mais precisamente, assumiremos a existência de um $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\dim\{w \in H_{\text{per}}^1(\mathbf{Y}) ; L_{\text{per}}(\theta^*)[w] = \lambda_{\text{per}}(\theta^*) w\} = 1, \quad (4.9)$$

e

$$\nabla_\theta \lambda_{\text{per}}(\theta^*) = 0. \quad (4.10)$$

A condição (4.9) juntamente com o Teorema 4.1 garantem a existência da vizinhança $\mathcal{U}$ de $(0, \theta_0)$ e as aplicações analíticas

$$(\eta, \theta) \in \mathcal{U} \mapsto \lambda(\eta, \theta) \in \mathbb{R}, \quad (4.11)$$

e

$$(\eta, \theta) \in \mathcal{U} \mapsto \psi(\eta, \theta) \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \quad (4.12)$$

tais que $\lambda(0, \theta^*) = \lambda_{\text{per}}(\theta^*)$,

$$L^{\Phi_\eta}(\theta)[\psi(\eta, \theta)] = \lambda(\eta, \theta)\psi(\eta, \theta) \quad (4.13)$$

e

$$\dim\{f \in \mathcal{H} ; L^{\Phi_\eta}(\theta)[f] = \lambda(\eta, \theta)f\} = 1, \quad (4.14)$$

para todo $(\eta, \theta) \in \mathcal{U}$. Além disso, como $(\eta, \theta) \mapsto \psi(\eta, \theta) \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ é analítica, tem-se que

$$(\eta, \theta) \in \mathcal{U} \mapsto \frac{\partial \psi}{\partial \theta_k}(\eta, \theta) \in \mathcal{H}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

também é analítica. Usaremos a notação

$$\xi_k(\eta, \theta) := \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_k}(\eta, \theta), \quad \forall (\eta, \theta) \in \mathcal{U}, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.15)$$

Lema 4.3. *Seja A_{per} inversível e $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (4.9) e (4.10). Então existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de 0 (zero), $0 \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}$, e uma aplicação analítica que toma valores em $\mathbb{R}^n$,*

$$\theta : \eta \in \mathcal{V} \mapsto \theta(\eta) \in \mathbb{R}^n,$$

tais que $\theta(0) = \theta^*$ e

$$\nabla_\theta \lambda(\eta, \theta(\eta)) = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}. \quad (4.16)$$

Demonstração. Seja $F : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função definida por $F(\eta, \theta) = \nabla_\theta \lambda(\eta, \theta)$. Como

$$F(0, \theta^*) = \nabla_\theta \lambda(0, \theta^*) = \nabla_\theta \lambda_{\text{per}}(\theta^*) = 0$$

e

$$D_\theta F(0, \theta^*) = D_\theta^2 \lambda(0, \theta^*) = D_\theta^2 \lambda_{\text{per}}(\theta^*) = A_{\text{per}}^*.$$

Daí, pelo Teorema da Função Implícita (ver J. A. Dieudonne [18, Pág. 272] e S. G. Krantz e G. R. Parks [34]), existe $\theta : \eta \rightarrow \theta(\eta) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(\eta, \theta(\eta)) = 0.$$

□

Como as aplicações em (4.11), (4.12) e (4.15) são analíticas, pelo lema anterior, existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de 0 (zero) tal que as aplicações

$$\eta \mapsto \lambda(\eta, \theta(\eta)) \in \mathbb{R}, \quad \eta \mapsto \psi(\eta, \theta(\eta)) \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad \eta \mapsto \xi_k(\eta, \theta(\eta)) \in \mathcal{H}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

também são analíticas em $\mathcal{V}$, pois as composições de aplicações analíticas são analíticas. As notações que convenientemente utilizaremos são:

$$\theta_\eta := \theta(\eta), \quad \lambda_\eta := (\eta, \theta(\eta)), \quad \psi_\eta := \psi(\eta, \theta(\eta)) \quad \text{e} \quad \xi_{k,\eta} := \xi_k(\eta, \theta(\eta)), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.17)$$

Note que para cada $\eta \in \mathcal{V}$ fixado, $\theta(\eta)$ é uma frequência de Bloch, a qual é um ponto crítico de $\lambda(\eta, \cdot)$, isto é, $\nabla_\theta \lambda(\eta, \theta(\eta)) = 0$, por (4.16), e também $\lambda(\eta, \theta(\eta))$ é simples, por (4.14). Portanto, pelo Teorema 3.1, conclui-se que, para cada $\eta \in \mathcal{V}$ fixado, a sequência

$$v_{\eta\varepsilon}(t, x, \omega) = e^{-\left(i\frac{\lambda(\theta(\eta))t}{\varepsilon^2} + 2i\pi\frac{\theta(\eta)x}{\varepsilon}\right)} u_{\eta\varepsilon}(t, x, \omega), \quad (t, x, \omega) \in \mathbb{R}_T^{n+1} \times \Omega,$$

onde $u_{\eta\varepsilon}$ é a única solução de (4.8) com o dado inicial bem preparado

$$u_{\eta\varepsilon}^0(x, \omega) = e^{2i\pi\frac{\theta_\eta x}{\varepsilon}} v^0(x) \psi_\eta\left(\Phi_\eta^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right), \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega, \quad v^0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

converge duas escalas estocástica, $\varepsilon \rightarrow 0$, para

$$(t, x, z, \omega) \mapsto v_\eta(t, x) \psi_\eta(\Phi^{-1}(z, \omega), \omega),$$

satisfazendo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{R}_T^{n+1}} \left| v_{\eta\varepsilon}(t, x, \omega) - v_\eta(t, x) \psi_\eta\left(\Phi_\eta^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \omega\right) \right|^2 dx dt = 0,$$

para q.t.p. $\omega \in \Omega$, onde $v_\eta \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}^n))$ é a única solução da equação de Schrödinger homogeneizada

$$\begin{cases} i\frac{\partial v_\eta}{\partial t} - \operatorname{div}(A_\eta^* \nabla v_\eta) + U_\eta^* v_\eta = 0, & \text{em } \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ v_\eta(0, x) = v^0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.18)$$

com matriz homogeneizada e potencial homogeneizado dados por $A_\eta^* = D_\theta^2 \lambda(\eta, \theta_\eta)$ e

$$U_\eta^* = c_\eta^{-1} \int_\Omega \int_{\Phi_\eta(\Upsilon, \omega)} U(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega) |\psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)|^2 dz d\mathbb{P}, \quad (4.19)$$

respectivamente, onde

$$c_\eta = \int_\Omega \int_{\Phi_\eta(\Upsilon, \omega)} |\psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)|^2 dz d\mathbb{P}. \quad (4.20)$$

Teorema 4.2. *As aplicações $\eta \in \mathcal{V} \mapsto A_\eta^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\eta \in \mathcal{V} \mapsto U_\eta^* \in \mathbb{R}$ são analíticas.*

Demonstração. Para cada $\eta \in \mathcal{V}$, pelo Teorema 3.1, a matriz homogeneizada é caracterizada pela relação $A_\eta^* = D_\theta^2 \lambda(\eta, \theta(\eta))$, daí, como

$$(\eta, \theta) \in \mathcal{U} \mapsto D_\theta^2 \lambda(\eta, \theta) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{e} \quad \eta \in \mathcal{V} \mapsto \theta(\eta) \in \mathbb{R}^n$$

são aplicações analíticas, conclui-se que $\eta \in \mathcal{V} \mapsto D_\theta^2 \lambda(\eta, \theta(\eta)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é também uma aplicação analítica. Isto prova que A_η^* , como uma função de η , é analítica. Como $\eta \mapsto \psi_\eta$ é analítica, fazendo mudança de variável e considerando as expressões (4.19) e (4.20), segue que $\eta \mapsto U_\eta^*$ é analítica. $\square$

Observação 4.1. Note que, alternativamente, a matriz homogeneizada pode também ser caracterizada na forma

$$\begin{aligned}
(A_\eta^*)_{k\ell} := & \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi_\eta(\Upsilon, \omega)} |\psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)|^2 dz d\mathbb{P} \right]^{-1} \cdot \\
& \left[\int_{\Omega} \int_{\Phi_\eta(\Upsilon, \omega)} A_{\text{per}}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega)) (e_\ell \psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \overline{(e_k \psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \right. \\
& \int_{\Omega} \int_{\Phi_\eta(\Upsilon, \omega)} A_{\text{per}}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega)) (e_\ell \psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta_\eta)(\xi_{k,\eta}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \\
& - \int_{\Omega} \int_{\Phi_\eta(\Upsilon, \omega)} A_{\text{per}}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega)) (\nabla_z + 2i\pi\theta_\eta)(\psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \overline{(e_k \xi_{k,\eta}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \\
& \int_{\Omega} \int_{\Phi_\eta(\Upsilon, \omega)} A_{\text{per}}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega)) (e_k \psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \overline{(e_\ell \psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \\
& \int_{\Omega} \int_{\Phi_\eta(\Upsilon, \omega)} A_{\text{per}}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega)) (e_k \psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta_\eta)(\xi_{\ell,\eta}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \\
& \left. - \int_{\Omega} \int_{\Phi_\eta(\Upsilon, \omega)} A_{\text{per}}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega)) (\nabla_z + 2i\pi\theta_\eta)(\psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \overline{(e_k \xi_{\ell,\eta}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \right]. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

De fato, essa caracterização foi dada na demonstração do Teorema 3.1, equação (3.23).

