Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Doutorado em Matemática

Yuri de Macedo Lira

Uma Análise da Equação de Muñoz-Delgado

Rio de Janeiro
Outubro de 2019

Yuri de Macedo Lira

Uma Análise da Equação de Muñoz-Delgado

apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Rolci de Almeida Cipolatti
Doutor em Matemática Aplicada - Université de Paris Sud

Rio de Janeiro
Outubro de 2019

CIP - Catalogação na Publicação

L768a

Lira, Yuri de Macedo
Uma Análise da Equação de Muñoz-Delgado / Yuri de Macedo Lira. -- Rio de Janeiro, 2019.
59 f.

Orientador: Rolci de Almeida Cipolatti .
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Matemática, 2019.

1. Física-Matemática. 2. Equações Diferenciais Parciais. . 3. Condensados de Bose-Einstein. 4. Equação de Munõz-Delgado. I. Cipolatti , Rolci de Almeida , orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Yuri de Macedo Lira

Uma Análise da Equação de Muñoz-Delgado

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática, da UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Aprovada em 31 de Outubro de 2019

BANCA EXAMINADORA

Presidente, Rolci de Almeida Cipolatti
Professor Titular - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Adán José Corcho Fernández
Professor Associado - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Juan Bautista Límaco Ferrel
Professor Titular - Universidade Federal Fluminense

Patrícia Nunes da Silva
Professor Associado - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

---

Ricardo Martins da Silva Rosa
Professor Titular - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro
Outubro de 2019

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Rolci Cipolatti, cuja ajuda foi inestimável, bem como o acompanhamento com incrível didática e paciência;

Aos meus pais, que me deram total apoio em todos os momentos.

À minha esposa, que esteve sempre comigo.

Ao CNPQ, pelo auxílio monetário concedido, muito útil para a boa formação do pesquisador.

“Por quanto tempo ainda adiarás julgar-te digno do que há de melhor e em nada transgredir o que a razão escolhe? Recebeste os preceitos morais com os quais te era necessário concordar, e tens concordado. Qual professor ainda esperas, para que lhe submetas fazer a correção de ti mesmo? Não és mais jovenzinho, mas varão já completo. Se agora negligenciares e te tornares indolente e sempre fizeres prorrogações após prorrogações e fixares dias após dias e depois dos quais te aplicarás a ti mesmo, esquecerás que não avanças, mas como homem vulgar continuarás tanto a viver como a morrer.”’

Epicteto - Recomendações Estoicas Para o Bem Viver

Resumo

Neste trabalho consideramos a Equação de Muñoz-Delgado (EMD) em $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) e analisamos algumas das principais propriedades matemáticas dos *ground-states*, tais como existência, estabilidade, regularidade etc. Essas soluções, que no caso unidimensional estão relacionadas à modelagem dos Condensados de Bose-Einstein, são soluções do tipo *standing waves* de mínima energia. Além disso, apresentamos algumas propriedades matemáticas do potencial químico μ como função do parâmetro de interação atômica λ, tendo em vista a dedução de fórmulas explícitas que forneçam boas aproximações numéricas para experimentos físicos.

Palavras-chaves: Equação de Muñoz-Delgado, Condensados de Bose-Einstein, Estabilidade de Ground-states, Fórmulas de aproximação analíticas.

Abstract

In this work we consider the Muñoz-Delgado Equation (EMD) in $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ and we analyze some of the main mathematical properties of *ground-states*, such as existence, stability, regularity etc. These solutions, which in one dimensional case are related to the modeling of Bose-Einstein Condensates, are *standing waves* solutions of minimal energy. In addition to theses analyses, we present some mathematical properties of the chemical potential μ as function of the atomic interaction parameter λ, in view of obtaining explicit formulas that provide good numerical approximation to physical experiments.

Keywords: Muñoz-Delgado Equation, Bose–Einstein condensates, Stability of ground states, Analytical approximate formulae.

Sumário

1 Introdução

Antes de apresentarmos os objetivos deste trabalho e a descrição dos capítulos com os quais organizamos os temas e os respectivos resultados matemáticos, parece-nos de bom alvitre contextualizar o assunto em foco, apresentando inicialmente um "*épsilon*" da História e um "*delta*" da Física. Na parte "ε" da História, repetimos *ipsis literis* parte do texto da Introdução de [(18)].

1.1 Um "ε" de História

Uma partícula atômica (simples ou composta) que possui spin inteiro é denominda *bóson*. O nome é uma homenagem ao físico indiano Satyendra Nath Bose (1894-1974). Entre os exemplos de bósons estão partículas elementares como o fóton, o glúon, o (agora famoso) bóson de Higgs; e entre partículas compostas, os mésons e os núcleos atômicos estáveis, como o hélio-4. As partículas de spin fracionário, tais como prótons, elétrons, quarks, neutrinos, são denominadas *férmions*.

Em 1924, Bose submeteu para publicação um trabalho no qual propunha que os pacotes quânticos de luz, propostos por Einstein em 1905, deveriam se comportar como partículas indistinguíveis, satifazendo, portanto, uma estatística diferente da apresentada por Maxwell e Boltzmann.

Bose submeteu seu trabalho original para a revista inglesa Philosophical Magazine, que o rejeitou. Ele então o enviou para Einstein que, percebendo a profundidade dos resultados, o traduziu para o alemão e o encaminhou para a revista alemã Zeitschrift für Physik, que o publicou.

Em trabalhos subsequentes, Einstein aplicou a estatística de Bose a um gás perfeito monoatômico, considerando-o como sendo formado por partículas indistinguíveis em estados quânticos bem definidos. Como consequência desses trabalhos, Einstein conjecturou que se um gás de bósons fosse submetido a temperaturas abaixo de um limite crítico, grande parte das partículas se condensaria no mais baixo estado quântico e o gás se tornaria uma espécie de "sopa quântica" de partículas indistinguíveis. Assim, grande parte dos átomos desse gás experimentariam uma transição de fase quanto-mecânica e formariam uma nuvem de átomos ocupando o mesmo estado quântico e, nessas condições, os efeitos quânticos poderiam ser observados em escala macroscópica. É essa "sopa quântica" que hoje denominamos *condensados de Bose-Einstein* ("BEC" em inglês).

Portanto, teoricamente, a obtenção de BECs parece uma tarefa muito simples: basta submeter o gás de bósons a temperaturas suficientemente baixas, de modo que os pacotes de onda se sobreponham, condensando-se em seguida. Entretanto, a grande dificuldade nessa tarefa reside justamente em se atingir essas temperaturas, que necessariamente devem ser da ordem de 10^{-9} Kelvin.

Há uma história muito interessante sobre os diversos experimentos para se obter temperaturas muito baixas. As técnicas de resfriamento mais eficazes são obtidas pelo *aprisionamento de átomos*, seja com a utilização de laser, seja com a aplicação de campos magnéticos, ou com a junção dessas duas técnicas, hoje conhecidas como *armadilhas ótico-magnéticas*. Com essas técnicas, o primeiro condensado foi produzido em 1995, por Eric Cornell e Carl Wieman, na Universidade do Colorado, usando um gás de átomos de rubídio resfriados a 170 nanokelvins (nK), isto é, 170×10^{-9} K. Por tal feito, eles foram laureados com o Prêmio Nobel de Física em 2001.

A descoberta de que os condensados de Bose-Einstein estão intimamente relacionados com a supercondutividade de metais e a superfluidez do hélio líquido — manifestações quânticas em sistemas macroscópicos — gerou um grande interesse na comunidade científica, que se reflete pela enorme quantidade de artigos publicados sobre o tema (veja bibliografia de (7)).

1.2 Um "δ" de Física

Do ponto de vista teórico, os condensados de Bose-Einstein são descritos pela *Equação de Heisenberg*, isto é,

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{ext}}(x) + \int_{\mathbb{R}^3}\overline{\Psi(t,y)}V(x-y)\Psi(t,y)dy\right]\Psi(t,x),$$

onde $\hbar$ é a constante de Dirac (ou constante de Planck reduzida), Ψ denota o operador de campo, m é a massa atômica, V_{ext} o campo externo de confinamento (neste caso, a armadilha ótico-magnética), V o potencial interatômico (*two-body interatomic potential*) e $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Uma simplificação desse modelo, denominado *modelo de campo médio* ou *aproximação de Bogoliubov*, foi proposta pelo matemático e físico teórico soviético Nikolai Nikolaievich Bogoliubov, em 1947. Ela se caracteriza pela hipótese de que, para as colisões entre as partículas de baixa energia num gás resfriado a temperaturas muito baixas, o potencial interatômico toma a forma

$$V(x-y) = \lambda_{3D}\delta(x-y), \quad \lambda_{3D} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

onde δ denota a "Delta de Dirac" e a a distância média de espalhamento de onda, característica das partículas que compõem o gás ($a > 0$ no caso repulsivo e $a < 0$ no caso atrativo). Nessas condições, a Equação de Heisenberg toma a forma

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{ext}}(x) + \lambda_{3D}|\psi(t,x)|^2\right]\psi(t,x), \tag{1.1}$$

onde $\psi(t,x) = \left\langle \Psi(t,x) \right\rangle$ é a função valor esperado do operador de campo (denominado *função de onda macroscópica do condensado*) e λ_{3D} é a constante de interação das partículas. A equação (1.1) é atualmente conhecida como *Equação de Gross-Pitaevskii* (GP).

O potencial externo $V_{\text{ext}}(x)$, que descreve as armadilhas ótico-magnéticas utilizadas nas técnicas de resfriamento e na manipulação dos condensados, tem a forma

$$V_{\text{ext}}(x) = V_M(x) + V_O(x),$$

onde

$$V_M(x) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2)$$

é o campo harmônico (componente magnética da armadilha) e

$$V_O(x) = V_L\Big[\cos^2(k_1x_1 + \theta_1) + \cos^2(k_2x_2 + \theta_2) + \cos^2(k_3x_3 + \theta_3)\Big]$$

denota o potencial da rede óptica (componente óptica da armadilha) obtida por feixes de laser.

Nas condiçoes propostas pela aproximação de Bogoliubov, os BECs são descritos pelas *ground states*, (isto é, as ondas estacionárias de energia mínima) da equação (1.1). Como ondas estacionárias entende-se as soluções da forma

$$\psi(t,x) = \varphi(x)\exp(-i\mu t/\hbar).$$

Assim, matematicamente, os BECs são descritos pelas soluções de energia mínima da equação:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{ext}}(x) + \lambda_{3D}|\varphi(t,x)|^2\right]\varphi(t,x) = \mu\varphi(x), \tag{1.2}$$

onde μ denota o potencial químico do sistema.

1.3 O modelo de Muñoz-Delgado

Devido à não linearidade das equações (1.1) e (1.2), não é possível obter soluções explícitas e as simulações numéricas se fazem necessárias para uma abordagem quantitativa, o que exige grande esforço computacional. Além disso, a dinâmica superfluídica pode se tornar caótica, o que dificulta em muito sua simulação numérica.

Para contornar essas dificuldades, tem sido frequente a obtenção de BECs confinados em armadilhas extremamente anisotrópicas, produzindo condensados em formato essencialmente radial (disk-shape) ou axial (cigar-shape). Nesses casos, a variação temporal das soluções fica caracterizada por escalas diferentes. No caso unidimensional, por exemplo, o confinamento pode ser tão intenso que o movimento transversal se torna praticamente nulo. Nessas circunstâncias, os movimentos axiais se tornam relevantes e o sistema pode ser considerado efetivamente unidimensional.

Na tentativa de compensar os efeitos bidimensionais desprezados no modelo puramente unidimensional e, assim, obter uma modelo mais realista, algumas modificações são sugeridas, como por exemplo a não linearidade do tipo cúbica-quíntica [(27)].

Um modelo ainda mais acurado foi proposto pelos físicos A. Muñoz Mateo e V. Delgado [(20, 21, 22, 23)]. Um BEC confinado com uma forma bastante alongada obtido por uma armadilha com forte anisotropia apresenta duas escalas de tempo muito diferentes. Isso implica, em particular que a correlação entre movimentos transversal e axial pode ser negligenciada e a função de onda do condensado pode ser fatorada na forma

$$\psi(t,x_1,x_2,x_3) = \Phi\Big(x_2,x_3,n_1(t,x_1)\Big)\phi(t,x_1), \tag{1.3}$$

onde

$$n_1(t,x_1) := N\int_{\mathbb{R}^2} |\psi(t,x_1,x_2,x_3)|^2\, dx_2 dx_3.$$

Das expressões acima e considerações físicas (por exemplo, inexistência de vortex), os autores deduzem a seguinte equação para a componente axial da onda ϕ, no caso repulsivo ($a>0$):

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x_1) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}m\omega_1 x_1^2 + \lambda_{1D}\sqrt{1+4aN|\phi(t,x_1)|^2}\right]\phi(t,x_1), \tag{1.4}$$

onde $\lambda_{1D} = \hbar(\omega_2+\omega_3)/2$

1.4 Organização da tese

Nesse trabalho consideramos a seguinte equação adimensional (veja [(4)] e [(8)]), que será denominada de aqui em diante *Equação de Muñoz-Delgado*:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x) = \left[-\Delta + |x|^2 + \sqrt{1+\lambda|\phi(t,x)|^2}\right]\phi(t,x), \quad x\in\mathbb{R}^d,\ d=1,2,3. \tag{1.5}$$

Interessa-nos em especial a análise dos *ground-states* da equação (1.5), isto é, as soluções estacionárias de mínima energia, assim como as propriedades dos funcionais energia e potencial químico como funções do parâmetro de interação $\lambda>0$. Este funcional energia é dado pela seguinte equação, que exploraremos em detalhes mais adiante:

$$E(\psi) := \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\psi(x)|^2dx + \int_{\mathbb{R}^d}|x|^2|\psi(x)|^2dx + \frac{2}{3\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\Big(\lambda|\psi(x)|^2+1\Big)^{3/2}-1\right]dx \tag{1.6}$$

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2 é dedicado à análise matemática dos ground-states, em especial existência, unicidade, regularidade e estabilidade.
- No Capítulo 3 apresentamos os resultados obtidos sobre a dependência da energia e potencial químico em função do parâmetro λ.

- Concluímos o trabalho com três apêndices, onde apresentamos os principais resultados da teoria de simetrização de Schwarz e a existência de solução da equação de evolução (1.5).

2 Ground-States da EMD: Propriedades

Neste capítulo, abordaremos algumas das principais propriedades dos *ground-states* para a seguinte equação

$$-\Delta\psi(x) + |x|^2\psi(x) + \psi\sqrt{1+\lambda|\psi(x)|^2} = \mu\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ \lambda > 0,\ d = 1, 2, 3. \tag{2.1}$$

que, de aqui em diante, será denominada *Equação de Muñoz-Delgado* (EMD). Como mencionado na Introdução, no caso unidimencional, a EMD está relacionada aos Condensados de Bose-Einstein para bosons com características repulsivas.

2.1 Existência de ground-states

Para abordarmos o teorema de existência, necessário se faz introduzir o quadro funcional adequado. Para isso, consideremos os seguintes conjuntos:

$$X := \left\{\psi \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})\ ;\ \int_{\mathbb{R}^d} \Big(|\nabla\psi(x)|^2 + |x|^2|\psi(x)|^2\Big)\, dx < \infty\right\}, \tag{2.2}$$

$$\Sigma_1 := \left\{\psi \in X\ ;\ \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x)|^2 dx = 1\right\}. \tag{2.3}$$

O espaço vetorial X é um espaço de Hilbert real se munido do seguinte produto interno:

$$(\psi : \phi)_X := \int_{\mathbb{R}^d} \Re\Big(\nabla\psi(x)\cdot\nabla\overline{\phi(x)} + |x|^2\psi(x)\overline{\phi(x)}\Big)\, dx \tag{2.4}$$

cuja norma associada é dada por

$$\|\psi\|_X^2 := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2|\psi(x)|^2 dx. \tag{2.5}$$

Além disso, iremos identificar o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ com seu dual, de forma a obtermos as imersões contínuas $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow X'$, o que nos permite escrever $(\psi, \phi)_{X',X} = (\psi, \phi)_{L^2}$, caso $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Observação 2.1. *No caso unidimensional, $d = 1$, é fácil mostrar que se a equação (2.1) possui uma solução complexa $\psi \in X$, então existe uma função real $U \in X$ que é solução de (2.1) e um número real θ tal que $\psi(x) = \exp(i\theta)U(x)$. De fato, repetindo o argumento em [(8)] para o caso da não linearidade cúbica, se supusermos que ψ é uma solução complexa de (2.1) e considerarmos $\psi(x) = u(x) + iv(x)$, onde u e v são funções reais, $u \neq 0$, obtemos*

$$\mu(u + iv) = -(u'' + iv'') + |x|^2(u + iv) + (u + iv)\sqrt{1 + \lambda\Big(|u|^2 + |v|^2\Big)},$$

de onde, separado-se as partes real e imaginária, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \mu u = -u'' + |x|^2 u + u\sqrt{1 + \lambda(|u|^2 + |v|^2)}, \\ \mu v = -v'' + |x|^2 v + v\sqrt{1 + \lambda(|u|^2 + |v|^2)}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por v, a segunda por u e subtraindo a primeira da segunda, resulta $v''u = u''v$, de modo que $(u'v - uv')' = 0$ e consequentemente $u'v - uv' = C$, para algum $C \in \mathbb{R}$. Além disso, como $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ e $u, v \in X$, segue que as funções

$$f_1 = \mu u - |x|^2 u - \sqrt{1 + \lambda u^2 + \lambda v^2}u,$$
$$f_2 = \mu v - |x|^2 v - \sqrt{1 + \lambda u^2 + \lambda v^2}v,$$

pertencem a $L^2(\mathbb{R})$. Portanto, por regularidade elíptica, $u, v \in H^2(\mathbb{R})$. Logo, $u, u', v, v' \in H^1(R)$ e, como sabemos, todas tendem a zero quando $|x| \to +\infty$. Portanto, $C = 0$

Assim, para os pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $u(x) \neq 0$, temos

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{u'v - v'u}{u^2} = 0$$

de modo que existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) = \gamma u(x)$. Substituindo na primeira equação de (2.6), obtemos

$$-u'' + |x|^2 u + u\sqrt{1 + \lambda(1 + \gamma^2)u^2} = \mu u.$$

Assim, se considerarmos

$$U(x) := \frac{u(x)}{\sqrt{1 + \gamma^2}},$$

obtemos uma solução real U da equação (2.1) tal que

$$\psi(x) = u(x) + iv(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} + \frac{i\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}}\right)U(x) = e^{i\theta}U(x),$$

onde $\theta = \arctan(\gamma)$.

