



INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro



UFRJ

**Dinâmica em Árvores Associados a Sistemas
Fortemente Dissipativos**

Elizabeth Ruth Salazar Flores

Rio de Janeiro, Brasil

Setembro, 2020

Dinâmica em Árvores Associados a Sistemas Fortemente Dissipativos

Elizabeth Ruth Salazar Flores

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Maria José Pacifico

Coorientador: Javier Correa

Rio de Janeiro, Brasil

Setembro, 2020

CIP - Catalogação na Publicação

Salazar Flores , Elizabeth Ruth
SÁrvor Dinâmica em árvores associadas a difeomorfismos
es e fortemente dissipativos no disco D / Elizabeth Ruth
difeom Salazar Flores . -- Rio de Janeiro, 2020.
orfism 55 f.
os
fortem Orientadora: Maria Jose Pacifico.
ente Coorientador: Javier Correa.
dissip Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
ativos de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós
d Graduação em Matemática, 2020.

1. Dinâmica em árvores. 2. Difeomorfismos
fortemente dissipativos . 3. Invariantes dinamicos.
4. Dinâmica unidimensional induzida. I. Pacifico,
Maria Jose, orient. II. Correa, Javier, coorient.
III. Título.

Elizabeth Ruth Salazar Flores

Dinâmica em Árvores Associados a Sistemas Fortemente Dissipativos

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática

Trabalho aprovado por

Maria José Pacifico
Orientadora

Javier Correa
Coorientador

Alexander Arbieto

Sergio Romaña

Enrique Pujals

Alejandro Kocsard

Vilton Pinheiro

Rio de Janeiro, Brasil
Setembro, 2020

*A esa niña que de haber sabido de ciencia,
hubiera podido soñar más.*

Agradecimentos

A minha mãe que a pesar das limitações sempre empurrou para eu estudar e me tornar independente.

Ao meu pai pelo apoio para sempre encarar novos ciclos.

Aos meus irmãos mais velhos por ser as vezes pais, aos meus irmãos mais novos por me motivar a tentar ser exemplo.

A minha orientadora Maria José Pacífico, pelo estímulo e apoio. Ao meu coorientador Javier Correa pelo tempo dedicado e a paciência.

As minhas amigas e colegas Liliana e Claudia pelos cafezinhos e as conversas além da matemática.

A Edison pela companhia e ajuda nos meus piores momentos e também pelos gatos.

Aos meus colegas e amigos, Diego, Miguel e Claudio. Em geral a todos que de alguma forma contribuíram nesse trabalho.

À Capes e o CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho estudamos a dinâmica unidimensional induzida por difeomorfismos fortemente dissipativos no disco \mathbb{D} , isto é, dinâmicas em árvores reais. Essa dinâmica que pela sua construção não é injetora, preserva informação das medidas ergódicas aperiódicas como também preserva algumas propriedades da dinâmica original. Assim, estudamos principalmente a árvore como invariante dinâmico no sentido ergódico como topológico.

Palavras-chave: Dinâmica em árvores, difeomorfismos fortemente dissipativos, invariantes dinâmicos, dinâmica unidimensional induzida.

Abstract

In this work we study the one-dimensional dynamics induced by strongly dissipative diffeomorphisms on the disk \mathbb{D} , that is, dynamics in real trees. This dynamic, which due to its construction is not injective, preserves information from the aperiodic ergodic measures as well as preserving some properties of the original dynamics. Thus, we mainly study the tree as a dynamic invariant in the ergodic as the topological sense.

Keywords: Tree dynamics, strongly dissipative diffeomorphisms, dynamic invariants, induced one-dimensional dynamics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Variedade estável de um ponto x regular para $f \in SD^r(\mathbb{D})$	18
Figura 2 – Estrutura unidimensional da árvore \mathcal{X}	32
Figura 3 – Árvore associada à ferradura em \mathbb{D}	33
Figura 4 – Dinâmica na árvore associada à ferradura em \mathbb{D}	33
Figura 5 – Árvores associados a dinâmicas conjugadas em seus maximais invariantes.	43
Figura 6 – Semi-conjugações entre as dinâmicas nas árvores	43
Figura 7 – Ordem das curvas é preservada pela conjugação nos maximais invariantes.	45
Figura 8 – Iterado de curvas errantes	47

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	PRELIMINARES	23
2.1	Definições e conceitos básicos	23
2.2	Medidas	25
2.3	Entropia	25
2.4	Expoentes de Lyapunov	27
2.5	Difeomorfismos Dissipativos em Superfícies	27
3	ÁRVORES ASSOCIADOS A DIFEOMORFISMOS FORTEMENTE DISSIPATIVOS NO DISCO	29
3.1	Construção da árvore	29
3.1.1	Construção do espaço métrico	31
3.1.2	\mathcal{X} é uma árvore real	31
3.2	A semi-conjugação e a dinâmica induzida na árvore	32
3.2.1	Definições das aplicações π e \hat{f}	32
3.2.2	Propriedades ergódicas da dinâmica na árvore	34
4	PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS E ERGÓDICAS DA ÁRVORE \mathcal{X}	35
5	A ÁRVORE COMO INVARIANTE DINÂMICA	39
5.1	Conjugação no disco \mathbb{D}	39
5.2	Árvores associados a $(f, f^k(\mathbb{D}))$	41
5.3	Semi-conjugação de árvores a partir da conjugação dos maximais invariantes	42
5.3.1	Prova do Teorema C	44
5.4	Prova dos Teoremas D e E	47
	REFERÊNCIAS	53

1 Introdução

Em sistemas dinâmicos, umas das áreas mais prosperas é a dos endomorfismos de variedades unidimensionais. Entre as vantagens que possui esta teoria está a estrutura de ordem que se tem num intervalo. Porém esta propriedade é perdida ao considerar espaços ambientes com dimensão maior que 1. Existem varias formas de mergulhar aplicações unidimensionais em aplicações de dimensão 2. Para ver isto, um exemplo conhecido é dado ao considerar $f : I \rightarrow I$, a extensão $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow I \times \mathbb{R}$ é definida por $F(x, y) = (f(x) + y, bx)$. Em particular o ao considerar a aplicação quadrática $f(x) = 1 - ax^2$ e a respectiva extensão $F(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$ conhecida como a aplicação e Hénon. Ainda quando F provém de uma aplicação unidimensional, essa dinâmica é muito mais difícil de descrever. Podendo apresentar incluso atratores de período não limitado.

Nesse trabalho estudamos a dinâmica induzida por uma classe de difeomorfismos em superfícies. Essa nova dinâmica é de interesse por ser vista como um modelo mais simples verificando continuidade num espaço de menor dimensão (unidimensional) que herda algumas características da dinâmica original como entropia, pontos periódicos e conjugação. Inclusive é possível obter propriedades dinâmicas como topológicas e ergódicas na dinâmica original a partir da dinâmica induzida.

A classe de difeomorfismos inicialmente mencionada é do tipo contração de volume e cuja dinâmica é intermediaria entre a 1-dimensional e dinâmica de superfícies. Dita classe que é chamada de difeomorfismos fortemente dissipativos tem sido introduzida por Pujals e Crovisier em [4]. Onde tem sido estudado que é uma classe aberta baixo certas hipóteses no jacobiano assim como a densidade de pontos periódicos no suporte das medidas invariantes.

Dada S uma superfície compacta, onde $r \geq 1$. Dizemos que $f \in \text{Dif}^r(S)$ é dissipativo se $|\det Df(x)| < 1$, para todo $x \in S$. Assim, a classe dos difeomorfismos dissipativos verifica que quase todo ponto de uma medida ergódica possui variedade estável. Em particular, se a medida não for suportada num poço hiperbólico, a variedade estável de pontos regulares é 1-dimensional. Logo, a classe dos fortemente dissipativos são tais que as variedades estáveis separam o domínio atrator S . Essa característica, no caso de S ser um disco, é a que vai fornecer uma estrutura 1-unidimensional.

Se denotamos por $W_S^s(x)$ à componente conexa de $W^s(x) \cap S$ que contém o ponto x . Definimos:

Definição 1.0.1. *Um difeomorfismo C^r , $f : S \rightarrow f(S) \subset \text{int}(S)$, $r > 1$ numa superfície S compacta é fortemente dissipativo se:*

- 1- f é dissipativo,
- 2- para toda medida μ ergódica que não é suportada num poço hiperbólico, e para μ q.t.p x , cada uma das componentes conexas de $W_S^s(x) \setminus \{x\}$ não estão contidas em $f(S)$.

Denotamos por $SD^r(S)$, $r > 1$, ao conjunto dos difeomorfismos fortemente dissipativos na superfície S . Em particular, quando S é o disco \mathbb{D} fechado, a última condição diz que $W_{\mathbb{D}}^s(x)$ separa o disco, o qual pode ser visto na Figura 1. Assim, no caso de $S = \mathbb{D}$ a segunda condição na Definição 1.0.1 vai induzir uma estrutura 1-dimensional pois nos permite estabelecer uma ordem entre tais curvas.

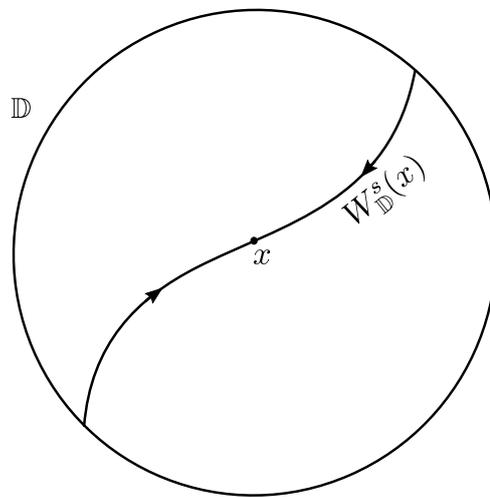


Figura 1 – Variedade estável de um ponto x regular para $f \in SD^r(\mathbb{D})$

Para notar que essa classe de difeomorfismos é não vazia basta considerar a ferradura no disco \mathbb{D} e notar que verifica as condições de dissipatividade forte. Porém para ver mais exemplos e entender por que estão ligados a dinâmicas unidimensionais e que na verdade extensões de endomorfismos em intervalos são fortemente dissipativos. Basta considerar a família quadrática $x \rightarrow x^2 + c$ e a respectiva extensão $H_{ab}(x, y)$ a superfícies, conhecida como a aplicação de Hénon, para certos parâmetros a e b . De fato, isto tem sido provado em [4] no seguinte Teorema:

Teorema 1.0.2. Para qualquer $a \in (1, 2)$ e $|b| < 1/4$, a aplicação de Hénon

$$H_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, -bx)$$

é fortemente dissipativa na superfície $S = \{(x, y) : |x| < \frac{1}{2} + \frac{1}{a}, |y| < \frac{1}{2} - \frac{a}{4}\}$.

Assim, uma das primeiras propriedades estudadas em [4] dessa classe de difeomorfismos $SD^r(S)$ é que ela C^1 -aberta quando a norma do Jacobiano é suficiente pequeno, mais claramente temos:

Teorema 1.0.3. *Seja $f \in SD^r(S)$, $r > 1$, $x, y \in S$ e um vetor unitário $u \in T_y S$, satisfazendo*

$$|\det Df(x)| \leq \|Df(y).u\|^{\frac{9}{10}}.$$

Então, para qualquer subconjunto de difeomorfismos C^2 , todo difeomorfismo g que está C^1 perto de f , é fortemente dissipativo.

Dado que nas dinâmicas fortemente dissipativas as órbitas são não uniformemente hiperbólicas é preciso um teorema da variedade estável para a prova dos teoremas acima. Em [4] é desenvolvido o seguinte teorema que exige contração, dominação e estar refreada na direção transversal e o qual vai nos ajudar na construção de dinâmicas unidimensionais associadas aos fortemente dissipativos.

Teorema 1.0.4 (Teorema da variedade estável [4]). *Seja um compacto $\Lambda \subset S$, duas vizinhanças U, V , um conjunto C^2 -limitado \mathcal{D} do difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ de classe C^2 , e constantes $\sigma, \tilde{\sigma}, \rho, \tilde{\rho} \in (0, 1)$ tais que $\frac{\tilde{\sigma}\tilde{\rho}}{\sigma\rho} > \sigma$. Então, para qualquer $f \in \mathcal{D}$, os pontos $x \in \cap_{n \geq 0} f^{-n}(\Lambda)$ cuja direção $E \subset T_x S$ satisfazendo:*

$$\forall n \geq 0, \tilde{\sigma}^n \leq \|Df^n(x)|_E\| \leq \sigma^n \text{ e } \tilde{\rho}^n \leq \frac{\|Df^n(x)|_E\|}{|\det Df^n(x)|} \leq \rho^n,$$

possuem uma variedade estável 1-dimensional variando continuamente na topologia C^1 com o ponto e com o difeomorfismo $f \in \mathcal{D}$ dotado com a topologia C^1 .

Esse teorema é válido também para difeomorfismos $C^{1+\alpha}$ com $\alpha \in (0, 1)$, quando \mathcal{D} é um conjunto $C^{1+\alpha}$ -limitado, se a condição $\frac{\tilde{\sigma}\tilde{\rho}}{\sigma\rho} > \sigma^\alpha$ se verificar. Ainda mais, esse Teorema da variedade estável fornece uniformidade respeito à medida.

Dado que no contexto de endomorfismos no círculo um resultado já conhecido é o C^∞ Closing Lema. Os fortemente dissipativos tem a relevante característica de densidade dos pontos periódicos no suporte de qualquer medida invariante. Isto é, o Closing Lema C^∞ para medidas invariantes sem a necessidade de fazer alguma perturbação.

Teorema 1.0.5. [4] *Dada $f \in SD^r(\mathbb{D})$, onde $r > 1$, o suporte de toda $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$ está contido em $\overline{\text{Per}(f)}$. Em particular, se f possui uma medida ergódica não atômica, então existem infinitos pontos periódicos com período não limitado.*

Em [4], Crovisier e Pujals definem a partir de difeomorfismos fortemente dissipativos no disco \mathbb{D} , espaços unidimensionais (árvores) e uma dinâmica nesse espaço. O resultado desenvolvido trata-se de uma recíproca do Teorema 1.0.2, que expõe dinâmicas em superfícies perto das unidimensionais que verificam a condição de dissipatividade forte. A construção de tal espaço é dada ao considerar uma coleção Γ de curvas da forma $W^s(x) \cap \mathbb{D}$, sendo x ponto regular de alguma medida ergódica aperiódica de f . Sendo que a ferramenta principal para a construção gerar um espaço 1-dimensional é a possibilidade

de estabelecer uma ordem entre as curvas. Para começar, nesse trabalho refinamos e estendemos a construção feita em [4] conseguindo assim uma árvore mais geral.