Agora, dadas as aplicações analíticas $\eta \in \mathcal{V} \mapsto A_\eta^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\eta \in \mathcal{V} \mapsto U_\eta^* \in \mathbb{R}$, o nosso objetivo é determinar os coeficientes das expansões em $\eta = 0$, e como obtê-los. Mais precisamente, estaremos interessados em determinar quem são os termos de ordem 0 e 1. Antes analisaremos as expansões em $\eta = 0$ das aplicações dadas em (4.17), isto é, como as aplicações

$$\eta \mapsto \theta_\eta \in \mathbb{R}^n, \quad \eta \mapsto \lambda_\eta \in \mathbb{R}, \quad \eta \mapsto \psi_\eta \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad \eta \mapsto \xi_{k,\eta} \in \mathcal{H}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

são analíticas numa vizinhança de $\eta = 0$, existem as sequências

$$\{\theta^{(\ell)}\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{\lambda^{(\ell)}\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \quad \{\psi^{(\ell)}\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H} \quad \text{e} \quad \{\xi_k^{(\ell)}\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

tais que

$$\theta_\eta = \sum_{\ell=0}^{\infty} \eta^\ell \theta^{(\ell)} = \theta^{(0)} + \eta \theta^{(1)} + \eta^2 \theta^{(2)} + \dots = \theta^{(0)} + \eta \theta^{(1)} + O(\eta^2), \tag{4.22}$$

$$\lambda_\eta = \sum_{\ell=0}^{\infty} \eta^\ell \lambda^{(\ell)} = \lambda^{(0)} + \eta \lambda^{(1)} + \eta^2 \lambda^{(2)} + \dots = \lambda^{(0)} + \eta \lambda^{(1)} + O(\eta^2), \tag{4.23}$$

$$\psi_\eta = \sum_{\ell=0}^{\infty} \eta^\ell \psi^{(\ell)} = \psi^{(0)} + \eta \psi^{(1)} + \eta^2 \psi^{(2)} + \dots = \psi^{(0)} + \eta \psi^{(1)} + O(\eta^2), \tag{4.24}$$

e

$$\xi_{k,\eta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \eta^\ell \xi_k^{(\ell)} = \xi_k^{(0)} + \eta \xi_k^{(1)} + \eta^2 \xi_k^{(2)} + \dots = \xi_k^{(0)} + \eta \xi_k^{(1)} + O(\eta^2), \tag{4.25}$$

onde $k \in \{1, \dots, n\}$. Note que $\theta^{(0)} = \theta^*$ e $\lambda^{(0)} = \lambda_{\text{per}}(\theta^*)$, pois

$$\theta_\eta \Big|_{\eta=0} = \theta(0) = \theta^* \quad \text{e} \quad \lambda_\eta \Big|_{\eta=0} = \lambda(0, \theta(0)) = \lambda(0, \theta^*) = \lambda_{\text{per}}(\theta^*).$$

Teorema 4.3. *Dadas as expansões (4.22), (4.23), (4.24) e (4.25). O seguinte é satisfeito:*

(i) a função $\psi^{(0)}$ é Υ -periódica e satisfaz a equação

$$\begin{cases} (L_{\text{per}}(\theta^*) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*))[\psi^{(0)}] = 0 \text{ em } \Upsilon, \\ \psi^{(0)} \text{ } \Upsilon\text{-periódico}, \end{cases} \quad (4.26)$$

(ii) a função $\xi_k^{(0)}$ é Υ -periódica e satisfaz a equação

$$\begin{cases} (L_{\text{per}}(\theta^*) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*))[\xi_k^{(0)}] = \mathcal{X}[\psi^{(0)}] \text{ em } \Upsilon, \\ \xi_k^{(0)} \text{ } \Upsilon\text{-periódico}, \end{cases} \quad (4.27)$$

(iii) a função estacionária $\psi^{(1)}$ satisfaz a equação

$$\begin{cases} (L_{\text{per}}(\theta^*) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*))[\psi^{(1)}] = \mathcal{Y}[\psi^{(0)}] \text{ em } \Upsilon \times \Omega, \\ \psi^{(1)} \text{ estacionário}, \end{cases} \quad (4.28)$$

(iv) a função estacionária $\xi_k^{(1)}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, satisfaz a equação

$$\begin{cases} (L_{\text{per}}(\theta^*) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*))[\xi_k^{(1)}] = \mathcal{X}[\psi^{(1)}] + \mathcal{Y}[\xi_k^{(0)}] + \mathcal{Z}_k[\psi^{(0)}] \text{ em } \Upsilon \times \Omega, \\ \xi_k^{(1)} \text{ estacionário}. \end{cases} \quad (4.29)$$

onde os operadores $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ são dados por:

$$\mathcal{X}[f] := (\text{div}_y + 2i\pi\theta^*)\{A_{\text{per}}(y)(e_k f)\} + (e_k)\{A_{\text{per}}(y)(\nabla_y + 2i\pi\theta^*)f\}, \quad f \in \mathcal{H},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}[f] &:= (\text{div}_y + 2i\pi\theta^*)\{A_{\text{per}}(y)(2i\pi\theta^{(1)}f)\} - (\text{div}_y + 2i\pi\theta^*)\{A_{\text{per}}(y)[\nabla_y Z](y, \omega)\nabla_y f\} \\ &\quad - \text{div}_y\{[\nabla_y Z]^t(y, \omega)A_{\text{per}}(y)(\nabla_y + 2i\pi\theta^*)f\} + (2i\pi\theta^{(1)})\{A_{\text{per}}(y)(\nabla_y + 2i\pi\theta^*)f\} \\ &\quad + (\text{div}_y + 2i\pi\theta^*)\{[\text{div}_y Z(y, \omega)A_{\text{per}}(y)](\nabla_y + 2i\pi\theta^*)f\} + \lambda^{(1)}f \\ &\quad + \{\text{div}_y Z(y, \omega)[\lambda_{\text{per}}(\theta^*) - V_{\text{per}}(y)]\}f, \quad f \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_k[f] &:= (\text{div}_y + 2i\pi\theta^*)\{[\text{div}_y Z(y, \omega)A_{\text{per}}(y)](e_k f)\} + (2i\pi\theta^{(1)})\{A_{\text{per}}(y)(e_k f)\} \\ &\quad - \text{div}_y\{[\nabla_y Z]^t(y, \omega)A_{\text{per}}(y)(e_k f)\} - (e_k)\{A_{\text{per}}(y)[\nabla_y Z](y, \omega)\nabla_y f\} \\ &\quad + (e_k)\{[\text{div}_y Z(y, \omega)A_{\text{per}}(y)](\nabla_y + 2i\pi\theta^*)f\} \\ &\quad + (e_k)\{A_{\text{per}}(y)(2i\pi\theta^{(1)}f)\}, \quad f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Note que os coeficientes do operador $\mathcal{X}$ dependem unicamente da variável y , contrariamente ao que acontece com os coeficientes dos operadores $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ que dependem de y e ω .

Demonstração. Da forma variacional de (4.13), tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Phi_{\eta}(\Upsilon, \omega)} A_{\text{per}}(\Phi_{\eta}^{-1}(z, \omega)) (\nabla_z + 2i\pi\theta) (\psi(\eta, \theta) (\Phi_{\eta}^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \\ & \quad \overline{(\nabla_z + 2i\pi\theta) (\zeta(\Phi_{\eta}^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Phi_{\eta}(\Upsilon, \omega)} [V_{\text{per}}(\Phi_{\eta}^{-1}(z, \omega)) - \lambda(\eta, \theta)] \psi(\eta, \theta) (\Phi_{\eta}^{-1}(z, \omega), \omega) \overline{\zeta(\Phi_{\eta}^{-1}(z, \omega), \omega)} dz d\mathbb{P} = 0, \end{aligned}$$

para todo $(\eta, \theta) \in \mathcal{U}$ e para todo $\zeta \in \mathcal{H}$, daí, fazendo mudança de variável, encontramos

$$\begin{aligned} & \int_{\Upsilon} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) ([\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \psi(\eta, \theta) + 2i\pi\theta \psi(\eta, \theta)) \cdot \overline{([\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \zeta + 2i\pi\theta \zeta)} \det[\nabla_y \Phi_{\eta}] d\mathbb{P} dy \\ & + \int_{\Upsilon} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda(\eta, \theta)] \psi(\eta, \theta) \bar{\zeta} \det[\nabla_y \Phi_{\eta}] d\mathbb{P} dy = 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

para todo $(\eta, \theta) \in \mathcal{U}$ e para todo $\zeta \in \mathcal{H}$. Agora, colocando a aplicação $\eta \in \mathcal{V} \mapsto \theta(\eta)$ nesta equação (4.30), e considerando a notação em (4.17), tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Upsilon} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) ([\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \psi_{\eta} + 2i\pi\theta_{\eta} \psi_{\eta}) \cdot \overline{([\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \zeta + 2i\pi\theta_{\eta} \zeta)} \det[\nabla_y \Phi_{\eta}] d\mathbb{P} dy \\ & + \int_{\Upsilon} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\eta}] \psi_{\eta} \bar{\zeta} \det[\nabla_y \Phi_{\eta}] d\mathbb{P} dy = 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

para todo $\eta \in \mathcal{V}$ e para todo $\zeta \in \mathcal{H}$.

