Um modelo predador-presa de reação-difusão com perseguição, evasão e detecção

por

Bruno Telch dos Santos

Orientador: Paulo Verdasca Amorim

Tese de Doutorado
apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática
do Instituto de Matemática, da Universidade Federal
do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do
Título de Doutor em Matemática.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2019

CIP - Catalogação na Publicação

S237m

Santos, Bruno Telch
Um modelo predador-presa de reação-difusão com perseguição, evasão e detecção / Bruno Telch Santos. - Rio de Janeiro, 2019.
138 f.

Orientador: Paulo Verdasca Amorim.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Matemática, 2019.

1. Modelo predador-presa. 2. Quimiotaxia. 3. Sistema parabólico-elíptico. 4. Método de De Giorgi. I. Amorim, Paulo Verdasca , orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Um modelo predador-presa de reação-difusão com perseguição, evasão e detecção

por

Bruno Telch dos Santos

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do titulo de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Paulo Verdasca Amorim - UFRJ-IM
(Orientador)

Prof. Dr. Rolci Cipolatti - UFRJ - IM

Prof. Dra. Juliana Fernandes da Silva Pimentel - UFRJ - IM

Prof. Dr. Max Oliveira de Souza - UFF

Prof. Dra. Sandra Mara Cardoso Malta - LNCC

Rio de Janeiro
Dezembro de 2019

Um modelo predador-presa de reação-difusão com perseguição, evasão e detecção

Bruno Telch dos Santos

Orientador: Paulo Verdasca Amorim

Resumo

Resumo da Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Propomos e analisamos nessa tese um modelo de reação-difusão para a interação predador-presa, caracterizando as taxias da presa e do predador mediados por sensoriamento não-local. Ambas as densidades de predadores e presas são governadas por equações parabólicas. Ambas as populações de presas e o predadores detectam indiretamente por meio de campos de odor ou visibilidade, modelados por equações parabólicas ou elípticas. Fornecemos estimativas uniformes nos espaços de Lebesgue que levam à limitação e à boa colocação global do sistema. Experimentos numéricos são apresentados e discutidos, permitindo-nos mostrar as propriedades dinâmicas das soluções.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2019

A reaction-diffusion predator-prey model with pursuit, evasion, and nonlocal sensing

Bruno Telch dos Santos

Orientador: Paulo Verdasca Amorim

Abstract

Abstract da Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

In this thesis, we propose and analyze a reaction-diffusion model for predator-prey interaction, featuring both prey and predator taxis mediated by nonlocal sensing. Both predator and prey densities are governed by parabolic equations. The prey and predator detect each other indirectly by means of odor or visibility fields, modeled by parabolic or elliptic equations. We provide uniform estimates in Lebesgue spaces which lead to boundedness and the global well-posedness for the system. Numerical experiments are presented and discussed, allowing us to showcase the dynamical properties of the solutions.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2019

Sumário

Introdução

A Ecologia é o estudo científico da distribuição e abundância dos seres vivos e das interações que determinam a sua distribuição. As interações podem ser entre seres vivos e/ou com o meio ambiente. Ciência ampla e complexa, a Ecologia preocupa-se com o entendimento do funcionamento de toda a natureza. Um exemplo disso é a Ecologia de populações, onde modelos matemáticos realistas e úteis na biologia populacional são um forte objeto de estudos, uma vez que ajudam a entender os processos dinâmicos envolvidos e também a fazer previsões práticas. Talvez o mais comum no dia a dia sejam modelos com população humana, porém também é comum lidar nesses modelos com população de uma espécie ameaçada de extinção, crescimento bacteriano ou viral, entre outras.

Há em diversos ambientes modelos matemáticos na Ecologia de interesse econômico ou social, tais como interações predador-presa e competição, manejo de recursos renováveis, evolução de cepas resistentes a pesticidas, controle ecológico e geneticamente modificado de pragas, sociedades multi-espécies, sistemas herbívoro-planta, e etc. Neste trabalho nos interessa o estudo da interação entre diferentes espécies. Quando duas ou mais espécies interagem as suas dinâmicas populacionais são afetadas. Em geral, há toda uma rede de espécies em interação, o que torna as comunidades estruturalmente complexas. Consideramos aqui particularmente sistemas com duas espécies. Existem três tipos principais de interação, são essas a interação predador-presa, que é quando a taxa de crescimento de uma população é diminuída e a outra aumentada quando ocorre interação, a competição, que é quando a taxa de crescimento de cada população é diminuída, e a simbiose, que é quando a taxa de crescimento de cada população é aumentada (ver [45, 46]).

Direcionamos nossa atenção para a interação predador-presa. Denotemos por $w(t)$ a população de presas e por $u(t)$ a população de predadores no instante de tempo t. O primeiro modelo proposto por Lotka e Volterra para essa dinâmica foi

$$\begin{aligned} w_t &= w(a - bu) && (0.1) \\ u_t &= u(cw - d), && (0.2) \end{aligned}$$

onde a, b, c e d são constantes positivas. Esse modelo é de fácil entendimento, vejamos. A presa na ausência de qualquer predação cresce sem limites, que é representado pelo termo aw em (0.1). A predação reduz a taxa de crescimento da presa por um termo proporcional à população de presas e predadores, este fato é representado pelo termo $-bwu$ ainda em (0.1). Na ausência de qualquer presa para sustento do predador, a taxa de mortalidade do predador resulta no decaimento exponencial, representado pelo termo $-du$ em (0.2). A contribuição da presa para a taxa de crescimento dos predadores é representada pelo termo cwu também em (0.2), ou seja, é proporcional à quantidade de presa disponível, bem como ao tamanho da população de predadores. Os termos wu podem ser considerados como representando a conversão de energia de uma fonte para outra, bwu é retirado da presa e cwu acumulado para os predadores.

Este modelo tem alguns inconvenientes, no entanto, é de grande valor ao levantar questões relevantes e é um ponto de partida para modelos mais realistas. Uma das suposições irrealistas no modelo clássico (0.1)-(0.2) é que o crescimento das presas é ilimitado na ausência de predação. Na forma em que escrevemos o modelo (0.1) e (0.2), os termos entre parênteses à direita são as taxas de crescimento per capita dependentes das densidades. Para ser mais realista, estas taxas de crescimento devem depender tanto das densidades de presas quanto de predadores, e com isso em mente a proposta seguinte ao modelo inicial foi (ver [45])

$$\begin{cases} u_t = \overline{\alpha} wu - \overline{\beta} u \\ w_t = \gamma w(1 - w/K_w) - \delta wu \end{cases}$$

que corrige esse problema, onde $u(t) \geq 0$ representa a densidade do predador e $w(t) \geq 0$ representa a densidade da presa no instante de tempo $t \geq 0$. Ainda, $\overline{\alpha}$ é a taxa de crescimento do predador devido à predação, $\overline{\beta}$ é a taxa de morte do predador, γ é a taxa de crescimento da presa, K_w é a capacidade de carga da presa e δ é a taxa de mortes da presa devido à predação. Esse sistema na forma adimensional é dado por (ver [45], por exemplo)

$$\begin{cases} u_t = \alpha uw - u \\ w_t = \beta w(1 - w - u). \end{cases} \tag{0.3}$$

A mesma leitura feita para o sistema (0.1)-(0.2) se aplica ao sistema (0.3), tendo em vista agora que a população de predadores decresce exponencialmente na ausência da presa enquanto que a presa segue uma lei de crescimento logístico. As interações entre predadores e presas são modeladas por uma lei de ação em massa beneficiando o predador e eliminando a presa. A principal característica do sistema (0.3) é a estabilidade global assintótica de seu único estado estacionário não trivial $(\overline{u}, \overline{w}) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$, com $\alpha > 1$, que expressa um equilíbrio entre predação, reprodução de presas e taxa de mortalidade natural dos predadores. Vale destacar que uma leitura mais acurada mostra que (0.3) também apresenta seus contratempos, e é comum na literatura ver o sistema predador-presa com termos à direita representando as taxas de crescimento per capita dependendo da densidade. Para ser mais realista, essas taxas devem depender tanto das densidades de presas quanto de predadores, isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = w \cdot F(w, u) \\ \dfrac{du}{dt} = u \cdot G(w, u). \end{cases} \tag{0.4}$$

Existem várias escolhas para F e G acima que são mais coerentes do que a feita em (0.1)-(0.2), dentre elas, (0.3).

Quando se espera que o movimento espacial influencie a dinâmica, é natural considerar densidades de predadores e presas dependendo adicionalmente de uma variável espacial $x \in \Omega$, em algum domínio físico Ω contido em $\mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou $n = 3$. Então, pode introduzir-se a difusão espacial a fim de modelar a disseminação da população em um território, e uma consequência disso é o modelo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - D_w \Delta w = w \cdot F(w, u) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - D_u \Delta u = u \cdot G(w, u), \end{cases} \tag{0.5}$$

onde D_w e D_u são as taxas de difusão das espécies $w = w(t, x)$ e $u = u(t, x)$ e Δ representa o operador Laplaciano. Sistemas do tipo (0.5) são conhecidos como do tipo de Kolmogorov e são comuns na literatura (ver [45, 46]). Vale a pena destacar que a introdução da dependência espacial nos modelos populacionais não é apenas intuitiva, como na verdade é considerada essencial em uma diversidade de configurações ecológicas [15].

Além da difusão espacial, uma suposição razoável é que a presa tenta escapar das regiões de maior concentração de predadores, enquanto o predador tenta se direcionar para regiões com maiores concentrações de presas. Isso pode ser modelado pela introdução de termos de advecção nas equações. Assim, os predadores avançam para regiões de maior densidade de presas, enquanto as presas avançam para longe das regiões de maior densidade de predadores. Variantes dessa ideia foram consideradas, por exemplo, em [2, 16, 23, 24, 26, 35, 40, 41, 60, 64, 66, 67, 73, 75]. Introduzindo termos que modelam o transporte nas equações obtemos um sistema como

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (u \beta_u \nabla w) = u \cdot F(u, w) \\ \partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (w \beta_w \nabla u) = w \cdot G(u, w), \end{cases} \tag{0.6}$$

onde o β_u e β_w são as respectivas taxas de sensitividade ao odor do predador e da presa e $\nabla \cdot$ representa o operador divergente. Apesar da aparente simplicidade, e por melhores que sejam as propriedades de F e G, equipando com dados iniciais e qualquer condição de fronteira que seja adequada, não encontramos, em geral, tratamento para o sistema (0.6), que na literatura é descrito como do tipo de difusão cruzada.

Recentemente, as taxias de presas e predadores foram introduzidos como um mecanismo que permite perseguição e evasão [23, 24, 64, 61]. Isso supõe que as velocidades de advecção são mediadas por algum sinal indireto, que pode ser um odor, um produto químico, um campo de detecção visual ou visto como um potencial. Como o odor, por exemplo, é referente a um produto químico, é comum ser modelado via uma equação parabólica ou elíptica, dependendo do caso. Nessa linha de raciocínio, digamos que p é a densidade do odor da presa, q a densidade do odor do predador e seguindo [23, 24, 64, 61], com dados iniciais u_0 e w_0 para o predador e a presa e $\tau_1 p_0$ e $\tau_2 q_0$ para os seus respectivos odores ($\tau_1, \tau_2 \in \{0, 1\}$), completando com condições de fronteira de Neumann, consideramos à luz de (0.3) e (0.6) o sistema predador-presa com perseguição, evasão e sensoriamento não-local (já escrito de forma adimensional) dado por

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = \alpha w u - u \\ \partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = \beta w (1 - w - u) \\ \tau_1 \partial_t p - D_p \Delta p = \delta_w w - \delta_p p \\ \tau_2 \partial_t q - D_q \Delta q = \delta_u u - \delta_q q \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad \tau_1 p(0) = \tau_1 p_0 \quad \text{e} \quad \tau_2 q(0) = \tau_2 q_0 \\ \tau_1, \tau_2 \in \{0, 1\}, \end{cases} \tag{0.7}$$

para $t > 0$ e $x \in \Omega$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou $n = 3$, um conjunto limitado, onde lembramos que $u(t, x)$ é a densidade de predadores, $w(t, x)$ a densidade de presas, $p(t, x)$ o odor produzido pela presa e $q(t, x)$ o odor produzido pelo predador. O sistema (0.7) afirma que o predador u é atraído pelo odor p da presa w, que é solução de uma equação de difusão com fonte proporcional a w, enquanto a presa w é repelida pelo odor q produzido pelo predador u.

Uma das mais comuns entre essas simplificações na literatura diz respeito à escolha de $\tau_1 = 0$ ou $\tau_2 = 0$, que reflete na suposição do modelo fisicamente razoável de que os produtos químicos se difundem muito mais rápido do que as células se movem [34]. Assim, as equações que descrevem os odores da presa e do predador podem ser elíptica-elíptica, elíptica-parabólica, parabólica-elíptica e parabólica-parabólica, onde aqui entram informações sobre as espécies em estudo, todas as possíbilidades razoáveis em uma variedade de configurações ecológicas. Dedicaremos a maior parte do primeiro capítulo ao melhor esclarecimento desse fato. Note também que nos referimos a p e q como "odores", mas essas quantidades não necessariamente modelam os odores químicos. Podem ser geralmente interpretados como potenciais, representando a possibilidade de um animal ser detectado à distância, por exemplo, por meios visuais ou sonoros.

É interessante uma breve discussão sobre as condições de contorno do tipo de Neumann. Elas modelam o fato de que na evolução temporal do sistema (0.7) não há fluxo de indivíduos através da fronteira do domínio físico. Dependendo da aplicação específica, isso pode ser uma suposição natural, modelando, por exemplo, uma área fechada. No entanto, diferentes condições de contorno poderiam ser consideradas, como de Dirichlet ou tipo misto, refletindo configurações naturais distintas. Nos limitaremos à análise apenas do sistema com condições de Neumann, porém nos experimentos numéricos apresentados em [4] mostramos um exemplo com condições de contorno de Dirichlet.

À luz dos recentes resultados matemáticos em [24, 61] que abordam problemas próximos, nossas principais contribuições são a introdução da dinâmica de Lotka-Volterra predador-presa com quimiotaxia e as simulações numéricas para esclarecer os características de cada um dos possíveis modelos. Critério e discussões aprofundadas para possíveis escolhas dos parâmetros do sistema para casos que competem com a realidade, como trabalhado em [[5]], não são discutidos nesse trabalho e ficam para perspectivas futuras. Como veremos, os termos de interação no lado direito tornam a análise mais envolvida, em particular no que diz respeito à obtenção de estimativas de L^∞. De fato, enquanto é mostrado nos trabalhos acima mencionados que o sistema sem dinâmica de população ou interação não origina uma explosão de tempo finito das soluções, a dinâmica da equação predadora introduz um termo quadrático uw, então não é óbvio que a propriedade da limitação uniforme permanece válida. Veremos que em alguns casos a natureza atrativa e repulsiva dos termos de advecção continua garantindo a limitação das soluções, outras carecem ajuste. Além disso, a propriedade da limitação instantânea da solução, mesmo para dados iniciais ilimitados, observada em [24], permanece válida em alguns desses cenários.

Um esboço da tese segue. No primeiro capítulo, uma abordagem mais aplicada nos ajuda a ter o melhor entendimento de cada um dos casos do sistema (0.7), enquanto uma abordagem formal sugere que os casos $\tau_2 = 0$

e $\tau_2 = 1$ têm diferenças a serem consideradas. Em seguida, a construção de um operador linear conveniente e combinação com o Teorema do ponto fixo de Banach nos garante $T > 0$ pequeno de modo que existam únicas u, w, p e q que resolvam o sistema (0.7) em $(0, T] \times \Omega$ no sentido clássico, onde pediremos dados iniciais $u_0, w_0, \tau_1 p_0$ e $\tau_2 q_0$ elementos de $W^{1,\infty}(\overline{\Omega})$. Esse processo poderá ser repetido até um valor $T_{\max}$, que tem a propriedade de que se $T_{\max} < \infty$ é porque houve explosão em tempo finito de pelo menos uma das soluções u ou w. Isso sugere que estimativas L^∞ de u e w são necessárias para garantir a existência da solução clássica em $[0, +\infty) \times \Omega$. À luz dessa necessidade, introduzimos o método de energia de De Giorgi (De Giorgi level-set method) [20] para obter tais estimativas L^∞ em $[0, T]$, deixando claro que há a necessidade de obter estimativas *a priori* em L^γ para u e w, $\gamma \geq 1$. No Capítulo 2 é feita a análise para o caso $\tau_2 = 0$ enquanto que no Capítulo 3 é feita uma análise para o caso $\tau_2 = 1$, onde em ambos os casos obtemos as estimativas *a priori* em L^γ de u e w, $\gamma > 1$, assim obtendo as ferramentas necessárias para aplicação do método de De Giorgi. Após obtidas as estimativas L^∞, temos a boa colocação global do sistema (0.7) em $\Omega \times (0, +\infty)$. Os resultados para o caso $\tau_1 = \tau_2 = 0$, obtidos no Capítulo 1, podem também ser vistos em [4].

Definimos o quarteto (u, w, p, q) como uma solução fraca do sistema (0.7) se, primeiramente, $u, w, \tau_1 p, \tau_2 q \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ e $\partial_t u, \partial_t w, \tau_1 \partial_t p$, $\tau_2 \partial_t q \in L^2(0, T, [H^1(\Omega)]^*)$, e para toda função teste $\xi \in C^\infty([0, \infty) \times \Omega)$ com suporte compacto em $[0, T) \times \overline{\Omega}$, se tem que

$$\int_0^T \int_\Omega (-u\partial_t \xi + (\nabla u - u\nabla p) \cdot \nabla \xi)(t, x)\, dx\, dt$$
$$= \int_\Omega u_0(x)\xi(0, x)\, dx + \int_0^T \int_\Omega (uw - u)\xi(t, x)\, dx\, dt,$$
$$\int_0^T \int_\Omega (-w\partial_t \xi + (\nabla w + w\nabla q) \cdot \nabla \xi)(t, x)\, dx\, dt$$
$$= \int_\Omega w_0(x)\xi(0, x)\, dx + \int_0^T \int_\Omega w(1 - w - u)\xi(t, x)\, dx\, dt,$$

$$\int_\Omega -\tau_1 p\, \partial_t \xi + \nabla q \cdot \nabla \xi\, dx = \tau_1 \int_\Omega p_0(x)\xi(0, x)\, dx + \int_\Omega (u - q)\xi(t, x)\, dx$$

e

$$\int_\Omega -\tau_2 q\, \partial_t \xi + \nabla q \cdot \nabla \xi\, dx = \tau_2 \int_\Omega q_0(x)\xi(0, x)\, dx + \int_\Omega (w - q)\xi(t, x)\, dx.$$

Vamos supor ao longo de todo o trabalho pelo menos que os dados iniciais (u_0, w_0) são não-negativos e têm massa finita, isto é, $\int_\Omega u_0 + w_0\, dx = \mathcal{M} < \infty$.

Além disso, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado e suave. Após obter a boa colocação para dados iniciais em $W^{1,\infty}(\overline{\Omega})$, conseguimos obter tais soluções fracas de (0.7) via o limite de soluções clássicas, essas para dados inicias menos regulares. Por fim, utilizamos um método de volume finito implícito-explícito de dois passos (detalhado em [4]) para a aproximação do sistema (0.7) e apresentamos alguns experimentos numéricos. Assim, os principais resultados dessa tese estão concentrados na boa-colocação e na integrabilidade de Lebesgue das soluções fracas do sistema (0.7), onde seguimos estratégias similares às traçadas em [3, 24]. Ainda assim, o caráter do presente sistema introduz várias mudanças na análise com respeito aos resultados [3, 24].

O sistema (0.7) é matematicamente do tipo de quimiotaxia [36, 37]. Como é bem conhecido, tais sistemas podem apresentar explosão das soluções em tempo finito, veja por exemplo [29]. Também é conhecido que a imposição de uma fonte na equação de uma população pode previnir, sob certas hipóteses, a explosão em tempo finito dessa solução, veja por exemplo [76]. Portanto, não é óbvio a princípio que as soluções de (0.7) também possam ter um comportamento explosivo ou não. Como veremos na análise, a natureza indireta da sensitividade, assim como o comportamento atração-repulsão, impedem que as densidades se tornem infinitas no tempo finito. Sumarizamos os principais resultados dessa tese no seguinte teorema:

Teorema 1. *Consideremos $\tau_2 = 0$. Para dados iniciais $u_0, w_0, \tau_1 p_0 \in W^{1,\infty}(\overline{\Omega})$ o sistema (0.7) admite o quarteto (u, w, p, q) como solução de no sentido clássico em $[0, +\infty) \times \Omega$, e esse é único. Para soluções fracas, fixado $T > 0$, consideremos dados iniciais u_0, w_0 em $L^\alpha(\Omega)$ para algum $\alpha > 3$ e $\tau_1 \nabla p_0 \in L^s(\Omega)$, com $s > 2(\alpha + 1)$ qualquer. Então o sistema (0.7) possui uma única solução fraca não-negativa. As seguintes estimativas são satisfeitas para qualquer $t > 0$,*

(i) *Para todo $\gamma \in [1, \alpha]$, segue que*

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \le C(\alpha, \|u_0\|_\alpha, \|w_0\|_\alpha, \tau_1 \|\nabla p_0\|_s)$$

para todo $t \in [0, T]$. Em particular, se $u_0, w_0 \in L^\infty(\Omega)$, então

$$\|u(t)\|_\infty + \|w(t)\|_\infty \le C(\|u_0\|_\infty, \|w_0\|_\infty, \tau_1 \|\nabla p_0\|_r),$$

para $r > 8$ e $t \in [0, T]$.

(ii) *Integrabilidade L^γ: para qualquer $\gamma \in (\alpha, \infty]$, segue que*

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \le C(\gamma, \mathcal{M})\Big(1 + \frac{1}{t^{1/2\gamma'}}\Big), \quad t > 0.$$

Em particular, temos a integrabilidade L^∞:

$$\|u(t)\|_\infty + \|w(t)\|_\infty \le C\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad t > 0.$$

para algum C independente de $t > 0$. Caso $\tau_2 = 1$, fixado $T > 0$, obtemos para $\gamma > 3$ o mesmo resultado vale para o sistema

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = \alpha w u - u \\ \partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = \beta w(1 - w - u) \\ \tau_1 \partial_t p - D_p \Delta p = \delta_w w - \delta_p p \\ \partial_t q - D_q \Delta q = \delta_u F(u) - \delta_q q \\ \nabla u \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad \tau_1 p(0) = \tau_1 p_0 \quad e \quad q(0) = q_0 \\ \tau_1 \in \{0, 1\}, \end{cases} \tag{0.8}$$

onde $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é qualquer função Lipschitz com $F(0) = 0$ e $F(s) \le s^\xi$ para s suficientemente grande, com $\xi \in (0, 1)$ fixo. Ainda há a estimativa adicional

$$\|u(t)\|_\infty \le C(T)\|u_0\|_\infty,$$

*com $C = C(\Omega, \|u_0\|_\infty, \|w_0\|_\gamma, \tau_1\|\nabla p_0\|_s, \|\nabla q_0\|_{2(\gamma+1)})$ e $s > 2(\gamma + 1)$. Assim, existe uma faixa de pequenez onde podemos tomar o dado inicial $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ para que junto com $w_0 \in L^\alpha(\Omega)$, $\tau_1 \nabla p_0, \nabla q_0 \in L^{2(\gamma+1)}(\Omega)$ existe a solução fraca (u, w, p, q) em $[0, T]$ e essa satisfaz as estimativas dos ítens **(i)** e **(ii)**.*

Capítulo 1

Modelo predador-presa com perseguição-evasão

Um grande número de seres vivos depende de um senso agudo de olfato para transmitir informações entre os membros da espécie. Os produtos químicos envolvidos nesse processo são chamados de feromônios. Uma das mais simples e importantes explorações da liberação de feromônios é a capacidade de gerar movimento dirigido em uma população. O sistema proposto em (0.7) modela duas comunidades que habitam um certo conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, e vivem em situação de predador-presa, e é esperado que elas usem desse movimento dirigido para sua sobrevivência. A fim de um melhor esclarecimento sobre o modelo proposto, na primeira etapa desse capítulo abordaremos brevemente como tem sido modelado esse movimento quimiotático, que ao contrário da difusão direciona o movimento para um gradiente de concentração. Essa abordagem será feita via resultados clássicos, bem como um estudo numérico a fim de enfatizar a diferença dos quatro possíveis modelos originados pelas escolhas de τ_1 e τ_2. Na segunda etapa desse capítulo faremos uma análise preliminar do modelo, obtendo a solução local no sentido clássico de (0.7), positividade de soluções para dados não-negativos e esclarecer as necessidades para que haja a solução global em intervalos de tempo geral.

Em [45, 46] há uma variedade de configurações ecologicas em que animais usam a quimiotaxia, como por exemplo, para a sobrevivência. Nesse cenário, pensamos que numa interação predador-presa, onde o predador, que denotamos por $u(t,x)$, sente o odor $p(t,x)$ da presa $w(t,x)$ e vai em direção a região de sua maior concentração, enquanto que exala o seu odor $q(t,x)$, que, ao ser detectado pela presa, faz com que ela fuja em direção oposta à maior concentração. Assim, sugerimos de maneira mais geral o sistema

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (u \beta_u \nabla p) = \overline{\alpha} w u - \overline{\beta} u \\ \partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (w \beta_w \nabla q) = \gamma w (1 - w/K_w) - \delta w u \\ \tau_1 \partial_t p - D_p \Delta p = \overline{\delta}_w w - \overline{\delta}_p p \\ \tau_2 \partial_t q - D_q \Delta q = \overline{\delta}_u u - \overline{\delta}_q q, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde lembramos, $\tau_1, \tau_2 \in \{0, 1\}$. Completamos o sistema com dados iniciais

$$\begin{bmatrix} u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \\ w(x,0) = w_0(x) \geq 0 \\ \tau_1 p(x,0) = \tau_1 p_0(x) \geq 0 \\ \tau_2 q(x,0) = \tau_2 q_0(x) \geq 0 \end{bmatrix} \quad \text{com } \ x \in \Omega.$$

Quanto às condições de fronteira, vamos considerar do tipo de Neumann,

$$\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

que indica que não há fluxo pela fronteira. Essa escolha garante mais a frente uma estimativa fundamental de massa para u e w e nesse ambiente conseguiremos fazer uma análise mais profunda do modelo. Durante todo esse trabalho consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto, limitado, conexo e suave. Finalmente, na Tabela 1.1 apresentamos todos os significados dos parâmetros físicos que aparecem no sistema (1.1). Estamos denotando ℓ o comprimento, t o tempo, *bio* denota alguma medida relativa a massa ou quantidade do predador ou da presa e *odor* denota alguma medida para o "odor".

Apesar das propostas de dispersão das espécies, detecção da presa pelo predador e evasão da presa ao detectar o predador, o modelo está longe de ser um modelo realista. Uma variedade de características que o ambiente possa ter deixa claro que o modelo (1.1) não deve ser visto como um modelo realista para interação predador-presa, mas possivelmente como um pontapé inicial para dinâmicas do tipo. Após o processo de adimensionalização, apresentado na Tabela 1.2, obtemos o modelo

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = \alpha w u - u \\ \partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = \beta w(1 - w - u) \\ \tau_1 \partial_t p - D_p \Delta p = \delta_w w - \delta_p p \\ \tau_2 \partial_t q - D_q \Delta q = \delta_u u - \delta_q q \\ \\ \quad + \text{Dados iniciais} \\ \quad \begin{cases} u(0,x) = u_0(x) \geq 0 \\ w(0,x) = w_0(x) \geq 0 \\ \tau_1 p(0,x) = \tau_1 p_0(x) \geq 0 \\ \tau_2 q(0,x) = \tau_2 q_0(x) \geq 0 \\ x \in \Omega, \quad \tau_1, \tau_2 \in \{0,1\} \end{cases} \\ \\ + \text{Condições de fronteira} \\ \quad \left\{ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \right. \end{cases} \tag{1.2}$$

onde lembramos que $u = u(t,x)$ representa a densidade de predadores, $w = w(t,x)$ a densidade de presas, $p = p(t,x)$ a densidade de feromônio da presa e $q = q(t,x)$ a densidade de feromônio do predador. Os coeficientes do sistema (1.2) são todos positivos e têm seus significados físicos apresentados na Tabela 1.1.

Um fenômeno quimiotático amplamente estudado é o comportamento exibido pelo fungo *Dictyostelium Discoideum*, onde as amebas unicelulares se movem em direção a regiões de concentrações relativamente altas de um composto químico que é produzido pelas próprias amebas. Para modelar esse processo, em 1970, Keller e Segel [36, 37] propuseram um sistema parabólico acoplado para descrever o movimento de células (com densidade u) em direção ao gradiente de concentração da substância química v produzida pelas próprias células. Atualmente, este sistema é amplamente conhecido como o modelo de quimiotaxia de Keller-Segel:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \chi \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \tau v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla v \cdot \mathbf{n} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega \\ \tau v(x,0) = \tau v_0(x), \geq 0 & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

Parâmetros	Unidades	Significado físico
D_u, D_w	ℓ^2/t	Taxas de difusão do predador e da presa
D_p, D_q	ℓ^2/t	Taxas de difusão dos odores do predador e da presa
$\overline{\alpha}$	$(bio\,t)^{-1}$	Taxa de crescimento do predador devido à predação
$\overline{\beta}$	t^{-1}	Taxa de morte do predador
γ	t^{-1}	Taxa de crescimento da presa
K_w	$\dfrac{bio}{\ell^2}$	Carga de capacidade da presa
δ	$(bio\,t)^{-1}$	Taxa de mortes da presa devido à predação
β_u, β_w	$\dfrac{\ell^4}{t \cdot odor}$	Sensitividade de odor do predador e da presa
$\overline{\delta}_u,\ \overline{\delta}_w$	$\dfrac{odor}{t \cdot bio}$	Taxa de produção de odor do predador e da presa
$\overline{\delta}_q, \overline{\delta}_p$	t^{-1}	Taxa de degradação do odor dos predadores e das presas

Tabela 1.1: Parâmetros físicos do sistema (1.1). *Aqui, ℓ denota o comprimento, t o tempo, $bio\,t$ denota alguma medida de "odor".*

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $\tau \in \{0, 1\}$, $\chi \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{n}$ o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ apontando para fora. Quando $\chi > 0$, as células exibem uma tendência a avançar para concentrações de sinal mais altas enquanto $\chi < 0$ leva a um modelo em que as células preferem se afastar do produto químico em questão. Desde este trabalho pioneiro, o modelo de Keller-Segel e as várias variantes têm recebido significativa atenção para entender o mecanismo de quimiotaxia em vários contextos, e a difusão cruzada induzida por quimiotaxia tem demonstrado levar a explosão em tempo finito/infinito da solução sob certas circunstâncias.

Parâmetro adimensionalizado	Significado físico
$\alpha = \dfrac{\overline{\alpha}K_w}{\overline{\beta}}$	Eficiência do predador relativa à taxa de morte
$\beta = \dfrac{\gamma}{\overline{\beta}}$	Taxa de crescimento da presa relativa à taxa de morde do predador
$\delta_w = \dfrac{\beta_u K_w \overline{\delta}_w}{\overline{\beta}}$	Taxa normalizada da produção de odor da presa
$\delta_u = \dfrac{\beta_w \gamma \overline{\delta}_u}{\overline{\beta}\delta}$	Taxa normalizada da produção de odor do predador
$\delta_p = \dfrac{\overline{\delta}_p}{\overline{\beta}}$	Taxa de degradação do odor da presa relativa à taxa de morte do predador
$\delta_q = \dfrac{\overline{\delta}_q}{\overline{\beta}}$	Taxa de degradação do odor do predador relativa à taxa de morte do predador

Tabela 1.2: Adimensionalização dos parâmetros do Sistema (1.2).