Teorema A. *Dado $f \in SD^r(\mathbb{D})$, $r > 1$, um difeomorfismo fortemente dissipativo, que possui uma medida ergódica aperiódica, existe \mathcal{X} uma árvore real compacto, $\hat{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{X}$ aplicações contínuas tais que:*

1. π é uma semi-conjugação sobrejetora entre f e \hat{f} , isto é, $\pi \circ f = \hat{f} \circ \pi$.
2. π induz uma aplicação $\pi_* : \mathcal{M}_1(f) \rightarrow \mathcal{M}_1(\hat{f})$ que é injetora no subconjunto de medidas ergódicas aperiódicas.
3. \hat{f} não tem ramos errantes.

Uma primeira diferença da construção apresentada em [4], é que nós construímos uma árvore ligada a todas as medidas ergódicas aperiódicas e não com uma única medida. Isto permite estabelecer uma aplicação entre os espaços de medidas invariantes e portanto conjuntos de medida total são levados por $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{X}$ em conjuntos de medida total. Sendo que em [4] é mostrada apenas a existência de uma métrica, nós apresentamos explicitamente uma métrica definida a partir da distancia de Hausdorff entre curvas. Além disso, temos feito um refinamento da coleção de curvas de forma que o espaço tenha possivelmente menos ramos errantes, ver definição 3.0.2.

Logo, passamos a estudar algumas propriedades da dinâmica na árvore. Para isto, descrevemos elementos como também subconjuntos da árvore pelo índice, isto é, o número de componentes conexas do complemento destes. Obtendo assim uma relação entre pontos periódicos de dinâmica original e a induzida na árvore, que traz como consequência a π_* ser sobrejetora. Além disso, dada a bijeção entre medidas ergódicas aperiódicas é de se esperar que entropias métrica e topológica coincidam.

Teorema B. *Dada $f \in SD^r(\mathbb{D})$ e seja (\hat{f}, \mathcal{X}) a dinâmica na árvore induzida. Temos que,*

- a. *O índice de qualquer nodo é finito,*
- b. *\hat{f} não é homeomorfismo,*
- c. $\pi(\text{Per}(f)) = \text{Per}(\hat{f})$,
- d. π_* é sobrejetora,
- e. $\overline{\text{Per}(\hat{f})} = \mathcal{X}$,
- f. $h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(\hat{f})$.

Aqui a possibilidade de \hat{f} ser um homeomorfismo é nula porque implicaria a existência de homeomorfismo de intervalos que só é possível quando os pontos regulares são periódicos. A última propriedade foi provada em [4], porém por completude desse trabalho apresentamos a prova considerando a árvore geral.

Finalmente passamos a estudar a árvore como invariante dinâmico. A princípio sob a hipótese de conjugação no disco \mathbb{D} temos que as árvores são homeomorfas e as dinâmicas são conjugadas. O qual acontece porque a ordem entre curvas é preservada pelo homeomorfismo dado. Assim, nos perguntamos o que acontece se limitamos a conjugação aos maximais invariantes. Um resultado similar não é possível pois existe um exemplo apresentado na seção 5.3. O exemplo trata-se da aplicação ferradura definida em diferentes discos $D \subset \mathbb{D}$ e \mathbb{D} . Considerando a identidade como o homeomorfismo entre os maximais invariantes no entanto tais aplicações geram árvores não homeomorfas. Isto acontece pois existem mais de uma curva do tipo $W^s(x) \cap D$ contida numa única curva de $W^s(x) \cap \mathbb{D}$. Nesse caso, embora não tenhamos conseguido uma conjugação, é possível definir a partir da inclusão de curvas uma semi-conjugação entre as dinâmicas nas árvores.

Em geral, considerando apenas a conjugação entre maximais invariantes é possível encontrar duas semi-conjugações entre as dinâmicas nas árvores, mais claramente:

Teorema C. *Dados f e g em $SD^r(\mathbb{D})$ conjugados em seus maximais invariantes. Sejam \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g as árvores correspondentes a f e g . Então, existem semi-conjugações contínuas sobrejetoras $H_1 : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_g$ e $H_2 : \mathcal{X}_g \rightarrow \mathcal{X}_f$ entre \hat{f} e \hat{g} tais que $H_1 \circ \hat{f} = \hat{g} \circ H_1$ e $H_2 \circ \hat{g} = \hat{f} \circ H_2$.*

Como consequência da prova do Teorema C temos o corolário 5.3.4. O qual diz que com certas condições sobre as curvas em Γ_f temos que as dinâmicas são conjugadas e que optamos por não enunciar aqui pelo tecnicismo do enunciado.

Para o recíproco do Teorema C, isto é, possuindo apenas a conjugação de dinâmicas nas árvores. Obtemos relações importantes tanto no âmbito ergódico como no topológico. Em primeiro lugar, considerando como hipótese somente conjugação sobre conjuntos de medida total em \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g , é possível definir uma bijeção mensurável entre subconjuntos dos maximais invariantes Λ_f e Λ_g . A qual permite definir uma bijeção entre os conjuntos de medidas ergódicas aperiódicas de f e g e esta concebe sistemas ergódicos equivalentes.

Teorema D. *Dadas $f, g \in SD^r(\mathbb{D})$. Se existir $H : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_g$ bijeção entre conjuntos de medida total para toda medida ergódica aperiódica de \hat{f} e \hat{g} , tal que $\hat{g} \circ H = H \circ \hat{f}$. Existe uma bijeção $h : A \subset \Lambda_f \rightarrow B \subset \Lambda_g$ tal que A e B possuem medida total para todas as medidas ergódicas aperiódicas por f e g , respectivamente. A qual induz uma bijeção $h^* : \mathcal{M}_1(f) \rightarrow \mathcal{M}_1(g)$ entre os espaços de medidas ergódicas aperiódicas. Além disso, os sistemas (f, μ) e $(g, h^*\mu)$ são ergodicamente equivalentes.*

Em particular, quando H for um homeomorfismo temos:

Corolário 1.0.6. *Se as dinâmicas \hat{f} e \hat{g} são topologicamente conjugadas por H . Existe uma bijeção $h : A \subset \Lambda_f \rightarrow B \subset \Lambda_g$ tal que A e B possuem medida total para toda medidas invariantes por f e g , respectivamente. A qual induz uma bijeção $h^* : \mathcal{M}_1(f) \rightarrow \mathcal{M}_1(g)$ entre os conjuntos medidas ergódicas aperiódicas. Além disso, os sistemas (f, μ) e $(g, h^*\mu)$ são ergodicamente equivalentes.*

No sentido topológico, não é possível definir uma aplicação nas regiões errantes a partir de conjugação topológica entre as dinâmicas induzidas devido a que tais regiões colapsam a pontos na árvore. Menos ainda podemos pensar em continuidade uniforme em conjuntos 'grandes' já que não possuímos contração uniforme das curvas. Além disso, precisamos continuidade nos maximais invariantes para poder estender ao fecho de tais conjuntos. Deste modo, para nosso propósito adicionamos a condição de contração uniforme (nas variedades estáveis) sobre os maximais invariantes. Obtendo assim uma conjugação no fecho das uniões dos suportes das medidas ergódicas aperiódicas. Onde a ferramenta principal na prova é passar para o espaço de pre-órbitas (limite inverso) da árvore.

Teorema E. *Dadas $f, g \in SD^r(\mathbb{D})$, tais que as dinâmicas nas árvores $\hat{f} : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_f$ e $\hat{g} : \mathcal{X}_g \rightarrow \mathcal{X}_g$ são topologicamente conjugadas. Se os maximais invariantes Λ_f e Λ_g têm contração uniforme nas variedades estáveis. Então, existe uma aplicação que conjuga f e g no fecho das uniões dos suportes de medidas ergódicas aperiódicas.*

A estrutura do trabalho é a seguinte: No capítulo dois apresentamos as definições básicas como resultados a ser utilizados para o desenvolvimento do nosso trabalho. No capítulo três apresentamos a prova do Teorema A que envolve a construção do espaço métrico unidimensional (árvore) e a dinâmica induzida nesse espaço pelo difeomorfismo fortemente dissipativo. No Capítulo 4 obtemos propriedades dinâmicas da $\hat{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ a partir de propriedades da $f : \mathbb{D} \rightarrow f(\mathbb{D})$, mais especificamente fazemos a prova do Teorema B. No Capítulo 5 estudamos inicialmente a árvore como invariante dinâmico, isto é, a prova do Teorema C. Seguidamente fazemos um estudo das dinâmicas originais sob hipótese de conjugação entre dinâmicas das árvores, isto é, a prova dos Teoremas D e E.

2 Preliminares

Nesse capítulo introduzimos os conceitos preliminares ao estudo da dinâmica de difeomorfismos dissipativos em superfícies. Isto é, definições e resultados básicos no ponto de vista da dinâmica como também a interligação e consequências com a teoria ergódica no caso de dinâmicas dissipativas.

2.1 Definições e conceitos básicos

Considere o espaço $C^r(M)$ das aplicações de classe C^r na variedade M de dimensão m e para $r \geq 1$. Dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^r se $f \in C^r(M)$ e tem uma inversa f^{-1} da mesma classe. Denotamos como $\text{Dif}^r(M)$ ao conjunto dos difeomorfismos de classe C^r em M .

Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$, a órbita de $p \in M$ é denotada por $\mathcal{O}(p)$. Se $\mathcal{O}(p)$ é finita, dizemos que p é ponto periódico, isto é, existe um n tal que $f^n(p) = p$. Além disso denotamos por $\text{Per}(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos de f . Se $f(p) = p$, dizemos que p é ponto fixo. Um ponto $q \in M$ pertence ao ω -limite de p , $\omega(p)$, quando existe uma sequência de inteiros $n_i \rightarrow \infty$ tal que $f^{n_i}(q) \rightarrow p$. Analogamente definimos o conjunto, α -limite de p , $\alpha(p)$, como sendo o ω -limite de p para f^{-1} .

Dado um subconjunto $K \subset M$ compacto, dizemos que é invariante por f , se $f(K) \subset K$. Com isto, os conjuntos como $\alpha(p)$, $\omega(p)$ e $\mathcal{O}(p)$ são invariantes pela f .

Uma conjugação entre $f, g \in \text{Dif}^r(M)$ é um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h \circ g = f \circ h$.

Disto tem-se que $h \circ g^k = f^k \circ h$ e por tanto, h leva órbitas de g em órbitas de f , isto é, $h(\mathcal{O}_g(p)) = \mathcal{O}_f(h(p))$. Ainda mais, $h(\omega_g(p)) = \omega_f(h(p))$ e $h(\alpha_g(p)) = \alpha_f(h(p))$.

Definição 2.1.1. *Seja $p \in M$ um ponto fixo de $f \in \text{Dif}^r(M)$. Dizemos que p é um ponto fixo hiperbólico se $Df_p : TM_p \rightarrow TM_p$ é um isomorfismo hiperbólico, isto é, Df_p não tem autovalor de norma 1.*

E, um ponto p periódico de período k é hiperbólico se é hiperbólico respeito f^k . Assim, para esses pontos se definem as variedades estáveis e instáveis:

Definição 2.1.2. *Se $p \in M$ é um ponto hiperbólico, definimos a variedade estável de p como:*

$$W^s(p) = \{x \in M; f^k(x) \rightarrow p \text{ quando } k \rightarrow +\infty\},$$

e a variedade instável:

$$W^u(p) = \{x \in M; f^k(x) \rightarrow p \text{ quando } k \rightarrow -\infty\}.$$

As quais são subvariedades imersas injetivamente de M e invariantes por f . Ainda mais, as dimensões de $W^s(p)$ e $W^u(p)$ tem dimensão igual ao número de autovalores de Df_p com norma menor que 1, respectivamente, maior que 1. Tais variedades estáveis e instáveis são invariantes por f e também verificam:

$$W^s(p) = \{q \in M; \omega(q) = p\} \text{ e } W^u(p) = \{q \in M; \alpha(q) = p\}.$$

Deforma mais geral, se M é uma variedade compacta, dado um conjunto $\Lambda \subset M$ invariante por $f \in \text{Dif}^r(M)$, dizemos que Λ é hiperbólico para f se:

- O fibrado tangente a M restrito a Λ se decompõe em uma soma direta contínua $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$ invariante por Df ;
- existe uma métrica riemanniana e um número $0 < \lambda < 1$ tal que $\|Df_x v\| \leq \lambda \|v\|$ e $\|Df_x^{-1} u\| \leq \lambda \|u\|$ para quaisquer $x \in \Lambda$, $v \in E_x^s$ e $u \in E_x^u$.

Definição 2.1.3. Um ponto $p \in M$ é não errante se dada vizinhança U de p e qualquer inteiro $n_0 > 0$, existe um inteiro $|n| > n_0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

Denotamos o conjunto dos pontos não errantes por $\Omega(f)$, o qual é fechado e invariante. Os conjuntos limite $\alpha(p)$ e $\omega(p)$ estão contidos em $\Omega(f)$. Em particular, todo ponto fixo e periódico de f pertence a $\Omega(f)$.

Dado $f \in \text{Dif}^r(M)$, dizemos que é *Axioma A* se o conjunto não errante $\Omega(f)$ é hiperbólico e $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$. Um caso particular de difeomorfismos Axioma A, são os difeomorfismos Morse-Smale:

- $\Omega(f)$ consiste em um número finito de pontos fixos e periódicos, todos hiperbólicos,
- as variedades estáveis e instáveis dos pontos fixos e periódicos, são duas a duas, transversais.

Definição 2.1.4. Dado $U \subset M$, o conjunto $\Lambda = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^j(U)$ é chamado *maximal invariante* em U por f .

De forma mais geral à definição de conjunto hiperbólico temos

Definição 2.1.5. Um conjunto compacto invariante Λ que admite uma decomposição dominada $E \oplus F$ é chamado *topologicamente hiperbólico* se é maximal invariante para alguma vizinhança, a variedade local tangente a E está contida na variedade local estável e a variedade local tangente a F está contida na variedade instável.

