

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Matemática



TESE DE DOUTORADO

***FUNÇÕES GERADORAS PARA  
CERTOS SISTEMAS HAMILTONIANOS***

*Josué Alonso Aguirre Enciso*

*Rio de Janeiro  
Novembro-2019*

# FUNÇÕES GERADORAS PARA CERTOS SISTEMAS HAMILTONIANOS

Josué Alonso Aguirre Enciso

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Orientadores: Alejandro Cabrera / Umberto Leone Hryniewicz.**

Rio de Janeiro  
Novembro-2019

Aguirre Enciso, Josué Alonso  
FUNÇÕES GERADORAS PARA CERTOS SISTEMAS HAMILTONIANOS  
Josué Alonso Aguirre Enciso – Rio de Janeiro, 2019.

Orientadores: Alejandro Cabrera / Umberto Leone Hryniewicz.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2019.

1. Preliminares. 2. Homologia de Morse.
  3. Homologia de Morse pré Compacta
  4. Homologia de Morse do par  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$ .
- I. Cabrera Alejandro/Hryniewicz Umberto, orient. II. Título.

# FUNÇÕES GERADORAS PARA CERTOS SISTEMAS HAMILTONIANOS

Josué Alonso Aguirre Enciso

Orientador(es): Alejandro Cabrera  
Umberto Leone Hryniewicz.

Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Aprovada por:



---

(Presidente) Alejandro Cabrera - IM/UFRJ



---

Prof. Umberto Hryniewicz - IM-UFRJ/ RWTH AACHEN



---

Prof. Leonardo Macarini - IM-UFRJ/IST-LISBOA



---

Prof. Pedro Salomão - IME/USP



---

Prof. Daniele Sepe - IM/UFF



---

Prof. Cesar Niche - IM/UFRJ

*A minha família.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, fonte da minha força e conhecimento.

Agradeço a meus pais, Alicia Enciso e Guillermo Aguirre que sempre me apoiaram para que eu tivesse a melhor educação o que me permitiu chegar até aqui.

Agradeço a meu amor Maciel por todo seu apoio nesses anos de estudo e também a meus amores Luciana e Josué.

Agradeço a meu orientador, Professor Umberto L. Hryniewicz, por seus ensinamentos, orientações, paciência e dedicação ao revisar atentamente este trabalho. Sem a sua ajuda, não teria sido possível concluir esta tese.

Agradeço aos professores do meu curso de Doutorado: Leonardo Magalhaes Macarini, Andrew Clarke, Graham A. C. Smith, L. Marianty Ionel, Alexander E. Arbieto Mendoza e Nilson da Costa Bernardes J. por contribuir com minha formação.

Agradeço aos professores que compuseram a minha banca avaliadora especialmente meu co-orientador o professor Alejandro Cabrera por suas sugestões valiosas para melhorar esta tese, também o professor Cesar Niche por sua valiosa ajuda que me permitiu terminar meu doutorado.

Agradeço a todos aqueles que permitiram tornar este trabalho melhor, aos meus companheiros e colegas do doutorado.

Agradeço a todos os funcionários do IM-UFRJ que nós possibilitam as melhores condições de ambiente e suporte burocrático.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e ao Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM-UFRJ.

# Resumo

A homologia de Floer é um novo invariante que surge como um análogo de dimensão infinita da homologia de Morse. Andreas Floer [11], apresentou a primeira versão da homologia de Floer, em sua prova da conjectura de Arnold em geometria simplética. A homologia de Floer é tipicamente definida em uma função real e uma variedade diferenciável de dimensão infinita. Na versão simplética, esta variedade é o espaço livre de loops de uma variedade simplética  $(M, \omega)$  e a função é o funcional ação simplética.

Nesta tese, estudamos uma versão discretizada da homologia de Floer, seguindo o artigo de Hein D., Hryniewicz U. e Macarini L. [16]. Em particular, iremos estudar o comportamento de uma Hamiltoniana  $H_t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  definida na variedade simplética  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  tal que é tempo-dependente, 1-periódico em  $t$  e que é assintoticamente quadrático no infinito. Em curtas palavras, queremos estudar como o comportamento quadrático no infinito influencia a dinâmica.

Vamos considerar  $(\mathbb{R}^{2nkN}, \theta_0)$  o espaço euclidiano, onde  $N \in \mathbb{N}$  é bastante grande,  $k \in \mathbb{N}$  é fixo e  $\theta_0$  é a métrica euclidiana; nós definimos um funcional ação discreto  $\mathbb{A}_{H,k,N} : \mathbb{R}^{2nkN} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pelo fato que a família  $H_t$  é assintoticamente quadrático no infinito é possível encontrar um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^{2nkN}$  que contém os pontos críticos de  $\mathbb{A}_{H,k,N}$  e as trajetórias do campo anti-gradiente  $-\nabla^\theta \mathbb{A}_{H,k,N}$  que conectam esses pontos críticos de diferença de índice de Morse um. Graças a isso é possível definir a homologia de Morse do par  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$ .

A esta homologia nós chamaremos de homologia de Morse Pré-compacta. Usando o fato que ela está bem definida e não depende do par  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$  escolhido, calculamos a homologia de Morse da variedade  $\mathbb{R}^{2nkN}$ .

**Palavras chaves:** Variedades Simpléticas, Hamiltonianas, função de Morse, homologia de Morse.

# Abstract

Floer's homology is a new invariant that emerges as an analog of infinite dimension to Morse's homology. Andreas Floer [11] presented the first version of Floer's homology in his proof of Arnold's conjecture on symplectic geometry. Floer's homology is typically defined in a real function and an infinite-dimensional manifold. In the symplectic version, this manifold is the free loop space of a symplectic manifold  $(M, \omega)$  and the function is the symplectic action functional.

In this thesis, we study a discretized version of the Floer homology, following the article of Hein D., Hryniewicz U. and Macarini L. [16]. In particular, we will study the behavior of a Hamiltonian  $H_t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  defined in the symplectic manifold  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  such that it is time-dependent, 1-periodic in  $t$  and that is asymptotically quadratic at infinity. In short words, we want to study how quadratic behavior at infinity influences the dynamics.

Let  $(\mathbb{R}^{2nkN}, \theta_0)$  be the Euclidean space, where  $N \in \mathbb{N}$  is rather large,  $k \in \mathbb{N}$  is fixed, and  $\theta_0$  is standard Euclidean metric, we define a discrete action functional  $\mathbb{A}_{H,k,N} : \mathbb{R}^{2nkN} \rightarrow \mathbb{R}$ . Because the family  $H_t$  is asymptotically quadratic at infinity it is possible to find a compact set  $K \subset \mathbb{R}^{2nkN}$  that contains the critical points of  $\mathbb{A}_{H,k,N}$  and the trajectories of the pseudo-gradient field  $-\nabla^{\theta_0} \mathbb{A}_{H,k,N}$  to which connect these critical points of Morse index difference one. Thanks to that it is possible to define the Morse homology of the pair  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$ .

To this homology we will call the Pre-compact Morse homology. Using the fact that this homology is well defined and does not depend on the chosen pair  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$ , we calculate the Morse homology of manifold  $\mathbb{R}^{2nkN}$ .

**Keywords:** Symplectic manifold, Hamiltonian, Morse function, Morse homology.



# Conteúdo

## Conteúdo

### Introdução

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	Difeomorfismos Hamiltonianos . . . . .	1
1.1.1	Soluções periódicas não-degeneradas . . . . .	3
1.1.2	Campos vetoriais Simpléticos vs Hamiltonianos. . . . .	3
1.2	Dinâmica Hamiltoniana . . . . .	4
1.2.1	O princípio variacional . . . . .	4
1.3	A conjectura de Arnold . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Homologia de Morse</b>	<b>11</b>
2.1	Teoria de Morse . . . . .	11
2.1.1	Fluxo gradiente e variedades estável e instável . . . . .	12
2.2	Espaços de órbitas de conexão . . . . .	15
2.2.1	A condição de Morse-Smale . . . . .	15
2.2.2	O Teorema Kupka-Smale . . . . .	16
2.2.3	O espaço das trajetórias quebradas . . . . .	16
2.2.4	Compacidade . . . . .	17
2.2.5	Orientação . . . . .	17
2.3	A definição de homologia de Morse . . . . .	18
2.3.1	O complexo Morse-Witten . . . . .	18
2.3.2	A estrutura de uma variedade com bordo no espaço de trajetórias quebradas	19
2.3.3	A homologia do complexo não depende da função ou da métrica . . . . .	20
2.4	Homologia Local de Morse . . . . .	26
2.4.1	Definição de homologia local de Morse . . . . .	26
2.4.2	Invariância da homologia local de Morse . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Homologia de Morse pré-compacta</b>	<b>29</b>
3.1	Definição da Homologia de Morse pré-compacta . . . . .	29
3.2	Funções Geradoras . . . . .	33
3.3	Ação Simplética Discreta . . . . .	35
3.4	Configuração geométrica . . . . .	39
3.5	Estimativas gradientes . . . . .	40

CONTEÚDO

<b>4</b>	<b>Homologia de Morse do par <math>(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)</math></b>	<b>45</b>
4.1	Estimativas de continuação . . . . .	45
4.2	Homologia de Morse para o funcional de ação discreto . . . . .	52
4.3	Considerações Finais . . . . .	57
	<b>Bibliografia</b>	<b>59</b>

# Introdução

A Topologia Simplética é o estudo de fenômenos globais de uma variedade simplética  $(M, \omega)$ . Em contraste, a estrutura local de uma variedade simplética é, pelo teorema de Darboux, sempre equivalente à estrutura padrão no espaço euclidiano e portanto, não pode haver invariantes locais em geometria simplética.

Uma característica essencial da geometria simplética é a existência de um rico grupo de difeomorfismos que preservam a estrutura simplética. No caso bidimensional em que os simplectomorfismos são apenas difeomorfismos que preservam a área e orientação, podemos encontrar o último teorema geométrico de Poincaré [29], demonstrado por Birkhoff [2], ele afirma que:

**Teorema Poncaré-Birkhoff:** *Qualquer homeomorfismo que preserva área  $\psi : A \rightarrow A$*

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq u^2 + v^2 \leq b\},$$

*e preserva os dois componentes do bordo e os torce em direções opostas deve ter pelo menos dois pontos fixos.*

Esse resultado pode ser visto como o primeiro teorema global da geometria simplética. Uma generalização natural do teorema de Poincaré-Birkhoff refere-se à existência de pontos fixos de um simplectomorfismo  $\psi : M \rightarrow M$  de uma variedade simplética  $(M, \omega)$  compacta. Agora, em geral, não podemos esperar que simplectomorfismos de uma variedade simplética compacta tenham pontos fixos. Por exemplo, uma translação no 2-toro é um simplectomorfismo sem pontos fixos. Por outro lado, se um simplectomorfismo estiver suficientemente próximo da identidade na topologia  $C^1$  e for o mapa do tempo 1 de um fluxo hamiltoniano tempo-dependente, os pontos fixos também corresponderão aos pontos críticos de uma função geradora.

Com base nessa observação e no teorema de Poincaré-Birkhoff, V. Arnold formulou na década de 1960 sua famosa conjectura:

*Um simplectomorfismo gerado por um campo vetorial hamiltoniano tempo-dependente deve ter pelo menos tantos pontos fixos quanto uma função na variedade deve ter pontos críticos.*

Essa conjectura simples e convincente provou ser uma poderosa força motivadora no desenvolvimento da teoria moderna. A conjectura de Arnold foi provada pela primeira vez por Eliashberg [9] para superfícies de Riemann. Seus métodos são estritamente para o caso bidimensional. Para toros de dimensão arbitrária, a conjectura de Arnold foi comprovada por Conley e Zehnder [6] através de uma aproximação finito dimensional para o funcional ação simplética definido no espaço de loops,  $\mathcal{LM}$  da variedade simplética subjacente  $M$ .

O avanço mais importante foi a prova de A. Floer da conjectura de Arnold para variedades simpléticas monótonas [11]. Sua prova foi baseada em uma nova abordagem à teoria de Morse de dimensão infinita hoje chamada homologia de Floer. Isto é, seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética e  $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma família de funções diferenciáveis e suponha que  $H_t$  é 1-periódica, isto é  $H_{t+1} = H_t$ . Denote por  $X_t$  a família de campos vetoriais definidas por

$$i_{X_t}\omega = dH_t$$

e considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}(t) = X_t(x(t)). \tag{1}$$

Seja  $\psi^t : M \rightarrow M$  a família de simplectomorfismos obtidos por

$$\frac{d\psi^t}{dt}(x) = X_t(\psi^t(x)), \quad \psi^0(x) = x.$$

Os pontos fixos de  $\varphi = \psi^1$  estão em correspondência 1-1 com as soluções periódicas de (1) com período 1. Denotamos esse espaço da seguinte maneira

$$\mathcal{P}(H) = \{x : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M \mid \dot{x}(t) = X_t(x(t))\}.$$

A condição não-degeneração para  $x \in \mathcal{P}(H)$  é

$$\det(d\psi^1(x(0)) - id) \neq 0,$$

isto é  $d\psi^1(x(0))$  não tem  $+1$  como um autovalor. Agora podemos indicar o seguinte

**Conjectura de Arnold:** Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética compacta e seja  $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma hamiltoniana 1-periódica. Suponha que toda solução periódica de (1) seja não-degenerada, então

$$\#\mathcal{P}(H) \geq \sum_{i=0}^{2n} \dim H_i(M, \mathbb{Q}).$$

Hoje, essa conjectura é totalmente provada. A idéia de A. Floer é contar as soluções periódicas de  $H$ , ou os pontos fixos de seu fluxo no tempo  $t = 1$ , para fornecer um limite inferior para seu número de maneira análoga ao número de pontos críticos de uma função de Morse em uma variedade. (Usando um análogo da desigualdade de Morse).

Descreveremos a solução para uma variedade simplética monótona, ou seja, uma variedade simplética  $(M, \omega)$  tal que

$$\langle c_1, A \rangle = \tau \langle \omega, A \rangle$$

para alguma constante positiva  $\tau$ , para todo  $A \in H_2^s(M)$  onde  $H_2^s(M)$  é a imagen do homomorfismo de Hurewicz  $\pi_2(M) \rightarrow H_2(M, \mathbb{Z})$  e  $c_1 \in H^2(M, \mathbb{Z})$  é a primeira classe de Chern de  $(M, \omega)$ .

Definindo  $\mathcal{L}M$  como o espaço de loops contratíveis suaves em  $M$ , isto é se  $x \in \mathcal{L}M$  é uma aplicação diferenciável  $x : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ , então existe uma aplicação suave  $u : D \rightarrow M$  onde  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\}$  tal que  $u(e^{2\pi it}) = x(t)$ . O funcional ação é a aplicação

$$a_H : \mathcal{L}M \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

dado por

$$a_H(x) = - \int_D u^* \omega - \int_0^1 H_t(x(t)) dt$$

para algum  $u : D \rightarrow M$  com  $u(e^{2\pi it}) = x(t)$ . Um cálculo fácil mostra que

$$d_x a_H = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \dot{x}(t) = X_t(x(t))$$

isto é os pontos críticos de  $a_H$  são precisamente os elementos de  $\mathcal{P}(H)$ .

Esboço da Homologia de Floer:

1. Os pontos críticos deste funcional serão exatamente as soluções periódicas desejadas.
2. Com esses pontos críticos, se constrói um complexo. Primeiro tomamos os espaços vetoriais sob  $\mathbb{Z}/2$  que eles geram. Para definir o grau nesses espaços, precisamos de um análogo ao índice de pontos críticos da teoria de Morse (Índice de Maslov).
3. Para definir o diferencial do complexo, se usa o campo vetorial anti-gradiente do funcional ação, junto com uma métrica em  $\mathcal{L}M$  induzida de uma métrica em  $M$ .
4. A idéia é, então, contar suas trajetórias. Se mostra que as trajetórias de energia finita conectam de fato dois pontos críticos.

5. Precisa-se de uma propriedade de compacidade para o espaço de trajetórias de energia finita (compacidade de Gromov).
6. E, é claro, precisa-se que esses espaços de trajetórias sejam variedades, bem como uma propriedade de genericidade, como a propriedade de Smale, para um campo vetorial suficientemente próximo.
7. Usando os mesmos métodos da homologia de Morse, se mostra que a homologia do complexo que se define finalmente não depende nem da escolha do funcional nem do campo vetorial.
8. E, finalmente, considerando o caso de um hamiltoniano  $C^2$  pequeno autônomo, essa independência nos dirá que a homologia construída, a homologia de Floer, coincide com a homologia de Morse da variedade  $M$  subjacente.

O objetivo deste trabalho é, em analogia com o descrito acima, estudar o comportamento de uma hamiltoniana, definida na variedade simplética  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  com sua 2-forma simplética padrão  $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ , onde  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  são as coordenadas em  $\mathbb{R}^{2n}$

$$H_t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que é tempo-dependente, 1-periódico em  $t$  e assintoticamente quadrático no infinito. Em curtas palavras, queremos estudar como o comportamento quadrático no infinito influencia a dinâmica. Os métodos utilizados podem ser vistos como uma versão discretizada da teoria de Floer, na qual os loops em  $\mathcal{L}M$  são substituídos por "loops discretos" definidos por  $N$ -pontos em  $M$ .

Sendo assim consideramos a forma quadrática

$$h(z) = - \sum_{i=1}^n \frac{a_i(q_i^2 + p_i^2)}{2}$$

com coeficientes  $a_1, \dots, a_n > 0$  racionalmente independentes. Assumimos que existe  $h_0 < 0$  tal que

$$H_t(z) = h(z), \quad \forall z \in \{h \leq h_0\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esta hamiltoniana gera implicitamente um campo vetorial tempo-dependente  $X_{H_t}$  determinado por  $\omega_0(X_{H_t}, \cdot) = dH_t$  que, por sua vez, gera uma isotopia por meio do problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt} \varphi_H^t = X_{H_t} \circ \varphi_H^t, \quad \varphi_H^0 = \text{id}.$$

Considerando  $N \in \mathbb{N}$  grande o suficiente, denotaremos por  $S_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  a função geradora para o difeomorfismo simplético

$$\psi_i = \varphi_H^{i/N} \circ (\varphi_H^{(i-1)/N})^{-1}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

normalizada por  $S_i(0) = 0$ . Tais funções geradoras existem pois cada  $\psi_i$  é  $C^1$ -uniformemente próximo do mapa identidade, de modo que podemos defini-las implicitamente em coordenadas  $\psi_i(x, y) = (X, Y)$  através das equações

$$X - x = \nabla_2 S_i(x, Y), \quad y - Y = \nabla_1 S_i(x, Y).$$

Queremos estudar a dinâmica da aplicação

$$\phi = \varphi_H^1 = \psi_N \circ \psi_{N-1} \circ \dots \circ \psi_2 \circ \psi_1$$

Em geral esse objetivo pode nos levar a considerar problemas extremamente difíceis. Por exemplo, podemos considerar a seguinte conjectura:

**Conjectura.** O mapa  $\phi$  tem uma ou infinitas órbitas periódicas.

Para estudar a dinâmica da aplicação  $\phi$ , vamos usar algumas idéias de uma prova da conjectura de Arnold para o toro padrão, que se baseia na ação simplética discreta. Essa prova é uma reformulação do método de Chaperon para geodésicas quebradas [9], que apareceu logo após o trabalho de Conley e Zehnder.

Vamos considerar  $\mathcal{P} = (\mathbb{R}^{2n})^N$  o conjunto de caminhos discretos  $\xi = (z_1, \dots, z_N)$  onde  $z_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$  (*splitting* Lagrangiano). Definemos o funcional de ação simplética discreto como

$$\mathbb{A}_{H,N,k}(z_1, \dots, z_{kN}) = \sum_{i=1}^{kN} \langle x_i, y_{i+1} - y_i \rangle + S_i(x_i, y_{i+1})$$

onde  $(z_1, \dots, z_{kN}) \in (\mathbb{R}^{2n})^{kN} \simeq \mathcal{P}^k$  com  $k \in \mathbb{N}$ ,  $S_i$  são as funções geradoras associadas a  $\psi_i = \varphi_H^{\frac{i}{N}} \circ \left( \varphi_H^{\frac{i-1}{N}} \right)^{-1}$  e  $i$  é tomado de forma  $kN$ -periódica.

Então vamos construir uma ferramenta: **Homologia de Morse para o funcional de ação simplética discreto**. Esta Homologia de Morse se encaixa e é compatível com a homologia local feita no trabalho de Hein, Hryniewicz e Macarini [16]. Nesse trabalho foram explorados os fenômenos dinâmicos locais relacionados à simetria de reparametrização no tempo. De fato, quando estudamos a iterada  $k$  do tempo-1 encontramos uma simetria do grupo  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ . Esperamos que com o trabalho dessa tese possamos explorar as influências globais dessa simetria, e que a solução da conjectura acima esteja intimamente relacionada com tais fenômenos.

Nossas construções se baseiam na estrutura variacional por trás dos sistemas Hamiltonianos. Temos dois fatos importantes:

**Fato 1.** Um ponto  $\xi = (z_1, \dots, z_{kN})$ , com  $z_i = (x_i, y_i)$ , é crítico para  $\mathbb{A}_{H,N,k}$  se, e somente se, satisfaz

$$\begin{aligned} y_i - y_{i+1} &= \nabla_1 S_i(x_i, y_{i+1}) \\ x_i - x_{i-1} &= \nabla_2 S_{i-1}(x_{i-1}, y_i) \end{aligned}$$

para todo  $i = \{1, 2, \dots, kN\}$ , com  $i \bmod kN$ .

**Fato 2.** O ponto  $\xi = (z_1, z_2, \dots, z_{kN})$  é um ponto crítico de  $\mathbb{A}_{H,N,k} : \mathcal{P}^k \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,  $z_1$  é um ponto fixo de  $\phi^k = (\varphi_H^1)^k$  e  $\psi_j(z_i) = z_{i+1} = \varphi_H^{j/N}(z_1)$  para todo  $i = \{1, 2, 3, \dots, kN\}$ .

Como a dinâmica de  $\phi$  só pode ter órbitas periódicas no conjunto  $\{h > h_0\}^{kN}$ , podemos encontrar um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^{2nkN}$  contendo todos os pontos críticos de  $\mathbb{A}_{H,N,k}$  em seu interior. Além disso, usando o “caráter irracional” da dinâmica perto do infinito, poderemos aumentar  $K$  de modo a conter em seu interior todas as trajetórias do fluxo anti-gradiente conectando pontos críticos. Aqui tomamos o campo anti-gradiente com respeito à métrica Euclidiana  $g_0$  de  $\mathbb{R}^{2nkN}$ . Isso permite perturbar o par  $(\mathbb{A}_{H,N,k}, g_0)$  e encontrar um outro par  $(\tilde{\mathbb{A}}, g)$  que é  $C^2$ -próximo do original e goza das seguintes propriedades:

- Todos os pontos críticos de  $\tilde{\mathbb{A}}$  e todas as trajetórias do fluxo anti-gradiente de  $(\tilde{\mathbb{A}}, g)$  conectando pontos críticos estão contidas em  $K$ .
- O par  $(\tilde{\mathbb{A}}, g)$  é Morse-Smale.
- $g - g_0$  tem suporte em  $K$ .

Desta forma podemos considerar o complexo de Morse associado ao par  $(\tilde{\mathbb{A}}, g)$ .

Nosso trabalho a partir de agora é de provar que a homologia de tais complexos não depende da perturbação do par  $(\mathbb{A}_{H,N,k}, g_0)$  com as propriedades acima. De fato, mostraremos que podemos encontrar deformações conectando duas tais perturbações com “boas” propriedades de forma a garantir que todas as trajetórias contadas pelo mapa de continuação associado estão contidas em um compacto. Sendo assim, seguindo construções usuais em homologia de Morse, obtemos um mapa de cadeias entre os dois complexos que induz um isomorfismo natural entre as respectivas homologias.

Analogamente ao que é feito em [16] podemos ainda mostrar que a homologia obtida não depende da escolha de  $N$  suficientemente grande, a menos de um *shift* no grau. Desta forma obtemos finalmente um invariante da dinâmica Hamiltoniana de  $H_t$ . É esperado que este invariante coincida com a homologia de Floer. Tal construção feita com funções geradoras, em um espaço de fase não-compacto como  $\mathbb{R}^{2n}$ , é implementada pela primeira vez nesta tese até onde temos conhecimento. A vantagem de fazê-lo com funções geradoras é que nossa construção global pode ser usada em conjunto com a construção local feita em [16]. Aplicações serão exploradas em trabalhos futuros.

## Estrutura do trabalho

Este trabalho está dividido em 4 capítulos.

- No capítulo 1 apresentamos preliminares e alguns resultados clássicos em Topologia Simplética.
- No capítulo 2 relembramos construções e definições básicas em homologia de Morse, e uma breve discussão da homologia local de Morse nos baseando em [16].
- No capítulo 3 descrevemos a construção global que pretendemos implementar e apresentamos a análise para fazer a construção do complexo de Morse.
- No capítulo 4 apresentamos a análise para demonstrar que a homologia construída no capítulo 3 independe do hamiltoniano e da escolha do número  $N$  usado para discretizar a isotopia hamiltoniana, finalmente calculamos a homologia de Morse do par  $(\mathbb{A}_{H,N,k}, g_0)$ .



# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo vamos descrever e discutir alguns resultados clássicos em topologia simplética. Para isso nós seguiremos de perto os seguintes autores: [3], [20], e [24]. Daremos ênfase à Conjectura de Arnold, nos baseando em [19].

### 1.1 Difeomorfismos Hamiltonianos

Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética sem bordo. O grupo de difeomorfismos simpléticos, também chamados de symplectomorfismos de  $(M, \omega)$ , é

$$\text{Symp}(M, \omega) = \{\varphi \in \text{Diff}(M) \mid \varphi^* \omega = \omega\}$$

onde  $\text{Diff}(M)$  é o grupo de difeomorfismos de  $M$ .  $\text{Symp}(M, \omega)$  está equipado com a topologia  $\mathcal{C}^\infty$ . A componente conexa que contém a  $\text{Id}$  é um subgrupo denotado por  $\text{Symp}_0(M, \omega)$ . Segue do Teorema da vizinhança tubular Lagrangiana de Weinstein, assumindo que  $M$  seja compacta, que  $\text{Symp}_0(M, \omega)$  é o conjunto de difeomorfismos da forma  $\varphi^1$  para alguma isotopia diferenciável  $\{\varphi^t\}_{t \in [0,1]} \subset \text{Symp}(M, \omega)$ ,  $\varphi^0 = \text{Id}$ .

**Definição 1.1.1.** Dada uma função diferenciável  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ , também chamada Hamiltoniana, o campo vetorial Hamiltoniano associado  $X_H$  é definido por

$$\omega(X_H, \cdot) = dH.$$

Qualquer  $X \in \mathfrak{X}(M)$  para o qual  $i_X \omega$  é exata é um campo vetorial Hamiltoniano. O conjunto de campos vetoriais Hamiltonianos é denotado por  $\mathfrak{X}_{\text{Ham}}(M, \omega)$ .

**Observação 1.1.2.** De agora em diante nós assumimos que  $M$  é fechada, i.e. compacta e sem bordo. Qualquer campo vetorial não autônomo  $\{X_t\}_{t \in [0,1]}$  definida em uma variedade fechada induz uma isotopia diferenciável  $\{\varphi^t\}_{t \in [0,1]}$  como solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi^t = X_t \circ \varphi^t \\ \varphi^0 = \text{Id}. \end{cases}$$

Nós chamamos  $\{\varphi^t\}$  a isotopia induzida, ou gerada, por  $X_t$ .

Para uma função diferenciável  $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  escrevemos  $H_t = H(t, \cdot)$ . Então  $X_{H_t}$ ,  $t \in [0, 1]$ , é um campo vetorial não-autônomo. A isotopia que este campo gera será denotada por  $\varphi_H^t$ .

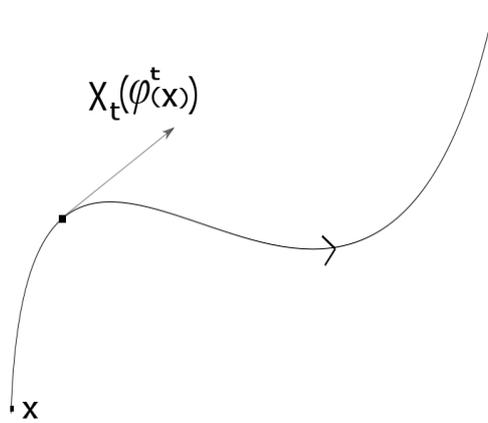


Figura 1.1: Campo vetorial gerando isotopias.

**Definição 1.1.3.**  $\varphi \in \text{Diff}(M)$  é chamado difeomorfismo Hamiltoniano se existe uma função  $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável tal que  $\varphi = \varphi_H^1$ . O conjunto de difeomorfismos Hamiltonianos de  $(M, \omega)$  será denotado por  $\text{Ham}(M, \omega)$ .

Na definição anterior não há perda de generalidade em assumir que  $H$  é definida em  $\mathbb{R} \times M$  e é 1-periódica em  $t$ . De fato, escolha  $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  diferenciável tal que  $h(0) = 0, h(1) = 1, h'(t) \geq 0$  para todo  $t, \text{Supp}(h') \subset (0, 1)$ . Agora considere  $K : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$K(t, z) = h'(t)H(h(t), z).$$

Então  $\varphi_K^t = \varphi_H^{h(t)}$  em particular  $\varphi_K^1 = \varphi_H^1$ . A extensão 1-periódica de  $K$  a  $\mathbb{R} \times M$  é diferenciável.