1.1 Influência local da equação do feromônio

Para melhor entendimento das duas possíveis escolhas para cada equação do feromônio deste texto, e ver que de fato são quatro problemas distintos, consideremos um exemplo numérico simples. Seja $u(t,x)$ uma certa população que faz um movimento dirigido segundo um campo V. Queremos saber primeiramente quais características $p(t,x)$ e $q(t,x)$ têm quando essas são as respectivas soluções das equações

$$-D_p\Delta p = \delta_u u - \delta_p p \tag{1.4}$$

e

$$\partial_t q - D_q\Delta q = \delta_u u - \delta_q q, \quad q(0) = q_0. \tag{1.5}$$

Por simplicidade, tomemos $u = u(t,x)$ uma população que se dispersa lentamente e tem um movimento direcionado segundo o campo $V(x,y) = (0,-y)$. Esse problema é usualmente modelado por

$$\begin{cases} \partial u_t - D_u\Delta u - \chi\nabla\cdot(uV) = 0, & t>0,\ x\in\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde o sinal de χ determina o sentido do movimento. Então, para nosso primeiro objetivo, serão necessários dados iniciais $u(0) = u_0$ e $q(0) = q_0$, que serão tomados como na Figura 1.1, onde $q(0) = q_0$ foi obtido como a solução numérica de $-10\Delta q_0 = 100u_0 - p_0$.

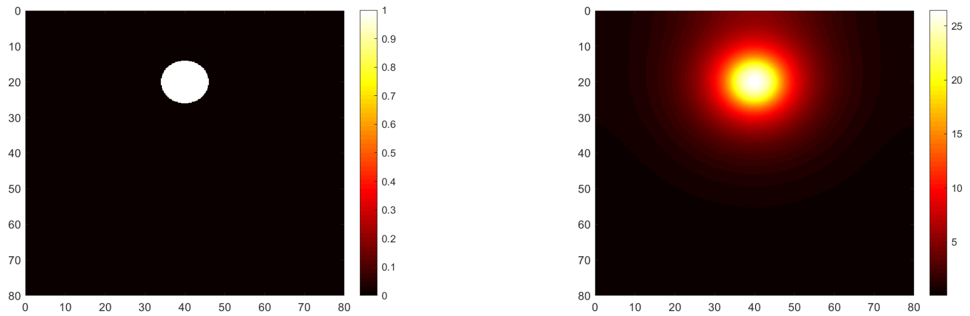
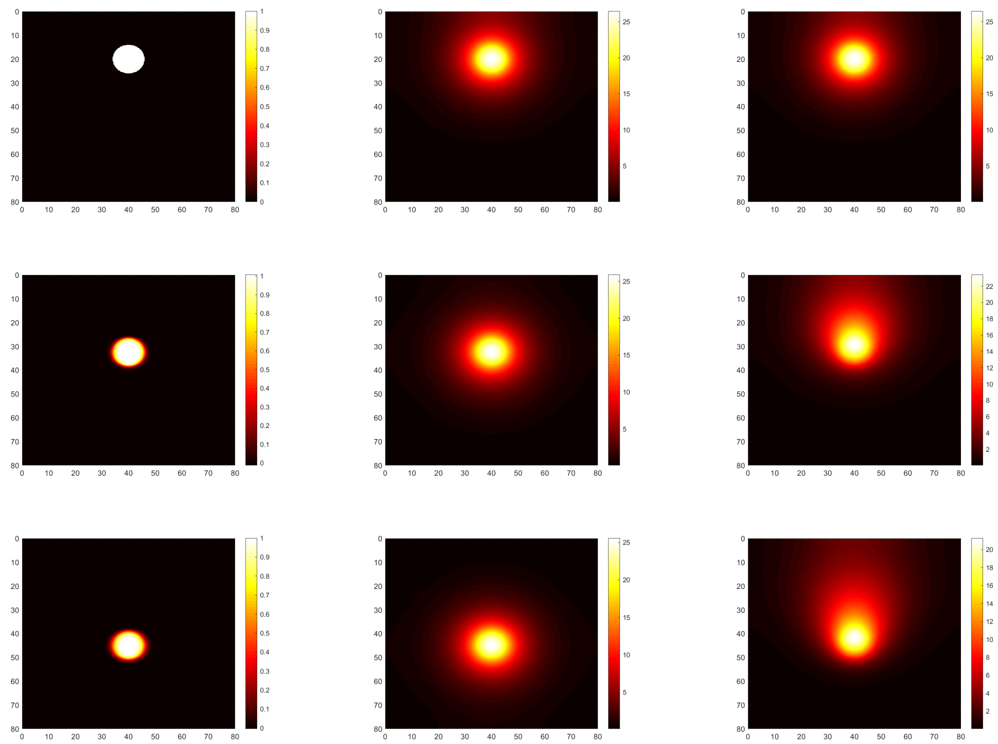


Figura 1.1: Dados iniciais $u(0)$ e $q(0)$ para (1.6) e (1.5).

Os resultados numéricos estão apresentados na Figura 1.2: Para os instantes de tempo $t = 0$, 0.5, 1.0 e 1.5, na primeira coluna está apresentada a solução numérica de u, ao centro está a solução numérica para p e à direita a solução numérica para q, onde foram escolhidos os parâmetros $D_u = 1$, $\chi = 5$, $D_p = D_q = 10$, $\delta_p = \delta_q = 1$ e $\delta_u = 100$.



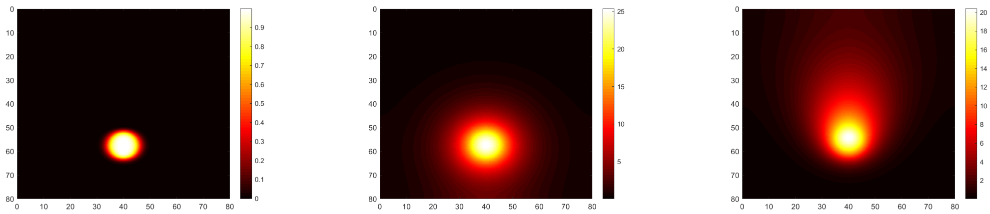


Figura 1.2: Para os instantes de tempo $t = 0$, 0.5, 1.0 e 1.5, na primeira coluna a solução numérica de (1.6) com $D_u = 1$ e $\chi = 5$ e $u(0)$ como na Figura 1.1. Nas segunda e terceira colunas estão as soluções de (1.4) e (1.5) para $D_p = D_q = 10$, $\delta_u = 100$ e $\delta_p = \delta_q = 1$ e $q(0)$ como na Figura 1.1.

Esse experimento já traz uma boa intuição de como a escolha de τ_1 e τ_2 afeta a dinâmica do sistema (1.2) de um modo diferente, por exemplo, pensamos na equação do feromômio da presa. Instantaneamente, se essa difusão é rápida, para pequenos tempos o experimento sugere que isso dá vantagem ao predador, enquanto que a longo prazo sugere o oposto, uma vez que a difusão lenta do feromônio da presa faz com que a sua comunidade deixe um rastro maior de feromônio durante a evasão, que ajudará o predador na perseguição. Agora o objetivo é ampliar essa discussão com mais detalhes. Para enfatizar a perseguição-evasão iremos desconsiderar a dinâmica populacional. Faremos isso com mais alguns experimentos numéricos.

Todos os experimentos numéricos que serão apresentados nessa seção serão novamente analisados no final dos próximos capítulos, porém, considerando a dinâmica populacional. Desconsiderando a dinâmica populacional, vamos analisar numericamente os impactos das escolhas de τ_1 e τ_2 para o modelo (1.2), o esquema numérico introduzido no Apêndice A. Apresentamos os seguintes experimentos numéricos a fim de compararmos os efeitos das respectivas equações do feromônio na quimiotaxia, bem como as quatro possíveis combinações do sistema (1.2). Usaremos o mesmo experimento nesses quatro possíveis sistemas com coeficientes

$$D_u = D_w = 3,\ D_p = D_q = 10,\ \delta_w = \delta_u = 120,\ \text{ e }\ \delta_p = \delta_q = 1. \tag{1.7}$$

Ainda, consideremos os dados iniciais

$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } (x-35)^2 + (y-35)^2 < 40 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{1.8}$$

$$w_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x-30)^2 + (y-50)^2 < 60 \\ 1, & \text{se } (x-50)^2 + (y-30)^2 < 60 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{1.9}$$

como podem ser melhores observados na Figura 1.3.

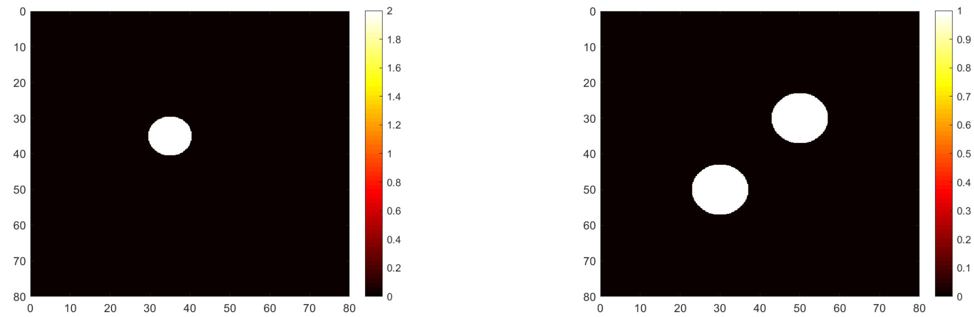
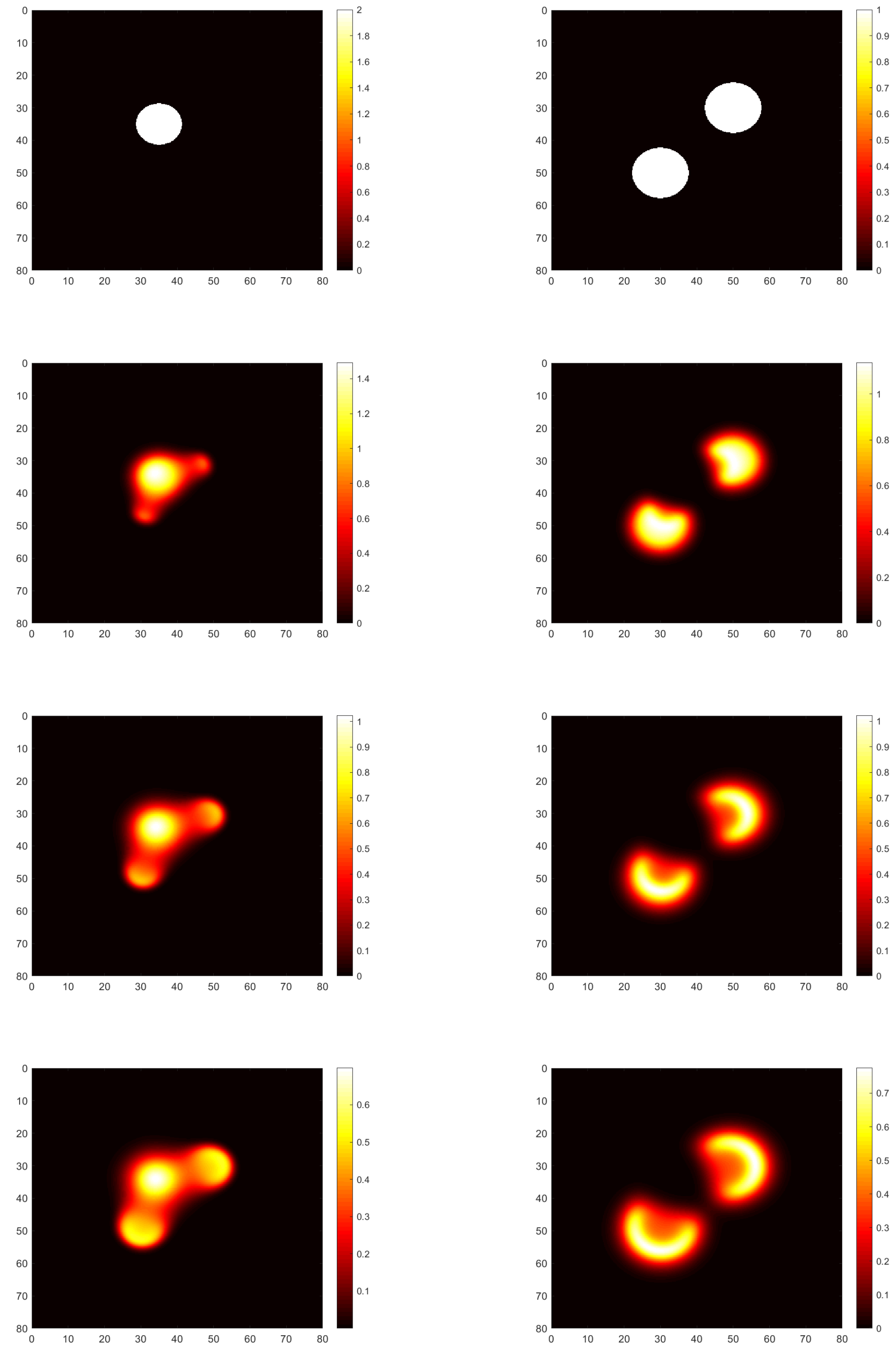


Figura 1.3: Dados iniciais do primeiro experimento numérico. À esquerda o dado inicial $u(0)$ para o predador e a direita o dado inicial $w(0)$ da presa conforme as equações (1.8) e (1.9), respectivamente.

A escolha $\tau_1 = \tau_2 = 0$ indica que as difusões de feromônio tanto do predador quanto da presa são rápidas. Portanto, temos o sistema parabólico-eliptico

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = \alpha w u - u \\ \partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = \beta w(1 - w - u) \\ - D_p \Delta p = \delta_w w - \delta_p p \\ - D_q \Delta q = \delta_u u - \delta_q q \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Lembrando mais uma vez que faremos uma simulação numérica para (1.10) desconsiderando a dinâmica populacional, isto é, o lado direito das duas primeiras equações são nulos. Ainda, consideraremos os mesmos parâmetros (1.7) e com dados iniciais (u_0, w_0) como na Figura 1.3. Como já foi dito, nesse sistema a difusão de feromônio tanto do predador quanto da presa é rápida, então, como podemos ver nas Figuras 1.5 e 1.6, os dados iniciais u_0 e w_0 apresentados na Figura 1.3 rapidamente entram em contato com o feromônio da outra população, iniciando instantaneamente o movimento dirigido. Podemos ver essa simulação na Figura 1.4.



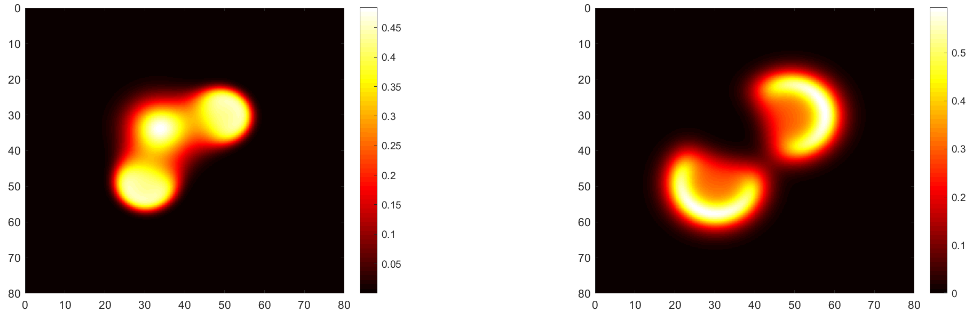


Figura 1.4: Resultado do experimento numérico para (1.10) sem dinâmica populacional parâmetros como em (1.7) nos instantes de tempo $t = 0$, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5. À esquerda encontra-se a população de u enquanto que à direita está a população de w.

Observemos que nos demais casos temos $\tau_1 = 1$ ou $\tau_2 = 1$, donde precisamos de dados iniciais p_0 ou q_0. Vamos tomar tais dados como sendo as soluções numéricas de $-D_p \Delta p_0 = \delta_w w_0 - \delta_p p_0$ e $-D_q \Delta q_0 = \delta_u u_0 - \delta_q q_0$, onde w_0 e u_0 são dados em (1.9) e (1.8). Tais soluções estão apresentadas respectivamente nas Figuras 1.5 e 1.6.

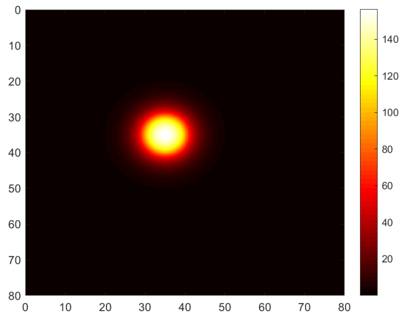


Figura 1.5: Solução numérica de $-D_q \Delta q_0 = \delta_u u_0 - \delta_q q_0$ para u_0 como em (1.8).

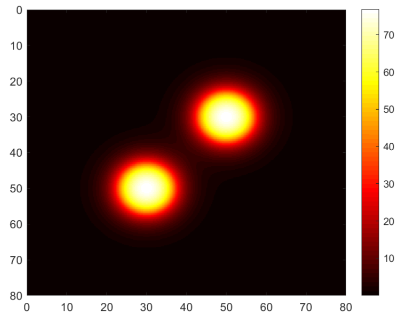
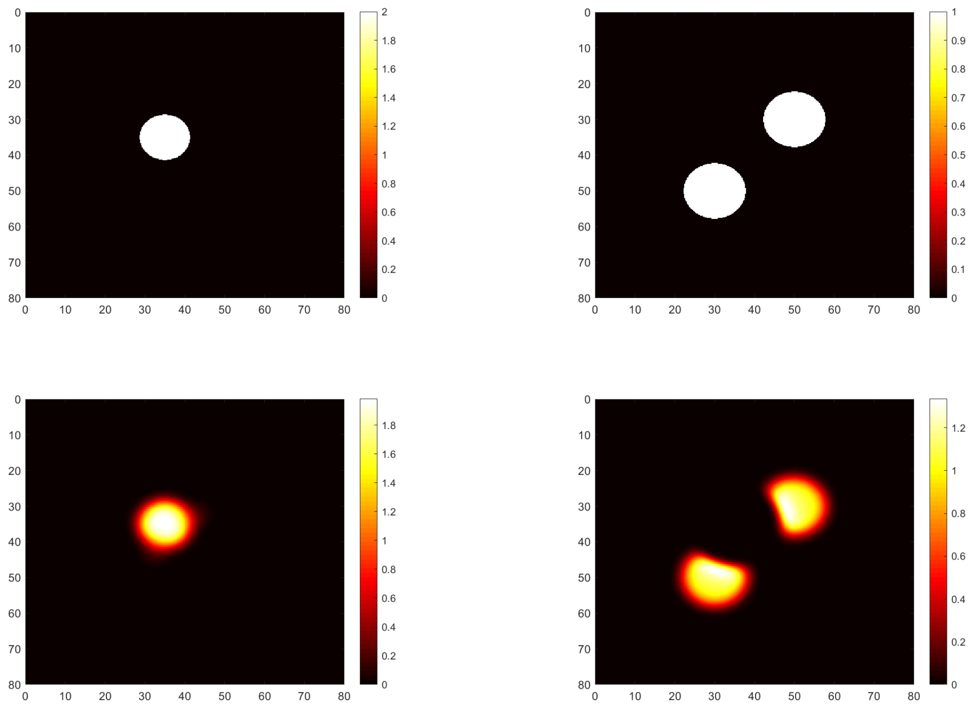


Figura 1.6: Solução numérica de $-D_p \Delta p_0 = \delta_w w_0 - \delta_p p_0$ para w_0 como em (1.9).

A escolha $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 0$ indica que a difusão de feromônio da presa é lenta enquanto que a difusão de feromônio do predador é rápida. Temos o sistema parabólico-eliptico

$$
\begin{cases}
\partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = \alpha w u - u \\
\partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = \beta w (1 - w - u) \\
\partial_t p - D_p \Delta p = \delta_w w - \delta_p p \\
- D_q \Delta q = \delta_u u - \delta_q q \\
\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\
u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{e} \quad p(0) = p_0.
\end{cases}
\tag{1.11}
$$

Faremos a simulação numérica de (1.11) segundo ideia anterior, isto é, desconsiderando a dinâmica populacional. Consideraremos os mesmos parâmetros (1.7) com dados iniciais (u_0, w_0) como na Figura 1.3 e p_0 como na Figura 1.5. Como nesse sistema a difusão de feromônio da presa é lenta e a do predador é rápida, espera-se que a presa irá detectar a presença do predador antes e evadir, uma vez que o dado inicial da população de presas w_0 dado na Figura 1.3 está próximo do feromônio q_0 do predador apresentado na Figura 1.6. Podemos ver essa simulação na Figura 1.7.



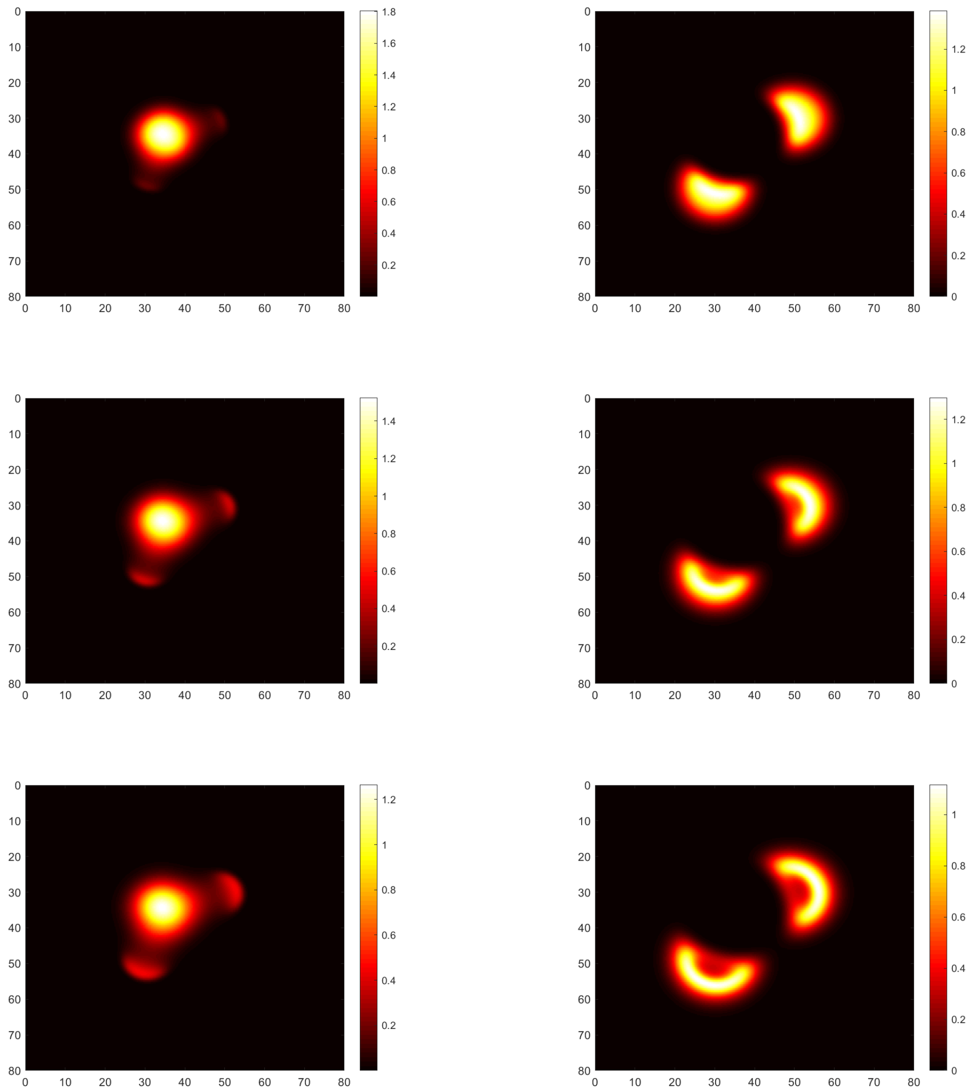


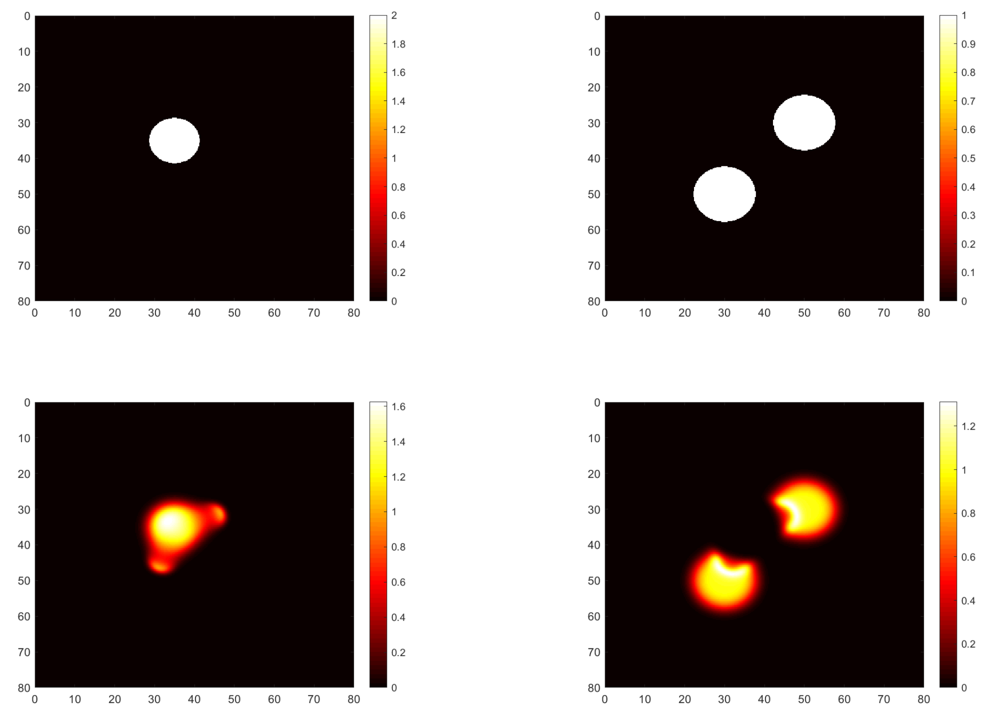
Figura 1.7: Resultado do experimento numérico para (1.11) sem dinâmica populacional para parâmetros como em (1.7) nos instantes de tempo $t = 0$, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5. À esquerda encontra-se a população de presas enquanto que à direita está a população de predadores.

Podemos observar que do instante de tempo $t = 0$ ao instante $t = 0.5$ a população de predadores apresentou um pouco de difusão e um movimento dirigido quase que insignificante em direção à população de presas, que por sua vez evadiu ligeiramente, porém deixando um rastro de feromônio, como na terceira coluna da Figura 1.2, dando sentido ao que segue da dinâmica para os próximos tempos.

A escolha $\tau_1 = 0$ e $\tau_2 = 1$ indica que a difusão de feromônio da presa é rápida enquanto que a difusão de feromônio do predador é lenta. Temos o sistema parabólico-eliptico

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = \alpha w u - u \\ \partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = \beta w (1 - w - u) \\ - D_p \Delta p = \delta_w w - \delta_p p \\ \partial_t q - D_q \Delta q = \delta_u u - \delta_q q \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{e} \quad q(0) = q_0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Faremos a simulação numérica de (1.12) seguindo a mesma ideia anterior, desconsiderando a dinâmica populacional. Consideraremos os mesmos parâmetros (1.7), dados iniciais (u_0, w_0) como na Figura 1.3 e q_0 como na Figura 1.6. Nesse sistema a difusão de feromônio do predador é lenta enquanto que a difusão de feromônio da presa é rápida, donde espera-se que o predador tenha vantagem ao buscar pela presa, já que detecta sua população com certa antecedência, uma vez que o dado inicial da população de predadores u_0 está próximo do feromônio de p_0 (ver Figuras 1.3 e 1.5, respectivamente). Podemos observar os resultados dessa simulação na Figura 1.8.



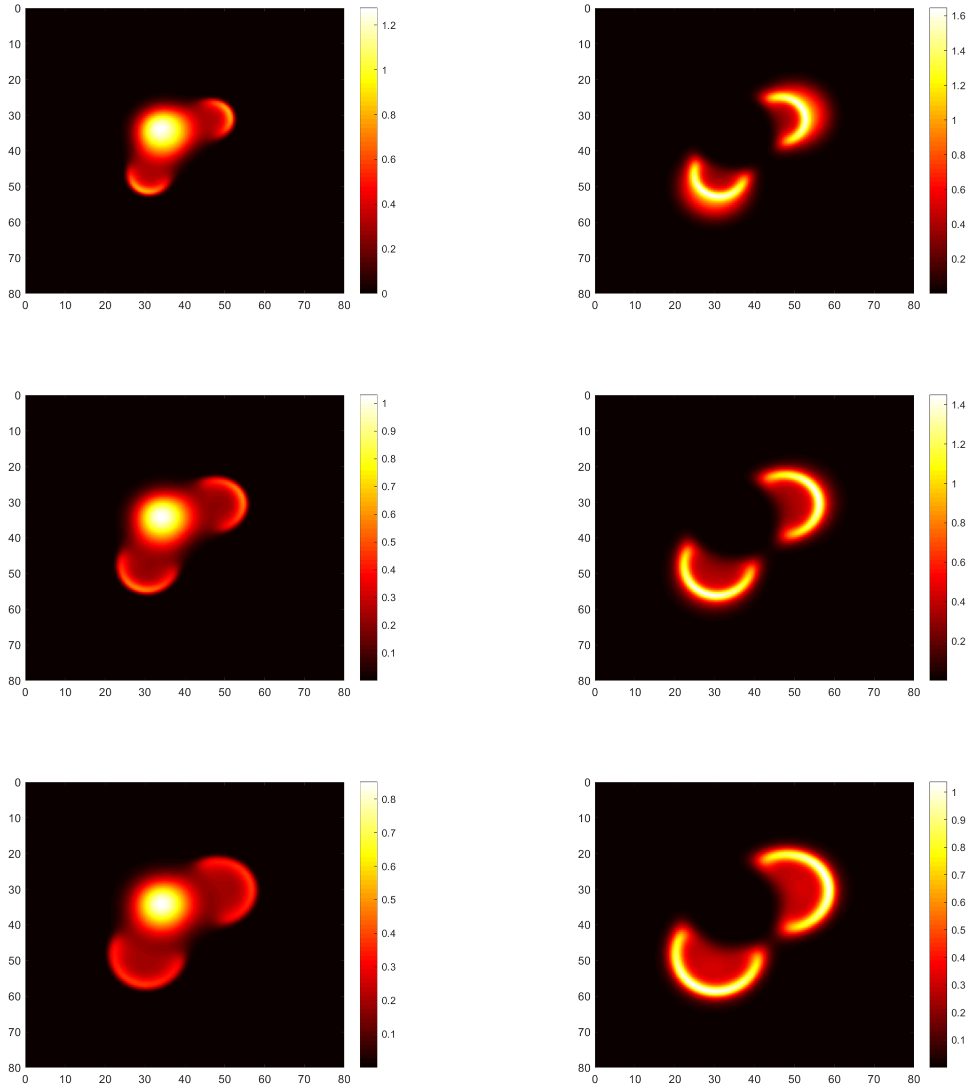


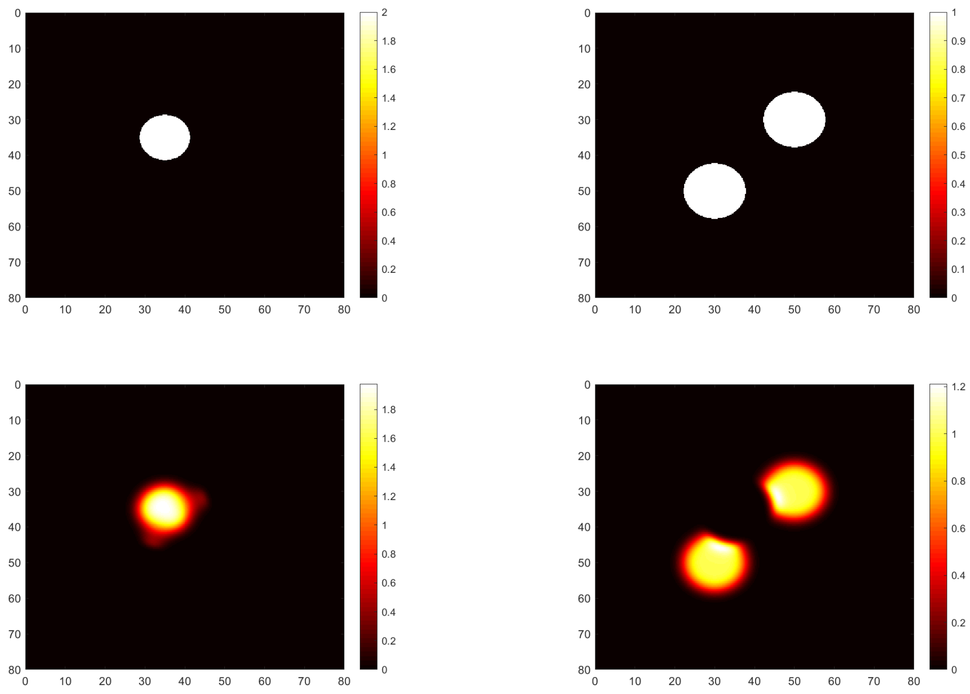
Figura 1.8: Resultado do experimento numérico para (1.12) sem dinâmica populacional para parâmetros como em (1.7) nos instantes de tempo $t = 0,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0,\ 2.5$*. À esquerda encontra-se a população de* u *enquanto que à direita está a população de* w*.*

Podemos observar que do instante de tempo $t = 0$ ao instante $t = 0.5$ a população de presas apresentou um pouco de difusão e um movimento dirigido quase que insignificante em direção oposta à população de predadores, justificado pela aproximação mais rápida de parte dos predadores. O aumento do movimento dirigido de predadores em direção à população de presas obviamente gera um movimento maior de presas conforme a aproximação. A população de predadores conseguiu se aproximar de maneira mais eficiente da população de presas, pelo menos para pequenos instantes de tempo, e vale a pena observar que boa parte da população de predadores não teve êxito no movimento dirigido, pois sua população não teve contato com o feromônio da presa, já que a difusão rápida de seu feromônio deixa um rastro menor que do caso anterior, como pode ser visto na primeira coluna da Figura 1.2. Havendo dinâmica populacional, essa população central de predadores que não teve movimento dirigido decresceria exponencialmente, dificultando sua sobrevivência.