Ou melhor, um compacto invariante Λ é topologicamente hiperbólico se é maximal invariante e para cada ponto, as variedades estável e instável são duas variedades complementarias de tamanho independente do ponto. A grosso modo pode-se dizer que um conjunto Λ é topologicamente hiperbólico se a sua dinâmica é conjugada a uma dinâmica hiperbólica.

2.2 Medidas

Dada um espaço métrico compacto M e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação mensurável e seja $\mathcal{M}_1(f)$ o espaço das medidas invariantes por f .

Definição 2.2.1. *Uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$ é ergódica se dado $A \subset M$ tal que $f^{-1}(A) = A$ a menos de medida nula implica que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.*

Denotamos $\mathcal{M}_e(f) \subset \mathcal{M}_1(f)$ ao subconjunto das medidas ergódicas respeito f .

Definição 2.2.2. *Uma medida μ é chamada periódica se está suportada em uma órbita periódica de f .*

Caso contrario μ é chamada medida aperiódica.

Observação 2.2.3. *Seja μ ergódica aperiódica e o seu suporte $\text{supp}(\mu)$, temos que todo ponto $x \in \text{supp}(\mu)$ tem órbita densa no próprio suporte de μ .*

Definição 2.2.4. *Sejam μ e ν probabilidade invariantes por transformações $f : M \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N$, respectivamente. Dizemos que são sistemas (f, μ) e (g, ν) são ergodicamente equivalentes se podemos escolher conjuntos mensuráveis $X \subset M$ e $Y \subset N$ com $\mu(X) = 1$ e $\nu(Y) = 1$, e uma bijeção mensurável $h : X \rightarrow Y$ com inversa mensurável, de forma tal que*

$$h_*\mu = \nu \quad \text{e} \quad h \circ f = g \circ h.$$

2.3 Entropia

Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva uma medida de probabilidade μ . Dada uma partição \mathcal{P} de M , a entropia da partição \mathcal{P} é o número

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{p \in \mathcal{P}} -\mu(p) \log \mu(p).$$

Dado o sistema (f, μ) , denotamos

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P})$$

Onde o limite

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n).$$

é chamado de entropia de f respeito à medida μ da partição \mathcal{P} .

Definição 2.3.1. *A entropia do sistema (f, μ) é definida por*

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

Onde o supremo é tomado sobre todas as partições com entropia finita.

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação contínua no espaço métrico M com métrica d . O conjunto $S \subset M$ é chamado de (n, ϵ) -separado pela f para $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\epsilon > 0$ se, para cada dois pontos $x, y \in S$, com $x \neq y$, existe pelos menos um k com $0 \leq k \leq n$ tal que

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon.$$

E seja o número

$$r(n, \epsilon, f) = \max\{\#S : S \subset M \text{ é } (n, \epsilon)\text{-separado por } f\}.$$

Assim, a taxa de crescimento exponencial de $r(n, \epsilon, f)$ enquanto $n \rightarrow \infty$ é medido ao considerar

$$h(\epsilon, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(r(n, \epsilon, f))}{n}.$$

Definição 2.3.2. *A entropia topológica de f é dada por*

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} h(\epsilon, f).$$

E um dos principais Teoremas na teoria ergódica:

Teorema 2.3.3 (Princípio Variacional). *Se $f : M \rightarrow M$ é uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Temos,*

$$h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f); \mu \text{ é medida de probabilidade invariante}\}.$$

Dados os espaços métricos compactos M e X e as aplicações $S : M \rightarrow M$, $T : X \rightarrow X$ e $\pi : M \rightarrow X$ contínuas tais que $\pi \circ S = T \circ \pi$. Ou seja, T é fator topológico de S por π . Para tal conceito existe o seguinte resultado que permite comparar as entropias métricas:

Teorema 2.3.4. *Dada uma medida ν invariante por T em X . Então,*

$$h_\nu(T) + \int_X h_{top}(T, \pi^{-1}(x)) d\nu(x) = \sup_{\mu; \nu = \mu \circ \pi^{-1}} h_\mu(S), \text{ onde } x \in X.$$

A prova desse Teorema é consequência do resultado principal apresentado em [8].

Definição 2.3.5. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação bem definida sobre um espaço métrico X . Definamos o espaço limite inverso $\varprojlim \mathcal{X}_f$ que consiste das seqüências $x = (\dots, x_1, x_0)$ tais que $f(x_{i+1}) = x_i$. E a aplicação $F : \varprojlim \mathcal{X}_f \rightarrow \varprojlim \mathcal{X}_f$ definida como o deslocamento à esquerda:*

$$F(x) = (\dots, x_1, x_0, f(x_0)).$$

Proposição 2.3.6. *Se X é um espaço métrico completo separável e $f : X \rightarrow X$ continua, existe uma bijeção entre os espaços de medidas invariantes $\mathcal{M}_1(f)$ e $\mathcal{M}_1(F)$.*

2.4 Expoentes de Lyapunov

Seja uma variedade compacta de dimensão $d \geq 1$ e $f : M \rightarrow M$ um C^r difeomorfismo. O Teorema de Oseledets diz que, respeito a qualquer medida $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$, quase todo ponto admite uma decomposição do espaço tangente

$$T_x M = E_x^1 \oplus \dots \oplus E_x^k, \quad k = k(x),$$

e números reais $\lambda_1(f, x) > \dots > \lambda_k(f, x)$ tais que,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v_i\| = \lambda_i(f, x), \quad \text{para todo } v_i \in E_x^i \text{ não nulo.}$$

Onde os números $\lambda_i(f, x)$ são chamados *expoentes de Lyapunov*; os pontos $x \in M$ para os quais existem tais números e tal decomposição são chamados de *pontos regulares respeito a medida μ* . Os quais variam mensuravelmente com o ponto x . Mais ainda, os expoentes de Lyapunov $\lambda_i(f, x)$ são constantes sobre órbitas. Assim como também são constantes sobre μ -qtp se μ é ergódica.

2.5 Difeomorfismos Dissipativos em Superfícies

Seja $f \in \text{Dif}^r(S)$ onde S é uma superfície compacta, onde $r \geq 1$. Dizemos que f é dissipativo se

$$|\det Df(x)| < 1, \quad \text{para todo } x \in S.$$

Assim, para qualquer ponto $x \in M$ regular existem $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x)$ e a decomposição $T_x M = E_1(x) \oplus E_2(x)$. Se μ não esta suportada em um atrator periódico, segue o seguinte Lema:

Lema 2.5.1. *Se $f \in \text{Dif}^r(S)$ e μ é uma medida invariante. Se não existem pontos periódicos atratores em $\text{supp}(\mu)$, o maior expoente de Lyapunov é dado por $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\|Df^n\|)$ é não negativo.*

Ainda mais, para qualquer ponto regular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(|\det(Df^n(x))|) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x).$$

Como f é dissipativo, temos:

$$\log(|\det(Df^n(x))|) < 0,$$

portanto, pelo Lema 2.5.1, segue:

$$\lambda_1(x) < 0 \leq \lambda_2(x).$$

Assim, dada uma medida cujo suporte não contém poços periódicos atratores, os pontos regulares são tais que possuem dois expoentes de Lyapunov, um negativo e outro não negativo e portanto uma variedade estável 1-dimensional bem definida.

3 Árvores associados a difeomorfismos fortemente dissipativos no disco

Nesse capítulo apresentamos a prova do Teorema A, isto é, vamos a construir uma árvore, a partir de variedades estáveis de pontos regulares respeito medidas ergódicas aperiódicas não suportadas em poços hiperbólicos quando a superfície é o disco fechado \mathbb{D} . A prova do Teorema A será desenvolvida em três seções. A primeira aborda a construção detalhada da árvore com a métrica explícita. A segunda seção sobre a semi-conjugação entre o difeomorfismo fortemente dissipativo e a dinâmica induzida. A terceira trata-se do refinamento da árvore em relação a subconjuntos errantes. E finalmente o enchimento da árvore de forma que projeção de curvas tenham medida total.

Definição 3.0.1. *Uma árvore real é um espaço métrico tal que para dois pontos a e b quaisquer, existe um único subconjunto homeomorfo a $[0, 1]$ cujos extremos são a e b .*

Definição 3.0.2. *Seja uma árvore real \mathcal{X} , um subconjunto conexo $R \subset \mathcal{X}$ é chamado ramo da árvore se, o complemento em \mathcal{X} é também conexo.*

Dada uma aplicação $k : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, dizemos que o ramo R é errante se existe n_0 tal que $k^n(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X} \setminus R$, para todo $n \geq n_0$. Em particular, R contém apenas pontos errantes.

3.1 Construção da árvore

Para a construção da árvore, dada uma medida μ ergódica aperiódica definimos inicialmente uma família Γ_μ de curvas associadas a pontos regulares para μ . Esta família Γ_μ verifica as seguintes condições:

- P1 Cada $\gamma \in \Gamma_\mu$ é componente conexa de $W^s(x) \cap \mathbb{D}$ para algum ponto regular x da medida ergódica aperiódica μ , com x não necessariamente em γ . Em particular, os elementos de Γ_μ são disjuntos dois a dois.
- P2 Cada $\gamma \in \Gamma_\mu$ é C^1 limite de arcos em Γ_μ e é acumulado por ambos lados.
- P3 Para $\gamma \in \Gamma_\mu$, as componentes conexas de $f^{-1}(\gamma) \cap \mathbb{D}$ as quais intersecam $f(\mathbb{D})$ estão também em Γ_μ .
- P4 Existe um conjunto de μ -medida total de pontos p tais que as componentes conexas de $W^s(p) \cap \mathbb{D}$ são limite C^1 de arcos em Γ_μ e são acumulados por ambos lados.

Para garantir a existência de tal família de curvas temos o seguinte lema:

Lema 3.1.1. *Dada uma medida ergódica aperiódica μ não suportada num poço. Existe uma família de curvas Γ_μ que verifica as propriedades P1, P2, P3 e P4.*

Prova: Seja a medida ergódica aperiódica μ e lembrando que todo ponto regular possui órbita densa no suporte. Considere a coleção de curvas Γ_0 formada pelas componentes conexas de $W^s(f^n(x)) \cap \mathbb{D}$ que contem $f^n(x)$, com $n \in \mathbb{Z}$. Para cada $i \geq 1$, definimos Γ_i formada pelas componentes conexas de $f^{-1}(\gamma) \cap \mathbb{D}$ que intersecam $f(\mathbb{D})$ tal que $\gamma \in \Gamma_{i-1}$. Consideramos:

$$\Gamma_\mu = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i,$$

que é enumerável e temos que Γ_μ verifica P1 e P3. Para Γ_μ verificar as condições P2 e P4, notemos primeiro que no mínimo temos acumulação de um lado pelo fato de x ter órbita densa. Suponha agora que dado p no suporte de μ , $W_{\mathbb{D}}^s(p)$ é acumulado por curvas γ_n em Γ_μ de um lado só, isto implica que não existem outros pontos de $\text{supp}(\mu)$ entre as curvas γ_n , caso contrario teríamos acumulação por ambos lados desses pontos. Assim para cada p temos uma sequencia de curvas em Γ_μ que converge à variedade estável local de p . Como Γ_μ é apenas uma família enumerável, o suporte de μ teria que ser no máximo enumerável, o que é uma contradição, pois μ é aperiódica. ■

Consideremos agora a coleção:

$$\hat{\Gamma} = \bigcup_{\mu} \Gamma_\mu.$$

Onde cada μ é uma medida ergódica aperiódica e portanto a coleção Γ verifica P1, P2, P3 e:

P4* Dada uma medida ergódica aperiódica ν , existe um conjunto de medida total de pontos p tais que as componentes conexas de $W^s(p) \cap \mathbb{D}$ são limite C^1 de arcos em $\hat{\Gamma}$ e são acumulados por ambos lados.

De tais condições, P1 e P2 vão nos providenciar a correspondência entre um intervalo fechado e certos subconjuntos de \mathcal{X} . A condição P3 vai prover a boa definição da $\hat{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, e por último, para duas medidas ergódicas distintas P4* estabelece a diferença entre os suportes. Seguidamente, consideramos a coleção Γ formada pelas curvas $\gamma \in \hat{\Gamma}$ tais que, γ separa o $\text{supp}(\mu)$ para alguma medida μ ergódica aperiódica de f . Isto é, o $\text{supp}(\mu)$ não está contido numa única componente conexa de $\mathbb{D} \setminus \gamma$. Esse refinamento sobre a coleção de curvas vai nos permitir mostrar que na árvore a ser construída não existem ramos errantes.

3.1.1 Construção do espaço métrico

Em seguida apresentamos a construção do espaço \mathcal{X} a partir da coleção de curvas Γ . Que é obtido a grosso modo como o "quociente" do disco \mathbb{D} pela coleção Γ . Provamos que com a ordem estabelecida sobre as curvas de Γ e a métrica dada, \mathcal{X} é um espaço métrico compacto unidimensional e mais ainda é uma árvore real.

Considere superfícies conexas compactas s contidas em \mathbb{D} limitadas por uma quantidade finita de elementos de Γ . Seja a coleção de seqüências de superfícies

$$\Sigma = \{(s_n); \overline{s_{n+1}} \subset \text{int}(s_n), \text{ para cada } n\}.$$

E, dizemos que $(s_n) \leq (s'_n)$ se, para todo n , existe m tal que $\overline{s_m} \subset s'_n$. Denotamos Σ_0 a coleção de seqüências enumeráveis em Σ , que são minimais respeito á relação \leq . A árvore \mathcal{X} é definida como o quociente de Σ_0 pela relação \sim : " $(s_n) \leq (s'_n)$ e $(s'_n) \leq (s_n)$ ". Note que com essa definição, a coleção Γ pode-se identificar como subconjunto de \mathcal{X} . De fato, cada arco γ é representado por seqüências (s_n) tal que $\gamma \subset s_n$, para cada n e $\gamma = \bigcap s_n$, tal seqüência existe pela condição P2. Definimos a métrica sobre \mathcal{X} :

$$d_*((s_n), (s'_n)) = d_H(\lim s_n, \lim s'_n) = \lim d_H(s_n, s'_n)$$

Onde d_H é a distancia de Hausdorff entre conjuntos A e B definida por:

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b)\}.$$

Sendo d a distancia usual sobre \mathbb{D} . Para verificar que d_* é uma distancia, provemos primeiro $d_*((s_n), (s'_n)) = 0$ se e somente se $(s_n) \sim (s'_n)$. De fato, se $(s_n) \sim (s'_n)$, tais sequencias estão encaixadas entre elas, logo temos que $d_*((s_n), (s'_n)) = d_H(\lim s_n, \lim s'_n) = 0$. Suponha agora que $(s_n) \not\sim (s'_n)$, da definição de \sim e da minimalidade das sequencias, existem n_0 e m_0 tais que $s_n \cap s'_m = \emptyset$, para $n \geq n_0$ e $m \geq m_0$. Isto implica que $d_H(s_k, s'_k) > d_H(s_{k_0}, s'_{k_0}) > 0$ para $k \geq k_0$, onde $k_0 = \max\{n_0, m_0\}$. Portanto, $d_*((s_n), (s'_n)) > 0$.

