INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRJ

Sobre pontos genéricos e pontos irregulares em sistemas dinâmicos

Diego A. S. Sanhueza

Rio de Janeiro, Brasil

10 de junho de 2020

Sobre pontos genéricos e pontos irregulares em sistemas dinâmicos

Diego A. S. Sanhueza

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientadora: Maria José Pacifico

Orientadora: Katrin Grit Gelfert

Rio de Janeiro, Brasil

10 de junho de 2020

CIP - Catalogação na Publicação

SS226s

Sanhueza Sanhueza, Diego Alonso
Sobre pontos genéricos e pontos irregulares em sistemas dinâmicos / Diego Alonso Sanhueza Sanhueza. -- Rio de Janeiro, 2020.
90 f.

Orientadora: Maria José Pacifico.
Coorientadora: Katrin Grit Gelfert.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Matemática, 2020.

1. Entropia topologica de conjuntos nao compactos. 2. Pontos genéricos. 3. Pontos irregulares. I. Pacifico, Maria José , orient. II. Gelfert, Katrin Grit, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Diego A. S. Sanhueza

Sobre pontos genéricos e pontos irregulares em sistemas dinâmicos

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos ncccssários à obtcnção do título dc Doutor em Matemática

Trabalho aprovado por

Maria José Pacifico (Orientadora, UFRJ)

Katrin Grit Gelfert (Orientadora, UFRJ)

Isabel Lugão Rios (UFF)

Mario Jorge Dias Carneiro (UFMG)

Dominik Kwietniak (UJ, Polônia)

Jaqueline Siqueira (UFRJ)

Rio de Janeiro, Brasil
9 de junho de 2020

À memória de meu avô Juan de Dios Candia,
e a minha avó María Isabel Contreras, que ainda me espera no nosso lar.

Agradecimentos

Muitas pessoas apareceram ao longo deste caminho e de algum modo me ajudaram a terminar este trabalho. Gostaria de agradecer:
A minha família, meu incondicional sustento. Este trabalho significa para eles o mesmo que para mim. Fico eternamente agradecido do apoio e muita paciência que tiveram minhas orientadoras Maria José Pacifico e Katrin Gelfert. Certamente, a parte mais pesada foi suportada graças a elas. Aos meus amigos que me deram espaço para discutir alguns pontos da tese e outros assuntos; ao Oscar, El Costa, el Saya, Deniel, Freddy, Nestor e muitos outros. A todo o pessoal do IM-UFRJ (limpeza, secretaria, biblioteca, professores etc.) que fazem um grande lavor criando um óptimo ambiente de estudo, aconchegante e confortável. À Capes e CNPq pelo suporte financiero.

Resumo

Estudamos a entropia topológica de Bowen de pontos genéricos e de pontos irregulares para certos sistemas dinâmicos. Sugerimos uma definição de entropia topológica de conjuntos não compactos para fluxos, análoga à definição de Bowen, e mostramos que esta entropia coincide com a entropia de Bowen da aplicação tempo-1, sobre qualquer conjunto. Mostramos também uma desigualdade de Bowen para fluxos; a saber, que a entropia métrica com respeito a qualquer medida invariante por um fluxo contínuo é uma cota superior para a entropia topológica do conjunto dos pontos genéricos com respeito à mesma medida, e que a igualdade é sempre verdadeira se a medida for ergódica. Propomos uma definição de quase-especificação para fluxos e provamos que um fluxo contínuo tem a propriedade de quase-especificação se, e somente se, a aplicação tempo-1 tem esta propriedade. Usando a desigualdade de Bowen para fluxos, mostramos que todo fluxo contínuo com a propriedade de quase-especificação é saturado, estendendo um resultado de Pfister e Sullivan. Por último, provamos que em superfícies, o conjunto dos pontos irregulares de qualquer difeomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$ tem entropia total. Também mostramos que para aplicações racionais parabólicas, o conjunto de pontos irregulares com respeito ao potencial geométrico tem entropia total.

Palavras-chave: Pontos genéricos, pontos irregulares, entropia topológica de Bowen, propriedade de especificação.

Abstract

We study the Bowen topological entropy of generic points and of irregular points for certain dynamical systems. We give a definition of topological entropy of non-compact sets for flows, analogous to Bowen's definition, and show that this entropy coincides with the Bowen topological entropy of the time-1 map on any set. We also show an Bowen's inequality for flows; namely, that the metric entropy with respect to every invariant measure for a continuous flow is an upper bound for the topological entropy of the set of generic points with respect to the same measure, and the equality is always true if the measure is ergodic. We propose a definition of almost specification property for flows and prove that a continuous flow has the almost specification property if and only if the time-1 map satisfies this property. Using the Bowen inequality for flows, we show that every continuous flow with the almost specification property is saturated, extending a result of Pfister and Sullivan. Finally, we show that on surfaces, the set of irregular points of any $C^{1+\alpha}$-diffeomorphism has full entropy. Also, we show that for parabolic rational applications, the set of irregular points with respect to the geometric potential has full entropy.

Keywords: Generic points, irregular points, Bowen's topological entropy, specification property

Sumário

1 Introdução

O objetivo geral da teoria dos sistemas dinâmicos é entender o comportamento assintótico das órbitas de um sistema dado. Tal entendimento pode ser feito de diversas perspectivas e dá lugar a diferentes sub-áreas em sistemas dinâmicos: dinâmica topológica, teoria ergódica, dinâmica hiperbólica entre outras, bem como suas inter-relações. Neste trabalho estudamos o comportamento estatístico das órbitas e assim adoptamos principalmente o enfoque da teoria ergódica.

Um importante papel em teoria ergódica é desempenhado pelas médias de Birkhoff, uma propriedade local que indica a média assintótica de observações ao longo de trajectórias. Particularmente, estamos interessados no comportamento assintótico de pontos genéricos, com respeito a alguma medida invariante, de funções contínuas e fluxos definidos sobre um espaço métrico compacto (X, d).

Dado um sistema dinâmico discreto (X, f), um ponto $x \in X$ é **genérico** com respeito a uma medida f-invariante se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$$

para toda observável contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Esta última relação implica que a órbita $\{f^n(x) : x \in \mathbb{N}\}$ de um ponto genérico x é distribuída uniformemente sobre o espaço X desde o ponto de vista da observável, relativamente à medida μ. Analogamente, um ponto $x \in X$ é **genérico** com respeito a uma medida invariante μ para um fluxo contínuo $\Phi = \{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ sobre o espaço X se

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\phi^t(x)) = \int \varphi d\mu$$

para toda observável contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

Os pontos genéricos fornecem informação importante acerca das propriedades observáveis da dinâmica, e pontos genéricos com respeito a diferentes medidas permitem obter informação complementar. O estudo de pontos genéricos, originado por Krylov e Bogoliubov [42] na busca de medidas invariantes, tem sido bastante frutífero desde seus inícios. Resulta que, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, o conjunto de pontos genéricos com respeito a uma medida ergódica μ, denotado por $G_\mu(f)$ (e $G_\mu(\Phi)$), tem medida total, e portanto reflete o comportamento global do sistema (o comportamento mais típico de pontos no espaço de fase). Em contraste, se μ não for uma medida ergódica, então os pontos genéricos formam um conjunto de medida universalmente nula (podendo ser vazio). Isto significa que algumas propriedades dinâmicas desses conjuntos de pontos genéricos não são reveladas por medidas invariantes. Porém, em vários casos esses conjuntos são grandes desde o ponto de vista topológico (por exemplo, o conjunto $G_\mu(f)$ é um conjunto denso no suporte de μ quando o sistema tem a propriedade de sombreamento em média assintótica). Portanto, uma tarefa importante é estimar o "tamanho" dos conjuntos $G_\mu(f)$ (e $G_\mu(\Phi)$) desde outros pontos de vista.

Em 1973, R. Bowen [14] definiu a entropia topológica, $h(f, Z)$, de um sistema dinâmico discreto (X, f) ao longo de qualquer subconjunto Z do espaço métrico compacto X. Esta noção se assemelha com a definição de dimensão de Hausdorff, e é na atualidade conhecida como a entropia topológica de Bowen. Ele mostrou o notável resultado a seguir: Denotamos por $h_\mu(f)$ a entropia métrica de f com respeito a μ.

Teorema (Bowen [14]). Seja $f : X \to X$ uma função contínua sobre um espaço métrico compacto X. Então, para qualquer medida invariante μ,

$$h(f, G_\mu) \leq h_\mu(f) \tag{1.0.1}$$

e a igualdade sempre se cumpre quando μ é ergódica.

A entropia topológica para conjuntos não compactos tem sido o foco de numerosos estudos desde o trabalho pioneiro de R. Bowen, e possui um papel essencial em muitos aspectos da teoria ergódica e sistemas dinâmicos, especialmente em conexão com a teoria da dimensão e análise multifractal (veja, por exemplo, [6]).

Em geral, a desigualdade (1.0.1) é estrita se a medida não é ergódica. De fato, não é difícil construir exemplos de sistemas com entropia métrica positiva com respeito a uma medida invariante μ e $G_\mu(f) = \emptyset$. Mas, assombrosamente, em vários sistemas que são importantes na teoria de sistemas dinâmicos, a igualdade é sempre verdadeira. Esses sistemas são chamados **saturados**. Então, uma pergunta natural seria determinar que classe de sistemas são saturados. Em [30], Fan, Liao e Peyrière provam que sistemas com especificação são saturados. Pfister and Sullivan em [57] introduzem a noção de g-quase produto e mostram que eles são saturados, generalizando o resultado de Fan *et al.* Mais tarde, A. Mesón e F. Vericat, [48], mostram que sistemas com a propriedade de quase-especificação são também saturados. Lembramos que especificação implica a propriedade de g-quase produto e que esta, por sua vez, implica quase-especificação. Outra classe de sistemas importantes a considerar são sistemas satisfazendo a propriedade de sombreamento em média assíntotica (AASP para abreviar). Todo sistema com a quase-especificação satisfaz esta última propriedade. É um problema em aberto se estes sistemas são saturados. Veja o capítulo 5 para definições precisas dos conceitos citados acima.

Por outro lado, pouco é sabido para sistemas dinâmicos de tempo contínuo e este é um dos principais objetivos de nosso estudo. Estamos interessados em saber quando um fluxo contínuo é saturado. Primeiramente, estendemos a definição de Bowen de entropia topológica para fluxos sobre espaços métricos compactos e provamos uma igualdade do tipo Abramov:

Teorema A. Seja $\Phi = \{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ um fluxo contínuo sobre um espaço métrico compacto X. Então

$$t \cdot h(\Phi, Z) = h(\phi^t, Z) \qquad \text{para qualquer } Z \subseteq X \text{ e } t \geq 0.$$

Depois, usamos o resultado acima para provar nosso resultado principal que é um análogo à desigualdade (1.0.1) no contexto de fluxos:

Teorema B. Seja $\Phi = \{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ um fluxo contínuo sobre um espaço métrico compacto X. Então

$$h(\Phi, G_\mu(\Phi)) \leq h_\mu(\Phi) \tag{1.0.2}$$

para toda medida Φ-invariante μ e a igualdade é sempre verdadeira se μ é ergódica.

Nossa abordagem é baseada na comparação de pontos genéricos do fluxo com aqueles da aplicação tempo-1 (veja o Teorema C abaixo). Note que isto não é obvio, porque medidas ergódicas para o fluxo podem não ser ergódicas para a aplicação tempo-1. Isto implica que os pontos genéricos para o fluxo com respeito a μ pode não ser genérico para o tempo-1 com respeito à mesma medida μ. Uma vez que temos a desigualdade (1.0.2), obtemos uma condição suficiente para um fluxo ser saturado em termos da aplicação tempo-1.

Teorema C. Seja $\Phi = \{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ um fluxo contínuo sobre um espaço métrico compacto X. Se ϕ^t é saturado, para algúm $t \geq 0$, então Φ é saturado.

No Capítulo 5, a fim de apresentar exemplos de fluxos saturados, derivamos resultados análogos àqueles referidos antes sobre sistemas dinâmicos discretos com propriedades do "tipo especificação". Com efeito, propomos uma definição de quase-especificação para fluxos e provamos (Teorema D) que um fluxo tem esta propriedade se, e somente se, o tempo-1 tem a propriedade de quase-especificação. Como consequência, mostra-se que fluxos com a propriedade de quase-especificação são saturados, estendendo o resultado de Pfister e Sullivan. Em particular, obtemos que um fluxo de Anosov topologicamente misturador é saturado. Relações entre estas propriedades do tipo especificação são também estabelecidas.

Se denotamos por $Q(f)$ o conjunto de todos os pontos genéricos do sistema dinâmico (X, f), o espaço X se decompõe de maneira natural como $X = Q(f) \cup \hat{X}(f)$ onde $\hat{X}(f)$ é o conjunto de todos os pontos onde as médias de Birkhoff não convergem para alguma observável $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (tais pontos são ditos φ-**irregulares** e o conjunto de todos esses pontos é denotado por $\hat{X}(f, \varphi)$). É claro que $Q(f)$ e $\hat{X}(f)$ são disjuntos e é sabido que $Q(f)$ tem medida total com respeito a qualquer medida invariante e portanto $\hat{X}(f)$ é universalmente nulo. Como no caso dos conjuntos $G_\mu(f)$ quando μ não é ergódica, cada $\hat{X}(f,\varphi)$ não é detectado por medidas invariantes, mas pode ser grande sob outros pontos de vista. Ya. Pesin e B. Pitskel' ([55]) foram os primeiros a considerar o conjunto $\hat{X}(f)$ e mostraram que quando (Σ_2,σ) é o shift de dois símbolos, então $h(\sigma,\hat{\Sigma}_2(\sigma))$ coincide com a entropia topológica $h(\sigma)=\log 2$ (veja também [29]). No entanto, foi o trabalho de F. Takens e E. Verbitskiy [68] que incentivou estudar os conjuntos de pontos irregulares. De fato, eles estabelecem um Princípio de Distribuição de Entropia e constroem conjuntos do tipo Moran para provar o seguinte Princípio Variacional:

Teorema (Takens-Verbitskiy [68]). Se $f:X\to X$ é expansiva e satisfaz a propriedade de especificação e

$$K(\varphi,\alpha):=\left\{x\in X:\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x))=\alpha\right\},\qquad \text{para } \varphi\in C(X),\alpha\in\mathbb{R},$$

então

$$h(f,K(\varphi,\alpha))=\sup\left\{h_\mu(f):\mu\ f\text{-invariante e }\int\varphi d\mu=\alpha\right\}.$$

Os métodos desenvolvidos por Takens e Verbitskiy têm sido considerado por vários autores para estimar a entropia dos conjuntos $\hat{X}(f)$ e $\hat{X}(f,\varphi)$. Por exemplo, L. Barreira e J. Schmeling, em [7], provam que se a dinâmica é um subshit de tipo finito topologicamente misturador, então o conjunto $\hat{X}(f,\varphi)$ tem entropia topológica total, quando ele é não vazio. Este resultado foi generalizado por D. Thompson para sistemas com a propriedade de quase-especificação em [69, 70]. Algumas extensões importantes do Princípio Variacional de Takens e Verbitskiy foram estabelecidas, por exemplo, nos trabalhos [28, 46].

Os conjuntos de pontos irregulares podem também apresentar alguma estrutura topológica interessante. Neste sentido, em [26] Y. Dong *et al.* provaram que, sob certas condições nos suportes das medidas invariantes, os conjuntos $\hat{X}(\varphi)$ de sistemas com AASP são residuais. Novamente, não é sabido em sistemas com a AASP se os conjuntos $\hat{X}(\varphi)$ tem entropia total.

No capítulo 6 estudamos os pontos irregulares com mais detalhes e o seguinte resultado é apresentado:

Teorema E. Se $f:M\to M$ é um difeomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$ sobre uma superfície fechada, então

$$h(f)=h(f,\hat{X}(f)).$$

Observe que o teorema acima, que dá o valor exato da entropia topológica do conjunto dos pontos irregulares $\hat{X}(f)$, se aplica a sistemas bastante gerais, dado que nenhuma hipótese sobre a dinâmica é requerida. Para podermos estimar a entropia topológica dos respectivos conjuntos $\hat{X}(f,\varphi)$ algumas condições sobre o sistema e sobre a observável são absolutamente necessárias, pois sempre existem observáveis φ tais que

$\hat{X}(f,\varphi)=\emptyset$ (e.g., quando φ é constante). Nesta direção, o Teorema 6.3.1 reúne algumas condições onde ainda podemos obter a igualdade $h(f)=h(f,\hat{X}(f,\varphi))$.

Finalmente, um importante exemplo de dinâmica complexa é estudado e mostramos que

Teorema F. Seja $f: J(f)\to J(f)$ uma função racional de grau $\deg(f)\geq 2$ sem pontos críticos em $J(f)$. Suponha que f não é da forma az^n com $a\in\mathbb{S}^1$ e $n\geq 2$, então

$$h(f)=h(f,\hat{X}(f,\log|f'|))=\log(\deg f).$$

Enfatizamos que as funções hiperbólicas (que no contexto complexo tem a propriedade de especificação) são todas expansivas e que existem aplicações expansivas que não são hiperbólicas. Portanto, nosso resultado se aplica em contextos mais gerais que sistemas com especificação.

2 Preliminares

Nosso objetivo é estudar propriedades ergódicas e dimensionais dos conjuntos de pontos genéricos de fluxos e funções contínuas sobre espaços métricos compactos. Neste capítulo coletamos conceitos e notações usados ao longo do trabalho.

Um **fluxo contínuo** definido num espaço métrico compacto (X, d), é uma aplicação contínua $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ que satisfaz $\Phi(s + t, x) = \Phi(s, \Phi(t, x))$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$. Define-se a **aplicação tempo-t**, $\phi^t : X \to X$, $t \in \mathbb{R}$, por $\phi^t(x) = \Phi(t, x)$. Se observa que ϕ^t é um homeomorfismo e $(\phi^t)^{-1} = \phi^{-t}$. Também é uma consequência imediata da definição que $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e $\phi^0 = \mathrm{id}$, a aplicação identidade. Identificamos o fluxo Φ com a família de homeomorfismos $\{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Um **sistema dinâmico** é um par (X, S) onde S é uma função contínua (ou homeomorfismo caso S seja invertível) ou um fluxo contínuo e X um espaço métrico compacto com alguma métrica fixada d. No primeiro caso (X, S) é também chamado de **sistema dinâmico discreto**, e **sistema dinâmico contínuo** no último caso.

Muitas das definições, enunciados e inclusive a notação que são dadas para funções, não mudam se considerarmos fluxos, e recíprocamente. Assim, com o fim de evitar sermos repetitivos, usaremos as palavras “sistema dinâmico” (ou simplesmente “sistema”) quando não seja necessário fazer alguma diferença entre o caso discreto e o caso contínuo. Com esta generalidade, um sistema dinâmico será denotado por (X, S) ou mais brevemente por S quando o contexto for claro.

2.1 Medidas de probabilidade. O espaço $\mathfrak{M}(X)$.

Uma medida de Borel de probabilidade sobre o espaço (X, d) é uma medida definida na σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}(X)$, que associa o valor 1 ao espaço X. Denotaremos por $\mathfrak{M}(X)$ o conjunto de todas as medidas de Borel de probabilidade definidas em X. Referências para consultar as demonstrações das propriedades das medidas de probabilidades borelianas aqui citadas, são os livros de P. Billingsley [9] e K. Parthasarathy [53].

O fato de (X, d) ser um espaço métrico garante que todas as medidas consideradas são regulares, isto é, para todo conjunto de Borel B e todo $\varepsilon > 0$, existem um aberto G e um fechado F tal que $F \subseteq B \subseteq G$ e $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

Consideraremos $C(X) = \{\varphi : X \to \mathbb{R} : \varphi \text{ é contínua}\}$ munido com a norma uniforme $\|\varphi\| = \sup_{x\in X} |\varphi(x)|$. Uma vez que (X, d) é compacto, o espaço $(C(X), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach separável. Um funcional linear L sobre $C(X)$ é **positivo** se $L(\varphi) \geq 0$ quando $\varphi \geq 0$. O funcional L é contínuo se é contínuo em ao menos uma função $\varphi \in C(X)$. O seguinte teorema que une análise funcional com teoria da medida é de importância crucial para nós.

Teorema (Representação de Riesz). *Seja $L : C(X) \to \mathbb{R}$ um operador linear, contínuo e positivo com $L(\mathbf{1}) = 1$. Então existe uma única medida de Borel de probabilidade $\mu = \mu(L)$ tal que*

$$L(\varphi) = \int \varphi d\mu$$

para toda $\varphi \in C(X)$.

A recíproca do Teorema de Representação de Riesz é como segue: se $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, então $\varphi \mapsto \int \varphi d\mu$ define um operador linear contínuo positivo L_μ com $L_\mu(\mathbf{1}) = 1$. É evidente agora que duas medidas $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(X)$ são iguais se, e somente se,

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi d\nu \tag{2.1.1}$$

para toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

No restante desta seção discutiremos a estrutura topológica do espaço $\mathfrak{M}(X)$. Para cada medida $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ e $n \in \mathbb{N}$ consideremos os conjuntos

$$V_\mu(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \varepsilon) := \left\{ \nu \in \mathfrak{M}(X) : \left| \int \varphi_i d\mu - \int \varphi_i d\nu \right| < \varepsilon, i = 1, 2, ..., n \right\},$$

onde, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\varphi_i \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$. A coleção $\{V_\mu(\cdot)\}_{\mu \in \mathfrak{M}(X)}$ de conjuntos acima definidos formam uma base para uma topologia sobre $\mathfrak{M}(X)$, conhecida como **topologia fraca***. Nesta topologia, uma sequência de medidas de probabilidades $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ converge (fracamente*) para μ se, e somente se, $\int \varphi d\mu_n \to \int \varphi d\mu$ para toda $\varphi \in C(X)$. Usaremos também a simbologia $\mu_n \to \mu$ para denotar convergencia fraca* e não $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$ como é usual no análise funcional, pois esta topologia será a única considerada em $\mathfrak{M}(X)$. Com a topologia fraca*, o espaço $\mathfrak{M}(X)$ resulta ser metrizável e uma métrica compatível com a topologia é a metrica de Prohorov:

$$\overline{d}(\mu, \nu) := \inf\{\varepsilon : \nu(B) \leq \mu(B^\varepsilon) + \varepsilon \text{ para todo conjunto de Borel } B\},$$

onde $B^\varepsilon := \{x \in X : d(x, B) < \varepsilon\}$. Outra métrica $\tilde{d}$ em $\mathfrak{M}(X)$ equivalente à métrica de Prohorov é definida como segue: seja $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ um conjunto denso enumerável em $C(X)$ com $\|\varphi_n\| \leq 1$ para todo $n \geq 1$ e $\{p_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de números (estritamente) positivos com $\sum_{n \geq 1} p_n = 1$. Defina $\tilde{d}$ como

$$\tilde{d}(\mu, \nu) := \sum_{n \geq 1} p_n \left| \int \varphi_n d\mu - \int \varphi_n d\nu \right|.$$

Observe que temos definido uma família de métricas (equivalentes) compatíveis com a topologia fraca* em $\mathfrak{M}(X)$. Mais ainda, se (X, d) é compacto, então $(\mathfrak{M}(X), \overline{d})$ é também compacto.

Cada ponto $x \in X$ define uma medida δ_x chamada **delta de Dirac** ou a **medida**

suportada em x tal que para cada conjunto de Borel B, $\delta_x(B) = 1$ se $x \in B$ e $\delta_x(B) = 0$ no outro caso. A aplicação $x \mapsto \delta_x$ é contínua e $d_0(x, y) := \tilde{d}(\delta_x, \delta_y)$ é uma métrica equivalente com d. Se $E \subseteq X$ é denso em X, então combinações convexas finitas de deltas de Dirac suportadas nos pontos de E formam um conjunto denso em $\mathfrak{M}(X)$.

Finalizamos esta seção com uma proposição que nos permitirá construir certas medidas invariantes para fluxos a partir de medidas invariantes da aplicação tempo-1.[1]

Proposição 2.1.1. *Seja X um espaço métrico e $\mathcal{B}(X)$ sua $\sigma-$álgebra de Borel. Suponha que $\{\mu^t\}_{t\in[0,1]}$ é uma família de probabilidades definidas sobre $\mathcal{B}(X)$ tal que para cada $B \in \mathcal{B}(X)$ a aplicação $t \mapsto \mu^t(B)$ é Lebesgue mensurável. Então*

(a) *$\overline{\mu} := \int_0^1 \mu^t dt$ é uma medida de Borel de probabilidade em X.*

(b) *Para toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$, tem-se*

$$\int \varphi d\overline{\mu} = \int_0^1 \int \varphi d\mu^t dt.$$

Demonstração. (a) A σ-aditividade decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. As outras condições que definem uma medida de Borel de probabilidade são fáceis de comprovar.

(b) Basta provar para $\varphi \geq 0$. Seja $s := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{B_i}$ uma função simples ($\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $B_i \in \mathcal{B}(X)$, $i = 1, 2, ..., n$), primeiro observe que para qualquer medida $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ tem-se que

$$\int s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(B_i).$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int s d\mu^t dt &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu^t(B_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^1 \mu^t(B_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\mu}(B_i) \\ &= \int s d\overline{\mu}. \end{aligned}$$

Quando $\varphi \geq 0$ a conclusão se segue do Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue, pois toda função contínua não-negativa é o limite crescente de funções simples. ■

2.2 Medidas invariantes. Os espaços $\mathfrak{M}_{erg}(f)$ e $\mathfrak{M}(f)$.

Um dos conceitos fundamentais na teoria ergódica é o de medida invariante.

[1] Encontramos uma versão mais geral desta proposição em [5], porém a prova dada aí usa um teorema tipo Fubini ([39]) e portanto é bem diferente de nossa prova mais elementar.

Definição. (i) Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua. Uma medida de Borel de probabilidade μ é dita **invariante** por f se $\mu(f^{-1}A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$.

(ii) Seja $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ um fluxo contínuo. A medida $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ é dita **invariante pelo fluxo** Φ se ela é invariante por ϕ^t, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Note que uma medida μ é invariante por f se, e somente se, $\int \varphi \circ f d\mu = \int f d\mu$ para toda função integrável $\varphi : X \to \mathbb{R}$, e ela é invariante pelo fluxo Φ se, e somente se, $\int \varphi \circ \phi^t d\mu = \int f d\mu$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in L^1(\mu)$. Ás vezes também diremos que o sistema dinâmico (X, S) **preserva a medida** μ ou que μ é S-**invariante**. Denotaremos por $\mathfrak{M}(S)$ o conjunto de todas as medidas S-invariantes. É bem sabido que se X é compacto, então $\mathfrak{M}(S)$ é um conjunto compacto, convexo e não vazio. Observe que com esta notação $\mathfrak{M}(\Phi) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \mathfrak{M}(\phi^t)$, em particular $\mathfrak{M}(\Phi) \subseteq \mathfrak{M}(\phi^t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja $\mu \in \mathfrak{M}(f)$. Dizemos que $\varphi \in L^1(\mu)$ é **invariante por** f (ou f-**i**nvariante) se $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$ para μ-quase todo $x \in X$. A função $\varphi \in L^1(\mu)$ é **invariante pelo fluxo** Φ se ela é invariante por ϕ^t, para todo $t \in \mathbb{R}$. Um conjunto de Borel A é S-**invariante** se sua função indicatriz $\mathcal{X}_A$ é invariante por S.