A escolha $\tau_1 = \tau_2 = 1$ indica que as difusões de feromônio tanto da presa quanto do predador são lentas. Temos o sistema totalmente parabólico

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = \alpha w u - u \\ \partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = \beta w(1 - w - u) \\ \partial_t p - D_p \Delta p = \delta_w w - \delta_p p \\ \partial_t q - D_q \Delta q = \delta_u u - \delta_q q \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad p(0) = p_0 \quad \text{e} \quad q(0) = q_0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Faremos a simulação numérica de (1.13) também desconsiderando a dinâmica populacional, com parâmetros como em (1.7) e com dados iniciais (u_0, w_0) como na Figura 1.3 e (p_0, q_0) como nas Figuras 1.5 e 1.6. Podemos ver essa simulação na Figura 1.9.



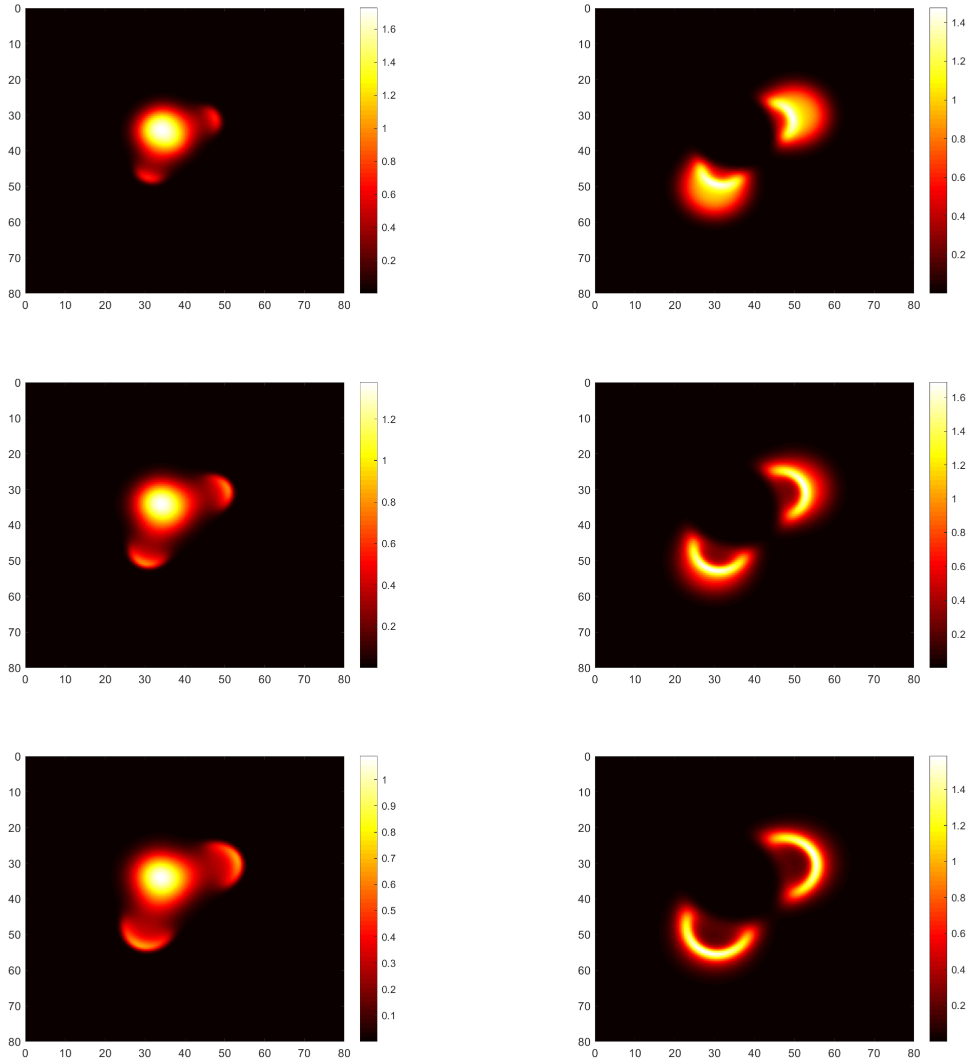


Figura 1.9: Resultado do experimento numérico para (1.12) sem dinâmica populacional para parâmetros como em (1.7) nos instantes de tempo $t = 0,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0,\ 2.5$*. À esquerda encontra-se a população de* u *enquanto que à direita está a população de* w*.*

Comparado com o caso do experimento para (1.12) sem dinâmica populacional, espera-se que o predador tenha maior chance de sobrevivência, uma vez que o feromônio da presa deixa um rastro maior durante a evasão, facilitando sua detecção. Também, o fato da difusão de feromônio do predador ser lenta indica que ao detectar a presa, esse consegue melhor aproximação durante a perseguição antes de ser detectado pela presa.

Como se pôde observar nessas análises locais, o predador tem vantagem na aproximação quando sua difusão de feromônio é lenta, isto é, $\tau_2 = 1$. O predador ter vantagem indica que essa população pode crescer sem controle, e levar a solução do problema a uma explosão em tempo finito/infinito, que é comum em problemas parabólicos. Na literatura é comum encontrar resultados de boa colocação quando a equação do feromônio é elíptica, por exemplo [76, 22, 79]. Porém, caso a equação do feromônio seja parabólica, estudos sutis e rigorosos como [52, 54, 30, 74, 71, 22, 79] mostraram que em uma variedade de problemas com quimiotaxia, na verdade, não importa se a equação do feromônio é elíptica ou parabólica, desde que haja fonte sublogística ao lado direito, que é suficiente para descartar explosão em tempo finito. Essa discussão nos sugere que os problemas em estudo nesse trabalho podem ser separados em dois casos: $\tau_2 = 0$ e $\tau_2 = 1$. O caso $\tau_2 = 0$ temos que ou $\tau_1 = 0$ ou $\tau_1 = 1$ e em qualquer desses casos estamos em um ambiente como acima, dando boa expectativa para os resultados de análise do problema. O caso $\tau_2 = 1$ não segue com tão boas expectativas e sugere uma análise mais delicada, uma vez que em uma variedade de problemas de quimiotaxia onde a equação do feromônio é parabólica e não há fonte sublogística pode ocorrer explosão em tempo finito das soluções, como por exemplo [32, 58, 61, 61, 70, 72]. Resultado comum nesses casos é haver uma faixa limiar para os dados iniciais, onde podemos tomar dados com sua norma em algum espaço de Lebesgue, respeitando tal condição, e o problema ter solução global nesse caso, e explosão em tempo finito caso contrário. Como exemplo, citamos [28, 34, 48, 49, 47].

É baseado nessa última discussão que faremos nos Capítulos 2 e 3 as análises para os casos $\tau_2 = 0$ e $\tau_2 = 1$ separadamente. Antes disso, na próxima seção, faremos uma análise matemática prelimilar do modelo, que consiste na existência local e uma condição para que a solução possa existir em intervalos gerais de tempo. Além disso, será também apresentada uma estimativa fundamental de massa e um roteiro para obter a condição previamente citada.

1.2 Análise preliminar do modelo

Num contexto geral, estimativas de semigrupos para a equação do calor têm sido de grande valor para obter resultados para problemas com quimiotaxia. Um resultado que vamos usar por diversas vezes durante esse trabalho é o Lema 1.3 de [69] apresentado no Apêndice B.

1.2.1 Existência local e a estimativa fundamental de massa

Começamos então a construir a solução clássica para (1.2). Tomemos $u_0, w_0, p_0, q_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e definimos o conjunto convexo $\Upsilon \subset C([0,T] \times \Omega)$ por

$$\Upsilon = \{\phi \in C([0,T] \times \overline{\Omega}), \ \ 0 \leq \phi(t,x) \leq \|w_0\|_\infty + 1\}.$$

Por comodidade, consideremos todas os coeficientes do sistema sendo 1. Vamos obter a solução clássica (u, w, p, q) para um intervalo pequeno de tempo $[0, T]$ via ponto fixo do operador linear $\Phi(\phi) = w$ definido por

$$\begin{cases} \tau_1 \partial_t p - \Delta p = \phi - p, \\ \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) + (1 - \phi) u = 0 \\ \tau_2 \partial_t q - \Delta q = u - q. \\ \partial_t w - \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) - w(1 - \phi - u) = 0 \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad p(0) = p_0 \quad \text{e} \quad q(0) = q_0, \end{cases}$$

que verificaremos que está bem definido pela teoria parabólica/elíptica linear e também que para $T \in (0,1)$ suficientemente pequeno tem-se que Φ mapeia Υ nele mesmo. Consideremos primeiramente o caso em que $\tau_1 = \tau_2 = 1$. Observemos que a teoria linear garante que existe único $p = p[\phi] \in C^{1+\theta,(1+\theta)/2}((0,T) \times \Omega)$ para cada $\theta \in (0,1)$ satisfazendo a primeira equação, ainda com

$$\|\nabla p\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq \|p\|_{C^{1+\theta,(1+\theta)/2}([0,T]\times\overline{\Omega})} \leq C(\|w_0\|_\infty, \|p_0\|_{W^{1,r}(\Omega)}, T).$$

Nessas condições, como $\nabla p \in L^\infty$, tem-se também pela teoria linear de equações parabólicas [39] que existe único $u = u[\phi] \in C^{\theta,\theta/2}([0,T] \times \Omega) \subset C((0,T) \times \Omega)$ solução da segunda equação, agora para algum $\theta \in (0,1)$, donde usamos que $u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^\theta(\Omega)$ [9]. A continuidade no tempo e espaço de u garante que, da mesma forma que para p, temos $q = q[\phi] \in C^{1+\theta,(1+\theta)/2}((0,T) \times \Omega)$ para cada $\theta \in (0,1)$, onde tem-se ainda que

$$\|\nabla q\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega))} \leq \|q\|_{C^{1+\theta,(1+\theta)/2}([0,T]\times\overline{\Omega})} \leq C(\|u_0\|_\infty, \|q_0\|_{W^{1,r}(\Omega)}, T).$$

Por fim, associamos o único $w = w[\phi] \in C^{\theta,(1+\theta)/2}([0,T] \times \Omega) \subset C([0,T] \times \Omega)$, nesse caso para algum $\theta \in (0,1)$, solução da quarta equação, que é tal que

$$\begin{aligned} \|w\|_{C^{\theta,\theta/2}((0,T)\times\Omega)} &\leq C(\|w_0\|_\infty, \|\nabla q\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}, T) \\ &\leq C(\|w_0\|_\infty, \|u_0\|_\infty, \|p_0\|_{W^{1,r}(\Omega)}, \|q_0\|_{W^{1,r}(\Omega)}, T) =: C, \end{aligned}$$

donde lembramos a princípio que $T \in (0,1)$. Logo,

$$\|w(x,t) - w_0(x)\|_\infty \le C\|w_0\| t^{\theta/2} \quad \Rightarrow \quad \|w\|_\infty \le \|w_0\|_\infty + CT^{\theta/2}.$$

Portanto, para $T > 0$ suficientemente pequeno, a saber, $T < (1/2C)^{2/\theta}$, $w[\phi] \in \Upsilon$.

Lema 1. *(Existência local) Suponhamos $u_0, w_0, \tau_1 p_0, \tau_2 q_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ dados iniciais, $\tau_1, \tau_2 \in \{0,1\}$. Existe $T_{\max} > 0$ e único quarteto $(u,w,p,q) \in C^0([0,T_{\max})\times\Omega) \cap C^{1,2}((0,T_{\max})\times\Omega)$ solução clássica de (1.2) em $(0,T_{\max})\times\Omega$. Além disso, caso $T_{\max} < \infty$, então*

$$\lim_{t\to T_{\max}^-} \|u(t)\|_\infty + \|w(t)\|_\infty = +\infty. \tag{1.14}$$

Demonstração: Tomemos $\phi_1, \phi_2 \in \Upsilon$ e definimos $\overline{\phi} = \phi_1 - \phi_2$, $\overline{u} = u_1 - u_2$, $\overline{w} = w_1 - w_2$, $\overline{p} = p_1 - p_2$ e $\overline{q} = q_1 - q_2$. Temos que

$$\begin{cases} \partial_t \overline{p} - \Delta \overline{p} = \overline{\phi} - \overline{p} \\ \partial_t \overline{u} - \Delta \overline{u} + \nabla \cdot (\overline{u} \nabla p_1) + \nabla \cdot (u_2 \nabla \overline{p}) + \overline{u}(\phi_2 - 1) + u_1 \overline{\phi} = 0 \\ \partial_t \overline{q} - \Delta \overline{q} = \overline{u} - \overline{q} \\ \partial_t \overline{w} - \Delta \overline{w} - \nabla \cdot (\overline{w} \nabla q_1) - \nabla \cdot (w_2 \nabla \overline{q}) = (1 - u_2 - \phi_2)\overline{w} - w_1 \overline{\phi} - w_1 \overline{u} \\ \nabla \overline{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla \overline{w} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla \overline{p} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla \overline{q} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ \overline{u}(0) = 0, \quad \overline{w}(0) = 0, \quad \overline{p}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \overline{q}(0) = 0. \end{cases}$$

Em todos os passos que segue, usaremos o Lema 3 que está apresentado no Apêndice B. Temos pela fórmula de Duhamel que

$$\begin{aligned} \overline{p}(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \overline{\phi}(s)\, ds \quad \Rightarrow \quad \|\nabla \overline{p}(s)\|_\infty &\le \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta} \overline{\phi}(s)\|_\infty\, ds \\ &\le \int_0^t \frac{C}{\sqrt{t-s}} \|\overline{\phi}(s)\|_\infty \\ &\le C\sqrt{t} \sup_{0\le s\le t} \|\overline{\phi}(s)\|_\infty, \end{aligned}$$

com $t \in (0,1)$. Da mesma forma, temos também que

$$\overline{u}(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \left[-\nabla \cdot (\overline{u}\nabla p_1 + u_2 \nabla \overline{p}) - \overline{u}(\phi_2 - 1) - u_1 \overline{\phi} \right] ds$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
\|\overline{u}(t)\|_\infty &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot(\overline{u}(s)\nabla p_1(s)+u_2(s)\nabla\overline{p}(s))\|_\infty \, ds \\
&\quad + \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\overline{u}(s)(\phi_2-1)+u_1\overline{\phi}\|_\infty \, ds \\
&\leq C\int_0^t \frac{\|\overline{u}(s)\nabla p_1(s)+u_2(s)\nabla\overline{p}(s)\|_\infty}{\sqrt{t-s}}\, ds \\
&\quad + Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{u}(s)\|_\infty + Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{\phi}(s)\|_\infty \\
&\leq C\sqrt{t}\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{u}(s)\|_\infty + C\sqrt{t}\sup_{0\leq s\leq t}\|\nabla\overline{p}(s)\|_\infty \\
&\quad + Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{u}(s)\|_\infty + Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{\phi}(s)\|_\infty \\
&\leq C\sqrt{t}\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{u}(s)\|_\infty + C\sqrt{t}\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{\phi}(s)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Assim, para $t<\min\{1,1/(2C)^2\}$, temos que

$$\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{u}(s)\|_\infty \leq C\sqrt{t}\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{\phi}(s)\|_\infty.$$

Da mesma forma para $\overline{q}$, temos que

$$\overline{q}(t)=\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\overline{u}(s)\, ds \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}
\|\nabla\overline{q}(s)\|_\infty &\leq \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta}\overline{u}(s)\|_\infty \, ds \\
&\leq \int_0^t \frac{C}{\sqrt{t-s}}\,\|\overline{u(s)}\|_\infty \\
&\leq Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{u}(s)\|_\infty \\
&\leq Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{\phi}(s)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Para $\overline{w}(t)$ temos que

$$\begin{aligned}
\overline{w}(t) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left[-\nabla\cdot(\overline{w}(s)\nabla q_1(s)+w_2(s)\nabla\overline{q}(s))\right. \\
&\qquad \left. +(1-u_2-\phi_2)\overline{w}-w_1\overline{\phi}-w_1\overline{u}\right]\, ds
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\|\overline{w}(t)\|_\infty &= \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\left[-\nabla\cdot(\overline{w}(s)\nabla q_1(s)+w_2(s)\nabla\overline{q}(s))\right]\|\,ds \\
&\quad + \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}[(1-u_2-\phi_2)\overline{w}-w_1\overline{\phi}-w_1\overline{u}]\|\,ds \\
&\leq C\int_0^t \frac{\|\overline{w}(s)\nabla q_1(s)+w_2(s)\nabla\overline{q}(s)\|_\infty}{\sqrt{t-s}}\,ds + Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{\phi}(s)\|_\infty \\
&\quad + Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{u}(s)\|_\infty + Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{w}(s)\|_\infty \\
&\leq C\sqrt{t}\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{w}(s)\|_\infty + Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\overline{\phi}(s)\|_\infty,
\end{aligned}$$

e da mesma forma, para $t < \min\{1, 1/(2C)^2\}$, temos que $\sup\limits_{0\leq s\leq t}\|\overline{w}(s)\|_\infty \leq \sup\limits_{0\leq s\leq t}\|\overline{\phi}(s)\|_\infty$, ou seja,

$$\sup_{0\leq s\leq t}\|w_1(s)-w_2(s)\|_\infty \leq Ct\sup_{0\leq s\leq t}\|\phi_1(s)-\phi_2(s)\|_\infty.$$

Assim, para T suficientemente pequeno, Φ é contração e o teorema do ponto fixo de Banach garante único $w \in \Upsilon$ tal que $\Phi(w) = w$. Regularidade dessa solução é verificada pela clássica teoria parabólica [39], onde temos que, na verdade, $(u, w, p, q) \in C^0([0, T_{\max}) \times \Omega) \cap C^{1,2}([0, T_{\max}) \times \Omega)$. Ainda, por estimativas de semigrupos, vale a pena observar que, para $r > n$,

$$\begin{aligned}
\|q(t)\|_{W^{1,r}(\Omega)} &\leq C\|q_0\|_{W^{1,r}(\Omega)} + C\int_0^t \frac{\|u(s)\|_\infty}{\sqrt{t-s}}\,ds \\
&\leq C(\|q_0\|_{W^{1,r}} + \sqrt{T}\|u(t)\|_\infty).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, $\|p(t)\|_{W^{1,r}} \leq C(\|p_0\|_{W^{1,r}} + \sqrt{T}\|w(t)\|_\infty)$ para todo $t \in (0, T)$, ou seja,

$$(p, q) \in C^0([0, T_{\max}) \times \Omega) \cap C^{1,2}([0, T_{\max}) \times \Omega) \cap L^\infty_{loc}([0, T], W^{1,r}(\Omega)).$$

Caso $\tau_1 = 0$ ou $\tau_2 = 0$ podemos usar estimativas de regularidade elíptica [1] para obter

$$\begin{aligned}
-\Delta p = w - p &\quad \Rightarrow \|\nabla p\|_\infty \leq C\|w\|_\gamma \\
-\Delta q = u - q &\quad \Rightarrow \|\nabla q\|_\infty \leq C\|u\|_\gamma,
\end{aligned}$$

para todo $\gamma > 2$, concluindo a demonstração. ∎

Como (u, w, p, q) representam densidades de população ou produto químico, faz sentido que tanto os dados iniciais $(u_0, w_0, \tau_1 p_0, \tau_2 q_0)$ sejam não-negativos bem como a respectiva solução obtida acima. Com um princípio do máximo [9] obtemos rapidamente que, de fato, (u, w, p, q) são não-negativas. Consideremos ψ suficientemente regular e solução de

$$\begin{aligned} \partial_t\psi - \Delta\psi + \nabla\cdot(B\psi) + b\psi &= 0 \\ \nabla\psi\cdot\mathbf{n} = B\cdot\mathbf{n} &= 0 \\ \psi(0) &= \psi_0 \geq 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

com dados $b, B, \nabla\cdot B \in L^\infty$. Vamos concluir que $0 \leq \psi(t,x)$. Multipliquemos (1.15) por $\psi_- = \min\{\psi, 0\}$ e integramos em espaço para obter

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [\psi_-]^2\,dx + \int_\Omega |\nabla[\psi_-]|^2\,dx - \int_\Omega \nabla[\psi_-]\cdot B\psi\,dx + \int_\Omega b[\psi_-]^2\,dx = 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [\psi_-]^2\,dx + \int_\Omega |\nabla[\psi_-]|^2\,dx \leq \int_\Omega \nabla[\psi_-]\cdot B\psi\,dx + \|b\|_\infty\int_\Omega [\psi_-]^2\,dx.$$

Agora, como

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega |\nabla[\psi_-]|\,B\psi\,dx\right| &\leq \|B\|_\infty\int_\Omega [\psi_-]|\nabla[\psi_-]|\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla[\psi_-]|^2\,dx + \frac{\|B\|_\infty^2}{2}\int_\Omega [\psi_-]^2\,dx, \end{aligned}$$

donde substituindo, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega [\psi_-]^2\,dx \leq C\int_\Omega [\psi_-]^2\,dx.$$

Usando o lema de Gronwall e que $\psi \geq 0$, obtemos o resultado. Finalizamos esse capítulo com uma estimativa fundamental de massa:

Lema 2. *(Estimativa de massa) Seja (u, w, p, q) solução clássica de (1.2) para dados iniciais não-negativos $(u_0, w_0, \tau_1 p_0, \tau_2 q_0)$ e constantes α e β positivas. Existe uma constante $\mathcal{M}$ dependendo das normas em $L^1(\Omega)$ de u_0 e w_0 e de α, β e $|\Omega|$ tal que para todo $t > 0$ temos*

$$\int_\Omega u(t) + w(t)\,dx \leq \mathcal{M}.$$

Demonstração: Integrando no espaço e somando as duas primeiras equações em (1.2), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w(t) + \frac{\beta}{\alpha}\,u(t)\,dx \leq \beta\int_\Omega w(t)\,dx - \beta\int_\Omega w^2(t)\,dx - \frac{\beta}{\alpha}\int_\Omega w(t)\,dx.$$

Notemos que $\beta(x-x^2) \leq \beta(1-2x_0)x + x_0 - x_0^2$, donde escolhemos x_0 para ser tal que $\beta(1-2x_0) = -1$, isto é, $x_0 = \frac{\beta+1}{2\beta}$. Portanto

$$\beta(x-x^2) \leq \frac{(\beta+1)^2+1}{4\beta} - x \qquad \Rightarrow \qquad \beta(w(t)-w^2(t)) \leq \frac{(\beta+1)^2+1}{4\beta} - w(t),$$

donde

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w(t) + \frac{\beta}{\alpha}\, u(t)\, dx \leq \frac{(\beta+1)^2+1}{4\beta}\, |\Omega| - \int_\Omega w(t) + \frac{\beta}{\alpha}\, u(t)\, dx.$$

Para $\xi(t) = \int_\Omega w(t) + \frac{\beta}{\alpha}\, u(t)\, dx$, que

$$\xi'(t) \leq C - \xi(t) \qquad \Rightarrow \qquad \xi(t) \leq e^{-t}\xi(0) + C,$$

com C dependendo dos coeficientes do sistema. ∎

1.2.2 Introdução do método de De Giorgi

Nos capítulos que seguem, em vista de (1.14), o principal objetivo será obter estimativas L^∞ em $[0,T]$ para as soluções u e w, podendo assim estender o resultado do Lema 1, de existência local, para intervalos gerais. Apresentamos então o caminho a seguir para obter tais estimativas L^∞. Para o desenvolvimento formal abaixo, seja v uma solução não-negativa suficientemente regular do problema

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \nabla \cdot (v\nabla\Psi) = f \quad \text{em } [0,T]\times\Omega \\ v(0,x) = v_0(x) \\ \nabla v \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla\Psi\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.16}$$

com Ψ também suficientemente regular para que se justifiquem os cálculos abaixo, f é conhecida e $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ apontando para fora. Aplicaremos o método de De Giorgi [20] no problema (1.16), que consiste em um método de energia que vai gerar a norma L^∞ de v para $t>0$. A saber, o método vai gerar uma constante $C>0$ de modo que

$$\|v(t)\|_\infty \leq C\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right), \qquad t>0,$$

onde essa constante C requer algum cuidado. Após tal desenvolvimento, escolhemos Ψ e f dessa equação de maneira apropriada de modo que obteremos as equações de u e w. Tal raciocínio mostrará que para dar seguimento às ideias existe a necessidade de que estimativas para as normas L^p das soluções u e w devem ser obtidas, onde $p>1$.

Denotaremos por $\Lambda_\lambda = \{x \in \Omega,\ v > \lambda\}$ e definimos $v_\lambda = (v - \lambda)\ \mathbf{1}_{\Lambda_\lambda}$. Multiplicando (1.16) por v_λ, integrando no espaço, e usando a condição de fronteira, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v_\lambda^2\, dx + 2\int_\Omega |\nabla v_\lambda|^2\, dx \le 2\int_\Omega v\nabla\Psi\cdot\nabla v_\lambda\, dx + 2\int_\Omega f_+ v_\lambda\, dx.$$

Para a primeira parcela do lado direito, usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\nabla\Psi\cdot\nabla v_\lambda\, dx &= \int_\Omega v\nabla\Psi\cdot\nabla v_\lambda\ \mathbf{1}_{\Lambda_\lambda}\, dx\\ &\le \frac{1}{2}\int_\Omega |v\nabla\Psi|^2\ \mathbf{1}_{\Lambda_\lambda}\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_\lambda|^2\, dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v_\lambda^2\, dx + \int_\Omega |\nabla v_\lambda|^2\, dx \le \int_\Omega |v\nabla\Psi|^2\ \mathbf{1}_{\Lambda_\lambda}\, dx + 2\int_\Omega f_+ v_\lambda\, dx. \tag{1.17}$$

Consideremos $0 < t_* < T < \infty$ e seja $M > 0$, a ser escolhido mais tarde. Associamos

$$\lambda_k = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) M, \quad t_k = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) t_*$$

para $k = 0, 1, 2, ...$ e definimos o funcional de energia

$$V_k := \sup_{t\in[t_k,T]} \int_\Omega v_k^2\, dx + \int_{t_k}^T \int_\Omega |\nabla v_k|^2\, dx\, dt, \tag{1.18}$$

onde $v_k = v_{\lambda_k}$. Notemos que $t_0 = 0$ e, portanto, para que a definição acima faça sentido, devemos considerar pelo menos a norma L^2 do dado inicial v_0 para essa escolha da sequência t_k. Assim, para $\lambda = \lambda_k$ em (1.17), integrando em $[s, t]$ para $t_{k-1} \le s \le t_k \le t \le T$, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_k^2(t)\, dx + \int_s^t \int_\Omega |\nabla v_k|^2\, dx\, ds &\le \int_\Omega v_k^2(s)\, dx + \int_s^t \int_\Omega |v\nabla\Psi|^2\ \mathbf{1}_{\Lambda_k}\, dx\, dt\\ &\quad +2\int_s^t \int_\Omega f_+ v_k\, dx\, ds.\end{aligned}$$

Dessa desigualdade segue facilmente que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[t_k,T]} \int_\Omega v_k^2(t)\, dx \le \int_\Omega v_k^2(s)\, dx &+ \int_{t_{k-1}}^T \int_\Omega |v\nabla\Psi|^2\ \mathbf{1}_{\Lambda_k}\, dx\, dt\\ &+ 2\int_{t_{k-1}}^T \int_\Omega f_+ v_k\, dx\, ds\end{aligned} \tag{1.19}$$

e

$$\int_{t_k}^{T}\int_\Omega |\nabla v_k|^2\,dx\,dt \le \int_\Omega v_k^2(s)\,dx + \int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega |v\nabla\Psi|^2\,\mathbf{1}_{\Lambda_k}\,dx\,dt \\ + 2\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega f_+ v_k\,dx\,ds. \tag{1.20}$$

Somando (1.19) e (1.20), temos

$$\frac{V_k}{2} \le \int_\Omega v_k^2(s)\,dx + \int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega |v\nabla\Psi|^2\,\mathbf{1}_{\Lambda_k}\,dx\,dt + 2\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega f_+ v_k\,dx\,dt.$$

Integrando com respeito a s no intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ e observando que $t_k - t_{k-1} = t_*/2^k$ e que apenas o primeiro termo do lado direito da desigualdade depende de s, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{t_*}{2^k}\frac{V_k}{2} &\le \int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_\Omega v_k^2(s)\,dx\,ds + \frac{t_*}{2^k}\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega |v\nabla\Psi|^2\,\mathbf{1}_{\Lambda_k}\,dx\,dt \\ &\quad + \frac{t_*}{2^{k-1}}\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega f_+ v_k\,dx\,dt \\ &\le \int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega v_k^2(s)\,dx\,ds + \frac{t_*}{2^k}\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega |v\nabla\Psi|^2\,\mathbf{1}_{\Lambda_k}\,dx\,dt \\ &\quad + \frac{t_*}{2^{k-1}}\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega f_+ v_k\,dx\,dt, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} V_k &\le \frac{2^{k+1}}{t_*}\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega v_k^2(s)\,dx\,ds + 2\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega |v\nabla\Psi|^2\,\mathbf{1}_{\Lambda_k}\,dx\,dt \\ &\quad + 4\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega f_+ v_k\,dx\,dt \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

A seguir faremos uma série de estimativas para I_1, I_2 e I_3 implicitamente definidas acima. Para isso faremos uso da desigualdade de interpolação de Gagliardo-Nirenberg

$$\|v\|_p^p \le C\|v\|_{H^1}^{\alpha p}\|v\|_2^{(1-\alpha)p} \quad \text{com} \quad 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\alpha p + \frac{1-\alpha}{2}\,p. \tag{1.21}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$ e cada $\alpha \in [0,1]$ (ver [9, 56]), e obter uma estimativa chave para $\mathbf{1}_{\Lambda_k}$. Ora, escolhendo o parâmetro α de maneira que $\alpha p = 2$, temos que $p = \frac{2(n+2)}{n}$ e

$$\|v\|_p^p \leq C\|v\|_{H^1}^2 \|v\|_2^{p-2}. \tag{1.22}$$

Notamos agora que $v_k > 0$ indica $v > \lambda_k$, logo $v - \lambda_{k-1} > \lambda_k - \lambda_{k-1} = \frac{M}{2^k}$. Também, $v - \lambda_k < v - \lambda_{k-1}$, aí

$$\begin{aligned} v_{k-1} &= (v - \lambda_{k-1})\, \mathbf{1}_{\Lambda_{k-1}} \\ &\geq (v - \lambda_k)\, \mathbf{1}_{\Lambda_{k-1}} \\ &\geq \frac{M}{2^k}\, \mathbf{1}_{\Lambda_{k-1}}, \end{aligned}$$

logo

$$\frac{2^k}{M}\, v_{k-1} \geq \mathbf{1}_{\Lambda_{k-1}} \geq \mathbf{1}_{\Lambda_k},$$

ou seja,

$$\mathbf{1}_{\Lambda_k} \leq \left(\frac{2^k}{M}\, v_{k-1}\right)^a, \qquad \forall a \geq 0. \tag{1.23}$$

Combinando a desigualdade de interpolação e esse último resultado conseguiremos estabelecer estimativas fundamentais para I_1, I_2 e I_3.

