Homogeneização das Equações de Liouville além do contexto estacionário ergódico

por

Taynara Andrade

Orientadores: Wladimir Neves e Jean Silva

Tese de Doutorado
apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática
do Instituto de Matemática, da Universidade Federal
do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do
Título de Doutor em Matemática.

Rio de Janeiro
Julho de 2019

Homogeneização das Equações de Liouville além do contexto estacionário ergódico

por

Taynara Andrade

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do titulo de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Wladimir Neves - UFRJ-IM
(Orientador)

Prof. Dr. Jean Silva - DMAT-UFMG
(Orientador)

Prof. Dra. Maria Eulália - UFRJ-IM

Prof. Dr. Hermano Frid - IMPA

Prof. Dr. Bernoît Perthame - UPMC

Prof. Dr. Crhistian Olivera - Unicamp

Rio de Janeiro
Julho de 2019

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que sempre me acompanhou no meu caminho e que se faz cada vez mais presente.

Aos meus pais, Marisa e Paulo, por todo o seu carinho e preocupação, e pelos momentos de torcida e orações para que eu obtivesse sucesso acadêmico.

Ao meu marido Diego, por ter me dado forças para superar mais essa etapa da minha vida.

Aos meus amigos da Universidade Federal do Rio de Janeiro pelo incentivo.

Finalmente, os meus agradecimentos aos professores de Matemática da UFRJ, em especial aos meus orientadores Wladimir Neves e Jean Silva.

Rio de Janeiro,
Taynara Andrade

.

À Deus e a minha família.

Homogeneização das Equações de Liouville além do contexto estacionário ergódico

Taynara Andrade

Orientadores: Wladimir Neves e Jean Silva

Resumo

Resumo da Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

O objetivo principal deste trabalho é estudar o problema de homogeneização da equação de Liouville para materiais com estrutura não-cristalina, onde os coeficientes são dados pela composição de funções estacionárias com deformações estocásticas. Como resultado final, são apresentadas as equações assintóticas, que envolvem ambas as escalas macroscópicas e microscópicas.

Palavras-chave: Homogeneização, Equação de Liouville e Deformações Estocásticas.

Rio de Janeiro
Julho de 2019

Homogenization of Liouville Equations beyond stationary ergodic setting

Taynara Andrade

Orientadores: Wladimir Neves e Jean Silva

Abstract

Abstract da Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

The main objective of this work is to study the homogenization's problema of the Liouville's equation for material with non-crystalline structure, where the coefficients are given by the composition of stationary functions with stochastic deformations. As final result, it are presented the asymptotic equations, wich involves both macroscopic and microscopic scales.

Rio de Janeiro
Julho de 2019

Sumário

Motivação

Na mecânica, física, química e engenharias em geral, frequentemente encontramos fenômenos modelados por equações diferenciais parciais definidas em meios com estrutura periódica ou mesmo quasi-periódica. Por exemplo: Materiais compostos, meios porosos, cristais, polímeros, materiais perfurados, etc. Quando a estrutura que se repete tem período (caso periódico) pequeno em comparação com a região em consideração, o estudo de algumas propriedades destes meios (sua temperatura, deformações, deslocamento, etc.) podem ser analisadas no contexto da Teoria de Homogeneização.

A grosso modo, conhecemos pelo nome de Homogeneização ao conjunto de técnicas matemáticas que permitem substituir um meio heterogêneo por um homogêneo equivalente. O uso dessas técnicas se justifica pelo desejo de se obter informação de caráter global sobre meios de natureza fortemente heterogênea. Isto é, a homogeneização faz referência ao processo de obtenção de leis de comportamento macroscópicas em função de informações microscópicas. Este processo é justificado pela utilização da convergência de funções no sentido fraco, e de modo formal pela utilização da expansão assintótica.

A teoria da homogeneização tem muitas aplicações importantes, como no estudo da condutividade térmica ou elétrica em materiais compostos ou também no estudo da dispersão de poluentes na atmosfera. Inicialmente, a homogeneização foi desenvolvida para descrever meios em estruturas periódicas e depois estendida para estruturas quasi-periódicas e estocásticas.

Via de regra, é associado ao conceito de homogeneização o estudo das propriedades do material usando duas escalas: a local ou microscópica, que descreve as heterogeneidades, e a global ou macroscópica, que descreve o comportamento geral do composto. Claramente, em problemas reais pode existir mais de duas escalas, mas matematicamente é suficiente estudar duas escalas. Desta maneira, através do processo de homogeneização, procura-se descrever propriedades globais dos compostos levando em conta as propriedades locais do problema. Do ponto de vista macroscópico, o composto homogeneizado parece um material homogêneo (as propriedades não variam com a posição). Como um exemplo, vamos considerar o modelo físico abaixo.

Seja $Q \subset \mathbb{R}^n$ uma região ocupada por um material de condutividade térmica contante a. A temperatura $u(x)$ do corpo satisfaz a seguinte equação estacionária do calor:

$$\begin{cases} -a\Delta u(x) = f(x) \text{ em } Q, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

onde a funcão f representa uma fonte de calor.

Por simplicidade, suponha agora que a região Q é preenchida por dois tipos de materiais, isto é, $\overline{Q} = \overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2$ e $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, como podemos ver na figura abaixo.

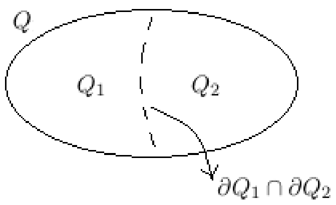


Figura 1: Domínio com 2 tipos de materiais

Assuma que cada material, Q_1 e Q_2, tenha condutividade constante $a_1, a_2 > 0$, respectivamente. Seja u_i a temperatura em Q_i para $i = 1, 2$. Impondo condições naturais, como $u_1 = u_2$ em $\partial Q_1 \cap \partial Q_2$ e $a_1 \nabla u_1 \cdot n_1 = a_2 \nabla u_2 \cdot n_2$ em $\partial Q_1 \cap \partial Q_2$, onde n_i é o vetor unitário normal exterior a ∂Q_i, $i = 1, 2$, e $n_2 = -n_1$, pode-se provar que a função

$$u(x) = u_1(x)\chi_{Q_1}(x) + u_2(x)\chi_{Q_2}(x),$$

será a solução fraca da equação:

$$\begin{cases} -\text{div}\,(a(x)\nabla u) = f(x), \ x \in Q \\ u\big|_{\partial Q} = 0. \end{cases}$$

onde

$$a(x) = \begin{cases} a_1 \text{ se } x \in Q_1 \\ a_2 \text{ se } x \in Q_2. \end{cases}$$

Agora vamos distribuir os materiais 1 e 2 sobre Q de maneira mais heterogênea da seguinte forma: Sejam $[0,1]^n := Y = Y_1 \cup Y_2$, o cubo unitário e para cada $x \in Q$, $\chi_i(x) = \chi_{Y_i}(x - [x])$ a extensão $Y-$periódica de χ_{Y_i}, onde $[x]$ representa o maior inteiro, menor que x.

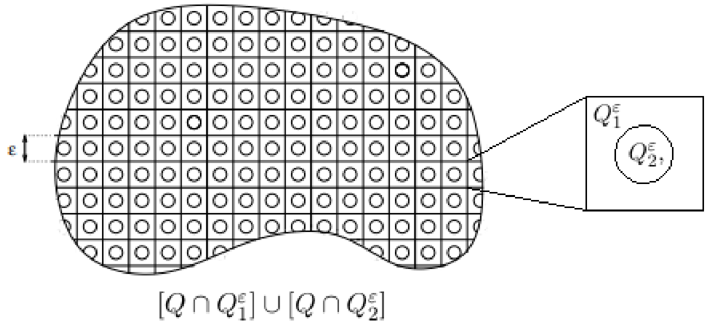


Figura 2: Domínio periódico

Dado $\varepsilon > 0$, defina

$$Q_i^\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ \chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 \right\}.$$

A condutividade térmica do material é dada por

$$a^\varepsilon(x) = \begin{cases} a_1 \text{ se } x \in Q_1^\varepsilon \\ a_2 \text{ se } x \in Q_2^\varepsilon \end{cases},$$

que é equivalente a escrever

$$a^\varepsilon(x) = a_1\chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + a_2\chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) := a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

onde $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é $Y-$periódica. Conforme o exemplo anterior, a temperatura será dada por

$$u_\varepsilon(x) = u_1(x)\chi_{Q\cap Q_1^\varepsilon}(x) + u_2(x)\chi_{Q\cap Q_2^\varepsilon}(x),$$

e é a solução fraca da equação

$$\begin{cases} -\text{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f(x) \text{ em } Q \\ u_\varepsilon\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

onde $A(\cdot) = a(\cdot)I_{n\times n}$.

Segue da equação anterior que a temperatura u_ε depende de duas escalas que são descritas pelas variáveis x e $\frac{x}{\varepsilon}$. A primeira, chamada "macroscópica", que representa a posição do ponto em Q e a segunda, a variável microscópica, determina se o ponto está em Q_1^ε ou Q_2^ε. Observe também que tornar as heterogeneidades cada vez menores, significa que nós 'homogenizamos' a mistura e do ponto de vista matemático isso significa que $\varepsilon > 0$ tende a zero.

Até aqui, temos o que é conhecido como homogenização no contexto determinístico, o qual se iniciou na década de 60 com os trabalhos de S. Spagnolo [18] e E. De Giorge e Spagnolo [10]. Ainda relacionado a este contexto, podemos citar com referência A. Bensoussan, J-L.Lions e G.Papanicolau [3] e V. V. Jikov, S.M. Kozlov e O. A. Oleinik [11]. Mais recentemente, e de fato, com grande desenvolvimento nos dias de hoje, temos o conceito de homogenização estocástica, o qual, descrevemos abaixo.

Então, suponha que os materiais 1 e 2, como anteriormente dados, sejam distribuidos de maneira aleatória. Sejam Ω um espaço de probabilidade e $X : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ uma variável aleatória. O tipo de material a ser colocado nas regiões é Y_1 e Y_2 aleatoriamente determinado pela variável X. Portanto, podemos escrever

$$a^{\varepsilon}(x, \omega) = \Big[a_1 + (a_2 - a_1)X(\omega)\Big]\chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \Big[a_2 + (a_1 - a_2)X(\omega)\Big]\chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Neste caso, podemos reformular a equação elíptica acima para a configuração estocástica dada pela seguinte equação:

$$\begin{cases} -\text{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\nabla u_{\varepsilon}\right) = f(x) \text{ em } Q, \\ u_{\varepsilon}\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

onde $A(\cdot) = a(\cdot)I_{n\times n}$.

Neste momento, questões importantes surgem:

* u_{ε} converge para u em algum sentido?
* No caso estocástico, u depende de ω?
* u satisfaz alguma equação limite?
* Como os coeficientes dessa equação limite se relacionam com a matriz $A^{\varepsilon}(\cdot)$?
* Os resultados dependem do domínio Ω, da condição de fronteira, do termo fonte f ou da escolha da subsequência de ε?

Para entendermos melhor como funciona o processo de homogenização, que é o processo de passar o limite na equação, vamos dar uma idéia das dificuldades envolvidas nos exemplos anteriores. Primeiro, vamos nos concentrar no caso periódico. Como a matriz $A(\cdot)$ satisfaz $A(y)\xi \cdot \xi \geq c\,|\xi|^2$, com $c > 0$ constante, pode-se provar que ∇u_{ε} é limitada em $L^2(Q)^n$. Portanto, usando a desigualdade de poincaré concluímos que u_{ε} é limitada em $H_0^1(Q)$. Assim, a menos de uma subsequência, existe $u \in H_0^1(Q)$ tal que u_{ε} converge fracamente para u em $H_0^1(Q)$. Além disso, da limitação de $A(\cdot)$ e de ∇u_ε obtemos que o fluxo $q_\varepsilon = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon$ é uma sequência limitada em $L^2(Q)^n$. Portanto, a menos de uma subsequência, q_ε converge fracamente para alguma função q em $L^2(Q)^n$ e q satisfaz a equação $-\text{div}q = f$ em $\mathcal{D}'(Q)$. De forma resumida temos que:

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ em } \; H_0^1(Q) \\ q_\varepsilon \rightharpoonup q \text{ em } L^2(Q) \\ -\text{div}q = f \text{ em } \mathcal{D}'(Q). \end{cases}$$

Observe que da limitação da matriz $A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ em $L^\infty(Q; \mathbb{R}^{n^2})$, a menos de uma subsequência, pode-se mostrar a existência de uma matriz $\overline{A}$ (constante) tal que $A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ converge fraco $*$ para $\overline{A}$. Assim, poderíamos pensar que $q = \overline{A}\nabla u$, porém o produto de funções que convergem fracamente nem sempre converge fracamente para o produto dos limites fracos. Então para contornar essa dificuldade existem alguns métodos na teoria da homogenização, no qual utiliza-se fortemente a convergência da média dos coeficientes A^ε. Na resolução deste problema podemos citar o método de Tartar e o método de convergência em duas escalas, que podem ser vistos em [7]. E com isso pode-se mostrar que u satisfaz

$$\begin{cases} -\text{div}\left(A^*\nabla u\right) = f(x) \text{ em } Q, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

onde a constante A^* não é necessariamente igual a $\overline{A}$.

No caso estocástico, fixado $\omega \in \Omega$, podemos concluir que

$$\begin{cases} u_\varepsilon^\omega \rightharpoonup u^\omega \text{ em } \; H_0^1(Q) \\ q_\varepsilon^\omega \rightharpoonup q^\omega \text{ em } L^2(Q) \\ -\text{div}q^\omega = f \text{ em } \mathcal{D}'(Q). \end{cases}$$

Na resolução do problema estocástico anterior, foi preciso generalizar a noção de média, e com isso usamos o Teorema ergódico de Birkoff, que podemos aplicar sob certas afirmações do coeficiente A^ε, em particular quando A^ε é estacionária. Ainda, pode-se mostrar que $A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\nabla u_\varepsilon$ converge para $A^*\nabla u$, onde A^* é uma constante. Logo, por unicidade do problema, pode-se concluir que u não depende de ω e satisfaz uma equação igual a anterior. Para este caso, podemos citar o método da compacidade compensada que pode ser visto em [11].

Agora, vamos descrever um caso de homogenização estocástica muito interessante, o qual um material que tem uma certa desordem aleatória pode ser representada por uma certa aplicação Φ.

Suponhamos que o nosso domínio Q seja uma deformação aleatória através de uma aplicação $\Phi_\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$, como pode ser visto na figura abaixo.

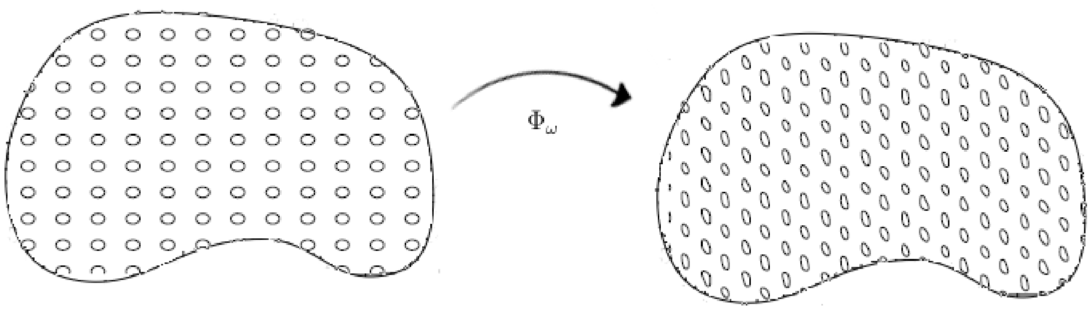


Figura 3: Deformação Estocástica

Então para cada $\omega \in \Omega$, $a^\varepsilon(x,\omega)$ pode ser reescrita como

$$a^\varepsilon(x,\omega) = \Big[a_1+(a_2-a_1)X(\omega)\Big]\chi_1\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)+\Big[a_2+(a_1-a_2)X(\omega)\Big]\chi_2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right).$$

Para cada $\omega \in \Omega$ temos a seguinte modelagem:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f(x) \text{ em } Q, \\ u_\varepsilon\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

onde $A(\cdot)$ é uma matriz $n \times n$.

Para este caso, podemos citar os trabalhos de X. Blanc, C. Le Bris e P.-L. Lions [4, 5] como os primeiros desenvolvedores dessa teoria. Neste ambiente, foi preciso estender o teorema de Birkoff para obtermos o processo de homogenização.

Introdução do Problema

Este trabalho consiste em estudar o comportamento assintótico (isto é, fazer $\varepsilon > 0$ tender a zero) da equação de Liouville no seguinte problema problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) \\ \qquad + \dfrac{1}{\varepsilon}\mathbf{c}\left(\Phi^{-1}\left(\dfrac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right) \cdot \nabla_\xi f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{2n+1}_+ \times \Omega, \\ f^\varepsilon(0,x,\xi,\omega) = f^0\left(x,\Phi^{-1}\left(\dfrac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \quad \text{in } \mathbb{R}^{2n} \times \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\mathbb{R}^{2n+1}_+ := (0,+\infty) \times \mathbb{R}^{2n}$ e Ω é um espaço de probabilidade.

Os coeficientes em (0.1), isto é, a função de valor vetorial $\mathbf{c}$ e a condição inicial f^0, são pertubações aleatórias realizadas por difeomorfismos estocásticos (chamados deformações estocásticas) de funções estacionárias. A propriedade de estacionaridade de função aleatórias será precisamente definida nos capítulos que se seguem, assim como a definição de deformações estocásticas, que foi introduzida por X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions em [4, 5], onde eles consideraram a homogenização do problema de operador elíptico cujos coeficientes são periódicos ou funções estacionárias pertubadas por difeormorfismos estocásticos. O comportamento assintótico de (0.1), quando a deformação estocástica $\Phi(y,\omega)$ é a função identidade, foi estudado pela Dalibard em [9] e este é o primeiro trabalho envolvendo deformações estocásticas em um contexto diferente de problemas elípticos ou estacionários (no tempo).

Este trabalho é parte do Projeto relacionado ao estudo do fluxo de elétrons (representado pela densidade de probabilidade f^ε) em sólidos não-cristalinos, também em estado "glassy"da matéria, que justifica a forma considerada para os coeficientes em (0.1). Mais precisamente, assumimos que, a variável rápida é dada pela composição de funções estacionárias com as deformações estocásticas. Essas composições estão longe de serem funções estacionárias, por isso dizemos que nosso ambiente de trabalho está "além da configuração estacionária ergódica". De fato, esse é um ponto delicado para entender. Para começar, resumiremos alguns fatos importantes, que nos parecem pouco explorados anteriormente.

Existem algumas operações importantes na análise onde a propriedade de estacionariedade é preservada, como diferenciação, convolução com um Kernel adequado e passagem ao limite. No entanto, existem outras operações importantes que são mais apropriadas para descrever fenômenos físicos onde a propriedade de estacionariedade é perdida. Por exemplo, seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^1(\Omega))$ uma função estacionária e defina $\Phi(x, \omega) := \int_0^x f(s, \omega) ds$. Em geral, a função Φ não é estacionária, exceto no contexto periódico. Para ver isso, podemos mostrar a seguinte caracterização:

- Seja f uma função contínua periódica e $\Phi(x) := \int_0^x f(s)\, ds$.

  Φ é uma função periódica se, e somente se, o valor médio de f é nulo.

  De fato, se $k \in \mathbb{Z}$, note que,

$$\begin{aligned} \Phi(x+k) = \Phi(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_0^{x+k} f(s)ds = \int_0^x f(s)ds \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_x^{x+k} f(s)ds = 0. \end{aligned}$$

  Escreva $F(x) = \int_x^{x+k} f(s)ds$. Então $F'(x) = f(x+k) - f(x) = 0$, donde $F(x) = cte$. Assim $F(x) = F(0)$. Concluindo assim que,

$$\Phi(x+k) = \Phi(x) \Longleftrightarrow \int_0^k f(s)ds = 0.$$

  A definição do valor médio de f, denotada $M(f)$, é dada no próximo capítulo. Aqui, já que f é periódico, $M(f) = \fint_Y f(s)ds$, onde Y é o período de f.

Em geral, além do contexto periódico, o valor médio nulo não é suficiente para assegurar a estacionariedade da função primitiva $\Phi(x, \omega)$. Vamos considerar a seguinte versão modificada do clássico exemplo de Bohr:

- Sejam λ_1, λ_2 dois números reais linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ o toru de dimensão 2 que pode ser identificado pelo quadrado $[0,1)^2$. Defina o grupo (sistema dinâmico)

$$T : \mathbb{R} \times [0,1)^2 \to [0,1)^2, \quad T(t)\omega = \omega + t(\lambda_1, \lambda_2) - [\omega + t(\lambda_1, \lambda_2)],$$

onde $[x]$ denota o único número em $\mathbb{Z}^2$ tal que $x-[x]\in[0,1)^2$. Devido a independência linear dos números λ_1,λ_2 sobre $\mathbb{Q}$, pela resolução das equações Diofantinas, dado um inteiro $m\geq 1$, podemos encontrar $\alpha_m\in\mathbb{Z}^2$, tal que $\delta_m:=\alpha_m\cdot(\lambda_1,\lambda_2)$, que satisfaz $m^{-2/3}\leq 2\delta_m\leq 2m^{-2/3}$. Então, considere as funções $f:[0,1)^2\to\mathbb{R}$ e $\Phi:\mathbb{R}\times[0,1)^2\to\mathbb{R}$ dados respectivamente por

$$f(\omega):=\sum_{m=1}^{\infty}\delta_m^2\sin\left(2\pi\,\omega\cdot\alpha_m\right),\quad \Phi(x,\omega):=\int_0^x f\left(T(s)\omega\right)\,ds.$$

Existem duas características de $f\left(T(\cdot)\omega\right)$ que vale a pena mencionar:

i) A função $f\left(T(\cdot)\omega\right)$ é quase periódica, e é periódica se, e somente se, λ_1 e λ_2 são inteiros múltiplos de cada um.

ii) O valor médio de $f\left(T(\cdot)\omega\right)$ é zero.

Devido a convergencia uniforme da série, que define f, temos

$$\begin{aligned}\Phi(x,\omega)&=\sum_{m=1}^{\infty}\delta_m^2\int_0^x\sin\left(2\pi\,\omega\cdot\alpha_m+2\pi\delta_m\,s\right)\,ds\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\delta_m\Big[-\cos\left(2\pi\,\omega\cdot\alpha_m+2\pi\delta_m\,x\right)+\cos\left(2\pi\,\omega\cdot\alpha_m\right)\Big].\end{aligned}$$

Agora, fazendo $\omega_0=(0,0)$ e usando a desigualdade $|\sin(t)|\geq|t|/2$ para $|t|\leq 1$ temos

$$\begin{aligned}\Phi(x,\omega_0)&=\sum_{m=1}^{\infty}\delta_m\Big(1-\cos\left(2\pi\delta_m\,x\right)\Big)=\sum_{m=1}^{\infty}2\delta_m\sin^2\left(\pi\delta_m\,x\right)\\&\geq\sum_{m;\,|x\pi\delta_m|\leq 1}2\delta_m\sin^2\left(\pi\delta_m\,x\right)\geq\sum_{m\geq(\pi|x|)^{3/2}}2\delta_m\left(\frac{\pi|x|\delta_m}{2}\right)^2\\&=\sum_{m\geq(\pi|x|)^{3/2}}\frac{(x\pi)^2\delta_m^3}{2}\geq\frac{\pi^2|x|^2}{16}\sum_{\frac{m}{\pi^{3/2}}\geq|x|^{3/2}}\frac{1}{m^2}\\&=\frac{|x|^2}{16\pi}\sum_{k\geq|x|^{3/2}}\frac{1}{k^2}\geq\frac{|x|^2}{16\pi}\int_{\left(|x|^{3/2}-1\right)}^{\infty}\frac{1}{s^2}\,ds=\frac{|x|^2}{16\pi(|x|^{3/2}-1)},\end{aligned}$$

o que implica $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\Phi(x,\omega_0)=+\infty$. Portanto, a função $\Phi(x,\omega)$ não pode ser estacionária.

Assim, afim de manter a estacionaridade da operação primitiva além do contexto periódico, precisamos impor condições mais restritivas. Por exemplo:

- Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função quase periódica tal que $\operatorname{supp} \hat{f}$ é um conjunto compacto e não contém a origem, então sua primitiva $\Phi(x) = \int_0^x f(s)\, ds$ é também quase periódica. Aqui, $\hat{f}$ é a Tranformada de Fourier da função f e é entendida no sentido das distribuições.

  Para provar este resultado, considere a função $\hat{\varphi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{\varphi} \equiv 1$ no $\operatorname{supp} \hat{f}$ e $\hat{\varphi} \equiv 0$ na vizinhaça da origem. Defina a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\psi(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\, \xi^{-1}$ se $\xi \neq 0$ e $\psi(0) = 0$ e considere $\Phi := f * \check{\psi}$. Agora, é suficiente notar que Φ é uma função quase periódica que satisfaz $\widehat{\Phi'}(\cdot) \equiv \hat{f}(\cdot)$.