Convenientemente, listaremos as expansões que serão utilizadas. Note que utilizando (4.22), (4.23), (4.24), (4.25) e o Lema 4.1 temos

$$\begin{aligned} & \circ [\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \psi_{\eta} + 2i\pi\theta_{\eta} \psi_{\eta} = (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \\ & \quad + \eta (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(1)} - [\nabla_y Z] \nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^{(1)} \psi^{(0)}) + O(\eta^2), \\ & \circ [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\eta}] \psi_{\eta} = [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \psi^{(0)} \\ & \quad + \eta (-\lambda^{(1)} \psi^{(0)} + [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \psi^{(1)}) + O(\eta^2), \\ & \circ [\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \zeta + 2i\pi\theta_{\eta} \zeta = (\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta) + \eta (-[\nabla_y Z] \nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^{(1)} \zeta) + O(\eta^2), \\ & \circ [\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \xi_{k, \eta} + 2i\pi\theta_{\eta} \xi_{k, \eta} = \left(\nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(0)} \right) \\ & \quad + \eta \left(\nabla_y \xi_k^{(1)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(1)} - [\nabla_y Z] \nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^{(1)} \xi_k^{(0)} \right) + O(\eta^2), \\ & \circ [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\eta}] \xi_{k, \eta} = [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \xi_k^{(0)} \\ & \quad + \eta \left(-\lambda^{(1)} \xi_k^{(0)} + [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \xi_k^{(1)} \right) + O(\eta^2), \end{aligned} \quad (4.32)$$

em $\mathcal{L}$ quando $\eta \rightarrow 0$, daí, a equação (4.31) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \right. \\
& \left. + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \psi^{(0)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \right] \\
& + \eta \left[\int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(1)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \right. \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (-[\nabla_y Z] \nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^{(1)} \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(-[\nabla_y Z] \nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^{(1)} \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [\text{div}_y Z(y, \omega) A_{\text{per}}(y)] (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} \lambda^{(1)} \psi^{(0)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \psi^{(1)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \psi^{(0)} \bar{\zeta} \text{div}_y Z d\mathbb{P} dy \left. \right] \\
& + O(\eta^2),
\end{aligned} \tag{4.33}$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$, consequentemente, o termo de ordem 0 deve ser igual a zero,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)}(y, \omega) + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}(y, \omega)) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta(y, \omega) + 2i\pi\theta^* \zeta(y, \omega))} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \psi^{(0)}(y, \omega) \bar{\zeta}(y, \omega) d\mathbb{P} dy = 0,
\end{aligned}$$

para todo $\zeta \in \mathcal{H}$, i.e., a função $\psi^{(0)}$ satisfaz a equação

$$\begin{cases} -(\text{div}_y + 2i\pi\theta^*) [A_{\text{per}}(y) (\nabla_y + 2i\pi\theta^*) \psi^{(0)}] + V_{\text{per}}(y) \psi^{(0)} = \lambda_{\text{per}}(\theta^*) \psi^{(0)} & \text{em } \mathbf{Y} \times \Omega, \\ \psi^{(0)} & \text{estacionário.} \end{cases} \tag{4.34}$$

Podemos considerar ζ sendo $\mathbf{Y}$ -periódico, $\zeta \in H_{\text{per}}^1(\mathbf{Y})$, logo encontramos que a função

$$y \mapsto \int_{\Omega} \psi^{(0)}(y, \omega) d\mathbb{P}$$

também satisfaz a equação (4.34). Portanto, pela simplicidade do autovalor $\lambda_{\text{per}}(\theta^*)$ temos que $\psi^{(0)}$ deve ser múltiplo de $\int_{\Omega} \psi^{(0)} d\mathbb{P}$, logo conclui-se que $\psi^{(0)}$ não depende de ω . Isto prova o item (i).

Analogamente, o termo de ordem 1 deve ser zero, daí

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(1)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (-[\nabla_y Z] \nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^{(1)} \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(-[\nabla_y Z] \nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^{(1)} \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \operatorname{div}_y Z d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} \lambda^{(1)} \psi^{(0)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \psi^{(1)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \psi^{(0)} \bar{\zeta} \operatorname{div}_y Z d\mathbb{P} dy = 0,
\end{aligned}$$

reordenando, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(1)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \psi^{(1)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \\
& = \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) [\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y \psi^{(0)} \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (2i\pi\theta^{(1)} \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [\nabla_y Z]^t(y, \omega) A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{\nabla_y \zeta} d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(2i\pi\theta^{(1)} \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} \lambda^{(1)} \psi^{(0)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \psi^{(0)} \bar{\zeta} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) d\mathbb{P} dy,
\end{aligned}$$

a qual é a formulação variacional da equação (4.28). Isto prova o item (iii).

Para a prova do item (ii), seguiremos um procedimento análogo ao feito em (2.4), o qual pode ser feito pela analiticidade das aplicações (4.11) e (4.12). De fato, derivando a

equação (4.30) em relação a variável θ na direção do vetor e_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, e dividindo por $1/2i\pi$, tem-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) ([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} \nabla_y \xi_k(\eta, \theta) + 2i\pi \theta \xi_k(\eta, \theta)) \cdot \overline{([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} \nabla_y \zeta + 2i\pi \theta \zeta)} \det[\nabla_y \Phi_\eta] d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (e_k \psi(\eta, \theta)) \cdot \overline{([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} \nabla_y \zeta + 2i\pi \theta \zeta)} \det[\nabla_y \Phi_\eta] d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) ([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} \nabla_y \psi(\eta, \theta) + 2i\pi \theta \psi(\eta, \theta)) \cdot \overline{(e_k \zeta)} \det[\nabla_y \Phi_\eta] d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda(\eta, \theta)] \xi_k(\eta, \theta) \bar{\zeta} \det[\nabla_y \Phi_\eta] d\mathbb{P} dy \\
& - \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_k}(\eta, \theta) \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} \psi(\eta, \theta) \bar{\zeta} \det[\nabla_y \Phi_\eta] d\mathbb{P} dy = 0,
\end{aligned}$$

para todo $(\eta, \theta) \in \mathcal{U}$ e para todo $\zeta \in \mathcal{H}$. Daí, colocando a aplicação $\eta \in \mathcal{V} \mapsto \theta(\eta)$ nesta equação e considerando as notações estabelecidas em (4.17), tem-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) ([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} \nabla_y \xi_{k,\eta} + 2i\pi \theta_\eta \xi_{k,\eta}) \cdot \overline{([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} \nabla_y \zeta + 2i\pi \theta_\eta \zeta)} \det[\nabla_y \Phi_\eta] d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (e_k \psi_\eta) \cdot \overline{([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} \nabla_y \zeta + 2i\pi \theta_\eta \zeta)} \det[\nabla_y \Phi_\eta] d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) ([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} \nabla_y \psi_\eta + 2i\pi \theta_\eta \psi_\eta) \cdot \overline{(e_k \zeta)} \det[\nabla_y \Phi_\eta] d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_\eta] \xi_{k,\eta} \bar{\zeta} \det[\nabla_y \Phi_\eta] d\mathbb{P} dy \\
& - \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_k}(\eta, \theta(\eta)) \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} \psi_\eta \bar{\zeta} \det[\nabla_y \Phi_\eta] d\mathbb{P} dy = 0,
\end{aligned}$$

para todo $\eta \in \mathcal{V}$ e para todo $\zeta \in \mathcal{H}$. Note que a última integral é zero, pois segue da criticidade (4.16) satisfeita por $\theta(\eta)$, $\eta \in \mathcal{V}$. Logo, utilizando as expansões listadas acima em (4.32) e associando os termos de ordem 0 e os termos de ordem 1, temos

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi \theta^* \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi \theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \right. \\
& + \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi \theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi \theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(e_k \zeta)} d\mathbb{P} dy, \\
& \left. + \int_{\mathcal{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \xi_k^{(0)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta \left[\int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \operatorname{div}_y Z \, d\mathbb{P} \, dy \right. \\
& + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(-[\nabla_y Z] \nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^{(1)} \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(1)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(1)} - [\nabla_y Z] \nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^{(1)} \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \operatorname{div}_y Z \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(0)}) \cdot \overline{(-[\nabla_y Z] \nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^{(1)} \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(1)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& - \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(e_k \zeta)} \operatorname{div}_y Z \, d\mathbb{P} \, dy \\
& - \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(1)} - [\nabla_y Z] \nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^{(1)} \psi^{(0)}) \cdot \overline{(e_k \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& - \int_Y \int_\Omega \lambda^{(1)} \xi_k^{(0)} \bar{\zeta} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_Y \int_\Omega [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \xi_k^{(1)} \bar{\zeta} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_Y \int_\Omega [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \xi_k^{(0)} \bar{\zeta} \operatorname{div}_y Z \, d\mathbb{P} \, dy \Big] \\
& + O(\eta^2).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Mais uma vez, como (4.35) é uma expansão sendo igual a zero, o termo de ordem 0 deve ser igual a zero, então encontramos

$$\begin{aligned}
& \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_Y \int_\Omega [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \xi_k^{(0)} \bar{\zeta} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& = - \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_Y \int_\Omega A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(e_k \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

para todo $\zeta \in \mathcal{H}$, consequentemente, considerando $\zeta \in H_{\text{per}}^1(Y)$, temos que a função Y -periódica

$$y \mapsto \int_\Omega \xi_k^{(0)}(y, \omega) \, d\mathbb{P}$$

também satisfaz a equação (4.36). Logo, a função $\xi_k^{(0)}(y, \omega) - \int_{\Omega} \xi_k^{(0)}(y, \omega) d\mathbb{P}$ deve satisfazer a equação (4.34) (isto pela linearidade da equação (4.36)), consequentemente, pela simplicidade do autovalor $\lambda_{\text{per}}(\theta^*)$, encontra-se que $\xi_k^{(0)}(y, \omega) - \int_{\Omega} \xi_k^{(0)}(y, \omega) d\mathbb{P}$ é múltiplo de $\psi^{(0)}$ (função que não depende de ω). Portanto, como $\xi_k^{(0)}$ satisfaz a equação (4.36) e não depende da variável ω , conclui-se que $\xi_k^{(0)}$ satisfaz a equação (4.27). Isto prova o item (ii).