Uma medida μ invariante por um sistema dinâmico S é chamada **ergódica** (ou S é **e**rgódico com respeito a μ) se cada conjunto de Borel S-invariante tem medida nula ou total. Se $B \in \mathcal{B}(X)$ é um conjunto invariante por S, então B^c, o complementar de B em X, é também invariante. Logo, ao invés de estudar a dinâmica de S em X, estudamos as dinâmicas mais simplificadas de $S|_B$ e $S|_{B^c}$ e obtemos informação do sistema original. Mas, se μ é uma medida ergódica para S, então $\mu(B^c) = 0$ (ou $\mu(B) = 0$) e portanto a dinâmica sobre B^c é desprezível desde o ponto de vista da medida μ. Em outras palavras, ergodicidade significa que o sistema é indecomponível, ou seja, não é possível decompor um sistema dinâmico ergódico em sistemas mais simples. Em geral, todo sistema dinâmico admite uma decomposição em partes indecomponíveis. Denotamos por $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(S)$ o conjunto de todas as medidas ergódicas para S. Os pontos extremais do convexo $\mathfrak{M}(S)$ são justamente as medidas ergódicas para S. Segue que $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(S)$ é não vazio. Em particular, se S admite uma única medida invariante, então ela é ergódica e, neste caso, (X, S) é dito **unicamente ergódico**. Resulta que $\mathfrak{M}(S)$ é sempre um simplexo de Choquet e portanto, no caso que (X, S) não é unicamente ergódico e $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(S)$ é denso em $\mathfrak{M}(S)$, o espaço $\mathfrak{M}(S)$ é um simplexo de Poulsen (veja [58]).

Uma caracterização de uma medida ergódica muito útil é dada no seguinte teorema.

Teorema 2.2.1. *Seja S um sistema dinâmico. São equivalentes:*

(i) *S é ergódico com respeito a μ.*

(ii) *Se $\varphi \in L^1(\mu)$ é S-invariante, então φ é uma constante μ-q.t.p.*

(iii) *Se $\varphi \in L^2(\mu)$ é S-invariante, então φ é uma constante μ-q.t.p.*

No exemplo abaixo, consideramos rotações do círculo $\mathbb{S}^1$, $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{S}^1}$, e indicamos quando a rotação R_a é ergódica ou não. Esta família de aplicações permitirá mostrar certas diferenças sobre ergodicidade e medidas invariantes que podem ocorrer entre um fluxo e seus elementos (exemplo 2).

EXEMPLO 1 (Rotações do círculo). Sejam $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $R_a : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a rotação $R_a(z) = az$, onde $a \in \mathbb{S}^1$. Então R_a é ergódica com respeito à medida de Lebesgue (Haar) em $\mathbb{S}^1$ se, e somente se, a não é uma raíz da unidade.

Também pode-se provar que se a não é uma raíz da unidade, então a medida de Lebesgue é a única medida invariante por R_a. Nós não daremos uma prova deste fato, mas pode ser consultada no livro de P. Walters [73, Theorem 6.18].

Por outro lado, $a \in \mathbb{S}^1$ pode ser escrito como $a = e^{2i\pi\theta}$ para algum $\theta \in [0, 1]$ e logo, a é uma raíz da unidade se, e somente se, θ é racional. No exemplo a seguir usamos notação aditiva para as rotações.

EXEMPLO 2. Seja $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ o toro unidimensional e defina $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ por

$$\Phi(t, x) = R_t(x) \qquad \text{onde } R_t \text{ é a rotação pelo ângulo } t : [t] + x$$

Assim definido, Φ é um fluxo únicamente ergódico onde a única medida invariante é a medida de Lebesgue. Mas repare que nem toda aplicação R_t é ergódica. Ou seja, uma medida pode ser ergódica para um fluxo Φ, mas pode não ser ergódica para a aplicação tempo-t. Portanto, alguma informação dinâmica do fluxo pode não ser recuperada a partir da (nem herdado para a) aplicação tempo-t. Mais ainda, este exemplo mostra que nem toda medida invariante pelo tempo-t pode ser invariante pelo fluxo. A proposição a seguir nos diz como construir uma medida invariante pelo fluxo a partir de uma medida invariante para o elemento ϕ^t.

Proposição 2.2.2. *Se $\mu \in \mathfrak{M}(\phi^t)$, então:*

(a) *Para qualquer $s \in \mathbb{R}$, $\phi^s_*\mu$ é também uma medida de Borel de probabilidade invariante por ϕ^t.*

(b) *A medida $\overline{\mu} := \int_0^1 \phi^s_*\mu ds$ é uma medida boreliana de probabilidade invariante pelo fluxo Φ.*

Demonstração. É suficiente supor $t = 1$.

(a) É claro que $\phi^s_*\mu \in \mathfrak{M}(X)$ e se $B \in \mathcal{B}(X)$, então

$$\phi^s_*\mu(\phi^{-1}B) = \mu(\phi^{-s}\phi^{-1}B) = \mu(\phi^{-1}(\phi^{-s}B)) = \mu(\phi^{-s}B) = \phi^s_*\mu(B)$$

o que prova a invariância.

(b) O fato de $\overline{\mu}$ ser uma medida boreliana de probabilidade segue da proposição 2.1.1(a). Provemos então que $\overline{\mu}$ é invariante pelo fluxo. Seja $B \in \mathcal{B}(X)$, fazendo uma mudança de variável e o fato de que $\mu \in \mathfrak{M}(\phi^1)$, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(\phi^{-s}B) &= \int_0^1 \mu(\phi^{-(s+t)}B)dt \\
&= \int_s^{s+1} \mu(\phi^{-u}B)du \\
&= \int_s^1 \mu(\phi^{-u}B)du + \int_1^{s+1} \mu(\phi^{-u}B)du \\
&= \int_s^1 \mu(\phi^{-u}B)du + \int_0^s \mu(\phi^{-1-u}B)du \\
&= \int_0^1 \mu(\phi^{-u}B)du \\
&= \overline{\mu}(B).
\end{aligned}$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}$, portanto $\overline{\mu}$ é uma medida de probabilidade Φ-invariante. ■

2.3 Teorema Ergódico de Birkhoff

Teorema (**Ergódico de Birkhoff**, 1931)**.** *Seja $f : X \to X$ uma função contínua. Se $\mu \in \mathfrak{M}(f)$, então para todo $\varphi \in L^1(\mu)$ o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ f^j)(x) =: \tilde{\varphi}(x) \tag{2.3.1}$$

existe para μ-quase todo $x \in X$. Além disso, $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(f(x))$ (sempre que $\tilde{\varphi}(x)$ exista), $\tilde{\varphi} \in L^1(\mu)$ e

$$\int \varphi d\mu = \int \tilde{\varphi} d\mu.$$

A versão do Teorema Ergódico de Birkhoff para tempo contínuo é como segue:

Teorema (**Teorema Ergódico de Birkhoff**, 1931)**.** *Seja $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ um fluxo contínuo. Se $\mu \in \mathfrak{M}(\Phi)$, então para todo $\phi \in L^1(\mu)$ o limite*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\varphi \circ \phi^t)(x)dt =: \hat{\varphi}(x) \tag{2.3.2}$$

existe para μ-quase todo $x \in X$. Além disso, $\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(\phi^t(x))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (sempre que $\hat{\varphi}(x)$ exista), $\hat{\varphi} \in L^1(\mu)$ e

$$\int \varphi d\mu = \int \hat{\varphi} d\mu.$$

Note que o Teorema Ergódico de Birkhoff é válido em contextos mais gerais; por exemplo, para sistemas (X, S) onde X é um espaço de medida e S uma transformação mensurável (veja [22, p.11]). No que segue, a tripla (X, μ, S) denota o sistema dinâmico (X, S) invariante com respeito a μ.

Corolário 2.3.1. *Em virtude do Teorema 2.2.1, (X, μ, S) é ergódico se, e somente se, $\tilde{\varphi} = \int \varphi d\mu$ para toda $\varphi \in L^1(\mu)$.*

O conjunto $\mathcal{R}(S,\varphi)$ dos pontos para os quais o limite no Teorema Ergódico de Birkhoff existe (denominados **pontos regulares** com respeito a φ segundo Birkhoff), em geral, depende da função φ e pode acontecer que um ponto em $\mathcal{R}(S,\varphi)$ não seja regular para uma outra função φ'. Porém, quando restringimos nossa atenção só às aplicações φ contínuas a situação é notavelmente bem comportada: O conjunto $Q(S) := \bigcap\{R(S,\varphi) : \varphi \in C(X)\}$ é invariante por S e tem medida total com respeito a qualquer medida invariante. Observe que a condição dos limites (2.3.1) ou (2.3.2) existirem para toda observável contínua é uma condição puramente topológica e não métrica no sentido de que os pontos para os quais esses limites existem independem da medida invariante considerada. O Teorema Ergódico de Birkhoff e a separabilidade do espaço $C(X)$ garantem então que $\mu(Q(S)) = 1$ para toda medida invariante μ. Além disso, o Teorema de Representação de Riesz assegura que para cada $x \in Q(S)$, existe uma única medida de probabilidade S-invariante μ_x tal que $\hat{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu_x$ para toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Um ponto $x \in Q(S)$ é dito **quase-regular** para S.

Os pontos quase-regulares desempenham um importante papel na teoria da dimensão e análise multifractal de um sistema dinâmico. No próximo capítulo os pontos quase-regulares serão estudados com mais detalhes.

3 Pontos Genéricos

O objetivo deste capítulo é estudar os pontos genéricos de um fluxo e de sua aplicação tempo-1 e estabelecer algumas conexões entre eles. Na Seção 3.1 começamos definindo pontos genéricos e pontos quase-regulares para uma função contínua e resumimos suas principais propriedades. Em seguida, estudamos pontos genéricos para fluxos contínuos e provamos algumas relações interessantes que existem entre os pontos genéricos e quase-regulares de sua aplicação tempo 1. Por exemplo, mostramos que todo ponto genérico para a aplicação tempo-1, com respeito a uma medida fixada invariante pelo fluxo é também um ponto genérico para o fluxo com respeito à mesma medida (Teorema 3.1.3). Enquanto o recíproco, como exibimos num exemplo, é falso. Provaremos também que os conjuntos de pontos quase-regulares do fluxo e da aplicação tempo-1 coincidem (Teorema 3.1.5). Na última seção, os pontos genéricos com respeito a uma medida invariante são caracterizados como aqueles pontos cujas medidas empíricas convergem a dita medida invariante. Usaremos esta caracterização na prova do teorema principal do próximo capítulo.

3.1 Pontos genéricos

3.1.1 Pontos genéricos. Caso discreto.

Consideremos $f : X \to X$ uma função contínua ou homeomorfismo sobre o espaço métrico compacto (X, d) e μ uma medida f-invariante fixa.

Definição. Um ponto $x \in X$ é dito **genérico** (para f) com respeito a μ se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$$

para toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

O conjunto de todos os pontos genéricos com respeito a μ é denotado por $G_\mu(f)$. As seguintes observações são imediatas, mas será propício tê-las em consideração.

Observação 3.1.1. (1) Cada ponto quase-regular x é genérico com respeito a alguma medida invariante μ_x, pelo Teorema de Representação de Riesz.

(2) Se $Q(f)$ denota o conjunto dos pontos quase-regulares, então os conjuntos $G_\mu(f)$ formam uma partição de $Q(f)$. De fato, pela parte (1) o conjunto $Q(f)$ pode ser escrito como $Q(f) = \bigcup_{\mu\in\mathfrak{M}(f)} G_\mu(f)$. Agora suponha que $G_\mu(f) \cap G_\nu(f) \neq \emptyset$ para certas

medidas $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(f)$ e seja x um ponto nessa intersecção, então

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\nu$$

para toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ e portanto $\nu = \mu$. Assim, ou $G_\mu(f)$ e $G_\nu(f)$ são disjuntos ou são iguais, formando uma partição de $Q(f)$.

(3) O conjunto $G_\mu(f)$ pode ser vazio; basta considerar f sendo a identidade e μ qualquer medida que não seja uma medida de Dirac.

(4) Se f é únicamente ergódico, com única medida invariante μ, então $G_\mu(f) = X$.

Finalizamos esta seção enunciando um resultado muito importante sobre a medida dos conjuntos de pontos genéricos (veja [24, Propositions 4.7, 5.9, 5.10] para uma demonstração).

Proposição 3.1.2. *O conjunto $G_\mu(f)$ é um conjunto de Borel. Além disso, $\mu(G_\mu(f)) = 1$ se μ é ergódica e $\mu(G_\mu(f)) = 0$ caso contrário.*

3.1.2 Pontos genéricos. Caso contínuo.

Consideramos agora $\Phi : X \times \mathbb{R} \to X$ um fluxo contínuo sobre o espaço métrico compacto (X, d) e μ uma medida invariante pelo fluxo. Lembre que uma medida é invariante pelo fluxo se ela é invariante por cada um de seus elementos; isto é, $\mathfrak{M}(\Phi) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \mathfrak{M}(\phi^t)$.

Definição. Um ponto $x \in X$ é dito **genérico** (para Φ) com respeito a μ se

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\phi^t(x))dt = \int \varphi d\mu$$

para toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

Em analogia com o caso discreto, $G_\mu(\Phi)$ denotará o conjunto de todos os pontos genéricos com respeito a μ. O símbolo $G_\mu(S)$ será usado para denotar os pontos genéricos de um sistema dinâmico com generalidade (isto é, referindo-nos tanto a um fluxo como a uma função contínua ou um homeomorfismo). A Observação 3.1.1 e Proposição 3.1.2 são também válidas para $G_\mu(\Phi)$.

Para o fluxo do Exemplo 2, $G_\lambda(\Phi) = \mathbb{T}^1$ quando λ é a medida de Lebesgue. Para os elementos desse fluxo, $G_\lambda(\phi^t) = \emptyset$ se t é racional e o espaço inteiro se t é irracional. Isto mostra que pontos genéricos para um fluxo contínuo podem não ser genéricos para seus tempos ϕ^t (com respeito à mesma medida). Contudo, os pontos genéricos da aplicação tempo t e o fluxo ainda estão relacionados.

Teorema 3.1.3. *Se $\mu \in \mathfrak{M}(\Phi)$, então $G_\mu(\phi^t) \subseteq G_\mu(\Phi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Para provar a afirmação basta considerar $t = 1$. Seja $x \in G_\mu(\phi^1)$ e $\varphi \in C(X)$. É suficiente calcular $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_0^N \varphi(\phi^t(x))dt$ quando $N \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_0^N \varphi(\phi^t(x))dt &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1 (\varphi\circ\phi^t)(\phi^j x)dt \\
&= \int_0^1 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} (\varphi\circ\phi^t)(\phi^j x)dt \\
&= \int_0^1 \int (\varphi\circ\phi^t)d\mu dt \\
&= \int \varphi d\mu. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observação 3.1.4. Se $\mu \in \mathfrak{M}(\Phi)$ e $G_\mu(\phi^1) \neq \emptyset$, então $G_\mu(\Phi) \neq \emptyset$.

Estamos agora em posição de provar o seguinte teorema importante.

Teorema 3.1.5. *Para um fluxo contínuo Φ, temos que $Q(\Phi) = Q(\phi^t)$ para todo $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.*

Demonstração. Provemos primeiro que $Q(\Phi) \subseteq Q(\phi^t)$. Para isto, é suficiente demonstrá-lo para o tempo $t = 1$. Seja $x \in Q(\Phi)$ e fixemos uma função contínua $\overline{\varphi} : X \to \mathbb{R}$. Consideremos então a sequência

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\overline{\varphi}\circ f^j)(x) \tag{3.1.1}$$

onde temos denotado $f = \phi^1$. Pela compacidade de X (e portanto de $\overline{\varphi}(X)$), podemos escolher duas sequências crescentes de inteiros positivos $(n_k)_{k\geq 0}$ e $(m_k)_{k\geq 0}$ tais que os limites

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}(\overline{\varphi}\circ f^j)(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{m_k}\sum_{j=0}^{m_k-1}(\overline{\varphi}\circ f^j)(x)$$

existem.

Visto que $C(X)$ é separável, podemos encontrar duas subsequências das sequências anteriores, que denotaremos por $(n_k(x))_{k\geq 1}$ e $(m_k(x))_{k\geq 1}$, tais que os limites

$$C_1(\varphi) := \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k(x)}\sum_{j=0}^{n_k(x)-1}(\varphi\circ f^j)(x) \qquad \text{e} \qquad C_2(\varphi) := \lim_{k\to\infty}\frac{1}{m_k(x)}\sum_{j=0}^{m_k(x)-1}(\varphi\circ f^j)(x)$$

existem para toda função $\varphi \in C(X)$. Assim definidos, os operadores $C_i : C(X) \to X$, $i = 1, 2$ são lineares, contínuos, positivos e satisfazem $C_1(\mathbf{1}) = C_2(\mathbf{1}) = 1$, e pelo Teorema de Representação de Riesz, definem duas medidas invariantes pela aplicação tempo-1, μ_1 e μ_2, tais que $C_1(\varphi) = \int \varphi d\mu_1$ e $C_2(\varphi) = \int \varphi d\mu_2$ para toda função contínua φ.

Agora, o fato de x ser um ponto quase-regular para Φ implica que

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^N \varphi(\phi^t(x))dt &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k(x)}\int_0^{n_k(x)}\varphi(\phi^t(x))dt\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k(x)}\sum_{j=0}^{n_k(x)-1}\int_0^1(\varphi\circ\phi^t)(\phi^j x)dt\\
&= \int_0^1\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k(x)}\sum_{j=0}^{n_k(x)-1}(\varphi\circ\phi^t)(\phi^j x)dt\\
&= \int_0^1\int(\varphi\circ\phi^t)d\mu_1 dt\\
&= \int_0^1 C_1(\varphi\circ\phi^t)dt.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^N\varphi(\phi^t(x))dt = \int_0^1 C_2(\varphi\circ\phi^t)dt$ e portanto

$$\int_0^1 C_1(\varphi\circ\phi^t)dt = \int_0^1 C_2(\varphi\circ\phi^t)dt.$$

A continuidade dos operadores C_1 e C_2 garantem a existência de um $\bar{t}=\bar{t}(\varphi)$ no intervalo $[0,1]$ que satisfaz $C_1(\varphi\circ\phi^{\bar{t}}) = C_2(\varphi\circ\phi^{\bar{t}})$ e podemos escolher uma aplicação $\bar{t}(\varphi)$ que varia continuamente em φ.

Defina a aplicação contínua $L:[0,1]\to[0,1]$ por $L(s)=\bar{t}(\overline{\varphi}\circ\phi^{-s})$ e observe também que é contínua. Portanto, L admite um ponto fixo $\bar{s}$ em $[0,1]$. Logo, para $\varphi=\overline{\varphi}\circ\phi^{-\bar{s}}$ temos que

$$C_1(\overline{\varphi}) = C_1(\overline{\varphi}\circ\phi^{-\bar{s}}\circ\phi^{\bar{t}(\overline{\varphi}\circ\phi^{-\bar{s}})}) = C_2(\overline{\varphi}\circ\phi^{-\bar{s}}\circ\phi^{\bar{t}(\overline{\varphi}\circ\phi^{-\bar{s}})}) = C_2(\overline{\varphi}). \tag{3.1.2}$$

Isto prova que a sequência em (3.1.1) é convergente, e como $\overline{\varphi}$ foi escolhida arbitrariamente, o limite

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}(\varphi\circ f^j)(x)$$

existe para qualquer função contínua $\varphi: X\to\mathbb{R}$ e portanto $x\in Q(\phi^1)$.

Provaremos agora que $Q(\phi^t)\subseteq Q(\Phi)$. Como já temos visto antes, basta provar esta contenção para $t=1$. Sea $x\in Q(\phi^1)$, pelo Teorema de Representação de Riesz, x é ponto genérico para ϕ^1 com respeito a alguma medida ϕ^1-invariante μ_x (ou veja Observação 3.1.1(1)). Consideremos a medida Φ-invariante $\overline{\mu}_x := \int_0^1\phi^t_*\mu_x dt$ (Proposição 2.2.2(b)).

Afirmação. $x\in G_{\overline{\mu}_x}(\Phi)$.

Demonstração da afirmação. Com efeito, para qualquer $\varphi \in C(X)$ temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_0^N \varphi(\phi^t x)dt &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1 (\varphi\circ\phi^t)(\phi^i x)dt \\
&= \int_0^1 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(\varphi\circ\phi^t)(\phi^i x)dt \\
&= \int_0^1 \int \varphi\circ\phi^t d\mu dt \\
&= \int_0^1 \int \varphi d\phi^t_*\mu dt \\
&= \int \varphi d\overline{\mu}_x \qquad \text{Por Proposição 2.1.1.}
\end{aligned}$$

O que mostra que $x \in G_{\overline{\mu}_x}(\Phi) \subseteq Q(\Phi)$. $\square$

A demonstração do teorema é concluída. $\blacksquare$

Observação 3.1.6. Para cada $\mu \in \mathfrak{M}(\phi^1)$ o conjunto $G_\mu(\phi^1)$ está completamente contido em $G_{\overline{\mu}}(\Phi)$, onde $\overline{\mu} := \int_0^1 \phi^t_*\mu dt$.

3.2 Medidas empíricas.

Seja $f : X \to X$ uma função contínua e $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}$ é uma medida de Borel de probabilidade chamada uma **medida empírica** concentrada na f-órbita de x. Em geral, as medidas $\mathcal{E}_n(x)$ não são f-invariante (a menos que x seja um ponto periódico). Denotamos por $V(x)$ (ou $V_f(x)$ se for necessário explicitar a dependência em f) o conjunto de todos os pontos limites da sequência $(\mathcal{E}_n(x))_{n\geq 1}$; isto é,

$$V(x) := \{\mu : \text{existe } (n_k)_{k\geq 1} \text{ tal que } \mathcal{E}_{n_k}(x) \to \mu \text{ quando } k \to \infty\}$$

onde a convergencia é no sentido da topologia fraca* de $\mathfrak{M}(X)$. O conjunto $V(x)$ é não vazio, conexo e compacto, e todo elemento de $V(x)$ está também em $\mathfrak{M}(f)$.

Agora definimos as medidas empíricas para um fluxo. Sejam Φ um fluxo contínuo sobre X, $T > 0$ um número real e $x \in X$. O funcional linear $L_{x,T} : C(X) \to \mathbb{R}$ definido por

$$L_{x,T}(\varphi) = \frac{1}{T}\int_0^T (\varphi\circ\phi^t)(x)dt$$

induz uma medida $\mathcal{E}_T(x)$ que é chamada a **medida empírica** concentrada na Φ-órbita de x. $V_\Phi(x)$ denota o conjunto dos pontos de acumulação da família $(\mathcal{E}_T(x))_{T>0}$. Como no caso discreto, $V_\Phi(x) \subseteq \mathfrak{M}(\Phi)$ é não vazio, conexo e compacto.

Pelo Teorema de Representação de Riesz, $x \in G_\mu(S)$ se, e somente se, $V_S(x) = \{\mu\}$. Esta é uma maneira muito útil de caracterizar os pontos genéricos e será usada para provar o Teorema B na Seção 4.4.

4 Entropia

Começamos este capítulo definindo os conceitos de entropia métrica e topológica para um sistema dinâmico. Continuando, estudamos a entropia topológica para conjuntos não compactos, tanto para sistemas dinâmicos discretos como contínuos. Na parte final provamos o resultado principal do capítulo; a saber, a entropia métrica de um fluxo com respeito a uma medida invariante é uma cota superior para a entropia do conjunto dos pontos genéricos do fluxo com respeito a essa medida. Também mostramos que a igualdade é válida se a medida é ergódica.

4.1 Entropia métrica

A entropia métrica para uma transformação que preserva uma medida é uma quantidade no intervalo $[0, \infty]$ invariante por isomorfismos, introduzida por A. Kolmogorov em 1958 [41] baseado na teoria da informação. A entropia pode ser vista como uma média da informação. Desde sua introdução, o conceito de entropia métrica tem sido amplamente estudado e é uma ferramenta fundamental na Teoria Ergódica. A definição dada por Kolmogorov foi levemente melhorada por Ya. Sinai [66] e é a definição adotada na atualidade. Nesta seção damos a definição de entropia métrica para um sistema dinâmico (homeomorfismos e fluxos).

Lembramos que uma **partição** do espaço mensurável $(X, \mathcal{B}(X))$ é uma coleção de conjuntos de Borel dois a dois disjuntos e cuja união é o espaço inteiro, módulo um conjunto de medida nula. Seja $f : X \to X$ uma função contínua (ou mensurável) e fixemos uma medida invariante μ. Estamos interessados em partições finitas $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_\ell\}$. Define-se a **entropia da partição** $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_\ell\}$ com respeito a μ como

$$H(\mathcal{P}) := -\sum_{i=1}^{\ell} \mu(P_i) \log \mu(P_i).$$

Escreveremos $H_\mu(\mathcal{P})$ se for necessário especificar a medida μ. Convencionamos, também, que $0 \log 0 = 0$, assim podemos sempre supor que $\mu(P_i) > 0$, $i = 1, 2, ..., \ell$.

Considere agora a coleção

$$\mathcal{P}^n := \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathcal{P} = \{P_{r_0} \cap f^{-1}P_{r_1} \cap ... \cap f^{-(n-1)}P_{r_{n-1}} : P_{r_j} \in \mathcal{P}\}.$$

Claramente $\mathcal{P}^n$ é também uma partição finita de X. A sequência $\{H(\mathcal{P}^n)\}_{n\geq 0}$ é subaditiva e portanto o seguinte limite existe:

$$h(f, \mathcal{P}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P}^n).$$

O número $h(f,\mathcal{P})$ (que também poderemos denotar por $h_\mu(f,\mathcal{P})$ para enfatizar a dependência de μ) é chamado a **entropia** de f com respeito à partição $\mathcal{P}$.

Finalmente,

Definição. A **entropia métrica** de f com respeito a μ é definida como

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathcal{P}} h(f,\mathcal{P}),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas $\mathcal{P}$ de X.

Definição. A **entropia métrica** para um fluxo é definida como a entropia métrica de sua aplicação tempo-1: se $\mu \in \mathfrak{M}(\Phi)$, então $h_\mu(\Phi) := h_\mu(\phi^1)$.