A simetria $d_*((s_n), (s'_n)) = d_*((s'_n), (s_n))$ segue da definição. Dada uma outra sequencia de superfícies $(r_n) \in \mathcal{X}$, $d_*((s_n), (s'_n)) \leq d_*((s_n), (r_n)) + d_*((r_n), (s'_n))$ segue de que para cada n temos que: $d_H(s_n, s'_n) \leq d_H(s_n, r_n) + d_H(r_n, s'_n)$. Portanto (\mathcal{X}, d_*) é um espaço métrico.

3.1.2 \mathcal{X} é uma árvore real

Dado que (\mathcal{X}, d_*) é um espaço métrico, para verificar que é unidimensional notemos primeiro que é possível estabelecer uma ordem entre os elementos: dizemos então que uma curva γ separa x e y se estes estão em distintas componentes conexas de $\mathbb{D} \setminus \gamma$. Notemos que o conjunto de curvas em Γ que separa x e y é totalmente ordenado respeito á propriedade de separação. Considere uma subfamília de curvas (γ_n) enumerável que separam x e y . A

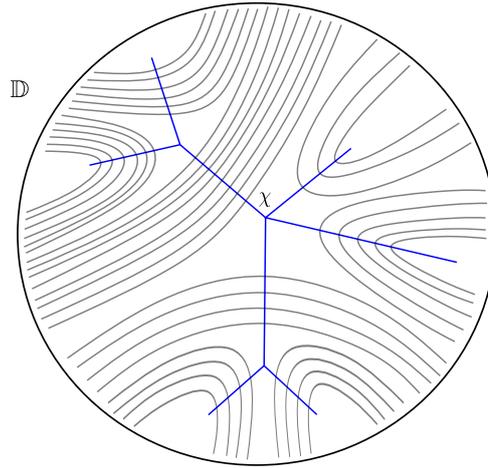


Figura 2 – Estrutura unidimensional da árvore \mathcal{X} .

distância máxima entre duas curvas consecutivas γ_n , vai para zero quando n_0 vai para ∞ e $n \leq n_0$. Caso contrario, poderíamos encontrar duas sequencias γ_{n_k} e γ_{m_k} , crescente e decrescente, respectivamente, que pela ordem separam também x e y . Mais ainda, a distancia $d_*(\gamma_{n_k}, \gamma_{m_k})$ não converge a zero. Contudo, essas sequencias convergem a dois pontos (curvas) distintos a e b que separam x e y . Como a e b são distintos, existe um γ_n , com n grande que separa a e b , o que é uma contradição com a construção. Isto prova que a união de $\{x, y\}$ com o conjunto dos pontos que os separam é homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$. Assim, \mathcal{X} é conexo por caminhos. Onde qualquer caminho que conecta x e y deve conter o conjuntos de pontos que separam x e y . Portanto, \mathcal{X} é uma árvore real. Para ter uma ideia de como é uma árvore. Ver Figura 2.

Exemplo 3.1.2. Consideremos o difeomorfismo da ferradura $f : \mathbb{D} \rightarrow f(\mathbb{D})$ definido dentro do disco. Onde as variedades estáveis locais de todo ponto no maximal invariante são totalmente ordenadas. Pela construção, cada variedade estável local de um ponto regular para uma medida ergódica aperiódica dada, vai projetar um ponto e as regiões errantes, que são limitadas por o bordo de \mathbb{D} e as variedades estáveis, são colapsadas num ponto. Ver Figura 3.

3.2 A semi-conjugação e a dinâmica induzida na árvore

3.2.1 Definições das aplicações π e \hat{f}

Para definir a projeção π de elementos de \mathbb{D} na árvore. Dado que cada curva $\gamma \in \Gamma$ se identifica como um elemento de \mathcal{X} , esta se projeta naturalmente. Isto é, se $x \in \gamma$, $\pi(x) = \gamma$. Se $x \in \mathbb{D}$ não cair em alguma curva, isto é, $x \in \mathbb{D} \setminus \bigcup \{\gamma \in \Gamma\}$. Consideramos a superfície s_n como a componente conexa de $\mathbb{D} \setminus \{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n\}$ que contém a x . Assim, obtemos uma sequencia enumerável decrescente minimal de superfícies que define $\pi(x) \in \mathcal{X}$.

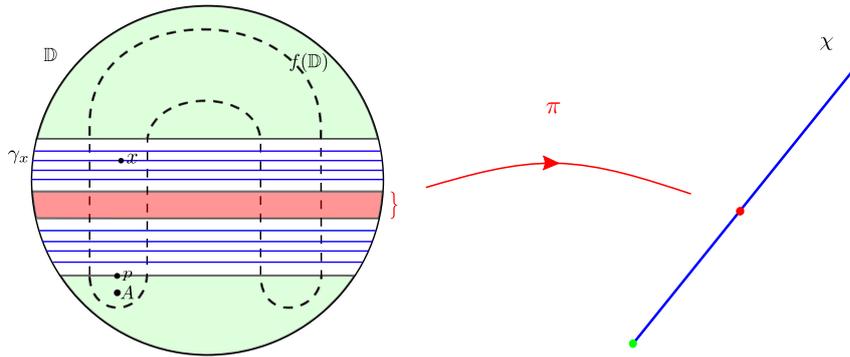


Figura 3 – Árvore associada à ferradura em \mathbb{D} .

Ver Figura 2. Portanto, $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{X}$ pela sua definição é contínua e sobrejetora. Dado que (\mathbb{D}, d) é um espaço métrico compacto, e a projeção π é contínua e sobrejetora, \mathcal{X} é um espaço métrico completo.

A aplicação $\hat{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ na árvore é induzida por f , isto é, se $(s_n) = \pi(x) \in \mathcal{X}$, é tal que $\hat{f}(\pi(x)) = \pi(f(x))$. A qual está bem definida pois se consideramos $x, y \in C = \bigcap s_n$, suas imagens por f não podem ser separadas por alguma curva $\gamma \in \Gamma$. Caso contrário, esta curva corta $f(\mathbb{D})$, separa o suporte de alguma medida μ e sua pre-imagem contem uma componente conexa que separa x e y que separa o suporte de μ e que pertence a Γ pela condição P3, o que é uma contradição. Assim, \hat{f} é bem definida, e pela definição desta π conjuga f e \hat{f} . Isto prova o item (1) do Teorema A.

Considerando o Exemplo 3 temos que a dinâmica \hat{f} na árvore, que é um intervalo, coincide com a função tenda. Ver Figura 4.

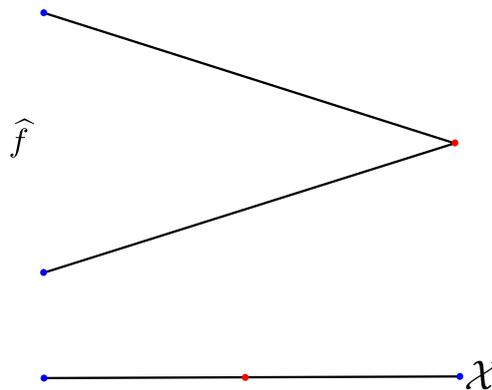


Figura 4 – Dinâmica na árvore associada à ferradura em \mathbb{D} .

Para ver que \mathcal{X} não contém ramos errantes, suponha que existe um ramo $R \subset \mathcal{X}$ errante. Seja $x \in \text{int}(R)$ de forma que $\pi^{-1}(x) = \gamma \in \Gamma$, pela definição existem pontos regulares de alguma medida μ nas distintas componentes conexas de $\mathbb{D} \setminus \gamma$, isto

implica que R contem pontos não errantes, o que é uma contradição. Com isto concluímos a prova do item (3) do Teorema A.

3.2.2 Propriedades ergódicas da dinâmica na árvore

Dada $f \in SD(\mathbb{D})$, na seção 3.1 temos definido a coleção de curvas Γ como união das coleções $\Gamma_\mu = \bigcup \Gamma_i$, onde Γ_0 é dada por um único ponto regular de μ . Para conseguir distinguir propriedades ergódicas consideramos uma família de curvas ainda maior. Ou seja, dado que Γ_μ é enumerável, enchemos então a coleção Γ_0 completando a Γ_μ ao considerar:

$$\Gamma_0 = \{W_{\mathbb{D}}^s(f^i(x)); x \text{ é ponto regular de } \mu\},$$

e reconstruímos a Γ_μ de forma similar ao processo na Seção 3.1. Com isso redefinimos a coleção Γ e temos que a árvore \mathcal{X}_f é a mesma pela condição P4*.

Note que ao considerar apenas a coleção inicial enumerável de curvas, a projeção desta tem medida $\pi_*\mu$ nula. Assim, logo do enchimento temos que dada μ ergódica aperiódica, a projeção de Γ_μ tem medida total, isto é:

Lema 3.2.1. *Dada μ ergódica aperiódica para $f \in SD(\mathbb{D})$, então $\pi_*\mu(\Gamma_\mu) = 1$.*

Esse lema permite também encher a árvore de conjuntos grandes associados a medidas invariantes dados pela projeção do conjunto dos pontos regulares e as suas variedades estáveis.

Afirmamos que π_* é injetora no subconjunto de medidas ergódicas aperiódicas. De fato, dadas duas medidas aperiódicas μ_1 e μ_2 tais que $\pi_*\mu_1 = \pi_*\mu_2$. Sejam as coleções de curvas Γ_{μ_1} e Γ_{μ_2} associadas a μ_1 e μ_2 , respectivamente. Portanto na árvore temos $\pi_*\mu_1(\pi(\Gamma_{\mu_2})) = \pi_*\mu_2(\pi(\Gamma_{\mu_2})) = 1$. O que implica $\mu_1(\Gamma_{\mu_2}) = 1$ e $\mu_2(\Gamma_{\mu_2}) = 1$. Assim, Γ_{μ_1} e Γ_{μ_2} coincidem em um conjunto de curvas de medida total. Mais especificamente $\Gamma_{\mu_1} \cap \Gamma_{\mu_2}$ tem medida total respeito μ_1 e μ_2 . Dado que para cada μ_i existe um ponto regular $x_i \in \gamma$ com $\gamma \in \Gamma_{\mu_1} \cap \Gamma_{\mu_2}$. Temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x_i)} = \mu_i.$$

Como $x_1, x_2 \in \gamma$, que é uma curva contida numa variedade estável, os pontos se aproximam e tais limites coincidem, isto é, $\mu_1 = \mu_2$. Portanto π induz uma aplicação injetora entre medidas ergódicas aperiódicas de f e \hat{f} . Assim, verifica-se o item (2) do Teorema A.

Podemos notar também que a aplicação π_* não é injetora no espaço $\mathcal{M}_1(f)$ todo. De fato, considere f como a ferradura no disco \mathbb{D} e as medidas δ_A e δ_P suportadas no atrator A e no ponto fixo hiperbólico P , respectivamente. Tais pontos são projetados num único ponto na árvore, veja a Figura 3. Assim, temos $\pi_*(\delta_A) = \pi_*(\delta_P)$.

4 Propriedades topológicas e ergódicas da árvore \mathcal{X}

Depois ter estudado a construção da árvore \mathcal{X} e definido a dinâmica induzida pela fortemente dissipativa vamos descrever alguns subconjuntos e elementos com a finalidade de obter alguma outra informação da árvore e a dinâmica \hat{f} . Temos também interesse em estabelecer ligações mais específicas entre ambas dinâmicas, por exemplo a relação entre os conjuntos de pontos periódicos de f e a induzida \hat{f} na árvore. Com isto, dado que os fortemente dissipativos no disco \mathbb{D} verificam o Crossing Lema, ver 1.0.5, vamos notar que a dinâmica na árvore ganha de alguma forma essa propriedade. No contexto ergódico, obtemos a sobrejetividade da aplicação π_* em todo $\mathcal{M}_1(\hat{f})$ graças à relação estabelecida entre os pontos periódicos de ambas dinâmicas. Ainda mais, o fato das entropias topológicas coincidir. Tudo isto é desenvolvido no Teorema B, cuja prova é o objetivo principal desse capítulo. Na qual, para o último item reproduzimos a prova dada em [4], que fica mais clara pois a construção da árvore agora depende de todas as medidas ergódicas aperiódicas.

Definição 4.0.1. *Seja uma árvore \mathcal{X} real, dizemos que*

1. *Um subconjunto conexo $I \subset \mathcal{X}$ é intervalo se, e somente se, I é homeomorfo a algum dos conjuntos $(0, 1)$, $(0, 1]$, ou $[0, 1]$.*
2. *Um ponto $x \in \mathcal{X}$ é nodo se, $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ tem três ou mais componentes conexas.*
3. *Dado $x \in \mathcal{X}$, dizemos que é ponto regular se, $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ tem exatamente duas componentes conexas.*
4. *Um ponto $x \in \mathcal{X}$ é chamado extremo se $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ exatamente uma componente conexa.*

Da definição temos que um intervalo $I \subset \mathcal{X}$ não contém nodos se, e somente se, o número de componentes conexas de $\mathcal{X} \setminus \text{int}(I)$ é menor ou igual a 2. Dado $x \in \mathcal{X}$, chamamos *índice de x* ao número de componentes conexas de $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ e o denotamos por $\text{ind}(x)$. Disto notamos que $x \in \mathcal{X}$ é um nodo, ponto regular ou extremo se o $\text{ind}(x)$ é, maior igual que três, dois ou um, respectivamente.