Para provar o item (iv), consideremos a equação (4.35). Como a expansão toda é igual a zero, o termo de ordem 1 deve ser zero também, isto é,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \operatorname{div}_y Z d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(-[\nabla_y Z] \nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^{(1)} \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(1)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(1)} - [\nabla_y Z] \nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^{(1)} \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \operatorname{div}_y Z d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(0)}) \cdot \overline{(-[\nabla_y Z] \nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^{(1)} \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(1)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(e_k \zeta)} \operatorname{div}_y Z d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(1)} - [\nabla_y Z] \nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^{(1)} \psi^{(0)}) \cdot \overline{(e_k \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& - \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} \lambda^{(1)} \xi_k^{(0)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \xi_k^{(1)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \xi_k^{(0)} \bar{\zeta} \operatorname{div}_y Z d\mathbb{P} dy = 0,
\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(1)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(1)} \right) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy \\
& + \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \xi_k^{(1)} \bar{\zeta} d\mathbb{P} dy \\
& = - \int_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [\operatorname{div}_y Z(y, \omega) A_{\text{per}}(y)] \left(\nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} d\mathbb{P} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} [\nabla_y Z]^t A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{\nabla_y \zeta} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& - \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) \left(\nabla_y \xi_k^{(0)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(2i\pi\theta^{(1)} \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) [\nabla_y Z] \nabla_y \xi_k^{(0)} \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& - \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) \left(2i\pi\theta^{(1)} \xi_k^{(0)} \right) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& - \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} [\text{div}_y Z(y, \omega) A_{\text{per}}(y)] (e_k \psi^{(0)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} [\nabla_y Z]^t A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(0)}) \cdot \overline{\nabla_y \zeta} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& - \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(0)}) \cdot \overline{(2i\pi\theta^{(1)} \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& - \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (e_k \psi^{(1)}) \cdot \overline{(\nabla_y \zeta + 2i\pi\theta^* \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} [\text{div}_y Z(y, \omega) A_{\text{per}}(y)] (\nabla_y \psi^{(0)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(0)}) \cdot \overline{(e_k \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(1)}) \cdot \overline{(e_k \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& - \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) [\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y \psi^{(0)} \cdot \overline{(e_k \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} A_{\text{per}}(y) (2i\pi\theta^{(1)} \psi^{(0)}) \cdot \overline{(e_k \zeta)} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& + \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} \lambda^{(1)} \xi_k^{(0)} \bar{\zeta} \, d\mathbb{P} \, dy \\
& - \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} \text{div}_y Z [V_{\text{per}}(y) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*)] \xi_k^{(0)} \bar{\zeta} \, d\mathbb{P} \, dy,
\end{aligned}$$

a qual é a formulação variacional da equação (4.29). Isto finaliza a prova do teorema. $\square$

Como consequência do item (i) do teorema anterior, temos que a função $\psi^{(0)}$ é um múltiplo de $\psi_{\text{per}}(\theta^*)$, pois $\psi^{(0)} = \psi(0, \theta^*) \neq 0$ por (4.12), ou seja, ambas são autofunções associados ao autovalor simples $\lambda_{\text{per}}(\theta^*)$, daí, existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\psi_{\text{per}}(\theta^*) = \alpha \psi^{(0)}$. Por esse motivo, sem perda de generalidade, podemos considerar $\psi_{\text{per}}(\theta^*)$ como o termo de ordem zero na expansão (4.24), isto é,

$$\psi_{\eta} = \psi_{\text{per}}(\theta^*) + \eta \psi^{(1)} + \eta^2 \psi^{(2)} + \dots = \psi^{(0)} + \eta \psi^{(1)} + O(\eta^2).$$

Dado isso e levando em consideração

$$\xi_{k,\text{per}}(\theta^*) := \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial \psi_{\text{per}}}{\partial \theta_k}(\theta^*), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

a aparência da expansão (4.25) é dada por

$$\xi_{k,\eta} = \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + \eta \xi_k^{(1)} + \eta^2 \xi_k^{(2)} + \dots = \xi_k^{(0)} + \eta \xi_k^{(1)} + O(\eta^2),$$

onde $k \in \{1, \dots, n\}$.

No que segue, $\langle \cdot \rangle$ denotará a integral em Ω , isto é, $\langle w \rangle := \int_{\Omega} w(\omega) d\mathbb{P}$ para $w \in L^1(\Omega)$.

Teorema 4.4. *A matriz A_{η}^* satisfaz:*

$$A_{\eta}^* = A_{\text{per}}^* + \eta A^{(1)} + O(\eta^2),$$

em $\mathbb{R}^{n \times n}$ quando $\eta \rightarrow 0$, onde o termo de ordem 0 (zero) é dado pela matriz homogeneizada do caso periódico $A_{\text{per}}^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\begin{aligned} (A_{\text{per}}^*)_{k\ell} = & \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy \right. \\ & + \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \\ & - \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \\ & + \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_{\ell} \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy \\ & + \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*))} dy \\ & \left. - \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_k \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*))} dy \right], \end{aligned}$$

onde $\psi_{\text{per}}(\theta^*)$ e $\xi_{k,\text{per}}(\theta^*)$, $k \in \{1, \dots, n\}$, são soluções das equações (4.26) e (4.27), respectivamente, e o termo de ordem 1 é dado por $A^{(1)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\begin{aligned} A_{k\ell}^{(1)} = & \left\{ \left[\int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy \right. \right. \\ & + \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \left(e_k \overline{\langle \psi^{(1)} \rangle} \right) dy \\ & + \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \langle \psi^{(1)} \rangle) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy \\ & + \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy \\ & + \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{\left(\nabla_y \langle \xi_k^{(1)} \rangle + 2i\pi \theta^* \langle \xi_k^{(1)} \rangle - \langle [\nabla_y Z](y, \omega) \rangle \nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) \right.} \\ & \left. \left. + 2i\pi \theta^{(1)} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) \right) \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_Y A_{\text{per}}(y) (e_\ell \langle \psi^{(1)} \rangle) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \\
& - \int_Y A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_\ell \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy \\
& - \int_Y A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_\ell \langle \xi_k^{(1)} \rangle)} dy \\
& - \int_Y A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \langle \psi^{(1)} \rangle + 2i\pi\theta^* \langle \psi^{(1)} \rangle - \langle [\nabla_y Z](y, \omega) \rangle \nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) \\
& \quad + 2i\pi\theta^{(1)} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_\ell \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \Big] \\
& - \left[\int_Y |\psi_{\text{per}}(\theta^*)|^2 \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy + \int_Y \psi_{\text{per}}(\theta^*) \overline{\langle \psi^{(1)} \rangle} dy \right. \\
& \quad + \int_Y \langle \psi^{(1)} \rangle \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)} dy \Big] \cdot \left[\int_Y A_{\text{per}}(y) (e_\ell \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy \right. \\
& \quad + \int_Y A_{\text{per}}(y) (e_\ell \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \\
& \quad \left. - \int_Y A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_\ell \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \right] \Big\} \\
& + \left\{ \left[\int_Y A_{\text{per}}(y) (e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_\ell \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy \right. \right. \\
& \quad + \int_Y A_{\text{per}}(y) (e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \left(e_\ell \overline{\langle \psi^{(1)} \rangle} \right) dy \\
& \quad + \int_Y A_{\text{per}}(y) (e_k \langle \psi^{(1)} \rangle) \cdot (e_\ell \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy \\
& \quad + \int_Y A_{\text{per}}(y) (e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*))} \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy \\
& \quad + \int_Y A_{\text{per}}(y) (e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{\left(\nabla_y \langle \xi_\ell^{(1)} \rangle + 2i\pi\theta^* \langle \xi_\ell^{(1)} \rangle - \langle [\nabla_y Z](y, \omega) \rangle \nabla_y \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*) \right.} \\
& \quad \quad \left. \left. + 2i\pi\theta^{(1)} \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*) \right)} dy \right. \\
& \quad + \int_Y A_{\text{per}}(y) (e_k \langle \psi^{(1)} \rangle) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*))} dy \\
& \quad - \int_Y A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_k \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*))} \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy \\
& \quad - \int_Y A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_k \langle \xi_\ell^{(1)} \rangle)} dy \\
& \quad \left. - \int_Y A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \langle \psi^{(1)} \rangle + 2i\pi\theta^* \langle \psi^{(1)} \rangle - \langle [\nabla_y Z](y, \omega) \rangle \nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) \right. \\
& \quad \quad \left. + 2i\pi\theta^{(1)} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_k \xi_{\ell,\text{per}}(\theta^*))} dy \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\int_Y |\psi_{\text{per}}(\theta^*)|^2 \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy + \int_Y \psi_{\text{per}}(\theta^*) \overline{\langle \psi^{(1)} \rangle} dy \right. \\
& \quad + \int_Y \langle \psi^{(1)} \rangle \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)} dy \left. \right] \cdot \left[\int_Y A_{\text{per}}(y) (e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_\ell \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy \right. \\
& \quad + \int_Y A_{\text{per}}(y) (e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{\ell, \text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \xi_{\ell, \text{per}}(\theta^*))} dy \\
& \quad \left. - \int_Y A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_k \xi_{\ell, \text{per}}(\theta^*))}] dy \right],
\end{aligned}$$