A definição de entropia métrica para um fluxo é bastante simples de manipular, pois é apenas a entropia métrica de seu tempo-1, porém não diz muito a respeito da entropia de seus elementos. A igualdade abaixo, conhecida como **fórmula de Abramov**, estabelece uma estreita relação da entropia métrica de qualquer elemento de um fluxo com a entropia do fluxo [1]: Se $\mu \in \mathfrak{M}(\Phi)$, então

$$|t|h_\mu(\Phi) = h_\mu(\phi^t) \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.1.1}$$

Então, quando conhecemos a entropia métrica de um fluxo com respeito a uma medida invariante, podemos recuperar essa informação para cada um de seus elementos, porém nem toda medida invariante pela aplicação tempo t é invariante pelo fluxo. Uma pergunta natural é então, conhecendo a entropia métrica de um fluxo, como obter alguma estimativa da entropia métrica das aplicações tempo-t para medidas que não são invariantes pelo fluxo? Resulta que a entropia métrica da aplicação ϕ^t com respeito a qualquer medida invariante $\mu \in \mathfrak{M}(\phi^t)$ e a entropia métrica do fluxo com respeito à medida $\overline{\mu}$ construída na Proposição 2.2.2(b) mantêm uma relação importante como provaremos em breve (Lema 4.1.2).

Dois sistemas $(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1,f_1)$ e $(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2,f_2)$ são isomorfos se existem $M_i \subseteq X_i$, com $\mu_i(M_i) = 1$ e $f_i(M_i) \subseteq M_i$, para $i = 1,2$, e existe uma transformação invertível mensurável $h : M_1 \to M_2$ tal que $\mu_2 = h_*\mu_1$ e satisfazendo

$$h \circ f_1 = f_2 \circ h.$$

Para sistemas isomorfos $(X_1,\mathcal{B}_1,\mu_1,f_1)$ e $(X_2,\mathcal{B}_2,\mu_2,f_2)$ se cumpre que $h_{\mu_1}(f_1) = h_{\mu_2}(f_2)$ (veja [73, Theorem 4.11]). Considerando $h = \phi^t$, o seguinte lema é imediato.

Lema 4.1.1. *Para cada $\mu \in \mathfrak{M}(\phi^1)$ e $t \in [0,1]$, os sistemas $(X,\mathcal{B}(X),\mu,\phi^1)$ e $(X,\mathcal{B}(X),\phi^t_*\mu,\phi^1)$ são isomorfos. Em particular, $h_\mu(\phi^1) = h_{\phi^t_*\mu}(\phi^1)$.*

Para simplificar nossa notação, escreveremos μ^t ao invés de $\phi^t_*\mu$. Também definimos

$$\overline{\mu} := \int_0^1 \phi^t_*\mu dt = \int_0^1 \mu^t dt.$$

Lema 4.1.2. $h_{\overline{\mu}}(\phi^1) = h_\mu(\phi^1)$.

Demonstração. Se $\mu \in \mathfrak{M}_{erg}(\phi^1)$, note que $\phi^t_*\mu \in \mathfrak{M}_{erg}(\phi^1)$, logo $\{\phi^t_*\mu\}_t$ é uma decomposição ergódica da medida $\overline{\mu} = \int_0^1 \phi^t_*\mu\, dt$. Observe que $h_{\phi^t_*\mu}(\phi^1) = h_\mu(\phi^1)$ (Lema 4.1.1). Pelo Teorema de Jacobs [73, Theorem 8.4], segue-se que

$$h_{\overline{\mu}}(\phi^1) = \int_0^1 h_{\phi^t_*\mu}(\phi^1)\, dt = h_\mu(\phi^1).$$

Para considerar o caso geral, seja $\mu \in \mathfrak{M}(\phi^1)$. Seja $\mu = \int \mu_P\, d\hat{\mu}(P)$ sua decomposição ergódica (relativa a ϕ^1). Observe que

$$\phi^t_*\mu = \phi^t_* \int \mu_P\, d\hat{\mu}(P) = \int \phi^t_*\mu_P\, d\hat{\mu}(P).$$

Como μ_P é ϕ^1-ergódica para $\hat{\mu}$-quase todo P, $\phi^t_*\mu_P$ é também ϕ^1-ergódica para qualquer t e como

$$\bar{\mu} = \int_0^1 \phi^t_*\mu\, dt = \int_0^1 \phi^t_* \int \mu_P\, d\hat{\mu}(P)\, dt = \int_0^1 \int \phi^t_*\mu_P\, d\hat{\mu}(P)\, dt$$

segue que $\{\phi^t_*\mu_P\}_{t,P}$ é uma decomposição ergódica de $\bar{\mu}$. Aplicando novamente o Teorema de Jacobs, segue

$$h_{\overline{\mu}}(\phi^1) = \int_0^1 \int h_{\phi^t_*\mu_P}(\phi^1)\, d\hat{\mu}(P)\, dt = \int_0^1 \int h_{\mu_P}(\phi^1)\, d\hat{\mu}(P)\, dt = \int_0^1 h_\mu(\phi^1)\, dt = h_\mu(\phi^1).$$

Segue a afirmação do lema. ■

Observação 4.1.3. (1) O lema acima foi motivado pelo resultado de Jacobs [73, Theorem 8.4]: Se $\{\mu^t\}$ são as compoentes ergódicas de μ, então vale que $h_\mu(f) = \int h_{\mu^t}(f) dt$.

(2) A construção da medida $\overline{\mu}$ foi motivada pela medida $\tilde{\mu}$ que aparece em [72, p. 968] e é uma técnica padrão para construir medidas invariantes para um fluxo a partir de uma medida invariante pelo tempo-1. (veja por exemplo [67])

(3) O lema 4.1.2, junto com a proposição 3.1.3, afirmam que se Φ é um fluxo unicamente ergódico, com única medida invariante μ, então μ é uma medida de máxima entropia para cada ϕ^t. Ainda mais, ϕ^t é únicamente ergódico para todo $t \in \mathbb{R}$, a menos de um conjunto enumerável de valores de t. Com efeito, pelo [61, Theorem 1] ϕ^t é ergódico, exceto para uma quantidade enumerável de tempos t. Fixemos t_0 tal que ϕ^{t_0} é ergódico com respeito a μ. Seja $\nu \in \mathfrak{M}(\phi^{t_0})$ uma medida ergódica. Então, para cada $s \in \mathbb{R}$, $\phi^s_*\nu$ também é ergódica para ϕ^{t_0} e $\overline{\nu} := \int_0^1 \phi^s_*\nu ds$ satisfaz $\overline{\nu} = \mu$. Suponhamos que $\nu \neq \mu$, então $\nu^t = \phi^t_*\nu \neq \mu$ para todo t, pois caso contrário existiria t tal que $\nu^t = \mu$, logo $\mu = \phi^s_*\mu = \phi^s_*\nu^t = \nu^t(\phi^{-s}) = \nu(\phi^{-s} \circ \phi^{-t})$ para todo s e em particular, considerando $s = -t$ teríamos que $\nu = \mu$, contradizendo nossa suposição. Agora, visto que ν é ergódica,

o conjunto $G_\nu(\phi^{t_0})$ tem ν-medida total. Também $G_{\nu^t}(\phi^{t_0})$ tem ν^t-medida total para todo $t \in [0,1]$. Considerando $G := \bigcup_{t\in[0,1]} G_{\nu^t}(\phi^{t_0})$, temos que

$$0 = \mu(G) = \overline{\nu}(G) = \int_0^1 \nu^t(G)dt = 1.$$

Absurdo. Portanto, $\nu = \mu$ e ϕ^{t_0} é unicamente ergódico.

4.2 Entropia topológica

4.2.1 Entropia topológica. Caso discreto.

A entropia topológica de um sistema dinâmico é um valor real compreendido entre 0 e ∞ que quantifica a complexidade dinâmica do sistema. Existem várias maneiras de definir este conceito; por exemplo, mediante coberturas abertas como feito na definição original por R. Adler, A. Konheim e M. McAndrew em [2], ou mediante conjuntos (n, ε)-separados e (n, ε)-gerados como feito nos trabalhos de R. Bowen [11] e E. Dinaburg [25]. Em [11] foi provado que estas definições coincidem quando o espaco X é métrico e compacto. Nesta seção damos a definição de entropia topológica por meio de conjuntos (n, ε)-separados e (n, ε)-geradores. Para isso, precisamos introduzir uma métrica entre segmentos de órbitas. Seja $n > 0$. Para $x, y \in X$ define-se

$$d_n(x, y) := d_{f,n}(x, y) = \max_{0\leq j\leq n-1} d(f^j(x), f^j(y)).$$

É imediato que $d_n(x, y) \leq d_{n+1}(x, y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$. Outro fato importante é que d e d_n são equivalentes, isto é, geram a mesma topologia, logo (X, d_n) é também um espaço compacto. As bolas definidas por esta métrica serão os conjuntos $B_n(x, \varepsilon) := \{y \in X : d_n(x, y) < \varepsilon\}$. Chamaremos a d_n e B_n a **métrica de Bowen** e a **bola de Bowen** (ou **bola dinâmica**), respectivamente.

Definição. Sejam $n \geq 1$ um inteiro e $\varepsilon > 0$. Um conjunto $K \subseteq X$ é dito (n, ε)-**separado** para f se para todo $x, y \in K$, $x \neq y$ se cumpre que $d_n(x, y) > \varepsilon$.

Denotamos por $S(n, \varepsilon)$ a máxima cardinalidade possível de um conjunto (n, ε)-separado para f. Pela compacidade de X, $S(n, \varepsilon)$ é sempre finito. Definimos então

$$h(f, \varepsilon) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S(n, \varepsilon).$$

E finalmente fazemos

$$h_s(f) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} h(f, \varepsilon).$$

Seguindo o mesmo esquema anterior, podemos definir outra quantidade $h_g(f)$ usando conjuntos denominados (n, ε)-geradores.

Definição. Um conjunto $S \subseteq X$ é dito um conjunto (n, ε)-**gerador** para f se, para cada $x \in X$ existe um $y \in S$ tal que $d_n(x, y) \leq \varepsilon$.

Denotemos por $G(n, \varepsilon)$ a menor cardinalidade possível de um conjunto (n, ε)-gerador para f. Como no caso anterior, a quantidade $G(n, \varepsilon)$ é sempre finita. Definimos

$$h(f, \varepsilon) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log G(n, \varepsilon).$$

E assim,

$$h_g(f) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} h(f, \varepsilon).$$

O teorema a seguir, devido a Bowen (veja [11] para mais detalhes), mostra que estes valores sempre coincidem quando X é compacto. Mais precisamente,

Teorema. *Sejam X um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma função contínua. Então*

$$h_s(f) = h_g(f).$$

Esse valor comum é chamado **entropia topológica** de f e será denotado simplesmente por $h(f)$. Outra notação frequentemente usada para a entropia topológica de f é $h_{top}(f)$. Observe que $h(f) \in [0, \infty]$.

A relação entre entropia métrica e entropia topológica é estabelecida pelo seguinte princípio variacional.

Teorema (**Princípio Variacional**)**.** *Se $f : X \to X$ é uma função contínua definida sobre um espaço métrico compacto, então*

$$h(f) = \sup\{h_\mu(f) : \mu \in \mathfrak{M}(f)\}.$$

Uma medida que atinge o supremo no Princípio Variacional é chamada de **medida de máxima entropia**. Nem sempre existem medidas de máxima entropia; ou seja, o supremo no Princípio Variacional nem sempre é atingido (veja, por exemplo, [18]), mas para difeomorfismos de classe C^∞ sobre variedades fechadas, sempre é possível achar medidas de máxima entropia [49] (veja também [19]).

4.2.2 Entropia topológica para fluxos

Nesta seção estendemos a definição de entropia topológica para fluxos contínuos. Esta definição é feita de maneira similar como no caso discreto e um dos resultados principais é que a entropia topológica do fluxo é igual a entropia topológica de sua aplicação tempo-1. A **métrica de Bowen**, para $T > 0$, é definida por

$$d_T(x, y) := \sup_{0\leq t\leq T} \{d(\phi^t x, \phi^t y)\}$$

e portanto a **bola de Bowen** na métrica d_T de tamanho $\varepsilon > 0$ é

$$B_T(x,\varepsilon) := \{y \in X : d_T(x,y) < \varepsilon\}.$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $T > 0$ dados. Um subconjunto $E \subseteq X$ é dito (T,ε)-**separado** para o fluxo Φ se para cada par de pontos $x, y \in E$ existe $t \in [0,T]$ (que depende de x e y) tal que $d(\phi^t x, \phi^t y) > \varepsilon$; equivalentemente, $d_T(x,y) > \varepsilon$. Em outros termos, $E \subseteq X$ é (T,ε)-separado se $\{B_T(x,\varepsilon)\} \cap E = \{x\}$ para todo $x \in E$. Denotamos por $S(T,\varepsilon)$ a máxima cardinalidade possível de um conjunto (T,ε)-separado para X, que, como sabemos, é sempre finito. Também é sabido que

$$h(\Phi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \log S(T,\varepsilon)$$

está bem definido e pertence ao intervalo $[0,\infty]$. A quantidade $h(\Phi)$ é conhecida como a **entropia topológica** do fluxo Φ. Em conexão com a entropia topológica do homeomorfismo $\phi^t : X \to X$, R. Bowen mostrou em [13, (5.11), p.27] o seguinte resultado.

Teorema. *Seja φ um fluxo contínuo sobre um espaço métrico compacto (X,d). Para todo $t \in \mathbb{R}$, se verifica que*

$$|t| h(\Phi) = h(\phi^t).$$

Em particular, $h(\Phi) = h(\phi^1)$.

Observação 4.2.1. (a) A definição de entropia topológica para fluxos usando conjuntos (n,ε)-gerados é similar como feito no caso discreto e também coincide com a entropia de sua aplicação tempo 1.

(b) O Lema 4.1.2 permite obter o Princípio Variacional para fluxos a partir do Princípio Variacional para funções contínuas enunciado na seção anterior:

$$h(\Phi) = \sup\{h_\mu(\Phi) : \mu \in \mathfrak{M}(\Phi)\}.$$

Recomendamos ao leitor interessado consultar [22, Section 10.6] e [73, Chapters 4-8] para uma exposição mais detalhada sobre entropia métrica e entropia topológica.

4.3 Entropia para conjuntos não compactos

4.3.1 Entropia para conjuntos não compactos. Caso discreto.

Furstenberg [32] prova que se $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é definida por $f(z) = z^n$ e $Y \subseteq \mathbb{S}^1$ é compacto e (positivamente) invariante, então a dimensão de Hausdorff de Y, $\dim_H(Y)$, satisfaz a seguinte relação

$$\dim_H(Y) = \frac{h(f|_Y)}{\log n}$$

e se $\mu \in \mathfrak{M}_{erg}(f)$, Colebrook [21] mostra que $\dim_H(G_\mu(f)) = \frac{h_\mu(f)}{\log(n)}$.

Motivado por esses resultados, R. Bowen [14] introduz, para uma função contínua $f : X \to X$ definida sobre o espaço métrico compacto (X, d), uma noção de entropia que pode ser definida para qualquer subconjunto de X (não necessariamente compacto nem invariante). Nesta seção damos a definição de entropia de Bowen para conjuntos não compactos e enunciamos vários resultados obtidos em [14] referentes ao conjunto $G_\mu(f)$. Passamos a definir a entropia topológica de Bowen para conjuntos não compactos no caso discreto.

Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta finita de X. Seja $f : X \to X$ uma função contínua. Para $E \subseteq X$, denotamos $E \prec \mathcal{U}$ se E está contido em algum membro de $\mathcal{U}$. Analogamente, para qualquer coleção de subconjuntos de X, $\{E_i\}_{i\in I}$, $\{E_i\}_{i\in I} \prec \mathcal{U}$ significa que cada E_i está contido em algum membro de $\mathcal{U}$.

Para $E \subseteq X$, as seguintes quantidades são definidas:

- $n(E) = n(f, \mathcal{U}, E)$ é o maior inteiro não negativo tal que $f^j(E) \prec \mathcal{U}$ para todo $0 \le j < n(E)$. Será $n(E) = 0$ se $E \not\prec \mathcal{U}$ e $n(E) = \infty$ se $f^j(E) \prec \mathcal{U}$ para todo $j \ge 0$. Observe que se $n(E)$ é finito, então $f^{n(E)}E \not\prec \mathcal{U}$.
- $d(E) = d(f, \mathcal{U}, E) := \begin{cases} \exp(-n(E)) & \text{se } n(E) \text{ é finito} \\ 0 & \text{se } n(E) = \infty \end{cases}$
- $s_\alpha(\mathcal{E}) := \sum_{i\ge1} d(E)^\alpha$ se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i\ge1}$ é uma coleção enumerável de subconjuntos de X.

Agora defina a medida exterior $\gamma_\alpha = \gamma_{\alpha,\mathcal{U}}$ por

$$\gamma_\alpha(Y) := \lim_{\varepsilon\to0} \inf\{s_\alpha(\mathcal{E}) : \mathcal{E} = \{E_i\}_{i\ge1} \text{ é uma cobertura de } Y \text{ com } d(E_i) < \varepsilon\}.$$

Não é difícil ver que $\gamma_\alpha(Y)$ existe (e pode ser ∞) e que $\gamma_\alpha(Y) \le \gamma_{\overline{\alpha}}(Y)$ se $\alpha > \overline{\alpha}$. Alem disso, $\gamma_\alpha(Y) \notin \{0, \infty\}$ para, no máximo, um único α.

Continuando, defina

$$h_{\mathcal{U}}(f, Y) := \inf\{\alpha : \gamma_\alpha(Y) = 0\}.$$

Finalmente, a **entropia topológica** de f **sobre** Y é definida por

$$h(f, Y) := \sup\{h_{\mathcal{U}}(f, Y) : \mathcal{U} \text{ é uma cobertura aberta finita de } X\}.$$

A seguir (Proposição 4.3.1 até Teorema 4.3.5), enunciamos os principais resultados obtidos por R. Bowen em [14].

Proposição 4.3.1. *A entropia topológica de $f : X \to X$ coincide com a entropia topológica de f sobre X; isto é,*

$$h(f) = h(f, X).$$

As seguintes propriedades serão muito úteis:

Proposição 4.3.2. (a) $h(f, \cup_{i\geq 1} Y_i) = \sup_{i\geq 1} h(f, Y_i)$. *Em particular,*

(b) $h(f, Y) \leq h(f, Z)$ *se* $Y \subseteq Z$.

(c) $h(f^m, Y) = mh(f, Y)$, *para* $m \geq 1$.

(d) $h(f, \emptyset) = 0$.

Teorema 4.3.3. *Seja* $f : X \to X$ *uma função contínua sobre o espaço métrico compacto* X. *Se* $\mu \in \mathfrak{M}(f)$ *e* $Y \subseteq X$ *tem* μ*-medida total, então*

$$h_\mu(f) \leq h(f, Y).$$

Os dois teoremas a seguir, estimam a entropia topológica de uma função contínua sobre o conjunto dos pontos genéricos.

Teorema 4.3.4. *Consideremos o conjunto*

$$QR(t) := \{x \in X : \text{ existe } \mu \in V_f(x) \text{ com } h_\mu(f) \leq t\}.$$

Então, $h(f, QR(t)) \leq t$.

Finalmente,

Teorema 4.3.5. *Seja* $f : X \to X$ *uma função contínua sobre o espaço métrico compacto* X. *Se* $\mu \in \mathfrak{M}(f)$, *então*

$$h(f, G_\mu(f)) \leq h_\mu(f).$$

e a igualdade sempre é verdade quando μ *é ergódica.*

4.3.2 Entropia para conjuntos não compactos. Caso contínuo.

De maneira similar como foi definida a entropia topológica para conjuntos não compactos para funções contínuas, daremos uma definição de entropia topológica para conjuntos não compactos para fluxos contínuos. O teorema principal desta seção relaciona, numa equação tipo "fórmula de Abramov" a entropia do fluxo sobre conjuntos não compactos com a entropia de Bowen da aplicação tempo-t sobre esse conjunto.

Seja Φ um fluxo contínuo sobre o espaço métrico compacto X. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta finita de X e usando a mesma notação da Subseção 4.3.1, definamos

- $N(E) = N(\Phi, \mathcal{U}, E)$ é o maior número real não negativo tal que $\phi^t(E) \prec \mathcal{U}$ para todo $0 \leq t < N(E)$. Será $N(E) = 0$ se $E \not\prec \mathcal{U}$ e $N(E) = \infty$ se $\phi^t(E) \prec \mathcal{U}$ para todo $t \geq 0$.
- $D(E) = D(\Phi, \mathcal{U}, E) := \begin{cases} \exp(-N(E)) & \text{se } N(E) \text{ é finito} \\ 0 & \text{se } N(E) = \infty \end{cases}$
- $S_\alpha(\mathcal{E}) := \sum_{i\geq 1} D(E_i)^\alpha$ se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i\geq 1}$ é uma coleção enumerável de subconjuntos de X.

Agora defina a medida exterior $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha,\mathcal{U}}$ por

$$\Gamma_\alpha(Y) := \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{S_\alpha(\mathcal{E}) : \mathcal{E} = \{E_i\}_{i\geq 1} \text{ é uma cobertura de } Y \text{ com } D(E_i) < \varepsilon\}.$$

Não é difícil ver que $\Gamma_\alpha(Y)$ existe (e pode ser ∞) e que $\Gamma_\alpha(Y) \leq \Gamma_{\overline{\alpha}}(Y)$ se $\alpha > \overline{\alpha}$. Alem disso, $\Gamma_\alpha(Y) \notin \{0, \infty\}$ para, no máximo, um único α.

Continuando, defina

$$h_{\mathcal{U}}(\Phi, Y) := \inf\{\alpha : \Gamma_\alpha(Y) = 0\}.$$

Finalmente,

Definição. Definimos a **entropia topológica** do fluxo Φ **sobre** Y como

$$h(\Phi, Y) := \sup\{h_{\mathcal{U}}(\Phi, Y) : \mathcal{U} \text{ é uma cobertura aberta finita de } X\}.$$

Teorema A. *Se Φ é um fluxo contínuo sobre o espaço métrico compacto X, então*

$$t \cdot h(\Phi, Y) = h(\phi^t, Y) \qquad \textit{para todo } t \geq 0 \textit{ e para todo } Y \subseteq X.$$

Em particular, a entropia do fluxo coincide com a entropia da aplicação tempo-1 sobre qualquer subconjunto de X.

Demonstração. Fixemos $\tau > 0$.

Sejam $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_\ell\}$ uma cobertura aberta finita de X e $\varepsilon, \alpha > 0$. Para Y subconjunto de X, vamos provar que $\tau h(\Phi, Y) \geq h(\phi^\tau, Y)$ e em seguida que $\tau h(\Phi, Y) \leq h(\phi^\tau, Y)$.

Primeiro, seja $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i\geq 1}$ uma cobertura (enumerável, mas não necessariamente aberta) de Y com $D(E_i) < \varepsilon$ para todo $i \geq 1$. Para cada $i \geq 1$, é claro que se $N(E_i) = N(\Phi, E_i) = \infty$, então $n(E_i) = n(\phi^\tau, E_i) = \infty$, e se $N(E_i) < \infty$, então $n(E_i) < \infty$ e se cumpre que

$$N(E_i) \leq \tau \cdot n(E_i),$$

pelas definições de $N(E_i)$ e $n(E_i)$. Portanto,

$$S_\alpha(\mathcal{E}) \geq s_{\tau\alpha}(\mathcal{E})$$

e assim

$$\Gamma_\alpha(Y) \geq \gamma_{\tau\alpha}(Y).$$

Observe que $\gamma_{\tau\alpha}(Y) = 0$ para todo α tal que $\Gamma_\alpha(Y) = 0$. Portanto, tomando ínfimo sobre α, obtemos

$$h_{\mathcal{U}}(\Phi, Y) \geq \frac{1}{\tau} h_{\mathcal{U}}(\phi^\tau, Y)$$

e tomando supremo sobre todas as coberturas abertas finitas $\mathcal{U}$ de X,

$$h(\Phi, Y) \geq \frac{1}{\tau} h(\phi^\tau, Y).$$

Agora, sejam $\tilde{\delta} := \tilde{\delta}(\mathcal{U})$ o número de Lebesgue de $\mathcal{U}$ e $\delta := \delta(\tau, \varepsilon)$ tal que $d(\phi^t(x), \phi^t(y)) < \tilde{\delta}/2$ se $d(x, y) < \delta$ e $0 \leq t \leq \tau$. Denotemos por $\mathcal{V}$ a cobertura aberta de X formado por bolas de raio $\delta/2$ centradas nos pontos de X; isto é, $\mathcal{V} = \{B(x, \delta/2) : x \in X\}$. Consideremos $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{V}$ uma subcobertura de X e seja $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \geq 1}$ uma cobertura de Y com $d(C_i) = d(\mathcal{U}', \phi^\tau, C_i) < \varepsilon$ para todo $i \geq 1$. Observe que, em particular, cada C_i está contido em alguma bola de raio $\delta/2$ se ε for suficientemente pequeno (menor do que 1). Então, se $y, z \in C_i$, $d(\phi^t(z), \phi^t(y)) < \tilde{\delta}/2$ para todo $0 \leq t \leq \tau$ e portanto

$$\phi^t(C_i) \subseteq B(x', \tilde{\delta}/2) \subseteq U_m$$

para algum $x' \in X$, algum $U_m \in \mathcal{U}$, e para todo $0 \leq t \leq \tau$. Isto implica que

$$N(C_i) \geq \tau \cdot n(C_i) \qquad \text{para todo } i \geq 1,$$

logo

$$D(\mathcal{U}, \mathcal{C}) \leq d(\mathcal{U}', \mathcal{C})$$

e portanto

$$\Gamma_\alpha(Y) \leq \gamma_{\tau\alpha}(Y).$$

Assim

$$h_{\mathcal{U}}(\Phi, Y) \leq \frac{1}{\tau} h_{\mathcal{U}'}(\phi^\tau, Y).$$

Tomando supremo sobre todas as coberturas abertas finitas $\mathcal{U}$ de X obtemos

$$h(\Phi, Y) \leq \frac{1}{\tau} h(\phi^\tau, Y).$$

Isto termina a demonstração. ■

O teorema acima mostra que nossa definição de entropia para um fluxo sobre $Y \subseteq X$, usando a abordagem de Bowen, coincide com aquela considerada por J. Shen e Y. Zhao em [64], onde usam as ideias de Pesin e Pitskel' [55]. Embora ambas abordagens sejam baseadas nas características de dimensão de Carathéodory (veja [54, Chapter 1] para mais detalhes), suas construções diferem. Um dos pontos mais divergentes é que nós usamos $D(\Phi, \mathcal{U}, E)$ como “diâmetro”, que reflete a ação do fluxo sobre o conjunto E com respeito còbertura $\mathcal{U}$. Shen e Zhao usam o “diâmetro” $\tilde{D}(T, \varepsilon) := \exp(-T)$, onde (T, ε) vêm definidos por certos conjuntos (T, ε)-separados.