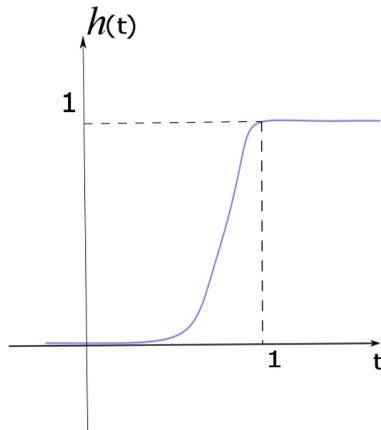


Figura 1.2: A função  $h(t)$ .

O conjunto  $\text{Ham}(M, \omega)$  é um subgrupo de  $\text{Symp}_0(M, \omega)$ . Para ver isso consideremos uma família de Hamiltonianas tempo-dependentes  $H_t, K_t : M \rightarrow \mathbb{R}, t \in [0, 1]$ . Defina  $G_t$  por

$$G_t = \begin{cases} 2h'(2t)H_{h(2t)} & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2h'(2t-1)K_{h(2t-1)} & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

onde  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é definida como antes. Então

$$\varphi_G^t = \begin{cases} \varphi_H^{h(2t)} & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \varphi_K^{h(2t-1)} \circ \varphi_H^1 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Em particular,  $\varphi_K^1 \circ \varphi_H^1 = \varphi_G^1 \in \text{Ham}(M, \omega)$ . Para a inversa consideramos  $F_t = -H_t \circ \varphi_H^t$ , e da identidade  $\frac{d}{dt}(\varphi_H^t \circ \varphi_F^t) = 0$  se tem que  $\varphi_F^t = (\varphi_H^t)^{-1}$ .

**Observação 1.1.4.** *O fluxo de um campo vetorial Hamiltoniano é um difeomorfismo que conserva a forma simplética, i.e.  $(\varphi_H^t)^*\omega = \omega$  para todo  $t$ .*

### 1.1.1 Soluções periódicas não-degeneradas

Se  $H_t$  é 1-periódica em  $t$  então soluções periódicas de período 1 do sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = X_t \circ \mathbf{x}$$

correspondem biunivocamente a ponto fixos do difeomorfismo  $\varphi_H^1$ .

**Definição 1.1.5.** *Uma solução periódica  $\mathbf{x}(t)$  é chamada não-degenerada se o diferencial de  $\varphi_H^1$  em  $\mathbf{x}(0)$  não tem autovalor 1, isto é*

$$\det(\text{Id} - d_{\mathbf{x}(0)}\varphi_H^1) \neq 0.$$

No caso específico onde a Hamiltoniana  $H$  não depende do tempo, os pontos críticos de  $H$  são soluções periódicas constantes do sistema Hamiltoniano  $\dot{\mathbf{x}}(t) = X_H(\mathbf{x}(t))$ .

### 1.1.2 Campos vetoriais Simpléticos vs Hamiltonianos.

Seja uma isotopia diferenciável  $\{\varphi^t\} \subset \text{Diff}(M)$  satisfazendo  $\varphi^0 = \text{Id}$ . Quando será verdade que  $\{\varphi^t\} \subset \text{Symp}(M, \omega)$ ? É necessário e suficiente que  $\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega = 0$ . Se  $X_t$  é o campo vetorial que gera  $\varphi^t$ , então usando a fórmula de Cartan nós temos

$$0 = \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega = (\varphi^t)^*\mathcal{L}_{X_t}\omega = (\varphi^t)^*(d(i_{X_t}\omega) + i_{X_t}d\omega)$$

o que implica que

$$d(i_{X_t}\omega) = 0, \text{ para todo } t.$$

Isso motiva a seguinte definição.

**Definição 1.1.6.**  *$X \in \mathfrak{X}(M)$  é um campo vetorial simplético se  $i_X\omega$  é fechada. O conjunto dos campos vetoriais simpléticos é denotado por  $\mathfrak{X}(M, \omega)$ .*

O cálculo anterior mostra que  $X_t$  gera isotopia simplética diferenciável se e somente se,  $X_t \in \mathfrak{X}(M, \omega)$  para todo  $t$ . E temos as seguintes inclusões

$$\mathfrak{X}_{\text{Ham}}(M, \omega) \subset \mathfrak{X}(M, \omega) \subset \mathfrak{X}(M).$$

Aqueles espaços vetoriais são todos fechados pelo colchete de Lie  $[\cdot, \cdot]$ . Os espaços  $\mathfrak{X}_{\text{Ham}}(M, \omega)$ ,  $\mathfrak{X}(M, \omega)$  e  $\mathfrak{X}(M)$  são as álgebras de Lie de  $\text{Ham}(M, \omega)$ ,  $\text{Symp}(M, \omega)$  e  $\text{Diff}(M)$  respectivamente.

## 1.2 Dinâmica Hamiltoniana

Sabemos que, módulo uma reparametrização, o fluxo de  $X_H$  restrito ao nível de energia regular  $k$  depende somente da hipersuperfície  $H^{-1}(k)$ . Isto é, dada uma hipersuperfície  $S$  em  $M$ , seu *fibrado de linhas características*  $L_S$  é o subfibrado de  $TS$  dado pela distribuição unidimensional  $\ker \omega|_{TS}$ , que vamos chamar *folheação característica* de  $S$ .

**Proposição 1.2.1.** *O campo  $X_H$  é tangente à folheação característica.*

*Demonstração.* Seja  $S = H^{-1}(k)$  um nível de energia regular. Temos que

$$\omega(X_H, v) = dH(v) = 0$$

para todo  $v \in TS$ . □

**Corolário 1.2.2.** *Seja  $S$  uma hipersuperfície de energia regular comum a duas Hamiltonianas  $H_1$  e  $H_2$ . Então os fluxos Hamiltonianos de  $H_1$  e  $H_2$  em  $S$  diferem apenas por uma reparametrização.*

### 1.2.1 O princípio variacional

#### Mecânica Hamiltoniana

Sabemos que as equações de movimento na mecânica clássica surgem como soluções de problemas variacionais. Considere um sistema cujas configurações são descritas por pontos  $x$  no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , e que se movem ao longo de trajetórias  $x(t)$  descritas como funções do tempo  $t$ .

Seja  $L = L(t, x, v)$  uma função de classe  $C^2$  de  $2n + 1$  variáveis  $(t, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$  onde nós pensamos em  $v \in \mathbb{R}^n = T_x\mathbb{R}^n$  como um vetor tangente no ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  que representa a velocidade  $\dot{x}$ . Considere o problema de minimizar a ação integral

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt \tag{1.1}$$

definido no conjunto de caminhos  $x \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  que satisfazem as condições de fronteira

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

A função  $L$  é chamada Lagrangiana desse problema variacional. Um caminho continuamente diferenciável  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é chamado de mínimo se

$$I(x) \leq I(x + \xi)$$

para cada  $\xi \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  com  $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$ . Assim, nós variamos  $x$  mantendo seus pontos finais fixos.

**Lema 1.2.3.** *Um caminho mínimo  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma solução da equação Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Aqui estamos considerando a notação vetorial  $\frac{\partial L}{\partial v} = \left( \frac{\partial L}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial v_n} \right) \in \mathbb{R}^n$ , e da mesma forma para  $\frac{\partial L}{\partial x}$ .

Sob a condição de Legendre

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial v_k} \right) \neq 0 \tag{1.3}$$

a equação (1.2) define um sistema regular de equações diferenciáveis ordinárias de segunda ordem em  $n$  variáveis  $x_1, \dots, x_n$ . É conveniente introduzir certas novas variáveis, ditas variáveis de *momento generalizado*.

$$y_k = \frac{\partial L}{\partial v_k}(x, v), \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Então

$$\dot{y}_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_k}$$

sempre que  $x$  for uma solução de (1.2). Segue da condição (1.3) e do teorema da função implícita que  $v$  pode ser expresso localmente como uma função de  $(t, x, y)$  e que nós denotamos por

$$v_k = G_k(t, x, y).$$

Defina a Hamiltoniana

$$H = \sum_{j=1}^n y_j v_j - L$$

e considere  $H$  como uma função de  $(t, x, y)$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_k} &= \sum_j y_j \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial L}{\partial x_k} = -\dot{y}_k \\ \frac{\partial H}{\partial y_k} &= v_k + \sum_j y_j \frac{\partial v_j}{\partial y_k} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial y_k} = v_k = \dot{x}_k \end{aligned}$$

Isto é, as equações de Euler-Lagrange (1.2) transformam-se nas equações diferenciais Hamiltonianas

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.5)$$

Isso prova o seguinte resultado.

**Lema 1.2.4.** *Seja  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho continuamente diferenciável e  $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  as novas variáveis dadas por (1.4). Então  $x$  é uma solução das equações de Euler-Lagrange (1.2) se, e somente se, as funções  $x$  e  $y$  satisfazem o sistema Hamiltoniano (1.5).*

**Observação 1.2.5.** *O processo acima pode ser revertido. Sob a condição*

$$\det \left( \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k} \right) \neq 0 \quad (1.6)$$

*o sistema Hamiltoniano (1.5) pode ser transformado nas equações Euler-Lagrange (1.2).*

### Ação Simplética

Vimos que as soluções de uma equação diferencial Hamiltoniana obedecem um princípio variacional sempre que a condição (1.6) é satisfeita. Daremos agora uma formulação alternativa deste princípio que não depende da condição (1.6) e, conseqüentemente, é válido para sistemas Hamiltonianos em geral.

Considere a 1-forma  $\alpha_0 = \sum_j y_j dx_j$  em  $\mathbb{R}^{2n}$ . Note que  $\alpha_0$  é primitiva da forma simplética canônica  $\omega_0 = \sum_j dy_j \wedge dx_j$ . Suponha que a Lagrangiana  $L$  satisfaz a condição de Legendre (1.3) e seja  $H(t, x, y)$  a função Hamiltoniana correspondente. Denote  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Dada uma curva duas vezes diferenciável  $x : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , seja  $y : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por (1.4) com  $v = \dot{x}$  e denotamos  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Então a integral  $I(x)$  definida por (1.1) concorda com a ação  $A_H(\gamma)$  definida por

$$A_H(\gamma) = \int_{\gamma} \alpha_0 + \int_{S^1} H_t(\gamma(t)) dt \quad (1.7)$$

Isso define um funcional no espaço de curvas fechadas em  $\mathbb{R}^{2n}$ , que chamamos de *funcional de ação*.

**Proposição 1.2.6** (Princípio de Hamilton). *Suponha que  $H_t$  é 1-periódica em  $t$ . Pontos críticos do funcional de ação estão em bijeção com o conjunto de órbitas 1-periódicas de  $X_{H_t}$ . Mais precisamente, uma curva fechada  $\gamma : S^1 \rightarrow M$ , é uma órbita periódica de  $X_{H_t}$  se, e somente se, dada qualquer variação suave de curvas fechadas  $\Gamma : [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$  tal que  $\Gamma(0, \cdot) = \gamma$ , tem-se*

$$\left. \frac{dA_H(\Gamma(s, \cdot))}{ds} \right|_{s=0} = 0.$$

*Demonstração.* Seja  $X$  o campo vetorial ao longo de  $\gamma$  dado por  $\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \Gamma(s, \cdot)$ . Pelo teorema de Stokes temos

$$\int_{[0, \epsilon] \times S^1} \Gamma^* d\alpha = \int_{\epsilon \times S^1} \Gamma^* \alpha - \int_{0 \times S^1} \Gamma^* \alpha.$$

Dividindo ambos lados acima por  $\epsilon$  e fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos que o lado direito converge para a derivada de  $\int_{S^1} \alpha$  na direção  $X$  e o lado esquerdo tende para  $\int_{S^1} d\alpha|_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t)) dt$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} dA_H(\gamma) \cdot X &= \int_{S^1} d\alpha(\gamma(t))(X(t), \dot{\gamma}(t)) + dH_t(\gamma(t)) \cdot X(t) dt \\ &= \int_{S^1} \omega(\gamma(t))(X(t), \dot{\gamma}(t) - X_{H_t}(\gamma(t))) dt. \end{aligned}$$

Como pontos críticos são caracterizados pela integral acima ser nula para todo  $X(t)$ , encontramos que estes também são caracterizados como sendo soluções 1-periódicas da equação diferencial  $\dot{\gamma}(t) = X_{H_t}(\gamma(t))$ .  $\square$

Para encerrar esta seção, vamos considerar alguns exemplos.

**Exemplo 1.2.7** (Dinâmica em elipsóides). *Seja  $H : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma Hamiltoniana da forma*

$$H(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n \frac{|z_j|^2}{r_j^2}$$

onde  $0 < r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ . Os níveis de energia de  $H$  são os bordos dos elipsóides

$$E_k(r_1, r_2, \dots, r_n) = \left\{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \sum_{j=1}^n \left| \frac{z_j}{r_j} \right|^2 \leq k \right\}.$$

Para estudarmos sua dinâmica basta nos restringirmos ao caso  $k = 1$  pois  $H$  é 2-homogênea. Como  $X_H$  é linear, podemos calcular explicitamente seu fluxo, que é dado por

$$\varphi_t(z_1, z_2, \dots, z_n) = (e^{t\lambda_1 i} z_1, e^{t\lambda_2 i} z_2, \dots, e^{t\lambda_n i} z_n)$$

onde  $\lambda_j = \frac{2}{r_j^2}$ . Consequentemente,  $X_H$  restrita a  $\partial E_1(r_1, r_2, \dots, r_n)$  possui ao menos  $n$  órbitas periódicas dadas por

$$\gamma_j(t) = (0, \dots, 0, z_j(t), 0, \dots, 0),$$

onde  $z_j(t) = e^{t\lambda_j i} z_j(0)$  e  $|z_j(0)|^2 = r_j^2$ . De fato, existem duas possíveis situações:

- $\langle (r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2), v \rangle \neq 0$  para todo  $v \in \mathbb{Z}^n$ ,  $v \neq 0$ , quando as únicas órbitas periódicas são  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ;
- $\langle (r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2), v \rangle = 0$  para algum  $v \in \mathbb{Z}^n$ ,  $v \neq 0$ , quando existem infinitas órbitas periódicas.

**Exemplo 1.2.8** (Fluxos geodésicos). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $T^*M$  seu fibrado cotangente, munido da forma simplética padrão. A métrica  $g$  define um difeomorfismo entre os fibrados tangente e cotangente de  $M$  dado por  $(x, v) \rightarrow (x, i_v g)$ . Seja  $\omega$  a forma simplética em  $TM$  dado pelo pullback da forma simplética padrão em  $T^*M$  via tal difeomorfismo.*

*Considere em  $TM$  a Hamiltoniana  $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$  dada pela energia cinética  $H(x, v) = \frac{1}{2}g(v, v)$ . Seu fluxo Hamiltoniano é chamado o fluxo geodésico de  $M$  e é dado por*

$$\varphi_{(x,v)}(t) = (c_{(x,v)}(t), \dot{c}_{(x,v)}(t))$$

*onde  $c_{(x,v)}$  é a única geodésica em  $M$  tal que  $c_{(x,v)}(0) = x$  e  $\dot{c}_{(x,v)}(0) = v$  (lembre que uma curva  $c$  é uma geodésica se satisfaz  $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$ ). Fluxos geodésicos são objetos de intenso estudo há décadas e constituem um importante campo de investigação envolvendo geometria diferencial e sistemas dinâmicos. Existem vários trabalhos sobre o assunto, especialmente quando a curvatura de  $M$  é não-positiva.*

### 1.3 A conjectura de Arnold

Na década de 1960 V. I. Arnold enunciou uma famosa conjectura sobre uma cota inferior para o número de pontos fixos de difeomorfismos Hamiltonianos em variedades simplética fechadas. Isso levou A. Floer 1986 à construir sua teoria de homologia, hoje chamada “Homologia de Floer”, que é uma espécie de Homologia de Morse para o funcional de ação.

**Teorema 1.3.1** (Poncairé-Birkhoff 1912-1913). *Seja  $f$  um homeomorfismo do anel  $A = S^1 \times [a, b]$  que preserva área e orientação. Suponha que cada componente conexa de  $\partial A$  é invariante por  $f$ . Suponha também que  $f$  gira cada componente conexa de  $\partial A$  em direções opostas (ver Figura 1.3). Então  $f$  possui ao menos dois pontos fixos.*

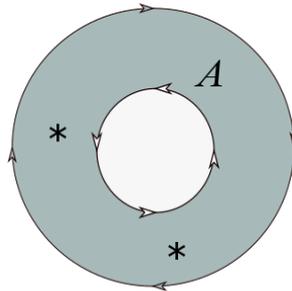


Figura 1.3:  $A = S^1 \times [a, b]$ .

Em 1913, G. Birkhoff [2] conseguiu provar este teorema por um argumento estritamente bidimensional. Observe que o teorema é de natureza global. É possível mostrar que o Teorema não é verdade se alguma das hipótese é omitida.

**Teorema 1.3.2** (Lefschetz 1926). *Seja  $X$  um poliedro compacto e  $f : X \rightarrow X$  um mapa contínuo. Defina*

$$\Lambda_f = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(f_* |_{H_k(X, \mathbb{Q})}).$$

*Se  $\Lambda_f \neq 0$  então  $f$  possui ao menos um ponto fixo.*

Como a característica de Euler do anel  $A$  é zero  $\mathcal{X}(A) = 0$ , o teorema de Lefschetz não nos fornece nada sobre pontos fixos de  $f$  quando este é homotópico à identidade. A característica de Euler da 2-esfera  $S^2$  é não zero ( $\mathcal{X}(S^2) = 2$ ), pelo teorema de Lefschetz toda aplicação contínua  $g : S^2 \rightarrow S^2$  homotópica à identidade possui pelo menos um ponto fixo.

**Teorema 1.3.3** (Nikishin, Simon 1974). *Um homeomorfismo  $f$  em  $S^2$  homotópico à identidade que preserva uma medida regular  $\mu$  (área) possui ao menos dois pontos fixos.*

*Demonstração.* Pelo teorema de Lefschetz  $f$  possui ao menos um ponto fixo  $p$ . Suponha que seja o único. Então  $g = f|_{S^2 - \{p\}}$  é um homeomorfismo em  $\mathbb{R}^2$  sem pontos fixos, é possível provar (via o teorema de translação de Brouwer) que existe um aberto  $D$  tal que  $g^j(D)$  são disjuntos  $\forall j > 0$ .

Mas então, desde que  $f$  preserva medida

$$\sum_{j=0}^n \mu(g^j(D)) = (n+1)\mu(D) \leq \mu(S^2),$$

para todo inteiro  $n \geq 1$  e, portanto  $\mu(D) = 0$ . Isso contradiz o fato de que  $\mu(U) \neq 0$  quando  $U$  é aberto.  $\square$

Em 1978, Arnold mostrou que o teorema de Poincaré-Birkhoff poder ser derivado a partir de um resultado para difeomorfismos em  $\mathbb{T}^2$ .

**Definição 1.3.4.** *Seja  $\psi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um difeomorfismo que preserva área, e é homotópico à identidade. Identificando  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , podemos escrever um levantamento  $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  na forma*

$$\tilde{\psi}(x, y) = (x + p(x, y); y + q(x, y))$$

com  $p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções  $\mathbb{Z}^2$ -periódicas. Dizemos que  $\psi$  preserva o centro de massa se existe um levantamento  $\tilde{\psi}$  tal que

$$\int_{[0,1]^2} p = \int_{[0,1]^2} q = 0.$$

Arnold mostra que podemos “colar” duas cópias de um difeomorfismo  $f : A \rightarrow A$  como no teorema de Poincaré-Birkhoff, de forma a obter um difeomorfismo  $\psi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  que preserva área e centro de massa. Essa observação e o teorema abaixo provam o Teorema de Poincaré-Birkhoff para difeomorfismos  $C^1$ -próximos da identidade.

**Teorema 1.3.5** (V.I. Arnold). *Todo difeomorfismo em  $\mathbb{T}^2$  homotópico à identidade, preservando área e centro de massa, e suficientemente  $C^1$ -próximo da identidade possui ao menos 3 pontos fixos.*

Isso motiva a seguinte

**Conjectura de Arnold.** Para uma variedade fechada  $W$  nós escrevemos

$$b(W) = \inf_{f \in \mathcal{C}^\infty(W, \mathbb{R})} \# \text{Crit}(f).$$

Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética fechada. A *Conjectura de Arnold* afirma que

$$\# \text{Fix}(\varphi) \geq b(M) \text{ para todo } \varphi \in \text{Ham}(M, \omega).$$

Se  $\varphi$  for não-degenerada então

$$\# \text{Fix}(\varphi) \geq \sum_{i=0}^{2n} \dim H_i(M, \mathbb{Q}).$$

**Observação 1.3.6.** *Considere  $W$  uma variedade diferenciável fechada e  $f \in \text{Diff}(W)$  homotópica à Id então*

$$\#\text{Fix}(f) < \infty \Rightarrow \mathcal{X}(W) = \Lambda_f = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} L_x(f),$$

onde  $L_x(f)$  é o índice de Lefschetz de um ponto fixo isolado  $x$ . Em particular, se  $\varphi \in \text{Ham}(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0)$  então o teorema de Lefschetz não prevê pontos fixos de  $\varphi$ , mas a Conjetura de Arnold para o toro prevê  $b(\mathbb{T}^{2n}) = 2n + 1$  pontos fixos.

**Teorema 1.3.7.** (Conley-Zehnder, 1983). Se  $H_t$  é uma Hamiltoniana 1-periódica em  $(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0)$  então  $\varphi_H^1$  tem pelo menos  $2n + 1$  pontos fixos contráteis. Se os pontos fixos contráteis são todos não-degenerados então há pelo menos  $2^{2n}$  deles.



# Capítulo 2

## Homologia de Morse

Aqui nós discutimos homologia de Morse, e apresentamos a construção da homologia de Morse do funcional de ação discreto.

### 2.1 Teoria de Morse

Seja  $p$  um ponto da variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $m$ , denotemos por  $T_pM$  o espaço tangente de  $M$  em  $p$ . Um **ponto crítico** de uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é um ponto  $p$ , na qual o diferencial

$$df_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

é zero. O conjunto de pontos críticos de  $f$  é denotado por  $\text{Crit } f$ .

A **Hessiana**  $H_p f$  de uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  em um ponto crítico  $p$  é uma aplicação bilinear simétrica

$$H_p f : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

definida da seguinte maneira. Para quaisquer dois vetores tangentes  $V, W \in T_pM$  escolhemos campos de vetores  $\tilde{V}, \tilde{W}$  definidos ao redor de  $p$  que assumem os valores  $V, W$  em  $p$  respectivamente. Se define

$$H_p f(V, W) = (\tilde{V} \cdot (\tilde{W} \cdot f))(p) = V_p \cdot (\tilde{W} \cdot f)$$

Por definição, a expressão anterior é independente da extensão  $\tilde{V}$  de  $V$ . Usando o colchete de Lie temos

$$\tilde{V} \cdot (\tilde{W} \cdot f)(p) - \tilde{W} \cdot (\tilde{V} \cdot f)(p) = ([\tilde{V}, \tilde{W}] \cdot f)(p) = 0$$

logo a expressão anterior para  $H_p f$  é simétrica e portanto é independente da extensão  $\tilde{W}$  de  $W$  também. Se  $(x_1, \dots, x_m)$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , então  $\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_p$  é uma base para  $T_pM$  e  $H_p f$  se expressa com relação a essa base da seguinte maneira:

$$d^2 f(p) = \sum_{i,j=1}^m \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_p dx_i \otimes dx_j.$$

Logo a matriz de  $H_p f$  com relação a essa base é a segunda derivada de  $f$  em coordenadas locais, portanto é simétrica diagonalizável com autovalores reais.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $p$  um ponto crítico da função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

1. *A maior dimensão de um subespaço de  $T_pM$  no qual  $H_p f$  é negativa definida é chamada o índice de Morse de  $p$ . Coincide com o número de autovalores negativos da matriz  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_p \right)_{ij}$  e será denotado por  $\mu_p$ .*

2. O ponto crítico  $p$  é chamado **não-degenerado** quando a Hessiana  $H_p f$  é não-degenerada isto é o determinante da matriz  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_p\right)_{ij}$  é não nulo.
3. Uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada **função de Morse** se todos os seus pontos críticos de  $f$  são não-degenerados.

**Lema 2.1.2.** *Os pontos críticos não-degenerados são isolados.*

*Demonstração.* Seja  $p \in \text{Crit } f$  e  $(\varphi = (u_1, \dots, u_m), U)$  coordenadas locais perto de  $p$ . Considere a aplicação diferenciável

$$G := \left( \frac{\partial f}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u^m} \right) : U \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

logo temos que  $G(p) = 0$  e  $dG = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{ij}$  é não-singularem  $p$ . Pelo teorema da função inversa,  $G$  é um difeomorfismo de alguma vizinhança  $U_p$  de  $p$  sobre sua imagem, em particular  $G$  é injetiva em  $U_p$ , isto é para todo  $q \in U_p \setminus \{0\}$  tem-se  $G(q) \neq G(0) = 0$ .  $\square$

**Corolário 2.1.3.** *Toda função de Morse  $f$  definida em uma variedade diferenciável fechada  $M$  (compacta e sem bordo) tem um número finito de pontos críticos.*

Faremos uso do seguinte fato fundamental.

**Teorema 2.1.4.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável fechada, então o conjunto de funções de Morse é um aberto e denso em  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ .*

A prova pode ser encontrada em [1], (Cap.1).

### 2.1.1 Fluxo gradiente e variedades estável e instável

Seja  $X$  um campo vetorial diferenciável em  $M$ . Para cada  $q \in M$  considere o problema de valor inicial para curvas diferenciáveis  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  dado por

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = q. \tag{2.1}$$

Do fato que  $M$  é fechada, a solução  $\gamma = \gamma_q$  existe para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esta solução é chamada *trajetória* através de  $q$ . O fluxo gerado por  $X$  é a aplicação diferenciável  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ,  $(t, q) \rightarrow \gamma_q(t)$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , isso dá origem a um difeomorfismo  $\phi_t : M \rightarrow M$ ,  $(t, q) \rightarrow \phi(t, q)$ , chamado *aplicação exponencial* e satisfaz as seguintes propriedades

$$\phi_{t+s} = \phi_t \phi_s \quad \text{e} \quad \phi_0 = \text{Id},$$

isto é,  $\{\phi_t\}$  é um grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos de  $M$ .

A *órbita*  $\mathcal{O}(q)$  de um ponto  $q \in M$  é definida por  $\phi_{\mathbb{R}}(q) := \{\phi_t(q) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Existem três tipos de órbitas:

- *Órbita singular:* É aquela que consiste de um só ponto  $q$  (o qual é necessariamente uma singularidade do campo  $X$ .)
- *Órbita fechada:* É aquela na qual existe um  $T \neq 0$ , tal que  $\phi_T(q) = q$  e  $\phi_t(q) \neq q$  sempre que  $t \in (0, T)$ . Nesse caso  $T$  é chamado o *período* da órbita.
- *Órbita regular:* É aquela que não é singular nem fechada.

Elas são imersões injetivas de  $\mathbb{R}$  em  $M$ . É natural perguntar se admitem pontos limite em seus fins. Para cada  $q \in M$ , define-se  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite por

$$\alpha(q) := \{p \in M \mid \phi_{t_k}(q) \rightarrow p \text{ para alguma sequência } t_k \rightarrow -\infty\},$$

$$\omega(q) := \{p \in M \mid \phi_{t_k}(q) \rightarrow p \text{ para alguma sequência } t_k \rightarrow \infty\}.$$

**Observação 2.1.5.** *O  $\alpha$ -limite de  $q$  é o  $\omega$ -limite de  $q$  com relação ao campo vetorial  $-X$ . Além disso  $\omega(q) = \omega(\tilde{q})$  sempre que  $\tilde{q}$  pertence à órbita que passa por  $q$ . Isso dá sentido à notação  $\omega(q) = \omega(\mathcal{O}(q))$ . Do fato que  $M$  é fechada segue que  $\alpha(q)$ ,  $\omega(q)$  são não vazios, fechados, conexos e invariantes pelo fluxo.*

Agora vamos nos restringir ao caso do *fluxo gradiente*. Seja  $g$  uma métrica Riemanniana e  $f$  uma função diferenciável em  $M$ . A igualdade  $g(\nabla f, \cdot) = df(\cdot)$  determina o *campo vetorial gradiente*  $\nabla f$ . O fluxo associado a  $X = -\nabla f$  é chamado o *fluxo anti-gradiente*. Se  $\gamma$  é trajetória do fluxo anti-gradiente, então

$$\frac{d}{dt}f \circ \gamma(t) = g(\nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) = -|\nabla f(\gamma(t))|^2 \leq 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Isto mostra que  $f$  é estritamente decrescente ao longo de órbitas não singulares. Logo órbitas fechadas podem não existir, e qualquer órbita  $\mathcal{O}(q)$  intersecta o conjunto de nível  $f^{-1}(f(q))$  só uma vez. Além disso, tal intersecção é ortogonal com respeito da métrica  $g$ .