No que segue, e para simplificar a notação, escreveremos $L^p(\mathbb{R}^d)$, $H^m(\mathbb{R}^d)$ etc, $d \in \{1, 2, 3\}$, para denotar os espaços de funções a valores complexos.

2.1.1 Resultados de Imersão

Em vista dos resultados subsequentes, faz-se necessário analisar as condições e propriedades das imersões de X nos espaços $L^p(\mathbb{R}^d)$ (vide Kavian [(14)]).

Teorema 2.1. *$X \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ com injeção contínua nos seguintes casos: $1 < p < +\infty$ se $d = 1, 2$ e $6/5 < p \leq 6$ se $d = 3$. Além disso, se $2 \leq p < 6$ (ou $p < \infty$ se $d = 1, 2$), a injeção $X \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ é compacta.*

Demonstração: Como $X \subset H^1(\mathbb{R}^d)$, temos do Teorema de Imersão de Sobolev, $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ com $2 \leq p < +\infty$ se $d = 1, 2$ e $2 \leq p < 6$ se $d = 3$. Consideremos $1 < p < 2$. Pela desigualdade de Hölder, temos (formalmente)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^{p/2} |\varphi(x)|^p (1 + |x|^2)^{-p/2} \, dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^{pq/2} |\varphi(x)|^{pq} dx\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^{-pq'/2} dx\right)^{1/q'}\end{aligned}$$

Escolhendo-se $q = 2/p > 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^p\, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)|\varphi(x)|^2\, dx\right)^{p/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{-p/(2-p)}dx\right)^{(p-2)/2} \\ &= \|(1+|x|^2)^{1/2}\varphi\|_2^p \left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{-p/(2-p)}dx\right)^{(p-2)/2} \\ &\leq C\|\varphi\|_{H^1}^p \left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{-p/(2-p)}dx\right)^{(p-2)/2}.\end{aligned}$$

Observe que a última integral é finita se, e somente se, $2p/(2-p) > d$, o que vale para todo $1 < p < 2$ nos casos $d = 1, 2$ e $p > 6/5$ se $d = 3$.

Para provar a imersão compacta, seja $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sequência de X tal que $\|\psi_k\|_X \leq M$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\psi_k \rightharpoonup 0$, na topologia fraca de X. Para $R > 0$ dado, seja $B = B_R(0)$ a bola de raio R centrada na origem de $\mathbb{R}^d$. Então,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B} |\psi_k(x)|^2 dx &\leq \frac{1}{R^2}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B} |x|^2|\psi_k(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{R^2}\|\psi_k\|_X^2 \leq \frac{M^2}{R^2},\end{aligned}$$

de modo que temos as seguintes limitações:

$$\|\psi_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus B)} \leq \frac{M}{R} \quad \text{e} \quad \|\nabla\psi_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus B)} \leq \|\psi_k\|_X \leq M.$$

Como $H^1(B) \hookrightarrow L^2(B)$ com injeção compacta, podemos extrair uma subsequência, que insistimos em denotar por ψ_k, tal que $\psi_k \to 0$ fortemente em $L^2(B)$.

Em particular, se fixarmos $R > 0$ tal que $M^2/R^2 < \varepsilon/2$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi_k(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_B |\psi_k(x)|^2 dx,$$

de modo que, para algum $k_0 \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi_k(x)|^2 dx < \varepsilon, \qquad \forall k \geq k_0.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, obtemos

$$\|\psi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_p\|\nabla\psi_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^a\|\psi_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1-a} < C_\star\varepsilon^{1-a},$$

onde $C_\star = C_pM^a > 0$, $C_p > 0$ é uma constante que não depende de k e

$$a = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) < 1 \text{ e } p < \frac{2d}{d-2}.$$

Note que se $d = 3$, a imersão $X \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ vale para todo $p < 6$. $\square$

2.1.2 O Funcional Energia

Seja $E : X \to \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$E(\psi) := \|\psi\|_X^2 + \frac{2}{3\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\left(\lambda|\psi(x)|^2+1\right)^{3/2}-1\right]dx, \tag{2.7}$$

que daqui em diante será denominado *Funcional Energia* associado à equação (2.1). Note que a integral na última parcela na expressão acima está bem definida, pois para cada $x \in \mathbb{R}^d$, a função

$$s \mapsto (\lambda|\psi(x)|^2+1)^s \tag{2.8}$$

é crescente no intervalo $s \geq 1$. Logo

$$\frac{\left(1+\lambda|\psi(x)|^2\right)^{3/2}-1}{\lambda} \leq \frac{\left(1+\lambda|\psi(x)|^2\right)^{2}-1}{\lambda} = 2|\psi(x)|^2+\lambda|\psi(x)|^4 \tag{2.9}$$

e, como consequência do Teorema 2.1,

$$\frac{2}{3\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\left(\lambda|\psi(x)|^2+1\right)^{3/2}-1\right]dx \leq \frac{2}{3}\left(2\|\psi\|_2^2+\lambda\|\psi\|_4^4\right) < \infty. \tag{2.10}$$

Uma vez que o funcional energia está bem definido, podemos buscar soluções de energia mínima, o que nos leva a considerar o seguinte problema variacional.

$$(PV) \qquad \begin{cases} \textit{Determinar } \phi_{\min} \in \Sigma_1 \textit{ tal que} \\ E(\phi_{\min}) = E_{\min} := \min\Big\{E(\psi)\ ;\ \psi \in \Sigma_1.\Big\} \end{cases}$$

Para mostrar que (PV) admite solução, precisamos primeiro explorar algumas características do funcional energia.

Teorema 2.2. *O funcional energia $E : X \to \mathbb{R}$ dado por*

$$E(\psi) = \|\psi\|_X^2 + \frac{2}{3\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\left(\lambda|\psi(x)|^2+1\right)^{3/2}-1\right]dx, \quad \lambda > 0$$

é estritamente convexo e localmente Lipschitz contínuo em X.

Demonstração. A convexidade é imediata pois a aplicação $s \mapsto (1+s)^{3/2}-1$ é estritamente convexa em $s \geq 0$. Para mostrar a continuidade, é suficiente provar que $F : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(\psi) := \frac{2}{3\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\left(1+\lambda|\psi(x)|^2\right)^{3/2}-1\right]dx \tag{2.11}$$

é contínua em X.

Seja $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ a aplicação $f(s) = (1+s)^{3/2}-1$. Então, para $0 < \tau < s$, segue do Teorema do Valor Médio que, para algum $\tau < \xi < s$,

$$f(s)-f(\tau) = (1+s)^{3/2}-(1+\tau)^{3/2} = \frac{3}{2}(1+\xi)^{1/2}(s-\tau) \leq \frac{3}{2}(1+\tau+s)^{1/2}(s-\tau).$$

Portanto, usando a desigualdade acima com $s = \lambda|\psi(x)|^2$ e $\tau = \lambda|\phi(x)|^2$, $x \in \mathbb{R}^d$ e integrando em $\mathbb{R}^d$, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\Big|F(\psi) - F(\phi)\Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\Big[1 + \lambda|\psi(x)|^2 + \lambda|\phi(x)|^2\Big]^{1/2}\Big||\psi(x)|^2 - |\phi(x)|^2\Big|\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\Big[1 + \lambda|\psi(x)|^2 + \lambda|\phi(x)|^2\Big]^{1/2}\Big[|\psi(x)| + |\phi(x)|\Big]\Big||\psi(x)| - |\phi(x)|\Big|\,dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}\Big[1 + \lambda|\psi(x)|^2 + \lambda|\phi(x)|^2\Big]\Big[|\psi(x)| + |\phi(x)|\Big]^2 dx\right)^{1/2}\|\psi - \phi\|_2.\end{aligned}$$

Lembrando que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\Big|F(\psi) - F(\phi)\Big| &\leq \sqrt{2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\Big[1 + \lambda|\psi(x)|^2 + \lambda|\phi(x)|^2\Big]\Big[|\psi(x)|^2 + |\phi(x)|^2\Big]\,dx\right)^{1/2}\|\psi - \phi\|_2 \\ &= \sqrt{2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\Big[|\psi(x)|^2 + |\phi(x)|^2 + \lambda\Big(|\psi(x)|^2 + |\phi(x)|^2\Big)^2\Big]\,dx\right)^{1/2}\|\psi - \phi\|_2 \\ &\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^d}\Big[|\psi(x)|^2 + |\phi(x)|^2 + \lambda\Big(|\psi(x)|^4 + |\phi(x)|^4\Big)\Big]\,dx\right)^{1/2}\|\psi - \phi\|_2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big[|\psi(x)|^2+|\phi(x)|^2+\lambda\Big(|\psi(x)|^4+|\phi(x)|^4\Big)\Big]\,dx = \|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\lambda\Big(\|\psi\|^4_{L^4(\mathbb{R}^d)}+\|\phi\|^4_{L^4(\mathbb{R}^d)}\Big),$$

segue do Teorema de Imersão 2.1,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}\Big[|\psi(x)|^2 + |\phi(x)|^2 + \lambda\Big(|\psi(x)|^4 + |\phi(x)|^4\Big)\Big]\,dx\right)^{1/2}$$

está bem definida quaisquer que sejam ϕ, $\psi \in X$. Logo, para todos ϕ, $\psi \in X$ tais que $\|\phi\|_X, \|\psi\|_X \leq M$, existe $L_M > 0$ tal que

$$\Big|F(\psi) - F(\phi)\Big| \leq L_M\|\psi - \phi\|_X$$

o que significa que F é localmente Lipschitz contínua em X. □

Com os resultados acima estamos em condições de mostrar que o problema variacional (PV) possui solução. Denotemos $\mathscr{G}$ o conjunto das soluções de (PV), isto é,

$$\mathscr{G} := \Big\{\psi \in \Sigma\ ;\ E(\psi) = E_{\min}\Big\}. \tag{2.13}$$

Teorema 2.3. *O conjunto $\mathscr{G}$ é não vazio.*

Demonstração. É claro que o funcional energia é limitado inferiormente, visto que $E(\psi) \geq \|\psi\|_X^2$ para todo $\psi \in X$. Seja então $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante para o problema (PV), i.e.,

$$\psi_k \in \Sigma_1,\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty} E(\psi_k) = E_{\min}.$$

Como $\|\psi_k\|_X^2 \leq E(\psi_k)$, a sequência $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em X. Logo, se necessário, podemos extrair uma subsequência (que por simplicidade continuamos denotando ψ_k) tal que $\psi_k \rightharpoonup \varphi \in X$.

Uma vez que X está compactamente imerso em $L^2(\mathbb{R}^d)$ (vide Teorema 2.1), segue que

$$\lim_{k\to+\infty} \|\psi_k\|_2 = \|\varphi\|_2,$$

ou seja, $\varphi \in \Sigma_1$.

Como o funcional energia E é contínuo para a topologia forte de X e convexo, é necessariamente semicontínuo inferiormente para topologia fraca de X (veja o Corolário III.8 de [(6)]), isto é,

$$E(\varphi) \leq \liminf_{k\to+\infty} E(\psi_k).$$

Assim, temos

$$E_{\min} \leq E(\varphi) \leq \liminf_{k\to+\infty} E(\psi_k) = \lim_{k\to+\infty} E(\psi_k) = E_{\min}.$$

Portanto $E(\varphi) = E_{\min}$, o que significa $\varphi \in \mathscr{G}$, como queríamos provar. □

Para mostrar que as funções de $\mathscr{G}$ satisfazem a equação (2.1), devemos aplicar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, o que exige mais regularidade do funcional energia E.

Teorema 2.4. *O funcional energia $E : X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 com diferencial de Fréchet $E' : X \to X'$ dado por*

$$E'(\phi) = -2\Delta\phi + 2|x|^2\phi + 2\Big(1 + \lambda|\phi|^2\Big)^{1/2}\phi.$$

Demonstração*.* Sendo $\phi \mapsto \|\phi\|_X^2$ funcional quadrático, é suficiente demonstrar que o funcional F definido em (2.11) é de classe C^1. Cálculos diretos (veja Apêndice) mostram que F é duas vezes diferenciável, com suas derivadas de Fréchet $F' : X \to X'$ e $F'' : X \to \mathscr{L}(X, X')$ dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} F'(\phi) &= 2\Big(1 + \lambda|\phi|^2\Big)^{1/2}\phi, \\ F''(\phi)\psi &= 2\lambda\Big(1 + \lambda|\phi|^2\Big)^{-1/2}\Re(\phi\overline{\psi})\phi + 2\Big(1 + \lambda|\phi|^2\Big)^{1/2}\psi, \end{aligned}$$

de modo que, para todo $\phi, \psi \in X$,

$$\Big\langle F'(\phi) : \psi \Big\rangle_{X'\times X} = \int_{\mathbb{R}^d} 2\Big(1 + \lambda|\phi(x)|^2\Big)^{1/2}\Re\Big(\phi(x)\overline{\psi(x)}\Big)\, dx.$$

Portanto F' é contínuo e

$$\begin{aligned} \left|\Big\langle F'(\phi) : \psi \Big\rangle_{X'\times X}\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} 2\Big(1 + \lambda|\phi(x)|^2\Big)^{1/2}|\phi(x)||\psi(x)|\, dx \\ &\leq 2\Big(\|\phi\|_2^2 + \lambda\|\phi\|_4^4\Big)^{1/2}\|\psi\|_2, \end{aligned}$$

de modo que $\|F'(\phi)\|_{X'} \leq 2\Big(\|\phi\|_2^2 + \lambda\|\phi\|_4^4\Big)^{1/2}$. □

Com os resultados anteriores, podemos aplicar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange que nos garante a existência de um multiplicador $\mu = \mu(\lambda) \in \mathbb{R}$ (necessariamente positivo) tal que $E'(\varphi) = \mu\varphi$, isto é,

$$-\Delta\varphi(x) + |x|^2\varphi(x) + \varphi(x)\left(1 + \lambda|\varphi(x)|^2\right)^{1/2} = \mu\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.14}$$

Observação: Da definição de F' temos, mais precisamente, $F' : X \to L^2(\mathbb{R}^d)$. De fato, se $\phi \in X$,

$$\|F'(\phi)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \Big|(1 + \lambda|\phi(x)|^2)\Big| \phi(x)|^2\, dx = \|\phi\|_2^2 + \lambda\|\phi\|_4^4.$$

Como (2.14) é uma equação em X', temos

$$\Big\langle E'(\varphi) : \phi\Big\rangle_{X,X'} = \mu\Big\langle \varphi : \phi\Big\rangle_{X,X'}, \quad \forall\phi \in X. \tag{2.15}$$

Assim, fazendo a identificação do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ com seu dual, obtemos as imersões contínuas $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow X'$, o que nos permite reescrever a equação (2.15) na forma $(\varphi : \phi)_X = (f : \phi)_2$, onde

$$f := \mu\varphi - F'(\varphi) = \mu\varphi - \varphi\sqrt{1 + \lambda|\varphi|^2} \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Assim, pelo Teorema 2.1, não é abuso de notação escrever a equação (2.15) na forma

$$\Re \int_{\mathbb{R}^d} \left[\nabla\varphi(x) \cdot \nabla\overline{\phi(x)} + |x|^2\varphi(x)\overline{\phi(x)}\right] dx = \Re \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\phi(x)}\, dx, \quad \forall\phi \in X. \tag{2.16}$$

2.2 Propriedades das Funções de $\mathscr{G}$

O seguinte resultado fornece uma caracterização das soluções (complexas) do problema (PV).

Teorema 2.5. *Existe uma única função real positiva e simétrica $\varphi_{\min} \in \Sigma_1$ tal que*

$$\mathscr{G} = \left\{e^{i\theta}\varphi_{\min}\ ;\ \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Demonstração. Sejam $\psi_0, \psi_1 \in \mathscr{G}$. Para $0 < \nu < 1$, considere a função real

$$\psi_\nu := \sqrt{\nu|\psi_1|^2 + (1-\nu)|\psi_0|^2}.$$

Então, é claro que $\psi_\nu \in \Sigma_1$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2|\psi_\nu(x)|^2 dx = \nu \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2|\psi_1(x)|^2 dx + (1-\nu) \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2|\psi_0(x)|^2 dx \tag{2.17}$$

e, sendo F estritamente convexo, temos

$$F(\psi_\nu) \leq \nu F(|\psi_1|) + (1-\nu)F(|\psi_0|) = \nu F(\psi_1) + (1-\nu)F(\psi_0), \tag{2.18}$$

com a desigualdade estrita se $\psi_0 \neq \psi_1$. Calculando as derivadas parciais em $\psi_\nu^2 = \nu\psi_1^2 + (1-\nu)\psi_0^2$, obtemos

$$\psi_\nu \nabla\psi_\nu = \nu\psi_1\nabla\psi_1 + (1-\nu)\psi_0\nabla\psi_0,$$

de modo que

$$\psi_\nu|\nabla\psi_\nu| \leq \nu|\psi_1||\nabla\psi_1| + (1-\nu)|\psi_0||\nabla\psi_0|.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|ab+cd| \leq \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$, com $a = \sqrt{\nu}|\psi_1|$, $b = \sqrt{\nu}|\nabla\psi_1|$, $c = \sqrt{1-\nu}|\psi_0|$ e $d = \sqrt{1-\nu}|\nabla\psi_0|$, obtemos

$$|\nabla\psi_\nu|^2 \leq \nu|\nabla\psi_1|^2 + (1-\nu)|\nabla\psi_0|^2. \tag{2.19}$$

Como consequência de (2.17)-(2.19), obtemos

$$E(\psi_\nu) \leq \nu E(\psi_1) + (1-\nu)E(\psi_0) = E_{\min}.$$

Logo, ψ_ν é função real positiva pertencente a $\mathscr{G}$.