- Estimativa para I_1

Primeiramente, notemos que para $a \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2^{k+1}}{t_*} \int_{t_{k-1}}^T \int_\Omega v_k^2\, \mathbf{1}_{\Lambda_k}\, dx\, ds \\ &\leq \frac{2^{k+1}}{t_*} \int_{t_{k-1}}^T \int_\Omega v_k^2 \left(\frac{2^k}{M}\, v_{k-1}\right)^a dx\, ds \\ &\leq \frac{2^{k+1}}{t_*} \int_{t_{k-1}}^T \int_\Omega v_k^2\, \frac{2^{ka}}{M^a}\, v_{k-1}^a\, dx\, ds \\ &= \frac{2^{k+1}}{t_*} \frac{2^{ka}}{M^a} \int_{t_{k-1}}^T \int_\Omega v_{k-1}^{2+a}\, dx\, ds. \end{aligned}$$

Escolhemos a em (1.23) de modo que $2 + a = p = \frac{2(n+2)}{n}$, isto é, $a = \frac{4}{n}$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq 2\,\frac{2^{\frac{4+n}{n}k}}{M^{\frac{4}{n}}t_*}\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega v_{k-1}^{2\frac{n+2}{n}}\,dx\,ds\\
&\leq 2C(\Omega,n)\,\frac{2^{\frac{4+n}{n}k}}{M^{\frac{4}{n}}t_*}\int_{t_{k-1}}^{T}(\|v_{k-1}\|_2^2+\|\nabla v_{k-1}\|_2^2)\,\|v_{k-1}\|_2^{2\frac{n+2}{n}-2}\,ds\\
&\leq 2C(\Omega,n)\,\frac{2^{\frac{4+n}{n}k}}{M^{\frac{4}{n}}t_*}\left(\sup_{t\in[t_{k-1},T]}\|v_{k-1}\|_2^{2\frac{n+2}{n}-2}\right)\int_{t_{k-1}}^{T}(\|v_{k-1}\|_2^2+\|\nabla v_{k-1}\|_2^2)\,ds\\
&\leq 2C(\Omega,n)\,\frac{2^{\frac{4+n}{n}k}}{M^{\frac{4}{n}}t_*}\left(\sup_{t\in[t_{k-1},T]}\|v_{k-1}\|_2^{2}\right)^{\frac{n+2}{n}-1}\int_{t_{k-1}}^{T}(\|v_{k-1}\|_2^2+\|\nabla v_{k-1}\|_2^2)\,ds\\
&\leq 2C(\Omega,n)\,\frac{2^{\frac{4+n}{n}k}}{M^{\frac{4}{n}}t_*}v_{k-1}^{\frac{n+2}{n}-1}\int_{t_{k-1}}^{T}(\|v_{k-1}\|_2^2+\|\nabla v_{k-1}\|_2^2)\,ds.
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
\int_{t_{k-1}}^{T}(\|v_{k-1}\|_2^2+\|\nabla v_{k-1}\|_2^2)\,ds\leq(T+1)V_{k-1},
$$

donde

$$
I_1\leq C(1+T)\,\frac{2^{\frac{4+n}{n}k}}{M^{\frac{4}{n}}t_*}\,V_{k-1}^{\frac{n+2}{n}}. \tag{1.24}
$$

- Estimativa para I_2

Procederemos de forma semelhante para I_3. Temos que

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 2\int_{t_{k-1}}^{T}\int_\Omega |v\nabla\Psi|^2\,\mathbf{1}_{\Lambda_k}\,dx\,dt\\
&\leq 2\int_{t_{k-1}}^{T}\left[\int_\Omega |v\nabla\Psi|^{2q'}\,dx\right]^{\frac{1}{q'}}\left[\int_\Omega \mathbf{1}_{\Lambda_k}^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}}\,dt\\
&\leq 2\int_{t_{k-1}}^{T}\|v\nabla\Psi\|_{2q'}^2\cdot\left[\int_\Omega \mathbf{1}_{\Lambda_k}\,dx\right]^{\frac{1}{q}}\,dt\\
&\leq 2\left(\sup_{t\geq 0}\|v\nabla\Psi\|_{2q'}^2\right)\int_{t_{k-1}}^{T}\left[\int_\Omega \mathbf{1}_{\Lambda_k}\,dx\right]^{\frac{1}{q}}\,dt.
\end{aligned}
$$

Escolhemos agora $a = p$ em (1.23) para obter

$$\begin{aligned}\int_{t_{k-1}}^{T}\left[\int_\Omega \mathbf{1}_{\Lambda_k}\,dx\right]^{\frac{1}{q}} dt \quad &\leq \quad \frac{2^{\frac{pk}{q}}}{M^{\frac{p}{q}}}\int_{t_{k-1}}^{T}\left[\int_\Omega v_{k-1}^{p}\,dx\right]^{\frac{1}{q}} dt\\ &\overset{(1.22)}{\leq} \quad C\,\frac{2^{\frac{pk}{q}}}{M^{\frac{p}{q}}}\int_{t_{k-1}}^{T} \|v_{k-1}\|_{H^1}^{\frac{p}{q}\alpha}\,\|v_{k-1}\|_2^{(1-\alpha)\frac{p}{q}}\,dt,\end{aligned}$$

onde pedimos $q > 1$. Assim, obtemos

$$I_2 \leq 2C\frac{2^{\frac{pk}{q}}}{M^{\frac{p}{q}}}\left(\sup_{t\geq 0}\|v\nabla\Psi\|_{2q'}^2\right)\int_{t_{k-1}}^{T}\|v_{k-1}\|_{H^1}^{\frac{p}{q}\alpha}\,\|v_{k-1}\|_2^{(1-\alpha)\frac{p}{q}}\,dt,$$

onde usamos (1.21) ainda valendo a relação

$$1 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\alpha p + \frac{1-\alpha}{2}\,p. \tag{1.25}$$

Vamos escolher $\alpha \in (0,1)$ que satisfaça $\frac{\alpha p}{q} = 2$. Assim, dividindo (1.25) por q, obtemos

$$\frac{1}{q} = \frac{p}{2q} - \frac{2}{n} \quad \Rightarrow \quad p = 2\left(\frac{n+2q}{n}\right).$$

Ainda,

$$\alpha = \frac{2q}{p} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{qn}{n+2q}$$

e por fim,

$$0<\alpha<1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 2 \leq \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad 0 < 2q < 2\left(\frac{n+2q}{n}\right),$$

donde q é qualquer satisfazendo $1 < q < \frac{n}{n-2}$. Assim,

$$\begin{aligned}I_2 \quad &\leq \quad C\frac{2^{\frac{pk}{q}}}{M^{\frac{p}{q}}}\left(\sup_{t\geq 0}\|v\nabla\Psi\|_{2q'}^2\right)\int_{t_{k-1}}^{T}\|v_{k-1}\|_{H^1}^{2}\,\|v_{k-1}\|_2^{\frac{p}{q}-2}\,dt\\ &\leq \quad C\frac{2^{2\frac{k}{\alpha}}}{M^{\frac{2}{\alpha}}}\left(\sup_{t\geq 0}\|v\nabla\Psi\|_{2q'}^2\right)\int_{t_{k-1}}^{T}\|v_{k-1}\|_{H^1}^{2}\,\|v_{k-1}\|_2^{\frac{2}{\alpha}-2}\,dt\\ &\leq \quad C\frac{2^{2\frac{k}{\alpha}}}{M^{\frac{2}{\alpha}}}\left(\sup_{t\geq 0}\|v\nabla\Psi\|_{2q'}^2\right)\,(1+T)\,V_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}},\end{aligned}$$

onde nesse último passo procedemos analogamente à primeira estimativa. Portanto

$$I_2 \leq C(1+T)\,\frac{2^{2\frac{k}{\alpha}}}{M^{\frac{2}{\alpha}}}\left(\sup_{t\geq 0}\|v\nabla p\|_{2q'}^2\right)\,V_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{1.26}$$

- Estimativa para I_3

Essa estimativa é obtida semelhantemente a obtida para I_2. Usando que $v_k \leq v\mathbf{1}_{\Lambda_k}$, temos

$$
\begin{aligned}
I_3 &= 4\int_{t_{k-1}}^{T}\int_{\Omega} f_+ v_k \, dx \, dt \\
&\leq 4\int_{t_{k-1}}^{T}\int_{\Omega} f_+ v \; \mathbf{1}_{\Lambda_k} \, dx \, ds \\
&\leq 4\int_{t_{k-1}}^{T} \left(\int_{\Omega} [f_+ v]^{q'} \, dx\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\Omega} [\mathbf{1}_{\Lambda_k}]^{q} \, dx\right)^{\frac{1}{q'}} \, ds \\
&\leq 4\int_{t_{k-1}}^{T} \|f_+ v\|_{q'} \left(\int_{\Omega} \mathbf{1}_{\Lambda_k} \, dx\right)^{\frac{1}{q'}} \, ds \\
&\leq 4\left(\sup_{t\geq 0} \|f_+ v\|_{q'}\right) \int_{t_{k-1}}^{T} \left[\int_{\Omega} \left(\frac{2^k}{M} \, v_{k-1}\right)^{a}\right]^{\frac{1}{q}} \, ds \\
&\leq 4\left(\sup_{t\geq 0} \|f_+ v\|_{q'}\right) \frac{2^{\frac{ka}{q}}}{M^{\frac{a}{q}}} \int_{t_{k-1}}^{T} \left[\int_{\Omega} v_{k-1} \, dx\right]^{\frac{1}{q}} \, ds \\
&\overset{a=p}{\leq} 4\left(\sup_{t\geq 0} \|f_+ v\|_{q'}\right) \frac{2^{\frac{kp}{q}}}{M^{\frac{p}{q}}} \int_{t_{k-1}}^{T} \|v_{k-1}\|_{p}^{\frac{p}{q}} \, ds \\
&\leq C\left(\sup_{t\geq 0} \|f_+ v\|_{q'}\right) \frac{2^{\frac{kp}{q}}}{M^{\frac{p}{q}}} \int_{t_{k-1}}^{T} \|v_{k-1}\|_{H^1}^{\frac{p\alpha}{q}} \|v_{k-1}\|_{2}^{(1-\alpha)\frac{p}{q}} \, ds \\
&\leq C\left(\sup_{t\geq 0} \|f_+ v\|_{q'}\right) \frac{2^{\frac{2k}{\alpha}}}{M^{\frac{2}{\alpha}}} \, (1+T) \, V_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}},
\end{aligned}
$$

onde α, p e q são os mesmos determinados na estimativa para I_2. Assim,

$$
I_3 \leq C(1+T)\left(\sup_{t\geq 0} \|f_+ v\|_{q'}\right) \frac{2^{\frac{2k}{\alpha}}}{M^{\frac{2}{\alpha}}} \, V_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{1.27}
$$

Combinando (1.24), (1.26) e (1.27), obtemos

$$
\begin{aligned}
&V_k \leq C(1+T)\times \\
&\qquad \left[\frac{2^{\frac{4+n}{n}k}}{M^{\frac{4}{n}} t_*} \, V_{k-1}^{\frac{n+2}{n}} + \frac{2^{2\frac{k}{\alpha}}}{M^{\frac{2}{\alpha}}} \left(\sup_{t\geq 0} \|v\nabla\Psi\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0} \|f_+ v\|_{q'}\right) \, V_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}\right].
\end{aligned} \tag{1.28}
$$

Nas análises feitas nos próximos capítulos restringiremos o raciocínio para o caso $n = 2$, onde temos $\alpha = \frac{q}{q+1}$ e a vantagem de tomarmos q em $(1, +\infty)$, uma vez que $1 < q < \frac{n}{n-2} = \infty$.

Numa segunda etapa vamos assumir o que será a hipótese fundamental para o método, que é a existência de uma constante $\mathcal{C} > 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} \|v\nabla\Psi\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0} \|f_+ v\|_{q'} \leq \mathcal{C}. \tag{1.29}$$

Dessa forma, (1.28) torna-se

$$V_k \leq C \left[\frac{2^{3k}}{M^2 t_*} V_{k-1}^2 + \frac{2^{\frac{2(q+1)}{q}k}}{M^{\frac{2(q+1)}{q}}} V_{k-1}^{\frac{q+1}{q}} \right], \tag{1.30}$$

com a constante C dependendo de $\mathcal{C}$ e T, porém não dependendo de t_* e k. Vamos provar que existe $a \in (0,1)$ de modo que $V_k \leq a^k V_0$, para todo k. De fato, por construção, $V_k \leq a^k V_0$ para todo k significa que

$$\begin{aligned} V_k &\leq C \left[\frac{2^{3k}}{M^2 t_*} a^{2k-2} V_0^2 + \frac{2^{\frac{2(q+1)}{q}k}}{M^{\frac{2(q+1)}{q}}} a^{\frac{(k-1)(q+1)}{q}} V_0^{\frac{q+1}{q}} \right] \\ &\leq C \left[\frac{2^{3k}}{M^2 t_*} a^{k-2} V_0 + \frac{2^{\frac{2(q+1)}{q}k}}{M^{\frac{2(q+1)}{q}}} a^{\frac{(k-1)(q+1)}{q}-1} V_0^{\frac{1}{q}} \right] a^k V_0 \\ &= C \left[\frac{(2^3 a)^3}{M^2 t_* a^2} V_0 + \frac{(2^2 a)^{\frac{q+1}{q}k}}{M^{\frac{2(q+1)}{q}} a^{\frac{2(q+1)}{q}}} V_0^{\frac{1}{q}} \right] a^k V_0. \end{aligned}$$

Assim, tomamos a de modo que $2^3 a < 1$, donde

$$V_k \leq C \left[\frac{V_0}{M^2 t_* a^2} + \frac{V_0^{\frac{1}{q}}}{M^{\frac{2(q+1)}{q}} a^{\frac{2(q+1)}{q}}} \right] a^k V_0.$$

Escolhemos agora $M > 0$ de modo que

$$0 < \max \left\{ \frac{C V_0}{t_* a^2}, \left(\frac{C V_0^{\frac{1}{q}}}{a^{\frac{2(q+1)}{q}}} \right)^{\frac{q}{q+1}} \right\} \leq \frac{M^2}{2},$$

e portanto $V_k \leq a^k V_0$. Concluímos então que $\lim\limits_{k\to+\infty} V_k = 0$. Assim, obtemos que

$$V_k \geq \int_{t_*}^T \int_\Omega v^2(t,x) \, \mathbf{1}_{\{v(x,t) \geq M(1-1/2^k)\}} \, dx \, dt \overset{k\to+\infty}{\to} 0,$$

e aplicando o lema de Fatou, deduzimos que

$$\frac{1}{T-t_*} \int_{t_*}^T \int_\Omega v^2(t,x) \, \mathbf{1}_{\{v(x,t)\geq M\}} \, dx \, dt = 0,$$

que implica $0 \leq v(x,t) \leq M$ quase sempre em $(t_*, T) \times \Omega$. Observe ainda que para $t < 1$

$$\begin{aligned} \max\left\{ \left(\frac{CV_0}{t_* a^2}\right)^{1/2}, \left(\frac{CV_0^{\frac{1}{q}}}{a^{\frac{2(q+1)}{q}}}\right)^{\frac{q}{q+1}} \right\} &\leq C \max\left\{ \frac{\sqrt{V_0}}{\sqrt{t_*}}, V_0^{\frac{1}{2(q+1)}} \right\} \\ &\leq C(\sqrt{V_0} + V_0^{\frac{1}{q+1}}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t_*}}\right) =: M. \end{aligned}$$

Em resumo,

$$0 \leq v(t,x) \leq C_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t_*}}\right), \tag{1.31}$$

em $[t_*, T]$, com $C_0 = C(\sqrt{V_0} + V_0^{\frac{1}{2(q+1)}})$, onde C depende da hipótese $\mathcal{C}$ definido em (1.29), e precisamos saber

$$V_0 = \sup_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega |\nabla v(t)|^2 \, dx \, dt. \tag{1.32}$$

Segue nos próximos capítulos a análise matemática completa de cada um dos problemas do sistema (1.2). Em resumo, precisamos saber em que condições temos $\mathcal{C}$ como em (1.29) e estimar V_0 como em (1.32). De maneira sistemática, para $k = 0, 1, 2, ...$, definimos

$$U_k := \sup_{t \in [t_k, T]} \int_\Omega u_k^2 \, dx + \int_{t_k}^T \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx \, dt$$

e

$$W_k := \sup_{t \in [t_k, T]} \int_\Omega w_k^2 \, dx + \int_{t_k}^T \int_\Omega |\nabla w_k|^2 \, dx \, dt,$$

os funcionais de energia associados respectivamente às equações

$$\partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \Psi_1) = f \tag{1.33}$$

$$\partial_t w - \Delta w + \nabla \cdot (w \nabla \Psi_2) = g, \tag{1.34}$$

onde $u_k = u_{\lambda_k}$ e $w_k = w_{\lambda_k}$, e particularizando $f_+ = uw$, $\Psi_1 = \nabla p$, $g_+ = w$ e $\Psi_2 = -\nabla q$, sabemos que U_k e W_k são tais que

$$\begin{aligned} U_k \leq C(1+T) \Bigg[& \frac{2^{\frac{4+n}{n}k}}{M^{\frac{4}{n}} t_*} \, U_{k-1}^{\frac{n+2}{n}} \\ & + \frac{2^{2\frac{k}{\alpha}}}{M^{\frac{2}{\alpha}}} \left(\sup_{t \geq 0} \|u \nabla p\|_{2q'}^2 + \sup_{t \geq 0} \{\|u^2 w\|_{q'}\} \right) \, U_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}} \Bigg] \end{aligned}$$

e

$$W_k \leq C(1+T)\left[\frac{2^{\frac{4+n}{n}k}}{M^{\frac{4}{n}}t_*}\, W_{k-1}^{\frac{n+2}{n}}\right.$$
$$\left. +\frac{2^{2\frac{k}{\alpha}}}{M^{\frac{2}{\alpha}}}\left(\sup_{t\geq 0}\|w\nabla q\|_{2q'}^2+\sup_{t\geq 0}\{\|w\|_{2q'}^2\}\right)\, U_{k-1}^{\frac{1}{\alpha}}\right],$$

respectivamente, que associam

$$\mathcal{C}_1=\sup_{t\geq 0}\|u\nabla p\|_{2q'}^2+\sup_{t\geq 0}\|u^2 w\|_{q'} \tag{1.35}$$

e

$$\mathcal{C}_2=\sup_{t\geq 0}\|w\nabla q\|_{2q'}^2+\sup_{t\geq 0}\|w\|_{2q'}^2. \tag{1.36}$$

Em resumo, como em (1.31), temos

$$0\leq u(t,x)+w(t,x)\leq C_0\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \tag{1.37}$$

com

$$C_0=C(\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2)(\sqrt{U_0}+U_0^{\frac{1}{q+1}}+\sqrt{W_0}+W_0^{\frac{1}{q+1}}).$$

Assim, o caminho a seguir é obter estimativas que nos permitam controlar $\mathcal{C}_1$ como em (1.35), $\mathcal{C}_2$ como em (1.36), bem como

$$U_0=\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_2^2+\int_0^T\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\,dx\,dt$$

e

$$W_0=\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_2^2+\int_0^T\int_\Omega|\nabla w(t)|^2\,dx\,dt.$$

Nos auxiliarão para estimar $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ os clássicos resultados de regularidade elíptica [1] nos casos em que $\tau_i=0$, $i=1,2$, como também estimativas fundamentais apresentadas no Apêndice B nos casos em que $\tau_i=1$, $i=1,2$. De fato, temos que

$$-\Delta\Psi=u-\Psi \quad\Rightarrow\quad \|\nabla\Psi(t)\|_\infty\leq C(\Omega,p)\|u(t)\|_p$$

para cada $p>2$, donde

$$\|u\nabla\Psi\|_{2q'}\leq\|\nabla\Psi\|_\infty\|u\|_{2q'}\leq C\|u\|_p^2,$$

para $p>2$. Da mesma forma, para o caso $\tau_i=1$ podemos usar o fato de que soluções de

$$\partial_t\phi-\Delta\phi=u,$$

via o Lema 4, apresentado no Apêndice B, são tais que, para $s > 2$,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla \phi(t)\|_s \leq \|\nabla \phi(0)\|_s + C \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{\frac{s\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2} \frac{s-2}{\theta s - 2}},$$

sempre que $\theta s/2 \geq 1$ e $\theta s/(2-\theta) > 2$. Dessa estimativa segue desenvolvimento similar para $\|u \nabla \Psi\|_{2q'}$, usando a desigualdade de Hölder, deixando claro que tanto $\mathcal{C}_1$ quanto $\mathcal{C}_2$ estão limitadas desde que haja limitação para estimativas de u e w em espaços L^{γ}, $\gamma > 2$.

Capítulo 2

Análise do sistema (1.2) para $\tau_2 = 0$

Nesse capítulo faremos a análise dos sistemas parabólico-elíptico com difusão rápida de feromônio do predador (1.10) e (1.11), apresentados no capítulo anterior quando $\tau_2 = 0$. Numa primeira etapa faremos uma série de estimativas *a priori* em L^γ para as soluções u e w e então completaremos o método de De Giorgi [20] para obter estimativas L^∞ de u e w, como iniciado no final do capítulo anterior, onde obtemos a estimativa (1.37). Vale lembrar que tais estimativas são necessárias para estendermos o resultado do Lema 1, de existência local, para intervalos de tempo gerais $[0, T]$. Obtemos após as soluções fracas para dados iniciais menos regulares que os exigidos no Lema 1 como limite dessas soluções clássicas. Por comodidade, e sem afetar nenhum desenvolvimento geral do texto, iremos considerar todas as constantes dos sistemas (1.10) e (1.11) como sendo 1, e vamos fazer análise em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado e suave do seguinte problema:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = wu - u \\ \partial_t w - \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = w - w^2 - wu \\ \tau_1 \partial_t p - \Delta p = w - p \\ -\Delta q = u - q \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{e} \quad \tau_1 p(0) = \tau_1 p_0 \\ \displaystyle\int_\Omega u(t) + w(t)\, dx \leq \mathcal{M}, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde obtivemos no Lema 1 a existência local num intervalo $[0, T]$ e no Lema 2 a constante $\mathcal{M}$ dependendo das normas L^1 dos dados iniciais w_0 e u_0 e Ω e dos coeficientes do sistema, porém independente de t.

Finalizaremos esse capítulo apresentando alguns experimentos numéricos e comentários a respeito do modelo. Lembramos que o modelo (2.1) foi introduzido a fim de modelar a interação predador-presa com difusão, perseguição, evasão e detecção, onde u representa a densidade de predadores, w a densidade de presas, p o odor da presa e q o odor do predador. Os resultados para $\tau_1 = 0$ expostos nas duas primeiras seções desse capítulo estão apresentadas também em [4].

2.1 Integrabilidade

Apresentaremos nessa seção os resultados fundamentais de integrabilidade para o sistema (2.1) primeiramente no caso $\tau_1 = 0$ e após no caso $\tau_1 = 1$. Tais resultados são de extrema importância para a aplicação do método de De Giorgi para estimativas L^∞ das soluções, que foi introduzido no final do primeiro capítulo. Usaremos ao longo desse trabalho a notação $f \in L^{\alpha^+}(\Omega)$ para indicar que $f \in L^p(\Omega)$ para algum $p > \alpha$. Da mesma forma, dizer que $\|f(t)\|_\alpha \leq C(1 + t^{-\xi^+})$ indica que para cada $p > \xi$ existe constante C de modo que $\|f(t)\|_\alpha \leq C(1 + t^{-p})$, como nos enunciados das proposições de integrabilidade dessa seção.

2.1.1 Integrabilidade para $\tau_1 = 0$

Temos o seguinte resultado fundamental de integrabilidade:

Proposição 1. *Seja (u, w, p, q) a solução clássica não-negativa do sistema (2.1) com $\tau_1 = 0$. Então para cada $\gamma \in (1, \infty]$ existe uma constante $C(\gamma, \mathcal{M}) > 0$ independente do tempo para a qual vale a estimativa*

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C(\gamma, \mathcal{M}) \left(1 + \frac{1}{t^{(1/\gamma')^+}}\right). \tag{2.2}$$

Se considerarmos a norma dos dados inicias u_0 em $L^\gamma(\Omega)$ e w_0 em $L^{\gamma^+}(\Omega)$, podemos adicionar à estimativa (2.2) a dependência da integrabilidade dos dados iniciais à constante, e tal estimativa pode ser melhorada para

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C(\mathcal{M}, \|u_0\|_\gamma, \|w_0\|_{\gamma^+}), \quad t > 0. \tag{2.3}$$

Demonstração: Multiplicando a segunda equação de (2.1) por $w^{\alpha-1}$, com $\alpha > 1$, integrando em espaço, e usando integração por partes com as condições de fronteira, temos

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\alpha \, dx + \int_\Omega \nabla w^{\alpha-1}\nabla w \, dx + \int_\Omega w\nabla w^{\alpha-1}\nabla q \, dx \leq \int_\Omega w^\alpha(1 - w - u) \, dx.$$

Agora, sabendo que

$$\int_\Omega \nabla w^{\alpha-1}\nabla w\ dx = (\alpha-1)\int_\Omega w^{\alpha-2}|\nabla w|^2\ dx$$

e

$$\int_\Omega w\nabla w^{\alpha-1}\cdot\nabla q\ dx = \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_\Omega \nabla w^\alpha\cdot\nabla q\ dx,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\alpha\ dx + (\alpha-1)\int_\Omega w^{\alpha-2}|\nabla w|^2\ dx\\ +\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_\Omega \nabla q\cdot\nabla w^\alpha\ dx = \int_\Omega w^\alpha(1-w-u)\ dx.\end{aligned}$$

Multiplicando a quarta equação de (2.1) por w^α e integrando em espaço, temos

$$-\int_\Omega \nabla q\cdot\nabla w^\alpha\ dx \leq \int_\Omega qw^\alpha\ dx.$$

Também, notemos que

$$\int_\Omega |\nabla w^{\alpha/2}|^2\ dx = \int_\Omega |\frac{\alpha}{2}\ w^{\alpha/2-1}\nabla w|^2\ dx = \frac{\alpha^2}{4}\int_\Omega w^{\alpha-2}|\nabla w|^2\ dx,$$

donde

$$\int_\Omega w^{\alpha-2}|\nabla w|^2\ dx = \frac{4}{\alpha^2}\int_\Omega |\nabla w^{\alpha/2}|^2\ dx.$$

Substituindo, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\alpha dx + 4\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_\Omega |\nabla w^{\alpha/2}|^2\ dx &\leq (\alpha-1)\int_\Omega qw^\alpha dx\\ &\quad +\alpha\int_\Omega w^\alpha(1-w-u)\ dx\\ &\leq (\alpha-1)\int_\Omega qw^\alpha dx + \alpha\int_\Omega w^\alpha\ dx.\\ &\leq \alpha\left[\int_\Omega qw^\alpha dx + \int_\Omega w^\alpha\ dx\right].\end{aligned} \quad (2.4)$$

Analisaremos primeiramente os termos do lado direito dessa desigualdade. Para isso, faremos uso da desigualdade de Young: Para $1/p + 1/p' = 1$, $a, b \geq 0$ e $\epsilon > 0$ vale que $ab \leq \frac{1}{\epsilon\beta}a^\beta + \epsilon^{p'/p}\frac{b^{p'}}{p'}$. Assim, para $\epsilon > 0$ a ser escolhido logo mais, temos que $qw^\alpha \leq \epsilon w^{\alpha+1} + \frac{1}{\epsilon^\alpha}\ q^{\alpha+1}$. Ainda, lembramos do Lema de interpolação de Riesz-Thorin (ver [9]), que para $1 < p < q \leq \infty$ e $0 < \theta < 1$ tem-se

$$\|\xi\|_r \leq \|\xi\|_p^{1-\theta}\|\xi\|_q^{\theta} \qquad \text{onde} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}, \tag{2.5}$$

isto é, $\|w\|_\alpha \leq C\|w\|_{\alpha+1}^{\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}} \leq C + \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}$, onde no último passo foi usado novamente a desigualdade de Young. Logo

$$\int_\Omega q w^\alpha dx + \int_\Omega w^\alpha \, dx \leq C + C\epsilon \int_\Omega w^{\alpha+1} \, dx + \int_\Omega q^{\alpha+1} \, dx,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\alpha \, dx + 4\,\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_\Omega |\nabla w^{\alpha/2}|^2 \, dx \leq \alpha\left[C + C\epsilon\int_\Omega w^{\alpha+1}\, dx + \int_\Omega q^{\alpha+1}\, dx\right],$$

onde a constante C não depende de α. Usamos agora a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (ver [9, 56]) para majorar o segundo termo à esquerda, a saber, para qualquer $\gamma \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \xi^{\gamma+1}\, dx &\leq C(\Omega,\gamma)\|\xi\|_1 \|\xi^{\gamma/2}\|_{H^1}^2 \\ &\leq C(\Omega,\gamma)\left(\int_\Omega \xi \, dx\right)\left[\int_\Omega \xi^\gamma \, dx + \int_\Omega |\nabla \xi^{\gamma/2}|^2 \, dx\right]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da mesma forma, temos que $\|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \leq C\|w^{\alpha/2}\|_{H^1}^2 \leq C(\|w\|_\alpha^\alpha + \|\nabla w^{\frac{\alpha}{2}}\|_2^2)$ e portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega w^\alpha dx \;&+\; 4\,\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_\Omega w^{\alpha+1}\, dx \\ &\leq \alpha\left[C + C\epsilon\int_\Omega w^{\alpha+1}\, dx + \int_\Omega w^\alpha \, dx + \int_\Omega q^{\alpha+1}\, dx\right]. \end{aligned}$$

Nesse passo escolhemos $\epsilon > 0$ de modo que $\alpha C\epsilon < 4\frac{\alpha-1}{\alpha}$, aí

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\alpha dx + C\int_\Omega w^{\alpha+1}\, dx \leq \alpha\left[C + \int_\Omega w^\alpha \, dx + \int_\Omega q^{\alpha+1}\, dx\right].$$

Na mesma ideia, temos que $\int_\Omega w^\alpha \, dx \leq C + \epsilon\int_\Omega w^{\alpha+1}\, dx$ e portanto

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\alpha dx + C\int_\Omega w^{\alpha+1}\, dx \leq \alpha\left[C + \int_\Omega q^{\alpha+1}\, dx\right], \tag{2.7}$$

onde C é uma constante que depende de todos os parâmetros do sistema, mas não depende de α. Ainda para essa estimativa, multiplicamos a quarta equação de (2.1) por $q^{\alpha-1}$ e integramos em espaço para obter

$$\int_\Omega |\nabla q^{\frac{\alpha}{2}}|^2 \, dx \leq \int_\Omega u q^{\alpha-1} \, dx \leq C \int_\Omega u^\alpha \, dx + C \int_\Omega q^\alpha \, dx.$$

Assim, como feito anteriormente para w,

$$\begin{aligned} \int_\Omega q^{\alpha+1} \, dx &\leq C \left[\int_\Omega q^\alpha \, dx + \int_\Omega |\nabla q^{\frac{\alpha}{2}}|^2 \, dx \right] \\ &\leq C\epsilon \int_\Omega q^{\alpha+1} \, dx + C|\Omega| + \int_\Omega u^\alpha \, dx. \end{aligned}$$

Aí, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\int_\Omega q^{\alpha+1} \, dx \leq C \left[\int_\Omega u^\alpha \, dx + 1 \right].$$

Assim, (2.7) torna-se

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega w^\alpha dx + C \int_\Omega w^{\alpha+1} \, dx \leq \alpha C \left[1 + \int_\Omega u^\alpha \, dx \right]. \tag{2.8}$$

Uma análise semelhante é feita para u. Para $\gamma > 1$, multiplicamos a primeira equação de (2.1) por $u^{\gamma-1}$ e integramos em espaço para obter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega u^\gamma \, dx + 4\frac{\gamma-1}{\gamma} \int_\Omega |\nabla u^{\frac{\gamma}{2}}|^2 \, dx &\leq \int_\Omega u^{\gamma-1} \nabla u \nabla p \, dx + \int_\Omega u^\gamma w \, dx \\ &\leq \frac{\gamma-1}{\gamma} \int_\Omega \nabla u^\gamma \cdot \nabla p \, dx \\ &\quad + \epsilon \int_\Omega u^{\gamma+1} \, dx + \int_\Omega w^\gamma \, dx. \end{aligned}$$

Ainda, usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev no segundo termo à esqueda, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega u^\gamma \, dx + C \int_\Omega u^{\gamma+1} \, dx &\leq \frac{\gamma-1}{\gamma} \int_\Omega \nabla u^\gamma \cdot \nabla p \, dx + \epsilon \int_\Omega u^{\gamma+1} \, dx \\ &\quad + \int_\Omega w^\gamma \, dx + C \int_\Omega u^\gamma \, dx. \end{aligned}$$

Multiplicando a terceira linha de (2.1) por u^γ e integrando em espaço, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u^\gamma \cdot \nabla p \, dx \leq \int_\Omega u^\gamma w \, dx \leq \epsilon \int_\Omega u^{\gamma+1} + C \int_\Omega w^\gamma \, dx. \tag{2.9}$$

Substituindo e tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\,dx + C\int_\Omega u^{\gamma+1}\,dx \le C\int_\Omega w^\gamma\,dx + C\int_\Omega u^\gamma\,dx.$$

Ainda,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\,dx + C\int_\Omega u^\gamma\,dx \le C|\Omega| + \int_\Omega w^{\gamma+1}\,dx + C|\Omega| + \epsilon\int_\Omega u^{\gamma+1}\,dx,$$

logo

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\,dx + C\int_\Omega u^{\gamma+1}\,dx \le \gamma C\left[\int_\Omega w^{\gamma+1}\,dx + 1\right], \tag{2.10}$$

com a constante C dependendo dos parâmetros do sistema, porém independente de γ.