onde $\psi^{(1)}$ e $\xi_k^{(1)}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, são soluções das equações (4.28) e (4.29), respectivamente.

Demonstração. Nesta prova, convenientemente, definiremos a matriz complexa B_η dada por

$$\begin{aligned}
(B_\eta)_{k\ell} &:= \left[\int_\Omega \int_{\Phi_\eta(Y, \omega)} |\psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)|^2 dz d\mathbb{P} \right]^{-1} \cdot \\
& \left[\int_\Omega \int_{\Phi_\eta(Y, \omega)} A_{\text{per}}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega)) (e_\ell \psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \overline{(e_k \psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \right. \\
& + \int_\Omega \int_{\Phi_\eta(Y, \omega)} A_{\text{per}}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega)) (e_\ell \psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \overline{(\nabla_z + 2i\pi \theta_\eta)(\xi_{k, \eta}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \\
& \left. - \int_\Omega \int_{\Phi_\eta(Y, \omega)} A_{\text{per}}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega)) (\nabla_z + 2i\pi \theta_\eta)(\psi_\eta(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega)) \cdot \overline{(e_\ell \xi_{k, \eta}(\Phi_\eta^{-1}(z, \omega), \omega))} dz d\mathbb{P} \right],
\end{aligned} \tag{4.37}$$

pois a matriz homogeneizada A_η^* é obtida pelo algoritmo

$$A_\eta^* = \frac{B_\eta + B_\eta^t}{2}. \tag{4.38}$$

Isto foi estabelecido na prova do Teorema de Homogeneização (veja (3.19) e (3.22)). É importante notar que a matriz B_η é analítica numa vizinhança de $\eta = 0$.

A estratégia para determinar a expansão de A_η^* numa vizinhança de $\eta = 0$ será primeiro obter a expansão da matriz B_η , e logo pela fórmula (4.38), obtê-la para A_η^* . Fazendo mudança de variável em (4.37), encontramos

$$\begin{aligned}
(B_\eta)_{k\ell} &:= \left[\int_\Omega \int_Y |\psi_\eta|^2 \det[\nabla_y \Phi_\eta] dy d\mathbb{P} \right]^{-1} \cdot \\
& \left[\int_\Omega \int_Y A_{\text{per}}(y) (e_\ell \psi_\eta) \cdot (e_k \overline{\psi_\eta}) \det[\nabla_y \Phi_\eta] dy d\mathbb{P} \right. \\
& + \int_\Omega \int_Y A_{\text{per}}(y) (e_\ell \psi_\eta) \cdot \overline{([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} \nabla_y \xi_{k, \eta} + 2i\pi \theta_\eta \xi_{k, \eta})} \det[\nabla_y \Phi_\eta] dy d\mathbb{P} \\
& \left. - \int_\Omega \int_Y A_{\text{per}}(y) ([\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} \nabla_y \psi_\eta + 2i\pi \theta_\eta \psi_\eta) \cdot \overline{(e_\ell \xi_{k, \eta})} \det[\nabla_y \Phi_\eta] dy d\mathbb{P} \right].
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Antes de fazer a expansão da matriz B_η , listaremos as expansões de todas as funções envolvidas na definição da matriz B_η :

- $\theta_\eta = \theta^* + \eta\theta^{(1)} + O(\eta^2)$, em $\mathbb{R}^n$ quando $\eta \rightarrow 0$,
- $\psi_\eta = \psi_{\text{per}}(\theta^*) + \eta\psi^{(1)} + O(\eta^2)$, em $\mathcal{H}$ quando $\eta \rightarrow 0$,
- $\nabla_y \psi_\eta = \nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + \eta \nabla_y \psi^{(1)} + O(\eta^2)$ em $\mathcal{L}^n$ quando $\eta \rightarrow 0$,
- $\xi_{k,\eta} = \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + \eta \xi_k^{(1)} + O(\eta^2)$, em $\mathcal{H}$ quando $\eta \rightarrow 0$, $k \in \{1, \dots, n\}$,
- $\nabla_y \xi_{k,\eta} = \nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + \eta \nabla_y \xi_k^{(1)} + O(\eta^2)$, em $\mathcal{L}^n$ quando $\eta \rightarrow 0$, $k \in \{1, \dots, n\}$,
- $[\nabla_y \Phi_\eta]^{-1} = I - \eta[\nabla_y Z] + O(\eta^2)$, em $[C(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega))]^n$ quando $\eta \rightarrow 0$,
- $\det[\nabla_y \Phi_\eta] = 1 + \eta \operatorname{div}_y Z + O(\eta^2)$, em $C(\mathbb{R}^n, L^2(\Omega))$ quando $\eta \rightarrow 0$.

(4.40)

Agora, em uma sequência de passos, utilizando essa listagem de expansões, será feita a expansão de cada uma das integrais presentes em (4.39):

- A expansão da integral contida no primeiro colchete é

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} |\psi_\eta|^2 \det[\nabla_y \Phi_\eta] dy d\mathbb{P} &= 1 + \eta \left[\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} |\psi_{\text{per}}(\theta^*)|^2 \operatorname{div}_y Z(y, \omega) dy d\mathbb{P} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} \psi_{\text{per}}(\theta^*) \overline{\psi^{(1)}} dy d\mathbb{P} + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} \psi^{(1)} \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)} dy d\mathbb{P} \right] + O(\eta^2), \end{aligned} \quad (4.41)$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$, pois por (4.40), temos

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} \psi_\eta \overline{\psi_\eta} \det[\nabla_y \Phi_\eta] dy d\mathbb{P} = \\ &\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} (\psi_{\text{per}}(\theta^*) + \eta\psi^{(1)} + O(\eta^2)) \overline{(\psi_{\text{per}}(\theta^*) + \eta\psi^{(1)} + O(\eta^2))} (1 + \eta \operatorname{div}_y Z + O(\eta^2)) dy d\mathbb{P} \\ &= \left[\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} \psi_{\text{per}}(\theta^*) \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)} dy d\mathbb{P} \right] + \eta \left[\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} \left(|\psi_{\text{per}}(\theta^*)|^2 \operatorname{div}_y Z + \psi_{\text{per}}(\theta^*) \overline{\psi^{(1)}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \psi^{(1)} \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)} \right) dy d\mathbb{P} \right] + O(\eta^2), \end{aligned}$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$. Logo, como $\|\psi_{\text{per}}(\theta^*)\|_{L^2(\mathcal{Y})} = 1$, segue a expansão (4.41). Também, como o termo de ordem 0 de (4.41) é 1, obtemos

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} |\psi_\eta|^2 \det[\nabla_y \Phi_\eta] dy d\mathbb{P} \right]^{-1} &= 1 - \eta \left[\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} |\psi_{\text{per}}(\theta^*)|^2 \operatorname{div}_y Z(y, \omega) dy d\mathbb{P} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} \psi_{\text{per}}(\theta^*) \overline{\psi^{(1)}} dy d\mathbb{P} + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} \psi^{(1)} \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)} dy d\mathbb{P} \right] + O(\eta^2), \end{aligned} \quad (4.42)$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$.

- A expansão da primeira integral contida no segundo colchete em (4.39) satisfaz

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\eta}) \cdot (e_k \overline{\psi_{\eta}}) \det [\nabla_y \Phi_{\eta}] dy d\mathbb{P} = \\
& \quad \left[\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy d\mathbb{P} \right] \\
& \quad + \eta \left[\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) \operatorname{div}_y Z dy d\mathbb{P} \right. \\
& \quad + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi^{(1)}}) dy d\mathbb{P} \\
& \quad + \left. \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi^{(1)}) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy d\mathbb{P} \right] \\
& \quad + O(\eta^2),
\end{aligned} \tag{4.43}$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$. Segue das expansões em (4.40) e um raciocínio análogo ao utilizado no item anterior.