Por outro lado, lembrando que as aplicações $\phi \in H^1(\mathbb{R}^d) \mapsto \phi^\pm \in H^1(\mathbb{R}^d)$ são contínuas, decorre que $\Big|\nabla|\phi(x)|\Big| = |\nabla\phi(x)|$ quase sempre em $\mathbb{R}^d$ (veja [(25)]). Como E é estritamente convexo, temos $|\psi_1| = |\psi_2|$. Assim, $\varphi_{\min} := \psi_\nu = |\psi_0| = |\psi_2|$ satisfaz a condição desejada.

Para mostrar que $\varphi_{\min}$ é simétrica, faremos uso da Teoria de Simetrização, cujos principais resultados estão listados no Apêndice da Tese.

Utilizando as propriedades (*iii*) e (*iv*) do Lema C.3 e o Teorema C.4, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{\min}^s(x)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{\min}(x)|^2\,dx = 1;\\
\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi_{\min}^s(x)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi_{\min}(x)|^2\,dx;\\
\int_{\mathbb{R}^d} [(1+\lambda|\varphi_{\min}^s(x)|^2)^{3/2} - 1]\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} [(1+\lambda|\varphi_{\min}(x)|^2)^{3/2} - 1]\,dx.\\
\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2|\varphi_{\min}^s(x)|^2\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2|\varphi_{\min}(x)|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Das propriedades 2.20 temos $E(\varphi_{\min}^s) = E(\varphi_{\min})$, e a conclusão segue da unicidade de $\varphi_{\min}$. □

Observação 2.2. *É consequência imediata do Teorema 2.5 que o conjunto $\mathscr{G}$ é compacto em X.*

2.2.1 Regularidade

Teorema 2.6. *Se $\varphi \in X$ é uma solução real e positiva da equação (2.1), então*

$$\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d),\ \text{onde } 1 < p < +\infty \text{ se } d = 1,2 \text{ e } 6/5 < p < +\infty \text{ se } d = 3. \tag{2.21}$$

Além disso,

$$\varphi, \Delta\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\ (d = 1,2,3) \quad e \quad \lim_{|x|\to+\infty} \varphi(x) = 0. \tag{2.22}$$

Demonstração. Vamos dividir a prova em duas partes; a primeira é a adaptação de um método devido a Moser [(13)] para a prova de (2.21); e a segunda é a adaptação de um método devido a De Giorgi [(19)] para a prova de (2.22). Sobre os dois métodos, veja [(3)]

Parte 1: Pelo Teorema 2.1, temos $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ com $1 < p < +\infty$ se $d = 1, 2$ e $6/5 < p \leq 6$ se $d = 3$. Para mostrar que $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$ para todo $p > 6$ no caso $d = 3$, aplicaremos o Método Iterativo de Moser, da seguinte forma:

Seja φ uma solução real e positiva da equação (2.1). Então,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big[\nabla\varphi(x)\nabla\psi(x) + \Big[|x|^2\varphi(x) + \sqrt{1+\lambda\varphi(x)^2}\varphi(x) - \mu\varphi(x)\Big]\psi(x)\Big]\, dx = 0,\ \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{2.23}$$

A densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subset X$ nos permite substituir $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ por φ^{1+q} com escolhas adequadas de q, isto é, tal que a identidade

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Big[(q+1)\varphi(x)^q|\nabla\varphi(x)|^2 + |x|^2\varphi(x)^{q+2} + \varphi(x)^{q+2}\sqrt{1+\lambda\varphi(x)^2} - \mu\varphi(x)^{q+2}\Big]\, dx = 0 \tag{2.24}$$

esteja bem definida.

No que segue vamos mostrar que se $q \leq 2$, a equação acima está bem definida para $\psi = \varphi^{1+q'}$, com $q' = q/2$.

Primeiramente, observemos que se $q \leq 4$ a integral $\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(x)^{2+q}\,dx$ está bem definida, visto que $q + 2 \leq 6$ se, e somente se, $q \leq 4$. Em segundo lugar, segue da desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)^{q+2}\sqrt{1+\lambda\varphi(x)^2}\,dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)^{2q+2}\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)^2\Big(1+\lambda\varphi(x)^2\Big)\,dx\right)^{1/2}\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)^{2q+2}\right)^{1/2}\Big(\|\varphi\|_2^2 + \lambda\|\varphi\|_4^4\Big)^{1/2} < +\infty\end{aligned}$$

se $2q + 2 \leq 6$, o que é equivalente a $q \leq 2$.

Por outro lado, temos

$$|\nabla\Big(\varphi^{1+q/2}\Big)|^2 = \left(1+\frac{q}{2}\right)^2\varphi^q|\nabla\varphi|^2,$$

de modo que

$$(q+1)\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(x)^q|\nabla\varphi(x)|^2\,dx = \frac{1+q}{\left(1+\frac{q}{2}\right)^2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\Big(\varphi(x)^{1+q/2}\Big)|^2\,dx.$$

Portanto, substituindo o termo do lado esquerdo da identidade acima em (2.24), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\Big(\varphi(x)^{1+q/2}\Big)|^2\,dx \leq \mu\frac{\left(1+\frac{q}{2}\right)^2}{1+q}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(x)^{q+2}\,dx < +\infty.$$

Logo, $\nabla\Big(\varphi^{1+q'}\Big) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, desde que $q' = q/2 \leq 1$. Como $\varphi^{2+q} = \varphi^{2(1+q')} \in L^1(\mathbb{R}^3)$, concluímos que $\varphi^{1+q'} \in H^1(\mathbb{R}^3) \subset L^p(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in [2,6)$. De modo análogo, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \varphi(x)^{q+2}\, dx \leq \mu \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)^{q+2}\, dx < +\infty,$$

e, assim, vemos que $\varphi^{1+q'} \in X \subset L^p(\mathbb{R}^3)$ para $2 \leq p \leq 6$, o que implica $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$ para todo $2 \leq p \leq 6(1+q')$.

Repetindo o argumento, verificamos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)^{2+q}\, dx < +\infty \text{ se } q+2 \leq 6(1+p') \iff q \leq 4+6p'$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)^{q+2}\sqrt{1+\lambda\varphi(x)^2}\, dx \text{ se } 2q+2 \leq 6(1+p') \iff q \leq 2+3p'$$

e que $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $2 \leq p \leq 6(1+p')^2$. E assim, sucessivamente, obtemos na n-ésima etapa, $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$ para todo $6/5 < p \leq 6(1+p')^n$, com o que concluímos a demonstração da primeira etapa.

Parte 2: Faremos a demonstração em três etapas. Seja φ uma solução positiva da equação (2.1). Vamos mostrar que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, no caso $d = 2, 3$ (o caso $d = 1$ é imediato). Sejam $\tau > 0$ tal que $\mathrm{med}(A_\tau) > 0$ (a medida de Lebesgue de A_τ positiva), onde

$$A_\tau := \Big\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \varphi(x) > \tau\Big\}$$

e $\phi_\tau := g^2\varphi_\tau$, onde $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq g \leq 1$ e $\varphi_\tau := (\varphi-\tau)^+ = \max\{\varphi-\tau, 0\}$.

Etapa 1: *Mostremos que $\phi_\tau \in X$.*

De fato, basta mostrar que $\varphi_\tau \in X$. Assim,

1. $0 \leq \varphi_\tau \leq \varphi$ qtp em $\mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad \varphi_\tau \in L^p(\mathbb{R}^d),\ 2 \leq p < +\infty;$
2. $|x|\varphi_\tau \leq |x|\varphi$ qtp em $\mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad |x|\varphi_\tau \in L^2(\mathbb{R}^d)$.
3. $\nabla\varphi_\tau = \nabla\varphi\chi_{A_\tau}$ qtp em $\mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad |\nabla\varphi_\tau| \leq |\nabla\varphi| \quad \Rightarrow \quad \nabla\varphi_\tau \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Portanto, $\varphi_\tau \in X$, e podemos substituir ϕ_τ na Eq. (2.16), isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\nabla\varphi\cdot\nabla(g^2\varphi_\tau) + |x|^2 g^2\varphi\varphi_\tau\Big]\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} fg^2\varphi_\tau\, dx. \tag{2.25}$$

Etapa 2: *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|g\varphi_\tau\|_2 \leq C\left(\|g\varphi\|_3^2\, \mathrm{med}(A_\tau\cap\mathrm{supp}\, g)^{5/3} + \left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\tau^2|\nabla g|^2\, dx\right)\mathrm{med}(A_\tau\cap\mathrm{supp}\, g)^{2/3}\right), \tag{2.26}$$

onde $\mathrm{supp}\, g$ denota o suporte de g. De fato, observando que $\nabla(g^2\varphi_\tau) = 2g\varphi_\tau\nabla g + g^2\nabla\varphi_\tau$, segue da equação (2.25),

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big[g^2\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi_\tau + |x|^2g^2\varphi\varphi_\tau\Big]\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} fg^2\varphi_\tau\, dx - 2\int_{\mathbb{R}^d} g\varphi_\tau\nabla\varphi_\tau\cdot\nabla g\, dx. \tag{2.27}$$

De (2.27), do fato que $f \leq \mu\varphi$ e da Desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} g^2 \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi_\tau \, dx &\leq \mu \int_{\mathbb{R}^d} g^2 \varphi\varphi_\tau \, dx + 2\int_{\mathbb{R}^d} g\varphi_\tau \Big|\nabla\varphi_\tau \cdot \nabla g\Big| \, dx \\ &\leq \mu \int_{\mathbb{R}^d} g^2 \varphi\varphi_\tau \, dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} g^2 |\nabla\varphi|^2 \, dx + \frac{4}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\tau^2 |\nabla g|^2 \, dx\end{aligned} \tag{2.28}$$

Como $\nabla\varphi_\tau = \nabla\varphi\chi_{A_\tau}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^d} g^2 \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi_\tau \, dx = \int_{A_\tau} g^2 |\nabla\varphi|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} g^2 |\nabla\varphi_\tau|^2 \, dx.$$

Substituindo em (2.28), segue

$$\int_{\mathbb{R}^d} g^2 |\nabla\varphi_\tau|^2, dx \leq \mu \int_{\mathbb{R}^d} g^2 \varphi\varphi_\tau \, dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} g^2 |\nabla\varphi|^2 \, dx + \frac{4}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\tau^2 |\nabla g|^2 \, dx \tag{2.29}$$

Podemos escolhar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} g^2 |\nabla\varphi|^2 \, dx \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} g^2 |\nabla\varphi_\tau|^2, dx.$$

De fato, basta considerar

$$\varepsilon < \frac{\displaystyle\int_{A_\tau} g^2 |\nabla\varphi|^2 \, dx}{2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g^2 |\nabla\varphi|^2 \, dx}.$$

Assim, a parcela de (2.29) com o fator ε pode ser absorvida pelo termo à esquerda da desigualdade, reduzindo-a na seguinte forma:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g^2 |\nabla\varphi_\tau|^2 \, dx \leq 2\mu \int_{\mathbb{R}^d} g^2 \varphi\varphi_\tau \, dx + \frac{8}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\tau^2 |\nabla g|^2 \, dx. \tag{2.30}$$

Novamente, observando que $\nabla(g\varphi_\tau) = g\nabla\varphi_\tau + \varphi_\tau \nabla g$, temos

$$\Big|\nabla(g\varphi_\tau)\Big|^2 \leq 2\Big(\Big|g\nabla\varphi_\tau|^2 + \Big|\varphi_\tau \nabla g\Big|^2\Big),$$

que substituído em (2.30), nos fornece

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\nabla\Big(g\varphi_\tau\Big)\Big|^2 \, dx \leq C_1\Big(\int_{\mathbb{R}^d} g^2 \varphi\varphi_\tau \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\tau^2 |\nabla g|^2 \, dx\Big), \tag{2.31}$$

onde $C_1 = \max\{4\mu, 2 + 16/\varepsilon\}$. Observe que aplicando as desigualdades de Hölder e Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} g^2 \varphi\varphi_\tau \, dx &\leq \|g\varphi_\tau\|_6 \|g\varphi\|_3 \operatorname{med}(A_\tau \cap \operatorname{supp} g)^{1/2} \\ &\leq C(d)\|\nabla(g\varphi_\tau)\|_2 \|g\varphi\|_3 \operatorname{med}(A_\tau \cap \operatorname{supp} g)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon \|\nabla(g\varphi_\tau)\|_2^2 + C_\varepsilon \|g\varphi\|_3^2 \operatorname{med}(A_\tau \cap \operatorname{supp} g)\end{aligned} \tag{2.32}$$

Assim, substituindo (2.32) em (2.31), obtemos para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\nabla\Big(g\varphi_\tau\Big)\Big|^2 \, dx \leq C_2\Big(\|g\varphi\|_3^2 \operatorname{med}(A_\tau \cap \operatorname{supp} g) + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\tau^2 |\nabla g|^2 \, dx\Big). \tag{2.33}$$

Por fim, novamente usando as desigualdades de Hölder e Sobolev, temos

$$\|g\varphi_\tau\|_2^2 \leq \|g\varphi_\tau\|_6^2 \operatorname{med}(A_\tau \cap \operatorname{supp} g)^{2/3} \leq C(d)\|\nabla(g\varphi_\tau)\|_2^2 \operatorname{med}(A_\tau \cap \operatorname{supp} g)^{2/3},$$

de modo que, substituindo na desigualdade acima o termo $\|\nabla(g\varphi_\tau)\|_2^2$ pelo lado direito de (2.33), obtemos finalmente

$$\|g\varphi_\tau\|_2^2 \leq C_3 \left(\|g\varphi\|_3^2 \operatorname{med}(A_\tau \cap \operatorname{supp} g)^{5/3} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\tau^2 |\nabla g|^2\, dx\right) \operatorname{med}(A_\tau \cap \operatorname{supp} g)^{2/3}\right) \tag{2.34}$$

que é a equação (2.26) com $C = C_3(\tau)$

Etapa 3: $\varphi \in L^\infty$.

Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}^d$ arbitrariamente. Sejam r e R números reais, $0 < r < R \leq 1$ e $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tais que

$$0 \leq g(x) \leq 1, \ \operatorname{supp} g = \overline{B_R(x_0)}, \ g(x) = 1, \forall x \in B_r(x_0) \text{ e } |\nabla g(x)| \leq 2/(R-r).$$

Para simplificar fórmulas, denotemos $A(\tau, r)$ o conjunto assim definido

$$A(\tau, r) := B_r(x_0) \cap \Big\{x \ ; \ \varphi(x) > \tau\Big\}.$$

Então, a desigualdade (2.26) com a g acima definida toma a forma

$$\begin{aligned}\int_{A(\tau,r)} \varphi_\tau(x)^2 dx \leq \int_{A(\tau,R)} g(x)^2 \varphi_\tau(x)^2 dx \leq C \bigg[&\frac{4}{(R-r)^2} \operatorname{med}(A(\tau,R))^{2/3} \int_{A(\tau,R)} \varphi_\tau(x)^2 dx \\ &+ \|\varphi\|_{L^3(B_1(x_0))}^2 \operatorname{med}(A(\tau,R))^{5/3}\bigg].\end{aligned} \tag{2.35}$$

É claro que, para $s > \tau$ e $0 < r < 1$, vale a seguinte desigualdade:

$$\int_{A(s,r)} \varphi_s(x)^2 dx \leq \int_{A(\tau,r)} \varphi_\tau(x)^2 dx. \tag{2.36}$$

Observando que $A(s,r) = B_r(x_0) \cap \Big\{x \ ; \ \varphi_\tau > s - \tau\Big\}$, temos

$$\frac{\varphi_\tau}{s-\tau} > 1 \text{ em } A(s,r), \ \forall\, 0 < r < 1.$$

Logo, para $s > \tau$,

$$\operatorname{med}\Big(A(s,r)\Big) \leq \int_{A(s,r)} \frac{\varphi_\tau(x)^2}{(s-\tau)^2}\, dx \leq \frac{1}{(s-\tau)^2} \int_{A(\tau,r)} \varphi_\tau(x)^2\, dx. \tag{2.37}$$

A desigualdade (2.35) com s em vez de τ

$$\begin{aligned}\int_{A(s,r)} \varphi_s(x)^2 dx \leq C \bigg[&\frac{4}{(R-r)^2} \operatorname{med}(A(s,R))^{2/3} \int_{A(s,R)} \varphi_s(x)^2 dx \\ &+ \|\varphi\|_{L^3(B_1(x_0))}^2 \operatorname{med}(A(s,R))^{5/3}\bigg].\end{aligned} \tag{2.38}$$

Aplicando (2.37) em cada parcela do lado direito de (2.38), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4}{(R-r)^2}\operatorname{med}(A(s,R))^{2/3}\int_{A(s,R)}\varphi_\tau(x)^2dx &\leq \frac{4}{(R-r)^2(s-\tau)^{4/3}}\|\varphi_\tau\|^{10/3}_{L^2(A(\tau,R))} \\ \|\varphi\|_{L^3(B_1(x_0))}\operatorname{med}(A(s,R))^{5/3} &\leq \frac{1}{(s-\tau)^{10/3}}\|\varphi_\tau\|_{L^2(A(\tau,R))} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Substituindo as desigualdades de (2.39) em (2.38) obtemos finalmente a seguinte estimativa

$$\|\varphi_s\|^2_{B_r(x_0)} = \int_{A(s,r)}\varphi_s(x)^2dx \leq C\|\varphi_\tau\|^{10/3}_{B_R(x_0)}\left[\frac{1}{(R-r)^2(s-\tau)^{4/3}} + \frac{\|\varphi\|^2_{L^3(B_1(x_0))}}{(s-\tau)^{10/3}}\right]. \tag{2.40}$$