Somando (2.8) e (2.10), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma + w^\alpha\,dx + C\int_\Omega u^{\gamma+1} + w^{\alpha+1}\,dx \le C(\gamma+\alpha)\left[1 + \int_\Omega u^\alpha\,dx + \int_\Omega w^{\gamma+1}\,dx\right],$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|u\|_\gamma^\gamma + \|w\|_\alpha^\alpha) &+ C_1(\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1})\\ &\le C_2(\gamma+\alpha)\left[1 + \|u\|_\alpha^\alpha + \|w\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}\right],\end{aligned} \tag{2.11}$$

onde as constantes C_1 e C_2 dependem de $\mathcal{M}$, porém são independentes de γ e α.

A fim de usar a interpolação para controlar alguns termos das estimativas obtidas acima será necessário impor que $\gamma < \alpha < \gamma + 1$. De fato, por Riesz-Thorin, $\|u\|_\alpha \le \|u\|_1^{1-\theta_1}\|u\|_{\gamma+1}^{\theta_1}$ implica que

$$\theta_1 = \frac{(\alpha-1)(\gamma+1)}{\alpha\gamma} \in (0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \gamma + 1$$

bem como $\|w\|_{\gamma+1} \le \|w\|_1^{1-\theta_2}\|w\|_{\alpha+1}^{\theta_2}$ implica que

$$\theta_2 = \frac{\gamma(\alpha+1)}{\alpha(\gamma+1)} \in (0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma < \alpha,$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|u\|_\gamma^\gamma + \|w\|_\alpha^\alpha) &+ C(\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1})\\ &\le C(\gamma+\alpha)\left[1 + \|u\|_{\gamma+1}^{\theta_2(\gamma+1)} + \|w\|_{\alpha+1}^{\theta_1\gamma}\right].\end{aligned} \tag{2.12}$$

Estimaremos o último termo à esquerda da desigualdade acima e para isso note que para qualquer $\epsilon > 0$ e $\beta \geq 1$ podemos encontrar $C(\epsilon, \beta) > 0$ para o qual $s \leq \epsilon s^{\beta} + C(\epsilon, \beta)$ para todo $s \geq 0$. Assim, dado $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ arbitrários, existe $C = C(\epsilon_1, \epsilon_2, \beta_1, \beta_2) > 0$ satisfazendo ambos os casos:

- $\beta_1 = \frac{1}{\theta_2} > 1$ implica $s \leq \epsilon_1 s^{\beta_1} + C$, donde

$$\|u\|_{\gamma+1}^{\theta_2(\gamma+1)} \leq \epsilon_1 \|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + C.$$

- $\beta_2 = \frac{1}{\theta_1} > 1$ implica $s \leq \epsilon_2 s^{\beta_2} + C$, donde

$$\|w\|_{\alpha+1}^{\theta_1 \gamma} \leq \epsilon_2 \|w\|_{\alpha+1}^{\gamma} + C \leq \epsilon_2 \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + C,$$

  onde foi usado a desigualdade de Young, uma vez que $\frac{\alpha+1}{\gamma} > 1$.

Substituindo em (2.12) e fazendo ϵ_1 e ϵ_2 suficientemente pequenos, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\|u\|_{\gamma}^{\gamma} + \|w\|_{\alpha}^{\alpha}) + C(\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}) \leq C.$$

Definimos $Z(t) := \int_{\Omega} w^{\alpha}(t)\, dx + \int_{\Omega} u^{\gamma}(t)\, dx$ e reescrevemos

$$\frac{d}{dt}\, Z + C(\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}) \leq C. \tag{2.13}$$

Novamente, aplicando o Lema de Riesz-Thorin, temos

$$\|w\|_{\alpha} \leq \|w\|_1^{1-\theta_4} \|w\|_{\alpha+1}^{\theta_4}, \qquad \text{com} \quad \theta_4 = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}$$

e

$$\|u\|_{\gamma} \leq \|u\|_1^{1-\theta_5} \|u\|_{\gamma+1}^{\theta_4}, \qquad \text{com} \quad \theta_5 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}.$$

Combinando,

$$\begin{aligned} \|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} &\geq C(\mathcal{M}) \left(\|u\|_{\alpha}^{\frac{\alpha+1}{\theta_4}} + \|w\|_{\gamma}^{\frac{\gamma+1}{\theta_5}} \right) \\ &= C(\mathcal{M}) \left((\|u\|_{\gamma}^{\gamma})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + (\|w\|_{\alpha}^{\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right). \end{aligned}$$

Agora, observemos que existe $C = C(1, \beta) > 0$ tal que

$$s^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \leq s^{\frac{\beta\gamma}{\gamma-1}} + C$$

com

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\, \frac{\gamma}{\gamma - 1},$$

uma vez que $\beta > 1$ se, e somente se, $\gamma\alpha - \gamma > \gamma\alpha - \alpha$ se, e somente se, $\alpha > \gamma$. Assim,

$$\|u\|_\gamma^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \geq \|u\|_\gamma^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - C.$$

Aí,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|w\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} &\geq C(\mathcal{M})\left(\|u\|_\gamma^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \|w\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right) \\
&\geq C(\mathcal{M})\left(\|u\|_\gamma^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \|w\|_\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - C\right) \\
&\geq C(\mathcal{M})\left(Z^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - 1\right). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Substituindo em (2.13), temos que

$$\frac{d}{dt}Z + C_1 Z^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \leq C_2.$$

Agora, utilizando o Lema 6 no Apêndice C, temos $\beta = \alpha - 1$ e portanto

$$Z(t) \leq C(\mathcal{M})\left(1 + \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right),$$

onde a constante $C > 0$ depende de todos os parâmetros, exceto T. Em outras palavras, para qualquer $1 < \gamma < \alpha < \gamma + 1 < \infty$ temos

$$\|w(t)\|_\alpha \leq C(\mathcal{M})\left(1 + \frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha'}}}\right)$$

e

$$\|u(t)\|_\gamma \leq C(\mathcal{M})\left(1 + \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{\gamma}}}\right) = C(\mathcal{M})\left(1 + \frac{1}{t^{\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^+}}\right).$$

Na última desigualdade foi usado o fato de que $\gamma < \alpha$ pode ser tomado tão próximo quanto desejado. Concluímos a proposição para $1 \leq \alpha < \infty$ obtendo a segunda estimativa ao chamar o Lema 7 do Apêndice C, onde vemos que a estimativa sobre o mapa $t \mapsto Z(t)$ pode ser melhorada para $\sup_{t\geq 0} Z(t) \leq C$, desde que adicionamos sobre C a dependência das normas $\|w_0\|_\gamma$ e $\|u_0\|_\alpha$.

Isso prova o resultado da proposição para $1 \leq \gamma < \infty$. O caso $\gamma = \infty$ é apresentado em [4] utilizando o método de De Giorgi como será feita diversas vezes durante esse trabalho, porém com sutis diferenças nas definições de U_k e W_k como no final do Capítulo 1. ■

A demonstração para o caso $\gamma = \infty$ na Proposição 1 foi omitida nesse trabalho pois, até o presente momento, não conseguimos fazer qualquer análise a partir dela conforme as que serão feitas a diante nas próximas seções. Porém, é um resultado interessante que mostra que a boa colocação para (2.1) depende apenas da norma L^1 dos dados iniciais (u_0, w_0) para o caso $\tau_1 = 0$.

O resultado da Proposição 1 para $1 \leq \gamma < \infty$ nos dá condição de estabelecer um ambiente onde poderemos dar continuidade ao método de De Giorgi para obter estimativas L^∞ das soluções u e w como foi descrito no final do Capítulo 1, onde na equação (1.37) obtemos

$$0 \leq u(t,x) + w(t,x) \leq C_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

com C_0 dependendo de

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \sup_{t \geq 0} \|u \nabla p\|_{2q'}^2 + \sup_{t \geq 0} \|u^2 w\|_{q'}, \\
\mathcal{C}_2 &= \sup_{t \geq 0} \|w \nabla q\|_{2q'}^2 + \sup_{t \geq 0} \|w\|_{2q'}^2, \\
U_0 &= \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx \, dt, \\
W_0 &= \sup_{t \in [0,T]} \|w(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega |\nabla w(t)|^2 \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

A aplicação do método ocorrerá considerando as normas dos dados iniciais

$$u_0 \text{ em } L^3(\Omega), \quad w_0 \text{ em } L^{3^+}(\Omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{M}. \tag{2.15}$$

Considerando essas normas, conseguimos via o resultado da Proposição 1 as estimativas adequadas para $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Além disso, essa escolha de dados nos permite, também pela Proposição 1, garantir a existência de $\mathcal{M}_1 > 0$ tal que

$$\mathcal{M}_1 = \sup_{1 \leq \gamma \leq 3^+} \left\{ \sup_{s \geq 0} \|u(s)\|_\gamma, \sup_{s \geq 0} \|w(s)\|_{\gamma^+} \right\} < \infty \tag{2.16}$$

para todo $\gamma \in [1, 3]$. O primeiro fato a se notar é que usando regularidade elíptica [1] nas duas últimas equações do sistema (2.1) obtemos estimativas L^∞ para os gradientes de p e q, a saber,

$$\|\nabla p(t)\|_\infty \leq C(\Omega) \|p(t)\|_{W^{2,2^+}} \leq C(\Omega) \|u(t)\|_{2^+}, \tag{2.17}$$

e

$$\|\nabla q(t)\|_\infty \leq C(\Omega) \|q(t)\|_{W^{2,2^+}} \leq C(\Omega) \|w(t)\|_{2^+}. \tag{2.18}$$

Observemos agora que via (1.35) e (1.36) temos

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \sup_{t\geq 0}\|u\nabla p\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0}\|u^2 w\|_{q'} \\ &\leq \sup_{t\geq 0}\|\nabla p\|_\infty \|u\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0}\|u\|_{3q'}\|w\|_{3q'} \\ &\leq C(2.15) < \infty\end{aligned} \tag{2.19}$$

bem como

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2 &= \sup_{t\geq 0}\|w\nabla q\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0}\|w\|_{2q'}^2 \\ &\leq \sup_{t\geq 0}\|\nabla q\|_\infty \|w\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0}\|w\|_{2q'}^2 \\ &\leq C(2.15) < \infty\end{aligned}$$

para q suficientemente grande. Assim, via (1.37), temos que

$$0 \leq u(t,x) + w(t,x) \leq C_0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \tag{2.20}$$

com

$$C_0 = C(\sqrt{U_0} + U_0^{\frac{1}{q+1}} + \sqrt{W_0} + W_0^{\frac{1}{q+1}}) \tag{2.21}$$

e $C = C(2.15)$. Enunciamos então o principal resultado de integrabilidade do caso:

Proposição 2. *Seja (u, w, p, q) solução clássica não-negativa do sistema (2.1) e consideremos as normas dos dados iniciais como em (2.15). Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $t \in [0, T]$ temos*

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C(2.15), \tag{2.22}$$

para todo $\gamma \in [1, 3^+]$ e para $3^+ \leq \gamma \leq \infty$ vale que

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C(2.15)\left(1 + \frac{1}{t^{1/2\gamma'}}\right) \tag{2.23}$$

com a constante C independente do tempo $T > 0$. Por fim, se considerarmos as normas $\|u_0\|_\infty$ e $\|w_0\|_\infty$ então para todo $1 \leq \gamma \leq \infty$ temos que

$$\|u(t)\|_\infty + \|w(t)\|_\infty \leq C(\|u_0\|_\infty, \|w_0\|_\infty). \tag{2.24}$$

Demonstração: A estimativa (2.22) decorre da Proposição 1. Para (2.23), precisamos estimar C_0 dado em (2.21), onde lembramos que

$$U_0 = \sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_2^2 + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx\,dt$$

e

$$W_0 = \sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega |\nabla w(t)|^2 \, dx \, dt.$$

Obteremos as estimativas apropriadas para U_0 e W_0 e então a estenderemos a intervalos gerais. Como em (1.17), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 \, dx + 2\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx &\leq 2\int_\Omega u\nabla u\nabla p \, dx + 2\int_\Omega f_+ u \, dx \\ &\leq \int_\Omega \nabla u^2 \nabla p \, dx + 2\int_\Omega u^2 w \, dx, \end{aligned}$$

onde, no último passo, usamos o resultado que segue ao multiplicar a equação de p por u^2 e integrar em espaço, isto é,

$$\int_\Omega \nabla u^2 \nabla p \, dx \leq \int_\Omega u^2 w \, dx - \int_\Omega p u^2 \, dx \leq \int_\Omega u^2 w \, dx.$$

Substituindo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 \, dx + 2\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx &\leq 3\int_\Omega u^2 w \, dx \\ &\leq 3\int_\Omega w^3 + u^3 \, dx \\ &\leq C(2.15). \end{aligned}$$

Integrando em $[0,t]$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^2(t') \, dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(t')|^2 \, dx \, dt' &\leq \int_\Omega u_0^2 \, dx + C(T+1) \\ &\leq C(T+1), \end{aligned}$$

com C dependendo de (2.15). Observemos que dessa desigualdade segue que

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega u^2(t) \, dx \leq C(T+1)$$

e também

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, dt' \leq C(T+1).$$

Somando essas desigualdades, obtemos

$$U_0 \leq C(T+1), \tag{2.25}$$

onde consideramos que $0 < t_* < 1$. Para estimar W_0, o mesmo desenvolvimento leva a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2\,dx + 2\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx &\leq \int_\Omega w^2\,dx - \int_\Omega w\nabla w\nabla q\,dx\\ &\leq \int_\Omega w^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla w^2\nabla q\,dx.\end{aligned}$$

Multiplicando a respectiva equação do feromônio por w^2 e integrando em espaço, obtemos

$$\int_\Omega \nabla w^2\nabla q\,dx = \int_\Omega w^3\,dx - \int_\Omega w^2 p\,dx,$$

que implica

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \nabla w^2\nabla q\,dx &\leq -\int_\Omega w^3\,dx + \int_\Omega w^2 p\,dx\\ &\leq \int_\Omega w^2 p\,dx\\ &\leq \|w\|_{2r}^2\|p\|_{r'}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2\,dx + 2\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx \leq \|w\|_2^2 + \|w\|_{2r}^2\|p\|_{r'}.$$

Usando novamente (2.15) e que $\|p\|_{r'} \leq C\|p\|_{H^2} \leq \|w\|_{2^+} \leq C$, temos que

$$W_0 \leq C(T+1). \tag{2.26}$$

Assim, combinando (2.20), (2.25) e (2.26), obtemos

$$0 \leq u(t,x) + w(t,x) \leq C(T+1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right). \tag{2.27}$$

Essa desigualdade acontece sempre que $0 \leq t_* \leq t \leq T$ e $t_* < 1$. O que foi desenvolvido acima vale para todo $T > 0$, porém a constante da estimativa dependeria de T, visto as estimativas feitas para U_0 e W_0. Faremos da seguinte forma: Tomemos $T = 1$, digamos, e $t_1 \in (t_*, T - t_*)$ qualquer, estendemos a estimativa (2.27) obtida em $[t_*, 1]$ e que agora não depende de T, para $[1, 1+t_1]$ via definindo $u_{t_1}(t,x) = u(t+t_1, x)$. Evidentemente u_{t_1} satisfaz a mesma EDP com $u_{t_1}(0,x) = u(t_1,x)$ e com o lado direito apropriado em f, e como a constante $\mathcal{M}_1$ não muda, não há mudança na constante C da estimativa acima. Assim, obtemos em $[t_*, 1]$ para u_{t_1} a mesma estimativa obtida em (2.27), que é equivalente a estender (2.27) a $[t_*, 1+t_1]$. Podemos repetir esse argumento, completando a prova para u. Para w acontece de forma análoga. Pela estimativa (2.27) e interpolação de Lebesgue novamente com a Proposição 1 garantimos (2.23).

Falta agora provar a estimativa (2.24), e faremos isso usando a estimativa (2.27) acima obtida. Para $\gamma > 3$, definimos

$$U(t) := \int_\Omega u^\gamma(t)\, dx, \qquad W(t) := \int_\Omega w^\gamma(t)\, dx.$$

Controlaremos $Z = U + W$ de modo que possamos passar o limite $\gamma \to +\infty$. Multiplicando a primeira linha de (2.1) por $u^{\gamma-1}$ e integrando em espaço, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\, dx + (\gamma-2)\int_\Omega u^{\gamma-1}|\nabla u|^2\, dx + (\gamma-1)\int_\Omega u^{\gamma-1}\nabla u \nabla p\, dx \\ \leq C\left[\int_\Omega u^{\gamma+1} + w^{\gamma+1}\, dx\right].\end{aligned}$$

Multiplicando a quarta equação de (2.1) por u^γ, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u^\gamma \nabla p\, dx = \int_\Omega u^\gamma w\, dx - \int_\Omega u^\gamma p\, dx \leq \int_\Omega u^\gamma w\, dx \leq \gamma\left[\int_\Omega u^{\gamma+1} + w^{\gamma+1}\, dx\right].$$

Substituindo e usando a estimativa (2.23), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma(t)\, dx &\leq \gamma\left[\int_\Omega w^\gamma\, dx + \int_\Omega w^{\gamma+1}\, dx\right] \\ &\leq C\gamma\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega w^\gamma\, dx. \qquad (2.28)\end{aligned}$$

Num desenvolvimento similar, multiplicamos a segunda equação de (2.1) por $w^{\gamma-1}$, $\gamma > 3$, integramos em espaço para obter

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\gamma\, dx \leq (\gamma-1)\int_\Omega w^{\gamma-1}\nabla w \nabla q\, dx + \int_\Omega w^\gamma\, dx. \qquad (2.29)$$

Multiplicando a quarta equação de (2.1) por w^γ e integrando em espaço, obtemos

$$\gamma\int_\Omega w^{\gamma-1}\nabla w \nabla q\, dx \leq \int_\Omega w^{\gamma+1} + u^{\gamma+1}\, dx \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega w^\gamma + u^\gamma\, dx. \quad (2.30)$$

Substituindo em (2.29), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\gamma\, dx \leq C\gamma\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega w^\gamma + u^\gamma\, dx. \qquad (2.31)$$

Assim, combinando (2.28) e (2.30), temos que

$$\frac{d}{dt}\{U+W\} \leq C\gamma\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(U+W),$$

onde, para $Z = U + W$, segue

$$\frac{dZ}{dt} \leq C\gamma\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) Z,$$

implicando

$$Z(t) \leq Z(0)\, e^{C\gamma\int_0^t\left(1+\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\,ds} \leq Z(0)\, e^{3CT\gamma}.$$

Assim, $[Z(t)]^{1/\gamma} \leq Z(0)e^{3CT}$ e fazendo $\gamma \to +\infty$ obtemos

$$\max\{\|u(t)\|_\infty, \|w(t)\|_\infty\} \leq \max\{\|u_0\|_\infty, \|w_0\|_\infty\}\, e^{3CT},$$

obtendo a estimativa para um intervalo de tempo para $T > 0$ pequeno. Combinando com a estimativa (2.27) concluímos a proposição. ∎

2.1.2 Integrabilidade para $\tau_1 = 1$

Faremos agora uma análise semelhante a da subseção anterior para o caso $\tau_1 = 1$. Curiosamente, para evitar repetições futuras, vamos repetir boa parte dos argumentos desenvolvidos anteriormente. Numa primeira etapa faremos uma série de estimativas *a priori* de integrabilidade para soluções clássicas do sistema (1.11), e enfim usaremos o método de De Giorgi [20] para obter estimativas L^∞ para as soluções u e w do Lema 1, que garantirão a extensão de tal solução para intervalos gerais $[0,T]$. Como perdemos a regularidade elíptica para a equação de p, usaremos os Lemas apresentados no Apêndice B para estimar $\|\nabla p(t)\|_s$, $s \geq 2$. Temos a seguinte estimativa fundamental de integrabilidade:

Proposição 3. *Seja (u, w, p, q) uma solução clássica não-negativa do sistema (2.1) no intervalo $[0,T]$ para $\tau_1 = 1$. Então para qualquer $\gamma \in (1,\infty)$, considerando apenas as normas L^1 dos dados iniciais u_0 e w_0, existe um expoente $\beta = \beta(\gamma)$, que pode ser calculado explicitamente, de modo que*

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C\left(1+\frac{1}{t^\beta}\right), \qquad t \in (0,T], \tag{2.32}$$

com constante $C = C(\mathcal{M}, \Omega, \|\nabla p_0\|_{2(\gamma+1))}, \gamma)$, porém independe de T. Além disso, para qualquer $\gamma \in (\sqrt{2}, \infty)$, adicionando à estimativa (2.32) a dependência de $\|u_0\|_\gamma$ e $\|w_0\|_{\gamma^+}$ à constante C, e tal estimativa pode ser melhorada para

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|u(s)\|_\xi + \sup_{0\leq t\leq T}\|w(s)\|_\xi \leq C(\|u_0\|_\gamma, \|w_0\|_{\gamma^+}), \quad t > 0, \tag{2.33}$$

para todo $\xi \in [1, \gamma]$.

Demonstração: Multiplicando a primeira equação de (2.1) por $u^{\gamma-1}$ para $\gamma > 1$ e integrando em espaço, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\, dx + \int_\Omega \nabla u^{\gamma-1}\nabla u\, dx - \int_\Omega u\nabla u^{\gamma-1}\nabla p\, dx &= \int_\Omega wu^\gamma - u^\gamma\, dx \\ &\leq \int_\Omega wu^\gamma\, dx.\end{aligned}$$

Semelhantemente à proposição anterior, segue que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\, dx + 4\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\int_\Omega |\nabla u^{\gamma/2}|^2\, dx \leq (\gamma-1)\int_\Omega \nabla p\nabla u^\gamma\, dx + \gamma\int_\Omega wu^\gamma\, dx.$$

Notemos que $\nabla u^\gamma = \nabla(u^{\gamma/2}u^{\gamma/2}) = u^{\gamma/2}\nabla u^{\gamma/2} + u^{\gamma/2}\nabla u^{\gamma/2} = 2u^{\gamma/2}\nabla u^{\gamma/2}$. Aí,

$$\begin{aligned}(\gamma-1)\int_\Omega \nabla p\nabla u^\gamma\, dx &= 2(\gamma-1)\int_\Omega \nabla p\; u^{\gamma/2}\nabla u^{\gamma/2}\, dx \\ &= 2(\gamma-1)\int_\Omega \left[\sqrt{\gamma}u^{\gamma/2}\nabla p\right]\;\frac{\nabla u^{\gamma/2}}{\sqrt{\gamma}}\, dx \\ &\leq \gamma(\gamma-1)\int_\Omega |\nabla p|^2\; u^\gamma\, dx + \frac{(\gamma-1)}{\gamma}\int_\Omega |\nabla u^{\gamma/2}|^2\, dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\, dx + 3\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\int_\Omega |\nabla u^{\gamma/2}|^2\, dx \leq \gamma(\gamma-1)\int_\Omega |\nabla p|^2\; u^\gamma\, dx + \gamma\int_\Omega wu^\gamma\, dx.$$

Notemos agora que

$$\int_\Omega |\nabla p|^2 u^\gamma\, dx = \int_\Omega \frac{|\nabla p|^2}{\epsilon}\,\epsilon u^\gamma\, dx \leq C\int_\Omega |\nabla p|^{2(\gamma+1)}\, dx + \epsilon\int_\Omega u^{\gamma+1}\, dx.$$

Substituindo, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\, dx + 3\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\int_\Omega |\nabla u^{\gamma/2}|^2\, dx &\leq C\int_\Omega |\nabla p|^{2(\gamma+1)}\, dx \\ &\quad + C\epsilon\int_\Omega u^{\gamma+1}\, dx \\ &\quad + \gamma\int_\Omega wu^\gamma\, dx.\end{aligned}$$

Para o último termo da desigualdade acima temos

$$\int_\Omega w u^\gamma \, dx \le \epsilon \|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + C\|w\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma \, dx + 3\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\int_\Omega |\nabla u^{\gamma/2}|^2 \, dx \le C\|\nabla p\|_{2(\gamma+1)}^{2(\gamma+1)} + C\epsilon\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \\ + C\gamma\|w\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Como $n = 2$, iremos escolher θ nas hipóteses do Lema 4 apresentado no Apêndice B a fim de obter uma estimativa para ∇p. Escolhemos $\theta = \frac{\gamma}{\gamma+1}$, $s = 2(\gamma+1)$ e $f = w$, assim obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla p\|_{2(\gamma+1)} &\le \|\nabla p_0\|_{2(\gamma+1)} \\ &\quad + C\left(1+\frac{1}{t^{\frac{n-s'}{2s'}}}\right)\left(1+\sup_{0\le s\le t}\|w(s,x)\|_1\right)\sup_{\frac{t}{2}\le s\le t}\|f(s)\|_{\frac{\theta s}{2}}^{\frac{\theta}{n}\frac{s(n-1)-n}{\theta s-2}} \\ &= \|\nabla p_0\|_{2(\gamma+1)} + C\left(1+\frac{1}{t^{\frac{\gamma}{2(\gamma+1)}}}\right)\sup_{\frac{t}{2}\le s\le t}\left[\int_\Omega w^\gamma(s,x)\,dx\right]^{\frac{\gamma}{2(\gamma+1)(\gamma-1)}} \end{aligned}$$

valendo para todo $\gamma > \sqrt{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} &\|\nabla p\|_{2(\gamma+1)}^{2(\gamma+1)} \\ &\quad \le C\|\nabla p_0\|_{2(\gamma+1)}^{2(\gamma+1)} + C\left(1+\frac{1}{t^\gamma}\right)\sup_{\frac{t}{2}\le s\le t}\left[\int_\Omega w^\gamma(s,x)\,dx\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Voltando para (2.34), substituindo a estimativa (2.35) acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma \, dx &+ 3\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\int_\Omega |\nabla u^{\gamma/2}|^2 \, dx \\ &\le C + C\|\nabla p_0\|_{2(\gamma+1)}^{2(\gamma+1)} + C\epsilon\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + C\|w\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \\ &\quad + C\left(1+\frac{1}{t^\gamma}\right)\sup_{\frac{t}{2}\le s\le t}\left[\int_\Omega w^\gamma(s,x)\,dx\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Ninberg-Sobolev como anteriormente, a saber, $\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \le C\|u^{\gamma/2}\|_{H^1}^2 \le C(\|u\|_\gamma^\gamma + \|\nabla u^{\frac{\gamma}{2}}\|_2^2)$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma \, dx + C\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \\ &\quad \le C + C\|w\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + C\left(1+\frac{1}{t^\gamma}\right)\sup_{\frac{t}{2}\le s\le t}\left[\int_\Omega w^\gamma(s,x)\,dx\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Para w segue o mesmo desenvolvimento feito em (2.8) na Proposição 1, uma vez que a equação de p ainda é elíptica. Obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\alpha dx + C\int_\Omega w^{\alpha+1}\,dx \leq \alpha C\left[1+\int_\Omega u^\alpha\,dx\right]. \tag{2.37}$$

Nesse passo, a fim de combinarmos os resultados de (2.36) e (2.37) com os teoremas de interpolação, vamos pedir $\gamma < \alpha < \gamma+1$. Como $(\|w\|_\gamma^\gamma)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \leq C(\|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1})^{\frac{\gamma}{\alpha-1}}$ e também que $C\|w\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \leq C+\epsilon\|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}$, (2.36) para ϵ suficientemente pequeno torna-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}&\int_\Omega u^\gamma\,dx + C\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}\\ &\leq C+\epsilon\|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + C\left(1+\frac{1}{t^\gamma}\right)\sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t}\left[\int_\Omega w^\alpha(s,x)\,dx\right]^{\frac{\gamma}{\alpha-1}}.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Definindo $Z(t) = \|u(t)\|_\gamma^\gamma + \|w(t)\|_\alpha^\alpha$ e combinado (2.37) e (2.38), temos que

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dt} + C(\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}) &\leq C + C\|u\|_\alpha^\alpha + \epsilon\|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}\\ &\quad + C\left(1+\frac{1}{t^\gamma}\right)\sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t}\left[\int_\Omega w^\alpha(s,x)\,dx\right]^{\frac{\gamma}{(\alpha-1)}}.\end{aligned}$$

Como $\|u\|_\alpha^\alpha \leq C+\epsilon\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}$, temos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\frac{dZ}{dt} + C(\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}) \leq C + C\left(1+\frac{1}{t^\gamma}\right)\sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t}\left[\int_\Omega w^\alpha(s,x)\,dx\right]^{\frac{\gamma}{(\alpha-1)}}.$$

Assim, como foi feito em (2.14), temos que $\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \geq C(\mathcal{M})\left(Z^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - 1\right)$ e portanto,

$$\begin{aligned} Z'(t) + C[Z(t)]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} &\leq C + C\left(1+\frac{1}{t^\gamma}\right)\sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t}\left[\int_\Omega w^\alpha(s,x)\,dx\right]^{\frac{\gamma}{(\alpha-1)}}\\ \Rightarrow\quad Z'(t) + C[Z(t)]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} &\leq C + C\left(1+\frac{1}{t^\gamma}\right)\sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t}[Z(t)]^{\frac{\gamma}{\alpha-1}}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Como $\frac{\gamma}{\alpha-1} < \frac{\alpha}{\alpha-1}$, aplicando o Lema 7 do Apêndice C à inequação (2.39), obtemos que

$$Z(t) \leq C\left(1+\frac{1}{t^\beta}\right),$$

com $\beta = \frac{\gamma(\alpha-1)}{\alpha-\gamma}$, donde concluímos

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\alpha \leq C\left(1 + \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{\alpha-\gamma}}}\right),$$

ou também

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C\left(1 + \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{\alpha-\gamma}}}\right),$$

com a constante C dependendo de $\mathcal{M}$, dos parâmetros γ e α e de $\|\nabla p_0\|_{2(\gamma+1)}$, porém independente de $T > 0$. Para $\gamma < \sqrt{2}$, temos que $\|u\|_\gamma + \|w\|_\alpha \leq \|u\|_1^{1-\theta_1}\|u\|_{\gamma+1}^{\theta_1} + \|w\|_1^{1-\theta_2}\|w\|_{\alpha+1}^{\theta_2}$, donde obtemos

