



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática

Fernando Pereira Paulucio Reis

**Métodos de folheações holomorfas em equações
diferenciais**

TESE

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

Rio de Janeiro
Julho de 2019

Métodos de folheações holomorfas em equações diferenciais

Fernando Pereira Paulucio Reis

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

Rio de Janeiro
Julho de 2019

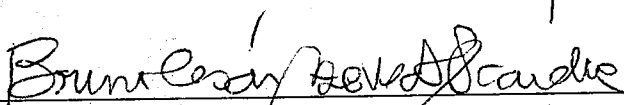
Universidade Federal do Rio de Janeiro

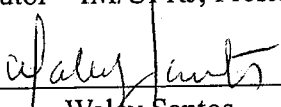
Métodos de folheações holomorfas em equações diferenciais

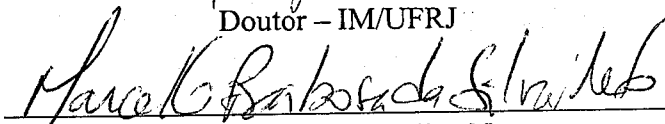
Fernando Pereira Paulucio Reis

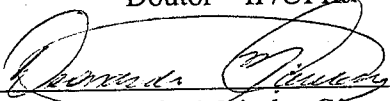
Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em ciências.

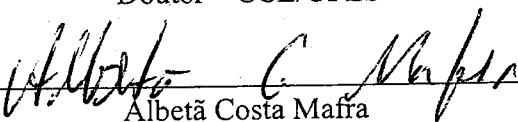
Aprovada em 03/07/2019



Bruno César Azevedo Scárdua / presidente da banca
Doutor – IM/UFRJ, Presidente


Walcy Santos
Doutor – IM/UFRJ


Marcello Barbosa da Silva Neto
Doutor – IF/UFRJ


Leonardo Meireles Câmara
Doutor – CCE/UFES


Albetã Costa Mafra
Doutor – IM/UFRJ


Víctor Arturo Martínez León
Doutor – ILACVN/UNILA

CIP - Catalogação na Publicação

Pm Pereira Paulucio Reis, Fernando
 Métodos de Folheações Holomorfas em Equações
 Diferenciais / Fernando Pereira Paulucio Reis. --
 Rio de Janeiro, 2019.
 143 f.

 Orientador: Bruno Cezar Azevedo Scardua.
 Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
 de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós
 Graduação em Matemática, 2019.

 1. Folheações holomorfas. 2. Equações
 Diferenciais. 3. Integrais primeiras. I. Cezar
 Azevedo Scardua, Bruno, orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por estar sempre comigo em todos os momentos.

Agradeço a meu Orientador Bruno Scárdua, primeiramente pela sua amizade. Também, agradeço por sua dedicação a este trabalho e principalmente, pela sua preocupação com a minha formação como matemático.

Agradeço a meus pais e minha irmã pelo apoio constante. Sem eles acredito que não teria chegado até aqui.

Agradeço a minha esposa Juliana por sua motivação permanente durante toda a elaboração deste trabalho.

Agradeço ao Instituto de Matemática da UFRJ. Em especial aos professores que lecionaram os cursos que realizei, fortalecendo minha formação como matemático. E, também aos amigos pelos bons momentos.

Finalmente, agradeço à FAPERJ pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese estudamos equações diferenciais ordinárias (EDOs) sob o ponto de vista da teoria de folheações. Iniciamos estudando EDOs lineares de segunda ordem, como a equação de Hill do movimento lunar, associando a estas formas diferenciais de grau um e que satisfazem à condição de integrabilidade de Frobenius. Como consequência, a uma tal EDO associamos uma folheação por superfícies no espaço euclidiano de dimensão três. Tal folheação, dada por uma 1-forma integrável neste espaço, possui propriedades intrinsecamente ligadas à EDO que a gerou. Sempre que existir duas soluções linearmente independentes da EDO, obtidas por exemplo pelo método de Frobenius de obtenção de soluções por séries de potências, temos associada uma integral primeira da folheação. Isto nos permite iniciar a compreensão da geometria associada a tais EDOs e obter alguns resultados concretos de integrabilidade, que explicam matematicamente a estabilidade de alguns sistemas e problemas da natureza modelados por tais equações.

A equação de Hill é uma classe de EDOs com coeficientes periódicos. Essa equação está associada ao movimento da Lua, no sistema Sol-Terra-Lua (problema de três corpos). Iniciamos com a questão a seguir.

Existe alguma estrutura integrável associada à equação de Hill?

A abordagem desenvolvida associa à equação complexa de Hill, uma 1-forma integrável complexa analítica, em dimensão três. Essa, define uma folheação (analítica complexa) que chamamos de *folheação de Hill*. Aplicamos algumas ferramentas geométricas baseadas na teoria de folheações analíticas complexas (holomorfas), apresentando uma nova abordagem no tratamento da equação de Hill complexa. Inspirados no estudo das equações de Hill, obtemos modelos integráveis também para todas as EDOs lineares de segunda ordem.

Em seguida, mudamos o ponto de vista, mantendo a filosofia inicial de se atribuir propriedades geométricas a EDOs. Miramos as EDOs de primeira ordem autônomas com coeficientes analíticos complexos no plano, especificamente, as EDOs dadas por campos de vetores analíticos complexos em dimensão dois, numa vizinhança de um ponto singular deste campo. Exploramos a relação entre a dinâmica do campo e o comportamento de suas órbitas em alguns setores obtidos a partir de uma seção transversal a uma separatriz. Tal estudo é motivado pela teoria de desenvolvimento assintótico e mais uma vez reflete um desdobramento das técnicas de soluções por séries de potências para EDOs. Portanto, abordamos a seguinte questão:

Sob quais circunstâncias a existência de uma integral primeira em algum setor garante a existência de uma integral primeira em uma vizinhança de uma singularidade?

Para resolver o problema, combinamos técnicas de holonomia de folheações analíticas complexas (holomorfas), com técnicas de *expansão assintótica* de funções em uma variável.

Palavras-chave: Folheações Holomorfas; Equações Diferenciais Ordinárias, Equação de Hill, Integrabilidade; Expansão assintótica; singularidade; Correspondência de Dulac; Integral primeira setorial moderada.

Abstract

In this thesis we study ordinary differential equations (ODEs) under the standpoint of foliation theory. Initially, we study second order linear ODEs, such as the Hill equation of lunar motion, associating these differential forms of degree one and satisfying the Frobenius integrability condition. As a consequence, to such an ODE we associate a surface foliation in the three-dimensional Euclidean space. Such foliation, given by an integrable 1-form in this space, has properties intrinsically linked to the ODE that generated it. Given two linearly independent solutions of ODE, obtained for example by the Frobenius method of obtaining solutions by power series, we have associated a first integral of the foliation. This allows us to begin the understanding of the geometry associated with such ODEs and to obtain some concrete results of integrability, which explain mathematically the stability of some systems and problems of the nature modeled by such equations.

More concretely, we study the Hill equation. A class of ODEs with periodic coefficients. This equation is associated with the motion of the Moon in the Sun-Earth-Moon system (three-body problem). We begin with the following question.

Is there any integrable structure associated with the Hill equation?

The approach developed associates Hill's complex equation with a complex three-dimensional integrable analytic 1-form. This, defines a foliation (analytic complex) that we denote by *Hill's foliation*. We applied some geometric tools based on the theory of analytic complex (holomorphic) foliations, presenting a new approach in the treatment of the complex Hill's equation. Inspired by the study of Hill's equations, we also obtain integrable models for all second order linear ODEs.

Next, we change the point of view, maintaining the initial philosophy of assigning geometric properties to ODEs. We look at the first-order autonomous ODEs with complex analytical coefficients in the plane. More precisely, the ODEs given by complex analytic fields in dimension two, in a neighborhood of a singular point of this field. We explore the relationship between the dynamics of the field and the behavior of its orbits in some sectors obtained from a transversal section to a separatrix. Such a study is motivated by the theory of asymptotic development and again reflects an unfolding of the solution techniques by power series for ODEs. More precisely, we address the following question:

Under what circumstances does the existence of a first integral on some sector ensure the existence of a first integral in a neighborhood of a singularity?

To solve the problem, we combine holonomic techniques of complex (holomorphic) analytic foliation with techniques of asymptotic expansion of functions in one variable.

Key words: Holomorphic foliation; Ordinary differential equations, Hill equation, integrability; Asymptotic expansion; Singularity; Dulac Correspondence; Moderate sectorial first integral.

Sumário

1	Introdução	2
I	Integrabilidade das EDOs lineares de segunda ordem	13
2	A folheação de Hill e a forma Fundamental	14
2.1	A equação de Hill complexa	14
2.2	A folheação de Hill	15
2.3	A forma fundamental de Hill	19
3	Integrabilidade para a forma de Hill	20
3.1	Preliminares sobre funções de Bessel	20
3.2	Preliminares sobre funções Liouvillianas	24
3.3	Integral primeira tipo-Bessel para a forma fundamental	26
3.4	Não existência de integral primeira Liouvilliana	30
3.5	Redução de singularidades	34
3.6	Holonomia	39
4	Folheações de Hill de parâmetro p	41
4.1	Integral primeira e soluções clássicas	41
4.2	Classificação geral das Folheações de Hill de parâmetro p	44
4.2.1	Forma regular de Hill	48
4.2.2	Forma geral de Hill	49
4.3	A integral primeira formal do tipo Laurent-Fourier	56
5	A equação de Mathieu	59
5.1	Introdução	59
5.2	A folheação de Mathieu	60
5.3	A forma algébrica	61
5.4	As funções de Mathieu	63
5.4.1	As funções de Mathieu de segundo tipo	67
5.5	Integrais primeiras para a folheação de Mathieu	68

6	Integrabilidade das equações lineares de segunda ordem	70
6.1	Existência de forma integrável	70
6.2	O caso não homogêneo	72
6.3	Integrais primeiras e soluções clássicas para a equação de segunda ordem	76
6.4	Mudanças de coordenadas esféricas	82
6.5	O modelo bidimensional das formas integráveis	83
6.6	Equação linear homogênea de terceira ordem admitindo integrabilidade	84
II	Expansão assintótica e germes de folheações holomorfas	85
7	Funções com expansão assintótica	86
7.1	Séries de potências formais	86
7.2	Expansão assintótica	87
8	Grupos de germes de difeomorfismos holomorfos	91
8.1	Resultados clássicos	91
8.2	Germes de difeomorfismos não parabólicos e setores invariantes	93
8.3	Expansão assintótica e grupo de invariância	94
9	Folheações holomorfas	99
9.1	Conceitos fundamentais	99
9.1.1	Holonomia virtual	102
9.2	Desingularização	102
9.3	A sela-nó	105
10	Integrais primeiras	107
10.1	Noções básicas	107
10.2	O Teorema de Mattei-Moussu	108
10.3	O Teorema de Mattei-Moussu formal	108
11	Folheações admitindo integral primeira setorial moderada	110
11.1	A integral primeira setorial moderada	110
11.2	A Correspondência de Dulac	113
11.3	A Correspondência de Dulac e a integral primeira setorial moderada	114
11.4	Teorema I	119

12	Separatrizes não-fracas e integrais primeiras setoriais moderadas	123
12.1	Separatriz forte e integrais primeiras setoriais	123
12.2	Teorema J	125
13	Curva generalizada	127
13.1	O Teorema do índice de Camacho-Sad	127
13.2	Teorema K	129
14	Integrais primeiras setoriais moderadas e o Teorema de Mattei-Moussu formal	135

Capítulo 1

Introdução

Equações diferenciais é uma das áreas mais importantes da Matemática, com inúmeras aplicações à Física, Química, Biologia e Engenharia. Por conta das Leis de Newton e outras leis clássicas da ciência, muitos dos mais importantes fenômenos modelados por tais equações são dados por equações de segunda ordem. Em especial as equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares de segunda ordem desempenham um papel fundamental na compreensão do mundo e nas aplicações do conhecimento às situações da vida real. Historicamente, as EDOs lineares de segunda ordem tiveram grande avanço graças aos trabalhos de cientistas como Euler, Lagrange, Bernoulli, Laplace e outros. Equações modelando fenômenos importantes são desta forma, como as equações de Euler, Bessel, Tchebychev, Laguerre, Hill, Mathieu...

Tão importante quanto a obtenção destas equações e de suas soluções, é o estudo de suas propriedades geométricas. Os métodos clássicos de solução são os associados aos trabalhos de Euler, Lagrange e Frobenius. Tais trabalhos deram grande impulso à teoria destas equações por cerca de várias décadas e mesmo um século. Por outro lado, estes métodos mesmo com a introdução de modernos métodos de computação, nem sempre fornecem informação geométrica suficiente para a compreensão do fenômeno natural originalmente modelado. Nesta tese propomos uma abordagem do estudo de tais equações e portanto de tais fenômenos naturais, através de métodos de integrabilidade. Mais precisamente, buscamos associar a tais equações objetos integráveis conhecidos como folheações. Uma folheação é uma decomposição do espaço ambiente em partes (subvariedades conhecidas como folhas) que se arrumam de forma localmente similar às folhas de um livro. Tal organização permite inferir diversas propriedades locais e globais das folhas e mesmo da folheação como indicam os resultados mais importantes a da teoria de folheações concebida por Ehresmann. De fato, estudaremos algumas EDOs de segunda ordem

clássicas como a equação de Hill do movimento lunar, associando a estas uma 1-forma integrável no espaço de dimensão três e estudando as propriedades analíticas e geométricas desta folheação. Chamaremos a este fenômeno, o de associar a uma equação diferencial uma folheação por superfícies, de *integrabilidade* da equação diferencial. Isto parece explicar por exemplo no caso da equação de Hill, a aparente ordem no caos potencial que seria um sistema solar com objetos livres seguindo apenas a lei da gravitação universal de Newton, em uma situação conhecida genericamente como *problema dos n corpos*.

George William Hill publicou em 1878, o célebre trabalho “*On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon*”[36]. Nesta obra-prima, Hill descreveu o movimento da lua ao redor da terra, considerando-o como um oscilador harmônico em um campo de vetores gravitacional periódico. Hill associou ao problema o seguinte modelo

$$u''(x) + p(x)u(x) = 0 \quad (1.1)$$

onde p é uma função periódica do tempo x e $u(x)$ descreve a distância (posição) da lua com respeito a terra. Posteriormente a equação (1.1) passou a ser conhecida como *equação de Hill* (veja por exemplo [48]). Hill aplicou pela primeira vez, com sucesso, a teoria de *determinantes infinitos*. A partir daí, um grande esforço foi empregado para compreensão da equação de Hill. Ainda em [36], Hill considerou equações relacionadas ao *problema de três-corpos*, a saber, terra, lua e sol, o qual foi descrito pelas seguintes duas equações

$$\frac{d^2u}{ds^2} - 2m\frac{dv}{ds} + \chi\frac{u}{r^3} = 3m^2u \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} - 2m\frac{du}{ds} + \chi\frac{v}{r^3} = 0 \quad (1.3)$$

Nas equações (1.2) e (1.3), u, v são coordenadas retangulares da lua tendo a terra como origem, $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ e m é dado por

$$m = \frac{n'}{n - n'},$$

onde n' é o movimento principal do sol e n é o movimento principal da lua. Hill considerou a estimativa $m = 0,08084893679$. O parâmetro χ é dado por

$$\chi = G\frac{M_e + M_m}{(n - n')^2},$$

onde M_e e M_m são as massas da terra e da lua, respectivamente, e finalmente G é a constante gravitacional de Cavendish.

Hill foi capaz de associar às equações (1.2) e (1.3) a única equação da forma

$$u''(x) + p(x)u(x) = 0, \quad (1.4)$$

onde p é uma função periódica, a valores reais. A variável x está relacionada ao tempo t pela fórmula $x = (n - n')(t - t_0)$, onde t_0 é o tempo inicial.

Desde que a equação de Hill está relacionada com o problema do movimento planetário e estabilidade do sistema solar, iniciamos com a seguinte questão:

Questão 1.0.1. Existe alguma estrutura integrável conectada à equação de Hill?

A questão acima parece ser mais geral. De fato, um dos ganhos deste trabalho é investigar uma noção de integrabilidade neste caso. Frequentemente, quando tratamos EDOs, a palavra *integrabilidade* significa encontrar algum tipo de função potencial, mas isso não parece necessariamente apropriado porque a ordem da equação é dois.

Considere um campo X associado uma equação diferencial ordinária (EDO) pelo método clássico de redução de ordem. No ambiente de folheações a noção de integrabilidade admite essencialmente duas interpretações: Uma é a existência de uma *1-forma integrável* tangente ao campo X . Neste caso diremos que o campo (ou a EDO) é *integrável no sentido fraco* ou, simplesmente *w-integrável*. Outra interpretação é que existe uma *integral primeira* para a folheação que é tangente ao campo X . Neste caso diremos que o campo (ou a EDO) é *integrável no sentido forte*, ou simplesmente *s-integrável*. Chamamos de *campo de Hill*, o campo associado à equação de Hill. Nesta direção provamos o seguinte teorema.

Teorema A.(pág. 15, Seção 2.2) Um campo de Hill é sempre *w-integrável*.

A partir da folheação de Hill obtemos um modelo bidimensional (em \mathbb{C}^2), que chamamos de forma de Hill. Provamos a existência de uma integral primeira para a forma de Hill.

Teorema B.(pág. 26, Seção 3.3) A forma de Hill

$$\Omega = -ydx + (x^2 + y)dy$$

admite uma integral primeira F da forma

$$F(x, y) = \frac{2xY_0(2\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y})}{xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})}$$

onde J_0, J_1 são as funções de Bessel de primeiro tipo e Y_0, Y_1 são as funções de Bessel de segundo tipo. A função F é holomorfa bem definida em um subconjunto aberto da forma $(x, y) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus L)$ onde L é um segmento de reta fechado começando na origem de \mathbb{C} .

Consequentemente obtemos integrabilidade forte para a equação de Hill com parâmetro exponencial.

Corolário 3.3.1 A equação de Hill $u''(z) + e^z u(z) = 0$ é s -integrável. De fato, a folheação de Hill $\mathcal{H} : \omega = -ydx + xdy + [y^2 + e^z x^2]dz = 0$ admite a integral primeira

$$H(x, y, z) = \frac{2yY_0(2\sqrt{e^z}) - 2x\sqrt{e^z}Y_1(2\sqrt{e^z})}{yJ_0(2\sqrt{e^z}) - x\sqrt{e^z}J_1(2\sqrt{e^z})}. \quad (1.5)$$

Intuitivamente, uma função Liouvillian complexa é aquela obtida de funções racionais complexas por um processo finito de integrações, exponenciações e operações algébricas (veja Seção 3.2). Do ponto de vista global, a forma de Hill apresenta a seguinte propriedade.

Teorema C.(pág. 31, Seção 3.4) A forma de Hill

$$\Omega = -ydx + [x^2 + y]dy$$

não admite integral primeira do tipo Liouvillian globalmente definida em $\mathbb{C}P^2$.

Em contrapartida, temos o seguinte.

Corolário 3.4.1 A forma de Hill $\Omega = -ydx + (x^2 + y)dy$ admite integral primeira Liouvillian local em \mathbb{C}^2 .

Utilizando os resultados para a forma de Hill, garantimos a integrabilidade forte do campo de Hill, ou seja, o campo de Hill é sempre s -integrável.

Teorema D.(pág.41, Seção 4) Considere a equação

$$u''(z) + b(z)u(z) = 0, \quad (1.6)$$

onde $b : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, é uma função holomorfa definida em um aberto U de \mathbb{C} . Sejam $u_1, u_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ duas soluções linearmente independentes da EDO (1.6), e $X_b : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}^3$, o campo dado por

$$X_b(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - b(z) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Então, X_b é sempre s -integrável. Precisamente, a função $H : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$H(x, y, z) = \frac{xu_1'(z) - yu_1(z)}{xu_2'(z) - yu_2(z)},$$

é definida e meromorfa em $\mathbb{C}^2 \times U$, sem pontos indefinidos, e é uma integral primeira para a folheação, determinada pela 1-forma integrável

$$\omega = -ydx + xdy + [y^2 + b(z)x^2]dz = 0.$$

Em particular, o Teorema acima se verifica no caso em que b é periódica, ou seja, no caso em que X_b é um campo de Hill.

A partir da Teoria de Floquet ([31]) e o Teorema D, apresentamos uma integral primeira formal para a folheação de Hill:

Teorema E. (pág. 58, Seção 4.3) Seja $p : A_{\alpha, \beta} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função periódica, de período T , holomorfa na faixa horizontal $A_{\alpha, \beta} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \text{Im}(z) < \beta\} \subset \mathbb{C}$. Então a folheação de Hill de parâmetro p ,

$$-ydx + xdy + [y^2 + p(z)x^2]dz = 0,$$

em $\mathbb{C}^2 \times A_{\alpha, \beta}$, admite uma integral primeira formal dada pela expressão

$$H_p(x, y, z) = e^{2\mu z} \frac{x\mu \sum_k a_k e^{kz} + x \sum_k k a_k e^{kz} - y \sum_k a_k e^{kz}}{-x\mu \sum_k a_k e^{-kz} - x \sum_k k a_k e^{-kz} - y \sum_k a_k e^{-kz}}, \quad (1.7)$$

onde \sum_k significa $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$.

Existe um caso particular da equação de Hill muito importante. Essa equação é chamada de equação de Mathieu e é dada por

$$u''(z) + (a - 2q \cos(2z))u(z) = 0,$$

onde a, q são constantes. Essa equação está associada ao problema de vibração de membranas. Obtemos integrabilidade para a equação de Mathieu, definindo a *folheação de Mathieu*. Além disso, exibimos os

modelos bidimensionais associados ao problema, bem como a relação entre eles. Obtemos também integrais primeiras para as folheações de Mathieu.

Estendemos as técnicas de integrabilidade para as EDOs lineares de segunda ordem.

Teorema F.(pág.71, Seção 6.1) Considere a equação linear homogênea de segunda ordem dada por

$$a(z)u''(z) + b(z)u'(z) + c(z)u = 0,$$

onde $a, b, c : U \rightarrow \mathbb{C}$ são funções holomorfas em um aberto $U \subset \mathbb{C}$. Sejam $U' = U \setminus Z_a$, onde Z_a é o conjunto de zeros de a , e $X : \mathbb{C}^2 \times U' \rightarrow \mathbb{C}^3$ o campo de vetores dado por

$$X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - \left[\frac{b(z)}{a(z)}y + \frac{c(z)}{a(z)}x \right] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Então, a 1-forma holomorfa definida em $\mathbb{C}^2 \times U$,

$$\omega = -a(z)ydx + a(z)xdy + [a(z)y^2 + b(z)xy + c(z)x^2]dz,$$

é integrável e o campo X é tangente à folheação determinada por $\omega = 0$.

Provamos que o caso não homogêneo também é w -integrável:

Teorema G.(pág.73, Seção 6.2) Considere a equação linear não homogênea de segunda ordem dada por

$$u''(z) + b(z)u'(z) + c(z)u(z) = h(z), \quad (1.8)$$

onde $b, c, h : U \rightarrow \mathbb{C}$, são funções holomorfas em um aberto $U \subset \mathbb{C}$. Sejam $u_p : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma solução particular da equação (1.8), e $X : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}^3$ o campo de vetores dado por

$$X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - [b(z)y + c(z)x - h(z)] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Então, a 1-forma holomorfa definida em $\mathbb{C}^2 \times U$,

$$\begin{aligned} \omega_{nh} = & -(y - u'_p)dx + (x - u_p)dy \\ & + [y(y - u'_p) + (x - u_p)(ay + bx - h)]dz, \end{aligned}$$

é integrável e o campo X é tangente à folheação determinada por $\omega = 0$.

Exploramos a integrabilidade forte, obtendo o seguinte resultado.

Teorema H.(pág. 77, Seção 6.3) Considere a equação

$$a(z)u''(z) + b(z)u'(z) + c(z)u = 0,$$

onde $a, b, c : U \rightarrow \mathbb{C}$, são funções holomorfas definidas em um aberto U de \mathbb{C} . Suponha que essa equação admita duas soluções linearmente independentes $u_1, u_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$. Então, a função $H : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$H = \frac{xu_1'(z) - yu_1(z)}{xu_2'(z) - yu_2(z)},$$

é definida e meromorfa em $\mathbb{C}^2 \times U$, sem pontos indefinidos, e é uma integral primeira para a folheação determinada pela 1-forma holomorfa dada por

$$\omega = -a(z)ydx + a(z)xdy + [a(z)y^2 + b(z)xy + c(z)x^2]dz,$$

em $\mathbb{C}^2 \times U$.

Realizamos ainda um estudo do comportamento da 1-forma integrável no caso real. Especificamente, observamos o fenômeno que surge após uma mudança de coordenadas esféricas.

Além disso, mostramos que os modelos bidimensionais obtidos ao longo do trabalho (por exemplo, a forma de Hill), surgem também no caso geral da equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem.

Concluimos a primeira parte do trabalho exibindo as equações lineares de ordem três que obtemos integrabilidade.

Na segunda parte deste trabalho, atribuímos propriedades geométricas a EDOs de primeira ordem autônomas com coeficientes holomorfos no plano. Mais precisamente, as EDOs dadas por campos de vetores holomorfos em dimensão dois, numa vizinhança de um ponto singular deste campo. Existe um método em EDOs chamado *expansão assintótica*. Esse método foi introduzida por Poincaré em 1886 (veja por exemplo [7, 8, 20, 26, 45, 64, 80]). A motivação inicial para o conceito de expansão assintótica veio da preocupação com truncagens feitas nas séries divergentes. A grosso modo, uma função admite uma expansão assintótica se existir um setor e uma série de potências formal tal que:

- (i) a função é holomorfa neste setor;
- (ii) as truncagens da série de potências formal fornecem uma aproximação

para a função neste setor.

Uma 1-forma holomorfa $\omega(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ definida em uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^2$ determina uma folheação holomorfa \mathcal{F}_ω em U com conjunto singular $\text{sing}(\mathcal{F}_\omega) = \text{sing}(\omega)$. Para os propósitos deste trabalho, é suficiente supor $\text{sing}(\omega) = \{0\}$. De fato, o interesse principal é o correspondente *germe* da folheação na origem. Dado tal germe \mathcal{F}_ω , uma *separatriz* de \mathcal{F}_ω é um germe de uma curva analítica irreduzível Γ com $0 \in \Gamma$ e invariante por \mathcal{F}_ω . Neste caso, $\Gamma \setminus \{0\}$ é uma folha de \mathcal{F}_ω . A existência da separatriz é provada em [13]. Folheações com um número finito de separatrizes são chamadas *não dicríticas*.

Exploramos a teoria de expansão assintótica em paralelo com a teoria de folheações holomorfas. Um dos objetivos é compreender as conexões entre o comportamento da folheação e, a sua dinâmica perto das separatrizes. Investigamos as condições mínimas sob as quais a existência de integrais primeiras locais adequadas em conjuntos abertos específicos próximos às separatrizes, asseguram a existência de uma integral primeira global. Com essa finalidade, a noção de expansão assintótica de uma função holomorfa é utilizada.

Dado um germe \mathcal{F} de folheação em $0 \in \mathbb{C}^2$ e uma separatriz Γ de \mathcal{F} , dizemos que o par (\mathcal{F}, Γ) admite um *integral primeira setorial* se dado qualquer representante \mathcal{F}_U de \mathcal{F} em uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^2$ e uma seção transversal Σ com $p = \Sigma \cap \Gamma \neq \{0\}$, existem um setor $S \subset \Sigma$ com vértice em p o qual é invariante por \mathcal{F}_U e uma função holomorfa $\varphi : S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que φ é constante nos traços de cada folha de \mathcal{F} em U . A integral primeira setorial é dita *moderada* se φ admitir uma expansão assintótica diferente de zero em S .

Dizemos que \mathcal{F} é uma curva generalizada se a desingularização de \mathcal{F} por blow-ups não produz singularidades tipo sela-nó, ou seja, apenas singularidades com parte linear não singular.

Se \mathcal{F} é um germe de folheação admitindo uma integral primeira holomorfa, então para cada separatriz Γ de \mathcal{F} o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada.

Encontramos uma versão da recíproca deste fato sob certas condições como segue no seguinte teorema.

Teorema I.(pág. 120, Seção 11.4) Seja \mathcal{F} um germe não-dicrítico de folheação holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^2$. Suponha que \mathcal{F} seja uma curva generalizada e algum par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial

moderada. Então \mathcal{F} admite uma integral primeira holomorfa em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$.

Em seguida, introduzimos outra noção importante.

Uma separatriz Γ de \mathcal{F} é chamada *não-fraca* se após a desingularização de \mathcal{F} , cada ponto do divisor excepcional puder ser conectado a Γ por uma seqüência de linhas projetivas iniciadas em Γ de modo que, toda vez que atingimos uma esquina, passamos por uma separatriz de uma singularidade não degenerada ou por uma variedade forte de uma sela-nó.

Com esta noção, é possível estender o Teorema I:

Teorema J.(pág. 126, Seção 12.2) Se \mathcal{F} é um germe não-dicrítico de folheação holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^2$ e para alguma separatriz não-fraca Γ de \mathcal{F} o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma primeira parte setorial moderada, então \mathcal{F} admite uma integral primeira holomorfa em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$.

A hipótese de curva generalizada pode ser removida se considerarmos que todas as separatrizes de \mathcal{F} admitem uma integral primeira setorial moderada. De fato, provamos o seguinte.

Teorema K.(pág. 130, Seção 13.2) Seja \mathcal{F} um germe de folheação não dicrítico em $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que para toda separatriz Γ de \mathcal{F} o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada. Então \mathcal{F} admite uma integral primeira holomorfa.

Como consequência do Teorema I, obtemos o clássico resultado de Mattei-Moussu:

Teorema L.(pág. 136, Capítulo 14) Seja \mathcal{F} germe de folheação holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^2$. Suponha que \mathcal{F} admita uma integral primeira formal não nula. Então \mathcal{F} admite uma integral primeira holomorfa.

Organização do texto

No capítulo 2, provamos o Teorema A. Conseqüentemente, definimos a 1-forma integrável que determina uma folheação associada à equação de Hill. Definimos também a forma de Hill.

O capítulo 3 se inicia com duas seções preliminares. A primeira seção versa sobre funções de Bessel e a segunda sobre funções Liouvillianas. Em seguida, provamos os resultados sobre integrabilidade da forma de Hill. Precisamente os Teoremas B e C. Realizamos a resolução de singularidades da forma de Hill e concluimos o capítulo com algumas considerações sobre a holonomia.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo das equações de Hill para uma função periódica complexa mais geral. Obtemos a relação entre a integral primeira e as soluções da equação de Hill. A partir de uma mudança de coordenadas especial obtemos uma classificação para as folheações de Hill. Realizamos a resolução de singularidades de uma das formas dessa classificação. Na última seção apresentamos um objeto formal associado à integrabilidade das folheações de Hill.

A equação de Mathieu é tratada no capítulo 5. Definimos as folheações de Mathieu. Apresentamos os modelos bidimensionais associados às folheações de Mathieu bem como a relação entre eles. Definimos as funções de Mathieu. Encerramos o capítulo exibindo as integrais primeiras.

No capítulo 6 mostramos que existe uma 1-forma integrável para as EDOs lineares de segunda ordem, inclusive para o caso não-homogêneo. Observamos que essa 1-forma obtida determina uma folheação que admite uma integral primeira intrinsecamente associada às soluções da equação. Abordamos algumas equações clássicas apresentando os modelos integráveis associados a cada equação. Estudamos o comportamento da folheação obtida após uma mudança de coordenadas esféricas (caso real). Na penúltima seção observamos que os modelos bidimensionais utilizados na equação de Hill aparecem também para o caso mais geral da forma integrável associada às equações de segunda ordem. Concluimos o capítulo com uma classe de equações lineares homogêneas de ordem três que são integráveis.

A segunda parte deste trabalho se inicia no capítulo 7. Revisamos alguns fatos relevantes sobre séries de potências formais em uma variável e , em seguida, fazemos uma breve revisão da noção clássica de assintoticidade e algumas propriedades. Enunciamos o Teorema de Borel-Ritt.

Germes de difeomorfismos holomorfos fixando a origem aparecem naturalmente quando estudamos folheações holomorfas singulares, devido à noção de holonomia. No capítulo 8, exploramos tais germes na presença de expansão assintótica. Na primeira seção enunciamos resultados conhecidos e apresentamos a noção de setor invariante. Na segunda seção estudamos os casos hiperbólicos e elípticos em relação a setores invariantes. Na última seção estudamos um subgrupo do grupo de germes de difeomorfismos, chamado *grupo de Invariância*. Mostramos que este grupo é finito na presença de expansão assintótica.

No capítulo 9 fazemos uma breve revisão das noções de folheações holomorfas e, no capítulo 10, continuamos essa revisão com a noção de integrais primeiras e enunciando os clássicos teoremas de Mattei-Moussu.

O capítulo 11 contém o resultado principal deste trabalho: O Teorema I. Iniciamos apresentando a noção de integral primeira setorial moderada e alguns exemplos fundamentais. Na segunda seção apresentamos a *Correspondência de Dulac* ([18, 21, 70, 72]). Em seguida, provamos que essa correspondência nos permite transportar a integral primeira setorial moderada. A prova do Teorema I é apresentada na última seção.

No capítulo 12 iniciamos explorando um fenômeno que ocorre na presença da sela-nó. Mais precisamente, obtemos que as separatrizes fortes de uma sela-nó não admitem integral primeira setorial moderada, apesar de admitirem integral primeira setorial. Definimos separatriz não-fraca e demonstramos o Teorema J.

No capítulo 13 mostramos que considerando a existência de uma integral primeira setorial moderada em todas as separatrizes a hipótese de curva generalizada pode ser removida. Iniciamos o capítulo com uma seção dedicada ao Teorema do Índice de Camacho-Sad e concluimos o capítulo com a prova do Teorema K.

O capítulo 14 é dedicado a provar o Teorema L, conhecido por Teorema de Mattei-Moussu Formal, utilizando as técnicas de integral primeira setorial moderada.

Parte I

Integrabilidade das EDOs lineares de segunda ordem

Capítulo 2

A folheação de Hill e a forma Fundamental

Neste capítulo, será dado o primeiro passo na direção da integrabilidade da equação de Hill complexa. Provamos a existência de uma 1-forma holomorfa associada à equação de Hill, a qual determina uma folheação definida no espaço tridimensional complexo.

2.1 A equação de Hill complexa

Muitos dos trabalhos clássicos envolvendo a equação de Hill são baseados nas hipóteses reunidas a seguir:

Hipótese 1: $p(s)$ é uma função real integrável, periódica de período π .

O trabalho original de Hill e a clássica referência [48] de Magnus e Winkler consideram a Hipótese 1. Apesar dessas restrições, é permitido às soluções assumirem valores complexos.

Neste trabalho abordamos o estudo da *equação complexa de Hill*

$$u''(z) + p(z)u(z) = 0 \tag{2.1}$$

onde $p(z)$ é uma função holomorfa periódica. Em alguns momentos, iremos supor que $p(z)$ é definida em uma faixa $A \subseteq \mathbb{C}$, contendo o eixo real $\Im(z) = 0$. Deixaremos claro quando estivermos supondo tal hipótese.

Sob determinado ponto de vista, o caso complexo e o caso real podem ser bem distintos. Por exemplo, algumas funções periódicas em ambiente complexo podem não ser periódicas em ambiente real. Esse é o caso da função exponencial $p(z) = e^z, z \in \mathbb{C}$.

2.2 A folheação de Hill

Considere a situação mais geral de uma EDO complexa linear homogênea de segunda ordem, da forma

$$u''(z) + b(z)u(z) = 0, \quad (2.2)$$

onde b é uma função holomorfa definida em um aberto $U \subset \mathbb{C}$.

Através do clássico processo de *redução de ordem*, a equação (2.2) pode ser reescrita, através da "mudança de coordenadas" por: $x = u$, $y = u'$, $z = z$. Então $x' = u' = y$, $y' = u'' = -b(z)u = -b(z)x$, $z' = 1$. Portanto, um campo de vetores natural $X: \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}^3$ associado à equação (2.2) é dado por

$$X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - b(z)x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

No caso em que b for uma função periódica, esse campo de vetores será referido como o *Campo de Hill* associado à equação de Hill (2.2).

Um campo de vetores complexo X , definido em algum subconjunto aberto $W \subset \mathbb{C}^3$ é *integrável no sentido fraco*, ou simplesmente *w-integrável*, se é tangente a uma folheação holomorfa de codimensão um (possivelmente singular) \mathcal{F} de W . O campo de vetores é dito *integrável no sentido forte*, ou simplesmente *s-integrável* se é *w-integrável* e a folheação \mathcal{F} pode ser escolhida possuindo uma integral primeira. Por enquanto, não será especificado qual o tipo de integral primeira utilizado (polinomial, racional, meromorfa, Liouvilliana, formal...).

Teorema A. O campo de Hill é sempre *w-integrável*.

Para a prova do Teorema A precisamos do resultado técnico:

Lema 2.2.1. Seja $X: W \subseteq \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ um campo de vetores holomorfo dado por $X(x, y, z) = f_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + f_2(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + f_3(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$, onde $f_3 \neq 0$, e W é um aberto de \mathbb{C}^3 . Seja ainda ω uma 1-forma holomorfa dada em W por $\omega(x, y, z) = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$ e, satisfazendo $\omega(X) \equiv 0$. Então temos $\omega \wedge d\omega = 0$ sempre que

$$\begin{aligned} f_1 f_3 B \frac{\partial A}{\partial x} + f_2 f_3 B \frac{\partial A}{\partial y} + f_3^2 B \frac{\partial A}{\partial z} &= \left(f_3 \frac{\partial f_1}{\partial y} - f_1 \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) A^2 \\ + \left[f_1 f_3 \frac{\partial B}{\partial x} + f_2 f_3 \frac{\partial B}{\partial y} - f_3^2 \frac{\partial B}{\partial z} + B \left[f_1 \frac{\partial f_3}{\partial x} - f_2 \frac{\partial f_3}{\partial y} - f_3 \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial y} \right] \right] A \\ + B^2 \left[f_2 f_3 \frac{\partial f_3}{\partial x} - f_3 \frac{\partial f_2}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Demonstração. De $\omega(X) = 0$ temos $Af_1 + Bf_2 + Cf_3 = 0$. Portanto,

$$C = -\frac{(Af_1 + Bf_2)}{f_3}. \quad (2.3)$$

As derivadas parciais de C podem ser calculadas com auxílio de (2.3) resultando em

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{f_1}{f_3} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_1}{\partial x} A - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_2}{\partial x} B + \frac{f_1}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial x} A + \frac{f_2}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial x} B \quad (2.4)$$

e,

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{f_1}{f_3} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_1}{\partial y} A - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_2}{\partial y} B + \frac{f_1}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial y} A + \frac{f_2}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial y} B. \quad (2.5)$$

Por outro lado, da expressão de ω temos

$$\begin{aligned} d\omega &= dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} &\omega \wedge d\omega \\ &= A \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz + B \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) dy \wedge dx \wedge dz \\ &+ C \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dz \wedge dx \wedge dz \\ &= \left[A \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) - B \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} \right) + C \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] dx \wedge dz \wedge dz. \end{aligned}$$

Logo, $\omega \wedge d\omega = 0$ implica $A \frac{\partial C}{\partial y} - A \frac{\partial B}{\partial z} - B \frac{\partial C}{\partial x} + B \frac{\partial A}{\partial z} + C \frac{\partial B}{\partial x} - C \frac{\partial A}{\partial y} = 0$. Substituindo (2.4) e (2.5) na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} &- \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial A}{\partial y} A - \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_1}{\partial y} A^2 - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial B}{\partial y} A - \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_2}{\partial y} BA + \frac{f_1}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial y} A^2 + \frac{f_2}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial y} BA \\ &+ \frac{f_1}{f_3} B \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_1}{\partial x} BA + \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial B}{\partial x} B + \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_2}{\partial x} B^2 - \frac{f_1}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial x} BA - \frac{f_2}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial x} B^2 \\ &+ B \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial B}{\partial x} A - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial B}{\partial x} B + \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial A}{\partial y} A + \frac{f_2}{f_3} B \frac{\partial A}{\partial y} + A \frac{\partial B}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Simplificações dessa equação, então fornecem

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_1}{\partial y} A^2 - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial B}{\partial y} A - \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_2}{\partial y} BA + \frac{f_1}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial y} A^2 + \frac{f_2}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial y} BA \\ &+ \frac{f_1}{f_3} B \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_1}{\partial x} BA + \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_2}{\partial x} B^2 - \frac{f_1}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial x} BA - \frac{f_2}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial x} B^2 \\ &+ B \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial B}{\partial x} A + \frac{f_2}{f_3} B \frac{\partial A}{\partial y} + A \frac{\partial B}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos temos

$$\begin{aligned}
& \frac{f_1}{f_3} B \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{f_2}{f_3} B \frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial z} \\
&= \left(\frac{1}{f_3} \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{f_1}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) A^2 \\
&+ \left[\frac{f_1}{f_3} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} + B \left[\frac{f_1}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{f_2}{f_3^2} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_2}{\partial y} \right] \right] A \\
&+ B^2 \left[\frac{f_2}{f_3} \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{1}{f_3} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right].
\end{aligned}$$

Multiplicando por f_3^2 a prova é concluída. \square

Prova do Teorema A. Seja $X : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}^3$, o campo $X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - b(z)x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$, onde $b : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa definida em um aberto U de \mathbb{C} . Considere uma 1-forma ω em $\mathbb{C}^2 \times U$, holomorfa integrável tal que $\omega(X) = 0$. Escreveremos $\omega(x, y, z) = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$ onde os coeficientes A, B, C são funções holomorfas em $\mathbb{C}^2 \times U$. Sabemos do Lema 2.2.1 que $\omega = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$, satisfazendo $\omega(X) \equiv 0$ também satisfaz $\omega \wedge d\omega = 0$ sempre que

$$yB \frac{\partial A}{\partial x} - [b(z)x]B \frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial z} = A^2 + \left[y \frac{\partial B}{\partial x} - [b(z)x] \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right] A + b(z)B^2$$

e

$$C = -(yA - b(z)xB) = -yA + xb(z)B. \quad (2.6)$$

Tomando $B \equiv 1$ na última equação, obtemos

$$y \frac{\partial A}{\partial x} - [b(z)x] \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} = A^2 + b(z). \quad (2.7)$$

A equação (2.7) é uma EDP de primeira ordem semilinear, que pode ser resolvida no caso real pelo clássico *método das características*. Analisamos esse mesmo método em ambiente complexo. Para isso, estudamos o seguinte sistema:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -b(t)x, \quad \frac{dz}{dt} = 1, \quad \frac{d\phi}{dt} = A^2(x(t), y(t), \phi(t)) + b(t)$$

Afirmção 2.2.1. A equação (2.7) admite $A = \frac{-y}{x}$ como solução.