Para concluir, sejam $F(\tau,r) := \|\varphi_\tau\|^2_{L^2(B_r(x_0))}$ e $\alpha > 0$ a ser especificado adiante. Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, consideramos as sequências $\{\tau_k\}_{k\geq 0}$ e $\{r_k\}_{k\geq 0}$ definidas por

$$\tau_k := \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\alpha \quad \text{e} \quad r_k := \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Então, $\{\tau_k\}_{k\geq 0}$ é crescente, $\{r_k\}_{k\geq 0}$ é decrescente e satisfazem as seguintes propriedades:

$$\tau_k - \tau_{k-1} = \frac{\alpha}{2^k} \quad \text{e} \quad r_{k-1} - r_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

A desigualdade (2.40) com $s = \tau_k$, $\tau = \tau_{k-1}$, $r = r_k$, $R = r_{k-1}$ e a notação $F(\tau,r)$ toma a forma

$$\begin{aligned} F(\tau_k, r_k) &\leq CF(\tau_{k-1}, r_{k-1})^{5/3}\left[\frac{2^{2k+2}2^{4k/3}}{\alpha^{4/3}} + \frac{2^{10k/3}\|\varphi\|^2_{L^3(B_1(x_0))}}{\alpha^{10/3}}\right] \\ &= \left[F(\tau_{k-1}, r_{k-1})\right]^{5/3}\left(2^{10k/3}\right)B(\alpha), \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde $C > 0$ é $C_3(\tau)$ (decrescente em τ) na desigualdade (2.34) e

$$B(\alpha) := \left[\frac{4C}{\alpha^{4/3}} + \frac{C\|\varphi\|^2_{L^3(B_1(x_0))}}{\alpha^{10/3}}\right].$$

Como veremos a seguir, podemos determinar $\gamma > 1$ e $\alpha > 0$ tais que

$$F(\tau_k, r_k) \leq \frac{F(\tau_0, r_0)}{\gamma^k}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.42}$$

De fato, a desigualdade (2.42) é evidente no caso $k = 0$. Seja $\gamma := 32 = 2^5$ e $\alpha > 0$ tal que

$$B(\alpha) < \gamma^{-5/3}F(\tau_0, r_0)^{-2/3}.$$

Procedendo por indução, suponhamos que (2.42) seja válida para $k-1$, com $k > 1$ i.e.,

$$F(\tau_{k-1}, r_{k-1}) \leq \frac{F(\tau_0, r_0)}{\gamma^{k-1}}.$$

Então, da desigualdade (2.41), temos

$$\begin{aligned} F(\tau_k, r_k) &\leq \Big[F(\tau_{k-1}, r_{k-1})\Big]^{5/3}\Big(2^{10k/3}\Big)B(\alpha) \\ &\leq \Big[\frac{F(\tau_0, r_0)}{\gamma^{k-1}}\Big]^{5/3}\Big(2^{10k/3}\Big)\gamma^{-5/3}F(\tau_0, r_0)^{-2/3} \\ &= F(\tau_0, r_0)\frac{2^{10k/3}}{\gamma^{5k/3}} = \frac{F(\tau_0, r_0)}{\gamma^k}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{k\to+\infty} \tau_k = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty} r_k = \frac{1}{2}$$

e, como consequência da desigualdade (2.42), temos

$$\|\varphi_\alpha\|^2_{L^2(B_{1/2}(x_0))} = F(\alpha, 1/2) = \lim_{k\to+\infty} F(\tau_k, r_k) = 0.$$

o que significa dizer que

$$(\varphi - \alpha)^+ = \varphi_\alpha = 0 \text{ em quase todo } x \in B_{1/2}(x_0).$$

Como x_0 foi fixado arbitrariamente, segue que $\varphi \leq \alpha$ em $\mathbb{R}^d$,

Para mostrar que $\Delta\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, consideremos na equação (2.23) $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq \psi \leq 1$, com $\operatorname{supp}\psi \subset B_{R_0}(y)$. Então, para $R < R_0$

$$\begin{aligned} \left|\int_{B_R(y)} \Delta\varphi(x)\psi(x)\,dx\right| &\leq \int_{B_R(y)} \Big[|x|^2\varphi(x) + \sqrt{1+\lambda\varphi(x)^2} + \mu\varphi(x)\Big]\psi(x)\,dx \\ &\leq \operatorname{med}(B_R(y))\Big[R^2\|\varphi\|_\infty + \sqrt{1+\lambda\|\varphi\|^2_\infty} + \mu\|\varphi\|_\infty\Big] \end{aligned}$$

de modo que

$$\left|\frac{1}{\operatorname{med}(B_R(y))}\int_{B_R(y)} \Delta\varphi(x)\psi(x)\,dx\right| \leq \Big[R^2\|\varphi\|_\infty + \sqrt{1+\lambda\|\varphi\|^2_\infty} + \mu\|\varphi\|_\infty\Big].$$

Como $\psi\Delta\varphi \in L^1(B_R(y))$, obtemos (veja [(26)])

$$\lim_{R\to 0} \frac{1}{\operatorname{med}(B_R(y))}\int_{B_R(y)} \Big|\Delta\varphi(x)\psi(x) - \Delta\varphi(y)\psi(y)\Big|\,dx = 0$$

para quase todo $y \in \mathbb{R}^d$. Assim, se escolhemos ψ tal que $\psi(y) = 1$, concluímos que, para quase todo $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\Big|\Delta\varphi(y)\Big| \leq \sqrt{1+\lambda\|\varphi\|^2_\infty} + \mu\|\varphi\|_\infty.$$

Além disso, como

$$|x|^2\varphi(x) \leq |\Delta\varphi(x)| + \sqrt{1+\lambda\varphi(x)^2} + \mu\varphi(x) \leq 2\Big(\sqrt{1+\lambda\|\varphi\|^2_\infty} + \mu\|\varphi\|_\infty\Big) =: C_*,$$

temos, para quase todo $|x| > 0$,

$$0 \leq \lim_{|x|\to 0} \varphi(x) \leq \lim_{|x|\to 0}\left(\frac{C_*}{|x|^2}\right) = 0 \tag{2.43}$$

com o que concluímos a demonstração. □

2.2.2 Decaimento Exponecial

As soluções da Equação (2.1) possuem decaimento gaussiano no infinito. Nessa subseção, vamos mostrar essa propriedade para a solução real positiva de energia mínima, seguimos os argumentos utilizados em (8) e (14). Mais precisamente:

Teorema 2.7. *Seja $\varphi = \varphi_{\min}$ a (única) solução positiva em $\mathscr{G}$. Então, existem $0 < \beta < 1$ e $C(\beta) > 0$ tais que, para quase todo $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\varphi(x) \leq C(\beta) \exp\Big(-\beta|x|^2/2\Big). \tag{2.44}$$

Demonstração. Seja $\mu = \mu(\lambda)$ o multiplicador de Lagrange em (2.14). Observemos que $\mu > 1 + d$. De fato, se $\varphi_0 = \exp(-|x|^2/2)$, temos

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_0 + |x|^2\varphi_0 + \varphi_0 = (1+d)\varphi_0, \\ -\Delta\varphi + |x|^2\varphi + \sqrt{1+\lambda\varphi^2} = \mu\varphi, \end{cases} \tag{2.45}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.45) por φ, a segunda por φ_0, integrando em $\mathbb{R}^d$, e subtraindo a primeira da segunda, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[\sqrt{1+\lambda\varphi(x)^2} - 1\right]\varphi_0(x)\varphi(x)\,dx = (\mu - 1 - d)\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0(x)\varphi(x)\,dx.$$

Como as funções φ e φ_0 são positivas, concluímos que $\mu > 1 + d$.

Consideremos $a(x) := |x|^2 - \mu + \sqrt{1+\lambda\varphi(x)^2}$ e $\psi_0(x) := C\exp\Big(-\beta|x|^2/2\Big)$, com as constantes $\beta > 0$ e $C > 0$ a serem definidas posteriormente.

Por um cálculo direto, obtemos

$$-\Delta\psi_0(x) + a(x)\psi_0(x) = \Big(\beta d + (1-\beta^2)|x|^2 - \mu + \sqrt{1+\lambda\varphi(x)^2}\Big)\psi_0(x).$$

Admitamos, provisoriamente, que existe $R > 0$ tal que

$$\beta d + (1-\beta^2)|x|^2 - \mu + 1 > 0, \quad \forall |x| \geq R.$$

Então, vale a desigualdade

$$0 = -\Delta\varphi(x) + a(x)\varphi(x) \leq -\Delta\psi_0(x) + a(x)\psi_0(x), \quad \text{quase sempre em } \{|x| > R\}.$$

Como φ tende a zero para $|x| \to +\infty$ (veja (2.43)), podemos determinar $C := C(\beta, R) > 0$ tal que $\varphi|_{\{|x|=R\}} \leq C\exp\Big(-\beta R^2/2\Big)$. Assim, obtemos a seguinte situação para a função $\psi_0 - \varphi$,

$$\begin{aligned} -\Delta(\psi_0 - \varphi) + a(\psi_0 - \varphi) &\geq 0 \text{ em } \{|x| > R\}, \\ \psi_0 - \varphi &\geq 0 \text{ em } \{|x| = R\}. \end{aligned}$$

Pelo Princípio do Máximo (fraco), concluímos que $\psi_0 \geq \varphi$ no aberto $\{|x| > R\}$. Para concluir a demonstração, observemos que $|x| > R$ implica

$$\beta d + (1-\beta^2)|x|^2 - \mu + \sqrt{1+\lambda\varphi(x)^2} \geq \beta d + (1-\beta^2)R^2 - \mu + 1$$

com $\beta d + (1-\beta^2)R^2 - \mu + 1 > 0$ se, e somente se,

$$R^2 \geq \frac{\mu - 1 - \beta d}{1-\beta^2} > \frac{\mu - 1 - d}{1-\beta^2} > 0.$$

□

Observação: O decaimento exponencial (2.44) é válido para qualquer solução da equação (2.1). O mesmo argumento da demonstração acima se aplica, uma vez que o limite no infinito dessas soluções seja nulo. O fato de termos lançado mão da positividade da solução $\varphi_{\min}$ pode ser contornado pela aplicação da desiguladade de Kato. Para mais detalhes, veja (8) e (14).

2.2.3 Estabilidade Orbital de $\mathscr{G}$

Nesta subseção analisamos a *estabilidade orbital* do conjunto $\mathscr{G}$ relativamente ao fluxo definido pela dinâmica da equação (1.5). É claro que se $\varphi \in \mathscr{G}$, a função

$$u(\tau, x) := \exp(-i\mu\tau)\varphi(x)$$

é solução do problema de Cauchy para a equação (1.5) com dado inicial $u(0,x) = \varphi(x)$, onde μ é o potencial químico (o multiplicador de Lagrange associado à Eq. (2.14)). Devido à não unicidade de solução de energia mínima, a estabilidade orbital a que nos referimos é assim definida:

Definição 2.1. *Dizemos que $\mathscr{G}$ é orbitalmente estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\psi_0 \in X$, então*

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{G}} \|\psi_0 - \varphi\|_X < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \inf_{\varphi \in \mathscr{G}} \|u(\tau, \cdot) - \exp(-i\mu\tau)\varphi\|_X < \varepsilon,$$

onde $u \in C(\mathbb{R}, X)$ denota a solução do problema de Cauchy para a equação (1.5) com dado inicial $u(0,\cdot) = \psi_0$.

Demonstração. Suponhamos que $\mathscr{G}$ não seja orbitalmente estável. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\psi_{0n} \in X$ satisfazendo

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{G}} \|\psi_{0n} - \varphi\|_X < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \inf_{\varphi \in \mathscr{G}} \|u_n(\tau, \cdot) - \exp(-i\mu\tau)\varphi\|_X \geq \varepsilon_0. \tag{2.46}$$

Pela caracterização de $\mathscr{G}$ (veja Teorema 2.5), existe $\theta_n \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\|\psi_{0n} - \exp(-i\mu\theta_n)\varphi_{\min}\|_X = \inf_{\varphi \in \mathscr{G}} \|\psi_{0n} - \varphi\|_X.$$

Passando a uma subsequência se necessário, podemos garantir que existe $\theta^* \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\psi_{0n} \longrightarrow \exp(-i\mu\theta^*)\varphi_{\min} \ \text{ fortemente em } \ X. \tag{2.47}$$

Da definição de supremo, podemos garantir que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\tau_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\inf_{\varphi \in \mathscr{G}} \|u_n(\tau_n, \cdot) - \exp(-i\mu\tau_n)\varphi\|_X > \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{2.48}$$

Assim, definindo $\tilde{\psi}_n := \exp(i\mu\tau_n)u_n(\tau_n, \cdot)$, das propriedades de conservação da carga e energia (veja Apêndice) e de (2.47), obtemos

$$\begin{aligned} &\|\tilde{\psi}_n\|_2 = \|u_n(\tau_n, \cdot)\|_2 = \|\psi_{0n}\|_2 \longrightarrow \|\varphi_{\min}\|_2 = 1, \\ &E(\tilde{\psi}_n) = E(u_n(\tau_n, \cdot)) = E(\psi_{0n}) \longrightarrow E(\varphi_{\min}) = E_{min} \end{aligned} \tag{2.49}$$

Como $\|\tilde{\psi}_n\|_X \leq \sqrt{E(\tilde{\psi}_n)}$, segue que existe uma subsequência, que ainda notaremos por $\{\tilde{\psi}_n\}_n$, que converge na topologia fraca de X para $\tilde{\psi}_\infty \in X$. De (2.49) e com os argumentos usados na demonstração do Teorema 2.3, vemos que $E(\tilde{\psi}_\infty) = E_{min}$, ou seja, $\tilde{\psi}_\infty \in \mathscr{G}$. Novamente, de (2.49) temos $E(\tilde{\psi}_n) \to E(\tilde{\psi}_\infty)$. Como $\tilde{\psi}_n \rightharpoonup \tilde{\psi}_\infty$ em X e

$$\|\tilde{\psi}_n\|_X^2 = E(\tilde{\psi}_n) - F(\tilde{\psi}_n), \quad F(\psi) = \frac{2}{3\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\Big(1 + \lambda|\psi(x)|^2\Big)^{3/2} - 1\Big]dx,$$

segue da continuidade de F em X que $\|\tilde{\psi}_n\|_X \longrightarrow \|\tilde{\psi}_\infty\|_X$ e consequentemente, $\tilde{\psi}_n \longrightarrow \tilde{\psi}_\infty$ em X.

Para concluir, basta observar que

$$\frac{\varepsilon_0}{2} < \inf_{\varphi \in \mathscr{G}} \| \exp(-i\mu\tau_n)\tilde{\psi}_n - \exp(-i\mu\tau_n)\varphi\|_X = \inf_{\varphi \in \mathscr{G}} \|\tilde{\psi}_n - \varphi\|_X \leq \|\tilde{\psi}_n - \psi_\infty\|_X$$

o que caractriza um absurdo, uma vez que $\psi_\infty \in \mathscr{G}$ e $\tilde{\psi}_n \to \psi_\infty$. □

3 A Energia Mínima como Função de λ

Vamos analisar, neste capítulo, a dependência da energia mínima $E_{\min}$ e o correspondente parâmetro μ (potencial químico) em função do coeficiente λ de interação entre as partículas. Para que essa dependência fique evidenciada, vamos considerar a função $E_{\min} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$E_{\min}(\lambda) = \min\Big\{E_\lambda(\psi)\,;\,\psi \in \Sigma_1\Big\},$$

onde E_λ é o funcional energia definido em (2.7). Note que o Teorema 2.3 garante que a função E_{min} está bem definida para $\lambda > 0$.

Para enfatizar a dependência em λ, vamos considerar também o conjunto

$$\mathscr{G}_\lambda := \{\psi \in \Sigma_1; E_\lambda(\psi) = E_{min}(\lambda)\} \tag{3.1}$$

dos correspondentes estados estacionários de energia mínima.

3.1 Propriedades da função $E_{\min}(\lambda)$

Comecemos pela análise de algumas das propriedades geométricas da função $E_{\min}(\lambda)$.

Teorema 3.1. *A função $E_{min}(\lambda)$ é estritamente crescente, estritamente côncava, e satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\lim_{\lambda\to 0^+} E_{min}(\lambda) = 1 + d \quad e \quad \lim_{\lambda\to+\infty} E_{min}(\lambda) = +\infty$$

Demonstração: Faremos a prova em seis etapas.