Terminaremos esta discussão mostrando que, se uma deformação estocástica $\Phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ tem a propriedade de que $f\left(\Phi(x, \omega), \omega\right)$ é ainda uma função estacionária para qualquer função estacionária $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^1(\Omega))$, então devemos esperar que $\Phi(\cdot, \omega) \equiv id$. A fim de convencer isso, tomamos $\Omega := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong [0,1)^n$ e defina o sistema dinâmico $T : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \Omega$ por $T(x)\omega := x + \omega - [x + \omega]$. Seja $\Phi(x, \omega)$ ser uma deformação estocástica com a propriedade citada acima. Dado $F \in C(\Omega)$ considere $f(x, \omega) = F(T(x)\omega)$. Se $G(x, \omega) = f\left(\Phi(x, \omega), \omega\right)$ é estacionário no sentido que $G(x + h, \omega) = G(x, T(h)\omega)$ para todo $x, h \in \mathbb{R}^n$ e $\omega \in \Omega$, então temos $F\big(\Phi(h, \omega) + \omega\big) = F\big(\Phi(0, T(h)\omega) + h + \omega\big)$. Já que F é arbitrário, $\Phi(h, \omega) = \Phi\big(0, T(h)\omega\big) + h$. Em particular, se $\Phi(0, \omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$, então $\Phi(\cdot, \omega) \equiv id$.

O principal objetivo deste trabalho é justificar rigorosamente a expansão assintótica do solução f^ε, dado pelo seguinte

Teorema 0.1 (Teorema Principal)**.** *Seja $\Phi(y, \omega)$ uma deformação estocástica, $\tau : \mathbb{R}^n \times \Omega \longrightarrow \Omega$ um sistema dinâmico n-dimensional e*

$$f^0 = f^0(x, y, \xi, \omega) = F_0(x, \xi, \tau(y)\omega),$$

onde $F_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n} \times \Omega)$. Assuma que, para cada $\varepsilon > 0$, a função

$$\mathbb{R}^{2n} \times \Omega \ni (x, \xi, \omega) \mapsto f^0\left(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \xi, \omega\right)$$

é mensurável. Se f^ε é a solução fraca do problema de Cauchy (0.1)*, então podemos escrever*

$$f^\varepsilon(t, x, \xi, \omega) = f\left(t, x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \xi, \omega\right) + g\left(t, x, \frac{t}{\varepsilon}, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \xi, \omega\right)$$
$$+\ r^\varepsilon(t, x, \xi, \omega),$$

onde as funções $f(t,x,y,\xi,\omega)$, $g(t,x,s,y,\xi,\omega)$ *e a sequência* $\{r^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *satisfazem:*

(i) $\lim_{\varepsilon\to 0} r^\varepsilon = 0$ *in* $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n}\times\Omega))$.

(ii) $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+; L^1_{loc}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \times \Omega)) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^{3n+1}_+ \times \Omega)$;

$f(t,x,\cdot) \in \mathbb{K}$ *para q.t.p.* $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$;

f *satisfaz a equação de evolução macroscópica*

$$\begin{aligned}&\partial_t f(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\omega)\\ &\quad + \tilde{\xi}(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\cdot\nabla_x f(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega) = 0\end{aligned} \tag{0.2}$$

(iii) $g \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^n_y; L^1_{loc}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \times \Omega)) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^{3n+1}_+ \times \Omega)$;

$g(t,x,s,\cdot) \in \mathbb{K}^\perp$ *para q.tp.* $(t,x,s) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$;

$g(t,x,\cdot)$ *satisfaz a equação de evolução microscópica*

$$\begin{aligned}&\partial_s g(t,x,s,\Phi^{-1}(z,\omega),\omega) + \xi\cdot\nabla_z g(t,x,s,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\\ &\quad + c(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega)\cdot\nabla_\xi g(t,x,s,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega) = 0\end{aligned} \tag{0.3}$$

com condição inicial

$$(f^0 - \tilde{f}^0)\left(x - t\tilde{\xi}(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega), \Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right).$$

Além disso, para cada $T > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)dt = 0 \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n}\times\Omega).$$

As equações (0.2), (0.3), a definição de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^\perp$ e a projeção $P = \tilde{}$ sobre $\mathbb{K}$ estão precisamente dadas no capítulo 4, aonde apresentamos uma discussão detalhada sobre eles.

Seguindo [17], faremos uma breve discussão à respeito da importância de materiais não-cristalinos. É fato que, existem mais sólidos não-cristalinos do que cristalinos, já que cristais perfeitos (modelados por funções periódicos) são raros na natureza. Semicondutores não-cristalinos são um dos melhores exemplos, que são conhecidos por serem sensíveis no comportamento mecânico, ótico e eletrônico, devido as mudanças de estrutura e de desordem química. De fato, a idéia de desordem (representado aqui pela deformação estocástica) é uma característica importante para entender muitos fenômenos naturais, que não pertencem apenas ao escopo de estados físicos, mas também na biologia, química e sociologia.

Este trabalho está organizado em 4 capítulos. No capítulo 1, recordamos alguns conceitos necessários para estabelecer o Teorema de Bikhoff, bem como a definição de função estacionária e de sistema dinâmico. Ainda, temos a definição precisa de deformação estocástica e as suas propriedades. O capítulo 2 é destinado ao estudo dos aspectos estocásticos do fluxo associado a equação (0.1). No capítulo 3, motivamos e definimos o conjunto assintótico de estado estacionário, isto é, $\mathbb{K}$, que será fundamental para a existência das funções f e g do Teorema Principal. Além disso, demostramos um resultado que relaciona este espaço com o fluxo associado a equação (0.1) dado no capítulo 2. Finalmente, no capítulo 4 é provado o Teorema Principal deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, recordamos definições e Teoremas chaves para a prova do Teorema Principal, que podem ser encontradas em [12] e em [4, 5] para os resultados da última seção.

1.1 Contexto Estocástico

No que segue, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade. Para cada variável aleatória $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, denotamos

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\ d\mathbb{P}(\omega),$$

a sua esperança (ou valor médio).

Denotamos por $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ o espaço das funções $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{F}$-mensuráveis tal que para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, tem-se

$$\int_{K\times\Omega} |f(x,\omega)|\, dx d\mathbb{P}(\omega) < \infty.$$

Trabalharemos com o contexto contínuo e discreto. Vamos descrevê-los adiante para fixar notação.

1.1.1 Teorema de Birkhoff - Versão Discreta

Definição 1.1 (Sistema Dinâmico)**.** *Dizemos que uma função $\tau : \mathbb{Z}^n \times \Omega \longrightarrow \Omega$ define um sistema dinâmico n-dimensional sobre Ω no sentido discreto se satisfaz as seguintes condições:*

(i) A propriedade de grupo:

- $\tau(0,\omega) = \omega, \ \forall\ \omega \in \Omega$;
- $\tau(k_1 + k_2, \omega) = \tau(k_1, \tau(k_2, \omega)), \ \forall\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^n$ *e* $\forall\ \omega \in \Omega$.

(ii) A invariância: A função $\tau(k,\cdot) : \Omega \longrightarrow \Omega$ preserva a medida $\mathbb{P}$, isto é,

- $\tau(k, E) \in \mathcal{F}, \ \forall\ k \in \mathbb{Z}^n$ *e* $\forall\ E \in \mathcal{F}$;
- $\mathbb{P}(\tau(k, E)) = \mathbb{P}(E), \ \forall\ k \in \mathbb{Z}^n$ *e* $\forall\ E \in \mathcal{F}$.

Por simplicidade, usaremos a notação $\tau(k)\omega$ ao invés de $\tau(k, \omega)$. Em toda esta subseção, sistema dinâmico se referirá ao contexto discreto.

Definição 1.2 (Sistema Dinâmico Ergódico)**.** *Dizemos que o sistema dinâmico τ é ergódico se*

$$\forall E \in \mathcal{F}, \quad (\tau(k)E = E, \ \forall k \in Z^n \Rightarrow \mathbb{P}(E) \in \{0, 1\})$$

Existem outros caminhos para indicar as condições de ergodicidade e aqui apresentamos um deles. Para isso, vamos considerar algumas definições. Um conjunto $E \in \mathcal{F}$ tal que $\tau(k)E = E, \ \forall k \in \mathbb{Z}^n$ é chamado $\tau-$invariante. Ainda, uma função mensurável $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada $\tau-$invariante se

$$f(\tau(k)\omega) = f(\omega), \ \forall k \in \mathbb{Z}^n, \ \mathbb{P} - \text{q.t.p.}\omega \in \Omega.$$

Então afirmamos que

Afirmação: τ é ergódico se, e somente se, toda função τ-invariante é $\mathbb{P}$-equivalente a uma constante em Ω.

Prova da Afirmação: De fato, primeiro suponha que τ é ergódico e seja f uma função mensurável τ-invariante. Suponha, por absurdo, que f não seja $\mathbb{P}$-equivalente a uma constante. Então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que ambos os conjuntos definidos por $E := f^{-1}(-\infty, a])$ e $E^c = f^{-1}(a, \infty)$ tem medida positiva. Porém, já que f é τ-invariante, $\tau(k)E = E$, daí $\mathbb{P}(E)$ é diferente de 0 e de 1, o que contradiz a hipótese. Agora vamos mostrar a outra implicação. Seja $E \in \mathcal{F}$ um conjunto τ-invariante. Então a função característica 1_A é τ-invariante, donde por hipótese segue que 1_A é $\mathbb{P}$-equivalente a uma constante. Portanto, $\mathbb{P}(E)$ é igual a 0 ou 1.

Assim, a ergodicidade de um sistema dinâmico pode ser caracterizado dizendo que funções mensuráveis τ-invariantes são constantes a menos de um conjunto de medida nula.

Definição 1.3. *Dizemos que uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é estacionária no sentido discreto se existe um sistema dinâmico discreto τ tal que, para cada $k \in \mathbb{Z}^n$, temos*

$$f(x + k, \omega) = f(x, \tau(k)\omega),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para $\mathbb{P}$-q.t.p. $\omega \in \Omega$.

Definição 1.4. *Sejam $f \in L^1(\Omega)$ uma variável aleatória e $\mathcal{G}$ uma σ-álgebra tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. A esperança condicional de f com respeito a $\mathcal{G}$, denotada por $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{G}]$, é uma variável aleatória $\mathcal{G}$-mensurável tal que*

$$\int_A f(\omega)\, \mathbb{P}(\omega) = \int_A \mathbb{E}[f \mid \mathcal{G}](\omega)\, d\mathbb{P}(\omega),\ \forall A \in \mathcal{G}.$$

A existência de $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{G}]$ é garantida pelo Teorema de Radon-Nikodm. De fato, defina a medida $\nu : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\nu(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$. Claramente, $\nu << \mathbb{P}$, então pelo Teorema de Radon-Nikodym, existe $\frac{d\nu}{d\mathbb{P}}(\cdot) \in L^1(\Omega)$ tal que $\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mathbb{P}}(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$. Denote $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{G})(\cdot) = \frac{d\nu}{d\mathbb{P}}(\cdot)$. Note que f ser $\mathcal{F}$-mensurável não implica que f é $\mathcal{G}$-mensurável. Caso f seja $\mathcal{G}-$mensurável, então, $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{G}) \equiv f$.

Para $k = (k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, definimos $|k|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |k_i|$. Assim, para cada inteiro $N \geq 1$, considere o operador $A_N : L^1(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ dado por

$$(A_N f)(\omega) = \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} |f(\tau(k)\omega)|$$

Também será importante o operador maximal $M_N : L^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$(M_N f)(\omega) = \max\left\{(A_1 f)(\omega), ..., (A_N f)(\omega)\right\}$$

Agora, vamos demonstrar um teorema importante que será necessário para a prova da versão discreta do Teorema de Birkhoff. Este teorema foi resolvido em um ambiente generalizado, ver [16], e aqui daremos uma prova mais específica para o ambiente $\mathbb{Z}^n$.

Teorema 1.1. *(Teorema Maximal) Se $f \in L^1(\Omega)$, então existe $c > 0$, tal que*

$$\mathbb{P}(\{M_N f > \beta\}) \leq \frac{c}{\beta} \|f\|_1,\ \forall N \geq 1,\ \forall \beta > 0.$$

Demonstração. 1. Seja $\{F_j\}_j$ uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{Z}^n$, onde $F_j = [-j, j]^n \cap \mathbb{Z}^n$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Fixe $N \geq 1$. Então afirmamos que

<u>Afirmação 1</u>: Dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 = j_0(\varepsilon, N)$ tal que,

$$\#F \leq (1+\varepsilon)\#F',$$

onde $F = F_N + F_{j_0} = F_{N+j_0}$ e $F' = F_{j_0}$.

Demonstração da Afirmação 1: Para provar essa afirmação, observe que para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\#F_{N+j} - \#F_j}{\#F_j} = \frac{(2j+2N+1)^n}{(2j+1)^n} - 1.$$

Fazendo $j \to \infty$, segue que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\#F_{N+j} - \#F_j}{\#F_j} = 0,$$

provando assim a afirmação.

2. Agora, para cada $1 \leq j \leq N$, defina

$$B_j = B_j(\omega) \ := \ \left\{ b \in F';\ \frac{1}{\#F_j} \sum_{k \in F_j + b} |f(\tau(k)\omega)| > \beta \right\}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} b \in \bigcup_{j=1}^{N} B_j \ &\Leftrightarrow\ b \in F' \ \wedge\ \left(\exists\, 1 \leq j \leq N;\ \frac{1}{\#F_j} \sum_{k\in F_j+b} |f(\tau(k)\omega)| > \beta \right) \\ &\Leftrightarrow\ b \in F' \ \wedge\ \max \left\{ \frac{1}{\#F_j} \sum_{k\in F_j+b} |f(\tau(k)\omega)|;\ 1 \leq j \leq N \right\} > \beta \\ &\Leftrightarrow\ b \in F' \ \wedge\ \tau(b)\omega \in M, \end{aligned}$$

onde denotamos

$$M = \{M_N f > \beta\}$$

Portanto,

$$\# \left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j \right) = \sum_{k \in F'} \chi_M(\tau(k)\omega).$$

Assim, já que a medida $\mathbb{P}$ preserva a medida, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{M_N f > \beta\}\right) &= \int_\Omega \chi_M(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \frac{1}{\#F'} \sum_{k\in F'} \int_\Omega \chi_M(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \frac{1}{\#F'} \int_\Omega \sum_{k\in F'} \chi_M(\tau(k)\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \frac{1}{\#F'} \int_\Omega \# \left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j(\omega) \right) d\mathbb{P}(\omega)
\end{aligned}$$

Agora, defina $B_j^*(\omega)$ por

- $B_1^*(\omega) = B_1(\omega)$
- $B_j^*(\omega) = B_j(\omega) - \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i(\omega)$

Note que $B_j^*(\omega) \subseteq B_j(\omega)$ e

$$\# \bigcup_{j=1}^{N} B_j(\omega) = \# \bigcup_{j=1}^{N} B_j^*(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \# B_j^*(\omega).$$

Além disso, os B_j^*'s são 2 a 2 disjuntos. Por abuso de notação, no que segue B_j irá representar os conjuntos disjuntos B_j^*.

Nosso objetivo agora vai ser estimar a cardinalidade de $\bigcup_{j=1}^{N} B_j(\omega)$, que vai ser o mesmo que estimar a cardinalidade de $\bigcup_{j=1}^{N} B_j^*(\omega)$. Por abuso de notação, no que segue B_j irá representar o B_j^*.

3. Para isso, vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação 2: Para cada $1 \leq j \leq N$ e para cada subconjunto não vazio $C_j \subseteq B_j$ existe um subconjunto $I_j^c \subseteq C_j$ tal que

(i) $\#C_j \leq \frac{4}{\beta} \sum_{k\in F_j + I_j^c} |f(\tau(k)\omega)|$;

(ii) $\#I_j^c \, . \, \#F_j \leq \frac{4}{\beta} \displaystyle\sum_{k \in F_j + I_j^c} |f(\tau(k)\omega)|$,

Demonstração da Afirmação 2: De fato, consideremos a seguinte medida positiva sobre $\mathbb{Z}^n$: $\mu(A) = \displaystyle\sum_{k \in A} |f(\tau(k)\omega)|$.

Agora, fixe um inteiro $j \geq 1$. Por conveniência, denote $C = C_j$ e $I = I_j^c$.

Considere a seguinte construção:

Escolha $c_1 \in C$ qualquer. Há apenas duas possibilidades:

- $\forall \; c \in C - \{c_1\}$ vale que

$$\mu\left([F_j + c] - [F_j + c_1]\right) < \frac{1}{2}\mu(F_j + c).$$

Nesse caso, defina $I := \{c_1\}$.

- $\exists c_2 \in C - \{c_1\}$;

$$\mu\left([F_j + c_2] - [F_j + c_1]\right) \geq \frac{1}{2}\mu(F_j + c_2).$$

Nesse caso, temos novamente duas possibilidades:

- $\forall c \in C - \{c_1, c_2\}$ vale que

$$\mu\left([F_j + c] - \bigcup_{i=1}^{2}[F_j + c_i]\right) < \frac{1}{2}\mu(F_j + c)$$

Nessa situação, definimos $I := \{c_1, c_2\}$. Caso contrário, se existir algum elemento de $C - \{c_1, c_2\}$ em que essa última desigualdade não ocorra continuamos escolhendo elementos de C até que tenhamos escolhidos $p's$ elementos, $\{c_1, ..., c_p\}$, tais que

$$\mu\left([F_j + c] - \bigcup_{i=1}^{p}[F_j + c_i]\right) < \frac{1}{2}\mu(F_j + c),$$

para todo $c \in C - \{c_1, .., c_p\}$. Dessa forma tome $I = \{c_1, ..., c_p\}$.

Resumindo,

- $\mu\left([F_j + c] - [F_j + I]\right) < \frac{1}{2}\mu\left(F_j + c\right)$ se $c \in C - I$.

- $\mu\left([F_j+c_l]-\bigcup_{i=1}^{l-1}[F_j+c_i]\right)\geq \frac{1}{2}\mu\left(F_j+c_l\right)$ se $2\leq l\leq p$.

Observando que,

$$\bigcup_{l=2}^{p}[F_j+c_l]=\bigcup_{l=2}^{p}\left([F_j+c_l]-\bigcup_{i=1}^{l-1}[F_j-c_i]\right),$$

temos:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in F_j+I}|f(\tau(k)\omega)| &= \mu\left(\bigcup_{l=1}^{p}F_j+c_l\right)\\ &= \mu\left((F_j+c_1)\cup\left\{\bigcup_{l=2}^{p}\left([F_j+c_l]-\bigcup_{i=1}^{l-1}[F_j+c_i]\right)\right\}\right)\\ &= \mu(F_j+c_1)+\sum_{l=2}^{p}\mu\left([F_j+c_l]-\bigcup_{i=1}^{l-1}[F_j+c_i]\right).\end{aligned}$$

Pela construção de I e pela definição de B_j, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k\in F_j+I}|f(\tau(k)\omega)| &\geq \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p}\mu\left(F_j+c_l\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p}\left(\beta\cdot\ \#F_j\right)\\ &\geq \frac{\beta}{4}\ \cdot\ \#I\ \cdot\ \#F_j,\end{aligned}$$

provando assim o item (ii).

Agora, para provar o item (i) precisamos separar em dois casos.

Se $\#I\geq\frac{\#C}{\#F_j}$, continuando a desigualdade anterior provamos (i). Agora, vamos considerar o caso em que $\#I<\frac{\#C}{\#F_j}$.

Para cada $c\notin I$, pela construção de I, temos

$$\begin{aligned}\mu\left(F_j+c\right)-\mu\left([F_j+c]\cap[F_j+I]\right) &= \mu\left([F_j+c]-[F_j+I]\right)\\ &< \frac{1}{2}\mu\left(F_j+c\right),\end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{2}\mu(F_j + c) < \mu\left([F_j + c] \cap [F_j + I]\right).$$

Portanto, denotando $\overline{I} = B - I$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{c\in\overline{I}} \mu\left(F_j + c\right) &\leq \sum_{c\in\overline{I}} \mu\left([F_j + c] \cap [F_j + I]\right)\\ &= \sum_{c\in\overline{I}} \int_F \chi_{(F_j+c)}(k) \cdot \chi_{(F_j+I)}(k)\; d\mu(k).\end{aligned}$$

Agora, para continuar esta desigualdade, vamos mostrar que

$$\sum_{c\in C} \chi_{(F_j+c)}(k) \leq \#F_j,\ \forall k \in F.$$

De fato, suponha que a desigualdade contrária valha. Se $r = \#F_j$ e $m := \#C$, então, devemos ter $k \in \bigcap_{i=1}^{r+1} [F_j + c_i]$. Denotando $F_j = f_1, ..., f_r$, haveria um inteiro $1 \leq s \leq r$ tal que

$$k = f_1 + c_1 = f_2 + c_2 = ... = f_s + c_s = ... = f_r + c_r = f_s + c_{r+1}.$$

Portanto, $f_s + c_s = f_s + c_{r+1}$, donde $c_s = c_{r+1}$, que é um absurdo. Observe que depois de r elementos, teríamos que repetir os elementos de F_j acrescidos de c_i com $i > r$, o que não poderia. Portando cada $k \in F$ está contido em no máximo $\#F_j$ translações.

Portanto,

$$\frac{1}{2}\sum_{c\in\overline{I}} \mu\left(F_j + c\right) \leq \#F_j \cdot \mu\left(F_j + I\right).$$

Assim, usando a desigualdade anterior,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in F_j+I} |f(\tau(k)\omega)| &= \mu\left(F_j + I\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\#F_j}\sum_{c\in\overline{I}} \mu\left(F_j + c\right)\end{aligned}$$

Por definição de B_j, $\mu(F_j + c) \geq \beta \cdot \#F_j$, assim

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in F_j+I} |f(\tau(k)\omega)| &\geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\#F_j}\sum_{b\in\overline{I}}\beta \cdot \#F_j \\
&= \frac{\beta}{2} \cdot \#\overline{I} = \frac{\beta}{2}\left(\#C - \#I\right) \\
&= \frac{\beta}{2} \cdot \#C\left(1 - \frac{\#I}{\#C}\right) \\
&> \frac{\beta}{2} \cdot \#C\left(1 - \frac{1}{\#F_j}\right) \\
&> \frac{\beta}{4}\#C,
\end{aligned}
$$

já que $\#F_j > 2$.

Assim fica provado a afirmação 2 e conseguimos a seguinte estimativa

$$
\#\bigcup_{j=1}^{N} B_j = \sum_{j=1}^{N}\#B_j \leq \frac{4}{\beta}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\in F_j+I_j}|f(\tau(k)\omega)|\,,
$$

tomando $C_j = B_j$.

Para conseguirmos estimar melhor a cardinalidade de B_j vamos construir I_j tal que os $(F_j + I_j)$'s sejam disjuntos.

4. Agora, vamos construir subconjuntos de B_j adequados que irão melhorar a nossa estimativa acima.

Defina $\overline{B}_N = B_N$. Pela afimação 2, existe $\overline{I}_N \subseteq \overline{B}_N = B_N$, tal que

$$
\#B_N = \#\overline{B}_N \leq \frac{4}{\beta}\mu(F_N + \overline{I}_N).
$$

Agora defina $\overline{B}_{N-1} = \big\{b \in B_{N-1};\ (F_{N-1} + b) \cap \big(F_N + \overline{I}_N\big) = \emptyset\big\}$.

Para estimar a cardinalidade B_{N-1}, devemos separar em dois casos:

Caso A: $\#\overline{B}_{N-1} \geq \frac{\#B_{N-1}}{2}$;

Pela afirmação 2, existe $\overline{I}_{N-1} \subseteq \overline{B}_{N-1}$ tal que

$$
\#B_{N-1} \leq 2 \cdot \#\overline{B}_{N-1} \leq \frac{8}{\beta}\mu(F_{N-1} + \overline{I}_{N-1}).
$$

e

$$\#I_{N-1} \cdot \#F_{N-1} \leq \frac{4}{\beta}\mu(F_{N-1} + \overline{I}_{N-1}).$$

Ainda, por definição de $\overline{B}_{N-1}$, observe que os conjuntos $F_{N-1} + \overline{I}_{N-1}$ e $F_N + \overline{I}_N$ são disjuntos.

Caso B: $\#\overline{B}_{N-1} < \frac{\#B_{N-1}}{2}$;

Neste caso, defina $\overline{I}_{N-1} = \emptyset$.

Vamos definir agora $\overline{B}_{N-2} = \left\{ b \in B_{N-2};\ (F_{N-2} + b) \cap \left(\bigcup_{i=N-1}^{N} F_i + \overline{I}_i \right) = \emptyset \right\}$.

Novamente, podemos separar em dois casos. Se $\overline{B}_{N-2}$ está no caso A, então, existe $\overline{I}_{N-2} \subseteq \overline{B}_{N-2}$ tal que

$$\#B_{N-2} \leq 2 \ \cdot \ \#\overline{B}_{N-2} \leq \frac{8}{\beta}\mu(F_{N-2} + \overline{I}_{N-2}).$$

e

$$\#\overline{I}_{N-2} \cdot \#F_{N-2} \leq \frac{4}{\beta}\mu(F_{N-2} + \overline{I}_{N-2}).$$

Caso contrário, definiremos $\overline{I}_{N-2} = \emptyset$.

Recursivamente, já tendo definidos os $\overline{B}_i$'s e $\overline{I}_i$'s, com $j < i \leq N$, vamos definir agora o conjunto

$$\overline{B}_j = \left\{ b \in B_j;\ (F_j + b) \cap \left(\bigcup_{i=j+1}^{N} F_i + \overline{I}_i \right) = \emptyset \right\}$$

E portanto, se $j \in A := \left\{ j \in 1, .., N;\ \#\overline{B}_j \geq \frac{\#B_j}{2} \right\}$, existe $\overline{I}_j \subseteq \overline{B}_j$ tal que

$$\#B_j \leq 2 \ \cdot \ \#\overline{B}_j \leq \frac{8}{\beta}\mu(F_j + \overline{I}_j).$$

e

$$\#\overline{I}_j \ \cdot \ \#F_j \leq \frac{4}{\beta}\mu\left(F_j + \overline{I}_j\right).$$

Porém, se $j \in B = \{1, .., N\} - A$, defina $\overline{I}_j = \emptyset$.