De fato, para $A = \frac{-y}{x}$ temos $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{1}{x}$ e $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$. Substituindo em (2.7) temos

$$y\frac{y}{x^2} - [b(z)x]\left(-\frac{1}{x}\right) + 0 = \frac{y^2}{x^2} + b(z).$$

Isso prova a Afirmação 2.2.1.

Portanto, substituindo os valores de A e B em (2.6), temos $C = \frac{y^2}{x} + b(z)x$. Então a 1-forma meromorfa $\mu := -\frac{y}{x}dx + dy + \left[\frac{y^2}{x} + b(z)x\right]dz$ satisfaz $\mu(X) = 0$. Multiplicando μ por seus polos obtemos $\omega = x\mu = -ydx + xdy + [y^2 + b(z)x^2]dz$, que é uma solução holomorfa do problema de integrabilidade, provando o teorema. \square

De agora em diante consideraremos o caso em que a função b é uma função periódica inteira $b = p(z)$ i.e, existe número complexo $T \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $p(z + T) = p(z)$. Portanto, de acordo com o Teorema A podemos definir uma folheação holomorfa \mathcal{H} associada à equação de Hill (2.1).

Definição 2.2.1. Seja $p : U \rightarrow \mathbb{C}$, uma função holomorfa, periódica, de período T (real ou complexo), definida em um aberto U de \mathbb{C} . Chamamos a folheação \mathcal{H} determinada pela 1-forma holomorfa

$$\omega_{\mathcal{H}} = -ydx + xdy + [y^2 + p(z)x^2]dz = 0,$$

de folheação de Hill de parâmetro p .

Conclusão: *Em resposta à Questão 1.0.1, existe uma estrutura integrável associada à equação de Hill: a folheação de Hill.*

Logo, surge naturalmente uma segunda questão.

Questão 2.2.1. Existe algum tipo de integral primeira para a folheação de Hill? Ou seja, o campo de Hill é s -integrável?

A abordagem é iniciada com casos muito básicos.

Caso $p(z) = 0$. Neste caso temos a correspondente folheação de Hill $-ydx + xdy + y^2dz = 0$. Essa folheação exibe uma integral primeira racional dada por $x/y - z$.

Caso $p(z) = 1$. Segue que $\omega = -ydx + xdy + (y^2 + x^2)dz = x^2[d(y/x) + ((y/x)^2 + 1)dz]$. Essa forma admite uma integral primeira Liouvillianiana. De fato, $\omega/[x^2(1 + (y/x)^2)]$ é fechada e racional e pode ser integrada pelo logaritmo.

Os casos interessantes surgem quando $p(z)$ é uma função periódica não-constante.

2.3 A forma fundamental de Hill

Nesta seção estudamos o caso da folheação de Hill cujo parâmetro é a função exponencial, $p(z) = e^z$. Então considere a 1-forma diferencial associada:

$$\omega = -ydx + xdy + [y^2 + e^z x^2]dz.$$

Note que

$$\frac{1}{x^2}\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2} + \left[\frac{y^2}{x^2} + e^z \right] dz = d\left(\frac{y}{x}\right) + \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + e^z \right] dz.$$

Considere a mudança de coordenadas $\phi = -y/x, \psi = e^z$. Então $dz = d\psi/\psi$ e reescrevemos

$$\frac{1}{x^2}\omega = d\left(\frac{y}{x}\right) + \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + e^z \right] dz = -d\phi + [\phi^2 + \psi] \frac{d\psi}{\psi} = \frac{1}{\psi} [-\psi d\phi + [\phi^2 + \psi] d\psi].$$

Seja \mathbb{P}^n o espaço projetivo complexo n -dimensional. Ou seja, o espaço de retas complexas passando pela origem do espaço vetorial $(n+1)$ -dimensional complexo. Em linguagem moderna, se definimos a aplicação $\Pi: \mathbb{C}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ por $\Pi(x, y, z) = (\phi, \psi) = (-\frac{y}{x}, e^z)$, teremos:

Lema 2.3.1. A folheação de Hill \mathcal{H} em \mathbb{C}^3 dada por

$$-ydx + xdy + [y^2 + e^z x^2]dz = 0$$

é o pull-back pela aplicação Π acima, da folheação bidimensional \mathcal{H}_2 em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, dada pelas coordenadas afins por

$$-ydx + (x^2 + y)dy = 0.$$

Definição 2.3.1. A 1-forma

$$\Omega = -ydx + (x^2 + y)dy \tag{2.8}$$

será chamada de *forma fundamental de Hill* ou simplesmente *forma de Hill* em \mathbb{C}^2 .

Capítulo 3

Integrabilidade para a forma de Hill

Neste capítulo discutimos a existência de integral primeira para a forma fundamental de Hill. Dois conceitos são necessários para a completude da exposição pretendida: *Funções de Bessel* e *Funções Liouvillianas*. Por isso, apresentamos duas seções preliminares com uma breve discussão sobre cada um desses conceitos.

3.1 Preliminares sobre funções de Bessel

A equação

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - k^2)u(z) = 0, \quad (3.1)$$

onde k é uma constante (podendo ser real ou complexa) é conhecida por *equação de Bessel*. Essa equação foi introduzida por Friedrich Wilhelm Bessel em 1824, enquanto fazia sua pesquisa em astronomia. A equação de Bessel está associada a vários fenômenos físicos, por exemplo: ondas eletromagnéticas, análise de sinais modulados em frequência, condução de calor, vibração, difusão, processamento de sinais (filtro Bessel), equação de Schrödinger radial (em coordenadas esféricas e cilíndricas) de uma partícula livre, padrões de radiação acústica, atrito em função da frequência em condutores circulares, a dinâmica de corpos flutuantes, etc. Existe vasta literatura sobre os assuntos acima, envolvendo a equação (3.1). Em [65] o leitor pode conferir algumas dessas aplicações.

A seguir, é feita uma breve discussão a respeito das soluções da equação (3.1). Essas soluções, são funções especiais, conhecidas por *funções de Bessel* e obtidas através do clássico Método de Frobenius de soluções em séries.

Definição 3.1.1. Considere a EDO linear homogênea de segunda ordem

$$u''(z) + p(z)u'(z) + q(z)u(z) = 0.$$

Se $p(z)$ e $q(z)$ são holomorfas em um ponto z_0 , então z_0 é chamado um *ponto ordinário*. Se z_0 não é ordinário então z_0 é dito um *ponto singular*. Se z_0 é um ponto singular e $(z - z_0)p(z)$ e $(z - z_0)^2q(z)$ são holomorfas em z_0 , então z_0 é chamado de *ponto singular regular*.

Se z_0 é um ponto ordinário sempre existem duas soluções linearmente independentes, holomorfas em z_0 (veja [25], Teorema 4, pág. 106).

Teorema 3.1.1. ([25], Teorema 3, pág.158) Considere a equação de segunda ordem homogênea

$$(z - z_0)^2 u''(z) + (z - z_0)p(z)u'(z) + q(z)u(z) = 0. \quad (3.2)$$

Suponha que z_0 seja ponto singular regular da equação com $p(z)$ e $q(z)$ funções holomorfas em z_0 , com raios de convergência R_1, R_2 respectivamente. Sejam r_1, r_2 raízes do polinômio indicial $r(r-1) + rp(z_0) + q(z_0) = 0$, com $Re(r_1) \geq Re(r_2)$ e $R = \min\{R_1, R_2\}$. Então existe uma solução da forma

$$u_1(z) = (z - z_0)^{r_1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \quad (3.3)$$

onde a série converge em $\|z - z_0\| < R$, $a_0 = 1$ e os demais coeficientes são obtidos substituindo u_1 na equação (3.2). Uma segunda solução u_2 , linearmente independente de u_1 , é obtida dependendo de r_1, r_2 , da seguinte maneira:

(i) Se $r_1 - r_2$ é não inteiro, então $u_2(z) = (z - z_0)^{r_2} \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z - z_0)^j$, onde a série converge em $\|z - z_0\| < R$.

(ii) Se $r_1 = r_2$, então $u_2(z) = (z - z_0)^{r_2+1} \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z - z_0)^j + \ln(z - z_0)u_1(z)$, onde a série converge em $\|z - z_0\| < R$.

(iii) Se $r_1 - r_2$ é inteiro não nulo, então $u_2(z) = (c \ln(z - z_0))u_1(z) + z^{r_2} \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$, onde c é uma constante e a série converge em $\|z - z_0\| < R$.

O objetivo é compreender a estrutura das soluções da equação (3.1). Os coeficientes da equação (3.1) são $p(z) = 1$ e $q(z) = (z^2 - k^2)$. Portanto, o ponto $0 \in \mathbb{C}$ é um ponto singular regular. Além disso, $p(0) = 1$ e $q(0) = -k^2$. O polinômio indicial neste caso é dado por $\alpha^2 - k^2 = 0$. Logo, as raízes do polinômio indicial são dados por $\alpha_1 = k$ e $\alpha_2 = -k$. Então do Teorema 3.1.1, a equação de Bessel de ordem k , admite uma solução

da forma $u_1(z) = z^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, onde $a_0 = 1$. Substituindo u_1 na equação (3.1) obtemos que u_1 é dada por

$$u_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{4^j j! (k+1)(k+2)(k+3) \dots (k+j)} z^{2j+k} \quad (3.4)$$

Existe uma notação universal para expressar as funções de Bessel, envolvendo uma função especial conhecida por *função Gama*. Essa função foi desenvolvida em conexão com o problema de generalizar a função fatorial. Ou seja, o problema de encontrar uma função que assume $n!$, no caso em que $n \in \mathbb{N}$, e pode ser estendida para outros domínios (real, complexo).

Definição 3.1.2 (Função Gama). Dado $\|z\| < \infty$, $z \in \mathbb{C}$, a função

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

é chamada de *função Gama*.

Para mais detalhes sobre a função Gama o leitor pode consultar [2], pág. 255. A propriedade particular da função Gama relacionada com as funções de Bessel é a seguinte.

Proposição 3.1.1 (*Equação funcional*, [25] pág. 173). Para todo $z \in \mathbb{C}$, a função Gama satisfaz a relação

$$\frac{\Gamma(z+j)}{\Gamma(z)} = z(z+1)(z+2)(z+3) \dots (z+j-1). \quad (3.5)$$

Utilizando (3.5) na equação (3.4) obtemos

$$u_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(k+1)}{4^j j! \Gamma(k+j+1)} z^{2j+k}.$$

Portanto, seguindo a convenção universal,

$$\begin{aligned} J_k(z) &= \frac{u_1(z)}{2^k \Gamma(k+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(k+j+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+k}. \end{aligned}$$

Definição 3.1.3. A função $J_k(z)$ é denominada *função de Bessel de primeiro tipo*, e ordem k , onde k pode ser real ou complexo.

Proposição 3.1.2. ([81], pág. 45, Seção 3.2) As funções de Bessel de primeiro tipo satisfazem as seguintes propriedades para todo $k \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} 2J'_k(z) &= J_{k-1}(z) - J_{k+1}(z); \\ J_{k+1}(z) &= \frac{2k}{z}J_k(z) - J_{k-1}(z); \end{aligned}$$

onde J' denota a derivada usual com respeito a z . No caso em que $k \notin \mathbb{Z}$, J_{-k} , J_k são linearmente independentes. Além disso, para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos: $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$. Em particular, $J'_0(z) = -J_1(z)$.

Proposição 3.1.3. As funções de Bessel J_0 e J_1 de primeiro tipo e ordens 0 e 1, respectivamente são funções inteiras na variável complexa z .

Demonstração. Desde que $J_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{2^{(2j)}(j!)^2}$, então

$$\left\| \frac{\frac{(-1)^{j+1} z^{2j+2}}{2^{(2j+2)}((j+1)!)^2}}{\frac{(-1)^j z^{2j}}{2^{(2j)}(j!)^2}} \right\| = \frac{\|z\|^2}{4(j+1)^2}.$$

Note que a expressão acima tende a zero sempre que j tende a infinito, independente de $\|z\|$. Segue do teste da razão que J_0 é uma função inteira.

Por sua vez, considere $J_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{2^{(2j+1)}(j+1)(j!)^2}$. Logo,

$$\left\| \frac{\frac{(-1)^{j+1} z^{(2j+2)}}{2^{(2j+3)}(j+2)(j+1)!^2}}{\frac{(-1)^j z^{(2j+1)}}{2^{(2j+1)}(j+1)[(j)!]^2}} \right\| = \frac{\|z\|^2}{4(j+2)(j+1)}.$$

Analogamente ao caso anterior, podemos concluir que $J_1(z)$ é uma função inteira. \square

Do Método de Frobenius (Teorema 3.1.1), uma segunda solução linearmente independente para a equação de Bessel, é dada por

$$u_2(z) = z^{-k} h_2(z) + c \ln(z) u_1(z),$$

onde $h_2(z)$ é holomorfa em $z = 0$ e $u_1(z)$ é a primeira solução encontrada. Logo, substituindo essa expressão na equação de Bessel, e analisando os coeficientes, podemos obter uma fórmula explícita para as funções de Bessel de segundo tipo. Por exemplo, para ordem zero, temos

$$Y_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2j}(j!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j} \right] z^{2j} + (\ln z) J_0(z), \quad (3.6)$$

onde J_0 é a função de Bessel de primeiro tipo de ordem zero.

Proposição 3.1.4. ([81], pág. 66, seção 3.56) As funções de Bessel de segundo tipo satisfazem as seguintes propriedades para cada $k \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} 2Y'_k(z) &= Y_{k-1}(z) - Y_{k+1}(z); \\ Y_{k+1}(z) &= \frac{2k}{z}Y_k(z) - Y_{k-1}(z); \end{aligned}$$

onde Y' denota a derivada usual com respeito a z . No caso em que $k \notin \mathbb{Z}$, Y_{-k}, Y_k são linearmente independentes. Além disso, para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos: $Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$. Em particular, $Y'_0(z) = -Y_1(z)$.

A partir da expressão (3.6), e das Proposições 3.1.2 e 3.1.4, podemos obter a expressão de Y_1 . De fato,

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= -Y'_0(z) \\ &= -\frac{d}{dz} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2j}(j!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j} \right] z^{2j} + (\ln z)J_0(z) \right] \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j(-1)^{j+1}}{2^{2j}(j!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j} \right] z^{2j-1} - \frac{1}{z}J_0(z) \\ &\quad - \ln(z)J_1(z). \end{aligned}$$

3.2 Preliminares sobre funções Liouvillianas

O conteúdo desta seção é baseado em [71]. Para compreender com precisão o conceito de funções Liouvillianas são necessários alguns rudimentos de Álgebra diferencial.

Seja \mathcal{R} um anel comutativo com a unidade. Uma *derivação em \mathcal{R}* , é uma aplicação $\delta : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ satisfazendo

(i) $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$,

(ii) $\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a)$,

para quaisquer $a, b \in \mathcal{R}$. Um *corpo diferencial* é um par (k, Δ) onde k é um corpo e $\Delta = \{\delta_i\}_{i \in I}$ é um conjunto de derivações em k . Um corpo diferencial é *comutativo* se $\delta_i \circ \delta_j = \delta_j \circ \delta_i$, para todo $i, j \in I$. Um elemento $c \in k$ é uma constante do corpo diferencial (k, δ) se $\delta_i(c) = 0$ para todo $i \in I$. O conjunto de todas as constantes $c \in (k, \delta)$ formam um subcorpo de k .

Sejam $(k, \delta), (k', \delta')$ dois corpos diferenciais. Uma aplicação $h : (k, \delta) \rightarrow (k', \delta')$ é uma *aplicação diferencial* se existe uma aplicação $\tau : \Delta \rightarrow \Delta'$ tal que $h \circ \delta = \tau(\delta) \circ h$, para todo $\delta \in \Delta$.

Exemplo 3.2.1. (Adjunção de uma variável) Seja $\delta : k \rightarrow k$ uma derivação em k e seja t um elemento transcendente em k . Então, δ se estende a uma derivação $\tilde{\delta} : k(t) \rightarrow k(t)$. De fato, dado qualquer $p(t) \in k[t]$, digamos, $p(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j$ defina

$$\tilde{\delta}(p(t)) = \sum_{j=0}^n \delta(a_j) t^j + \sum_{j=0}^n j t^{j-1} a_j.$$

Então, podemos estender $\tilde{\delta}$ para um corpo $k(t)$ (note que desde que t não é algébrico em k temos $\tilde{\delta}(p(t)) \neq 0, \forall p(t) \in k[t]$). Agora, seja (k, Δ) um corpo diferencial e seja t qualquer variável sobre k . O processo acima fornece uma extensão diferencial $(\tilde{k}, \tilde{\Delta}), \tilde{\Delta} = \{\tilde{\delta}, \delta \in \Delta\}$, de (k, Δ) .

Uma *extensão diferencial* de (k, Δ) é um corpo diferencial $(\tilde{k}, \tilde{\Delta})$ onde \tilde{k} é uma extensão de k se cada derivação $\tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$ induz por restrição um elemento $\delta \in \Delta$ e reciprocamente cada elemento $\delta \in \Delta$ se estende a um elemento $\tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$.

Seja (k, Δ) um corpo diferencial. Uma extensão diferencial $(k(t), \tilde{\Delta})$ de (k, Δ) é do tipo:

- (i) *adjunção de uma integral* se $\tilde{\delta}t \in k, \forall \tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$;
- (ii) *adjunção da exponencial de uma integral* se $\frac{\tilde{\delta}t}{t} \in k, \forall \tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$.

Uma *extensão Liouvilliana* de (k, Δ) é uma extensão diferencial $(K, \tilde{\Delta})$ de (k, Δ) para a qual existe uma torre de extensões diferenciais:

$$k = k_0 \subset k_1 \subset \dots \subset k_m = K$$

tal que $k_{i+1}/k_i = k_i(t_i)/k_i$ é ou uma extensão algébrica ou é do tipo adjunção de uma integral ou adjunção da exponencial de uma integral.

Definição 3.2.1. (Função Liouvilliana sobre Espaços Projetivos) Uma *função Liouvilliana* no espaço projetivo complexo \mathbb{P}^n é um elemento f de uma extensão Liouvilliana $(K, \hat{\Delta})$ do corpo diferencial $(\mu_n, \{\frac{\partial}{\partial y_j}, j = 1, \dots, n\})$ onde $\mu_n = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ é o corpo de funções racionais $\frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)}$, $P, Q \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ nas variáveis x_1, \dots, x_n e $\frac{\partial}{\partial y_j} : \mu_n \rightarrow \mu_n$ são as derivadas parciais usuais, $j = 1, \dots, n$.

A noção de função Liouvilliana sobre Espaços Projetivos pode ser também definida para funções em \mathbb{C}^n ou sobre subconjuntos abertos conexos de \mathbb{C}^n trocando o corpo de base das funções racionais pelo corpo das funções meromorfas.

Definição 3.2.2. Considere uma 1-forma em \mathbb{C}^2 dada por $\omega = P(x, y)dy - Q(x, y)dx$. Dizemos que ω admite um *fator integrante* se existe uma função holomorfa R não constante tal que $\frac{1}{R}\omega$ é uma 1-forma fechada.

Temos o seguinte resultado devido a M. Singer:

Teorema 3.2.1 ([77], Teorema 1). Uma equação diferencial polinomial em duas variáveis $Pdy - Qdx = 0$ com coeficientes complexos admite uma integral primeira Liouvilliana se e somente se a 1-forma $\omega = Pdy - Qdx$ admite um fator integrante da forma $R = \exp \int Udx + Vdy$ onde U, V são funções racionais satisfazendo $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$.

Se, na afirmação acima, colocamos $\omega = Pdy - Qdx$ e $\eta = Udx + Vdy$ então o resultado de Singer nos diz o seguinte : *a existência de uma integral primeira Liouvilliana para ω corresponde a existência de uma 1-forma racional fechada η que satisfaz $d\omega = \eta \wedge \omega$. Neste caso, a integral primeira é da forma $F = \int \alpha$ onde $\alpha = \Omega / \exp \int \eta$.*

3.3 Integral primeira tipo-Bessel para a forma fundamental

A partir das considerações preliminares realizadas nas seções anteriores, estamos em condições de provar o seguinte teorema.

Teorema B. A forma de Hill

$$\Omega = -ydx + (x^2 + y)dy$$

admite uma integral primeira F da forma

$$F(x, y) = \frac{2xY_0(2\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y})}{xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})}$$

onde J_0, J_1 são as funções de Bessel de primeiro tipo e Y_0, Y_1 são as funções de Bessel de segundo tipo. A função F é uma função holomorfa bem definida em um subconjunto aberto da forma $(x, y) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus L)$ onde L é um segmento de reta fechado começando na origem de \mathbb{C} .

Demonstração. Inicialmente escrevemos $\Omega = 0$ como $ydx = (x^2 + y)dy$ e portanto, como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2 + y}. \quad (3.7)$$

Essa EDO é similar a algum dos modelos tratados em [63] pág 375, Seção 13.2.3. De fato, a mudança de coordenadas $y = e^t$ nos fornece o modelo

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{x^2 + y}{y} \frac{dy}{dt} = \frac{x^2 + e^t}{e^t} e^t = x^2 + e^t.$$

Por sua vez a EDO $x' = x^2 + e^t$ pode ser resolvida por métodos similares àqueles tratados em [63], (veja Seção 13.2.2.5 da referência), e nos fornece o seguinte:

Afirmção 3.3.1. As soluções de (3.7) são dadas por $F(x, y) = c \in \mathbb{C}$ onde

$$F(x, y) = \frac{2xY_0(2\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y})}{xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})}$$

Demonstração. Iremos primeiramente calcular as derivadas parciais de F . A primeira é obtida por uma computação padrão

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \\ &= \frac{2Y_0(2\sqrt{y})(xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})) - J_0(2\sqrt{y})(2xY_0(2\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y}))}{(xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y}))^2} \\ &= \frac{2\sqrt{y}(J_0(2\sqrt{y})Y_1(2\sqrt{y}) - J_1(2\sqrt{y})Y_0(2\sqrt{y}))}{(xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y}))^2}. \end{aligned}$$

A derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$:

Neste caso usamos as propriedades das funções de Bessel mencionadas acima. Analisemos cada termo da derivação. Da Proposição 3.1.2 temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}[2xJ_0(2\sqrt{y})] &= \frac{x}{\sqrt{y}}[J_{-1}(2\sqrt{y}) - J_1(2\sqrt{y})] \\ &= \frac{x}{\sqrt{y}}[-J_1(2\sqrt{y}) - J_1(2\sqrt{y})] \\ &= -2\frac{x}{\sqrt{y}}J_1(2\sqrt{y}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}[2\sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})] &= \frac{1}{\sqrt{y}}J_1(2\sqrt{y}) + \sqrt{y}\frac{\partial[2J_1(2\sqrt{y})]}{\partial y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{y}}J_1(2\sqrt{y}) + \sqrt{y}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}[J_0(2\sqrt{y}) - J_2(2\sqrt{y})]\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{y}}J_1(2\sqrt{y}) + J_0(2\sqrt{y}) - \left[\frac{1}{\sqrt{y}}J_1(2\sqrt{y}) - J_0(2\sqrt{y})\right] \\
&= 2J_0(2\sqrt{y}).
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\frac{\partial}{\partial y}[2xY_0(2\sqrt{y})] = -2\frac{x}{\sqrt{y}}Y_1(2\sqrt{y}), \quad \frac{\partial}{\partial y}[2\sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y})] = 2Y_0(2\sqrt{y}).$$

Consequentemente

$$\frac{\partial}{\partial y}(xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})) = -\frac{x}{\sqrt{y}}J_1(2\sqrt{y}) - J_0(2\sqrt{y})$$

e,

$$\frac{\partial}{\partial y}(xY_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y})) = -\frac{x}{\sqrt{y}}Y_1(2\sqrt{y}) - Y_0(2\sqrt{y}).$$

No que segue escreveremos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2xY_0(2\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y})}{xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})} \right] \\
&= \frac{N}{(xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y}))^2}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
N &= [-2Y_0(2\sqrt{y}) - 2\frac{x}{\sqrt{y}}Y_1(2\sqrt{y})][xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})] \\
&\quad - [-J_0(2\sqrt{y}) - \frac{x}{\sqrt{y}}J_1(2\sqrt{y})][2xY_0(2\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y})] \\
&= -2xY_0(2\sqrt{y})J_0(2\sqrt{y}) + 2\sqrt{y}Y_0(2\sqrt{y})J_1(2\sqrt{y}) - 2\frac{x^2}{\sqrt{y}}Y_1(2\sqrt{y})J_0(2\sqrt{y}) \\
&\quad + 2xY_1(2\sqrt{y})J_1(2\sqrt{y}) + 2xJ_0(2\sqrt{y})Y_0(2\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}J_0(2\sqrt{y})Y_1(2\sqrt{y}) \\
&\quad + 2\frac{x^2}{\sqrt{y}}J_1(2\sqrt{y})Y_0(2\sqrt{y}) - 2xJ_1(2\sqrt{y})Y_1(2\sqrt{y}) \\
&= 2 \left[\sqrt{y} + \frac{x^2}{\sqrt{y}} \right] [J_1(2\sqrt{y})Y_0(2\sqrt{y}) - Y_1(2\sqrt{y})J_0(2\sqrt{y})]
\end{aligned}$$

A derivada exterior dF é então dada por

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \\ &= \left[\frac{2\sqrt{y} (J_0(2\sqrt{y})Y_1(2\sqrt{y}) - J_1(2\sqrt{y})Y_0(2\sqrt{y}))}{(xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y}))^2} \right] dx \\ &\quad + \left[\frac{N}{(xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y}))^2} \right] dy. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Omega \wedge dF &= [-ydx + (x^2 + y)dy] \wedge \left[\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \right] \\ &= -y \frac{\partial F}{\partial y} dx \wedge dy + (x^2 + y) \frac{\partial F}{\partial x} dy \wedge dx \\ &= \left[-y \frac{\partial F}{\partial y} - (x^2 + y) \frac{\partial F}{\partial x} \right] dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} (x^2 + y) \frac{\partial F}{\partial x} &= (x^2 + y) \frac{2\sqrt{y} (J_0(2\sqrt{y})Y_1(2\sqrt{y}) - J_1(2\sqrt{y})Y_0(2\sqrt{y}))}{(xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y}))^2} \\ &= -2\sqrt{y}(x^2 + y) \frac{(J_1(2\sqrt{y})Y_0(2\sqrt{y}) - J_0(2\sqrt{y})Y_1(2\sqrt{y}))}{(xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y}))^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y \left[\sqrt{y} + \frac{x^2}{\sqrt{y}} \right] [J_1(2\sqrt{y})Y_0(2\sqrt{y}) - Y_1(2\sqrt{y})J_0(2\sqrt{y})] \\ &= 2\sqrt{y}(x^2 + y) \frac{(J_1(2\sqrt{y})Y_0(2\sqrt{y}) - J_0(2\sqrt{y})Y_1(2\sqrt{y}))}{(xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y}))^2}. \end{aligned}$$

Então concluímos que

$$\begin{aligned} \Omega \wedge dF &= \left[-y \frac{\partial F}{\partial y} - (x^2 + y) \frac{\partial F}{\partial x} \right] dx \wedge dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

A afirmação está provada. □

Isso conclui a prova do teorema. \square

O seguinte corolário é uma consequência imediata do Teorema B

Corolário 3.3.1. A equação de Hill $u''(z) + e^z u(z) = 0$ é s -integrável. De fato, a folheação de Hill $\mathcal{H} : \omega = -ydx + xdy + [y^2 + e^z x^2]dz = 0$ admite a integral primeira

$$H(x, y, z) = \frac{2yY_0(2\sqrt{e^z}) - 2x\sqrt{e^z}Y_1(2\sqrt{e^z})}{yJ_0(2\sqrt{e^z}) - x\sqrt{e^z}J_1(2\sqrt{e^z})}. \quad (3.8)$$

Demonstração. Desde que a folheação de Hill \mathcal{H} em \mathbb{C}^3 é obtida como um pull-back da folheação $\Omega = 0$, pela aplicação $\Pi(x, y, z) = (\frac{y}{x}, e^z)$. Essa última admite a integral primeira

$$F(x, y) = \frac{2xY_0(2\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y})}{xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})}.$$

Portanto uma integral primeira $H = \Pi^* F$ para \mathcal{H} que é da forma

$$\begin{aligned} H(x, y, z) = \Pi^* F(x, y) &= F\left(\frac{y}{x}, e^z\right) = \frac{2\frac{y}{x}Y_0(2\sqrt{e^z}) - 2e^{\frac{z}{2}}Y_1(2\sqrt{e^z})}{\frac{y}{x}J_0(2\sqrt{e^z}) - e^{\frac{z}{2}}J_1(2\sqrt{e^z})} \\ &= \frac{2yY_0(2\sqrt{e^z}) - 2x\sqrt{e^z}Y_1(2\sqrt{e^z})}{yJ_0(2\sqrt{e^z}) - xe^{\frac{z}{2}}J_1(2\sqrt{e^z})}. \end{aligned}$$

\square

3.4 Não existência de integral primeira Liouvilliana

Até o momento, temos o seguinte: Começando com a equação de Hill $u''(z) + e^z u(z) = 0$ em \mathbb{C}^2 podemos considerar o campo de vetores $X(x, y, z) = y\frac{\partial}{\partial x} - e^z x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ em \mathbb{C}^3 que corresponde à redução de ordem da equação de Hill. Para o campo de vetores X associamos a 1-forma $\omega = -ydx + xdy + [y^2 + e^z x^2]dz$ em \mathbb{C}^3 mostrando a integrabilidade forte (s -integrável) da equação de Hill $u''(z) + e^z u(z) = 0$. De fato, a folheação determinada pela 1-forma $\frac{1}{x^2}\omega$ acima pode ser vista como um pull-back da forma de Hill $\Omega = -ydx + (x^2 + y)dy$ pela aplicação $\Pi = (-y/x, e^z)$. Por sua vez a forma Ω admite uma integral primeira da forma $F = \frac{2xY_0(2\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y})}{xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})}$ dada pelas funções de Bessel de primeiro e segundo tipo.

O objetivo agora é verificar se a forma de Hill Ω admite alguma integral primeira Liouvilliana.

Lema 3.4.1. A única curva algébrica invariante para a forma de Hill Ω em $\mathbb{C}P^2$ são a reta no infinito e a reta $\{y = 0\}$.

Demonstração. As retas ($y = 0$) e a linha no infinito são invariantes, por computação direta. Provaremos que não existem outras curvas algébricas invariantes afins. Para isso, observamos que as folhas de Ω são transversas aos cilindros horizontais tridimensionais $C_r : |y| = r, x \in \mathbb{C}, r > 0$. Podemos portanto, investigar a existência de órbitas periódicas do fluxo \mathcal{L}_r induzido por Ω sobre C_r . Neste momento, se faz necessário um resultado de H. Zoladeck (que melhorou antigos resultados de outros autores):

Proposição 3.4.1 ([84] Proposição 4 págs. 166-167). Para o sistema $dz/dt = z^2 + re^{it}$ existe uma sequência de números complexos $r_j \rightarrow \infty$ tal que para qualquer $r \neq r_j$ essa equação admite exatamente uma solução periódica (de período 2π) e, para $r = r_j$, a equação não possui nenhuma solução periódica limitada.

A conclusão desejada é então basicamente uma consequência da proposição acima. De fato, é suficiente considerar a EDO real, bidimensional obtida da equação original $-ydx + (x^2 + y)dy = 0$, fazendo $y = re^{it}$ que leva à EDO complexa, $x' = i(x^2 + re^{it})$ correspondendo à restrição para C_r . \square

Teorema C. A forma de Hill

$$\Omega = -ydx + [x^2 + y]dy$$

não admite integral primeira do tipo Liouvillianamente globalmente definida em $\mathbb{C}P^2$.

Demonstração. Escreva $\omega = P(x, y)dy - Q(x, y)dx$ e $\eta = A(x, y)dx + B(x, y)dy$. Segue do Teorema 3.2.1 que a existência de uma integral primeira Liouvillianamente para ω corresponde a existência de uma 1-forma racional fechada η que satisfaz $d\omega = \eta \wedge \omega$. Neste caso, a integral primeira é da forma $F = \int \alpha$ onde $\alpha = \Omega / \exp \int \eta$. Usando agora que os pólos afins de uma 1-forma η como acima devem ser curvas algébricas invariantes para $\omega = Pdy - Qdx$, é suficiente provar que não existe 1-forma racional fechada η satisfazendo

$$d\Omega = \eta \wedge \Omega. \tag{3.9}$$

Uma vez que $\eta = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, então

$$d\Omega = -dy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = (1 + 2x)dx \wedge dy$$

e,

$$\eta \wedge \Omega = [Adx + Bdy] \wedge [-ydx + [x^2 + y]dy] = [[x^2 + y]A + yB]dx \wedge dy.$$

Portanto, de (3.9) temos

$$(1 + 2x) = (x^2 + y)A + yB. \quad (3.10)$$

Pelo Lema 3.4.1, os pólos afins de η estão contidos na linha $\{y = 0\}$. Desde que η é fechado, pelo Lema de Integração [24] podemos escrever

$$\eta = \lambda \frac{dy}{y} + d\left(\frac{Q}{y^n}\right),$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ e algum polinômio irreduzível $Q(x, y)$ de grau $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda \frac{dy}{y} + d\left(\frac{Q}{y^n}\right) \\ &= \lambda \frac{dy}{y} + \frac{1}{y^n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) + Q \left(-\frac{n}{y^{n+1}} \right) dy \\ &= \frac{1}{y^n} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \left(\frac{\lambda}{y} + \frac{1}{y^n} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{nQ}{y^{n+1}} \right) dy. \end{aligned}$$

Segue de (3.10) que

$$1 + 2x = \frac{x^2 + y}{y^n} \frac{\partial Q}{\partial x} + \lambda + y \left(\frac{1}{y^n} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{nQ}{y^{n+1}} \right).$$

Então $\lambda = 1$. Escrevendo $Q(x, y) = \sum_{i=0}^n p_i(y)x^i$ tomamos

$$2x = \frac{x^2 + y}{y^n} \sum_{i \geq 1} i p_i(y) x^{i-1} + \frac{1}{y^{n-1}} \sum_{i \geq 0} p'_i(y) x^i - \frac{n}{y^n} \sum_{i \geq 0} p_i(y) x^i. \quad (3.11)$$

Caso $n = 0$: A equação (3.11) é reescrita como $x^2 p_1(y) + y p_1(y) + y p'_0(y) = 2x$. Analisando os coeficientes de x^2 temos $p_1 \equiv 0$. Então a equação (3.11) pode ser escrita como $y p'_0(y) = 2x$. Portanto, este caso não pode ocorrer.

Caso $n = 1$: A equação (3.11) é reescrita como $\frac{p_1(y)}{y} x^2 + p_1(y) + 2 \frac{p_2(y)}{y} x^3 + 2 p_2(y) x + p'_0(y) + p'_1(y) x = 2x$. Analisando os coeficientes de x^2 e x^3 concluímos que $p_1, p_2 \equiv 0$. Isso implica $p'_0(y) = 2x$. Novamente, esse caso não pode ocorrer.

Caso $n = 2$: A equação (3.11) é dada por $\frac{x^2+y}{y^2}[p_1(y)+2xp_2(y)+3x^2p_3(y)] + \frac{1}{y}[p'_0(y) + xp'_1(y) + x^2p'_2(y)] - \frac{2}{y^2}[p_0(y) + xp_1(y) + x^2p_2(y)] = 2x$. Analisando cada potência de x obtemos

$$\begin{aligned} x^0 &: \frac{y}{y^2}p_1(y) + \frac{1}{y}p'_0(y) - \frac{2}{y^2}p_0(y) = 0 \\ x &: \frac{2y}{y^2}p_2(y) + \frac{1}{y}p'_1(y) - \frac{2}{y^2}p_1(y) = 2 \\ x^2 &: \frac{1}{y^2}p_1(y) + \frac{3y}{y^2}p_3(y) + \frac{1}{y}p'_2(y) - \frac{2}{y^2}p_2(y) = 0 \\ x^3 &: \frac{2}{y^2}p_2(y) = 0 \\ x^4 &: \frac{3}{y^2}p_3(y) = 0. \end{aligned}$$

As equações acima implicam $p_1, p_2, p_3 \equiv 0$. Então obtemos $\frac{1}{y}p'_0(y) - \frac{2}{y^2}p_0(y) = 2x$. Portanto, esse caso também não ocorre. A seguir faremos mais um caso para ajudar na compreensão do caso geral.

Caso $n = 3$: A equação (3.11) é dada por $\frac{x^2+y}{y^3}[p_1(y)+2xp_2(y)+3x^2p_3(y)+4x^3p_4] + \frac{1}{y^2}[p'_0(y) + xp'_1(y) + x^2p'_2(y) + x^3p'_3(y)] - \frac{2}{y^3}[p_0(y) + xp_1(y) + x^2p_2(y) + x^3p_3(y)] = 2x$. Analisando cada potência de x obtemos

$$\begin{aligned} x^0 &: \frac{y}{y^3}p_1(y) + \frac{1}{y^2}p'_0(y) - \frac{3}{y^3}p_0(y) = 0 \\ x &: \frac{2y}{y^3}p_2(y) + \frac{1}{y^2}p'_1(y) - \frac{3}{y^3}p_1(y) = 2 \\ x^2 &: \frac{1}{y^3}p_1(y) + \frac{3y}{y^2}p_3(y) + \frac{1}{y^2}p'_2(y) - \frac{3}{y^3}p_2(y) = 0 \\ x^3 &: \frac{2}{y^3}p_2(y) + 4\frac{y}{y^3}p_4 + \frac{1}{y^2}p'_3 - \frac{3}{y^3}p_3 = 0 \\ x^4 &: \frac{3}{y^3}p_3(y) = 0 \\ x^5 &: \frac{4}{y^3}p_4(y) = 0. \end{aligned}$$

As equações acima implicam que $p_1, p_2, p_3, p_4 \equiv 0$. Então obtemos $\frac{1}{y^2}p'_0(y) - \frac{3}{y^3}p_0(y) = 2x$. Portanto, esse caso também não é possível.

Caso $n > 2$: A equação (3.11) se escreve como

$$\begin{aligned} &\frac{x^2 + y}{y^n}[p_1(y) + 2xp_2(y) + \dots \\ &+ (n-1)x^{n-2}p_{n-1}(y) + nx^{n-1}p_n(y) + (n+1)x^n p_{n+1}(y)] \\ &+ \frac{1}{y^{n-1}}[p'_0(y) + xp'_1(y) + x^2p'_2(y) + \dots \\ &+ x^{n-2}p'_{n-2}(y) + x^{n-1}p'_{n-1}(y) + x^n p'_n(y)] \\ &- \frac{n}{y^n}[p_0(y) + xp_1(y) + x^2p_2(y) + \dots \\ &+ x^{n-2}p_{n-2}(y) + x^{n-1}p_{n-1}(y) + x^n p_n(y)] = 2x. \end{aligned}$$

Novamente, a análise de cada potência de x nos fornece

$$\begin{aligned} x^0 &: \frac{y}{y^n}p_1(y) + \frac{1}{y^{n-1}}p'_0(y) - \frac{n}{y^n}p_0(y) = 0 \\ x &: \frac{2y}{y^{n-1}}p_2(y) + \frac{1}{y^{n-1}}p'_1(y) - \frac{n}{y^n}p_1(y) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 &: \frac{1}{y^n} p_1(y) + \frac{3y}{y^n} p_3(y) + \frac{1}{y^{n-1}} p_2'(y) - \frac{n}{y^n} p_2(y) = 0 \\
x^{n-1} &: \frac{(n-2)}{y^n} p_{n-2}(y) + \frac{ny}{y^n} p_n(y) + \frac{1}{y^{n-1}} p_{n-1}'(y) - \frac{n}{y^n} p_{n-1}(y) = 0 \\
x^n &: \frac{(n-1)}{y^n} p_{n-1}(y) + \frac{(n+1)y}{y^n} p_{n+1}(y) + \frac{1}{y^{n-1}} p_n'(y) - \frac{n}{y^n} p_n(y) = 0 \\
x^{n+1} &: \frac{n}{y^n} p_n(y) = 0 \\
x^{n+2} &: \frac{n+1}{y^n} p_{n+1}(y) = 0.
\end{aligned}$$

As equações acima implicam $p_1, \dots, p_{n-1}, p_n, p_{n+1} \equiv 0$. Então a equação (3.11) é dada por

$$\frac{1}{y^{n-1}} p_0'(y) - \frac{n}{y^n} p_0(y) = 2x.$$

Então o caso geral $n > 2$ é também excluído. Isso finaliza a prova. \square

Em contrapartida, existe integral primeira Liouvillianas local para a forma de Hill.

Corolário 3.4.1. A forma de Hill $\Omega = -ydx + (x^2 + y)dy$ admite integral primeira Liouvillianas local em \mathbb{C}^2 .

Demonstração. Sabemos (veja Seção 3.1) que as funções de Bessel de segundo tipo de ordem 0 e 1, são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}
Y_0(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2j}(j!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{j} \right] z^{2j} + (\ln z) J_0(z); \\
Y_1(z) &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j(-1)^{j+1}}{2^{2j}(j!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{j} \right] z^{2j-1} - \left(\frac{1}{z} \right) J_0(z) \\
&\quad - (\ln(z)) J_1(z).
\end{aligned}$$

Segue da Proposição 3.1.3 que J_0, J_1 são funções inteiras em \mathbb{C} , conseqüentemente o resultado é decorrente do fato de que localmente, a expressão que define Y_0 e Y_1 envolve apenas funções Liouvillianas. \square

Conclusão: Apesar de não existir uma integral primeira Liouvillianas globalmente definida em $\mathbb{C}P^2$, existe uma integral primeira Liouvillianas local em \mathbb{C}^2 .

3.5 Redução de singularidades

No que segue usaremos a técnica de blow-up com o objetivo de extrair mais informações sobre a forma de Hill. No capítulo 9 (Seção 9.2) enunciamos o principal resultado sobre desingularização de folheações em \mathbb{C}^2 (confira Teorema 9.2.1). Para mais detalhes sobre a técnica de blow-up

e desingularização sugerimos [13, 41, 68]. Verificaremos quais modelos de singularidades surgem após um certo número de blow-ups. Consideramos o blow-up quadrático na origem $0 \in \mathbb{C}^2$ como padrão para o que segue.