A seguintes propriedades seguem-se imediatamente do teorema A e das propriedades citadas na seção anterior.

Proposição 4.3.6. *Seja Φ um fluxo contínuo, então*

(i) $h(\Phi, X) = h(\Phi) = h(\phi^1)$.

(ii) *Se $Y \subseteq Z$, então $h(\Phi, Y) \leq h(\Phi, Z)$.*

(iii) *Se $Y = \cup_{i \geq 1} Y_i$, então $h(\Phi, Y) = \sup_{i \geq 1}\{h(\Phi, Y_i)\}$, onde $Y_i \subseteq X$.*

(iv) $h(\Phi, \emptyset) = 0$.

4.4 Sistemas saturados

Lembremos que $G_\mu(S)$ denota os pontos genéricos de S com respeito à medida invariante μ. A versão discreta do Teorema B abaixo, foi estabelecido por R. Bowen para funções contínuas em [14] (Teorema 4.3.5). Nós estendemos este resultado para fluxos contínuos (veja [51] para uma exposição concisa).

Teorema B. *Para qualquer medida invariante $\mu \in \mathfrak{M}(\Phi)$ do fluxo Φ, tem-se que*

$$h(\Phi, G_\mu(\Phi)) \leq h_\mu(\Phi).$$

Demonstração. Consideremos o conjunto

$$QR(h_\mu(\Phi)) := \{x \in X : \text{existe } \nu \in V_{\phi^1}(x) \text{ tal que } h_\nu(\phi^1) \leq h_\mu(\Phi)\}.$$

Usando o Teorema 4.3.4 e Teorema A, temos que

$$h(\Phi, QR(h_\mu(\Phi))) = h(\phi^1, QR(h_\mu(\phi^1))) \leq h_\mu(\phi^1) = h_\mu(\Phi).$$

Então, pela Proposição 4.3.6(b) é suficiente mostrar que $G_\mu(\Phi) \subseteq QR(h_\mu(\Phi))$. Pelo Teorema 3.1.5 (veja também Observação 3.1.1(1)), cada ponto $x \in G_\mu(\Phi)$ induz uma medida de Borel de probabilidade μ_x invariante pelo tempo 1 e tal que $x \in G_{\mu_x}(\phi^1)$. Denotemos por $\mu_x^t = \phi_*^t \mu_x$ e definamos $\overline{\mu}_x := \int_0^1 \mu_x^t dt$.

Afirmação. $\mu = \overline{\mu}_x$

Demonstração da Afirmação. Para cada $\varphi \in C(X)$ temos que

$$\begin{aligned}
\int \varphi d\mu &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^N (\varphi \circ \phi^t)(x) dt \\
&= \int_0^1 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (\varphi \circ \phi^t)(\phi^j x) dt \\
&= \int_0^1 \int (\varphi \circ \phi^t) d\mu_x dt \\
&= \int_0^1 \int \varphi d\mu_x^t dt \qquad \text{Por Proposição 2.1.1.} \\
&= \int \varphi d\overline{\mu}_x.
\end{aligned}$$

O que prova a afirmação.

Em vista do Lema 4.1.2, $h_{\mu_x}(\phi^1) = h_{\overline{\mu}_x}(\phi^1) = h_\mu(\phi^1) = h_\mu(\Phi)$ e portanto $x \in QR(h_\mu(\Phi))$ por definição de $QR(h_\mu(\Phi))$. Isto finaliza a prova do teorema. ∎

O corolário a seguir estende para fluxos o resultado principal do artigo de Bowen [14, Theorem 3].

Corolário 4.4.1. *Seja Φ um fluxo contínuo sobre X. Se $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathrm{erg}}(\Phi)$, então*

$$h_\mu(\Phi) = h(\Phi, G_\mu(\Phi)).$$

Demonstração. Pelo teorema acima, resta provar que $h_\mu(\Phi) \leq h(\Phi, G_\mu(\Phi))$. Escolhamos $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que ϕ^τ é ergódico. Então,

$$\begin{aligned} h(\Phi, G_\mu(\Phi)) &\geq h(\Phi, G_\mu(\phi^\tau)) && \text{Teorema 3.1.3 e 4.3.6.} \\ &= \frac{1}{|\tau|} h(\phi^\tau, G_\mu(\phi^\tau)) && \text{Teorema A.} \\ &= \frac{1}{|\tau|} h_\mu(\phi^\tau) && \text{Teorema 4.3.5.} \\ &= h_\mu(\Phi) && \text{Fórmula de Abramov.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observação 4.4.2. (1) Se μ é uma medida invariante pelo fluxo Φ, $h_\mu(\Phi) \leq h(\Phi, Y)$ para todo conjunto $Y \subseteq X$ de μ-medida total. Isto segue-se do Teorema A e do Teorema 4.3.3.

(2) Visto que $\mu(G_\mu(\Phi)) = 1$ se μ é ergódica, o corolário acima pode ser provado usando a parte (1) e Teorema B.

(3) Se $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathrm{erg}}(\Phi)$, o conjunto $G_\mu(\Phi)$ satisfaz

$$\frac{1}{|t|} h_\mu(\phi^t) = h_\mu(\phi^1) = h(\phi^1, G_\mu(\Phi))$$

mesmo que μ não seja ergódica para ϕ^t; quer dizer, pode-se exibir explicitamente um conjunto que depende de μ onde a entropia topológica de ϕ^t sobre esse conjunto é igual a entropia métrica com respeito a μ.

Definição. Um sistema dinâmico (X, S) é **saturado** se

$$h(S, G_\mu(S)) = h_\mu(S) \qquad \text{para toda medida } \mu \in \mathfrak{M}(S). \tag{4.4.1}$$

É fácil notar que todo sistema dinâmico com entropia nula ou unicamente ergódico é saturado. No próximo capítulo (Teoremas 5.2.2 e 5.2.5(b)), veremos exemplos não triviais de sistemas saturados. Por outro lado, não é difícil construir exemplos não triviais de sistemas que não são saturados.

EXEMPLO 3. Sejam (X_1, f_1, μ_1) e (X_2, f_2, μ_2) dois sistemas unicamente ergódicos com entropias $h_1, h_2 > 0$, respectivamente (veja por exemplo [38]). Considere o sistema dinâmico (X, f) definido por $X = X_1 \sqcup X_2$ e $f(x) = f_i(x)$ se $x \in X_i$. Para $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$, $G_\mu(f) = \emptyset$ porém $h_\mu(f) = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) > 0 = h(f, G_\mu(f))$.

Exemplos análogos podem ser construídos em tempo contínuo. Outra forma de construir exemplos de sistemas que não são saturados é a seguinte: Lembremos que $\omega(x)$, o conjunto **omega limite** é o conjunto de todos os pontos de acumulação da órbita positiva de x. Resumimos abaixo as principais propriedades de $\omega(x)$ (veja [52, Proposition 1.4]).

Proposição 4.4.3. *Seja M uma variedade riemanniana fechada. Para qualquer sistema (M, Φ) e $x \in M$ tem-se:*

(a) $\omega(x) \neq \emptyset$.

(b) $\omega(x)$ *é fechado.*

(c) $\omega(x)$ *é invariante pelo fluxo, ou seja, $\omega(x)$ é união de órbitas.*

(d) $\omega(x)$ *é conexo.*

Lema 4.4.4. *Suponha que para o sistema (M, Φ) se tem $\Omega(\Phi) = \Omega_1 \cup \Omega_2$ onde os $\Omega_i's$ são fechados e invariantes por Φ e disjuntos. Então para cada $x \in M$ existe um único $i = i(x) \in \{1, 2\}$ tal que $\omega(x) \subseteq \Omega_i$.*

Demonstração. Imediato, pois $\omega(x)$ é conexo. ■

Proposição 4.4.5. *Para (M, Φ), suponha que $\Omega(\Phi) = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde os $\Omega_i's$ são fechado invariante pelo fluxo e disjuntos. Sejam $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}(\Phi)$ com supp$(\mu_i) \subseteq \Omega_i$, $i = 1, 2$, então qualquer medida $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$, $0 < \lambda < 1$, não admite pontos genéricos.*

Demonstração. Por contradição, suponhamos que $x \in G_\mu(\Phi)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\omega(x) \subseteq \Omega_1$ (pelo lema anterior). Pelo Lemma de Urysohn, consideremos uma função contínua $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y \in \Omega_1 \\ 1 & \text{se} \quad y \in \Omega_2 \end{cases}$$

Afirmação. $\varphi(\phi^t(x)) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Demonstração da Afirmação. Suponha que existe $(t_k)_{k\geq 1}$ tal que $\varphi(\phi^{t_k}(x)) \to r \neq 0$ quando $k \to 0$, escolhendo uma subsequência se for necessário, podemos assumir que $(\phi^{t_k}(x))_{k\geq 1}$ converge, digamos a z_x. Então, pela continuidade de φ

$$r = \lim_{k\to\infty} \varphi(\phi^{t_k}(x)) = \varphi(\lim_{k\to\infty} \phi^{t_k}(x)) = \varphi(z_x) = 0,$$

pois $z_x \in \Omega_1$.
Agora,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\phi^t(x))dt = 0.$$

Por outro lado,

$$\int_M \varphi d\mu \geq \int_{\Omega_2} \varphi d\mu = (1 - \lambda) > 0,$$

contradizendo a definição de ponto genérico. Isto mostra que $G_\mu(\Phi) = \emptyset$. ■

A proposição anterior pode ser estendida quando $\Omega(\phi)$ se decompõe em um número finito de “peças.” Por outro lado, sabemos que existem fluxos de Anosov que não são transitivos (veja por exemplo [31]) e em particular o conjunto dos pontos não errante se decompõe como união de peças disjuntas e invariantes, portanto não podem ser saturados. Estabelecemos este fato como corolário.

Corolário 4.4.6. *Fluxos de Anosov não transitivos admitem medidas sem pontos genéricos. Em particular, tais fluxos nunca são saturados.*

En contraste, será visto no próximo capítulo que um fluxo de Anosov topologicamente misturador sempre é saturado.

Teorema C. *Seja Φ um fluxo contínuo definido sobre um espaço métrico compacto. Se ϕ^t é saturado para algum $t \geq 0$, então Φ é saturado.*

Demonstração. Seja $\mu \in \mathfrak{M}(\Phi)$. Pelo Teorema 3.1.3 e Teorema B obtemos as seguintes relações

$$t \cdot h_\mu(\Phi) = h_\mu(\phi^t) = h(\phi^t, G_\mu(\phi^t)) = t \cdot h(\Phi, G_\mu(\phi^t)) \leq t \cdot h(\Phi, G_\mu(\Phi)) \leq t \cdot h_\mu(\Phi).$$

Isto prova o teorema. ■

Observação 4.4.7. (1) Se o tempo-1 de um fluxo contínuo é saturado (e portanto o fluxo é saturado), então para qualquer subconjunto Y tal que $G_\mu(\phi^1) \subseteq Y \subseteq G_\mu(\Phi)$ tem-se

$$h_\mu(\phi^1) = h(\phi^1, Y) = h(\Phi, Y).$$

(2) Em geral não é simples saber quando um sistema dinâmico é saturado. Na seguinte seção damos alguns exemplos de tais sistemas.

5 Propriedades tipo especificação

O objetivo deste capítulo é prover alguns exemplos de sistemas que são saturados; particularmente, sistemas que satisfazem a propriedade de especificação e quase-especificação. Além disso, coletamos as principais propriedades do espaço de medidas invariantes desses sistemas. Sistemas com a propriedade de sombreamento em média assintótica também serão analisados.

5.1 A propriedade de especificação

A propriedade de especificação foi introduzida por R. Bowen [12] para estudar a entropia topológica de difeomorfismos Axioma A. Grosso modo, uma transformação tem a propriedade de especificação se toda coleção finita de segmentos de órbitas pode ser sombreada por uma órbita verdadeira, sempre que o tempo para passar de um segmento a outro seja grande o suficiente (logo daremos uma definição precisa). Na definição original de Bowen é requerido que o sombreamento seja por uma órbita periódica, mas isto não é exigido na atualidade. Esta noção resultou ser relevante no estudo de sistemas dinâmicos, em particular na teoria ergódica; por exemplo, as medidas ergódicas de um homeomorfismo com a propriedade de especificação têm densidade de entropia, característica que implica que medidas ergódicas são densas no conjunto das medidas invariantes ([23, 27, 65]). Nesta seção estudamos a propriedade de especificação no caso discreto e contínuo.

5.1.1 Especificação para funções contínuas

Antes de dar a definição de especificação que adotaremos, advertimos que não existe uma designação unificada na literatura. Por exemplo, a definição original de Bowen aparece referida como "periodic especification property" em [44] e como "strong specification property" em [74] e que a definição que usaremos neste trabalho é nomeada "weak specification" em [23].

Para darmos a definição de especificação para uma função contínua (ou homeomorfismo) usaremos intervalos de inteiros: $[a,b]=\{j\in\mathbb{N}: a\leq j\leq b\}$, $a,b\in\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$ se f é invertível), $a\leq b$. Sejam $f:X\to X$ uma função contínua e $N\in\mathbb{N}$. Uma coleção de segmentos de órbitas de f, $\xi=\{f^{[a_i,b_i]}(x_i)\}_{i=1}^n$, é uma **especificação N-afastada** se $a_i-b_{i-1}\geq N$ para todo $i=2,3,...,n$. A família $\xi=\{f^{[a_i,b_i]}(x_i)\}_{i=1}^n$ é ε-**sombreada** (ou ε-**especificada**) pelo ponto $z\in X$ se

$$d(f^jx_i,f^jz)<\varepsilon \qquad \text{para todo } a_i\leq j\leq b_i \qquad i=1,2,...,n.$$

Definição. Uma função contínua $f : X \to X$ satisfaz a **propriedade de especificação** se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $N = N(\varepsilon)$ tal que toda especificação N-afastada pode ser ε-sombreada por um ponto de X.

Sistemas com a propriedade de especificação gozam de propriedades dinâmicas importantes, tanto topológicas como ergódicas. Reunimos algumas delas na proposição abaixo. Outras propriedades interessantes podem-se encontrar resumidas em [44], onde conexões com outras propriedades “tipo” especificação também são estabelecidas.

Proposição 5.1.1. *Seja $f : X \to X$ uma função contínua satisfazendo a propriedade de especificação. Então*

(a) *Todo fator de f também satisfaz a propriedade de especificação.*

(b) *f é sobrejetiva.*

(c) *f^k tem especificação para todo $k \geq 1$.*

(d) *f é topologicamente misturador.*

(e) *$\mathfrak{M}_{erg}(f)$ tem densidade de entropia; isto é, para toda $\mu \in \mathfrak{M}(f)$ e $\varepsilon > 0$, existem uma vizinhança $\mathcal{V}$ de μ e uma medida ergódica $\nu \in \mathcal{V}$ tal que $h_\nu(f) \in (h_\mu(f) - \varepsilon, h_\mu(f)]$. Em particular, $\mathcal{E}(f)$ é denso em $\mathfrak{M}(f)$.*

(f) *Para todo $K \subseteq \mathfrak{M}(f)$ conexo, compacto e não vazio, existe $x \in X$ tal que $V_f(x) = K$. Em particular, $G_\mu(f) \neq \emptyset$ para toda medida invariante μ.*

(g) *f é saturado.*

Observação 5.1.2. (1) As propriedades (a), (c) e (d) foram provadas por K. Sigmund in [65, Propositions 1 and 2] no caso que f tem a propriedade de especificação forte (no sentido de Bowen) e facilmente podem ser estendidas para o caso de especificação.

(2) A diferença de (a), especificação não é herdada para extensões.

(3) (c) é consequência de (d).

(4) Sistemas topologicamente misturadores não têm necessariamente a propriedade de especificação, porém, no intervalo, estas propriedades são equivalentes ([10]).

(5) Sistemas misturadores que têm, em adição, a propriedade de sombreamento, satisfazem a propriedade de especificação. De fato, transitividade é suficiente (veja por exemplo [44, Theorem 45]).

(6) A densidade de entropia em (e) foi provado por Eizenberg, Kifer e Weiss em [27, Theorem B].

(7) A propriedade (f) foi provada primeiro por K. Sigmund [65, Theorem 4] para a especificação forte, logo foi generalizada por Dateyama [23] em nosso contexto.

(8) Fan, Liao e Peyrière provaram (g) em [30, Theorem 1.1].

(9) Se f tem a propriedade de especificaõ forte e X não é enumerável, então $h(f) > 0$ e pode ser infinita.

5.1.2 Especificação para fluxos

A definição para fluxos é similar ao caso discreto usando intervalos de números reais $[s,t]$ e especificações T-afastadas, com $T>0$ um número real. Neste caso, uma **especificação** T-afastada é uma família $\xi=\{\phi^{[s_i,t_i]}(x_i)\}_{i=1}^n$ com $s_i-t_{i-1}\geq T$ para todo $i=2,3,...,n$. A coleção ξ é dita ε-**especificada** (também dizemos ε-**sombreada**) por um ponto z de X se

$$d(\phi^t(x_i),\phi^t(z))<\varepsilon \qquad \text{para todo } t\in[s_i,t_i], \qquad i=1,2,...,n.$$

Assim,

Definição. Um fluxo tem a **propriedade de especificação** se para todo $\varepsilon>0$, existe um $T=T(\varepsilon)>0$ tal que toda especificação T-afastada é ε-especificada por um ponto em X.

As propriedades enunciadas na Proposição 5.1.1 são igualmente válidas para fluxos com especificação. Com efeito, a propriedade (a) segue facilmente da definição. O item (b) é o teorema 2.4 de [4]. Os itens (e), (f) e (g) serão provadas na próxima seção num contexto mais geral.

Teorema 5.1.3. *O fluxo $\Phi=\{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ tem a propriedade de especificação se, e somente se, ϕ^t tem esta propriedade para todo $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.*

Demonstração. Em toda a demonstração vamos supor $t=1$. Suponhamos que Φ tem especificação e provemos que ϕ^1 também tem esta propriedade. Para isso, seja $\varepsilon>0$ e $T=T(\varepsilon)$ como na Definição de especificação para fluxos e $\xi=\{\phi^{[a_i,b_i]}(x_i)\}_{i=1}^n$ uma especificação T-afastada (para ϕ^1). Note que os intervalos $[a_i,b_i]$ são compostos de inteiros. Consideremos então eles como intervalos de números reais. Pela propriedade de especificação do fluxo, existe $z\in X$ que ε-especifica $\overline{\xi}=\{\phi^{[a_i,b_i]}(x_i)\}_{i=1}^n$; isto é,

$$d(\phi^t(x_i),\phi^t(z))<\varepsilon \qquad \text{para todo } t\in[a_i,b_i], i=1,2,...,n.$$

Em particular,

$$d(\phi^j(x_i),\phi^j(z))<\varepsilon \qquad \text{para todo } a_i\leq j\leq b_i, i=1,2,...,n.$$

Isto mostra que z ε-especifica ξ.

Na outra direção, suponha que ϕ^1 tem a propriedade de especificação. Dado $\varepsilon>0$, pela continuidade do fluxo e a compacidade do espaço, existe $\overline{\varepsilon}>0$ tal que $d(\phi^t x,\phi^t y)<\varepsilon$ para todo $t\in[0,1]$ se $d(x,y)<\overline{\varepsilon}$. Ponhamos $T=T(\varepsilon)=N(\overline{\varepsilon})+1$ e seja $\overline{\xi}=\{\phi^{[s_i,t_i]}(x_i)\}_{i=1}^n$ uma especificação T-afastada (para o fluxo). Consideremos a especificação $\xi=\{\phi^{[a_i,b_i]}(x_i)\}_{i=1}^n$ com $a_i=[s_i]$ e $b_i=[t_i]$, onde $[t]$ denota a parte inteira de t. É claro que ξ é uma especificação $N(\bar{\varepsilon})$-afastada (de fato $(N(\bar{\varepsilon})+1)$-afastada) para a aplicação tempo-1. Por hipótese, existe um $z \in X$ tal que

$$d(\phi^j x_i, \phi^j z) < \bar{\varepsilon} \qquad \text{para todo } a_i \leq j \leq b_i, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Pela definição de $\bar{\varepsilon}$ temos que

$$d(\phi^t(x_i), \phi^t(z)) < \varepsilon \qquad \text{para todo } t \in [s_i, t_i], \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Isto mostra que o fluxo também tem a propriedade de especificação. ■

Em conexão com o Teorema C e Proposição 5.1.1(g), temos a seguinte consequência:

Corolário 5.1.4. *Se Φ tem a propriedade de especificação, então Φ é saturado.*

Uma classe importante de fluxos com a propriedade de especificação são os fluxos de Anosov que são topologicamente misturadores; em particular, fluxos geodésicos sobre uma variedade riemanniana fechada de curvatura negativa (veja [40, sections 17.5 and 18.3] para mais detalhes). Temos observado antes uma situação totalmente oposta quando um fluxo de Anosov não é transitivo (Corolário 4.4.6), pois eles nunca são saturados.

5.2 A propriedade de quase especificação

Nesta seção, estudamos sistemas dinâmicos que satisfazem a propriedade de quase-especificação, uma noção mais geral que especificação. A definição para funções contínuas e homeomorfismos é dada na seção 5.2.1.

Resulta que diversas consequências obtidas a partir da propriedade de especificação são também válidas neste caso. Ressaltamos, porém, que a noção de quase-especificação é mais ampla e existem muitos sistemas importantes que a satisfazem e que não têm a propriedade de especificação ("quase todos" os β-shifts, por exemplo).

Na seção 5.2.2 nós propomos uma definição de quase-especificação para fluxos contínuos que estende de forma natural a definição existente para funções contínuas e homeomorfismos. Demonstraremos que se um fluxo satisfaz esta propriedade, então sua aplicação tempo-1 também a satisfaz, e recíprocamente (Teorema D). Esta caracterização nos permite estender vários resultados, desde o caso discreto, para fluxos que gozam da propriedade de quase-especificação (Seções 5.2.3 e 5.2.4). Em particular, obtemos conclusões bastante significativas no contexto da teoria da dimensão para fluxos. Por exemplo, provamos no Teorema 5.2.5(b) que fluxos contínuos satisfazendo a propriedade de quase-especificação são saturados, estendendo o conhecido teorema de C.-E. Pfister e W. Sullivan para funções contínuas. Por outro lado, também evidenciamos que esta definição para um fluxo contínuo é bem comportada no sentido que é uma propriedade intermediária entre especificação e a "L-Propriedade de sombreamento em média assintótica" (Teoremas 5.2.4 e 5.3.1), tal como ocorre no caso discreto.

5.2.1 Definição de quase-especificação. Caso discreto.

Em [57], C.-E. Pfister e W. Sullivan introduzem a noção de g-quase produto para funções contínuas. D. Thompson [70], modifica ligeiramente este conceito para definir a propriedade de quase-especificação. Esta definição generaliza a noção de especificação estudada na seção anterior (veja [57, Proposition 2.1] e [70, p. 5397]). Porém, existem muitos sistemas que satisfazem a propriedade de quase-especificação, mas não satisfazem a propriedade de especificação; por exemplo, todos os β-shifts, T_β, satisfazem esta propriedade ([70, Theorem 5.1]) e, em contraste, o conjunto dos $\beta \in (0, \infty)$ para os quais T_β satisfaz a propriedade de especificação é denso com dimensão de Hausdorff igual a 1, mas tem medida de Lebesgue zero (veja [17, Theorem 1.5] e [62, Theorem A]). Ainda assim, muitas das propriedades que gozam os sistemas com especificação continuam sendo verdadeiras para sistemas com a propriedade de quase-especificação. Assim, resultados sobre medidas invariantes, entropia de certos conjuntos não compactos, teoria da dimensão e análise multifractal obtidos para sistemas com especificação são igualmente válidos neste cenário mais amplo. Lembraremos alguns deles ao longo desta seção.

Definição. Seja $\varepsilon_0 > 0$ fixo. Uma função $g : \mathbb{N} \times (0, \varepsilon_0] \to \mathbb{N}_0$ é chamada uma função **erro** se para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ satisfaz:

(A1) $g(n, \varepsilon)$ é não decrescente com respeito a n.

(A2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(n,\varepsilon)}{n} = 0$.

Estendemos a funcão g, para todo $\varepsilon > \varepsilon_0$ definindo $g(n, \varepsilon) := g(n, \varepsilon_0)$.

Seja $f : X \to X$ uma função contínua. Seja $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto finito não vazio. Definimos a **métrica de Bowen** sobre Λ em X induzida pela função f como

$$d_\Lambda(x, y) := \max\{d(f^j x, f^j y) : j \in \Lambda\}.$$

A **bola de Bowen** sobre Λ centrada em x e de tamanho $\varepsilon > 0$ é

$$B_\Lambda(x, \varepsilon) := \{y \in X : d_\Lambda(x, y) < \varepsilon\}.$$

Se n é um inteiro positivo, denotamos $\Lambda_n := \{0, 1, ..., n-1\}$.

Para uma função erro g, $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ com $n > g(n, \varepsilon)$ definimos

$$I(g|n, \varepsilon) := \{\Lambda \subseteq \Lambda_n : \#\Lambda \geq n - g(n, \varepsilon)\}$$

e

$$B_n(g|x, \varepsilon) := \{y \in X : y \in B_\Lambda(x, \varepsilon) \text{ para algum } \Lambda \in I(g|n, \varepsilon)\} = \bigcup_{\Lambda \in I(g|n,\varepsilon)} B_\Lambda(x, \varepsilon).$$

Definição. Uma função contínua $f : X \to X$ satisfaz a propriedade de **quase-especificação** (ASP para abreviar) se existe uma função erro g satisfazendo o seguinte: dados números reais $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k > 0$, existem inteiros $N_g(\varepsilon_i)$, $i = 1, 2, ..., k$, tais que para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ e $n_i \geq N_g(\varepsilon_i)$, $i = 1, 2, ..., k$, existe um $z \in X$ tal que

$$f^{N_{j-1}}(z) \in B_{n_j}(g|x_j, \varepsilon_j) \qquad \text{para todo } j = 1, 2, ..., k$$

onde $n_0 := 0$ e $N_j := n_0 + n_1 + ... + n_{j-1}$.

Não é difícil provar que esta propriedade é herdada por fatores, em particular, invariante por conjugação e independe da métrica escolhida no espaço X.