A composição da linearização de  $-\nabla f$  em uma singularidade  $x$  com a projecção no segundo fator define um operador linear

$$-D\nabla f(x) : T_x M \xrightarrow{-d\nabla f(x)} T_{\nabla f(x)} TM \simeq T_x M \oplus T_x M \xrightarrow{pr_2} T_x M,$$

dado por

$$\begin{aligned} -D\nabla f(x) \cdot v &= \tilde{\alpha}'(0) \text{ onde } \tilde{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM, \quad t \mapsto (\alpha(t), -\nabla f_{\alpha(t)}) \text{ com } \alpha(0) = x \\ &\simeq \left( \alpha'(0), \frac{D}{dt}[\nabla f_{\alpha(t)}] \Big|_{t=0} \right) \in T_x M \oplus T_x M. \end{aligned}$$

Aqui usamos a derivada covariante com relação à métrica  $g$ , e identificamos os espaços  $T_{\nabla f(x)} TM$  e  $T_x M \oplus T_x M$  usando a decomposição induzida por  $g$  em vetores horizontais e verticais.

Com respeito das coordenadas locais  $(\varphi = (x_1, \dots, x_n), U)$  perto de  $x$ , o operador  $D\nabla f(x)$  é representado pela matrix Hessiana  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{ij}$ . Além disso nessas coordenadas se verifica que

$$H_x f(V, W) = g(D\nabla f(x)V, W) \text{ para todo } V, W \in T_x M.$$

Por tanto,  $D\nabla f(x)$  é um operador simétrico e o número de autovalores negativos coincide com  $\mu_x$ . Seja  $E^u$  a soma dos auto espaços correspondentes aos autovalores negativos, e do mesmo jeito define-se  $E^s$  com respeito aos autovalores positivos. Esses espaços são chamados subespaços instável, estável respectivamente. A aplicação exponencial, associada ao campo vetorial linear  $-D\nabla f(x)$  em  $T_x M$  é dada pelo operador linear simétrico  $A_t := \exp(-tD\nabla f(x))$  em  $T_x M$ . Isso mostra que  $A_t$  deixa invariante os subespaços  $E^u$  e  $E^s$ .

**Lema 2.1.6.** *Para cada  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , seja  $\phi_t$  a isotopia gerada por  $X = -\nabla f$ . Se  $x \in \text{Crit } f$ , então*

$$d\phi_t(x) = \exp(-tD\nabla f(x)).$$

*Demonstração.* A aplicação  $d\phi_t(x)$  coincide com  $A_t$ , pois ela satisfaz as duas identidades que caracterizam a isotopia associada a  $-D\nabla f(x)$ . Seja  $V \in T_x M$  e  $c$  uma curva diferenciável em  $M$  satisfazendo  $c(0) = x$  e  $c'(0) = V$ . Então do fato que  $\phi_0 = \text{Id}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}\phi_t = -\nabla f(\phi_t)$  e  $\phi_0(x) = x$  tem-se

$$d\phi_0(x)V = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \phi_0(c(\tau)) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} c(\tau) = V$$

$$\frac{\partial}{\partial t} d\phi_t(x)V = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \frac{\partial}{\partial t} \phi_t(c(\tau)) = -D\nabla f(x) \circ d\phi_t(x)V.$$

□

**Proposição 2.1.7.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse em uma variedade Riemanniana fechada  $(M, g)$ . Então toda trajetória anti-gradiente de  $f$  começa e termina em um ponto crítico. Isto significa dizer que para qualquer  $p \in M$  os limites*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_p(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_p(t)$$

*existem são pontos em  $\text{Crit } f$ .*

*Demonstração.* Seja  $p \in M$  e seja  $\gamma_p(t)$  a trajetória anti-gradiente de  $f$  através de  $p$ . Como  $M$  é compacta,  $\gamma_p(t)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e a imagem de  $f \circ \gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}$ . Do fato que  $f$  é estritamente decrescente ao longo de trajetórias anti-gradientes (2.2) se pode provar que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d}{dt} f(\gamma_p(t)) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} -|(\nabla f)(\phi_t(p))|^2 = 0.$$

De fato, considere o caso  $t \rightarrow +\infty$ , o caso  $t \rightarrow -\infty$  é análogo. Obviamente o limite de  $f \circ \phi_t(p)$  quando  $t \rightarrow +\infty$  existe e coincide com  $c := \inf_t f \circ \phi_t(p)$ . Se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} -|(\nabla f)(\phi_t(p))|^2$  não existe ou não é igual a zero encontramos  $t_n \rightarrow +\infty$  e  $\epsilon > 0$  tais que  $-|(\nabla f)(\phi_{t_n}(p))|^2 < -\epsilon^2$  para todo  $n$ . A menos de escolha de uma subsequência, podemos assumir que  $\phi_{t_n}(p) \rightarrow p_*$  para algum  $p_* \in M$ . Logo  $-|(\nabla f)(p_*)| \leq -\epsilon$ , em particular  $p_*$  não é ponto crítico. Logo encontramos  $\delta > 0$  tal que  $f(\phi_\delta(p_*)) < f(p_*) = c$ . Isto implica que  $f \circ \phi_{t_n+\delta}(p) < c$  para  $n$  suficientemente grande, um absurdo.

Seja agora  $t_n \rightarrow +\infty$  uma sequência qualquer. Pela compacidade de  $M$ , a sequência  $\{\gamma_p(t_n)\}$  tem um ponto de acumulação. Passando a uma subsequência podemos assumir que  $\gamma_p(t_n)$  tem um limite  $q$ . O ponto  $q$  é um ponto crítico de  $f$ , pois foi mostrado acima que  $|(\nabla f)(\gamma_p(t_n))| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Isto mostra que toda sequência  $t_n \rightarrow +\infty$  tem uma subsequência  $t_{n_j}$  tal que  $\gamma_p(t_{n_j})$  converge a um ponto crítico de  $f$  quando  $j \rightarrow +\infty$ .

Sendo assim, podemos tomar  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\gamma_p(t_n) \rightarrow q$  para algum ponto crítico  $q$ . Afirma-mos que  $\gamma_p(t) \rightarrow q$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Escolha uma vizinhança fechada  $U_q$  tal que  $q$  é o único ponto crítico de  $f$  em  $U_q$ . Se  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_p(t) \neq q$ , então encontramos uma outra sequência  $t'_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\gamma_p(t'_n) \rightarrow q'$  para algum ponto crítico  $q' \neq q$ . Dessa forma, como  $q' \notin \partial U_q$ , encontramos ainda uma terceira subsequência  $t''_n$  tal que  $\gamma_p(t''_n)$  converge a um ponto de  $\partial U_q$ , em contradição com o fato de que  $\partial U_q$  não possui pontos críticos. □

Agora nós assumiremos que o fluxo anti-gradiente é gerado por uma função de Morse.

**Corolário 2.1.8.** *Seja  $M$  uma variedade fechada e  $X = -\nabla f$ , onde  $f$  é uma função de Morse. Então  $\alpha(q)$  e  $\omega(q)$  consistem de um só ponto crítico de  $f$ , para cada  $q \in M$ .*

A **variedade estável** de um ponto crítico  $x$  de  $f$ , define-se como

$$W^s(x) := \{q \in M \mid \omega(q) = x\}$$

e a **variedade instável** de um ponto crítico  $x$  de  $f$ , define-se como

$$W^u(x) := \{q \in M \mid \alpha(q) = x\}.$$

A aplicação

$$H : [0, 1] \times W^s(x) \rightarrow W^s(x) \\ (t, q) \rightarrow \phi_{\frac{t}{1-t}}(q) \text{ quando } t \in [0, 1), \text{ ou } x \text{ quando } t = 1$$

fornece uma homotopia contínua entre a aplicação identidade em  $W^s(x)$  e a aplicação constante  $q \rightarrow x$ . Analogamente se pode tratar da variedade instável. Por tanto as variedades estável e instável são contráteis.

**Teorema 2.1.9** (Teorema da variedade estável). *Seja  $f$  uma função de Morse e  $x \in \text{Crit } f$ . Então  $W^s(x)$  é uma subvariedade de  $M$  e seu espaço tangente em  $x$  é dado por o subespaço estável  $E^s \subset T_x M$ .*

O teorema se verifica para  $W^u$  com espaço tangente  $E^u$  em  $x$  (Prova: substitua  $f$  por  $-f$  e aplique o teorema acima.)

## 2.2 Espaços de órbitas de conexão

### 2.2.1 A condição de Morse-Smale

**Definição 2.2.1.** *Nós diremos que o campo vetorial anti-gradiente  $-\nabla^g f$  satisfaz a **condição de Morse-Smale** se  $W^u(x)$  e  $W^s(y)$  se intersectan transversalmente, para todo  $x, y \in \text{Crit } f$ . Nesse caso  $(f, g)$  é chamado de um par Morse-Smale.*

Sob essa condição,

$$\mathcal{M}_{xy} = W^u(x) \cap W^s(y) = \left\{ p \in M \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi^s(p) = x \text{ e } \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi^s(p) = y \right\}$$

é uma subvariedade de  $M$  e sua dimensão é

$$\dim \mathcal{M}_{xy} = \mu_x - \mu_y.$$

**Proposição 2.2.2.** *O grupo  $\mathbb{R}$  de traslações no tempo age em  $\mathcal{M}_{xy}$  por  $s.x = \varphi^s(x)$ . Esta ação é livre se  $x \neq y$ .*

*Demonstração.* O fato de ser uma operação de grupo é claro. Se  $x \neq y$ , então não há pontos críticos em  $\mathcal{M}_{xy}$ . Seja  $q \in \mathcal{M}_{xy}$ , sabemos que  $q$  não é ponto crítico, então  $f(\varphi^s(q))$  é uma função decrescente de  $s$ , de modo que se  $\varphi^s(q) = \varphi^{s'}(q)$  tem-se  $s = s'$ . Logo a ação é livre.  $\square$

O quociente é, portanto uma variedade que vamos denotar por  $\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = \mathcal{M}_{xy}/\mathbb{R}$ , e sua dimensão é

$$\dim \widehat{\mathcal{M}}_{xy} = \mu_x - \mu_y - 1.$$

**Corolário 2.2.3.** *Seja  $(f, g)$  um par Morse-Smale definido na variedade fechada  $M$ . Se  $x \neq y$  são pontos críticos de  $f$  com  $\mathcal{M}_{xy} \neq \emptyset$ , então  $\mu_x > \mu_y$ .*

*Demonstração.* Se  $\mathcal{M}_{xy} \neq \emptyset$ , então  $\mathcal{M}_{xy}$  contem pelo menos uma trajetória de  $x$  até  $y$ . Como essa trajetória é uma subvariedade de  $\mathcal{M}_{xy}$  de dimensão um se  $x \neq y$ , então  $\dim \mathcal{M}_{xy} \geq 1$ .  $\square$

**Lema 2.2.4.** *Se  $W^u(x) \cap W^s(y)$ , então vale o seguinte:*

1. Se  $\mu_x < \mu_y$ , então  $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$ .
2.  $\mathcal{M}_{xx} = \{x\}$ .
3. Se  $\mu_x = \mu_y$  e  $x \neq y$ , então  $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$ .
4. Se  $\mu_x - \mu_y > 0$  então  $\mathcal{M}_{xy}$  é invariante pelo fluxo, e o fluxo induz uma  $\mathbb{R}$ -ação livre em  $\mathcal{M}_{xy}$ .

**Observação 2.2.5.** *Seja  $a \in (f(y), f(x))$  um valor regular. O espaço de  $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$  órbitas de conexão de  $x$  até  $y$  também poderia ter ser definido como*

$$\mathcal{M}_{xy} \cap f^{-1}(a).$$

*Este conjunto, que é difeomorfo a  $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ , representa precisamente as órbitas não-parametrizadas do fluxo anti-gradiente percorrendo de  $x$  até  $y$ , pois cada órbita intersecta a hipersuperfície de nível exatamente uma vez.*

Aqui apresentamos um exemplo no qual a condição Morse-Smale pode ser atingida por uma pequena perturbação de uma função de Morse.

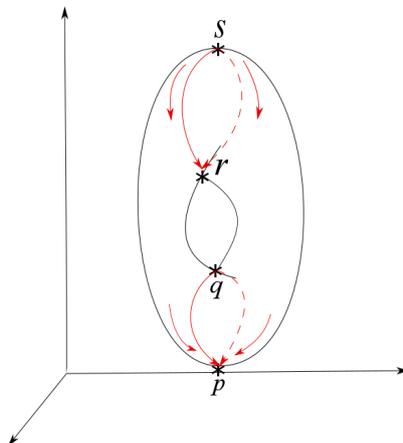


Figura 2.1: O 2-toro vertical  $\mathbb{T}^2$

**Exemplo 2.2.6.** Considere o 2-toro  $\mathbb{T}^2$  mergulhado verticalmente em  $\mathbb{R}^3$  como na Figura 2.1 e seja  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função altura. Esta função admite 4 pontos críticos  $p, q, r, s$  com índices de Morse  $0, 1, 1, 2$  respectivamente. Seja a métrica em  $\mathbb{T}^2$  induzida pelo espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . O fluxo anti-gradiente não é Morse-Smale, porque  $W^u(r)$  não intersecta a  $W^s(q)$  transversalmente. No entanto, a condição de transversalidade Morse-Smale pode ser atingida fazendo ligeiramente uma inclinação do eixo vertical no gráfico mostrado, em outras palavras podemos perturbar  $f$  e destruir as linhas de fluxo entre  $r$  e  $q$ .

### 2.2.2 O Teorema Kupka-Smale

Em 1963, Kupka [23] e Smale [37] provaram que os campos de vetores gradientes Morse-Smale são genéricos.

**Definição 2.2.7.** Um espaço métrico  $X$  é chamado **separável** se contém um subconjunto denso e enumerável. Um subconjunto  $A \subset X$  é chamado **residual** se ele é uma intersecção enumerável de subconjuntos abertos e densos de  $X$ , isto é  $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$  onde  $G_j \subseteq X$  é aberto e denso em  $X$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Um subconjunto de  $X$  é chamado **genérico** se contém um conjunto residual.

**Teorema 2.2.8.** (Kupka-Smale) Se  $M$  é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão finita, então o conjunto de campos vetoriais gradientes Morse-Smale de classe  $C^r$  é um subconjunto genérico do conjunto de todos os campos vetoriais gradientes de classe  $C^r$ , para todo  $1 \leq r \leq \infty$ .

A prova pode ser encontrada em [28].

### 2.2.3 O espaço das trajetórias quebradas

Se  $x$  e  $y$  são dois pontos críticos de  $f$ , então denotamos  $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$  o conjunto de trajetórias do campo vetorial  $-\nabla^g f$  que vão de  $x$  para  $y$ . Nós definimos o conjunto de trajetórias quebradas de  $x$  para  $y$  da seguinte forma:

$$[\widehat{\mathcal{M}}_{xy}] = \bigcup_{c_i \in \text{Crit } f} \widehat{\mathcal{M}}_{xc_1} \times \dots \times \widehat{\mathcal{M}}_{c_r y}.$$

Lembremos que o índice está diminuindo ao longo das trajetórias de  $-\nabla^g f$ , conseqüentemente apenas  $\widehat{\mathcal{M}}_{c_i c_{i+1}}$  com  $\mu_{c_i} > \mu_{c_{i+1}}$  contribui.

Como é sugerido pela notação, este espaço destina-se a ser uma compactação de  $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ . A primeira coisa a fazer é dotá-lo de uma topologia. É claro que é necessário induzir a topologia do produto em cada termo da união.

**Definição 2.2.9.** Um subconjunto  $K \subset \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$  é chamado compacto para órbitas quebradas, se para toda sequência  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ ,

- Existem pontos críticos  $x = x_0, x_1, \dots, x_\ell = y$ ,
- Existem órbitas de conexão  $u^j \in \widehat{\mathcal{M}}_{x_{j-1}x_j}$ ,  $j = 1, \dots, \ell$  tal que  $p_k \rightarrow (u^1, \dots, u^\ell)$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Aqui convergência significa por definição, convergência geométrica com relação à distância Riemanniana  $d$  em  $M$  (induzida por uma métrica Riemanniana qualquer) das órbitas através da sequência  $p_k$ . Mais precisamente,

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq k_0 : \mathbf{O}(p_k) \subset U_\epsilon(\mathbf{O}(u^1) \cup \dots \cup \mathbf{O}(u^\ell)).$$

Onde  $U_\epsilon(A)$  denota uma  $\epsilon$ -vizinhança aberta de um subconjunto  $A \subset M$ . Nós dizemos que a sequência  $p_k$  converge para uma órbita quebrada  $(u^1, \dots, u^\ell)$  de ordem  $\ell$ .

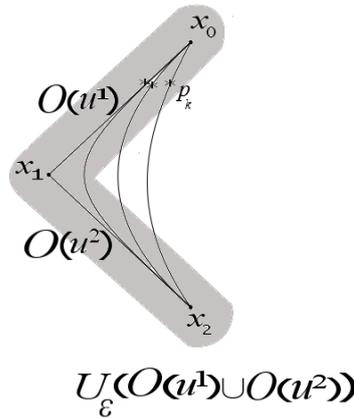


Figura 2.2: Convergência da sequência  $p_k$  para uma órbita quebrada  $(u^1, u^2)$  de ordem 2.

### 2.2.4 Compacidade

**Teorema 2.2.10.** O espaço  $[\widehat{\mathcal{M}}_{xy}]$  é compacto.

A prova pode ser encontrada em no Capítulo 3 de [1].

**Observação 2.2.11.** A topologia no espaço  $[\widehat{\mathcal{M}}_{xy}]$  é definida usando a topologia em  $M$ . É claro que admite um sistema fundamental contável de vizinhanças abertas e pode-se usar seqüências para provar a compacidade.

**Corolário 2.2.12.** Se  $\mu_x = \mu_y + 1$ , então o espaço  $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$  é um conjunto finito.

### 2.2.5 Orientação

Se  $p$  é um ponto crítico da função de Morse  $f$ , então a variedade instável  $W^u(p)$  que é difeomorfo a um disco, é uma variedade orientável. Nós agora escolhemos para cada ponto crítico  $p$  uma orientação  $\mathbf{O}_p$  da variedade instável  $W^u(p)$ . Para qualquer  $x \in \mathcal{M}_{pq}$  a inclusão  $T_x W^u(p) \hookrightarrow T_x M$  induz um isomorfismo

$$T_x W^u(p) / T_x \mathcal{M}_{pq} \rightarrow T_x M / T_x W^s(q).$$

Portanto, com a ajuda de  $\mathbf{Or}_p$  segue-se que orientar  $\mathcal{M}_{pq}$  é o mesmo que co-orientar  $W^s(q)$ . Mas co-orientar  $W^s(q)$  é o mesmo que orientar  $W^u(p)$ . Assim as escolhas  $\{\mathbf{Or}_z\}_{z \in \text{Crit } f}$  induzem orientações únicas dos espaços  $\mathcal{M}_{pq}$ , para todo  $p, q \in \text{Crit } f$ , que denotamos por  $\mathbf{Or}_{pq}$ . Quando  $\mu_p - \mu_q = 1$ , nós associamos a cada trajetória  $\gamma \in \mathcal{M}_{pq}/\mathbb{R}$  um sinal  $\epsilon_\gamma$  do seguinte modo:  $\epsilon_\gamma = +1$  se  $\mathbf{Or}_{pq}$  coincide com a orientação induzida por  $-\nabla^g f$  ao longo de  $\gamma$ , ou  $\epsilon_\gamma = -1$  caso contrário. (Veja a Figura 2.3).

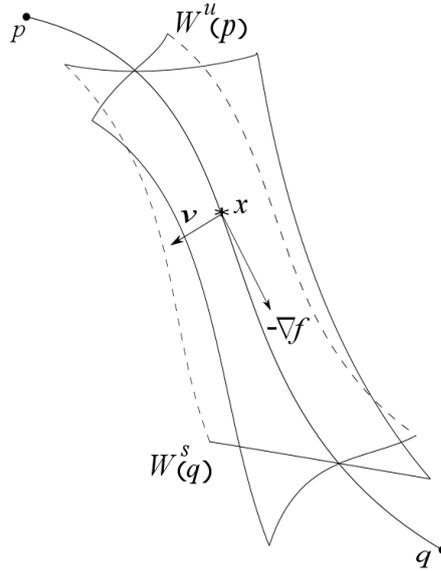


Figura 2.3: Aqui  $\mu_p = 2$ ,  $\mu_q = 1$ ,  $n = 3$  e  $W^u(p)$ ,  $W^s(q)$  são 2-dimensionais. Se  $x \in \mathcal{M}_{pq}$ , o vetor  $v$  orienta  $T_x W^u(p)/T_x \mathcal{M}_{pq} \simeq T_x M/T_x W^s(q)$ . Se escolhermos  $v$  de modo que a base ordenada  $\{-\nabla^g f, v\}$  é positiva em relação a  $\mathbf{Or}_p$ , então  $\epsilon = +1$  quando a co-orientação induzida em  $W^s(q)$  é a mesma que a induzida por  $\mathbf{Or}_p$ . De outra forma  $\epsilon = -1$ .

## 2.3 A definição de homologia de Morse

### 2.3.1 O complexo Morse-Witten

Nós definimos  $\text{CM}_k(f)$  como sendo o grupo abeliano livre (módulo  $\mathbb{Z}$ ) gerado pelo pontos críticos de  $f$  de índice de Morse  $k$

$$\text{CM}_k(f) := \bigoplus_{x \in \text{Crit}_k f} \mathbb{Z}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A soma sobre o conjunto vazio entende-se como zero. Para cada  $p, q \in \text{Crit } f$  satisfazendo  $\mu_p - \mu_q = 1$  nós definimos

$$\nu(p, q) = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}_{pq}/\mathbb{R}} \epsilon_\gamma$$

e se  $\mu_p - \mu_q \neq 1$  definimos  $\nu(p, q) = 0$ . O diferencial

$$\begin{aligned} \partial_k^{\text{Morse}} : \text{CM}_k(f) &\rightarrow \text{CM}_{k-1}(f) \\ p &\mapsto \sum_{q \in \text{Crit}_{k-1} f} \nu(p, q)q. \end{aligned}$$

note que  $\partial_k^{\text{Morse}}$  depende de  $f, g$  e  $\{\text{Or}_z\}_{z \in \text{Crit } f}$ .

### 2.3.2 A estrutura de uma variedade com bordo no espaço de trajetórias quebradas

O teorema a seguir implica que  $\partial_{k-1}^{\text{Morse}} \circ \partial_k^{\text{Morse}}$

**Teorema 2.3.1.** *Se  $\mu_x = \mu_z + 2$ , então  $[\widehat{\mathcal{M}}_{xz}]$  é uma variedade compacta de dimensão 1 com bordo.*

O teorema é consequência da seguinte proposição. A prova pode ser encontrada no Capítulo 3 de [1].

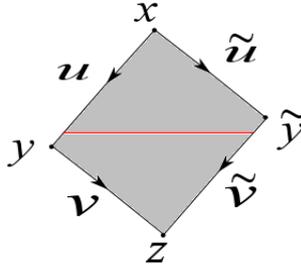


Figura 2.4: Componente conexa  $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^c = \underline{(0, 1)}$ .

**Proposição 2.3.2.** *Seja  $M$  uma variedade compacta, seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse e seja  $-\nabla^g f$  um campo vetorial anti-gradiente para  $f$  satisfazendo a condição de Morse-Smale. Sejam  $x, y, z \in \text{Crit } f$  com índices de Morse  $k+1, k, k-1$ , respectivamente. Se  $u \in \mathcal{M}_{xy}$  e  $v \in \mathcal{M}_{yz}$ . Existe um mergulho contínuo  $\psi$  de  $[0, \delta[$  para uma vizinhança de  $(u, v)$  em  $[\widehat{\mathcal{M}}_{xz}]$  o qual é diferenciável em  $]0, \delta[$  e satisfaz*

$$\begin{cases} \psi(0) = (u, v) \in [\widehat{\mathcal{M}}_{xz}] \\ \psi(s) \in \widehat{\mathcal{M}}_{xz} \text{ para } s \neq 0. \end{cases}$$

Além disso, se  $(\ell_n)$  é uma seqüência em  $\mathcal{M}_{xz}$  que tende a  $(u, v)$ , então  $\ell_n$  está contido na imagem de  $\psi$  para  $n$  suficientemente grande.

**Definição 2.3.3.** Dada uma variedade diferenciável fechada de dimensão finita  $M$ , uma função de Morse  $f$  e uma métrica Riemanniana  $g$  em  $M$  tal que a condição de Morse-Smale é satisfeita, denote por  $\mathbf{Or}$  a escolha das orientações de todas as variedades instáveis associadas ao campo vetorial  $-\nabla f$ . Então os **grupos de homologia de Morse com coeficientes inteiros** são definidos por

$$\mathrm{HM}_k(M, f, g, \mathbf{Or}, \mathbb{Z}) := \frac{\ker \partial_k^{\mathrm{Morse}}}{\mathrm{img} \partial_{k+1}^{\mathrm{Morse}}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### 2.3.3 A homologia do complexo não depende da função ou da métrica

Aqui nós, mostramos que a homologia do complexo de Morse não depende do par Morse-Smale usado para definir o complexo de Morse.

**Teorema 2.3.4.** *Seja  $M$  uma variedade compacta. Sejam  $f_0, f_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de Morse e sejam  $X_0, X_1$  campos anti-gradientes de  $f_0$  e  $f_1$  respectivamente, com a propriedade Morse-Smale. Então existe um morfismo de complexos*

$$\Phi_* : \mathrm{CM}_*(M, f_0) \rightarrow \mathrm{CM}_*(M, f_1)$$

a qual induz um isomorfismo canônica em homologia.

*Demonstração.* Nós procederemos em várias etapas. Primeiro escolhemos uma função

$$\begin{aligned} F : M \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, s) &\rightarrow F_s(x) = F(x, s) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{cases} F_s = f_0 & \text{para } s \in [0, \frac{1}{3}] \\ F_s = f_1 & \text{para } s \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

1. A partir disso, vamos deduzir um morfismo  $\Phi^F : \mathrm{CM}_*(M, f_0) \rightarrow \mathrm{CM}_*(M, f_1)$ .
2. Verificamos se  $(f_1, X_1) = (f_0, X_0)$  e  $I_s(x) = f_0(x)$  para cada  $x \in M$  e para cada  $s \in [0, 1]$ , então

$$\Phi^I = \mathrm{Id}.$$

3. Finalmente vamos mostrar que se  $f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Morse e  $X_2$  um campo anti-gradiente com a propriedade Morse-Smale, se  $G$  é uma interpolação entre  $f_1$  e  $f_2$  a qual é estacionária para  $s \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$  e se  $H$  é uma interpolação entre  $f_0$  e  $f_2$  com as mesmas propriedades, então os morfismos induzidos na homologia por

$$\Phi^G \circ \Phi^F \quad \text{e} \quad \Phi^H : \mathrm{CM}_*(M, f_0) \rightarrow \mathrm{CM}_*(M, f_2)$$

coincidem.

Se estas três propriedades são satisfeitas, então é claro que  $\Phi^F$  terá que induzir um isomorfismo na homologia. Para mostrar isso, nós usamos a interpolação  $G$  entre  $f_1$  e  $f_0$  e a interpolação constante  $H = I$  entre  $f_0$  e ele mesmo, e aplicamos as propriedades, as quais nos dizem que  $\Phi^F$  e  $\Phi^G$  induzem em homologia morfismos que são um inversa do outro.

A prova a seguir usa complexos de Morse de pares definidos em variedades compactas com bordo. De fato, seja  $Z$  uma tal variedade. Diremos que um par  $(f, g)$  em  $Z$  é adaptado se  $\nabla^g f$  é transversal ao bordo. Sendo assim, se  $f$  for Morse então seus pontos críticos estão no interior, bem como todas as trajetórias anti-gradiente conectando-os. As definições de variedades estáveis/instáveis são ligeiramente modificadas, mas ainda obtemos cópias mergulhadas de células abertas. Temos então a compacidade necessária para implementar a construção do complexo caso

a propriedade Morse-Smales se verifique. Além disso, a propriedade Morse-Smale pode ser atingida por uma pequena perturbação  $C^\infty$  de  $g$ .

**Primeiro passo.**

Estendemos  $F$  a  $M \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$  definindo

$$\begin{cases} F_s = f_0 & \text{para } s \in [-\frac{1}{3}, 0] \\ F_s = f_1 & \text{para } s \in [1, \frac{4}{3}]. \end{cases}$$

Nós consideramos a função de Morse  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cujos pontos críticos são 0 (máximo) e 1 (mínimo), a qual é crescente em  $]-\infty, 0]$  e  $]1, +\infty[$  e decrescente em  $]0, 1[$  e

$$\forall x \in M, \quad \forall s \in ]0, 1[, \quad \frac{\partial F}{\partial s}(x, s) + g'(s) < 0.$$

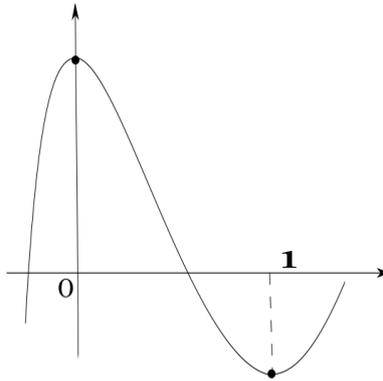


Figura 2.5: A função  $g$ .