Proposição 3.5.1. Seja

$$\Omega = -ydx + (x^2 + y)dy$$

a forma de Hill. Então

- (i) O primeiro blow-up origina duas singularidades no divisor excepcional. Uma singularidade é do tipo Siegel da forma

$$-ydx + (1 - x + x^2y)dy = 0. \quad (3.12)$$

A segunda singularidade é nilpotente e dada por:

$$(-y + yx + y^2)dx + (x^2 + yx)dy = 0. \quad (3.13)$$

- (ii) Após realizar $n > 1$ blow-ups começando da segunda singularidade e sempre repetindo o processo na singularidade nilpotente correspondente temos: um divisor excepcional $\mathbb{P} = \cup_{j=1}^n \mathbb{P}_j$ com uma singularidade nilpotente na interseção da transformada estrita do eixo- x e \mathbb{P}_n , que é dada por:

$$(-y + nyx + nx^{n-1}y^2)dx + (x^2 + yx^n)dy. \quad (3.14)$$

Além disso, em cada esquina $\mathbb{P}_j \cap \mathbb{P}_{j+1}$, temos uma singularidade tipo Siegel dada por:

$$(-y + jxy^2 + jx^{j-1}y^{j+1})dx + (-x + (j+1)x^2y + (j+1)x^jy^j)dy. \quad (3.15)$$

Demonstração. O campo associado a Ω é $X = (x^2 + y)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. A matriz da parte linear de X na origem é

$$M_X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A singularidade na origem não é simples. Realizamos então um primeiro blow-up. Considerando a carta U_1 nas coordenadas $x = sy$ temos

$$\begin{aligned} \pi^*(\Omega) = \Omega(sy, y) &= -yd(sy) + ((sy)^2 + y)dy \\ &= -y(sdy + yds) + ((sy)^2 + y)dy \\ &= -ysdy - y^2ds + (s^2y^2 + y)dy \\ &= -y^2ds + (s^2y^2 + y - ys)dy \\ &= y(-yds + (s^2y + 1 - s)dy). \end{aligned}$$

Seja $\tilde{\Omega}(s, y) = -yds + (s^2y + 1 - s)dy$ que exibe uma singularidade em $(1, 0)$. Considere a mudança de coordenadas $s' \mapsto 1 - s$ e $y \mapsto y$. Então

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}(s', y) &= yds' + ((1 - s')^2y + s')dy \\ &= yds' + (s' + y - 2s'y + s'^2y)dy.\end{aligned}$$

Após essa mudança de coordenadas a singularidade $(1, 0)$ passa a ser a origem do sistema e o campo associado é

$$\tilde{X}(s', y) = (s' + y - 2s'y + s'^2y)\frac{\partial}{\partial s'} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

A matriz da parte linear de \tilde{X} é

$$M_{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de $M_{\tilde{X}}$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Então $\lambda_1/\lambda_2 = -1 \in \mathbb{R}_-$. Essa singularidade está resolvida e é do tipo Siegel para o sistema (s', y) . Portanto, a singularidade $(1, 0)$ é do tipo Siegel para o sistema (s, y) . Agora, considerando a carta U_2 nas coordenadas $y = tx$ temos

$$\begin{aligned}\pi^*(\Omega) &= \Omega(x, tx) = -txdx + (x^2 + tx)d(tx) \\ &= -txdx + (x^2 + tx)(tdx + xdt) \\ &= -txdx + tx^2dx + x^3dt + t^2xdx + tx^2dt \\ &= (-tx + tx^2 + t^2x)dx + (x^3 + tx^2)dt \\ &= x [(-t + tx + t^2)dx + (x^2 + tx)dt].\end{aligned}$$

Fazemos $\tilde{\Omega}(x, t) = (-t + tx + t^2)dx + (x^2 + tx)dt$. O campo associado é

$$\tilde{X}(x, t) = (x^2 + tx)\frac{\partial}{\partial x} + (t - tx - t^2)\frac{\partial}{\partial t}.$$

A matriz da parte linear de \tilde{X} é

$$M_{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{\tilde{X}}$ possui autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Realizaremos um novo blow-up. Considere primeiramente o sistema de coordenadas $x = rt$. Assim

$$\begin{aligned}\pi^*(\tilde{\Omega}) = \tilde{\Omega}(rt, t) &= (-t + t(rt) + t^2)d(rt) + ((rt)^2 + t(rt))dt \\ &= (-t + rt^2 + t^2)(r dt + t dr) + (r^2t^2 + rt^2)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-tr + r^2t^2 + rt^2 + r^2t^2 + rt^2)dt + (-t^2 + rt^3 + t^3)dr \\
&= t [(-r + 2rt + 2r^2t)dt + (-t + rt^2 + t^2)dr].
\end{aligned}$$

Fazemos $\tilde{\tilde{\Omega}}(r, t) = (-r + 2rt + 2r^2t)dt + (-t + rt^2 + t^2)dr$. O campo associado é

$$\tilde{\tilde{X}}(r, t) = (-r + 2rt + 2r^2t)\frac{\partial}{\partial r} + (t - rt^2 - t^2)\frac{\partial}{\partial t}.$$

A matriz da parte linear de $\tilde{\tilde{X}}$ é

$$M_{\tilde{\tilde{X}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Então $\lambda_1/\lambda_2 = -1 \in \mathbb{R}_-$. Essa singularidade está resolvida e é do tipo Siegel. Agora, considere o sistema de coordenadas $t = ux$ na outra carta. Assim

$$\begin{aligned}
\pi^*(\tilde{\tilde{\Omega}}) = \tilde{\tilde{\Omega}}(x, ux) &= (-(ux) + (ux)x + (ux)^2)dx + (x^2 + (ux)x)d(ux) \\
&= (-ux + ux^2 + u^2x^2)dx + (x^2 + ux^2)(udx + xdu) \\
&= (-ux + ux^2 + u^2x^2 + ux^2 + u^2x^2)dx + (x^3 + ux^3)du \\
&= (-ux + 2ux^2 + 2u^2x^2)dx + (x^3 + ux^3)du \\
&= x [(-u + 2ux + 2u^2x)dx + (x^2 + ux^2)du]
\end{aligned}$$

Fazemos $\tilde{\tilde{\Omega}}(x, u) = (-u + 2ux + 2u^2x)dx + (x^2 + ux^2)du$. O campo associado é

$$\tilde{\tilde{X}}(r, t) = (x^2 + ux^2)\frac{\partial}{\partial x} + (u - 2ux - 2u^2x)\frac{\partial}{\partial t}.$$

A matriz da parte linear de $\tilde{\tilde{X}}$ é

$$M_{\tilde{\tilde{X}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{\tilde{\tilde{X}}}$ possui autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

Afirmção 3.5.1. Após n blow-ups a origem do sistema de coordenadas que contém o eixo X possui uma singularidade nilpotente e a folheação associada é dada por

$$\xi = (-y + nyx + nx^{n-1}y^2)dx + (x^2 + yx^n)dy. \quad (3.16)$$

Prova da afirmação 3.5.1. Usaremos um argumento de indução sobre o número n de blow-ups. Os casos $n = 1, 2$ foram feitos acima. Então supomos que (3.16) seja válida para algum $n > 2$. Realizando novo blow-up, considere a carta $y = xt$. Logo,

$$\begin{aligned}\pi^*\xi = \xi(x, tx) &= (-tx + ntx^2 + nx^{n-1}(tx)^2)dx + (x^2 + (tx)x^n)(xdt + tdx) \\ &= (-tx + ntx^2 + nt^2x^{n+1} + tx^2 + t^2x^{n+1})dx + (x^3 + tx^{n+2})dt \\ &= x\{(-t + ntx + nt^2x^n + tx + t^2x^n)dx + (x^2 + tx^{n+1})dt\} \\ &= x\{(-t + (n+1)tx + (n+1)t^2x^n)dx + (x^2 + tx^{n+1})dt\}\end{aligned}$$

Seja $\tilde{\xi} = (-t + (n+1)tx + (n+1)t^2x^n)dx + (x^2 + tx^{n+1})dt$. Isso prova a afirmação 4.2.1. \square

Observe que realizando um blow-up na singularidade de ξ , dada em (4.12), e considerando a carta $x = sy$ obtemos

$$\begin{aligned}\pi^*\xi &= \xi(sy, y) \\ &= (-y + ny(sy) + n(sy)^{n-1}y^2)(sdy + yds) + ((sy)^2 + y(sy)^n)dy \\ &= (-y + nsy^2 + ns^{n-1}y^{n+1})(sdy + yds) + (s^2y^2 + s^ny^{n+1})dy \\ &= (-ys + ns^2y^2 + ns^ny^{n+1} + s^2y^2 + s^ny^{n+1})dy \\ &+ (-y^2 + nsy^3 + ns^{n-1}y^{n+2})ds \\ &= y\{(-y + nsy^2 + ns^{n-1}y^{n+1})ds + (-s + (n+1)s^2y + (n+1)s^ny^n)dy\}.\end{aligned}$$

As observações acima e um argumento de indução nos permite concluir a seguinte afirmação.

Afirmação 3.5.2. As demais singularidades que surgem a cada novo blow-up estão nas esquinas das linhas projetivas e a folheação associada em cada esquina $\mathbb{P}_j \cap \mathbb{P}_{j+1}$ é dada por

$$(-y + jsy^2 + js^{j-1}y^{j+1})ds + (-s + (j+1)s^2y + (j+1)s^jy^j)dy = 0.$$

Concluimos a prova do lema observando que o campo dual associado à 1-forma acima é

$$(-x + ns^2y + nx^2y + ns^{n-1}y^{n-1})\frac{\partial}{\partial x} + (y - (n-1)y^2x - (n-1)x^{n-2}y^n)\frac{\partial}{\partial y}.$$

A matriz da parte linear desse campo é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, as singularidades que surgem nas esquinas são do tipo Siegel, com autovalores $\lambda_1/\lambda_2 = \frac{1}{-1} = -1$.

□

A seguir fornecemos as integrais primeiras explícitas para os modelos que surgiram na redução de singularidades da forma de Hill como descrito na Proposição 3.5.1.

Proposição 3.5.2.

(i) Seja $n \geq 1$. A singularidade

$$(-y + nyx + nx^{n-1}y^2)dx + (x^2 + yx^n)dy = 0$$

admite a integral primeira

$$F_n(x, y) = \frac{2xY_0(2x^{\frac{n}{2}}y^{\frac{1}{2}}) - 2x^{\frac{n}{2}}y^{\frac{1}{2}}Y_1(2x^{\frac{n}{2}}y^{\frac{1}{2}})}{xJ_0(2x^{\frac{n}{2}}y^{\frac{1}{2}}) - x^{\frac{n}{2}}y^{\frac{1}{2}}J_1(2x^{\frac{n}{2}}y^{\frac{1}{2}})}$$

(ii) Seja $j \in \{1, \dots, n-1\}$. A singularidade tipo Siegel

$$(-y + jxy^2 + jx^{j-1}y^{j+1})dx + (-x + (j+1)x^2y + (j+1)x^jy^j)dy$$

admite a integral primeira

$$G_j(x, y) = \frac{2xyY_0(2x^{\frac{j}{2}}y^{\frac{j+1}{2}}) - 2x^{\frac{j}{2}}y^{\frac{j+1}{2}}Y_1(2x^{\frac{j}{2}}y^{\frac{j+1}{2}})}{xyJ_0(2x^{\frac{j}{2}}y^{\frac{j+1}{2}}) - x^{\frac{j}{2}}y^{\frac{j+1}{2}}J_1(2x^{\frac{j}{2}}y^{\frac{j+1}{2}})}.$$

Demonstração. Sejam $\pi_n(x, y) = (x, x^ny)$, $\Omega = -ydx + (y + x^2)dy$ então $\pi_n^*\Omega = x^n[(-y + nyx + nx^{n-1}y^2)dx + (x^2 + yx^n)dy]$. Aplicando o Teorema B (pág. 26, Seção 3.3) obtemos o item (i). Agora, definimos $\pi(x, y) = (xy, y)$. Seja

$$\xi_j = (-y + jyx + jx^{j-1}y^2)dx + (x^2 + yx^j)dy.$$

Então $\pi^*\xi_j = y[(-y + jxy^2 + jx^{j-1}y^{j+1})dx + (-x + (j+1)x^2y + (j+1)x^jy^j)dy]$. Daí e do item (i), obtemos (ii). □

3.6 Holonomia

Considerando a forma de Hill $\Omega = -ydx + (x^2 + y)dy$, então temos uma singularidade na origem $0 \in \mathbb{C}^2$. Esse germe de folheação admite uma separatriz dada por $\Gamma : (y = 0)$. Podemos nos perguntar sobre a aplicação de holonomia dessa separatriz. Se considerarmos um laço simples

$\gamma : x(t) = r_0 e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, em Γ , então podemos considerar a aplicação de holonomia com respeito à seção transversal $\Sigma : (x = r_0)$ como segue:

Seja q_0 o ponto $(r_0, 0)$. A aplicação de holonomia $h : (\Sigma, q_0) \rightarrow (\Sigma, q_0)$ é dada por $h(y_0) = y(2\pi, y_0)$ onde $y(t, y_0)$ é a solução da EDO

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{r_0^2 e^{2it} + y} \cdot r i e^{it}$$

que satisfaz $y(0, y_0) = y_0$. A integral primeira $F(x, y) = \frac{2xY_0(2\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}Y_1(2\sqrt{y})}{xJ_0(2\sqrt{y}) - \sqrt{y}J_1(2\sqrt{y})}$ pode ser usada para calcular (estudar) a aplicação de holonomia h , pois satisfaz a relação $F(r_0, h(y)) = F(r_0, y)$. Essa é uma expressão envolvendo funções do tipo Bessel.

Observação 3.6.1. Todo o exposto acima sugere que pode existir uma teoria de folheações admitindo funções tipo Bessel como integrais primeiras, em termos de seus grupos de holonomia.

Capítulo 4

Folheações de Hill de parâmetro p

Neste capítulo mostramos que a relação entre as soluções clássicas e a integral primeira observada no caso da exponencial é um fenômeno mais geral. Além disso, uma classificação geral para o problema de Hill é obtida.

4.1 Integral primeira e soluções clássicas

Seja

$$u''(z) + b(z)u(z) = 0, \quad (4.1)$$

uma EDO linear homogênea de segunda ordem, onde $b : U \rightarrow \mathbb{C}$, é uma função holomorfa em um aberto $U \subset \mathbb{C}$. Desde que b seja holomorfa em U , todo ponto $z_0 \in U$ é um *ponto ordinário*. Portanto, segue do Teorema 3.1.1 (Método de Frobenius) que existem duas soluções linearmente independentes u_1, u_2 da equação (4.1), holomorfas em U , tais que os raios de convergência dessas soluções são maiores ou iguais aos raios de convergência de b .

Feitas essas considerações, exploraremos algumas possibilidades considerando as técnicas desenvolvidas até o momento. Pelo método de redução de ordem, obtemos um campo vetorial, naturalmente associado a (4.1), $X_b : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}^3$ dada por $X_b(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - b(z) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. O Teorema A (pág. 15, Seção 2.2) afirma X_b é sempre w -integrável. De fato, a 1-forma $\omega = -ydx + xdy + [y^2 + b(z)x^2]dz = 0$ é integrável e tangente ao campo X_b .

Teorema D. Considere a equação

$$u''(z) + b(z)u(z) = 0, \quad (4.2)$$

onde $b : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, é uma função holomorfa definida em um aberto U de \mathbb{C} . Sejam $u_1, u_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ duas soluções linearmente independentes da EDO (4.2), e $X_b : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}^3$, o campo dado por

$$X_b(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - b(z) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Então, X_b é sempre s -integrável. Precisamente, a função $H : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$H(x, y, z) = \frac{xu_1'(z) - yu_1(z)}{xu_2'(z) - yu_2(z)},$$

é definida e meromorfa em $\mathbb{C}^2 \times U$, sem pontos indefinidos, e é uma integral primeira para a folheação, determinada pela 1-forma integrável

$$\omega = -ydx + xdy + [y^2 + b(z)x^2]dz = 0.$$

Para demonstrar o Teorema D precisaremos de um resultado da Teoria de Várias Variáveis Complexas, sobre extensão de funções holomorfas.

Teorema 4.1.1. (*Teorema de extensão de Hartogs*, [35], pág. 48, Teorema 6) Seja $U \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, um subconjunto aberto conexo e $W \subset U$ um subconjunto analítico de codimensão ≥ 2 . Então qualquer função f holomorfa (respectivamente meromorfa) definida em um subconjunto aberto $U \setminus W$ admite uma única extensão holomorfa (respectivamente meromorfa) em U .

Observação 4.1.1. O Teorema de extensão de Hartogs não vale para $n = 1$. De fato, a função $f(z) = \frac{1}{z}$, é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entretanto, f não pode ser analiticamente continuada em todo plano complexo \mathbb{C} .

Demonstração do Teorema D. Primeiro observe que $H(x, y, z) = \frac{xu_1'(z) - yu_1(z)}{xu_2'(z) - yu_2(z)}$ não é constante. De fato, $H = c \in \mathbb{C}$ implica que $x(u_1'(z) - cu_2'(z)) = y(u_1(z) - cu_2(z))$ e então $u_1(z) = cu_2(z)$ o que é uma contradição desde que u_1 e u_2 são linearmente independentes. Agora, supomos que existe uma curva Γ (real, analítica e não degenerada) de pontos indefinidos para H . Então temos $\frac{w_1'}{w_1} = \frac{y}{x} = \frac{w_2'}{w_2}$ nessa curva. Desde que u_1 e u_2 são funções holomorfas de uma variável complexa isso implica que $u_1 = ku_2$ identicamente, produzindo outra contradição. Isso mostra que o conjunto de pontos indefinidos de H é discreto e, como a dimensão é 3, segue do Teorema de Hartogs (Teorema 4.1.1) que H admite uma extensão e, é de fato livre de pontos indefinidos. Resta provar que H é genuinamente uma

integral primeira para $\mathcal{H} : -ydx + xdy + [y^2 + p(z)x^2]dz = 0$. Seja a forma de Hill, isto é, o modelo bidimensional

$$\Omega_{\mathcal{H}} = -dx + [x^2 + p(y)]dy.$$

Fazemos

$$F(x, y) = \frac{u'_1(y) + xu_1(y)}{u'_2(y) + xu_2(y)}.$$

Agora computamos as derivadas parciais de F com respeito a x e y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= \frac{u_1(u'_2 + xu_2)}{(u'_2 + xu_2)^2} - \frac{u_2(u'_1 + xu_1)}{(u'_2 + xu_2)^2} \\ &= \frac{u_1u'_2 + xu_1u_2}{(u'_2 + xu_2)^2} - \frac{u_2u'_1 + xu_2u_1}{(u'_2 + xu_2)^2}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, z)}{\partial x} &= \frac{u_1u'_2 - u_2u'_1}{(u'_2 + xu_2)^2} = \frac{(u''_1 + xu'_1)(u'_2 + xu_2)}{(u'_2 + xu_2)^2} - \frac{(u''_2 + xu'_2)(u'_1 + xu_1)}{(u'_2 + xu_2)^2} \\ &= \frac{(-pu_1 + xu'_1)(u'_2 + xu_2)}{(u'_2 + xu_2)^2} - \frac{(-pu_2 + xu'_2)(u'_1 + xu_1)}{(u'_2 + xu_2)^2} \\ &= (p + x^2) \frac{(u'_1u_2 - u'_2u_1)}{(u'_2 + xu_2)^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dF \wedge \Omega_{\mathcal{H}} &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \right) \wedge (-dx + (p + x^2)dy) \\ &= \left[(p + x^2) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right] dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que F é uma integral primeira para $\Omega_{\mathcal{H}}$. Agora, defina $H = \Pi^*F$, onde $\Pi(x, y, z) = (-\frac{y}{x}, z)$, obtendo então $dH \wedge \omega_{\mathcal{H}} = d(\Pi^*F) \wedge \Pi^*\Omega_{\mathcal{H}} = \Pi^*(dF \wedge \Omega_{\mathcal{H}}) = 0$. Explicitamente, temos que

$$H(x, y, z) = \frac{u'_1(z) - \frac{y}{x}u_1(z)}{u'_2(z) - \frac{y}{x}u_2(z)} = \frac{xu'_1(z) - yu_1(z)}{xu'_2(z) - yu_2(z)}$$

é uma integral primeira para $\omega_{\mathcal{H}}$. Uma vez que não utilizamos o fato de p ser periódica, concluímos que o resultado vale para qualquer função holomorfa $b : U \rightarrow \mathbb{C}$, onde U é um aberto de \mathbb{C} . \square

Uma interessante consequência imediata do Teorema D é o caso *Bessel-Hill* abaixo:

Corolário 4.1.1 (Forma de Bessel-Hill). *A folheação de Bessel-Hill*

$$\omega_{\mathcal{H}} = -ydx + xdy + [y^2 - (r^2 - k^2e^{2z})x^2]dz$$

admite a seguinte integral primeira $H : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$

$$H(x, y, z) = \frac{xY_r'(ke^z) - yY_r(ke^z)}{xJ_r'(ke^z) - yJ_r(ke^z)}.$$

Demonstração. De fato, isso segue do Teorema D observando que $J_r(ke^z), Y_r(ke^z)$ são soluções (clássicas bem conhecidas) da equação de Bessel $u''(z) + (r^2 - k^2e^{2z})u(z) = 0$. Além disso, desde que $(r^2 - k^2e^{2z})$ é holomorfa em todo plano complexo, a integral H , está definida em todo \mathbb{C}^3 . \square

A introdução da perturbação $r^2 - k^2e^{2z}$, no lugar de e^{2z} na equação de Hill, gera uma mudança importante na integral primeira. De fato, a constante está diretamente relacionada à ordem das funções de Bessel na integral primeira. Por exemplo, quando $r = 1/2$, temos que $J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z$ e $Y_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z$, as quais são funções elementares.

4.2 Classificação geral das Folheações de Hill de parâmetro p

Considere o caso geral da equação de Hill: $u''(z) + p(z)u(z) = 0$. A partir daqui assumiremos que $p : A_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função periódica, de período T , holomorfa na faixa horizontal $A_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \text{Im}(z) < \beta\} \subset \mathbb{C}$.

Um fato bastante conhecido é o de que as funções periódicas admitem expansões em séries de Fourier. Precisamente:

Proposição 4.2.1. ([32], pág. 182) Seja p uma função holomorfa na faixa horizontal $A_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \text{Im}(z) < \beta\}$, e periódica, de período $2\pi i$. Então p pode ser expandida em uma série absolutamente convergente

$$p(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{kz} \quad (4.3)$$

em $A_{\alpha,\beta}$. A série converge uniformemente em qualquer faixa menor $A' = \{\alpha_0 \leq \text{Im}(z) \leq \beta_0\}$, $A' \subset A_{\alpha,\beta}$ ou seja, $\alpha < \alpha_0 < \beta_0 < \beta$.

A seguir, enunciamos um corolário do Teorema D (pág.41, Seção 4) aplicado para a equação de Hill de parâmetro p .

Corolário 4.2.1. Consideremos a equação de Hill $u''(z) + p(z)u(z) = 0$, onde p é uma função holomorfa na faixa horizontal $A_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \text{Im}(z) < \beta\} \subset \mathbb{C}$, periódica, de período T . Sejam $u_1, u_2 : A_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{C}$, duas soluções da equação de Hill considerada, holomorfas em $A_{\alpha,\beta}$, e linearmente independentes. Então a função $H : \mathbb{C}^2 \times A_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$H(x, y, z) = \frac{xu_1'(z) - yu_1(z)}{xu_2'(z) - yu_2(z)},$$

é definida e meromorfa em $\mathbb{C}^2 \times A_{\alpha,\beta}$, sem pontos indefinidos, e é uma integral primeira para a folheação de Hill de parâmetro p , determinada por

$$\omega_{\mathcal{H}} = -ydx + xdy + [y^2 + p(z)x^2]dz = 0.$$

Considere a folheação \mathcal{H} determinada por

$$\omega_{\mathcal{H}} = -ydx + xdy + [y^2 + p(z)x^2]dz$$

onde p é uma função complexa periódica. Da teoria ordinária de espaços de recobrimento podemos escrever $p(z) = P(e^z)$ para alguma função holomorfa $P : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$. A correspondente folheação de Hill é então dada por $\omega = -ydx + xdy + [y^2 + p(z)x^2]dz = -ydx + xdy + [y^2 + P(e^z)x^2]dz$. Podemos reescrever

$$\omega/x^2 = (-ydx + xdy)/x^2 + [(y/x)^2 + P(e^z)]dz.$$

Se fazemos $\phi = -y/x$ e $\psi = e^z$ então temos $dz = d\psi/\psi$ e então

$$\omega/x^2 = -d\phi + (\phi^2 + P(\psi))d\psi/\psi$$

Isso mostra que a folheação de Hill é o pull-back pela aplicação (ϕ, ψ) do modelo bidimensional $-ydx + (x^2 + P(y))dy = 0$. Portanto, iremos considerar a folheação em \mathbb{C}^2 determinada por

$$\Omega_1 = -ydx + [x^2 + P(y)]dy.$$

Desde que p admite uma expansão em série de Fourier,

$$p(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{kz}$$

segue que $P(y) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k y^k$. Logo, podemos escrever

$$\Omega_1 = -ydx + [x^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} a_k y^k]dy.$$

Suponha agora, que P admita uma expressão finita, ou seja, $a_k = 0$ para todo $|k| > n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\Omega_1 = -ydx + [x^2 + \sum_{k=-n}^n a_k y^k] dy. \quad (4.4)$$

Suponha que $a_{-n} \neq 0$. Multiplicando a expressão $\Omega_1 = 0$ por y^n temos

$$-y^{n+1} dx + [x^2 y^n + \sum_{j=0}^{2n} a_{j-n} y^j] dy = 0. \quad (4.5)$$

Então a folheação determinada por (4.5) é uma folheação regular. Suponha que $a_{-n} = 0$. Tomando $\lambda = \min\{j : a_{j-n} \neq 0\}$ temos que (4.4) pode ser escrita como

$$\Omega_1 = -ydx + [x^2 + \sum_{k=-\lambda}^n a_k y^k] dy. \quad (4.6)$$

Multiplicando a expressão (4.6) por y^λ temos

$$-y^{\lambda+1} dx + [x^2 y^\lambda + a_{\lambda-n} + \sum_{j=\lambda+1}^{2n} a_{j-n} y^j] dy = 0. \quad (4.7)$$

Também neste caso, temos uma folheação regular. Essas considerações nos permitem concluir o seguinte lema.

Lema 4.2.1. Seja $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$. Suponha que P admita uma expressão finita

$$P(y) = \sum_{k=-n}^n a_k y^k.$$

Então

$$\Omega_1 = -ydx + [x^2 + P(y)] dy$$

determina uma folheação holomorfa regular (sem pontos críticos) definida em \mathbb{C}^2 .

Agora, consideraremos o caso em que

$$P(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k,$$

ou seja,

$$\Omega_1 = -ydx + (x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k) dy.$$

Se $a_0 \neq 0$, a folheação é regular, e possui integral primeira holomorfa em uma vizinhança da origem.

Agora, considere o caso em que $a_0, a_1 = 0$ e $a_\lambda \neq 0$, para algum $\lambda > 1$. Ou seja,

$$\Omega_1 = -ydx + [x^2 + a_\lambda y^\lambda + \sum_{k>\lambda}^{\infty} a_k y^k] dy.$$

Multiplicamos $\Omega_1 = 0$, por $\frac{y^{\lambda-1}}{\lambda^3}$, obtendo

$$\begin{aligned} & -\frac{y^\lambda}{\lambda^3} dx + [x^2 + a_\lambda y^\lambda + \sum_{k>\lambda}^{\infty} a_k y^k] \frac{y^{\lambda-1}}{\lambda^3} dy = 0 \\ \Rightarrow & -\frac{y^\lambda}{\lambda^3} dx + \left[\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{a_\lambda y^\lambda}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k>\lambda}^{\infty} a_k y^k \right] \lambda \frac{y^{\lambda-1}}{\lambda^2} dy = 0 \\ \Rightarrow & -\frac{y^\lambda}{\lambda^3} dx + \left[\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{a_\lambda y^\lambda}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k>\lambda}^{\infty} a_k y^k \right] d \left(\frac{y^\lambda}{\lambda^2} \right) dy = 0. \end{aligned}$$

Por fim, fazemos a seguinte mudança de coordenadas: $\varphi = \frac{x}{\lambda}$, e $\psi = \frac{y^\lambda}{\lambda^2}$, na última expressão acima, reobtendo Ω_1 ,

$$-\psi d\varphi + [\varphi^2 + a_\lambda \psi + \sum_{k>1}^{\infty} a_k \psi^k] d\psi = 0.$$

Consideremos agora uma forma com somente termos negativos, ou seja,

$$-ydx + [x^2 + \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k y^k] = 0.$$

Faremos a seguinte mudança de coordenadas: $\varphi = -x$, e $\psi = \frac{1}{y}$. Então a forma acima se transforma em

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\psi} d(-\varphi) + [\varphi^2 + \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k \left(\frac{1}{\psi} \right)^k] d \left(\frac{1}{\psi} \right) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{\psi} d\varphi + [\varphi^2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} \psi^j] \left(-\frac{1}{\psi^2} \right) d\psi = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando essa última equação por $-\psi^2$ obtemos novamente a forma Ω_1 .

O último caso a se considerar é quando existe uma quantidade infinita de termos negativos e uma quantidade infinita de termos positivos. Precisamente,

$$\Omega_\infty = -ydx + (x^2 + \sum_{k=-\infty}^{-\alpha} a_k y^k + \sum_{k=\beta}^{\infty} a_k y^k) dy,$$

onde α, β são os menores números inteiros positivos tais que $a_{-\alpha} \neq 0$ e $a_\beta \neq 0$. Então temos uma 1-forma em \mathbb{C}^2 com coeficientes meromorfos.

Sintetizando a discussão acima, enunciamos a seguinte proposição.

Proposição 4.2.2. Considere a folheação de Hill \mathcal{H} , determinada por $\omega_{\mathcal{H}} = -ydx + xdy + [y^2 + p(z)x^2]$, onde p é uma função holomorfa na faixa horizontal $A_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \text{Im}(z) < \beta\} \subset \mathbb{C}$, periódica, de período T . Então \mathcal{H} está associada a um dos modelos bidimensionais abaixo:

(i) $\Omega_{\mathcal{R}} = -ydx + (x^2 + \sum_{k=-n}^n a_k y^k) dy$, *(Forma regular de Hill)*;

(ii) $\Omega_{\mathcal{H}} = -ydx + (x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k y^k) dy$, *(Forma geral de Hill)*;

(iii) $\Omega_\infty = -ydx + (x^2 + \sum_{k=-\infty}^{-\alpha} a_k y^k + \sum_{k=\beta}^{\infty} a_k y^k) dy$, *(Forma meromorfa de Hill)*.

4.2.1 Forma regular de Hill

Considere a forma regular de Hill dada por $\Omega_{\mathcal{R}} = -ydx + (x^2 + \sum_{k=-n}^n a_k y^k) dy$. O Lema 4.2.1 diz que essa forma sempre determina uma folheação \mathcal{R} , regular (sem pontos singulares) em \mathbb{C}^2 . Então \mathcal{R} possui uma integral primeira $F : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida em uma vizinhança da origem $0 \in U \subset \mathbb{C}^2$. Desde que F é holomorfa em U , podemos escrever, $F(x, y) = \sum_{i+j=0}^{\infty} f_{ij} x^i y^j$. Tome novamente a mudança de coordenadas $\varphi = -\frac{y}{x}$ e $\psi = e^z$. Então aplicando essa mudança em $\Omega_{\mathcal{R}}$,

$$\begin{aligned} & -e^z d\left(-\frac{y}{x}\right) + \left(\left(-\frac{y}{x}\right)^2 + \sum_{k=-n}^n a_k e^{kz}\right) d(e^z) \\ &= e^z x^2 \left[-ydx + xdy + (y^2 + \sum_{k=-n}^n a_k e^{kz}) dz \right]. \end{aligned}$$

E, analogamente para F ,

$$F(\varphi, \psi) = \sum_{i+j=0}^{\infty} f_{ij} \left(-\frac{y}{x}\right)^i e^{jz}$$

Conclusão: A folheação de Hill $\omega_{\mathcal{H}} = \Pi^*(\Omega_{\mathcal{R}})$ admite a integral primeira

$$H(x, y, z) := \sum_{i+j=0}^{\infty} f_{ij} \left(-\frac{y}{x}\right)^i e^{jz}.$$

4.2.2 Forma geral de Hill

Na Seção 3.5 a desingularização da forma fundamental de Hill $\Omega = -ydx + [x^2 + y]dy$ foi realizada, obtendo assim os modelos finais que surgem após um certo número $n \in \mathbb{N}$ de blow-ups (veja Proposição 3.5.1). A seguir, verificamos que a forma fundamental Ω e a forma geral de Hill, $\Omega_{\mathcal{H}} = -ydx + (x^2 + a_1y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k)dy$, possuem o mesmo tipo de desingularização.

Consideraremos nesta seção o caso não trivial em que $a_0 = 0$, e $a_1 \neq 0$. Veremos que a forma fundamental de Hill $\Omega = -ydx + (x^2 + y)dy$, estudada nos capítulos anteriores, exerce papel crucial neste caso.

O objetivo agora é verificar que a forma fundamental infinita de Hill, dada em (4.8), possui o mesmo tipo de desingularização que a forma fundamental $\Omega = -ydx + (x^2 + y)dy$.

Proposição 4.2.3. Considere a forma geral de Hill,

$$\Omega_{\mathcal{H}} = -ydx + (x^2 + a_1y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k)dy. \quad (4.8)$$

Então

- (i) O primeiro blow-up origina duas singularidades no divisor excepcional. Uma singularidade é do tipo Siegel da forma

$$-ydx + (a_1 - x + x^2y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{k-1})dy. \quad (4.9)$$

A segunda singularidade é nilpotente e dada por:

$$(-y + yx + yt^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{k+1} x^{k-1})dx + (x^2 + yx + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k x^k)dy. \quad (4.10)$$

- (ii) Após realizar $n > 1$ blow-ups começando da segunda singularidade e sempre repetindo o processo na singularidade nilpotente correspondente

temos: um divisor excepcional $\mathbb{P} = \cup_{j=1}^n \mathbb{P}_j$ com uma singularidade nilpotente na interseção da transformada estrita do eixo- x e \mathbb{P}_n , que é dada por:

$$\begin{aligned} & (-y + nyx + nx^{n-1}y^2 + n \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{k+1} x^{nk-1}) dx \quad (4.11) \\ & + (x^2 + yx^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k x^{nk}) dy. \end{aligned}$$

Além disso, em cada esquina $\mathbb{P}_j \cap \mathbb{P}_{j+1}$, temos uma singularidade tipo Siegel dada por:

$$\begin{aligned} & (- y + jxy^2 + jx^{j-1}y^{j+1} + n \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{(n+1)k} x^{nk-1}) dx \\ & + (- x + (j+1)x^2y + (j+1)x^jy^j \\ & + (n+1) \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{(n+1)k-1} x^{nk}) dy. \end{aligned}$$

Demonstração. O campo associado à forma de Hill considerada é dada por

$$X = (x^2 + a_1y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

A matriz da parte linear de X é

$$M_X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix}$$

A singularidade na origem não é simples. Realizamos um primeiro blow-up, e considerando na carta U_1 , em coordenadas $x = sy$

$$\begin{aligned} \pi^*(\Omega) = \Omega(sy, y) &= -yd(sy) + ((sy)^2 + y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k) dy \\ &= -y(sdy + yds) + ((sy)^2 + a_1y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k) dy \\ &= -ysdy - y^2ds + (s^2y^2 + a_1y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k) dy \\ &= -y^2ds + (s^2y^2 - ys + a_1y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k) dy \\ &= y \left(-yds + (s^2y - s + a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{k-1}) dy \right). \end{aligned}$$

Seja $\tilde{\Omega}(s, y) = -yds + (s^2y - s + a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{k-1})dy$. Temos uma singularidade em $(1, 0)$. Consideramos a mudança de coordenadas $s' \mapsto a_1 - s$ e $y \mapsto y$. Então

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}(s', y) &= yds' + ((a_1 - s')^2y + s' + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{k-1})dy \\ &= yds' + (s' + a_1^2y - 2s'y + s'^2y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{k-1})dy.\end{aligned}$$

Após essa mudança de coordenadas a singularidade $(1, 0)$ passa a ser a origem do sistema e o campo associado é

$$\tilde{X}(s', y) = (s' + a_1^2y - 2s'y + s'^2y + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{k-1}) \frac{\partial}{\partial s'} - y \frac{\partial}{\partial y}.$$

A matriz da parte linear de \tilde{X} é

$$M_{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de $M_{\tilde{X}}$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Então $\lambda_1/\lambda_2 = -1 \in \mathbb{R}_-$. Essa singularidade está resolvida e é do tipo Siegel para o sistema (s', y) . Portanto, a singularidade $(1, 0)$ é do tipo Siegel para o sistema (s, y) . Agora, considerando a carta U_2 nas coordenadas $y = tx$ temos

$$\begin{aligned}\pi^*(\Omega) &= \Omega(x, tx) = -txdx + (x^2 + tx + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (tx)^k)d(tx) \\ &= -txdx + (x^2 + tx + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k x^k)(tdx + xdt) \\ &= -txdx + tx^2dx + x^3dt + t^2xdx + tx^2dt \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{k+1} x^k dx + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k x^{k+1} dt \\ &= (-tx + tx^2 + t^2x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{k+1} x^k)dx + (x^3 + tx^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k x^{k+1})dt \\ &= x \left[(-t + tx + t^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{k+1} x^{k-1})dx + (x^2 + tx + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k x^k)dt \right].\end{aligned}$$

Fazemos $\tilde{\Omega}(x, t) = -t + tx + t^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{k+1} x^{k-1} dx + (x^2 + tx + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k x^k) dt$. O campo associado é

$$\tilde{X}(x, t) = (x^2 + tx + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k x^k) dt \frac{\partial}{\partial x} + (t - tx - t^2 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{k+1} x^{k-1}) \frac{\partial}{\partial y}.$$

A matriz da parte linear de \tilde{X} é

$$M_{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$M_{\tilde{X}}$ possui autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Realizamos um novo blow-up. Considere primeiramente o sistema de coordenadas $x = rt$. Assim

$$\begin{aligned} \pi^*(\tilde{\Omega}) &= \tilde{\Omega}(rt, t) \\ &= (-t + t(rt) + t^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{k+1} (rt)^{k-1}) d(rt) \\ &\quad + ((rt)^2 + t(rt) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k (rt)^k) dt \\ &= (-t + rt^2 + t^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k} r^{k-1}) (r dt + t dr) \\ &\quad + (r^2 t^2 + rt^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k} r^k) dt \\ &= (-tr + r^2 t^2 + rt^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k} r^k + r^2 t^2 + rt^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k} r^k) dt \\ &\quad + (-t^2 + rt^3 + t^3 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k+1} r^{k-1}) dr \\ &= (-tr + 2r^2 t^2 + 2rt^2 + 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k} r^k) dt \\ &\quad + (-t^2 + rt^3 + t^3 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k+1} r^{k-1}) dr \\ &= t[(-r + 2rt + 2r^2 t + 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k-1} r^k) dt \\ &\quad + (-t + rt^2 + t^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k} r^{k-1}) dr]. \end{aligned}$$

Fazemos $\tilde{\tilde{\Omega}}(r, t) = (-r + 2rt + 2r^2t + 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k-1} r^k) dt + (-t + rt^2 + t^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k} r^{k-1}) dr$. O campo associado é

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{X}}(r, t) &= (-r + 2rt + 2r^2t + 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k-1} r^k) \frac{\partial}{\partial r} \\ &+ (t - rt^2 - t^2 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{2k} r^{k-1}) \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

A matriz da parte linear de $\tilde{\tilde{X}}$ é

$$M_{\tilde{\tilde{X}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Então $\lambda_1/\lambda_2 = -1 \in \mathbb{R}_-$. Essa singularidade está resolvida e é do tipo Siegel. Agora, considere novamente $\tilde{\tilde{\Omega}}(x, t) = -t + tx + t^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{k+1} x^{k-1} dx + (x^2 + tx + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k x^k) dt$, e veja o blow-up no sistema de coordenadas $t = ux$ associado à outra carta. Assim

$$\begin{aligned} \pi^*(\tilde{\tilde{\Omega}}) &= \tilde{\tilde{\Omega}}(x, ux) \\ &= (-(ux) + (ux)x + (ux)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (ux)^{k+1} x^{k-1}) dx \\ &+ (x^2 + (ux)x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (ux)^k x^k) d(ux) \\ &= (-ux + ux^2 + u^2x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^{k+1} x^{2k}) dx \\ &+ (x^2 + ux^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^k x^{2k})(udx + xdu) \\ &= (-ux + ux^2 + u^2x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^{k+1} x^{2k} + ux^2 + u^2x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^{k+1} x^{2k}) dx \\ &+ (x^3 + ux^3 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^k x^{2k+1}) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-ux + 2ux^2 + 2u^2x^2 + 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^{k+1} x^{2k}) dx \\
&+ (x^3 + ux^3 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^k x^{2k+1}) du \\
&= x[(-u + 2ux + 2u^2x + 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^{k+1} x^{2k-1}) dx \\
&+ (x^2 + ux^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^k x^{2k}) du].
\end{aligned}$$

Fazemos $\tilde{\Omega}(x, u) = (-u + 2ux + 2u^2x + 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^{k+1} x^{2k-1}) dx + (x^2 + ux^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^k x^{2k}) du$. O campo associado é

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(r, t) &= (x^2 + ux^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^k x^{2k}) \frac{\partial}{\partial x} \\
&+ (u - 2ux - 2u^2x - 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k u^{k+1} x^{2k-1}) \frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}$$

A matriz da parte linear de \tilde{X} é

$$M_{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{\tilde{X}}$ é nilpotente e seus autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Veremos a seguir que essa será a configuração geral dos blow-ups: Uma singularidade nilpotente persistente, e todas as demais tipo Siegel, com autovalores $\lambda_1/\lambda_2 = -1 \in \mathbb{R}_-$.