Observe que:

(i) Os $\left(F_j + \overline{I}_j\right)'$s são dois a dois disjuntos;

(ii) Se $b \in B_j - \overline{B_j}$, então existe algum $i_0 > j$ tal que $(F_j + b) \cap \left(F_{i_0} + \overline{I}_{i_0}\right) \neq \emptyset$. Portanto, $b \in F_j + F_{i_0} + \overline{I}_{i_0}$. Concluindo assim que

$$B_j - \overline{B}_j \subseteq \bigcup_{i>j} F_j + F_i + \overline{I}_i.$$

Agora vamos estimar a cardinalidade da união dos B_j's. Por um lado, se $j \in A$, então

$$\# B_j \leq \frac{8}{\beta} \mu(F_j + \overline{I}_j),$$

donde

$$\begin{aligned} \# \left(\bigcup_{j \in A} B_j \right) = \sum_{j \in A} \# B_j &\leq \frac{8}{\beta} \sum_{j \in A} \mu \left(F_j + \overline{I}_j \right) \\ &\leq \frac{8}{\beta} \mu(F), \end{aligned}$$

já que os conjuntos $(F_j + I_j)'$s são disjuntos e cada $F_j + \overline{I_j} \in F$.

Por outro lado, se $j \in B$, então $\# \left(B_j - \overline{B_j} \right) > \frac{\# B_j}{2}$. Então, usando a observação (ii), obtemos:

$$\begin{aligned} \# \left(\bigcup_{j \in B} B_j \right) = \sum_{j \in B} \# B_j &< 2 \sum_{j \in B} \#(B_j - \overline{B_j}) \\ &= 2 \# \left(\bigcup_{j \in B} B_j - \overline{B}_j \right) \\ &\leq 2 \# \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} B_j - \overline{B}_j \right) \\ &\leq 2 \# \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} \bigcup_{i>j} F_j + F_i + \overline{I}_i \right) \\ &= 2 \# \left(\bigcup_{i=2}^{N} \bigcup_{j<i} F_j + F_i + \overline{I}_i \right) \end{aligned}$$

Observe que se $i \in B$, então $\overline{I}_i = \emptyset$, e portanto $F_j + F_i + \overline{I}_i = \emptyset$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\#\left(\bigcup_{j\in B} B_j\right) &< 2\#\left(\bigcup_{i=2, i\in A}^{N}\bigcup_{j<i} F_j + F_i + \overline{I}_i\right)\\
&\leq 2\sum_{i=2, i\in A}^{N}\#\left(\bigcup_{j<i} F_j + F_i + \overline{I}_i\right)\\
&= 2\sum_{i=2, i\in A}^{N}\#\left(\bigcup_{j<i} F_j + F_i + \overline{I}_i\right)\\
&= 2\sum_{i=2, i\in A}^{N}\#\left(\bigcup_{j<i}\bigcup_{b\in\overline{I}_i} F_j + F_i + b\right)\\
&= 2\sum_{i=2, i\in A}^{N}\#\left(\bigcup_{b\in\overline{I}_i}\bigcup_{j<i} F_j + F_i + b\right)\\
&\leq 2\sum_{i=2, i\in A}^{N}\sum_{b\in\overline{I}_i}\#\left(\bigcup_{j<i} F_j + F_i + b\right)\\
&= 2\sum_{i=2, i\in A}^{N}\sum_{b\in\overline{I}_i}\#\left(\bigcup_{j<i} F_j + F_i\right)
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\frac{\#\left(\bigcup_{j<i} F_j + F_i\right)}{\#F_i} &= \frac{\#\left(\bigcup_{j<i} F_{j+i}\right)}{\#F_i}\\
&= \frac{\#\left(F_{2i-1}\right)}{\#F_i}\\
&= \frac{(4i-1)^n}{(2i+1)^n}\\
&= \left(2 - \frac{3}{2i+1}\right)^n < 2^n.
\end{aligned}
$$

Donde

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in B} \#B_j &< 2\sum_{i=2, i\in A}^{N} \sum_{b\in \overline{I}_i} 2^n \# F_i \\
&= 2^{n+1} \sum_{i=2, i\in A}^{N} \#\overline{I}_i \ \cdot\ \#F_i \\
&= \frac{4.2^{n+1}}{\beta} \sum_{i=2, i\in A}^{N} \mu\left(F_i + \overline{I}_i\right) \\
&= \frac{4.2^{n+1}}{\beta} \mu \left(\bigcup_{i=2, i\in A} F_i + \overline{I}_i \right) \\
&\leq \frac{8.2^n}{\beta} \mu(F).
\end{aligned}
$$

Portanto, concluimos que

$$
\begin{aligned}
\#\left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j\right) &= \#\left(\bigcup_{j\in A} B_j\right) + \#\left(\bigcup_{j\in B} B_j\right) \\
&\leq \frac{8}{\beta}\mu(F) + \frac{8.2^n}{\beta}\mu(F) \\
&\leq \frac{8(2^n+1)}{\beta} \sum_{k\in F} \left| f(\tau(k)\omega) \right|.
\end{aligned}
$$

5. Para finalizar, voltando para a estimativa do item 2, utilizando a desi-

gualdade acima, a preservação da medida $\mathbb{P}$ e a afirmação 1, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{M_N f > \beta\} &\leq \frac{1}{\#F'} \int_\Omega \# \left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j(\omega) \right) d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leq \frac{1}{\#F'} \frac{8(2^n+1)}{\beta} \int_\Omega \sum_{k \in F} |f(\tau(k)\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leq \frac{1}{\#F'} \frac{8(2^n+1)}{\beta} \sum_{k \in F} \int_\Omega |f(\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) \\
&< \frac{\#F}{\#F'} \frac{8(2^n+1)}{\beta} \int_\Omega |f(\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) \\
&< (1+\varepsilon) \frac{8(2^n+1)}{\beta} \|f\|_{L^1(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, fazendo $\varepsilon \to 0$ e tomando $c = 8(2^n + 1)$, concluimos o Teorema. □

Agora, vamos demostrar o Teorema de Birkhoff. Em [12], podemos encontrar a versão unidimensional deste Teorema e em [14] temos uma versão mais geral do que se segue.

Teorema 1.2. *Seja $f \in L^1(\Omega)$. Então, se $k \in \mathbb{Z}^n$, existe $\overline{f} \in L^1(\Omega)$ tal que*

$$\frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f(\tau(k)\omega) \xrightarrow{N\to\infty} \overline{f}(\omega), \tag{1.1}$$

para $\mathbb{P}$-q.t.p $\omega \in \Omega$.

Além disso, $\overline{f}$ é invariante e

$$\mathbb{E}[f] = \mathbb{E}[\overline{f}].$$

Em particular, se o sistema dinâmico τ é ergódico, então

$$\overline{f} \equiv \mathbb{E}[f].$$

Demonstração. 1. Denote a σ-álgebra gerada pelos conjuntos τ-invariantes por $\mathcal{I}$. Vamos mostrar

$$\frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f(\tau(k)\omega) \xrightarrow{N\to\infty} \mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}](\omega),$$

para $\mathbb{P}$-q.t.p $\omega \in \Omega$.

Note que $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}](\omega)$ é uma função τ-invariante. Isso é consequência de ela ser τ-mensurável. De fato,

$$\forall B \subset \mathbb{R}^n \text{ boreliano}, \tau_k(\mathbb{E}(f \mid \mathcal{I})^{-1}(B)) = (\mathbb{E}(f \mid \mathcal{I}) \circ \tau_{-k})^{-1}(B),$$

donde $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{I})$ é τ- invariante se, e somente se, $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{I})$ é $\mathcal{I}$-mensurável.

Agora, observe que provar (1.3) é o mesmo que provar que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \le N} (f(\tau(k)\omega) - \mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}]) \\ &= \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \le N} (f - \mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}])\,(\tau(k)\omega), \end{aligned}$$

já que $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}](\omega)$ é uma função τ-invariante. Portanto, substituindo f por $f - \mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}]$ na hipótese do Teorema de Birkhoff, podemos assumir sem perda de generalidade que $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}] \equiv 0$. Assim, é suficiente provar que

$$\frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \le N} f(\tau(k)\omega) \xrightarrow{N\to\infty} 0,\ \mathbb{P} - \text{q.t.p } \omega \in \Omega, \tag{1.2}$$

para cada $f \in L^1(\Omega)_0 = \{f \in L^1(\Omega);\ \mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}] = 0\}$.

2. Primeiro vamos mostrar que esta convergência vale para toda $f \in F := \{g(\tau(p)\cdot) - g(\cdot);\ g \in L^\infty(\Omega) \text{ e } p \in \mathbb{Z}^n\}$. Note que $f \in L^1(\Omega)_0$. De fato, se $A \in \mathcal{I}$, então

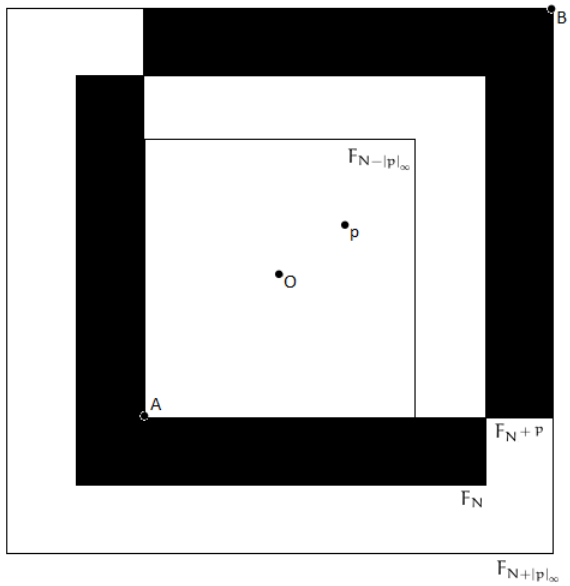
$$\begin{aligned} \int_A f(x) d\mathbb{P}(\omega) &= \int_A g(\tau(p)\omega) d\mathbb{P}(\omega) - \int_A g(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_A g(\omega) d\mathbb{P}(\omega) - \int_A g(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\ & \quad 0, \end{aligned}$$

já que τ preserva a medida $\mathbb{P}$. Ainda, como $\mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{I}\right](\omega) = \frac{d\nu}{d\mathbb{P}}(\omega)$ e $\nu(A) = \int_A f(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = 0$, segue que $\mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{I}\right](\omega) \equiv 0$.

Portanto, para N suficientemente grande,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f(\tau(k)\omega) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} g(\tau(k+p)\omega) - g(\tau(k)\omega) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^n} \left[\sum_{k \in F_N + p} g(\tau(k)\omega) - \sum_{k \in F_N} g(\tau(k)\omega) \right] \\
&= \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{k \in (F_N + p) \triangle F_N} g(\tau(k)\omega)
\end{aligned}
$$

Como $p \in \mathbb{Z}^n$ está fixo, suponhamos que $N > |p|_\infty$. Observe a figura abaixo.



A parte em negrito representa o conjunto $(F_N + p) \triangle F_N$. Portanto, vemos que $(F_N + p) \triangle F_N \subset F_{N+|p|_\infty} - F_{N-|p|_\infty}$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{k \in (F_N+p) \triangle F_N} g(\tau(k)\omega) \\
< & \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{F_{N+|p|_\infty} - F_{N-|p|_\infty}} g(\tau(k)\omega) \\
\leq & \frac{1}{(2N+1)^n} \cdot \# \left(F_{N+|p|_\infty} - F_{N-|p|_\infty} \right) \cdot \|g\|_\infty \\
= & \frac{1}{(2N+1)^n} \cdot \left(\# F_{N+|p|_\infty} - \# F_{N-|p|_\infty} \right) \cdot \|g\|_\infty \\
\leq & \frac{(2N + 2\,|p|_\infty + 1)^n - (2N - 2\,|p|_\infty + 1)^n}{(2N+1)^n} \cdot \|g\|_\infty
\end{aligned}
$$

Portanto, fazendo $N \to \infty$, provamos a convergência (1.2). Ainda, esta convergência também vale para o fecho do span de F. De fato, vamos provar a seguinte afirmação:

3. Afirmação 1: $\overline{< F >} = L^1(\Omega)_0$.

De fato, note que $L^1(\Omega)_0^* = L^\infty(\Omega)_0$. Basta mostrar que $< F >^\perp = \{0\}$. Se $h \in < F >^\perp$, então,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega h(\omega) \left[g(\tau(p)\omega) - g(\omega) \right] d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega \left[h(\tau(-p)\omega) - h(\omega) \right] g(\omega) d\mathbb{P}(\omega),
\end{aligned}
$$

$\forall g \in L^\infty$. Então, h é invariante e consequemente h é $\mathcal{I}$-mensurável. Donde $\mathbb{E}\left[h \mid \mathcal{I}\right] \equiv h$. Como $h \in L^\infty(\Omega)_0$, concluimos que $h \equiv 0$.

4. Para finalizar, dado $f \in L^1(\Omega)_0$ e $j \geq 1$ um inteiro, seja $f_j \in F$ tal que

$$
\|f - f_j\|_1 < \frac{1}{j}.
$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \sup \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f(\tau(k)\omega) \right| \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \sup \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f_j(\tau(k)\omega) \right| + \lim_{N\to\infty} \sup \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} [f-f_j](\tau(k)\omega) \right| \\
&= \lim_{N\to\infty} \sup \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} [f-f_j](\tau(k)\omega) \right| \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \sup \left[A_N(f-f_j)(\omega) \right]
\end{aligned}
$$

Agora, note que

$$
\left\{ \omega \in \Omega; \lim_{N\to\infty} \sup \left[A_N(f-f_j)(\omega) \right] > \frac{1}{\sqrt{j}} \right\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega; M_N(f-f_j)(\omega) > \frac{1}{\sqrt{j}} \right\}.
$$

Observando que $\left\{ M_N f(\omega) > \frac{1}{\sqrt{j}} \right\} \subset \left\{ M_{N+1} f(\omega) > \frac{1}{\sqrt{j}} \right\}$ temos, pelo Teorema da função maximal:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left\{ \lim_{N\to\infty} \sup [A_N(f-f_j)(\omega)] > \sqrt{\varepsilon} \right\} \right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{N=0}^{\infty} \left\{ M_N[f-f_j](\omega) > \frac{1}{\sqrt{j}} \right\} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ M_N[f-f_j] > \frac{1}{\sqrt{j}} \right\} \right) \\
&\leq c\sqrt{j} \, \|f-f_j\|_1 \\
&< \frac{c}{\sqrt{j}}.
\end{aligned}
$$

Defina $\Omega_T := \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \limsup_{N\to\infty} A_N(f-f_j)(\omega) \leq \frac{1}{\sqrt{j}} \right\}$. Note que $\mathbb{P}(\Omega_T) = 1$ e

$$
\limsup_{N\to\infty} A_N(f-f_j)(\omega) = 0, \ \forall \omega \in \Omega_T.
$$

Donde segue a conclusão da primeira parte do Teorema.

6. Ainda, por definição de $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}]$ segue que

$$
\mathbb{E}[f] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}]].
$$

E se τ é ergódico então $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}]$ é equivalente a uma constante, já que $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}]$ é $\tau-$invariante. Então

$$\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}] = \mathbb{E}[f],$$

e assim concluímos o Teorema De Birkhoof. $\square$

O seguinte teorema é uma versão do teorema de Birkoff, o qual foi enunciado em [4].

Corolário 1.1. *Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n;\ L^\infty(\Omega))$ uma função estacionária discreta. Então, existe $\overline{f} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^\infty(\Omega))$ tal que*

$$\frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f(\cdot, \tau(k)\omega) \xrightarrow{N\to\infty} \overline{f}(\cdot, \omega) \text{ em } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \tag{1.3}$$

para q.t.p. $\omega \in \Omega$.

Além disso, se o sistema dinâmico τ é ergódico, então,

$$\overline{f}(x, \omega) = \mathbb{E}\left[f(x, \cdot)\right],$$

para q.t.p. $\omega \in \Omega$ e vale que

$$f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \omega\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\left[\int_{[0,1]^n} f(y, \cdot)dy\right] \text{ em } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

para q.t.p. $\omega \in \Omega$.

Demonstração. 1. Primeiro, considere f uma função da forma $f(x, \omega) = h(x - [x])g(\tau([x])\omega)$, com $h \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^\infty(\Omega)$. Como f é estacionária no sentido discreto, basta mostrarmos a convergência em $L^1([0,1]^n)$. De fato, note que para cada $r > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{B_r} f(x, \omega)dx &= \int_{B_r} f(x - [x], \tau([x])\omega)d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{B_r} f(x - [x], \omega)d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{[0,1]^n} f(y, \omega)d\mathbb{P}(\omega), \end{aligned}$$

onde usamos a preservação da medida $\mathbb{P}$ na segunda igualdade.

Pelo Teorema de Birkhoff (1.2), sabemos que existe $\overline{g} \in L^1(\Omega)$, $\overline{g}(\omega) = \mathbb{E}\left[g \mid \mathcal{I}\right](\omega)$, τ-invariante e um conjunto de medida total Ω_0 tal que

$$\overline{g}(\omega) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} g\left(\tau(k)\omega\right), \ \forall\, \omega \in \Omega_0.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, se $\omega \in \Omega_0$, existe $N_0 > 0$ tal que se $N \geq N_0$, obtemos

$$\left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} g(\tau(k)\omega) - \overline{g}(\omega)) \right| < \frac{\varepsilon}{c},$$

onde $c = \|h\|_{L^1([0,1]^n)}$.

Defina $\overline{F}(x,\omega) = h(x-[x])\overline{g}(\omega)$. Portanto, pelo Teorema de Birkhoff (1.2), se $N \geq N_0$ e $\omega \in \Omega_1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n} \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f(x,\tau(k)\omega) - \overline{F}(x,\omega) \right| dx \\
&= \int_{[0,1]^n} \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} h(x)g(\tau(k)\omega) - h(x)\overline{g}(\omega) \right| dx \\
&= \int_{[0,1]^n} |h(x)| \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} g\left(\tau(k)\omega\right) - \overline{g}(\omega) \right| dx \\
&= \frac{\varepsilon}{c} \cdot \int_{[0,1]^n} |h(y)|\, dy \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

donde fica provado a convergência em (1.3) para q.t.p. $\omega \in \Omega$ com f da forma $f(x,\omega) = h(x-[x])g(\tau([x])\omega)$, onde $h \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^\infty(\Omega)$. Observe que se f é uma combinação finita de funções do tipo anterior , então esta convergência também ocorre.

Note que, se τ é ergódico, então $\overline{g}$ é constante, isto é $\overline{g} \equiv \mathbb{E}\left[g\right]$, donde $\overline{F}(x,\omega) = h(x-[x])\mathbb{E}\left[g\right] = \mathbb{E}\left[f(x,\cdot)\right]$.

2. Agora considere $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^\infty(\Omega))$ estacionária discreta. Então, existe uma sequência de funções simples $\{f_j\}_j$, não necessariamente funções estacionárias, tal que $f_j(x,\omega) \xrightarrow{j\to\infty} f(x,\omega)$ em $L^1([0,1]^n; L^\infty(\Omega))$ e para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$f_j(x,\omega) = \sum_{i=1}^{N_j} a_{i,j} \ \cdot \ \chi_{B_{i,j}}(x) \ \cdot \ \chi_{C_{i,j}}(\omega),$$

onde cada $B_{i,j} \subset [0,1]^n$ e cada $C_{i,j} \in \mathcal{F}$.

Então, para $\mathbb{P}$-q.t.p. $\omega \in \Omega$ temos que

$$f_j(x,\omega) \xrightarrow{j\to\infty} f(x,\omega) \text{ em } L^1([0,1]^n).$$

Além disso, pela estacionaridade da f, temos

$$f_j(x-[x],\tau[x]\omega) \xrightarrow{j\to\infty} f(x-[x],\tau[x]\omega) = f(x,\omega) \text{ em } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Escreva

$$F_j(x,\omega) = f_j(x-[x],\tau[x]\omega).$$

Portanto, pelo caso anterior, para cada j fixo e para $\mathbb{P}$-q.t.p $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} F_j(x,\tau(k)\omega) \xrightarrow{N\to\infty} \overline{F}_j(x,\omega) \text{ em } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \tag{1.4}$$

com $\overline{F_j}(x,\cdot)$ τ-invariante, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Note que se τ é ergódico, então

$$\overline{F}_j(x,\omega) = \mathbb{E}\left[F_j(x,\cdot)\right]. \tag{1.5}$$

<u>Afirmação 1:</u> Para $\mathbb{P}-$ q.t.p $\omega \in \Omega$, $\left(\overline{F}_j\right)_j$ é uma sequência de Cauchy em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^\infty(\Omega))$,

Prova da Afirmação 1: De fato, a sequência $\{f_j\}_{j\geq 1} \in L^1([0,1]^n; L^\infty(\Omega))$ é tal que

$$f_j \xrightarrow{j\to\infty} f \text{ em } L^1([0,1]^n; L^\infty(\Omega)),$$

isto é, existe $\Omega_0 \in \Omega$ de medida total tal que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{[0,1]^n} \sup_{\omega\in\Omega_0} |f_j(x,\omega) - f(x,\omega)|\, dx = 0.$$

Defina $\Omega_1 := \bigcap_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau(k)\Omega_0$. Note que, se $\omega \in \Omega_1$, então, $\tau(k)\omega \in \Omega_0$, $\forall k \in \mathbb{Z}^n$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n} \left|\overline{F}_j(x,\omega) - \overline{F}_l(x,\omega)\right| d\mathbb{P}(\omega)dx \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} \int_{[0,1]^n} \left| \overline{F}_j(x,\omega) - \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f_j(x,\tau(k)\omega) \right| dx \\
&\quad + \limsup_{N\to\infty} \int_{[0,1]^n} \left| \overline{F}_l(x,\omega) - \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f_l(x,\tau(k)\omega) \right| dx \\
&\quad + \limsup_{N\to\infty} \int_{[0,1]^n} \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} \left[f_j - f_l\right](x,\tau(k)\omega) \right| dx \\
&= \limsup_{N\to\infty} \int_{[0,1]^n} \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} \left[f_j - f_l\right](x,\tau(k)\omega) \right| dx
\end{aligned}
$$

tendo usado a convergência (1.4). Portanto

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n} \left|\overline{F}_j(x,\omega) - \overline{F}_l(x,\omega)\right| d\mathbb{P}(\omega)dx \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} \int_{[0,1]^n} \left(\frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} \sup_{\omega\in\Omega_0} |f_j(x,\omega) - f_l(x,\omega)| \right) dx \\
&= \int_{[0,1]^n} \left(\sup_{\omega\in\Omega_0} |f_j(x,\omega) - f_l(x,\omega)| \right) dx
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\lim_{j,l\to\infty} \int_{[0,1]^n} \left(\sup_{\omega\in\Omega_0} \left|\overline{F}_j\right|(x,\omega) - \overline{F}_l(x,\omega) \right) dx = 0.
$$

Portanto, existe $\overline{f} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times; L^\infty(\Omega))$ τ-invariante tal que

$$
\overline{F}_j(x,\omega) \xrightarrow{j\to\infty} \overline{f}(x,\omega) \text{ em } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times L^\infty(\Omega)).
$$

Note que se τ é ergódico, $\overline{f}(x,\omega) = \overline{f}(x)$

3. Afirmamos que

Afirmação 2: Para $\mathbb{P}$-q.t.p. $\omega \in \Omega$, vale que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f(\cdot, \tau(k)\omega) = \overline{f}(\cdot, \omega) \text{ em } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, segue dos itens anteriores que existe $\Omega_1 \in \Omega$ de medida total e um inteiro $j_0 \geq 1$ tal que:

- $\int_{[0,1]^n} \left(\sup_{\omega \in \Omega_1} |f(x,\omega) - f_{j_0}(x,\omega)| \right) dx < \frac{\varepsilon}{2}$
- $\int_{[0,1]^n} \left(\sup_{\omega \in \Omega_1} \left|\overline{F}_{j_0}(x,\omega) - \overline{f}(x,\omega)\right| \right) dx < \frac{\varepsilon}{2}$

Definindo $\Omega_2 := \bigcap_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau(k)\Omega_1$, temos para $\omega \in \Omega_2$:

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n} \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f(x, \tau(k)\omega) - \overline{f}(x,\omega) \right| dx \\
&\leq \int_{[0,1]^n} \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} [f(x,\tau(k)\omega) - f_{j_0}(x,\tau(k)\omega)] \right| dx \\
&\quad + \int_{[0,1]^n} \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} f_{j_0}(x,\tau(k)\omega) - \overline{F}_{j_0}(x,\omega) \right| dx \\
&\quad + \int_{[0,1]^n} \left[\overline{F}_{j_0}(x,\omega) - \overline{f}(x,\omega)\right] dx.
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n}\left|\frac{1}{(2N+1)^n}\sum_{|k|_\infty\le N} f(x,\tau(k)\omega)-\overline{f}(x,\omega)\right|dx\\
\le\ &\int_{[0,1]^n}\left(\sup_{\omega\in\Omega_1}|f(x,\omega)-f_{j_0}(x,\omega)|\right)dx\\
&+\int_{[0,1]^n}\left|\frac{1}{(2N+1)^n}\sum_{|k|_\infty\le N} f_{j_0}(x,\tau(k)\omega)-\overline{F}_{j_0}(x,\omega)\right|dx\\
&+\int_{[0,1]^n}\left(\sup_{\omega\in\Omega_1}\left|\overline{F}_{j_0}(x,\omega)-\overline{f}(x,\omega)\right|\right)dx\\
\le\ &\varepsilon+\int_{[0,1]^n}\left|\frac{1}{(2N+1)^n}\sum_{|k|_\infty\le N} f_{j_0}(x,\tau(k)\omega)-\overline{F}_{j_0}(x,\omega)\right|dx
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\limsup_{N\to\infty}\int_{[0,1]^n}\left|\frac{1}{(2N+1)^n}\sum_{|k|_\infty\le N} f(x,\tau(k)\omega)-\overline{f}(x,\omega)\right|dx\le\varepsilon,\ \forall\omega\in\Omega_2.
$$

Sendo $\varepsilon>0$ qualquer, a afirmação segue.