Prova: [Teorema B]

- a. *Seja um subconjunto compacto conexo $C \subset \mathcal{X}$ que contém apenas um nodo e suponha que o índice deste é infinito. Considere, o recobrimento dado por um aberto que contém o nodo e intervalos abertos contidos nas componentes conexas de $C \setminus \{x\}$. Este recobrimento não admite um sub-recobrimento finito de C . Assim, o índice de qualquer nodo é necessariamente finito.*

- b. Suponha que \hat{f} é homeomorfismo, os nodos, pontos regulares e extremos são preservados biunivocamente pela \hat{f} . Isto é, os índices são invariantes pela \hat{f} , pois dado $p \in \mathcal{X}$, $\hat{f} : \mathcal{X} \setminus \{p\} \rightarrow \mathcal{X} \setminus \{f(p)\}$ é um homeomorfismo que preserva a quantidade de componentes conexas.

Se escrevemos $\mathcal{X} = \bigcup_{j=1} I_j$ onde cada I_j é um intervalo fechado cujos extremos são ou nodos ou extremos da árvore, temos que \hat{f} preserva tal união de intervalos. Consideramos agora os intervalos I_i para os quais existe n_i tal que

$$\hat{f}^{n_i}(I_i) = I_i \quad (4.1)$$

No caso da árvore \mathcal{X} ser finito, temos que os pontos extremos e nodos são periódicos e todos os intervalos verificam (4.1). Se \mathcal{X} for infinito, dispensamos os intervalos que não verificam (4.1) pois estes não contém pontos não errantes. Isto implica que para toda medida ergódica ν de \hat{f} existe um I_i , tal que $\text{supp}(\nu) \cap I_i \neq \emptyset$.

Além disso, temos que $\hat{f}^{n_i} : I_i \rightarrow I_i$ é um homeomorfismo para cada I_i que verifica (4.1). Portanto, se ν é ergódica pela \hat{f} , tal que $\text{supp}(\nu) \cap I_i \neq \emptyset$, para algum i , temos que $\text{supp}(\nu)$ é uma órbita periódica em I_i . O que é um absurdo, pois da construção da árvore, existe uma medida ergódica aperiódica μ invariante pela f . Onde o conjunto do pontos regulares é infinito e portanto a projeção $\pi_*\mu$ que é ergódica pela \hat{f} contém infinitos pontos no suporte.

- c. Dado um ponto periódico $p \in \mathbb{D}$ de período n respeito de f , como π é semi-conjugação entre f e \hat{f} , temos que $\hat{f}^n(\pi(p)) = \pi(f^n(p)) = \pi(p)$. Logo, $\pi(p)$ é periódico de período n . Reciprocamente, seja $x \in \text{Per}(\hat{f})$ de período k . Se $x \in \gamma$, para $\gamma \in \Gamma$, temos que $\hat{f}^k(\gamma) \subset \gamma$. Portanto, existe um ponto $p \in \gamma$ de período k tal que $\pi(p) = x$. Se $x = (s_n)$, temos que $\hat{f}^k((s_n)) = (s_n)$. Como (s_n) é uma sequência de conexos compactos encaixados, $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} s_n$ é compacto conexo homeomorfo a um convexo compacto tal que $f^k(C) \subset C$. Assim, pelo Teorema do ponto fixo de Schauder, existe $p \in C$ tal que $f^k(p) = p$ e portanto, $x = \pi(p)$.

- d. Isto segue do Teorema 1.0.5 e o fato a coleção Γ projetar a árvore.

- e. π_* é sobrejetora: Dada uma medida ergódica $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_1(\hat{f})$. Se $\hat{\mu}$ for suportada numa órbita periódica $\mathcal{O}(\hat{p})$, temos que existe um p periódico tal que $\pi(p) = \hat{p}$ e portanto $\pi_*\delta_{\mathcal{O}(p)} = \hat{\mu}$. No caso de $\hat{\mu}$ ser aperiódica existe \hat{x} no suporte tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{\hat{f}^i(\hat{x})} = \hat{\mu}.$$

Da sobrejetividade de π , existe $x \in \mathbb{D}$ tal que $\pi(x) = \hat{x}$. Assim, temos que o seguinte limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)},$$

tem como ponto de acumulação uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$ e esta verifica que $\pi_*\mu = \hat{\mu}$.

f. Fixando $\alpha > 0$. Pelo principio variacional, existe uma medida ergódica μ para f cuja entropia satisfaz $h_\mu(f) > h_{top}(f) - \alpha$. Se μ é suportada numa orbita periódica, tem-se $h_{top}(f) < \alpha$, caso contrario, μ é aperiódica. Pelo Teorema 2.3.4, as entropias de μ e $\pi_*\mu$ podem ser comparadas: para cada $x \in \mathcal{X}$, considere a entropia topológica $h_{top}(f, \pi^{-1}(x))$ da pre-imagem $\pi^{-1}(x)$, tem-se:

$$h_\mu(f) = h_{\pi_*(\mu)}(\hat{f}) + \int h_{top}(f, \pi^{-1}(x)) d\pi_*\mu(x).$$

Para $\pi_*\mu$ -quase todo ponto x , a pre-imagem está contida na variedade estável de x . Em particular para todo $\epsilon > 0$, as órbitas de pontos em $\pi^{-1}(x)$ não se ϵ -separam depois de algum tempo e portanto a entropia topológica $h_{top}(f, \pi^{-1}(x))$ é igual a zero. Assim, temos que $h_{top}(f) < h_\mu(f) + \alpha \leq h_{\pi_*\mu}(\hat{f}) + \alpha \leq h_{top}(\hat{f}) + \alpha$. O que implica que as entropias topológicas de f e \hat{f} coincidem.

■

Além disso, do item (b) podemos notar que em geral não sempre nodos são levados por \hat{f} em nodos. De fato, dadas três curvas em $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$ não ordenadas, é claro a imagens pela f , $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2)$ e $f(\gamma_3)$ não são ordenadas no disco $f(\mathbb{D})$. Porém, as extensões de estas podem ser ordenadas no disco \mathbb{D} . Na verdade, a única condição que permite preservar os nodos é a injetividade de \hat{f} .

Como consequência importante da densidade de pontos periódicos em todo \mathcal{X} , dada no item *d*, temos que a árvore não apresenta intervalos que sejam errantes.

5 A árvore como invariante dinâmica

Dado que em sistemas dinâmicos a conjugação topológica é uma propriedade que refere-se a dois sistemas ser "indistinguíveis", e como a árvore depende de uma única $f \in SD^r(\mathbb{D})$. Nesse capítulo estudamos a relação topológica entre as árvores induzidas por difeomorfismos fortemente dissipativos que são conjugados no disco \mathbb{D} . Sendo que o domínio inicial é o disco \mathbb{D} , procuramos uma relação entre as árvores e as dinâmicas quando o domínio é um iterado $f^k(\mathbb{D})$ para uma $f \in SD^r(\mathbb{D})$ fixa. Em consequência, fazemos um estudo das dinâmicas induzidas quando a conjugação de dois fortemente dissipativos é dada em apenas nos maximais invariantes. De forma recíproca, procuramos uma relação, seja ergódica e/ou topológica entre as dinâmicas fortemente dissipativas tendo como hipótese a conjugação (topológica) nas dinâmicas nas árvores induzidas por estas.

5.1 Conjugação no disco \mathbb{D}

Inicialmente consideramos duas dinâmicas $f, g \in SD^r(\mathbb{D})$ topologicamente equivalentes no disco \mathbb{D} . Assim, é natural nos perguntar se as dinâmicas induzidas \hat{f} e \hat{g} por estas, nas respectivas árvores \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g , são também equivalentes. Para responder tal questão precisamos estabelecer um homeomorfismo entre as respectivas árvores \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g , e o qual torna-se a conjugação entre \hat{f} e \hat{g} . Pela construção de árvores dada na Seção 3.1, a partir de h estabelecemos uma relação entre pontos regulares de medidas invariantes de f e g , respectivamente. Portanto, uma relação entre as variedades estáveis de tais pontos e seus órbitas.

Proposição 5.1.1. *Dados f e g em $SD^r(\mathbb{D})$ topologicamente conjugados no disco \mathbb{D} . Sejam \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g as árvores correspondentes a f e g . Então, existe um homeomorfismo H entre \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g que conjuga \hat{f} e \hat{g} .*

Prova: Por hipótese, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $h \circ f = g \circ h$ em \mathbb{D} . Dada uma medida μ ergódica aperiódica pela f , temos que $h_*\mu = \mu \circ h^{-1}$ é também ergódica aperiódica respeito g . O que implica que h induz uma bijeção entre medidas ergódicas de f e g . Assim, se consideramos o conjunto de pontos regulares A e B , para μ e $h_*\mu$ respectivamente, temos que, $\mu(A) = h_*\mu(h(A)) = h_*\mu(h(A) \cap B) = \mu(A \cap h^{-1}(B)) = \mu(h^{-1}(B)) = h_*\mu(B) = 1$. Portanto, a menos de medida zero a imagem pela h dos pontos regulares para μ , são pontos regulares para a medida $h_*\mu$. Com isto, consideramos as coleções de curvas Γ_μ e $\Gamma_{h_*\mu}$ associadas às medidas ergódicas μ e $h_*\mu$ de f e g , respectivamente. Como f e g são fortemente dissipativos e $h(W^s(x)) \subset W^s(h(x))$,

onde $x \in A$. As curvas $\gamma \in \Gamma_\mu$ são levadas por h em curvas de $\Gamma_{h*\mu}$. Sendo as coleções Γ_f e Γ_g associadas a f e g , temos que h leva curvas de Γ_f em curvas de Γ_g .

Sejam $\pi_f : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{X}_f$ e $\pi_g : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{X}_g$ as projeções do disco \mathbb{D} , nas respectivas árvores \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g . Definimos a aplicação:

$$H : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_g,$$

que leva $y = \pi_f(x) \in \mathcal{X}_f$, onde $x \in \mathbb{D}$, em $H(y) = H(\pi_f(x)) = \pi_g \circ h(x)$. Afirmamos que H está bem definida. De fato, se x pertence a uma curva de Γ_f , é imediato. Se $x, y \in \mathbb{D}$, são tais que, $\pi_f(y) = \pi_f(x) = (s_n)_n$ e $x, y \in \bigcap s_n$. Suponhamos que $h(x)$ e $h(y)$ são separadas por alguma curva $\gamma \in \Gamma_g$, como h^{-1} é homeomorfismo e pelo falado acima, $h^{-1}(\gamma)$ separa x e y . O que é uma contradição pois x e y não são separadas por nenhuma curva em Γ_f . H é contínua, pela continuidade de π_f , π_g e h . Finalmente, temos que $H : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_g$ conjuga \hat{f} e \hat{g} . De fato,

$$\begin{aligned} H \circ \hat{f}(y) &= H \circ \hat{f} \circ \pi_f(x) = H \circ \pi_f \circ f(x) \\ &= \pi_g \circ h \circ f(x) \\ &= \pi_g \circ g \circ h(x) \\ &= \hat{g} \circ \pi_g \circ h(x) \\ &= \hat{g} \circ H(x). \end{aligned}$$

Analogamente, a partir de h^{-1} podemos encontrar a inversa de H , a qual satisfaz $H^{-1} \circ \pi_g = \pi_f \circ h^{-1}$ e portanto $H^{-1} \circ \hat{g} = \hat{f} \circ H^{-1}$. Assim, temos que H é uma conjugação entre as dinâmicas nas árvores e o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{h} \end{array} & \mathbb{D} \\ \pi_f \downarrow & & \downarrow \pi_g \\ \mathcal{X}_f & \xrightarrow{H} & \mathcal{X}_g \\ \hat{f} \downarrow & & \downarrow \hat{g} \\ \mathcal{X}_f & \xleftarrow{H^{-1}} & \mathcal{X}_g \end{array}$$

■

Notemos que da construção da conjugação H , intervalos e nodos de \mathcal{X}_f são levados em intervalos e nodos \mathcal{X}_g , respectivamente. De fato, sejam três curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ em Γ_f ordenadas, ou seja, uma delas separa as outras duas, digamos γ_2 . Assim, $\mathbb{D} \setminus \gamma_2$ tem duas componentes conexas, onde cada uma delas contém uma γ_i . Como h é homeomorfismo, $h(\gamma_1)$ e $h(\gamma_3)$ estão em distintas componentes conexas de $\mathbb{D} \setminus \{h(\gamma_2)\}$, ou seja, as curvas preservam a ordem por h . De forma similar, dadas três curvas não ordenadas (ou mais) cuja projeção geram um nodo em \mathcal{X}_f , não se ordenam por h . Logo, suas imagens por h geram um nodo, e ainda mais o índice do nodo é preservado. Em geral, podemos dizer que

o índice de um ponto na árvore é invariante pela conjugação nas dinâmicas fortemente dissipativas.

Uma consequência imediata da Proposição 5.1.1 é que a conjugação entre as dinâmicas f e g permite definir uma aplicação entre os espaços de medidas invariantes $\mathcal{M}_1(\hat{f})$ e $\mathcal{M}_1(\hat{g})$ dada por H_* . Em particular, uma bijeção entre conjuntos de medidas ergódicas aperiódicas que preserva conjuntos de medida total. Tendo assim também uma relação ergódica entre as dinâmicas nas árvores associadas.