Afirmção 4.2.1. Após n blow-ups a origem do sistema de coordenadas que contém o eixo X , possui uma singularidade nilpotente e a folheação associada é dada por

$$\begin{aligned}
\xi_n &= (-y + nyx + nx^{n-1}y^2 + n \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{k+1} x^{nk-1}) dx \\
&+ (x^2 + yx^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k x^{nk}) dy. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Prova da afirmação 4.2.1. Usaremos um argumento de indução sobre o número n de blow-ups. Para $n = 0$, reobtemos a forma de Hill inicial. Os casos $n = 1, 2$ foram feitos acima. Então supomos que (4.12) seja

válida para algum $n > 2$. Realizamos novo blow-up e consideramos a carta $y = xt$. Logo,

$$\begin{aligned}
\pi^*\xi_n &= \xi_n(x, tx) \\
&= (-tx + ntx^2 + nx^{n-1}(tx)^2 + n \sum_{k=2}^{\infty} a_k(xt)^{k+1}x^{nk-1})dx \\
&\quad + (x^2 + (tx)x^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(xt)^kx^{nk})(xdt + tdx) \\
&= (-tx + ntx^2 + nt^2x^{n+1} + tx^2 + t^2x^{n+1} + (n+1) \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{k+1}x^{(n+1)k})dx \\
&\quad + (x^3 + tx^{n+2} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k x^{(n+1)k+1})dt.
\end{aligned}$$

Evidenciando x , denotamos por ξ_{n+1} a 1-forma

$$\begin{aligned}
&(-t + (n+1)tx + (n+1)t^2x^n + (n+1) \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^{k+1}x^{(n+1)k-1})dx \\
&+ (x^2 + tx^{n+1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k x^{(n+1)k})dt. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Isso conclui a prova da indução e, portanto, da afirmação 4.2.1. \square

Observe que realizando um blow-up na singularidade de ξ_n , dada em (4.12), mas agora, porém, considerando a carta $x = sy$, temos

$$\begin{aligned}
\pi^*\xi_n &= \xi_n(sy, y) \\
&= (-y + ny(sy) + n(sy)^{n-1}y^2 + n \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{k+1}(sy)^{nk-1})(sdy + yds) \\
&\quad + ((sy)^2 + y(sy)^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^k (sy)^{nk})dy \\
&= (-y + nsy^2 + ns^{n-1}y^{n+1} + n \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{(n+1)k} s^{nk-1})(sdy + yds) \\
&\quad + (s^2y^2 + s^ny^{n+1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{(n+1)k} s^{nk})dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-ys + ns^2y^2 + ns^ny^{n+1} + s^2y^2 + s^ny^{n+1} + (n+1) \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{(n+1)k} s^{nk}) dy \\
&+ (-y^2 + nsy^3 + ns^{n-1}y^{n+2} + n \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{(n+1)k+1} s^{nk-1}) ds
\end{aligned}$$

Evidenciando y , podemos concluir o seguinte.

Afirmção 4.2.2. As demais singularidades que surgem a cada novo blow-up estão nas esquinas das linhas projetivas e a folheação associada em cada esquina $\mathbb{P}_j \cap \mathbb{P}_{j+1}$ é dada por

$$\begin{aligned}
&(-y + jsy^2 + js^{j-1}y^{j+1} + n \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{(n+1)k} s^{nk-1}) ds \\
&+ (-s + (j+1)s^2y + (j+1)s^jy^j + (n+1) \sum_{k=2}^{\infty} a_k y^{(n+1)k-1} s^{nk}) dy.
\end{aligned}$$

Concluimos a prova do lema observando que a matriz da parte linear do campo dual associado à 1-forma acima é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, as singularidades que surgem nas esquinas são do tipo Siegel, com autovalores $\lambda_1/\lambda_2 = -1 \in \mathbb{R}_-$.

Com isso terminamos a prova da proposição. \square

4.3 A integral primeira formal do tipo Laurent-Fourier

Hill construiu soluções periódicas para $u''(z) + p(z)u'(z)$, onde p é uma função periódica, na forma de séries trigonométricas

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \cos((2k+1)z), \quad v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \text{sen}((2k+1)z),$$

onde os coeficientes A_{2k+1}, B_{2k+1} são representados por séries de potências formais com respeito a k . Hill não estudou sua convergência, e a primeira tentativa de estimar o raio de convergência dessas séries foi feita por Lyapunov [46].

Seja

$$u''(z) + p(z)u(z) = 0, \tag{4.14}$$

onde p é uma função periódica holomorfa definida em uma faixa $A \subset \mathbb{C}$, contendo o eixo real $\Im(z) = 0$.

A redução de ordem do problema é dada por $x = u, y = u'$ e Então obtemos o problema linear de primeira ordem $X' = AX$, onde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\text{e } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

A equação característica da matriz A é $\lambda^2 + p(z) = 0$ que admite raízes simétricas. Aplicando a teoria clássica de Floquet concluímos que uma solução da equação de Hill é da forma

$$\varphi_1(z) = c_1 e^{\mu z} P(z) \quad (4.15)$$

onde c_1, μ são constantes (μ é um expoente característico) e $P(z)$ é uma função analítica periódica complexa (veja por exemplo [37] pág 244). Além disso, outra solução para (4.14), linearmente independente com respeito a φ_1 é dada por

$$\varphi_2(z) = c_1 e^{-\mu z} P(-z) \quad (4.16)$$

Como corolário imediato do Teorema D (pág.41, Seção 4) temos uma integral primeira da folheação de Hill $\mathcal{H} : \omega_{\mathcal{H}} = -ydx + xdy + [y^2 + p(z)x^2] = 0$, de parâmetro p como segue

$$H_p(x, y, z) = \frac{x\varphi_1'(z) - y\varphi_1(z)}{x\varphi_2'(z) - y\varphi_2(z)}.$$

Substituindo (4.15) e (4.16) na expressão acima obtemos o seguinte.

Corolário 4.3.1. A folheação de Hill de parâmetro $p(z)$, periódica e holomorfa numa faixa $A \subseteq \mathbb{C}$, admite uma integral da forma

$$H_p(x, y, z) = e^{2\mu z} \frac{x\mu P(z) + xP'(z) - yP(z)}{-x\mu P(-z) + xP'(-z) - yP(-z)},$$

onde $P(z)$ é uma função holomorfa periódica e μ é uma constante.

Suponha que P seja uma função periódica, de período $2\pi i$, holomorfa definida em uma faixa $A \subseteq \mathbb{C}$ contendo o eixo real $\Im(z) = 0$. Da Proposição 4.2.1, $P(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{kz}$. Substituindo as séries de $P'(z)$, $P(-z)$ e $P'(-z)$ na expressão de $H_p(x, y, z)$ acima, temos

$$H_p = e^{2\mu z} \frac{x\mu \sum_k a_k e^{kz} + x \sum_k k a_k e^{kz} - y \sum_k a_k e^{kz}}{-x\mu \sum_k a_k e^{-kz} - x \sum_k k a_k e^{-kz} - y \sum_k a_k e^{-kz}}. \quad (4.17)$$

Chamaremos a função H_p de *integral primeira formal do tipo Laurent-Fourier*.

Teorema E. Seja $p(z)$ uma função periódica, holomorfa na faixa $A \subseteq \mathbb{C}$, contendo o eixo real $\Im(z) = 0$. Então a folheação de Hill correspondente $-ydx + xdy + [y^2 + p(z)x^2] = 0$ admite uma integral primeira tipo Laurent-Fourier dada pela expressão

$$H_p = e^{2\mu z} \frac{x\mu \sum_k a_k e^{kz} + x \sum_k k a_k e^{kz} - y \sum_k a_k e^{kz}}{-x\mu \sum_k a_k e^{-kz} - x \sum_k k a_k e^{-kz} - y \sum_k a_k e^{-kz}}. \quad (4.18)$$

onde Σ_k significa $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$.

Observação 4.3.1. O termo *formal* na afirmação acima refere-se ao quociente de séries de Laurent (ie., quocientes de séries com um número infinito de termos com expoentes positivos e negativos). A convergência de tais séries é objeto de profunda discussão. De qualquer forma, uma vez que se tenha feito a convenção acima, podemos dizer que H_p é uma integral primeira formal para a folheação de Hill. A mudança de coordenadas $\Pi(x, y, z) = (u, v)$ onde $u = -\frac{y}{x}$ e $v = e^z$ fornece a seguinte integral primeira formal:

$$H = \Pi^* F(u, v) = v^{2\mu} \frac{\mu \sum_k a_k v^k + \sum_k k a_k v^k + u \sum_k a_k v^k}{-\mu \sum_k a_k v^{-k} - \sum_k k a_k v^{-k} + u \sum_k a_k v^{-k}}. \quad (4.19)$$

Capítulo 5

A equação de Mathieu

Um caso particular, porém muito especial, da equação de Hill é a equação de Mathieu. Neste capítulo, abordamos essa equação clássica, sob o ponto de vista das técnicas desenvolvidas até o momento.

5.1 Introdução

Um fenômeno muito comum na natureza é o movimento de uma membrana plana, homogênea, esticada, cujo contorno é fixo e invariável. Em 1868, Émile Mathieu publicou o trabalho "*Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*" [51]. Ao investigar o problema de membrana, Mathieu obteve a equação diferencial

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z)u = 0, \quad (5.1)$$

sendo $a, q \in \mathbb{R}$ constantes, e $z \in I \subset \mathbb{R}$. Portanto, a equação (5.1) ficou classicamente conhecida por *Equação de Mathieu*. A partir do trabalho de Mathieu foram descobertas muitas aplicações dessa equação em diferentes áreas da ciência (por exemplo, vibração de um tambor elíptico, rádio frequência, estabilidade de corpos flutuantes, pêndulo invertido, osciladores paramétricos, movimento de uma partícula quântica em um potencial periódico, autofunções do pêndulo quântico, etc). Sugerimos [66] para o leitor apreciar um texto interessante que reúne algumas dessas aplicações.

A seguir, abordaremos o caso mais geral da equação (5.1) no sentido em que permitimos à função cosseno ser complexa (portanto, não limitada), e aos parâmetros a, q assumirem valores complexos. Um dos objetivos é trazer para o contexto de folheações uma das mais importantes equações periódicas, dentro da classe das equações de Hill, empregando algumas das técnicas desenvolvidas.

5.2 A folheação de Mathieu

Seja

$$u''(z) + (a - 2q \cos 2z)u(z) = 0, \quad (5.2)$$

a equação de Mathieu de parâmetros (constante) $q, a \in \mathbb{C}$, e $z \in \mathbb{C}$. Ou seja, a equação (5.2) é um caso particular da equação de Hill, $u''(z) + p(z)u(z) = 0$, onde a função periódica considerada é dada por $p(z) = a - 2q \cos 2z$.

Realizando o processo de redução de ordem clássica, $x = u$, $y = u'$, $z = z$, a equação de Mathieu é reescrita como $x' = u' = y$, $y' = u'' = -(a - 2q \cos 2z)$, $z' = 1$. Portanto, um campo de vetores $X : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}^2 \times U$, associado à equação de Mathieu é dada por $X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - (a - 2q \cos 2z) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. Segue do Teorema A (pág. 15, Seção 2.2) que existe uma folheação \mathcal{M} , determinada pela 1-forma integrável,

$$\omega_{\mathcal{M}} = -ydx + xdy + [(a - 2q \cos 2z)x^2 + y^2]dz. \quad (5.3)$$

definida em \mathbb{C}^3 , tangente ao campo X . Chamaremos a folheação \mathcal{M} de *folheação de Mathieu com parâmetros* (q, a) .

Agora, consideremos a mudança de coordenadas, dadas por

$$\varphi = -\frac{y}{x}, \quad \psi = e^{2iz}. \quad (5.4)$$

Logo,

$$2 \cos(2z) = 2 \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = \psi + \psi^{-1}$$

implica que

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{M}} &= -ydx + xdy + [(a - 2q \cos(2z))x^2 + y^2]dz \\ &= x^2 \left[-d \left(-\frac{y}{x} \right) + [a - q(e^{2iz} + e^{-2iz}) + \frac{y^2}{x^2}]dz \right] \\ &= x^2 \left[-d\varphi + \left(a - q \left(\psi + \frac{1}{\psi} \right) + \varphi^2 \right) \frac{d\psi}{2i\psi} \right] \\ &= \frac{x^2}{2i\psi^2} [-2i\psi^2 d\varphi + (a\psi - q(\psi^2 + 1) + \varphi^2\psi) d\psi]. \end{aligned}$$

Portanto, a folheação de Mathieu está associada diretamente uma 1-forma, em \mathbb{C}^2 , dada por

$$\Omega_{\mathcal{M}} = -2iy^2 dx + (ay - q(y^2 + 1) + x^2 y) dy. \quad (5.5)$$

5.3 A forma algébrica

Existe uma mudança de coordenadas clássica (veja por exemplo, [6], Seção 1.3.1, pg. 11) que transforma a equação clássica de Mathieu em uma outra equação sem termos trigonométricos, ou seja, apenas com termos polinomiais. De fato, fazemos $\cos(s) = z$, e

$$\frac{dz}{ds} = -\operatorname{sen}(s) \quad e, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = -\cos(s).$$

Então

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{du}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(-\operatorname{sen}(s) \frac{du}{ds} \right) = -\cos(s) \frac{du}{dz} + \operatorname{sen}^2(s) \frac{d^2u}{dz^2}.$$

Isso implica que a equação (5.1) pode ser reescrita na *forma algébrica da equação de Mathieu* dada por

$$(1 - z^2)u'' - zu' + (a + 2q - 4qz^2)u = 0. \quad (5.6)$$

Assim, conforme procedemos anteriormente, iniciamos pela redução de ordem da equação,

$$x' = y, \quad y' = \frac{z}{1 - z^2}y - \frac{a + 2q - 4qz^2}{1 - z^2}x, \quad z' = 1 \quad (5.7)$$

obtendo o campo

$$X_{\mathcal{A}} = y \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{z}{1 - z^2}y - \frac{a + 2q - 4qz^2}{1 - z^2}x \right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.8)$$

Novamente, pelo Teorema A (pág. 15, Seção 2.2), existe uma 1-forma integrável, em \mathbb{C}^3 ,

$$\omega_{\mathcal{A}} = -(1 - z^2)ydx + (1 - z^2)xdy + [(1 - z^2)y^2 - xyz + (a + 2q - 4qz^2)x^2]dz$$

tangente ao campo $X_{\mathcal{A}}$. Diremos que a folheação \mathcal{A} determinada por $\omega_{\mathcal{A}} = 0$, é a *folheação de Mathieu na forma algébrica*.

Através da mudança de coordenadas $\varphi = -\frac{y}{x}$, obtemos

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{A}} &= -(1 - z^2)ydx + (1 - z^2)xdy + [(1 - z^2)y^2 - xyz + (a + 2q - 4qz^2)x^2]dz \\ &= x^2[-(1 - z^2)d\left(-\frac{y}{x}\right) + [(1 - z^2)\frac{y^2}{x^2} - \frac{yz}{x} + (a + 2q - 4qz^2)]]dz \\ &= x^2[-(1 - z^2)d\varphi + [(1 - z^2)\varphi^2 + \varphi z + a + 2q - 4qz^2]dz]. \end{aligned}$$

Dessa maneira, associada à 1-forma algébrica,

$$\omega_{\mathcal{A}} = -(1 - z^2)ydx + (1 - z^2)xdy + [(1 - z^2)y^2 + xyz - (a + 2q - 4qz^2)x^2]dz$$

temos uma 1-forma em \mathbb{C}^2 dada por

$$\Omega_{\mathcal{A}} = -(1 - y^2)dx + [(1 - y^2)x^2 + xy - a - 2q + 4qy^2]dy$$

Observe que $\Omega_{\mathcal{A}}$ admite duas singularidades isoladas em

$$\alpha_1 = (a + 2q, 1) \text{ e } \alpha_2 = (-a - 2q, -1).$$

A seguir, estabelecemos a relação entre a folheação de Mathieu e a folheação de Mathieu algébrica. Consequentemente, obtemos a relação existente entre os respectivos modelos bidimensionais. A partir da forma algébrica de Mathieu

$$\omega_{\mathcal{A}} = -(1 - z^2)ydx + (1 - z^2)xdy + [(1 - z^2)y^2 - xyz + (a + 2q - 4qz^2)x^2]dz,$$

consideramos a seguinte mudança de coordenadas: $\varphi = -y\text{sen}(t)$ e $z = \text{cos}(t)$. Observe que $d\varphi = -\text{sen}(t)dy + \text{cos}(t)dt$, e $dz = \text{sen}(t)dt$. Logo,

$$\begin{aligned} & -(1 - z^2)ydx + (1 - z^2)xdy + [(1 - z^2)y^2 - xyz + (a + 2q - 4qz^2)x^2]dz \\ = & -(1 - \text{cos}^2(t))ydx + (1 - \text{cos}^2(t))xdy \\ + & [(1 - \text{cos}^2(t))y^2 - xy\text{cos}(t) + (a + 2q - 4q\text{cos}^2(t))x^2](-\text{sen}(t))dt \\ = & -(\text{sen}^2(t))ydx + (\text{sen}^2(t))xdy \\ & + [(\text{sen}^2(t))y^2 - xy\text{cos}(t) + (a + 2q - 4q\text{cos}^2(t))x^2](-\text{sen}(t))dt. \end{aligned}$$

Dividindo essa última equação por $\text{sen}(t)$, segue que

$$\begin{aligned} & -(\text{sen}(t))ydx + (\text{sen}(t))xdy \\ - & [(\text{sen}^2(t))y^2 - xy\text{cos}(t) + (a + 2q - 4q\text{cos}^2(t))x^2]dt \\ = & -(\text{sen}(t))ydx + [\text{sen}(t)xdy + xy\text{cos}(t)dt] \\ - & [(\text{sen}^2(t))y^2 + (a + 2q(1 - 2q\text{cos}^2(t)))x^2]dt \\ = & -(\text{sen}(t))ydx + x[\text{sen}(t)dy + y\text{cos}(t)dt] \\ - & [(\text{sen}^2(t))y^2 + (a - 2q\text{cos}(2t))x^2]dt \\ = & \varphi dx - x[d\varphi] - [\varphi^2 + (a - 2q\text{cos}(2t))x^2]dt. \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando a expressão por -1 ,

$$-\varphi dx + x d\varphi + [\varphi^2 + (a - 2q\text{cos}(2t))x^2]dt.$$

Essa 1-forma correspondente à forma que define a folheação de Mathieu (5.3).

Conclusão: *Portanto, a menos de uma mudança de coordenadas as 1-formas*

$$\omega_{\mathcal{M}} = -ydx + xdy + [(a - 2q\text{cos} 2z)x^2 + y^2]dz,$$

e

$$\omega_{\mathcal{A}} = -(1 - z^2)ydx + (1 - z^2)x dy + [(1 - z^2)y^2 - xyz + (a + 2q - 4qz^2)x^2]dz$$

são correspondentes. Em particular, os modelos bidimensionais

$$\Omega_{\mathcal{M}} = -2iy^2dx + (ay - q(y^2 + 1) + x^2y) dy$$

e,

$$\Omega_{\mathcal{A}} = -(1 - y^2)dx + [(1 - y^2)x^2 + xy - a - 2q + 4qy^2]dy$$

também são correspondentes.

5.4 As funções de Mathieu

Considere a equação de Mathieu

$$u''(z) + (a - 2q \cos 2z)u(z) = 0, \quad (5.9)$$

de parâmetros (constantes) $q, a \in \mathbb{C}$, e $z \in \mathbb{C}$. No caso em que $q = 0$, e escrevendo $a = m^2$, concluímos que $\cos(mz)$ e $\sin(mz)$ são soluções de (5.9). A constante m é denominada *ordem da equação de Mathieu* e pode ser real ou complexa. Desde que os coeficientes da equação são analíticos, o Teorema 3.1.1 (Método de Frobenius por séries) garante a existência de duas soluções linearmente independentes $w_1(z), w_2(z)$. Além disso, é possível provar que uma das soluções é par, e a outra é ímpar (Veja por exemplo, [6], pág.27, Teorema 3).

A busca por soluções periódicas é um processo mais delicado. A estratégia classicamente utilizada para estudá-las é feita decompondo o parâmetro a como uma série em função de q , a saber, $a = m^2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j q^j$. E, após descobrir os coeficientes, observamos a convergência da série obtida. A seguir, discutimos um caso particular.

Exemplo 5.4.1. Seja $u''(x) + (a - 2q \cos 2x)u(x) = 0$. Suponhamos que a ordem da equação seja igual um, ou seja, $m = 1$. Escrevemos a como uma série em termos de q , $a = 1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \dots$. Desde que no caso $q = 0$, temos que a função $\cos(z)$ é uma solução, iremos decompor a solução w como uma série da forma $w(z) = \sum_0^{\infty} q^j c_j(z) = \cos(z) + q c_1(z) + q^2 c_2(z) + q^3 c_3(z) + \dots$, onde $c_j(z)$ são funções a serem determinadas (supondo que w seja periódica). Assim,

$$\begin{aligned} aw(z) &= \cos(z) + q[c_1(z) + \alpha_1 \cos(z)] + q^2[c_2(z) + \alpha_1 c_1(z) + \alpha_2 \cos(z)] \\ &\quad + q^3[c_3(z) + \alpha_1 c_2(z) + \alpha_2 c_1(z) + \alpha_3 \cos(z)] + \dots \end{aligned}$$

Derivando w duas vezes em relação a z , temos

$$w''(z) = -\cos(z) + qc_1''(z) + q^2c_2''(z) + q^3c_3''(z) + \dots$$

Alem disso,

$$-(2q \cos(z))y = -2q \cos(2z) \cos(z) - 2q^2c_1(z) \cos(2z) - 2q^3c_2(z) \cos(2z) - \dots$$

Observamos que $2q \cos(2z) \cos(z) = q(\cos(z) + \cos(3z))$. Assim, substituindo cada uma dessas expressões na equação de Mathieu, e igualando os coeficientes em termos das potências de q , obtemos:

$$\begin{aligned} q^0 : \quad & \cos(z) - \cos(z) \equiv 0 \\ q : \quad & c_1''(z) + c_1(z) - \cos(3z) + (\alpha_1 - 1) \cos(z) = 0. \end{aligned}$$

Tomando $\alpha_1 = 1$, obtemos $c_1''(z) - c_1(z) = \cos(3z)$. Essa equação admite solução $c_1(z) = -\frac{1}{8} \cos(3z)$. Analisando os coeficientes na potência q^2 , temos

$$q^2 : \quad c_2''(z) + c_2(z) + \alpha_1 c_1(z) - 2c_1 \cos(2z) + \alpha_2 \cos(z) = 0.$$

Substituindo nessa última equação os valores de α_1 , e $c_1(z)$ encontrados anteriormente, e fazendo $\cos(3z) \cos(2z) = \frac{1}{2}(\cos(z) + \cos(5z))$ chegamos a

$$c_2''(z) + c_2(z) + \frac{1}{8} \cos(3z) - \frac{1}{8} \cos(5z) + \left(\frac{1}{8} + \alpha_2\right) \cos(z) = 0.$$

Tomando $\alpha_2 = -\frac{1}{8}$, obtemos a equação

$$c_2''(z) + c_2(z) = \frac{1}{8} \cos(3z) - \frac{1}{8} \cos(5z).$$

Essa equação admite como solução $c_2(z) = -\frac{1}{64} \cos(3z) + \frac{1}{192} \cos(5z)$. Analisando os termos de ordem 3, temos

$$c_3''(z) - 2c_2(z) \cos(2z) + c_3(z) + \alpha_1 c_2(z) + \alpha_2 c_1(z) + \alpha_3 \cos(z).$$

Substituindo os valores de $\alpha_1, \alpha_2, c_2(z)$ obtidos anteriormente, e usando $\cos(5z) \cos(2z) = \frac{1}{2}(\cos(3z) + \cos(7z))$, encontramos

$$c_3''(z) + c_3(z) = -\frac{1}{192} \cos(7z) + \frac{1}{48} \cos(5z) - \frac{1}{192} \cos(3z) - \left(\alpha_3 + \frac{1}{64}\right) \cos(z).$$

Tomando $\alpha_3 = -1/64$, obtemos uma solução

$$c_3(z) = -\frac{1}{512} \left(\frac{1}{3} \cos(3z) - \frac{4}{9} \cos(5z) + \frac{1}{18} \cos(7z) \right)$$

Logo, construímos a série

$$ce_1(z, q) = \cos(z) - \frac{1}{8}q \cos(3z) + \frac{1}{64}q^2 \left(-\cos(3z) + \frac{1}{3} \cos(5z) \right) \\ - \frac{1}{512}q^3 \left(\frac{1}{3} \cos(3z) - \frac{4}{9} \cos(5z) + \frac{1}{18} \cos(7z) \right) + O(q^4).$$

No caso em que $z \in \mathbb{R}$ a função cosseno é limitada com $|\cos((2j+1)z)| \leq 1$, para todo $j \geq 0$. Logo,

$$|ce_1(z, q)| \leq 1 + \frac{1}{8}|q| + \frac{1}{64}|q|^2 \left(1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{512}|q|^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{1}{18} \right) + O(q^4).$$

Fixemos um valor suficientemente pequeno de q . Por exemplo, $q = 1/2$. Segue do bem conhecido teste-M de Weierstrass que a série $ce_1(z, 1/2)$ é uniformemente convergente para todo $z \in \mathbb{R}$. Entretanto, o parâmetro a depende de q . Por isso, precisamos encontrar os valores de a para os quais a função $ce_1(z, 1/2)$ seja uma solução periódica da equação de Mathieu de parâmetros $(a, 1/2)$. Para isso, lembramos que a foi tomado em termos da série $a = 1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \dots$. Substituindo os valores de α_j encontrados acima temos

$$a = 1 + (1/2) - \frac{1}{8}(1/2)^2 - \frac{1}{64}(1/2)^3 + O(q^4).$$

Logo, $a = \frac{751}{512} + O(\frac{1}{16})$. Portanto, a função $ce_1(z, 1/2)$ é solução periódica de período 2π , par, da equação de Mathieu (real) $u'' + (a - \cos(2z))u = 0$, onde a é dado aproximadamente por $\frac{751}{512}$, com um erro da ordem de $1/16$.

Assumindo a existência de soluções periódicas para a equação de Mathieu, é possível provar que se dividem em quatro tipos (veja por exemplo, [6], pág. 39):

- I) Par de período π ;
- II) Par de período 2π ;
- III) Ímpar de período π ;
- IV) Ímpar de período 2π .

Essas funções são conhecidas por *funções de Mathieu de primeiro tipo* e são denotadas respectivamente por $ce_{2n}(q, z)$, $ce_{2n+1}(q, z)$, $se_{2n}(q, z)$, $se_{2n+1}(q, z)$, onde q é o parâmetro da equação de Mathieu de ordem $2n$ ou $2n + 1$. A notação refere-se à nomenclatura *cosseno e seno elípticos* respectivamente. Diferentemente de funções especiais como as funções de Bessel, função

Gama, função erro, entre outras, as funções de Mathieu não possuem uma fórmula usual que as defina de maneira geral. A maneira mais comum de representá-las é por meio da expansão em séries de Fourier. Para cada uma das quatro soluções citadas acima temos:

$$\begin{aligned}
ce_{2n}(q, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{2n} \cos(2kz); \\
ce_{2n+1}(q, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{2n+1} \cos((2k+1)z); \\
se_{2n}(q, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}^{2n} \text{sen}((2k)z); \\
se_{2n+1}(q, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{2n+1} \text{sen}((2k+1)z).
\end{aligned}$$

onde os coeficientes A_j^m, B_j^m dependem do parâmetro q . Ressaltamos que as expressões acima são séries formais, no sentido que não é garantida sua convergência.

Observação 5.4.1. As expressões $\cos(mz) + \sum_{j=1}^{\infty} q^j c_j(z)$ e $\sum_{k=0}^{\infty} A_k^m \cos(2kz)$ são equivalentes.

Definição 5.4.1. Seja

$$u'' + (a - 2q \cos(2z))u = 0 \quad (5.10)$$

a equação de Mathieu, de parâmetros arbitrários a, q . Fixado um número q (real ou complexo) dizemos que a é um *número característico* se a equação (5.10) admite como solução uma função de Mathieu de primeiro tipo $ce_m(q, z)$ ou $se_m(q, z)$, onde m é a ordem da equação.

No exemplo 5.4.1 uma solução $ce_1(z, q)$ para a equação de Mathieu (domínio real) encontrando um número característico $a = \frac{751}{512} + O(\frac{1}{16})$, para o parâmetro $q = 1/2$.

Em domínio real, a equação de Mathieu com parâmetro $q \in \mathbb{R}$ possuem números característicos (também reais) variando continuamente em função de q . Neste caso os números característicos podem ser dispostos em gráficos e tabelas (veja por exemplo [53] pág. 40 Fig. 8(A) e pág. 41 Fig. 8(B)).

Um resultado fundamental é o seguinte Teorema.

Teorema 5.4.1. [42] Exceto para o caso trivial $q = 0$, a equação de Mathieu nunca possui duas soluções periódicas para os mesmos valores de a e q .

Portanto, fixados os parâmetros a e q , se a equação de Mathieu dada por

$$u''(z) + (a - 2 \cos(2z))u(z) = 0,$$

admite uma solução periódica, então essa solução é $ce_m(z, q)$ ou $se_m(z, q)$, e as duas não podem ser solução da mesma equação para os parâmetros a, q .

5.4.1 As funções de Mathieu de segundo tipo

No caso em que a equação de Mathieu admite uma solução periódica podemos investigar a existência de uma segunda solução linearmente independente, a partir das funções de Mathieu de primeiro tipo. Conhecidas por *funções de Mathieu de segundo tipo* essas soluções são dadas por

$$\begin{aligned} fe_n(z, q) &= C_n(q)zce_n(z, q) + f_n(z, q) \\ ge_n(z, q) &= S_n(q)zse_n(z, q) + g_n(z, q) \end{aligned}$$

onde $ce_n(z, q), se_n(z, q)$ são as funções de Mathieu de primeiro tipo, $C_n(q), S_n(q)$ são constantes dependendo somente de q , e f_n, g_n são funções periódicas em z com o mesmo período da respectiva função de Mathieu de primeiro tipo $ce_n(z, q)$ ou $se_n(z, q)$ associada (veja [6], pág.37, Corolário 2). Para determinar essas segundas soluções é preciso determinar as constantes C_n, S_n e as funções periódicas f_n, g_n .

Exemplo 5.4.2. Considere a função de Mathieu de primeiro tipo $ce_1(z, q)$, determinada no exemplo 5.4.1. Segue da definição que $fe_1(z, q) = C_1(q)zce_1(z, q) + f_1(z, q)$, onde $C_1(q)$ é uma constante que depende apenas de q , e $f_1(z, q)$ é uma função periódica de período π . Substituindo fe_1 na equação de Mathieu, $u''(z) + (a - 2q \cos(2z))u(z) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} C_1(q)ce_1'(z, q) + C_1(q)ce_1'(z, q) + C_1(q)zce_1''(z, q) \\ + f_1''(z, q) + (a - 2q \cos(2z))[C_1(q)zce_1(z, q) + f_1(z, q)] = 0 \end{aligned}$$

Desde que ce_1 é solução da equação de Mathieu (com parâmetros a, q) temos $ce_1''(z, q) + (a - 2q \cos(2z))ce_1(z, q) = 0$. Então,

$$f_1''(z, q) + 2C_1(q)ce_1'(z, q) + (a - 2q \cos(2z))f_1(z, q) = 0. \quad (5.11)$$

Assumimos $C_1(q) = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r q^r$. Além disso, escrevemos $f_1(z, q) = \text{sen}(z) + \sum_{r=1}^{\infty} q^r S_r(z)$. Então,

$$\begin{aligned} f_1''(z, q) &= -\text{sen } z + qS_1'' + q^2S_2'' + q^3S_3'' + \dots \\ 2C_1(q)ce_1'(z, q) &= -2[\text{sen } z - \frac{3}{8}q \text{sen } 3z \\ &\quad + \frac{1}{64}q^2 \left(-3 \text{sen } 3z + \frac{5}{3} \text{sen } 5z \right) - \dots][\alpha_1q + \alpha_2q^2 + \dots] \end{aligned}$$

Uma vez que estamos considerando $z \in \mathbb{R}$, usando argumentos análogos aos do exemplo 5.4.1, podemos obter

$$fe_1(z, q) = C_1(1/2)zce_1(z, 1/2) + f_1(z, 1/2),$$

onde $C_1(1/2) = [1/2 - 3/64(1/2)^3 - 3/256(1/2)^4 + \dots]$.

5.5 Integrais primeiras para a folheação de Mathieu

Sabemos que a equação de Mathieu sempre admite duas soluções linearmente independentes, sendo uma solução par e outra ímpar (veja Seção 5.4). Portanto, como consequência do Teorema D (pág.41, Seção 4) temos o seguinte.

Corolário 5.5.1. A folheação de Mathieu, determinada por

$$\omega_{\mathcal{M}} = -ydx + xdy + [(a - 2q \cos 2z)x^2 + y^2]dz$$

de parâmetros (q, a) , admite uma integral primeira $H : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$H(x, y, z) = \frac{xw_1'(z) - yw_1(z)}{xw_2'(z) - yw_2(z)}.$$

onde w_1, w_2 são as soluções par e ímpar, linearmente independentes da equação de Mathieu $u'' + (a - 2q \cos(2z))u = 0$.

A convergência das soluções periódicas nem sempre é garantida. Um resultado clássico nessa direção que aborda a equação no caso complexo é o seguinte:

Teorema 5.5.1. [82] Considere a equação de Mathieu $u'' + (a - 2q \cos(2z))u = 0$, onde $32\|q\|^2 < 1$, e a é um número característico. Se $32\|q\|^2 < 1$ então $ce_0(z, q)$ converge para todo z real ou complexo. Em particular, a convergência também ocorre para a segunda solução $fe_0(z, q)$.

Trazendo esse resultado para a abordagem apresentada, considere a folheação de Mathieu, determinada por

$$\omega_{\mathcal{M}} = -ydx + xdy + [(a - 2q \cos 2z)x^2 + y^2]dz$$

onde os parâmetros a, q satisfazem as hipóteses do Teorema 5.5.1. Então, $\omega_{\mathcal{M}} = 0$ admite uma integral primeira

$$H(x, y, z) = \frac{xce'_0(z) - yce_0(z)}{fe'_0(z) - yfe_0(z)},$$

onde ce_0, fe_0 são as funções de Mathieu de primeiro e segundo tipo, respectivamente.

Capítulo 6

Integrabilidade das equações lineares de segunda ordem

Neste capítulo, mostramos que algumas das técnicas e modelos obtidos se estendem a todas as EDOs lineares de segunda ordem.

6.1 Existência de forma integrável

O resultado a seguir garante a w -integrabilidade para todas as EDOs lineares homogêneas de segunda ordem .

Teorema F. Considere a equação linear homogênea de segunda ordem dada por

$$a(z)u''(z) + b(z)u'(z) + c(z)u = 0,$$

onde $a, b, c : U \rightarrow \mathbb{C}$ são funções holomorfas em um aberto $U \subset \mathbb{C}$. Sejam $U' = U \setminus Z_a$, onde Z_a é o conjunto de zeros de a , e $X : \mathbb{C}^2 \times U' \rightarrow \mathbb{C}^3$ o campo de vetores dado por

$$X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - \left[\frac{b(z)}{a(z)}y + \frac{c(z)}{a(z)}x \right] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Então, a 1-forma holomorfa definida em $\mathbb{C}^2 \times U$,

$$\omega = -a(z)ydx + a(z)x dy + [a(z)y^2 + b(z)xy + c(z)x^2]dz,$$

é integrável e o campo X é tangente à folheação determinada por $\omega = 0$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
& \omega \wedge d\omega \\
&= [-aydx + axdy + [ay^2 + bxy + cx^2]dz] \\
& \quad \wedge [-a'ydz \wedge dx - ady \wedge dx + a'xdz \wedge dy \\
& \quad + adx \wedge dy + [by + 2cx]dx \wedge dz + [2ay + bx]dy \wedge dz] \\
&= -aa'xydx \wedge dz \wedge dy - ay[2ay + bx]dx \wedge dy \wedge dz \\
& \quad -aa'xydy \wedge dz \wedge dx + ax[by + 2cx]dy \wedge dx \wedge dz \\
& \quad -a[ay^2 + bxy + cx^2]dz \wedge dy \wedge dx + a[ay^2 + bxy + cx^2]dz \wedge dx \wedge dy \\
&= aa'xydx \wedge dy \wedge dz - [2a^2y^2 + abxy]dx \wedge dy \wedge dz \\
& \quad -aa'xydx \wedge dy \wedge dz - [abxy + 2acx^2]dx \wedge dy \wedge dz \\
& \quad + [a^2y^2 + abxy + acx^2]dx \wedge dy \wedge dz + [a^2y^2 + abxy + acx^2]dx \wedge dy \wedge dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\omega(X) = -ay^2 - ax \left[\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}x \right] + [ay^2 + bxy + cx^2] = 0.$$

□

Suponha agora que $\omega = -ydx + xdy + S(x, y, z)dz$, seja integrável e tangente ao campo X , S é uma função em x, y, z a ser determinada. De $\omega(X) \equiv 0$, obtemos $S = y^2 - xR$. Assim, $d\omega = 2dx \wedge dy + (2y - xR_y)dy \wedge dz - (R + xR_x)dx \wedge dz$. Além disso, sendo ω integrável,

$$\begin{aligned}
0 = \omega \wedge d\omega &= -2y^2 + xyR_y + xR + x^2R_x + 2y^2 - 2xR \\
&\Rightarrow R = xR_x + yR_y.
\end{aligned}$$

Suponha agora que ω seja da forma $\omega = -ydx + xdy + [y^2 - xR(x, y, z)]dz$, onde $R = xR_x + yR_y$. Então

$$\begin{aligned}
\omega \wedge d\omega &= -2y^2 + xyR_y + xR + x^2R_x + 2y^2 - 2xR \\
&= x[-R + xR_x + yR_y] = 0.
\end{aligned}$$

Observe que $\omega(X) = -y^2 + xR + y^2 - xR(x, y, z) = 0$. Portanto, ω é integrável e tangente ao campo $X = y\partial_x + R(x, y, z)\partial_y + \partial_z$.

6.2 O caso não homogêneo

Uma vez que obtemos uma estrutura integrável para as EDOs lineares de segunda ordem homogênea, a questão então se estende naturalmente para as não homogêneas. A resposta a essa questão é dada pelo seguinte teorema.

Teorema G. Considere a equação linear não homogênea de segunda ordem dada por

$$u''(z) + b(z)u'(z) + c(z)u(z) = h(z), \quad (6.1)$$

onde $b, c, h : U \rightarrow \mathbb{C}$, são funções holomorfas em um aberto $U \subset \mathbb{C}$, e $u_p : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma solução particular. Seja $X : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}^3$ o campo de vetores dado por

$$X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - [b(z)y + c(z)x - h(z)] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Então, a 1-forma holomorfa definida em $\mathbb{C}^2 \times U$,

$$\begin{aligned} \omega_{nh} = & -(y - u'_p)dx + (x - u_p)dy \\ & + [y(y - u'_p) + (x - u_p)(ay + bx - h)]dz, \end{aligned}$$

é integrável e o campo X é tangente à folheação determinada por $\omega = 0$.