<u>*Etapa 1.*</u> Seja $G(\lambda, s) : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$G(\lambda, s) := \frac{2}{3\lambda}\Big[(1 + \lambda s)^{3/2} - 1\Big]. \tag{3.2}$$

Para cada $s > 0$ fixado, a aplicação $\lambda \mapsto g_s(\lambda) := G(\lambda, s)$ é crescente e estritamente côncava em $(0, +\infty)$. De fato, fazendo a substituição $\tau = \lambda s$, temos

$$g_s(\tau) := \frac{2s}{3}\Big[\tau^{-1}(1 + \tau)^{3/2} - \tau^{-1}\Big],$$

de modo que, calculando as derivadas de primeira e segunda ordem de $g_s(\tau)$, obtemos

$$\begin{aligned} g_s'(\tau) &= \frac{2s}{3}\left[-\tau^{-2}(1+\tau)^{3/2} + \frac{3}{2}\tau^{-1}(1+\tau)^{1/2} + \tau^{-2}\right] \\ g_s''(\tau) &= \frac{2s}{3}\left[2\tau^{-3}(1+\tau)^{3/2} - 3\tau^{-2}(1+\tau)^{1/2} + \frac{3}{4}\tau^{-1}(1+\tau)^{-1/2} - 2\tau^{-3}\right]. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\tau^2(1+\tau)^{1/2}g'(\tau) = \frac{2s}{3}\left[\frac{5}{2}\tau^2 + \frac{7}{2}\tau + 1 + \sqrt{1+\tau}\right],$$
$$\tau^3(1+\tau)^{1/2}g''(\tau) = \frac{2s}{3}\left[-\frac{1}{4}\tau^2 + \tau + 2 - 2\sqrt{1+\tau}\right],$$

Portanto, $g(\tau)$ é crescente em $(0,+\infty)$ se, e somente se, $h_1(\tau) := \frac{5}{2}\tau^2 + \frac{7}{2}\tau + 1 + \sqrt{1+\tau} \geq 0$ para todo $\tau > 0$. Analogamente, $g(\tau)$ é côncava em $(0,+\infty)$ se, e somente se, $h_2(\tau) := -\frac{1}{4}\tau^2 + \tau + 2 - 2\sqrt{1+\tau} \leq 0$ para todo $\tau > 0$.

Para verificarmos a primeira condição, basta observar que todos os termos de h_1 são não-negativos. Além disso, como $h_2(0) = 0$, se mostrarmos que h_2 é decrescente, teremos concluído a prova da concavidade de g_s. Observemos que

$$h_2'(\tau) = 1 - \left(\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{\sqrt{1+\tau}}\right) \leq 0 \iff \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{\sqrt{1+\tau}} > 1.$$

Como a função $r(\tau) = \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{\sqrt{1+\tau}}$ satisfaz $r(0) = 1$, para mostrar que $r(\tau) > 1$, para todo $\tau > 0$, é suficiente mostrar que ela é crescente.

De fato,

$$r'(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(1+\tau)^{3/2}}\right) > 0, \quad \forall \tau > 0.$$

Portanto, $g_s''(\tau) < 0$ para todo $\tau > 0$ e concluímos assim a prova da Etapa 1.

Etapa 2. Pela Etapa 1, para cada $\psi \in \Sigma_1$ fixado, a aplicação $F_\lambda(\psi)$ definida por

$$F_\lambda(\psi) := \frac{2}{3\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\Big(1 + \lambda\psi(x)^2\Big)^{3/2} - 1\right]dx = \int_{\mathbb{R}^n} G\Big(\lambda, \psi(x)^2\Big)\,dx$$

é estritamente crescente e estritamente côncava. Temos assim definida a família de funções estritamente côncavas (indexadas por ψ), i.e.,

$$\Big\{E_\lambda(\psi)\Big\}_{\psi\in\Sigma_1}, \quad \text{onde} \quad E_\lambda(\psi) = \|\psi\|_X^2 + F_\lambda(\psi).$$

Como $E_{\min}(\lambda) := \inf\Big\{E_\lambda(\psi), \;;\; \psi \in \Sigma_1\Big\}$, concluímos que $E_{\min}$ é função crescente e côncava.

Etapa 3. Mostremos que $E_{\min}$ é estritamente crescente e estritamente côncava.

Se $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, temos da Etapa 2, $E_{\lambda_1}(\psi) < E_{\lambda_2}(\psi)$, $\forall \psi \in \Sigma_1$. Em particular, se $\varphi_{\lambda_1} \in \mathscr{G}_{\lambda_1}$, temos

$$E_{\min}(\lambda_1) = E_{\lambda_1}(\varphi_{\lambda_1}) \leq E_{\lambda_1}(\psi) < E_{\lambda_2}(\psi), \quad \forall \psi \in \Sigma_1.$$

Escolhendo $\psi = \varphi_{\lambda_2} \in \mathscr{G}_{\lambda_2}$, temos

$$E_{\min}(\lambda_1) < E_{\lambda_2}(\varphi_{\lambda_2}) = E_{\min}(\lambda_2)$$

Analogamente, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,+\infty)$ e $t \in (0,1)$, segue da Etapa 2,

$$E_{t\lambda_1+(1-t)\lambda_2}(\psi) > tE_{\lambda_1}(\psi) + (1-t)E_{\lambda_2}(\psi) \geq tE_{\min}(\lambda_1) + (1-t)E_{\min}(\lambda_2), \quad \forall \psi \in \Sigma_1.$$

Escolhendo $\varphi_{t\lambda_1+(1-t)\lambda_2} \in \mathscr{G}_{t\lambda_1+(1-t)\lambda_2}$, temos

$$E_{\min}\Big(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2\Big) = E_{t\lambda_1+(1-t)\lambda_2}(\varphi_{t\lambda_1+(1-t)\lambda_2}) > tE_{\min}(\lambda_1) + (1-t)E_{\min}(\lambda_2).$$

<u>*Etapa 4.*</u> Seja $\varphi_\lambda \in \mathscr{G}_\lambda$. Então

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} F_\lambda(\varphi_\lambda) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{2}{3\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\Big(1+\lambda|\varphi_\lambda(x)|^2\Big)^{3/2} - 1\Big]\,dx = 1. \tag{3.3}$$

De fato, considerando a função $s \to G(\lambda, s^2)$ com G definida em (3.2), segue da regra de L'Hospital,

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} G\Big(\lambda, |\psi(x)|^2\Big) = \lim_{\lambda\downarrow 0}\Big(1+\lambda|\psi(x)|^2\Big)^{1/2}|\psi(x)|^2 = |\psi(x)|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Além disso, da desigualdade (2.9) e das imersões de X em $L^2(\mathbb{R}^d)$ e $L^4(\mathbb{R}^d)$, temos

$$G\Big(\lambda, |\psi|^2\Big) \leq \frac{2}{3}\Big(2|\psi|^2 + \lambda|\psi|^4\Big) \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

de modo que, como consequência do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} F_\lambda(\psi) = \lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^d} G\Big(\lambda, |\psi(x)|^2\Big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}|\psi(x)|^2\,dx = 1, \quad \forall \psi \in \Sigma_1. \tag{3.4}$$

Por outro lado, $\lambda \mapsto G(\lambda, s^2)$ é crescente, de modo que

$$|\psi(x)|^2 = \lim_{\lambda\downarrow 0} G(\lambda, |\psi(x)|^2) < G(\lambda, |\psi(x)|^2),\ \forall \lambda > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^2. \tag{3.5}$$

Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, temos $|\psi(x)|^2 < G\Big(\lambda, |\psi(x)|^2\Big)$, i.e.,

$$\frac{2}{3\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\Big(1+\lambda|\psi(x)|^2\Big)^{3/2} - 1\Big]\,dx > \int_{\mathbb{R}^d}|\psi(x)|^2\,dx = 1, \quad \forall \psi \in \Sigma_1,\ \forall \lambda > 0. \tag{3.6}$$

Para concluir, seja $\varphi_\lambda \in \mathscr{G}_\lambda$, $\lambda \in (0,1]$. Então, para todo $\lambda \in (0,1]$,

$$\|\varphi_\lambda\|_2 = 1 \quad \text{e} \quad \|\varphi_\lambda\|_X^2 \leq E_{\min}(\lambda) < E_{\min}(1). \tag{3.7}$$

Assim $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in(0,1]}$ é uma família limitada em X e podemos extrair uma sequência $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tendendo a zero tal que $\{\varphi_{\lambda_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para alguma $\varphi_* \in X$. Da compacidade de X em $L^2(\mathbb{R}^d)$ e $L^4(\mathbb{R}^d)$, podemos extrair uma subsequência (que ainda denotamos por λ_k) tal que

$$\lim_{\lambda_k\to 0^+}\varphi_{\lambda_k} = \varphi_* \ \text{ fortemente em } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ e } L^4(\mathbb{R}^d), \tag{3.8}$$

o que nos garante afirmar que $\|\varphi_*\|_2 = 1$ e $\Big\{\|\varphi_{\lambda_k}\|_4\Big\}_{k\in\mathbb{N}}$ é sequência limitada.

De (3.6), segue $F_{\lambda_k}(\varphi_{\lambda_k}) > 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que

$$1 < F_{\lambda_k}(\varphi_{\lambda_k}) \leq \Big|F_{\lambda_k}(\varphi_{\lambda_k}) - F_{\lambda_k}(\varphi_*)\Big| + F_{\lambda_k}(\varphi_*) \tag{3.9}$$

Lembrando a desigualdade em (2.12), temos para k suficientemente grande

$$\Big|F_{\lambda_k}(\varphi_{\lambda_k}) - F_{\lambda_k}(\varphi_*)\Big| \leq M\Big(\lambda_k, \|\varphi_*\|_4\Big)\|\varphi_{\lambda_k} - \varphi_*\|_2,$$

onde $M\Big(\lambda_k, \|\varphi_*\|_4\Big) = 4 + 4\lambda_k\|\varphi_*\|^4_{L^4(\mathbb{R}^d)}$. Para $\varepsilon > 0$ qualquer, segue da convergência em (3.8) a existência de k_0 suficientemente grande tal que, se $k \geq k_0$, tem-se $\Big|F_{\lambda_k}(\varphi_{\lambda_k}) - F_{\lambda_k}(\varphi_*)\Big| < \varepsilon$. Portanto, para $k \geq k_0$, temos

$$1 < F_{\lambda_k}(\varphi_{\lambda_k}) \leq \varepsilon + F_{\lambda_k}(\varphi_*).$$

Como $\lim\limits_{\lambda_k \to 0^+} F_{\lambda_k}(\varphi_*) = 1$ (veja (3.4)), temos

$$1 \leq \liminf_{\lambda_k \to 0^+} F_{\lambda_k}(\varphi_{\lambda_k}) \leq \limsup_{\lambda_k \to 0^+} F_{\lambda_k}(\varphi_{\lambda_k}) \leq \varepsilon + 1,$$

e sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, concluímos (3.3).

<u>*Etapa 5.*</u> Sabemos que $\|\psi\|_X \geq d$, $\forall \psi \in \Sigma_1$, visto que d é o menor autovalor do operador de Hermite $-\Delta + |x|^2$, com autofunção associada $\varphi_0(x) = (2\pi)^{-d/2}\exp\Big(-|x|^2/2\Big) \in \Sigma_1$. Assim, temos da Etapa 4,

$$E_{\min}(\lambda) \leq \|\varphi_0\|^2_X + F_\lambda(\varphi_0) = d + F_\lambda(\varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \limsup_{\lambda \downarrow 0} E_{\min}(\lambda) \leq d + 1. \tag{3.10}$$

Como $E_{\min}(\lambda)$ é estritamente crescente, temos para cada $\varphi_\lambda \in \mathscr{G}_\lambda$,

$$d \leq \|\varphi_\lambda\|^2_X \leq E_{\min}(\lambda) < E_{\min}(1).$$

Portanto, $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in (0,1]}$ é limitado em X. Seja $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergindo a zero tal que $\varphi_{\lambda_k} \rightharpoonup \varphi_*$ em X. Como X está imerso compactamente em $L^2(\mathbb{R}^d)$, temos $\varphi_{\lambda_k} \to \varphi_*$ em $L^2(\mathbb{R}^d)$, o que implica $\varphi_* \in \Sigma_1$. Assim, pela desigualdade (3.6), temos

$$E_{\min}(\lambda_k) = \|\varphi_{\lambda_k}\|^2_X + F_{\lambda_k}(\varphi_{\lambda_k}) > d + 1,$$

de modo que

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} E_{\min}(\lambda) \geq d + 1. \tag{3.11}$$

Assim, o resultado segue imediato de (3.10) e (3.11).

<u>*Etapa 6.*</u> Vamos, finalmente, mostrar que $\lim\limits_{\lambda \uparrow +\infty} E_{\min}(\lambda) = +\infty$.

Sendo $s \mapsto G(\lambda, s)$ função estritamente convexa, temos

$$G(\lambda, s) > G(\lambda, s/2) + \frac{\partial G}{\partial s}(\lambda, s/2)(s/2) > \frac{\partial G}{\partial s}(\lambda, s/2)(s/2), \quad \forall s > 0.$$

Assim, para $s = |\psi(x)|^2$, obtemos

$$\frac{2}{3\lambda}\Big[\Big(1 + \lambda|\psi(x)|^2\Big)^{3/2} - 1\Big] > \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\lambda}{2}|\psi(x)|^2\Big)^{1/2}|\psi(x)|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

e integrando em $\mathbb{R}^d$,

$$F_\lambda(\psi) > \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(1+\frac{\lambda}{2}|\psi(x)|^2\Big)^{1/2}|\psi(x)|^2dx > \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}}\|\psi\|_3^3, \quad \psi\in\Sigma_1. \tag{3.12}$$

Logo, para todo $\psi\in\Sigma_1$ fixado, temos $\lim\limits_{\lambda\uparrow+\infty} F_\lambda(\psi)=+\infty$ e, em particular,

$$\lim_{\lambda\uparrow+\infty} E_\lambda(\psi)=+\infty, \quad \forall\psi\in\Sigma_1.$$

Suponhamos por contradição que existe $C>0$ tal que $E_{\min}(\lambda)\le C$, para todo $\lambda>0$. Então

$$\|\varphi_\lambda\|_X\le C, \quad F_\lambda(\varphi_\lambda)\le C, \quad \forall\lambda>0. \tag{3.13}$$

Podemos então extrair uma sequência $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, com $\lambda_k\to+\infty$ quando $k\to+\infty$ tal que $\varphi_{\lambda_k}\rightharpoonup\varphi_*$ para algum $\varphi_*\in X$ e, pelo Teorema 2.1,

$$\varphi_{\lambda_k}\to\varphi_* \text{ fortemente em } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ e } L^3(\mathbb{R}^d).$$

Assim, por um lado temos $\|\varphi_*\|_2=1$, $0<\|\varphi_*\|_3<+\infty$, e por outro lado, de (3.12),

$$\|\varphi_{\lambda_k}\|_3^3\le\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_k}}F_\lambda(\varphi_{\lambda_k})\to 0$$

o que é absurdo. □

3.2 Relação entre $E_{\min}(\lambda)$ e $\mu_{\min}(\lambda)$

Para cada $\lambda>0$ consideremos $\varphi_\lambda\in\mathscr{G}_\lambda$ solução de (2.14), i.e.,

$$-\Delta\varphi_\lambda(x)+|x|^2\varphi_\lambda(x)+\varphi_\lambda\left(1+\lambda|\varphi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2}=\mu(\lambda)\varphi_\lambda(x), \quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{3.14}$$

Então, multiplicando escalarmente ambos os lados da equação por $\varphi_\lambda(x)$, obtemos

$$\mu(\lambda)=\|\varphi_\lambda\|_X^2+\int_{\mathbb{R}^d}\left(1+\lambda|\varphi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2}|\varphi_\lambda(x)|^2\,dx.$$

Lema 3.1. *A função $\mu:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\lim_{\lambda\to0^+}\mu(\lambda)=d+1 \quad e \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\mu(\lambda)=+\infty.$$

Demonstração: Observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} 1=\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi_\lambda(x)|^2\,dx &\le\int_{\mathbb{R}^d}\left(1+\lambda|\varphi_\lambda(x)|^2\right)^{1/2}|\varphi_\lambda(x)|^2\,dx,\\ &\le\int_{\mathbb{R}^d}\left(1+\frac{\lambda}{2}|\varphi_\lambda(x)|^2\right)|\varphi_\lambda(x)|^2\,dx,\\ &=1+\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi_\lambda(x)|^4\,dx. \end{aligned}$$

Repetindo o argumento decorrente de (3.7), podemos extrair uma sequência $\{\varphi_{\lambda_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fortemente para φ_* em $L^3(\mathbb{R}^d)$ quando $\lambda_k \to 0^+$, de modo que, passando ao limite com $k \to +\infty$,

$$
\begin{aligned}
1 = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{\lambda_k}(x)|^2\,dx &\le \int_{\mathbb{R}^d} \Big(1+\lambda|\varphi_{\lambda_k}(x)|^2\Big)^{1/2} |\varphi_{\lambda_k}(x)|^2\,dx,\\
&= 1 + \frac{\lambda_k}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{\lambda_k}(x)|^4\,dx \longrightarrow 1,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} \Big(1+\lambda|\varphi_{\lambda_k}(x)|^2\Big)^{1/2} |\varphi_{\lambda_k}(x)|^2\,dx = 1. \tag{3.15}
$$

Portanto, como

$$
\mu(\lambda) = E_{\min}(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^d} \Big(1+\lambda|\varphi_\lambda(x)|^2\Big)^{1/2} |\varphi_\lambda(x)|^2\,dx - F_\lambda(\varphi_\lambda),
$$

temos como consequência de (3.15) e (3.3),

$$
\lim_{\lambda\to 0^+} \mu(\lambda) = d+1.
$$

Por outro lado, observando que $\mu(\lambda) \ge \|\varphi_\lambda\|_X^2 + \sqrt{\lambda}\|\varphi_\lambda\|_3^3$, podemos mostrar que $\mu(\lambda) \to +\infty$ se $\lambda \to +\infty$ com um argumento de contradição análogo ao que segue (3.13). □

Denotemos por $\mu_{\min}(\lambda)$ a função

$$
\lambda \mapsto \mu_{\min}(\lambda) := \|\varphi_\lambda\|_X^2 + \int_{\mathbb{R}^d}\Big(1+\lambda|\varphi_\lambda(x)|^2\Big)^{1/2}|\varphi_\lambda(x)|^2\,dx, \quad \varphi_\lambda \in \mathscr{G}_\lambda. \tag{3.16}
$$

Como veremos a seguir, podemos relacionar sob condições adequadas as funções $E_{\min}(\lambda)$ e $\mu_{\min}(\lambda)$, sem a menção explícita à função φ_λ. Mais precisamente,