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C\left(1 + \frac{1}{t^\beta}\right),$$

com β podendo ser calculado explicitamente, concluindo a primeira parte da proposição. Por fim, considerando as normas u_0 em $L^\gamma(\Omega)$ e w_0 em $L^{\gamma^+}(\Omega)$ para algum $\gamma > \sqrt{2}$, em vez de estimarmos $\|\nabla p\|_{2(\gamma+1)}^{2(\gamma+1)}$ via (2.35), podemos usar o Lema 4 apresentado no Apêndice B, por onde obtemos

$$\sup_{0\leq s\leq T} \|\nabla p\|_{2(\gamma+1)}^{2(\gamma+1)} \leq C\|\nabla p_0\|_{2(\gamma+1)}^{2(\gamma+1)} + C \sup_{0\leq s\leq T}\left[\int_\Omega w^\gamma(s,x)\,dx\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Assim, (2.39) se torna

$$Z'(t) + C[Z(t)]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \leq C + C\sup_{0\leq s\leq T}[Z(t)]^{\frac{\gamma}{\alpha-1}}, \qquad t \in [0,T],$$

para $\sqrt{2} < \gamma < \alpha < \gamma + 1$ e $T \geq 1$. Aplicando o Lema 7 do Apêndice C, obtemos $\sup\limits_{0\leq s\leq T} Z(s) \leq C$, isto é,

$$\sup_{0\leq s\leq T}\|u(s)\|_\gamma + \sup_{0\leq s\leq T}\|w(s)\|_{\gamma^+} \leq C,$$

com a constante $C > 0$ dependendo adicionalmente das normas $\|u_0\|_\gamma$ e $\|w_0\|_{\gamma^+}$. ■

Como anteriormente, usaremos esses resultados de integrabilidade para dar continuidade ao método de De Giorgi introduzido no final do primeiro capítulo, onde na equação (1.37) obtemos

$$0 \leq u(t,x) + w(t,x) \leq C_0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

com C_0 dependendo de

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \sup_{t\geq 0} \|u\nabla p\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0} \|u^2 w\|_{q'},\\
\mathcal{C}_2 &= \sup_{t\geq 0} \|w\nabla q\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0} \|w\|_{2q'}^2,\\
U_0 &= \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx \, dt,\\
W_0 &= \sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega |\nabla w(t)|^2 \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

A hipótese fundamental agora será que completaremos (2.15) para

$$u_0 \text{ em } L^3(\Omega), \quad w_0 \text{ em } L^{3^+}(\Omega), \quad \nabla p_0 \text{ em } L^{8^+}(\Omega) \text{ e } \mathcal{M}. \tag{2.40}$$

Considerando essas normas, conseguimos via o resultado da Proposição 2 as estimativas adequadas para $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Além disso, essa escolha nos permite, também pela Proposição 2, garantir a existência de $\mathcal{M}_2 > 0$ tal que

$$\mathcal{M}_2 = \sup_{1\leq\gamma\leq 3^+} \left\{ \sup_{s\geq 0} \|u(s)\|_{\gamma^+}, \sup_{s\geq 0} \|w(s)\|_{\gamma^+} \right\} < \infty.$$

Observemos que para q suficientemente grande, temos que

$$\|u\nabla p\|_{2q'}^2 \leq \|u\|_3^2 \left(\int_\Omega |\nabla p|^{\frac{6q'}{3-2q'}} \, dx \right)^{\frac{3-2q'}{3}} \leq C \|\nabla p\|_{6^+}^2.$$

Usando o Lema 4 do Apêndice B, tem-se

$$\sup_{0\leq s\leq T} \|\nabla p(s)\|_{6^+} \leq \|\nabla p_0\|_{6^+} + C \sup_{0\leq s\leq T} \left[\|w(s)\|_{3^+\theta} \right]^{\frac{\theta}{2}\frac{3^+-2}{3^+\theta-2}} \leq C,$$

onde tomamos θ suficientemente próximo a 1. Assim, $\|u\nabla p\|_{2q'}^2 \leq C$, com a constante dependendo de (2.40). Ainda,

$$\|u^2 w\|_{q'} = \left(\int_\Omega u^{2q'} w^{q'} \, dx \right)^{1/q'} \leq \|u\|_3^2 \left(\int_\Omega w^{\frac{3q'}{3-2q'}} \right)^{(3-2q')/3q'} \leq C,$$

onde tomamos novamente q suficientemente grande. Assim,

$$\mathcal{C}_1 = \sup_{t\geq 0} \|u\nabla p\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0} \{\|u^2 w\|_{q'}\} \leq C(2.40).$$

Da mesma forma,

$$\|w\nabla q\|_{2q'}^2 \leq \|\nabla q\|_\infty^2 \|w\|_{2q'}^2 \leq C$$

e

$$\|w^2\|_{q'} = \|w\|_{2q'}^2 \leq C,$$

donde

$$\mathcal{C}_2 = \sup_{t\geq 0} \|w\nabla q\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0} \{\|w\|_{2q'}^2\} \leq C(2.40).$$

Assim, temos que

$$0 \leq u(t,x) + w(t,x) \leq C_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

com

$$C_0 = C(\sqrt{U_0} + U_0^{\frac{1}{q+1}} + \sqrt{W_0} + W_0^{\frac{1}{q+1}})$$

e $C = C(2.15)$. Enunciamos então o principal resultado de integrabilidade do caso:

Proposição 4. *Seja (u, w, p, q) uma solução clássica não-negativa do sistema (2.1) com $\tau_1 = 1$ e consideremos a norma dos dados iniciais como em (2.40). Então para todo $t \in (0, T]$ existe constante $C > 0$ tal que*

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C(2.40) \tag{2.41}$$

para todo $\gamma \in [1, 3]$ e para $3 < \gamma \leq \infty$ temos

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C(2.40) \left(1 + \frac{1}{t^{1/2\gamma'}}\right), \tag{2.42}$$

onde a constante C é independente de $T > 0$. Se acrescentarmos a dependência da norma de w_0 em $L^\infty(\Omega)$, temos então que

$$\|w(t)\|_\infty \leq \|w_0\|_\infty e^{CT} \quad ou \quad \|w(t)\|_\infty \leq C(\|w_0\|_\infty, (2.40)), \tag{2.43}$$

com C também independente de $T > 0$. Ainda, se acrescentarmos a dependência das normas L^∞ de u_0 e w_0 e $p_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ com ∇p_0 satisfazendo a condição de compatibilidade $\nabla p_0 \cdot \boldsymbol{n} = 0$, então podemos estender a estimativa (2.41) para $1 \leq \gamma \leq \infty$

$$\sup_{0\leq s\leq T} \|w(s)\|_\infty + \sup_{0\leq s\leq T} \|u(s)\|_\infty \leq C,$$

acrescentando $C = C(\Omega, \|w_0\|_\infty, \|u_0\|_\infty, \|\nabla p_0\|_\infty)$.

Demonstração: Já obtemos (2.41) na Proposição 3 pela hipótese (2.40). Multiplicando a primeira equação de (2.1) por u e integrando em espaço, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2\,dx + 2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx &\le \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega u^2|\nabla p|^2\,dx + 2\int_\Omega u^2 w\,dx \\
&\le \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega u^3\,dx + \int_\Omega |\nabla p|^6\,dx \\
&\quad +2\int_\Omega u^3 + w^3\,dx.
\end{aligned}$$

Como $\|\nabla p(t)\|_6 \le \|\nabla p_0\|_6 + C\sup_{0\le s\le t}\|w(s)\|_3^{1/2}$, onde foi escolhido $\theta = 1 > 1/2$ no Lema 4 do Apêndice B, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \le C.$$

Integrando em $[0,t]$, $t \in [0,T]$, obtemos

$$\int_\Omega u^2(t')\,dx + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u(t')|^2\,dx\,dt' \le \int_\Omega u_0^2\,dx + C(T+1) \le C(T+1).$$

Observemos que dessa desigualdade segue que

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_\Omega u^2(t)\,dx \le C(T+1) \qquad \text{e} \qquad \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dt' \le C(T+1).$$

Somando essas desigualdades, obtemos $U_0 \le C(T+1)$. O mesmo procedimento para w nos dá

$$\begin{aligned}
W_0 &\le 2\int_\Omega w_0^2\,dx + 2\int_0^T\int_\Omega |w\nabla q|^2\,dx\,dt' + 2\int_0^T\int_\Omega w^2\,dx\,dt \\
&\le C(T+1) + 2\|\nabla q\|_\infty^2 \int_0^T \|w\|_2^2\,dt' \\
&\le C(T+1),
\end{aligned}$$

onde usamos que $\|\nabla q\|_\infty \le C(\mathcal{M})\|u\|_{2^+} \le C$. Logo,

$$0 \le u(t,x) + w(t,x) \le C(T+1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right). \tag{2.44}$$

onde estamos considerando que $0 < t_* < 1$. Essa desigualdade acontece sempre que $0 \le t_* \le t \le T$ e $t_* < 1$. Argumentando novamente como no caso

$\tau_1 = 0$, podemos estender sem a dependência de $T > 0$ a estimativa (2.44) para todo o intervalo $[0, T]$, uma vez que existe $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2(2.40)$ fazendo com que as constantes das estimativas não mudem. Para concluir, considerando as normas dos dados iniciais u_0 e w_0 em $L^{3^+}(\Omega)$ e $\nabla q_0 \in L^{8^+}(\Omega)$, temos portanto para todo $\gamma > 1$ que $\|u(t)\|_\gamma \leq \|u(t)\|_1^{1/\gamma} \|u(t)\|_\infty^{1/\gamma'}$ e $\|w(t)\|_\gamma \leq \|w(t)\|_1^{1/\gamma} \|w(t)\|_\infty^{1/\gamma'}$, donde melhoramos a estimativa da Proposição 3 para

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C\left(1 + \frac{1}{t^{(1/2\gamma')^+}}\right),$$

quando $\gamma \in (3, +\infty)$. Se $\gamma \in [1, 3]$ é mais vantajosa a estimativa já obtida na Proposição 3.

Falta então provar (2.43), donde usaremos a estimativa (2.44) recém obtida. Consideremos a norma L^∞ de w_0, usando (2.44) e que $\|p\|_\infty \leq C\|q\|_{H^2} \leq C\|w\|_2 \leq C$, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\alpha \, dx \leq C\alpha \int_\Omega w^\alpha \, dx.$$

Fazendo $X(t) = \int_\Omega w^\alpha \, dx$, temos que $X' \leq C\alpha X$, donde $X(t) \leq \|w_0\|_\alpha^\alpha e^{C\alpha T}$, aí

$$[X(t)]^{1/\alpha} \leq \|w_0\|_\infty e^{CT} \quad \overset{\alpha \to +\infty}{\Rightarrow} \quad \|w(t)\|_\infty \leq \|w_0\|_\infty e^{CT}.$$

Isso prova parte da estimativa. Combinando com (2.42) podemos estender a estimativa para todo $T > 0$, sem a dependência de T, completando a estimativa (2.43). Finalmente, consideremos as normas L^∞ de u_0 e w_0 e $p_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ com ∇p_0 satisfazendo a condição de compatibilidade $\nabla p_0 \cdot \mathbf{n} = 0$. Nesse cenário já sabemos que $\|w(t)\|_\infty \leq C$. Vamos obter uma estimativa para $\|\nabla p\|_\infty$ em tempo e espaço e em seguida para u. A fórmula de Duhamel para $p(t)$ garante que

$$\|\nabla p(t)\|_\infty = \|\nabla e^{t\Delta} p_0\|_\infty + \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta} w(s)\|_\infty \, ds.$$

Temos que a condição $\nabla p_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ garante $\|\nabla e^{t\Delta} p_0\|_\infty \leq C\|\nabla p_0\|_\infty$ (ver [44], imersão (2.29)), para $t \in (0, 1]$. Usaremos agora o Lema 3 apresentado no Apêndice B. Pelo item **(ii)** desse lema, temos que

$$\|\nabla e^{(t-s)\Delta} w(s)\|_\infty \leq \frac{C}{\sqrt{t-s}} \|w(s)\|_\infty,$$

para $t \in (0,1]$. Logo, como consequêcia, temos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla p\|_\infty &:= \sup_{0\le s\le 1} \|\nabla p(s)\|_\infty \\
&= C\left(\|\nabla p_0\|_\infty + \sqrt{t} \sup_{0\le s\le T} \|w(s)\|_\infty\right) \\
&\le C,
\end{aligned}$$

para $t \in (0,1]$. Ainda, pela fórmula de Duhamel,

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}[-\nabla \cdot (u(s)\nabla p(s)) + u(s)w(s) - u(s)]\, ds. \quad (2.45)$$

Por um lado, usando a estimativa (1.8) de [69], temos que $\|e^{t\Delta}u_0\|_\infty \le C\|u_0\|_\infty$ para todo $t \in (0,1]$. Por outro lado, usando o Lema 5 do Apêndice B, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\nabla(u(s)\nabla p(s))\|_\infty\, ds &\le C\int_0^t \frac{\|u(s)\nabla p(s)\|_\infty}{\sqrt{t-s}}\, ds \\
&\le C\|\nabla p\|_\infty \sqrt{t} \sup_{0\le s\le t} \|u(s)\|_\infty,
\end{aligned}$$

para $t \in (0,1]$. Também,

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}u(s)w(s)\, ds \le C\|w\|_\infty\, t_0 \sup_{0\le s\le t}\|u(s)\|_\infty.$$

Voltando a (2.45), temos que para qualquer $0 < t \le t_0 \le 1$, que

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_\infty &\le C\|u_0\|_\infty + C\|\nabla p\|_\infty\sqrt{t_0} \sup_{0\le s\le t_0}\|u(s)\|_\infty + Ct_0\|w\|_\infty \sup_{0\le s\le t_0}\|u(s)\|_\infty \\
&\le C\|u_0\|_\infty + C(\|\nabla p\|_\infty\sqrt{t_0} + t_0\|w\|_\infty) \sup_{0\le s\le t_0}\|u(s)\|_\infty \\
&\le C\|w_0\|_\infty + \sqrt{t_0}C(\|\nabla q\|_\infty + \|w\|_\infty) \sup_{0\le s\le t_0}\|u(s)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Assim, tomando o supremo de $t \in (0, t_0]$ e escolhendo

$$\sqrt{t_0} = \min\{1, 1/2C(\|\nabla q\|_\infty + \|w\|_\infty)\},$$

concluímos que

$$\sup_{0\le s\le t_0}\|u(s)\|_\infty \le C\|u_0\|_\infty.$$

Combinando esse resultado com a estimativa (2.42) concluímos a demonstração. ∎

Agora estamos prontos para discutir a boa colocação da solução global de (2.1) tanto para $\tau_1 = 0$ quanto para $\tau_1 = 1$, e também obter a solução fraca desse sistema, que são os objetivos da próxima seção.

2.2 Soluções clássica e fraca

Assumindo dados iniciais u_0 e w_0 elementos de $W^{1,\infty}(\Omega)$ obtemos do Lema 1 a existência de $T_{\max} = T > 0$ de modo que a solução clássica do sistema (2.1) para $\tau_1 \in \{0, 1\}$ existe em $[0, T]$ e caso $T_{\max} < \infty$ tinha-se que

$$\lim_{t \to T_{\max}} \|u(t)\|_\infty + \|w(t)\|_\infty = +\infty.$$

Agora, as estimativas da Proposição 2 e 4 se aplicam, e consequentemente temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 2. *Sejam $u_0, w_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $\tau_1 p_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ dados iniciais não-negativos satisfazendo a condição de compatibilidade $\tau_1 \nabla p_0 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ em $\partial\Omega$. Então o sistema (2.1) admite um único quarteto $(u, w, p, q) \in C^0([0, +\infty) \times \Omega) \cap C^{1,2}((0, +\infty) \times \Omega)$ solução clássica não-negativa. Essa solução satisfaz as estimativas da Proposição 2 se $\tau_1 = 0$ e da Proposição 4 se $\tau_1 = 1$.*

2.2.1 Solução fraca para $\tau_1 = 0$

Prepararemos agora o ambiente para obter a solução fraca de (2.1), e isso deve acontecer para dados iniciais u_0 e w_0 com normas ligeiramente melhores que $L^3(\Omega)$. Diremos que o sistema de equações (2.1) é estável em $L^\infty(0, T; L^{3^+}(\Omega))$ quando dados dois pares de dados iniciais $u_{0,i}, w_{0,i} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $i = 1, 2$, então as respectivas soluções clássicas u_i e w_i admitem $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\|u_1(t) - u_2(t)\|_2 + \|w_1(t) - w_2(t)\|_2 \\ &\quad \leq C \left(\|u_{1,0}(t) - u_{2,0}(t)\|_2 + \|w_{1,0}(t) - w_{2,0}(t)\|_2\right) e^{Ct}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

para $t \geq 0$, onde a constante C não depende de T.

Proposição 5. *O sistema (2.1) é estável em $L^\infty(0, T; L^{3^+}(\Omega))$ no sentido de (2.46).*

Demonstração: Sejam (u_i, w_i, p_i, q_i), $i = 1, 2$, os quartetos soluções clássicas do sistema associadas aos dados $(u_{0,i}, w_{0,i})$, $i = 1, 2$, que têm existência garantida pelo Teorema 2. Denotamos $\overline{u} = u_{0,1} - u_{0,2}$, e assim por diante para $\overline{w}, \overline{q}$ e $\overline{p}$. Obtemos o sistema

$$\begin{cases} \partial_t \overline{u} - \Delta \overline{u} + \nabla \cdot (\overline{u} \nabla p_1) + \nabla \cdot (u_2 \nabla \overline{p}) = u_1 \overline{w} + \overline{u} w_2 - \overline{u} \\ \partial_t \overline{w} - \Delta \overline{w} - \nabla \cdot (\overline{w} \nabla q_1) - \nabla \cdot (w_2 \nabla \overline{q}) = \overline{w} - u_1 \overline{w} - \overline{u} w_2 - (w_1 + w_2) \overline{w} \\ -\Delta \overline{p} = \overline{w} - \overline{p} \\ -\Delta \overline{q} = \overline{u} - \overline{q}. \end{cases} \tag{2.47}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.47) por $\overline{u}$ e integrando em espaço, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\overline{u}\|_2^2+\|\nabla\overline{u}\|_2^2-\int_\Omega \overline{u}\nabla p_1\nabla\overline{u}\;dx-\int_\Omega u_2\nabla\overline{p}\nabla\overline{u}\;dx\\ \leq \int_\Omega u_1\overline{w}\overline{u}\;dx+\int_\Omega \overline{u}^2 w_2\;dx-\int_\Omega \overline{u}^2\;dx.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Note que

$$\int_\Omega u_1\overline{w}\overline{u}\;dx\leq\|u_1\|_\infty\int_\Omega\overline{u}\overline{w}\leq C\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(\|\overline{u})\|_2^2+\|\overline{w}\|_2^2)\tag{2.49}$$

e também,

$$\int_\Omega \overline{u}^2 w_2\;dx\leq C\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\|\overline{u}\|_2^2.\tag{2.50}$$

Substituindo (2.49) e (2.50) em (2.48), temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\overline{u}\|_2^2+\|\nabla\overline{u}\|_2^2-\int_\Omega \overline{u}\nabla p_1\nabla\overline{u}\;dx-\int_\Omega u_2\nabla\overline{p}\nabla\overline{u}\;dx\\ \leq C\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(\|\overline{u}\|_2^2+\|\overline{w}\|_2^2).\end{aligned}$$

Agora, para os dois últimos termos à esquerda, lembramos que $\|\nabla p_i(t)\|_\infty\leq C(\Omega)\;\|w_i(t)\|_{3^+}\leq C$. Assim, por um lado temos que

$$\int_\Omega \overline{u}\nabla p_1\nabla\overline{u}\;dx\leq\frac{1}{2}\;\|\nabla\overline{u}\|_2^2+\frac{1}{2}\|\overline{u}(t)\nabla p_1(t)\|_2^2\leq\frac{1}{2}\;\|\nabla\overline{u}\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla p_1(t)\|_\infty\|\overline{u}(t)\|_2^2.$$

Por outro,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_2\nabla\overline{p}\nabla\overline{u}\;dx &\leq \frac{1}{2}\|\nabla\overline{u}\|_2^2+\frac{1}{2}\;\|u_2(t)\nabla\overline{p}(t)\|_2^2\\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla\overline{u}\|_2^2+\frac{1}{2}\;\int_\Omega|u_2(t)|^2|\nabla\overline{p}(t)|^2\;dx\\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla\overline{u}\|_2^2+\frac{1}{2}\;\left[\int_\Omega|u_2(t)|^{2q'}\;dx\right]^{\frac{1}{q'}}\left[\int_\Omega|\nabla\overline{p}(t)|^{2q}\;dx\right]^{\frac{1}{q}}\\ &= \frac{1}{2}\|\nabla\overline{u}\|_2^2+\frac{1}{2}\;\|u_2(t)\|_{2q'}^2\;\|\nabla\overline{p}(t)\|_{2q}^2.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\|\nabla p(t)\|_{2q}^2\leq C\|p(t)\|_{H^2}\leq C\|w(t)\|_2^2$$

e que

$$
\begin{aligned}
\|u_2(t)\|_{2q'}^2 &= \left[\int_\Omega |u_2(t)|^{2q'}\, dx\right]^{\frac{1}{q'}} \\
&= \left[\int_\Omega |u_2(t)||u_2(t)|^{2q'-1}\, dx\right]^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq \|u_2(t)\|_\infty^{\frac{2q'-1}{q'}} \|u(t)\|_1^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq \|u_2(t)\|_\infty^{1+\frac{1}{q}} \|u(t)\|_1^{\frac{1}{q'}},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\|u_2(t)\nabla\overline{p}(t)\|_2^2 \leq C\left(1+\frac{1}{t^{\frac{q+1}{2q}}}\right)\|\overline{w}(t)\|_2^2,
$$

para $q \in [1, \infty)$. Aí,

$$
\begin{aligned}
\|u_2(t)\nabla\overline{p}(t)\|_2^2 &\leq C\left(1+\frac{1}{t^{\frac{q+1}{2q}}}\right)\|\overline{p}(t)\|_{H^2}^2 \\
&\leq C\left(1+\frac{1}{t^{\frac{q+1}{2q}}}\right)\|\overline{w}(t)\|_2^2,
\end{aligned}
$$

onde C depende de (2.15). Tomando q grande o suficiente, obtemos

$$
\frac{d}{dt}\|\overline{u}\|_2^2 \leq C\left(1+\frac{1}{t^{(1/2)^+}}\right)(\|\overline{u}\|_2^2+\|\overline{w}\|_2^2). \tag{2.51}
$$

Obtemos resultado semelhante para $\overline{w}$ multiplicando a segunda equação de (2.47) por $\overline{w}$ e integrando em espaço, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{w}\|_2^2 + \|\nabla\overline{w}\|_2^2 - \int_\Omega \overline{w}\nabla q_1\nabla\overline{w}\, dx - \int_\Omega w_2\nabla\overline{q}\nabla\overline{w}\, dx& \\
\leq \int_\Omega \overline{w}^2 - u_1\overline{w}^2 - \overline{u}\overline{w}w_2 - (w_1+w_2)\overline{w}^2\, dx& \\
\leq C\left(\|\overline{w}\|_2^2+\|\overline{u}\|_2^2\right).&
\end{aligned}
$$

Após a mesma análise para os dois últimos termos à esquerda da igualdade, obtemos

$$
\frac{d}{dt}\|\overline{w}\|_2^2 \leq C\left(1+\frac{1}{t^{(1/2)^+}}\right)(\|\overline{u}\|_2^2+\|\overline{w}\|_2^2). \tag{2.52}
$$

com a constante C dependendo de (2.15). Combinando os resultados (2.51) e (2.52), obtemos

$$
\frac{d}{dt}\{\|\overline{u}\|_2^2+\|\overline{w}\|_2^2\} \leq C\left(1+\frac{1}{t^{(1/2)^+}}\right)(\|\overline{u}\|_2^2+\|\overline{w}\|_2^2).
$$

Tomemos $Z(t) = \|\overline{u}\|_2^2 + \|\overline{w}\|_2^2$. Temos que

$$Z'(t) \leq C\left(1 + \frac{1}{t^{(1/2)^+}}\right) Z(t),$$

donde

$$Z(t) \leq Z(0)e^{C(t+t^{(1/2)^+})} \leq CZ(0)e^{Ct}.$$

Concluindo a demonstração. ■

Finalmente, temos a solução fraca de (2.1) como a limite desse resultado. Enunciamos enfim o teorema de existência global de soluções fracas para $\tau_1 = 0$:

Teorema 3. *Fixamos $T > 0$ arbitrário e assumimos dados não-negativos $u_0 \in L^3(\Omega)$, $w_0 \in L^{3^+}(\Omega)$. Existe e é única a solução fraca não-negativa para o sistema (2.1) com $\tau_1 = 0$. Tal solução satisfaz as estimativas da Proposição 2.*

Demonstração: Dividiremos essa demonstração em três passos: estimativas *a priori*, unicidade e dados iniciais. Para as estimativas *a priori*, tomemos uma sequência de dados iniciais não-negativos $u_{0,k}, w_{0,k} \in C_c^\infty(\Omega)$ com $u_{0,k} \to u_0$ e $w_{0,k} \to w_0$ fortemente em $L^{3^+}(\Omega)$. O Teorema 2 garante sequências u_k, w_k, p_k e q_k em $C([0,T] \times \Omega) \cap C^{1,2}((0,T) \times \Omega)$ que são soluções clássicas para o sistema (2.1) para cada par de dados $u_{0,k}, w_{0,k} \in C_c^\infty(\Omega)$, ou seja, elas satisfazem

$$(2.1)_k \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u_k - \Delta u_k + \nabla \cdot (u_k \nabla p_k) & = & u_k w_k - u_k \\ \partial_t w_k - \Delta w_k - \nabla \cdot (w_k \nabla q_k) & = & w_k(1 - w_k - u_k) \\ -\Delta p_k & = & w_k - p_k \\ -\Delta q_k & = & u_k - q_k. \end{array} \right.$$

A Proposição 2 garante que são uniformemente limitadas em $L^\infty(0,T; L^{3^+}(\Omega))$ com respeito a $k \geq 1$, enquanto a Proposição 5 garante que u_k e w_k são sequências de Cauchy em $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, portanto

i. $u_k \to u$ e $w_k \to w$ fortemente em $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$.

Vale recordar que da regularidade elíptica temos $\|\nabla p(t)\|_\infty \leq C(\Omega)\|u(t)\|_{2^+} \leq C_k$ e $\|\nabla q(t)\|_\infty \leq C(\Omega)\|w(t)\|_{2^+} \leq C_k$, isto é, ∇p_k e ∇q_k são limitadas em $L^\infty(0,T; L^{3^+}(\Omega))$, logo

ii. $\nabla p_k \to \nabla p$ em $L^\infty(0,T; L^{3^+}(\Omega))$ e $\nabla q_k \to \nabla q$ em $L^\infty(0,T; L^{3^+}(\Omega))$.

Ainda, seja $\overline{p} = p_k - p_l$ com $k, l \in \mathbb{N}$ e denotando $\overline{w} = w_k - w_l$, para a terceira equação de $(2.1)_k$, ao multiplicar por $\overline{p}$ e integrar em espaço, obtemos

$$\int_\Omega \overline{p}^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla \overline{p}|^2 \, dx \leq \int_\Omega \overline{w}^2 \, dx$$

e o mesmo ocorre para a quarta equação, obtendo então

$$\int_\Omega \overline{q}^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla \overline{q}|^2 \, dx \leq \int_\Omega \overline{u}^2 \, dx.$$

Assim, usando a Proposição 5, temos

$$\|\overline{p}(t)\|_{H^1} + \|\overline{q}(t)\|_{H^1} \leq C \left(\|u_{0,k}(t) - u_{0,l}(t)\|_2 + \|w_{0,k}(t) - w_{0,l}(t)\|_2 \right) \, e^{C(\mathcal{M})T},$$

isto é, p^k e q^k são sequências de Cauchy em $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ e portanto

iii. $\nabla p_k \to \nabla p$ e $\nabla q_k \to \nabla q$ ambas fortemente em $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

Agora, multiplicando a primeira linha de $(2.1)_k$ por u_k e integrando em espaço, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_k^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx &\leq \int_\Omega u_k^2 w_k \, dx + \int_\Omega u_k |\nabla u_k||\nabla p_k| \, dx \\ &\leq \|w_k\|_2 \|u_k\|_4^2 + \int_\Omega u_k |\nabla u_k||\nabla p_k| \, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx + C\int_\Omega u_k^2 \, dx, \end{aligned}$$

onde foi usado a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev $\|u_k\|_4 \leq \|u_k\|_2^{1/2} \|u_k\|_{H^1}^{1/2}$ e a desigualdade de Hölder em seguida. Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_k^2 \, dx + C\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx \leq C\int_\Omega u_k^2 \, dx.$$

O mesmo desenvolvimento para a segunda linha de $(2.1)_k$ nos dá

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w_k^2 \, dx + C\int_\Omega |\nabla w_k|^2 \, dx \leq C\int_\Omega w_k^2 \, dx.$$

Assim, aplicando o Lema de Gronwall em ambas as desigualdades acima e combinando com **i.**, obtemos

iv. $u_k \to u$ e $w_k \to w$ ambas fracamente em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Para os termos com derivadas em tempo notemos primeiramente que $\partial_t u_k(t) = \nabla \cdot (\nabla u_k - u_k \nabla p_k) + u_k w_k - u_k \in H^{-1}$. De fato, seja $\phi \in H^1(\Omega)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\langle \partial_t u_k(t), \phi \rangle_{H^1 \times H^{-1}} &= \int_\Omega (\nabla u_k - u_k \nabla p_k) \nabla \phi + u_k w_k \phi - u_k \phi \, dx \\
&\leq \|\nabla u_k\|_2 \|\phi\|_{H^1} + \|u_k\|_{2^+} \|\nabla p_k\|_{2^+} \|\phi\|_s \\
&\quad + \|u_k\|_{2^+} \|w_k\|_{2^+} \|\phi\|_r + \|u_k\|_2 \|\phi\|_2 \\
&\leq C \Big(\|\nabla u_k\|_2 + \|u_k\|_{2^+} \|\nabla p_k\|_{2^+} + \|u_k\|_{2^+} \|w_k\|_{2^+} \\
&\qquad + \|u_k\|_2 \Big) \|\phi\|_{H^1},
\end{aligned}
$$

onde $C = C(\Omega)$ e r é determinado via $1/2^+ + 1/2^+ + 1/r = 1$ e é tal que $r \in (1, \infty)$. Como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, temos que $\|\phi\|_r \leq \|\phi\|_{H^1}$. Da mesma forma, $\partial_t w_k(t) = \nabla \cdot (\nabla w_k + w_k \nabla q_k) + w_k - w_k^2 - u_k w_k \in H^{-1}$, uma vez que

$$
\int_\Omega w_k^2 \, \phi \, dx \leq \|w_k\|_{2^+} \|\phi\|_{(2^+)'} \leq C \|w_k\|_{2^+} \|\phi\|_{H^1}.
$$

Portanto, $\partial_t u_k$ e $\partial_t w_k$ são limitadas em $L^2(0, T; [H^1(\Omega)]^*)$ e existem subsequências tais que

v. $\partial_t u_k \to \partial_t u$ e $\partial_t w_k \to \partial_t w$ fracamente em $L^2(0, T; [H^1(\Omega)]^*)$[1].