4. Suponha agora que τ seja ergódico. Então

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n}\left|\frac{1}{(2N+1)^n}\sum_{|k|_\infty\le N} f(x,\tau(k)\omega)-\mathbb{E}\left[f(x,\omega)\right]\right|dx\\
\le\ &\int_{[0,1]^n}\left|\frac{1}{(2N+1)^n}\sum_{|k|_\infty\le N} \left[f(x,\tau(k)\omega)-f_{j_0}(x,\tau(k)\omega)\right]\right|dx\\
&+\int_{[0,1]^n}\left|\frac{1}{(2N+1)^n}\sum_{|k|_\infty\le N} f_{j_0}(x,\tau(k)\omega)-\mathbb{E}\left[f_{j_0}(x,\omega)\right]\right|dx\\
&+\int_{[0,1]^n}\left(\mathbb{E}\left[f_{j_0}(x,\omega)\right]-\mathbb{E}\left[f(x,\omega)\right]\right)dx.
\end{aligned}
$$

Donde,

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n} \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \le N} f(x, \tau(k)\omega) - \mathbb{E}\left[f(x,\omega)\right] \right| dx \\
\le \quad & 2 \int_{[0,1]^n} \left(\sup_{\omega \in \Omega_1} |f(x,\omega) - f_{j_0}(x,\omega)| \right) dx \\
& + \int_{[0,1]^n} \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \le N} f_{j_0}(x, \tau(k)\omega) - \mathbb{E}\left[f_{j_0}(x,\omega)\right] \right| dx \\
\le \quad & \varepsilon + \int_{[0,1]^n} \left| \frac{1}{(2N+1)^n} \sum_{|k|_\infty \le N} f_{j_0}(x, \tau(k)\omega) - \mathbb{E}\left[f_{j_0}(x,\omega)\right] \right| dx
\end{aligned}$$

Fazendo $N \to \infty$, usando a convergência (1.4) e a observação em (1.5), segue que $\overline{f}(x,\omega) = \mathbb{E}\left[f(x,\cdot)\right]$, para $\mathbb{P}$-q.t.p. $\omega \in \Omega$.

□

1.1.2 Teorema de Birkhoff - Versão Contínua

Definição 1.5 (Sistema Dinâmico). *Dizemos que uma função $\tau : \mathbb{R}^n \times \Omega \longrightarrow \Omega$ define um sistema dinâmico n-dimensional sobre Ω no sentido contínuo se satisfaz as seguintes condições:*

(i) A propriedade de grupo:

- $\tau(0,\omega) = \omega, \ \forall\ \omega \in \Omega;$
- $\tau(x+y,\omega) = \tau(x, \tau(y,\omega)), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ e \ \forall\ \omega \in \Omega.$

(ii) A invariância:

- $\tau(x, E) \in E, \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n \ e \ \forall\ E \in \mathcal{F};$
- $\mathbb{P}(\tau(x,E)) = \mathbb{P}(E), \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n \ e \ \forall\ E \in \mathcal{F}.$

Algumas vezes, usaremos a notação $\tau(x)\omega$ ao invés de $\tau(x,\omega)$. Em toda esta subseção, sistema dinâmico se referirá ao contexto contínuo.

Definição 1.6 (Sistema Dinâmico Ergódico). *Dizemos que o sistema dinâmico τ é ergódico se*

$$\forall E \in \mathcal{F}, \quad (\tau(x)E = E, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{P}(E) \in \{0,1\})$$

Assim como no caso discreto podemos caracterizar a ergodicidade de outra maneira. Novamente, vamos considerar algumas definições. Um conjunto $E \in \mathcal{F}$ tal que $\tau(x)E = E$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ é chamado $\tau-$invariante. Ainda, uma função mensurável $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada $\tau-$invariante se

$$F(\tau(x)\omega) = F(\omega),\ \forall x \in \mathbb{Z}^n,\ \mathbb{P}-\text{q.t.p.}\omega \in \Omega.$$

Então, o sistema dinâmico τ é ergódico se, e somente se, toda função τ-invariante é $\mathbb{P}$-equivalente a uma constante em Ω. A prova disso é feita de maneira similar ao caso discreto.

Definição 1.7. *Dado um espaço de probabilidade* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$*, dizemos que uma função mensurável* $g : \mathbb{R}^n \times \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é estacionária (ou homogênea) se para qualquer conjunto finito consistindo de pontos* $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$*, qualquer* $h \in \mathbb{R}^n$*, e para todo boreliano* $B_1, ..., B_k \subset \mathbb{R}^m$ *vale que*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} g^{-1}(x_i + h, \cdot)(B_i)\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} g^{-1}(x_i, \cdot)(B_i)\right).$$

Agora, daremos uma outra definição para função estacionária que será mais adequada ao nosso estudo. Esta nova definição foi motivada pelo seguinte Teorema, que pode ser visto em [6].

Teorema 1.3. *Seja* $g : \mathbb{R}^n \times \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *um campo aleatório estacionário definido sobre o espaço de probabilidade* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$*. Então, existe um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, um sistema dinâmico* $\tau : \mathbb{R}^n \times \Omega \longrightarrow \Omega$ *e uma função mensurável* $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tal que*

$$g(x, \cdot) = F(\tau(x, \cdot))$$

no sentido de lei, isto é, $\mathbb{P}_1([g(x, \cdot)]^{-1}(B)) = \mathbb{P}([F(\tau(x, \cdot)]^{-1}(B))$*. Além disso, se* $g(0, \cdot) \in L^1(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$*, então* $F \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$*.*

Demonstração. 1. Defina $\Omega := \{\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m;\ \omega \text{ é Lebesgue mensurável}\}$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, considere a projeção $\Pi_x : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\Pi_x(\omega) := \omega(x)$. Seja

$$C = \left\{\bigcap_{x \in A} \Pi_x^{-1}(B);\ A \subset \mathbb{R}^n \text{ é finito e } B \subset \mathbb{R}^m \text{ é boreliano}\right\}.$$

Defina $\mathcal{F} = \sigma(C)$ a menor σ-álgebra contendo C.

2. Por hipótese, $g : \mathbb{R}^n \times \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é mensurável. Logo, $\forall \rho \in \Omega_1$ temos que $g(\cdot, \rho)$ é Lebesgue mensurável. Portanto, defina $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega$ por

$$\varphi(\rho) = g(\cdot, \rho).$$

Note que φ é mensurável. De fato, basta verificar que $\varphi^{-1}(E) \in \mathcal{F}_1 \ \forall\ E \in C$. Por definição,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}\left(\bigcap_{x\in A} \Pi_x^{-1}(B)\right) &= \left\{\rho \in \Omega_1;\ \varphi(\rho) \in \bigcap_{x\in A} \Pi_x^{-1}(B)\right\} \\
&= \left\{\rho \in \Omega_1;\ g(\cdot,\rho) \in \bigcap_{x\in A} \Pi_x^{-1}(B)\right\} \\
&= \left\{\rho \in \Omega_1;\ g(\cdot,\rho) \in \Pi_x^{-1}(B)\ \forall x \in A\right\} \\
&= \bigcap_{x\in A} \{\rho \in \Omega_1;\ g(x,\rho) \in B\} \\
&= \bigcap_{x\in A} g^{-1}(x,\cdot)(B) \in \Omega_1,
\end{aligned}$$

pois A é finito.

Agora, defina $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ por

$$\mathbb{P}(E) := \mathbb{P}_1\left(\varphi^{-1}(E)\right) = \mathbb{P}_{1,\varphi}(E).$$

Claramente, $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade em Ω.

3. Defina $\tau : \mathbb{R}^n \times \Omega \longrightarrow \Omega$ por

$$\tau(x,\omega) := \omega\left(\cdot + x\right).$$

Claramente, τ tem a propriedade de grupo. Observe que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ fixo,

$$\begin{aligned}
\tau^{-1}\left(y, \bigcap_{x\in A} \Pi_x^{-1}(B)\right) &= \tau\left(-y, \bigcap_{x\in A} \Pi_x^{-1}(B)\right) \\
&= \bigcap_{x\in A-y} \Pi_x^{-1}(B),
\end{aligned}$$

donde $\tau(y,E) \in \mathcal{F},\ \forall E \in \mathcal{F}$.

Assim, para provar a invariância da medida, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ fixo, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\tau\left(y,\bigcap_{x\in A}\Pi_x^{-1}(B)\right)\right) &= \mathbb{P}_1\left(\varphi^{-1}\left(\tau\left(y,\bigcap_{x\in A}\Pi_x^{-1}(B)\right)\right)\right)\\
&= \mathbb{P}_1\left(\left\{\rho\in\Omega_1;\ \varphi(\rho)\in\tau\left(y,\bigcap_{x\in A}\Pi_x^{-1}(B)\right)\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}_1\left(\left\{\rho\in\Omega_1;\ \varphi(\rho)\in\tau^{-1}\left(-y,\bigcap_{x\in A}\Pi_x^{-1}(B)\right)\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}_1\left(\left\{\rho\in\Omega_1;\ \tau\left(-y,\varphi(\rho)\right)\in\bigcap_{x\in A}\Pi_x^{-1}(B)\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}_1\left(\left\{\rho\in\Omega_1;\ g\left(\cdot-y,\rho\right)\in\Pi_x^{-1}(B)\ \forall x\in A\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}_1\left(\{\rho\in\Omega_1;\ g\left(x-y,p\right)\in B\ \forall x\in A\}\right)\\
&= \mathbb{P}_1\left(\bigcap_{x\in A}g^{-1}\left(x-y,B\right)\right)\\
&= \mathbb{P}_1\left(\bigcap_{x\in A}g^{-1}\left(x,B\right)\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{x\in A}\Pi_x^{-1}(B)\right),
\end{aligned}
$$

donde

$$\mathbb{P}\left(\tau(y,E)\right)=\mathbb{P}\left(E\right),\ \forall y\in\mathbb{R}^n \text{ e } E\in\mathcal{F}.$$

Ainda, para $\omega\in\Omega$ fixo,

$$
\begin{aligned}
\tau^{-1}\left(\cdot,\bigcap_{x\in F}\Pi_x^{-1}(B)\right) &= \bigcap_{x\in F}\Pi_{(\cdot+x)}^{-1}(B)\\
&= \bigcap_{x\in F}\omega^{-1}(\cdot+x)(B)
\end{aligned}
$$

é Lebesgue mensurável.

4. Defina $F:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ por $F(\omega)=\omega(0)$. Portanto, $F\left(\tau(x,\omega)\right)=\omega(x)$. Note que F é mensurável, pois $F^{-1}(B)=\Pi_0^{-1}(B)$, $\forall$ B boreliano.

Além disso,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|F(\omega)|\,d\mathbb{P}(\omega) &= \int_{\Omega}|F(\omega)|\,d\mathbb{P}_{1,\varphi}(\omega)\\ &= \int_{\mathbb{P}_1}|F(\varphi(\rho))|\,d\mathbb{P}_1(\rho)\\ &= \int_{\mathbb{P}_1}|g(0,\rho)|\,d\mathbb{P}_1(\rho),\end{aligned}$$

assim, $F \in L^1(\Omega,\mathbb{P})$ se $g(0,\cdot) \in L^1(\Omega_1,\mathbb{P}_1)$.

Afirmamos que $f(\tau(x,\omega)) = g(x,\omega)$ no sentido de lei. Para ver isso, sejam $B \in \mathbb{R}^m$ um boreliano e $x \in \mathbb{R}^n$ fixado. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([F(\tau(x,\cdot))]^{-1}(B)\right) &= \mathbb{P}_1\left(\varphi^{-1}\left([F(\tau(x,\cdot))]^{-1}(B)\right)\right)\\ &= \mathbb{P}_1\left(\left\{\rho\in\Omega_1;\ \varphi(\rho)\in[F(\tau(x,\cdot))]^{-1}(B)\right\}\right)\\ &= \mathbb{P}_1\left(\left\{\rho\in\Omega_1;\ g(\cdot,\rho)\in[F(\tau(x,\cdot))]^{-1}(B)\right\}\right)\\ &= \mathbb{P}_1\left(\{\rho\in\Omega_1;\ F(\tau(x,g(\cdot,\rho)))\in B\}\right)\\ &= \mathbb{P}_1\left(\{\rho\in\Omega_1;\ F(g(\cdot+x,\rho))\in B\}\right)\\ &= \mathbb{P}_1\left(\{\rho\in\Omega_1;\ g(x,\rho)\in B\}\right)\\ &= \mathbb{P}_1\left([g(x,\cdot)]^{-1}(B)\right),\end{aligned}$$

o que conclui o Teorema enunciado. □

Agora, definindo $f(x,\omega) := F(\tau(x)\omega)$ com $F(\omega) = f(0,\omega)$, podemos provar que $f(x+y,\omega) = f(x,\tau(y)\omega)$. Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x,\cdot)$ e $f(x,\cdot)$ tem a mesma lei, motivando assim a seguinte

Definição 1.8. *Dizemos que uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é estacionária no sentido contínuo se existe um sistema dinâmico contínuo τ tal que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$f(x+y,\omega) = f(x,\tau(y)\omega),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para $\mathbb{P}$-q.t.p. $\omega \in \Omega$.

Em conexão com a noção de estacionaridade, temos o conceito de valor médio.

Definição 1.9. *Dizemos que uma função* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *possui valor médio se*

$$f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} M(f) \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

onde $M(f)$ *é uma constante. Também, se* $A_t := \{x \in \mathbb{R}^n : t^{-1}x \in A\}$ *para* $t > 0$ *e* $|A| \neq 0$*, esta convergência é equivalente a*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^n|A|}\int_{A_t} f(x)\,dx = M(f). \tag{1.6}$$

Um resultado que conecta todas os conceitos acima enunciados é o clássico Teorema de Birkhoff, que iremos demonstrar agui. Porém, antes disso, vamos provar uma lema que será necessário na prova deste Teorema.

Lema 1.1. *Seja* $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função mensurável. Se* $p \in \mathbb{Z}^n$ *possui alguma coordenada que depende de* N*, então*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{h(\tau(p)\omega)}{N} = 0, \quad \mathbb{P}-q.t.p\ \omega \in \Omega.$$

Demonstração. De fato, fixe $\varepsilon > 0$. Como $\mathbb{P}$ é invariante, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : |h(\tau(p)\omega)| \geq N\varepsilon\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : |h(\omega)| \geq N\varepsilon\}\right) \\ &= \sum_{k=N}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : k \leq \frac{|h(\omega)|}{\varepsilon} < k+1\right\}\right) \end{aligned}$$

Somando sobre todo $N \in \mathbb{N}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : |h(\tau(p)\omega)| \geq N\varepsilon\}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : k \leq \frac{|h(\omega)|}{\varepsilon} < k+1\right\}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{\left[k\leq \frac{|h|}{\varepsilon} \leq k+1\right]} \frac{|h(\omega)|}{k\varepsilon} d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{|h(\omega)|}{\varepsilon} d\mathbb{P}(\omega) < \infty. \end{aligned}$$

Pelo lema de Borel-Cantelli, isto implica que o conjunto $B(\varepsilon)$ dos pontos ω tais que $|h(\tau(p)\omega)| \geq N\varepsilon$ para infinitos valores de N tem medida nula. Por definição, para todo $\omega \notin B(\varepsilon)$ existe algum $n_0 \geq 1$ tal que $|h(\tau(p)\omega)| < N\varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Agora considere o conjunto $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B\left(\frac{1}{j}\right)$. Assim B tem medida nula e para todo $\omega \notin B$ vale que $\lim_{N\to+\infty} \frac{h(\tau(p)\omega)}{N} = 0.$ □

Teorema 1.4 (Teorema de Birkhoff)**.** *Seja $f \in L^1(\Omega)$. Então, para $\mathbb{P}$-q.t.p $\omega \in \Omega$, a função $f(\tau(\cdot)\omega)$ possui valor médio, $M(f(\tau(\cdot)\omega))$, isto é, para $\mathbb{P} -$ q.t.p $\omega \in \Omega$.*

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(\tau(x)\omega)dx \xrightarrow{R\to\infty} \overline{f}(\omega) = M\left(f(\tau(\cdot)\omega)\right),$$

Além disso, o valor médio $M\left(f(\tau(\cdot)\omega)\right)$ é invariante e

$$\mathbb{E}\left[f\right] = \int_\Omega M\left(f(\tau(\cdot)\omega)\right) d\mathbb{P}(\omega).$$

Em particular, se o sistema dinâmico τ é ergódico, então

$$M(f(\tau(\cdot)\omega)) = \mathbb{E}\left[f\right],$$

para $\mathbb{P}$-q.t.p. $\omega \in \Omega$.

Demonstração. 1. Por simplicidade, em vez de bolas de raio r, vamos considerar cubos da forma $[-T, T]^n$. Ou seja, vamos mostrar que

$$\frac{1}{(2T)^n}\int_{[-T,T]^n} f(\tau(x)\omega)dx \xrightarrow{T\to\infty} \overline{f}(\omega),$$

para $\mathbb{P} -$ q.t.p $\omega \in \Omega$.

2. Suponha a princípio que T seja um número natural, digamos N. Para $i = 1, ..., (2N)^2$, denote por Q_i cubos unitários tal que qualquer interseção de dois desses cubos tem interiores disjuntos. Além disso,

$$\bigcup_{i=1}^{(2N)^n} Q_i = [-N, N]^n$$

Fazendo uma mudança de variável, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2N)^n}\int_{[-N,N]^n} f(\tau(x)\omega)dy &= \frac{1}{(2N)^n}\sum_{i=1}^{(2N)^n}\int_{Q_i} f(\tau(x)\omega)dx \\
&= \frac{1}{(2N)^n}\sum_{k\in I}\int_{[0,1]^n} f(\tau(x+k)\omega)dx \\
&= \frac{1}{(2N)^n}\sum_{k\in I} g(\tau(k)\omega),
\end{aligned}$$

onde $\#I = (2N)^n$ e definimos g por $g(\omega) := \int_{[0,1]^n} f(\tau(x)\omega)dx$. Assim, pelo Teorema de Birkhoff para o caso discreto, existe $\overline{f}(\omega) = \mathbb{E}[g \mid \mathcal{I}](\omega) \in L^1(\Omega)$ tal que, para $\mathbb{P}$- q.t.p. $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{(2N)^n} \int_{[-N,N]^n} f(\tau(x)\omega)dx \xrightarrow{N\to\infty} \overline{f}(\omega) \ \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, $\overline{f}$ é invariante e satisfaz $\mathbb{E}[g] = \mathbb{E}[\overline{f}]$. Usando Fubini e a invariância da medida $\mathbb{P}$, podemos provar que

$$\mathbb{E}[f] = \mathbb{E}[\overline{f}].$$

Ainda, se τ é ergódico, $\overline{f}$ é equivalente a uma constante, donde

$$\overline{f} = \mathbb{E}[f].$$

3. Vamos provar agora o caso geral. Seja $T > 0$ um número real qualquer. Afirmamos que,

$$\frac{1}{(2T)^n} \int_{[-T,T]^n} f(\tau(y)\omega)dy \xrightarrow{T\to\infty} \overline{f}(\omega),$$

para $\mathbb{P}-$q.t.p. ω

De fato, para cada $T > 0$ real, exite $N > 0$ tal que $N \leq T < N + 1$. Portanto, para cada K compacto, observe que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(2T)^n} \int_{[-T,T]^n} f(\tau(x)\omega)dx - \overline{f}(\omega)\right| \\
&\leq \ \left|\frac{1}{(2T)^n} \int_{[-T,T]^n-[-N,N]^n} f(\tau(x)\omega)dx\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{(2N)^n} \int_{[-N,N]^n} f(\tau(x)\omega)dx - \frac{1}{(2T)^n} \int_{[-N,N]^n} f(\tau(x)\omega)dx\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{(2N)^n} \int_{[-N,N]^n} f(\tau(x)\omega)dx - \overline{f}(\omega)\right|.
\end{aligned}$$

Já sabemos que a última desigualdade converge para 0 quando $N \to 0$. Vamos mostrar agora que as duas primeiras desigualdade também convergem para 0 quando $T \to \infty$.

Temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(2T)^n}\int_{[-T,T]^n-[-N,N]^n} f(\tau(x)\omega)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{(2T)^n}\int_{[-T,T]^n-[-N,N]^n} |f(\tau(x)\omega)|\,dx \\
&\leq \frac{1}{(2N)^n}\int_{[-N-1,N+1]^n-[-N,N]^n} |f(\tau(x)\omega)|\,dx \\
&= \frac{1}{(2N)^n}\sum_{p\in I}\int_{[0,1]^n} |f(\tau(x+p)\omega)|\,dx,
\end{aligned}$$

onde $\#I = (2N+2)^n - (2N)^n$.

Defina $h(\omega) = \int_{[-1,1]^n} |f(\tau(x)\omega)|\,dx$. Vamos mostrar que,

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{p\in I}\frac{h(\tau(p)\omega)}{(2N)^n} = 0,$$

para $\mathbb{P}$-q.t.p $\omega\in\Omega$.

De fato, note que

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in I}\frac{h(\tau(p)\omega)}{(2N)^n} &\leq \sum_{p\in I}\frac{\max\limits_{p\in I} h(\tau(p)\omega)}{(2N)^n} \\
&\leq \frac{(2N+2)^n-(2N)^n}{(2N^n)}\max_{p\in I} h(\tau(p)\omega) \\
&\leq c\frac{\max\limits_{p\in I} h(\tau(p)\omega)}{N},
\end{aligned}$$

onde c é uma constante que só depende e n. A conclusão segue do lema (1.1).

Agora vamos mostrar que a segunda desigualdade vai a zero quando $T\to\infty$. Note que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(2N)^n}\int_{[-N,N]^n} f(\tau(x)\omega)dx - \frac{1}{(2T)^n}\int_{[-N,N]^n} f(\tau(x)\omega)dx\right| \\
&\left|\frac{1}{(2N)^n}-\frac{1}{(2T)^n}\right|\left|\int_{[-N,N+1]} f(\tau(x)\omega)dx\right| \\
&= \left(1-\left(\frac{N}{T}\right)^n\right)\frac{1}{(2N)^n}\left|\int_{[-N,N]^n} f(\tau(x)\omega)dx\right|.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $T \to \infty$, este termo converge para 0.

$\square$

Corolário 1.2. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ uma função estacionária no sentido contínuo. Então, para $\mathbb{P} -$ q.t.p $\omega \in \Omega$, a função $f(\cdot,\omega)$ possui valor médio, $M(f(\cdot,\omega))$, isto é, para $\mathbb{P} -$ q.t.p $\omega \in \Omega$*

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x,\tau(y)\omega)dy \xrightarrow{r\to\infty} \overline{f}(\omega) = M\left(f(\cdot,\omega)\right).$$

Além disso, o valor médio $M\left(f(\cdot,\omega)\right)$ como uma função de $\omega \in \Omega$ é invariante e

$$\mathbb{E}\left[f(0,\cdot)\right] = \int_\Omega M\left(f(\cdot,\omega)\right)d\mathbb{P}(\omega).$$

Em particular, se o sistema dinâmico τ é ergódico, então

$$M(f(\cdot,\omega)) = \mathbb{E}\left[f(0,\cdot)\right],$$

para $\mathbb{P}$-q.t.p. $\omega \in \Omega$ e vale que

$$f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon},\omega\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}[f(0,\cdot)] \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

para q.t.p. $\omega \in \Omega$.