Proposição 3.1. *Suponhamos que para todo $\lambda \ge 0$, podemos determinar $\varphi_\lambda \in \mathscr{G}_\lambda$ tal que $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ seja uma curva diferenciável em X. Então,*

$$
E_{\min}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mu_{\min}(s)\,ds. \tag{3.17}
$$

Demonstração: Para cada $(\lambda,\phi) \in (0,+\infty)\times X$ temos, com a notação anteriormente definida,

$$
F_\lambda(\phi) = \frac{2}{3\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\Big(1+\lambda|\phi(x)|^2\Big)^{3/2} - 1\Big]\,dx.
$$

Como demonstrado no Apêndice B, para $\lambda > 0$ fixado, a aplicação $\phi \mapsto F_\lambda(\phi)$ é Fréchet diferenciável, com derivada Fréchet

$$
F'_\lambda(\phi) = 2(1+\lambda|\phi|^2)^{1/2}\phi.
$$

Por outro lado, para $\phi \in X$ fixado, por cálculos diretos vê-se que a aplicação $\lambda \mapsto F_\lambda(\phi)$ é diferenciável com derivada

$$\frac{d}{d\lambda}F_\lambda(\phi) = \frac{1}{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\Big(1+\lambda|\phi(x)|^2\Big)^{1/2}|\phi(x)|^2\,dx - F_\lambda(\phi)\right). \tag{3.18}$$

Sendo $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ uma curva diferenciável em X tal que $\|\varphi_\lambda\|_2 = 1$, temos

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi_\lambda(x)|^2\,dx = 2\Re\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\lambda(x)\frac{d}{d\lambda}\overline{\varphi_\lambda(x)}\,dx = 2\left(\varphi_\lambda : \frac{d}{d\lambda}\varphi_\lambda\right)_2 = 0, \quad \forall\lambda > 0. \tag{3.19}$$

Como o funcional energia E_λ é Fréchet-diferenciável em X, segue da Regra da Cadeia que $\lambda \mapsto E_\lambda(\varphi_\lambda)$ é diferenciável e lembrando que $E'_\lambda(\varphi_\lambda) = \mu(\lambda)\varphi_\lambda$, temos de (3.18) e (3.19)

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}E_\lambda(\varphi_\lambda) &= \left\langle E'_\lambda(\varphi_\lambda) : \frac{d}{d\lambda}\varphi_\lambda\right\rangle_{X'\times X} + \frac{d}{d\lambda}F_\lambda(\phi)\Big|_{\phi=\varphi_\lambda}\\ &= \mu(\lambda)\left(\varphi_\lambda : \frac{d}{d\lambda}\varphi_\lambda\right)_2 + \frac{d}{d\lambda}F_\lambda(\phi)\Big|_{\phi=\varphi_\lambda}\\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\Big(1+\lambda|\varphi_\lambda(x)|^2\Big)^{1/2}|\varphi_\lambda(x)|^2\,dx - F_\lambda(\varphi_\lambda)\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}E_\lambda(\varphi_\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(1+\lambda|\varphi_\lambda(x)|^2\Big)^{1/2}|\varphi_\lambda(x)|^2\,dx - F_\lambda(\varphi_\lambda). \tag{3.20}$$

Somando e subtraindo o termo $F_\lambda(\varphi_\lambda)$ no lado direito de (3.16), obtemos da expressão acima,

$$\mu_{\min}(\lambda) = E_{\min}(\lambda) + \lambda\frac{d}{d\lambda}E_{min}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\Big(\lambda E_{\min}(\lambda)\Big), \tag{3.21}$$

de onde se conclui que

$$E_{\min}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mu_{\min}(s)\,ds,$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 3.1. *Passando ao limite com $\lambda \to 0^+$ em ambos os lados da fórmula (3.17), obtemos via a Regra de L'Hospital a confirmação do resultado do Lema 3.1, a saber,*

$$d+1 = \lim_{\lambda\to 0^+} E_{\min}(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mu_{\min}(s) = \lim_{\lambda\to 0^+}\mu_{\min}(\lambda).$$

A fórmula (3.17) é idêntica à obtida em [(8)] no caso da não linearidade cúbica e a obtida em [(18)] no caso da não linearidade p-ésima (i.e., $|\phi|^p\phi$).

Referências

1 Abramowitz, M., Stegun, I. A.: Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Courier Corporation, 1965. Nenhuma citação no texto.

2 Almgren Jr, F. J., Lieb, E. H.: Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous. J. In Am. Math. Soc, Vol. 2, pp. 683-773, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 48.

3 Bao, W., Cai, Y., Ruan, X.: Ground states of Bose-Einstein condensates with higher order interaction. Physica D: Nonlinear Phenomena, v. 386, p. 38-48, 2019. Citado na página 14.

4 Barros, V.P.: Escalas e simplificações: exemplos em sistemas físicos e biológicos. Rev. Bras. Ensino Fís., São Paulo , v. 32, n. 1, p. 1303-1310, Mar. 2010 . Citado na página 4.

5 Boyer, F. Fabrie, P.: Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models, Vol. 183, Springer Science & Business Media, 2012. Nenhuma citação no texto.

6 Brezis, H.: Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer Science & Business Media, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 34.

7 Carretero-González, R., Frantzeskakis, D. J., Kevrekidis, P. G.: Nonlinear waves in Bose–Einstein condensates: physical relevance and mathematical techniques. Nonlinearity 21.7, R139, 2008. Citado na página 2.

8 Cipolatti, R., López Gondar, J., Trallero-Giner, C.: Bose–Einstein condensates in optical lattices: Mathematical analysis and analytical approximate formulae. Physica D, Nonlinear Phenomena, v. 241, n. 7, p. 755–763, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 4, 6, 20, 21 e 29.

9 Courant, R., Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics vol. 1, Interscience Publishers Inc, 1953. Citado na página 34.

10 Ginibre, J., Velo, J.: The global Cauchy problem for the non linear Schrödinger equation revisited. Annales de l'Institut Henri Poincare (C), Non Linear Analysis, Elsevier Masson, Vol. 2, No. 4, pp. 309–327, 1985. Citado na página 34.

11 Irrgeher, C., Leobacher, G.: High-dimensional integration on $\mathbb{R}^d$, weighted Hermite spaces, and orthogonal transforms. Journal of Complexity, v. 31, n. 2, pp. 174–205, 2015. Citado na página 34.

12 Hu, S., Papageorgiou, N. S.: Handbook of multivalued analysis, Volume II: Applications, Springer Science & Business Media, 2013. Nenhuma citação no texto.

13 Jost, J.: Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York, 2002. Citado na página 14.

14 Kavian, O., Weissler, F. B. et al: Self-similar solutions of the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation. Michigan Math. J, v. 41, n. 1, pp. 151-173, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 7, 20 e 21.

15 Kesavan, S.: Symmetrization and applications, Vol 3., World Scientific, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 48.

16 Leoni, G.: A first course in Sobolev spaces, American Mathematical Soc., 2017. Citado 3 vezes nas páginas 46, 47 e 48.

17 Lions, J. L.: Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969. Citado na página 34.

18 Lira, Y.: Condensados de Bose-Einstein. Dissertação (Mestrado em Matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 29.

19 Modica, G.: Ennio De Giorgi: Selected papers, Meccanica, v. 43, n. 6, p. 651-652, 2008. Citado na página 14.

20 Muñoz, M. A., Delgado, V.: Extension of the Thomas-Fermi approximation for trapped Bose-Einstein condensates with an arbitrary number of atoms. Physical Review A, v. 74, n. 6, p. 065602, 2006. Citado na página 4.

21 Muñoz, M. A., Delgado, V.: Ground-state properties of trapped Bose-Einstein condensates: Extension of the Thomas-Fermi approximation. Physical Review A, v. 75, n. 6, p. 063610, 2007. Citado na página 4.

22 Muñoz, M. A., Delgado, V.: Effective mean-field equations for cigar-shaped and disk-shaped Bose-Einstein condensates. Physical Review A, v. 77, n. 1, p. 013617, 2008. Citado na página 4.

23 Muñoz, M. A., Delgado, V.: Effective one-dimensional dynamics of elongated Bose–Einstein condensates. Annals of Physics, v. 324, n. 3, p. 709-724, 2009. Citado na página 4.

24 Oliveira, E.: Rearranjamento, simetrização e aplicações a problemas isoperimétricos, Dissertação de Mestrado (UFRJ), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1989. Citado na página 46.

25 Puel, J-P.: Semilinear elliptic equations. Editora IM-UFRJ (ebook), 2019 `http://www.im.ufrj.br/index.php/pt/estrutura/e-books-im`. Citado na página 13.

26 Rudin, W.: Real and complex analysis, Tata McGraw-hill education, 2006. Citado na página 19.

27 Trallero-Giner, C., Cipolatti, R., Liew, T.C.H.: Eur. Phys. J.(D), 67, 143, 2013. Citado na página 4.

Apêndices

APÊNDICE A – O Método de Galerkin

Consideremos o problema de Cauchy para a equação de Muñoz-Delgado em $\mathbb{R}^d$, $(d = 1, 2, 3)$

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u + |x|^2 u + \Big(1 + \lambda |u|^2\Big)^{1/2} u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \tag{A.1}$$

Sabemos que as funções de Hermite formam um sistema ortogonal completo de $L^2(\mathbb{R}^d)$ (veja [(9)], [(11)]). Assim, denotaremos por $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a sequência de funções de Hermite normalizadas em $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Neste Apêndice provaremos a existência de solução no espaço X do problema (A.1) utilizando o método de Galerkin. As principais referências utilizadas são [(6)], [(10)] e [(17)].

• O Método de Galerkin

Para $m \in \mathbb{N}$ fixado, seja X_m o espaço vetorial gerado pelas primeiras m funções de Hermite. Procuremos solução de (A.1) na forma

$$u_m(t, x) = \sum_{j=0}^{m} g_j(t)\psi_j(x) \tag{A.2}$$

tal que $u_m(0, x) = u_{0,m}(x) = \sum_{j=1}^{m} g_{0,j}\psi_j(x)$, onde $g_{0,j} \in \mathbb{C}$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

Substituindo em (A.1) e lembrando que $-\Delta\psi_j + |x|^2\psi_j = \lambda_j\psi_j$,

$$\sum_{j=1}^{m}\Big[ig_j'(t) + \lambda_j g_j(t) + \Big(1 + \lambda|u_m(t, x)|^2\Big)^{1/2} g_j(t)\Big]\psi_j(x) = 0. \tag{A.3}$$

Multiplicando a equação (A.3) por $\psi_k(x)$, com $k \leq m$, e integrando em $\mathbb{R}^d$, obtemos a equação

$$ig_k'(t) + \lambda_k g_k(t) + \sum_{j=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\Big(1 + \lambda|u_m(t, x)|^2\Big)^{1/2}\psi_j(x)\psi_k(x)\,dx\right) g_j(t) = 0. \tag{A.4}$$

Consideremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= \Big(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_m(t)\Big), \\ a_{j,k}(\mathbf{g}) &= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(1 + \lambda|u_m(t, x)|^2\Big)^{1/2}\psi_j(x)\psi_k(x)\,dx. \end{aligned} \tag{A.5}$$

onde u_m é definido por (A.2). Assim, o sistema de equações (A.4) pode ser expresso como a seguinte equação vetorial em $\mathbb{C}^m$

$$i\frac{d}{dt}\mathbf{g}(t) + \Lambda\mathbf{g}(t) + A[\mathbf{g}(t)]\mathbf{g}(t) = \mathbf{0},$$

onde $\Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ é matriz diagonal e $A[\mathbf{g}] = \Big[a_{i,j}(\mathbf{g})\Big]$ é a matriz com os coeficientes definidos em (A.5). Observe que a matriz $A[\mathbf{g}]$ é real e simétrica, qualquer que seja $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^m$.

Assim, a solução aproximada u_m, com $m \in \mathbb{N}$ fixado, estará definida uma vez definida a condição inicial. Portanto, para $\mathbf{g}_0 \in \mathbb{C}^m$, consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{g}(t) = i\Lambda\mathbf{g}(t) + iA[\mathbf{g}(t)]\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{g}(0) = \mathbf{g}_0. \end{cases} \tag{A.6}$$

A seguinte proposição estabelece o resultado de existência e unicidade de solução global de (A.6).

Teorema A.1. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ fixado e para todo $\mathbf{g}_0 \in \mathbb{C}^m$, existe uma única função $\mathbf{g} \in C^1\Big(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m\Big)$ solução de (A.6).*

A prova do Teorema A.1 é consequência direta do seguinte lema, onde mostramos que a função que define o termo não linear da equação (A.6) é localmente Lipschiz-contínua.

Lema A.1. *Seja $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ a função definida por $f(\mathbf{g}) = A[\mathbf{g}]\mathbf{g}$. Então vale a seguinte propriedade:*

$$\forall M > 0,\ \exists C_M > 0 \text{ tal que se } \|\mathbf{g}\|, \|\mathbf{h}\| \leq M, \text{ então } \|f(\mathbf{g}) - f(\mathbf{h})\| \leq C_M\|\mathbf{g} - \mathbf{h}\|.$$

Demonstração. De fato, se $\mathbf{g}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^m$, temos

$$\|f(\mathbf{g}) - f(\mathbf{h})\| = \|A[\mathbf{g}]\mathbf{g} - A[\mathbf{h}]\mathbf{h}\| \leq \|A[\mathbf{g}]\|\|\mathbf{g} - \mathbf{h}\| + \|A[\mathbf{g}] - A[\mathbf{h}]\|\|\mathbf{h}\|, \tag{A.7}$$

onde $\|\mathbf{g}\| = \sqrt{|g_1|^2 + \cdots + |g_m|^2}$ e $\|A[\mathbf{g}]\| = \sqrt{a_{1,1}(\mathbf{g})^2 + \cdots + a_{m,m}(\mathbf{g})^2}$.

Observemos que se $u(x) = \sum_{s=1}^m g_s\psi_s(x)$, então

$$\begin{aligned} |a_{j,k}(\mathbf{g})| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}\Big(1 + \lambda|u(x)|^2\Big)^{1/2}\psi_j(x)\psi_k(x)\,dx\right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}\Big(1 + \lambda|u(x)|^2\Big)\psi_j(x)^2\right)^{1/2}\|\psi_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \left(1 + \lambda\int_{\mathbb{R}^d}u(x)^2\psi_j(x)^2dx\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Assim, temos

$$|a_{j,k}(\mathbf{g})|^2 \leq 1 + \lambda\int_{\mathbb{R}^d}|u(x)|^2\psi_j(x)^2dx, \quad \forall k = 1, \ldots, m.$$

Por outro lado,

$$|u(x)|^2 = \left|\sum_{s=1}^m g_s\psi_s(x)\right|^2 \leq \left(\sum_{s=1}^m |g_s||\psi_s(x)|\right)^2 \leq m\left(\sum_{s=1}^m |g_s|^2|\psi_s(x)|^2\right), \tag{A.9}$$

de modo que

$$|a_{j,k}(\mathbf{g})|^2 \leq 1 + \lambda m \sum_{s=1}^{m} |g_s|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_s(x)\psi_j(x)|^2 dx, \quad \forall k = 1, \ldots, m.$$

Seja

$$C_m := \max\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_s(x)\psi_j(x)|^2 dx \,;\, j, s = 1, \ldots, m \right\}.$$

Então

$$|a_{j,k}(\mathbf{g})|^2 \leq 1 + \lambda m^2 C_m \|\mathbf{g}\|^2,$$

dessa forma, se $\|\mathbf{g}\| \leq M$, temos

$$\|A[\mathbf{g}]\| \, \|\mathbf{g} - \mathbf{h}\| \leq m^2 \Big(1 + \lambda m^2 C_m M^2\Big)^{1/2} \|\mathbf{g} - \mathbf{h}\|. \tag{A.10}$$

Vejamos agora a segunda parcela do lado direito de (A.7). Sejam $u(x) = \sum_{s=1}^{m} g_s \psi_s(x)$ e $v(x) = \sum_{s=1}^{m} h_s \psi_s(x)$. Então,

$$\begin{aligned} \Big|a_{j,k}(\mathbf{g}) - a_{j,k}(\mathbf{h})\Big| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left[\Big(1 + \lambda |u(x)|^2\Big)^{1/2} - \Big(1 + \lambda |v(x)|^2\Big)^{1/2} \right] \psi_j(x)\psi_k(x)\, dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \Big(1 + \lambda |u(x)|^2\Big)^{1/2} - \Big(1 + \lambda |v(x)|^2\Big)^{1/2} \right| \Big|\psi_j(x)\psi_k(x)\Big|\, dx. \end{aligned}$$

Se considerarmos $f(s) = \sqrt{1 + \lambda s^2}$, segue do Teorema do Valor Médio, $|f(b) - f(a)| = |f'(ta + (1-t)b)|(b-a)$, para algum $0 < t < 1$. Como $|f'(s)| \leq 2\lambda |s|$ para todo $s \in \mathbb{R}$, temos, para algum $0 < t_x < 1$,

$$\begin{aligned} \left| \Big(1 + \lambda |u(x)|^2\Big)^{1/2} - \Big(1 + \lambda |v(x)|^2\Big)^{1/2} \right| &\leq 2\lambda \Big| t_x u(x) + (1 - t_x) v(x) \Big| \Big| u(x) - v(x) \Big| \\ &\leq 2\lambda \Big[|u(x)| + |v(x)| \Big] \Big| u(x) - v(x) \Big| \end{aligned}$$

e portanto

$$\Big|a_{j,k}(\mathbf{g}) - a_{j,k}(\mathbf{h})\Big| \leq 2\lambda \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\Big|u(x)\Big| + \Big|v(x)\Big| \Big] \Big|u(x) - v(x)\Big| \Big|\psi_j(x)\psi_k(x)\Big|\, dx.$$