5.2 Árvore associadas a $(f, f^k(\mathbb{D}))$

Dado que a árvore é obtido ao quocientar o disco \mathbb{D} , podemos pensar em considerar um disco menor. O primeiro candidato a ser estudado é $f(\mathbb{D})$, pois f é contração. Assim, como f é homeomorfismo que leva as curvas que cortam o disco \mathbb{D} em curvas que cortam o disco $f(\mathbb{D})$ e preserva a ordem de estas, pode-se estabelecer uma aplicação entre as árvores associadas aos difeomorfismos $f : \mathbb{D} \rightarrow f(\mathbb{D})$ e $f : f(\mathbb{D}) \rightarrow f^2(\mathbb{D})$. Se denotamos por (f, \mathbb{D}) e $(f, f(\mathbb{D}))$ a tais difeomorfismos, respectivamente. Notamos que, dado que as medidas invariantes coincidem, também os pontos regulares. Disto, as coleções de curvas Γ_f e $\Gamma_{f|_{f(\mathbb{D})}}$ construídas na seção 3.1 são tais que, toda curva $\alpha \in \Gamma_{f|_{f(\mathbb{D})}}$ é a interseção de uma curva de Γ_f com o disco $f(\mathbb{D})$. Denotando por \mathcal{X}_0 e \mathcal{X}_1 às árvores associadas a tais difeomorfismos, temos:

Proposição 5.2.1. *Existe um homeomorfismo entre \mathcal{X}_0 e \mathcal{X}_1 .*

Prova: Sejam $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{X}_0$ e $\pi_1 : f(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{X}_1$ as projeções nas árvores respectivas. Definimos a aplicação $H(f) : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{X}_1$ como $H(f)(\pi(y)) = \pi_1(f(y))$. A qual esta bem definida para pontos em curvas de Γ_f , pois se a curva $\gamma \in \subset W^s(x)$ está em Γ_f , onde x é um ponto regular. Temos que $f(\gamma)$ é uma curva que corta o disco $f(\mathbb{D})$ e está contida em $W^s(f(x))$. Se $\pi(x) = \pi(y) = (s_n)$, suponha $H(f)(x) \neq H(f)(y)$, existe uma curva $\gamma_1 \in \Gamma_{f|_{f(\mathbb{D})}}$ que os separa. Portanto $f^{-1}(\gamma_1) \in \Gamma_f$ separa x e y . O que é uma contradição. Assim, $H(f)$ está bem definida, é injetiva pois f é um homeomorfismo e é sobrejetiva pela condição P3. ■

Dado que toda curva $\gamma \in \Gamma_{f|_{f(\mathbb{D})}}$ está contida numa curva de Γ_f que corta o disco \mathbb{D} , pode se definir uma inclusão $i : \Gamma_{f|_{f(\mathbb{D})}} \rightarrow \Gamma_f$, que não é injetora pois dadas duas curvas $\gamma_1, \gamma'_1 \in \Gamma_{f|_{f(\mathbb{D})}}$ poderiam estar contidas numa mesma componente conexa de $W^s(x) \cap \mathbb{D}$, para algum ponto x regular.

Assim, da proposição anterior e o falado acima, os seguintes diagramas são comu-

tativos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_0 & \xrightarrow{H(f)} & \mathcal{X}_1 \\ & \searrow \hat{f} & \downarrow i \\ & & \mathcal{X}_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_1 & \xrightarrow{i} & \mathcal{X}_0 \\ & \searrow \hat{f}|_{f(\mathbb{D})} & \downarrow H(f) \\ & & \mathcal{X}_1 \end{array}$$

Em geral, se denotamos por $(f, f^k(\mathbb{D}))$ ao difeomorfismo f restrito a $f^k(\mathbb{D})$, e \mathcal{X}_k à árvore associada ao par $(f, f^k(\mathbb{D}))$. Temos a seguinte proposição:

Proposição 5.2.2. *Para cada $k \geq 1$, existe um homeomorfismo entre \mathcal{X}_k e \mathcal{X}_{k+1} .*

5.3 Semi-conjugação de árvores a partir da conjugação dos máximos invariantes

Visto que as árvores são homeomorfas ao considerar como domínios os discos $f^k(\mathbb{D})$, para qualquer $k \geq 1$, podemos pensar em restringir $f \in SD^r(\mathbb{D})$ ao maximal invariante $\Lambda_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(\mathbb{D})$. Assim, dado que toda curva $\gamma \in \Gamma_f$ separa o suporte de alguma medida μ ergódica aperiódica e $\text{supp}(\mu) \subset \Lambda_f$, por definição, temos que γ interseca o maximal invariante Λ_f . Assim, toda superfície limitada por curvas em Γ_f interseca Λ_f . Portanto a árvore \mathcal{X}_f coincide com a projeção do maximal invariante, isto é, $\pi_f(\Lambda_f) = \pi_f(\mathbb{D}) = \mathcal{X}_f$. Isto significa que o estudo da dinâmica na árvore \mathcal{X}_f pode se limitar a estudar a dinâmica de f no maximal invariante Λ_f .

Na Proposição 5.1.1, a conjugação topológica $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ entre f e g implica a conjugação entre os máximos invariantes Λ_f e Λ_g . Assim, é de se esperar obter um resultado nas dinâmicas das árvores a partir de apenas de uma conjugação entre máximos invariantes de f e g . Porém, se h for definida apenas no maximal invariante, não podemos garantir que $h(W_{loc}^s(x)) = W_{loc}^s(h(x))$. Menos ainda que h preserva a ordem de curvas que cortam o disco \mathbb{D} como na prova da Proposição 5.1.1 para a boa definição do nosso H . Para ver isto, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 5.3.1. *Sejam os difeomorfismos $f : \mathbb{D} \rightarrow f(\mathbb{D})$ a ferradura no disco e $g : D \rightarrow D$ onde g é a restrição de f a D que é um disco obtido ao tirar um subconjunto conexo de \mathbb{D} , ver Figura 5. A aplicação $i : \Lambda_f \rightarrow \Lambda_g$ dada pela identidade é conjugação entre f e g nos seus máximos invariantes. Se \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g são as árvores respectivas, podemos notar na Figura 5 que estas não são homeomorfas. Por outro lado i , induz uma aplicação inclusão $\hat{i} : \mathcal{X}_g \rightarrow \mathcal{X}_f$ contínua sobrejetora e não injetora entre as árvores, e que é uma semi-conjugação entre as dinâmicas nas árvores, isto é, $\hat{i} \circ \hat{g} = \hat{f} \circ \hat{i}$. Além disso, da*

seção anterior sabemos que \mathcal{X}_f e $\mathcal{X}_{f|_{f(\mathbb{D})}}$ são homeomorfos e da Figura 5 notamos que é possível definir uma aplicação $\hat{j} : \mathcal{X}_{f|_{f(\mathbb{D})}} \rightarrow \mathcal{X}_g$ contínua sobrejetora induzida pela inclusão $j : f(\mathbb{D}) \rightarrow D$.

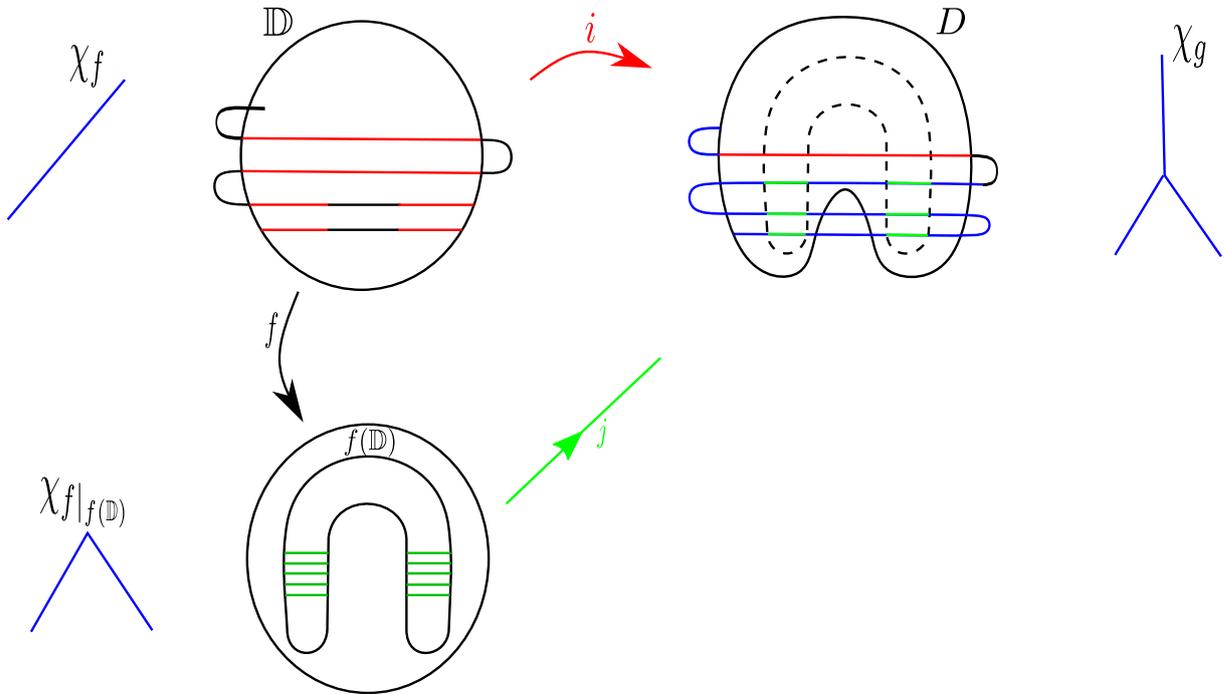


Figura 5 – Árvores associados a dinâmicas conjugadas em seus maximais invariantes.

Logo, a composição $\hat{j} \circ \hat{f} : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_g$ define uma semi-conjugação entre as aplicações \hat{f} e \hat{g} . Além disso, \hat{i} e $\hat{j} \circ \hat{f}$ são tais que verificam a Figura 6.

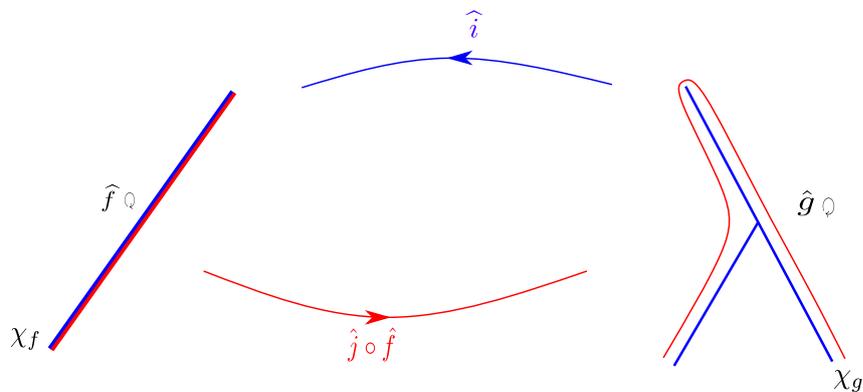


Figura 6 – Semi-conjugações entre as dinâmicas nas árvores

5.3.1 Prova do Teorema C

Da seção 5.2 sabemos que existe um homeomorfismo entre árvores obtidos em iterados do disco que é induzido pelo próprio difeomorfismo f . No exemplo 5.3.1, embora não seja possível obter um homeomorfismo a partir da conjugação entre os maximais invariantes, temos achado aplicações contínuas entre as árvores \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g que são semi-conjugações das dinâmicas \hat{f} e \hat{g} .

Seja o homeomorfismo $h : \Lambda_f \rightarrow \Lambda_g$ que conjugua f e g em seus os maximais invariantes, de forma análoga à prova da Proposição 5.1.1, sejam Γ_f e Γ_g as famílias de curvas associadas a f e g . As quais são tomadas considerando que h induz uma bijeção entre os conjuntos de medidas ergódicas aperiódicas de f e g . Considere $\pi_f : \Lambda_f \rightarrow \mathcal{X}_f$ e $\pi_g : \Lambda_g \rightarrow \mathcal{X}_g$ as projeções nas árvores de f e g respectivamente. Como h é homeomorfismo entre compactos conexos, consideramos as interseções de curvas com os maximais invariantes: $\gamma \cap \Lambda_f$ e $\tilde{\gamma} \cap \Lambda_g$ onde $\gamma \in \Gamma_f$ e $\tilde{\gamma} \in \Gamma_g$. Note que no caso h levar curvas de Γ_f em curvas de Γ_g teríamos que $h(\gamma_y \cap \Lambda_f) = \tilde{\gamma}_{h(y)} \cap \Lambda_g$, para um $y \in \Lambda_f$ dado. Portanto, como na proposição 5.1.1 seria possível definir uma aplicação entre as coleções de curvas Γ_f e Γ_g que geram as árvores a partir de h . Como isto não é sempre verdade, consideramos o seguinte lema:

Lema 5.3.2. *Existe $k > 0$ tal que para dada $\gamma_x \in \Gamma_{f|_{f^k(\mathbb{D})}}$, temos que $h(\gamma_x \cap \Lambda_f) \subset \tilde{\gamma}_{h(x)} \cap \Lambda_g$. Onde $x \in \Lambda_f$ e $\tilde{\gamma}_{h(x)} \in \Gamma_g$.*

Prova: Dado que $\tilde{\gamma} \cap \Lambda_g$ é um subconjunto compacto de Λ_g , temos que existe um $\epsilon > 0$ tal que $|\tilde{\gamma} \cap \Lambda_g| < \epsilon$, para toda curva $\tilde{\gamma} \in \Gamma_g$. Seja $\delta = \delta(\epsilon)$ dado pela continuidade uniforme de $h : \Lambda_f \rightarrow \Lambda_g$. Como $d_H(f^n(\mathbb{D}), \Lambda_f) \rightarrow 0$, existe uma k suficientemente grande tal que $d_H(f^k(\mathbb{D}), \Lambda_f) < \delta/3$ e $|\gamma \cap \Lambda_f| < \delta/3$ para toda $\gamma \in \Gamma_{f|_{f^k(\mathbb{D})}}$. Assim, temos que $|\gamma| < 2\delta/3 + \delta/3 = \delta$. O que implica que, para qualquer dois pontos x e y em $\gamma \cap \Lambda_f$, $d(x, y) < \delta$, e portanto $d(h(x), h(y)) < \epsilon$. ■

Esse Lema nos diz que para um k suficientemente grande, as curvas associadas ao difeomorfismo $f : f^k(\mathbb{D}) \rightarrow f^{k+1}(\mathbb{D})$ são tais que, as interseção $\gamma \cap \Lambda_f$ é levada por h numa única curva de Γ_g .

De forma similar para g , temos que se $\Gamma_{g|_{g^l(\mathbb{D})}}$ é a coleção de curvas associada ao difeomorfismo $(g, g^l(\mathbb{D}))$, existe $l > 0$ tal que para dada $\gamma_y \in \Gamma_f$, temos que $h(\gamma_y \cap \Lambda_f) \supset \tilde{\gamma}_{h(y)} \cap \Lambda_g$. Onde $y \in \Lambda_f$ e $\tilde{\gamma}_{h(y)} \in \Gamma_{g|_{g^l(\mathbb{D})}}$.