- A expansão da segunda integral contida no segundo colchete em (4.39) satisfaz

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\eta}) \cdot \overline{([\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \xi_{k,\eta} + 2i\pi \theta_{\eta} \xi_{k,\eta})} \det [\nabla_y \Phi_{\eta}] dy d\mathbb{P} \\
& = \left[\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy d\mathbb{P} \right] \\
& + \eta \left[\int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} \operatorname{div}_y Z dy d\mathbb{P} \right. \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{\left(\nabla_y \xi_k^{(1)} + 2i\pi \theta^* \xi_k^{(1)} - [\nabla_y Z] \nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) \right.} \\
& \quad \left. \left. + 2i\pi \theta^{(1)} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) \right)} dy d\mathbb{P} \right] \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathcal{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi^{(1)}) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta_{\eta} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy d\mathbb{P} \Big] \\
& + O(\eta^2),
\end{aligned} \tag{4.44}$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$. Segue das expansões de ψ_{η} , $\det[\nabla_y \Phi_{\eta}]$ e

$$\begin{aligned}
& [\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \xi_{k,\eta} + 2i\pi \theta_{\eta} \xi_{k,\eta} = (\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*)) \\
& + \eta \left(\nabla_y \xi_k^{(1)} + 2i\pi \theta^* \xi_k^{(1)} - [\nabla_y Z] \nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^{(1)} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) \right) + O(\eta^2),
\end{aligned}$$

em $\mathcal{L}^n$ quando $\eta \rightarrow 0$, sendo esta última consequência das expansões de $[\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1}$, $\nabla_y \xi_{k,\eta}$, θ_{η} e $\xi_{k,\eta}$.

- A expansão da terceira integral contida no segundo colchete em (4.39) satisfaz

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{\Upsilon} A_{\text{per}}(y) ([\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \psi_{\eta} + 2i\pi \theta_{\eta} \psi_{\eta}) \cdot (e_{\ell} \xi_{k,\eta}) \det[\nabla \Phi_{\eta}] dy d\mathbb{P} \\
&= \left[\int_{\Omega} \int_{\Upsilon} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))}] dy d\mathbb{P} \right] \\
&+ \eta \left[\int_{\Omega} \int_{\Upsilon} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))}] \text{div}_y Z dy d\mathbb{P} \right. \\
&+ \int_{\Omega} \int_{\Upsilon} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_k^{(1)})}] dy d\mathbb{P} \\
&+ \int_{\Omega} \int_{\Upsilon} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi \theta^* \psi^{(1)} - [\nabla_y Z] \nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) \\
&\quad \left. + 2i\pi \theta^{(1)} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))}] dy d\mathbb{P} \right] \\
&+ O(\eta^2),
\end{aligned} \tag{4.45}$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$. Similar ao item anterior, segue das expansões de $\xi_{k,\eta}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $\det[\nabla_y \Phi_{\eta}]$ e

$$\begin{aligned}
& [\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1} \nabla_y \psi_{\eta} + 2i\pi \theta_{\eta} \psi_{\eta} = (\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \\
&+ \eta (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi \theta^* \psi^{(1)} - [\nabla_y Z] \nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^{(1)} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) + O(\eta^2),
\end{aligned}$$

em $\mathcal{L}^n$ quando $\eta \rightarrow 0$, sendo esta última consequência das expansões de $[\nabla_y \Phi_{\eta}]^{-1}$, $\nabla_y \psi_{\eta}$, θ_{η} e ψ_{η} .

Daí, juntando as expansões (4.42), (4.43), (4.44) e (4.45), e colocando-as em (4.39), encontramos

$$\begin{aligned}
(B_{\eta})_{k,\ell} &= \left\{ 1 - \eta \left[\int_{\Omega} \int_{\Upsilon} |\psi_{\text{per}}(\theta^*)|^2 \text{div}_y Z(y, \omega) dy d\mathbb{P} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{\Omega} \int_{\Upsilon} \psi_{\text{per}}(\theta^*) \overline{\psi^{(1)}} dy d\mathbb{P} + \int_{\Omega} \int_{\Upsilon} \psi^{(1)} \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)} dy d\mathbb{P} \right] + O(\eta^2) \right\} \\
&\left\{ \left[\int_{\Omega} \int_{\Upsilon} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*))} dy d\mathbb{P} \right. \right. \\
&+ \int_{\Omega} \int_{\Upsilon} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy d\mathbb{P} \\
&\left. \left. - \int_{\Omega} \int_{\Upsilon} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi \theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))}] dy d\mathbb{P} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta \left[\int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) \operatorname{div}_y Z(y, \omega) dy d\mathbb{P} \right. \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi^{(1)}}) dy d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi^{(1)}) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (\overline{\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*)}) \operatorname{div}_y Z(y, \omega) dy d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \left(\overline{\nabla_y \xi_k^{(1)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(1)} - [\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*)} \right. \\
& \quad \left. + 2i\pi\theta^{(1)} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) \right) dy d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi^{(1)}) \cdot (\overline{\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta_{\eta} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*)}) dy d\mathbb{P} \\
& - \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))}] \operatorname{div}_y Z(y, \omega) dy d\mathbb{P} \\
& - \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_k^{(1)})}] dy d\mathbb{P} \\
& - \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(1)} - [\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) \\
& \quad + 2i\pi\theta^{(1)} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy d\mathbb{P} \left. \right] \\
& + O(\eta^2) \Big\},
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
(B_{\eta})_{k,\ell} &= \left\{ \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy d\mathbb{P} \right. \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (\overline{\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*)}) dy d\mathbb{P} \\
& \left. - \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))}] dy d\mathbb{P} \right\} \\
& + \eta \left\{ \left[\int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) \operatorname{div}_y Z(y, \omega) dy d\mathbb{P} \right. \right. \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi^{(1)}}) dy d\mathbb{P} \\
& \left. + \int_{\Omega} \int_{\mathbf{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi^{(1)}) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy d\mathbb{P} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) dy d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{\left(\nabla_y \xi_k^{(1)} + 2i\pi\theta^* \xi_k^{(1)} - [\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) \right.} \\
& \quad \left. + 2i\pi\theta^{(1)} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) \right) dy d\mathbb{P} \\
& + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi^{(1)}) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta_{\eta} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy d\mathbb{P} \\
& - \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} \operatorname{div}_y Z(y, \omega) dy d\mathbb{P} \\
& - \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_k^{(1)})} dy d\mathbb{P} \\
& - \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (\nabla_y \psi^{(1)} + 2i\pi\theta^* \psi^{(1)} - [\nabla_y Z](y, \omega) \nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) \\
& \quad + 2i\pi\theta^{(1)} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy d\mathbb{P} \Bigg] \\
& - \left[\int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} |\psi_{\text{per}}(\theta^*)|^2 \operatorname{div}_y Z(y, \omega) dy d\mathbb{P} + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} \psi_{\text{per}}(\theta^*) \overline{\psi^{(1)}} dy d\mathbb{P} \right. \\
& \quad \left. + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} \psi^{(1)} \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)} dy d\mathbb{P} \right] \cdot \left[\int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*))} dy d\mathbb{P} \right. \\
& \quad + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy d\mathbb{P} \\
& \quad \left. - \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy d\mathbb{P} \right] \Bigg\} + O(\eta^2),
\end{aligned}$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$.

Como as funções A_{per} , $\psi_{\text{per}}(\theta^*)$ e $\xi_{k,\text{per}}(\theta^*)$ não dependem da variável ω , e as funções Z , $\psi^{(1)}$ e $\xi_k^{(1)}$ dependem da variável ω , a matriz B_{η} se reduz à forma

$$\begin{aligned}
(B_{\eta})_{k,\ell} = & \left\{ \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*))} dy \right. \\
& + \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \\
& \left. - \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) [(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_{\ell} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \right\} \\
& + \eta \left\{ \left[\int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*))} \langle \operatorname{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy \right. \right. \\
& + \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_k \langle \psi^{(1)} \rangle)} dy \\
& \left. + \int_{\mathbb{Y}} A_{\text{per}}(y) (e_{\ell} \langle \psi^{(1)} \rangle) \cdot \overline{(e_k \psi_{\text{per}}(\theta^*))} dy \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_Y A_{\text{per}}(y)(e_\ell \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy \\
& + \int_Y A_{\text{per}}(y)(e_\ell \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{\left(\nabla_y \langle \xi_k^{(1)} \rangle + 2i\pi\theta^* \langle \xi_k^{(1)} \rangle - \langle [\nabla_y Z](y, \omega) \rangle \nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) \right.} \\
& \quad \left. + 2i\pi\theta^{(1)} \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) \right) dy \\
& + \int_Y A_{\text{per}}(y)(e_\ell \langle \psi^{(1)} \rangle) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \\
& - \int_Y A_{\text{per}}(y)[(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_\ell \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy \\
& - \int_Y A_{\text{per}}(y)[(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_\ell \langle \xi_k^{(1)} \rangle)} dy \\
& - \int_Y A_{\text{per}}(y)(\nabla_y \langle \psi^{(1)} \rangle + 2i\pi\theta^* \langle \psi^{(1)} \rangle - \langle [\nabla_y Z](y, \omega) \rangle \nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) \\
& \quad + 2i\pi\theta^{(1)} \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(e_\ell \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \Big] \\
& - \left[\int_Y |\psi_{\text{per}}(\theta^*)|^2 \langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle dy + \int_Y \psi_{\text{per}}(\theta^*) \overline{\langle \psi^{(1)} \rangle} dy \right. \\
& \quad + \int_Y \langle \psi^{(1)} \rangle \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)} dy \Big] \cdot \left[\int_Y A_{\text{per}}(y)(e_\ell \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot (e_k \overline{\psi_{\text{per}}(\theta^*)}) dy \right. \\
& \quad + \int_Y A_{\text{per}}(y)(e_\ell \psi_{\text{per}}(\theta^*)) \cdot \overline{(\nabla_y \xi_{k,\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \\
& \quad \left. - \int_Y A_{\text{per}}(y)[(\nabla_y \psi_{\text{per}}(\theta^*) + 2i\pi\theta^* \psi_{\text{per}}(\theta^*))] \cdot \overline{(e_\ell \xi_{k,\text{per}}(\theta^*))} dy \right] \Big\} + O(\eta^2),
\end{aligned}$$