De (A.9) temos

$$\begin{cases} |u(x)| + |v(x)| \leq \displaystyle\sum_{s=1}^{m} \Big[|g_s| + |h_s| \Big] |\psi_s(x)| \leq 2M \sum_{s=1}^{m} |\psi_s(x)|, \\ |u(x) - v(x)| \leq \displaystyle\sum_{s=1}^{m} \Big| g_s - h_s \Big| |\psi_s(x)|, \end{cases}$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e da definição de C_m, temos

$$\begin{aligned} \Big|a_{j,k}(\mathbf{g}) - a_{j,k}(\mathbf{h})\Big| &\leq 4\lambda M \sum_{s=1}^{m} |g_s - h_s| \sum_{l=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_s(x)| |\psi_l(x)| |\psi_j(x)\psi_k(x)|\, dx \\ &\leq 4\lambda M m C_m \sum_{s=1}^{m} |g_s - h_s| \leq 4\lambda M m^2 C_m \|\mathbf{g} - \mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

de onde se conclui que

$$\|A[\mathbf{g}] - A[\mathbf{h}]\| \leq 4\lambda M m^3 C_m \|\mathbf{g} - \mathbf{h}\|. \tag{A.11}$$

Segue de (A.10) e (A.11) a conclusão da prova com

$$C_M = \max\Big\{m^2(1 + \lambda m^2 C_m M^2)^{1/2}, 4\lambda m^3 C_m M^2\Big\}.$$

$\square$

Demonstração. (**Teorema A.1**) Pelo Teorema de Picard, dados $\mathbf{g}_0 \in \mathbb{C}^m$, existe uma única função $\mathbf{g} \in C^1\Big((-T_*, T^*); \mathbb{C}^m\Big)$ solução de (A.10) tal que se $T^* < +\infty$ (respectivamente $T_* < +\infty$), então

$$\lim_{t \uparrow T^*} \|\mathbf{g}(t)\| = +\infty \quad \text{(respectivemente} \lim_{t \downarrow -T_*} \|\mathbf{g}(t)\| = +\infty).$$

Multiplicando escalarmente ambos os lados da equação (A.6) por $\overline{\mathbf{g}(t)}$, obtemos

$$\Big\langle \mathbf{g}'(t) : \overline{\mathbf{g}(t)} \Big\rangle = i \left\langle \Lambda \mathbf{g}(t) : \overline{\mathbf{g}(t)} \right\rangle + i \left\langle A[\mathbf{g}(t)]\mathbf{g}(t) : \overline{\mathbf{g}(t)} \right\rangle. \tag{A.12}$$

Como as matrizes Λ e $A[\mathbf{g}(t)]$ são reais e simétricas, o lado direito de (A.12) é imaginário puro, de modo que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{g}(t)\|^2 = \Re \left\langle \mathbf{g}'(t) : \overline{\mathbf{g}(t)} \right\rangle = 0, \quad \forall t \in]-T_*, T^*[.$$

Portanto, $\|\mathbf{g}(t)\| = \|\mathbf{g}_0\|$ para todo $t \in]-T_*, T^*[$, o que significa que $T^* = T_* = +\infty$, como queríamos demonstrar. $\square$

Observação: Como consequência do Teorema A.1 a função u_m definida em (A.2) pertence ao espaço $C^1(\mathbb{R}, X)$ e satisfaz a seguinte lei de conservação, que denominamos conservação de massa:

$$\|u_m(t, \cdot)\|_2 = \|u_m(0, \cdot)\|_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{A.13}$$

De fato, pela ortogonalidade das funções ψ_k, temos

$$\|u_m(t, \cdot)\|_2 = \|\mathbf{g}(t)\| = \|\mathbf{g}_0\|.$$

Além da conservação de massa, a energia das soluções u_m também é preservada. Para veificarmos isso, consideremos a equação (A.3) expressa em termos de u_m, i.e.,

$$iu_m' - \Delta u_m + |x|^2 u_m + \Big(1 + \lambda |u_m|^2\Big)^{1/2} u_m = 0, \tag{A.14}$$

onde u_m' denota a derivada parcial de u_m em relação a t. Vale observar que $u_m'(t) \in X$ para todo $m \in \mathbb{N}$, de modo que podemos multiplicar ambos os lados da equação acima por $\overline{u_m'}$ e integrar em $\mathbb{R}^d$, obtendo assim a equação

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big[i|u_m'|^2 + \nabla u_m \cdot \overline{\nabla u_m'} + |x|^2 u_m \overline{u_m'} + \Big(1 + \lambda |u_m|^2\Big)^{1/2} u_m \overline{u_m'}\Big]\, dx = 0. \tag{A.15}$$

Tomando a parte real em (A.15) e lembrando da definição do produto escalar de X dado por (2.4), temos

$$(u_m(t) : u'_m(t))_X + \int_{\mathbb{R}^d} \Big(1 + \lambda |u_m(t)|^2\Big)^{1/2} \Re(u_m(t)\overline{u'_m(t)})\, dx = 0. \tag{A.16}$$

Lembrando também que o funcional F definido em (2.11) é diferenciável em X, temos pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dt} F\Big(u_m(t)\Big) = \Big\langle F'\Big(u_m(t)\Big) : u'_m(t)\Big\rangle_{X' \times X},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\frac{2}{3\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\Big(1 + \lambda|u_m(t)|^2\Big)^{3/2} - 1\right] dx = 2\int_{\mathbb{R}^d} \Big(1 + \lambda|u_m(t)|^2\Big)^{1/2} \Re(u_m(t)\overline{u'_m(t)})\, dx. \tag{A.17}$$

Assim, a equação (A.16) toma a forma

$$\frac{d}{dt} E\Big(u_m(t)\Big) = 0.$$

Portanto, após integração em t, obtemos a conservação da energia, i.e.,

$$E\Big(u_m(t)\Big) = E\Big(u_m(0)\Big) = E(u_{0,m}). \tag{A.18}$$

Com as leis de conservação de massa e energia, podemos obter as estimativas apropriadas que possibilitarão mostrar a convergência da sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ para uma solução de (A.1), a partir do resultado preliminar a seguir.

Lembremos que se B é um dado espaço de Banach, denotamos por $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, B)$ o espaço da distribuições sobre $\mathbb{R}$ tomando valores B, definido por

$$\mathscr{D}'(\mathbb{R}, B) := \mathscr{L}\Big(\mathscr{D}(\mathbb{R}), B\Big).$$

Assim, se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}, B)$, denotamos, para cada $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\langle\!\langle T, \theta \rangle\!\rangle := T(\theta)$.

Lema A.2. *A sequência $\{u_m(t)\}_{m\in\mathbb{N}}$ é Hölder equicontínua no espaço $L^2(\mathbb{R}^d)$ com expoente 1/2. Mais precisamente, existe $C_0 > 0$ independente de m tal que*

$$\|u_m(t) - u_m(s)\|_2 \leq C_0 |t - s|^{1/2}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \tag{A.19}$$

Demonstração. Faremos a demonstração em três etapas.

Etapa 1: $\{u_m\}_m$ *é uniformemente limitada em $L^\infty(\mathbb{R}, X)$.*

De fato, como a Energia E é uma função contínua em X e $u_{0,m}$ converge para u_0 em X, segue que existe constante $C_1 > 0$ (que só depende de $u_0 \in X$) tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|u_m(t)\|_X^2 \leq E\Big(u_m(t)\Big) = E(u_{0,m}) \leq C_1.$$

Portanto, $\|u_m\|_{L^\infty(\mathbb{R},X)} \leq \sqrt{C_1}$.

Etapa 2: *A sequência $\{F'(u_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty\Big(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$.*

De fato, sendo $F'\Big(u_m(t)\Big) = 2\Big(1+\lambda|u_m(t)|^2\Big)^{1/2}u_m(t)$, temos da imersão contínua de X em $L^2(\mathbb{R}^d)\cap L^4(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}\|F'\Big(u_m(t)\Big)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(1+\lambda|u_m(t)|^2\Big)|u_m(t)|^2\,dx = \|u_m(t)\|_2^2 + \lambda\|u_m(t)\|_4^4 \\ &\leq \|u_m(t)\|_X^2 + C\lambda\|u_m(t)\|_X^4.\end{aligned} \tag{A.20}$$

Logo, da Etapa 1, temos $\|F'(u_m)\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_2$.

Etapa 3: *A sequência $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, definida por $h_m := -\Delta u_m + |x|^2u_m + F'(u_m)$, é uniformemente limitada em $L^\infty(\mathbb{R}, X')$.*

De fato, sabemos que E é diferenciável em X (veja apêndice B) e $E' : X \to X'$. Logo,

$$h_m(t) = \frac{1}{2}E'\Big(u_m(t)\Big) \in X', \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_m(t)-u_m(s)\|_2^2 &= 2\Re\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\overline{u_m(t)-u_m(s)}\Big)u_m'(t)\,dx \\ &= 2\Re\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\overline{u_m(t)-u_m(s)}\Big)\Big(-i\Delta u_m(t) + i|x|^2u_m(t) + iF'(u_m(t))\Big)\,dx \\ &= \Re\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\overline{u_m(t)-u_m(s)}\Big)\Big(-iE'(u_m(t)\Big)\,dx\end{aligned} \tag{A.21}$$

Como

$$\Re\int_{\mathbb{R}^d}\overline{u_m(t)}\Big(-i\Delta u_m(t) + i|x|^2u_m(t) + iF'(u_m(t))\Big)\,dx = 0,$$

a igualdade (A.21) se reduz a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_m(t)-u_m(s)\|_2^2 &= 2\Re\int_{\mathbb{R}^d}\overline{u_m(s)}\Big(i\Delta u_m(t) - i|x|^2u_m(t) - iF'(u_m(t))\Big)\,dx \\ &= \Re\int_{\mathbb{R}^d}\overline{u_m(s)}(-iE'(u_m(t)))\,dx = -2\Im\int_{\mathbb{R}^d}\overline{u_m(s)}h_m(t)\,dx \\ &= -2\Im\Big\langle u_m(s) : h_m(t)\Big\rangle_{X\times X'}\end{aligned}$$

Integrando nos dois lados da identidade acima, obtemos

$$\|u_m(t)-u_m(s)\|_2^2 = -2\int_s^t \Im\Big\langle u_m(s) : h_m(\tau)\Big\rangle_{X\times X'}d\tau \leq 2\int_s^t \|u_m(s)\|_X\|h_m(\tau)\|_{X'}\,d\tau.$$

Da Etapa 1 temos,

$$\|u_m(t)-u_m(s)\|_2^2 \leq C_1\int_s^t \|h_m(\tau)\|_{X'}\,d\tau.$$

Como $2h_m(\tau) = E'(u_m(\tau)) \in X'$, temos

$$2\|h_m(\tau)\|_{X'} \leq \|-\Delta u_m(\tau) + |x|^2u_m(\tau)\|_{X'} + \|F'(u_m(\tau))\|_{X'}.$$

Lembrando que o operador $-\Delta + |x|^2 I$ é uma isometria entre X e X', temos

$$\|\Delta u_m(\tau) - |x|^2 u_m(\tau)\|_{X'} = \|u_m(\tau)\|_X$$

e consequentemente

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\Delta u_m(\tau) - |x|^2 u_m(\tau)\|_{X'} < +\infty.$$

Além disso, se identificarmos $L^2(\mathbb{R}^d)$ com seu dual, temos a relação $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow X'$, com as injeções contínuas. Portanto, existe constante $C > 0$ tal que $\|F'(u_m(\tau))\|_{X'} \leq C\|F'(u_m(\tau))\|_2$, e como já provamos em (A.20),

$$\|F'(u_m(\tau))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_m(t)\|_2^2 + \lambda \|u_m(t)\|_4^4. \tag{A.22}$$

Portanto, segue que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|h_m(t)\|_{X'} < +\infty$$

e consequentemente, para alguma constante $C_0 > 0$ (que somente depende de $\|u_0\|_X$),

$$\|u_m(t) - u_m(s)\|_2^2 \leq C_1 \int_s^t \|h_m(\tau)\|_{X'}\, d\tau \leq C_0|t-s|,$$

com o que concluímos a prova do Lema em questão. □

Teorema A.2. *Existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$ e uma subsequência $\{u_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que converge para u na topologia fraco-$\star$ de $L^\infty(\mathbb{R}, X)$, solução de (A.1) em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, X')$ tal que $u(0) = u_0$ em X'.*

Demonstração. Da Etapa 1 na prova do Lema A.2, sabemos que a sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ (e consequentemente em $L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$). Sendo $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ o dual topológico de $L^1(\mathbb{R}, X')$, segue do Teorema de Banach-Alaoglu que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta na topologia fraco-$\star$ de $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ (e também em $L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$). Ou seja, podemos tomar uma subsequência, ainda denotada por $\{u_m\}$, que converge fraco-$\star$ para algum $u \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$. Em particular, $u_m \to u$ em $\mathscr{D}(\mathbb{R}, X')$, i.e.,

$$\langle\!\langle u_m : \theta \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle u : \theta \rangle\!\rangle, \quad \forall \theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Como $L^\infty(\mathbb{R}, X) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}, X)$ podemos derivar u no sentido das distribuições, ou seja, $u' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}, X)$, e lembrando que $-\Delta u + |x|^2 u \in L^\infty(\mathbb{R}, X') \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}, X')$, temos a distribuição v tomando valores em X' definida por

$$v := iu' - \Delta u + |x|^2 u \quad \text{em} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}, X'). \tag{A.23}$$

<u>Afirmativa 1</u>: *$v \in L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$ e a sequência $\{F'(u_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fraco-$\star$ para v.*

De fato, como u_m é solução de (A.3), temos para todo $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle\!\langle F'(u_m) : \theta \rangle\!\rangle = \langle\!\langle -iu_m' + \Delta u_m - |x|^2 u_m : \theta \rangle\!\rangle = \langle\!\langle iu_m : \theta' \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \Delta u_m - |x|^2 u_m : \theta \rangle\!\rangle$$

Das convergências obtidas acima, temos em X',

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\Big(\langle\!\langle iu_m : \theta'\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \Delta u_m - |x|^2 u_m : \theta\rangle\!\rangle\Big) &= \langle\!\langle iu : \theta'\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \Delta u - |x|^2 u : \theta\rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle -iu' + \Delta u - |x|^2 u : \theta\rangle\!\rangle = \langle\!\langle v : \theta\rangle\!\rangle\end{aligned}$$

Portanto, $F'(u_m)$ converge para v em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, X')$.

Por outro lado, como a sequência $\{F'(u_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$, temos, passando a uma subsequência se necessário, $F'(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} w$ em $L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$. Portanto, $v = w \in L^\infty\Big(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$, o que prova a Afirmativa 1.

<u>Afirmativa 2</u>: $u' \in L^\infty(\mathbb{R}, X')$.

De fato, como $L^\infty(\mathbb{R}, L^2) \subset L^\infty(\mathbb{R}, X')$, segue da Afirmativa 1 e da definição de v,

$$iu' = v - \Delta u + |x|^2 u \in L^\infty(\mathbb{R}, X'). \tag{A.24}$$

<u>Afirmativa 3</u>: *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a função $u \in C\Big([a,b], X\Big)$ e satisfaz*

$$\|u(t) - u(s)\|_2^2 \le C|t-s|^{1/2}.$$

Seja $I = [a, b]$, e consideremos $\mathscr{X}$ o subconjunto de $C\Big(I, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$ formado pelos elementos $u_m|_I$, ou seja, as restrições de u_m ao intervalo I.

É claro que $\mathscr{X} \subset C\Big(I, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$ e pelo Lema A.2, $\mathscr{X}$ é uniformemente equicontínuo em $C\Big(I, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$. Além disso, para todo $t \in I$, o conjunto

$$\mathscr{X}(t) := \Big\{u_m|_I(t)\,;\, u_m \in \mathscr{X}\Big\}$$

está contido em X e como este está compactamente imerso em $L^2(\mathbb{R}^d)$, segue do Teorema de Arzelà-Ascoli que $\mathscr{X}$ é relativamente compacto em $C\Big(I, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$. Portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos garantir que $\{u_m|_I\}_{m\in\mathbb{N}}$ é convergente em $C\Big(I, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$.

Por outro lado, sabemos que $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ e "a fortiori", em $L^2(I\times\mathbb{R}^d)$. Logo, $u_m|_I$ converge para $u|_I$ em $C\Big(I, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$. Assim, passando ao limite quando $m \to +\infty$ na desigualdade (A.19), obtemos

$$\|u(t) - u(s)\|_2 \le C|t-s|^{1/2}, \ \forall t, s \in I.$$

<u>Afirmativa 4</u>: *Para todo $t \in \mathbb{R}$, a sequência $\{u_m(t)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para para $u(t)$ em X.*

Para mostrar esse fato, fixemos $t \in \mathbb{R}$ e lembremos que $\{u_m(t)\}_{m\in\mathbb{N}}$ é sequência limitada em X. Logo, existe μ tal que, passando a uma subsequência se necessário, $u_m(t) \rightharpoonup \mu$ em

X. Para concluir que μ é igual a $u(t)$, observemos que, para todo $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\|u(t)-\mu\|_2^2 = \Big(u(t)-\mu : u(t)-\mu\Big)_2 &= \Big(u(t)-\mu : u(t)-u(s)\Big)_2 \\ &+ \Big(u(t)-\mu : u(s)-u_m(s)\Big)_2 + \Big(u(t)-\mu : u_m(s)-u_m(t)\Big)_2 \\ &+ \Big(u(t)-\mu : u_m(t)-\mu\Big)_2\end{aligned}$$

Do Lema A.2 e da Afirmativa 3 acima, temos

$$\begin{aligned}\Big(u(t)-\mu : u(t)-u(s)\Big)_2 &\leq C\|u(t))-\mu\|_2|t-s|^{1/2} \\ \Big(u(t)-\mu : u_m(s)-u_m(t)\Big)_2 C &\leq \|u(t))-\mu\|_2|t-s|^{1/2}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|u(t)-\mu\|_2^2 \leq 2C\|u(t)-\mu\|_2|t-s|^{1/2} &+ \Big(u(t)-\mu : u(s)-u_m(s)\Big)_2 \\ &+ \Big(u(t)-\mu : u_m(t)-\mu\Big)_2\end{aligned}$$

A primeira parcela no lado direito da inequação acima tende a zero quando $s \to t$; a terceira tende a zero quando $m \to +\infty$ pois, por hipótese, $u_m(t) \rightharpoonup \mu$ em X. O problema persiste na segunda parcela, que envolve $u_m(s)$. Mas sabemos que $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty\Big(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2)\Big)$. Assim, para $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}\|u(t)-\mu\|_2^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\|u(t)-\mu\|_2|t-s|^{1/2}ds + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\Big(u(t)-\mu : u(s)-u_m(s)\Big)_2 ds \\ &\quad + \Big(u(t)-\mu : u_m(t)-\mu\Big)_2 \\ &\leq \frac{4\varepsilon}{3}\|u(t)-\mu\|_2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\Big(u(t)-\mu : u(s)-u_m(s)\Big)_2 \chi_\varepsilon(s)\,ds \\ &\quad + \Big(u(t)-\mu : u_m(t)-\mu\Big)_2,\end{aligned}$$

onde estamos denotando a função por $\chi_\varepsilon(s)$ a função característica do intervalo $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$.