Demonstração. Seja $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \times \Omega)$. Defina $F(\omega) := f(0,\omega)$. Então $F \in L^1(\Omega)$ e pela estacionaridade de f segue que $f(x,\omega) = F(\tau(x)\omega)$. Aplicando o Teorema de Brikhoff para F, segue a conclusão. $\square$

1.2 Deformação Estocástica

Definição 1.10. *Uma transformação $\Phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(y,\omega) \mapsto z = \Phi(y,\omega)$, é chamada de deformação estocástica quando satisfaz:*

i) Para $\mathbb{P}-$q.t.p $\omega \in \Omega$, $\Phi(\cdot,\omega)$ é um difeomorfismo bi–Lipschitz .

ii) Existe $\nu > 0$, tal que

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\omega\in\Omega,\, y\in\mathbb{R}^n} \big(\det\big(\nabla\Phi\,(y,\omega)\big)\,\big) \geqslant \nu.$$

iii) Existe $M > 0$, tal que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega,\, y\in\mathbb{R}^n} \left(\left|\nabla\Phi\,(y,\omega)\right|\right) \leqslant M < \infty.$$

iv) $\nabla\Phi(y,\omega)$ *é estacionário no sentido contínuo.*

A função identidade, $\Phi(\cdot,\omega) = Id$, é um exemplo de deformação estocástica. Para um exemplo menos trivial, seguindo a discussão do capítulo 2, construimos um exemplo de deformação estocástica $\Phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo todas as condições da definição 1.10. Sejam $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)_{i=1}^n$ um espaço de probabilidade e $f_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $0 < c_0 \leq f_i(\omega) \leq c_1$ para quase todo $\omega \in \Omega_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Seja $T_i : \mathbb{R} \times \Omega_i \to \Omega_i$ um sistema dinâmico unidimensional tal que a função $f_i\left(T_i(\cdot)\omega\right)$ é contínua. Defina

$$\Phi_i(\lambda,\omega) := \operatorname{sgn}(\lambda) \int_{\min\{\lambda,0\}}^{\max\{\lambda,0\}} f_i\left(T_i(s)\omega\right)\, ds.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\Phi_i(x+h,\omega) &\geq \operatorname{sgn}(x) \int_{\min\{x+h,h\}}^{\max\{x+h,h\}} f_i(T_i(s)\omega)\, ds + \int_0^h f_i(T_i(s)\omega)\, ds \\
&= \operatorname{sgn}(x) \int_{\min\{x,0\}}^{\max\{x,0\}} f_i(T_i(s+h)\omega)\, ds + \int_0^h f_i(T_i(s)\omega)\, ds \\
&= \operatorname{sgn}(x) \int_{\min\{x,0\}}^{\max\{x,0\}} f_i(T_i(s)T_i(h)\omega)\, ds + \int_0^h f_i(T_i(s)\omega)\, ds \\
&= \Phi_i(x, T_i(h)\omega) + \int_0^h f_i(T_i(s)\omega)\, ds \\
&\geq \Phi_i\big(x, T_i(h)\omega\big) + h\, c_0,
\end{aligned}$$

para todo $h > 0$ e para quase todo $\omega \in \Omega_i$. Portanto, $\Phi_i : \mathbb{R} \times \Omega_i \to \mathbb{R}$ não é uma função estacionária e verifica todas as condições da definição 1.10. Finalmente, defina o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde $\Omega := \otimes_{i=1}^n \Omega_i$, $\mathcal{F} := \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ e $\mathbb{P} := \otimes_{i=1}^n \mathbb{P}_i$, e o seguinte sistema dinâmico n-dimensional $T : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \Omega$

$$T(x,\omega) := \big(T_1(x_1,\omega_1), \ldots, T_n(x_n,\omega_n)\big),$$

onde denotamos $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Assim, a função $\Phi(x,\omega) = (\Phi_1(x_1,\omega_1), \ldots, \Phi_n(x_n,\omega_n))$ cumpre as condições da definição 1.10.

O seguinte lema é uma consequência direta do Teorema de Birkhoff.

Lema 1.2. *Se* $\Phi : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *é uma deformação estocástica, então*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) = \mathbb{E}\left[\nabla\Phi(0,\cdot)\right] x, \quad \mathbb{P}\!-\!q.t.p.\ \omega \in \Omega,$$

localmente uniforme em $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. 1. Primeiro, para cada $\varepsilon > 0$ defina $\Phi_\varepsilon(x,\omega) := \varepsilon\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right) - \mathbb{E}\left[\nabla\Phi(0,\cdot)\right] x$ e note que a família $\left\{\nabla\Phi_\varepsilon(\cdot,\omega)\right\}_{\varepsilon>0}$ é uniformemente limitada em $\left[L^\infty(\mathbb{R}^n)\right]^{n^2}$, para cada $\omega \in \Omega$. Portanto, a menos de uma subsequência (podendo depender de ω), pelo Teorema de Arzela-Ascoli, existe $\Psi(\cdot,\omega) \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Phi_\varepsilon(\cdot,\omega) \to \Psi(\cdot,\omega)$ quando $\varepsilon \to 0$ em $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)^n$.

2. Devido ao Teorema de Birkhoff, $\nabla\Psi(\cdot,\omega) = 0$ sobre $\mathbb{R}^n$ no sentido das distribuições. De fato, para cada função teste $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}\langle\nabla\Psi(\cdot,\omega),\varphi\rangle &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_\varepsilon(x,\omega)\ \nabla\varphi(x)\ dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\nabla\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right) - \mathbb{E}\left[\nabla\Phi(0,\cdot)\right]\right)\ \varphi(x)\ dx = 0.\end{aligned}$$

Então $\Psi(\cdot,\omega) = \Psi(\omega)$, em particular para $x = 0$. Tendo em vista que $\Phi_\varepsilon(0,\omega) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, temos que $\Psi(\omega) \equiv 0$. Portanto, a sequência toda $\{\Phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge para 0 quando $\varepsilon \to 0$. Então a prova do lema segue. □

Abaixo, notamos que o Teorema de Birkhoff acontece para pertubações de funções estacionárias por deformações estocásticas.

Lema 1.3. *Sejam Φ uma deformação estocástica e $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^1(\Omega))$ uma variável aleatória estacionária no sentido contínuo. Então, para quase todo $\omega \in \Omega$, a função $f\left(\Phi^{-1}(\cdot,\omega),\omega\right)$ possui um valor médio no sentido de* (1.6) *e*

$$⨍_{\mathbb{R}^n} f\left(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega\right)\ dz = \frac{\mathbb{E}\left[f(0,\cdot)\det\left(\nabla\Phi(0,\cdot)\right)\right]}{\det\left(\mathbb{E}\left[\nabla\Phi(0,\cdot)\right]\right)} \quad \textit{para}\, \mathbb{P}\textit{-q.t.p.}\, \omega\in\Omega.$$

Demonstração. 1. Temos que mostrar que, para q.t.p. $\omega \in \Omega$, a sequência

$$\left\{f\left(\Phi^{-1}(\cdot/\varepsilon,\omega),\omega\right)\right\}_{\varepsilon>0}$$

converge fraco estrela em $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para uma constante:

$$\det\left(\mathbb{E}\left[\nabla\Phi(0,\cdot)\right]\right)^{-1}\,\mathbb{E}\left[f(0,\cdot)\det\left(\nabla\Phi(0,\cdot)\right)\right].$$

2. Seja $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ uma função com suporte compacto. Fazendo mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\varphi(x)\,dx \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{y}{\varepsilon},\omega\right)\varphi\left(\varepsilon\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon},\omega\right)\right)\det\left(\nabla\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon},\omega\right)\right)\ dy. \qquad (1.7)\end{aligned}$$

Defina $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ como o operador linear dado por $S(y):=\mathbb{E}\left[\nabla\Phi(0,\cdot)\right]y$. Dado $\delta>0$, pela lema 1.2 temos que $\|\varepsilon\,\Phi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon},\omega\right)-S(\cdot)\|_{L^\infty_{\mathrm{loc}}}<\delta$ para ε suficientemente pequeno e para q.t.p. $\omega\in\Omega$. Portanto

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\varphi\left(\varepsilon\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon},\omega\right)\right)-\varphi(S(y))\right|\,dy\\
&\qquad=\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\varphi\left(S(y)+\varepsilon\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon},\omega\right)-S(y)\right)-\varphi(S(y))\right|\,dy\\
&\qquad\leq\sup_{|h|<\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\varphi\left(S(y)+h\right)-\varphi(S(y))\right|dy\xrightarrow{\delta\to 0}0.
\end{aligned}\tag{1.8}$$

Combinando (1.7)-(1.8) com o fato de que

$$f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon},\omega\right)\,\det\left(\nabla\Phi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon},\omega\right)\right)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[f(0,\cdot)\det\left(\nabla\Phi(0,\cdot)\right)\right]$$

fraco estrela em $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para q.t.p. $\omega\in\Omega$, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}f\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\varphi(x)\,dx\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\left[f(0,\cdot)\det\left(\nabla\Phi(0,\cdot)\right)\right]\,\varphi(S(y))\,dy\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{E}\left[f(0,\cdot)\det\left(\nabla\Phi(0,\cdot)\right)\right]\,\det\left(\mathbb{E}\left[\nabla\Phi(0,\cdot)\right]\right)^{-1}\varphi(x)\,dx,
\end{aligned}$$

que prova o lema já que φ é arbitrária.

□

O seguinte lema mostra como o gradiente de uma deformação estocástica carrega a propriedade de estacionaridade para o próprio difeomorfismo. Esta é uma propriedade importante que será usada muito frequentemente aqui e aparece pela primeira vez nesta tese.

Lema 1.4. *Seja Φ uma deformação estocástica. Então, para cada $z,k\in\mathbb{R}^n$, e $\mathbb{P}$-q.t.p. $\omega\in\Omega$,*

$$\begin{aligned}
&\Phi^{-1}(z,\omega)-\Phi^{-1}(k,\omega)\\
&\qquad=\Phi^{-1}\big(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)+z-k,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big).
\end{aligned}\tag{1.9}$$

Demonstração. 1. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\Phi(\cdot,\omega)$ é um difeomorfismo de classe C^1, para $\mathbb{P}$- q.t.p. $\omega\in\Omega$. Então, aplicando o

Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$
\begin{aligned}
\Phi\Big(\Phi^{-1}(z,\omega)-\Phi^{-1}(k,\omega),\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big)&-\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)\\
&=\int_0^1\frac{d}{ds}\Phi\Big(s\big(\Phi^{-1}(z,\omega)-\Phi^{-1}(k,\omega)\big),\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big)\,ds\\
&=\int_0^1\nabla\Phi\Big(s\big(\Phi^{-1}(z,\omega)-\Phi^{-1}(k,\omega)\big),\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big)\,ds\\
&\qquad\big(\Phi^{-1}(z,\omega)-\Phi^{-1}(k,\omega)\big)\\
&=\int_0^1\nabla\Phi\Big(s\big(\Phi^{-1}(z,\omega)-\Phi^{-1}(k,\omega)\big)+\Phi^{-1}(k,\omega),\omega\Big)\,ds\\
&\qquad\big(\Phi^{-1}(z,\omega)-\Phi^{-1}(k,\omega)\big),
\end{aligned}
$$

onde usamos que $\nabla\Phi$ é estacionária. Portanto, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Phi\Big(\Phi^{-1}(z,\omega)-\Phi^{-1}(k,\omega),\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big)&-\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)\\
&=\int_0^1\frac{d}{ds}\Phi\Big(s\big(\Phi^{-1}(z,\omega)-\Phi^{-1}(k,\omega)\big)+\Phi^{-1}(k,\omega),\omega\Big)\,ds\\
&=\Phi(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega)-\Phi(\Phi^{-1}(k,\omega),\omega)=z-k.
\end{aligned}
$$

□

Capítulo 2

Aspectos Estocásticos do Fluxo

Neste capítulo, estamos interessados em estudar ps aspectos estocásticos do fluxo gerado pelo sistema Hamiltoniano associado a equação (0.1). Daqui em diante, assumimos que o coeficiente $\mathbf{c}$, presente na equação (0.1), satisfaz as seguintes condições:

- $\mathbf{c}(y,\omega) = -\Big([\nabla_y \Phi]^{-1} \nabla_y U\Big)(y,\omega)$ com $(y,\omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$.
- A função potencial $U(y,\omega) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \Omega) \cap W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; L^\infty(\Omega))$ e satisfaz
$$0 \leq U(y,\omega) \leq U_{\max} = \operatorname{ess\,sup} U.$$
- A função potencial $U(y,\omega)$ é uma variável aleatória estacionária no sentido contínuo.

Seja $\mathbf{X}_s(z,\xi,\omega) = \Big(\chi^1_s(z,\xi,\omega), \chi^2_s(z,\xi,\omega)\Big)$ a única solução da seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{X}_s}{ds}(z,\xi,\omega) = -\mathbf{v}(\mathbf{X}_s(z,\xi,\omega),\omega), \quad \text{for } s \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{X}_0(z,\xi,\omega) = (z,\xi), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde a função vetoral $\mathbf{v}$, chamada drift, é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(z,\xi,\omega) :=& \Big(\xi, -\nabla_z U(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega)\Big) \\ =& \Big(\xi, \mathbf{c}(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega)\Big). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Temos a seguinte

Proposição 2.1. *Seja* $\mathbf{X}_s(z,\xi,\omega)$ *a solução de* (2.1). *Então,* $\mathbf{X}_s$ *satisfaz:*
i) Para cada $t,s\in\mathbb{R}$, $\forall\,(z,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$, *e* $\mathbb{P}-$*q.t.p.* $\omega\in\Omega$

$$\mathbf{X}_s(\mathbf{X}_t(z,\xi,\omega),\omega)=\mathbf{X}_{s+t}(z,\xi,\omega)\quad (\textit{propriedade de grupo}). \tag{2.3}$$

ii) Para cada $(z,k,\xi)\in\mathbb{R}^{3n}$, *e* $\mathbb{P}-$*q.t.p.* $\omega\in\Omega$, *o flow* $\mathbf{X}_s$ *satisfaz a seguinte condição de pseudo-estacionaridade:*

$$\begin{cases} \chi_s^1(z+k,\xi,\omega)=\chi_s^1(z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega) \\ \qquad\qquad\qquad -\,\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)+k, \\ \chi_s^2(z+k,\xi,\omega)=\chi_s^2(z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega). \end{cases} \tag{2.4}$$

Demonstração. 1. Primeiro, a prova da propriedade de grupo (i) é padrão.

2. Vamos mostrar (ii). Para começar, definimos para qualquer $k\in\mathbb{R}^n$ fixado

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_s(z,\xi,\omega):=&\mathbf{X}_s(z+k,\xi,\omega) \\ \mathbf{W}_s(z,\xi,\omega):=&\Big(W_s^1(z,\xi,\omega),W_s^2(z,\xi,\omega)\Big) \\ =&\Big(\chi_s^1\big(z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big) \\ &-\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)+k, \\ &\chi_s^2\big(z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big)\Big). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Portanto, precisamos mostrar que $\mathbf{V}_s(z,\xi,\omega)=\mathbf{W}_s(z,\xi,\omega)$, $(\forall s\in\mathbb{R})$.

Afirmação: As funções $\mathbb{R}\ni s\mapsto\mathbf{V}_s(z,\xi,\omega)$, e $\mathbb{R}\ni s\mapsto\mathbf{W}_s(z,\xi,\omega)$ são soluções da equação (2.1), com $z+k$ ao invés de z.

Prova da Afirmação: De fato, primeiro observamos que

$$\mathbf{V}_0(z,\xi,\omega)=(z+k,\xi)=\mathbf{W}_0(z,\xi,\omega)$$

e além disso, temos claramente que

$$\frac{d\mathbf{V}_s}{ds}(z,\xi,\omega)=-\mathbf{v}(\mathbf{V}_s(z,\xi,\omega),\omega),\ \text{para } s\in\mathbb{R}.$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{W}_s}{ds}(z,\xi,\omega) &= \dot{\mathbf{X}}_s\big(z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big)\\
&= -\mathbf{v}\Big(\mathbf{X}_s\big(z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big),\\
&\qquad\qquad \tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big)\\
&= -\mathbf{v}\Big(\chi_s^1\big(z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big),\\
&\qquad \chi_s^2\big(z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega,\xi,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big),\\
&\qquad\qquad \tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big) \qquad (2.6)\\
&= -\mathbf{v}\Big(\chi_s^1\big(z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big),\\
&\qquad \chi_s^2\big(z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega,\xi,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big),\\
&\qquad\qquad \tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big)\\
&= -\mathbf{v}\Big(W_s^1\big(z,\xi,\omega)+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)-k,\\
&\qquad\qquad W_s^2\big(z,\xi,\omega),\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big).
\end{aligned}
$$

Agora, usando a definição (2.2), a estacionaridade da função $\mathbf{c}$ na segunda igualdade e o Lema 1.4 na terceira, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}\Big(W_s^1\big(z,\xi,\omega)+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)-k,W_s^2\big(z,\xi,\omega),\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big)\\
&\quad= \Big(W_s^2\big(z,\xi,\omega),\mathbf{c}\Big(\Phi^{-1}\big(W_s^1(z,\xi,\omega)+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)-k,\\
&\qquad\qquad \tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big),\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big)\Big)\\
&\quad= \Big(W_s^2\big(z,\xi,\omega),\mathbf{c}\Big(\Phi^{-1}\big(W_s^1(z,\xi,\omega)+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)-k,\\
&\qquad\qquad \tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big)+\Phi^{-1}(k,\omega),\omega\Big)\Big)\\
&\quad= \Big(W_s^2\big(z,\xi,\omega),\mathbf{c}\Big(\Phi^{-1}\big(W_s^1(z,\xi,\omega),\omega\big),\omega\Big)\Big)\\
&\quad= \mathbf{v}\Big(W_s^1\big(z,\xi,\omega),W_s^2\big(z,\xi,\omega),\omega\Big),
\end{aligned}
$$

Portanto, segue que

$$\frac{d\mathbf{W}_s}{ds}(z,\xi,\omega) = -\mathbf{v}(\mathbf{W}_s(z,\xi,\omega),\omega), \quad \text{for } s \in \mathbb{R},$$

e a afirmação é provada.

Finalmente, da unicidade de solução para (2.1), concluímos que

$$\mathbf{V}_s(z,\xi,\omega) = \mathbf{W}_s(z,\xi,\omega), \quad \text{for each } s \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Antes de prosseguir, vamos destacar algumas consequências importantes do Lema 2.1. Na configuração periódica, R Alexandrer observou em [2] que o Lema anterior nos permite ver a primeira componente do fluxo $\{\mathbf{X}_s(z,\xi)\}_{s\in\mathbb{R}}$ como um sistema dinâmico que age no toro $n-$dimensional $[0,1)^n$ para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$. Já que a equação (0.1) é do tipo Liouville , na configuração periódica, é um pouco natural considerar o fluxo todo $\{\mathbf{X}_s(z,\xi)\}_{s\in\mathbb{R}}$ como um semi-grupo de transformações agindo em $(z,\xi) \in [0,1)^n \times \mathbb{R}^n$. Consequentemente, é bem conhecido que a medida de Lebesgue é invariante para este semi-grupo de acordo com o Teorema de Liuville. Já que estamos interessados em espaços de medida finita, isto é, os conjuntos de $[0,1)^n \times \mathbb{R}^n$ do tipo $\{(z,\xi) \in [0,1)^n \times \mathbb{R}^n;\, \mathcal{H}(z,\xi) \leq c\}$ com $(c>0)$ e $\mathcal{H}(z,\xi) = \frac{|\xi|^2}{2} + U(z)$, podemos mudar a medida de Lebesgue pela família de medidas $d\mu_c(z,\xi) = 1_{\{\mathcal{H}\leq c\}}\, dz d\xi$ para $c>0$ e concluir que o semi-grupo $\{\mathbf{X}_s(z,\xi)\}_{s\in\mathbb{R}}$ é um sistema dinâmico sobre o espaço $\big([0,1)^n \times \mathbb{R}^n, \mu_c\big)$. Na configuração ergódica estacionária, onde temos $\Phi(z,\omega) = z$, as relações em (2.4) ficam

$$\begin{cases} \chi_s^1(z+k,\xi,\omega) = \chi_s^1(z,\xi,\tau(k)\omega) + k, \\ \chi_s^2(z+k,\xi,\omega) = \chi_s^2(z,\xi,\tau(k)\omega). \end{cases}$$

Isso permitiu que a Dalibard, em [9], generalizasse o caso periódico anterior introduzindo um novo sistema dinâmico $T_t : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n \times \Omega$ definido por

$$T_s(\xi,\omega) = \big(\chi_s^2(0,\xi,\omega), \tau(\chi_s^1(0,\xi,\omega))\omega\big)$$

e a respectiva medida invariante

$$d\mu_c(\xi,\omega) = 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi,\omega)\, d\xi d\mathbb{P}(\omega),$$

onde

$$\mathbf{H}(\xi,\omega) = \frac{|\xi|^2}{2} + U(0,\omega). \tag{2.7}$$

Nosso objetivo neste capítulo é estender a construção da Dalibard usando a deformação estocástica. A não linearidade presente na deformação Φ faz esta extensão ser altamente não trivial como veremos abaixo.

Defina $K := \mathbb{R}^n \times \Omega$ e seja $\mathbf{H} : K \to \mathbb{R}$ o Hamiltoniano dado por (2.7). Para cada $c > 0$, definimos a medida finita μ_c em K por

$$d\mu_c(\xi, \omega) := 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi, \omega)\ d\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega), \tag{2.8}$$

onde $d\mathbb{P}_\Phi(\omega) := \det\left(\nabla\Phi(0, \omega)\right)\ d\mathbb{P}(\omega)$.

Agora, vamos considerar a seguinte transformação $T : \mathbb{R} \times K \to K$, dada por

$$T(s,(\xi,\omega)) = \Big(\chi_s^2(\Phi(0,\omega),\xi,\omega), \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega)\big)\omega\Big), \tag{2.9}$$

where $\mathbf{X}_s(\Phi(0, \omega), \xi, \omega)$ é a única solução de (2.1) com $z = \Phi(0, \omega)$. Então, temos o seguinte

Teorema 2.1. *A transformação T definida por* (2.9) *é um sistema dinâmico sobre o espaço de medida* (K, μ_c).

Demonstração. 1. Primeiro, vamos mostrar a propriedade de grupo. É claro que $T(0, \cdot) = I_K$. Agora, vamos mostrar que, para cada $t, s \in \mathbb{R}$,

$$T(t, T(s, \cdot)) = T(t + s, \cdot).$$

Para começar, seja (ξ, ω) um ponto qualquer fixado em K. Portanto, queremos mostrar que, para cada $(\xi, \omega) \in K$, e $s, t \in \mathbb{R}$

$$T(t)(T(s)(\xi, \omega)) = T(t + s)(\xi, \omega).$$

De (2.9), segue que

$$\begin{aligned} T(t)(T(s)(\xi,\omega)) &= T(t)(\xi_0,\omega_0) \\ &= \Big(\chi_t^2(\Phi(0,\omega_0),\xi_0,\omega_0), \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_t^1(\Phi(0,\omega_0),\xi_0,\omega_0),\omega_0)\big)\omega_0\Big), \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde $(\xi_0, \omega_0) = \Big(\chi_s^2(\Phi(0,\omega),\xi,\omega), \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega)\big)\omega\Big)$.

Então, primeiro observamos que

$$\begin{aligned} \chi_t^2(\Phi(0,\omega_0),\xi_0,\omega_0) &= \chi_t^2\Big(\Phi\big(0,\tau(\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega))\omega\big), \chi_s^2(\Phi(0,\omega),\xi,\omega), \\ &\qquad \tau(\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega))\omega\Big) \\ &= \chi_t^2\Big(\Phi\big(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\big), \chi_s^2(\Phi(0,\omega),\xi,\omega), \\ &\qquad \tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega\Big), \end{aligned}$$

com a óbvia notação para k. Então, aplicando o item (ii) da Proposition 2.1 na segunda igualdade e o item (i) na terceira igualdade, temos

$$\begin{aligned}\chi_t^2(\Phi(0,\omega_0),\xi_0,\omega_0) &= \chi_t^2(k,\chi_s^2(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega)\\ &= \chi_t^2(\chi_s^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\chi_s^2(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega)\\ &= \chi_{t+s}^2(\Phi(0,\omega),\xi,\omega).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Para estabelecer a propriedade de grupo, falta estudar a componente

$$\tau\big(\Phi^{-1}(\chi_t^1(\Phi(0,\omega_0),\xi_0,\omega_0),\omega_0)\big)\omega_0 =: \omega'.$$

Assim, já que τ é um sistema dinâmico, segue que

$$\begin{aligned}\omega' &= \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_t^1(\Phi(0,\omega_0),\xi_0,\omega_0),\omega_0)\big)\tau\big(\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega)\big)\omega\\ &= \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_t^1(\Phi(0,\omega_0),\xi_0,\omega_0),\omega_0)+\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega)\big)\omega.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Agora, pela definição anterior de k, podemos escrever

$$\begin{aligned}\chi_t^1(\Phi(0,\omega_0),\xi_0,\omega_0) &= \chi_t^1(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega),\xi_0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)\\ &= \chi_t^1(k,\xi_0,\omega)+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)-k,\end{aligned}$$

onde usamos o item (ii) da Proposição 2.1. Então, da equação anterior e aplicando o Lema 1.4, obtemos

$$\begin{aligned}&\Phi^{-1}(\chi_t^1(\Phi(0,\omega_0),\xi_0,\omega_0),\omega_0)\\ &\qquad= \Phi^{-1}\big(\chi_t^1(k,\xi_0,\omega)+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega))\omega)-k,\tau(\Phi^{-1}(k,\omega)\omega\big)\\ &\qquad= \Phi^{-1}(\chi_t^1(k,\xi_0,\omega),\omega)-\Phi^{-1}(k,\omega).\end{aligned} \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13), temos

$$\begin{aligned}\omega' &= \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_t^1(\Phi(0,\omega_0),\xi_0,\omega_0),\omega_0)+\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega)\big)\omega\\ &= \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_t^1(k,\xi_0,\omega),\omega)\big)\omega\\ &= \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_t^1(\chi_s^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),(\chi_s^2(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega),\omega)\big)\omega\\ &= \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_{t+s}^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega)\big)\omega,\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde usamos o item (i) da Proposição 2.1. Consequentemente, de (2.10) com (2.11) e (2.14), temos

$$\begin{aligned}T(t)(T(s)(\xi,\omega)) &= \Big(\chi_{t+s}^2(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\tau\big(\Phi^{-1}(\chi_{t+s}^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega)\big)\omega\Big)\\ &= T(t+s)(\xi,\omega),\end{aligned}$$

provando assim a propriedade de grupo.