O teorema a seguir, que resume alguns resultados sobre medidas invariantes para sistemas com ASP, foi primeiro provado por K. Sigmund sob a hipótese de especificação em [23, 65] e logo generalizado ao nosso caso em [26, 45]. De fato, em [26] e [45] o teorema de Sigmund é provado para sistemas com a AASP, uma noção mais geral que a tratada aqui (sistemas com AASP serão estudados no Capítulo 5.3). Para $K \subseteq \mathfrak{M}(f)$ denotamos por $\Delta_K = \overline{\cup_{\mu \in K} Supp(\mu)}$.

Teorema 5.2.1. *Seja $f : X \to X$ um função contínua satisfazendo a propriedade de quase-especificação. Então:*

(a) Se f não é unicamente ergódica, $\mathfrak{M}(f)$ é o simplexo de Poulsen, i. e., $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(f)$ é um conjunto G_δ-denso em $\mathfrak{M}(f)$.

(b) Se $K \subseteq \mathfrak{M}(f)$ é um conjunto compacto, conexo e não vazio, então existe um $x \in X$ tal que $V_f(x) = K$. Como consequência, $G_\mu(f)$ é não vazio para toda medida invariante $\mu \in \mathfrak{M}(f)$.

(c) O conjunto dos pontos x em (b) tais que $V_f(x) = K$, é denso em Δ_K.

(d) O conjunto $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(f)$ tem densidade de entropia em $\mathfrak{M}(f)$.

Em conexão com a teoria da dimensão, o teorema notável enunciado a seguir foi provado por Pfister e Sullivan em [57, Theorem 6.1] para sistemas com a propriedade de g-quase produto e por A. Meson e F. Vericat em [48] para sistemas com a ASP usando métodos diferentes. A.-H. Fan et al. ([30, Theorem 1.1]) o provaram com a hipótese de especificação.

Teorema 5.2.2. *Se $f : X \to X$ satisfaz a propriedade de quase-especificação, então*

$$h(f, G_\mu(f)) = h_\mu(f) \tag{5.2.1}$$

para toda medida $\mu \in \mathfrak{M}(f)$.

R. Bowen demonstrou em [14] que a igualdade (5.2.1) é válida para qualquer função contínua se a medida é ergódica e foi o primeiro a estabelcer um resultado deste tipo, pois a noção de entropia topológica para conjuntos não compactos foi introduzida nesse trabalho. O resultado acima pode ser visto como uma generalização do resultado de Bowen.

5.2.2 Definição de quase-especificação. Caso contínuo.

Nesta seção definimos a propriedade de quase-especificação para fluxos.

Seja $\mathbb{R}_0^+$ o conjunto dos números reais não negativos. Denotemos por $\mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+)$ e λ a σ-algebra de Borel e medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}_0^+$, respectivamente.

Definição. Seja $\varepsilon_0 > 0$ fixo. Uma função $g : \mathbb{R}_0^+ \times (0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}_0^+$ é chamada uma função **erro** se para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ satisfaz:

(A1') $g(\cdot, \varepsilon)$ é contínua e não decrescente.

(A2') $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{g(t,\varepsilon)}{t} = 0.$

Se g é uma função erro, estendemo-la para todo $\varepsilon > \varepsilon_0$ fazendo $g(t,\varepsilon) := g(t,\varepsilon_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Pela condição (A2') existe t_ε tal que $g(t,\varepsilon) < t$ para todo $t > t_\varepsilon$. No que segue, para $\varepsilon > 0$, $\Lambda_T = [0, T]$ onde $T \in \mathbb{R}^+$ será considerado sempre maior do que t_ε. Quando $t < 0$, definimos $g(t,\varepsilon) = g(|t|,\varepsilon)$.

Seja $\Lambda \subseteq \Lambda_T$ um conjunto de Borel. Definamos

$$d_\Lambda(x,y) := \sup\{d(\phi^t x, \phi^t y) : t \in \Lambda\} \qquad \text{e} \qquad B_\Lambda(x,\varepsilon) := \{y \in X : d_\Lambda(x,y) < \varepsilon\}.$$

Se g é uma função erro, definimos

$$\begin{aligned} B_T(g|x,\varepsilon) &:= \{y \in X : \text{ Existe } \Lambda \in \mathcal{L}(\Lambda_T) \text{ com } \lambda(\Lambda_T \setminus \Lambda) \le g(T,\varepsilon) \text{ y } d_\Lambda(x,y) < \varepsilon\} \\ &= \bigcup\{B_\Lambda(x,\varepsilon) : \Lambda \text{ é um conjunto de Borel com } \lambda(\Lambda_T \setminus \Lambda) \le g(T,\varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Nossa principal definição neste capítulo é a seguinte:

Definição. O fluxo contínuo $\Phi : X \times \mathbb{R} \to X$ tem a **propriedade de quase-especificação** (ASP para abreviar) se existe uma função erro g tal que para qualquer k, quaisquer k números reais $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k > 0$, existem $T_g(\varepsilon_1), T_g(\varepsilon_2), ..., T_g(\varepsilon_k) > 0$ tais que para todo $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ e tempos $t_i \ge T_g(\varepsilon_i)$, $i = 1, 2, ..., k$, existe $z \in X$ tal que

$$\phi^{T_j}(z) \in B_{t_j}(g|x_j, \varepsilon_j) \qquad \text{para todo } j = 1, 2, ..., k \tag{5.2.2}$$

onde $t_0 := 0$ e $T_j := t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_{j-1}$.

Não é difícil provar que esta definição é invariante por conjugação. Em particular, independe da escolha da métrica d.

Para cada $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\overline{\varepsilon} > 0$ a fim de que $d(\phi^t x, \phi^t y) < \varepsilon$ para todo $x, y \in X$ com $d(x,y) < \overline{\varepsilon}$ e todo $t \in [0, 1]$. Usaremos esta notação na prova do seguinte teorema.

Teorema D. *Um fluxo contínuo tem a propriedade de quase-especificação se, e somente se, sua aplicação tempo-1 tem esta propriedade.*

Demonstração. Suponha que Φ tem a ASP com função erro $\overline{g}$. Considere a função erro definida por $g(n,\varepsilon) = [\overline{g}(n-1,\overline{\varepsilon})] + 2$ para qualquer inteiro $n > 1$, $g(1,\varepsilon) = g(2,\varepsilon)$. Provaremos que ϕ^1 tem a ASP com função erro g.

Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k > 0$ e considere $N_g(\varepsilon_i) = [T_{\overline{g}}(\overline{\varepsilon}_i)] + 2$ para cada $i = 1, 2, ..., k$, onde $T_{\overline{g}}(\overline{\varepsilon}_i)$ é como na definição 5.2.2. Sejam $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ e $n_i > N_g(\varepsilon_i)$, $i = 1, 2, ..., k$ inteiros. Posto que Φ tem a ASP, existe $z \in X$ tal que

$$\phi^{T_j}(z) \in B_{n_j}(\overline{g}|x_j, \overline{\varepsilon}_j) \qquad \text{para todo } j = 1, 2, ..., k \tag{5.2.3}$$

onde $n_0 = 0$ e $T_j = n_0 + n_1 + n_2 + ... + n_{j-1}$.

Para $j = 1$, seja $\Lambda \subseteq [0, n_1 - 1]$ um conjunto de Borel realizando a validade em (5.2.3). Denote por $\Omega_i = (i-1, i] \cap \Lambda^c \cap [0, n_1 - 1]$, $i = 1, 2, ..., n_1 - 1$ e ponha

$$\Omega = \{i \in \{0, 1, ..., n_1 - 1\} : d(\phi^i x_1, \phi^i z) > \varepsilon_1\}.$$

É claro que se $i > 0$ está em Ω, então $\Omega_i = (i-1, i]$, logo

$$\begin{aligned} \#\Omega \leq \#\{i \in \{1, 2, ..., n_1 - 1\} : \Omega_i = (i-1, i]\} + 1 &\leq [\lambda([0, n_1 - 1] \setminus \Lambda)] + 2 \\ &\leq [\overline{g}(\overline{\varepsilon_1}, n_1 - 1)] + 2 \\ &= g(\varepsilon_1, n_1). \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$z \in B_{n_1}(g, x_1 \varepsilon_1).$$

O mesmo argumento e construção são válidos para $j = 2, 3, ..., k$. Portanto,

$$\phi^{T_j}(z) \in B_{n_j}(g, x_j, \varepsilon_j)$$

onde $n_0 = 0$ e $T_j = n_0 + n_1 + n_2 + ... + n_{j-1}$, $j = 1, 2, ..., k$, mostrando que ϕ^1 tem a propriedade de quase-especificação.

A recíproca é bastante similar. Suponha que $\phi^1 : X \to X$ tem a ASP com função erro $\overline{g}$. Provaremos que o fluxo $\Phi = \{\phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ tem a ASP com função erro definida por

$$g(t,\varepsilon) = (\overline{g}(n+1,\overline{\varepsilon}) - \overline{g}(n,\overline{\varepsilon}))(t - n + 1) + \overline{g}(n,\overline{\varepsilon}) + 2$$

onde $n - 1 < t \leq n$, $n \geq 1$.

Seja $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k > 0$ and $T_g(\varepsilon_j) = N_{\overline{g}}(\overline{\varepsilon}_j) + 2$, $j = 1, 2, ..., k$. Sejam $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ e $t_1 > T_g(\varepsilon_1), t_2 > T_g(\varepsilon_2), ..., t_k > T_g(\varepsilon_k)$ números reais positivos.

Ponhamos $n_1 = [t_1] + 1$ e $n_j = [t_{j-1} - 1 - (t_{j-1} - [t_{j-1}])] + 1$ para $j \geq 2$. É claro que $n_j > N_{\overline{g}}(\overline{\varepsilon}_j)$ para todo $j = 1, 2, ..., k$. Também ponhamos $\overline{x}_1 = x_1$ e $\overline{x}_j = \phi^{1-(t_{j-1}-[t_{j-1}])} x_j$,

$j \geq 2$.

Dado que ϕ^1 tem a ASP, existe $z \in X$ tal que

$$\phi^{N_j}(z) \in B_{n_j}(\overline{g}, \overline{x}_j, \overline{\varepsilon}_j) \tag{5.2.4}$$

onde $n_0 = 0$ e $N_j = n_0 + n_1 + n_2 + ... + n_{j-1}$, $j = 1, 2, ..., k$.

Seja $\overline{\Lambda}_j \subseteq \{0, 1, ..., n_j - 1\}$ realizando (5.2.4). É fácil ver, pela eleição de $\overline{\varepsilon}_j$ que se $i \in \overline{\Lambda}_j$, $i \neq n_j - 1$, então $d(\phi^{N_j+i+t}z, \phi^{i+t}\overline{x}_j) < \varepsilon$ para todo $t \in [0, 1]$.

Considere $\Lambda_j = \cup\{[i, i+1] : i \in \overline{\Lambda}_j, i \neq n_j - 1\}$, então

$$\begin{aligned} \lambda([0, t_j] \setminus \Lambda_j) &\leq \#\{0, 1, ..., n_j - 1\} \setminus \overline{\Lambda}_j + 2 \\ &\leq \overline{g}(n_j, \overline{\varepsilon}) \\ &\leq g(t_j, \varepsilon) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi^{T_j}(z) \in B_{n_j}(g, x_j, \varepsilon_j)$$

onde $t_0 = 0$ e $T_j = n_0 + t_1 + t_2 + ... + t_{j-1}$, $j = 1, 2, ..., k$, assim Φ tem a propriedade de quase-especificação. Isto prova o teorema. ■

EXEMPLO 4. Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo e $\rho : X \to (0, \infty)$ qualquer função contínua. Definimos

$$X_{f,\rho} := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq \rho(x)\}$$

onde, para todo $x \in X$, os pontos $(x, \rho(x))$ e $(f(x), 0)$ são identificados. Uma topologia pode ser introduzida em $X_{f,\rho}$ numa forma natural e uma métrica $d_{f,\rho}$ (compatível com esta topologia) pode ser construída (veja [15, p. 186]). O espaço $(X_{f,\rho}, d_{f,\rho})$ é compacto uma vez que (X, d) é compacto, e é chamado o **espaço suspensão** de X com função teto ρ e a métrica $d_{f,\rho}$ é às vezes chamada a **métrica de Bowen-Walters**. Sobre $(X_{f,\rho}, d_{f,\rho})$ definimos o **fluxo suspensão** de f, $\Phi_f : X_{f,\rho} \times \mathbb{R} \to X_{f,\rho}$ sendo

$$\phi^t_{f,\rho}(x, s) := (f^n x, s + t - \rho^n(x))$$

onde n é o único inteiro tal que $\rho^n(x) \leq s + t < \rho^{n+1}(x)$ e $\rho^n(x)$ é definido recursivamente por $\rho^0(x) = 0$ e $\rho^{n+1}(x) = \rho^n(x) + \rho(f^n(x))$, $n \in \mathbb{Z}$.

Observe que, fixado o homeomorfismo $f : X \to X$, quaisquer dois fluxos suspensão $\phi_{f,\rho_1}, \phi_{f,\rho_2}$ são equivalentes. De fato, basta supor que $\rho_1 \equiv 1$ e observar que a aplicação $h : X_{f,1} \to X_{f,\rho_2}$ definida por $h(x, t) = (x, t\rho(x))$ é um homeomorfismo que faz a conjugação.

Vamos mostrar que $\Phi_f : X_1 \times \mathbb{R} \to X_1$, o fluxo suspensão com função teto $\rho = 1$, não satisfaz a propriedade de quase-especificação. Em particular, a aplicação tempo-1 deste fluxo não tem a ASP. Seja $g : \mathbb{R}^+_0 \times (0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^+_0$ qualquer função erro. Sejam $w_1 = (x_1, s_1), w_2 = (x_2, s_2) \in X_1$ com $3/4 < s_2 < 1$ e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1/4$. Para qualquer $T_1 > 0$ existe um $t_1 > T_1$ tal que $(t_1) < 1/4$. Seja $T_2 > 0$ qualquer número real. Se $z = (x, t) \in X_1$

é tal que $z \in B_{t_1}(g|x_1, \varepsilon_1)$, então $d(\phi_f^t(z), \phi_f^t(w_2)) > 1/4$ para todo $t \in \mathbb{R}$, portanto $z \notin \phi_f^{-t_1} B_{t_2}(g|x_2, \varepsilon_2)$, logo

$$B_{t_1}(g|x_1, \varepsilon_1) \cap \phi_f^{-t_1} B_{t_2}(g|x_2, \varepsilon_2) = \emptyset.$$

Consequentemente, Φ_f não tem a ASP. A segunda asserção é agora consequência do teorema 5.2.4.

5.2.3 Primeiras consequências.

Nesta seção, obtemos vários resultados que são consequências da definição 5.2.2 e do Teorema D. Nosso primeiro resultado diz que especificações infinitas ainda podem ser "quase-especificadas" por um ponto do espaço. Este resultado já é conhecido para sistemas com especificação ([65, Orbit specification lemma]) e para sistemas com quase-especificação ([43, Lemma 3.4]), ambos no caso discreto.

Lema 5.2.3. *Suponha que Φ é um fluxo contínuo satisfazendo a ASP com função erro g. Seja $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de números positivos e seja $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ uma sequência em X. Se $\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência de números positivos tais que $t_i \geq T_i = T(\varepsilon_i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, então existe um $z \in X$ com a seguinte propriedade:*

$$\phi^{\tilde{t}_i}(z) \in \overline{B}_{t_i}(g|x_i, \varepsilon_i) \qquad \text{para todo } i \geq 0, \ \text{onde } \tilde{t}_0 = 0 \text{ e } \tilde{t}_i = t_0 + t_1 + \ldots + t_{i-1} \tag{5.2.5}$$

e

$$\phi^{-\hat{t}_i}(z) \in \overline{B}_{t_i}(g|x_i, \varepsilon_i) \qquad \text{para todo } i < 0, \ \text{onde } \hat{t}_i = t_{-1} + t_{-2} + \ldots + t_{-i}. \tag{5.2.6}$$

Demonstração. Por simetria, basta considerar a sequência $\{x_i\}_{i\geq 0}$. Para cada $n \geq 1$, por hipótese, existe $y_n \in X$ que sombreia segundo a definição de ASP, a sequência finita $\{x_i\}_{i=0}^{i=n}$. Isto é, para cada $0 \leq i \leq n$, existe um boreliano $F_n^i \subseteq [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+1}]$ tal que $d(\phi^t(y_n), \phi^{t-\tilde{t}_i}(x_i)) \geq \varepsilon_i$ para todo $t \in F_n^i$ e satisfaz $\lambda(F_n^i) \leq g(t_i, \varepsilon_i)$.

Seja $z \in X$ qualquer ponto de acumulação de $\{y_n\}_{n\geq 1}$ (por compacidade de X, ele sempre existe). Podemos supor que $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Então z é o ponto procurado. De fato, seja $t \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+1}]$, tal que $d(\phi^t(z), \phi^{t-\tilde{t}_i}(x_i)) > \varepsilon_i$, por continuidade, $t \in F_n^i$ para todos, salvo um número finito de $n \geq i$ (definição de lim inf para conjuntos). Assim, $F_i = \{t \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+1}] : d(\phi^t(z), \phi^{t-\tilde{t}_i}(x_i)) > \varepsilon_i\} \subseteq \liminf_{n\to\infty} F_n^i$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lambda(F_i) &\leq \lambda(\liminf_{n\to\infty} F_n^i) \\
&= \lambda(\bigcup_{n=i}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} F_n^i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lambda(\bigcap_{k=n}^{\infty} F_n^i) \\
&\leq \lambda(F_n^i) \\
&\leq g(t_i, \varepsilon_i).
\end{aligned}$$

Isso mostra que z satisfaz as condições requeridas. ■

Como já temos dito antes, no caso discreto a propriedade de especificação implica ASP (veja [57, Proposition 2.1] e [70, p. 5398]). Segue como consequência imediata disto e dos teoremas 5.1.3 e D, que tal implicação é válida também para fluxos contínuos.

Teorema 5.2.4. *Se um fluxo contínuo satisfaz a propriedade de especificação, então tem ASP.*

Demonstração. Suponha que Φ é um fluxo contínuo satisfazendo a propriedade de especificação. Pelo Teorema 5.1.3, ϕ^1 tem a propriedade de especificação e logo ϕ^1 tem a ASP. O resultado segue do Teorema D. ■.

Teorema 5.2.5. *Suponha que Φ é um fluxo contínuo sobre um espaço métrico compacto. Se Φ satisfaz a ASP, então*

(a) *$G_\mu(\Phi) \neq \emptyset$ para toda $\mu \in \mathfrak{M}(\Phi)$.*

(b) *Φ é saturado.*

Demonstração. (a) Segue do Teorema 5.2.1(b), Teorema D e Observação 3.1.4.

(b) Segue-se do Teorema D e Teorema C. ■

A parte (b) do teorema acima é a versão contínua do teorema de Pfister-Sullivan.

5.2.4 Densidade de $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(f)$ em $\mathfrak{M}(f)$.

Temos dito antes que o espaço de medidas invariantes de funções contínuas com a propriedade de especificação, e mais geralmente com a propriedade de quase-espeficicação, é trivial ou formam um simplexo de Poulsen; isto é, medidas ergódicas são densas. Mais do que isso, foi provado em [27, 56] que as medidas ergódicas formam um conjunto com densidade de entropia. Nesta seção provamos que para um fluxo ter medidas ergódicas com densidade de entropia, uma condição suficiente é que o tempo-1 tenha esta propriedade. Lembremos a definição de densidade de entropia.

Definição. Seja $f : X \to X$ uma função contínua. Dizemos que $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(f)$ tem **densidade de entropia** em $\mathfrak{M}(f)$, se para toda medida f-invariante μ existe uma sequência de medidas ergódicas $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ convergindo (na topologia fraca*) para μ e tal que $h_{\mu_n}(f)$ converge para $h_\mu(f)$.

A definição de densidade de entropia para fluxos é análoga.

Teorema 5.2.6. *Seja Φ um fluxo contínuo sobre um espaço métrico compacto X. Se $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(\phi^1)$ forma um conjunto com densidade de entropia em $\mathfrak{M}(\phi^1)$, então $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(\Phi)$ é um conjunto com densidade de entropia em $\mathfrak{M}(\Phi)$.*

Demonstração. Seja $\mu \in \mathfrak{M}(\Phi)$, em particular $\mu \in \mathfrak{M}(\phi^1)$ e como $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(\phi^1)$ tem densidade de entropia em $\mathfrak{M}(\phi^1)$, existe uma sequência $\mu_n \in \mathfrak{M}_{\text{erg}}(\phi^1)$ convergindo para μ e satisfazendo $h_{\mu_n}(\phi^1) \to h_\mu(\phi^1)$ quando $n \to \infty$. Considere então as medidas

$$\overline{\mu}_n := \int_0^1 \phi_*^t \mu_n dt.$$

Como as medidas μ_n são ergódicas para ϕ^1, a medida $\overline{\mu}_n$ é ergódica para o fluxo Φ, para todo $n \geq 1$.

Afirmação. $\overline{\mu}_n$ converge para μ.

Demonstração da Afirmação. Seja $\varphi \in C(X)$. Pela Proposição 2.1.1 a função $t \mapsto \int \varphi d\phi_*^t \mu_n$ é Lebesgue mensurável. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int \varphi d\overline{\mu}_n &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int \varphi d\overline{\mu}_n dt \\
&= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \int \varphi d\overline{\mu}_n dt \\
&= \int_0^1 \int \varphi d\mu dt \\
&= \int \varphi d\mu. \qquad \square
\end{aligned}$$

Agora, por Lemma 4.1.2 e Observação 4.1.3,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} h_{\overline{\mu}_n}(\Phi) &= \lim_{n\to\infty} h_{\overline{\mu}_n}(\phi^1) \\
&= \lim_{n\to\infty} h_{\mu_n}(\phi^1) \\
&= h_\mu(\phi^1) \\
&= h_\mu(\Phi).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(\Phi)$ tem densidade de entropia em $\mathfrak{M}(\Phi)$. ∎

É fácil ver que se $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(S)$ tem densidade de entropia, então $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(S)$ é denso em $\mathfrak{M}(S)$.

Corolário 5.2.7. *Se um fluxo contínuo tem a ASP, então o conjunto de medidas ergódicas tem densidade de entropia. Em particular, $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(\Phi)$ é denso em $\mathfrak{M}(\Phi)$.*

Demonstração. Se Φ é um fluxo contínuo com a ASP, então ϕ^1 também tem a ASP, logo $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(\phi^1)$ tem densidade de entropia em $\mathfrak{M}(\phi^1)$ e portanto $\mathfrak{M}_{\text{erg}}(\Phi)$ tem densidade de entropia em $\mathfrak{M}(\Phi)$, pelos Teoremas 5.2.1(d) e 5.2.6. ∎

Um simplexo de Choquet que não se reduz a um ponto é dito ser de Poulsen se o conjunto dos pontos extremais formam um conjunto denso. Sabemos que o conjunto de medidas invariantes de um sistema dinâmicos é um simplexo de Choquet e que seus pontos extremais são exatamente as medidas ergódicas. Então, quando $\mathfrak{M}(S)$ não é trivial, dizer que $\mathfrak{M}(S)$ é o simplexo de Poulsen é equivalente a dizer que as medidas ergódicas formam um conjunto denso. Adotando esta terminologia, o espaço de medidas invariantes de um sistema com ASP não únicamente ergódico é um simplexo de Poulsen.

5.3 A propriedade de sombreamento assintótico em média

Transitividade topológica é uma particularidade essencial dos sistemas dinâmicos caóticos. Por outro lado, é bem sabido que a propriedade de sombreamento possui um papel chave na estabilidade de sistemas. Assim, estabelecer relações entre este tipo de noções permite obter certa estabilidade em sistemas caóticos. Nesta direção R. Gu introduz a "propriedade de sombreamento assintótico em média" (abreviado AASP) em [36, 37] onde estuda sua relação com transitividade. Nesta seção provamos que fluxos com a ASP satisfazem a AASP_L. Note que AASP e AASP_L são equivalentes no caso discreto e, neste cenário, M. Kulczycki et al. [43] provaram que ASP implica AASP quando o sistema é sobrejetivo.

Uma sequência $\{x_i\}_{i\geq 0}$ é dita **pseudo-órbita assintótica em média** da aplicação $f : X \to X$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(fx_i, x_{i+1}) = 0$. A sequência $\{x_i\}_{i\geq 0}$ é dita ser **assintoticamente sombreada em média** por um ponto $z \in X$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d(f^i z, x_i) = 0$. Finalmente, a aplicação f tem a **propriedade de sombreamento assintótico em média** (AASP para abreviar) se toda pseudo-órbita assintótica em média pode ser assintóticamente sombreada em média por um ponto $z \in X$.

A definição de AASP para fluxos é um pouco diferente já que esta emprega reparametrizações no tempo e usa uma média de distancias ao longo de segmentos de órbitas, que não é necessário no caso discreto. Uma **reparametrização** é um homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é crescente e $f(0) = 0$.

Definição. Seja $T > 0$.

(i) Uma bi-sequência $\{(x_i, t_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $X \times \mathbb{R}^+$ é chamada **T-pseudo-órbita assintótica em média** para o fluxo Φ se $t_i \geq T$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n} d(\phi^{t_i}x_i, x_{i+1}) = 0.$$

(ii) A bi-sequência $\{(x_i, t_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ é **assintoticamente sombreada em média** por um ponto $z \in X$ se existe uma reparametrização h tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n} \int_{s_i}^{s_{i+1}} d(\phi^{h(t)}z, \phi^{t-s_i}x_i)dt = 0,$$

onde $s_0 = 0$, $s_n = \sum_{i=-n}^{n-1} t_i$, $n = 1, 2, 3, ...$

(iii) O fluxo Φ tem a **propriedade de sombreamento assintótico em média** se toda 1-pseudo-órbita assintótica em média pode ser assintoticamente sombreada em média por algum ponto $x \in X$.

Uma 1-pseudo-órbita asintótica em média será dita simplesmente **pseudo-órbita asintótica em média**. Em vista de que a AASP é satisfeita por uma órbita retrassada por uma reparametrização, não é verdade que a aplicação tempo-1 tem esta propriedade (veja exemplo 5 no final desta seção). Todavia, obtemos um resultado similar àquele de Kulczycki, Kwietniak e Oprocha ([43, Theorem 3.5]).

Definição. Dizemos que um fluxo Φ tem a propriedade de L-sombreamento com média assintótica (AASP$_L$ para abreviar) se qualquer pseudo-órbita assintótica em média $\overline{x} = \{(x_i, t_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$, satisfazendo $1 \leq t_i \leq T$ para algum $T = T(\overline{x}) \geq 1$, pode ser assintóticamente sombreada em média.

Teorema 5.3.1. *ASP implica AASP$_L$.*

Para provar o Teorema 5.3.1, necessitaremos dos seguintes lemas. O primeiro é bem conhecido e uma prova pode ser encontrada em [73, Theorem 1.20]. Por simetria, basta provar que toda pseudo-órbita asintótica em média $\overline{x} = \{(x_i, t_i)\}_{i \geq 1}$ com $1 \leq t_i \leq M = M(\overline{x})$ pode ser assintoticamente sombreada em média.