Demonstração. Considere a equação homogênea associada a (6.1) dada por

$$u''(z) + a(z)u'(z) + b(z)u(z) = 0. \quad (6.2)$$

Sejam u_1, u_2 duas soluções linearmente independentes da equação (6.2), garantidas pelo Teorema de Frobenius (Teorema 3.1.1). Denotamos o wronskiano de u_1, u_2 por $W[u_1, u_2] = u'_1 u_2 - u'_2 u_1$. A partir do método clássico de variação de parâmetros garantimos a existência de uma solução particular de (6.1). De fato, definimos $u_p(z) = f_1(z)u_1(z) + f_2(z)u_2(z)$, onde f_1, f_2 são funções a serem determinadas. Calculando a primeira derivada, obtemos

$$u'_p(z) = f'_1(z)u_1(z) + f_1(z)u'_1(z) + f'_2(z)u_2(z) + f_2(z)u'_2(z).$$

Impomos a condição $f'_1(z)u_1(z) + f'_2(z)u_2(z) = 0$. Logo,

$$u''_p(z) = f_1(z)u''_1(z) + f_2(z)u''_2(z) + f_1(z)u'_1(z) + f_2(z)u'_2(z).$$

Simplificando, temos (omitimos a variável z para não sobrecarregar a notação)

$$f_1(u''_1 + au'_1 + bu) + f_2(u''_2 + au'_2 + bu) + f'_1 u'_1 + f'_2 u'_2 = h.$$

Desde que u_1, u_2 são soluções da equação homogênea (6.2), os termos em parênteses se anulam. Assim, a equação se reduz a

$$f_1' u_1 + u_2' f_2' = h.$$

A partir dessa equação e da condição imposta sobre f_1, f_2 obtemos o seguinte sistema,

$$f_1' u_1 + f_2' u_2 = 0, \quad (6.3)$$

$$f_1' u_1 + u_2' f_2' = h. \quad (6.4)$$

Desde que $W[u_1, u_2] \neq 0$, temos $f_1' = -\frac{u_2(z)h(z)}{W[u_1, u_2](z)}$ e $f_2' = \frac{u_1(z)h(z)}{W[u_1, u_2](z)}$. Portanto, uma solução particular é dada por

$$u_p(z) = u_1(z) \left[- \int_{z_0}^z \frac{u_2(z)h(z)}{W[u_1, u_2](z)} dz \right] + u_2(z) \left[\int_{z_0}^z \frac{u_1(z)h(z)}{W[u_1, u_2](z)} dz \right].$$

Agora, considere a mudança $Y(z) = u(z) - u_p(z)$. Temos

$$u''(z) + a(z)u'(z) + b(z)u(z) = h(z)$$

e,

$$u_p''(z) + a(z)u_p'(z) + b(z)u_p(z) = h(z).$$

Subtraindo as duas equações obtemos

$$\begin{aligned} & (u(z) - u_p(z))'' + a(z)(u(z) - u_p(z))' + b(z)(u(z) - u_p(z)) \\ &= h(z) - h(z) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, ao fazermos $U(z) = u(z) - u_p(z)$ reduzimos a equação não homogênea (6.1), na equação homogênea

$$U''(z) + a(z)U'(z) + b(z)U(z) = 0.$$

Realizando uma redução de ordem, $x = U, y = U'$ obtemos o campo

$$X_1 = y \frac{\partial}{\partial x} - (a(z)y + b(z)x) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Segue do Teorema F (pág. 71, Seção 6.1) que essa equação homogênea admite uma 1-forma integrável em \mathbb{C}^3 e tangente ao campo X , dada por

$$\omega = -ydx + xdy + [y^2 + a(z)xy + b(z)x^2]dz.$$

Analogamente, para a equação não homogênea $u''(z) + a(z)u'(z) + b(z)u(z) = h(z)$, podemos obter um campo pela redução de ordem. Fazendo $r = u, s = u'$, pode se encontrar o campo

$$X_2 = s \frac{\partial}{\partial r} - (a(z)s + b(z)r - h(z)) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Precisamos obter uma 1-forma integrável tangente a X_2 . Com essa finalidade, fazemos a mudança de coordenadas $x = (r - u_p)$, $y = (s - u'_p)$, em $\omega = -ydx + xdy + [y^2 + a(z)xy + b(z)x^2]dz$. Assim,

$$\begin{aligned}
& -ydx + xdy + [y^2 + a(z)xy + b(z)x^2]dz \\
&= -(s - u'_p)d(r - u_p) + (r - u_p)d(s - u'_p) \\
&+ [(s - u'_p)^2 + a(r - u_p)(s - u'_p) + b(r - u_p)^2]dz \\
&= -(s - u'_p)dr + (s - u'_p)u'_p dz \\
&+ (r - u_p)ds - (r - u_p)u''_p dz \\
&+ [(s - u'_p)^2 + a(r - u_p)(s - u'_p) + b(r - u_p)^2]dz \\
&= -(s - u'_p)dr + (r - u_p)ds \\
&+ [(s - u'_p)u'_p - (r - u_p)u''_p + (s - u'_p)^2 \\
&+ a(r - u_p)(s - u'_p) + b(r - u_p)^2]dz.
\end{aligned}$$

Analisando o coeficiente em dz , temos

$$\begin{aligned}
& (s - u'_p)u'_p - (r - u_p)u''_p + (s - u'_p)^2 + a(r - u_p)(s - u'_p) + b(r - u_p)^2 \\
&= su'_p - (u'_p)^2 - ru''_p + u_p u''_p + s^2 - 2su'_p + (u'_p)^2 \\
&+ ars - aru'_p - au_p s - au_p u'_p + br^2 - b2ru_p + bu_p^2 \\
&= s(s - u'_p) + r(as + br) - u_p(as + bs) - r(u''_p + au'_p + bu_p) \\
&+ u_p(u''_p + au'_p + bu_p) \\
&= s(s - u'_p) + (r - u_p)(as + br) - (r - u_p)h \\
&= s(s - u'_p) + (r - u_p)(as + br - h).
\end{aligned}$$

Portanto, a partir da mudança de coordenadas obtemos

$$\begin{aligned}
\omega_{nh} &= -(s - u'_p)dr + (r - u_p)ds \\
&+ [s(s - u'_p) + (r - u_p)(as + br - h)]dz. \tag{6.5}
\end{aligned}$$

A 1-forma ω_{nh} é tangente ao campo X_2 obtido da equação não homogênea. De fato,

$$\begin{aligned}
\omega_{nh}(X_2) &= -s(s - u'_p) - (as + br - h)(r - u_p) \\
&+ 1[s(s - u'_p) + (r - u_p)(as + br - h)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A seguir, concluímos verificando que a forma ω_{nh} é integrável. Calculando a derivada exterior, temos

$$\begin{aligned}
d\omega_{nh} &= -ds \wedge dr - (-up'')dz \wedge dr + dr \wedge ds - (u'_p)dz \wedge ds \\
&\quad + dr \wedge ds - (u'_p)dz \wedge ds + [2s - up' + (r - u_p)a]ds \wedge dz \\
&\quad + [1(as + br - h) + (r - u_p)b]dr \wedge dz \\
&= 2dr \wedge ds + u''_p dz \wedge dr - u'_p dz \wedge ds \\
&\quad + [2s - u'_p + (r - u_p)a]ds \wedge dz + [as + br - h + (r - u_p)b]dr \wedge dz \\
&= 2dr \wedge ds + [2s + (r - u_p)a]ds \wedge dz \\
&\quad + [as + br - h + (r - u_p)b - u''_p]dr \wedge dz.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\omega \wedge d\omega_{nh} &= -(s - u'_p)[2s + (r - u_p)a]dr \wedge ds \wedge dz \\
&\quad + (r - u_p)[as + br - h + (r - u_p)b - u''_p]ds \wedge dr \wedge dz \\
&\quad 2[s(s - u'_p) + (r - u_p)[as + br - h]]dz \wedge dr \wedge ds \\
&= [-2s(s - u'_p) - (s - u'_p)(r - u_p)a - (r - u_p)(as + br - h) \\
&\quad - (r - u_p)^2b + u''_p(r - u_p) + 2s(s - u'_p) \\
&\quad + 2(r - u_p)(as + br - h)]dr \wedge ds \wedge dz \\
&= (r - u_p)[-as + au'_p - as - rb + h - rb \\
&\quad + u_p b + u''_p + 2as + 2br - 2h]dr \wedge ds \wedge dz \\
&= (r - u_p)[u''_p + au'_p + bu_p - h]dr \wedge ds \wedge dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 6.2.1. Consideremos o caso da equação não homogênea

$$u''(z) + 4u(z) = \cos(2z), \quad (6.6)$$

em domínio complexo, $z \in \mathbb{C}$. Buscamos por uma solução particular da forma $u_p(z) = zA \cos(2z) + zB \sin(2z)$, onde A, B são constantes a serem determinadas. Substituindo na equação (6.6), obtemos

$$\begin{aligned}
u''_p(z) + 4u_p(z) &= 4B \cos(2z) - 4A \sin(2z) - 4zA \cos(2z) \\
&\quad - 4zB \sin(2z) + 4(zA \cos(2z) + zB \sin(2z)) \\
&= 4B \cos(2z) - 4A \sin(2z) \\
&= \cos(2z).
\end{aligned}$$

Logo, para que u_p seja de fato uma solução particular, devemos ter $A = 0, B = 1/4$, ou seja, $u_p(z) = \frac{1}{4}z \sin(2z)$. Agora, pelo método de redução

clássica, fazemos a mudança $x = u, y = u'$ e, assim, associamos à equação não homogênea (6.6), o campo

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} - (4x - \cos(2z)) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Portanto, como conclusão do Teorema G, a 1-forma

$$\begin{aligned} \omega_{nh} = & -\left(y - \frac{1}{4} \sin(2z) - \frac{1}{2} \cos(2z)\right) dx + \left(x - \frac{1}{4} z \sin(2z)\right) dy \\ & + \left[y \left(y - \frac{1}{4} \sin(2z) - \frac{1}{2} \cos(2z)\right) + \left(x - \frac{1}{4} z \sin(2z)\right) (4x - \cos(2z)) \right] dz, \end{aligned}$$

definida em \mathbb{C}^3 , integra a clássica equação do pêndulo (6.6) em domínio complexo.

6.3 Integrais primeiras e soluções clássicas para a equação de segunda ordem

Recapitulemos o que foi obtido até o momento. Iniciando da equação

$$a(z)u''(z) + b(z)u'(z) + c(z)u(z) = 0, \quad (6.7)$$

aplicamos o método de redução de ordem, para obter um campo da forma $X = y \frac{\partial}{\partial x} - \left[\frac{b(z)}{a(z)} y + \frac{c(z)}{a(z)} x \right] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. Por fim, foi provado que a 1-forma dada por $\omega = -a(z)ydx + a(z)xdy + [a(z)y^2 + b(z)xy + c(z)x^2]dz$ é integrável e tangente ao campo X . Apresentamos a seguir um resultado sobre a integrabilidade forte das EDOs lineares de segunda ordem.

Teorema H. Considere a equação

$$a(z)u''(z) + b(z)u'(z) + c(z)u = 0,$$

onde $a, b, c : U \rightarrow \mathbb{C}$, são funções holomorfas definidas em um aberto U de \mathbb{C} . Suponha que essa EDO admita duas soluções linearmente independentes $u_1, u_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$. Então, a função $H : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$H(x, y, z) = \frac{xu_1'(z) - yu_1(z)}{xu_2'(z) - yu_2(z)}, \quad (6.8)$$

é uma integral primeira para a folheação determinada pela 1-forma holomorfa dada por

$$\omega = -a(z)ydx + a(z)xdy + [a(z)y^2 + b(z)xy + c(z)x^2]dz,$$

em $\mathbb{C}^2 \times U$.

Demonstração. Definimos H como em (6.8), definida em $\mathbb{C}^2 \times U$. Primeiro observamos que H não é constante. De fato, $H = l \in \mathbb{C}$, constante, implica que $x(u'_1(z) - lu'_2(z)) = y(u_1(z) - lu_2(z))$ e então $u_1(z) = lu_2(z)$ o que é uma contradição desde que u_1 e u_2 são linearmente independentes. Agora, assumimos que existe uma curva Γ (real, analítica e não degenerada) de pontos indefinidos para H . Então temos $\frac{w'_1}{u_1} = \frac{y}{x} = \frac{u'_2}{u_2}$ nessa curva. Desde que u_1 e u_2 são funções holomorfas de uma variável complexa isso implica que $u_1 = ku_2$ identicamente, produzindo outra contradição. Isso mostra que o conjunto de pontos indefinidos de H é discreto. Isso mostra que o conjunto de pontos indefinidos de H é discreto e, como a dimensão é 3, segue do Teorema de Hartogs (Teorema 4.1.1) que H admite uma extensão e, é de fato livre de pontos indefinidos. Provaremos que H é genuinamente uma integral primeira para $\omega = -a(z)ydx + a(z)x dy + [a(z)y^2 + b(z)xy + c(z)x^2]dz$. Afim de que H seja uma integral primeira para ω devemos ter

$$\omega \wedge dH = 0. \quad (6.9)$$

Afim de evitar uma notação muito carregada iremos escrever $a = a(z), b = b(z), c = c(z)$. Calculando a expressão do lado esquerdo de (6.9) obtemos

$$\begin{aligned} \omega \wedge dH &= (-aydx + axdy + [ay^2 + bxy + cx^2]dz) \\ &\quad \wedge \left(\frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz \right) \\ &= -ay \frac{\partial H}{\partial y} dx \wedge dy - ay \frac{\partial H}{\partial z} dx \wedge dz + ax \frac{\partial H}{\partial x} dy \wedge dx \\ &\quad + ax \frac{\partial H}{\partial z} dy \wedge dz + [ay^2 + bxy + cx^2] \frac{\partial H}{\partial x} dz \wedge dx \\ &\quad + [ay^2 + bxy + cx^2] \frac{\partial H}{\partial y} dz \wedge dy \\ &= -a \left(x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &\quad - \left(ay \frac{\partial H}{\partial z} + [ay^2 + bxy + cx^2] \frac{\partial H}{\partial x} \right) dx \wedge dz \\ &\quad + \left(ax \frac{\partial H}{\partial z} - [ay^2 + bxy + cx^2] \frac{\partial H}{\partial y} \right) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Portanto, para satisfazer (6.9) é necessário que

$$x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (6.10)$$

$$ay \frac{\partial H}{\partial z} + [ay^2 + bxy + cx^2] \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (6.11)$$

$$ax \frac{\partial H}{\partial z} - [ay^2 + bxy + cx^2] \frac{\partial H}{\partial y} = 0. \quad (6.12)$$

Desde que $H(x, y, z) = \frac{xu'_1(z) - yu_1(z)}{xu'_2(z) - yu_2(z)}$ então

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y \frac{u'_2 u_1 - u'_1 u_2}{(xu'_2 - yu_2)^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = x \frac{u'_1 u_2 - u'_2 u_1}{(xu'_2 - yu_2)^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{x^2(u''_1 u'_2 - u''_2 u'_1) + xy(u''_2 u_1 - u''_1 u_2) + y^2(u'_1 u_2 - u'_2 u_1)}{(xu'_2 - yu_2)^2}.$$

Uma vez que u_1, u_2 são soluções da equação (6.1), então

$$\begin{aligned} & \frac{x^2(u''_1 u'_2 - u''_2 u'_1) + xy(u''_2 u_1 - u''_1 u_2) + y^2(u'_1 u_2 - u'_2 u_1)}{(xu'_2 - yu_2)^2} \\ &= x^2 \left(\left(-\frac{b}{a} u'_1 - \frac{c}{a} u_1 \right) u'_2 - \left(-\frac{b}{a} u'_2 - \frac{c}{a} u_2 \right) u'_1 \right) + xy \left(\left(-\frac{b}{a} u'_2 - \frac{c}{a} u_2 \right) u_1 \right. \\ & \quad \left. - \left(-\frac{b}{a} u'_1 - \frac{c}{a} u_1 \right) u_2 \right) + y^2 (u'_1 u_2 - u'_2 u_1) \\ &= \frac{c}{a} x^2 [u_1 u'_2 - u'_1 u_2] + \frac{b}{a} xy [u_1 u'_2 - u'_1 u_2] + y^2 [u_1 u'_2 - u'_1 u_2] \\ &= \left(y^2 + \frac{b}{a} xy + \frac{c}{a} x^2 \right) [u_1 u'_2 - u'_1 u_2]. \end{aligned}$$

Isso implica $\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{(y^2 + \frac{b}{a} xy + \frac{c}{a} x^2) [u_1 u'_2 - u'_1 u_2]}{(xu'_2 - yu_2)^2}$. Consequentemente H satisfaz (6.11) e (6.12), e portanto, $\omega \wedge dH = 0$. \square

Em particular, segue do Teorema H, e do Teorema 3.1.1 (Método de Frobenius), o seguinte corolário.

Corolário 6.3.1. Considere a equação

$$(z - z_0)^2 u''(z) + (z - z_0) p(z) u'(z) + q(z) u(z) = 0, \quad (6.13)$$

onde $p, q : U \rightarrow \mathbb{C}$, onde U é um aberto de \mathbb{C} , com $z_0 \in U$. Suponha que z_0 seja ponto singular regular da equação (6.13). Então, a folheação determinada pela 1-forma holomorfa

$$\begin{aligned} \omega &= -(z - z_0)^2 y dx + (z - z_0)^2 x dy + [(z - z_0)^2 y^2 \\ &\quad + (z - z_0)p(z)xy + q(z)x^2] dz, \end{aligned}$$

admite a função $H : \mathbb{C}^2 \times U \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$H(x, y, z) = \frac{xu'_1(z) - yu_1(z)}{xu'_2(z) - yu_2(z)}$$

como uma integral primeira, onde u_1, u_2 são soluções analíticas, linearmente independentes, da equação (6.13).

Como consequência do Teorema H (pág. 77, Seção 6.3), podemos abordar as equações clássicas, com seus respectivos modelos integráveis (w -integrabilidade e s -integrabilidade) associados.

Exemplo 6.3.1. A equação da forma

$$u''(z) - zu(z) = 0,$$

é conhecida por equação de *Airy*. Pelo método de redução de ordem, fazendo $x = u, y = u'$, obtemos um campo $X : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ associado a equação de Airy, dado por

$$X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

A 1-forma

$$\omega_{Air} = -y dx + x dy + [y^2 - zx^2] dz,$$

em \mathbb{C}^3 , é integrável e determina uma folheação tangente ao campo X_{Air} . Segue do Método de Frobenius (Teorema 3.1.1) que a *equação de Airy* possui duas soluções linearmente independentes. Essas soluções são classicamente chamadas *funções de Airy* e determinadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{Ai}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{3^{2k+\frac{2}{3}} k! \Gamma(k + \frac{2}{3})} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k+1}}{3^{2k} k! \Gamma(k + \frac{4}{3})}, \\ \mathbf{Bi}(z) &= 3^{1/2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{3^{2k+\frac{2}{3}} k! \Gamma(k + \frac{2}{3})} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{3^{2k} k! \Gamma(k + \frac{4}{3})} \right], \end{aligned}$$

onde Γ representa a função Gama. Portanto,

$$H_{Air}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{Ai}'(z) - y\mathbf{Ai}(z)}{x\mathbf{Bi}'(z) - y\mathbf{Bi}(z)},$$

é uma integral primeira para a folheação determinada por ω_{Air} .

Exemplo 6.3.2. A equação

$$(1 - z^2)u''(z) - 2zu'(z) + n(n + 1)u(z) = 0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ é uma constante, é conhecida como equação de *Legendre de ordem n* . O campo associado a essa equação é dado por

$$X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - \left[\frac{-2z}{1 - z^2}y + \frac{n(n + 1)}{1 - z^2}x \right] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

A 1-forma

$$\omega_{Leg}^n = -y(1 - z^2)dx + x(1 - z^2)dy + [(1 - z^2)y^2 - 2xyz + n(n + 1)x^2]dz.$$

é integrável e determina uma folheação tangente ao campo X . A equação de Legendre possui duas soluções linearmente independentes, chamadas *polinômios de Legendre de ordem n de primeiro tipo e segundo tipo*, determinadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(z) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n, \\ \mathbf{Q}_n(z) &= \frac{1}{2} \mathbf{P}_n(z) \ln \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right). \end{aligned}$$

Portanto, a folheação determinada por ω_{Leg} admite integral primeira dada por

$$\mathcal{H}_{Leg}^n(x, y, z) = \frac{x\mathbf{Q}'_n(z) - y\mathbf{Q}_n(z)}{x\mathbf{P}'_n(z) - y\mathbf{P}_n(z)}.$$

Exemplo 6.3.3. A equação

$$(1 - z^2)u''(z) - zu'(z) + \lambda^2 u(z) = 0$$

é conhecida como equação de *Tchebychev*, onde $\lambda \in \mathbb{N}$ é uma constante. O campo associado a essa equação é dado por

$$X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - \left[\frac{-z}{1 - z^2}y + \frac{\lambda^2}{1 - z^2}x \right] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

A 1-forma

$$\omega_{Tche} = -y(1 - z^2)dx + x(1 - z^2)dy + [(1 - z^2)y^2 - xyz + \lambda^2 x^2]dz.$$

é integrável e determina uma folheação tangente ao campo X . A primeira solução da equação de Tchebychev é conhecida como os *polinômio de Tchebychev de primeiro tipo* e determinados por

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0(z) &= 1, \\ \mathbf{T}_\lambda(z) &= \frac{m}{2} \sum_{k=0}^{[\lambda/2]} \frac{(-1)^k (\lambda - k - 1)!}{k! (\lambda - 2k)!} (2z)^{\lambda - 2k}, \end{aligned}$$

onde $[\lambda/2]$ representa o maior inteiro maior ou igual a $\frac{\lambda}{2}$. A segunda solução linearmente independente de é chamada de *polinômio de Tchebychev de segundo tipo*. A sua definição é dada recursivamente, e possui várias representações (veja por exemplo [2]). Optamos pela seguinte

$$U_\lambda(z) = \frac{(-1)^\lambda(\lambda+1)\sqrt{\pi}}{2^{\lambda+1}(\lambda+\frac{1}{2})!(1-z^2)^{1/2}} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} [(1-z^2)^{n+1/2}].$$

Portanto,

$$\mathcal{H}_{Tche}^\lambda(x, y, z) = \frac{xU'_\lambda(z) - yU_\lambda(z)}{xT'_\lambda(z) - yT_\lambda(z)},$$

é uma integral primeira para a folheação determinada por ω_{Tche} .

Exemplo 6.3.4. A equação

$$zu''(z) + (1-z)u'(z) + \lambda u(z) = 0,$$

é conhecida como equação de *Laguerre de ordem* λ , onde $\lambda \in \mathbb{N}$ é uma constante. O campo associado a essa equação é dado por

$$X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - \left[\frac{1-z}{z}y + \frac{\lambda}{z}x \right] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

A 1-forma

$$\omega_{Lag} = -yzdx + xzdy + [zy^2 + (1-z)xy + \lambda x^2]dz.$$

é integrável e determina uma folheação tangente ao campo X . A equação de Laguerre possui uma solução conhecida por polinômio de Laguerre, e definida por

$$L_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\lambda} (-1)^n \frac{\lambda!}{n!} \binom{\lambda}{n} z^n,$$

onde $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$. A segunda solução é dada em termos do polinômio de Laguerre, por

$$w_2(z) = L_\lambda(z) \ln(z) + \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k.$$

Portanto,

$$\mathcal{H}_{Lag}^\lambda(x, y, z) = \frac{xw'_2(z) - yw_2(z)}{xL'_\lambda(z) - yL_\lambda(z)},$$

é uma integral primeira para a folheação determinada por ω_{Lag} .

6.4 Mudanças de coordenadas esféricas

Nessa seção abordamos a questão da integrabilidade das EDOs de segunda ordem, do ponto de vista real, \mathbb{R} . Exploramos a mudança de coordenadas esféricas nas EDOs lineares de segunda ordem em \mathbb{R} , e a respectiva 1-forma integrável. Escolhemos observar essa mudança em particular devido a recentes aplicações relacionadas à equação de Hill (veja por exemplo, [34]).

Iniciamos pela EDO

$$a(z)u''(z) + b(z)u'(z) + c(z)u(z) = 0, \quad (6.14)$$

onde $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções analíticas definidas em um aberto I de \mathbb{R} . Seja $I' = I \setminus Z_a$, onde Z_a é o conjunto de zeros de a . Pelo método de redução de ordem obtemos um campo $X : \mathbb{R}^2 \times I' \rightarrow \mathbb{R}^3$, associado à equação (6.14) dado por

$$X(x, y, z) = y \frac{\partial}{\partial x} - \left[\frac{b(z)}{a(z)}y + \frac{c(z)}{a(z)}x \right] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

Segue do Teorema F (pág. 71, Seção 6.1) que a 1-forma integrável

$$\omega = -a(z)ydx + a(z)xdy + [a(z)y^2 + b(z)xy + c(z)x^2]dz,$$

determina uma folheação tangente ao campo X . Considerando a mesma mudança de coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \sin \varphi; \\ y &= \rho \sin \theta \sin \varphi; \\ z &= \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} dx &= d(\rho \cos \theta \sin \varphi) = \cos \theta \sin \varphi d\rho - \rho \sin \theta \sin \varphi d\theta + \rho \cos \varphi \sin \theta d\varphi; \\ dy &= d(\rho \sin \theta \sin \varphi) = \sin \theta \sin \varphi d\rho + \rho \cos \theta \sin \varphi d\theta + \rho \sin \theta \cos \varphi d\varphi; \\ dz &= d(\rho \cos \varphi) = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Assim, realizando essa mudança de coordenadas em ω , obtemos

$$\begin{aligned} \omega_{sph} &= -a(\rho \cos \varphi)(\rho \sin \theta \sin \varphi)d(\rho \cos \theta \sin \varphi) \\ &+ a(\rho \cos \varphi)(\rho \cos \theta \sin \varphi)d(\rho \sin \theta \sin \varphi) \\ &+ [a(\rho \cos \varphi)(\rho \sin \theta \sin \varphi)^2 + b(\rho \cos \varphi)xy + c(\rho \cos \varphi)x^2]d(\rho \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -a(\rho \cos \varphi) \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi [\cos \theta \operatorname{sen} \varphi d\rho - \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi d\theta + \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta d\varphi] \\
&+ a(\rho \cos \varphi) (\rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi) [\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi d\rho + \rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi d\theta + \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi d\varphi] \\
&+ [a(\rho \cos \varphi) (\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi)^2 + b(\rho \cos \varphi) xy \\
&+ c(\rho \cos \varphi) x^2] [\cos \varphi d\rho - \rho \operatorname{sen} \varphi d\varphi] \\
&= [a(\rho \cos \varphi) \rho \cos \theta \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta - a(\rho \cos \varphi) \rho \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen}^2 \varphi] d\rho \\
&+ [a(\rho \cos \varphi) (\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi)^2 + b(\rho \cos \varphi) xy + c(\rho \cos \varphi) x^2] \cos \varphi d\rho \\
&+ [a(\rho \cos \varphi) \rho \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi \rho + a(\rho \cos \varphi) \rho^2 \cos \theta^2 \operatorname{sen} \varphi^2] d\theta \\
&+ [a(\rho \cos \varphi) \rho^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - a(\rho \cos \varphi) \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi] d\varphi \\
&- [a(\rho \cos \varphi) (\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi)^2 + b(\rho \cos \varphi) xy + c(\rho \cos \varphi) x^2] \rho \operatorname{sen} \varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

Concluimos obtendo a seguinte 1-forma integrável,

$$\begin{aligned}
\omega_{sph} &= [a(\rho \cos \varphi) \rho \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen}^2 \varphi (\operatorname{sen} \theta - 1)] d\rho \\
&+ [a(\rho \cos \varphi) (\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi)^2 + b(\rho \cos \varphi) xy + c(\rho \cos \varphi) x^2] \cos \varphi d\rho \\
&+ [a(\rho \cos \varphi) \rho^2 \operatorname{sen} \varphi^2] d\theta \\
&+ [a(\rho \cos \varphi) \rho^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)] d\varphi \\
&- [a(\rho \cos \varphi) (\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi)^2 + b(\rho \cos \varphi) xy + c(\rho \cos \varphi) x^2] \rho \operatorname{sen} \varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

6.5 O modelo bidimensional das formas integráveis

Sejam $a, b, c : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, funções holomorfas definidas em um aberto U de \mathbb{C} . Considere a 1-forma integrável

$$\omega = -a(z) y dx + a(z) x dy + [a(z) y^2 + b(z) xy + c(z) x^2] dz$$

em $\mathbb{C}^2 \times U$. No decorrer do texto, ao estudar alguns casos particulares da forma ω , usamos mudanças específicas de coordenadas que a transformaram em uma outra forma definida em $\mathbb{C} \times U$. Denominamos essas formas por *modelos bidimensionais*. A seguir, concluimos que esse fenômeno ocorre para o caso mais geral ω . Com efeito, defina a mudança de coordenadas $\varphi = \frac{y}{x}$. Observamos que

$$\begin{aligned}
&-a(z) y dx + a(z) x dy + [a(z) y^2 + b(z) xy + c(z) x^2] dz \\
&= x^2 \left[a(z) d \left(\frac{y}{x} \right) + \left[a(z) \frac{y^2}{x^2} + b(z) \frac{y}{x} + c(z) \right] dz \right] \\
&= x^2 [a(z) d\varphi + [a(z) \varphi^2 + b(z) \varphi + c(z)] dz].
\end{aligned}$$

Ou seja, $\frac{\omega}{x^2} = a(z) d\varphi + [a(z) \varphi^2 + b(z) \varphi + c(z)] dz$. Isso implica que ω está associada intrinsecamente à 1-forma em \mathbb{C}^2 , dada por $\Omega = a(y) dx +$

$[a(y)x^2 + b(y)x + c(y)] dy$. O modelo bidimensional $\Omega = 0$ define uma *folheação de Riccati* em \mathbb{C}^2 . Do ponto de vista de equações diferenciais os modelos bidimensionais são equações diferenciais de primeira ordem da forma

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a(y)x^2 + b(y)x + c(y)}{a(y)}.$$

6.6 Equação linear homogênea de terceira ordem admitindo integrabilidade

Considere a equação diferencial ordinária linear homogênea, de ordem três dada por

$$a(z)u'''(z) + b(z)u''(z) + c(z)u'(z) + d(z)u(z) = 0, \quad (6.15)$$

onde $a, b, c, d : U \rightarrow \mathbb{C}$, são funções holomorfas em um aberto U de \mathbb{C} . Seja $U' = U \setminus Z_a$, onde Z_a é o conjunto de zeros da função a . Assim como foi feito no caso de segunda ordem, iniciamos pelo método de redução de ordem, fazendo $x_1 = u, x_2 = u', x_3 = u''$, obtendo o campo $X : \mathbb{C}^3 \times U' \rightarrow \mathbb{C}^4$, dado por $X(x_1, x_2, x_3, z) = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{(b(z)x_3 + c(z)x_2 + d(z)x_1)}{a(z)} \frac{\partial}{\partial x_3} + 1 \frac{\partial}{\partial z}$. No caso em que $d \equiv 0$, definimos

$$\omega_1 = -a(z)x_3 dx_2 + a(z)x_2 dx_3 + [a(z)x_3^2 + b(z)x_2 x_3 + c(z)x_2^2] dz.$$

A forma ω_1 é integrável, uma que possui a mesma expressão da forma obtida para as equações lineares homogêneas de segunda ordem. Além disso, ω_1 é tangente ao campo X . De fato,

$$\begin{aligned} \omega_1(X) &= -a(z)x_3^2 + a(z)x_2(-b(z)x_3 + c(z)x_2 + d(z)x_1) \\ &\quad + [a(z)x_3^2 + b(z)x_2 x_3 + c(z)x_2^2] = 0. \end{aligned}$$

Esse resultado é esperado uma vez que fazendo a mudança $v(z) = u'(z)$, a equação (6.15) se reduz a uma equação linear homogênea de segunda ordem,

$$a(z)v''(z) + b(z)v'(z) + c(z)v(z) = 0. \quad (6.16)$$

Segue do Teorema F (pág. 71, Seção 6.1) que a equação (6.16) admite uma estrutura integrável dada por

$$\omega_2 = -a(z)y dx + a(z)x dy + [a(z)y^2 + b(z)xy + c(z)x^2] dz.$$

A menos de uma mudança de coordenadas ($x = x_2, y = x_3$) as formas ω_1, ω_2 são equivalentes.

Parte II

Expansão assintótica e germes de folheações holomorfas

Capítulo 7

Funções com expansão assintótica

7.1 Séries de potências formais

As séries de potências formais são utilizadas na definição de expansão assintótica de uma função holomorfa. Com essa finalidade, nesta seção apresentamos uma breve revisão das noções e resultados clássicos sobre o tema. Veja por exemplo [59].

Uma *série de potências formal* é uma sequência de funções $(S_n)_{n \geq 0}$, definida indutivamente por $S_0(z) = a_0 \in \mathbb{C}$ e para $n \geq 1$ por $S_n(z) = S_{n-1}(z) + a_n z^n$, onde $a_n \in \mathbb{C}$. O número a_0 é chamado de *termo constante* e a_n de *coeficiente de ordem n* da série.

Dadas duas séries de potências formais $\hat{\varphi} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ e $\hat{\psi} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ podemos definir a soma e o produto:

$$\text{(soma)} \quad (\hat{\varphi} + \hat{\psi})(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) z^i;$$

$$\text{(produto)} \quad (\hat{\varphi}\hat{\psi})(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \text{ onde}$$

$$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0 = \sum_{l+k=i} a_l b_k.$$

Denotamos por $\mathbb{C}[[z]]$ o anel de séries de potências formais na variável complexa z . Por conveniência, algumas vezes escrevemos apenas série formal para nos referir a tais séries.

A seguir, enunciaremos o clássico Teorema da Inversa de Lagrange que fornecerá condições necessárias e suficientes para que uma série formal seja invertível.

Teorema 7.1.1. (Teorema da Inversa de Lagrange) ([59] pág.847, Teorema 1) Seja $\hat{\varphi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ uma série de potências formal em $\mathbb{C}[[z]]$.

Então existe $\hat{\psi} \in \mathbb{C}[[z]]$ tal que $z = \hat{\psi}(\hat{\varphi}(z))$ e $u = \hat{\varphi}(\hat{\psi}(u))$ se e somente se $a_0 = 0$, e $a_1 \neq 0$, ou $\hat{\varphi}(z) = a_0 + a_1z$ com a_0, a_1 não nulos. Se tal série $\hat{\psi}$ existe então é única.

O Teorema a seguir permite definir a n -ésima raiz de uma série formal.

Teorema 7.1.2. ([59] pág.847, Teorema 3) Seja $\hat{\varphi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ uma série de potências formal, com $a_0 = 1$ e seja n_0 um inteiro positivo qualquer. Então existe uma única série formal $\hat{\psi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$, com $b_0 = 1$ tal que $(\hat{\psi}(z))^{n_0} = \hat{\varphi}(z)$.

Definição 7.1.1. A n -ésima raiz de uma série formal $\hat{\varphi}(z)$ é a única série de potências $\hat{\psi}(z)$, tal que $(\hat{\psi}(z))^n = \hat{\varphi}(z)$. Neste caso, denotamos $(\hat{\varphi}(z))^{1/n} = \hat{\psi}(z)$.

Para relacionar as séries formais cujo termo constante é zero com aquelas em que o termo constante é não nulo precisamos definir dois objetos formais que as relacionam.

Definição 7.1.2. Seja $\hat{\varphi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ uma série de potências formal com $a_0 = 1$ e $\hat{\mu}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$, onde $\hat{\varphi} = 1 + \hat{\mu}$. Defina o logaritmo formal $\hat{\varphi}$ como

$$L(\hat{\varphi}) = L(1 + \hat{\mu}) = \hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\mu}^2 + \frac{1}{3}\hat{\mu}^3 + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\hat{\mu}^j}{j}.$$

Seja $\hat{\psi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$, onde $b_0 = 0$. Defina a exponencial formal de $\hat{\psi}$ como

$$E(\hat{\psi}) = 1 + \hat{\psi} + \frac{\hat{\psi}^2}{2!} + \frac{\hat{\psi}^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\psi}^n}{n!}.$$

Teorema 7.1.3. ([59] pág.880, Teorema 19) Sejam $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \mathbb{C}[[z]]$ séries de potências formais tais que $\hat{\varphi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, com $a_0 = 1$ e $\hat{\psi}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j$, com $b_0 = 0$. Então $L(E(\hat{\psi})) = \hat{\psi}$ e $E(L(\hat{\varphi})) = \hat{\varphi}$.

Observação 7.1.1. O Teorema 7.1.3 implica que existe uma bijeção entre as séries de potências cujo termo constante é 1 e, as com termo constante nulo.

7.2 Expansão assintótica

Nesta seção revisamos os conceitos básicos sobre expansão assintótica. Iniciando pela definição, seguindo pelas principais propriedades e concluindo

com o *Teorema de Borel-Ritt*. Algumas referências que o leitor pode conferir sobre expansão assintótica são [45, 26, 80, 20].

Antes de definir expansão assintótica, é necessário explicitar a noção de setor em \mathbb{C} adotada neste trabalho.

Definição 7.2.1. Dado $R \in \mathbb{R}_+$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, um *setor* S com vértice na origem em \mathbb{C} é um subconjunto definido por

$$S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \|z\| < R, \alpha_1 < \arg(z) < \alpha_2\}.$$

A seguir, a definição de expansão assintótica para uma função holomorfa:

Definição 7.2.2. ([80], pág.32, Definição 7.2) Seja $\varphi : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em um setor $S \subset \mathbb{C}$. A função φ admite a série formal $\hat{\varphi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ como expansão assintótica em S se para todo subsetor próprio $S' \subset S$ e todo $k \in \mathbb{N}$, existir uma constante $A_k > 0$ tal que

$$\|\varphi(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j\| \leq A_k \|z\|^k$$

para todo $z \in S'$.

A existência de expansão assintótica é garantida pelo seguinte resultado:

Teorema 7.2.1. ([80], pág. 40, Teorema 9.1) Seja φ holomorfa em um setor S . Se o limite

$$\varphi_r = \lim_{z \rightarrow 0} \varphi^{(r)}(z),$$

existe para todo $r = 0, 1, \dots$, então φ admite $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\varphi_r}{r!} z^r$ como expansão assintótica em S .

A seguir, apresentamos as principais propriedades sobre expansão assintótica, sintetizadas em um único teorema. A notação $\mathbb{D}(0, r)$ significa o disco com centro em $0 \in \mathbb{C}$ e raio $r \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.2.2. ([80], págs. 33-39) Sejam φ, ψ funções holomorfas nos setores S, T respectivamente. Suponha que φ admite $\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$ como expansão assintótica em S , e ψ admite $\sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r$ como expansão assintótica, em T . Então

(I) $a_r = \frac{1}{r!} \lim_{z \rightarrow 0} \varphi^{(r)}(z)$, com z pertencendo a subsectores próprios de S .

(II) Se $S = \mathbb{D}(0, r) - \{0\}$ com raio $r > 0$ e vértice em $0 \in \mathbb{C}$ então φ

é holomorfa em $D(0, r)$ e $a_r = \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!}$.

(III) φ admite no máximo uma expansão assintótica em S .

(IV) Se $a_0 \neq 0$, então $\frac{1}{\varphi(z)}$ admite $\sum_{t=0}^{\infty} c_t z^t$ como expansão assintótica, onde,

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r \right) \left(\sum_{t=0}^{\infty} c_t z^t \right) = 1.$$

(V) Se $S = \{0 < \|z\| < z_0, \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\}$ com $\theta_2 > \theta_1$, então a derivada $\varphi'(z)$ admite $\sum_{r=1}^{\infty} r a_r z^{r-1}$ como expansão assintótica em $S^* = \{0 < \|z\| < z_0, \theta_1 < \theta_1^* \leq \arg(z) \leq \theta_2^* < \theta_2\}$.

(VI) $\alpha\varphi + \beta\psi$ admite $\sum_{r=0}^{\infty} (\alpha a_r + \beta b_r) z^r$ como expansão assintótica.

(VII) $\varphi\psi$ admite $(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r) (\sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r$ como expansão assintótica, com

$$c_r = \sum_{j=0}^r a_j b_{r-j}.$$

(VIII) A composição $\psi \circ \varphi(z)$ admite $\sum_{t=0}^{\infty} d_t z^t$ como expansão assintótica, onde os coeficientes d_t são obtidos pela inserção formal da série de $\varphi(z)$ na série de $\psi(u)$, seguindo as potências de z .

Exemplo 7.2.1. ([45], pág. 8) Considere a equação diferencial ordinária complexa dada por

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = x. \quad (7.1)$$

A equação (7.1) é conhecida como *equação de Euler*. A série $\hat{E}(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! x^{n+1}$ é a única série de potências que satisfaz equação de Euler. Por isso, é chamada de *série de Euler*. Além disso, \hat{E} é divergente para todo $x \neq 0$. A função

$$E(x) = \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{x}\right) \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\xi}{x}}}{1+\xi} d\xi.$$

admite $\hat{E}(x)$ como expansão assintótica no setor $S = \{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(x) > 0\}$.

Exemplo 7.2.2. ([45], pág. 10) Seja $Ei : S \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$Ei(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{t}$$

e $S = \{x \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(x) > 0\}$. A função Ei admite a série formal

$$-\ln(x) - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot n!}$$

como expansão assintótica em S , onde γ é uma constante dada por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n).$$

Ei é conhecida como *função exponencial integral* e possui vasta aplicação em matemática e áreas afins.

O Teorema 7.2.1 da seção anterior revela quais são as condições necessárias para que uma função φ holomorfa em um setor S , admita expansão assintótica: todos limites das r -ésimas derivadas de φ ,

$$\varphi_r = \lim_{z \rightarrow 0} \varphi^{(r)}(z)$$

devem existir, com $z \in S$. Entretanto, há outra questão na direção inversa. Ou seja, dada uma série formal e um setor arbitrário, existe uma função holomorfa neste setor que admita esta série formal como expansão assintótica? Este é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 7.2.3. (Borel-Ritt) ([80],pág. 43, Teorema 9.3) Seja $\hat{\varphi} = \sum a_r z^r \in \mathbb{C}[[z]]$ uma série de potências e S um setor em \mathbb{C} . Então existe uma função φ holomorfa em S , tal que φ admite $\hat{\varphi}$ como expansão assintótica em S , quando z tende a zero.

Capítulo 8

Grupos de germes de difeomorfismos holomorfos

Este capítulo possui três seções. A primeira contém alguns resultados já conhecidos na literatura, sobre germes de difeomorfismos e setores invariantes. Na seção subsequente estudamos os germes de difeomorfismos hiperbólicos e elípticos em relação a setores invariantes. Na última seção definimos grupos de invariância provando que na presença de funções com expansão assintótica, este grupo é finito.

8.1 Resultados clássicos

Sejam X, Y espaços topológicos. Considere o conjunto das funções $f : V \subset X \rightarrow Y$ onde V é uma vizinhança de um ponto $x \in X$. Introduzimos a seguinte relação de equivalência R :

fRg se existe uma vizinhança W de $x \in X$, tal que $f|_W = g|_W$

A classe de equivalência de f é chamada *germe de f em x* . No caso em que $X = Y$ o conjunto de tais germes de homeomorfismos locais que fixam um ponto $x \in X$ é um grupo com a operação de composição, onde o domínio de $f \circ g$ é a interseção do domínio de g com o domínio de f .

Denote por $Diff(\mathbb{C}, 0)$ o grupo de germes de difeomorfismos que fixam a origem $0 \in \mathbb{C}$ e, um elemento deste grupo por $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Uma vez que os difeomorfismos em \mathbb{C} são analíticos, para cada representante $f \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ escrevemos

$$f(z) = \lambda z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \dots$$

onde $k \geq 1$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Assim, temos a seguinte classificação para germes de difeomorfismos que fixam a origem $0 \in \mathbb{C}$:

(i) *Hiperbólicos*: $|\lambda| \neq 1$;

(ii) *Elípticos*: $|\lambda| = 1$, $\lambda^k \neq 1$, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(iii) *Parabólicos*: $\lambda^k = 1$, para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Os germes de difeomorfismos hiperbólicos são linearizáveis conforme verificamos no seguinte teorema.

Teorema 8.1.1. ([10], pág.14) Seja f um representante de um germe de difeomorfismo hiperbólico dado por $f(z) = \lambda z + a_{k+1}z^{k+1} + \dots$. Então existe um único $\sigma \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ com $\sigma'(0) = 1$ tal que

$$\sigma \circ f = \lambda \sigma \quad (8.1)$$

É necessário salientar que os germes de difeomorfismos elípticos e parabólicos nem sempre são linearizáveis (Veja [10], pág. 16).

Apresentamos agora a noção de setor invariante.

Definição 8.1.1. Seja f um representante de um germe de difeomorfismo holomorfo fixando 0. Dizemos que f admite um setor invariante $S \subset \mathbb{C}$ se, para um representante $f_U : U \rightarrow f(U)$ de f , existe um setor $S \subset U$ com vértice em 0 tal que $f_U(S) \subset S$. Neste caso, também dizemos que S é f -invariante.

O germe $f \in Diff(\mathbb{C}, 0)$ dado por $f(z) = \lambda z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \dots$ é tangente a identidade se $\lambda = 1$. A classificação de germes de difeomorfismos tangentes à identidade é suficiente para a classificação de germes de difeomorfismos parabólicos. A seguir, enunciaremos dois resultados clássicos sobre germes parabólicos e setores invariantes.

Teorema 8.1.2 (Camacho, [12]). Seja $f: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ germe de difeomorfismo holomorfo tangente à identidade, dado por $f(z) = z + \sum_{j \geq 2} a_j z^j$, $a_2 \neq 0$. Então existem setores S^+ e S^- com vértices em $0 \in \mathbb{C}$, com abertura $\pi - \theta_0$ (onde $0 < \theta_0 < \pi/2$), e bissetrizes opostas, de tal maneira que:

(i) $f(S^+) \subset S^+$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(z) = 0, \forall z \in S^+$

(ii) $f^{-1}(S^-) \subset S^-$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(z) = 0, \forall z \in S^-$

Teorema 8.1.3 (Teorema da flor de Fatou-Leau, [1]). Seja $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + O(z^{k+2})$, $k \in \mathbb{N}$ um germe de difeomorfismo. Então existem k

domínios P_j , com $j = 1, \dots, k$, chamados *pétalas*, simétricos com respeito às direções $\arg(z) = \frac{2\pi n}{k}$, $n = 0, \dots, k-1$, tais que:

- (i) $P_j \cap P_k = \emptyset$ para $j \neq k$; $0 \in \partial P_j$ e cada pétala P_j é holomorfa no semi-plano superior $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^2$
- (ii) para cada $z \in P_j$ temos $f^m(z) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$.
- (iii) Para cada j a aplicação $f|_{P_j}$ é holomorficamente conjugada ao automorfismo parabólico $z \mapsto z + i$ em \mathbb{H} .