Desse modo, o Lema 5.3.2 vai nos permitir definir uma aplicação entre as curvas de Γ_f e Γ_g , a qual será estendida de forma contínua às árvores. Para provar a boa definição

de tal extensão precisamos, como no caso anterior, do fato de h preservar a "ordem" de curvas. Isto é:

Lema 5.3.3. *Dados os dois pontos x e z em Λ_f separados no disco \mathbb{D} por uma curva $\gamma_y \in \Gamma_f$, com $y \in \Lambda_f$, que contém um ponto regular para alguma medida ergódica aperiódica de f . Suponha que $\tilde{\gamma}_{h(y)} \cap \Lambda_g \subset h(\gamma_y \cap \Lambda_f)$. Se $h(x)$ e $h(z)$ não estão na mesma curva de Γ_g que $h(y)$. Então, $\gamma_{h(y)}$ separa $h(x)$ e $h(z)$ no disco \mathbb{D} .*

Prova: Sejam x e z pontos em Λ_f separados pela curva $\gamma_y \in \Gamma_f$ que contém um ponto regular para uma medida ergódica aperiódica dada. Sem perda de generalidade podemos supor que y é tal ponto regular. Como Λ_f é conexo, x e z estão em distintas componentes conexas de $\Lambda_f \setminus \gamma_y$. Denotemos I_x e I_z as componentes conexas que contém a x e z , respectivamente.

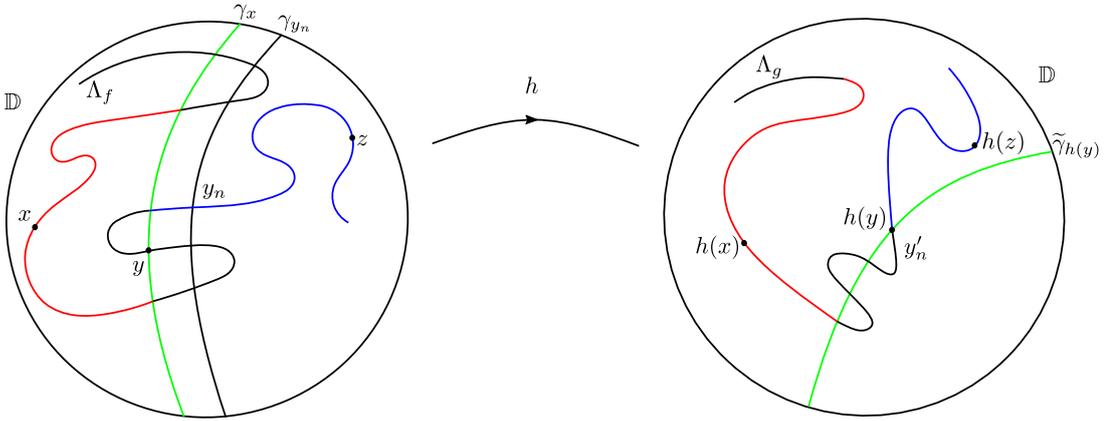


Figura 7 – Ordem das curvas é preservada pela conjugação nos maximais invariantes.

Suponha que $h(x)$ e $h(z)$ não são separados pela curva $\tilde{\gamma}_{h(y)} \in \Gamma_g$ que contém a $h(y)$. Consideramos $J_{h(x)} = h(I_x)$ e $J_{h(z)} = h(I_z)$, pela hipótese $\tilde{\gamma}_{h(y)} \cap \Lambda_g \subset h(\gamma_y \cap \Lambda_f)$ e a continuidade de h temos que, $J_{h(x)}$ e $J_{h(z)}$ são conexos de $\Lambda_g \setminus \tilde{\gamma}_{h(y)}$ que contem a $h(x)$ e $h(z)$, respectivamente. Mais ainda, como $h(x)$ e $h(z)$ não são separados por $\tilde{\gamma}_{h(y)}$, temos que $J_{h(x)}$ e $J_{h(z)}$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{D} \setminus \tilde{\gamma}_{h(y)}$. Tomemos uma sequência $y'_n \rightarrow h(y)$ em Λ_g tal que y'_n esta na componente conexa de $\mathbb{D} \setminus \tilde{\gamma}_{h(y)}$ que não contem nem $I_{h(x)}$ nem $I_{h(z)}$. Logo, como y é ponto regular, pelo Teorema da Variedade estável [4], $\tilde{\gamma}_{y'_n} \rightarrow \tilde{\gamma}_{h(y)}$. Por tanto, se $y_n = h^{-1}(y'_n)$ então $\gamma_{y_n} \rightarrow \gamma_y$. Isto implica que $\gamma_{y_n} \cap I_x \neq \emptyset$ ou $\gamma_{y_n} \cap I_z \neq \emptyset$. Em qualquer caso temos uma contradição pois $h(\gamma_{y_n} \cap I_x) = \tilde{\gamma}_{y'_n} \cap J_{h(x)} = \emptyset$ e $h(\gamma_{y_n} \cap I_z) = \tilde{\gamma}_{y'_n} \cap J_{h(z)} = \emptyset$. ■

Prova do Teorema C: Seja o k do Lema 5.3.2, definimos $H_1 : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_g$ como $H_1(\pi_f(x)) = \pi_g(h \circ f^k(x))$ onde $x \in \mathbb{D}$. Afirmamos que H_1 está bem definida. De fato, sejam x e z em Λ_f tais que $\pi_f(x) = \pi_f(z)$. Se $x, z \in \gamma \in \Gamma_f$, pelo Lema 5.3.2 temos que $h(f^k(x))$ e $h(f^k(z))$ estão numa mesma curva de Γ_g e por tanto $H_1(\pi_f(x)) = H_1(\pi_f(z))$.

Consideramos $l = l(k)$ dado pelo Lema 5.3.2, isto é, $h^{-1}(\tilde{\gamma}_y \cap \Lambda_g) \subset \gamma_{h^{-1}(y)} \cap \Lambda_f$ para toda curva $\tilde{\gamma}_y \in \Gamma_{g|_{g^l(\mathbb{D})}}$ e onde $\gamma_{h^{-1}(y)} \in \Gamma_{f|_{f^k(\mathbb{D})}}$. No caso x e z não estar em nenhuma curva de Γ_f , suponha que $\pi_g(h(f^k(x))) \neq \pi_g(h(f^k(z)))$. Ou seja, existe uma curva $\tilde{\gamma} \in \Gamma_g$ que separa . Portanto, $h(f^k(x))$ e $h(f^k(z))$ estão em diferentes componentes conexas de $g^l(\mathbb{D}) \setminus \tilde{\gamma}$ e denotemos por $\tilde{\gamma}'$ a componente conexa de $\tilde{\gamma} \cap g^l(\mathbb{D})$ que os separa.

Caso 1: Se $\tilde{\gamma}'$ contém um ponto regular y' para alguma medida ν ergódica aperiódica de g . Pelo Lema 5.3.3, existe uma curva γ' que separa $f^k(x)$ e $f^k(z)$ no disco $f^k(\mathbb{D})$ e que contém um ponto regular $y = h^{-1}(y')$ da medida $h_*^{-1}\nu$ invariante por f . Assim, temos que x e z são separados em \mathbb{D} pela componente conexa de $f^{-k}(\gamma')$ e tal curva pertence a Γ_f o que é absurdo.

Caso 2: Se $\tilde{\gamma}'$ não contém nenhum ponto regular, para algum n , $g^n(\tilde{\gamma}') \subset W_{f^l(\mathbb{D})}^s(a)$, sendo a um ponto regular alguma medida ergódica respeito g , tal curva $W_{f^l(\mathbb{D})}^s(a)$ separa $h(f^{n+k}(x))$ e $h(f^{n+k}(z))$ no disco $g^l(\mathbb{D})$. Como no Caso 1 temos que existe uma curvas em que $\alpha \in \Gamma_{f|_{f^{k+n}(\mathbb{D})}}$ que separa $f^{n+k}(x)$ e $f^{n+k}(z)$ no disco $f^{n+k}(\mathbb{D})$. Finalmente, basta tomar a componente conexa γ de $f^{-(n+k)}(\alpha)$ que separa x e y em \mathbb{D} e que interseca Λ_f , pois este é conexo. Portanto, $\gamma \in \Gamma_f$ separa x e y , o que é um absurdo. Ver Figura 8.

Pelo Teorema da variedade estável 1.0.4, a continuidade de h , π_f e π_g , e pela própria definição, $H_1 : \Gamma_f \rightarrow \Gamma_g$ é contínua e preserva a ordem. Finalmente, como as projeções das coleções de curvas $\pi_f(\Gamma_f)$ e $\pi_g(\Gamma_g)$ são densos em \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g , respectivamente. Pode-se estender H_1 a \mathcal{X}_f de forma contínua.

H_1 é semi-conjugação entre \hat{f} e \hat{g} :

$$H_1 \circ \hat{f}(\pi_f(x)) = \pi_g(h(f^{k+1}(x))) = \pi_g(g \circ h(f^k(x))) = \hat{g} \circ H_1(\pi_f(x)).$$

De forma análoga, é possível definir $H_2 : \mathcal{X}_g \rightarrow \mathcal{X}_f$ como $H_2(\pi_g(y)) = \pi_f(h^{-1} \circ g^m(y))$, onde a m é obtido pelo Lema 5.3.2 considerando a conjugação $h^{-1} : \Lambda_g \rightarrow \Lambda_f$. ■

Em particular, se a inclusão no Lema 5.3.2 é uma igualdade quando $k = 1$ temos uma conjugação entre as árvores \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g :

Corolário 5.3.4. *Dados f e g em $SD^r(\mathbb{D})$ conjugados em seus maximais invariantes por $h : \Lambda_f \rightarrow \Lambda_g$. Se para toda curva de Γ_f se verifica $h(\gamma_x \cap \Lambda_f) = \tilde{\gamma}_{h(x)} \cap \Lambda_g$. Então, existe um homeomorfismo $H : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_g$ que conjuga \hat{f} e \hat{g} .*

Prova: Nesse caso definimos $H : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_g$ como $H(\pi_f(x)) = \pi_g(h(x))$ para todo $x \in \mathbb{D}$. Onde a condição $h(\Lambda_f \cap \gamma_x) = \Lambda_g \cap \hat{\gamma}_{h(x)}$ implica, como no Teorema 5.1.1, que H está bem definida sobre as curvas de Γ_f e o Lema 5.3.3 garante a boa definição de H na árvore toda.

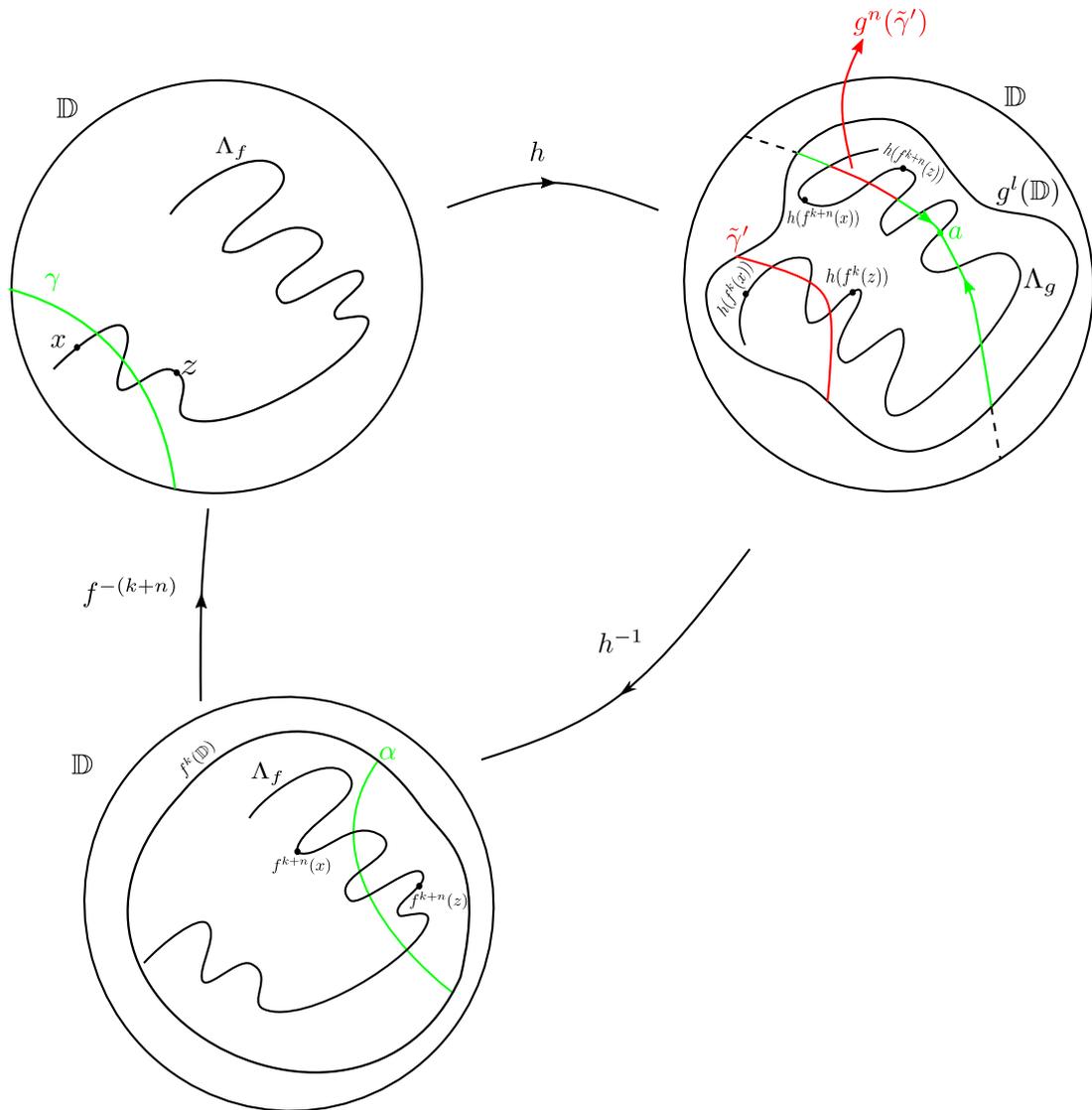


Figura 8 – Iterado de curvas errantes

Temos também que a inversa é dada por $H^{-1}(\pi_g(y)) = \pi_f(h^{-1}(y))$. A continuidade de H e H^{-1} é análoga ao Teorema C.