em $\mathbb{C}$ quando $\eta \rightarrow 0$. Logo, podem se identificar as matrizes $B^{(0)}, B^{(1)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que

$$B_\eta = B^{(0)} + \eta B^{(1)} + O(\eta^2).$$

Daí, pelo algoritmo (4.38), a matriz homogeneizada A_η^* satisfaz

$$A_\eta^* = A^{(0)} + \eta A^{(1)} + O(\eta^2)$$

em $\mathbb{C}^{n \times n}$ quando $\eta \rightarrow 0$, onde

$$A^{(0)} := \frac{B^{(0)} + (B^{(0)})^t}{2} \quad \text{e} \quad A^{(1)} := \frac{B^{(1)} + (B^{(1)})^t}{2}.$$

Pelo Teorema (4.2), as matrizes $A^{(0)}, A^{(1)}$ são reais. Note que $A^{(0)} = A_{\text{per}}^*$. Isto finaliza a prova. $\square$

Observação 4.2. Para determinar os coeficientes da matriz A_{per}^* , precisamos resolver as equações (4.26) e (4.27), as quais são problemas com condições de fronteira periódicos. No caso da matriz $A^{(1)}$, para determinar seus coeficientes, precisamos das funções $\psi^{(1)}$ e $\xi_k^{(1)}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, as quais são soluções dos problemas com condições de fronteira

estacionário (4.28) e (4.29). Foi visto, também no Teorema 4.4, que não precisamos da forma explícita das funções $\psi^{(1)}$ e $\xi_k^{(1)}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, apenas de suas médias, isto é, precisamos determinar $\langle \psi^{(1)} \rangle$ e $\langle \xi_k^{(1)} \rangle$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Note que estas últimas são soluções dos problemas com condições de fronteira periódicos

$$\begin{cases} (L_{\text{per}}(\theta^*) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*))[\langle \psi^{(1)} \rangle] = \mathcal{Y}_{\text{per}}[\psi^{(0)}] \text{ em } \mathcal{Y}, \\ \langle \psi^{(1)} \rangle \text{ } \mathcal{Y}\text{-periódico}, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (L_{\text{per}}(\theta^*) - \lambda_{\text{per}}(\theta^*))[\langle \xi_k^{(1)} \rangle] = \mathcal{X}[\langle \psi^{(1)} \rangle] + \mathcal{Y}_{\text{per}}[\xi_k^{(0)}] + \mathcal{Z}_{k,\text{per}}[\psi^{(0)}] \text{ em } \mathcal{Y}, \\ \langle \xi_k^{(1)} \rangle \text{ } \mathcal{Y}\text{-periódico}, \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\text{per}}[f] &:= (\text{div}_y + 2i\pi\theta^*)\{A_{\text{per}}(y)(2i\pi\theta^{(1)}f)\} - (\text{div}_y + 2i\pi\theta^*)\{A_{\text{per}}(y)\langle [\nabla_y Z](y, \omega) \rangle \nabla_y f\} \\ &\quad - \text{div}_y\{\langle [\nabla_y Z]^t(y, \omega) \rangle A_{\text{per}}(y)(\nabla_y + 2i\pi\theta^*)f\} + (2i\pi\theta^{(1)})\{A_{\text{per}}(y)(\nabla_y + 2i\pi\theta^*)f\} \\ &\quad + (\text{div}_y + 2i\pi\theta^*)\{\langle [\text{div}_y Z(y, \omega)] A_{\text{per}}(y) \rangle (\nabla_y + 2i\pi\theta^*)f\} + \lambda^{(1)}f \\ &\quad + \{\langle \text{div}_y Z(y, \omega) \rangle [\lambda_{\text{per}}(\theta^*) - V_{\text{per}}(y)]\}f, \quad f \in H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{k,\text{per}}[f] &:= (\text{div}_y + 2i\pi\theta^*)\{\langle [\text{div}_y Z(y, \omega)] A_{\text{per}}(y) \rangle (e_k f)\} + (2i\pi\theta^{(1)})\{A_{\text{per}}(y)(e_k f)\} \\ &\quad - \text{div}_y\{\langle [\nabla_y Z]^t(y, \omega) \rangle A_{\text{per}}(y)(e_k f)\} - (e_k)\{A_{\text{per}}(y)\langle [\nabla_y Z](y, \omega) \rangle \nabla_y f\} \\ &\quad + (e_k)\{\langle [\text{div}_y Z(y, \omega)] A_{\text{per}}(y) \rangle (\nabla_y + 2i\pi\theta^*)f\} \\ &\quad + (e_k)\{A_{\text{per}}(y)(2i\pi\theta^{(1)}f)\}, \quad f \in H_{\text{per}}^1(\mathcal{Y}). \end{aligned}$$

Estes operadores são motivados pelos operadores $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, envolvidos nas equações (4.28) e (4.29).

Teorema 4.5. A solução v_η da equação homogeneizada (4.18) satisfaz

$$v_\eta = v_{\text{per}} + \eta v^{(1)} + O(\eta^2),$$

fracamente em $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ quando $\eta \rightarrow 0$, isto é,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (v_\eta(t, x) - v_{\text{per}}(t, x) + \eta v^{(1)}(t, x)) h(t, x) dx dt = O(\eta^2),$$

para todo $h \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$, onde v_{per} é a única solução da equação homogeneizada do caso periódico,

$$\begin{cases} i \frac{\partial v_{\text{per}}}{\partial t} - \text{div}(A_{\text{per}}^* \nabla v_{\text{per}}) + U_{\text{per}}^* v_{\text{per}} = 0, \text{ em } \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ v_{\text{per}}(0, x) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.46)$$

e $v^{(1)}$ solução da equação

$$\begin{cases} i \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} - \text{div}(A_{\text{per}}^* \nabla v^{(1)}) + U_{\text{per}}^* v^{(1)} = \text{div}(A_{\text{per}}^* \nabla v_{\text{per}}) - U^{(1)} v_{\text{per}}, \text{ em } \mathbb{R}_T^{n+1}, \\ v^{(1)}(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.47)$$

onde $U^{(1)}$ é o termo de ordem 1 da expansão de U_η^* numa vizinhança de $\eta = 0$.

Demonstração. Aqui consideraremos a vizinhança $\mathcal{V}$ de $\eta = 0$, aquela tal que as funções em (4.17) são analíticas. A solução $v_\eta : (0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ da equação de Schrödinger homogeneizada (4.18), pela conservação da energia, satisfaz

$$\|v_\eta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \in [0, T], \forall \eta \in \mathcal{V},$$

daí deduzimos que

$$\|v_\eta\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)} = T\|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}.$$

Esta limitação uniforme da sequência $\{v_\eta\}_\eta$ no espaço $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ garante a existência de uma subsequência $\{\eta'\}$ e uma função $v^{(0)} \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ tais que

$$v_{\eta'} \xrightarrow{\eta' \rightarrow 0} v^{(0)}, \text{ em } L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n). \quad (4.48)$$

Da formulação variacional da equação (4.17), temos

$$\begin{aligned} & i \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x) \overline{\varphi}(0, x) dx - i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v_\eta(t, x) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t}(t, x) dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle A_\eta^* v_\eta(t, x), D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U_\eta^* v_\eta(t, x) \overline{\varphi}(t, x) dx dt = 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

para todo $\varphi \in C^1((-\infty, T)) \otimes C^2(\mathbb{R}^n)$. Lembrar que $\langle P, Q \rangle := \text{tr}(P \overline{Q}^t)$, $P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Por (4.48) e o Teorema 4.2, fazendo $\eta' \rightarrow 0$, encontramos

$$\begin{aligned} & i \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x) \overline{\varphi}(0, x) dx - i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v^{(0)}(t, x) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t}(t, x) dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle A_{\text{per}}^* v^{(0)}(t, x), D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U_{\text{per}}^* v^{(0)}(t, x) \overline{\varphi}(t, x) dx dt = 0, \end{aligned} \quad (4.50)$$

para todo $\varphi \in C^1((-\infty, T)) \otimes C^2(\mathbb{R}^n)$, a qual é formulação variacional da equação (4.46), consequentemente, pela unicidade desta equação de Schrödinger, temos que $v^{(0)} = v_{\text{per}}$.