Além disso, se $f(z) = z + z^{k+1} + O(z^{k+2})$, então $f^{-1}(z) = z - z^{k+1} + O(z^{k+2})$.

O Teorema 8.1.3 garante a existência de setores invariantes para germes $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tangentes à identidade. De fato, para uma aplicação da forma $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + \dots$, $a_{k+1} \neq 0$, podemos encontrar uma mudança de coordenadas $w = \lambda z$ tal que $f(w) = w + w^{k+1} + O(w^{k+2})$. Aplicando o Teorema 8.1.3 (i) concluímos a existência de setores invariantes obtidos pela dilatação e rotação das aplicações P_j .

8.2 Germes de difeomorfismos não parabólicos e setores invariantes

Na seção anterior vemos que difeomorfismos parabólicos admitem setores invariantes. A seguir descrevemos o que ocorre no caso hiperbólico e elíptico.

Lema 8.2.1. Seja $f(z) = \lambda z + O(z^2)$, com $\|\lambda\| \neq 1$, um germe de difeomorfismo hiperbólico. Então existem setores f -invariantes (que não sejam o disco), somente se $\lambda \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \|z\| < R, \alpha_1 < \arg(z) < \alpha_2\}$ um setor em \mathbb{C} . Pelo Teorema 8.1.1, existe um difeomorfismo g tal que

$$g \circ f \circ g^{-1}(z) = \lambda z.$$

Escrevendo $z = re^{i\theta}$ e $\lambda = se^{i\varphi}$ temos

$$\begin{aligned} g \circ f \circ g^{-1}(z) &= \lambda z \\ &= se^{i\varphi} re^{i\theta} = rse^{i(\theta+\varphi)}. \end{aligned}$$

Então $g \circ f \circ g^{-1}(S)$ é difeomorfo a $f(S) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \|z\| < sR, \varphi + \alpha_1 < \arg(z) < \alpha_2 + \varphi\}$. Portanto, S é f -invariante somente se $\varphi = 0$ e $\lambda = \|\lambda\| = s < 1$. \square

Lema 8.2.2. Seja $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ um germe de difeomorfismo elíptico, com $\|\lambda\| = 1$, $\lambda^k \neq 1$, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Então não existem setores f -invariantes diferentes do disco.

Demonstração. Seja $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \|z\| < R, \alpha_1 < \arg(z) < \alpha_2\}$ um setor em \mathbb{C} . Considere as retas que passam pela origem de \mathbb{C} associadas com os ângulos α_1, α_2 respectivamente. Ou seja, $r : y = \tan(\alpha_1)x$, e $s : y = \tan(\alpha_2)x$. Tome os vetores $v_1 = e^{i\alpha_1} \in r$ e $v_2 = e^{i\alpha_2} \in s$. Observe que $f'(0) = e^{i\theta}$. Então

$$f'(0) \cdot v_1 = e^{i\theta} e^{i\alpha_1} = e^{i(\theta+\alpha_1)}$$

e

$$f'(0) \cdot v_2 = e^{i\theta} e^{i\alpha_2} = e^{i(\theta+\alpha_2)}.$$

Se S é f -invariante então

$$\alpha_1 \leq \theta + \alpha_1 \leq \alpha_2$$

e

$$\alpha_1 \leq \theta + \alpha_2 \leq \alpha_2.$$

Isto implica que $0 \leq \theta \leq \alpha_2 - \alpha_1$ e $\alpha_1 - \alpha_2 \leq \theta \leq 0$ and, $\theta = 0$. Portanto, $\lambda = 1$. Por outro lado, por hipótese $\lambda^k \neq 1$, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Contradição. \square

8.3 Expansão assintótica e grupo de invariância

Iniciamos agora o estudo da invariância com a presença da expansão assintótica. Consideramos uma função que admite expansão assintótica não nula. Este primeiro lema garante que a invariância se estende também para a série formal que a realiza.

Lema 8.3.1. Seja $\varphi : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa que admite $\hat{\varphi}(z)$ como expansão assintótica não nula, no setor $S \subset \mathbb{C}$. Suponha que exista uma função holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida em uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}$ com $f(0) = 0$ e $f(S \cap U) \subset S \cap U$. Se $\varphi \circ f = \varphi$ em $S \cap U$ então $\hat{\varphi} \circ f = \hat{\varphi}$ em $S \cap U$.

Demonstração. Para simplicidade da notação supomos $S \subset U$. Escrevemos $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$, e $\hat{\varphi} \circ f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j [f(z)]^j = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$. Fixemos $k \in \mathbb{N}$. Como φ admite expansão assintótica em S , existe uma constante $B_k \in \mathbb{C}$ tal que para cada $z \in S$

$$\|\varphi \circ f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} b_j z^j\| \leq B_k \|z\|^k.$$

Desde que $\varphi \circ f = \varphi$, então para todo $z \in S$, temos

$$\begin{aligned}
& \left\| \varphi(z) - \sum_{j=0}^{k-1} b_j z^j \right\| \\
&= \left\| \varphi(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j + \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j - \sum_{j=0}^{k-1} b_j z^j \right\| \\
&\leq \left\| \varphi(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j \right\| + \left\| \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j - \sum_{j=0}^{k-1} b_j z^j \right\| \\
&= \left\| \varphi(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j \right\| + \left\| \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j - \varphi \circ f(z) + \varphi \circ f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} b_j z^j \right\| \\
&\leq \left\| \varphi(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j \right\| + \left\| \varphi \circ f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j \right\| + \left\| \varphi \circ f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} b_j z^j \right\| \\
&\leq A_k \|z\|^k + A_k \|z\|^k + B_k \|z\|^k \\
&= [2A_k + B_k] \|z\|^k.
\end{aligned}$$

Concluimos que existe uma constante $C_k = 2A_k + B_k$ tal que $\left\| \varphi(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j [f(z)]^j \right\| \leq C_k z^k$, $\forall z \in S$, isto é, φ admite $\sum_{j=0}^{\infty} a_j [f]^j = \hat{\varphi} \circ f$ como expansão assintótica em S . Portanto, pela unicidade da expansão assintótica (item (III) do Teorema 7.2.2),

$$\hat{\varphi} \circ f(z) = \hat{\varphi}(z), \forall z \in S.$$

□

Para prosseguir com o estudo de invariância, precisamos de uma mudança de coordenadas formais específica para séries de potência formais. Precisamente,

Lema 8.3.2. Seja $\hat{\varphi}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$ uma série formal em $\mathbb{C}[[z]]$. Então existem $\nu \in \mathbb{N}$ e uma série formal $\hat{\psi} \in \mathbb{C}[[z]]$ tais que

$$\hat{\varphi} \circ \hat{\psi}(z) = z^\nu$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $n_0 = \min\{j \in \mathbb{N}; a_j \neq 0\}$. Definindo

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{j \geq n_0+1}^{\infty} \frac{a_j}{a_{n_0}} z^{j-n_0}$$

podemos escrever

$$\hat{\varphi}(z) = a_{n_0} z^{n_0} [1 + \hat{\mu}(z)]$$

com $\hat{\mu}(0) = 0$. Seja b uma n_0 -ésima raiz de $a_{n_0} \neq 0$. Defina $\hat{\gamma}(z) = bz(1 + \hat{\mu}(z))^{\frac{1}{n_0}}$. Pelo Teorema 7.1.2, $(1 + \hat{\mu}(z))^{\frac{1}{n_0}}$ é uma série formal (veja Observação 7.1.1) com termo constante igual a 1. Então, $\hat{\gamma}$ é uma série formal tal que

$$\hat{\gamma}(z)^{n_0} = a_{n_0} z^{n_0} (1 + \hat{\mu}(z))$$

$\hat{\gamma}(0) = 0$ e $\hat{\gamma}'(0) = b \neq 0$. Pelo Teorema 7.1.1 existe uma série formal $\hat{\psi}$ a qual é uma inversa para $\hat{\gamma}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} \circ \hat{\psi}(z) &= a_{n_0} (\hat{\psi}(z))^{n_0} [1 + \hat{\mu}(\hat{\psi}(z))] \\ &= (\hat{\gamma} \circ \hat{\psi}(z))^{n_0} \\ &= z^{n_0}. \end{aligned}$$

□

Agora, um ponto chave é estabelecido.

Seja $\varphi : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante que admite $\hat{\varphi}(z)$ como expansão assintótica em um setor $S \subset \mathbb{C}$. Defina o *grupo de invariância de φ* como

$$Inv_S(\varphi) = \{f \in Diff(\mathbb{C}, 0) : f(S) \subset S \text{ e } \varphi \circ f = \varphi \text{ em } S\}.$$

Este é um subgrupo de $Diff(\mathbb{C}, 0)$.

Exemplo 8.3.1. Considere a função $\varphi(z) = \cos\left(\frac{2\pi}{z}\right)$. Então $Inv(\varphi) = \langle f, g \rangle$, onde $f(z) = -z$ e $g(z) = \frac{z}{z+1}$. Temos que $Inv(\varphi)$ não é finito. O ponto é que $\varphi(z)$ não admite expansão assintótica. De fato, para todo $z \neq 0$,

$$\varphi'(z) = \frac{2\pi}{z^2} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{z} \right).$$

Consideremos o setor $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \|z\| < R, -\alpha_0 < \arg(z) < \alpha_0\}$. Para cada $0 < \alpha < \alpha_0$, seja $S^* \subset S$ um subsetor próprio $S^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \|z\| \leq r < R, -\alpha \leq \arg(z) \leq \alpha\}$. Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos dada por $z_n = \frac{r}{n}(1 + i \tan \alpha)$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'(z_n) = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^2(1 + i \tan \alpha)^2} \text{sen} \left(\frac{2n\pi}{r(1 + i \tan \alpha)} \right). \quad (8.2)$$

Observe que

$$\begin{aligned}\frac{2n\pi}{r(1+i\tan\alpha)} &= \frac{2n\pi}{r(1+i\tan\alpha)} \frac{(1-i\tan\alpha)}{(1-i\tan\alpha)} \\ &= \frac{2n\pi(1-i\tan\alpha)}{r(1+\tan^2\alpha)} \\ &= \frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)} - i \frac{2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}.\end{aligned}$$

Além disso,

$$i \frac{2n\pi}{r(1+i\tan\alpha)} = i \frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)} + \frac{2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}$$

e,

$$-i \frac{2n\pi}{r(1+i\tan\alpha)} = -i \frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)} - \frac{2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}.$$

Então

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{r(1+i\tan\alpha)}\right) &= \frac{1}{2i} \left(e^{i\left(\frac{2n\pi}{r(1+i\tan\alpha)}\right)} - e^{-i\left(\frac{2n\pi}{r(1+i\tan\alpha)}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)}} e^{\frac{2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}} - e^{-i\frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)}} e^{-\frac{2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}} \right).\end{aligned}$$

Dessa última equação e da equação (8.2) temos

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'(z_n) &= 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^2(1+i\tan\alpha)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{r(1+i\tan\alpha)}\right) \\ &= 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^2(1+i\tan\alpha)^2} \left[e^{i\frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)}} e^{\frac{2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}} \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)}} e^{-\frac{2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}} \right] \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Por outro lado, consideremos a sequência $w_n = \frac{r}{n}(1+i\tan(-\alpha))$. Sabemos que $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$. Portanto,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{r(1-i\tan\alpha)}\right) = \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)}} e^{\frac{-2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}} - e^{-i\frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)}} e^{+\frac{2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}} \right)$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'(w_n) &= 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^2(1+i\tan\alpha)^2} \left[e^{i\frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)}} e^{\frac{-2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}} \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\frac{2n\pi}{r(1+\tan^2\alpha)}} e^{+\frac{2n\pi\tan\alpha}{r(1+\tan^2\alpha)}} \right] \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Isso implica que $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi'(z)$ não existe. Pelo Teorema 7.2.1, φ não admite expansão assintótica.

Concluimos com o principal resultado desta seção.

Proposição 8.3.1. Seja $\varphi : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante que admite uma expansão assintótica não nula $\hat{\varphi}(z)$ em um setor $S \subset \mathbb{C}$. Então $Inv_S(\varphi)$ é um subgrupo finito de $Diff(\mathbb{C}, 0)$.

Demonstração. Pelo Lema 8.3.1 $f \in Inv_S(\varphi)$ implica que $f \in Inv_S(\hat{\varphi})$ onde

$$Inv(\hat{\varphi}) = \{g \in Diff(\mathbb{C}, 0) : \hat{\varphi} \circ g = \hat{\varphi} \text{ (como série de potências formal)}\}.$$

Portanto, $\#Inv_S(\varphi) \leq \#Inv(\hat{\varphi})$. É suficiente mostrar que $Inv(\hat{\varphi})$ é finito. Pelo Lema 8.3.2 existem um número $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma série formal $\hat{\psi}$ tais que $\hat{\varphi} \circ \hat{\psi}(z) = z^{n_0}$ para todo z em S .

Afirmção 8.3.1. Existe um isomorfismo (bijeção)

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : Inv(\hat{\varphi}) &\rightarrow Inv(z^{n_0}) \\ g &\mapsto \hat{\psi}^{-1} \circ g \circ \hat{\psi} \end{aligned}$$

De fato, se $g \in Inv(\hat{\varphi})$ então $\hat{\varphi} \circ g = \hat{\varphi}$ implica que

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} \circ \hat{\psi} \circ \hat{\psi}^{-1} \circ g &= \hat{\varphi} \\ z^{n_0} \circ \hat{\psi}^{-1} \circ g &= \hat{\varphi} \\ z^{n_0} \circ \hat{\psi}^{-1} \circ g \circ \hat{\psi} &= \hat{\varphi} \circ \hat{\psi} \\ z^{n_0} \circ \hat{\psi}^{-1} \circ g \circ \hat{\psi} &= z^{n_0}. \end{aligned}$$

É suficiente então observar que $Inv(z^{n_0})$ é o grupo cíclico finito gerado pela rotação $\theta(z) = e^{\frac{2\pi i}{n_0}} z$. □

Capítulo 9

Folheações holomorfas

No presente capítulo, alguns tópicos da teoria de folheações são apresentados.

9.1 Conceitos fundamentais

Definição 9.1.1. ([76] pág.33 Definição 1.14) Seja M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$. Uma *folheação holomorfa não singular de dimensão k* (ou *codimensão $n - k$*) em M , onde $1 \leq k \leq n - 1$, é dada por uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos tal que para cada $\alpha \in A$, existe um biholomorfismo $\Phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$, onde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ é o disco unitário na origem. Além disso, sempre que $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha\beta} : \Phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) &\rightarrow \Phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ (z, w) &\mapsto \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(z, w).\end{aligned}$$

Cada aberto U_α é chamado de *aberto trivializador* da folheação.

Segue da definição que para cada $\alpha \in A$, U_α é decomposto em variedades de dimensão k da forma $\Phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times \{w_0\})$, onde $w_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$. Tais variedades são chamadas de *placas*. As placas se sobrepõem nas interseções de abertos trivializadores da seguinte forma: se $P_\alpha \subset U_\alpha$ e $P_\beta \subset U_\beta$ são placas, ou $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$, ou $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$.

Defina a seguinte relação de equivalência em M : Dados $p, q \in M$,

$p \sim q$ se existem placas P_1, \dots, P_m , com $p \in P_1$ e $q \in P_m$ tais que

$$P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset \text{ para } i = 1, \dots, m - 1.$$

A classe de equivalência de $p \in M$ por essa relação é chamada de *folha por p* . Cada folha, com a topologia gerada pelos abertos de suas placas, possui estrutura de variedade complexa de dimensão k imersa em M .

Uma folheação proporciona, portanto, uma decomposição da variedade em subvariedades imersas de dimensão k , duas a duas disjuntas. O *espaço tangente* à folheação \mathcal{F} em $p \in M$, denotado por $T_p\mathcal{F}$, é definido como o espaço tangente no ponto p à folha passando por p e conseqüentemente, possui dimensão k . Dizemos que duas folheações são iguais se todas as suas folhas coincidem.

Exemplo 9.1.1. ([17], pág.43, Exemplo 3) Se v é um campo de vetores holomorfo não singular em um aberto $U \subset M$, então o Teorema do Fluxo Tubular holomorfo implica que U possui uma estrutura de folheação de dimensão um. Observe que, se $\tilde{U} \subset M$ é aberto com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, admitindo um campo de vetores não singular \tilde{v} que satisfaz

$$v|_{U \cap \tilde{U}} = f\tilde{v}|_{U \cap \tilde{U}}$$

para alguma função $f : U \cap \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorfa, então v e \tilde{v} induzem a mesma folheação em $U \cap \tilde{U}$. Temos assim uma folheação definida em $U \cup \tilde{U}$. Reciprocamente, uma folheação de dimensão um é induzida localmente por campos de vetores não singulares. Basta tomar, em cada aberto trivializador U_α , o campo

$$v_\alpha = D(\Phi_\alpha^{-1}) \frac{\partial}{\partial z_1},$$

onde $(z_1, (z_2, \dots, z_n))$ são coordenadas de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}^{n-1}$. Observe que, se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, para cada $p \in U_{\alpha\beta}$, existe $f_{\alpha\beta}(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$v_\alpha(p) = f_{\alpha\beta}(p)v_\beta(p).$$

A função $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$ assim definida é holomorfa. Portanto, o seguinte conjunto de dados:

- (a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos;
- (b) para cada $\alpha \in A$, um campo de vetores holomorfo não singular v_α em U_α ;
- (c) sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, uma função holomorfa $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que

$$v_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_\beta|_{U_{\alpha\beta}}.$$

define uma folheação de dimensão um em M .

Definição 9.1.2. ([17], pág.17, Definição 1) Uma *folheação holomorfa singular de dimensão k* (ou *codimensão $n - k$*), onde $1 \leq k \leq n - 1$,

em uma variedade complexa M é uma folheação não singular de dimensão k em $M \setminus S$, onde S é um conjunto analítico em M de codimensão maior ou igual a 2. Além disso, exigimos que o conjunto S seja minimal, no seguinte sentido: não existe subconjunto analítico próprio $S' \subset S$ tal que a folheação regular em $M \setminus S$ se estenda a $M \setminus S'$. Nessas condições, S é chamado de *conjunto singular* da folheação. O conjunto singular da folheação \mathcal{F} é denotado por $Sing(\mathcal{F})$. Os elementos de $Sing(\mathcal{F})$ são chamados de *pontos singulares* ou *singularidades*, enquanto os elementos de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$ são chamados de *pontos regulares*.

As folhas de \mathcal{F} são, por definição, as folhas da folheação regular $\mathcal{F}|_{M \setminus Sing(\mathcal{F})}$. Duas folheações singulares \mathcal{F} e \mathcal{F}' são iguais se:

- (i) $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$;
- (ii) as folheações regulares $\mathcal{F}|_{M \setminus Sing(\mathcal{F})}$ e $\mathcal{F}'|_{M \setminus Sing(\mathcal{F}')}$ são iguais.

Definição 9.1.3. ([17], pág.31, Seção 3) Seja \mathcal{F} uma folheação de dimensão um em uma variedade complexa M . Dado $p \in Sing(\mathcal{F})$, uma *separatriz* em p é um germe de conjunto analítico V contendo p invariante por \mathcal{F} , ou seja, $V \setminus Sing(\mathcal{F})$ é localmente uma união de folhas de \mathcal{F} .

O conceito de holonomia de uma folheação é motivado pelo conceito de aplicação de primeiro retorno ou aplicação de Poincaré de uma órbita periódica de um campo vetorial.

Definição 9.1.4. ([76], pág.60, Definição 4.1) Seja L um folha de uma folheação holomorfa de codimensão k . O *grupo de holonomia* de L , denotado por $Hol(L)$, é a coleção de todos os grupos de germes em $q \in \mathbb{C}^k$, de homeomorfismos de \mathbb{C}^k que deixam q fixo e que são conjugados a $Hol(L, p, \Sigma)$, onde $p \in L$ e Σ é uma seção transversal a \mathcal{F} passando por p . Dizemos que o grupo de holonomia de L é conjugado a um grupo dado G , se $G \in Hol(L)$. O grupo de Holonomia é *trivial* se $\{id\} = Hol(L)$, onde id é a aplicação identidade.

Teorema 9.1.1 (Mattei-Moussu [52], Martinet-Ramis [49]). Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dois germes de folheações com singularidade não-degeneradas $\mathcal{F}_j : xdy - \lambda y(1+b_j(x, y))dx = 0$, com $b_j(x, y)$ holomorfa, $b_j(0, 0) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}_-$. Denote por $f_j : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ a aplicação de holonomia de $\Gamma : (y = 0)$ com respeito a \mathcal{F}_j . Então \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são conjugadas analiticamente por um difeomorfismo holomorfo $\Phi : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ se, e somente se, a aplicação de holonomia f_1 e f_2 são analiticamente conjugadas em $Diff(\mathbb{C}, 0)$.

9.1.1 Holonomia virtual

Intuitivamente o conceito de Holonomia Virtual que será definido a seguir é o objeto geométrico que mede as acumulações das folhas em torno de uma determinada folha.

Seja \mathcal{F} uma folheação em uma superfície complexa M e seja L uma folha de \mathcal{F} .

Fixado um ponto $q \in L$, então $q \notin \text{sing}\mathcal{F}$ e podemos considerar um disco transversal Σ centrado em q e a representação de holonomia $\text{Hol} : \pi_1(L, q) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma, q)$. Denotaremos por $\text{Hol}(\mathcal{F}, L, \Sigma, q)$ o representante do grupo de holonomia assim obtido.

Definição 9.1.5. O grupo de *holonomia virtual* da folha L de \mathcal{F} na seção Σ é definido por

$$\text{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L, \Sigma, q) := \{f \in \text{Diff}(\Sigma, q); L_z = L_{f(z)}, \text{ para todo } z \in \Sigma\}$$

onde, na notação acima L_z denota a folha (global) de \mathcal{F} que passa por z .

O grupo de holonomia virtual de L é a coleção $\text{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L)$, de todos os grupos holomorficamente conjugados a $\text{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L, \Sigma, q)$.

Assim, em outras palavras, o grupo de holonomia virtual consiste dos biholomorfismos locais, f , de Σ , com ponto fixo q e que para cada folha L_1 de \mathcal{F} temos $f(L_1 \cap \Sigma) \subset L_1 \cap \Sigma$.

Pela própria definição de holonomia temos que $\text{Hol}(\mathcal{F}, L)$ é um subgrupo de $\text{Hol}^{\text{virt}}(\mathcal{F}, L)$.

Agora, fixe um germe de folheação holomorfa com singularidade na origem $0 \in \mathbb{C}^2$, com representante $\mathcal{F}(U)$ como acima. Seja Γ a separatriz de \mathcal{F} . Pelo Teorema de parametrização de Newton-Puiseux, $\Gamma \setminus \{0\}$ é biholomorfo a um disco furado $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Em particular, podemos escolher um laço $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ gerando o grupo fundamental $\pi_1(\Gamma \setminus \{0\})$ (localmente). A correspondente aplicação de holonomia h_γ é definida em termos de um germe de difeomorfismos complexos na origem de um disco local Σ transversal a \mathcal{F} e centrado em um ponto não singular $q \in \Gamma \setminus \{0\}$. Esta aplicação é bem definida por conjugação de germes de difeomorfismos holomorfos, e referida genericamente por *holonomia local* da separatriz Γ .

9.2 Desingularização

Seja \mathcal{F} uma folheação (de dimensão um) em uma superfície complexa M (uma variedade complexa de dimensão 2). Uma vez que \mathcal{F} possui dimensão

e codimensão um, ela é localmente induzida tanto por um campo de vetores holomorfo quanto por uma 1-forma holomorfa. Assim, se \mathcal{F} é definida em uma vizinhança de $p \in M$ por um campo v , escrito em relação a um sistema de coordenadas (x, y) no qual $p = (0, 0)$ na forma

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} = (v_1, v_2),$$

então \mathcal{F} é também definida pela equação $\omega = 0$, onde ω é a forma dual de v ,

$$\omega = -v_2 dx + v_1 dy.$$

Seja $m = m_p(\mathcal{F})$. Desenvolvemos em séries de Taylor

$$v_1 = \sum_{k=m}^{\infty} v_{1k} \text{ e } v_2 = \sum_{k=m}^{\infty} v_{2k},$$

onde v_{1k} e v_{2k} denotam os termos de grau k de v_1 e v_2 , respectivamente.

Definição 9.2.1. Dizemos que p é singularidade *reduzida* de \mathcal{F} se alguma das duas situações seguintes ocorre:

- (i) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}^+$;
- (ii) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

Uma singularidade do tipo (i) é chamada de *simples*, enquanto uma singularidade do tipo (ii) é chamada de *sela-nó*.

Dada uma sequencia finita de blow-ups em p , ou seja, $\pi = \pi_n \circ \dots \circ \pi_1$, onde π_1 é o blow-up em p e π_k é o blow-up em algum ponto de $(\pi_{k-1} \circ \dots \circ \pi_1)^{-1}(p)$ para $k = 2, \dots, n$, podemos definir $\pi^*\mathcal{F}$ iterando os transformados estritos associados a cada blow-up. O seguinte teorema é devido a Seidenberg [68]:

Teorema 9.2.1. (*Teorema de resolução de singularidades*, [17], pág.37, Teorema 3.7) Sejam \mathcal{F} uma folheação em uma superfície e $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$. Então existe um sequencia finita de blow-ups π em p tal que todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $\pi^{-1}(p)$ são reduzidas.

Na situação do teorema acima, dizemos que π é um *resolução* de \mathcal{F} em p e que as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $\pi^{-1}(p)$ estão *resolvidas*.

Informações a respeito do comportamento da folheação em torno de singularidades reduzidas podem ser obtidas nos teoremas a seguir.

Fixemos $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, tal que $m_p(\mathcal{F}) = 1$, um campo v que induz \mathcal{F} em torno de p e ω sua 1-forma dual. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da parte linear de v em p .

Teorema 9.2.2. (*Forma normal de Poincaré*, [17], pág.46, Teorema 1.2) Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ satisfazem

(i) $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}^-$ e

(ii) $\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Z}^+$ ou $\lambda_1 = \lambda_2$ e a parte linear de v é diagonalizável,

então existe um biholomorfismo local Φ entre uma vizinhança de p e uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, onde

$$\tilde{\omega} = \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx.$$

O conjunto dos pares $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ satisfazendo $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}^-$ é chamado de *domínio de Poincaré*.

Teorema 9.2.3. (*Forma normal de Siegel*, [17], pág.52, Teorema 2.4) Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ satisfazem $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$, então existe um biholomorfismo local Φ entre uma vizinhança de p e uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, onde

$$\tilde{\omega} = (\lambda_1 x + xyf(x, y))dy - (\lambda_2 y + xyg(x, y))dx,$$

onde $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são funções holomorfas.

O conjunto dos pares $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ satisfazendo $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ é chamado de *domínio de Siegel*.

No caso de uma sela-nó, temos a seguinte forma normal formal:

Teorema 9.2.4. (*Forma normal de Dulac*, [17], pág.65, Teorema 1.1) Se $\omega = 0$ é germe de sela-nó definido em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$. Então existe uma mudança de coordenadas formal Φ tal que $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, onde

$$\tilde{\omega} = x^{p+1}dy + y(1 + \lambda x^p)dx.$$

Nos resultados acima, temos que

(i) Nas formas normais de Poincaré e Siegel, os eixos coordenados $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ são separatrizes.

(ii) Na forma normal de Dulac, temos que o eixo $\{x = 0\}$ é uma separatriz, a chamada *separatriz forte* da sela-nó. Eventualmente, pode haver uma segunda separatriz, correspondente a $\{y = 0\}$ na forma normal formal. Essa será chamada de *separatriz fraca*.

Observação 9.2.1. Uma singularidade admite um número infinito de separatrizes se, e somente se, no processo de resolução ocorrer alguma singularidade dicrítica.

9.3 A sela-nó

Nesta seção fazemos mais algumas considerações sobre a sela-nó. A primeira definição que se faz necessária é a de expansão assintótica para duas dimensões.

Definição 9.3.1. ([80], pág.43, Definição 9.3) Sejam

$$\widehat{F}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{\infty} a_{ij}x^i y^j \in \mathbb{C}[[x, y]]$$

uma série de potências formal em duas variáveis, $S \subset \mathbb{C}$ um setor e, $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto contendo $0 \in \mathbb{C}$. Dizemos que uma aplicação $F(x, y)$ holomorfa em $\Omega \times S$, admite \widehat{F} como expansão assintótica em $\Omega \times S$, se dado qualquer subsetor próprio S' de S , qualquer disco compacto Ω' de Ω e para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma constante $A_{S', \Omega', k} = A_k > 0$ tal que

$$\|F(x, y) - \sum_{i+j=0}^{k-1} a_{ij}x^i y^j\| < A_k \|(x, y)\|^k, \quad \forall (x, y) \in \Omega' \times S'.$$

Seja \mathcal{F} um germe de folheação holomorfa dada por uma 1-forma

$$\omega(x, y) = \lambda_1 x dx + \lambda_2 y dy + \dots$$

Na Seção anterior foi visto que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ a singularidade é chamada de sela-nó. Considere $\omega = 0$ um germe de sela-nó em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Pelo Teorema 9.2.4, existem números p, λ e uma mudança de coordenadas formais tais que ω é formalmente equivalente a

$$\omega_{p, \lambda}(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = x(1 + \lambda y^p) \\ \dot{y} = y^{p+1}. \end{cases}$$

Além disso, existe uma série de potências formal $\widehat{\varphi}(x, y) = x + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) y^j$ com φ_j convergindo em algum disco $\|x\| < R$, ($R > 0$ não dependendo de j), tal que o difeomorfismo formal $\widehat{\Phi}(x, y) = (\widehat{\varphi}(x, y), y)$ satisfaz $\widehat{\Phi}^* \omega_{p, \lambda} \wedge \omega = 0$. Denotemos por $D_{p, \lambda}$ o subconjunto das selas-nó cuja forma normal final é dada por $w_{p, \lambda}$. Com as considerações feitas, temos o seguinte teorema:

Teorema 9.3.1. (Hukuara-Kimura-Matuda, [17], pág.81, Teorema 3.2) Seja $\omega = 0$ uma sela-nó em $D_{p, \lambda}$ e S um setor em \mathbb{C} . Se S possui abertura no máximo igual a $\frac{2\pi}{p}$, existe uma transformação holomorfa limitada

$$\Phi : \Omega \times S \rightarrow \mathbb{C} \times S$$

onde $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, tal que

(i) $\Phi(x, y) = (\varphi(x, y), y)$

(ii) $\Phi^* \omega_{p,\lambda} \wedge \omega = 0$

(iii) φ admite $\hat{\varphi}$ como expansão assintótica em $\Omega \times S$ (no sentido da definição 9.3.1).

Definição 9.3.2. ([17], pág.82, § 1) A função holomorfa Φ no Teorema de Hukuara-Kimura-Matuda é chamada *normalização setorial*.

Capítulo 10

Integrais primeiras

Do ponto de vista estrutural, as singularidades com integral primeira holomorfa são as singularidades mais simples de uma folheação holomorfa. Neste capítulo apresentamos brevemente este conceito, o Teorema de Mattei-Moussu e também sua versão formal são enunciados.

10.1 Noções básicas

Seja \mathcal{F} um germe de folheação com uma singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^2$. Dizemos que uma função holomorfa (não constante) $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma *integral primeira holomorfa* para \mathcal{F} , se F for constante ao longo das folhas de \mathcal{F} .

Se \mathcal{F} é dada por um campo de vetores X (com $\text{sing}(X) = \{0\}$) Então

$$dF(X) \equiv 0. \quad (10.1)$$

Se considerarmos a 1-forma dual ω , a equação (10.1) é equivalente a

$$\omega \wedge dF \equiv 0. \quad (10.2)$$

Devido ao Lema de divisão de Saito ([67]), a equação (10.2) é equivalente a

$$\omega = g dF.$$

Exemplo 10.1.1. Consideremos o campo de vetores linear dado por

$$X = \mu x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$$

com $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Podemos associar a X uma folheação holomorfa $\mathcal{F}(X)$. As folhas de $\mathcal{F}(X)$ são parametrizadas pelo fluxo

$$t \mapsto (xe^{\lambda t}, ye^{\mu t}), \quad t \in \mathbb{C}.$$

Analise o caso particular em que $\mu = 1$ e $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Neste caso, a 1-forma dual a X é dada por $\omega = xdy - \lambda ydx$. Dividindo a equação $xdy - \lambda ydx = 0$ por xy obtemos

$$\frac{dy}{y} - \lambda \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow d(\ln y - \lambda \ln x) = 0 \Rightarrow d \ln yx^{-\lambda} = 0$$

Logo, $F(x, y) = yx^{-\lambda}$ é uma integral primeira para \mathcal{F} .

10.2 O Teorema de Mattei-Moussu

Se um germe de folheação \mathcal{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$ admite uma integral primeira holomorfa (não constante) $F: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ então as folhas de \mathcal{F} satisfazem as seguintes propriedades topológicas [17]:

- (i) as folhas de \mathcal{F} são fechadas fora da origem;
- (ii) Somente um número finito de folhas se acumulam na origem.

O Teorema de Mattei-Moussu a seguir estabelece a recíproca da afirmação acima. Precisamente temos:

Teorema 10.2.1 (Mattei-Moussu, [52]). Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular em $0 \in \mathbb{C}^2$. Assuma que para uma pequena vizinhança V de $0 \in \mathbb{C}^2$ se tenha:

- (i) As folhas de \mathcal{F} em V são fechadas em $V \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^2$.
- (ii) Somente um número finito de folhas de \mathcal{F} em V se acumulam em $0 \in \mathbb{C}^2$.

Então \mathcal{F} admite uma integral primeira holomorfa (não constante) $F: W \rightarrow \mathbb{C}$ em algum subconjunto aberto $0 \in W \subset V$.

A prova clássica baseia-se na Resolução de Singularidades, bem como na dinâmica dos difeomorfismos holomorfos $f: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

10.3 O Teorema de Mattei-Moussu formal

Seja \mathcal{F} um germe de folheação holomorfa com uma singularidade isolada na origem $0 \in \mathbb{C}^n$ de codimensão 1, e ω a 1-forma holomorfa associada a \mathcal{F} . Uma *integral primeira formal* para \mathcal{F} é uma série de potências formal em n variáveis $\hat{F} \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ tal que

$$d\hat{F} \wedge \omega = 0.$$

Dizemos que uma série de potências formal $\hat{F} \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ é dita *n-potência* se existe uma decomposição $\hat{F} = \hat{F}_1^{k_1} \cdot \hat{F}_2^{k_2} \dots \hat{F}_\lambda^{k_\lambda}$ tal que \hat{F}_i são séries formais irredutíveis, e $k_i \in \mathbb{N}$ com máximo divisor comum $d = m.d.c.(k_1, \dots, k_\lambda) = n \neq 1$. Se $d = 1$ dizemos que \hat{F} não é uma *n-potência*.

Teorema 10.3.1. (Mattei-Moussu, [52]) Seja ω um germe de 1-forma holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^n$, integrável com uma integral primeira formal $\hat{F} \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ que não é uma *n-potência*. Então existe uma série de potências formal em uma variável $\hat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]]$ tal que

$$G = \hat{\varphi} \circ \hat{F} \in \mathcal{O}_n \quad (10.3)$$

ou seja, G é uma função holomorfa em \mathbb{C}^n .

Observamos que o teorema supõe a existência de uma série de potências formal $\hat{F} \in \mathbb{C}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$ e, obtemos uma função $G \in \mathcal{O}_n$ holomorfa. Neste sentido, levando em conta a equação (10.3), dizemos que este é um teorema de convergência.

Capítulo 11

Folheações admitindo integral primeira setorial moderada

11.1 A integral primeira setorial moderada

Definição 11.1.1. Dados um germe \mathcal{F} da folheação em $0 \in \mathbb{C}^2$ e uma separatriz Γ de \mathcal{F} dizemos que um par (\mathcal{F}, Γ) admite um *integral primeira setorial* se, para qualquer representante \mathcal{F}_U de \mathcal{F} em uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^2$, e qualquer seção transversal Σ com $p = \Sigma \cap \Gamma \neq \{0\}$, existirem um setor $S \subset \Sigma$ com vértice em p que é invariante por \mathcal{F}_U e uma função holomorfa $\varphi : S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que φ é constante nos traços de cada folha de \mathcal{F} em U . A integral primeira setorial é *moderada* se φ admitir uma expansão assintótica não nula em S .

Exemplo 11.1.1. Consideremos \mathcal{F} uma folheação holomorfa com uma singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^2$ e a folheação pull-back $\tilde{\mathcal{F}} := \pi^*(\mathcal{F})$, onde $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 : M_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é a resolução de \mathcal{F} . Suponha que $\tilde{\mathcal{F}}$ exiba uma componente dicrítica \mathbb{P}_2 , onde o divisor excepcional $\mathbb{P} = \pi^{-1}(0)$ é dado por $\mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^2 \mathbb{P}_j$. Então a componente \mathbb{P}_2 é transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$ (sem pontos de tangência). Consideremos a separatriz $\tilde{\Gamma}$ transversal a \mathbb{P}_2 e $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{P}_2$ uma seção transversal tal que $\tilde{\Sigma} \bar{\cap} \tilde{\Gamma}$. Desde que \mathbb{P}_2 é uma componente dicrítica, existe uma vizinhança \tilde{U} de $\tilde{\Sigma}$ tal que, $\tilde{\mathcal{F}}|_{\tilde{U}}$ admite uma integral primeira holomorfa. Denotemos $U = \pi(\tilde{U})$, $\Gamma = \pi(\tilde{\Gamma})$ e $\Sigma = \pi(\tilde{\Sigma})$. Então existe uma integral primeira holomorfa para \mathcal{F} definida em uma vizinhança U de Σ em \mathbb{C}^2 . A restrição desta integral primeira holomorfa à Σ implica que o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada. Por outro lado, podemos obter uma tal folheação \mathcal{F} para a qual o grupo de holonomia da componente \mathbb{P}_1 não é finito (veja [56]). Portanto, \mathcal{F} não admite uma integral primeira holomorfa definida em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$. O ponto é que \mathcal{F} é dicrítica.

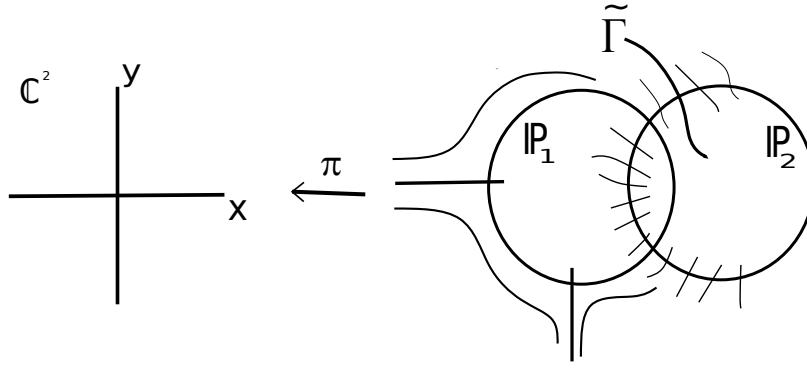


Figura 11.1: Componente dicrítica \mathbb{P}_2 .

Exemplo 11.1.2. Considere agora a sela-nó \mathcal{F} dada por

$$\omega_{2,1}(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y^2. \end{cases}$$

Observe que

$$x dy - y^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} - \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow d\left(-\frac{1}{y} - \ln x\right) = 0.$$

Considere a separatriz forte $\Gamma_s : \{y = 0\}$, a separatriz fraca $\Gamma_w : \{x = 0\}$ e as seções transversais $\Sigma_s : (x = 1)$ e $\Sigma_w : (y = 1)$. Então a folheação admite a integral primeira $f(x, y) = xe^{\frac{1}{y}}$, holomorfa fora de Γ_s .

Denotemos $\Sigma_w^* := \Sigma_w \setminus \{(0, 1) \in \mathbb{C}^2\}$ e $\Sigma_s^* := \Sigma_s \setminus \{(1, 0) \in \mathbb{C}^2\}$. A restrição $\varphi_w = f|_{\Sigma_w} = xe$ é uma integral primeira setorial e admite uma expansão assintótica não nula em qualquer setor $S_w \subset \Sigma_w^*$. Considere o setor $S_s \subset \{y \in \Sigma_s^* : \operatorname{Re}(y) < 0\}$. Desde que $\varphi_s(y) = e^{\frac{1}{y}}$ temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_s(y) - 0\| &= \|e^{\frac{1}{y}}\| = e^{\operatorname{Re}(\frac{1}{y})} = e^{\operatorname{Re}(\frac{\bar{y}}{\|y\|^2})} \\ &= e^{\frac{1}{\|y\|^2} \operatorname{Re}(\bar{y})} = e^{\frac{1}{\|y\|^2} \operatorname{Re}(y)}. \end{aligned}$$

Desde que $e^{\frac{1}{\|y\|^2} \operatorname{Re}(y)} \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{Re}(y) < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ existe uma constante $A_k > 0$ tal que

$$e^{\frac{1}{\|y\|^2} \operatorname{Re}(y)} \leq A_k \|y\|^k$$

para todo y em um subsetor próprio $S' \subset S_s$. Portanto, φ_s admite $0 \in \mathbb{C}$ como expansão assintótica em S_s . Apesar disso, \mathcal{F} não admite uma integral

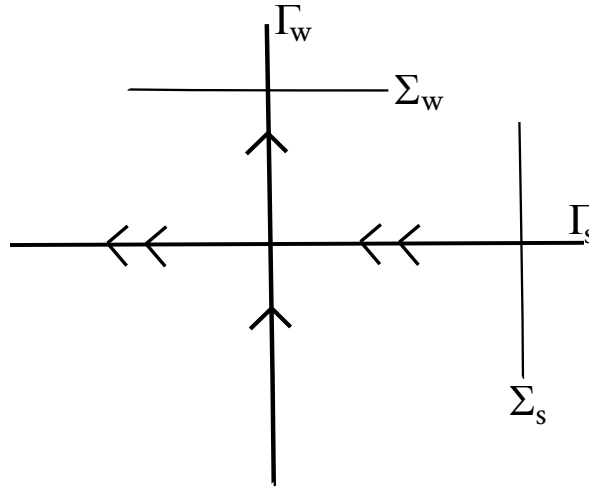


Figura 11.2: Γ_w e Γ_s são as separatrizes fraca e forte respectivamente. Σ_w e Σ_s , são as seções transversais nas separatrizes Γ_w e Γ_s respectivamente.

primeira holomorfa. O ponto é:

- i) φ_w admite expansão assintótica não nula;
- ii) φ_s admite zero como expansão assintótica mas, Γ_s é uma separatriz forte.