A função  $\tilde{F} = F + g : M \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Morse cujos pontos críticos são

$$\text{Crit } \tilde{F} = \text{Crit } f_0 \times \{0\} \cup \text{Crit } f_1 \times \{1\}.$$

Além disso, para  $a \in \text{Crit } f_0$ ,

$$\mu_{(a,0)}(\tilde{F}) = \mu_a(f_0) + 1,$$

enquanto para  $b \in \text{Crit } f_1$ ,

$$\mu_{(b,1)}(\tilde{F}) = \mu_b(f_1).$$

Usando uma partição da unidade, nós contruímos um campo anti-gradiente  $X$  para a função  $\tilde{F}$  a qual coincide com

$$\begin{cases} (X_0, -\text{grad } g) & \text{em } M \times [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \\ (X_1, -\text{grad } g) & \text{em } M \times [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]. \end{cases}$$

Aqui  $\text{grad } g$  denota o gradiente Euclidiano de  $g$ , assim  $X$  é transversal ao bordo de  $M \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$ . Sem perda de generalidade nós substituímos  $X$  por uma pequena perturbação  $\tilde{X}$  que é Morse-Smale e transversal às seções  $M \times \{s\}$  para  $s \in \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\}$ .

**Observação 2.3.5.** *Note que uma pequena perturbação  $C^1$  de suporte compacto de um campo anti-gradiente adaptado satisfazendo a propriedade Morse-Smale é ainda um campo anti-gradiente adaptado com a mesma propriedade. Além disso, há uma bijeção entre pontos críticos e variedades instáveis/estáveis orientadas do campo não-perturbado e do campo perturbado. Como consequência obtemos a seguinte proposição.*

**Proposição 2.3.6.** *Seja  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse em uma variedade  $Z$  compacta com bordo, e seja  $X$  um campo anti-gradiente de  $f$  que tem a propriedade Morse-Smale. Cada campo vetorial  $\tilde{X}$  suficientemente  $C^1$ -próximo de  $X$  é um campo anti-gradiente Morse-Smale. Além disso, se  $Z$  é compacta, então tem-se um isomorfismo entre os complexos de Morse dos pares Morse-Smale antes e depois da perturbação.*

Podemos portanto escolher  $\tilde{X}$  tal que

$$\begin{aligned} \text{CM}_* \left( M \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \tilde{F}|_{M \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]}, \partial_{\tilde{X}} \right) &= \text{CM}_* \left( M, f_0 + g|_{\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]}, \partial_{X_0 - \text{grad } g} \right) \\ &= \text{CM}_{*+1} (M, f_0, \partial_{X_0}) \end{aligned}$$

e da mesma forma tem-se

$$\begin{aligned} \text{CM}_* \left( M \times \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right], \tilde{F}|_{M \times \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]}, \partial_{\tilde{X}} \right) &= \text{CM}_* \left( M, f_1 + g|_{\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]}, \partial_{X_1 - \text{grad } g} \right) \\ &= \text{CM}_* (M, f_1, \partial_{X_1}). \end{aligned}$$

Nós consideramos o complexo associado à função de Morse  $\tilde{F}$  e o campo  $\tilde{X}$  definidos em  $M \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right]$ . As trajetórias do campo vetorial  $\tilde{X}$  que conectam dois pontos críticos de  $\tilde{F}$  podem ser divididas de duas maneiras: aquelas que permanecem na seção  $s \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$  ou na seção  $s \in \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$ , as quais são as trajetórias de  $X_0$  ou de  $X_1$ , e aquelas que vão de um ponto crítico de  $f_0$  (na seção  $s = 0$ ) para um ponto crítico de  $f_1$  (na seção  $s = 1$ ). Logo temos

$$\text{CM}_{k+1}(M, \tilde{F}) = \text{CM}_k(M, f_0) \oplus \text{CM}_{k+1}(M, f_1).$$

Tendo em conta o acima, temos a seguinte decomposição,

$$\partial_{\tilde{X}} : \text{CM}_k(M, f_0) \oplus \text{CM}_{k+1}(M, f_1) \rightarrow \text{CM}_{k-1}(M, f_0) \oplus \text{CM}_k(M, f_1)$$

tem uma matriz da forma

$$\partial_{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} \end{pmatrix}.$$

Defina-se

$$\begin{aligned} \Phi^F : \text{CM}_k(M, f_0) &\rightarrow \text{CM}_k(M, f_1) \\ x &\rightarrow \sum_{y \in \text{Crit}_k f_1} \nu_{(x,y)} y, \end{aligned}$$

onde  $\nu_{(x,y)}$  conta as trajetórias do campo vetorial  $\tilde{X}$  conectando  $x \in M \times \{0\} \cap \text{Crit } \tilde{F}$  para  $y \in M \times \{1\} \cap \text{Crit } \tilde{F}$ .

A relação  $\partial_{\tilde{X}} \circ \partial_{\tilde{X}} = 0$  dá

$$\Phi^F \circ \partial_{X_0} + \partial_{X_1} \circ \Phi^F = 0$$

por tanto,  $\Phi^F$  é de fato um morfismo de complexos.

**Segundo passo.**

Se  $f_1 = f_0$  e  $X_0 = X_1$ , então temos

$$I : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{definido por } I(x, s) = f_0(x) \text{ para todo } s$$

e usamos a função  $g$  como antes. O campo vetorial  $X = X_0 - \text{grad } g$  é um campo anti-gradiente que satisfaz a condição de Morse-Smale. Além disso, para cada ponto crítico  $x$  de  $f_0$ , existe uma única trajetória  $X$  que conecta  $(x, 0)$  a  $(x, 1)$  com  $\mu_x(f_0) = \mu_x(f_1)$ : a trajetória entre  $(x, 0)$  e  $(x, 1)$  cuja projeção em  $M$  é constante e igual a  $x$ . Além disso, não há mais trajetórias relevantes a serem contadas pelo mapa  $\Phi^I$ . Desses fatos se pode deduzir que  $\Phi^I = Id$ .

**Terceiro passo.**

Agora temos interpolações  $F, G$  e  $H$  de  $f_0$  a  $f_1$ ,  $f_1$  a  $f_2$  e  $f_0$  a  $f_2$ , respectivamente. Nós interpolamos entre essas funções escolhendo uma função

$$K : M \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}] \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}] \rightarrow \mathbb{R}, K(x, s, t) = K_{s,t}(x)$$

satisfazendo as propriedades dado na Figura 2.6

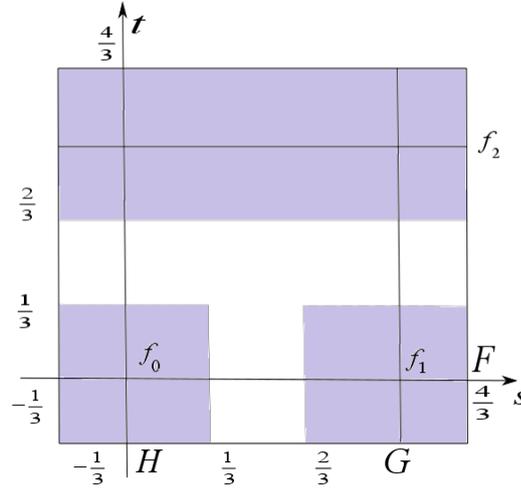


Figura 2.6:

- $K_{s,t} = H_t$  para  $s \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ .
- $K_{s,t} = G_t$  para  $s \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ .
- $K_{s,t} = F_s$  para  $t \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ .
- $K_{s,t} = f_2$  para  $t \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ .

Usando a função anterior  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo ponto crítico 0 tem índice 1 e o ponto crítico 1 tem índice 0, e diminui dentro do intervalo  $[0, 1]$  e satisfaz

$$\frac{\partial K}{\partial s}(x, s, t) + g'(s) < 0 \quad \text{para todo } (x, s, t) \in M \times ]0, 1[ \times [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$$

e

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x, s, t) + g'(t) < 0 \quad \text{para todo } (x, s, t) \in M \times [\frac{1}{3}, \frac{4}{3}] \times ]0, 1[.$$

Finalmente, seja  $\tilde{K}$  a função definida por

$$\tilde{K}(x, s, t) = K_{s,t}(x) + g(s) + g(t).$$

Ao escolher  $g$ , os pontos críticos de  $\tilde{K}$  estão na área sombreada da Figura 2.6 e são

$$\text{Crit } \tilde{K} = [\text{Crit } f_0 \times \{0\} \times \{0\}] \cup [\text{Crit } f_1 \times \{1\} \times \{0\}] \cup [\text{Crit } f_2 \times \{0\} \times \{1\}] \cup [\text{Crit } f_2 \times \{1\} \times \{1\}].$$

Os índices desses pontos críticos são:

- Se  $x \in \text{Crit } f_0$ , então  $\mu_{(x,0,0)} \tilde{K} = \mu_x f_0 + 2$
- Se  $y \in \text{Crit } f_1$ , então  $\mu_{(y,1,0)} \tilde{K} = \mu_y f_1 + 1$ .
- Se  $z \in \text{Crit } f_2$ , então  $\mu_{(z,0,1)} \tilde{K} = \mu_z f_2 + 1$  e  $\mu_{(z,1,1)} \tilde{K} = \mu_z f_2$ .

Se  $X$  denota o campo anti-gradiente com respeito da função  $F$  feito antes e  $Y$  outro campo anti-gradiente com respeito de  $G$ . Mais uma vez usando partição da unidade, definimos um campo anti-gradiente  $\mathbf{X}$  adaptado a  $\tilde{K}$  tal que:

- Para  $s \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ,  $\mathbf{X}(x, s, t) = Z(x, t) + \text{grad } g(s)$ , onde  $Z$  é um campo anti-gradiente para

$$H(x, t) + g(t) : M \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Para  $s \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ ,  $\mathbf{X}(x, s, t) = Y(x, t) + \text{grad } g(s)$ , onde  $Y$  é um campo anti-gradiente para  $G$ .
- Para  $t \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ,  $\mathbf{X}(x, s, t) = X(x, s) + \text{grad } g(t)$ .
- Para  $t \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ ,  $\mathbf{X}(x, s, t) = X_2 + \text{grad } g(s) + \text{grad } g(t)$ .

Nós consideramos uma perturbação  $\tilde{\mathbf{X}}$  de  $\mathbf{X}$  com a propriedade de Morse-Smale. Assumindo, como no primeiro passo, que fora de  $M \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ , as trajetórias de  $\tilde{\mathbf{X}}$  conectam pontos críticos de índice consecutivo os quais estão em correspondência 1-1 com os zeros de  $\mathbf{X}$ .

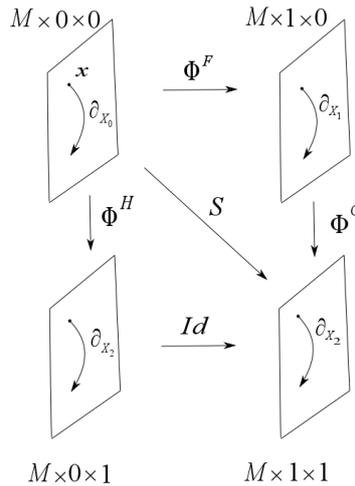


Figura 2.7:

Consideremos agora o complexo dos pontos críticos associados com  $\tilde{K}$  e  $\tilde{\mathbf{X}}$ .

Nós temos a seguinte igualdade

$$\text{CM}_{k+1} \left( M \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right] \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right], \tilde{K} \right) = \text{CM}_{k-1}(M, f_0) \oplus \text{CM}_k(M, f_1) \oplus \text{CM}_k(M, f_2) \oplus \text{CM}_{k+1}(M, f_2).$$

O diagrama na Figura 2.7, mostra que as conexões entre os diferentes morfismos são usados. Nesta decomposição, o diferencial pode ser escrito como

$$\partial_{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} & 0 & 0 \\ \Phi^H & 0 & \partial_{X_2} & 0 \\ S & \Phi^G & Id & \partial_{X_2} \end{pmatrix}.$$

A identidade  $\partial_{\tilde{\mathbf{x}}} \circ \partial_{\tilde{\mathbf{x}}} = 0$  dá

$$S \circ \partial_{X_0} + \Phi^G \circ \Phi^F + \Phi^H + \partial_{X_2} \circ S = 0$$

Nós deduzimos disso que  $\Phi^G \circ \Phi^F$  e  $\Phi^H$  induzem o mesmo morfismo na homologia.  $\square$

**Teorema 2.3.7** (Homologia de Morse). *A homologia de Morse  $HM_*(M, \mathbb{Z})$  é isomorfa a homologia singular  $H_*(M, \mathbb{Z})$ .*

A prova pode ser encontrada em [1], Capítulo 4.

**Exemplo 2.3.8** (A 2-esfera deformada). *Considere  $M = S^2$  e a função Morse-Smale  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada pela função altura, onde a orientação escolhida para  $S^2$  é indicada na Figura 2.8.*

*Existem 4 pontos críticos  $p, q, r$ , e  $s$  com os seguintes índices:*

$$\mu_r = \mu_s = 2$$

$$\mu_q = 1$$

$$\mu_p = 0,$$

e o complexo de Morse é dado da seguinte maneira.

$$\begin{array}{ccccc} CM_2(M, f) & \xrightarrow{\partial_2} & CM_1(M, f) & \xrightarrow{\partial_1} & CM_0(M, f) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \langle r, s \rangle & \xrightarrow{\partial_2} & \langle q \rangle & \xrightarrow{\partial_1} & \langle p \rangle & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \end{array}$$

Logo da orientação dada na Figura 2.8, se mostra que  $\partial_2(r) = q$ , e  $\partial_2(s) = -q$ . Portanto tem-se  $\partial_2(r + s) = 0$ , e a homologia de grupos em grau 2 é:

$$HM_2(M, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_2}{\text{img } \partial_3} = \frac{\langle r + s \rangle}{\{0\}} = \mathbb{Z}.$$

Também do fato que  $\partial_2(r) = q$  temos que  $\partial_1(q) = \partial_1 \circ \partial_2(r) = 0$  logo  $\partial_1 = 0$  de onde obtemos

$$HM_1(M, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_1}{\text{img } \partial_2} = \frac{\langle q \rangle}{\langle q \rangle} = 0.$$

Finalmente pelo fato que  $\partial_0 = 0$  e  $\partial_1 = 0$ , tem-se

$$HM_0(M, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_0}{\text{img } \partial_1} = \frac{\langle p \rangle}{\{0\}} = \mathbb{Z}.$$

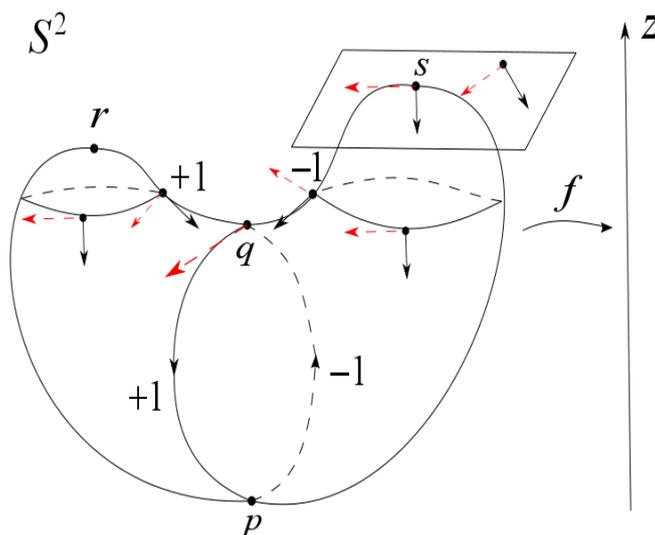


Figura 2.8: A 2-esfera deformada.

## 2.4 Homologia Local de Morse

Nesta seção nós discutiremos homologia de Morse em uma variedade diferenciável não necessariamente compacta e sem bordo  $M$ . Aqui discutiremos a homologia local de Morse seguindo de perto os trabalhos de Viktor Ginzburg [12], Doris Hein, Umberto Hryniewicz e Leonardo Macarini [16].

### 2.4.1 Definição de homologia local de Morse

Seja  $M$  uma variedade diferenciável sem bordo e  $\theta$  uma métrica Riemanniana em  $M$ .

**Definição 2.4.1.** O par  $(f, \theta)$  é chamado Morse-Smale em  $M$  se

1.  $f$  é uma função de Morse.
2.  $W^u(p) \cap W^s(q) = \emptyset$  para todo  $p, q \in \text{Crit}(f)$ .
3. Existem conjuntos compactos  $K_0 \subset K_1 \subset M$  tais que  $\text{Crit}(f) \subset \text{Int}(K_0)$ ,  $f$  oscila estritamente mais do que  $\max_{p, q \in \text{Crit}(f)} |f(p) - f(q)|$  ao longo de qualquer pedaço de trajetória anti-gradiente  $-\nabla^\theta f$  com um ponto final em  $K_0$  e outro em  $M \setminus \text{Int}(K_1)$ .

**Observação 2.4.2.** Observe que a condição (3) é vazia quando  $M$  é compacta. Esta condição é apenas uma das muitas maneiras de obter a compacidade necessária para o nosso problema local. Segue de (3) que

$$W^u(p) \cap W^s(q) \subset \text{Int}(K_1) \quad \forall p, q \in \text{Crit}(f)$$

e que ser Morse-Smale é estável sob pequenas perturbações feitas em um subconjunto compacto fixo.

Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável,  $\theta$  uma métrica Riemanniana em  $M$  e  $p \in M$  um ponto crítico isolado de  $f$ . Fixe uma pequena vizinhança relativamente compacta  $U$  de  $p$  que não contem outro ponto crítico de  $f$ , e considere uma pequena perturbação genérica  $\tilde{f}$  de  $f$  em  $U$  tal que  $(\tilde{f}, \theta)$  é Morse-Smale em  $U$  e é  $C^2$ -próximo de  $f$ .

Então, é claro que para quaisquer dois pontos críticos  $q, r$  de  $\tilde{f}$  em  $U$ , todas as trajetórias anti-gradientes de  $(\tilde{f}, \theta)$  que ligam  $q$  a  $r$  estão contidas em  $U$ . Além disso, o mesmo é certo para

trajetórias quebradas que conectam  $q$  a  $r$ . Como uma conseqüência, os espaço vetoriais (sobre  $\mathbb{Q}$ ),  $\text{CM}_k(U, \tilde{f}, \theta)$  gerado pelos pontos críticos de  $\tilde{f}$  em  $U$  de índice de Morse igual a  $k$  é um complexo de Morse com diferencial  $\partial_k^{\text{Morse}}$  definido do maneira usual. Nós denotamos essa homologia por  $\text{HM}_*^{\text{loc}}(f, p)$  chamada *Homologia Local de Morse*. Como sugere a notação, a homologia independe de  $U$  e da métrica  $\theta$ ; este fato será discutido na próxima subseção.

**Definição 2.4.3.** *Se  $p$  é um ponto crítico isolado de uma função diferenciável então a vizinhança  $U$  de  $p$  chama-se isolante para  $(f, p)$  se  $\text{Crit}(f) \cap \bar{U} = \{p\}$ .*

**Exemplo 2.4.4.** *Suponha que  $p$  é um ponto crítico não-degenerado de  $f$  com índice de Morse  $k$ . Então  $\text{HM}_*^{\text{loc}}(f, p) = \mathbb{Q}$  quando  $*$  =  $k$  e  $\text{HM}_*^{\text{loc}}(f, p) = 0$  em outro caso.*

**Exemplo 2.4.5.** *Quando  $p$  é um máximo estritamente local de  $f$  se pode ver da teoria de Morse clássica que  $\text{HM}_k^{\text{loc}}(f, p) = 0$  se  $k \neq \dim M$ , e que  $\text{HM}_n^{\text{loc}}(f, p) = \mathbb{Q}$  quando  $n = \dim M$ .*

## 2.4.2 Invariância da homologia local de Morse

Seja  $U$  uma vizinhança aberta isolante para  $(f, x)$  onde  $f$  é uma função diferenciável definida em uma variedade  $M$  sem bordo, e  $x$  é um ponto crítico isolado de  $f$ . Como já observado acima, se uma métrica Riemanniana  $\theta$  é fixada em  $M$  então se pode encontrar uma perturbação  $\mathcal{C}^2$ -pequena arbitrária  $(f', \theta')$  de  $(f, \theta)$  que é Morse-Smale em  $U$ .

Para cada  $j$  considere os espaços vetoriais  $\text{CM}_j(f', \theta', U)$  sobre  $\mathbb{Q}$  livremente gerado por pontos críticos de  $f'$  que estão contidos em  $U$  e tem índice de Morse  $j$ . O operador diferencial  $\partial_{(f', \theta', U)}^{\text{Morse}}$  no complexo  $\text{CM}_*(f', \theta', U)$  conta trajetórias do campo  $-\nabla^{\theta'} f'$  contidas em  $U$  que conectam pontos críticos em  $U$  com diferença de índice de Morse um. Este operador diferencial depende da escolha das orientações da variedade instável.

Acontece que para dois pares  $(f', \theta')$ ,  $(f'', \theta'')$  que estão  $\mathcal{C}^2$ -próximos de  $(f, \theta)$  e são Morse-Smale em  $U$ , existem chain maps

$$\left( \text{CM}_*(f', \theta', U), \partial_{(f', \theta', U)}^{\text{Morse}} \right) \rightarrow \left( \text{CM}_*(f'', \theta'', U), \partial_{(f'', \theta'', U)}^{\text{Morse}} \right) \quad (2.3)$$

induzido por uma escolha de deformação de  $(f', \theta')$  a  $(f'', \theta'')$  que são uniformemente  $\mathcal{C}^2$ -próximos de  $(f, \theta)$ . Decorre das construções para dois chain maps (2.3) associados a um par fixo de pares  $(f', \theta')$ ,  $(f'', \theta'')$ , juntamente com escolhas de orientações correspondentes, são chain homotópicos. Por tanto a aplicação induzida na homologia

$$\Phi_{(f', \theta')}^{(f'', \theta'')} : \text{HM}_*(f', \theta', U) \rightarrow \text{HM}_*(f'', \theta'', U) \quad (2.4)$$

não depende dos dados extras. Além disso, quando  $(f'', \theta'') = (f', \theta')$  e as orientações escolhidas são iguais, a aplicação na homologia é a identidade, e essas aplicações em geral satisfazem

$$\Phi_{(f'', \theta'')}^{(f''', \theta''')} \circ \Phi_{(f', \theta')}^{(f'', \theta'')} = \Phi_{(f', \theta')}^{(f''', \theta''')}.$$

Tudo isso é válido para todos os pares  $(f', \theta')$ ,  $(f'', \theta'')$ ,  $(f''', \theta''')$  que são  $\mathcal{C}^2$ -próximo do par fixo  $(f, \theta)$  em uma pequena vizinhança  $U$ , e é provado usando um argumento de compacidade e gluing que esta presente na teoria de Morse já visto no Capítulo 2.

**Observação 2.4.6.** *Suponha que seja dada uma coleção  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de espaços vetoriais, e para cada par  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda \times \Lambda$  existe um isomorfismo  $\Psi_{\lambda_1}^{\lambda_2} : V_{\lambda_1} \rightarrow V_{\lambda_2}$  tal que  $\Psi_{\lambda}^{\lambda} = \text{id}_{V_\lambda}$  e  $\Psi_{\lambda_2}^{\lambda_3} \circ \Psi_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \Psi_{\lambda_1}^{\lambda_3}$ . Então em  $\sqcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$  existe uma relação de equivalência definida por  $v_1 \sim v_2$  se, e somente se,  $v_2 = \Psi_{\lambda_1}^{\lambda_2}(v_1)$ , onde  $v_i \in V_{\lambda_i}$ . O espaço quociente associado é denotado por  $V$ , e tem estrutura de espaço vetorial tal que para cada  $\lambda$  a restrição da projeção quociente é um isomorfismo  $V_\lambda \xrightarrow{\sim} V$ .*

Os espaços vetoriais  $\text{HM}_*(f', \theta', U)$  e aplicações  $\Phi_{(f', \theta')}^{(f'', \theta')}$ , onde  $(f', \theta')$  e  $(f'', \theta'')$  variam em uma vizinhança  $\mathcal{C}^2$ -pequena de  $(f, \theta)$ , se encaixam na discussão da Observação 2.4.6. Obtemos portanto a homologia local de Morse  $\text{HM}_*^{\text{loc}}(f, \theta, x)$ . Como a notação sugere, é independente de  $U$ . Isso é facilmente provado, observando que uma pequena perturbação força pontos críticos e trajetórias que conectam pontos críticos estarem contidos em vizinhanças arbitrariamente pequenas da origem.

Seja  $\mathcal{F} = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família diferenciável de funções diferenciáveis definidas em alguma variedade  $M$ , onde  $\lambda$  varia em  $\Lambda$ . Suponha que  $p \in M$  é um ponto crítico comum para todo  $f_\lambda$ . Dizemos que  $p$  é um ponto crítico **uniformemente isolado** de  $\mathcal{F}$  se existe uma vizinhança de  $p$  a qual é uma vizinhança isolante de  $(f_\lambda, p)$  para todo  $\lambda$ .

**Proposição 2.4.7.** *Seja  $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in [a, b]}$  uma família diferenciável de funções diferenciáveis definidas em uma variedade sem bordo, e seja  $x$  um ponto crítico uniformemente isolado de  $\mathcal{F}$ . Então para qualquer família de métricas  $\{\theta_s\}_{s \in [a, b]}$  existe uma família especial dos chamados isomorfismos de continuação*

$$\Theta(\mathcal{F})_{s_0}^{s_1} : \text{HM}(f_{s_0}, \theta_{s_0}, x) \rightarrow \text{HM}(f_{s_1}, \theta_{s_1}, x)$$

parametrizados por  $a \leq s_0 \leq s_1 \leq b$ , satisfazendo  $\Theta(\mathcal{F})_{s_0}^{s_2} = \Theta(\mathcal{F})_{s_1}^{s_2} \circ \Theta(\mathcal{F})_{s_0}^{s_1}$  para todo  $a \leq s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq b$ . Além disso,  $\Theta(\mathcal{F})_a^b$  depende apenas da classe de homotopia de  $\mathcal{F}$  mantendo os pontos finais fixos.

**Observação 2.4.8.** *Enfatizamos aqui, que a suposição de que  $x$  é uniformemente isolada é essencial e não pode ser substituída pela condição mais fraca de que  $x$  seja apenas um ponto crítico isolado de  $\mathcal{F}$ . Pois considere o seguinte exemplo:  $f_s(x) = sx^2 + (1-s)x^3$  em  $\mathbb{R}$  com  $x = 0$ .*

Segue das afirmações e construções acima que a homologia local de Morse do par  $(f, x)$ , denotado por

$$\text{HM}_*^{\text{loc}}(f, x)$$

é definida independente das escolhas das métricas, e permanece constante sob deformações  $(f_s, x)$  através de famílias onde  $x$  é um ponto crítico uniformemente isolado de  $\{f_s\}$ . Isso conclui nossa discussão.

**Observação 2.4.9.** *É possível ter uma versão da Proposição 2.4.7 sob simetrias de grupos cíclicos finitos. No entanto, não temos a condição de transversalidade com simetrias necessário para mostrar que os mapas de continuação 2.4 são  $\mathbb{Z}_k$ -equivariantes quando os pares locais de Morse-Smale são  $\mathbb{Z}_k$ -simétricos. Nós precisamos de outra abordagem, para mais detalhes veja [16].*

# Capítulo 3

## Homologia de Morse pré-compacta

Neste capítulo queremos definir homologia de Morse de funções definidas no espaço Euclidiano com certo comportamento assintótico no infinito. Finalmente aplicaremos os resultados obtidos para estudar o funcional de ação simplética discreta.

### 3.1 Definição da Homologia de Morse pré-compacta

Seja  $(\mathbb{R}^N, \theta_0)$  o espaço euclidiano, com  $\theta_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$  a métrica euclidiana. Podemos considerar o espaço vetorial  $X$  de funções  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  satisfazendo:

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^N} \|D^2 f(p)\| < \infty \quad (3.1)$$

Defina

$$\|f\|_X := |f(0)| + |\nabla f(0)| + \sup_{p \in \mathbb{R}^N} \|D^2 f(p)\| \quad (3.2)$$

para cada  $f \in X$ , onde  $0 \in \mathbb{R}^N$  é a origem das coordenadas,  $\nabla$  denota o gradiente euclidiano,  $|\cdot|$  é a norma euclidiana,  $D^2 f$  é o derivado de  $\nabla f$ , e  $\|\cdot\|$  é a norma do operador em relação às normas euclidianas.

**Lema 3.1.1.** *O espaço  $X$  com a norma  $\|\cdot\|_X$  é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* De fato  $\|\cdot\|_X$  é uma norma em  $X$ . Se  $\|f\|_X = 0$  então  $|f(0)| + |\nabla f(0)| + \sup_p \|D^2 f(p)\| = 0 \Leftrightarrow |f(0)| = 0, |\nabla f(0)| = 0$  e  $\sup_p \|D^2 f(p)\| = 0$ , segue-se

$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq \sup_p \|D^2 f(p)\| \|x - y\| = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

então

$$\nabla f(x) = \nabla f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

logo temos  $\nabla f(x) = \nabla f(0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$ . Da mesma forma nós temos

$$|f(x) - f(y)| \leq |\nabla f(w)| \|x - y\| = 0$$

então

$$f(x) = f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

logo  $f(x) = f(0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$  então  $f \equiv 0$ . As outras duas condições são verificadas imediatamente.

Além disso  $(X, \|\cdot\|_X)$  é completa, de fato considere uma seqüência de Cauchy  $\{f_n\} \in X$ , isto é

$\forall \epsilon > 0$ , existe  $N_0 \gg 1$  tal que  $\|f_n - f_m\|_X < \epsilon$  para todo  $n, m > N_0$ , então  $|f_n(0) - f_m(0)| < \epsilon$  é uma seqüência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ , logo existe uma função  $f$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = f(0).$$

Da mesma maneira  $|\nabla f_n(0) - \nabla f_m(0)| < \epsilon$  é uma seqüência de Cauchy em  $\mathbb{R}^N$ , logo existe um  $T(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nabla f_n(0) = T(0).$$

E

$$\|D^2 f_n(p) - D^2 f_m(p)\| < \epsilon$$

para todos  $n, m > N_0$  e para todo  $p \in \mathbb{R}^N$  então é uma seqüência de Cauchy no espaço de matrizes  $\mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$  logo existe uma matriz  $A$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D^2 f_n(p) = A(p)$$

para todo  $p$ , logo esta convergência é uniforme em  $\mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ .

Finalmente  $f_n \rightarrow f$  em  $(X, \|\cdot\|_X)$ , de fato  $\forall \epsilon > 0$  existe  $N'_0 > N_0$  tal que  $|f_n(0) - f(0)| < \frac{\epsilon}{3}$ ,  $|\nabla f_n(0) - \nabla f(0)| < \frac{\epsilon}{3}$  para todo  $n > N'_0$  e  $\|D^2 f_n(p) - D^2 f(p)\| < \frac{\epsilon}{3}$  para todo  $n > N'_0$  e  $p \in \mathbb{R}^N$  então

$$\|f_n - f\|_X = |f_n(0) - f(0)| + |\nabla f_n(0) - \nabla f(0)| + \sup_p \|D^2 f_n(p) - D^2 f(p)\|$$

e pela unicidade da convergência obtemos

$$\|f_n - f\|_X < \epsilon, \text{ para todo } n > N'_0 \text{ e } f \in C^2.$$

□

No que se segue consideraremos funções  $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  satisfazendo:

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \frac{|\nabla \tilde{f}(p)|}{|p|} > 0. \quad (3.3)$$

Isto é que toda seqüência  $p_n \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$\frac{|\nabla \tilde{f}(p_n)|}{|p_n|} \rightarrow 0$$

deve ter uma subsequência convergente. Isso é equivalente a pedir que, existe  $\epsilon > 0$  e um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^N$  tal que  $\|\nabla \tilde{f}(p)\| \geq \epsilon|p|$  para cada  $p \in \mathbb{R}^N \setminus K$ .

**Lema 3.1.2.** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto compacto,  $f \in X$  tal que satisfaz (3.3), e  $\theta$  uma métrica Riemanniana em  $\mathbb{R}^N$  que coincide com  $\theta_0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus F$ . Existem  $\epsilon > 0$  e um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^N$  com as seguintes propriedades. Se  $f' \in X$  e  $\theta'$  é uma métrica riemanniana que coincide com  $\theta_0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus F$ , que satisfazem  $\|f - f'\|_X < \epsilon$  e  $\|\theta - \theta'\|_{C^2(F)} < \epsilon$ , então todas as trajetórias de  $-\nabla^{\theta'} f'$  conectando pontos críticos de  $f'$  estão contidas em  $K$ .*

*Demonstração.* Seja  $f \in X$ . Sem perda de generalidade pode-se assumir que

- Crit  $f \subset \text{Int}(K)$
- $B^N(1, 0) \subset K$  onde  $B^N(1, 0)$  é a bola unitária centrada na origem das coordenadas.

Nós argumentamos por contradição. Se a afirmação é falsa, então encontramos seqüências  $\gamma_m(t)$ ,  $g^m$ ,  $\theta^m$  e  $\delta_m > 0$  tais que

$$\|f - g^m\|_X < \delta_m, \|\theta - \theta^m\|_{C^2(F)} < \delta_m \text{ e } \delta_m \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty,$$

onde  $\theta^m$  são métricas Riemannianas suaves sobre  $\mathbb{R}^N$  que coincidem com  $\theta_0$  em  $\mathbb{R}^N \setminus F$  e  $\dot{\gamma}_m(t) + \nabla^{\theta^m} g^m(\gamma_m(t)) = 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_m(t) = p_{\pm}^m$  são pontos críticos de  $g^m$  e satisfazem  $\sup_t |\gamma_m(t)| \rightarrow +\infty$ .

Sabemos que  $f \in X$ , então existem  $\epsilon > 0$  e um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^N$  tais que

$$|\nabla f(p)| \geq \epsilon|p|, \quad \forall p \in \mathbb{R}^N \setminus K \quad (3.4)$$

e

$$\|f - g^m\|_X = |f(0) - g^m(0)| + \|\nabla(f - g^m)(0)\| + \sup_{p \in \mathbb{R}^N} \|D^2(f - g^m)(p)\| < \delta_m,$$

em particular

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^N} \|D^2(f - g^m)(p)\| < \delta_m.$$

Pelo teorema da desigualdade do valor médio, temos

$$|\nabla(f - g^m)(p) - \nabla(f - g^m)(0)| \leq \delta_m|p|$$

então

$$|\nabla(f - g^m)(p)| \leq \delta_m|p| + |\nabla(f - g^m)(0)| \leq \delta_m|p| + \delta_m. \quad (3.5)$$

Por outro lado

$$|\nabla f(p)| - |\nabla(f - g^m)(p)| \leq |\nabla g^m(p)|$$

usando (3.5) nós temos

$$|\nabla f(p)| - \delta_m|p| - \delta_m \leq |\nabla g^m(p)|,$$

considerando  $p \in \mathbb{R}^N \setminus K$  e usando (3.4), nós temos

$$\epsilon|p| - \delta_m|p| - \delta_m \leq |\nabla g^m(p)|.$$

Desde que  $K \subset \mathbb{R}^N$  contém a bola unitária centrada na origem das coordenadas, tem-se

$$\epsilon|p| - \delta_m|p| - \delta_m|p| \leq |\nabla g^m(p)|.$$

Finalmente

$$(\epsilon - 2\delta_m)|p| \leq |\nabla g^m(p)| \quad \forall p \in \mathbb{R}^N \setminus K. \quad (3.6)$$

Nós sabemos que  $K$  contém os pontos críticos de  $g^m$ , sempre que  $2\delta_m < \epsilon$ . Daí nós encontramos  $s_*^m \in \mathbb{R}$  tal que  $|\gamma_m(s_*^m)| = \sup_t |\gamma_m(t)|$  quando  $m \gg 1$ . Defina

$$T_-^m = \inf\{s \leq s_*^m \mid \gamma_m([s, s_*^m]) \cap K = \emptyset\}, \quad T_+^m = \sup\{s \geq s_*^m \mid \gamma_m([s_*^m, s]) \cap K = \emptyset\}$$

para  $m$  muito grande. Então  $-\infty < T_-^m < s_*^m < T_+^m < +\infty$  e  $\gamma_m(T_{\pm}^m) \in K$ .

Afirmamos que  $\min\{s_*^m - T_-^m, T_+^m - s_*^m\} \rightarrow +\infty$  quando  $m \rightarrow +\infty$ . Desde que  $\theta^m$  é a métrica euclidiana fora de  $K$  nós obtemos

$$\frac{d}{ds} |\gamma_m(s)| = \left\langle -\nabla g^m(\gamma_m(s)), \frac{\gamma_m(s)}{|\gamma_m(s)|} \right\rangle \quad \forall s \in (T_-^m, T_+^m).$$

Em particular

$$\begin{aligned} |\gamma_m(t)| &= |\gamma_m(T_-^m)| + \int_{T_-^m}^t \left\langle -\nabla g^m(\gamma_m(s)), \frac{\gamma_m(s)}{|\gamma_m(s)|} \right\rangle ds \\ &\leq |\gamma_m(T_-^m)| + \int_{T_-^m}^t |\nabla g^m(\gamma_m(s))| ds \\ &\leq |\gamma_m(T_-^m)| + C \int_{T_-^m}^t |\gamma_m(s)| ds \end{aligned}$$

é válido para cada  $t \in (T_-^m, T_+^m)$ , com alguma constante  $C > 0$  independente de  $m$ . Usando a desigualdade padrão de Gronwall, nós temos

$$|\gamma_m(t)| \leq |\gamma_m(T_-^m)|e^{C(t-T_-^m)} \quad \forall t \in (T_-^m, T_+^m).$$

Em particular  $|\gamma_m(s_*^m)| \leq |\gamma_m(T_-^m)|e^{C(s_*^m-T_-^m)} \leq d_K e^{C(s_*^m-T_-^m)}$  onde  $d_K = \sup_{p \in K} |p|$ . Tomando o logaritmo natural, nós temos

$$s_*^m - T_-^m \geq \frac{\log |\gamma_m(s_*^m)| - \log d_K}{C} \rightarrow +\infty$$

como desejamos. Um argumento análogo mostra que  $T_+^m - s_*^m \rightarrow +\infty$ .

Finalmente para  $s \in (T_-^m, T_+^m)$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [g^m(\gamma_m(s))] &= \theta^m(\gamma_m(s))(\nabla^{\theta^m} g^m(\gamma_m(s)), \dot{\gamma}_m(s)) \\ &= -|\nabla g^m(\gamma_m(s))|^2 \end{aligned}$$

e usando (3.6) nós temos

$$\begin{aligned} &\leq -(\epsilon - 2\delta_m)^2 |\gamma_m(s)|^2 \\ &\leq -(\epsilon - 2\delta_m)^2 \leq -C' \end{aligned}$$

onde  $C' > 0$  é independente de  $m$ . Foi usado que  $\gamma_m(s) \notin K$  para todo  $s \in (T_-^m, T_+^m)$  e  $\theta^m$  é a norma euclidiana fora de  $K$ . Portanto

$$g^m(\gamma_m(T_+^m)) - g^m(\gamma_m(T_-^m)) \leq -C'(T_+^m - T_-^m) \rightarrow -\infty$$

em contradição com  $|g^m(\gamma_m(T_+^m)) - g^m(\gamma_m(T_-^m))| \leq 2 \sup_m \sup_{p \in K} |g^m(p)| < \infty$ .  $\square$

**Observação 3.1.3.** *Se pode provar versões análogas do lema acima para as trajetórias que se contam para definir mapas de continuação e homotopias entre eles, como explicado no Capítulo 2.*

Seja  $(f, \theta)$  onde  $f \in X$  e  $\theta$  é uma métrica Riemanniana em  $\mathbb{R}^N$ . Suponha que existe um conjunto compacto  $K$  em  $\mathbb{R}^N$  tal que:

1.  $\text{Crit } f \subset K$ ,
2. Todas as trajetórias de  $-\nabla^\theta f$  conectando pontos críticos de  $f$  estão contidos em  $K$ .

Usando o Lema 3.1.2 se pode demonstrar que para qualquer perturbação  $(f', \theta')$  de  $(f, \theta)$  onde  $f$  está próxima de  $f'$  em  $X$  e  $\theta$  está próxima de  $\theta'$  em  $C^2$ , com  $\text{supp}(\theta - \theta')$  compacto, temos a seguinte propriedade: pontos críticos de  $f'$  e trajetórias anti-gradiente (com respeito a  $\theta'$ ) conectando-os estão contidas em um compacto. Com uma tal perurbação, usando argumentos standard, se pode obter também a propriedade Morse-Smale. Para cada  $j$  considera-se o espaço vetorial  $\text{CM}_j(f', \theta')$  sobre  $\mathbb{Q}$  livremente gerado pelos pontos críticos de  $f'$  e tem índice de Morse igual a  $j$ . O diferencial  $\partial^{(f', \theta')}$  no espaço vetorial graduado  $\text{CM}_*(f', \theta')$  é definido contando as trajetórias do campo anti-gradiente  $-\nabla^{\theta'} f'$  conectando pontos críticos de diferença de índice um. Este diferencial depende das escolhas de orientações das variedades instáveis. Denotamos os grupos de homologia do par  $(f, \theta)$  por

$$\text{HM}_*(f, \theta) := \text{HM}_*(f', \theta', K).$$

A dependência da escolha de orientações não é explícita na notação.

## 3.2 Funções Geradoras

Seja  $\varphi$  um difeomorfismo simplético definido em  $\mathbb{R}^{2n}$ . Nós usamos  $(x, y)$  para indicar o splitting Lagrangiano  $\mathbb{R}^{2n} = (\mathbb{R}^n \times 0) \oplus (0 \times \mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  e identificamos  $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$  pelo isomorfismo  $(x, y) \rightarrow x + iy$ . Se temos

$$\mathbb{R}^{2n} = (\mathbb{R}^n \times 0) \oplus d\varphi(p)(0 \times \mathbb{R}^n) \quad (3.7)$$

onde  $p \in \mathbb{R}^{2n}$  então, com  $(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x, y)$  a aplicação  $(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$  define um difeomorfismo. Portanto pode-se usar coordenadas independentes  $(x, \bar{y})$ , e considerar a 1-forma fechada  $\eta := (y - \bar{y})dx + (\bar{x} - x)d\bar{y}$  no espaço das coordenadas  $(x, \bar{y})$ . Portanto existe uma primitiva  $S = S(x, \bar{y})$ . Tal função  $S$  é chamado função geradora de  $\varphi$ .

Para todo  $(X, Y), (x, y)$

$$\varphi(x, y) = (X, Y) \Leftrightarrow X - x = \nabla_2 S(x, Y) \quad e \quad y - Y = \nabla_1 S(x, Y). \quad (3.8)$$

Existem muitos outros tipos de funções geradoras, ver [21], (Cap.9). Neste trabalho, a função geradora refere-se àqueles definidos como acima.

**Definição 3.2.1.** *Seja  $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  um simplectomorfismo global tal que  $\psi(x, y) = (X, Y)$  onde*

$$X = u(x, y), \quad Y = v(x, y).$$

*Se diz que  $\psi$  é  $\mathcal{C}^1$ -próximo da identidade, se a primeira derivada de  $\psi$  satisfaz*

$$\|d\psi(z) - \mathbb{I}\| \leq \frac{1}{2}$$

*para todo  $z \in \mathbb{R}^{2n}$ .*

**Proposição 3.2.2. [Teorema da desigualdade do valor médio].** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  aberto e conexo. Se  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é  $\mathcal{C}^\infty$  com  $\|f'(x)\| \leq M$  para todo  $x \in U$ , então  $f$  é Lipchitziana com constante  $M$*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M|y - x|$$

*para todo  $x, y \in U$ .*

**Proposição 3.2.3. [Teorema de Perturbação da identidade].** *Seja  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma contração definida em  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^m$ . A aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $f(x) = x + \varphi(x)$  é um homeomorfismo de  $U$  sobre  $f(U)$ .*

*Além disso se  $U = \mathbb{R}^m$  tem-se  $f(U) = \mathbb{R}^m$ .*

**Lema 3.2.4.** *Se  $\psi$  é um simplectomorfismo  $\mathcal{C}^1$ -próximo da identidade, então existe uma função  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $S = S(x, y)$  em  $\mathbb{R}^{2n}$  tal que  $\psi(x, y) = (X, Y)$  se, e somente se,*

$$X - x = \frac{\partial}{\partial Y} S(x, Y)$$

$$y - Y = \frac{\partial}{\partial x} S(x, Y).$$

*Demonstração.* Consideremos  $\psi(x, y) = (X, Y)$  como acima e seja

$$\varpi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(x, y) \rightarrow (x, v(x, y))$$

**Afirmção:**  $\varpi$  tem uma inversa global. De fato

$$\varpi(x, y) = \varphi(x, y) + Id(x, y)$$

onde  $\varphi(x, y) = (0, v(x, y) - y)$

**Primeiro:**  $\varpi$  é  $\mathcal{C}^1$ -próximo da identidade. Pela hipótese, tem-se  $\|d\psi(z) - \mathbb{I}\| \leq \frac{1}{2}$  para todo  $z \in \mathbb{R}^{2n}$ , isto é a matrix

$$d\psi(z) - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}u(z) - \mathbb{I} & \frac{\partial}{\partial y}u(z) \\ \frac{\partial}{\partial x}v(z) & \frac{\partial}{\partial y}v(z) - \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

tem norma menor que  $\frac{1}{2}$ . Por outro lado

$$d\varpi(z) - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}v(z) & \frac{\partial}{\partial y}v(z) - \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

é claro que  $\|d\varpi(z) - \mathbb{I}\| \leq \|d\psi(z) - \mathbb{I}\|$ , logo

$$\|d\varpi(z) - \mathbb{I}\| \leq \frac{1}{2}$$

para todo  $z \in \mathbb{R}^{2n}$ . Portanto  $\varpi$  é  $\mathcal{C}^1$ -próximo da identidade.

**Segundo:**  $\varphi$  é Lipchitziana (Contração)

De fato, derivando  $\varphi(x, y) = (0, v(x, y) - y)$  tem-se

$$d\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) & \frac{\partial}{\partial y}v(x, y) - \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

logo  $\|d\varphi(x, y)\| \leq \|d\psi(x, y) - \mathbb{I}\| \leq \frac{1}{2}$ , pelo Teorema da desigualdade do valor médio, tem-se

$$\|\varphi(z) - \varphi(z_0)\| \leq \frac{1}{2}|z - z_0|$$

para todo  $z, z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Pelo Teorema de perturbação da identidade, tem-se

$$\varpi(x, y) = \varphi(x, y) + Id(x, y)$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$  com  $\varphi$  uma  $\frac{1}{2}$ -contração em  $\mathbb{R}^{2n}$ , então  $\varpi$  é um homeomorfismo, mas como  $\varpi(x, y) = (x, v(x, y))$  é  $\mathcal{C}^\infty$ , tem-se que  $\varpi$  é um difeomorfismo em todo  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Por outro lado como  $\varpi$  tem inversa global, existem aplicações  $\mathcal{C}^\infty$

$$\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(x, Y) \rightarrow g(x, Y)$$

tal que  $y = g(x, Y) = g(x, v(x, y))$  e também

$$\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(x, Y) \rightarrow f(x, Y)$$

tal que  $X = f(x, Y) = u(x, g(x, Y))$ .

Pois a inversa de  $\varpi$  é definida como

$$\varpi^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(x, Y) \rightarrow (x, g(x, Y))$$

De fato  $\varpi \circ \varpi^{-1}(x, Y) = \varpi(x, g(x, Y)) = (x, v(x, g(x, Y))) = (x, v(x, y)) = (x, Y)$  e também  $\varpi^{-1} \circ \varpi(x, y) = \varpi^{-1}(x, v(x, y)) = (x, g(x, v(x, y))) = (x, y)$ .

Desde que  $\psi$  é um symplectomorfismo a 1-forma

$$ydx + XdY = gdx + f dY$$

é fechada, pois tomando a derivada exterior a esta 1-forma tem-se  $dy \wedge dx + dX \wedge dY = 0$  desde que  $\psi^*(dX \wedge dY) = dX \wedge dY = dx \wedge dy$ .

Por tanto existe uma função, (pelo fato que  $H_{dR}^1(\mathbb{R}^{2n}) = 0$ )  $W : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$X = f(x, Y) = \frac{\partial}{\partial Y} W(x, Y)$$

$$y = g(x, Y) = \frac{\partial}{\partial x} W(x, Y).$$

Logo a função

$$S(x, Y) = W(x, Y) - \langle x, Y \rangle,$$

satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial Y} S(x, Y) = \frac{\partial}{\partial Y} W(x, Y) - x = X - x$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} S(x, Y) = \frac{\partial}{\partial x} W(x, Y) - Y = y - Y.$$

□

Seja agora  $N \gg 1$ , tal que

$$\phi = \varphi_H^1 = \left( \varphi_H^1 \circ \left( \varphi_H^{\frac{N-1}{N}} \right)^{-1} \right) \circ \left( \varphi_H^{\frac{N-1}{N}} \circ \left( \varphi_H^{\frac{N-2}{N}} \right)^{-1} \right) \circ \dots \circ \left( \varphi_H^{\frac{1}{N}} \circ \left( \varphi_H^0 \right)^{-1} \right)$$

denotemos

$$\psi_j = \varphi_H^{\frac{j}{N}} \circ \left( \varphi_H^{\frac{j-1}{N}} \right)^{-1},$$

para todo  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Logo

$$\phi = \psi_N \circ \psi_{N-1} \circ \dots \circ \psi_1$$

então quando  $N$  é grande o suficiente temos que  $\psi_j$  é  $\mathcal{C}^1$ -próximo da identidade. Portanto para cada  $j$  existe uma função  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $S_j : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  a qual gera os symplectomorfismos  $\psi_j(x_j, y_j) = (x_{j+1}, y_{j+1})$  via as **equações diferenciais Hamiltonianas**

$$x_i - x_{i-1} = \frac{\partial}{\partial y_i} S_{i-1}(x_{i-1}, y_i) \quad y_i - y_{i+1} = \frac{\partial}{\partial x_i} S_i(x_i, y_{i+1}). \quad (3.9)$$

### 3.3 Ação Simplética Discreta

Temos que as soluções de (3.9) pueden ser descritas como um problema variacional. Denotemos por  $\mathcal{P} = (\mathbb{R}^{2n})^N$  o conjunto de *caminhos discretos*  $\xi = (z_1, z_2, \dots, z_N)$  onde  $z_j = (x_j, y_j) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Fixando um  $k \in \mathbb{N}$  definamos, **Ação Simplética Discreta**

$$\mathbb{A}_{H,k,N} : \mathcal{P}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

pela formula

$$\mathbb{A}_{H,k,N}(z_1, \dots, z_{kN}) = \sum_{i=1}^{kN} [(x_i, y_{i+1} - y_i) + S_i(x_i, y_{i+1})]$$

para  $(z_1, \dots, z_{kN}) \in \mathbb{R}^{2nkN}$  onde estamos considerando  $(i \bmod kN)$ .

Uma  $\mathbb{Z}_k$ -simetria de  $\mathbb{A}_{H,k,N}$  é gerada pela aplicação (right)-shift

$$\tau : \mathbb{R}^{2nkN} \rightarrow \mathbb{R}^{2nkN}$$

$$(z_1, \dots, z_{kN}) \mapsto (z_{(k-1)N+1}, \dots, z_{kN}, z_1, \dots, z_{(k-1)N})$$

com  $(z_1, \dots, z_{kN})$  um caminho discreto.

Logo isso define um grupo de aplicações  $\mathbb{Z}_k = \{Id, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{k-1}\}$  onde

$$\tau^j = \underbrace{\tau \circ \tau \dots \circ \tau}_{j \text{ - vezes}}$$

e  $\tau^k = Id$ . É claro que  $\mathbb{Z}_k$  age em  $\mathbb{R}^{2nkN}$  do seguinte fato

$$\mathbb{Z}_k \times \mathbb{R}^{2nkN} \rightarrow \mathbb{R}^{2nkN}$$

$$(\tau^j, \xi) \mapsto \tau^j(\xi)$$

**Lema 3.3.1.** *Um ponto  $\xi = (z_1, \dots, z_{kN}) = (x_1, y_1, \dots, x_{kN}, y_{kN}) \in \mathcal{P}^k$  é crítico para  $\mathbb{A}_{H,N,k}$  se, e somente se,  $\xi$  satisfaz as equações diferenciáveis Hamiltonianas*

$$y_i - y_{i+1} = \frac{\partial}{\partial x_i} S_i(x_i, y_{i+1})$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{\partial}{\partial y_i} S_{i-1}(x_{i-1}, y_i).$$

para todo  $i = \{1, 2, \dots, kN\}$  com  $(i \bmod kN)$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) &= \langle x_1, y_2 - y_1 \rangle + S_1(x_1, y_2) + \langle x_2, y_3 - y_2 \rangle + S_2(x_2, y_3) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad + \langle x_{i-1}, y_i - y_{i-1} \rangle + S_{i-1}(x_{i-1}, y_i) + \langle x_i, y_{i+1} - y_i \rangle + S_i(x_i, y_{i+1}) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad + \langle x_{kN-1}, y_{kN} - y_{kN-1} \rangle + S_{kN-1}(x_{kN-1}, y_{kN}) + \langle x_{kN}, y_1 - y_{kN} \rangle + S_{kN}(x_{kN}, y_1). \end{aligned}$$

Derivando com respeito das variables  $x_i$  e  $y_i$  tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) = y_2 - y_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} S_1(x_1, y_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) = x_N - x_1 + \frac{\partial}{\partial y_1} S_{kN}(x_{kN}, y_1)$$

·

·

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) = y_{i+1} - y_i + \frac{\partial}{\partial x_i} S_i(x_i, y_{i+1})$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) = x_{i-1} - x_i + \frac{\partial}{\partial y_i} S_{i-1}(x_{i-1}, y_i)$$

·

·

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_{kN}} \mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) &= y_1 - y_{kN} + \frac{\partial}{\partial x_{kN}} S_{kN}(x_{kN}, y_1) \\ \frac{\partial}{\partial y_{kN}} \mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) &= x_{kN-1} - x_{kN} + \frac{\partial}{\partial y_{kN}} S_{kN-1}(x_{kN-1}, y_{kN}).\end{aligned}$$

Logo se  $\xi$  é um ponto crítico de  $\mathbb{A}_{H,N,k}$  tem-se que todas as equações acima são zero, é dizer

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) = y_{i+1} - y_i + \frac{\partial}{\partial x_i} S_i(x_i, y_{i+1}) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_{i+1}} \mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) = x_i - x_{i+1} + \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} S_i(x_i, y_{i+1}) = 0.$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, kN\}$ . □

**Lema 3.3.2.** *O ponto  $\xi = (z_1, z_2, \dots, z_{kN})$  é um ponto crítico de  $\mathbb{A}_{H,N,k} : \mathcal{P}^k \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,  $z_1$  é um ponto fixo de  $\phi^k = (\varphi_H^1)^k$  e  $\psi_j(z_j) = z_{j+1} = \varphi_H^{\frac{j}{N}}(z_1)$  para todo  $j = \{1, 2, 3, \dots, kN\}$ .*

*Demonstração.* Como  $\xi$  é um ponto crítico de  $\mathbb{A}_{H,N,k}$  pelo Lema 3.3.1 satisfaz as seguintes equações

$$y_j - y_{j+1} = \frac{\partial}{\partial x_j} S_j(x_j, y_{j+1}); \quad x_{j+1} - x_j = \frac{\partial}{\partial y_{j+1}} S_j(x_j, y_{j+1}) \quad (3.10)$$

para todo  $j \in \{1, 2, \dots, kN\}$  com  $(j \bmod kN)$ . Logo pelo Lema 3.2.4 tem-se que (3.10) é equivalente a  $\psi_j(x_j, y_j) = (x_{j+1}, y_{j+1})$ , pelo fato que  $\psi_j$  é  $C^1$ -próxima da identidade.

Logo como  $\psi_j = \varphi_H^{\frac{j}{N}} \circ \left( \varphi_H^{\frac{j-1}{N}} \right)^{-1}$  para todo  $j = \{1, 2, \dots, kN\}$ . Fazendo  $j = 1$  tem-se

$$\psi_1(z_1) = \varphi_H^{\frac{1}{N}} \circ (\varphi_H^0)^{-1} = \varphi_H^{\frac{1}{N}}(z_1)$$

de onde obtemos

$$\varphi_H^{\frac{1}{N}}(z_1) = z_2$$

Para  $j = 2$  tem-se

$$\psi_2(z_2) = \varphi_H^{\frac{2}{N}} \circ \left( \varphi_H^{\frac{1}{N}} \right)^{-1}(z_2) = \varphi_H^{\frac{2}{N}}(z_1)$$

de onde obtemos

$$\varphi_H^{\frac{2}{N}}(z_1) = z_3$$

seguindo do mesmo jeito tem-se

$$\varphi_H^{\frac{j}{N}}(z_1) = z_{j+1},$$

para todo  $j \in \{1, 2, \dots, kN\}$ .

Finalmente  $z_1$  é ponto fixo de  $\phi^k$ , de fato

$$\phi(z_1) = \psi_N \circ \psi_{N-1} \circ \dots \circ \psi_1(z_1)$$

como  $\psi(z_j) = z_{j+1}$  tem-se

$$\phi(z_1) = \psi_N \circ \psi_{N-1}(z_{N-1}) = \psi_N(z_N) = z_{N+1}, \quad (3.11)$$

por otro lado, repare que os  $\psi_j$  são  $N$ -periódicas pois

$$\psi_{N+1} = \varphi_H^{\frac{1+N}{N}} \circ (\varphi_H^{\frac{N}{N}})^{-1} = \varphi_H^{\frac{1}{N}} \circ \varphi_H^1 \circ (\varphi_H^1)^{-1} = \varphi_H^{\frac{1}{N}} = \psi_1$$

considere  $s \in \mathbb{Z}$  com  $s \in [2, N]$ , então

$$\psi_{N+s} = \varphi_H^{\frac{s+N}{N}} \circ \left( \varphi_H^{\frac{N+s-1}{N}} \right)^{-1} = \varphi_H^{\frac{s}{N}} \circ \varphi_H^1 \circ \left( \varphi_H^{\frac{s-1}{N}} \circ \varphi_H^1 \right)^{-1} = \varphi_H^{\frac{s}{N}} \circ \left( \varphi_H^{\frac{s-1}{N}} \right)^{-1} = \psi_s$$

Agora compondo (3.11) com  $\psi_{2N} \circ \psi_{2N-1} \circ \dots \circ \psi_{N+1} = \psi_N \circ \psi_{N-1} \circ \dots \circ \psi_1 = \phi$ , temos

$$\psi_{2N} \circ \dots \circ \psi_{N+1} \circ \phi(z_1) = \phi \circ \phi(z_1) = z_{2N+1},$$

o que nos diz

$$\phi^2(z_1) = z_{2N+1}$$

continuando do mesmo jeito temos

$$\phi^k(z_1) = \phi \circ \dots \circ \phi(z_1) = z_{kN+1} = z_1,$$

o que mostra o Lema.  $\square$

**Lema 3.3.3.**  $\xi = (z_1, z_2, \dots, z_{kN})$  é um ponto crítico não-degenerado de  $\mathbb{A}_{H,N,k}$  se, e somente se,  $z_1$  é não-degenerado como ponto fixo de  $\phi^k = (\varphi_H^1)^k$ .