Logo, fixado $\varepsilon > 0$ e fazendo $m \to +\infty$, obtemos $\|u(t)-\mu\|_2 \leq 4\varepsilon/3$, e como ε é arbitrário, temos $u(t) = \mu$.

<u>Afirmativa 5</u>: *A função u satisfaz a condição inicial do problema (A.1) em X', isto é, $\langle u(0) : \psi\rangle = \langle u_0 : \psi\rangle$ para todo $\psi \in X$.*

Da equação (A.3), temos

$$\Big\langle iu_m'(t) - \Delta u_m(t) + |x|^2 u_m(t) + F'(u_m(t)) : \psi\Big\rangle = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall \psi \in X,$$

de modo que

$$\int_0^\infty \Big\langle iu_m'(t) - \Delta u_m(t) + |x|^2 u_m(t) + F'(u_m(t) : \psi\Big\rangle \theta(t)\,dt = 0,$$

para todo $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Logo, se $\theta(0) = 1$,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \Big\langle -iu_m(t) : \psi\Big\rangle \theta'(t)\,dt + \langle iu_m(0) : \psi_j\rangle \\ &\quad = \int_0^\infty \Big\langle \Delta u_m(t) - |x|^2 u_m(t) - F'(u_m(t)) : \psi\Big\rangle \theta(t)\,dt\end{aligned}$$

Passando ao limite quando $m \to +\infty$ e lembrando que $F'(u_m)$ converge para v fraco-$\star$ em $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ e de (A.24), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big\langle -iu(t) : \psi \Big\rangle \theta'(t)\, dt + \langle iu_0 : \psi \rangle &= \int_0^\infty \Big\langle \Delta u(t) - |x|^2 u(t) - v(t) : \psi \Big\rangle \theta(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty \Big\langle iu(t) : \psi \Big\rangle \theta(t)\, dt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$u_0 = \int_0^\infty \Big[u(t)\theta'(t) + u'(t)\theta(t) \Big]\, dt \quad \text{em } X' \quad \text{para todo } \theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \theta(0) = 1.$$

<u>Afirmativa 6</u>: *$F'(u) = v$. Mais precisamente, $F'(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} F'(u)$ em $L^\infty\Big(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$ e, portanto, u é solução de (A.1).*

Vimos na Afirmativa 1 que $F'(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty\Big(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$. Seja $I = [a, b]$. Então $F'(u_m)|_I$, a restriçaão de $F'(u_m)$ ao intervalo I, converge para $v|_I$ na topologia fraca de $L^2(I \times \mathbb{R}^d)$.

Como vimos na prova da Afirmativa 3, o subconjunto $\mathscr{X}$ formado pelos elementos $u_m|_I$ é relativamente compacto em $C\Big(I, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$ e, passando eventualmente a uma subsequência, podemos garantir que $\{u_m|_I\}$ é convergente para u_I em $C\Big(I, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$ e consequentemente,

$$F'(u_m|_I) \to F'(u|_I) \text{ em quase todo ponto de } I \times \mathbb{R}^d. \tag{A.25}$$

Como $\{F'(u_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty\Big(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$, o mesmo vale para $L^2(I \times \mathbb{R}^d)$. Logo, passando a uma subsequência se necessário, temos $F'(u_m) \rightharpoonup F'(u) = v$ em $L^2(I \times \mathbb{R}^d)$. Como I foi fixado arbitrariamente, temos $F'(u) = v$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Assim, $u \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$ é solução de (A.1) no sentido das distribuições com valores em X'. $\square$

APÊNDICE B – A Diferencial do Funcional Energia

Neste Apêndice deduzimos as expressões para a derivadas

$$F' : X \to X' \quad \text{e} \quad F'' : X \to \mathscr{L}(X, X')$$

referentes ao funcional não linear

$$F : X \to \mathbb{R}, \quad F(\phi) := \frac{2}{3\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\Big(1 + \lambda |\phi(x)|^2 \Big)^{3/2} - 1 \Big] dx.$$

Considerando o produto escalar em X definido em (2.4) e para simplificar os cálculos, faremos a identificação $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \simeq L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, de modo que se $\phi(x) = a(x) + ib(x)$ $\psi(x) = h(x) + ik(x)$, então

$$(\phi : \psi)_2 = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(a(x)h(x) + b(x)k(x) \Big) \, dx. \tag{B.1}$$

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(a, b) = \frac{2}{3\lambda} \Big[\Big(1 + \lambda a^2 + \lambda b^2 \Big)^{3/2} - 1 \Big]$. Então

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 2a\Big(1 + \lambda a^2 + \lambda b^2\Big)^{1/2}, \quad \frac{\partial g}{\partial b} = 2b\Big(1 + \lambda a^2 + \lambda b^2\Big)^{1/2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial a^2} = \frac{2\lambda a^2}{\Big(1 + \lambda a^2 + \lambda b^2\Big)^{1/2}} + 2\Big(1 + \lambda a^2 + \lambda b^2\Big)^{1/2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial b^2} = \frac{2\lambda b^2}{\Big(1 + \lambda a^2 + \lambda b^2\Big)^{1/2}} + 2\Big(1 + \lambda a^2 + \lambda b^2\Big)^{1/2}$$

e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 g}{\partial b \partial a} = \frac{2\lambda ab}{\Big(1 + \lambda a^2 + \lambda b^2\Big)^{1/2}}.$$

Com a identificação (B.1), temos

$$\begin{aligned}
\Big\langle F'(\phi) : \psi \Big\rangle_{X' \times X} &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla g\Big(a(x), b(x)\Big) \cdot \Big(h(x), k(x)\Big) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 2\Big(1 + \lambda |\phi(x)|^2\Big)^{1/2} \Big(a(x)h(x) + b(x)k(x)\Big) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 2\Big(1 + \lambda |\phi(x)|^2\Big)^{1/2} \Re\Big(\phi(x)\overline{\psi(x)}\Big) \, dx.
\end{aligned}$$

Portanto, $F'(\phi) = 2\Big(1 + \lambda |\phi(x)|^2\Big)^{1/2} \phi$.

De modo análogo, se $\varphi = \tilde{h} + i\tilde{k}$, temos $\left\langle F''(\phi)\psi : \varphi \right\rangle_{X' \times X} = Hg(a,b)(h,k) \cdot (\tilde{h}, \tilde{k})$, onde Hg denota a Hessiana de g. Pelas derivadas de segunda ordem obtidas acima e com $R = \left(1 + \lambda|\phi(x)|^2\right)^{1/2}$, temos

$$\begin{aligned} Hg(a,b)(h,k) \cdot (\tilde{h}, \tilde{k}) &= \left(\frac{2\lambda ah}{R} + 2Rh + \frac{2\lambda abk}{R}, \frac{2\lambda abh}{R} + \frac{2\lambda v^2 k}{R} + 2Rk \right) \cdot (\tilde{h}, \tilde{k}) \\ &= \left(\frac{2\lambda a}{R}(ah + bk) + 2Rh, \frac{2\lambda b}{R}(ah + bk) + 2Rk \right) \cdot (\tilde{h}, \tilde{k}) \\ &= \frac{2\lambda}{R}(ah + bk)(a,b) \cdot (\tilde{h}, \tilde{k}) + 2R(h,k) \cdot (\tilde{h}, \tilde{k}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$F''(\phi)\psi = \frac{2\lambda}{\left(1 + \lambda|\phi(x)|^2\right)^{1/2}} \Re\left(\phi\overline{\psi}\right)\phi + 2\left(1 + \lambda|\phi(x)|^2\right)^{1/2}\psi.$$

Em particular, concluímos que f é de classe C^1 em X.

APÊNDICE C – Rearranjamento

No que segue, apresentamos as definições e os principais resultados da Teoria de Simetrização de Schwarz, cujas demonstrações serão omitidas. O leitor interessado poderá consultar as referências (2), (16), (24) e (15).

Definição (Rearranjamento de um conjunto): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto mensurável. Definimos o *rearranjamento esférico* de Ω como o conjunto

$$\Omega^\star := \Big\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ \omega_d |x|^d < \mathrm{med}(\Omega)\Big\},$$

onde $\mathrm{med}(\Omega)$ e ω_d denotam respectivamente as medidas de Lebesgue de Ω e $B_1(0)$.

Definição: Denotamos por $\mathscr{Y}_0$ o espaço das funções mensuráveis $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ tais que

$$\mathrm{med}\Big(\{f > t\}\Big) < +\infty, \quad \forall\, t > 0,$$

onde, para simplificar a notação, escrevemos $\{f > t\} := \{x \ ; \ f(x) > t\}\Big)$.

Definição: Denotamos por $\mathscr{Y}_1$ o conjunto das funções $f \in \mathscr{Y}_0$ cujo gradiente no sentido das distribuições pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ e, além disso, a função real $|\nabla f|$ pertence ao $L^1(\Omega)$, para todo conjunto Ω mensurável e de medida de Lebesgue finita. Observe que $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{Y}_1$, para todo $p \geq 1$.

Definição (função de distribuição): Para cada $f \in \mathscr{Y}_0$, definimos a *função de distribuição* de f, por

$$\mu_f : [0, \sup\mathrm{ess}\, f] \to [0, \mathrm{med}(\Omega)],$$
$$\mu_f(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\{f>t\}}(x)\, dx = \mathrm{med}\Big(\{x \ ; \ f(x) > t\}\Big),$$

onde $\chi_{\{f>t\}}$ denota a função característica do conjunto $\{f > t\}$.

Teorema C.1 (propriedades da função distribuição). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ conjunto mensurável e $f, g \in \mathscr{Y}_1$. Então as seguintes propriedades valem:*

(i) *μ_f é decrescente e contínua à direita;*

(ii) $\lim\limits_{t \to +\infty} \mu_f(t) = 0$ *e é contínua em $t > 0$ se, e e somente se,* $\mathrm{med}(\{f = t\}) = 0$*;*

(iii) *Se $f \leq g$ qtp em Ω, então $\mu_f \leq \mu_g$.*

Demonstração. Ver (16), Proposição 6.1 e (24), Proposição 1. $\square$

Definição (rearranjamento decrescente): Dada uma função $f \in \mathscr{Y}_0$, definimos seu *rearranjamento decrescente* como a inversa à direita da função μ_f, isto é,

$$f^* : [0, +\infty] \to [\inf\operatorname{ess} f, \sup\operatorname{ess} f],$$
$$f^*(s) := \inf\Big\{t \in (\inf\operatorname{ess} f, \sup\operatorname{ess} f) \ ; \ \mu_f(t) \leq s\Big\},$$

Teorema C.2 (**propriedades da função rearranjamento decrescente**). *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^+ \in \mathscr{Y}_0$. Então f^* possui as seguintes propriedades:*

(i) A função f^* é decrescente e contínua à direita. Além disso, $f^*(0) = \sup\operatorname{ess} f$;

(ii) $f^*(\mu_f(t)) \leq t$, para todo $\inf\operatorname{ess} f < t < \operatorname{ess}\sup f$, com desigualdade estrita se, e somente se, μ_f é constante em algum intervalo em seu domínio;

(iii) $\operatorname{med}\Big(\{s \in [0, \operatorname{med}(\Omega)] \ ; \ f^*(s) > t\}\Big) = \operatorname{med}\Big(\{x \in \Omega \ ; \ f(x) > t\}\Big)$

(iv) $\operatorname{med}\Big(\{s \in [0, \operatorname{med}(\Omega)] \ ; \ f^*(s) = 0\}\Big) \leq \operatorname{med}\Big(\{x \in \Omega \ ; \ f(x) = 0\}\Big)$ *com igualdade se, e somente se, vale uma das seguintes condições:*

$$\operatorname{med}\Big(\{x \in \Omega \ ; \ f(x) > 0\}\Big) < +\infty \quad \textit{ou} \quad \begin{cases} \operatorname{med}\Big(\{x \in \Omega \ ; \ f(x) > 0\}\Big) = +\infty \\ \operatorname{med}\Big(\{x \in \Omega \ ; \ f(x) = 0\}\Big) = 0 \end{cases}$$

Demonstração. Ver (16), Proposição 6.3 □

Definição (simetrização de Schwarz) Dada $f \in \mathscr{Y}_0$, sua *simetrização de Schwarz*, ou rearranjamento esférico e decrescente, é dado pela função $f^s : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ definida por

$$f^s(x) := f^*(\omega_d |x|^d),$$

sendo ω_d o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^d$.

Teorema C.3 (**Propriedades da Simetrização de Schwarz**). *Seja $f \in \mathscr{Y}_0$. Sua simetrização de Schwarz f^s possui as seguintes propriedades:*

(1) f^s é radialmente simétrica e decrescente;

(ii) se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é uma função Borel mensurável, então

$$\int_{\mathbb{R}^d} F(f^s(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} F(f(x))\, dx;$$

(iii) se $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não-decrescente, então $(G(f))^s = G(f^s)$;

(iv) se $f, g \in \mathscr{Y}_0$ e *$f \leq g$, então $f^s \leq g^s$;*

(v) (Hardy - Littlewood) se $f, g \in \mathscr{Y}_0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f^s(x) g^s(x)\, dx;$$

(vi) (Polya - Szego) se $f \in \mathscr{Y}_1$, então $f^s \in \mathscr{Y}_1$. Além disso, dada uma função H convexa e tal que $H(|\nabla f|) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^d} H(|\nabla f^s(x)|)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} H(|\nabla f(x)|)\, dx.$$

Demonstração. Veja (15), página 14. Para (v) e (vi), veja (2), Teorema 2.2. e Teorema 2.7. Para o ponto (iv), veja (16), Proposição 6.10. □

Teorema C.4. *Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ e f^s sua simetização de Schwarz. Se*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f(x)|\, dx < \infty,$$

então,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f^s(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f(x)|\, dx.$$

Demonstração. Para cada $t \geq 0$ e cada $R > 0$, definimos $\mu_{|f|}, \mu^R_{|f|} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\mu_{|f|}(t) := \operatorname{med}\Big\{x \in B_R(0)\,;\, |f(x)| > t\Big\},$$
$$\mu^R_{|f|}(t) := \operatorname{med}\Big\{x \in \mathbb{R}^d\,;\, |f(x)| > t\Big\}.$$

de modo que temos obviamente $\mu^R_{|f|}(t) \leq \mu_{|f|}(t)$ para todo $t \geq 0$. Além disso $\{\mu^R_{|f|}\}_R$ é uma família crescente de funções (decrescentes) que converge quase sempre para $\mu_{|f|}$ em $[0, +\infty)$. Portanto, se denotarmos por f^* e f^*_R as inversas à direita de $\mu_{|f|}$ e $\mu^R_{|f|}$, respectivamente, temos $\{f^*_R\}_R$ uma família crescente de funções que converge pontualmente quase sempre para f^* no intervalo $[0, \operatorname{sup\,ess} |f|]$.

Consideremos então $f^s_R : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por

$$f^s_R(x) := \begin{cases} f^*_R(\omega_d |x|^d) & \text{se } |x| \leq R, \\ 0 & \text{se } |x| \geq R, \end{cases}$$

isto é, f^s_R é a simetrização de Schwarz de f na bola $B_R(0)$, com extensão nula fora da bola. Então, temos as seguintes propriedades para $\{f^s_R\}_R$:

1. $f^s_{R_1}(x) \leq f^s_{R_2}(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^d$, se $R_1 \leq R_2$;
2. $f^s_R(x) \leq f^s(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^d$, qualquer que seja $R > 0$;
3. $f^s_R(x) \to f^s(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Por outro lado, como a aplicação $x \mapsto (R^2 - |x|^2)$ é simétrica, segue do Teorema C.3-(v), que

$$\int_{B_R(0)} (R^2 - |x|^2)|f(x)|\, dx \leq \int_{B_R(0)} (R^2 - |x|^2)|f^s_R(x)|\, dx,$$

isto é,

$$R^2 \int_{B_R(0)} \Big(|f(x)| - |f_R^s(x)| \Big)\, dx \leq \int_{B_R(0)} |x|^2 \Big(|f(x)| - |f_R^s(x)| \Big)\, dx.$$

Pela equimensuberalidade da simetrização de Schwarz, (veja Teorema C.3-(ii)) a integral do lado esquerdo da desigualdade acima é nula, de modo que

$$\int_{B_R(0)} |x|^2 \Big(|f(x)| - |f_R^s(x)| \Big)\, dx \geq 0, \quad \forall R > 0.$$

Assim,

$$\int_{B_R(0)} |x|^2 |f_R^s(x)|\, dx \leq \int_{B_R(0)} |x|^2 |f(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f(x)|\, dx.$$

Portanto, como consequência do Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f^s(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |f(x)|\, dx,$$

como queríamos demonstrar. □