2. O objetivo desta etapa é provar que a transformação $T(t)$ preserva a medida μ_c sobre K. Para fazer isso, um dos ingredientes chaves é o fato de que a função $\Omega \ni \omega \mapsto \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega$ preserva a medida $\mathbb{P}_\Phi$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Isto não é tão óbvio porque o que sabemos é que, pela definição de sistema de dinâmico, a função $\Omega \ni \omega \mapsto \tau(k)\omega$ preserva a medida de probabilidade $\mathbb{P}$ para cada $k \in \mathbb{R}^n$. Então, está longe de ser evidente que esta invariância é mantida se mudarmos k por $\Phi^{-1}(z,\omega)$. Este resultado é uma combinação do Lema 1.4 com o Teorema Ergódico de Birkhoff. Mais precisamente, pelo Lema 1.4, temos para todo $z, y \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{P}-$q.t.p. $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} &\Phi^{-1}\left(z+y-\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(y,\omega))\omega),\omega\right) \\ &\qquad = \Phi^{-1}(y,\omega)+\Phi^{-1}\left(z,\tau(\Phi^{-1}(y,\omega))\omega\right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora, tomando $f \in L^1(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det\left(\mathbb{E}\left[\nabla\Phi(0,\cdot)\right]\right)} \int_\Omega f(\omega)\, d\mathbb{P}_\Phi(\omega) &= ⨍_{\mathbb{R}^n} f\left(\tau(\Phi^{-1}(y,\omega))\omega\right)\, dy \\ &= ⨍_{\mathbb{R}^n} f\Big(\tau\left(\Phi^{-1}\left(y+z-\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(y,\omega))\omega),\omega\right)\right)\omega\Big)\, dy \\ &= ⨍_{\mathbb{R}^n} f\Big(\tau\left(\Phi^{-1}(y,\omega)+\Phi^{-1}\left(z,\tau(\Phi^{-1}(y,\omega))\omega\right)\right)\omega\Big)\, dy \\ &= ⨍_{\mathbb{R}^n} f\Big(\tau\left(\Phi^{-1}\left(z,\tau(\Phi^{-1}(y,\omega))\omega\right)\right)\tau(\Phi^{-1}(y,\omega))\omega\Big)\, dy \\ &= \frac{1}{\det\left(\mathbb{E}\left[\nabla\Phi(0,\cdot)\right]\right)} \int_\Omega f\Big(\tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\Big)\, d\mathbb{P}_\Phi(\omega), \end{aligned}$$

onde usamos o Lema 3 na primeira igualdade, a invariância do valor médio com respeito à translações na segunda, a equação (2.15) na terceira e novamente o Lema 3 na quarta igualdade, o que prova a invariância da função $\Omega \ni \omega \mapsto \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega$ com relação a medida $\mathbb{P}_\Phi$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$.

Afirmação: Para cada $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \Omega; \mu_c)$

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F\big(T(s)(\xi,\omega)\big)d\mu_c(\xi,\omega) = \iint_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F(\xi,\omega)d\mu_c(\xi,\omega) \quad (\forall s \in \mathbb{R}).$$

□

Prova da Afirmação: De fato, seja $\rho(z)$ um mollifier padrão. Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F\Big(T(s)(\xi,\omega)\Big)d\mu_c(\xi,\omega)\\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\Omega} F\Big(T(s)(\xi,\omega)\Big)\rho(z)d\mu_c(\xi,\omega)dz\\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\Omega} F\Big(\chi_s^2(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\\
&\qquad \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega)\big)\omega\Big)\rho(z)\,1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi,\omega)\,d\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega)dz.
\end{aligned}$$

Aplicando a invariância da função $\Omega\ni\omega\mapsto\tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega$ com respeito a medida $\mathbb{P}_\Phi$, temos

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F\Big(T(s)(\xi,\omega)\Big)d\mu_c(\xi,\omega)\\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\Omega} F\Big(\chi_s^2(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega),\\
&\qquad \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega\big),\\
&\qquad \tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega)\big)\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega\Big)\rho(z)\\
&\qquad\qquad 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega)\ d\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega)dz\\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\Omega} F\Big(\chi_s^2(z,\xi,\omega),\\
&\qquad \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_s^1(z,\xi,\omega)-z+\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega),\\
&\qquad \tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega)\big)\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega\Big)\rho(z)\\
&\qquad\qquad 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega)\ d\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega)dz,
\end{aligned}$$

onde usamos o item (ii) da Proposição 2.1. Então, aplicando o Lema 1.4, segue que

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F\Big(T(s)(\xi,\omega)\Big)d\mu_c(\xi,\omega)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\Omega} F\Big(\chi_s^2(z,\xi,\omega), \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega) - \Phi^{-1}(z,\omega)\big)\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega\Big)$$

$$1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega)\ \rho(z)\ d\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega)dz$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\Omega} F\Big(\chi_s^2(z,\xi,\omega), \tau\big(\Phi^{-1}(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega)\big)\omega\Big)$$

$$1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega)\ \rho(z)\ d\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega)dz.$$

Agora, já que $(z,\xi)\mapsto \mathbf{X}_s(z,\xi,\omega)$ é um difeomorfismo para cada $s\in\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}-$qt.p $\omega\in\Omega$, fazendo uma mudança de variáveis (relembre que $\mathrm{div}\mathbf{v}=0$), temos

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F\Big(T(s)(\xi,\omega)\Big)d\mu_c(\xi,\omega)$$

$$= \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^{2n}} F\Big(v,\tau\big(\Phi^{-1}(u,\omega)\big)\omega\Big)\ \rho(\chi_{-s}^1(u,v,\omega))$$

$$1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\chi_{-s}^2(u,v,\omega),\tau(\Phi^{-1}(\chi_{-s}^1(u,v,\omega),\omega))\omega)\ dudv\ d\mathbb{P}_\Phi(\omega).$$

Já que a função $\mathbb{R}\ni s\mapsto \mathbf{H}(\chi_{-s}^2(u,v,\omega),\tau(\Phi^{-1}(\chi_{-s}^1(u,v,\omega),\omega))\omega)$ é constante, segue que

$$1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\chi_{-s}^2(u,v,\omega),\tau(\Phi^{-1}(\chi_{-s}^1(u,v,\omega),\omega))\omega)$$

$$= 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(v,\tau(\Phi^{-1}(u,\omega))\omega),$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F\Big(T(s)(\xi,\omega)\Big) d\mu_c(\xi,\omega) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\Omega} \rho(\chi^1_{-s}(u,v,\omega))\ F\Big(v,\tau\big(\Phi^{-1}(u,\omega)\big)\omega\Big) \\
&\qquad\qquad 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(v,\tau(\Phi^{-1}(u,\omega))\omega)\, dudv\ d\mathbb{P}_\Phi(\omega) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\Omega} \rho(\chi^1_{-s}(u,v,\omega)) \\
&\qquad\qquad F\Big(v,\tau\big(\Phi^{-1}(u,\omega)\big)\omega\Big)\ 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(v,\tau(\Phi^{-1}(u,\omega))\omega)\, dudv\ d\mathbb{P}_\Phi(\omega) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\Omega} \rho\Big(\chi^1_{-s}\big(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(u,\omega))\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(u,\omega))\omega\big) \\
&\qquad\qquad -\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(u,\omega))\omega)+u\Big) \\
&\qquad\qquad F\Big(v,\tau\big(\Phi^{-1}(u,\omega)\big)\omega\Big)\ 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(v,\tau(\Phi^{-1}(u,\omega))\omega)\, dudv\ d\mathbb{P}_\Phi(\omega),
\end{aligned}$$

onde aplicamos o item (ii) da Proposição 2.1.

Finalmente, da invariância da medida $\mathbb{P}_\Phi$ com relação a função $\tau(\Phi^{-1}(u,\cdot))\cdot$, e depois aplicando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F\Big(T(s)(\xi,\omega)\Big) d\mu_c(\xi,\omega) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\Omega} \rho\Big(\chi^1_{-s}\big(\Phi(0,\omega),\xi,\omega\big)-\Phi(0,\omega)+u\Big) \\
&\qquad\qquad F\Big(v,\omega\Big)\ 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(v,\omega)\, dudv\ d\mathbb{P}_\Phi(\omega) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F\Big(v,\omega\Big)\ 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(v,\omega) \\
&\qquad\qquad \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \rho\big(\chi^1_{-s}\big(\Phi(0,\omega),\xi,\omega\big)-\Phi(0,\omega)+u\big)\ du\Big)\ dvd\mathbb{P}_\Phi(\omega) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F(v,\omega)\ d\mu_c(v,\omega),
\end{aligned}$$

e assim segue a afirmação.

Então, temos uma propriedade importante, que é dado pelo seguinte Corolário

Corolário 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^{2n} \times \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, tal que $f(y, \xi, \omega)$ é estacionária em y. Então, para cada $s \in \mathbb{R}$*

$$f(\Phi^{-1}(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega), \chi_s^2(z,\xi,\omega),\omega) = f(0, T_s(\xi, \tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega)), \tag{2.16}$$

onde $T_s \equiv T(s)$ é o sistema dinâmico dado por (2.9).

Demonstração. 1. Primeiro, já que f é estacionária na primeira componente, temos

$$\begin{aligned} &f(\Phi^{-1}(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega), \chi_s^2(z,\xi,\omega),\omega) \\ &\qquad = f(0, \chi_s^2(z,\xi,\omega), \tau(\Phi^{-1}(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega))\omega). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Além disso, da condição de pseudo-estacionaridade do flow $\mathbf{X}_t$, quer dizer do item (ii) da Proposição 2.1, temos

$$\begin{cases} \chi_s^1(z,\xi,\omega) = \chi_s^1(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega) \\ \qquad\qquad - \Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega) + z, \\ \chi_s^2(z,\xi,\omega) = \chi_s^2(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega). \end{cases} \tag{2.18}$$

Portanto, de (2.17) e (2.18), temos

$$\begin{aligned} &f(\Phi^{-1}(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega), \chi_s^2(z,\xi,\omega),\omega) \\ &\quad = f(0, \chi_s^2(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega), \\ &\qquad \tau(\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega) \\ &\qquad\qquad - \Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega) + z,\omega))\omega). \end{aligned} \tag{2.19}$$

2. Agora, da condição de pseudo-stacionaridade do difeomorsfismo Φ (Lema 1.4) com $\tilde{k} = z$ e

$$\tilde{z} = \chi_s^1(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega) - \Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega) + z,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\tilde{z},\omega) &= \Phi^{-1}(\tilde{k},\omega) \\ &\quad + \Phi^{-1}\big(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(\tilde{k},\omega))\omega) + \tilde{z} - \tilde{k}, \tau(\Phi^{-1}(\tilde{k},\omega))\omega\big). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega),\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega) - \Phi(0,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)\omega) + z,\omega) \\ &\quad = \Phi^{-1}(z,\omega) + \Phi^{-1}\big(\chi_s^1(\Phi(0,\omega_0),\xi,\omega_0),\omega_0\big), \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $\omega_0 = \tau\big(\Phi^{-1}(z,\omega)\big)\omega$.

3. Finalmente, de (2.19) e (2.20), temos

$$
\begin{aligned}
f(\Phi^{-1}&(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega),\chi_s^2(z,\xi,\omega),\omega)\\
&= f(0,\chi_s^2(\Phi(0,\omega_0),\xi,\omega_0),\tau(\Phi^{-1}(z,\omega)+\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\omega_0),\xi,\omega_0))\omega)\\
&= f(0,\chi_s^2(\Phi(0,\omega_0),\xi,\omega_0),\tau(\Phi^{-1}(\chi_s^1(\Phi(0,\omega_0),\xi,\omega_0))\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega)\\
&= f(0,T_s(\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega)),
\end{aligned}
$$

o que finaliza a prova.

$\square$

Capítulo 3

Equações Assintóticas

Para cada $\varepsilon > 0$, vamos supor que a solução f^ε da equação (0.1) tem a seguinte expansão assintótica

$$f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right), \tag{3.1}$$

onde cada função $f_i(t,x,y,\xi,\omega)$ é, convenientemente, estacionária em y. Inserindo este Ansatz de duas escalas na equação (0.1), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} c\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right) \cdot \nabla_\xi f^\varepsilon \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \partial_t f_i\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \nabla_x f_i\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \cdot \xi \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} (\nabla\Phi)^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right) \nabla_y f_i\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \cdot \xi \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} c\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right) \nabla_\xi f_i\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right).
\end{aligned}$$

Igualando as potências, temos que o termo de ordem ε^{-1} é dado por

$$\begin{aligned}
&(\nabla\Phi)^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right) (\nabla_y f_0)\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \cdot \xi \\
&\quad + \mathbf{c}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right) \cdot (\nabla_\xi f_0)\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) = 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando esta equação por uma função teste do tipo $\psi(t,x)\varphi\left(\Phi^{-1}(\frac{x}{\varepsilon},\omega),\xi,\omega\right)$ e usando o Teorema Ergódico , obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \int_{\mathbb{R}_+^{2n+1}} \int_{\Omega} (\nabla\Phi)^{-1}(0,\omega)\left(\nabla_y f_0\right)(t,x,0,\xi,\omega)\cdot\xi \\
& \quad + \mathbf{c}(0,\omega)\cdot\left(\nabla_\xi f_0\right)(t,x,0,\xi,\omega)\Big\}\psi(t,x)\varphi(0,\xi,\omega)d\mathbb{P}_\Phi(\omega)dxdtd\xi.
\end{aligned}
$$

Pela invariância de $\omega \longrightarrow \tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega$ e integrando com relação a z em B_r, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \int_{\mathbb{R}_+^{2n+1}\times B_r\times\Omega} (\nabla\Phi)^{-1}\left(\Phi^{-1}(z,\omega),\omega\right)\left(\nabla_y f_0\right)\left(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right)\cdot\xi \\
& \quad + \mathbf{c}(0,\omega)\cdot\left(\nabla_\xi f_0\right)\left(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right)\Big\} \\
& \qquad \psi(t,x)\varphi(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)d\mathbb{P}_\Phi(\omega)dzdxdtd\xi,
\end{aligned}
$$

que é equivalente a

$$
\nabla_{z,\xi}\cdot\Big(f_0\left(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right)\,\mathbf{v}(z,\xi,\omega)\Big)=0 \tag{3.2}
$$

com o drift $\mathbf{v}$ dado por (2.2), onde (t,x) pode ser interpretado como parâmetros.

Então definimos o seguinte conjunto assintótico de estado estacionário

$$
\begin{aligned}
\mathbb{K} := \Big\{ & f(y,\xi,\omega)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{2n}\times\Omega)\quad \text{estacionária em } y; \\
& \text{f satisfaz (3.2) em } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \text{ q.t.p. em } \Omega\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Observamos que, se o dado inicial f^0 do problema (0.1) fosse "bem preparado", isto é, se $f^0(x,\cdot,\omega)$ satisfizesse a equação (0.1) nas variáveis oscilatórias $(z : x/\varepsilon)$ e cinéticas (ξ), então as oscilações devido à variável rápida não propagaria para a variável no tempo. De fato, isso significa que a condição inicial se comporta como uma solução estável de (0.1), e neste sentido, não haveria oscilações no tempo. Então, o Ansatz de duas escalas (3.1) seria suficiente para deduzir todas as regras do perfil microscópico pela equação.

Entretanto, como a condição inicial é não-preparada (isto é, $f^0(x,\cdot)\notin\mathbb{K}$), oscilações no tempo podem ocorrer na solução f^ε da equação (0.1), e não se cancelará quando o parâmetro ε tender a zero como é mostrado em [9], ver p. 886. Este é um fenômeno interessante, e para ver como as oscilações na variável temporal são incorporadas no perfil microscópico, devemos considerar uma expansão mais geral em duas escalas, ou seja,

$$f^{\varepsilon}(t,x,\xi,\omega)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}f_i\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right), \tag{3.4}$$

onde assumimos que cada função $f_i(t,x,s,y,\xi,\omega)$ é estacionária em y.

Substituindo esta expansão na equação (0.1), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t f^{\varepsilon}+\left(\xi,\frac{1}{\varepsilon}c\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\right)\cdot(\nabla_x f^{\varepsilon},\nabla_\xi f^{\varepsilon})\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}\partial_t f_i\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\\
&\quad+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i-1}\partial_s f_i\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\\
&\quad+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}\nabla_x f_i\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\cdot\xi\\
&\quad+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i-1}(\nabla\Phi)^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\nabla_y f_i\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\cdot\xi\\
&\quad+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i-1}c\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\cdot\nabla_\xi f_i\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right).
\end{aligned}$$

Igualando os termos de ordem ε^{-1}, temos

$$\begin{aligned}
&\partial_s f_0\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\\
&\quad+(\nabla\Phi)^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\nabla_y f_0\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\cdot\xi\\
&\quad+c\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\cdot\nabla_\xi f_0\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)=0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Igualando também os termos de ordem ε^0 obtemos:

$$\begin{aligned}\partial_t f_0\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)&+\partial_s f_1\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\\ &+\nabla_x f_0\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\cdot\xi\\ +\left(\nabla\Phi\right)^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)&\nabla_y f_1\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\cdot\xi\\ +c\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\cdot&\nabla_\xi f_1\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)=0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Não é óbvio obter a equação microscópica e macroscópica direto da forma (3.4), alguma simplificação tem que ser feita. Note que quando se assume (3.4), temos intuitivamente que

$$f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega)\approx f_0\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)$$

para ε suficientemente pequeno. Portanto, para decompor f^ε devemos decompor f_0, isto é, suponha que

$$\begin{aligned}f_0\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\xi,\omega\right)=&f\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\\ &+g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\end{aligned}\tag{3.7}$$

onde $f(t,x,\cdot)\in\mathbb{K}$ e $g(t,x,s,\cdot)\in\mathbb{K}^\perp$.

Podemos supor que a função f_1 da expansão (3.4) não oscila no tempo. Colocando (3.7) em (3.5) e usando que $f(t,x,\cdot)\in\mathbb{K}$, temos:

$$\begin{aligned}&\partial_s g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\\ &\quad+\left(\nabla\Phi\right)^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\nabla_y g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\cdot\xi\\ &\quad+c\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\cdot\nabla_\xi g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)=0,\end{aligned}\tag{3.8}$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\partial_s g\left(t,x,s,\Phi^{-1}\left(z,\omega\right),\xi,\omega\right)\\ &\qquad\nabla_{z,\xi}\left(g\left(t,x,s,\Phi^{-1}\left(z,\omega\right),\xi,\omega\right)\mathbf{v}(z,\xi,\omega)\right)=0,\end{aligned}$$

que é a equação de evolução microscópica para g.

Para obter a equação de evolução macroscópica para f, precisamos de um pouco mais de trabalho. Colocando (3.7) em (3.6), temos:

$$\begin{aligned}
\partial_t f\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) + \partial_t g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)& \\
+\nabla_x f\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\cdot\xi + \nabla_x g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\cdot\xi& \\
+(\nabla\Phi)^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\nabla_y f_1\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\cdot\xi& \\
+c\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\cdot\nabla_\xi f_1\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) = 0,&
\end{aligned} \tag{3.9}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\partial_t(f+g) + \nabla_x(f+g)\cdot\xi \\
&\qquad + \nabla_{z,\xi}\cdot\big(f_1(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\mathbf{v}(z,\xi,\omega)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Usando o mesmo procedimento da Dalibard na página 886, obtemos que a função

$$\nabla_{z,\xi}\cdot\big(f_1(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\mathbf{v}(z,\xi,\omega)\big)$$

está em $\mathbb{K}^\perp$. Portanto, usando que $f(t,x,\cdot)\in\mathbb{K}$ e $g(t,x,s,\cdot)\in\mathbb{K}^\perp$, projetando (3.9) sobre $\mathbb{K}$, temos a equação de evolução macroscópica para f:

$$\partial_t f(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega) + \nabla_x f(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\cdot\tilde{\xi}(z,\xi,\omega) = 0 \tag{3.10}$$

em $\mathbb{R}^{n+1}_+$, onde $\tilde{\xi}$ é uma campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ cujas componentes $\tilde{\xi}_i$ são as projeções de $\xi_i (i=1,..,n)$ no espaço $\mathbb{K}$.

Resumindo, a expansão de duas escalas sugere que a solução f^ε do problema (0.1) deve satisfazer o seguinte:

(i) (Comportamento Assintótico:) Existem funções estacionárias $f(t,x,\cdot)\in\mathbb{K}$ e $g(t,x,\tau,\cdot)\in\mathbb{K}^\perp$, tal que

$$\begin{aligned}
f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) \approx f&\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \\
&+g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right).
\end{aligned}$$

(ii) (Equação de Evolução Microscópica:) A função g satisfaz

$$\begin{aligned}&\partial_s g\left(t,x,s,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right)\\&\quad+\nabla_{z,\xi}\cdot\Bigg(g\left(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right)\,\mathbf{v}(z,\xi,\omega)\Bigg)=0.\end{aligned}$$

(iii) (Equação de Evolução Macroscópica:) A função f satisfaz

$$\begin{aligned}&\partial_t f\left(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right)\\&\quad+\tilde{\xi}(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\cdot\nabla_x f\left(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right)=0.\end{aligned}$$

A conexão entre o flow (2.1) e o espaço $\mathbb{K}$ é dado pelo seguinte

Proposição 3.1. *Uma função $y-$estacionária $f=f(y,\xi,\omega)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n}\times\Omega)$ pertence ao espaço $\mathbb{K}$ se, e somente se, a seguinte propriedade de invariância acontece:*

$$f\left(\Phi^{-1}\left(\chi^1_s(z,\xi,\omega),\omega\right),\chi^2_s(z,\xi,\omega),\omega\right)=f\left(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right),$$

para todo $s\in\mathbb{R}$ e para quase todo $(z,\xi,\omega)\in\mathbb{R}^{2n}\times\Omega$.

Demonstração. 1. Seja $\rho\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tal que $\rho\geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^{2n}}\rho(z,\xi)\,dz\,d\xi=1$. Para cada $0\leq j\in\mathbb{Z}$, defina

$$\rho_j(z,\xi):=j^{2n}\rho\left(jz,j\xi\right),$$

e

$$f_j(z,\xi,\omega):=\int_{\mathbb{R}^{2n}}f(y,\theta,\omega)\,\rho_j(z-y,\xi-\theta)\,dy\,d\theta.$$

É bem conhecido que $f_j(\cdot,\omega)\to f(\cdot,\omega)$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2n})$ quando $j\to\infty$ para quase todo $\omega\in\Omega$.

2. Denotando $\Psi(z,\xi,\omega):=(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)$ e $\mathbf{X}_s(z,\xi,\omega)=\Big(\chi^1_s(z,\xi,\omega),\chi^2_s(z,\xi,\omega)\Big)$,

temos que para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2n}} \Big\{ f_j \left(\Phi^{-1}\left(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega\right), \chi_s^2(z,\xi,\omega),\omega\right) \\
&\qquad\qquad -f_j\left(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right) \Big\} \varphi(z,\xi)\, dz\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Big\{ \left(f_j \circ \Psi\right)\left(\mathbf{X}_s(z,\xi,\omega),\omega\right) - \left(f_j \circ \Psi\right)(z,\xi,\omega) \Big\} \varphi(z,\xi)\, dz\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_0^s \frac{d}{dt} \left(f_j \circ \Psi\right)\left(\mathbf{X}_t(z,\xi,\omega),\omega\right)\ \varphi(z,\xi)\, dt\, dz\, d\xi \\
&= -\int_0^s \int_{\mathbb{R}^{2n}} \nabla\left(f_j \circ \Psi\right)\left(\mathbf{X}_t(z,\xi,\omega),\omega\right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{X}_t(z,\xi,\omega),\omega)\, \varphi(z,\xi)\, dz\, d\xi\, dt \\
&= -\int_0^s \int_{\mathbb{R}^{2n}} \nabla\left(f_j \circ \Psi\right)(u,v,\omega) \cdot \mathbf{v}(u,v,\omega)\, \varphi\left(\mathbf{X}_{-t}(u,v,\omega)\right)\, du\, dv\, dt \\
&= \int_0^s \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(f_j \circ \Psi\right)(u,v,\omega)\, \mathbf{v}(u,v,\omega) \cdot \nabla_{u,v}\varphi\left(\mathbf{X}_{-t}(u,v,\omega)\right)\, du\, dv\, dt,
\end{aligned}$$

onde na quarta igualdade usamos a mudança de varáveis $(u,v) = \mathbf{X}_t(z,\xi,\omega)$ que tem jacobiano 1 já que o campo vetorial $\mathbf{v}(\cdot,\omega)$ é incompressível.

Então, fazendo $j \to \infty$ na equação anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2n}} \Big\{ f \left(\Phi^{-1}\left(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega\right), \chi_s^2(z,\xi,\omega),\omega\right) \\
&\qquad\qquad -f\left(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right) \Big\} \varphi(z,\xi)\, dz\, d\xi \\
&= \int_0^s \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Big\{ f\left(\Phi^{-1}(u,\omega),\xi,\omega\right)\ \mathbf{v}(u,v,\omega) \\
&\qquad\qquad \cdot \nabla_{u,v}\varphi\left(\mathbf{X}_{-t}(u,v,\omega)\right) \Big\}\, du\, dv\, dt. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Portanto, se assumimos que $f \in \mathbb{K}$, então o lado direito de (3.11) é zero já que a função $\mathbb{R}^{2n} \ni (u,v) \mapsto \varphi\left(\mathbf{X}_{-t}(u,v,\omega)\right)$ é uma função teste. Assim, a arbitrariedade da função teste φ nos dá a propriedade da invariância. Por outro lado, se assumimos que a propriedade da invariância acontece para f, então o lado esquerdo de (3.11) é zero. Portanto, dividindo por s (o lado direito da ig), fazendo $s \to 0$, usando a mudança de variáveis novamente

$(u,v) = \mathbf{X}_t(u,v,\omega)$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Big\{ f\left(\Phi^{-1}(u,\omega),\xi,\omega\right) \, \mathbf{v}(u,v,\omega) \\
&\qquad \cdot \nabla_{u,v}\varphi\left(\mathbf{X}_{-t}(u,v,\omega)\right) \Big\} \, du\, dv\, dt \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Big\{ (f\circ\Psi)\left(\mathbf{X}_t(u,\xi,\omega),\omega\right) \, \mathbf{v}(\mathbf{X}_t(u,v,\omega),\omega) \\
&\qquad \cdot \nabla_{u,v}\varphi\left(u,v,\omega\right) \Big\} \, du\, dv\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f\left(\phi^{-1}(u,\omega),v,\omega\right) \mathbf{v}(u,v,\omega) \cdot \nabla_{u,v}\varphi\left(u,v,\omega\right) \, du\, dv,
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de diferenciação de Lebesgue-Besicovitch na última igualdade. Assim fica provado que $f \in \mathbb{K}$, o que completa a prova da proposição. □

Vamos terminar esta seção mostrando como usar o clássico Teorema de Birkhoff ergódico para definir a projeção do espaço $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2n}\times\Omega;\mu_c)$ no espaço $\mathbb{K}$.