*Demonstração.* Primeiro vamos calcular a matriz Hessiana de  $\mathbb{A}_{H,N,k}$ , para simplificar só vamos a escrever as  $i, i+1$  linhas e colunas

$$d^2\mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{i+1}} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_{i+1}} \mathbb{A}_{H,N,k} & * \\ * & \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_i} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_{i+1}} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_{i+1}} \mathbb{A}_{H,N,k} & * \\ * & \frac{\partial^2}{\partial x_{i+1} \partial x_i} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial x_{i+1} \partial y_i} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial x_{i+1}^2} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial x_{i+1} \partial y_{i+1}} \mathbb{A}_{H,N,k} & * \\ * & \frac{\partial^2}{\partial y_{i+1} \partial x_i} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial y_{i+1} \partial y_i} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial y_{i+1} \partial x_{i+1}} \mathbb{A}_{H,N,k} & \frac{\partial^2}{\partial y_{i+1}^2} \mathbb{A}_{H,N,k} & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} S_i(x_i, y_{i+1}) & -1 & 0 & 1 + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_{i+1}} S_i(x_i, y_{i+1}) & * \\ * & -1 & \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} S_{i-1}(x_{i-1}, y_i) & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_{i+1}^2} S_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+2}) & -1 & * \\ * & 1 + \frac{\partial^2}{\partial y_{i+1} \partial x_i} S_i(x_i, y_{i+1}) & 0 & -1 & \frac{\partial^2}{\partial y_{i+1}^2} S_i(x_i, y_{i+1}) & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

É claro que a Hessiana de  $\mathbb{A}_{H,N,k}$  em  $\xi$  é um operador simétrico, logo se avaliamos um vetor  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{kN}) = (\zeta_1, \eta_1, \dots, \zeta_{kN}, \eta_{kN}) \in (\mathbb{R}^{2nN})^k$  tem-se

$$d^2\mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) \begin{pmatrix} * \\ \zeta_i \\ \eta_i \\ \zeta_{i+1} \\ \eta_{i+1} \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \zeta'_i \\ \eta_i \\ \zeta'_{i+1} \\ \eta_{i+1} \\ * \end{pmatrix}$$

de onde obtemos as seguintes equações

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} S_i(x_i, y_{i+1}) \zeta_i - \eta_i + \eta_{i+1} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_{i+1}} S_i(x_i, y_{i+1}) \eta_{i+1} = \zeta'_i$$

$$-\zeta_i + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} S_{i-1}(x_{i-1}, y_i) \eta_i = \eta'_i$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_{i+1}^2} S_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+2}) \zeta_{i+1} - \eta_{i+1} &= \zeta'_{i+1} \\ \zeta_i + \frac{\partial^2}{\partial y_{i+1} \partial x_i} S_i(x_i, y_{i+1}) \zeta_i - \zeta_{i+1} + \frac{\partial^2}{\partial y_{i+1}^2} S_i(x_i, y_{i+1}) \eta_{i+1} &= \eta'_{i+1}. \end{aligned}$$

Agora  $\nu$  esta no kernel da Hessiana se, e somente se,  $d^2 \mathbb{A}_{H,N,k}(\xi) \nu = 0$ , de onde obtemos

$$\begin{aligned} \eta_i - \eta_{i+1} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} S_i(x_i, y_{i+1}) \zeta_i + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_{i+1}} S_i(x_i, y_{i+1}) \eta_{i+1} \\ \zeta_{i+1} - \zeta_i &= \frac{\partial^2}{\partial y_{i+1} \partial x_i} S_i(x_i, y_{i+1}) \zeta_i + \frac{\partial^2}{\partial y_{i+1}^2} S_i(x_i, y_{i+1}) \eta_{i+1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

logo pelo Lema 3.2.4 temos que (3.12) é equivalente a  $d\psi_i(z_i) \nu_i = \nu_{i+1}$  com  $d\psi$   $\mathcal{C}^1$ -próxima da identidade e  $\frac{\partial}{\partial x_i} S_i + \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} S_i$  é  $\mathcal{C}^\infty$ .

Logo fazendo  $i = kN$  tem-se

$$d\psi_{kN}(z_{kN}) \nu_{kN} = \nu_{kN+1} = \nu_1 \quad (3.13)$$

mas como

$$(\varphi_H^1)^k = \psi_{kN} \circ \psi_{kN-1} \circ \dots \circ \psi_{(k-1)N+1} \circ \dots \circ \psi_N \circ \psi_{N-1} \circ \dots \circ \psi_1$$

derivando tem-se

$$d(\varphi_H^1)_{z_1}^k = (d\psi_{kN})_{z_{kN}} \cdot (d\psi_{kN-1})_{z_{kN-1}} \dots (d\psi_1)_{z_1}$$

avaliando em  $\nu_1$  nós temos

$$d(\varphi_H^1)_{z_1}^k(\nu_1) = (d\psi_{kN})_{z_{kN}}(\nu_{kN})$$

e por (3.13) tem-se

$$d(\varphi_H^1)^k(z_1) \nu_1 = \nu_1$$

o que nos diz que o kernel de  $d^2 \mathbb{A}_{H,N}$  é isomorfo a o kernel de  $\mathbb{I} - d\phi^k(z_1)$   $\square$

### 3.4 Configuração geométrica

Agora vamos mostrar que o funcional de ação discreto satisfaz as condições indicadas na seção 3.1 Nós denotamos por

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$$

a forma simplética padrão em  $\mathbb{R}^{2n}$  equipado com coordenadas

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Consideramos uma forma quadrática

$$h : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \quad h(z) = - \sum_{j=1}^n \frac{a_j(x_j^2 + y_j^2)}{2} \quad (3.14)$$

onde os  $a_1, \dots, a_n > 0$  são racionalmente independentes, e incomensurável com  $\pi$ , e uma Hamiltoniana suave tempo-dependente

$$H_t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_{t+1}(z) = H_t(z)$$

para o qual existe  $h_0 < 0$  tal que

$$H_t(z) = h(z) \quad \forall z \in \{h \leq h_0\}, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Seja  $\varphi_H^t$  a isotopia gerada por  $H_t$  de acordo com

$$\frac{d}{dt}\varphi_H^t = X_{H_t} \circ \varphi_H^t, \quad \varphi_H^0 = id.$$

Onde  $X_{H_t}$  é o campo vetorial Hamiltoniano definido por  $dH_t = \omega_0(X_{H_t}, \cdot)$ , com  $N \in \mathbb{N}$  bastante grande e seja  $S_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função geradora para o difeomorfismo simplético

$$\psi_i = \varphi_H^{i/N} \circ (\varphi_H^{(i-1)/N})^{-1} \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3.16)$$

Isso significa que

$$\psi_i(x, y) = (X, Y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X - x = \nabla_2 S_i(x, Y) \\ y - Y = \nabla_1 S_i(x, Y) \end{cases} \quad (3.17)$$

onde nós escrevemos  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  de acordo com sua habitual splitting Lagrangiano. Nós normalizamos isso exigindo que  $S_i$  seja zero no origem. Talvez depois de fazer  $N$  maior podemos também assumir

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} \|D^2 S_i(z)\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall i. \quad (3.18)$$

Aqui  $\|M\|$  denota a norma do operador tomada em relação às normas euclidianas. Segue-se que  $\psi_i$  é Lipschitz

$$|\psi_i(z) - \psi_i(z')| \leq \frac{3}{2}|z - z'| \quad \forall z, z' \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (3.19)$$

Finalmente, note que as seqüências  $\psi_i$  e  $S_i$  são  $N$ -periódicas em  $i$ . Isso é assim porque  $\varphi_H^{t+1} = \varphi_H^t \circ \varphi_H^1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

### 3.5 Estimativas gradientes

O funcional de ação discreto associado ao  $k$ -esimo iteração de  $\varphi_H^1$  é

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{H,k,N} : \mathbb{R}^{2nkN} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{A}_{H,k,N}(z_1, \dots, z_{kN}) &= \sum_{i=1}^{kN} x_i(y_{i+1} - y_i) + S_i(x_i, y_{i+1}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $i \in \mathbb{Z}/kN\mathbb{Z}$  e cada  $z_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ . É bem conhecido que os pontos críticos de  $\mathbb{A}_{H,k,N}$  estão em correspondência 1-1 com as  $k$ -órbitas periódicas de  $\varphi_H^t$ . Considere a família a 1-parâmetro de funções diferenciáveis

$$\mathbb{A}_s^+ : \mathbb{R}^{2nk(N+2)} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{A}_s^+ = \mathbb{A}' + \mathbb{A}_s'' \quad (s \in [0, 1]) \quad (3.21)$$

definido como segue. Escreva  $\mathbb{R}^{2nk(N+2)} = (\mathbb{R}^{2n})^{kN} \times (\mathbb{R}^{2n})^{2k}$  com variáveis

$$p = (z_1, \dots, z_{kN}, (\xi_1^1, \zeta_1^1), (\xi_1^2, \zeta_1^2), \dots, (\xi_k^1, \zeta_k^1), (\xi_k^2, \zeta_k^2)).$$

Seja

$$\mathbb{A}'(p) = \sum_{\lambda=1}^k \sum_{j=1}^{N-1} \left( x_{(\lambda-1)N+j} (y_{(\lambda-1)N+j+1} - y_{(\lambda-1)N+j}) + S_{(\lambda-1)N+j}(x_{(\lambda-1)N+j}, y_{(\lambda-1)N+j+1}) \right) \quad (3.22)$$

e

$$\mathbb{A}_s''(p) = \sum_{\lambda=1}^k \left( -\xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^1 - \xi_\lambda^2 \zeta_\lambda^2 - s \xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^2 + x_{\lambda N} (y_{\lambda N+1} - y_{\lambda N}) + S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s \zeta_\lambda^1 - s \zeta_\lambda^2) \right). \quad (3.23)$$

Note que

$$\mathbb{A}_0^+ = \mathbb{A}_{H,k,N} - \sum_{\lambda=1}^k \xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^1 + \xi_\lambda^2 \zeta_\lambda^2. \quad (3.24)$$

Nosso primeiro objetivo é provar a seguinte Proposição.

**Proposição 3.5.1.** *Existem  $c > 0$  e um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  tal que*

$$|\nabla \mathbb{A}_s^+(p)| \geq c|p| \quad \forall p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)} \setminus K, \forall s \in [0, 1].$$

Aqui  $\nabla \mathbb{A}_s^+$  denota o gradiente euclidiano de  $\mathbb{A}_s^+$ . A partir de agora estamos preocupados com a prova da Proposição 3.5.1. O primeiro passo é calcular algumas derivadas parciais de  $\mathbb{A}_s^+$ . Nas fórmulas abaixo os índices de  $z_i = (x_i, y_i)$ ,  $\psi_i$  e  $S_i$  são tomadas módulo  $kN$ .

$$\begin{aligned} \nabla_{x_i} \mathbb{A}_s^+ &= y_{i+1} - y_i + \nabla_1 S_i(x_i, y_{i+1}) \\ i &= (\lambda - 1)N + j, \quad 1 \leq \lambda \leq k, \quad 1 \leq j < N \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{x_{\lambda N}} \mathbb{A}_s^+ &= y_{\lambda N+1} - y_{\lambda N} + \nabla_1 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \\ 1 &\leq \lambda \leq k \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{y_i} \mathbb{A}_s^+ &= x_{i-1} - x_i + \nabla_2 S_{i-1}(x_{i-1}, y_i) \\ i &= (\lambda - 1)N + j, \quad 1 \leq \lambda \leq k, \quad 1 < j \leq N \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{y_{\lambda N+1}} \mathbb{A}_s^+ &= x_{\lambda N} - x_{\lambda N+1} + \nabla_2 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \\ 1 &\leq \lambda \leq k \end{aligned} \quad (3.28)$$

Em seguida, apresentamos as funções

$$\Delta_i(p) = \psi_i(z_i) - z_{i+1} \quad (3.29)$$

onde  $z_i, z_{i+1}$  são as coordenadas correspondentes de  $p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$ ,  $i$  é tomado modulo  $kN$ .

**Lema 3.5.2.** *Para todo  $p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$ ,  $i \in \{1, \dots, kN\}$  e  $s \in [0, 1]$  nós temos uma estimativa*

$$|\Delta_i(p)| \leq 4|\nabla \mathbb{A}_s^+(p)|. \quad (3.30)$$

*Demonstração.* Considere as variáveis  $(X_i, Y_i) = \psi_i(z_i)$  como funções de  $p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$ . Estas dependem apenas das  $z_i$  componentes. Em vista de (3.17) nós temos a identidade

$$\Delta_i = (X_i - x_{i+1}, Y_i - y_{i+1}) = (x_i - x_{i+1} + \nabla_2 S_i(x_i, Y_i), y_i - y_{i+1} - \nabla_1 S_i(x_i, Y_i)). \quad (3.31)$$

Segue-se de (3.31), (3.25) e (3.27) que se  $i = (\lambda - 1)N + j$ ,  $1 \leq j < N$  então

$$\begin{aligned} \Delta_i &= (x_i - x_{i+1} + \nabla_2 S_i(x_i, y_{i+1}), y_i - y_{i+1} - \nabla_1 S_i(x_i, y_{i+1})) \\ &+ (\nabla_2 S_i(x_i, Y_i) - \nabla_2 S_i(x_i, y_{i+1}), \nabla_1 S_i(x_i, y_{i+1}) - \nabla_1 S_i(x_i, Y_i)) \\ &= (\nabla_{y_{i+1}} \mathbb{A}_s^+, -\nabla_{x_i} \mathbb{A}_s^+) + (\epsilon_i, \epsilon'_i) \end{aligned}$$

onde  $\epsilon_i = \nabla_2 S_i(x_i, Y_i) - \nabla_2 S_i(x_i, y_{i+1})$  e  $\epsilon'_i = \nabla_1 S_i(x_i, y_{i+1}) - \nabla_1 S_i(x_i, Y_i)$ . A partir de (3.31), (3.26) e (3.27) temos que o primeiro componente de  $\Delta_{\lambda N}$  é

$$\begin{aligned} &x_{\lambda N} - x_{\lambda N+1} + \nabla_2 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \\ &+ \nabla_2 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, Y_{\lambda N}) - \nabla_2 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \\ &= \nabla_{y_{\lambda N+1}} \mathbb{A}_s^+ + \epsilon_{\lambda N} \end{aligned}$$

onde  $\epsilon_{\lambda N} = \nabla_2 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, Y_{\lambda N}) - \nabla_2 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2)$ . Da mesma maneira, segue-se (3.31), (3.25) e (3.28) que o segundo componente de  $\Delta_{\lambda N}$  é

$$\begin{aligned} &y_{\lambda N} - y_{\lambda N+1} - \nabla_1 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \\ &- \nabla_1 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, Y_{\lambda N}) + \nabla_1 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \\ &= \nabla_{x_{\lambda N}} \mathbb{A}_s^+ + \epsilon'_{\lambda N} \end{aligned}$$

onde  $\epsilon'_{\lambda N} = \nabla_1 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) - \nabla_1 S_{\lambda N}(x_{\lambda N}, Y_{\lambda N})$ . Resumindo, nós escrevemos para cada  $i$

$$\Delta_i = (\nabla_{y_{i+1}\mathbb{A}_s^+}, -\nabla_{x_i\mathbb{A}_s^+}) + (\epsilon_i, \epsilon'_i) \quad (3.32)$$

onde

$$\begin{aligned} |(\epsilon_i, \epsilon'_i)| &\leq \frac{1}{2}|\Delta_i| \quad i \notin N\mathbb{Z}, \\ |(\epsilon_{\lambda N}, \epsilon'_{\lambda N})| &\leq \frac{1}{2}|\Delta_{\lambda N} + s(0, \zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2)|. \end{aligned} \quad (3.33)$$

A desigualdade (3.18) foi fortemente usado. Agora nós usamos (3.32) e (3.33) para ter  $\Delta_i$  em termos de  $|\nabla\mathbb{A}_s^+|$ . Quando  $i \notin N\mathbb{Z}$  nós obtemos de

$$|\Delta_i| \leq |(\nabla_{y_{i+1}\mathbb{A}_s^+}, -\nabla_{x_i\mathbb{A}_s^+})| + |(\epsilon_i, \epsilon'_i)| \leq |(\nabla_{y_{i+1}\mathbb{A}_s^+}, -\nabla_{x_i\mathbb{A}_s^+})| + \frac{1}{2}|\Delta_i|$$

que

$$|\Delta_i| \leq 2|\nabla\mathbb{A}_s^+|, \quad \forall i \notin N\mathbb{Z}.$$

Para analisar o caso  $i = \lambda N$  primeiro note que  $\nabla_{\xi_\lambda^1}\mathbb{A}_s^+ = -\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2$  e que  $\nabla_{\xi_\lambda^2}\mathbb{A}_s^+ = -\zeta_\lambda^2$ . Dessas identidades nós temos

$$\begin{aligned} |\zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2| &= |-\nabla_{\xi_\lambda^1}\mathbb{A}_s^+ - (1-s)\nabla_{\xi_\lambda^2}\mathbb{A}_s^+| \leq |\nabla_{\xi_\lambda^1}\mathbb{A}_s^+| + |\nabla_{\xi_\lambda^2}\mathbb{A}_s^+| \\ &\leq \sqrt{2}|(\nabla_{\xi_\lambda^1}\mathbb{A}_s^+, \nabla_{\xi_\lambda^2}\mathbb{A}_s^+)| \leq \sqrt{2}|\nabla\mathbb{A}_s^+|. \end{aligned}$$

Usando esta desigualdade com (3.32)-(3.33) podemos estimar

$$\begin{aligned} |\Delta_{\lambda N}| &\leq |(\nabla_{y_{\lambda N+1}\mathbb{A}_s^+}, -\nabla_{x_{\lambda N}\mathbb{A}_s^+})| + |(\epsilon_{\lambda N}, \epsilon'_{\lambda N})| \\ &\leq |(\nabla_{y_{\lambda N+1}\mathbb{A}_s^+}, -\nabla_{x_{\lambda N}\mathbb{A}_s^+})| + \frac{1}{2}|\Delta_{\lambda N}| + \frac{1}{2}|\zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2| \\ &\leq \frac{1}{2}|\Delta_{\lambda N}| + 2|\nabla\mathbb{A}_s^+| \end{aligned}$$

de onde obtemos  $|\Delta_{\lambda N}| \leq 4|\nabla\mathbb{A}_s^+|$ . Combinando as estimativas obtidas acima, vemos que (3.30) está provado.  $\square$

Considere para cada ponto  $p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  as semi-normas

$$\|p\|_1 = \left( \sum_{i=1}^{kN} |x_i|^2 + |y_i|^2 \right)^{1/2} \quad \|p\|_2 = \left( \sum_{\lambda=1}^k |\zeta_\lambda^1|^2 + |\zeta_\lambda^2|^2 \right)^{1/2} \quad \|p\|_3 = \left( \sum_{\lambda=1}^k |\xi_\lambda^1|^2 + |\xi_\lambda^2|^2 \right)^{1/2}$$

e a norma

$$\|p\|_\infty = \max\{\|p\|_1, \|p\|_2, \|p\|_3\}. \quad (3.34)$$

*Prova de Proposição 3.5.1.* Nós precisaremos das identidades

$$\begin{aligned} \nabla_{\zeta_\lambda^1}\mathbb{A}_s^+ &= -\xi_\lambda^1 - s\nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \\ \nabla_{\zeta_\lambda^2}\mathbb{A}_s^+ &= -\xi_\lambda^2 - s\xi_\lambda^1 - s\nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \\ \nabla_{\xi_\lambda^1}\mathbb{A}_s^+ &= -\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2 \\ \nabla_{\xi_\lambda^2}\mathbb{A}_s^+ &= -\zeta_\lambda^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

para as derivadas parciais de  $\mathbb{A}_s^+$  com respeito a  $\xi_\lambda^1, \xi_\lambda^2, \zeta_\lambda^1, \zeta_\lambda^2$ . Usando (3.35) nós conseguimos

$$\begin{aligned} \xi_\lambda^1 &= -\nabla_{\zeta_\lambda^1}\mathbb{A}_s^+ - s\nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s(\zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2)) \\ \xi_\lambda^2 &= -\nabla_{\zeta_\lambda^2}\mathbb{A}_s^+ + s\nabla_{\zeta_\lambda^1}\mathbb{A}_s^+ + (s^2 - s)\nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s(\zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2)) \\ \zeta_\lambda^1 &= -\nabla_{\xi_\lambda^1}\mathbb{A}_s^+ + s\nabla_{\xi_\lambda^2}\mathbb{A}_s^+ \\ \zeta_\lambda^2 &= -\nabla_{\xi_\lambda^2}\mathbb{A}_s^+. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, cada  $\psi_i$  tem um ponto fixo no conjunto compacto  $\{h \geq h_0\}$ , i.e. tudo  $S_i$  tem um ponto crítico em comum na bola  $B_R(0)$  em  $\mathbb{R}^{2n}$  onde  $R > 0$  depende apenas de  $H_t$  e  $N$ . Usando (3.18) nós temos uma estimativa  $|\nabla_2 S_i(w)| \leq \frac{1}{2}(R + |w|)$  para todos  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ . Combinando isso com (3.36) nós obtemos

$$\begin{aligned} |\xi_\lambda^1| &\leq |\nabla \mathbb{A}_s^+| + \frac{1}{2}(R + |(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1}) - s(0, \zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2)|) \leq |\nabla \mathbb{A}_s^+| + \frac{1}{2}(R + \|p\|_1 + \|p\|_2) \\ |\xi_\lambda^2| &\leq 2|\nabla \mathbb{A}_s^+| + \frac{1}{2}(R + |(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1}) - s(0, \zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2)|) \leq 2|\nabla \mathbb{A}_s^+| + \frac{1}{2}(R + \|p\|_1 + \|p\|_2) \end{aligned}$$

e  $|\zeta_\lambda^1| \leq 2|\nabla \mathbb{A}_s^+|$ ,  $|\zeta_\lambda^2| \leq |\nabla \mathbb{A}_s^+|$ . Segue-se imediatamente que

$$\|p\|_2 \leq \sum_{\lambda=1}^k |\zeta_\lambda^1| + |\zeta_\lambda^2| \leq 3k|\nabla \mathbb{A}_s^+(p)| \quad (3.37)$$

$$\|p\|_3 \leq \sum_{\lambda=1}^k |\xi_\lambda^1| + |\xi_\lambda^2| \leq 3k|\nabla \mathbb{A}_s^+(p)| + k(\|p\|_1 + \|p\|_2 + R) \quad (3.38)$$

Estas estimativas são válidas em geral e podem ser reescritas como

$$\|p\|_2 \leq C|\nabla \mathbb{A}_s^+(p)| \quad \|p\|_3 \leq C(|\nabla \mathbb{A}_s^+(p)| + \|p\|_1 + \|p\|_2 + 1) \quad (3.39)$$

onde a constante  $C > 0$  depende apenas de  $H_t$ ,  $N$  e  $k$ . Agora, nós argumentamos indiretamente, assumindo que existem seqüências  $p_\ell \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$ ,  $\delta_\ell > 0$  e  $s_\ell \in [0, 1]$  tais que

$$\delta_\ell \rightarrow 0 \quad |p_\ell| \rightarrow \infty \quad |\nabla \mathbb{A}_{s_\ell}^+(p_\ell)| \leq \delta_\ell |p_\ell|. \quad (3.40)$$

Usando isso junto com (3.39) Nós temos

$$\begin{aligned} \|p_\ell\|_2 + \|p_\ell\|_3 &\leq 2C\delta_\ell |p_\ell| + C(\|p_\ell\|_1 + \|p_\ell\|_2 + 1) \\ &\leq 2C\delta_\ell |p_\ell| + C(\|p_\ell\|_1 + 1) + C^2\delta_\ell |p_\ell| \\ &\leq C\delta_\ell(2 + C)|p_\ell| + C(\|p_\ell\|_1 + 1) \\ &= C\delta_\ell(2 + C)(\|p_\ell\|_1 + \|p_\ell\|_2 + \|p_\ell\|_3) + C(\|p_\ell\|_1 + 1) \end{aligned} \quad (3.41)$$

e conseqüentemente

$$\|p_\ell\|_2 + \|p_\ell\|_3 \leq \frac{C(1 + \delta_\ell(2 + C))\|p_\ell\|_1 + C}{1 - C\delta_\ell(2 + C)}.$$

Existe  $\ell_0$  tal que  $C\delta_\ell(2 + C) \leq 1/2$  e  $\delta_\ell(2 + C) \leq 1$  quando  $\ell \geq \ell_0$ . Conseqüentemente

$$\ell \geq \ell_0 \Rightarrow \|p_\ell\|_2 + \|p_\ell\|_3 \leq 4C\|p_\ell\|_1 + 2C. \quad (3.42)$$

Segue-se de (3.42) junto com  $|p_\ell| \rightarrow +\infty$  que  $\|p_\ell\|_1 \rightarrow +\infty$ . Em particular,  $\max_i |z_i| \rightarrow +\infty$  quando  $\ell \rightarrow +\infty$ . Para os seguintes argumentos não há perda de generalidade para assumir se quiser ir para subseqüências que  $|z_1| = \max_i |z_i|$  ao longo da seqüência  $p_\ell$ , em particular  $|z_1| \rightarrow +\infty$  quando  $\ell \rightarrow \infty$ . Usando o Lema 3.5.2 e (3.42) nós estimamos

$$\begin{aligned} |\Delta_i| &\leq 4|\nabla \mathbb{A}_{s_\ell}^+(p_\ell)| \leq 4\delta_\ell |p_\ell| \leq 4\delta_\ell(\|p_\ell\|_1 + \|p_\ell\|_2 + \|p_\ell\|_3) \\ &\leq 4\delta_\ell((4C + 1)\|p_\ell\|_1 + 2C) \\ &\leq 4(4C + 1)\delta_\ell \sqrt{kN} |z_1| + 8C\delta_\ell \\ &\leq C'\delta_\ell |z_1| \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde a constante  $C' > 0$  é independente de  $\ell$ . Considere vetores  $u_i = \psi_{kN} \circ \dots \circ \psi_i(z_i) - z_1$ . Observe que  $u_{kN} = \Delta_{kN}$  e que

$$|u_i| \leq 2^{kN-i} |\Delta_i| + |u_{i+1}| \quad \forall i = 1, \dots, kN - 1. \quad (3.44)$$

Para ver isso, adicione e subtraia  $\psi_{kN} \circ \dots \circ \psi_{i+1}(z_{i+1})$  de  $u_i$  e vamos usar (3.19) para obter

$$\begin{aligned} |u_i| &\leq |\psi_{kN} \circ \dots \circ \psi_i(z_i) - \psi_{kN} \circ \dots \circ \psi_{i+1}(z_{i+1})| + |u_{i+1}| \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{kN-i} |\Delta_i| + |u_{i+1}| \leq 2^{kN-i} |\Delta_i| + |u_{i+1}|. \end{aligned}$$

Podemos finalmente estimar usando (3.43) e (3.44)

$$\begin{aligned} |\varphi_H^k(z_1) - z_1| &= |u_1| \leq 2^{kN-1} |\Delta_1| + |u_2| \leq 2^{kN-1} |\Delta_1| + 2^{kN-2} |\Delta_2| + |u_3| \\ &\leq \dots \\ &\leq \sum_{i=1}^{kN-1} 2^{kN-i} |\Delta_i| + |u_{kN}| \\ &= \sum_{i=1}^{kN} 2^{kN-i} |\Delta_i| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^{kN} 2^{kN-i} \right) C' \delta_\ell |z_1| = C'' \delta_\ell |z_1| \end{aligned}$$

onde  $C'' > 0$  é independente de  $\ell$ . Quando  $|z_1|$  é grande o suficiente  $\varphi_H^k(z_1) = M^k z_1$  para uma matriz simplética  $M = \varphi_h^1$ . Em outras palavras,

$$\left| (M^k - I) \frac{z_1}{|z_1|} \right| \leq C'' \delta_\ell \rightarrow 0.$$

Segue que 1 é autovalor de  $M^k$ , o que é uma contradição ao fato de que  $M$  não tem raiz da unidade como autovalor. A prova está completa.  $\square$

É claro que o funcional de ação discreto  $\mathbb{A}_{H,k,N}$  satisfaz as condições da Proposição 3.5.1, apenas considere  $s = 0$ . Também o funcional de ação discreto  $\mathbb{A}_{H,k,N}$  pertence ao espaço de Banach  $(X, \|\cdot\|_X)$ , apenas veja (3.25), (3.26), (3.27) e (3.28). Então o par  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$  satisfaz as condições do Lema 3.1.2, isto é dada uma perturbação  $(f', \theta')$  de  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$  onde  $\mathbb{A}_{H,k,N}$  está próxima de  $f'$  em  $X$  e  $\theta_0$  está próxima de  $\theta'$  em  $C^2$  com  $\text{supp}(\theta_0 - \theta')$  compacto, tem a seguinte propriedade: pontos críticos de  $f'$  e trajetórias anti-gradientes (com respeito a  $\theta'$ ) conectando-os estão contidas em um compacto. Com mais uma perturbação, usando argumentos standard, se pode obter também que o par  $(f', \theta')$  seja Morse-Smale.