Observe que se \mathcal{F} é um germe de folheação, admitindo uma integral primeira holomorfa, então para cada separatriz Γ de \mathcal{F} o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada. De fato, basta notar que se F é uma integral primeira holomorfa em uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^2$ então para cada separatriz Γ_j de \mathcal{F} consideremos uma seção $\Sigma_j \subset U$ transversal a Γ_j . Sejam $p = \Sigma_j \cap \Gamma_j$ e $\mathbb{D}_j \subset \Sigma_j$ um disco de raio finito centrado em p e contido na seção transversal Σ_j . Desde que F é holomorfa em U as restrições $\varphi = F|_{\mathbb{D}_j}$ são analíticas no disco. Em particular, todos os limites $\lim_{y \rightarrow p} \varphi^{(r)}(y)$ existem para todo $y \in \mathbb{D}_j$. Pelo Teorema 7.2.1, φ admite expansão assintótica. Pelo Teorema 7.2.2 item (II), o r -ésimo termo da série formal é dado por $a_r = \frac{\varphi^{(r)}(p)}{r!}$. Desde que φ é analítica, e F é não identicamente nula, pelo menos um dos $a_r \neq 0$. Logo, φ admite expansão assintótica não-nula. Por construção, temos que φ é constante no traço de cada folha.

Na Seção 11.4 apresentamos uma recíproca para esse fato, com o Teorema I (pág. 120).

11.2 A Correspondência de Dulac

Nesta seção é descrita uma importante ferramenta usada na prova do Teorema I (pág. 120, Seção 11.4). Referências para a Correspondência de Dulac: [18, 21, 70, 72].

Motivado pelo Teorema de Resolução de Seindenberg (veja Teorema 9.2.1) considere uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre uma superfície complexa compacta \tilde{M} e $\mathbb{P} \subset \tilde{M}$ um divisor invariante compacto (de codimensão um) com cruzamentos normais (normal crossing), sem ciclos e sem pontos triplos. Escrevemos $\mathbb{P} = \cup_{j=1}^m \mathbb{P}_j$, onde cada \mathbb{P}_j é uma componente suave irreduzível, e fixemos seções transversas locais tais que $\Sigma_j \cap \mathbb{P}_j = p_j \notin \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, e $(\Sigma_j, p_j) \cong (\mathbb{C}, 0)$.

Denotemos por G_j o grupo de holonomia $Hol(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P}_j, \Sigma_j)$ de \mathbb{P}_j (veja seção 9.1.1 ou [52] para mais propriedades). Denote por L_z a folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ que contém o ponto $z \in \tilde{M}$. O grupo de holonomia virtual \hat{G}_j de \tilde{M} relativa à componente \mathbb{P}_j na seção Σ_j é definida por

$$\hat{G}_j = \hat{Hol}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P}_j, \Sigma_j) = \{f \in Diff(\Sigma_j, p_j) \mid \tilde{L}_z = \tilde{L}_{f(z)}, \text{ para todo } z \in (\Sigma_j, p_j)\}.$$

O grupo de holonomia virtual \hat{G}_j contém o grupo de holonomia G_j . Agora, fixe uma esquina $q = \mathbb{P}_i \cap \mathbb{P}_j$ e considere a seguinte hipótese:

HIPÓTESE: A esquina q é uma singularidade irreduzível com uma integral primeira holomorfa.

Desde que q é irreduzível com uma integral primeira holomorfa, pelo Teorema da conjugação analítica (Teorema 9.1.1) existem coordenadas holomorfas locais $(x, y) \in U$ tais que $\mathbb{P}_i \cap U = \{x = 0\}$, $\mathbb{P}_j \cap U = \{y = 0\}$, além disso $\tilde{\mathcal{F}}|_U$ é dada na forma normal como $nxdy + mydx = 0$ e $q : x = y = 0$, onde $n/m \in \mathbb{Q}_+$ e $\langle n, m \rangle = 1$. Fixe seções transversas locais $\Sigma_j = \{x = 1\}$ e $\Sigma_i = \{y = 1\}$, tais que $\Sigma_i \cap \mathbb{P}_i = q_i \neq q$ e $\Sigma_j \cap \mathbb{P}_j = q_j \neq q$. Denotemos $h_0 \in Hol(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P}_i, \Sigma_i)$ o elemento correspondente à esquina q . Então temos $h_0(x) = \exp(-2\sqrt{-1}\pi n/m)x$. As folhas locais são dadas por $x^m y^n = cte$. A Correspondência de Dulac é portanto dada por (todos os ramos são considerados)

$$\mathcal{D}_q : \mathcal{F}(\Sigma_i) \rightarrow \mathcal{F}(\Sigma_j), \quad \mathcal{D}_q(x) = \{x^{m/n}\}.$$

Para os propósitos deste trabalho, é suficiente assumir que G_i seja abeliano (para os outros casos veja [18, 21, 70, 72]). Desde que G_i é abeliano,

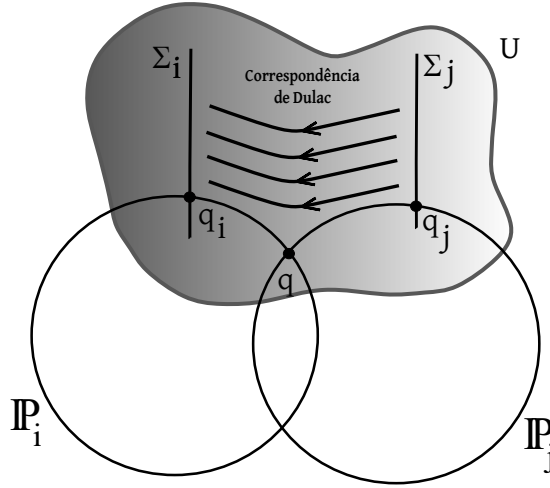


Figura 11.3: $\tilde{\mathcal{F}}|_U$ é dada pela forma normal $nxdy + mydx = 0$

temos que $h(x) = \mu x \tilde{h}(x^m)$ para algum $\tilde{h} \in \mathcal{O}_1$, $\tilde{h}(0) = 1$. Tomamos $\mu_1 = \mu^{m/n}$ e $h_1 = \tilde{h}^{m/n}$ como sendo uma das n -ésimas raízes de μ^m e \tilde{h}^m , respectivamente. Então defina $h^{\mathcal{D}_q} : (\Sigma_j, q_j) \rightarrow (\Sigma_i, q_i)$ por $h^{\mathcal{D}_q}(y) = \mu_1 y \tilde{h}_1(y^n)$. Considere a coleção $\{h^{\mathcal{D}}\}$ de todos estes elementos.

11.3 A Correspondência de Dulac e a integral primeira setorial moderada

Nesta seção aplicamos a Correspondência de Dulac. O primeiro lema permitirá transportar a integral primeira setorial moderada entre duas linhas projetivas diferentes com uma esquina em comum.

Lema 11.3.1. Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ uma folheação em uma superfície compacta complexa \tilde{M} , e $\mathbb{P} \subset \tilde{M}$ um divisor invariante compacto (codimensão um), com cruzamentos normais (normal crossing) e sem pontos triplos. Escrevemos $\mathbb{P} = \cup_{j=1}^m \mathbb{P}_j$, onde cada \mathbb{P}_j é uma componente suave irreduzível. Seja $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ duas componentes tais que a esquina $q \in \mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2$ admite uma vizinhança U de q , onde $\tilde{\mathcal{F}}$ pode ser escrito na forma normal $nxdy + mydx = 0$. Suponha que exista uma separatriz $\Gamma_1 \subset \mathbb{P}_1$ tal que o par $(\tilde{\mathcal{F}}, \Gamma_1)$ admite uma integral primeira setorial moderada $\varphi_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{C}$, onde S_1 é um setor contido na seção transversal Σ_1 e vértice em um ponto $q_1 \in \Sigma_1$. Então para cada ponto $q_2 \in \mathbb{P}_2 \cap U \setminus \{q\}$, existem uma seção transversal $\Sigma_2 \ni q_2$, um setor $S_2 \subset \Sigma_2$ com vértice em q_2 , e uma função holomorfa $\varphi_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{C}$, tal que φ_2 é constante no traço de cada folha de \mathcal{F} em S_2 e que admite uma expansão assintótica não nula. Além disso, se $\mathcal{D}_q : \mathcal{F}(\Sigma_1) \rightarrow \mathcal{F}(\Sigma_2)$ denota a Correspondência de Dulac, então $\varphi_1 \circ \mathcal{D}_q = \varphi_2$.

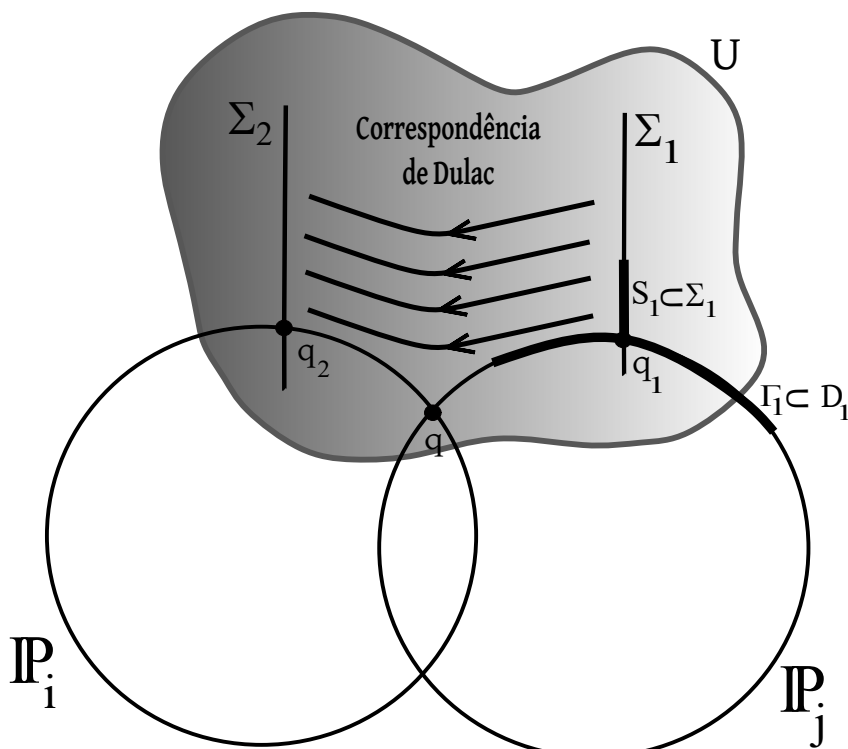


Figura 11.4: Transporte do setor S_1 por meio da Correspondência de Dulac.

Demonstração. Fixemos um ponto $q_2 \in \mathbb{P}_2 \cap U \setminus \{q\}$. Seja $\Sigma_2 \subset U$ uma seção transversal em q_2 . Denote por $\mathcal{F}(\Sigma_1)$ a coleção de subconjuntos $E \subset \Sigma_1$ tal que E está contido em alguma folha de $\tilde{\mathcal{F}}|_U$. Defina $\mathcal{F}(\Sigma_2)$ de forma análoga. Denotemos por $\mathcal{D}_q : \mathcal{F}(\Sigma_1) \rightarrow \mathcal{F}(\Sigma_2)$ a Correspondência de Dulac dada por $\mathcal{D}_q(x) = \{x^{m/n}\}$. Seja a subcoleção $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{F}(\Sigma_1) : E \cap S_1 \neq \emptyset\}$. Tome um setor $S_2 \subset \Sigma_2$ com vértice em q_2 , tal que $\mathcal{D}_q(E) \cap S_2 \neq \emptyset, \forall E \in \mathcal{A}$.

Defina $\xi : S_2 \rightarrow S_1$ dada por $\xi(y) = y^n$, onde n é dada pela forma normal. Por construção de S_2 e da Correspondência de Dulac, ξ é uma função holomorfa bem definida. Defina $\varphi_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \xi$. Desde que φ_1 é uma integral primeira setorial moderada, temos que $\varphi_1(E) = cte$, para cada $E_1 \in \mathcal{A}$. Então $\varphi_2(\mathcal{D}_q(E)) = \varphi_1 \circ \xi(\mathcal{D}_q(E)) = \varphi_1(E) = cte$. Além disso, para cada elemento da holonomia $h \in \hat{Hol}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P}_1, \Sigma_1) = \{f \in Diff(\Sigma_1, q_1) \mid \tilde{L}_z = \tilde{L}_{f(z)}, \text{ para cada } z \in (\Sigma_1, q_1)\}$, temos uma coleção $\{h^{\mathcal{D}}\} \subset Diff(\Sigma_2, q_2)$ satisfazendo a equação adjunta $h^{\mathcal{D}} \circ \mathcal{D}_q = \mathcal{D}_q \circ h$. Em particular, para cada $y \in S_2$ a equação adjunta implica que $\xi \circ h^{\mathcal{D}}(y) = h \circ \xi(y)$. Portanto, para cada $y \in S_2$,

temos

$$\begin{aligned}
\varphi_2 \circ h^{\mathcal{D}}(y) &= \varphi_1 \circ \xi \circ h^{\mathcal{D}}(y) \\
&= \varphi_1 \circ h \circ \xi(y) \\
&= (\varphi_1 \circ h) \circ \xi(y) \\
&= \varphi_1 \circ \xi(y) \\
&= \varphi_2(y).
\end{aligned}$$

Resta mostrar a propriedade assintótica de φ_2 . Sabemos que ξ admite $\hat{\xi} = y^n = \xi$ como expansão assintótica (ξ é analítica). Desde que φ_1 é uma integral moderada setorial, existe uma série de potências formal não nula $\hat{\varphi}_1$ tal que φ_1 admite $\hat{\varphi}_1$ como expansão assintótica em S_1 . Pelo Teorema 7.2.2, $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \xi$ admite $\hat{\varphi}_1 \circ \hat{\xi}$ como expansão assintótica não nula em S_2 . \square

Outra ferramenta importante é o transporte da integral primeira setorial moderada por meio da holonomia:

Lema 11.3.2. Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ uma folheação em uma superfície compacta complexa \tilde{M} , e $\mathbb{P} \subset \tilde{M}$ um divisor invariante compacto (codimensão um), com cruzamentos normais (normal crossing) e sem pontos triplos. Escrevemos $\mathbb{P} = \cup_{j=1}^m \mathbb{P}_j$, onde cada \mathbb{P}_j é uma componente suave irreduzível. Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{P}_j \setminus \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, para algum $j \in \{1, \dots, m\}$. Suponha que existam uma seção transversal $\Sigma_1 \ni q_1$, um setor $S_1 \subset \Sigma_1$ com vértice q_1 , e uma função holomorfa $\varphi_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{C}$, tal que φ_1 é constante nos traços de cada folha de \mathcal{F} em S_1 e que admite expansão assintótica não nula em S_1 . Então existem uma seção transversal $\Sigma_2 \ni q_2$, um setor $S_2 \subset \Sigma_2$ com vértice em q_2 , e uma função holomorfa $\varphi_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{C}$, tal que φ_2 é constante nos traços de cada folha de \mathcal{F} em S_2 e que admite uma expansão assintótica não nula em S_2 .

Demonstração. Desde que \mathbb{P}_j é simplesmente conexo, podemos escolher um caminho simples $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_j \setminus \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, tal que $\gamma(0) = q_2$ e $\gamma(1) = q_1$. Tomemos uma seção transversal $\Sigma_2 \ni q_2$. Então considere a aplicação de holonomia de γ , $f_\gamma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$. Seja S_2 um setor em Σ_2 com vértice em q_2 , tal que $f_\gamma(S_2) \subseteq S_1$. Defina $\varphi_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi_2 = \varphi_1 \circ f_\gamma$.

Afirmção 11.3.1. φ_2 é invariante por $Hol(\mathcal{F}, \mathbb{P}_j, \Sigma_2, q_2)$

Prova da Afirmção 11.3.1. De fato, seja $g_\delta \in Hol(\mathcal{F}, \Sigma_2, q_2)$ a holonomia associada ao caminho fechado $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_j \setminus \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, com $\delta(0) = \delta(1) = q_2$. Seja $\beta = \gamma \circ \delta \circ \gamma^{-1}$. Então podemos considerar um elemento $g_\beta \in$

$Hol(\mathcal{F}, \mathbb{P}_j, \Sigma_1, q_1)$ dado por $g_\beta = f_\gamma \circ g_\delta \circ (f_\gamma)^{-1}$. Como φ_1 é constante nos traços de cada folha então $\varphi_1 \circ g_\beta = \varphi_1$. Logo,

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_1 \circ g_\beta \\ &= \varphi_1 \circ (f_\gamma \circ g_\delta \circ (f_\gamma)^{-1}) \\ &= (\varphi_1 \circ f_\gamma) \circ g_\delta \circ (f_\gamma)^{-1} \\ &= \varphi_2 \circ g_\delta \circ (f_\gamma)^{-1}.\end{aligned}$$

Disso, temos

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \varphi_2 \circ g_\delta \circ (f_\gamma)^{-1} &\Rightarrow \varphi_1 \circ f_\gamma = \varphi_2 \circ g_\delta \\ &\Rightarrow \varphi_2 = \varphi_2 \circ g_\delta.\end{aligned}$$

Isso prova a Afirmação 11.3.1. \square

Afirmação 11.3.2. A função φ_2 admite expansão assintótica não nula em S_2 .

Prova da Afirmação 11.3.2. Com efeito, pelo Teorema 7.2.1, f_γ admite $\hat{f}_\gamma(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_r}{r!} z^r$ como expansão assintótica no setor S_2 , onde $f_r = \lim_{z \rightarrow 0} f^{(r)}(z)$ (lembremos que $f^{(r)}$ é a r -ésima derivada de f). Desde que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \neq 0$, então $\hat{f}_\gamma \neq 0$. Seja $\hat{\varphi}$ a expansão assintótica não nula de φ . Pelo Teorema 7.2.2, $\varphi_2 = \varphi \circ f_\gamma$ admite $\hat{\varphi} \circ \hat{f}_\gamma$ como expansão assintótica não nula em S_2 . Isso prova a afirmação. \square

A separatriz Γ_2 divide U em duas partes $U = U_0 \cup U_1$, tais que $q_0 \in U_0$ e $q_0 \notin U_1$. Finalmente, pela Correspondência de Dulac (Lema 11.3.1) existe um ponto $q_3 \in U_1$ tal que existem uma seção transversal $\Sigma_3 \ni q_3$, um setor $S_3 \subset \Sigma_3$ com vértice em q_3 , e uma função holomorfa $\varphi_3 : S_3 \rightarrow \mathbb{C}$, tal que φ_3 é constante nos traços de cada folha de \mathcal{F} em S_3 e que admite expansão assintótica não nula em S_3 . Isso conclui a prova do Lema. \square

Concluimos mostrando que é possível transportar a integral primeira setorial moderada para qualquer ponto não-singular no projetivo.

Proposição 11.3.1. Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ uma folheação em uma superfície compacta complexa \tilde{M} , e $\mathbb{P} \subset \tilde{M}$ um divisor invariante compacto (codimensão um), com cruzamentos normais (normal crossing) e sem pontos triplos. Escrevemos $\mathbb{P} = \cup_{j=1}^m \mathbb{P}_j$, onde cada \mathbb{P}_j é uma componente suave irredutível. Seja p_k um ponto em $\mathbb{P}_k \cap \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$. Suponha que exista uma separatriz Γ_k tal que $\Gamma_k \cap \mathbb{P}_k = \{p_k\}$ e, o par $(\tilde{\mathcal{F}}, \Gamma_k)$ admite uma integral primeira setorial moderada. Então para qualquer ponto não singular $p \in \mathbb{P}_j \setminus \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ e qualquer seção transversal $\Sigma_p \ni p$ existem um $S_p \subset \Sigma_p$ com vértice em p e uma integral primeira setorial moderada $\varphi_p : S_p \rightarrow \mathbb{C}$.

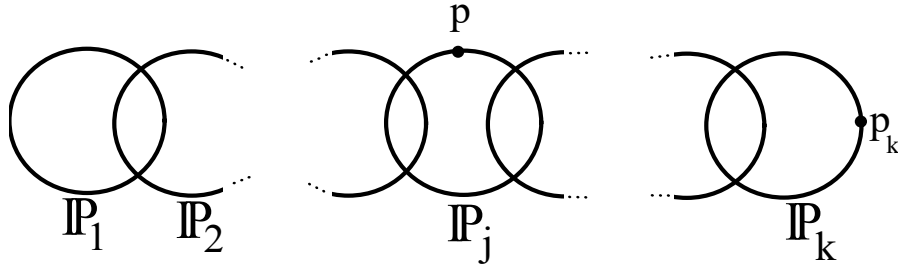


Figura 11.5: Pontos p e p_k na linha projetiva.

Demonstração. Primeiramente, suponha que cada separatriz que não seja Γ_k , está contida em uma linha projetiva de \mathbb{P} . Desde que $(\tilde{\mathcal{F}}, \Gamma_k)$ admite uma integral primeira setorial moderada, pelo Lema 11.3.1 existem um ponto $q_k \in \mathbb{P}_k \setminus \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, uma seção transversal $\Sigma_k \ni q_k$, um setor $S_k \subset \Sigma_k$ com vértice em q_k , e uma função holomorfa $\varphi_k : S_k \rightarrow \mathbb{C}$, tal que φ_k é constante nos traços de cada folha de \mathcal{F} em S_k e que admite expansão assintótica não nula em S_k . Seja $t_k \in \mathbb{P}_k \setminus \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ um ponto próximo o suficiente da esquina $p_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1} \cap \mathbb{P}_k$. Pelo Lema 11.3.2 existem uma seção transversal $\Sigma'_k \ni t_k$, um setor $S'_k \subset \Sigma'_k$ com vértice em t_k , e uma função holomorfa $\varphi'_k : S'_k \rightarrow \mathbb{C}$, tal que φ'_k é constante nos traços de cada folha de \mathcal{F} em S'_k e que admite uma expansão assintótica não nula em S'_k . Considere a separatriz $\Gamma_{t_k} \subset \mathbb{P}_k$ com $t_k \in \Gamma_{t_k}$. Pela Proposição 8.3.1 a aplicação de holonomia por esta separatriz é finita. Então pelo Teorema 9.1.1 de conjugação analítica, existe uma vizinhança $U_{k-1} \ni p_{k-1}$ tal que $\tilde{\mathcal{F}}|_{U_{k-1}}$ assumam a forma normal. Então aplicamos novamente a Correspondência de Dulac, ou seja, pelo Lema 11.3.1 existem um ponto $q_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1} \setminus \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$, uma seção transversal $\Sigma_{k-1} \ni q_{k-1}$, um setor $S_{k-1} \subset \Sigma_{k-1}$ com vértice em q_{k-1} , e uma função holomorfa $\varphi_{k-1} : S_{k-1} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que φ_{k-1} é constante nos traços de cada folha de \mathcal{F} em S_{k-1} e que admite expansão assintótica em S_{k-1} . Podemos repetir esse processo até obter uma seção transversal Σ_p contendo um setor $S_p \subset \Sigma_p$ e uma integral primeira setorial moderada φ_p definida em S_p .

Para concluir, considere o caso em que existe uma singularidade $q \in \mathbb{P}_i \cap \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ tal que a separatriz Γ_i que passa por q , não está contida em \mathbb{P}_i . Repetindo os mesmos argumentos do caso anterior, obtemos uma vizinhança de q que admite uma integral primeira. Então é suficiente aplicar a correspondência Dulac para obter que o par $(\tilde{\mathcal{F}}, \Gamma_i)$ admite uma integral primeira setorial moderada. Portanto, a prova segue repetindo o caso anterior até chegar ao ponto p .

□

11.4 Teorema I

Teorema I. Seja \mathcal{F} um germe não-dicrítico de folheação holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^2$. Suponha que \mathcal{F} seja uma curva generalizada e algum par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada. Então \mathcal{F} admite uma integral primeira holomorfa em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$.

Demonstração. Demonstraremos o Teorema usando o processo de indução sobre o número r de blow-ups da resolução.

Caso $r = 0$

Dividimos este caso em dois:

i) *Caso sela-nó:* Exigimos como hipótese que a folheação seja uma curva generalizada. Logo, este caso não ocorre.

ii) *Caso não degenerado:* Escrevemos \mathcal{F} como $xdy - \lambda ydx + hot = 0$, onde $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_+$ com os eixos invariantes. Sabemos (veja seção 9.2) que existem duas separatrizes tais que após uma mudança de coordenadas, podemos assumir que as separatrizes são os eixos. Considere $\Gamma : (y = 0)$ a separatriz tal que o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira moderada e uma seção transversal $\Sigma : (x = 1)$. A aplicação de holonomia por esta separatriz é da forma

$$h_\gamma(y) = e^{2\pi i\theta}y + \dots$$

com $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_+$. Seja φ a integral primeira setorial moderada, que admite $\hat{\varphi}$ como expansão assintótica não nula em um setor $S \subset \Sigma$, com vértice $p \in \Sigma \cup \Gamma$. Então $\varphi \circ h_\gamma(y) = \varphi(y)$ em S . Pela Proposição 8.3.1, h_γ é finito. Pelo Teorema 9.1.1 de conjugação analítica, isso implica que \mathcal{F} é analiticamente linearizável como $m_1xdy + m_2ydx = 0$, com $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

Portanto, existe uma integral primeira holomorfa F no caso irreduzível.

Caso $r \Rightarrow r + 1$

Suponha agora que o Teorema seja válido para folheações que podem ser reduzidas com $r > 0$ blow-ups. Então seja \mathcal{F} um germe de folheação holomorfa não-dicrítica em $0 \in \mathbb{C}^2$, curva generalizada e tal que algum par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada. Suponha que \mathcal{F} seja reduzida com $r + 1$ blow-ups. Realizamos um primeiro blow-up $\pi_1 : \tilde{\mathbb{C}}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ obtendo uma folheação $\mathcal{F}(1) = \pi_1^*(\mathcal{F})$. Desde que \mathcal{F} é reduzida com $r + 1$ blow-ups, cada singularidade $p_1 \in \text{sing}(\mathcal{F}(1)) \subset \mathbb{P}_1$ pode ser resolvida com no máximo r blow-ups.

Afirmção 11.4.1. Dada uma singularidade $p_1 \in \text{sing}(\mathcal{F}(1)) \subset \mathbb{P}_1$ existe uma separatriz Γ_{p_1} de $\mathcal{F}(1)$ que passa por p_1 , tal que o par $(\mathcal{F}(1), \Gamma_{p_1})$ admite uma integral primeira setorial moderada.

Prova da Afirmção 11.4.1. De fato, por hipótese existe uma separatriz Γ tal que o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada. Isso significa que existem uma seção transversal $\Sigma \bar{\cap} \Gamma$, um setor $S \subset \Sigma$ na seção transversal, e $\varphi : S \rightarrow \mathbb{C}$ a integral primeira setorial moderada associada ao par (\mathcal{F}, Γ) . O pull-back $\tilde{\Gamma}$ de Γ é ainda uma separatriz de $\mathcal{F}(1)$ para

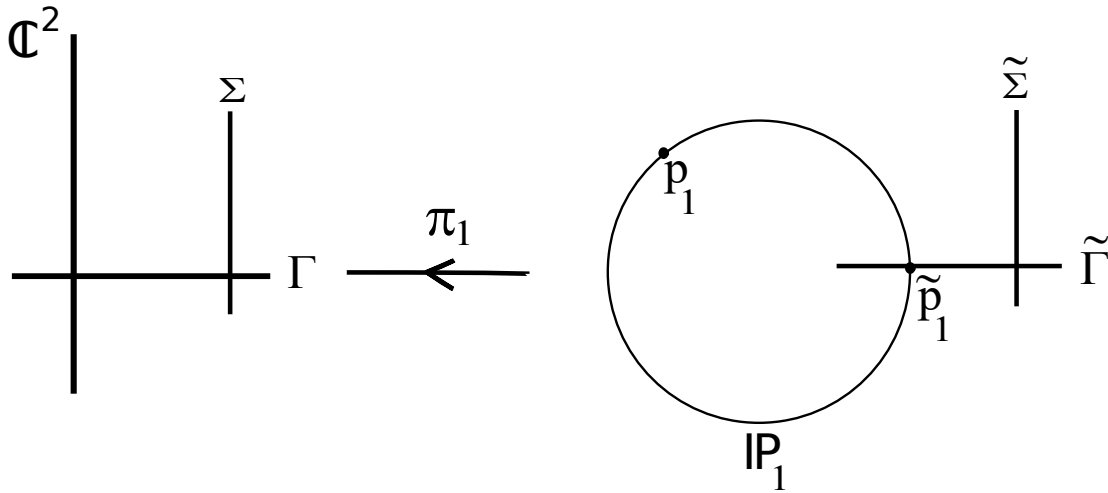


Figura 11.6: Primeiro blow-up.

alguma singularidade \tilde{p}_1 de $\mathcal{F}(1)$ em \mathbb{P}_1 . Além disso, o pull-back de Σ é uma seção transversal $\tilde{\Sigma}$ em $\tilde{\Gamma}$ onde podemos definir uma integral primeira setorial moderada $\tilde{\varphi} : \tilde{S} \subset \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi_1$. Isso demonstra a afirmação para a singularidade \tilde{p}_1 . Considere $p_1 \in \text{sing}(\mathcal{F}(1)) \subset \mathbb{P}_1$.

Pelo Lema 11.3.1, (onde usamos a Correspondência de Dulac), existem um ponto $q_1 \in \mathbb{P}_1 \setminus \text{sing}(\mathcal{F}(1))$, uma seção transversa $\Sigma_1 \ni q_1$, um setor

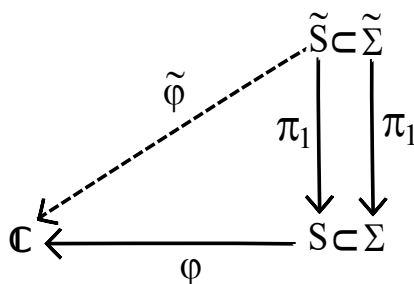


Figura 11.7: π_1 é um difeomorfismo fora da origem

$S_1 \subset \Sigma_1$ com vértice em q_1 , e uma função holomorfa $\varphi_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{C}$, tal que φ_1 é constante nos traços de cada folha de \mathcal{F} em S_1 e que admite uma expansão assintótica em S_1 . Tome um ponto q_2 escolhido suficientemente próximo de p_1 . Pelo Lema 11.3.2, existem uma seção transversal $\Sigma_2 \ni q_2$, um setor $S_2 \subset \Sigma_2$ com vértice em q_2 , e uma função holomorfa $\varphi_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{C}$, tal que φ_2 é constante nos traços de cada folha de \mathcal{F} em S_2 e que admite expansão assintótica em S_2 . Tomando \mathbb{P}_1 como a separatriz passando por p_1 , a afirmação está provada para qualquer singularidade em \mathbb{P}_1 . Isso prova a Afirmação 11.4.1. \square

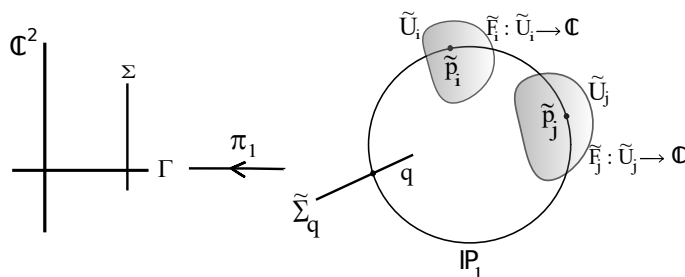


Figura 11.8:

Por indução cada singularidade $\tilde{p}_j \in \text{sing}(\mathcal{F}(1))$ admite uma integral primeira holomorfa, a saber $\tilde{F}_j : \tilde{U}_j \rightarrow \mathbb{C}$ definida em uma vizinhança $\tilde{p}_j \in \tilde{U}_j \subset \tilde{\mathbb{C}}_0^2$. Escolhemos agora um ponto $q \in \mathbb{P}_1 \setminus \text{sing}(\mathcal{F}(1))$ e um disco transversal $\tilde{\Sigma}_q$ centrado em q . Seja $\tilde{\varphi} : \tilde{S} \subset \tilde{\Sigma}_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ a imagem inversa de $\varphi : S \subset \Sigma_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ por π_1 . Desde que \tilde{p}_1 admite uma integral primeira holomorfa, pela aplicação de holonomia, pela Correspondência de Dulac (Lemmas 11.3.1 e 11.3.2) segue que existe uma função $\tilde{\varphi}_q : \tilde{S}_q \rightarrow \mathbb{C}$ definida em um setor $\tilde{S}_q \subset \tilde{\Sigma}_q$ que é integral primeira setorial moderada para $\mathcal{F}(1)$ em q para o par $(\mathcal{F}(1), \mathbb{P}_1)$. Pela Proposição 8.3.1, o grupo de invariância $\text{Inv}_{\tilde{S}_q}(\tilde{\varphi}_q)$ é finito. Denotemos por \tilde{f}_j a extensão de holonomia de \tilde{F}_j na seção transversal $\tilde{\Sigma}_q$. Seja $\text{Inv}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n) < \text{Diff}(\tilde{\Sigma}_q, q)$ um

subgrupo gerado por todos os grupos de invariância de \tilde{f}_i .

Afirmção 11.4.2. $Inv(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$ é um grupo finito.

Prova da Afirmção 11.4.2. Por construção, cada \tilde{f}_i é uma extensão da integral primeira local \tilde{F}_j vindo da mesma função $\tilde{\varphi}$. Então $\tilde{\varphi}$ é constante em cada nível de \tilde{f}_i e, $Inv(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n) \subset Inv_{\tilde{S}}(\tilde{\varphi})$. Pela Proposição 8.3.1, $Inv_{\tilde{S}}(\tilde{\varphi})$ é finito. \square

Portanto, existe uma função holomorfa F sobre Σ tal que toda aplicação em $Inv(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$ é invariante por F , ou seja, $F \circ h = F, \forall h \in Inv(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$. Desse modo, construímos uma integral primeira holomorfa F para $\tilde{\mathcal{F}}$ em $\bigcup_{j=1}^r U_j$. Agora, a parte complementar de $\bigcup_{j=1}^r U_j$ em \mathbb{P} é simplesmente conexa (topologicamente um disco). Logo, este complemento possui holonomia trivial. Sendo assim, F admite uma extensão de holonomia como uma integral primeira holomorfa de $\mathcal{F}(1)$ para uma vizinhança \tilde{U} of \mathbb{P} em $\tilde{\mathbb{C}}_0^2$. Esta integral primeira holomorfa se projeta para \mathcal{F} em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$. \square

Capítulo 12

Separatrizes não-fracas e integrais primeiras setoriais moderadas

12.1 Separatriz forte e integrais primeiras setoriais

No capítulo 11 (exemplo 11.1.2), observamos um caso particular de uma sela-nó, cuja separatriz forte não admitia integral primeira setorial moderada. Nesta seção mostramos que esse fenômeno é verdadeiro para toda sela-nó.

Considere $\omega = 0$ um germe de sela-nó em $(\mathbb{C}^2, 0)$. É conhecido (Proposição 9.2.4 ou [50]) que existem números p, λ e uma mudança de coordenadas formais tais que ω é formalmente equivalente a

$$\omega_{p,\lambda}(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = x(1 + \lambda y^p) \\ \dot{y} = y^{p+1}. \end{cases}$$

Além disso, existe uma série de potências formal $\hat{\varphi}(x, y) = x + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) y^j$ com φ_j convergindo em algum disco $\|x\| < R$, ($R > 0$ não dependendo de j), tal que o difeomorfismo formal $\hat{\Phi}(x, y) = (\hat{\varphi}(x, y), y)$ satisfaz $\hat{\Phi}^* \omega_{p,\lambda} \wedge \omega = 0$. Denotamos por $D_{p,\lambda}$ o subconjunto das selas-nó cuja forma normal final é dada por $w_{p,\lambda}$. De agora em diante, essas notações serão adotadas sempre que necessário.

Seja $\Gamma : \{y = 0\}$ a separatriz forte de $w_{p,\lambda}$ e $\Sigma : \{x = 1\}$ uma seção transversal a Γ . Considere o setor

$$S = \{y \in \Sigma \setminus \{(1, 0)\} : \operatorname{Re}(y) < 0, -\frac{\pi}{p} < \operatorname{arg}(y) < \frac{\pi}{p}\}.$$

Formalmente podemos fazer os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{x(1 + \lambda y^p)dy - y^{p+1}dx}{x^{p+1}x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dx}{x} - \left(\frac{1}{y^{p+1}} + \frac{\lambda}{y} \right) dy &= 0 \\ \Rightarrow d \left(\ln x - \lambda \ln y + \frac{1}{py^p} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $F_{p,\lambda}(x, y) = xy^{-\lambda}e^{\frac{1}{py^p}}$ é uma integral primeira para $w_{p,\lambda}$ fora de Γ . Desde que S possui abertura no máximo igual a $\frac{2\pi}{p}$, pelo Teorema de Hukuara-Kimura-Matuda (Teorema 9.3.1) temos que Φ , φ e Ω satisfazem (i), (ii) e (iii) acima. Por simplicidade de notação suponha $\Omega = \{x \in \mathbb{C} : |x| < 2\}$. Defina $F : \Omega \times S \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$F(x, y) = F_{p,\lambda} \circ \Phi(x, y).$$

Por construção, F é constante nos traços de cada folha de $\omega = 0$ em S .

Afirmção 12.1.1. $F|_{\{x=1\} \times S}$ admite zero como expansão assintótica em S .

prova da Afirmção 12.1.1. Por definição

$$\begin{aligned} F|_{(\{x=1\} \times S)}(x, y) &= F_{p,\lambda} \circ \Phi(1, y) \\ &= F_{p,\lambda}(\varphi(1, y), y) \\ &= \varphi(1, y)y^{-\lambda}e^{\frac{1}{py^p}}. \end{aligned}$$

Então $F|_{(\{x=1\} \times S)}$ é holomorfa em S . Desde que $Re(y) < 0$, então para todo $y \in S$ temos

$$\begin{aligned} \|y^{-\lambda}e^{\frac{1}{py^p}}\| &\leq \|y^{-\lambda}\| \|e^{\frac{1}{py^p}}\| \\ &= \|y^{-\lambda}\| e^{Re\left(\frac{p\bar{y}^p}{\|py^p\|^2}\right)} \\ &= \|y^{-\lambda}\| e^{\frac{1}{p\|y\|^{2p}}Re(y^p)}. \end{aligned}$$

Desde que $e^{\frac{1}{p\|y\|^{2p}}Re(y^p)} \in \mathbb{R}$ e $Re(y) < 0$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ existe uma constante $A_k > 0$ tal que

$$e^{\frac{1}{p\|y\|^{2p}}Re(y^p)} \leq A_k \|y\|^k \quad (12.1)$$

com y pertencente a um subsetor próprio $S' \subset S$. Então usando o item (iii) do Teorema de Hukuara-Kimura-Matuda e (12.1) temos

$$\begin{aligned}
& \|F(1, y)\| \\
& \leq \|\varphi(1, y)y^{-\lambda}e^{\frac{1}{py^p}} - 1 - \left(\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j(1)y^j\right)(y^{-\lambda}e^{\frac{1}{py^p}}) \\
& + 1 + \left(\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j(1)y^j\right)(y^{-\lambda}e^{\frac{1}{py^p}})\| \\
& \leq \left[\|\varphi(1, y) - 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j(1)y^j\| + \left\|1 + \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j(1)y^j\right\| \right] \|y^{-\lambda}e^{\frac{1}{py^p}}\| \\
& \leq [B_k\|y\|^k + C_k\|y\|^k] A_k\|y\|^k \\
& \leq D_k\|y\|^k.
\end{aligned}$$

□

A discussão acima nos permite enunciar o seguinte lema:

Lema 12.1.1. Seja \mathcal{F} um germe de folheação sela-nó em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e Γ a separatriz forte de \mathcal{F} . O par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial, mas, não admite integral primeira setorial moderada.

12.2 Teorema J

A discussão da seção anterior motiva a seguinte definição:

Definição 12.2.1. Uma separatriz Γ de \mathcal{F} é chamada *não-fraca* se após a redução de singularidades de \mathcal{F} , cada ponto do divisor excepcional puder ser conectado a Γ por uma sequência de linhas projetivas iniciadas em Γ e tal que, toda vez que alcançamos uma esquina, chegamos por uma separatriz de uma singularidade não degenerada ou por uma variedade forte de uma sela-nó.

Teorema J. Se \mathcal{F} é um germe não-dicrítico de folheação holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^2$ e para alguma separatriz não-fraca Γ de \mathcal{F} o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada, então \mathcal{F} admite uma integral primeira holomorfa em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$.

O Teorema J acima é obtido similarmente ao Teorema I (pág. 120, Seção 11.4), uma vez que se tenha provado a seguinte proposição:

Proposição 12.2.1. Sobre as hipóteses do Teorema J, não existem selas-nó na redução de singularidades de \mathcal{F} .

Demonstração. Seja $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*(\mathcal{F})$ a redução de singularidades de \mathcal{F} e considere o divisor excepcional $\mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^m \mathbb{P}_j$, onde cada \mathbb{P}_j é uma componente irredutível e é difeomorfa a uma linha projetiva mergulhada introduzida como um divisor dos blow-ups sucessivos. Suponha, por contradição que exista uma sela-nó $q \in \mathbb{P}_r$, para algum $r \in \{1, \dots, m\}$. Seja $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$ a separatriz não-fraca de $\tilde{\mathcal{F}}$. Desde que o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada, o mesmo se verifica para $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\Gamma})$. Observe que $\tilde{\Gamma}$ é transversal a alguma linha projetiva do divisor. Por hipótese, cada vez que atingimos a esquina $q \in \tilde{\Gamma} \cap \mathbb{P}_r$, chegamos por uma variedade forte. Então pelo Lema 12.1.1, $\tilde{\Gamma}$ não pode ser uma separatriz forte passando por q . Isso implica que $q \notin \tilde{\Gamma}$. Considere o caso onde a separatriz forte de q está contida em \mathbb{P}_r . Por hipótese, cada ponto do divisor excepcional pode ser conectado a $\tilde{\Gamma}$ por uma sequência de linhas projetivas começando em $\tilde{\Gamma}$. Logo, pela Proposição 11.3.1, para cada ponto não-singular $p \in \mathbb{P}_r \setminus \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ e qualquer seção transversal $\Sigma_p \ni p$, existem um setor $S_p \subset \Sigma_p$ com vértice em p e uma integral primeira setorial moderada $\varphi_p : S_p \rightarrow \mathbb{C}$. Podemos escolher p próximo o suficiente a do ponto q , tal que p pertence à separatriz forte de q , o que é uma contradição pelo Lema 12.1.1. \square

Capítulo 13

Curva generalizada

Neste capítulo provamos que a hipótese da curva generalizada pode ser removida. Para a conveniência do leitor, uma seção dedicada ao Índice de Camacho-Sad é apresentada.