Lema 5.3.2. *Se $\{a_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência limitada de números reais não negativos, então são equivalentes:*

(a) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$.

(b) Existe um subconjunto J de $\mathbb{N}$ de densidade zero tal que para $n \in \mathbb{N} \setminus J$, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Lema 5.3.3. *Se Φ é um fluxo contínuo com ASP e $\{(x_i, t_i)_{i \geq 1}\}$ é uma pseudo-órbita assintótica em média, então existe uma sequência $\{(y_i, s_i)\}_{i \geq 1}$ tal que o conjunto $\{i \geq 1 : (x_i, t_i) \neq (y_i, s_i)\}$ tem densidade 0 e*

$$\lim_{i \to \infty} d(\phi^{s_i}(x_i), x_{i+1}) = 0.$$

Demonstração. Seja g a função erro da definição de ASP de Φ. Fixemos uma sequência $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ com $\varepsilon_k \downarrow 0$ quando $k \to \infty$. Como $\{(x_i, t_i)\}_{i \geq 1}$ é uma pseudo-órbita assintótica em média, pelo Lema 5.3.2, existe um conjunto J de densidade zero tal que

$$\lim_{i \to \infty} d(\phi^{t_i}(x_i), x_{i+1}) = 0 \qquad \text{quando } i \in \mathbb{N} \setminus J.$$

Seja $\{j_k\}_{k \geq 1}$ os elementos de J ordenados de forma crescente; ou seja, $j_1 < j_2 < j_3 < ...$, $j_k \in J$ para todo $k \geq 1$. Consideraremos dois casos:

CASO 1: $j_k + 4 \notin J$. Seja $T_g(\varepsilon_k)$ dado pela definição de ASP. Para os segmentos de órbitas $\phi^{[0,T_g(\varepsilon_k)]}(\phi^{t_{j_k}}(x_{j_k}))$, $\phi^{[0,T_g(\varepsilon_k)]}(\phi^{-(t_{j_k}+4)}(x_{j_k+4}))$ existe um ponto z tal que

$$d(\phi^t(z), \phi^{t_{j_k}+t}(x_{j_k})) < \varepsilon_1 \qquad \text{para algum } t > 1$$

e

$$d(\phi^s(z), \phi^{s+T_g(\varepsilon_k)}(\phi^{-(t_{j_k}+4)}(x_{j_k+4}))) < \varepsilon_1 \qquad \text{para algum } T_g(\varepsilon_k) < s < 2T_g(\varepsilon) - 1,$$

pela propriedade de quase-especificação. Definimos então

$$\begin{aligned}
(y_{j_k}, s_{j_k}) &:= (x_{j_k}, t_{j_k}) \\
(y_{j_k+1}, s_{j_k+1}) &:= (\phi^{t_{j_k}}(x_{j_k}), t) \\
(y_{j_k+2}, s_{j_k+2}) &:= (\phi^t(z), s - t) \\
(y_{j_k+3}, s_{j_k+3}) &:= (\phi^{-2T_g(\varepsilon_k)+s}(x_{j_k+4}), 2T_g(\varepsilon_k)) \\
(y_{j_k+4}, s_{j_k+4}) &:= (x_{j_k+4}, t_{j_k+4})
\end{aligned}$$

CASO 2: $j_k + 4 \in J$. Seja j_ℓ o menor inteiro tal que $j_\ell \geq j_k + 4$ e $j_\ell + 1 \notin J$. Seja $M = \max\{t_{j_m} : k \leq m \leq \ell\}$ e considere $T \geq \max\{\ell \cdot M, T_g(\varepsilon_k)\}$ e os segmentos de órbita $\phi^{[0,T](\phi^{t_k}(x_{t_k}))}$ e $\phi^{[0,T]}(\phi^{-T}(x_{j_\ell}))$. Pela propriedade de quase-especificação, existe $z \in X$ tal que

$$d(\phi^t(\phi^{t_{j_k}}(x_{j_k}), \phi^t(z))) < \varepsilon_k \qquad \text{para algum } t > 1$$

e

$$d(\phi^{s-2T}(x_{j_\ell}), \phi^s(z)) < \varepsilon_k \qquad \text{para algum } T < s < 2T - 1.$$

Definimos então

$$\begin{aligned}
(y_{j_k}, s_{j_k}) &:= (x_{j_k}, t_{j_k}) \\
(y_{j_k+1}, s_{j_k+1}) &:= (\phi^{t_{j_k}}(x_{j_k}), t) \\
(y_{j_k+2}, s_{j_k+2}) &:= (\phi^t(z), 1) \\
(y_{j_k+3}, s_{j_k+3}) &:= (\phi^{t+1}(z), 1) \\
&\ \ \vdots \qquad \vdots \\
(y_{j_{\ell-2}}, s_{j_{\ell-2}}) &:= (\phi^{(t+k-4)(z)}, s - (t + k - 4)) \\
(y_{j_{\ell-1}}, s_{j_{\ell-1}}) &:= (\phi^{s-2T}(x_{j_\ell}), 2T - s) \\
(y_{j_\ell}, s_{j_\ell}) &:= (x_{j_\ell}, t_{j_\ell}) \\
(y_{j_\ell+1}, s_{j_\ell+1}) &:= (x_{j_{\ell+1}}, t_{j_{\ell+1}})
\end{aligned}$$

Agora defina $(y_1, s_1) = (x_1, t_1)$. Suponha que já temos definido (y_i, t_i) para todo $i = 1, 2, ..., N$ para certo $N \in \mathbb{N}$. Se $(N+1) \notin J$, então definimos $(y_{N+1}, s_{N+1}) := (x_{N+1}, t_{N+1})$. Se $N + 1 \in J$, então definimos $(y_{N+1}, s_{N+1}) := (x_{N+1}, t_{N+1})$ e definimos os seguintes elementos como acima dependendo se $N+1$ está no caso 1 ou caso 2.

Logo, veja que o conjunto $\overline{J} := \{i \in \mathbb{N} : (x_i, t_i) \neq (y_i, s_i)\} \subseteq [J + \{0, 1, 2, 3\}]$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#[\overline{J} \cap \{1, 2, ..., n\}] &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} 4\#[J \cap \{1, 2, ..., n\}] \\
&= 4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#[J \cap \{1, 2, ..., n\}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mostrando que $\{i \in \mathbb{N} : (x_i, t_i) \neq (y_i, s_i)\}$ tem densidade nula.

Finalmente, pela construção de $\overline{J}$, $\mathbb{N} = (\mathbb{N} \setminus \overline{J}) \cup \overline{J}$ e $\lim\limits_{i\to\infty} d(\phi^{s_i}(y_i), y_{y+1}) = 0$ quando $i \in \mathbb{N} \setminus \overline{J}$. Se $i \in \overline{J}$, então $d(\phi^{s_i}(y_i), y_{i+1}) = 0$ ou $d(\phi^{s_i}(y_i), y_{i+1}) < \varepsilon_k$ se $j_k < i < j_{k+4}$ ou $j_k < i < j_\ell$ (dependendo se y_i vem definido pelo caso 1 ou caso 2). Logo $\lim_{i\to\infty} d(\phi^{s_i}(y_i), y_{i+1}) = 0$, se $i \in \overline{J}$. Portanto,

$$\lim_{i\to\infty} d(\phi^{s_i} y_i, y_{i+1}) = 0.$$

Isto finaliza a prova do lema. ■

O seguinte lema é uma adaptação do Lema 5.3.3 para o caso de pseudo-órbitas assintóticas em média com tempos limitados.

Lema 5.3.4. *Seja Φ um fluxo com ASP. Seja $\overline{x} = \{(x_i, t_i)\}_{i\geq 1}$ uma pseudo-órbita assintótica em média para Φ tal que $1 \leq t_i \leq M$ para algum $M = M(\overline{x})$ e para todo $i \geq 1$. Então existe $\overline{y} = \{(y_i, s_i)\}_{i\geq 0}$ satisfazendo:*

(a) $\lim_{i\to\infty} d(\phi^{s_i}(y_i), y_{i+1}) = 0$.

(b) *O conjunto $\{i : (x_i, t_i) \neq (y_i, s_i)\}$ tem densidade zero.*

(c) $1 \leq s_i \leq M$ *para todo $i \geq 0$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir $diam(X) = 1$, $M \geq 2$. Pelo Lema 5.3.2, existe $J \subseteq \mathbb{N}$ com densidade zero tal que

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ i\notin J}} d(\phi^{t_i}(x_i), x_{i+1}) = 0.$$

Seja g a função erro e $T_k := T_g(1/2^k)$ como na definição de ASP.

Para cada $k \geq 1$, seja $M_k \in \mathbb{N}$, $M_k \geq T_k$ e considere $n_k \in \mathbb{N}$ com as seguintes propriedades:

(i) $n_k \notin J$.

(ii) $d(\phi^{t_i}(x_i), x_{i+1}) < 1/2^k$ para todo $i \geq n_k$, $i \notin J$.

(iii) $M_k \cdot \frac{|J\cap\{0,1,\ldots,n-1\}|}{n} < 1/2^k$, para todo $n \geq n_k$.

Etapa 1. Para $i = 1, 2, ..., n_1 - 1$ definimos $(y_i, s_i) = (x_i, t_i)$.

Etapa 2. Seja $j_1 = \min\{j \in J : j > n_1\}$ e $r_1 = \min\{j_1 - 1 + 2M_1 + q : q \geq 0, j_1 - 1 + 2M_1 + q \notin J\}$. Considere os segmentos (x_{j_1-1}, M_1) e $(\phi^{-(j_1-1+M_1+q)}(x_{r_1}), j_1 - 1 + M_1 + q)$. Pela propriedade de quase-especificação, existe $z_1 \in X$ e $1 < t_1 < M_1 - 1 < M_1 + 1 < t_2 < j_1 + 2M_1 + q - 1$ tais que

$$d(\phi^{t_1}(z_1)\phi^{t_1}(x_{j_1-1})) < 1/2$$

e

$$d(\phi^{t_2}(z_1), \phi^{t_2+j_1-1+q}(x_{r_1})) < 1/2.$$

Então defina

$$\boxed{\begin{array}{rcl c rcl}
y_{n_1} & := & x_{n_1} & \cdots & s_{n_1} & := & t_{n_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_{j_1-1} & := & x_{j_1-1} & \cdots & s_{j_1-1} & := & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_{n_1+[t_1]-1} & := & \phi^{[t_1]-1}(x_{j_1-1}) & \cdots & s_{n_1+[t_1]-1} & := & t_1 - [t_1] + 1 \\
y_{n_1+[t_1]} & := & \phi^{[t_1]-1}(z_1) & \cdots & s_{n_1+[t_1]} & := & [t_1] + 2 - t_1 \\
y_{[t_1]+1} & := & \phi^{[t_1]+2}(z_1) & \cdots & s_{[t_1]+1} & := & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_{n_1+[t_2]+1} & := & \phi^{[t_2]-1}(z_1) & \cdots & s_{n_1+[t_1]+1} & := & n_1 + t_2 - [t_2] + 1 \\
y_{n_1+[t_2]} & := & \phi^{t_2-M_1}(x_{r_1}) & \cdots & s_{n_1+[t_2]+1} & := & n_1 + [t_2] - t_2 + 2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_{r_1-1} & := & x_{r_1-1} & \cdots & s_{r_1-1} & := & 1
\end{array}}$$

Agora seja $j_2 = \min\{j \in J : j > r_1\}$ e $r_2 = \min\{j_2 - 1 + 2M_1 + q : q \geq 0, j_2 - 1 + 2M_1 + q \notin J\}$. Definimos $(y_i, s_i) = (x_i, t_i)$ para todo $i \in [r_1, j_2 - 1)$. Para $i = j_2 - 1, ...r_2 - 1$ procedemos como acima. Da mesma maneira como feito antes, definimos (y_i, s_i) para $i = 1, 2, ..., N_2 - 1$ para algum $N_2 > n_2$.

Etapa 3. Defina (y_i, s_i), para $i \geq N_2$ da mesma forma que antes considerando N_2 ao invés de n_2.

Etapa 4. Por construção, temos que $1 \leq s_i \leq M$.

Etapa 5. Para cada $i \geq 1$ existe N_k tal que $i > N_k$, assim $d(\phi^{s_i}(y_i), y_{i+1}) < \frac{1}{2^k}$ e portanto

$$\lim_{i \to \infty} d(\phi^{s_i}(y_i), y_{i+1}) = 0.$$

Etapa 6. Seja $\overline{J} = \{j \in \mathbb{N} : (x_j, t_j) \neq (y_j, s_j)\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe k tal que $n \geq N_k$, logo

$$\frac{|\overline{J} \cap \{0, 1, ..., n-1\}|}{n} \leq M_k \frac{|J \cap \{0, 1, ..., n-1\}|}{n} < \frac{1}{2^k}.$$

Portanto $\overline{J}$ tem densidade zero.

A prova do lema está completa. ■

Lema 5.3.5. *Seja Φ um fluxo contínuo com ASP. Se $\{(x_i, t_i)_i\}_{i\geq 1}$ é uma pseudo-órbita assintótica em média e $\{(y_i, s_i)\}_{i\geq 1}$ é como no lemma anterior, então se $z \in X$ sombreia assintoticamente em média a sequência $\{(y_i, s_i)\}_{i\geq 1}$, então z também sombreia assintoticamente em média a sequência $\{(x_i, t_i)_i\}_{i\geq 1}$.*

Demonstração. Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma parametrização tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \int_{s_i}^{s_{i+1}} d(\phi^{\alpha(s)}(z), \phi^{s+s_i}(y_i))ds = 0.$$

onde $s_i = t_1 + t_2 + ... + t_i$, $s_0 = 0$. Pelo Lema 5.3.2, existe $J_1 \subseteq \mathbb{N}$ com densidade zero tal que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}\setminus J_1}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} d(\phi^{\alpha(t)}(z), \phi^{t+s_i}(y_i))dt = 0. \tag{5.3.1}$$

Denote por $S_i = \sum_{j=0}^{n} s_j$ com $S_0 = 0$ and $T_i = \sum_{j=0}^{n} t_j$ com $T_0 = 0$. Defina o homeomorfismo crescente $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo: $\beta|_{[T_i,T_{i+1}]}$ é linear com $\beta(T_i) = S_i$ e $\beta(T_{i+1}) = S_{i+1}$. Agora, defina $h = \alpha \circ \beta$. é claro que h é um homeomorfismo e $h(0) = 0$. Então, fixado $i \geq 1$, $i \notin \overline{J} := J \cup J_1$, temos que $(x_i, t_i) = (y_i, s_i)$ e $\beta(t) = t + S_i - T_i$ para too $t \in [T_i, T_{i+1}]$, assim

$$\begin{aligned} \int_{T_i}^{T_{i+1}} d(\phi^{h(t)}(z), \phi^{t-T_i}(x_i))dt &= \int_{T_i}^{T_{i+1}} d(\phi^{\alpha(\beta(t))}(z), \phi^{t-T_i}(y_i))dt \\ \text{Changing } s = t + T_i - S_i &= \int_{S_i}^{S_{i+1}} d(\phi^{\alpha(s)}(z), \phi^{s-S_i}(y_i))ds. \end{aligned}$$

Pela escolha de i e (5.3.1), temos que

$$\lim_{i\to\infty} \int_{T_i}^{T_{i+1}} d(\phi^{h(t)}(z), \phi^{t-T_i}(x_i))dt = 0.$$

Como $\overline{J}$ tem densidade zero, aplicando o Lema 5.3.2 mais uma vez, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \int_{T_i}^{T_{i+1}} d(\phi^{\alpha(t)}(z), \phi^{t+T_i}(x_i))dt = 0.$$

isto prova que $\{(x_i, t_i)\}_{i\geq 1}$ é também assintoticamente sombreada em média por z. Isto prova o lemma. ■

Para $M > 0$ e qualquer sequência de números reaies $(\eta_n)_{n\geq 0}$ com $\eta_n \downarrow 0$, a seguinte notação será usada na prova Teorema 5.3.1. Para η_1, existe k_1 tal que $d(\phi^t(x), \phi^t(y)) < \eta_1$ para todo $t \in [-M, M]$ se $d(x, y) < 1/2^{k_1}$, e fazemos $\overline{\eta}(m) = \eta_1$ para todo $0 \leq m \leq k_1$. Mais geralmente, para $\ell \geq 1$, seja k_ℓ o menor inteiro tal que $d(\phi^t(x), \phi^t(y)) < \eta_\ell$ para todo $t \in [-M, M]$ se $d(x, y) < 1/2^{k_\ell}$, então defina $\overline{\eta}(m) = \eta_\ell$ para cada $k_\ell < m \leq k_{\ell+1}$. É claro que $\lim_{m\to\infty} \overline{\eta}(m) = 0$. Colocamos $\overline{\eta}(0) = 1$. Também vamos supor que $\text{diam}(X) = 1$.

Demonstração do Teorema 5.3.1. Como antes, basta considerar $\overline{x} := \{(x_i, t_i)\}_{i\geq 0}$ uma pseudo-órbita assintótica em média com $M = M(\overline{x})$. Pelo Lema 5.3.5, podemos assumir que $\lim_{i\to\infty} d(\phi^{t_i}(x_i), x_{i+1}) = 0$. Sejam $(\eta_n)_{n\geq 1}$ e $\overline{\eta}(\cdot)$ como no parágrafo acima. Seja g, função erro para Φ.

Etapa 1. Para cada $k \geq 1$ podemos considerar um inteiro n_k satisfazendo $n_k > T_g(1/2^k)$ e $\frac{[g(M\cdot n_k, 1/2^k)]+1}{n_k} < \frac{1}{2^k}$. Suponemos que $n_{k+1} > n_k$.

Por compacidade de X, a continuidade de Φ e levando em conta que $|t_i| \leq M$ para todo $i \geq 0$, para cada $k \geq 1$ podemos escolher um δ_k tal que toda δ_k-pseudo orbita (x_i, t_i) com n_k elementos é $1/2^k$ sombreada por seu primeiro elemento.

Etapa 2. Para cada δ_k podemos achar m_k tal que $d(\phi^{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \delta_k$ para todo $i \geq m_k$. Elegimos $\{m_k\}_{k\geq 1}$ tal que para cada $k \geq 1$:

(i) $m_{k+1} > 4^k m_k$;

(ii) $m_{k+1} - m_k = s_k n_k$ para algum inteiro s_k;

(iii) $4^k n_{k+1} < m_{k+1}$.

Note que, para cada $k \geq 1$ e $0 \leq s < s_k$, a sequência $\{(x_i, t_i)\}_{i=m_k+sn_k}^{m_k+(s+1)n_k-1}$ é uma δ_k-pseudo orbita $1/2^k$-sombreada pelo ponto $x_{m_k+sn_k}$.

Etapa 3. Com o fim de achar um $z \in X$ que sombreie positivamente em média assintótica a $\overline{x}$, usaremos o lemma 5.2.3 para as sequências $\{y_i\}_{i\geq 0}$, $\{\varepsilon_i\}_{i\geq 0}$ e $\{p_i\}_{i\geq 0}$ que definimos como segue:

	$\{y_i\}_{i\geq 0}$	$\{p_i\}_{i\geq 0}$	$\{\varepsilon_k\}_{k\geq 0}$
	$\varepsilon_0 = 1$	$t_0 = m_1$	$y_0 = x_0$
	$1/2$	$t_{m_1} + \cdots + t_{m_1+n_1-1}$	x_{m_1}
$s_1 -$ vezes	$1/2$	$t_{m_1+n_1} + \cdots + t_{m_1+2n_1-1}$	$x_{m_1+n_1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$1/2$	$t_{m_1+(s_1-1)n_1} + \cdots t_{m_2-1}$	$x_{m_2-n_1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$1/2^k$	$t_{m_k} + \cdots + t_{m_k+n_k-1}$	x_{m_k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s_k -$ vezes	$1/2^k$	$t_{m_k+sn_k} + \cdots + t_{m_k+(s+1)n_k-1}$	$x_{m_k+sn_k}$; $0 \leq s < s_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$1/2^k$	$t_{m_k+(s_k-1)n_k} + \cdots + t_{m_{k+1}}$	$x_{m_{k+1}-n_k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Etapa 4. Observe que para cada $k \geq 1$, $0 \leq s < s_k$ $t_{m_k+sn_k} + \cdots + t_{m_k+(s+1)n_k-1} \geq n_k$, assim podemos aplicar o Lema 5.2.3. Seja $z \in X$ dado pelo Lema 5.2.3. Para cada $k \geq 1$, $0 \leq s < s_k$ o conjunto de erros sobre o segmento $(t_{m_k+sn_k}, t_{m_k+sn_k} + \cdots + t_{m_k+(s+1)n_k-1})$ é definido por

$$\{\tilde{t}_{m_k+sn_k} \leq t \leq \tilde{t}_{m_k+(s+1)n_k} : d(\phi^t(z), \phi^{t-\tilde{t}_{m_k+sn_k+1}}(x_{m_k+sn_k})) \geq 1/2^k\}.$$

onde $\tilde{t}_i = t_0 + t_1 + \cdots + t_{i-1}$.

Seja J^- a união de todos os conjuntos acima. Também seja $J_0 := \{i \geq 0 : [\tilde{t}_i, \tilde{t_{i+1}}] \subseteq J^-\}$

e $J^+ := J_0^c$. Se $i \in J^+ \cap [m_k, m_{k+1})$, então existe $k \geq 1$, $0 \leq s < s_k$ tal que $t \in [\tilde{t}_i, \tilde{t_{i+1}}]$ e $t \in [\tilde{t}_{m_k+sn_k-1}, \tilde{t}_{m_k+(s+1)n_k}]$ satisfazendo:

(a) $d(\phi^{t-\tilde{t}_i}(x_i), \phi^{t-\tilde{t}_{m_k+sn_k-1}}(x_{m_k+sn_k})) < \frac{1}{2^k}$, visto que $x_{m_k+sn_k}$, $1/2^k$-sombreia to $\{(x_i,t_i)\}_{i=m_k+sn_k}^{m_k+(s+1)n_k-1}$.

(b) $d(\phi^t(z), \phi^{t-\tilde{t}_{m_k+sn_k-1}}(x_{m_k+sn_k})) < \frac{1}{2^k}$, pela escolha de z.

Assim, por (a) e (b), temos

$$d(\phi^t(z), \phi^{t-\tilde{t}_i}(x_i)) \leq d(\phi^t(z), \phi_{y_k}^{t-\tilde{t}_{m_k+sn_k-1}}) + d(\phi^t(z), \phi^{t-\tilde{t}_{m_k+sn_k-1}}(x_{m_k+sn_k})) < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Pela definição de $(\overline{\eta}(n))_{n\geq 0}$,

$$\int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}} d(\phi^t(z), \phi^{t-\tilde{t}_i}(x_i))dt < \overline{\eta}(k-1)t_i \leq M \cdot \overline{\eta}(k-1). \tag{5.3.2}$$

Portanto,

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ i\in J^+}} \int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}} d(\phi^t(z), \phi^{t-s_i}(x_i))dt = 0.$$

Estapa 5. Vemos provar que J^+ tem densidade 1. De fato, para cada $k \geq 1$ e $0 \leq s < s_k$, seja $\lambda = \lambda(k,s)$ o conjunto de erros ocorrendo nao sombreamento da orbita z sobre o segmento de órbita $(ym_k + sn_k), p_{m_k+sn_k}$, então $\#J_0 \cap [m_k + sn_k, m_k + (s+1)n_k) \leq Leb(\lambda) \leq [g(p_{m_k+sn_k}, 1/2^k)] + 1 \leq [g(Mn_k, 1/2^k)] + 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m_{k+1}}\#(J^+ \cap [m_k, m_{k+1})) &\geq \frac{1}{m_{k+1}} \cdot \frac{m_{k+1}-m_k}{n_k}(n_k - [g(Mn_k, 1/2^k)] + 1) \\
&= (1 - m_k/m_{k+1})(1 - ([g(Mn_k, 1/2^k)] + 1)/n_k) \\
&= (1 - 1/4^k)(1 - 1/2^k).
\end{aligned}$$

Continuando, seja $n \geq 1$, então existem k, s, t tais que $n \in [m_{k+1}, m_{k+2})$, onde $n = m_{k+1} + sn_{k+1} + r$, com $0 \leq r <_{n_{k+1}}$, $0 \leq s \leq s_{k+1}$, assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\#(J \cap [0,n]) &\geq \frac{1}{m_{k+1}} \cdot \frac{m_{k+1}}{n}\#(J \cap [m_k, m_{k+1})) + \frac{1}{n}\#(J \cap [m_{k+1}, n)) \\
&\geq (1-1/4^k)(1-1/2^k)\frac{m_{k+1}}{n} + \frac{s(n_{k+1} - ([g(Mn_{k+1}, 1/2^{k+1})] + 1))}{n} \\
&\geq (1-1/4^k)(1-1/2^k)\frac{m_{k+1}}{n} + (1 - 1/2^{k+1})sn_{k+1}/n \\
&\geq (1-1/4^k)(1-1/2^k)\frac{m_{k+1}}{n} + (1-1/4^k)(1-1/2^k)sn_{k+1}/n \\
&\geq (1-1/4^k)(1-1/2^k)(1 - n_{k+1}/m_{k+1}) \\
&\geq (1-1/4^k)(1-1/2^k)(1-1/4^k).
\end{aligned}$$

Etapa 6. Combinando o fato anterior com (5.3.2), pelo Lema 5.3.2, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+1}} d(\phi^t(z), \phi^{t-\tilde{t}_i}(x_i))dt = 0.$$

Isto termina a demonstração. ■

O exemplo a seguir mostra que a aplicação tempo-1 de um fluxo com AASP pode não herdar esta propriedade e portanto a proposição 5.3.1 não se segue diretamente dos teoremas D e [43, Theorem 3.5].

EXEMPLO 5. Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo transitivo. Então o fluxo suspensão com função teto $r = 1$, $\Phi_f : X_1 \times \mathbb{R} \to X_1$, satisfaz a AASP, mas ϕ_f^1 não.