Ainda, para cada $\phi \in H^1(\Omega)$ temos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega [u_k (p_k)_{x_i} - u p_{x_i}] \, \phi \, dx &= \int_\Omega [u_k - u)(p_k)_{x_i}] \, \phi + u[(p_k)_{x_i} - p_{x_i}] \, \phi \, dx \\
&\overset{k \to +\infty}{\to} 0
\end{aligned}
$$

e o mesmo raciocínio para $w_k (q_k)_{x_i}$. Assim, obtemos

vi. $u_k \nabla p_k \to u \nabla p$ e $w_k \nabla q_k \to w \nabla q$ ambas em $L^1(0, T; [H^1(\Omega)]^*)$.

Em resumo, obtemos

i. $u_k \to u$ e $w_k \to w$ fortemente em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

ii. $\nabla p_k \to \nabla p$ em $L^\infty(0, T; L^{2^+}(\Omega))$ e $\nabla q_k \to \nabla q$ em $L^\infty(0, T; L^{2^+}(\Omega))$.

iii. $p_k \to p$ e $q_k \to q$ ambas fortemente em $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

[1] Notemos que o desenvolvimento segueria o mesmo para dados $u_0, w_0 \in L^{2^+}$ caso não fosse o termo $\|u^2 w\|_{q'}$ em (2.19).

iv. $u_k \to u$ e $w_k \to w$ ambas fracamente em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

v. $\partial_t u_k \to \partial_t u$ e $\partial_t w_k \to \partial_t w$ fracamente em $L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^*)$.

vi. $u_k\nabla p_k \to u\nabla p$ e $w_k\nabla q_k \to w\nabla q$ em $L^1((0,T)\times\Omega)$.

Pela regularidade das soluções (u_k, w_k, p_k, q_k) com dados $(u_{0,k}, w_{0,k}) \in C_0^\infty(\Omega)$ é verdade que

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_k\partial_t\xi + (\nabla u_k - u_k\nabla p_k)\cdot\nabla\xi)(t,x)\,dx\,dt$$
$$= \int_\Omega u_{0,k}(x)\xi(0,x)\,dx + \int_0^T\int_\Omega (u_k w_k - u_k)\xi(t,x)\,dx\,dt,$$
$$\int_0^T \int_\Omega (-w_k\partial_t\xi + (\nabla w_k - w_k\nabla q_k)\cdot\nabla\xi)(t,x)\,dx\,dt$$
$$= \int_\Omega w_{0,k}(x)\xi(0,x)\,dx + \int_0^T\int_\Omega w_k(1 - w_k - u_k)\xi(t,x)\,dx\,dt,$$

$$\int_\Omega \nabla q_k\cdot\nabla\xi\,dx = \int_\Omega (u_k - q_k)\xi(t,x)\,dx$$

e

$$\int_\Omega \nabla p_k\cdot\nabla\xi\,dx = \int_\Omega (w_k - p_k)\xi(t,x)\,dx.$$

Graças a **i-ii-iii-iv-v** podemos fazer $k \to +\infty$ para obter que (u,w,p,q) satisfazem as primeiras duas condições da solução fraca, definidas ainda na Introdução. Para a unicidade é fácil ver que duas soluções (u_1, w_1, p_1, q_1) e (u_2, w_2, p_2, q_2) para os mesmos dados (u_0, w_0) devem satisfazer a Proposição 5 de estabilidade. Isso garante a unicidade. Ainda, vimos anteriormente que u_k satisfaz

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_k\partial_t\xi + (\nabla u_k - u_k\nabla p_k)\cdot\nabla\xi)(t,x)\,dx\,dt$$
$$= \int_\Omega u_{0,k}(x)\xi(0,x)\,dx + \int_0^T\int_\Omega (u_k w_k - u_k)\xi(t,x)\,dx\,dt.$$

Por **i.** e **v.**, temos que $u, w \in C([0,T,L^2(\Omega))$, donde podemos considerar $u(0)$ e $w(0)$. Aplicando o método de Ladyzhenskaya, obtemos o resultado. O mesmo segue para $w(0) = w_0$. ∎

2.2.2 Solução fraca para $\tau_1 = 1$

Vamos agora utilizar o resultado de boa colocação novamente para obter a solução fraca do sistema (2.1) como feito no Capítulo 1. Começamos novamente por obter um resultado de estabilidade no sentido do seguinte enunciado:

Proposição 6. *Sejam (u_i, w_i, p_i, q_i) soluções clássicas para o sistema (2.1) com $\tau_1 = 1$ para dados iniciais satisfazendo (2.40), $i = 1, 2$. Existe $C > 0$ dependendo das respectivas normas L^3 de $u_{0,i}$, L^{3^+} de $w_{0,i}$ e das normas L^{8^+} de $\nabla p_{0,i}$ tal que*

$$
\begin{aligned}
&\|u_1(t) - u_2(t)\|_2 + \|w_1(t) - w_2(t)\|_2 + \|p_1(t) - p_2(t)\|_2 + \|q_1(t) - q_2(t)\|_{H^1} \\
&\quad \leq \Big(\|u_{1,0}(t) - u_{2,0}(t)\|_2 + \|w_{1,0}(t) - w_{2,0}(t)\|_2 + \|q_{1,0} - q_{2,0}\|_2 \\
&\qquad + \|\nabla p_{1,0} - \nabla p_{2,0}\|_6^2 + (\|u_{1,0} - u_{2,0}\|_1 + \|w_{1,0} - w_{2,0}\|_1)^{1/3} \Big) e^{Ct}.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Sejam (u_i, w_i, p_i, q_i), $i = 1, 2$, os quartetos soluções clássicas do sistema associadas aos dados $(u_{0,i}, w_{0,i}, p_{0,i})$, $i = 1, 2$, que têm existência garantida pelo Teorema 2. Denotamos $\overline{u} = u_{0,1} - u_{0,2}$, e assim por diante para $\overline{w}, \overline{q}$ e $\overline{p}$. Obtemos o sistema

$$
\begin{cases}
\partial_t \overline{u} - \Delta \overline{u} + \nabla \cdot (\overline{u} \nabla p_1) + \nabla \cdot (u_2 \nabla \overline{p}) = u_1 \overline{w} + \overline{u} w_2 - \overline{u} \\
\partial_t \overline{w} - \Delta \overline{w} - \nabla \cdot (\overline{w} \nabla q_1) - \nabla \cdot (w_2 \nabla \overline{q}) = \overline{w} - u_1 \overline{w} - \overline{u} w_2 - (w_1 + w_2) \overline{w} \\
\partial_t \overline{p} - \Delta \overline{p} = \overline{w} - \overline{p} \\
-\Delta \overline{q} = \overline{u} - \overline{q}.
\end{cases}
\tag{2.53}
$$

Multiplicando a primeira equação de (2.53) por $\overline{u}$ e integrando em espaço, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\overline{u}\|_2^2 + \|\nabla \overline{u}\|_2^2 - \int_\Omega \overline{u} \nabla p_1 \nabla \overline{u}\, dx - \int_\Omega u_2 \nabla \overline{p} \nabla \overline{u}\, dx \\
\leq \int_\Omega u_1 \overline{w}\,\overline{u}\, dx + \int_\Omega \overline{u}^2 w_2\, dx - \int_\Omega \overline{u}^2\, dx \\
\leq C \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) (\|\overline{u}\|_2^2 + \|\overline{w}\|_2^2).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\overline{u}\|_2^2 + \|\nabla \overline{u}\|_2^2 \;\; \leq \;\; & \int_\Omega \overline{u} \nabla p_1 \nabla \overline{u}\, dx + \int_\Omega u_2 \nabla \overline{p} \nabla \overline{u}\, dx \\
& + C \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) (\|\overline{u}\|_2^2 + \|\overline{w}\|_2^2).
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

Agora, para o primeiro termo à direita, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \overline{u}\nabla p_1 \nabla \overline{u}\, dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \overline{u}^2 |\nabla p_1|^2\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx + \frac{1}{4}\|\nabla p_1\|_4^2 \|\overline{u}\|_4^2.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev com $n = 2$, $p = 4$ e $a = 1/2$ ([9], página 314), isto é, $\|\overline{u}\|_4 \leq C\|\overline{u}\|_2^{1/2}\|\overline{u}\|_{H^1}^{1/2}$, donde

$$\begin{aligned}\int_\Omega \overline{u}\nabla p_1 \nabla \overline{u}\, dx &\leq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx + C\|\nabla p_1\|_4^2 \|\overline{u}\|_2 \|\overline{u}\|_{H^1} \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx + C(1 + \|\nabla p_1\|_4^4)\|\overline{u}\|_2^2.\end{aligned}$$

Observe agora que usando o Lema 4 do Apêndice B, temos que

$$\|\nabla p_1(t)\|_4 \leq \|\nabla p_1(0)\|_4 + C \sup_{0\leq s\leq T} \|w_1(s)\|_{2\theta}^{\frac{\theta}{4\theta-2}}$$

onde é preciso $2\theta > 1$ e $\frac{4\theta}{2-\theta} > 2$, ou seja, $\theta \in (3/2, 2]$. Para θ suficientemente próximo a $3/2$, temos que $\|\nabla p_1(t)\|_4 \leq C$, com a constante C dependendo de (2.40). Portanto,

$$\int_\Omega \overline{u}\nabla p_1 \nabla \overline{u}\, dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx + C\|\overline{u}\|_2^2. \tag{2.55}$$

Para o outro termo, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_2 \nabla \overline{p} \nabla \overline{u}\, dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx + \int_\Omega u_2^2 |\nabla \overline{p}|^2\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx + \|u_2\|_3^2 \|\nabla \overline{p}\|_6^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2\, dx + C\|\nabla \overline{p}\|_6^2, \end{aligned} \tag{2.56}$$

onde usamos que $\|u_i\|_{3^+} \leq C$. Ainda, pelo Lema 4 do Apêndice B, temos para $3\theta \geq 1$ e $\frac{3\theta}{2-\theta} > 1$, que

$$\|\nabla p(t)\|_6^2 \leq C\|\nabla \overline{p}(0)\|_6^2 + C \sup_{0\leq s\leq T} \left(\|\overline{w}\|_{3\theta}^{3\theta}\right)^{\frac{2}{9\theta-3}}.$$

Observemos agora que para $\theta = 2/3$,

$$\begin{aligned}
\|\overline{w}\|_{3\theta}^{3\theta} &= \int_\Omega |\overline{w}|^{3\theta}\, dx \\
&= \int_\Omega |\overline{w}|^{3\theta-1/2}\, |\overline{w}|^{1/2}\, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\overline{w}|\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\overline{w}|^{6\theta-1}\, dx\right)^{1/2} \\
&\leq C\|\overline{w}\|_1^{1/2},
\end{aligned}$$

onde usamos que $\|w_1 - w_2\|_3 \leq \|w_1\|_3 + \|w_2\|_3 \leq C$. Substituindo, temos que

$$\|\nabla\overline{p}(t)\|_6^2 \leq C\|\nabla\overline{p}(0)\|_6^2 + C \sup_{0\leq s\leq T} \|\overline{w}(s)\|_1^{1/3}. \tag{2.57}$$

Note agora que multiplicando a primeira e a segunda equação de (2.53) respectivamente por $sgn(\overline{u})$ e $sgn(\overline{w})$, somando e integrando em espaço, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\|\overline{u}\|_1 + \|\overline{w}\|_1\Big) &\leq \int_\Omega u_1|\overline{w}| + w_2|\overline{u}| + |\overline{w}| + w_2|\overline{w}|\, dx \\
&\leq C\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\Big(\|\overline{u}\|_1 + \|\overline{w}\|_1\Big)
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\|\overline{u}(t)\|_1 + \|\overline{w}(t)\|_1 \leq (\|\overline{u}_0\|_1 + \|\overline{w}_0\|_1)e^{3Ct}, \tag{2.58}$$

com a constante C não dependendo de T. Voltando para (2.56), ao combinar (2.58) com (2.57), concluímos

$$\int_\Omega u_2\nabla\overline{u}\nabla\overline{p}\, dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\overline{u}|^2\, dx + C\left(\|\nabla\overline{p}(0)\|_6^2 + (\|\overline{u}_0\|_1 + \|\overline{w}_0\|_1)^{1/3}\right). \tag{2.59}$$

Combinando (2.55) e (2.59) com (2.54), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \overline{u}^2\, dx \leq C\|\overline{w}\|_2^2 + C\left(\|\nabla\overline{q}(0)\|_6^2 + (\|\overline{u}_0\|_1 + \|\overline{w}_0\|_1)^{1/3}\right)e^{Ct}. \tag{2.60}$$

Para w segue o mesmo desenvolvimento feito em (2.52) para o caso $\tau_1 = 0$, donde obtemos

$$\frac{d}{dt}\, \|\overline{w}\|_2^2 \leq C\left(1 + \frac{1}{t^{(1/2)^+}}\right)\, (\|\overline{u}\|_2^2 + \|\overline{w}\|_2^2). \tag{2.61}$$

Por fim, temos que multiplicando a terceira equação de (2.47) por p e integrando em espaço, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \overline{p}^2\, dx + \int_\Omega |\nabla \overline{p}|^2\, dx \le \|\overline{w}\|_2^2 + \|\overline{p}\|_2^2. \tag{2.62}$$

Combinando (2.60), (2.61) e (2.62), obtemos então que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|\overline{u}(t)\|_2^2 + \|\overline{w}(t)\|_2^2 + \|\overline{p}(t)\|_2^2\right)\\
&\quad \le C\left(1 + \frac{1}{t^{(1/2)^+}}\right)\left(\|\overline{u}(t)\|_2^2 + \|\overline{w}(t)\|_2^2 + \|\overline{p}(t)\|_2^2\right)\\
&\qquad + C\left(\|\nabla \overline{p}(0)\|_6^2 + (\|\overline{u}_0\|_1 + \|\overline{w}_0\|_1)^{1/3}\right)e^{Ct},
\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned}
\|\overline{u}(t)\|_2^2 + \|\overline{w}(t)\|_2^2 + \|\overline{p}(t)\|_2^2 &\le C\left(\|\overline{u}(0)\|_2^2 + \|\overline{w}(0)\|_2^2 + \|\overline{p}(0)\|_2^2\right)e^{Ct}\\
&\quad + C\left(\|\nabla \overline{p}(0)\|_6^2 + (\|\overline{u}_0\|_1 + \|\overline{w}_0\|_1)^{1/3}\right)e^{Ct}\\
&\le C\left(\|\overline{u}(0)\|_2^2 + \|\overline{w}(0)\|_2^2 + \|\overline{p}(0)\|_2^2 + \|\nabla \overline{p}(0)\|_6^2\right.\\
&\qquad \left.+ (\|\overline{u}_0\|_1 + \|\overline{w}_0\|_1)^{1/3}\right)e^{C(T)},
\end{aligned}$$

com C dependendo de $\mathcal{M}_2$. Concluímos combinando com o que segue de multiplicar a quarta equação de (2.53) por $\overline{q}$, integrar em espaço, usar a desigualdade de Hölder, e obter $\|\overline{q}(t)\|_{H^1}^2 \le \|\overline{u}(t)\|_2^2$. ■

Seguimos então com o enunciado do teorema de boa colocação global para as soluções fracas do sistema (2.1) para $\tau_1 = 1$.

Teorema 4. *Fixamos $T > 0$ arbitrário e assumimos dados não-negativos $u_0 \in L^3(\Omega)$, $w_0 \in L^{3^+}(\Omega)$ e $\nabla p_0 \in L^{8^+}(\Omega)$. Existe e é única a solução fraca não-negativa para o sistema (2.1) com $\tau_1 = 1$. Tal solução satisfaz as estimativas da Proposição 4.*

Demonstração: Tomemos uma sequência de dados iniciais não-negativos $u_{0,k}, w_{0,k}, p_{0,k} \in C_c^\infty(\Omega)$ com $u_{0,k} \to u_0$ e $w_{0,k} \to w_0$ ambos fortemente em $L^{3^+}(\Omega)$, respectivamente, $p_k \to p$ fortemente em $L^2(\Omega)$ e $\nabla p_k \to \nabla p_0$ fortemente em $L^{8^+}(\Omega)$. O Teorema 2 garante sequências u_k, w_k, p_k e q_k em $C^0([0,+\infty)\times\Omega) \cap C^{1,2}((0,+\infty)\times\Omega)$ que são soluções clássicas para o sistema (2.1) com $\tau_1 = 1$ para cada trio de dados $u_{0,k}, w_{0,k}, p_{0,k} \in C_c^\infty(\Omega)$, ou seja, elas satisfazem

$$(2.1)_k \qquad \begin{cases}
\partial_t u_k - \Delta u_k + \nabla\cdot(u_k \nabla p_k) = u_k w_k - u_k\\
\partial_t w_k - \Delta w_k - \nabla\cdot(w_k \nabla q_k) = w_k(1 - w_k - u_k)\\
\partial_t p_k - \Delta p_k = w_k - p_k\\
\Delta q_k = u_k - q_k.
\end{cases}$$

A Proposição 4 garante que essas sequências são uniformemente limitadas em $L^\infty(0,T;L^{3^+}(\Omega))$ com respeito a $k \geq 1$, enquanto a Proposição 6 garante que u_k, w_k e p_k são sequências de Cauchy em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e q_k sequência de Cauchy em $L^\infty(0,T,H^1(\Omega))$. Portanto

i. $u_k \to u$, $w_k \to w$ e $q_k \to q$ fortemente em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$,

ii. $q_k \to q$ fortemente em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$.

Vale recordar que da regularidade elíptica temos $\|\nabla q(t)\|_\infty \leq C(\Omega)\|w(t)\|_{2^+} \leq C_k$, isto é, ∇q_k é limitada em $L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$, logo

iii. $\nabla q_k \to \nabla q$ fracamente em $L^\infty((0,T)\times\Omega)$.

Na verdade, podemos melhorar a convergência de p_k do item **i.** via o mesmo raciocínio da equação (2.62) para $p_k \to p$ fortemente em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H^1(\Omega))$. Isso segue de definir $\overline{p} = p_k - p_l$, donde $\partial_t\overline{p} - \Delta\overline{p} = \overline{w} - \overline{p}$. Multiplicando essa equação por $\overline{p}$ e integrando em espaço, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \overline{p}^2\,dx + 2\int_\Omega |\nabla\overline{p}|^2\,dx + \int_\Omega \overline{p}^2\,dx \leq 2\int_\Omega \overline{w}^2\,dx.$$

Integrando em $[0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \overline{p}^2\,dx + \int_0^T\int_\Omega |\nabla\overline{p}|^2\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \overline{p}^2\,dx &\leq \|\overline{p}(0)\|_2^2 + \int_0^T\int_\Omega \overline{w}^2\,dx\,dt \\ &\leq \|\overline{p}(0)\|_2^2 + C\|\overline{w}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Assim, da convergência forte $q_k \to q_0$ em L^2, temos que q_k é Cauchy em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$, e também q_k é Cauchy em $L^2(0,T,H^1(\Omega))$, melhorando a convergência do item. Ainda, pelo Lema 4 do Apêndice B, escolhendo $s=2$ e $\theta = 2/3 > 1/2$, temos que

$$\|\nabla\overline{q}(t)\|_6 \leq \|\nabla\overline{q}(0)\|_6 + \sup_{0\leq s\leq T}\|\overline{u}(s)\|_2^{2/3},$$

implicando que ∇q_k é Cauchy em $L^6(\Omega)$, ou seja,

iv. $\nabla q_k \to \nabla q$ fortemente em $L^\infty(0,T,L^6(\Omega))$.

Agora, multiplicando a primeira linha de $(2.1)_k$ por u_k e integrando em espaço, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_k^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_k|^2\,dx + \int_\Omega u_k^2\,dx &\leq \int_\Omega u_k^2 w_k\,dx + \int_\Omega u_k\nabla u_k\nabla p_k\,dx \\ &\leq \|u_k\|_4^2\|w_k\|_2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2\,dx \\ &\quad + \int_\Omega u_k^2|\nabla p_k|^2\,dx.\end{aligned}$$

Usando então que $\|u_k\|_4 \leq C\|u_k\|_2^{1/2}\|u_k\|_{H^1}^{1/2}$, tem-se

$$\|u_k\|_4^2\|w_k\|_2 \leq \frac{1}{4}\|\nabla u_k\|_2^2 + C\|u_k\|_2^2.$$

Para o último termo, segue que

$$\int_\Omega u_k^2|\nabla p_k|^2\,dx \leq \|u_k\|_3^2\|\nabla p_k\|_6^2 \leq C.$$

Assim, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_k^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_k|^2\,dx \leq C.$$

Integrando em $[0,T]$, obtemos que

v. $u_k \to u$ fracamente em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

Multiplicando agora a segunda linha de $(2.1)_k$ por w_k e integrando em espaço, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega w_k^2\,dx + 2\int_\Omega |\nabla w_k|^2\,dx &\leq 2\int_\Omega w_k^2 - w_k^3\,dx - 2\int_\Omega w_k\nabla w_k\nabla q_k\,dx \\ &\leq C - \int_\Omega \nabla w_k^2\nabla q_k\,dx \end{aligned}$$

Multiplicando a quarta equação de $(2.1)_k$ por w_k^2, obtemos

$$\int_\Omega \nabla w_k^2\nabla q_k\,dx = \int_\Omega u_k w_k^2 - q_k w_k^2\,dx$$

que implica

$$-\int_\Omega \nabla w_k^2\nabla q_k\,dx \leq \int_\Omega q_k w_k^2\,dx \leq \|q_k\|_\infty\|w_k\|_2^2 \leq C,$$

uma vez que $\|q_k\|_\infty \leq C\|q_k\|_{H^2} \leq C\|u_k\|_2 \leq C$. Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w_k^2\,dx + 2\int_\Omega |\nabla w_k|^2\,dx \leq C$$

e portanto

$$\int_\Omega w_k^2\,dx + \int_0^T\int_\Omega |\nabla w_k|^2\,dx\,dt \leq C,$$

com a constante C dependendo de T. Assim, obtemos que ∇w_k é limitada em $L^2(0,T,L^2(\Omega))$, donde

vi. $w_k \to w$ fracamente em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

Observe agora que para o termo $u_k\nabla p_k$ temos que

$$\begin{aligned}
\|u_k\nabla p_k - u\nabla p\|_{3/2} &= \|(u_k-u)\nabla p_k + u(\nabla p_k - \nabla p)\|_{3/2}\\
&\leq \|u_k-u\|_2\|\nabla p_k\|_6 + \|u\|_2\|\nabla p_k-\nabla p\|_6\\
&\overset{k\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Segue o mesmo para

$$\begin{aligned}
\|w_k\nabla q_k - w\nabla q\|_1 &\leq \|(w_k-w)\nabla q_k + w(\nabla q_k - \nabla q)\|_1\\
&\leq \|w_k-w\|_2\|\nabla q_k\|_2 + \|w\|_2\|\nabla q_k-\nabla q\|_2\\
&\overset{k\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

vii. $u_k\nabla p_k \to u\nabla p$ fortemente em $L^\infty(0,T,L^{3/2}(\Omega))$ e $w_k\nabla q_k \to w\nabla q$ fortemente em $L^\infty(0,T,L^1(\Omega))$.

Notemos primeiramente que $\partial_t u_k(t) = \nabla\cdot(\nabla u_k - u_k\nabla p_k) + u_k w_k - u_k \in [H^1]^*$. De fato, seja $\phi \in H^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u_k(t), \phi\rangle_{H^1\times H^{-1}} &= \int_\Omega (\nabla u_k - u_k\nabla p_k)\nabla\phi + u_k w_k\phi - u_k\phi\, dx\\
&\leq \|\nabla u_k\|_2\|\phi\|_{H^1} + \|\nabla p_k\|_6\|u_k\|_3\|\phi\|_{H^1} + \|u_k\|_3\|w_k\|_3\|\phi\|_3\\
&\quad +\|u_k\|_2\|\phi\|_2\\
&\leq C\left(\|\nabla u_k\|_2 + \|u_k\|_{2^+}\|u_k\|_2 + \|u_k\|_3\|w_k\|_3 + \|u_k\|_2\right)\|\phi\|_{H^1},
\end{aligned}$$

onde $C = C(\Omega)$ e usamos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, donde temos que $\|\phi\|_3 \leq C\|\phi\|_{H^1}$. Da mesma forma, $\partial_t w_k(t) = \nabla\cdot(\nabla w_k + w_k\nabla q_k) + w_k - w_k^2 - u_k w_k \in [H^1]^*$, uma vez que para todo $\phi \in H^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u_k(t), \phi\rangle_{H^1\times H^{-1}} &= \int_\Omega (\nabla w_k + w_k\nabla q_k)\nabla\phi + w_k\phi - w_k^2\phi - u_k w_k\phi\, dx\\
&\leq \|\nabla w_k\|_2\|\phi\|_{H^1} + \|w_k\|_2\|\nabla q_k\|_\infty\|\phi\|_{H^1} + \|w_k\|_2\|\phi\|_2\\
&\quad +\|w_k\|_3^2\|\phi\|_3 + \|u_k\|_3\|w_k\|_3\|\phi\|_3\\
&\leq C\Big(\|\nabla w_k\|_2 + \|w_k\|_3\|\nabla q_k\|_6 + \|w_k\|_2 + \|w_k\|_3^2\\
&\quad +\|u_k\|_3\|w_k\|_3\Big)\|\phi\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Por fim, temos que $\partial_t p_k = \nabla\cdot\nabla p + w - p \in [H^1(\Omega)]^*$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t p_k(t), \phi\rangle_{H^1\times H^{-1}} &= \int_\Omega -\nabla p_k\nabla\phi + w\phi - p\phi\, dx\\
&\leq (\|\nabla p_k\|_2 + \|w_k\|_2 + \|p_k\|_2)\|\phi\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\partial_t u_k$, $\partial_t w_k$ e $\partial_t p_k$ são limitadas em $L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^*)$ e assim existem subsequências tais que

viii. $\partial_t u_k \to \partial_t u$, $\partial_t w_k \to \partial_t w$ e $\partial_t q_k \to \partial_t q$ fracamente em $L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^*)$.

Pelas convergências obtidas acima podemos fazer $k \to +\infty$ para obter que (u,w,p,q) satisfazem a condição impostas. Para a unicidade usamos o resultado de estabilidade e dados iniciais, como de [i.] e [viii.] podemos concluir que $u,w,p \in C([0,T],L^2(\Omega))$, esses fazem sentido e seguem de forma semelhante ao caso anterior. ■

2.3 Experimentos numéricos

À luz do que foi introduzido no Apêndice A, analisaremos alguns experimentos numéricos. Para os casos em estudo nesse capítulo precisamos deixar clara a escolha dos parâmetros D_u, D_w, D_p, D_q, δ_u, δ_w, δ_p, δ_q, α e β, bem como dados inicias $u(0,x)=u_0(x)$, $w(0,x)=w_0(x)$ e $\tau_1 p(0,x)=\tau_1 p_0(x)$. Apresentaremos aqui a extensão dos experimentos exibidos no final do Capítulo 1, a saber, o Experimento 1a para $\tau_1 = 0$ e Experimento 1b para $\tau_1 = 1$, porém agora com dinâmica populacional, e um experimento numérico com maior duração de tempo para ambos os casos.

Experimento 1a

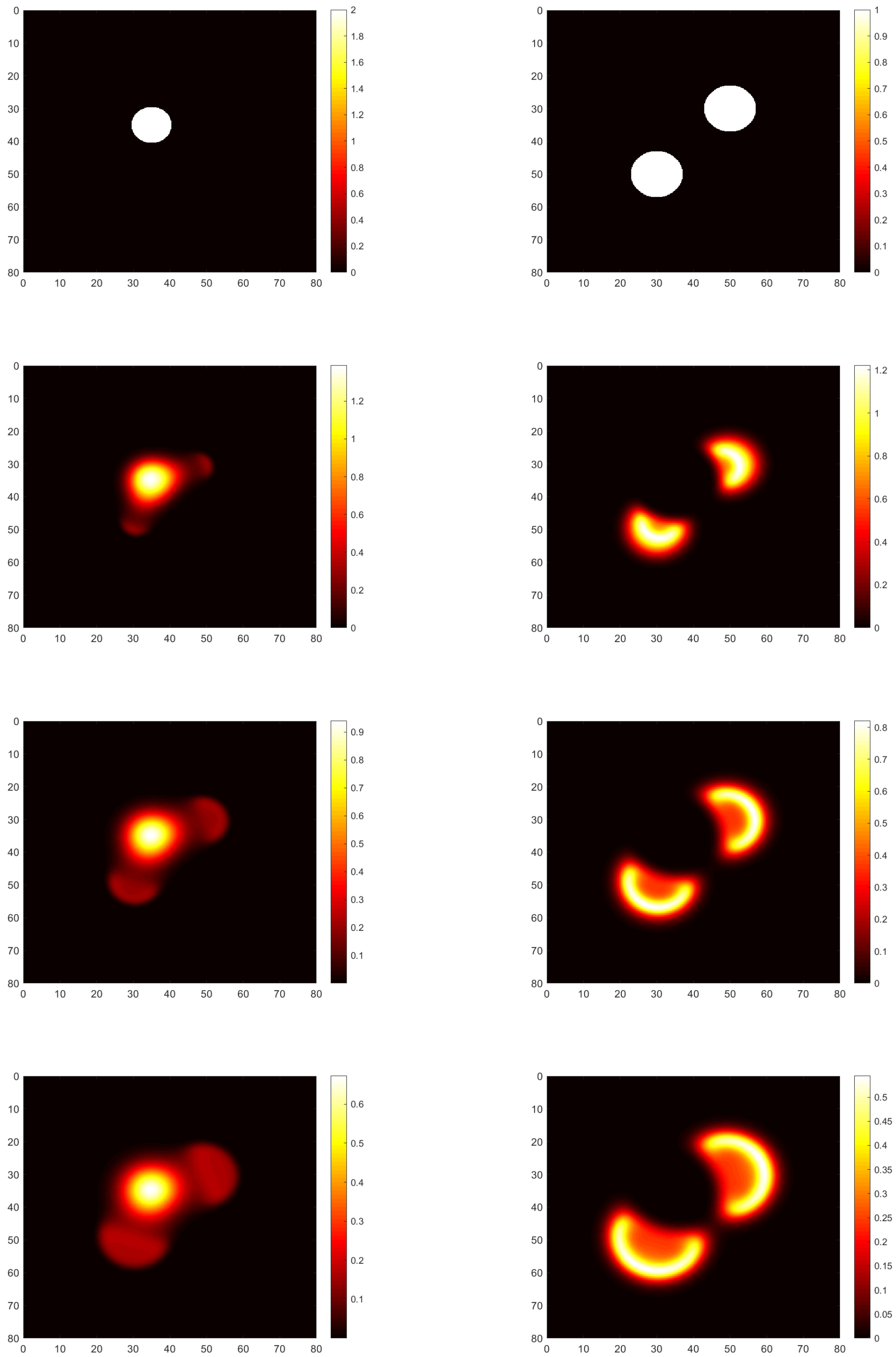
Replicaremos o primeiro experimento do Capítulo 1 referente ao sistema (1.10), porém considerando agora a dinâmica populacional completa. Usaremos novamente os coeficientes $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 10$, $\delta_w = \delta_u = 120$ e $\delta_p = \delta_q = 1$, $\alpha = 10$ e $\beta = 2$. Além disso, consideremos os mesmos dados iniciais, ou seja,

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x-35)^2 + (y-35)^2 < 40 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$w_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x-30)^2 + (y-50)^2 < 60 \;\text{ ou }\; (x-50)^2 + (y-30)^2 < 60 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na Figura 2.1 são apresentadas as simulações numéricas dessa dinâmica para diferentes instantes de tempo.

Vale a pena observar como houve o movimento dirigido conforme o primeiro experimento sem dinâmica populacional, e que agora a população predadora que não detectou presas caiu consideravelmente, assim como a população predada, devido à predação. No próximo experimento consideremos ainda $\tau_1 = 0$ e um caso onde a dinâmica se estende por um tempo maior.