13.1 O Teorema do índice de Camacho-Sad

Seja M uma superfície complexa. Considere uma singularidade isolada $q \in M$ de uma folheação \mathcal{F} próximo de q induzida por uma 1-forma holomorfa ω . Suponha que Γ seja uma separatriz de \mathcal{F} passando por q e seja $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathcal{F}, q)$, uma carta local tal que $\{\phi(x, 0) : x \in \mathbb{C}\} \subset \Gamma$. Então $(\phi^*\omega)(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, onde $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$ e $A(x, 0) = 0$.

Definição 13.1.1. Definimos o índice de \mathcal{F} relativo a Γ em $q \in \Gamma$ por

$$Ind_q(\mathcal{F}, \Gamma) = -\text{Res}_{x=0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{B} \right) (x, 0).$$

Exemplo 13.1.1. Suponha que $0 \in \mathbb{C}^2$ seja uma singularidade isolada irreduzível de uma folheação \mathcal{F} induzida por uma 1-forma holomorfa

$$\omega(x, y) = (\lambda_2 y + \dots)dx - (\lambda_1 x + \dots)dy$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Pela Forma Normal de Siegel (veja Proposição 9.2.3), existe uma mudança de coordenadas locais em $0 \in \mathbb{C}^2$ de maneira que podemos escrever

$$\omega(x, y) = (\lambda_2 y + xy\beta(x, y))dx - (\lambda_1 x + xy\alpha(x, y))dy$$

onde α, β são analíticas. Assim, podemos considerar $\Gamma_1 = \{y = 0\}$ e $\Gamma_2 = \{x = 0\}$ as separatrizes tangentes aos auto-espacos λ_1 e λ_2 , respectivamente. Então

$$\begin{aligned}
Ind_0(\mathcal{F}, \Gamma_1) &= -\text{Res}_{x=0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{B} \right) (x, 0) \\
&= \text{Res}_{x=0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda_2 y + xy\beta(x, y)}{\lambda_1 x + xy\alpha(x, y)} \right) (x, 0) \\
&= \text{Res}_{x=0} \left(\frac{\lambda_2 + x\beta(x, 0)}{\lambda_1 x} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_1} \left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{1}{x} + \frac{\beta(x, 0)}{\lambda_1} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \int_{\gamma_1} \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.
\end{aligned}$$

onde γ_1 é um círculo contendo a origem no plano $\mathbb{C} \times \{0\}$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
Ind_0(\mathcal{F}, \Gamma_2) &= -\text{Res}_{y=0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{A} \right) (0, y) \\
&= \text{Res}_{y=0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda_1 x + xy\alpha(x, y)}{\lambda_2 y + xy\beta(x, y)} \right) (0, y) \\
&= \text{Res}_{y=0} \left(\frac{\lambda_1 + y\alpha(0, y)}{\lambda_2 y} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_2} \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \frac{1}{y} + \frac{\alpha(0, y)}{\lambda_2} \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \int_{\gamma_2} \frac{1}{y} dy \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.
\end{aligned}$$

onde γ_2 é um círculo contendo a origem no plano $\{0\} \times \mathbb{C}$.

Exemplo 13.1.2. Suponha que $0 \in \mathbb{C}^2$ seja uma singularidade isolada do tipo sela-nó de uma folheação \mathcal{F} com forma normal (veja Proposição 9.2.4) dada por $\eta(x, y) = (\lambda_1 x + A(x, y))dy - y^{p+1}dx$, onde $\lambda_1 \neq 0$, e $A(x, y)$ com

multiplicidade ≥ 2 em $(0, 0)$. Fixemos $\Gamma : \{y = 0\}$ a separatriz forte de \mathcal{F} com $0 \in \Gamma$. Então

$$\begin{aligned} \text{Ind}_p(\mathcal{F}, \Gamma) &= -\text{Res}_{x=0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y^{p+1}}{\lambda_1 x + A(x, y)} \right) (x, 0) \\ &= \text{Res}_{x=0} \left(\frac{(p+1)y^p(\lambda_1 x + A(x, y)) + y^{p+1} \frac{\partial A(x, y)}{\partial y}}{(\lambda_1 x + A(x, y))^2} \right) (x, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

O *Teorema do Índice de Camacho-Sad*, [13] afirma que as somas dos índices de uma folheação \mathcal{F} em todas as singularidades em uma curva invariante suave analítica compacta Γ em uma superfície complexa M é igual a auto-interseção (primeira classe de Chern) de Γ em M . Portanto, não depende da folheação \mathcal{F} :

$$\sum_{p \in \text{sing}(\mathcal{F}) \cap \Gamma} \text{Ind}_p(\mathcal{F}, \Gamma) = \Gamma \cdot \Gamma \in \mathbb{Z}.$$

Suponha agora que $\pi : M_q \rightarrow M$ é um blow-up para uma superfície complexa M em q e seja $\mathcal{F}(1)$ a folheação definida próxima de $\mathbb{P}_q = \pi^{-1}(q)$ induzida por $\pi^* \mathcal{F}$. Denotamos $\tilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma - \{q\})$, sendo $\{m\} = \tilde{\Gamma} \cap \mathbb{P}_q$. Então

$$\text{Ind}_m(\mathcal{F}(1), \tilde{\Gamma}) = \text{Ind}_q(\mathcal{F}, \Gamma) - 1, \quad (13.1)$$

e

$$\sum_{j=1}^k \text{Ind}_{q_j}(\mathcal{F}(1), \mathbb{P}_{q_j}) = -1, \quad (13.2)$$

onde $q_j \in \text{sing}(\mathbb{P}_{q_j})$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$.

13.2 Teorema K

Teorema K. Se \mathcal{F} é um germe não-dicrítico de folheação em $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que para cada separatriz Γ de \mathcal{F} o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada, então \mathcal{F} admite uma integral primeira holomorfa.

Prova do Teorema K. A seguir, demonstramos este resultado usando o processo de indução sobre o número r de blow-ups da resolução, iniciando pelo caso irreduzível.

Caso $r = 0$:

Caso Sela-nó: Por hipótese, para cada separatriz Γ de \mathcal{F} o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira setorial moderada. Em particular, o mesmo continua válido para a separatriz forte da sela-nó, o que é uma contradição com o Lema 12.1.1. Portanto, este caso não ocorre.

O *Caso não degenerado:* segue como no Teorema I (pág. 120, Seção 11.4).

De agora em diante, suponha que \mathcal{F} é reduzido com $r > 0$ blow-ups. Realizamos o blow-up $\pi_r : \tilde{\mathbb{C}}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ obtendo a folheação $\mathcal{F}(r) = \pi_1^*(\mathcal{F})$. Seja $\mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^r \mathbb{P}_j$ as componentes irredutíveis.

Afirmção 13.2.1. Se existir alguma sela-nó $q \in \mathbb{P}_j$, para algum $j \in \{1, \dots, r\}$, em $\mathcal{F}(r)$ então a separatriz forte $\tilde{\Gamma}$ que passa por q está contida em \mathbb{P}_j .

Prova da Afirmção 13.2.1. Suponha por contradição, que a separatriz forte $\tilde{\Gamma}$ que passa por q seja transversal a \mathbb{P}_1 . Pelo Lema 12.1.1, a separatriz forte da sela-nó não admite integral primeira setorial moderada. Logo, $\Gamma = \pi_r^{-1}(\tilde{\Gamma})$ é uma separatriz para \mathcal{F} , tal que o par (\mathcal{F}, Γ) não admite integral primeira setorial moderada. Entretanto, por hipótese todos os pares (\mathcal{F}, \cdot) admitem integral primeira setorial moderada. Temos uma contradição. \square

Cada caso da resolução será analisado separadamente, até o quarto passo da indução. Essa análise será suficiente para entender todos os demais casos.

Caso $r = 1$:

Suponha que \mathcal{F} seja reduzida com $r = 1$ blow-ups. Realizamos o blow-up $\pi_1 : \tilde{\mathbb{C}}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ obtendo uma folheação $\mathcal{F}(1) = \pi_1^*(\mathcal{F})$. Seja \mathbb{P}_1 a componente irredutível.

Suponha por contradição que exista uma sela-nó q em \mathbb{P}_1 :
Seja S a separatriz forte, passando por q . Pela Afirmção 13.2.1 $S \subset \mathbb{P}_1$. Pelo Teorema do índice de Camacho-Sad, $Ind_q(\mathcal{F}(1), S) = 0$ e $\sum_{j=1}^k Ind_{q_j}(\mathcal{F}(1), \mathbb{P}_1) = -1$. Consequentemente, existe pelo menos uma singularidade $q_\alpha \in \mathbb{P}_1 \cap sing(\mathcal{F}(1))$ e uma separatriz $\Gamma_\alpha \ni q_\alpha$ tal que Γ_α é transversal a \mathbb{P}_1 e, tal que q_α não seja uma sela-nó. Por hipótese, o par $(\mathcal{F}(1), \Gamma_\alpha)$ admite uma integral primeira setorial moderada. Pela Proposição 11.3.1 para cada ponto não-singular $p \in \mathbb{P}_1 \setminus sing(\mathcal{F}(1))$ e qualquer seção transversal $\Sigma_p \ni p$, existe um setor $S_p \subset \Sigma_p$ com vértice em p e uma integral primeira setorial moderada $\varphi_p : S_p \rightarrow \mathbb{C}$. Podemos tomar

p próximo o suficiente da sela-nó q tal que $p \in S$. Pelo Lema 12.1.1, temos uma contradição. Portanto, não há selas-nó neste caso.

Caso $r = 2$:

Suponha que \mathcal{F} seja reduzida com $r = 2$ blow-ups. Realizamos o blow-up $\pi_2 : \tilde{\mathbb{C}}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ obtendo uma folheação $\mathcal{F}(2) = \pi_2^*(\mathcal{F})$. Seja $\mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^2 \mathbb{P}_j$ as componentes irredutíveis de $\mathcal{F}(2)$. Suponha por contradição, que exista uma sela-nó $q \in D$. Seja S a separatriz forte passando por q . Temos duas possibilidades:

i) $q \notin \mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2$: Pela Afirmação 13.2.1 $S \subset \mathbb{P}_1$ ou $S \subset \mathbb{P}_2$. Se $S \subset \mathbb{P}_1$ procedemos como no caso $r = 1$. Se $S \subset \mathbb{P}_2$ observe que $Ind_q(\mathcal{F}(2), S) = 0$ e $\sum_{j=1}^k Ind_{q_j}(\mathcal{F}(2), \mathbb{P}_2) = -2$. Logo, existe pelo menos uma singularidade $q_\alpha \in \mathbb{P}_2 \cap \text{sing}(\mathcal{F}(2))$ e uma separatriz $\Gamma_\alpha \ni q_\alpha$ tal que Γ_α seja transversal a \mathbb{P}_2 e q_α não seja uma sela-nó. Por hipótese, o par $(\mathcal{F}(1), \Gamma_\alpha)$ admite uma integral primeira setorial moderada. Pela Proposição 11.3.1 para cada ponto não singular $p \in \mathbb{P}_1 \setminus \text{sing}(\mathcal{F}(1))$ e qualquer seção transversal $\Sigma_p \ni p$, existe um setor $S_p \subset \Sigma_p$ com vértice em p e uma integral primeira setorial moderada $\varphi_p : S_p \rightarrow \mathbb{C}$. Podemos escolher p próximo o suficiente da sela-nó q tal que $p \in S$. Pelo Lema 12.1.1, temos uma contradição. Portanto, não há selas-nó neste caso.

ii) $q \in \mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2$: Pela Afirmação 13.2.1 $S \setminus \{q\} \subset \mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2$ ou $S \setminus \{q\} \subset \mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$. Seguindo como no caso anterior, concluimos que não há selas-nó neste caso.

Caso $r = 3$:

Suponha que \mathcal{F} seja reduzido com $r = 3$ blow-ups. Realizamos o blow-up $\pi : \tilde{\mathbb{C}}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ obtendo uma folheação $\mathcal{F}(3) = \pi^*(\mathcal{F})$. Seja $\mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^3 \mathbb{P}_j$ componentes irredutíveis tais que $\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_3 \neq \emptyset$ e $\mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3 \neq \emptyset$. Então temos três possibilidades:

i) *Não há selas-nó nas esquinas*: Seja $q_k \in \mathbb{P}_k$ uma sela-nó pertencente a alguma componente irredutível \mathbb{P}_k e S_k a separatriz forte que passa por q_k . Segue da Afirmação 13.2.1 que $S_k \subset \mathbb{P}_k$. Seja Γ a separatriz garantida pelo Teorema de Existência da Separatriz de Camacho-Sad (veja o capítulo 9 ou [14]). Por hipótese, o par $(\mathcal{F}(3), \Gamma)$ admite uma integral primeira moderada. Desde que q_k não é uma esquina Então $q_k \notin \Gamma \cap \mathbb{P}_k$. Pela Proposição 11.3.1 para cada ponto não singular $p \in \mathbb{P}_k \setminus \text{sing}(\mathcal{F}(3))$ e qualquer seção transversal $\Sigma_p \ni p$, existe um setor $S_p \subset \Sigma_p$ com vértice

em p e uma integral primeira setorial moderada $\varphi_p : S_p \rightarrow \mathbb{C}$. Podemos escolher p próximo o suficiente da sela-nó q_k tal que $p \in S_k$. Pelo Lema 12.1.1 temos uma contradição. Portanto, não há selas-nó neste caso.

ii) *Somente uma esquina de D é uma sela-nó*: Sem perda de generalidade, supomos que a sela-nó q pertence à esquina $\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_3$. Pela Afirmação 13.2.1, a separatriz forte $S \ni q$ está contida em \mathbb{P}_1 ou \mathbb{P}_3 . Seja Γ a separatriz de Camacho-Sad, [14]. Se $S \subset \mathbb{P}_1$ usamos as coordenadas locais de \mathbb{P}_1 para representar Γ . Por hipótese, o par $(\mathcal{F}(3), \Gamma)$ admite uma integral primeira setorial moderada. Desde que a esquina $\mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3$ não é uma sela-nó (pois somente uma das esquinas admite sela-nó, por hipótese) segue da Proposição 11.3.1 que para cada ponto não singular $p \in \mathbb{P}_1 \setminus \text{sing}(\mathcal{F}(3))$ e qualquer seção transversal $\Sigma_p \ni p$, existem um setor $S_p \subset \Sigma_p$ com vértice em p e uma integral primeira setorial moderada $\varphi_p : S_p \rightarrow \mathbb{C}$. Escolhemos p perto o suficiente da sela-nó q tal que $p \in S$. Pelo Lema 12.1.1, temos uma contradição. Se $S \subset \mathbb{P}_3$ então usamos as coordenadas locais de \mathbb{P}_2 para representar Γ . Desde que a esquina $\mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3$ não é uma sela-nó, segue da Proposição 11.3.1 e do Lema 12.1.1 que temos uma contradição. Portanto, não há selas-nó neste caso.

iii) *As duas esquinas (e portanto, todas) são selas-nó*: Seja $q_1 \in \mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_3$ e $q_2 \in \mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3$ as duas selas-nó e S_j a separatriz forte que passa por q_j , onde $j \in \{1, 2\}$. Pela Afirmação 13.2.1 $S_1 \subset \mathbb{P}_3$ ou $S_1 \subset \mathbb{P}_1$ e $S_2 \subset \mathbb{P}_2$ ou $S_2 \subset \mathbb{P}_3$. Suponha que $S_1, S_2 \subset \mathbb{P}_3$. Então $\text{Ind}_{q_j}(\mathcal{F}(3), S_j) = 0$ para $j = 1, 2$. Além disso, $\sum_{j=1}^k \text{Ind}_{q_j}(\mathcal{F}(3), \mathbb{P}_3) = -3$, onde $q_j \in \mathbb{P}_3 \cap \text{sing}(\mathcal{F}(3))$. Logo, existe pelo menos uma singularidade $q_\alpha \in \mathbb{P}_3 \cap \text{sing}(\mathcal{F}(3))$ e uma separatriz $\Gamma_\alpha \ni q_\alpha$ tal que Γ_α é transversal a \mathbb{P}_3 e q_α não é uma sela-nó. Por hipótese, o par $(\mathcal{F}(3), \Gamma_\alpha)$ admite uma integral primeira setorial moderada. Pela Proposição 11.3.1, para cada ponto não singular $p \in \mathbb{P}_1 \setminus \text{sing}(\mathcal{F}(1))$ e qualquer seção transversal $\Sigma_p \ni p$, existe um setor $S_p \subset \Sigma_p$ com vértice em p e uma integral primeira setorial moderada $\varphi_p : S_p \rightarrow \mathbb{C}$. Para $j = 1, 2$ podemos escolher p próximo o suficiente da sela-nó q_j de maneira que $p \in S_j$. Pelo Lema 12.1.1, temos uma contradição. Se $S_1 \subset \mathbb{P}_1$ ou $S_2 \subset \mathbb{P}_2$ podemos aplicar a Proposição 11.3.1 e o Lema 12.1.1 para obtermos uma contradição (análogo aos argumentos do caso (ii) acima). Portanto, não há selas-nó neste caso.

Caso $r = 4$:

Suponha que \mathcal{F} é reduzida com $r = 4$ blow-ups. Realizamos o blow-up

$\pi : \tilde{\mathbb{C}}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ obtendo uma folheação $\mathcal{F}(4) = \pi^*(\mathcal{F})$. Seja $\mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^4 \mathbb{P}_j$ a componente suave irreduzível. Então temos as seguintes possibilidades:

i) *Não há selas-nó nas esquinas*: Repetimos os argumentos de (i) caso $r = 3$.

ii) *Somente uma esquina de D é uma sela-nó*: Repetimos os argumentos de (ii) caso $r = 3$.

iii) *Duas esquinas de uma mesma linha projetiva são selas-nó*: Repetimos os argumentos de (iii) caso $r = 3$.

iv) *Uma esquina de cada linha projetiva é uma sela nó* (podendo possivelmente ocorrer outras selas-nós fora das esquinas (veja figura 13.1 abaixo)) : Sem perda de generalidade, e para organizar as ideias, considere

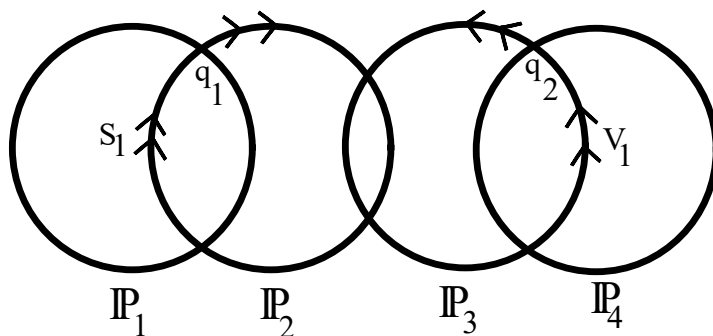


Figura 13.1:

\mathbb{P}_1 a linha projetiva contendo a carta coordenada local do eixo- Y e \mathbb{P}_4 a linha projetiva contendo a carta coordenada local do eixo- X . Ainda, organizamos as linhas projetivas da seguinte maneira: $\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 \neq \emptyset$, $\mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3 \neq \emptyset$ e $\mathbb{P}_3 \cap \mathbb{P}_4 \neq \emptyset$. Suponha que existam duas selas-nó $q_1 \in \mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2$, $t_1 \in \mathbb{P}_3 \cap \mathbb{P}_4$ e uma sela ressonante $p \in \mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3$. Seja $S_1 \ni q_1$ e $V_1 \ni t_1$ a separatriz forte passando por q_1, t_1 respectivamente. Segue da Afirmação 13.2.1 que $S_1, V_1 \subset D$. Se $S_1 \subset \mathbb{P}_1$ e $V_1 \subset \mathbb{P}_4$ repetimos os mesmos argumentos dos casos $r = 1, 2$ e concluindo que não há sela-nó neste caso. Suponha agora que $S_1 \subset \mathbb{P}_2$ e $V_1 \subset \mathbb{P}_3$. Seja $\tilde{\omega}_2$ a 1-forma associada a $\mathcal{F}(4)$ em \mathbb{P}_2 , dada por $\tilde{\omega}_2 = mxdy + nydx + \dots = 0$, onde $m, n \in \mathbb{N}$ e $\langle m, n \rangle = 1$. Seja $\Gamma_2 \subset \mathbb{P}_2$ a separatriz que passa pela sela ressonante $p \in \Gamma_2$. A aplicação de holonomia por Γ_2 é da forma

$$h_p(y) = e^{2\pi i \frac{m}{n}} y + \dots$$

Seja q_1, \dots, q_k as selas-nó em \mathbb{P}_2 . Considere as aplicações de holonomia h_{q_1}, \dots, h_{q_k} por cada separatriz S_1, \dots, S_k que passa por q_1, \dots, q_k , respectivamente. Desde que \mathbb{P}_2 é simplesmente conexo, temos

$$h_p \circ h_{q_1} \circ \dots \circ h_{q_k} = Id.$$

Como cada h_{q_j} é tangente à identidade, então h_p é também tangente à identidade. Entretanto, $h'_p(0) = \frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{N}$ e $\langle m, n \rangle = 1$. Logo, $m = n$. Pelo Teorema do Índice de Camacho-Sad

$$Ind_p(\mathcal{F}(4), \Gamma_2) + \sum_{j=1}^k Ind_{q_j}(\mathcal{F}(4), S_j) = -\alpha$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}$. Desde que $\sum_{j=1}^k Ind_{q_j}(\mathcal{F}(4), S_j) = 0$ então

$$Ind_p(\mathcal{F}(4), \Gamma_2) = -\alpha.$$

Por outro lado,

$$Ind_p(\mathcal{F}(4), \Gamma_2) = -\frac{m}{n} = -1 \Rightarrow -\alpha = -1.$$

Isso implica que $\mathbb{P}_2 \cdot \mathbb{P}_2 = -1$. Analogamente, podemos concluir que $\mathbb{P}_3 \cdot \mathbb{P}_3 = -1$. Pela equação (13.1), temos uma contradição, ou seja, duas linhas projetivas consecutivas não podem ter o mesmo índice.

Case $r > 4$: Todos os demais casos são análogos aos casos acima.

Portanto, sobre as hipóteses do Teorema K não há selas-nó na resolução. A prova segue então como no Teorema I (pág. 120, Seção 11.4). \square

Capítulo 14

Integrais primeiras setoriais moderadas e o Teorema de Mattei-Moussu formal

Nesta seção uma prova alternativa do Teorema Formal de Mattei-Moussu (veja seção 5.3) é apresentada.

Teorema L. [52] Seja \mathcal{F} um germe de folheação holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^2$. Suponha que \mathcal{F} admite uma integral primeira formal, não constante. Então \mathcal{F} admite uma integral primeira holomorfa.

Demonstração. Denote por \mathcal{F}^* a folheação com singularidades isoladas $\mathcal{F}^* = \pi^*(\omega)$. Então \mathcal{F}^* é o pull-back de \mathcal{F} pela aplicação $\pi: \tilde{\mathbb{C}}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Podemos escrever a expansão de Taylor de ω em 0 como:

$$\omega = \sum_{j=k}^{\infty} (P_j dy - Q_j dx),$$

onde P_j e Q_j são polinômios homogêneos de grau j , com $P_k \neq 0$ ou $Q_k \neq 0$. A 1-forma $\pi^*(\omega)$ escrita na carta $((t, x), U)$ como:

$$\begin{aligned} \pi^*(\omega) &= \sum_{j=k}^{\infty} (P_j(x, tx)d(tx) - Q_j(x, tx)dx) = \\ &= x^k \cdot \sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k} \cdot [(tP_j(1, t) - Q_j(1, t))dx - xP_j(1, t)dt]. \end{aligned}$$

Dividindo a 1-forma acima por x^k obtemos:

$$(*) \quad x^{-k} \cdot \pi^*(\omega) = (tP_k(1, t) - Q_k(1, t))dx + xP_k(1, t)dt + x \cdot \alpha$$

onde $\alpha = \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k-1} \cdot [(tP_j(1, t) - Q_j(1, t))dx + xP_j(1, t)dt]$. Definimos $R(x, y) = yP_k(x, y) - xQ_k(x, y)$, de maneira que $x^{-k} \cdot \pi^*(\omega) = R(1, t)dx + xP_k(1, t)dt + x \cdot \alpha$.

Afirmação 14.0.1. \mathcal{F} é não-dicrítica.

Seja $\widehat{F}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{\infty} a_{ij}x^i y^j$ uma integral primeira formal para \mathcal{F} . Então existe uma série formal $\widehat{G} \in \mathbb{C}[[x, y]]$ tal que $\omega = \widehat{G}d\widehat{F}$. Podemos considerar $\omega = d\widehat{F}$, desde que $d\widehat{F}$ define a mesma folheação que $\widehat{G}d\widehat{F}$. Escreva

$$\widehat{F} = \widehat{F}_{k+1} + \widehat{F}_{k+2} + \widehat{F}_{k+3} + \dots$$

, onde $\widehat{F}_{\lambda}(x, y) = \sum_{i+j=\lambda} a_{ij}x^i y^j$ e $\widehat{F}_{k+1} \not\equiv 0$. Então

$$d\widehat{F} = d\widehat{F}_{k+1} + d\widehat{F}_{k+2} + d\widehat{F}_{k+3} + \dots$$

Temos

$$\begin{aligned} \omega_{k+1} &= d\widehat{F}_{k+1} \\ &= \sum_{\|I\|=k+1} a_I q_1 x^{q_1-1} y^{q_2} dx + \sum_{\|I\|=k+1} a_I q_2 x^{q_1} y^{q_2-1} dy \end{aligned}$$

Seja $\vec{V}(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ o campo de vetores radial em \mathbb{C}^2 . Então

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \omega \cdot \vec{V} \\ &= d\widehat{F}_{k+1} \cdot \vec{V} \\ &= \sum_{\|I\|=k+1} a_I q_1 x^{q_1-1} y^{q_2} + \sum_{\|I\|=k+1} a_I q_2 x^{q_1} y^{q_2-1} \\ &= (k+1) \sum_{\|I\|=k+1} a_I q_1 x^{q_1} y^{q_2} \\ &= (k+1) \widehat{F}_{k+1}. \end{aligned}$$

Desde que $\widehat{F}_{k+1} \not\equiv 0$ então $R \not\equiv 0$. Isso prova a Afirmação 14.0.1.

Afirmação 14.0.2. \mathcal{F} é uma curva generalizada.

Suponha agora que ω seja irredutível e o primeiro jato de ω seja dado por $\omega_1 = \lambda_2 x dy - \lambda_1 y dx$. Então $\omega_1 \cdot \vec{V} = d\widehat{F}_k + 1 \cdot \vec{V}$ implica que

$$xy(\lambda_2 - \lambda_1) = d\widehat{F}_{k+1} \cdot \vec{V}.$$

O cone tangente de $d\widehat{F}$ é igual ao cone tangente de ω . Portanto, podemos escrever $\widehat{F}_{k+1} = x^p y^q$, onde $p, q \neq 0$. Como $\omega_1 \wedge d\widehat{F}_{k+1} = 0$ obtemos

$$\lambda_2 q + \lambda_1 p = 0. \quad (14.1)$$

Suponha que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Então de (14.1) temos $\lambda_2 \cdot q = 0$. Isso implica que $q = 0$ o que é uma contradição, desde que $q \neq 0$. Suponha por

contradição que exista uma sela-nó na resolução \mathcal{F}^* . Consideremos uma carta coordenada local $E(x, t) = (x, xt)$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} \widehat{F} \circ E(x, t) &= \sum_{i+j=0}^{\infty} a_{ij} x^i (tx)^j \\ &= \sum_{i+j=0}^{\infty} a_{ij} t^j x^{i+j} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^l a_{i(l-i)} t^{l-i} \right) x^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l(t) x^l, \end{aligned}$$

onde os coeficientes A_l são polinomiais em t . Consideremos o primeiro jato de \widehat{F} . Repetindo os mesmos cálculos acima obtemos que não existem selas-nó na resolução de \mathcal{F} . Isso prova a Afirmação 14.0.2.

De agora em diante, consideremos o divisor excepcional $\mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^m \mathbb{P}_j$ onde cada \mathbb{P}_j é componente irredutível difeomorfa a uma linha projetiva mergulhada introduzida como um divisor de blow-ups sucessivos. Fixemos $\Gamma : \{y = 0\}$ uma separatriz de \mathcal{F} . A separatriz $\widetilde{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$ é transversal a alguma linha projetiva do divisor excepcional. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\widetilde{\Gamma}$ seja transversal a linha projetiva \mathbb{P}_1 e ainda que $\widetilde{\Gamma} : \{t = 0\}$ na carta coordenada local $E(x, t) = (x, xt)$ de \mathbb{P}_1 . Assim,

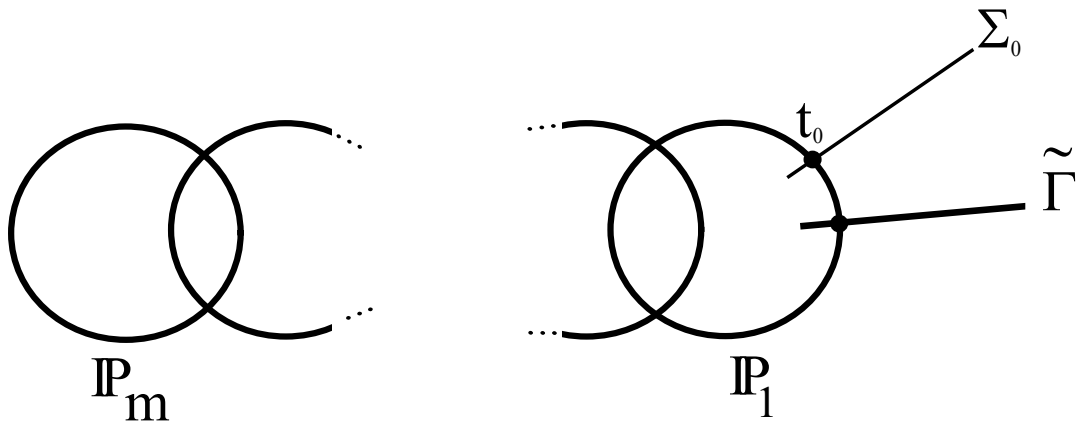


Figura 14.1:

podemos escrever

$$\widehat{F} \circ E(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) x^k,$$

onde os coeficientes A_k são polinomiais em t . Tomemos um ponto não singular $t_0 \in \mathbb{P}_1 \setminus \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ próximo o suficiente da esquina $\tilde{\Gamma} \cap \mathbb{P}_1$. Então $\hat{F} \circ E(x, t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t_0)x^k \in \mathbb{C}[[x]]$, ou seja, é uma série formal em uma variável. Seja Σ_0 uma seção transversal em t_0 . Pelo Teorema de Borel-Ritt, dado um setor $S_0 \subset \Sigma_0$ existe uma função holomorfa $\varphi_0 : S_0 \rightarrow \mathbb{C}$ que admite $\hat{F} \circ E(x, t_0)$ como expansão assintótica em S_0 . Desde que t_0 é não singular existem um germe de função analítica H e uma vizinhança U_0 de t_0 tal que $H : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz $H(x, 0) = x$ e $dH \wedge \tilde{\omega} = 0$, onde $\tilde{\omega}$ é a 1-forma associada a $\tilde{\mathcal{F}}$ em U_0 . Por construção, $\varphi_0 \circ H|_{S_0} : S_0 \rightarrow \mathbb{C}$ é constante no traço de cada folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ em S_0 . Além disso, $\varphi_0 \circ H$ admite expansão assintótica não nula, uma vez que H é analítica. Desde que \mathcal{F} admite uma integral primeira formal, a esquina $\mathbb{P}_1 \cap \tilde{\Gamma}$ não pode ser uma sela-nó. Pela Proposição 11.3.1 temos que o par $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\Gamma})$ admite uma integral primeira moderada setorial. Pelo isomorfismo $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{F} \setminus \{0\}$ podemos concluir que o par (\mathcal{F}, Γ) admite uma integral primeira moderada setorial. Como \mathcal{F} é uma curva generalizada não dicrítica, pelo Teorema I (pág. 120, Seção 11.4), \mathcal{F} admite integral primeira holomorfa. \square

Referências Bibliográficas

- [1] M. Abate, *Fatou flowers and parabolic curves*, Complex analysis and Geometry, Springer, (2015), 1–39.
- [2] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York, (1972).
- [3] V. Arnold, *Geometrical Theory of Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [4] V. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer Textbook, Business Media, (1992).
- [5] V. Arnold, *Remarks on the perturbation theory for problems of Mathieu type*. Uspekhi Mat. Nauk, **232**, (1983), 189–203.
- [6] F. Arscott, *Periodic Differential Equations: An Introduction to Mathieu, Lamé and Allied Functions*, The Macmillan Company, New York, (1964).
- [7] W. Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer, (2000).
- [8] W. Balser, *From divergent power series to analytic function, theory and application of Multisummable Power Series*, Springer-Verlag, New York, (1991).
- [9] B. Braaksma, L. Stolovitch, *Small divisors and Large Multipliers*; Ann. Inst. Fourier Grenoble, **57**, (2007), 603–628.
- [10] F. Bracci, *Local holomorphic dynamics of diffeomorphisms in dimension one*, Contemporary Mathematics, **525**, (2004), 609–636.
- [11] M. Brunella: *A global stability theorem for transversely holomorphic foliations*. Ann. Global Anal. Geom. **15**, (1997), 179–186.
- [12] C. Camacho, *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in \mathbb{C}^2* , Société Mathématique de France, Astérisque, **59**, (1978), 83–94.
- [13] C. Camacho, P. Sad, *Invariant Varieties Through Singularities of Holomorphic Vector Fields*, Annals of Mathematics Second Series, **115**, (1982), 579–595.
- [14] C. Camacho, A. Neto, P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, J. of Diff. Geometry, **20**, (1984), 143–174.
- [15] C. Camacho, A. Neto, P. Sad, *Foliations with algebraic limit sets*, Ann. of Math., **136**, (1992), 429–446.
- [16] C. Camacho, A. Neto, *Geometric theory of foliations*. Birkhauser Inc., Boston (1985).
- [17] C. Camacho, P. Sad, *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*, 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, Publ. do IMPA, (1987).

- [18] C. Camacho, B. Scardua, *Foliations on complex projective spaces with algebraic limit sets*, Géométrie complexe et systèmes dynamiques, **261**, (2000), 57–88.
- [19] C. Camacho, B. Scardua, *Holomorphic foliations with Liouvillian first integrals*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **21**, (2001), 717–756.
- [20] J. Canille, *Desenvolvimento assintótico e introdução ao cálculo diferencial ressurgente*, 17^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, (1989).
- [21] D. Cerveau, B. Scardua, *Complete polynomial vector fields in the affine space of two complex variables*, IMPA-Univ. Rennes **1**, (1999).
- [22] F. Cano, D. Cerveau, J. Deserti, *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Éditions Belin, 2013.
- [23] D. Cerveau, F. Loray, *Un théorème de Frobenius singulier via l'arithmétique élémentaire*. J. Number Theory, **68**, (1998), 217-228.
- [24] D. Cerveau, J.F. Mattei, *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérisque, **97**, (1982).
- [25] E. Coddington, *An introduction to ordinary differential equations*, Dover Publications, INC. New York, (1989).
- [26] O. Costin, *Asymptotics and Borel Summability*, Chapman and Hall, CRC Press, (2008).
- [27] E. Delabaere, *Divergent series, Summability and Resurgence III, Resurgent Methods and The Painlevé Equation*, Lectures Notes in Mathematics, Springer, (2016).
- [28] W. Boyce, R. Diprima, *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, Rio de Janeiro, LTC, **8**, (2006).
- [29] P. Deligne, *Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien*, Sémin. Bourbaki, **22**, (1979), 543–560.
- [30] H. Dulac, *Solutions d'un système de équations différentiale dans le voisinage des valeurs singulières*, Bull. Soc. Math. France, **40**, (1912), 324–383.
- [31] G. Floquet, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, Annales Scientifiques de L'É.N.S, **12**, (1883), 47–88.
- [32] T. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer, (2001).
- [33] R. Gerard, Y. Sibuya, *Étude de certains systèmes de Pfaffequations de Pfaff avec singularités*, Lect. Notes Math, Springer, Berlin, **172**, (1979), 131–288.
- [34] J. Grzymisch, W. Fichter, M. Casasco, D. Losa, *A Spherical Coordinate Parametrization for an In-Orbit Bearings-Only Navigation Filter*, Navigation and Control, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, (2013), 10–18.
- [35] R. Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variables*, Wadsworth, Brooks and Cole, California, **I**, (1990).
- [36] G. Hill, *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon*, Press of J. Wilson and son, Cambridge, (1877).
- [37] E. Hille, *Ordinary Differential Equation in the Complex Domain*, John Wiley and Sons, (1894).

- [38] H. Hochstadt, *Results, old and new, in the Theory of Hill's equation*, Transactions of the New York Academy of Sciences, (1964).
- [39] M. Hukuhara, T. Kimura, T. Matuda, *Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*, Collection Publications of the mathematical society of Japan, (1961) , 145–155.
- [40] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, Paris, (1957).
- [41] Y. Ilyashenko, S. Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, (2007).
- [42] E. Ince, *A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions*, Proc. Camb. Phil. Soc., **21**, (1922), 117–120.
- [43] G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, Bachelier, **2**, (1852).
- [44] E. Lima, *Grupo Fundamental e espaços de recobrimento*, Projeto Euclides, (1993).
- [45] M. Loday-Richaud, *Divergent series, Summability and Resurgence II, Simple and Multiple Summability*, Springer, Lectures Notes in Mathematics, **2154**, (2016).
- [46] A. Lyapunov, *On the series proposed by Hill for representation of Moon's motion*, Academy of Sciences of the USSR, **1**, (1956), 418–446.
- [47] B. Malgrange, *Frobenius avec singularités I, codimension 1*. Pub. Maths. I.H.E.S. **46**, (1976), 163–173.
- [48] W. Magnus, S. Winkler, *Hill's Equation*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, (1966).
- [49] J. Martinet, J. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*. Ann. Sci. École Norm. Sup., **16**, (1983), 571–621.
- [50] J. Martinet and J. Ramis, *Problème de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Scientifiques, **55**, (1982), 63–124.
- [51] E. Mathieu, *Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*, Journal de mathématiques pures et appliquées, **13**, (1868), 137–203.
- [52] J. Mattei and R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **13**, (1980), 469–523.
- [53] N. Mclachlan, *Theory and application of Mathieu functions*, Oxford, (1947).
- [54] C. Mitschi, D. Sauzin, *Divergent series, Summability and Resurgence I, Monodromy and Resurgence*, Lectures Notes in Mathematics, Springer, (2016).
- [55] R. Moussu, *Sur l'existence d'intégrales premières holomorphes*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, **26**, (1998), 709–717.
- [56] A. Neto, *Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two*, J. Differential Geom., **26**, (1987), 1–31.
- [57] A. Neto, *Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações*, 26º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (2007).

- [58] A. Neto, B. Scárdua, *Folheações algébricas complexas*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (2015).
- [59] I. Niven, *Formal Power Series*, The American Mathematical Monthly, **76**, (1969), 871–889.
- [60] R. Pérez-Marco, *Sur une question de Dulac et Fatou*. C.R. Acad. Sci. Paris, **321**, (1995), 1045-1048.
- [61] R. Pérez-Marco, *Fixed points and circle maps*. Acta Math. **179**, (1997), 243-294.
- [62] R. Pérez-Marco, J. Yoccoz, *Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite*. Complex analytic methods in dynamical systems, Astérisque, **222**, (1994), 345-371.
- [63] A. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Chapman and Hall CRC, (2018).
- [64] J. Ramis, *Séries divergentes et procédés de resommation*, Journées X-UPS , Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, (1991).
- [65] F. Relton, *Applied Bessel Functions*, Dover Publications, New York, (1946).
- [66] L. Ruby, *Applications of the Mathieu equation*, Amer.J.Phys., **64**, (1996), 39–44.
- [67] K. Saito; *On a generalization of de Rham lemma*, Annales de l’institut Fourier, **26**, (1976), 165–170.
- [68] A. Seidenberg; *Reduction of singularities of the differential equation $Ady = Bdx$* ; Amer. J. of Math., **90**, (1968), 248–269.
- [69] B. Scardua, *A swift introduction to holomorphic foliations with singularities*, arXiv:1611.06363 [math.CV].
- [70] B. Scardua, *Complex vector fields having orbits with bounded geometry*, Tohoku Math. J., **54**, (2002), 367–392.
- [71] B. Scardua, *Differential Algebra and Liouvillian first integrals of foliations*, Journal of Pure and Applied Algebra, **215**, (2011), 764–788.
- [72] B. Scardua, *Integration of complex differential equations*, Jornal of Dynamical and control systems, **5**, (1999), 1–50.
- [73] B. Scardua, *Equações ordinárias e aplicações*. Coleção textos universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [74] B. Scardua, *Dynamics and integrability for germs of complex vector fields with singularity in dimension two*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **13**, (2014), 363–381.
- [75] B. Scardua, *Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations*. Ann. Sci. École Norm. Sup., **30**, (1997), 169–204.
- [76] B. Scardua e C. Morales, *Geometry, dynamics and Topology of Foliations: A First Course*, New Jersey, World Scientific, (2017).
- [77] M. Singer, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Transactions of the American Mathematical Society, **2**, (1992) 673–688.
- [78] M. Soares e R. Mol, *Índices de campos homolorfos e aplicações*. 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

- [79] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, University of Vienna, Vienna, Austria, (2012).
- [80] W. Wasow, *Asymptotic Expansion for Ordinary Differential Equations*, Interscience Publishers, New York, (1965). (Reprint Dover Plub., New york (1987)).
- [81] G. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, (1922).
- [82] G. Watson, *The Convergence of the Series in Mathieu's Functions*, Proceedings of Edinburgh Mathematical Society, **33**, (1914), 25–30.
- [83] E. Whittaker, G. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, (1927), (reprinted 1996).
- [84] H. Zoladeck, *The Method of Holomorphic Foliations in Planar Periodic Systems: The Case of Riccati Equations*, Journal of Differential Equations, **165**, (2000), 143–173.
- [85] C. Ziener, M. Ruckl, T. Kampf, W. Bauer, H. Schlemmer, *Mathieu functions for purely imaginary parameters*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **236**, (2012), 4513–4524.