■

5.4 Prova dos Teoremas D e E

De forma recíproca, supondo que existe um homeomorfismo entre as árvores $\hat{h} : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_g$ que conjuga as aplicações \hat{f} e \hat{g} . Desejamos recuperar informação na dinâmica original, que nesse caso seria encontrar uma relação ergódica como também topológica (conjugação) entre f e g em pelos menos subconjuntos "importantes" dos maximais invariantes Λ_f e Λ_g , respectivamente. No sentido ergódico, isto significa que

tais conjuntos sejam de medida total para qualquer medida ergódica aperiódica e que os conjuntos destas medidas respeito f e g tenham algum tipo de equivalência como acontece sob a hipótese de conjugação topológica nos maximais invariantes. Porém para nos obter um resultado similar, partimos apenas de uma bijeção \hat{h} mensurável que conjuga \hat{f} e \hat{g} em conjuntos de medida total.

Primeiramente, dado que a árvore \mathcal{X}_f está ligada a curvas que intersecam o maximal invariante Λ_f e o fato da dinâmica no espaço das pre-órbitas em \mathcal{X}_f ser uma extensão natural da dinâmica na árvore. Analisamos a ligação entre Λ_f e $\varprojlim \mathcal{X}_f$. E portanto, as consequências ergódicas de tal ligação. Definamos a aplicação:

$$\begin{aligned} \phi_f : \Lambda_f &\longrightarrow \varprojlim \mathcal{X}_f \\ x &\longrightarrow [\dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_0]. \end{aligned}$$

Sendo que $\pi_f(x) = \hat{x} = \hat{x}_0$ e $\hat{x}_i = \pi_f(f^{-i}(x))$, para todo $i \geq 0$. A aplicação ϕ está bem definida pois $\hat{f}(\hat{x}_i) = \pi_f(f^{-i+1}(x)) = \hat{x}_{i-1}$ e portanto $[\dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_0] \in \varprojlim \mathcal{X}_f$. Além disso ϕ é sobrejetora pois \hat{f} e π_f são sobrejetoras.

Afirmamos que ϕ é injetora no conjunto $M_f = \{x \in \Lambda_f; \text{card}([x]) = 1\}$, onde $[x]$ é a componente conexa de $\pi_f^{-1}(\hat{x}) \cap \Lambda_f$ que contém a x . De fato, dados dois pontos x e x' tais que $\phi_f(x) = \phi_f(x')$. Temos assim, $f^{-i}(x)$ e $f^{-i}(y)$ não são separados por curvas em Γ_f , para cada $i \geq 0$. E portanto, $[x] = [x']$. Dado que $[x]$ é um conexo compacto tal que $\text{card}([x])$ é 1 ou ∞ , temos que ϕ_f é injetora apenas quando $\text{card}[x] = 1$. Notemos também que $\mu(M_f) = 1$ para toda medida μ ergódica aperiódica. De fato, dado um ponto regular x associado a μ , considere as curvas $\gamma_i = W_{\mathbb{D}}^s(f^{-i}(x))$ as quais $\pi_f(\gamma_i) = \hat{x}_i$ e $f(\gamma_i) \subset \gamma_{i-1}$ e portanto $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{j=0}^n f^j(\gamma_j)$. Assim, os pontos regulares de uma medida dada estão contidos em M_f . A inversa ϕ_f^{-1} , definida em $\phi_f(M_f)$ é dada por

$$\phi_f^{-1}[\dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{j=0}^n f^j(\gamma_j) = x.$$

Sendo que as curvas γ_i verificam $\pi_f(\gamma_i) = \hat{x}_i$ e $f(\gamma_i) \subset \gamma_{i-1}$. Temos também da definição de ϕ_f^{-1} que para pontos em $\phi_f(M_f)$ verifica-se:

$$f \circ \phi_f^{-1}[\dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_0] = \phi_f^{-1}[\dots, \hat{f}(\hat{x}_n), \dots, \hat{f}(\hat{x}_0)].$$

Por outro lado, sabemos que a π_f^* do Teorema A é bijeção entre os subconjuntos de medidas ergódicas aperiódicas de f e \hat{f} . Adicionalmente, seja a aplicação deslocamento $\hat{F}[\dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_0] = [\dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_0, \hat{f}(\hat{x}_0)]$ no espaço limite inverso $\varprojlim \mathcal{X}_f$. Existe uma bijeção Π_f^* entre os espaços de medidas invariantes de f e \hat{F} induzida pela uma projeção

$\Pi_f : \varprojlim \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_f$. Assim, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1(f) & \xrightarrow{\phi_f^*} & \mathcal{M}_1(\hat{F}) \\ & \searrow \pi_f^* & \downarrow \Pi_f^* \\ & & \mathcal{M}_1(\hat{f}). \end{array}$$

Sendo ϕ_f^* a aplicação entre medidas invariantes induzida pela ϕ_f . Que é bijeção entre os subconjuntos das medidas ergódicas aperiódicas de f e \hat{f} . Em particular, M_f contém os suportes de todas as medidas ergódicas aperiódicas de f .

Feito isto, passamos a fazer a prova do Teorema D:

Prova: [Teorema D] Considerando as aplicações invertíveis $\phi_f : M_f \rightarrow \varprojlim \mathcal{X}_f$ e $\phi_g : M_g \rightarrow \varprojlim \mathcal{X}_g$ associadas a $f, g \in SD^r(\mathbb{D})$, respectivamente. Para estabelecer uma aplicação entre subconjuntos de M_f e M_g a partir da bijeção $\hat{h} : \mathcal{X}_f \rightarrow \mathcal{X}_g$ que conjugua \hat{f} e \hat{g} , definimos a bijeção entre os espaços de pre-órbitas:

$$\begin{aligned} \hat{H} : \varprojlim \mathcal{X}_f &\longrightarrow \varprojlim \mathcal{X}_g \\ [\dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_0] &\longrightarrow [\dots, \hat{h}(\hat{x}_n), \dots, \hat{h}(\hat{x}_0)], \end{aligned}$$

Do qual obtemos uma bijeção \hat{H}_* entre os espaços de medidas invariantes $\mathcal{M}_1(\hat{F})$ e $\mathcal{M}_1(\hat{G})$. Portanto, do falado acima, $\phi_f(M_f)$ e $\phi_g(M_g)$ contém os suportes das medidas ergódicas aperiódicas de \hat{F} e \hat{G} , respectivamente. Logo, definimos uma outra aplicação que leva elementos de M_f em elementos de M_g :

$$x \in M_f \longrightarrow \phi_g^{-1}(\hat{H}(\phi_f(x))) \in M_g.$$

A qual restringimos a subconjuntos $A \subset M_f$ e $B \subset M_g$ de forma que seja bem definida. Para isto basta considerar $A = \phi_f^{-1}(\phi_f(M_f) \cap \hat{H}^{-1}(\phi_g(M_g)))$ e $B = \phi_g^{-1}(\phi_g(M_g) \cap \hat{H}(\phi_f(M_f)))$. Sendo que A é não vazio pois $\phi_f(M_f) \cap \hat{H}^{-1}(\phi_g(M_g))$ contém o suporte das medidas ergódicas aperiódicas de \hat{F} , de forma análoga B é também não vazio. Além disso, podemos notar que A e B tem medida total para toda medida ergódica aperiódica de f e g , respectivamente. Assim temos:

$$\begin{aligned} h : A \subset M_f &\longrightarrow B \subset M_g \\ x &\longrightarrow \phi_g^{-1}(\hat{H}(\phi_f(x))), \end{aligned}$$

é bem definida e cuja inversa $h^{-1} = \phi_f^{-1} \circ \hat{H}^{-1} \circ \phi_g$ está também bem definida. Logo, h

verifica $h \circ f|_A = g|_B \circ h$. De fato:

$$\begin{aligned}
h \circ f(x) &= \phi_g^{-1}(\hat{H}(\phi_f(f(x)))) = \phi_g^{-1}(\hat{H}([\dots, \hat{x}_{n+1}, \dots, \hat{x}_0, \hat{f}(\hat{x}_0)])) \\
&= \phi_g^{-1}[\dots, \hat{h}(\hat{f}(\hat{x}_n)), \dots, \hat{h}(\hat{f}(\hat{x}_1)), \hat{h}(\hat{f}(\hat{x}_0))] \\
&= \phi_g^{-1}[\dots, \hat{g}(\hat{h}(\hat{x}_n)), \dots, \hat{g}(\hat{h}(\hat{x}_0))] \\
&= g \circ \phi_f^{-1}[\dots, \hat{h}(\hat{x}_n), \dots, \hat{h}(\hat{x}_0)] \\
&= g \circ h(x).
\end{aligned}$$

Como ϕ_f , \hat{H} e ϕ_f^{-1} são mensuráveis, temos que h é uma bijeção mensurável com inversa mensurável. Além disso, induz uma bijeção entre os conjuntos de medidas ergódicas aperiódicas, dada por $h_*(\mu) = h_*\mu$ para $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$. Mais claramente, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}_1(f) & \xrightarrow{h_*} & \mathcal{M}_1(g) \\
\phi_f^* \downarrow \pi_f^* & & \downarrow \pi_g^* \phi_g^* \\
\mathcal{M}_1(\hat{f}) & & \mathcal{M}_1(\hat{g}) \\
\uparrow \Pi_f^* & & \uparrow \Pi_g^* \\
\mathcal{M}_1(\hat{F}) & \xrightarrow{\hat{H}_*} & \mathcal{M}_1(\hat{G}).
\end{array}$$

Portanto, temos que o sistema (f, μ) é ergodicamente equivalente a $(g, h_*\mu)$. ■

É também possível definir uma aplicação entre os espaços de medidas invariantes $\mathcal{M}_1(f)$ e $\mathcal{M}_1(g)$ a partir de \hat{h} e h . Sendo que h_* está apenas definido para medidas cujo suporte está em M_f , desconsiderando assim as medidas periódicas. Portanto, a definição seria dada da seguinte forma: para medidas ergódicas periódicas de f , consideramos $\phi_g^* \circ \hat{h}_* \circ \pi_f^*$ e para as aperiódicas h_* . Esta aplicação não tem como ser injetora pois, do já falado anteriormente, ϕ_f^* e ϕ_g^* não são injetoras no conjunto das medidas periódicas.

Visto que temos obtido a equivalência ergódica entre medidas aperiódicas de f e g nos conjuntos A e B , respectivamente. Apresentamos a ligação topológica, isto é, um homeomorfismo entre f e g nos fechados das uniões dos suportes de todas as medidas ergódicas aperiódicas. O qual é certo pois a projeção de tais conjuntos geram as árvores \mathcal{X}_f e \mathcal{X}_g , respectivamente. Claramente, nosso candidato a ser tal homeomorfismo é o h definido na prova do Teorema D.

Sendo que ϕ_f é contínua pela continuidade de \hat{f} . Podemos notar que a inversa ϕ_f^{-1} é também contínua. De fato, dados $[\dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_0]$ e $[\dots, \hat{y}_n, \dots, \hat{y}_0]$ em $\varprojlim \mathcal{X}_f$ suficientemente perto, isto é, dado $\delta > 0$ existe um n_0 tal que $d_H(\gamma_j, \alpha_j) < \delta$ com $j \geq n_0$. Onde $\phi_f^{-1}[\dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{j=0}^n f^j(\gamma_j) = x$ e $\phi_f^{-1}[\dots, \hat{y}_n, \dots, \hat{y}_0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{j=0}^n f^j(\alpha_j) = y$.

Sejam λ e β as constantes de contração associados a x e y , respectivamente. Temos que $d(x, y) < \delta + C\lambda_0^n + D\beta_0^n$ e por tanto ϕ_f^{-1} é contínua. Porém a aplicação ϕ_f^{-1} não é uniformemente contínua pois a distancia é limitada por uma constante que depende de x e y .

Prova: [do Teorema E] Primeiramente, a continuidade de h é fornecida pela continuidade de ϕ_f , \hat{H} e de ϕ_f^{-1} . Note agora que, como consequência de A conter os pontos regulares temos que $\bar{A} \subset \overline{\bigcup \text{supp}(\mu)}$. Mais ainda, como A tem medida total para uma μ dada, temos que $A \cap \text{supp}(\mu)$ é denso no $\text{supp}(\mu)$ e portanto $\bar{A} = \overline{\bigcup \text{supp}(\mu)}$. De forma análoga $\bar{B} = \overline{\bigcup \text{supp}(\nu)}$. Como Λ_f e Λ_g possuem contração uniforme nas variedades estáveis, a aplicação ϕ_f^{-1} é uniformemente contínua o que implica h e h^{-1} ser uniformemente contínuas. E portanto, as extensões destas aos fechos verificam $\bar{h} \circ \bar{h}^{-1} = I|_A$ e $\bar{h}^{-1} \circ \bar{h} = I|_B$, que pela continuidade uniforme de h ditas extensões a \bar{A} e \bar{B} , respectivamente, são contínuas. Sendo que $\bar{h}^{-1} = \overline{h^{-1}}$, o que finalmente implica $\overline{\bigcup \text{supp}(\mu)}$ e $\overline{\bigcup \text{supp}(\nu)}$ ser homeomorfos por \bar{h} .

■

Referências

- [1] M. Benedicks and L. Carleson. The dynamics of the henon map. *Annals of Mathematics*, 133(1):73–169, 1991.
- [2] C. Bonatti, L. Díaz, and M. Viana. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*, volume 102 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [3] S. Crovisier, A. Kocsard, A. Koropecki, and E. Pujals. A dichotomy for strong dissipative diffeomorphisms of the annulus. In preparation.
- [4] S. Crovisier and E. Pujals. Strongly dissipative surface diffeomorphisms. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 93:377–400, 08 2016.
- [5] S. Crovisier, E. Pujals, and C. Tresser. Mildly dissipative diffeomorphisms of the disk with zero entropy. *arXiv:2005.14278 Dynamical Systems*, 2020.
- [6] F. Hertz and E. Pujals. Critical points for surface diffeomorphisms. *Journal of Modern Dynamics*, 1:615–648, 2007.
- [7] A. Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 51:137–173, 1980.
- [8] F. Ledrappier and P. Walters. A relativised variational principle for continuous transformations. *Journal of The London Mathematical Society-second Series*, s2-16:568–576, 12 1977.
- [9] J. Munkres. *Topology: A First Course*. Prentice Hall International, 1997.
- [10] K. Oliveira and M. Viana. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. 9788583370178. SBM, 2014.
- [11] J. Palis and F. Takens. *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*, volume 35 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1995.
- [12] C. Robinson. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1998.