Proposição 3.2. *Seja T um sistema dinâmico definido por* (2.9)*, e $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\times\Omega)$. Então, existe uma função $\overline{F} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\times\Omega)$, tal que:*

(i) A seguinte convergência acontece

$$\lim_{T\to\infty} \fint_0^T F\left(T_s(\xi,\omega)\right) \, ds = \overline{F}(\xi,\omega),$$

para μ_c−q.t.p. $(\xi,\omega) \in \mathbb{R}^n\times\Omega$ e todo $c>0$.

(ii) A função $\overline{F}$ é invariante com relação a T_s, isto é, para μ_c−q.t.p. $(\xi,\omega) \in \mathbb{R}^n\times\Omega$, segue que

$$\overline{F}\left(T_s(\xi,\omega)\right) = \overline{F}(\xi,\omega), \quad (\forall s \in \mathbb{R}),$$

para todo $c>0$. Além disso, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} F(\xi,\omega)\, d\mu_c(\xi,\omega) = \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} \overline{F}(\xi,\omega)\, d\mu_c(\xi,\omega),$$

para todo $c>0$.

(iii) Se $\overline{f}$ é uma função estacionária definida por $\overline{f}(y,\xi,\omega) := \overline{F}(\xi,\tau(y)\omega)$, então para todo $s \in \mathbb{R}$ e para q.t.p. $(z,\xi,\omega) \in \mathbb{R}^{2n} \times \Omega$

$$\overline{f}\left(\Phi^{-1}\left(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega\right), \chi_s^2(z,\xi,\omega),\omega\right) = \overline{f}\left(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right).$$

Em particular, a Proposition 3.1 implica que $\overline{f} \in \mathbb{K}$.

A prova dos itens (i) e (ii) é consequência do Teorema de Birkhoff e é similar ao correspondente em [9]. Por conveniência, relembramos as partes relevantes aqui.

Demonstração. 1. Primeiro, note que $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ nos diz que $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \Omega; \mu_c)$ para todo $c > 0$. Portanto, aplicando o Teorema Ergódico de Birkhoff existe $\overline{F}_c \in L^1(\mathbb{R}^n \times \Omega, \mu_c)$ tal que os itens (i) e (ii) acontecem para $\overline{F}_c$ ao invés de $\overline{F}$. Assim, para $0 < c_1 < c_2$ obtemos que $\overline{F}_{c_1}(\xi,\omega) = \overline{F}_{c_2}(\xi,\omega)$ para $\mu_{c_1}-$qt.p. $(\xi,\omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$.

2. Defina

$$A_j := \left\{(\xi,\omega) \in \operatorname{supp}\mu_j;\ \overline{F}_j(\xi,\omega) \neq \overline{F}_{j+1}(\xi,\omega)\right\}$$

e o conjunto $A := \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Note que $\mu_c(A) = 0$ para todo $c > 0$. Então, podemos definir

$$\overline{F}(\xi,\omega) = \overline{F}_j(\xi,\omega), \quad \text{se } (\xi,\omega) \in \operatorname{supp}\mu_j.$$

Da definição de $\overline{F}$, podemos ver que a convergência no item (i) acontece para todo $(\xi,\omega) \in \big(\mathbb{R}^n \times \Omega\big) - N$, onde

$$N := \left\{(\xi,\omega) \in \big(\mathbb{R}^n \times \Omega\big) - A; \text{the convergence in } (i) \text{ does not happen}\right\}$$

é tal que $\mu_c(N) = 0$ para todo $c > 0$. Isto prova (i) e (ii).

3. Do corolário 2.1, segue que

$$\begin{aligned}\overline{f}(\Phi^{-1}(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega), \chi_s^2(z,\xi,\omega),\omega) &= \overline{f}\big(0, T_s(\xi, \tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega)\big) \\ &= \overline{F}\big(T_s(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\big), \end{aligned} \tag{3.12}$$

para todo $(z,\xi,\omega) \in \mathbb{R}^{2n} \times \Omega$ e $s \in \mathbb{R}$. Além disso, o item (ii) nos diz que o conjunto

$$\mathcal{F} := \left\{(\xi,\omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega;\ \overline{F}\left(T_s(\xi,\omega)\right) = \overline{F}(\xi,\omega)\, \forall\, s \in \mathbb{R}\right\}$$

é tal que $\mu_\lambda(\mathcal{F}^c) = 0$ para todo $\lambda > 0$. Afirmamos que o conjunto

$$\Big\{ z \in \mathbb{R}^n ; \big(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\big) \in \mathcal{F} \text{ for } \mu_c\text{–a.s. } (\xi,\omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega \, \forall \, c > 0 \Big\}$$

tem medida total em $\mathbb{R}^n$. De fato, seja $\mathcal{F}^c := \big\{(\xi,\omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega ; \ (\xi,\omega) \notin \mathcal{F}\big\}$ e $1_{\mathcal{F}^c}(\cdot)$ a função característica da conjunto $\mathcal{F}^c$. Já que a função $\mathbb{R}^{2n} \times \Omega \ni (z,\xi,\omega) \mapsto 1_{\mathcal{F}^c}\big(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\big)$ é mensurável, então pelo Teorema de Fubini Theorem temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} 1_{\mathcal{F}^c}\big(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\big) \, d\mu_c(\xi,\omega) \Big\} \, dz \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} \Big\{ \int_{\Phi(\mathbb{R}^n,\omega)} 1_{\mathcal{F}^c}\big(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\big) \, dz \Big\} \, d\mu_c(\xi,\omega) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\mathcal{F}^c}(\xi, \tau(y)\omega) \det\left(\nabla\Phi(y,\omega)\right) \, dy \Big\} \, d\mu_c(\xi,\omega) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} 1_{\mathcal{F}^c}(\xi, \tau(y)\omega) \det\left(\nabla\Phi(0,\tau(y)\omega)\right) \\
&\qquad\qquad 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi,\omega) \det\left(\nabla\Phi(0,\omega)\right) \, d\mathbb{P}(\omega) d\xi \Big\} \, dz,
\end{aligned}$$

tendo usado a estacionaridade de $\nabla\Phi$. Usando a preservação da medida $\mathbb{P}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} 1_{\mathcal{F}^c}\big(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\big) \, d\mu_c(\xi,\omega) \Big\} \, dz \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} 1_{\mathcal{F}^c}(\xi,\omega) \det\left(\nabla\Phi(0,\omega)\right) 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi, \tau(-y)\omega) \\
&\qquad\qquad \det\left(\nabla\Phi(0,\tau(-y)\omega)\right) \, d\mathbb{P}(\omega) d\xi \Big\} \, dz \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} 1_{\mathcal{F}^c}(\xi,\omega) \det\left(\nabla\Phi(-y,\omega)\right) 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi, \tau(-y)\omega) \\
&\qquad\qquad \det\left(\nabla\Phi(0,\omega)\right) \, d\mathbb{P}(\omega) d\xi \Big\} \, dz.
\end{aligned}$$

Afirmamos que existe $\lambda > c$ tal que

$$1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi, \tau(-y)\omega) \leq 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,\lambda])}(\xi,\omega)$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. De fato, para cada y, denote $J_y(\xi,\omega) = (\xi, \tau(-y)\omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(\xi,\tau(-y)\omega) &= 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])}(J_y(\xi,\omega)) \\ &= 1_{J_y^{-1}(\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c]))}(\xi,\omega). \end{aligned}$$

Agora, seja (ξ,ω) tal que $(\xi,\omega) \in J_y^{-1}\left(\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])\right)$, isto é, (ξ,ω) tal que $\mathbf{H}(\xi,\tau(-y)\omega) \le c$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\xi,\omega) = \frac{|\xi|^2}{2} + U(0,\omega) &\le c + U(0,\omega) - U(0,\tau(-y)\omega) \\ &\le c + 2U_{\max}. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = c + 2U_{\max}$, provamos que $J_y^{-1}\left(\mathbf{H}^{-1}((-\infty,c])\right) \subseteq \mathbf{H}^{-1}((-\infty,\lambda])$, donde segue a afirmação. Portanto

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} 1_{\mathcal{F}^c}\big(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\big)\, d\mu_c(\xi,\omega) \right\} dz \\ &\quad \le \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n\times\Omega} 1_{\mathcal{F}^c}(\xi,\omega) \det\left(\nabla\Phi(-y,\omega)\right) 1_{\mathbf{H}^{-1}((-\infty,\lambda])}(\xi,\omega) \right. \\ &\qquad\qquad \left. \det\left(\nabla\Phi(0,\omega)\right)\, d\mathbb{P}(\omega) d\xi \right\} dz \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathcal{F}^c} \det\left(\nabla\Phi(-y,\omega)\right)\, d\mu_\lambda(\xi,\omega) \right\} dz = 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

provando assim a afirmação e por (3.12) temos que, para quase todo $(z,\xi,\omega) \in \mathbb{R}^{2n} \times \Omega$,

$$\begin{aligned} \overline{f}(\Phi^{-1}(\chi_s^1(z,\xi,\omega),\omega), \chi_s^2(z,\xi,\omega),\omega) &= \overline{F}\big(T_s(\xi,\tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\big) \\ &= \overline{F}\big(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\big) = \overline{f}\big(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\big) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

provando assim o item (iii).

$\square$

É importante mencionar que se tomarmos uma função $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ e definirmos

$$g(s,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega) := F\big(T_s(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega)\big),$$

pode-se mostrar que a função g é uma solução da equação de evolução microscópica (0.2) com condição inicial $\overline{f}\big(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\big) = F\big(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\big)$.

Agora, vamos usar a Proposição 3.2 para dar uma definição precisa da projeção no espaço $\mathbb{K}$. Defina$\widetilde{\ }$: $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2n} \times \Omega) \to \mathbb{K}$ por

$$\widetilde{f}(y, \xi, \omega) := \lim_{T \to \infty} \fint_0^T f\big(0, T_s\left(\xi, \tau(y)\omega\right)\big)\, ds,$$

e o espaço $\mathbb{K}^\perp$ por

$$\mathbb{K}^\perp := \Big\{ f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2n} \times \Omega);\ \text{existe } g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n} \times \Omega) \\ \text{satisfazendo } f = \widetilde{g} - g \Big\}. \tag{3.14}$$

Observação 3.1. *Note que se $f = f(y, \xi, \omega) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n} \times \Omega)$ é uma função $y-$estacionária, então temos*

$$\begin{aligned} \widetilde{f}\big(\Phi^{-1}(z, \omega), \xi, \omega\big) &= \lim_{T \to \infty} \fint_0^T f\big(0, T_s\left(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}(z, \omega)\right)\omega\right)\big)\, ds \\ &= \lim_{T \to \infty} \fint_0^T f\big(\Phi^{-1}\left(\chi_s^1(z, \xi, \omega), \omega\right), \chi_s^2(z, \xi, \omega), \omega\big)\, ds. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Análise Assintótica de f^{ε}

Neste capítulo, confirmaremos rigorosamente todos os fatos sugeridos pela expansão em duas escalas realizada no último capítulo. A ideia principal da prova é semelhante aos correspondentes em [9] (ver também [2]). Embora, como já vimos, a deformação estocástica introduziu muitas dificuldades que conseguimos superar.

Para começar, alguns fatos importantes e básicos são necessários para estabelecer a decomposição para a solução f^{ε} de (0.1).

Lema 4.1. *Seja* $\mathbf{X}_s(z,\xi,\omega) = \Big(\chi_s^1(z,\xi,\omega), \chi_s^2(z,\xi,\omega)\Big)$ *o fluxo gerado por* (2.1). *Então, para cada* $T > 0$ *temos*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^n_T} \left\| \varepsilon \chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\cdot,\cdot\cdot\right) - x + t\,\tilde{\xi}\left(0,\cdot,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\cdot\cdot\right)\right)\cdot\cdot\right) \right\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\times\Omega)} = 0,$$

onde $\mathbb{R}^n_T := (0,T)\times\mathbb{R}^n$.

Demonstração. 1. Note que, para cada $\varepsilon > 0$ e $t \in [0,T)$,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\,\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right) - x + t\,\tilde{\xi}\left(0,\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\\
&\quad= \varepsilon\int_0^{t/\varepsilon} \frac{d}{ds}\chi^1_s\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right)ds + t\,\tilde{\xi}\left(0,\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\\
&\quad= -\varepsilon\int_0^{t/\varepsilon} \chi^2_s\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right)ds + t\,\tilde{\xi}\left(0,\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\\
&\quad= -t\left\{ \fint_0^{t/\varepsilon} \chi^2_s\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right)ds - \tilde{\xi}\left(0,\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\right\}.
\end{aligned}\tag{4.1}$$

2. Seja $P : \mathbb{R}^{2n} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função definida por $P(y, \xi, \omega) = \xi$. Claramente a função $P \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2n} \times \Omega)$ é y-estacionária. Dado um conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}^n_\xi$, aplicando o Corolário 2.1, obtemos da equação (4.1) que

$$\begin{aligned}
&\int_{C\times\Omega} \left| \varepsilon\, \chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi, \omega\right) - x + t\, \tilde{\xi}\left(0, \xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right)\omega\right) \right| d\mathbb{P}(\omega) d\xi \\
&\leq \frac{t}{\nu} \int_{C\times\Omega} \left| \fint_0^{t/\varepsilon} \chi^2_s\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi, \omega\right) ds - \tilde{\xi}\left(0, \xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right)\omega\right) \right| d\mathbb{P}_\Phi(\omega) d\xi \\
&= \frac{t}{\nu} \int_{C\times\Omega} \left| \fint_0^{t/\varepsilon} P\Big(\Phi^{-1}\left(\chi^1_s\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi, \omega\right), \omega\right), \chi^2_s\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi, \omega\right), \omega\Big) ds \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \tilde{\xi}\left(0, \xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right)\omega\right) \right| d\mathbb{P}_\Phi(\omega) d\xi \\
&= \frac{t}{\nu} \int_{C\times\Omega} \left| \fint_0^{t/\varepsilon} P\Big(0, T_s\left(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right)\omega\right)\Big) ds \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \tilde{\xi}\left(0, \xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right)\omega\right) \right| d\mathbb{P}_\Phi(\omega) d\xi.
\end{aligned}$$

Portanto, usando a invariância da função $\Omega \ni \omega \mapsto \tau\left(\Phi^{-1}(z, \omega)\right)\omega$ (com respeito a medida $\mathbb{P}_\Phi$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$, ver item 2 na prova do Teorema 2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{C\times\Omega} \left| \varepsilon\, \chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi, \omega\right) - x + t\, \tilde{\xi}\left(0, \xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\right)\omega\right) \right| d\mathbb{P}(\omega) d\xi \\
&\leq \frac{t}{\nu} \int_{C\times\Omega} \left| \fint_0^{t/\varepsilon} P\left(0, T_s(\xi, \omega)\right) ds - \tilde{\xi}(0, \xi, \omega) \right| d\mathbb{P}_\Phi(\omega) d\xi \\
&\leq \frac{t}{\nu} \int_{C\times\Omega} \left| \fint_0^{t/\varepsilon} P\left(0, T_s(\xi, \omega)\right) ds - \tilde{\xi}(0, \xi, \omega) \right| d\mu_\lambda(\xi, \omega) \\
&= \frac{t}{\nu} \int_{C\times\Omega} M_{t/\varepsilon}(\xi, \omega)\, d\mu_\lambda(\xi, \omega),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

para $\lambda > 0$ suficientemente grande e com notação óbvia para $M_{t/\varepsilon}(\xi, \omega)$.

3. Fixado $0 < \alpha < T$, temos duas situações a considerar:

- If $0 < t \leq \alpha$, then

$$
\begin{aligned}
t \int_{C\times\Omega} & M_{t/\varepsilon}(\xi,\omega)\, d\mu_\lambda(\xi,\omega) \\
& \leq \alpha\nu \left|C\right| \sup_{s>0} \|M_s(\cdot)\|_{L^\infty_{\mu_\lambda}} \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \det\left(\nabla\Phi(0,\omega)\right) \\
& =: C_0\, \alpha < +\infty,
\end{aligned}
$$

onde $\left|C\right|$ representa a medida de Lebesgue n-dimensional do conjunto C.

- Se $\alpha < t \leq T$, então

$$
\begin{aligned}
t \int_{C\times\Omega} M_{t/\varepsilon}(\xi,\omega)\, d\mu_\lambda(\xi,\omega) & \leq \frac{T}{\nu} \int_{C\times\Omega} M_{t/\varepsilon}(\xi,\omega)\, d\mu_\lambda(\xi,\omega) \\
& \leq T\nu \sup_{\vartheta\geq\frac{\alpha}{\varepsilon}} \int_{C\times\Omega} M_\vartheta(\xi,\omega)\, d\mu_\lambda(\xi,\omega) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}
$$

onde o limite anterior é justificado pelo Teorema de Birhoff e pelo Teorema da Convergência Dominada.

Portanto, combinando a desigualdade (4.2) com os fatos anteriores, da arbitrariedade de α, podemos deduzir que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^n_T} & \int_{C\times\Omega} \left|\varepsilon\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right) - x + t\,\tilde{\xi}\left(0,\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\cdot\cdot\right)\right| d\mathbb{P}(\omega)d\xi \\
& \leq \inf_{\alpha\in(0,T)} \left(\max\left\{\alpha C_0, \frac{T}{\nu}\sup_{\vartheta\geq\frac{\alpha}{\varepsilon}} \int_{C\times\Omega} M_\vartheta(\xi,\omega)\, d\mu_\lambda(\xi,\omega)\right\}\right),
\end{aligned}
$$

que completa a prova deste Lema. $\square$

A próxima propriedade de contração uniforme para soluções da equação (0.1) será importante para obter o resultado principal deste trabalho.

Lema 4.2. *Seja $f^0 = f^0(x,y,\xi,\omega) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{3n}\times\Omega)$ uma função $y-$estacionária tal que a função*

$$
\mathbb{R}^{2n}\times\Omega \ni (x,\xi,\omega) \mapsto f^0\Big(x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right), \xi, \omega\Big)
$$

é mensurável. Se $f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega)$ é a solução do problema de Cauchy (0.1)*, então, dados $R,T > 0$ existe $\lambda = \lambda(R,T,\|U\|_\infty) > 0$, tal que, para todo*

$\varepsilon > 0$ e $0 < t < T$

$$\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} |f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega)|\, dxd\xi d\mathbb{P}(\omega)$$
$$\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times\mathbb{R}^n_\xi\times\Omega} |f^0(x,0,\xi,\omega)|\, dxd\mu_\lambda(\xi,\omega),$$

onde $\nu > 0$ é a constante na Definição 1.10.

Demonstração. 1. Para cada $\varepsilon > 0$, seja $\mathbf{v}^\varepsilon(x,\xi,\omega) := \Big(\xi, \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{c}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\omega\right)\Big)$ o drift associado a equação de Liuville em (0.1), e considere, para cada $(x,\xi,\omega) \in \mathbb{R}^{2n}\times\Omega$, o único flow

$$\mathbf{X}^\varepsilon_t(x,\xi,\omega) = \Big(\chi^{\varepsilon,1}_t(x,\xi,\omega), \chi^{\varepsilon,2}_t(x,\xi,\omega)\Big)$$

gerado pela seguinte equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{X}^\varepsilon_t}{dt}(x,\xi,\omega) = -\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{X}^\varepsilon_t(x,\xi,\omega),\omega), \quad \text{for } t\in\mathbb{R}, \\ \mathbf{X}^\varepsilon_0(x,\xi,\omega) = (x,\xi). \end{cases} \tag{4.3}$$

É fácil ver que devemos ter

$$\mathbf{X}^\varepsilon_t(x,\xi,\omega) = \Big(\varepsilon\,\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right), \chi^2_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right)\Big), \tag{4.4}$$

onde $\mathbf{X}_s(z,\xi,\omega) = \Big(\chi^1_s(z,\xi,\omega), \chi^2_s(z,\xi,\omega)\Big)$ é a solução de (2.1). Então, podemos escrever a solução f^ε do problema de Cauchy (0.1), para cada $t > 0$, como

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) &= f^0\left(\chi^{\varepsilon,1}_t(x,\xi,\omega), \Phi^{-1}\left(\frac{\chi^{\varepsilon,1}_t(x,\xi,\omega)}{\varepsilon},\omega\right), \chi^{\varepsilon,2}_t(x,\xi,\omega),\omega\right) \\ &= f^0\left(\varepsilon\,\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right), \Phi^{-1}\left(\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right),\omega\right), \chi^2_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right),\omega\right) \\ &= f^0\left(\varepsilon\,\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right), 0, T_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\right), \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde usamos (4.4) na segunda igualdade e o Corolário 2.1 na terceira.

2. Agora, ulitilizando (2.4) com $z = 0$, $k = x/\varepsilon$ e $s = t/\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon\,\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right) = \varepsilon\,\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}&\left(\Phi\left(0,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right), \xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right) \\ &-\varepsilon\,\Phi\left(0,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right) + x. \end{aligned}$$

Portanto, inserindo essa relação na equação (4.5), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} |f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega)|\, dxd\xi d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \Bigg| f^0\Bigg(\varepsilon\,\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi,\omega\right), 0, \\
&\qquad\qquad T_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\Bigg)\Bigg|\, dxd\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega) \\
&= \frac{1}{\nu}\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \Bigg| f^0\Bigg(\varepsilon\,\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\Bigg(\Phi\left(0,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right), \xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\Bigg) \\
&\qquad\qquad -\varepsilon\,\Phi\left(0,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right) + x, 0, \\
&\qquad\qquad T_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\Bigg)\Bigg|\, dxd\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega) \\
&= \frac{1}{\nu}\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \Bigg| f^0\Bigg(\varepsilon\,\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\Big(\Phi(0,\omega),\xi,\omega\Big) - \varepsilon\,\Phi(0,\omega) + x, 0, \\
&\qquad\qquad T_{\frac{t}{\varepsilon}}(\xi,\omega)\Bigg)\Bigg|\, dxd\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega),
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

onde usamos a invariância da função $\Omega \ni \omega \mapsto \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega$ com respeito a medida $\mathbb{P}_\Phi$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$.

3. Nesta etapa, primeiro notamos que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\,\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}\Big(\Phi(0,\omega),\xi,\omega\Big) - \varepsilon\,\Phi(0,\omega) &= \varepsilon\int_0^{t/\varepsilon} \frac{d}{ds}\chi^1_s\Big(\Phi(0,\omega),\xi,\omega\Big)\, ds \\
&= -\varepsilon\int_0^{t/\varepsilon} \chi^2_s\Big(\Phi(0,\omega),\xi,\omega\Big)\, ds.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Então, como a função $\mathbb{R} \ni s \mapsto \mathbf{H}(\chi^2_s(z,\xi,\omega), \tau(\Phi^{-1}(\chi^1_s(z,\xi,\omega),\omega))\omega)$ é constante, da definição do Hamiltoniano $\mathbf{H}$, ver (2.7), e da positividade da função potencial U, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\left|\chi^2_s\Big(\Phi(0,\omega),\xi,\omega\Big)\right|^2}{2} &\leq \mathbf{H}(\chi^2_s(\Phi(0,\omega),\xi,\omega), \tau(\Phi^{-1}(\chi^1_s(\Phi(0,\omega),\xi,\omega),\omega))\omega) \\
&= \mathbf{H}(\xi,\omega) \equiv \frac{|\xi|^2}{2} + U\left(0,\omega\right).
\end{aligned}
$$

Conseguentemente, se $|\xi| \leq R$ então

$$\left|\chi_s^2\Big(\Phi(0,\omega),\xi,\omega\Big)\right| \leq \sqrt{\frac{R^2}{2} + 2\|U\|_\infty},$$

para q.t.p. $\omega \in \Omega$ e de (4.7), obtemos para todo $t \in (0,T)$ e $|\xi| \leq R$

$$\left|\varepsilon\, \chi_{\frac{t}{\varepsilon}}^1\Big(\Phi(0,\omega),\xi,\omega\Big) - \varepsilon\, \Phi(0,\omega)\right| \leq T\sqrt{\frac{R^2}{2} + 2\|U\|_\infty}.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, a mudança de variáveis

$$u = \varepsilon\, \chi_{\frac{t}{\varepsilon}}^1\Big(\Phi(0,\omega),\xi,\omega\Big) - \varepsilon\, \Phi(0,\omega) + x$$

na igualdade (4.6) e escolhendo $\lambda \geq R + T\sqrt{\frac{R^2}{2} + 2\|U\|_\infty}$ suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} |f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega)|\, dxd\xi d\mathbb{P}(\omega) \\
&\quad\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_R(0)\times\Omega}\left\{\int_{B_\lambda(0)}\left|f^0\Big(u,0,T_{\frac{t}{\varepsilon}}(\xi,\omega)\Big)\right| du\right\} d\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega) \\
&\quad\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)}\left\{\int_{\mathbb{R}^n\times\Omega}\left|f^0\Big(u,0,T_{\frac{t}{\varepsilon}}(\xi,\omega)\Big)\right| d\mu_\lambda(\xi,\omega)\right\} du \\
&\quad= \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)}\left\{\int_{\mathbb{R}^n\times\Omega}\left|f^0(u,0,\xi,\omega)\right| d\mu_\lambda(\xi,\omega)\right\} du,
\end{aligned}$$

onde usamos a invariância da medida μ_λ com respeito ao sistema dinâmico $T_s(\cdot)$. Isto completa a prova do Lema.