Logo para cada  $j$  considera-se o espaço vetorial  $\text{CM}_j(f', \theta')$  sobre  $\mathbb{Q}$  livremente gerado pelos pontos críticos de  $f'$  e tem índice de Morse igual a  $j$ . O diferencial  $\partial^{(f', \theta')}$  no espaço vetorial graduado  $\text{CM}_*(f', \theta')$  é definido contando as trajetórias do campo anti-gradiente  $-\nabla^{\theta'} f'$  conectando pontos críticos de diferença de índice um. Este diferencial depende das escolhas de orientações das variedades instáveis. Denotamos os grupos de homologia por  $\text{HM}_*(f', \theta')$ . A dependência da escolha de orientações não é explícita na notação.

# Capítulo 4

## Homologia de Morse do par $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$

Neste capítulo vamos calcular a homologia de Morse do par  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$  com  $N$  bastante grande, e independente da família de Hamiltonianas  $H_t$  tempo dependentes definidas na variedade simplética  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ .

### 4.1 Estimativas de continuação

**Lema 4.1.1.** *Seja  $\{g_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  uma  $C^1$ -família de funções em  $X$ ; o que significa que o caminho  $s \in \mathbb{R} \mapsto g_s \in X$  é de classe  $C^1$ . Então para cada  $s$  a função  $\dot{g}_s(p) = \frac{d}{d\tau} g_\tau(p)|_{\tau=s}$  está bem definida, pertence a  $X$  e coincide com o vetor de velocidade do caminho  $s \mapsto g_s$  em  $X$ .*

*Demonstração.* Considere o caminho

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow X \\ s &\rightarrow \alpha(s) = g_s \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  é Frechet diferenciável isto é, para todo  $s \in \mathbb{R}$  existe um operador linear contínuo  $A : \mathbb{R} \rightarrow X$ , tal que

$$\alpha(s+h) = \alpha(s) + A(h) + R(s,h)$$

para  $h$  pequeno e  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(s,h)\|}{|h|} = 0$ , nós denotamos a derivada por  $\dot{g}_s$ . Por outro lado, temos

$$\alpha(s+h)(p) = \alpha(s)(p) + A(h)(p) + R(s,h)(p) \quad \text{para todo } p \in \mathbb{R}^N$$

mas isso pode ser visto como uma função real de variável real

$$\frac{g_{s+h}(p) - g_s(p)}{h} - \frac{A(h)(p)}{h} = \frac{R(s,h)(p)}{h}$$

tomando a norma euclidiana

$$\left| \frac{g_{s+h}(p) - g_s(p)}{h} - \frac{A(h)(p)}{h} \right| = \left| \frac{R(s,h)(p)}{h} \right| \leq \frac{\|R(s,h)\|}{|h|} \|p\|_\infty$$

tomando limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{g_{s+h}(p) - g_s(p)}{h} - A(1)(p) \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{R(s,h)(p)}{h} \right| = 0$$

onde  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_{s+h}(p) - g_s(p)}{h} = \frac{d}{d\tau} g_\tau(p)|_{\tau=s}$ , e pela unicidade da derivada de Frechet, obtemos

$$A(1)(p) = \dot{g}_s(p) = \frac{d}{d\tau} g_\tau(p)|_{\tau=s}.$$

É claro que  $\dot{g}_s \in X$  pela definição de Frechet diferenciável e  $\dot{g}_s = \dot{\alpha}(s)$ . □

**Lema 4.1.2.** *Para cada  $s$  temos  $\mathbb{A}_s^+ \in X$ . Além disso, o caminho  $s \in [0, 1] \mapsto \mathbb{A}_s^+ \in X$  é de classe  $C^1$ .*

*Demonstração.* De fato sabemos que  $\mathbb{A}_s^+ = \mathbb{A}' + \mathbb{A}_s'' : \mathbb{R}^{2nk(N+2)} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  e  $D^2\mathbb{A}_s^+$  só depende da derivada do gradiente euclidiano  $\nabla S_i$  o qual nós assumimos que

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} \|D^2 S_i(z)\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall i$$

portanto, temos que  $\mathbb{A}_s^+ \in X$ .

Além disso, o caminho  $s \in [0, 1] \mapsto \mathbb{A}_s^+ \in X$  é de classe  $C^1$ . De fato, considere

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow X = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2nk(N+2)}, \mathbb{R}), \quad s \mapsto \mathbb{A}_s^+,$$

então  $\alpha$  é Frechet diferenciável, porque

$$\alpha(s+h) - \alpha(s) - \dot{\mathbb{A}}_s^+ h = R(s, h) \tag{4.1}$$

para todo  $s \in (0, 1)$  e  $h$  pequeno, tal que  $s+h \in (0, 1)$ . Então nós temos

$$\alpha(s+h)(p) - \alpha(s)(p) - \dot{\mathbb{A}}_s^+(p)h = R(s, h)(p) \quad \text{para todo } p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)}.$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{s+h}^+(p) &= \mathbb{A}' + \sum_{\lambda=1}^k -\xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^1 - \xi_\lambda^2 \zeta_\lambda^2 - (s+h)\xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^2 \\ &\quad + x_{\lambda N}(y_{\lambda N+1} - y_{\lambda N}) + S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - (s+h)\zeta_\lambda^1 - (s+h)\zeta_\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_s^+(p) &= \mathbb{A}' + \sum_{\lambda=1}^k -\xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^1 - \xi_\lambda^2 \zeta_\lambda^2 - s\xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^2 \\ &\quad + x_{\lambda N}(y_{\lambda N+1} - y_{\lambda N}) + S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbb{A}}_s^+(p)(h) = \sum_{\lambda=1}^k -h\xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^2 - h(\zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2) \nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2)$$

substituindo essas igualdades em (4.1) temos

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\lambda=1}^k \frac{S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - (s+h)\zeta_\lambda^1 - (s+h)\zeta_\lambda^2) - S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2)}{h} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\lambda=1}^k (\zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2) \nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \right| = \left| \frac{R(s, h)(p)}{h} \right| \end{aligned}$$

tomando limite ( $h \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \left| \sum_{\lambda=1}^k \frac{S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - (s+h)\zeta_\lambda^1 - (s+h)\zeta_\lambda^2) - S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2)}{h} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\lambda=1}^k (\zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2) \nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2) \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{R(s, h)(p)}{h} \right| = 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)} \end{aligned}$$

porque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - (s+h)\zeta_\lambda^1 - (s+h)\zeta_\lambda^2) - S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s\zeta_\lambda^1 - s\zeta_\lambda^2)}{h}$$

$$= \frac{d}{d\tau} S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - \tau \zeta_\lambda^1 - \tau \zeta_\lambda^2) |_{\tau=s} = -(\zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2) \nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s \zeta_\lambda^1 - s \zeta_\lambda^2),$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(s, h)\|}{|h|} = 0.$$

Isso prova que  $\alpha$  é Frechet diferenciável em  $(0, 1)$ . Finalmente podemos definir a derivada lateral

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\mathbb{A}_h^+ - \mathbb{A}_0^+}{h} = \dot{\mathbb{A}}_{0^+}^+,$$

o qual garante a existência de  $\dot{\mathbb{A}}_0^+$ , da mesma forma para  $\dot{\mathbb{A}}_1^+$ .  $\square$

**Proposição 4.1.3.** *Vamos denotar por  $\dot{\mathbb{A}}_s^+$  a função  $p \mapsto \frac{d}{ds} \mathbb{A}_s^+(p)$ . Existe  $c > 0$  e um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  tal que*

$$|\dot{\mathbb{A}}_s^+(p)| \leq c|p|^2 \quad \forall p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)} \setminus K, \quad \forall s \in [0, 1].$$

*Demonstração.* Nós sabemos que  $\mathbb{A}_s^+ = \mathbb{A}' + \mathbb{A}''$  então, tomando derivada em relação a  $s$ , temos

$$\dot{\mathbb{A}}_s^+(p) = \sum_{\lambda=1}^k -\xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^2 - (\zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2) \nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s \zeta_\lambda^1 - s \zeta_\lambda^2)$$

onde  $p = (z_1, \dots, z_{kN}, (\xi_1^1, \zeta_1^1), (\xi_1^2, \zeta_1^2), \dots, (\xi_k^1, \zeta_k^1), (\xi_k^2, \zeta_k^2)) \in (\mathbb{R}^{2n})^{kN} \times (\mathbb{R}^{2n})^{2k}$ . Tomando norma

$$|\dot{\mathbb{A}}_s^+(p)| \leq \sum_{\lambda=1}^k |\xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^2| + |\zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2| |\nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s \zeta_\lambda^1 - s \zeta_\lambda^2)|, \quad (4.2)$$

Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, cada  $\psi_i$  tem um ponto fixo  $q$  no conjunto compacto  $\{h \geq h_0\}$  tal que  $\nabla_2 S_N(q) = 0$  e  $|q| \leq R$ . Por outro lado, temos

$$|\nabla_2 S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - s \zeta_\lambda^1 - s \zeta_\lambda^2)| \leq \frac{1}{2} (|(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1})| + |(0, \zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2)| + |q|),$$

usando isso em (4.2) nós temos

$$|\dot{\mathbb{A}}_s^+(p)| \leq \sum_{\lambda=1}^k |\xi_\lambda^1| |\zeta_\lambda^2| + \frac{1}{2} (|\zeta_\lambda^1| + |\zeta_\lambda^2|) (R + |x_{\lambda N}| + |y_{\lambda N+1}| + |\zeta_\lambda^1| + |\zeta_\lambda^2|)$$

do fato que  $|u||v| \leq \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2)$  para todo  $u, v \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  temos

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbb{A}}_s^+(p)| &\leq \sum_{\lambda=1}^k \frac{1}{2} (|\xi_\lambda^1|^2 + |\zeta_\lambda^2|^2) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) (|\zeta_\lambda^1|^2 + |\zeta_\lambda^2|^2) + \frac{1}{2} |x_{\lambda N}|^2 + \frac{1}{2} |y_{\lambda N+1}|^2 + \frac{R^2}{2} \\ &\leq \sum_{\lambda=1}^k \frac{1}{2} |\xi_\lambda^1|^2 + \left(2 + \frac{1}{4}\right) |\zeta_\lambda^2|^2 + \frac{1}{2} |x_{\lambda N}|^2 + \frac{1}{2} |y_{\lambda N+1}|^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) |\zeta_\lambda^1|^2 + \frac{R^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nós sabemos que  $\|p\|_\infty = \max\{\|p\|_1, \|p\|_2, \|p\|_3\}$ , então

$$\sum_{\lambda=1}^k \frac{1}{2} |\xi_\lambda^1|^2 \leq \frac{1}{2} \|p\|_3^2$$

$$\sum_{\lambda=1}^k \left(2 + \frac{1}{4}\right) |\zeta_\lambda^2|^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) |\zeta_\lambda^1|^2 \leq \left(2 + \frac{1}{4}\right) \|p\|_2^2$$

$$\sum_{\lambda=1}^k \frac{1}{2} (|x_{\lambda N}|^2 + |y_{\lambda N+1}|^2) \leq \|p\|_1^2$$

usando isso em (4.3) nós temos

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbb{A}}_s^+(p)| &\leq \frac{1}{2} \|p\|_3^2 + \left(2 + \frac{1}{4}\right) \|p\|_2^2 + \frac{1}{2} \|p\|_1^2 + \frac{R^2}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|p\|_\infty^2 + \left(2 + \frac{1}{4}\right) \|p\|_\infty^2 + \frac{1}{2} \|p\|_\infty^2 + \frac{R^2}{2} \\ &= \left(3 + \frac{1}{4}\right) \|p\|_\infty^2 + \frac{R^2}{2}, \end{aligned}$$

então existe um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  tal que se  $p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)} \setminus K$ , tem-se  $R < \|p\|_\infty$ . Finalmente

$$|\dot{\mathbb{A}}_s^+(p)| \leq 4\|p\|_\infty^2.$$

□

Seja  $0 < \eta < 1/2$  arbitrário, e uma função diferenciável  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\beta(s) = 0$  se  $s \leq -1/\eta$ ,  $\beta(s) = 1$  se  $s \geq 1/\eta$ , e  $0 \leq \beta'(s) \leq \eta$  para cada  $s$ . Se definirmos

$$f_s = \mathbb{A}_{\beta(s)}^+$$

então  $f_s = \mathbb{A}_0^+$  quando  $s \leq -(1/\eta)$ ,  $f_s = \mathbb{A}_1^+$  quando  $s \geq 1/\eta$  e

$$\dot{f}_s(p) = \beta'(s) \dot{\mathbb{A}}_{\beta(s)}^+(p)$$

para cada  $p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  e todo  $s \in \mathbb{R}$ , onde o ponto indica a derivada em relação ao parâmetro.

Proposições 3.5.1 e 4.1.3 garantem a existência de um subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  e de uma constante  $c > 0$  tal que

$$|\nabla f_s(p)| \geq c|p|, \quad |\dot{f}_s(p)| \leq \eta c|p|^2 \quad \forall p \notin K, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Não há, perda de generalidade para assumir que  $K$  contém todos os pontos da bola unitária euclidiana de  $\mathbb{R}^{2nk(N+2)}$ . Nós procedemos sob esta suposição. Isso nos permite obter a estimativa adicional  $|p| > 1$  para cada  $p \notin K$ . Em particular  $\text{int}(K)$  contém  $\text{Crit}(f_s)$ , para cada  $s \in \mathbb{R}$ .

**Lema 4.1.4.** *Se a  $C^1$ -aplicação  $s \in \mathbb{R} \mapsto g_s \in X$  satisfaz*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \left( \|g_s - f_s\|_X + \|\dot{g}_s - \dot{f}_s\|_X \right) \leq \delta$$

então

$$|\nabla g_s(p)| \geq (c - 2\delta)|p| \quad |\dot{g}_s(p)| \leq (\eta c + 3\delta)|p|^2$$

para cada  $s \in \mathbb{R}$  e para  $p \notin K$ .

*Demonstração.* Nós temos

$$\|g_s - f_s\|_E = |g_s(0) - f_s(0)| + |\nabla g_s(0) - \nabla f_s(0)| + \sup_p \|D^2(g_s - f_s)(p)\| \leq \delta,$$

em particular

$$\sup_p \|D^2(g_s - f_s)(p)\| \leq \delta.$$

Pelo teorema da desigualdade do valor médio, temos

$$|\nabla(g_s - f_s)(p) - \nabla(g_s - f_s)(0)| \leq \delta|p|$$

então

$$|\nabla(g_s - f_s)(p)| \leq \delta|p| + |\nabla(g_s - f_s)(0)| \leq \delta|p| + \delta. \quad (4.5)$$

Por outro lado

$$|\nabla f_s(p)| - |\nabla(g_s - f_s)(p)| \leq |\nabla g_s(p)|$$

usando (4.5) nós temos

$$|\nabla f_s(p)| - \delta|p| - \delta \leq |\nabla g_s(p)|,$$

considerando  $p \notin K$  e usando (4.4), Nós temos

$$c|p| - \delta|p| - \delta \leq |\nabla g_s(p)|$$

Usando o fato de que  $K$  contém todos os pontos da bola unitária euclidiana, se tem

$$c|p| - \delta|p| - \delta|p| \leq |\nabla g_s(p)|.$$

Finalmente

$$(c - 2\delta)|p| \leq |\nabla g_s(p)|.$$

Da mesma maneira, temos

$$\|\dot{g}_s - \dot{f}_s\|_E = |(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(0)| + |\nabla(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(0)| + \sup_p \|D^2(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p)\| \leq \delta$$

em particular,

$$\sup_p \|D^2(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p)\| \leq \delta$$

pelo teorema da desigualdade do valor médio, temos

$$|\nabla(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p) - \nabla(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(0)| \leq \delta|p|$$

então

$$|\nabla(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p)| \leq \delta|p| + |\nabla(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(0)| \leq \delta|p| + \delta. \quad (4.6)$$

Considerando  $p \notin K$  nós temos

$$|\nabla(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p)| \leq 2\delta|p|. \quad (4.7)$$

Por outro lado, consideramos uma função  $\rho_s : \mathbb{R}^{2nk(N+2)} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \frac{(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p)}{|p|}$  então

$$\nabla \rho_s(p) = \frac{\nabla(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p)|p| - (\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p) \frac{p}{|p|}}{|p|^2}$$

$$\nabla \rho_s(p) + (\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p) \frac{p}{|p|^3} = \frac{\nabla(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p)}{|p|}$$

usando(4.7) temos

$$\left| \nabla \rho_s(p) + (\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p) \frac{p}{|p|^3} \right| \leq 2\delta \quad \forall p \notin K.$$

Usando o produto interno em  $\mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  temos

$$\left\langle \nabla \rho_s(p) + (\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p) \frac{p}{|p|^3}, \nabla \rho_s(p) + (\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p) \frac{p}{|p|^3} \right\rangle \leq (2\delta)^2$$

$$\Leftrightarrow |\nabla \rho_s(p)|^2 + \frac{2}{|p|^2} \langle \nabla \rho_s(p), \rho_s(p)p \rangle + \frac{|\rho_s(p)|^2}{|p|^2} \leq (2\delta)^2$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\langle \nabla \rho_s(p), \rho_s(p)p \rangle \geq 0$  então

$$\frac{|(\dot{g}_s - \dot{f}_s)(p)|}{|p|^2} \leq 2\delta.$$

Finalmente

$$|\dot{g}_s(p)| \leq 2\delta|p|^2 + |\dot{f}_s(p)|$$

usando (4.4) nós temos

$$|\dot{g}_s(p)| \leq (2\delta + \eta c)|p|^2.$$

□

O principal fato com relação à compacidade diz o seguinte

**Proposição 4.1.5.** *Existem constantes  $L, \delta > 0$  com o seguinte significado. Suponha que o caminho  $s \in \mathbb{R} \mapsto g_s \in X$  é de classe  $C^1$  e satisfaz*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \left( \|g_s - f_s\|_X + \|\dot{g}_s - \dot{f}_s\|_X \right) \leq \delta, \quad \dot{g}_s \equiv 0 \quad \text{se} \quad |s| \gg 1.$$

Suponha que  $\{\theta_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  é uma família diferenciável de métricas Riemannianas diferenciáveis em  $\mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  tal que  $\theta_s - \langle \cdot, \cdot \rangle$  tem suporte em  $K$  e  $\theta_s$  é zero quando  $|s| \gg 1$ . Então

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |\gamma(s)| \leq L$$

para cada solução  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  de  $\dot{\gamma}(s) + \nabla^{\theta_s} g_s(\gamma(s)) = 0$  satisfazendo

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \gamma(s) = p_{-\infty} \in \text{Crit}(g_{-\infty}), \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = p_{+\infty} \in \text{Crit}(g_{+\infty}).$$

Na declaração acima  $g_{\pm\infty} = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} g_s$ , e  $\nabla^{\theta_s} g_s$  é o  $\theta_s$ -gradiente de  $g_s$ .

*Prova da Proposição 4.1.5.* Nós argumentamos por contradição. Se a afirmação é falsa, então encontramos seqüências  $\gamma_m(s)$ ,  $g_s^m$ ,  $\theta_s^m$  e  $\delta_m > 0$  do seguinte modo:  $\delta_m \rightarrow 0$ ,  $g_s^m$  são  $C^1$ -caminhos em  $E$  que são assintoticamente constantes em  $s$  e satisfazem  $\sup_s (\|g_s^m - f_s\|_X + \|\dot{g}_s^m - \dot{f}_s\|_X) \leq \delta_m$ ,  $\theta_s^m$  são métricas Riemannianas diferenciáveis sobre  $\mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  que são assintoticamente constantes em  $s$  e coincidem com a métrica euclidiana fora de  $K$ , e  $\gamma_m(s)$  são soluções de  $\dot{\gamma}_m(s) + \nabla^{\theta_s^m} g_s^m(\gamma_m(s)) = 0$  que são assintóticas para pontos críticos de  $g_{\pm\infty}^m$  quando  $s \rightarrow \pm\infty$ , respectivamente, e satisfaz  $\sup_s |\gamma_m(s)| \rightarrow +\infty$ .

Pelo lema 4.1.4 nós sabemos que  $K$  contém os pontos críticos de  $g_s^m$  para cada  $s$ , sempre que  $2\delta_m < c$ . Daí encontramos  $s_*^m \in \mathbb{R}$  tal que  $|\gamma_m(s_*^m)| = \sup_s |\gamma_m(s)|$  quando  $m \gg 1$ . Defina

$$T_-^m = \inf\{s \leq s_*^m \mid \gamma_m([s, s_*^m]) \cap K = \emptyset\}, \quad T_+^m = \sup\{s \geq s_*^m \mid \gamma_m([s_*^m, s]) \cap K = \emptyset\}$$

para  $m$  grande o suficiente. Então  $-\infty < T_-^m < s_*^m < T_+^m < +\infty$  e  $\gamma_m(T_{\pm}^m) \in K$ .

Afirmamos que  $\min\{s_*^m - T_-^m, T_+^m - s_*^m\} \rightarrow +\infty$  quando  $m \rightarrow +\infty$ . Desde que  $\theta_s^m$  é a métrica euclidiana fora de  $K$  nós obtemos

$$\frac{d}{ds} |\gamma_m(s)| = \left\langle -\nabla g_s^m(\gamma_m(s)), \frac{\gamma_m(s)}{|\gamma_m(s)|} \right\rangle \quad \forall s \in (T_-^m, T_+^m).$$

Em particular

$$\begin{aligned} |\gamma_m(t)| &= |\gamma_m(T_-^m)| + \int_{T_-^m}^t \left\langle -\nabla g_s^m(\gamma_m(s)), \frac{\gamma_m(s)}{|\gamma_m(s)|} \right\rangle ds \\ &\leq |\gamma_m(T_-^m)| + \int_{T_-^m}^t |\nabla g_s^m(\gamma_m(s))| ds \\ &\leq |\gamma_m(T_-^m)| + C \int_{T_-^m}^t |\gamma_m(s)| ds \end{aligned}$$

para cada  $t \in (T_-^m, T_+^m)$ , com alguma constante  $C > 0$  independente de  $m$ . A existência de  $C$  é garantido em vista de que  $\sup_s \|g_s^m - f_s\|_E \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow +\infty$ . Usando a desigualdade padrão de Gronwall

$$|\gamma_m(t)| \leq |\gamma_m(T_-^m)| e^{C(t-T_-^m)} \quad \forall t \in (T_-^m, T_+^m).$$

Em particular  $|\gamma_m(s_*^m)| \leq |\gamma_m(T_-^m)| e^{C(s_*^m - T_-^m)} \leq d_K e^{C(s_*^m - T_-^m)}$  onde  $d_K = \sup_{p \in K} |p|$ . Tomando logaritmos naturais

$$s_*^m - T_-^m \geq \frac{\log |\gamma_m(s_*^m)| - \log d_K}{C} \rightarrow +\infty$$

como desejamos. Um argumento análogo mostra que  $T_+^m - s_*^m \rightarrow +\infty$ . Para terminar a prova, usamos o Lema 4.1.4 e calcular para  $s \in (T_-^m, T_+^m)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [g_s^m(\gamma_m(s))] &= \dot{g}_s^m(\gamma_m(s)) + \theta_s^m(\gamma_m(s))(\nabla^{\theta_s^m} g_s^m(\gamma_m(s)), \dot{\gamma}_m(s)) \\ &= \dot{g}_s^m(\gamma_m(s)) - |\nabla g_s^m(\gamma_m(s))|^2 \\ &\leq -(c - 2\delta_m)^2 + \eta c + 3\delta_m |\gamma_m(s)|^2 \\ &\leq -(c - 2\delta_m)^2 + \eta c + 3\delta_m \leq -C' \end{aligned}$$

onde  $C' > 0$  é independente de  $m$ . Foi usado que  $\gamma_m(s) \notin K$  para todo  $s \in (T_-^m, T_+^m)$ , e que  $\theta_s^m$  é a norma euclidiana fora  $K$ . Portanto

$$g_{T_+^m}^m(\gamma_m(T_+^m)) - g_{T_-^m}^m(\gamma_m(T_-^m)) \leq -C'(T_+^m - T_-^m) \rightarrow -\infty$$

em contradição com  $|g_{T_+^m}^m(\gamma_m(T_+^m)) - g_{T_-^m}^m(\gamma_m(T_-^m))| \leq 2 \sup_{m,s} \sup_{p \in K} |g_s^m(p)| < \infty$ .  $\square$

Acontece que para dois pares  $(f', \theta')$ ,  $(f'', \theta'')$  que estão  $C^2$ -próximo de  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$ , e são Morse-Smale em  $K$ , existem chain maps

$$\left( \text{CM}_*(f', \theta', K), \partial^{(f', \theta', K)} \right) \rightarrow \left( \text{CM}_*(f'', \theta'', K), \partial^{(f'', \theta'', K)} \right) \quad (4.8)$$

induzido por dados extra. Tais chain maps podem ser definidos como os chamados mapas de continuação. Segue-se da maneira particular que os mapas de continuação são definidos da seguinte maneira; dois chain maps (4.8) associado a um par fixo de pares  $(f', \theta')$ ,  $(f'', \theta'')$ , juntamente com a escolha correspondente de orientações, são chain homotópicos. Daí o mapa induzido em homologia

$$\Phi_{(f', \theta')}^{(f'', \theta'')} : \text{HM}_*(f', \theta', K) \rightarrow \text{HM}_*(f'', \theta'', K) \quad (4.9)$$

não depende dos dados extras. Além disso, quando  $(f'', \theta'') = (f', \theta')$  e as orientações são iguais, o mapa em homologia é a identidade, e esses mapas satisfazem

$$\Phi_{(f'', \theta'')}^{(f''', \theta''')} \circ \Phi_{(f', \theta')}^{(f'', \theta'')} = \Phi_{(f', \theta')}^{(f''', \theta''')}$$

para todos os pares  $(f', \theta')$ ,  $(f'', \theta'')$ ,  $(f''', \theta''')$  em um compacto  $K$  fixo e uma  $C^2$ -vizinhança pequena de  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$ , isto é provado usando um argumento de gluing e compacidade.

**Observação 4.1.6.** *Suponha que seja dada uma coleção  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de espaços vetoriais e para cada par  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda \times \Lambda$  um isomorfismo  $\Psi_{\lambda_1}^{\lambda_2} : V_{\lambda_1} \rightarrow V_{\lambda_2}$  tal que  $\Psi_\lambda^\lambda = \text{id}_{V_\lambda}$  e  $\Psi_{\lambda_2}^{\lambda_3} \circ \Psi_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \Psi_{\lambda_1}^{\lambda_3}$ . Então em  $\sqcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$  existe uma relação de equivalência definida por  $v_1 \sim v_2$  se, e somente se,  $v_2 = \Psi_{\lambda_1}^{\lambda_2}(v_1)$ , onde  $v_i \in V_{\lambda_i}$ . O espaço quociente associado é denotado por  $V$ , tem a estrutura de espaço vetorial tal que para cada  $\lambda$  a restrição da projeção quociente é um isomorfismo  $V_\lambda \xrightarrow{\sim} V$ .*

Os espaços vetoriais  $\text{HM}_*(f', \theta', K)$  e mapas  $\Psi_{(f', \theta')}^{(f'', \theta'')}$  onde  $(f', \theta')$  e  $(f'', \theta'')$  variam em uma  $C^2$ -pequena vizinhança fixa de  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$ , se encaixa na discussão da Observação 4.1.6. Nós obtemos a homologia de Morse Pré-compacta do par  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$  definida como:

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0) := \text{HM}_*(f', \theta', K) \quad (4.10)$$

para um par  $(f', \theta')$ ,  $C^2$ -próximo do par fixo  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$ .

Considere  $\mathcal{F} = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família suave de funções suaves definida em  $\mathbb{R}^N$ , onde  $\lambda$  varia no espaço de parâmetros  $\Lambda$ . Suponha que o conjunto  $\text{Crit } f_\lambda$  de pontos críticos comuns para todos  $\mathcal{F}$ ,

é não vazio. Um diz que  $K$  é um **conjunto uniformemente compacto** de  $\mathcal{F}$  se  $\text{Crit } f_\lambda \subset K$ , para todo  $\lambda$ .

Propriedades de invariância na homologia de Morse são bem conhecidos, nós os resumimos na Proposição abaixo, que pode ser comprovada de maneira padrão usando os mapas de continuação de Floer, feito no Capítulo 2.

**Proposição 4.1.7.** *Seja  $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in [a,b]}$  uma família diferenciável de funções diferenciáveis definidas em  $\mathbb{R}^N$ , e seja  $K$  um conjunto uniformemente compacto de  $\mathcal{F}$ . Então, para qualquer família de métricas  $\{\theta_s\}_{s \in [a,b]}$  existe uma família especial dos chamados isomorfismos de continuação*

$$\Theta(\mathcal{F})_{s_0}^{s_1} : \text{HM}(f_{s_0}, \theta_{s_0}, K) \rightarrow \text{HM}(f_{s_1}, \theta_{s_1}, K)$$

parametrizado por  $a \leq s_0 \leq s_1 \leq b$ , satisfazendo  $\Theta(\mathcal{F})_{s_0}^{s_2} = \Theta(\mathcal{F})_{s_1}^{s_2} \circ \Theta(\mathcal{F})_{s_0}^{s_1}$  para todo  $a \leq s_0 \leq s_1 \leq b$ . Além disso,  $\Theta(\mathcal{F})_a^b$  depende apenas da classe de homotopia  $\mathcal{F}$  mantendo os pontos finais fixos.