O Teorema (4.2) proporciona $A_\eta^* = A_{\text{per}}^* + \eta A^{(1)} + O(\eta^2)$, em $\mathbb{R}^{n \times n}$ quando $\eta \rightarrow 0$, e $U_\eta^* = U_{\text{per}}^* + \eta U^{(1)} + O(\eta^2)$, em $\mathbb{R}$ quando $\eta \rightarrow 0$. Logo, utilizando isso em (4.49), deduzimos

$$\begin{aligned} & i \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x) \overline{\varphi}(0, x) dx - i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v_\eta(t, x) \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t}(t, x) dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle A_{\text{per}}^* v_\eta(t, x), D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U_{\text{per}}^* v_\eta(t, x) \overline{\varphi}(t, x) dx dt \\ & = \eta \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle A^{(1)} v_\eta(t, x), D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt - \eta \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U^{(1)} v_\eta(t, x) \overline{\varphi}(t, x) dx dt + O(\eta^2), \end{aligned} \quad (4.51)$$

para todo $\varphi \in C^1((-\infty, T)) \otimes C^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos

$$w_\eta(t, x) := \frac{v_\eta(t, x) - v_{\text{per}}(t, x)}{\eta}, \quad \eta \in \mathcal{V}.$$

Afirmção: Existe uma subsequência $\{\eta''\}$ de $\{\eta'\}$ e uma função $v^{(1)} \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$w_{\eta''} \xrightarrow{\eta'' \rightarrow 0} v^{(1)}, \text{ em } L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n). \quad (4.52)$$

Agora, subtraindo as equações (4.50) e (4.51), e dividindo por η encontra-se w_η satisfazendo

$$\begin{aligned} & -i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} w_\eta(t, x) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}(t, x) dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle A_{\text{per}}^* w_\eta(t, x), D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U_{\text{per}}^* w_\eta(t, x) \bar{\varphi}(t, x) dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle A^{(1)} v_\eta(t, x), D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U^{(1)} v_\eta(t, x) \bar{\varphi}(t, x) dx dt + O(\eta), \end{aligned}$$

daí, por (4.52), fazendo $\eta'' \rightarrow 0$, encontra-se

$$\begin{aligned} & -i \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v^{(1)}(t, x) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}(t, x) dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle A_{\text{per}}^* v^{(1)}(t, x), D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U_{\text{per}}^* v^{(1)}(t, x) \bar{\varphi}(t, x) dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \langle A^{(1)} v_{\text{per}}(t, x), D^2 \varphi(t, x) \rangle dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} U^{(1)} v_{\text{per}}(t, x) \bar{\varphi}(t, x) dx dt, \end{aligned}$$

a qual é a formulação variacional da equação (4.47), o qual finaliza a prova. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] G. ALLAIRE, *Homogenization and Two-Scale Convergence*, (SIAM J. Math. Anal., 23, 1992).
- [2] G. ALLAIRE, *Shape optimization by the homogenization method*, (Springer-Verlag New York, Inc., 2002).
- [3] G. ALLAIRE, A. ARNOLD, P. DEGOND e T. Y. HOU, *Quantum Transport: Modeling, Analysis and Asymptotics*, (lectures given at the C.I.M.E. Summer school held in Cetraro, Italy, September 11-16, 2006. Berlin, Springer, 2008).
- [4] G. ALLAIRE e M. VANNINATHAN, *Homogenization of the Schrödinger equation with a time oscillating potential*, (Dis. Contin. Dyn. Syst. Ser. B 6, 1–16, 2006).
- [5] G. ALLAIRE e A. PIATNISTKI, *Homogenization of the Schrödinger Equation and Effective Mass Theorems*, (Commun. Math. Phys. 258, 2005).
- [6] T. ANDRADE, W. NEVES e J. SILVA, *Homogenization of Liouville Equations beyond stationary ergodic setting*, (Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2020).
- [7] H. BAHOURI, C. FERMANIAN-KAMMERER e I. GALLAGHER, *Analyse de l'espace des phases et calcul pseudo-differential sur le groupe de Heisenberg*, (C. R. Math. Acad. Sci. Paris 347(17–18), 1021–1024, 2009).
- [8] L. BARLETTI e N. BEN ABDALLAH, *Quantum transport in crystals: effective mass theorem and k - p Hamiltonians*, (Comm. Math. Phys., 307(3):567–607, 2011).
- [9] A. BENSOUSSAN, J.-L. LIONS e G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, (Amster-dam: North-Holland, 1978).
- [10] X. BLANC, C. LE BRIS e P.-L. LIONS, *Une variante de la théorie de l'homogénéisation stochastique des opérateurs elliptiques*, (C. R. Math. Acad. Sci. Paris. I 343, 2006).
- [11] X. BLANC, C. LE BRIS e P.-L. LIONS, *Stochastic Homogenization and Random Lattices*, (J. Math. Pures Appl., 88, 2007).
- [12] A. BOURGEAT, A. MIKELIĆ e S. WRIGHT, *Stochastic two-scale convergence in the mean and applications*, (J. Reine Angew. Math., 456, 1994).
- [13] E. CANCÈS e C. LE BRIS, *Mathematical Modeling of Point Defects in Materials Science*, (Math. Models Methods Appl. Sci., Vol. 23, No. 10, 2013).

- [14] T. CAZENAVE, *Semilinear Schrödinger Equations*, (American Mathematical Society, 2003).
- [15] T. CAZENAVE e A. HARAUX, *An introduction to evolution semilinear equations*, (Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 13. Clarendon, Oxford University Press, New York, 1998).
- [16] V. CHABU, C. FERMANIAN-KAMMERER e F. MARCIÀ, *Wigner Measure and Effective Mass Theorem*, (HAL, archives-ouvertes, 2019).
- [17] D. CIORANESCU e P. DONATO, *An Introduction to Homogenization*, (Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications, 17, 1999).
- [18] J. A. DIEUDONNE, *Foundations of modern analysis*, (New York. Academic Press., 1970).
- [19] D. DUMMIT e R. FOOTE, *Abstrac Algebra*, (John Wiley & Sons, Inc., 2004).
- [20] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, (Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 15, 189-258, 1965).
- [21] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, (American Mathematical Society, 2010).
- [22] L. C. EVANS e R. F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, (Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1992).
- [23] GERALD B. FOLLAND, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, (John Wiley & Sons, Inc., 1999).
- [24] GERALD B. FOLLAND, *A course in abstract harmonic analysis*, (Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1995).
- [25] GERALD B. FOLLAND, *Comunicação Pessoal*, 2019.
- [26] ENNIO DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, (Mem Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.(3) 3 (1957), 25–43.20-172 (C. B. Morrey)).
- [27] P. GÓRKA e E. G. REYES, *Sobolev Spaces on Locally Compact Abelian Groups and the Bosonic String Equation*, (J. Aust. Math. Soc. 98, 2015).
- [28] P. GÓRKA e T. KOSTRZEWA, *A Second Look of Sobolev Spaces on Metrizable Groups*, (Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica, Vol. 45, 95-120, 2020).
- [29] R. C. GUNNING e H. ROSSI, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, (Prentice-Hall, 1965).
- [30] E. HEWITT e A. ROSS, *Abstract Harmonic Analysis, Vol. I*, (Springer-Verlag New York, 1963).
- [31] R. IORIO e V. IORIO, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2001).

- [32] V. V. JIKOV, S. M. KOZLOV e O. A. OLEINIK, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, (Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1994).
- [33] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, (Berlin, Springer, 1995).
- [34] S. G. KRANTZ e H. R. PARKS, *The implicit Function Theorem: History, Theory and Applications*, (Birkhauser Verlag, Basel, 2002).
- [35] H. P. MYERS, *Introductory Solid State Physics*, (Taylor & Francis, 1990).
- [36] G. NGUETSENG, *A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization*, (SIAM J. Math. Anal., 20, 1989).
- [37] A. A. PANKOV, *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations*, (Dordrecht: Springer, 2013).
- [38] F. POUPAUD e C. RINGHOFER, *Semi-Classical Limits in a Crystal with Exterior Potentials and Effective Mass Theorems*, (Commun. in Partial Differential Equations, 21, 1897-1918, 1996).
- [39] M. REED e B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Vol. 1, (New York: Academic Press, 1978).
- [40] F. RELICH, *Perturbation theory of eigenvalue problems*, (New York: Gordon & Breach Science Publishers, 1969).
- [41] J. J. RODRÍGUEZ-VEGA e W. A. ZÚÑIGA-GALINDO, *Elliptic pseudodifferential equations and Sobolev spaces over p -adic fields*, (Pacific J. Math. 246(2), 407-420, 2010).
- [42] A. N. SHIRYAEV, *Probability*, (Graduate Texts in Mathematics, vol. 95, Springer, 1984).
- [43] C. SULEM e P. L. SULEM, *Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*, (Appl. Math. Sci. 139, Springer, New York, 1999).
- [44] W. JING, *Homogenization of Randomly Deformed Conductivity Resistant Membranes*, (Commun. Math. SCI., Vol., 14, No 5, pp. 1237-1268, 2016).
- [45] C. H. WILCOX, *Theory of Bloch Waves*, (Ft. Belvoir: Defense Technical Information Center, 1977).
- [46] V. V. ZHIKOV e A. L. PYATNITSKII, *Homogenization of Random singular Structures and Random Measures*, Izv. Math. **70**, 19-67, 2006).