Foi provado em [50, Theorem C] que fluxos transitivos satisfazem a AASP. Pela hipótese sobre f vemos que Φ_f é transitivo e portanto tem a AASP. Agora, seja $J = \{2^k : k \geq 1\}$. Sabemos que J temo densidade nula. Seja $0 < \varepsilon < 1/4$ e fixemos $0 < t_0 < \varepsilon$, $1 - \varepsilon < t_1 < 1$. Seja $x \in X$ e para $k \in \mathbb{N}$ considere a sequência

$$x_{2^k} = (x, t_0), ..., x_{2^{k+1}-1} = \phi_f^{2^{k+1}-1}(x, t_0), \qquad \text{para } k \text{ par.}$$

$$x_{2^k} = (x, t_1), ..., x_{2^{k+1}-1} = \phi_f^{2^{k+1}-1}(x, t_1), \qquad \text{para } k \text{ ímpar.}$$

É claro que $d(\phi_f^1(x_i), x_{i+1}) = 0$ se $i \notin J$, portanto é uma pseudo-órbita assintótica em média. Para qualquer $z \in X_1$, o conjunto $\overline{J} = \{n : d(\phi_f^n z, x_i) < \varepsilon\}$ não pode ter densidade nula. Pelo Lema 5.3.2, a sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ não pode ser assintoticamente sombreado em média por nenhum ponto em X_1 e logo a aplicação tempo-1 de Φ_f não tem a AASP. ∎

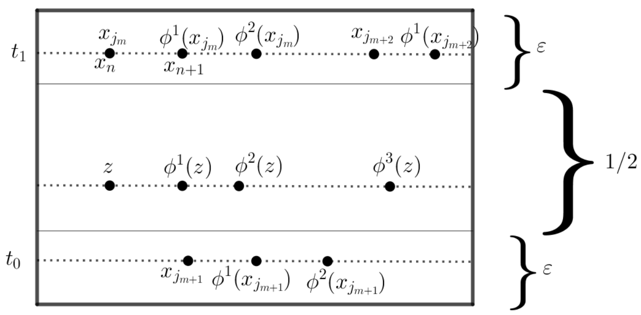

Figura 1 – Construção da sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$.

6 Entropia topológica de pontos irregulares

Neste capítulo consideramos os conjuntos de pontos irregulares para a média de Birkhoff e calculamos sua entropia topológica sob certas hipóteses. No que segue, (X, d) sempre será um espaço métrico compacto, $f : X \to X$ uma função contínua e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua que chamaremos observável.

6.1 Conjuntos irregulares

Definição. Um ponto $x \in X$ é **irregular** (para f) com respeito a φ (ou φ-**irregular**) se a sequência das médias de Birkhoff,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)),$$

não converge quando $n \to \infty$.

O conjunto de todos os pontos irregulares com respeito a φ, que chamamos **conjunto irregular** para φ ou conjunto φ-**irregular**, será denotado por $\hat{X}(f,\varphi)$. Também, o **conjunto irregular** de f é

$$\hat{X}(f) := \bigcup_{\varphi\in C(X)} \hat{X}(f,\varphi).$$

Note que, pelo teorema ergódico de Birkhoff, o conjunto $\hat{X}(f)$ (e portanto cada $\hat{X}(f,\varphi)$) não é detectável por medidas invariantes; quer dizer, tem medida nula com respeito a qualquer medida f-invariante. Contudo, estes conjuntos irregulares podem ser "grandes" sob outros pontos de vista e são um objeto importante de estudo na teoria da dimensão, análise multifractal e topologia geral, inclusive. Por exemplo, para muitos sistemas dinâmicos estes conjuntos são densos e carregam entropia total (veja [7, 26, 69, 70] e Seções 6.2 e 6.4).

Nós queremos medir os conjuntos irregulares do ponto de vista da teoria da dimensão, em particular estimar a entropia topológica de Bowen de $\hat{X}(f,\varphi)$. Um primeiro estágio é saber quando $\hat{X}(f,\varphi)$ é não vazio. É claro que $\hat{X}(f,\varphi) = \emptyset$ se φ é uma constante. Esta observação se estende também para observáveis que são "essencialmente" constantes. Para ser mais precisos, lembremos que $C(X) := \{\varphi : X \to \mathbb{R} : \varphi \text{ é contínua}\}$ munido com a norma do supremo forma um espaço de Banach. Cada $\psi \in C(X)$ induz uma função $\hat{\psi} : \mathfrak{M}(f) \to \mathbb{R}$ definida por $\hat{\psi}(\mu) := \int \psi d\mu$. Dadas $\psi_1, \psi_2 \in C(X)$ é natural se perguntar quando $\hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_2$.

Definição. A função $\psi \in C(X)$ é um **cobordo** se $\psi = h - h \circ f$ para alguma função contínua $h : X \to \mathbb{R}$.

Proposição 6.1.1. *Se ψ é um cobordo, então $\int \psi d\mu = 0$ para toda $\mu \in \mathfrak{M}(f)$.*

Demonstração. Se $\psi = h - h \circ f$ para alguma $h \in C$, então para qualquer medida f-invariante μ

$$\int \psi d\mu = \int h - h \circ f du = \int hdu - \int h \circ f d\mu = \int hd\mu - \int hd\mu = 0. \qquad \blacksquare$$

Proposição 6.1.2. *Se duas funções ψ_1, ψ_2 diferem de um cobordo, então $\hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_2$.*

Demonstração. Se ψ_1 e ψ_2 diferem de um cobordo, então pela proposição anterior

$$\int (\psi_1 - \psi_2) d\mu = 0$$

para toda medida f-invariante μ, logo $\hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_2$. $\blacksquare$

Definição. As funções $\psi_1, \psi_2 \in C(X)$ são **cohomólogas** se diferem de um cobordo; isto é, existe uma função $h \in C(X)$ tal que

$$\psi_1 - \psi_2 = h - h \circ f.$$

A função h é dita **função de transferência**. A relação "é cohomologa com" define uma relação de equivalência em $C(X)$ e a classe da função nula é composta por todos os cobordos. Denotamos por $\mathrm{Cob}(X, f, \psi)$, ou simplesmente $\mathrm{Cob}(\psi)$, a classe de todas as funções cohomólogas com ψ. Enfatizamos que todas as definições que temos dado acima dependem da dinâmica (X, f).

É importante observar que se $x \in \hat{X}(f, \varphi)$ então existem sequências de inteiros positivos $(n_k)_{k\geq 1}$, $(m_k)_{k\geq 1}$ e números reais $\alpha < \beta$ tais que

$$\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \varphi(f^j(x)) = \alpha < \beta = \frac{1}{m_k} \sum_{j=0}^{m_k-1} \varphi(f^j(x)).$$

Segue então, usando métodos clássicos, que existem $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}(f)$ satisfazendo

$$\int \varphi d\mu_1 = \alpha \qquad \text{e} \qquad \int \varphi d\mu_2 = \beta$$

e em particular existem medidas invariantes ergódicas que satisfazem a mesma relação. Nesta direção, temos o resultado abaixo devido a D. Thompson [69, Lemma 1.9] (veja também [70, Lemma 2.1] e [46] para uma prova alternativa do Teorema 6.1.5). A notação $\overline{\mathrm{Cob}(X, f, c)}$ onde c é uma constante real, significa o fecho de $\mathrm{Cob}(X, f, c)$ considerada em $C(X)$ com a norma do supremo. Lembre também que $S_n\varphi = \varphi + \varphi \circ f + ... + \varphi \circ f^{n-1}$.

Proposição 6.1.3 (**Thompson**, [69, Lemma 1.9]). *Seja $f : X \to X$ contínua. Para $\varphi \in C(X)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\frac{1}{n}S_n\varphi$ *não converge pontualmente a uma constante.*

(b) $\inf_{\mu \in \mathfrak{M}(f)} \int \varphi d\mu < \sup_{\mu \in \mathfrak{M}(f)} \int \varphi d\mu$.

(c) $\inf_{\mu \in \mathfrak{M}_{erg}(f)} \int \varphi d\mu < \sup_{\mu \in \mathfrak{M}_{erg}(f)} \int \varphi d\mu$.

(d) $\varphi \notin \overline{\mathrm{Cob}(M, f, c)}$ *para qualquer valor de* $c \in \mathbb{R}$.

(e) $\frac{1}{n}S_n\varphi$ *não converge uniformemente a uma constante.*

Além disso, a propriedade

(f) $\hat{X}(f, \varphi) \neq \emptyset$

implica todas as propriedades anteriores (a)-(e).

Proposição 6.1.4 (**Thompson**, [70, Lemma 2.1]). *Se (X, f) tem a propriedade de quase-especificação, então as propriedades de (a)-(f) na proposição anterior são todas equivalentes.*

Teorema 6.1.5 (**Thompson**, [70, Theorem 4.1]). *Suponha que $f : X \to X$ satisfaz a propriedade de quase-especificação e $\hat{X}(f, \varphi) \neq \emptyset$, então*

$$h(f) = h(f, \hat{X}(f, \varphi)).$$

Notamos que por um teorema de K. Sigmund ([65, Theorem 4], [23, Theorem 3]), quando f satisfaz a propriedade de especificação, $\hat{X}(f)$ nunca é vazio.

Em geral, um sistema (X, f) pode ter uma dinâmica complicada o que tornaria difícil obter algum tipo de informação, mas pode ocorrer que existam subconjuntos invariantes $\Gamma \subseteq X$ e $k \geq 1$ tais que (Γ, f^k) seja mais simples de analisar. Portanto, a fim de estudar o conjunto $\hat{X}(f)$, começamos estudando o conjunto $\hat{X}(f^k|_\Gamma)$. A proposição a seguir conecta de maneira precisa os pontos irregulares de f e f^k.

Proposição 6.1.6. *Para cada $\ell \geq 1$ e cada $\varphi \in C(X)$, se cumpre que*

$$\hat{X}(f, \varphi) = \bigcup_{j=0}^{\ell-1} \hat{X}(f^\ell, \varphi \circ f^j).$$

Em particular, $\hat{X}(f^\ell, \varphi) \subseteq \hat{X}(f, \varphi)$ e $\hat{X}(f) = \hat{X}(f^\ell)$.

Demonstração. Seja $x \in \bigcup_{j=0}^{\ell-1} \hat{X}(f^\ell, \varphi \circ f^j)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x \in \hat{X}(f^\ell, \varphi)$. Sejam $(n_k)_{k\geq 1}$ e $(m_k)_{k\geq 1}$ duas sequências crescentes de inteiros positivos tais que

$$L_0^+ := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{j\ell}(x)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \varphi(f^{j\ell}(x))$$

e

$$L_0^- := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{j\ell}(x)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_k} \sum_{j=0}^{m_k-1} \varphi(f^{j\ell}(x)).$$

Pela escolha de x, temos que $L_0^- < L_0^+$.

Sejam $(n_k^1)_{k\geq 1}$ e $(m_k^1)_{k\geq 1}$ subsequências de $(n_k)_{k\geq 1}$ e $(m_k)_{k\geq 1}$, respectivamente, tais que

$$L_1^+ := \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\varphi(f^{j\ell+1}(x)) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k^1}\sum_{j=0}^{n_k^1-1}\varphi(f^{j\ell+1}(x))$$

e

$$L_1^- := \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{m_k}\sum_{j=0}^{m_k-1}\varphi(f^{j\ell+1}(x)) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{m_k^1}\sum_{j=0}^{m_k^1-1}\varphi(f^{j\ell+1}(x)).$$

Por definição, $L_1^- \leq L_1^+$.

Continuando, sejam

$$(n_k^{\ell-1})_{k\geq 1} \subseteq (n_k^{\ell-2})_{k\geq 1} \subseteq \cdots \subseteq (n_k^1)_{k\geq 1} \subseteq (n_k)_{k\geq 1}$$

e

$$(m_k^{\ell-1})_{k\geq 1} \subseteq (m_k^{\ell-2})_{k\geq 1} \subseteq \cdots \subseteq (m_k^1)_{k\geq 1} \subseteq (m_k)_{k\geq 1}$$

subsequências encaixadas crescentes e defina L_i^1 e L_i^+ como antes para cada $i = 1, 2, ..., \ell-1$; isto é,

$$L_i^- := \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{n_k^{i-1}}\sum_{j=0}^{n_k^{i-1}-1}\varphi(f^{j\ell+(i-1)}(x)) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{m_k^i}\sum_{j=0}^{m_k^i-1}\varphi(f^{j\ell+i}(x))$$

e

$$L_i^+ := \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{n_k^{i-1}}\sum_{j=0}^{n_k^{i-1}-1}\varphi(f^{j\ell+(i-1)}(x)) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k^i}\sum_{j=0}^{n_k^i-1}\varphi(f^{j\ell+i}(x)).$$

Afirmação. $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ell n_k^{\ell-1}}\sum_{j=0}^{\ell n_k^{\ell-1}-1}\varphi(f^j(x)) = \frac{1}{\ell}(L_0^+ + L_1^+ + \cdots + L_{\ell-1}^+).$

Demonstração da afirmação.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell}(L_0^+ + L_1^+ + \cdots + L_{\ell-1}^+) &= \frac{1}{\ell}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k^{\ell-1}}\left(\sum_{j=0}^{n_k^{\ell-1}-1}\varphi(f^{j\ell}(x)) + \cdots + \sum_{j=0}^{n_k^{\ell-1}-1}\varphi(f^{j\ell+\ell-1}(x))\right)\\
&= \frac{1}{\ell}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k^{\ell-1}}\sum_{j=0}^{\ell n_k^{\ell-1}-1}\varphi(f^j(x))\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ell n_k^{\ell-1}}\sum_{j=0}^{\ell n_k^{\ell-1}-1}\varphi(f^j(x)). \qquad \square
\end{aligned}$$

Analogamente provamos

Afirmação. $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ell m_k^{\ell-1}}\sum_{j=0}^{\ell m_k^{\ell-1}-1}\varphi(f^j(x)) = \frac{1}{\ell}(L_0^- + L_1^- + \cdots + L_{\ell-1}^-).$ $\square$

Portanto, pelas afirmações acima

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ell n_k^{\ell-1}} \sum_{j=0}^{\ell n_k^{\ell-1}-1} \varphi(f^j(x)) \\
&= \frac{1}{\ell}(L_0^- + L_1^- + \cdots L_{\ell-1}^-) \\
&< \frac{1}{\ell}(L_0^+ + L_1^+ + \cdots L_{\ell-1}^+) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ell m_k^{\ell-1}} \sum_{j=0}^{\ell m_k^{\ell-1}-1} \varphi(f^j(x)) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)).
\end{aligned}$$

O que mostra que $x \in \hat{X}(f,\varphi)$. Logo $\bigcup_{j=0}^{\ell-1} \hat{X}(f^\ell, \varphi \circ f^j) \subseteq \hat{X}(f,\varphi)$.

Para mostrar que $\hat{X}(f,\varphi) \subseteq \bigcup_{j=0}^{\ell-1} \hat{X}(f^\ell, \varphi \circ f^j)$, seja $x \in \hat{X}(f,\varphi)$ e suponha que

$$x \notin \bigcup_{j=0}^{\ell-1} \hat{X}(f^\ell, \varphi \circ f^j).$$

Então

$$L_i := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^{j\ell+1}(x))$$

existe para cada $0 \leq i \leq \ell - 1$.

Sejam $(n_k^*)_{k\geq 1}$ e $(m^*)_{k\geq 1}$ sequências de inteiros positivos tais que

$$L^+ := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k^*}\sum_{j=0}^{n_k^*-1}\varphi(f^j(x))$$

e

$$L^- := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_k^*}\sum_{j=0}^{m_k^*-1}\varphi(f^j(x)).$$

Para cada $k \geq 1$ escrevemos $n_k^* = \ell\tilde{n}_k + r_k$, com $0 \leq r_k \leq \ell - 1$. Se $M = \max\{\varphi(x) : x \in X\}$ e $N = \min\{\varphi(x) : x \in X\}$, então

$$\ell\frac{N}{n_k^*} \leq \frac{1}{n_k^*}(\varphi(f^{\ell\tilde{n}_k}(x)) + \varphi(f^{\ell\tilde{n}_k+1}(x)) + \cdots + \varphi(f^{\ell\tilde{n}_k+r_k}(x))) \leq \ell\frac{M}{n_k^*}$$

e portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k^*}(\varphi(f^{\ell\tilde{n}_k}(x)) + \varphi(f^{\ell\tilde{n}_k+1}(x)) + \cdots + \varphi(f^{\ell\tilde{n}_k+r_k}(x))) = 0.$$

Também é claro que $\lim_{k\to\infty} \frac{\ell \tilde{n}_k}{n_k^*} = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} L^+ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k^*} \sum_{j=0}^{\ell\tilde{n}_k - 1} \varphi(f^{j\ell}(x)) + \frac{1}{n_k^*}(\varphi(f^{\ell\tilde{n}_k}(x)) + \varphi(f^{\ell\tilde{n}_k+1}(x)) + \cdots + \varphi(f^{\ell\tilde{n}_k + r_k}(x))) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\ell\tilde{n}_k}{n_k^*} \frac{1}{\ell\tilde{n}_k} \sum_{j=0}^{\ell\tilde{n}_k - 1} \varphi(f^{j\ell}(x)) \\ &= \frac{1}{\ell}(L_0 + L_1 + ... + L_{\ell-1}). \end{aligned}$$

Analogamente, prova-se que

$$L^- = \frac{1}{\ell}(L_0 + L_1 + ... + L_{\ell-1}).$$

Isto mostra que $L^- = L^+$, o que é um absurdo. Isto termina a prova da igualdade $\hat{X}(f,\varphi) = \bigcup_{j=0}^{\ell-1} \hat{X}(f^\ell, \varphi \circ f^j)$.
As outras afirmações são imediatas. ■

É importante observar que $\hat{X}(f^\ell, \varphi)$ pode ser um subconjunto próprio de $X(f,\varphi)$.

Proposição 6.1.7. *Para (X, f) se cumpre que*

$$\hat{X}(f,\varphi) = \hat{X}(f, c_1\varphi + c_2) = \hat{X}(f, \varphi \circ f^k),$$

para toda $\varphi \in C(X)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Também é verdade que se φ e $\tilde{\varphi}$ são cohomólogas, então $\hat{X}(f,\varphi) = \hat{X}(f,\tilde{\varphi})$.

Pontos irregulares para fluxo se definem de forma análoga a como foi definido para funções contínuas e é denotado por $\hat{X}(\Phi,\varphi)$.

Proposição 6.1.8. *Sejam Φ um fluxo contínuo e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então*

$$\hat{X}(\Phi,\varphi) = \hat{X}(\phi^1, \overline{\varphi}),$$

onde $\overline{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ é definida por $\overline{\varphi}(x) = \int_0^1 \varphi(\phi^t(x))dt$.

Demonstração. A afirmação segue imediatamente do fato que, como mostrado no Teorema 3.1.3,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^N \varphi(\phi^t(x))dt \qquad \text{e} \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \overline{\varphi}(\phi^j(x))$$

convergem ou divergem simultaneamente. ■

O Teorema de Thompson é também válido no contexto de fluxos com ASP.

Teorema 6.1.9. *Se Φ é um fluxo contínuo com ASP e $\hat{X}(\Phi,\varphi) \neq \emptyset$, então*

$$h(\Phi) = h(\Phi, \hat{X}(\Phi,\varphi)).$$

Demonstração. Se o fluxo Φ tem ASP, pelo Teorema D, ϕ^1 também tem ASP e o Teorema 6.1.5 pode ser aplicado a $f = \phi^1$ com função $\overline{\varphi}$. Assim,

$$\begin{aligned} h(\Phi) &= h(\phi^1) \\ \text{(Teorema 6.1.5)} \quad &= h(\phi^1, \hat{X}(\phi^1, \overline{\varphi})) \\ \text{(Teorema A)} \quad &= h(\Phi, \hat{X}(\phi^1, \overline{\varphi})) \\ \text{(Proposição 6.1.8)} \quad &= h(\Phi, \hat{X}(\Phi, \varphi)) \end{aligned}$$

e segue a afirmação do teorema. ∎

6.2 Pontos irregulares em teoria ergódica diferenciável

Nesta seção, usamos o Teorema 6.1.5 para evidenciarmos que, para muitos exemplos importantes em sistemas dinâmicos, os conjuntos $\hat{X}(f)$ e $\hat{X}(f, \varphi)$ são tão grandes quanto o espaço inteiro, quando olhamos suas entropias. Nosso resultado principal nesta seção mostra que dado qualquer difeomorfismo $f : M \to M$ de classe $C^{1+\alpha}$ sobre superfícies fechadas, o conjunto de pontos irregulares de f carrega entropia total. Destacamos que, a priori, não supomos que o sistema satisfaz a propriedade de especificação. Formalmente, nosso resultado principal nesta seção é o seguinte:

Teorema E. *Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ sobre uma superfície Riemanniana fechada, então*

$$h(f) = h(f, \hat{X}(f)).$$

Para darmos a prova do Teorema E, lembremos alguns conceitos da Teoria Ergódica Diferenciável que serão necessários.

Definição. Um ponto $x \in M$ é **Lyapunov regular** se existem:

(i) Um número $s(x) \geq 1$;

(ii) Números $\chi_1(x) < \cdots < \chi_{s(x)}(x)$; e

(iii) Uma decomposição

$$T_xM = E_x^1 \oplus E_x^2 \oplus \cdots E_x^{s(x)}$$

tais que

$$\chi_j(x) = \lim_{|k| \to \infty} \frac{1}{k} \log \|df_x^k(v)\|, \qquad \text{para todo } v \in E_x^j \setminus \{0\}$$

para todo $1 \leq j \leq s(x)$.

O conjunto de todos os pontos Lyapunov regulares será denotado por $R(f)$. O Teorema Multiplicativo de Oseledets afirma que $\mu(R(f)) = 1$ para qualquer medida invariante de probabilidade. Mais ainda, as funções

$$x \mapsto \chi_j(x), \qquad x \mapsto s(x) \qquad \text{e} \qquad x \mapsto E_x^j,$$

são funções Borel mensuráveis e f-invariantes. Isto implica que se μ é uma medida ergódica, então $x \mapsto s(x)$, $x \mapsto \chi_j(x)$ e $x \mapsto E_x^j$ são constantes μ-q.t.p. e as denotamos por $s(\mu)$, $\chi_j(\mu)$ e $E^j(\mu)$, respectivamente.

Definição. Um ponto regular é **hiperbólico** se $s(x) \geq 2$ e existe $i(x)$ tal que $\chi_{i(x)}(x) < 0 < \chi_{i(x)+1}(x)$.

Denotamos por $R_H(f)$ o conjunto de todos os pontos Lyapunov regulares hiperbólicos. Uma medida é dita **hiperbólica** se $R_H(f)$ tem medida total.
Se μ é uma medida ergódica hiperbólica, definimos

$$\chi(\mu) := \min_j |\chi_j(\mu)|.$$

O resultado abaixo devido a A. Katok [40, Suplement 4 and 5] (veja também [34, Theorem 1]) permite aproximar a entropia métrica por entropias de medidas hiperbólicas.

Teorema 6.2.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, sobre uma variedade riemanniana compacta. Seja μ uma medida ergódica hiperbólica. Então para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe um conjunto $\Gamma \in M$ e um inteiro positivo m tais que:*

(K1) *Γ é um conjunto básico e topologicamente misturador (com respeito a f^m).*
(K2) *$h_\mu(f) - \varepsilon < h(f|_\Gamma)$.*

O lema abaixo mostra que a entropia topológica pode ser aproximada por entropias de medidas hiperbólicas.

Lema 6.2.2. *Se $f \in C^{1+\alpha}(M^2)$, $\alpha > 0$. Se $h(f) > 0$, então existe uma sequência de medidas ergódicas hiperbólicas $(\mu_n)_{n\geq 1}$ tais que $h_{\mu_n}(f) \to h(f)$.*

Demonstração. Pelo Princípio Variacional, existe uma sequência de medidas ergódicas $(\mu_n)_{n\geq 1}$ tais que $h_{\mu_n}(f) \to h(f)$. Pela Desigualdade de Ruelle, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que μ_n é ergódica hiperbólica para todo $n \geq N$. ■

Demonstração do Teorema E. Se $h(f) = 0$, o resultado é imediato.

Se $h(f) > 0$ e $\mu \in \mathfrak{M}(f)$ é uma medida ergódica hiperbólica com $h_\mu(f) > 0$, então por (K1) podemos aplicar o Teorema 6.1.5 e assim obter que

$$\begin{aligned} h(f|_\Gamma) &= \frac{1}{k} h(f^k|_\Gamma) \\ &= \frac{1}{k} h(f^k|_\Gamma, \hat{X}(f^k|_\Gamma)) \qquad \text{Por (K1)} \\ &\leq \frac{1}{k} h(f^k|_\Gamma, \hat{X}(f|_\Gamma)) \\ &= h(f|_\Gamma, \hat{X}(f|_\Gamma)). \end{aligned}$$

Agora seja $(\mu_m)_{m\geq 1}$ uma sequência de medidas ergódicas hiperbólicas tais que $h_{\mu_m}(f) \uparrow h(f)$. Para cada $m \geq 1$ seja $(\varepsilon_n^m)_{n\geq 1}$ uma sequência de termos positivos convergindo para 0 e Γ_n^m como no teorema 6.2.1, então para cada $m \geq 1$ e $n \geq 1$ temos que

$$h_{\mu_m}(f) - \varepsilon_n^m < h(f|_{\Gamma_n}).$$

Equivalentemente,

$$h_{\mu_m}(f) - \varepsilon_n^m < h(f|_\Gamma, \hat{X}(f|_\Gamma))$$

e portanto

$$h_{\mu_m}(f) - \varepsilon_n^m < h(f, \hat{X}(f)).$$

Logo, fazendo $n \to \infty$, obtemos que

$$h_{\mu_m}(f) \leq h(f, \hat{X}(f)).$$

Fazendo agora m tender para infinito temos

$$h(f) = h(f, \hat{X}(f))$$

como queríamos. ■

Temos usado fortemente o Teorema 6.2.1 para logo aplicar o Teorema 6.1.5 e obter informação sobre os pontos irregulares. Em dimensões mais altas nem sempre podemos supor a existência de medidas ergódicas hiperbólicas e portanto não podemos usar o Teorema 6.2.1. Todavia, o Teorema 6.1.5 pode ser usado em outros contextos como mostramos abaixo (compare com [7] e [20]).