Segue-se da afirmação e construções acima que a Homologia de Morse Pré-compacta de  $(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0)$  denotado como

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0) \tag{4.11}$$

é definido independentemente das escolhas de métricas e permanece constante sob deformações  $(f_s, K)$  através das famílias onde  $K$  é um conjunto uniformemente compacto de  $\{f_s\}$ .

**Observação 4.1.8.** *Note que na definição de homologia de Morse Pré-compacta é possível considerar um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  em vez de  $\mathbb{R}^N$ .*

## 4.2 Homologia de Morse para o funcional de ação discreto

**Teorema 4.2.1.** *[Isomorfismo de Inflação]. Se  $N$  está adaptado para  $H$  como em (3.16) então existe um isomorfismo*

$$\mathcal{I}_N : \text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K) \rightarrow \text{HM}_{*+nk}(\mathbb{A}_{H,k,N+1}, \theta_0, K) \tag{4.12}$$

e um isomorfismo

$$\mathcal{I}_N : \text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K) \rightarrow \text{HM}_{*+2nk}(\mathbb{A}_{H,k,N+2}, \theta_0, K). \tag{4.13}$$

*Demonstração.* Nós só provaremos (4.13) desde que (4.12) é análogo. Consideramos a sequência  $(N+2)$ -periódica obtido pela inserção do germe 0 entre posições  $\lambda N$  e  $\lambda N + 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Isso dá

$$(\dots S_{N-1}, S_N, 0, 0, S_1, S_2, \dots, S_{N-1}, S_N, 0, 0, S_1, S_2, \dots).$$

Para cada  $\lambda = 1, 2, \dots, k$  considere duas variáveis extras  $\omega_\lambda^1 = (u_\lambda^1, v_\lambda^1)$  e  $\omega_\lambda^2 = (u_\lambda^2, v_\lambda^2)$ . Agora temos  $k(N+2)$  variáveis pertencentes a  $\mathbb{R}^{2n}$  e podemos considerar a função  $\mathbb{A}^+ = \mathbb{A}' + \mathbb{A}''$  onde  $\mathbb{A}'$  é definido em (3.22) e

$$\mathbb{A}'' = \sum_{\lambda=1}^k x_{\lambda N} (v_\lambda^1 - y_{\lambda N}) + S_N (x_{\lambda N}, v_\lambda^1) + u_\lambda^1 (v_\lambda^2 - v_\lambda^1) + u_\lambda^2 (y_{\lambda N+1} - v_\lambda^2)$$

onde  $kN + 1 = 1$ . Nós afirmamos que

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K) \simeq \text{HM}_{*+2nk}(\mathbb{A}^+, \theta_0, K). \tag{4.14}$$

Para este fim, vamos considerar novas variáveis

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_\lambda^1 := v_\lambda^2 - v_\lambda^1 \\ \xi_\lambda^1 := x_{\lambda N} - u_\lambda^1 \\ \zeta_\lambda^2 := y_{\lambda N+1} - v_\lambda^2 \\ \xi_\lambda^2 := u_\lambda^1 - u_\lambda^2 \end{array} \right.$$

Isso dá um novo conjunto de variáveis independentes em  $\mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  e  $\mathbb{A}''$  assume a forma (3.23) com  $s = 1$ ,

$$\mathbb{A}'' = \sum_{\lambda=1}^k -\xi_{\lambda}^1 \zeta_{\lambda}^1 - \xi_{\lambda}^2 \zeta_{\lambda}^2 - \xi_{\lambda}^1 \zeta_{\lambda}^2 + x_{\lambda N}(y_{\lambda N+1} - y_{\lambda N}) + S_N(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - \zeta_{\lambda}^1 - \zeta_{\lambda}^2).$$

A proposição (4.1.5) mostra que  $K$  é um conjunto uniformemente compacto para a família a 1-parâmetro de funções diferenciáveis  $\{\mathbb{A}_s^+\}_{s \in [0,1]}$ . Além disso  $\mathbb{A}_1^+ = \mathbb{A}^+$  e

$$\mathbb{A}_0^+ = \mathbb{A}_{H,k,N} - \sum_{\lambda=1}^k (\xi_{\lambda}^1 \zeta_{\lambda}^1 + \xi_{\lambda}^2 \zeta_{\lambda}^2).$$

Note que a forma quadrática no lado direito da equação acima tem  $2nk$  autovalores positivos e  $2nk$  autovalores negativos, o espaço negativo é a diagonal

$$\{\xi_{\lambda}^1 = \zeta_{\lambda}^1, \quad \xi_{\lambda}^2 = \zeta_{\lambda}^2; \quad \lambda = 1, 2, \dots, k\}$$

em  $\mathbb{R}^{4nk} = \mathbb{R}^{2nk} \times \mathbb{R}^{2nk}$ , que é um espaço vetorial  $2nk$ -dimensional, pois é o produto de  $k$  diagonais em  $\mathbb{R}^{4n}$ .

**Observação 4.2.2.** *Sejam  $x \in X$  e  $y \in Y$  pontos críticos isolados de  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  respectivamente, onde  $X, Y$  são variedades sem bordo. Fixar métricas  $\theta, \alpha$  em  $X, Y$  e  $U, V$  vizinhanças isolantes de  $x, y$  respectivamente. Sejam  $(f', \theta')$ ,  $(g', \alpha')$  perturbações  $C^2$ -pequenas de  $(f, \theta)$ ,  $(g, \alpha)$  que são Morse-Smale em  $U, V$  respectivamente. Então  $(f' \oplus g', \theta' \oplus \alpha')$  é Morse-Smale em  $U \times V$  e tem-se um isomorfismo de cadeia*

$$(\text{CM}(f' \oplus g', \theta' \oplus \alpha', U \times V), \partial^{\text{Morse}}) = (\text{CM}(f', \theta', U), \partial^{\text{Morse}}) \otimes (\text{CM}(g', \alpha', V), \partial^{\text{Morse}}) \quad (4.15)$$

sempre que as orientações sobre as variedades instáveis de pontos críticos  $(x, y)$  de  $f' \oplus g'$  são escolhidas de uma maneira que seja compatível com as convenções de sinais da definição de produtos tensoriais de complexos de cadeia. Já que usamos coeficientes racionais, a fórmula de Künneth é verificada

$$\text{HM}(f \oplus g, (x, y)) \xrightarrow{\sim} \text{HM}(f, x) \otimes \text{HM}(g, y). \quad (4.16)$$

Se  $y$  é um ponto crítico não-degenerado do índice  $\mu$ , então temos um isomorfismo

$$\Xi : \text{HM}_*(f \oplus g, (x, y)) \xrightarrow{\sim} \text{HM}_{*-\mu}(f, x) \quad (4.17)$$

referido como um mapa de soma direta.

Assim, pela Proposição 4.1.7 nós temos

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_0^+, \theta_0, K) \simeq \text{HM}_*(\mathbb{A}_1^+, \theta_0, K)$$

logo

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N} - \sum_{\lambda=1}^k (\xi_{\lambda}^1 \zeta_{\lambda}^1 + \xi_{\lambda}^2 \zeta_{\lambda}^2), \theta_0, K) \simeq \text{HM}_*(\mathbb{A}_1^+, \theta_0, K)$$

agora pelo isomorfismo (4.17) temos

$$\text{HM}_{*-2nk}(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K) \simeq \text{HM}_*(\mathbb{A}_1^+, \theta_0, K)$$

onde está provado (4.14). □

**Teorema 4.2.3.** *[Isomorfismo de Continuação]. Existe um isomorfismo*

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N+2}, \theta_0, K) \simeq \text{HM}_*(\mathbb{A}_{G,k,N+2}, \theta_0, K).$$

onde  $H_t, G_t : M \rightarrow \mathbb{R}$  são hamiltonianas 1-periódicas, satisfazendo a configuração geométrica 3.15.

Para ver isso, considere uma função suave  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  satisfazendo:

- $0 \leq \beta' \leq \eta$ , onde  $\eta \in ]0, \frac{1}{2}[$
- $\beta(s) = 0$ , se  $s \leq -\frac{1}{\eta}$
- $\beta(s) = 1$ , se  $s \geq \frac{1}{\eta}$ .

Agora seja  $\rho_s(t) = (1 - \beta(s))H_t + \beta(s)G_t$  observe que

$$\rho_s(t) = H_t \text{ se } s \leq -\frac{1}{\eta} \text{ e } \rho_s(t) = G_t \text{ se } s \geq \frac{1}{\eta}.$$

Considere uma família a 1-parâmetro de funções diferenciáveis

$$\mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2} : \mathbb{R}^{2nk(N+2)} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2} = \mathbb{A}' + \mathbb{A}''_{\beta(s)} \quad (\beta(s) \in [0, 1]), \quad (4.18)$$

definido como segue. Escreva  $\mathbb{R}^{2nk(N+2)} = (\mathbb{R}^{2n})^{kN} \times (\mathbb{R}^{2n})^{2k}$  com variáveis

$$p = (z_1, \dots, z_{kN}, (\xi_1^1, \zeta_1^1), (\xi_1^2, \zeta_1^2), \dots, (\xi_k^1, \zeta_k^1), (\xi_k^2, \zeta_k^2)). \quad (4.19)$$

$$\mathbb{A}'(p) = \sum_{\lambda=1}^k \sum_{j=1}^{N-1} \left( x_{(\lambda-1)N+j} (y_{(\lambda-1)N+j+1} - y_{(\lambda-1)N+j}) + S_{(\lambda-1)N+j} (x_{(\lambda-1)N+j}, y_{(\lambda-1)N+j+1}) \right) \quad (4.20)$$

e

$$\mathbb{A}''_{\beta(s)}(p) = \sum_{\lambda=1}^k \left( -\xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^1 - \xi_\lambda^2 \zeta_\lambda^2 - \beta(s) \xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^2 + x_{\lambda N} (y_{\lambda N+1} - y_{\lambda N}) + S_N (x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1} - \beta(s) \zeta_\lambda^1 - \beta(s) \zeta_\lambda^2) \right). \quad (4.21)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2} &= \mathbb{A}_{H, k, N+2} = \mathbb{A}_{H, k, N} - \sum_{\lambda=1}^k \xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^1 + \xi_\lambda^2 \zeta_\lambda^2, \text{ se } s \leq -\frac{1}{\eta} \\ \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2} &= \mathbb{A}_{G, k, N+2} = \mathbb{A}' + \mathbb{A}''_1 = \mathbb{A}^+ \text{ se } s \geq \frac{1}{\eta}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Procedendo da mesma maneira que na Proposição 3.5.1. Nós temos

**Proposição 4.2.4.** *Existem  $c > 0$  e um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  tal que*

$$|\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}(p)| \geq c|p|$$

para todo  $p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)} \setminus K$  e  $\beta(s) \in [0, 1]$ .

*Demonstração.* A prova é a mesma e usamos as mesmas estimativas para o gradiente euclidiano de  $\mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}$ . A única diferença é quando usamos o teorema do ponto fixo de Brouwer, porque cada  $\psi_i^{\beta(s)}$  tem um ponto fixo no conjunto compacto  $\{h \geq h_0\}$ , ou seja, todos  $S_i^{\beta(s)}$  tem um ponto crítico comum na bola  $B_{R^{\beta(s)}}(0)$  em  $\mathbb{R}^{2n}$  onde  $R^{\beta(s)} > 0$  depende apenas de  $\rho_s(t) = (1 - \beta(s))H_t + \beta(s)G_t$  e  $N$ . Usando (3.18) nós temos uma estimativa  $|\nabla_2 S_i^{\beta(s)}(w)| \leq \frac{1}{2}(R^{\beta(s)} + |w|)$  para todo  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ . Combinando isso com (3.36) nós obtemos:

$$\begin{aligned} |\xi_\lambda^1| &\leq |\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}| + \frac{1}{2}(R^{\beta(s)} + |(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1}) - \beta(s)(0, \zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2)|) \leq |\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}| + \frac{1}{2}(R^{\beta(s)} + \|p\|_1 + \|p\|_2) \\ |\xi_\lambda^2| &\leq 2|\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}| + \frac{1}{2}(R^{\beta(s)} + |(x_{\lambda N}, y_{\lambda N+1}) - \beta(s)(0, \zeta_\lambda^1 + \zeta_\lambda^2)|) \leq 2|\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}| + \frac{1}{2}(R^{\beta(s)} + \|p\|_1 + \|p\|_2) \end{aligned} \quad (4.23)$$

para todo  $\beta(s) \in [0, 1]$ . Agora considerando o  $\sup_{\beta(s) \in [0,1]} R^{\beta(s)} = R^*$  nós temos

$$\begin{aligned} |\xi_\lambda^1| &\leq |\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}| + \frac{1}{2}(R^* + \|p\|_1 + \|p\|_2) \\ |\xi_\lambda^2| &\leq 2|\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}| + \frac{1}{2}(R^* + \|p\|_1 + \|p\|_2) \end{aligned} \quad (4.24)$$

para todo  $\beta(s) \in [0, 1]$ , e  $|\zeta_\lambda^1| \leq 2|\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}|$ ,  $|\zeta_\lambda^2| \leq |\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}|$ . Segue-se imediatamente que

$$\|p\|_2 \leq \sum_{\lambda=1}^k |\zeta_\lambda^1| + |\zeta_\lambda^2| \leq 3k|\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}(p)| \quad (4.25)$$

$$\|p\|_3 \leq \sum_{\lambda=1}^k |\xi_\lambda^1| + |\xi_\lambda^2| \leq 3k|\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}(p)| + k(\|p\|_1 + \|p\|_2 + R^*) \quad (4.26)$$

Estas estimativas são válidas em geral e podem ser reescritas como

$$\|p\|_2 \leq C^*|\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}(p)| \quad \|p\|_3 \leq C^*(|\nabla \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}(p)| + \|p\|_1 + \|p\|_2 + 1) \quad (4.27)$$

onde a constante  $C^* > 0$  depende apenas de  $\rho_s = (1 - \beta(s))H + \beta(s)G$ ,  $N$  e  $k$ . Finalmente, o restante da prova é seguido de maneira semelhante a Proposição 3.5.1.  $\square$

Agora fazendo  $\beta(s) = \tau$ , nós temos

$$\mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2} = \mathbb{A}' + \mathbb{A}''_\tau = \mathbb{A}^+_\tau, \quad \tau \in [0, 1].$$

Logo seguindo, de maneira semelhante, que na proposição 4.1.3, temos:

**Proposição 4.2.5.** *Denote por  $\mathbb{A}^+_\tau$  a função  $p \mapsto \frac{d}{d\tau} \mathbb{A}^+_\tau(p)$ . Existem  $c > 0$  e um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  tal que*

$$|\mathbb{A}^+_\tau(p)| \leq c|p|^2 \quad \forall p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)} \setminus K$$

e  $\tau \in [0, 1]$ .

*Demonstração.* A prova é semelhante à Proposição 4.1.3. A única diferença será usar  $\sup_{\tau \in [0,1]} R^\tau = R^*$  onde  $R^\tau$  depende apenas de  $(1 - \tau)H + \tau G$  e  $N$ .  $\square$

Se definirmos

$$f_s = \mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2} = \mathbb{A}' + \mathbb{A}''_{\beta(s)} = \mathbb{A}^+_{\beta(s)}$$

então  $f_s = \mathbb{A}_{H, k, N} - \sum_{\lambda=1}^k \xi_\lambda^1 \zeta_\lambda^1 + \xi_\lambda^2 \zeta_\lambda^2$  quando  $s \leq -(1/\eta)$ ,  $f_s = \mathbb{A}' + \mathbb{A}''_1 = \mathbb{A}^+$  quando  $s \geq 1/\eta$  e

$$\dot{f}_s(p) = \beta'(s) \mathbb{A}^+_{\beta(s)}(p)$$

para cada  $p \in \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  e cada  $s \in \mathbb{R}$ , onde o ponto indica uma derivada em relação ao parâmetro.

Proposições 4.2.4 and 4.2.5 garantem a existência de um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  e de uma constante  $c > 0$  tal que

$$|\nabla f_s(p)| \geq c|p|, \quad |\dot{f}_s(p)| \leq \eta c|p|^2 \quad \forall p \notin K, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (4.28)$$

Não há, perda de generalidade para assumir que  $K$  contém todos os pontos da bola unidade euclidiana  $\mathbb{R}^{2nk(N+2)}$ . Nós procedemos sob esta suposição. Isso nos permite obter a estimativa adicional  $|p| > 1$  para cada  $p \notin K$ . Em particular  $\text{int}(K)$  contém  $\text{Crit}(f_s)$ , para cada  $s \in \mathbb{R}$ .

**Lema 4.2.6.** *Se a  $C^1$ -aplicação  $s \in \mathbb{R} \mapsto g_s \in E$  satisfaz*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \left( \|g_s - f_s\|_E + \|\dot{g}_s - \dot{f}_s\|_E \right) \leq \delta$$

então

$$|\nabla g_s(p)| \geq (c - 2\delta)|p| \quad |\dot{g}_s(p)| \leq (\eta c + 3\delta)|p|^2$$

para cada  $s \in \mathbb{R}$  e todo  $p \notin K$ .

*Demonstração.* A prova é exatamente a mesma que no Lema 4.1.4.  $\square$

Finalmente, o principal fato con relação à compacidade diz o seguinte:

**Proposição 4.2.7.** *Existem constantes  $L, \delta > 0$  com o seguinte significado. Suponha que o caminho  $s \in \mathbb{R} \mapsto g_s \in X$  é de classe  $C^1$  e satisfaz*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \left( \|g_s - f_s\|_X + \|\dot{g}_s - \dot{f}_s\|_X \right) \leq \delta, \quad \dot{g}_s \equiv 0 \quad \text{se} \quad |s| \gg 1.$$

*Suponha que  $\{\theta_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  é uma família suave de métricas Riemannianas suaves  $\mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  tal que  $\theta_s - \langle \cdot, \cdot \rangle$  é suportado em  $K$  e  $\dot{\theta}_s$  é nulo quando  $|s| \gg 1$ . Então*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |\gamma(s)| \leq L$$

*para cada solução  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2nk(N+2)}$  de  $\dot{\gamma}(s) + \nabla^{\theta_s} g_s(\gamma(s)) = 0$  satisfazendo*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \gamma(s) = p_{-\infty} \in \text{Crit}(g_{-\infty}), \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = p_{+\infty} \in \text{Crit}(g_{+\infty}).$$

*Demonstração.* A prova é exatamente a mesma que na Proposição 4.1.5.  $\square$

*Prova da Proposição 4.2.3.* Desde que os pontos críticos de  $\mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}$  estão em correspondência 1-1 com os pontos fixos do  $(\beta(s)$ -independente) difeomorfismo local  $\varphi^k$ , nós concluímos pela Proposição 4.2.7 que  $K$  é um conjunto uniformemente compacto para a família  $\mathbb{A}_{\rho_s, k, N+2}$ . Logo pela Proposição 4.1.7 podemos considerar  $s \in [-\frac{1}{\eta}, \frac{1}{\eta}]$  com  $\eta \in ]0, \frac{1}{2}[$  e temos

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N+2}, \theta_0, K) \simeq \text{HM}_*(\mathbb{A}_{G,k,N+2}, \theta_0, K)$$

$\square$

O isomorfismo de inflação do Teorema 4.2.1 nos permite considerar os grupos graduados  $\{\text{HM}_{*+nkN}(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K)\}$  indexados pelos inteiros positivos  $N \geq 1$  que são adaptados para  $H$  como em (3.16). O homomorfismo

$$\text{HM}_{*+nkN}(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K) \rightarrow \text{HM}_{*+nk(N+j)}(\mathbb{A}_{H,k,(N+j)}, \theta_0, K)$$

é por definição o isomorfismo preservando graduação  $\mathcal{I}_{N+j-1} \circ \dots \circ \mathcal{I}_N$ . Da mesma forma temos os grupos graduados  $\{\text{HM}_{*+nk2N}(\mathbb{A}_{H,k,2N}, \theta_0, K)\}$  indexados pelos inteiros positivos  $2N$  com  $N \geq 1$  tais que são adaptados para  $H$ .

**Definição 4.2.8** (Homologias locais). *Os limites diretos*

$$\mathcal{H}_*(H, k, K) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{HM}_{*+nkN}(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K)$$

$$\mathcal{H}_*(H, k, K) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{HM}_{*+nk2N}(\mathbb{A}_{H,k,2N}, \theta_0, K)$$

*são chamados de homologias locais não-invariantes de  $(H, k, K)$  que são sempre bem definidos desde que 0 seja um ponto fixo isolado de  $\varphi_H^k$ .*

Finalmente podemos concluir o cálculo da homologia de Morse Pré-compacta do Funcional  $\mathbb{A}_{H,k,N}$  com  $N$  adaptado para  $H$ .

**Teorema 4.2.9.** *Dado o funcional ação discreto  $\mathbb{A}_{H,k,N} : \mathbb{R}^{2nkN} \rightarrow \mathbb{R}$  temos*

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \text{se } * = \mu_k \\ 0 & ; \text{se não} \end{cases}$$

*onde  $\mu_k$  é o índice de Conley-Zehnder do ponto crítico zero.*

*Demonstração.* Se quer calcular  $\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K)$  então se tiver outro  $N'$  tem-se que  $\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H',k,N'}, \theta_0, K)$  onde  $N'$  depende de  $H'_i$ , logo seja  $N'' \gg \max\{N, N'\}$ , então pelo Teorema 4.2.1 tem-se

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K) = \text{HM}_{*+\sigma}(\mathbb{A}_{H,k,N''}, \theta_0, K)$$

e

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H',k,N'}, \theta_0, K) = \text{HM}_{*+\sigma'}(\mathbb{A}_{H',k,N''}, \theta_0, K)$$

Por outro lado usando o Teorema 4.2.3 temos

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N''}, \theta_0, K) = \text{HM}_*(\mathbb{A}_{h,k,N''}, \theta_0, K)$$

e

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H',k,N''}, \theta_0, K) = \text{HM}_*(\mathbb{A}_{h,k,N''}, \theta_0, K),$$

então

$$\text{HM}_{\mu_k}(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K) = \text{HM}_{\mu_k+nkN''}(\mathbb{A}_{H,k,N''}, \theta_0, K) = \text{HM}_{\mu_k+nkN''}(\mathbb{A}_{h,k,N''}, \theta_0, K).$$

Logo

$$\mathcal{H}_{\mu_k}(h, k, K) = \lim_{N'' \rightarrow \infty} \text{HM}_{\mu_k+nkN''}(\mathbb{A}_{h,k,N''}, \theta_0, K)$$

e como o único ponto crítico isolado de  $h$  é 0, temos  $\mathcal{H}_{\mu_k}(h, k, K) = \mathbb{Z}$ . Finalmente

$$\text{HM}_*(\mathbb{A}_{H,k,N}, \theta_0, K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \text{se } * = \mu_k \\ 0 & ; \text{se não} \end{cases}$$

□

### 4.3 Considerações Finais

Aqui, abordamos algumas observações sobre o trabalho apresentado até agora e algumas questões que podem ser feitas depois. Nós mostramos a existência de um Isomorfismo de Inflação usando a Proposição 2.4.7 e com isso temos uma homologia de Morse Pré-compacta bem definida para a variedade simplética no compacta  $\mathbb{R}^{2nkN}$  com  $N$  bastante grande.

Seguindo de perto o artigo de Hein D., Hryniewicz U. e Macarini L. [16], poderíamos ter uma versão da Proposição 2.4.7 sob simetrias de grupos cíclicos finitos. No entanto, não temos o fato transversal com simetrias necessárias para mostrar que os mapas de continuação são  $\mathbb{Z}$ -equivalentes quando os pares locais de Morse-Smale são  $\mathbb{Z}$ -simétricos. No artigo [16] conseguem ter essa versão usando outra abordagem, só que para um ponto crítico uniformemente isolado da família  $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in [a,b]}$ . No nosso caso, precisamos dessa versão apenas para um conjunto uniformemente compacto  $K$  da família  $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in [a,b]}$ , acreditamos que é possível ter apenas essa versão só que isso fará parte de uma pesquisa posterior.



# Bibliografia

- [1] Audin M., Damian M., Morse theory and Floer homology. Universitext, Springer-Verlag London 2014.
- [2] Birkhoff G. D., Proof of Poincaré's geometric theorem. Trans. Amer. Math. Soc. 14-22 (1913).
- [3] Bursztyn H. e Macarini L., Introdução a Geometria Simplética. IMPA, Rio de Janeiro EGD2806 (2006).
- [4] Chaperon M., Une idée du type 'géodesiques brisées'. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences, 298, 293-6.(1984).
- [5] Conley C., Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conf. Ser. Math. 38 (Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1978).
- [6] Conley, C. and Zehnder, E. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold. Inventiones Mathematicae, 73, 33-49. (1983).
- [7] Do Carmo, M., Geometria diferencial de curvas e superficies, Coleção textos universitários, SBM, 5ª edição (2012).
- [8] Do Carmo, M., Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, IMPA, 3ª edição (2005).
- [9] Eliashberg Y., Estimates on the number of fixed points of area pre- preserving transformations. Syktyvkar University Preprint (1979).
- [10] Floer A., Witten's complex and infinite dimensional Morse theory, J.Differential Geom. 30 (1989) 207-221.
- [11] Floer, A. Symplectic fixed points and holomorphic spheres. Communications in Mathematical Physics, 120, 575-611.(1989).
- [12] Ginzburg V., The Conley conjecture. Ann. of Math. (2) 172 (2010),1127-1180.
- [13] Ginzburg V., D. Hein, U.L. Hryniewicz, L. Macarini. Closed Reeb orbits on the sphere and symplectically degenerate maxima, Acta Math. Vietnam, 38 (2013), 55-78.
- [14] Ginzburg V. and Gören Y., Iterated index and the mean Euler characteristic. J. Topol. Anal., 7, no. 3, pp. 453-481 (2015).
- [15] Gromoll D., Meyer W., On differentiable functions with isolated critical points, Topology, vol 8 (1969), 361-369.
- [16] Hein D., Hryniewicz U. and Macarini L., Transversality in local Morse homology with symmetries and applications, Mathematische Zeitschrift, pp. 1-87 (2019).

- 
- [17] H. Hofer, Pseudoholomorphic curves and symplectisations with application to the Weinstein conjecture in dimension three, *Invent. Math.*, 114, (1993), 515-563.
- [18] H. Hofer e C. Viterbo, The Weinstein conjecture in cotangent bundles and related results, *Annali Sc. Norm. Sup. Pisa*, 15, Serie IV, Fase III, (1988), 411-445.
- [19] Hofer H. and Zehnder E., *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser (2010).
- [20] Hryniewicz Umberto e Salomão Pedro, *Uma Introdução à Geometria de Contato e Aplicações à Dinâmica Hamiltoniana* (2009). 27° CBM-17, IMPA Rio de Janeiro.
- [21] Hryniewicz Umberto. and Macarini Leonardo, Local contact homology and applications. *J. Topol. Anal.*, 7 (2015), 167-238.
- [22] Klingenberg K., *Lectures on closed geodesics*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 230. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1978).
- [23] Kupka I., Contribution a la theorie des champs generiques, *Contrib. Diff. Equations*, 2, (1963).
- [24] McDuff D. and Salamon D., *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Math. Monogr., The Clarendon Press, Oxford (1998).
- [25] McDuff D. and Salamon D., J-holomorphic curves and symplectic topology. *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* 52 (2004).
- [26] Milnor J. W., *Morse Theory*, Annals of Mathematical Studies, 51, Princeton University Press, NJ, 1963.
- [27] Milnor J. W. and Stasheff J. D., *Characteristic Classes*, Annals of Mathematical Studies, 76, Princeton University Press, NJ, 1974.
- [28] Palis J., de Melo W., *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer, New York, 1982.
- [29] Poincaré H., Sur un théorème de géométrie. *Rend. Circolo Math. Palermo*, 375-407, 1912.
- [30] Rabinowitz, P.: Periodic solutions of Hamiltonian systems, *Comm. Pure Appl. Math* 31 (1978), 157-184.
- [31] Salamon D., Connected Simple Systems and the Conley Index of Isolated Invariant Sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 291, No. 1 (Sep., 1985), pp. 1-41.
- [32] Salamon D., Morse theory, the Conley index and Floer homology. *Bull. London Math. Soc.* 22 (1990) 113-140.
- [33] Salamon D. and Zehnder E., Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index, *Comm. Pure Appl. Math.* 45 (1992), no. 10, 1303-1360.
- [34] Schwarz M., *Morse Homology*, Progress in Mathematics, vol 111, Birkhäuser, Basel, 1993.
- [35] Smale S., Morse inequalities for dynamical systems, *Bulls. Amer. Math. Soc.* 66 (1960) 43-49.
- [36] Smale S., On gradient dynamical systems, *Ann. Math.* 74 (1961) 199-2016.
- [37] Smale S., Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, *Ann. Scuola Sup. Piza*, 17, (1963).
- [38] Spanier E., *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966 (reprinted by Springer-Verlag).
- [39] Taubes Clifford, The Seiberg Witten equations and the Weinstein conjecture. *Geometry and Topology*. Volume 11, Number 4 (2007), 2117-2202.

- [40] Viterbo, C., A proof of the Weinstein conjecture in  $\mathbb{R}^{2n}$ , Ann. Inst. Henri Poincaré 4 (1987), 337-357.
- [41] Warner Frank W., Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag New York, Inc., 1983.
- [42] Weber J., The Morse-Witten complex via dynamical systems, Expo. Math. 24 (2006) 127-159.
- [43] Weinstein A., On the hypothesis of Rabinowitz's periodic orbit theorems, J. Diff. Eq. 33 (1979), 353-358.
- [44] Zehnder E., Lectures on Dynamical Systems. European Mathematical Society (2010).