□

Agora, já temos todas as ferramentas para provar o Teorema principal 0.1, que é uma variação não estacionária de um resultado similar provado em [9] no contexto estacionário.

Demonstração. Primeiro, suponha que f^0 é uma função mensurável e localmente limitada que não depende da variável lenta x, isto é,

$$f^0 = f^0(y,\xi,\omega) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{2n}\times\Omega).$$

Neste caso, da equação (4.5) podemos escrever

$$
\begin{aligned}
f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) &= f^0\Big(0, T_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\Big) \\
&= \widetilde{f^0}\Big(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\Big) + \Big\{ f^0\Big(0, T_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\Big) \\
&\qquad - \widetilde{f^0}\Big(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\Big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Portanto, é suficiente definir $r^\varepsilon \equiv 0$ e

$$
\begin{aligned}
f\left(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right) &:= \widetilde{f^0}\left(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right), \\
g\left(t,x,s,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right) &:= f^0\big(0, T_s\left(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\right)\big) \\
&\qquad - \widetilde{f^0}\big(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\big).
\end{aligned}
$$

Claramente, f satisfaz a equação macroscópica (0.3), ($\partial_t f = \nabla_x f \equiv 0$), e $f(t,x,\cdot) \in \mathbb{K}$ para q .t.p. $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Além disso, devido ao Córolário 2.1 e a Proposição 3.1, segue que

$$
\begin{aligned}
g\left(t,x,s,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right) &= f^0\big(0, T_s\left(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\right)\big) \\
&\quad -\widetilde{f^0}\big(0, T_s\left(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\right)\big)
\end{aligned}
$$

para q.t.p. $(z,\xi,\omega) \in \mathbb{R}^{2n}\times\Omega$, donde $g(t,x,s,\cdot) \in \mathbb{K}^\perp$ para q t.p. $(t,x,s) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$. Ainda, $g(t,x,\cdot)$ satisfaz a equação miscroscópica (0.2) com condição inicial $\Big(f^0 - \widetilde{f^0}\Big)(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)$. Finalmente, para qualquer $R>0$ fixado

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \Big| \int_0^T g\left(\frac{t}{\varepsilon}, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) dt \Big| \, dx d\xi d\mathbb{P}(\omega) \\
&= T\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \Big| \fint_0^{T/\varepsilon} g\left(s, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) ds \Big| \, dx d\xi d\mathbb{P}(\omega) \\
&\le \frac{T}{\nu}\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \Big| \fint_0^{T/\varepsilon} f^0\Big(0, T_s\left(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\Big) ds \\
&\qquad\qquad - \widetilde{f^0}\Big(0,\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\Big)\Big| \, dx d\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega) \\
&= \frac{T|B_R(0)|}{\nu}\int_{B_R(0)\times\Omega} \Big| \fint_0^{T/\varepsilon} f^0\left(0, T_s(\xi,\omega)\right) ds - \widetilde{f^0}(0,\xi,\omega)\Big| \, d\xi d\mathbb{P}_\Phi(\omega) \to 0,
\end{aligned}
$$

quando $\varepsilon \to 0$ pelo item (i) da Proposição 3.2, onde usamos o Teorema da Convergância Dominada.

2. Agora, suponhamos que $f^0(x,y,\xi,\omega) = f^0(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Neste caso, a solução do Problema de Cauchy (0.1) pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) &= f^0\Big(\chi_t^{\varepsilon,1}(x,\xi,\omega)\Big) = f^0\Big(\varepsilon\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}(x,\xi,\omega)\Big) \\
&= f^0\left(x - t\tilde{\xi}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\right) \\
&\quad + f^0\Big(\varepsilon\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}(x,\xi,\omega)\Big) - f^0\left(x - t\tilde{\xi}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, definimos:

$$
\begin{aligned}
&f\Big(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\Big) := f^0\Big(x - t\,\tilde{\xi}\left(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right)\Big), \\
&g \equiv 0, \\
&r^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) := f^0\Big(\varepsilon\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}(x,\xi,\omega)\Big) - f^0\left(x - t\tilde{\xi}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\right).
\end{aligned}
$$

Claramente, as funções f e g satisfazem respectivamente as propriedades (ii) e (iii) do Teorema Principal. Além disso, a propriedade (i) para a sequência r^ε segue imediatamente do Lema 4.1.

3. Agora, suponhamos que a condição inicial $f^0(x,y,\xi,\omega)$ pode ser escrita como uma soma do tipo

$$
\sum_{i=1}^m \varphi_i(x)\,\psi_i(y,\xi,\omega) \tag{4.9}
$$

com $\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi_i \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2n} \times \Omega)$ estacionária na variável y. Então, inspirados pela discussão anterior, definimos

$$
\begin{aligned}
f\left(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right) := \sum_{i=1}^m \varphi_i\Big(x - t\,\tilde{\xi}\left(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right)\Big) \\
\times\, \widetilde{\psi}_i\left(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g\left(t, x, s, \Phi^{-1}(z,\omega), \xi, \omega\right) &= \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Big(x - t\,\tilde{\xi}\left(\Phi^{-1}(z,\omega), \xi, \omega\right)\Big) \\
&\qquad \times \Big(\psi_i - \widetilde{\psi}_i\Big) \Big(0, T_s\left(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\right)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Big(x - t\,\tilde{\xi}\left(\Phi^{-1}(z,\omega), \xi, \omega\right)\Big) \\
&\qquad \times \Big\{\psi_i\Big(0, T_s\left(\xi, \tau\left(\Phi^{-1}(z,\omega)\right)\omega\right)\Big) - \widetilde{\psi}_i\left(\Phi^{-1}(z,\omega), \xi, \omega\right)\Big\},
\end{aligned}
$$

e para cada $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
r^{\varepsilon}(t, x, \xi, \omega) &:= f^{\varepsilon}(t, x, \xi, \omega) - f\left(t, x, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \xi, \omega\right) \\
&\quad - g\left(t, x, \frac{t}{\varepsilon}, \Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \xi, \omega\right)
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Primeiro, notamos que a função $f(t, x, \cdot) \in \mathbb{K}$ para q.t.p. $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}_{+}$ e $f(\cdot, \Phi^{-1}(z,\omega), \xi, \omega)$ satisfaz a equação de evolução macroscópica (0.3) para q.t.p. $(z, \xi, \omega) \in \mathbb{R}^{2n} \times \Omega$, já que é uma combinação linear de funções que satisfazem essas propriedades. Uma observação similar acontece para a função g mudando o espaço $\mathbb{K}$ por $\mathbb{K}^{\perp}$, a equação de evolução macroscópica (0.3) pela equação de evolução microscópica (0.2) e o par de variáveis macroscópicas (t, x) pela microscópica (s, z).

Já a propriedade (i) não é tão óbvia de se verificar. Para isto, podemos usar as definições anteriores das funções f e g, escrever a solução do problema (0.1) em termos do fluxo gerado pelo problema (4.3) e a condição inicial (4.9). Finalmente, o resultado segue do Lema 4.1. Em termos matemáticos, obtemos das equações (4.5), (4.9) e (4.10)

$$
\begin{aligned}
&r^\varepsilon(t,x,\xi,\omega)\\
&\quad := f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) - f\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\\
&\qquad\quad -g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\\
&\quad = \sum_{i=1}^{m}\varphi_i\left(\varepsilon\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}(x,\xi,\omega)\right)\psi_i\left(0,T_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\right)\\
&\qquad -\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\left(x-t\tilde{\xi}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\right)\widetilde{\psi}_i\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\\
&\qquad -\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\left(x-t\tilde{\xi}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\right)\\
&\qquad\quad \times\left\{\psi_i\left(0,T_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\right)-\widetilde{\psi}_i\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\right\}\\
&\quad = \sum_{i=1}^{m}\left\{\varphi_i\left(\varepsilon\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}(x,\xi,\omega)\right)-\varphi_i\left(x-t\tilde{\xi}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\right)\right\}\\
&\qquad\quad \times\psi_i\left(0,T_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que

$$
\begin{aligned}
|r^\varepsilon(t,x,\xi,\omega)| \leq &\sum_{i=1}^{m}\|\psi_i\|_\infty \operatorname{Lip}(\varphi_i)\\
&\qquad \times\left|\varepsilon\chi^1_{\frac{t}{\varepsilon}}(x,\xi,\omega)-x+t\tilde{\xi}\left(0,\xi,\tau\left(\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)\right)\omega\right)\right|,
\end{aligned}
$$

e devido ao Lemma 4.1 segue verdadeiro o item (i).

4.(Caso Geral) Agora, consideramos o caso onde $F_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2n}\times\Omega)$. Primeiro, relembre que somas finitas similares a (4.9) são densas em $F_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2n}\times\Omega)$, consequentemente podemos encontrar uma sequência $F_0^j(x,\xi,\omega)$ tal que

(i) $F_0^j(x,\xi,\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m_j}\varphi_i(x)\,\psi_i(\xi,\omega)$, onde $\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi_i \in L^\infty(\mathbb{R}^n\times\Omega)$.

(ii) $F_0^j \overset{j\to 0}{\longrightarrow} F_0$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2n}\times\Omega)$.

Então, convenientemente definimos $f_0^j(x,y,\xi,\omega) := F_0^j(x,\xi,\tau(y)\omega)$, e note que

$$f_0^j \to f_0 \text{ em } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{3n}\times\Omega) \text{ quando } j\to\infty.$$

Observe que por definição f_0^j é y-estacionária, e portanto f^0 também é já que a estacionaridade é preservada por limites.

Agora, sejam f_j^ε e f^ε soluções do problema de Cauchy (0.1), com condição inicial f_0^j e f^0, respectivamente. Pela etapa anterior, podemos escrever f_j^ε como

$$\begin{aligned} f_j^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) = f_j\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) + g_j\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \\ + r_j^\varepsilon(t,x,\xi,\omega), \end{aligned} \tag{4.11}$$

com f_j, g_j e r_j^ε satisfazendo todas as condições do Teorema 0.1. Já que a função $f_j\left(t,x,\Phi^{-1}\left(z,\omega\right),\xi,\omega\right)$ satisfaz a equação (0.2) com condição inicial $\tilde{f}_0^j(x,\cdot)$, podemos aplicar o princípio de comparação de Kruskov's, ver [8, 13] (ver também [15], Teorema 5.38, p.92), isto é, para qualquer $R>0$

$$\begin{aligned} \int_{|x|\le R} \left|f_j(t,x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right|\,dx \\ \le \int_{|x|\le R+\left|\tilde{\xi}\right|t} \left|\tilde{f}_0^j(x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right|\,dx, \end{aligned}$$

para q.t.p. $(t,z,\xi,\omega)\in\mathbb{R}_T^{2n+1}\times\Omega$ (note que $\tilde{\xi}(\cdot)$ é constante com relação a variável x). Além disso, com o mesmo argumento da etapa 3 do Lema (4.2), temos

$$\begin{aligned} \left|\tilde{\xi}(\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| &= \left|\lim_{\theta\to\infty} \fint_0^\theta \chi_s^2(\Phi(z,\omega),\xi,\omega)\,ds\right| \\ &\le \limsup_{\theta\to\infty} \fint_0^\theta \left|\chi_s^2(\Phi(z,\omega),\xi,\omega)\right|\,ds \\ &\le \sqrt{|\xi|^2 + 2\left\|U\right\|_\infty}. \end{aligned}$$

Consquentemente, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{|x|\le R} \left|f_j(t,x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right|\,dx \\ \le \int_{|x|\le R+\sqrt{|\xi|^2+2\|U\|_\infty}\,t} \left|\tilde{f}_0^j(x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right|\,dx. \end{aligned}$$

Defina $\lambda_0 := R + \sqrt{|\xi|^2 + 2\,\|U\|_\infty T}$ e recorde que $K = \mathbb{R}^n \times \Omega$.

Temos a seguinte

Afirmação: Existe $\lambda > \lambda_0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{(t,z)\in\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \left|f_j(t,x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| \; dxd\xi d\mathbb{P}(\omega) \\
&\qquad\qquad \leq \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K} \left|F_0^j(x,\xi,\omega)\right| \; dx\; d\mu_\lambda(\xi,\omega).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Demonstração da Afirmação: Primeiro, observamos que a desigualdade

$$\begin{aligned}
\int_K \left|\overline{F}(\xi,\omega)\right| \; d\mu_\lambda(\xi,\omega) &= \int_K \left|\lim_{\theta\to 0} ⨍_0^\theta F(T_s(\xi,\omega))\,ds\right| d\mu_\lambda(\xi,\omega) \\
&\leq \int_K \overline{|F(\xi,\omega)|} d\mu_\lambda(\xi,\omega) \\
&= \int_K |F(\xi,\omega)|\, d\mu_\lambda(\xi,\omega),
\end{aligned}$$

acontece para qualquer $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ e qualquer $\lambda > 0$. Então, para $\tilde{f}_0^j(x,y,\xi,\omega) = \overline{F_0^j}(x,\xi,\tau(y)\omega)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \left|f_j(t,x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| \; dxd\xi d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K} \left|\tilde{f}_0^j(x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| \; dxd\mu_{\lambda_0}(\xi,\omega) \\
&= \frac{1}{\nu}\int_{B_{\lambda_0}(0)\times K} \left|\overline{F_0^j}(x,\xi,\tau(\phi^{-1}(z,\omega))\omega)\right| 1_{\mathbf{H}^{-1}(-\infty,\lambda]}(\xi,\omega)\; d\mathbb{P}_\phi(\omega)dxd\xi \\
&= \frac{1}{\nu}\int_{B_{\lambda_0}(0)\times K} \left|\overline{F_0^j}(x,\xi,\omega)\right| 1_{\mathbf{H}^{-1}(-\infty,\lambda_0]}(\xi,\tau(-\phi^{-1}(z,\omega))\omega)\; d\mathbb{P}_\phi(\omega)dxd\xi \\
&\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K} \left|\overline{F_0^j}(x,\xi,\omega)\right| 1_{\mathbf{H}^{-1}(-\infty,\lambda]}(\xi,\omega)\; d\mathbb{P}_\phi(\omega)dxd\xi \\
&= \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K} \left|\overline{F_0^j}(x,\xi,\omega)\right| \; dxd\mu_\lambda(\xi,\omega) \\
&\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K} \left|F_0^j(x,\xi,\omega)\right| \; dxd\mu_\lambda(\xi,\omega),
\end{aligned}$$

onde usamos a invariância da função $\Omega \ni \omega \to \tau(\Phi^{-1}(z,\omega))\omega$ e o fato que

$$1_{\mathbf{H}^{-1}(-\infty,\lambda_0]}(\xi,\tau(-\phi^{-1}(z,\omega))\omega) \leq 1_{\mathbf{H}^{-1}(-\infty,\lambda]}(\xi,\omega)$$

para uma constante $\lambda > \lambda_0$ adequada, o que prova a afirmação.

Analogamente, o resultado da afirmação anterior segue para a função g_j. De fato, usando o fato que a função $g_j(t,x,\cdot)$ satisfaz a equação (0.3) com condição inicial $f_0^j(x - t\tilde{\xi}(\cdot),\cdot) - \tilde{f}_0^j(x - t\tilde{\xi}(\cdot),\cdot)$, um procedimento similar mostra que, para algum $\lambda_0 > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)\times\Omega} &\left|g_j(t,x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| \, d\xi d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \frac{1}{\nu}\int_K \left|(f_0^j - \tilde{f}_0^j)(x - t\tilde{\xi}, \Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| \, d\mu_{\lambda_0}(\xi,\omega).\end{aligned}$$

Portanto, integrando ambos os lados na bola $B_R(0)$ (com respeito a variável x) e usando as relações $f_0^j(x,y,\xi,\omega) = F_0^j(x,\xi,\tau(y)\omega)$ e $\tilde{f}_0^j(x,y,\xi,\omega) = \overline{F_0^j}(x,\xi,\tau(y)\omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} &\left|g_j(t,x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| \, dx \, d\xi \, d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K} \left|F_0^j(x,\xi,\omega) - \overline{F_0^j}(x,\xi,\omega)\right| \, dx \, d\mu_\lambda(\xi,\omega),\end{aligned}$$

para todo $(t,z) \in \mathbb{R}_T^{n+1}$, $s > 0$ e algum $\lambda > R + T\sqrt{R^2 + 2\left\|U\right\|_\infty}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess\,sup}_{(t,z)\in\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} &\left|g_j(t,x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| \, dx \, d\xi \, d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K} \left|F_0^j(x,\xi,\omega) - \overline{F_0^j}(x,\xi,\omega)\right| \, dx \, d\mu_\lambda(\xi,\omega), \quad (4.13)\end{aligned}$$

Agora, pela linearidade das equações (0.2) e (0.3) e pelas estimativas (4.12) e (4.13), deduzimos que (aqui a deformação Φ não desempenha nenhum papel)

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess\,sup}_{(t,z)\in\mathbb{R}_T^{n+1}} \int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} &\left|(f_j - f_l)(t,x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| \, dx \, d\xi \, d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K} \left|F_0^j(x,\xi,\omega) - F_0^l(x,\xi,\omega)\right| \, dx \, d\mu_\lambda(\xi,\omega), \quad (4.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess\,sup}_{(t,z)\in\mathbb{R}_T^{n+1}\times\mathbb{R}_+} \int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} &\left|(g_j - g_l)(t,x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| \, dx \, d\xi \, d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \frac{2}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K} \left|F_0^j(x,\xi,\omega) - F_0^l(x,\xi,\omega)\right| \, dx \, d\mu_\lambda(\xi,\omega), \quad (4.15)\end{aligned}$$

donde f_j e g_j são sequências de Cauchy respectivamente em

$$L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}_+ \, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \times \Omega)) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{3n+1}_+ \times \Omega),$$
$$L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^n_y \, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \times \Omega)) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{3n+1}_+ \times \Omega).$$

Portanto, existem f e g, em seus respectivos espaços, tais que

$$\bullet f_j \xrightarrow{j\to\infty} f \text{ em } L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}_+; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \times \Omega)).$$
$$\bullet g_j \xrightarrow{j\to\infty} g \text{ em } L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^n_y; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \times \Omega)).$$

A convergência acima nos permite definir

$$\begin{aligned} r^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) \;&:=\; f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) - f\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \\ &\quad - g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \\ &= \left\{f^\varepsilon(t,x,\xi,\omega) - f^\varepsilon_j(t,x,\xi,\omega)\right\} + \{f_j\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \\ &\quad - f\left(t,x,\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\} + \{g_j\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right) \\ &\quad -g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\} + r^\varepsilon(t,x,\xi,\omega), \end{aligned}$$

onde usamos (4.11). Então, usando o Lema (4.2) segue que

$$\begin{aligned} &\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} |r^\varepsilon(t,x,\xi,\omega)|\,dx\,d\xi\,d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \frac{1}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K} \left|F^0_j(x,\xi,\omega) - F^0(x,\xi,\omega)\right|\,d\mu_\lambda(\xi,\omega) \\ &\quad + \operatorname*{ess\,sup}_{(t,z)\in\mathbb{R}^{n+1}_T} \int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \left|(f_j - f)(t,x,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right| \\ &\quad + \operatorname*{ess\,sup}_{(t,z,s)\in\mathbb{R}^{n+1}_T\times\mathbb{R}_+} \int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \left|(g_j - g)(t,x,\phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)\right|\,dxd\xi d\mathbb{P}(\omega) \\ &\quad + \int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega} \left|r^\varepsilon_j(t,x,\xi,\omega)\right|\,dxd\xi d\mathbb{P}(\omega). \end{aligned}$$

Aplicando (4.14) e (4.15) nas desigualdades anteriores, para todo $j \geq 1$

temos

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{0<t<T}\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega}|r^\varepsilon(t,x,\xi,\omega)|\,dx\,d\xi\,d\mathbb{P}(\omega)\right)\\
&\leq\ \frac{4}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K}\left|F_0^j(x,\xi,\omega)-F_0(x,\xi,\omega)\right|\,dxd\mu_\lambda(\xi,\omega)\\
&\qquad+\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{0<t<T}\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega}\left|r_j^\varepsilon(t,x,\xi,\omega)\right|dx\,d\xi\,d\mathbb{P}(\omega)\right)\\
&=\ \frac{4}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K}\left|F_0^j(x,\xi,\omega)-F_0(x,\xi,\omega)\right|\,dxd\mu_\lambda(\xi,\omega),
\end{aligned}\tag{4.16}
$$

onde usamos o passo 3 na igualdade acima.

Portanto, $\{r^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfaz o item (i) do Teorema. Claramente $f(t,x,\cdot)\in\mathbb{K}$ para q.t.p. $(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$ e $f(\cdot,\Phi^{-1}(z,\omega),\xi,\omega)$ satisfaz a equação de evolução macroscópica (0.2) para q.t.p. $(z,\xi,\omega)\in\mathbb{R}^{2n}\times\Omega$, já que é o limite (forte) de funções com essas propriedades. Uma observação similar acontece para a função g mudando o espaço $\mathbb{K}$ para $\mathbb{K}^\perp$, a equação de evolução macroscópica (0.2) pela equação de evolução microscópica (0.3) e o par de variáveis macroscópicas (t,x) pela microscópica (s,z). Além disso, a última propriedade satisfeita pela função g no item (iii) é provado de um jeito similar a (4.16), isto é, é suficiente observar que, para qualquer $j\neq 1$

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega}\left|\int_0^T g\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\right|dx\,d\xi\,d\mathbb{P}(\omega)\\
&\leq\ \frac{2T}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K}\left|F_0^j(x,\xi,\omega)-F_0(x,\xi,\omega)\right|\,dxd\mu_\lambda(\xi,\omega)\\
&\qquad+\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{B_R(0)\times B_R(0)\times\Omega}\left|\int_0^T g_j\left(t,x,\frac{t}{\varepsilon},\Phi^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\xi,\omega\right)\right|dx\,d\xi\,d\mathbb{P}(\omega)\\
&=\ \frac{2T}{\nu}\int_{B_\lambda(0)\times K}\left|F_0^j(x,\xi,\omega)-F_0(x,\xi,\omega)\right|\,dxd\mu_\lambda(\xi,\omega).
\end{aligned}
$$

Assim, completamos a prova do resultado principal desta tese.

□

Referências Bibliográficas

[1] R. Alexandre. *Homogenization and $\theta - 2$ convergence.* Proc. Roy. Edinburgh Sect. A 127(3)(1997), pp. 441–455.

[2] R. Alexandre. *Asymptotic Behavior of Transport Equations.* Applicable Analysis. Vol. 70(34)(1999), pp. 405–430.

[3] A. Bensoussan, Jacques-Louis Lion, Papanicolau. *Asymptotic Analsis for Periodic Structutes.* North Holland. Amsterdam (1978)

[4] Xavier Blanc, Claude Le Bris, Pierre-Louis Lions. *Une variante de la théorie de l'homogénéisation stochastique des opérateurs elliptiques.* C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 717–724.

[5] Xavier Blanc, Claude Le Bris, Pierre-Louis Lions. *Stochastic homogenization and random lattices.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 88 (2007), 34-63.

[6] Alain Bourgeat, Andro Mikelic, Steve Wright. *Stochastic two-scale convergence in the mean and applications.* J. reine angew. Math. 456 (1994), 19-51.

[7] Doina Cioranesco, Patrícia Donato *An Introduction to Homogenization.* Oxford University Press, 1999.

[8] Constantine Dafermos. *Hperbolic conservation laws in continuum phsics*, 2nd edition. Springer, 2005.

[9] Anne-Laure Dalibard. *Homogenization of Linear Transport Equations in a Stationary Ergodic Setting.* Communications in Partial Differential Equations. Vol. 33(2008), pp. 881–921.

[10] E. De Giorgi, Spagnolo. *Sulla convergenza degli integrali dell'energia.* Boll. Un. Mat. it.8, 391-411 (1973)

[11] V. V. Jikov, S.M. Kozlov, O. A. Oleinik. *Homogenization of DIfferential Operators and Integral Functionals.* Springer-Verlag, 1994.

[12] U. Krengel. *Ergodic Theorems.* Gruyter Studies in Mathematics, vol. 6, de Gruyter, 1985.

[13] S.N. Kruskov *First-order qusilinear equations in several independent variables.* Mathemactics of the USSR-Sbornik, Vol. 10 (1970), No.2, 217-243.

[14] Elon Lindenstrauss. *Pointwise theorems for amenable groups.* Invent. math. 146, 259–295 (2001)

[15] J. Malek, J. Necas, M.Ruzicka. *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs.* ChampmaneHall, Londom, 1996.

[16] Feliz Pogorzelski. *Ergodic Theorems on Amenable Groups.* Thesis, 2010.

[17] J. Sesták, J.J. Mares, P. Hubík. *Glassy, amorphous and nanocrystalline materials: thermal physics, analysis, structure and properties.* Springer, 2010.

[18] S. Spagnolo. *Sulla convergenza di solutioni di equazioni paraboliche ed ellittiche.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 22. 571-597 (1968)