Teorema 6.2.3. *Seja $f \in C^1(M)$. Se f é Axioma A, então*

$$h(f) = h(f, \hat{X}(f)).$$

Demonstração. Pelo teorema de decomposição espectral,

$$\Omega(f) = \Omega_1(f) \cup \Omega_2(f) \cup \cdots \cup \Omega_m(f)$$

e $\Omega_i(f) = \Omega_1^i(f) \cup \Omega_2^i(f) \cup \cdots \cup \Omega_{\ell_i}^i(f)$ satisfazendo $f^{\ell_i} : \Omega_k^i(f) \to \Omega_k^i(f)$ com a propriedade de especificação, para cada $1 \leq k \leq \ell_i$. Portanto, para qualquer $1 \leq k \leq \ell_i$, obtemos

$$\frac{1}{\ell_i} h(f^{\ell_i}|_{\Omega_k^i(f)}) \leq h(f, \hat{X}(f)).$$

Logo

$$h(f,\hat{X}(f)) \geq \max\{\frac{1}{\ell_i}h(f^{\ell_i}|_{\Omega^i_k(f)})\} = h(f|_{\Omega_i(f)}).$$

Finalmente,

$$h(f,\hat{X}(f)) \geq \max\{h(f|\Omega_i)\} = h(f). \qquad \blacksquare$$

6.3 Entropia do conjunto $\hat{X}(f,\varphi)$

Na seção anterior, sob certas hipóteses na função f, temos calculado a entropia do conjunto $\hat{X}(f)$. Agora queremos estimar a entropia dos conjuntos $\hat{X}(f,\varphi)$. A ideia é a mesma que antes, calcular a entropia topológica de certos subconjuntos $X_{f^k|_\Gamma}(\varphi|_\Gamma)$ com $\Gamma \subseteq X$ e $k \geq 1$ e daí obter estimativas para $h(f,\hat{X}(f,\varphi))$. Isto não é imediato, pois quando $\hat{X}(f,\varphi)$ é não vazio, mesmo que f^k tenha a propriedade de especificação sobre Γ, o conjunto $\hat{X}(f|_\Gamma,\varphi|_\Gamma)$ pode ser vazio (no caso que $\varphi|_\Gamma$ for constante, por exemplo). De fato, os teoremas obtidos na seção anterior para $\hat{X}(f)$ podem não ser verdadeiros quando consideramos $\hat{X}(f,\varphi)$.

EXEMPLO 6. Seja $f \in C^1(M)$ um difeomorfismo Axioma A com decomposição espectral $\Omega(f) = \Omega_1(f) \cup \cdots \cup \Omega_\ell(f)$ e suponha que existem $i,j \in \{1,2,...,\ell\}$ com $h(f|_{\Omega_i}) < h(f|_{\Omega_j})$. Considere $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi|_{\Omega_i}$ não é cohomóloga a uma constante e $\varphi|_{\Omega_j} = 0$. Então $\hat{X}(f,\varphi) \neq \emptyset$, mas $h(f,\hat{X}(f,\varphi)) < h(f|_{\Omega_j}) \leq h(f)$ e portanto não temos a igualdade.

Em geral não é simples estimar o valor exato da entropia topológica de um sistema dinâmico, procuramos então subsistemas para os quais possamos calcular a entropia e este valor seja cada vez maior para ter um valor aproximado da entropia do sistema original. Assim, no contexto de pontos irregulares, para calcularmos a entropia do conjunto $\hat{X}(f,\varphi)$ quando o sistema não tem a propriedade de quase-especificação (e portanto não podemos aplicar o Teorema 6.1.5), olhamos os subsistemas que possam ter essa propriedade para estimarmos sua entropia. Mais concretamente,

Teorema 6.3.1. *Sejam $f : X \to X$ e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas sobre o espaço métrico compacto X. Suponha que f e φ satisfazem as seguintes condições:*

(C1) *Para cada $n \geq 1$, existe Γ_n compacto f-invariante tal que $f|_{\Gamma_n}$ tem a propriedade de quase-especificação, e medidas μ_n, ν_n com $\mu_n(\Gamma_n) = \nu_n(\Gamma_n) = 1$ tais que*

$$\int \varphi d\mu_n < \int \varphi d\nu_n. \tag{6.3.1}$$

(C2) $h(f|_{\Gamma_n}) \to h(f)$.

Então,

$$h(f) = h(f,\hat{X}(f,\varphi)).$$

Demonstração. Para cada $n \geq 1$, o conjunto $\hat{X}(\varphi|_{\Gamma_n})$ é não vazio, pela desigualdade 6.3.1 e pela Proposição 6.1.3. Como $f|_{\Gamma_n}$ tem especificação, o Teorema 6.1.5 afirma que

$$h(f|_{\Gamma_n}) = h(f|_{\Gamma_n}, \hat{X}(\varphi|_{\Gamma_n})).$$

Agora, é claro que $\hat{X}(\varphi|_{\Gamma_n}) \subseteq \hat{X}(f, \varphi)$, portanto

$$h(f, \hat{X}(f, \varphi)) \geq h(f|_{\Gamma_n}, \hat{X}(\varphi|_{\Gamma_n})) = h(f|_{\Gamma_n}).$$

Tomando limite quando $n \to \infty$, obtemos o resultado. ■

Observação 6.3.2. Em muitos casos (como acontece no Teorema F, por exemplo), os conjuntos Γ_n construídos para verificar a hipótese (C1) do Teorema 6.3.1 são encaixados; isto é, $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$ e portanto basta que a desigualdade (6.3.1) seja satisfeita por algum n, pois isso é suficiente para garantir que $\hat{X}(f, \varphi)$ é não vazio.

6.4 Pontos irregulares em conjuntos de Julia

Nesta seção apresentamos uma aplicação do Teorema 6.3.1. Consideramos funções racionais na esfera de Riemann e estimamos a entropia do conjunto de pontos irregulares para certas observáveis. Para poder estabelecer um enunciado preciso deste fato, lembremos alguns conceitos de dinâmica complexa.

Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ uma função racional de grau $\deg(f) \geq 2$. O **conjunto de Fatou** de f, $F(f)$, é definido como o conjunto de todos os pontos $z \in \overline{\mathbb{C}}$ que possuem uma vizinhança $U = U_z$ tal que a sequência $(f^n|_U)_{n\geq 1}$ é equicontinua. A dinâmica de f sobre o conjunto de Fatou é estável no sentido que para pontos próximos, suas iteradas continuam próximas. O complemento do conjunto de Fatou, $J(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus F(f)$, é chamado o **conjunto de Julia**. O conjunto $J(f)$ é compacto não vazio, nunca denso se $J(f) \neq \overline{\mathbb{C}}$ e bi-invariante por f. Sobre o conjunto de Julia, em contraste com o que acontece no conjunto de Fatou, a dinâmica de f é caótica; por exemplo, $f : J(f) \to J(f)$ é topologicamente exata e os pontos periódicos repulsores são densos. As provas desses fatos e outros tópicos de dinâmica complexa podem ser consultados no livro de A. Beardon [8]. Também é sabido que a entropia topológica de f é $h(f) = \log(\deg(f))$ (este último resultado é devido a M. Ljubich [47]). Nós determinaremos a entropia topológica do conjunto dos pontos φ-irregulares quando $\varphi(z) = \log|f'(z)|$. Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema F. *Seja $f : J(f) \to J(f)$ uma função racional de grau $\deg(f) \geq 2$ sem pontos críticos em $J(f)$. Suponha que f não é da forma az^n com $a \in \mathbb{S}^1$ e $n \geq 2$, então*

$$h(f) = h(f, \hat{X}(f, \log|f'|)) = \log(\deg f). \tag{6.4.1}$$

Demonstração. Dado que f não tem pontos críticos (em $J(f)$), $\varphi(z) = \log|f'(z)|$ é contínua e por um teorema de F. Przytycki ([60, Theorem A]),

$$\mathcal{X}_\mu(f) := \int \log|f'|d\mu \geq 0.$$

Temos dois casos a considerar:

CASO 1: $\inf\{\mathcal{X}_\mu(f) : \mu \in \mathfrak{M}(f)\} > 0$. Em particular, $\mathcal{X}_\mu(f) > 0$ para qualquer medida f-invariante ergódica. Sabemos (do Capítulo 3) que existe um conjunto de medida total com respeito a μ, $G_\mu(f)$, tal que para qualquer $x \in G_\mu(f)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log|f'(f^j(z))| = \int \log|f'|d\mu = \mathcal{X}_\mu(f) > 0.$$

Logo, o conjunto $Q_{\text{erg}}(f) = \cup\{G_\mu(f) : \mu \text{ é ergódica}\}$ tem medida total com respeito a qualquer medida invariante e satisfaz que para cada $z \in Q_{\text{erg}}(f)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log|f'(f^j(z))| > 0.$$

Esta condição, pelo [3, Theorem A], implica que f é hiperbólica (veja Observação 6.4.2 abaixo para a definição de hiperbolicidade) logo $f|_{J(f)}$ satisfaz a propriedade de especificação e portanto aplicando o Theorema 6.1.5, obtemos a igualdade (6.4.1).

CASO 2: $\inf\{\mathcal{X}_\mu(f) : \mu \in \mathfrak{M}(f)\} = 0$. Como $h(f) \geq \log 2 > 0$, existe uma medida ergódica com $h_\mu(f) > 0$ e a desigualdade de Ruelle implica que $\sup\{\mathcal{X}_\mu(f) : \mu \in \mathfrak{M}(f)\} > 0$. Pela Proposição 6.5.1, existem duas medidas ergódicas f-invariantes, ν e μ, satisfazendo

$$0 < \int \log|f'|d\nu < \int \log|f'|d\mu.$$

Pelo [33, Theorem 1]), existem conjuntos $\Gamma_\nu, \Gamma_\mu \subseteq J(f)$ e medidas invariantes $\overline{\nu}$, $\overline{\mu}$ suportadas em Γ_ν e Γ_μ, respectivamente, satisfazendo

$$\int_{\Gamma_\nu} \log|f'|d\overline{\nu} < \int_{\Gamma_\mu} \log|f'|d\overline{\mu}.$$

Pelo [35, Lemma 2], exite $\Gamma \supseteq \Gamma_\mu \cup \Gamma_\nu$ satisfazendo a propriedade de quase-especificação. Em particular, tem-se

$$\int_\Gamma \log|f'|d\overline{\nu} < \int_\Gamma \log|f'|d\overline{\mu}.$$

Agora, seja $(\mu_n)_{n\geq 1}$ uma sequências de medidas ergódicas tais que $h_{\mu_n}(f) \to h(f)$ quando $n \to \infty$. De novo, pela Proposição 6.5.1, para cada $n \geq 1$ podemos escolher uma medida ergódica ν_n tal que

$$0 < \int \log|f'|d\nu_n, \int \log|f'|d\mu_n \quad \text{e} \quad \int \log|f'|d\nu_n \neq \int \log|f'|d\mu_n. \tag{6.4.2}$$

Pelo mesmo raciocínio anterior, existem conjuntos Γ_{ν_n}, Γ_{μ_n} e medidas $\overline{\nu}_n$, $\overline{\mu}_n$ suportadas sobre estes conjuntos satisfazendo as mesmas condições como em 6.4.2. Aplicando o [35, Lemma 2] mais uma vez, obtemos os conjuntos Γ_n e as medidas $\overline{\nu}_n$, $\overline{\mu}_n$ satisfazendo a condiçã (C1) do Teorema 6.3.1.

Continuando, pelo Lema 6.1.3 e o Teorema 6.1.5

$$h(f|_{\Gamma_n}) \geq h_{\mu_n}(f).$$

Como as entropias $h_{\mu_n}(f)$ convergem para $h(f)$, a condição (C2) é satisfeita.

Temos verificado que as hipóteses do Teorema 6.3.1 são satisfeitas e portanto se cumpre (6.4.1). ■

Corolário 6.4.1. *Sob as hipóteses do Teorema F, para cada $t \neq 0$*

$$h(f) = h(f, \hat{X}(f, -t \log |f'|)).$$

Observação 6.4.2. (1) Uma função racional $f : J(f) \to J(f)$ é **hiperbólica** se existe $n \geq 1$ tal que

$$\inf\{|(f^n)'(z)| : z \in J(f)\} > 1.$$

Hiperbolicidade implica que f satisfaz a propriedade de sombreamento e o fato de f ser topologicamente exata implica que é topologicamente misturador. Portanto, se f é hiperbólica então satisfaz a propriedade de especificação. Assim, no caso hiperbólico, a igualdade (6.4.1) segue-se do Teorema 6.1.5.

(2) A função $f : J(f) \to J(f)$ não tem pontos críticos se, e somente se, f é expansiva ([71, Theorem 3.1]).

(3) Do item (2), funções racionais hiperbólicas não tem pontos críticos, portanto o exemplo acima inclui as funções racionais hiperbólicas. É importante mencionar que existem funções racionais sem pontos críticos que não são hiperbólicas (isto ocorre quando f tem pontos parabólicos; isto é, quando existe um ponto periódico $z \in J(f)$ tal que $(f^{Per(z)})'(z)$ é uma raiz da unidade; veja [71, Theorem 3.2]). Assim, o Teorema 6.1.5 não pode ser aplicado neste último caso e portanto nosso Teorema 6.3.1 estende o Teorema 6.1.5.

(4) A condição sobre os pontos críticos foi apenas para garantir a continuidade da função $\log |f'(z)|$.

(5) Pedimos que $\log |f'(z)|$ não seja cohomóloga a uma constante para garantir que $\hat{X}(f, \log |f'|)$ seja não vazio. Quando f é parabólica , a observável $\varphi(z) = \log |f'(z)|$ nunca é cohomóloga a uma constante, pois existem expoentes de Lyapunov diferentes; por exemplo, o expoente associado à medida de máxima entropia e o expoente associado à medida suportada sobre a órbita periódica parabólica. Por outro lado, se f é hiperbólica e $\log |f'|$ é cohomologa a uma constante, então dado que os pontos periódicos são densos e as medidas suportandas sobre os pontos periódicos são ergódicas, por um argumento de

continuidade, $J(f) = \mathbb{S}^1$ e $f(z) = az^n$, para alguns $a \in \mathbb{S}^1$, $n \geq 2$. Assim, o exemplo acima cobre todos os casos em que f é expansiva, salvo quando f é hiperbólica da forma az^n.

(6) A função $\varphi(z) = -\log|f'|$ (chamado potencial geométrico) e as funções $\varphi_t(z) = -t\log|f'(z)|$ jogam um importante papel no formalismo termodinâmico, em particular na dinâmica complexa (veja [16, 59, 71] e referências aí para um estudo mais aprofundado).

6.5 Completude dos expoentes de Lyapunov de funções parabólicas

Foi provado em [63, Theorem 3.1] que se $f : J(f) \to J(f)$ é hiperbólica, então existe uma medida invariante μ tal que

$$\inf\{\mathcal{X}_\nu(f) : \nu \in \mathfrak{M}_{\text{erg}}(f)\} < \mathcal{X}_\mu(f) < \sup\{\mathcal{X}_\nu(f) : \nu \in \mathfrak{M}_{\text{erg}}(f)\}.$$

Isto continua sendo verdadeiro no caso mais geral quando f não tem pontos críticos em $J(f)$. A prova abaixo (não publicada) é devida à professora K. Gelfert. O conjunto dos pontos críticos de $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ é denotado por $\text{Crit}(f)$.

Proposição 6.5.1. *Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ uma função racional sem pontos críticos em $J(f)$. Seja $\lambda = \mathcal{X}(\mu_0) > 0$ o expoente de Lyapunov da medida de máxima entropia μ_0. Então existe um ponto periódico hiperbólico cujo expoente de Lyapunov de sua medida ergódica suportada sobre sua órbita μ satisfaz $0 < \mathcal{X}(\mu) < \lambda = \mathcal{X}(\mu_0)$.*

Demonstração. Sabemos que existem pontos periódicos hiperbólicos de período arbitrariamente grande. Por contradição, suponhamos que todos eles tem o mesmo expoente de Lyapunov λ.

Seja

$$D := \max_{x \in J(f)} |f'(x)|.$$

Fixe um ponto parabólico $z = f^p(z)$. Fixe $\delta_0 > 0$ tal que $\cup_{k=0}^{q-1} f^k(\text{Crit}(f))$ é disjunto de $B(z, \delta_0)$. Portanto, para cualquer $\delta \in (0, \delta_0)$ e cualquer imagem inversa de $V = B(z, \delta)$ por f^q é univalente. Pelo Teorema de Distorção de Koebe, existe uma constante $C(\delta) > 1$ satisfazendo $C(\delta) \to 1$ quando $\delta \to 0$ tal que para todo $x, y \in V' = \text{Comp}_z\, f^q(V)$ satisfies

$$\frac{|(f^q)'(x)|}{|(f^q)'(y)|} \leq C(\delta).$$

Fixe algum $\delta \in (0, \delta_0)$ e seja $N_2 = N(\delta)$.

Dado $\varepsilon \in (0, \lambda/4)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que o seguinte é verdadeiro: para todo ponto periódico hiperbólico (de fato, δ só depende do expoente de Lyapunov e ε de alguma constante universal que depende de $J(f)$, pela suposição que todos os expoentes têm o mesmo expoente λ). Para todo ponto periódico hiperbólico $w = f^p(w)$ o conjunto $U = B(w, \delta_1)$ satisfies $f^p(U) \supset U$ e

$$\frac{|(f^p)'(w_1)|}{|(f^p)'(w_2)|} \leq e^{p\varepsilon}$$

para todo $w_1, w_2 \in U$. Seja $N_1 = N(\delta_1)$.

A seguir, vamos escolher um ponto periódico $w = f^p(w)$ com período p suficientemente grande, cuja escolha será especificada abaixo. Seja

$$W' := \operatorname{Comp}_z f^{-(N_2+q)(U)} \subseteq V'.$$

Pela escolha anterior, temos

$$f^{N_1+p}(U) \supseteq f^{N_1}(U) \supset J(f) \supset W \supset W'$$

e portanto existe um ponto periódico $x = f^k(x) \in W'$ de período $k = q + p + N_1 + N_2$. Pela estimativa de distorção anterior, temos

$$|(f^k)'(x)| \leq |(f^p)'(z)| C(\delta) \cdot D^{N_2} \cdot |(f^q)'(w)| e^{p\varepsilon} \cdot D^{N_1}.$$

Logo, o expoente de Lyapunov de x pode, portanto, ser limitado inferiormente por

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \log |(f^k)'(x)| \quad & \leq \frac{1}{p+q+N_1+N_2} (\log C(\delta) + N_2 \log D + N_1 \log D) + \\ & + \frac{p}{p+q+N_1+N_2} \lambda + \frac{p}{p+q+N_1+N_2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Agora, escolhendo p suficientemente grande, podemos garantizar que o primeiro termo do lado direito é pelo menos $\frac{\lambda}{4}$. Como $\varepsilon < \lambda/4$, obtemos que

$$\frac{1}{k} \log |(f^k)'(x)| < \frac{\lambda}{2},$$

contradição. ■

Referências

[1] Abramov, L. On the entropy of a flow. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 128:873–875, 1959.

[2] Adler, R., Konheim, A. and McAndrew, M. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114:309–319, 1965.

[3] Alves, J., Araújo, V. and Saussol, B. On the uniform hyperbolicity of some nonuniformly hyperbolic systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(4):1303–1309, 2003.

[4] Arbieto, A., Senos, L. and Sodero, T. The specification property for flows from the robust and generic viewpoint. *J. Differential Equations*, 253(6):1893–1909, 2012.

[5] Avila, A. and Bochi, J. Nonuniform hyperbolicity, global dominated splittings and generic properties of volume-preserving diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(6):2883–2907, 2012.

[6] Barreira, L. *Dimension and recurrence in hyperbolic dynamics*, volume 272 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[7] Barreira, L. and Schmeling, J. Sets of "non-typical" points have full topological entropy and full Hausdorff dimension. *Israel J. Math.*, 116:29–70, 2000.

[8] Beardon, A. *Iteration of rational functions*, volume 132. Springer-Verlag, New York, 1991. Complex analytic dynamical systems.

[9] Billingsley, P. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999.

[10] Blokh, A. Decomposition of dynamical systems on an interval. *Uspekhi Mat. Nauk*, 38(5(233)):179–180, 1983.

[11] Bowen, R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153:401–414, 1971.

[12] Bowen, R. Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 154:377–397, 1971.

[13] Bowen, R. Periodic orbits for hyperbolic flows. *Amer. J. Math.*, 94:1–30, 1972.

[14] Bowen, R. Topological entropy for noncompact sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 184:125–136, 1973.

[15] Bowen, R. and Walters, P. Expansive one-parameter flows. *J. Differential Equations*, 12:180–193, 1972.

[16] Bruin, H. and Todd, M. Equilibrium states for interval maps: the potential $-t\log|Df|$. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(4):559–600, 2009.

[17] Buzzi, J. Specification on the interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(7):2737–2754, 1997.

[18] Buzzi, J. C^r surface diffeomorphisms with no maximal entropy measure. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 34(6):1770–1793, 2014.

[19] Buzzi, J., Crovisier, S. and Sarig, O. Measures of maximal entropy for surface diffeomorphisms. arXiv:1811.02240.

[20] Catsigeras, E., Tian, X. and Vargas, E. Topological entropy on points without physical-like behaviour. *Math. Z.*, 293(3-4):1043–1055, 2019.

[21] Colebrook, C. The Hausdorff dimension of certain sets of nonnormal numbers. *Michigan Math. J.*, 17:103–116, 1970.

[22] Cornfeld, I., Fomin, S. and Sinaĭ, Ya. *Ergodic theory.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[23] Dateyama, M. Invariant measures for homeomorphisms with weak specification. *Tokyo J. Math.*, 4(2):389–397, 1981.

[24] Denker, M., Grillenberger, Ch. and Sigmund, K. *Ergodic theory on compact spaces.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[25] Dinaburg, E. A connection between various entropy characterizations of dynamical systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 35:324–366, 1971.

[26] Dong, Y., Tian, X. and Yuan, X. Ergodic properties of systems with asymptotic average shadowing property. *J. Math. Anal. Appl.*, 432(1):53–73, 2015.

[27] Eizenberg, A., Kifer, Y. and Weiss, B. Large deviations for $\mathbb{Z}^d$-actions. *Comm. Math. Phys.*, 164(3):433–454, 1994.

[28] Ercai, C., Küpper, T. and Lin, S. Topological entropy for divergence points. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(4):1173–1208, 2005.

[29] Fan, A.-H. and Feng, D.-J. On the distribution of long-term time averages on symbolic space. *J. Statist. Phys.*, 99(3-4):813–856, 2000.

[30] Fan, A.-H., Liao, L.-M. and Peyrière, J. Generic points in systems of specification and Banach valued Birkhoff ergodic average. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 21(4):1103–1128, 2008.

[31] Franks, J. and Williams, B. Anomalous Anosov flows. In *Global theory of dynamical systems*, pages 158–174. Springer, Berlin, 1980.

[32] Furstenberg, H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. *Math. Systems Theory*, 1:1–49, 1967.

[33] Gelfert, K. Repellers for non-uniformly expanding maps with singular or critical points. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 41(2):237–257, 2010.

[34] Gelfert, K. Horseshoes for diffeomorphisms preserving hyperbolic measures. *Math. Z.*, 283(3-4):685–701, 2016.

[35] Gelfert, K., Przytycki, F. and Rams, M. On the Lyapunov spectrum for rational maps. *Math. Ann.*, 348(4):965–1004, 2010.

[36] Gu, R. The asymptotic average shadowing property and transitivity. *Nonlinear Anal.*, 67(6):1680–1689, 2007.

[37] Gu, R. The asymptotic average-shadowing property and transitivity for flows. *Chaos Solitons Fractals*, 41(5):2234–2240, 2009.

[38] Hahn, F. and Katznelson, Y. On the entropy of uniquely ergodic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 126:335–360, 1967.

[39] Johnson, G. An unsymmetric Fubini theorem. *Amer. Math. Monthly*, 91(2):131–133, 1984.

[40] Katok, A. and Hasselblatt, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[41] Kolmogorov, A. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 119:861–864, 1958.

[42] Kryloff, N. and Bogoliouboff, N. La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire. *Ann. of Math. (2)*, 38(1):65–113, 1937.

[43] Kulczycki, M., Kwietniak, D. and Oprocha, P. On almost specification and average shadowing properties. *Fund. Math.*, 224(3):241–278, 2014.

[44] Kwietniak, D., Łącka, M. and Oprocha, P. A panorama of specification-like properties and their consequences. In *In Dynamics and numbers*, pages 155–186. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

[45] Kwietniak, D., Łącka, M. and Oprocha, P. Generic points for dynamical systems with average shadowing. *Monatsh. Math.*, 183(4):625–648, 2017.

[46] Li, J. and Wu, M. Divergence points in systems satisfying the specification property. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(2):905–920, 2013.

[47] Ljubich, M. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(3):351–385, 1983.

[48] Mesón, A. and Vericat, F. Saturatedness of dynamical systems under the almost specification property. *J. Dyn. Syst. Geom. Theor.*, 14(1):1–15, 2016.

[49] Newhouse, S. Continuity properties of entropy. *Ann. of Math. (2)*, 129(2):215–235, 1989.

[50] Pacifico, M.-J. and Reis, J. On (asymptotic) average shadowing for 3−flows. Preprint.

[51] Pacifico, M.-J. and Sanhueza, D. On bowen entropy inequality for flows. arXiv:1908.08072.

[52] Palis, J. and de Melo, W. *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[53] Parthasarathy, K. *Probability measures on metric spaces*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005.

[54] Pesin, Ya. *Dimension theory in dynamical systems*. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1997.

[55] Pesin, Ya. and Pitskel', B. Topological pressure and the variational principle for noncompact sets. *Functional Anal. Appl.*, 18(4):307–318, 1984.

[56] Pfister, C.-E. and Sullivan, W. Large deviations estimates for dynamical systems without the specification property. Applications to the β-shifts. *Nonlinearity*, 18(1):237–261, 2005.

[57] Pfister, C.-E. and Sullivan, W. On the topological entropy of saturated sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 27(3):929–956, 2007.

[58] Phelps, R. *Lectures on Choquet's theorem*, volume 1757 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001.

[59] Feliks Przytycki. Thermodynamic formalism methods in one-dimensional real and complex dynamics. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. III. Invited lectures*, pages 2087–2112. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018.

[60] Przytycki, F. Lyapunov characteristic exponents are nonnegative. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 119(1):309–317, 1993.

[61] Pugh, C. and Shub, M. Ergodic elements of ergodic actions. *Compositio Math.*

[62] Schmeling, J. Symbolic dynamics for β-shifts and self-normal numbers. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(3):675–694, 1997.

[63] Schmeling, J. On the completeness of multifractal spectra. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(6):1595–1616, 1999.

[64] Shen, J. and Zhao, Y. Entropy of a flow on non-compact sets. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 19(2):1250015, 10, 2012.

[65] Sigmund, K. On dynamical systems with the specification property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 190:285–299, 1974.

[66] Sinai, Ya. On the concept of entropy for a dynamic system. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 124:768–771, 1959.

[67] Sun, W. Entropy of orthonormal n-frame flows. *Nonlinearity*, 14(4):829–842, 2001.

[68] Takens, F. and Verbitskiy, E. On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(1):317–348, 2003.

[69] Thompson, D. The irregular set for maps with the specification property has full topological pressure. *Dyn. Syst.*, 25(1):25–51, 2010.

[70] Thompson, D. Irregular sets, the β-transformation and the almost specification property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(10):5395–5414, 2012.

[71] Urbański, M. Measures and dimensions in conformal dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 40(3):281–321, 2003.

[72] Walters, P. A variational principle for the pressure of continuous transformations. *Amer. J. Math.*, 97(4):937–971, 1975.

[73] Walters, P. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[74] Yamamoto, K. On the weaker forms of the specification property and their applications. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(11):3807–3814, 2009.