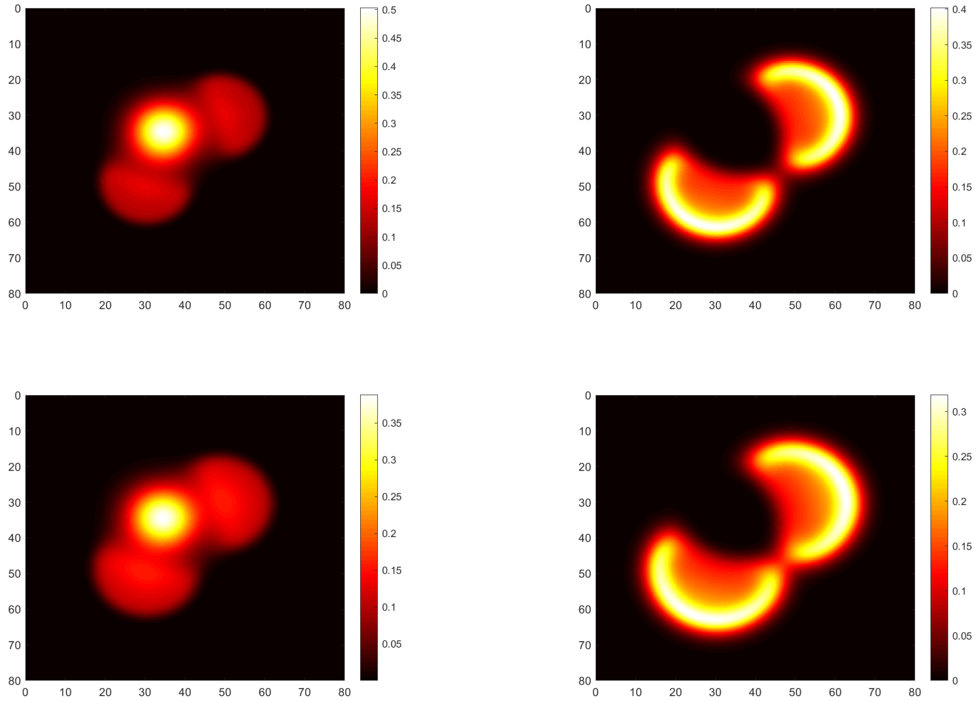


Figura 2.1: Resultado do primeiro Experimento 1a para os parâmetros $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 10$, $\delta_w = \delta_u = 120$, $\delta_p = \delta_q = 1$, $\alpha = 10$ e $\beta = 2$, nos instantes de tempo $t = 0$, 1, 2, 3, 4 e 5. À esquerda encontra-se a população de u enquanto que à direita está a população de w.

Experimento 2

No Experimento 2 consideramos ainda o caso $\tau_1 = \tau_2 = 0$, mas mudamos os dados iniciais e os coeficientes, a saber, escolhemos $D_u = 4$, $D_w = 3$, $D_p = 8$, $D_q = 8$, $\delta_w = 100$, $\delta_u = 110$, $\delta_p = 1,2$, $\delta_q = 1,4$, $\alpha = 5$ e $\beta = 11,5$. Para dados iniciais como na Figura 2.2 obtemos o resultado numérico apresentado na Figura 2.3, onde exibimos, respectivamente, a solução numérica do predador e da presa.

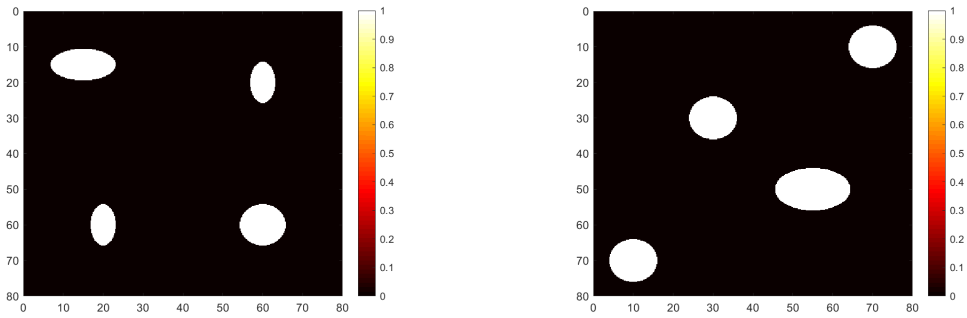
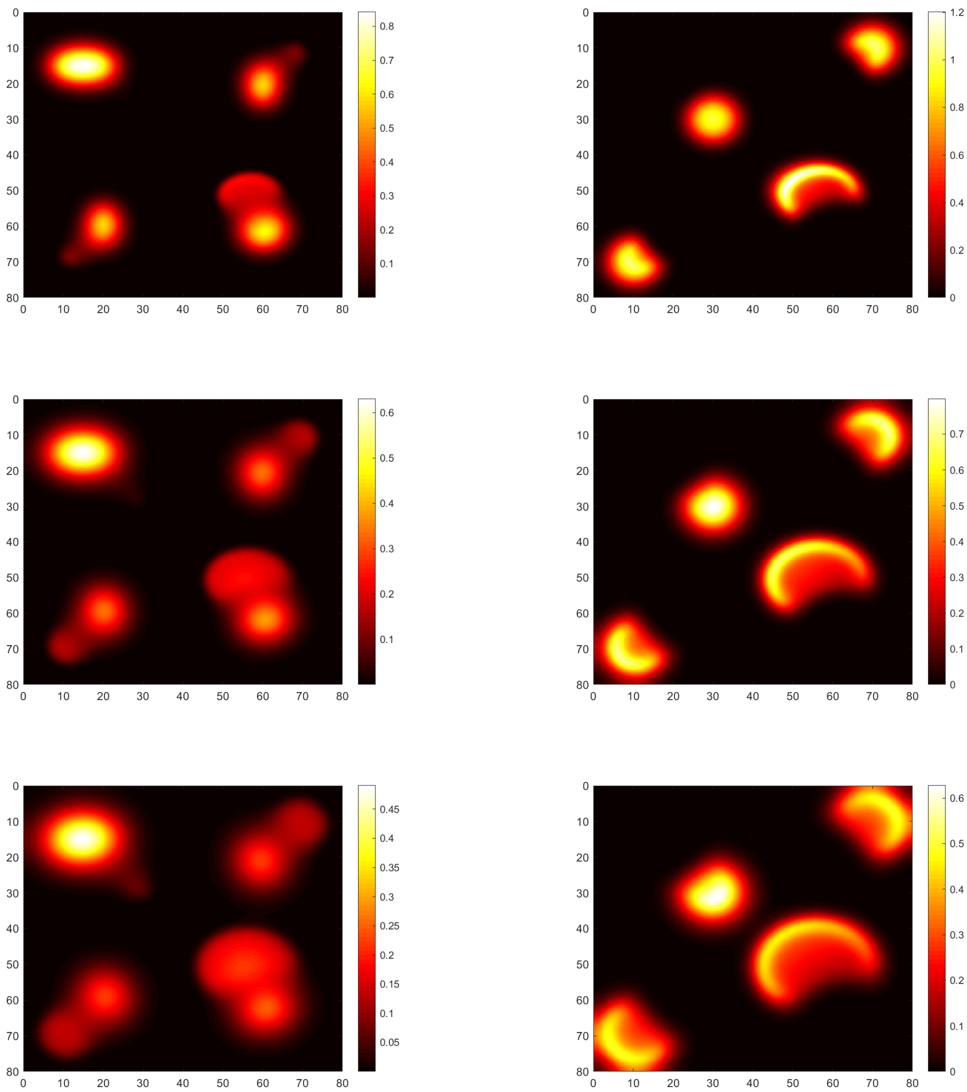
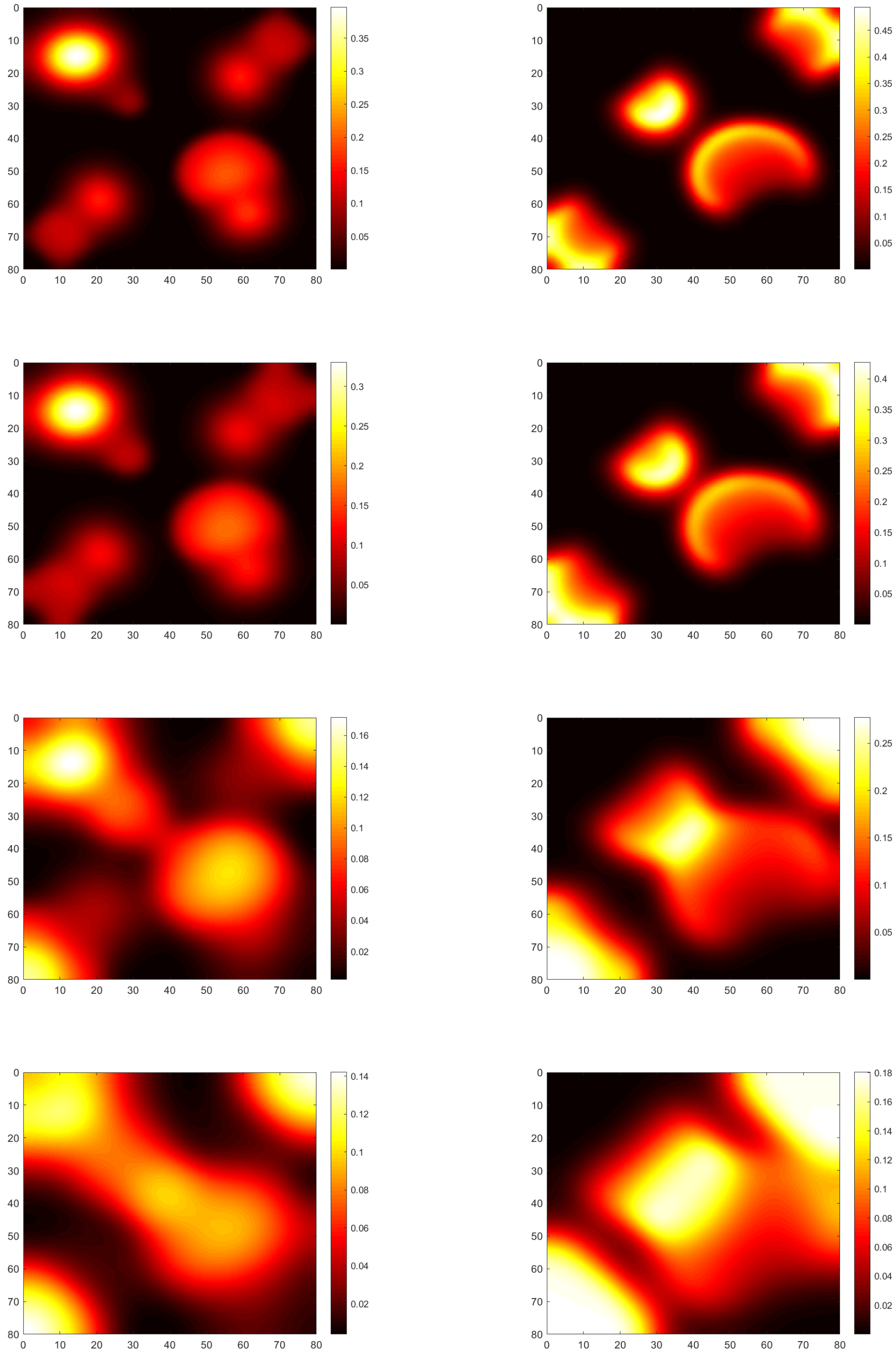


Figura 2.2: Dados iniciais para o Experimento 2 .




0 10 20 30 40 50 60 70 80
0.35 0.3 0.25 0.2 0.15 0.1 0.05
0.45 0.4 0.35 0.3 0.25 0.2 0.15 0.1 0.05
0.3 0.25 0.2 0.15 0.1 0.05
0.4 0.35 0.3 0.25 0.2 0.15 0.1 0.05
0.16 0.14 0.12 0.1 0.08 0.06 0.04 0.02
0.25 0.2 0.15 0.1 0.05
0.14 0.12 0.1 0.08 0.06 0.04 0.02
0.18 0.16 0.14 0.12 0.1 0.08 0.06 0.04 0.02

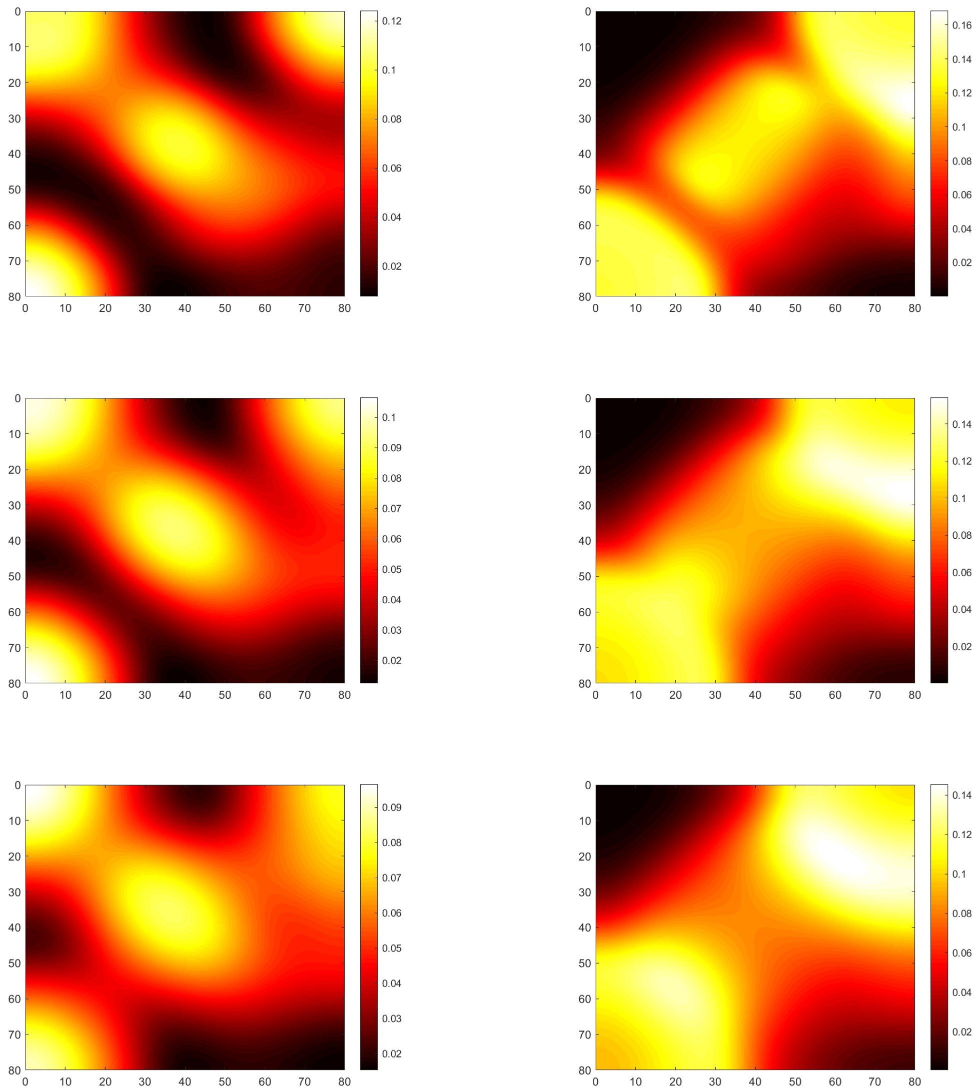


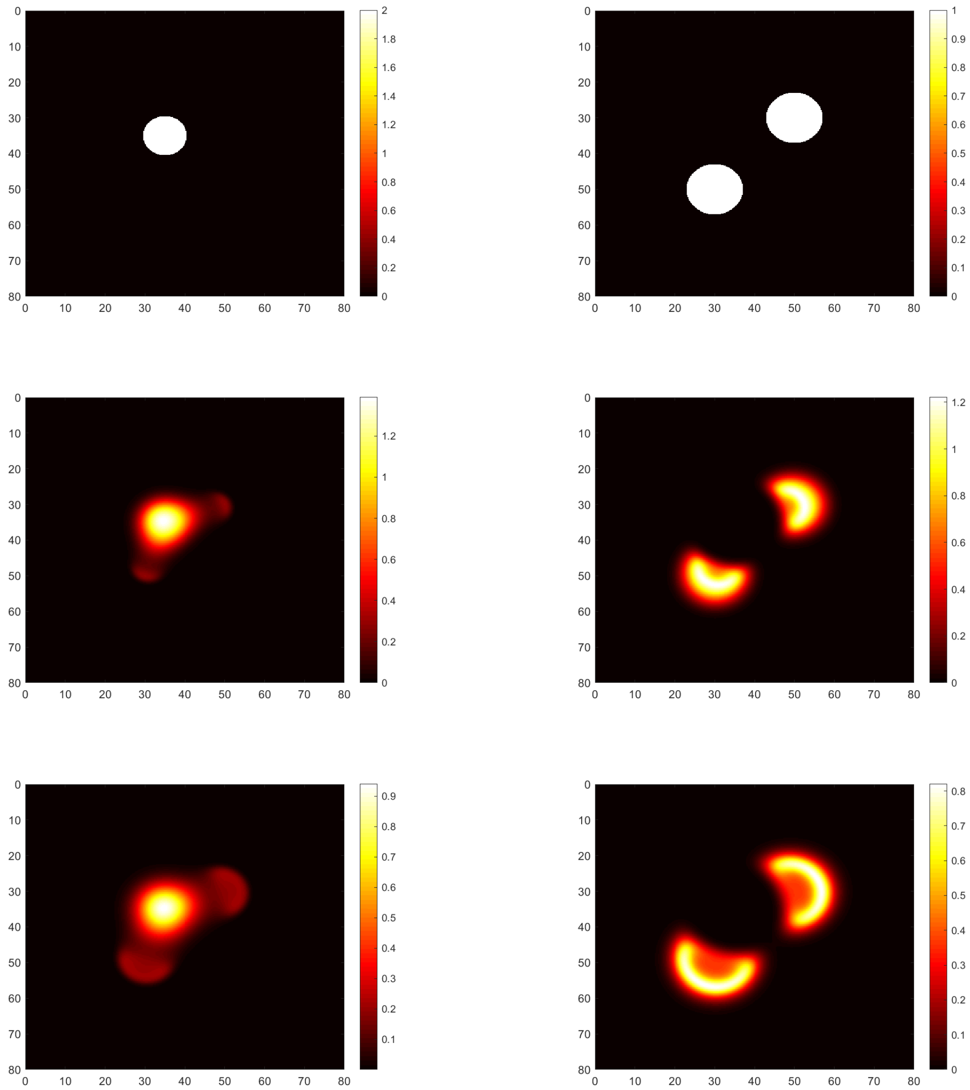
Figura 2.3: Resultado do primeiro experimento numérico para os parâmetros $D_u = 4$, $D_w = 3$, $D_p = 8$, $D_q = 8$, $\delta_w = 100$, $\delta_u = 110$, $\delta_p = 1.2$, $\delta_q = 1.4$, $\alpha = 5$ *e* $\beta = 11.5$, *nos instantes de tempo* $t = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25$ *e* 30. *À esquerda encontra-se a população de presas enquanto que à direita está a população de predadores.*

Experimento 1b

Repetiremos o segundo experimento do Capítulo 1 para o caso $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 0$ descrito pelo sistema (1.11). Usaremos novamente os coeficientes $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 10$, $\delta_w = \delta_u = 120$ e $\delta_p = \delta_q = 1$, e também $\alpha = 10$ e $\beta = 2$. Além disso, consideremos os mesmos dados iniciais u_0 e w_0 do Experimento

1a, que estão apresentados na Figura 1.3. Completamos o sistema com o dado inicial $p_0(x)$ sendo a solução numérica de $-D_p p_0 = \delta_w w_0 - \delta_p p_0$, que pode ser vista na Figura 1.6. Temos os resultados numéricos da dinâmica exibidos para alguns instantes de tempo na Figura 2.4. Lembramos que nesse caso a presa detecta a presença do predador antes de ser detectada. Durante sua evasão a sua população cresce deixando maior rastro de feromônio, e em seguida mantém a população predadora que foi atraída pelo feromônio da presa.

No próximo experimento consideremos ainda $\tau_1 = 1$ e um caso onde a dinâmica se estende por um tempo maior.



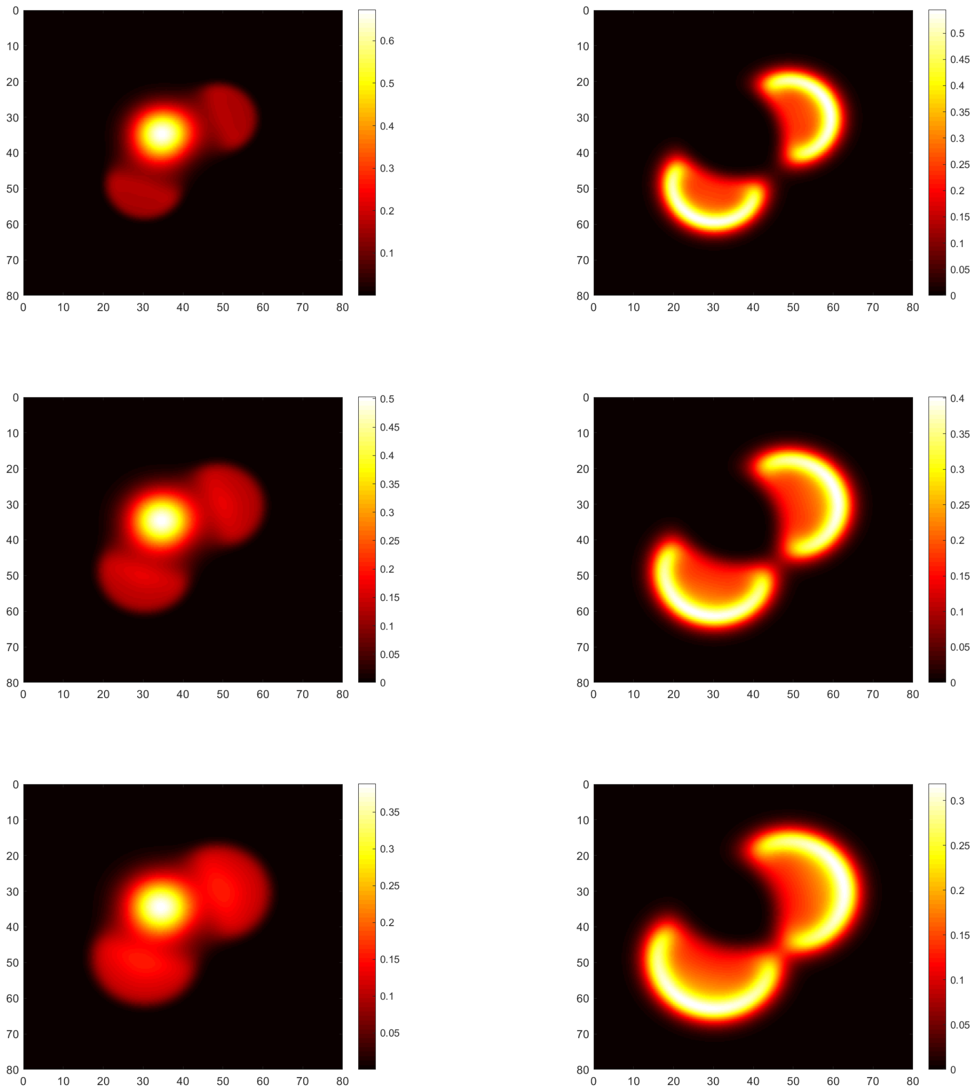


Figura 2.4: Resultado do primeiro experimento numérico para os parâmetros $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 10$, $\delta_w = \delta_u = 120$, $\delta_p = \delta_q = 1$, $\alpha = 10$ e $\beta = 2$, nos instantes de tempo $t = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5. À esquerda encontra-se a população de presas enquanto que à direita está a população de predadores.

Experimento 3

Para o Experimento 1b segundo experimento numérico mudamos os dados iniciais e os coeficientes, a saber, escolhemos $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 10$, $\delta_w = 110$, $\delta_u = 100$, $\delta_p = 0.1$, $\delta_q = 0.35$, $\alpha = 11$ e $\beta = 5$. Para dados iniciais como na Figura 2.5 exibimos os resultados numéricos na Figura 2.6.

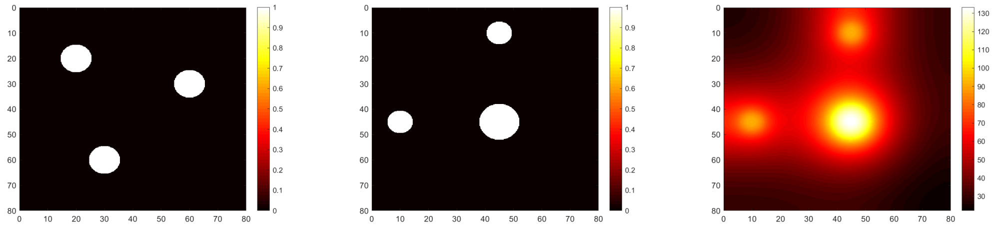
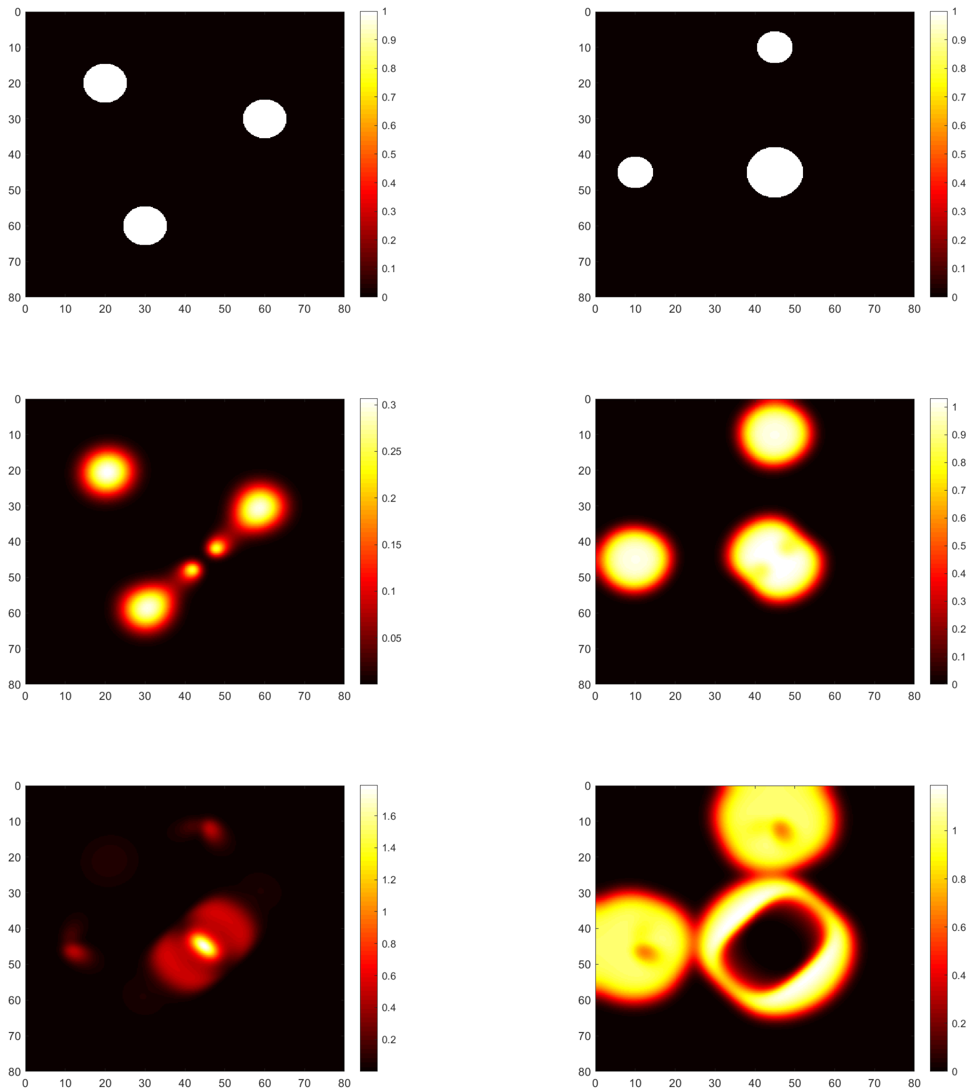
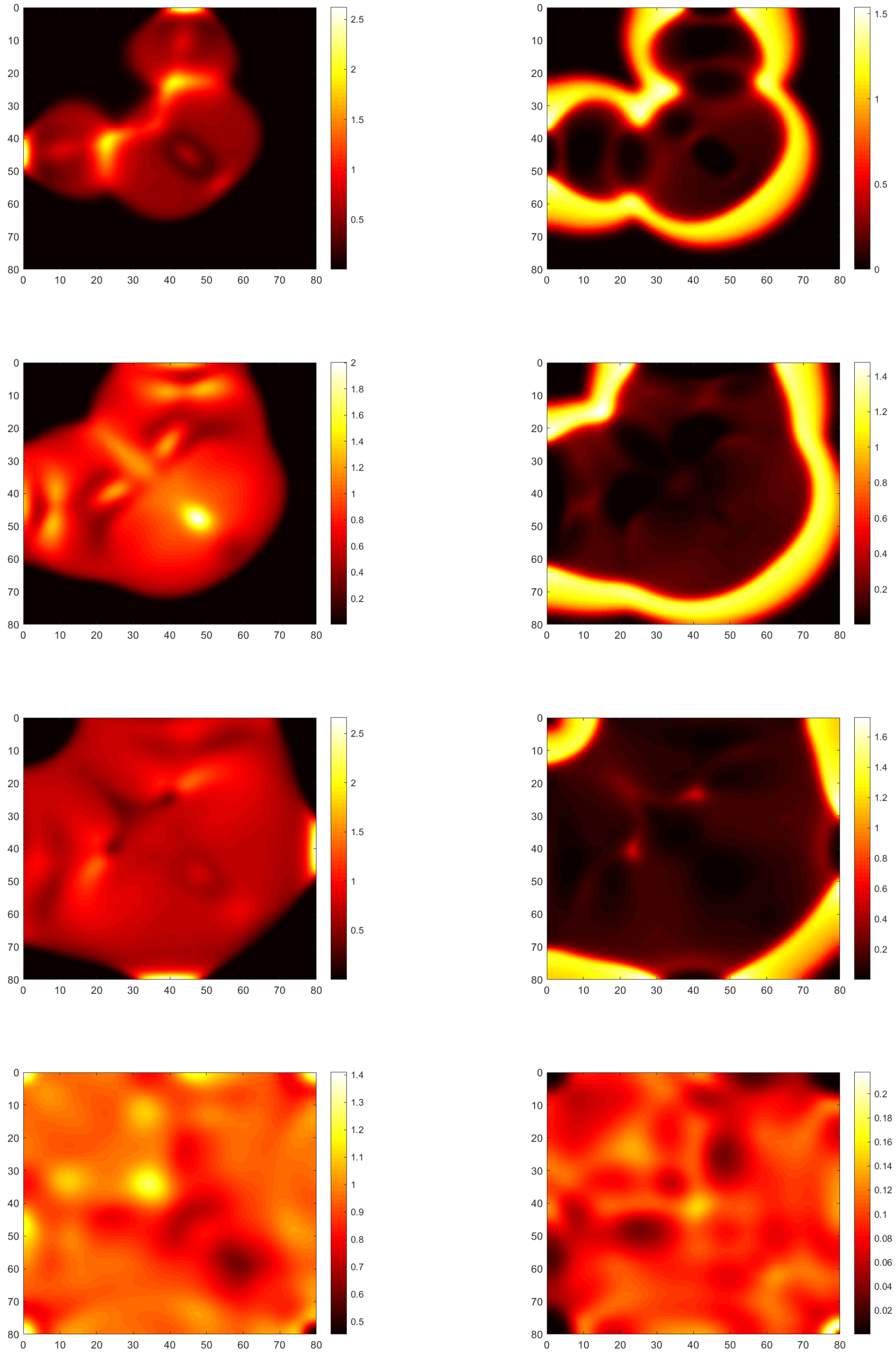
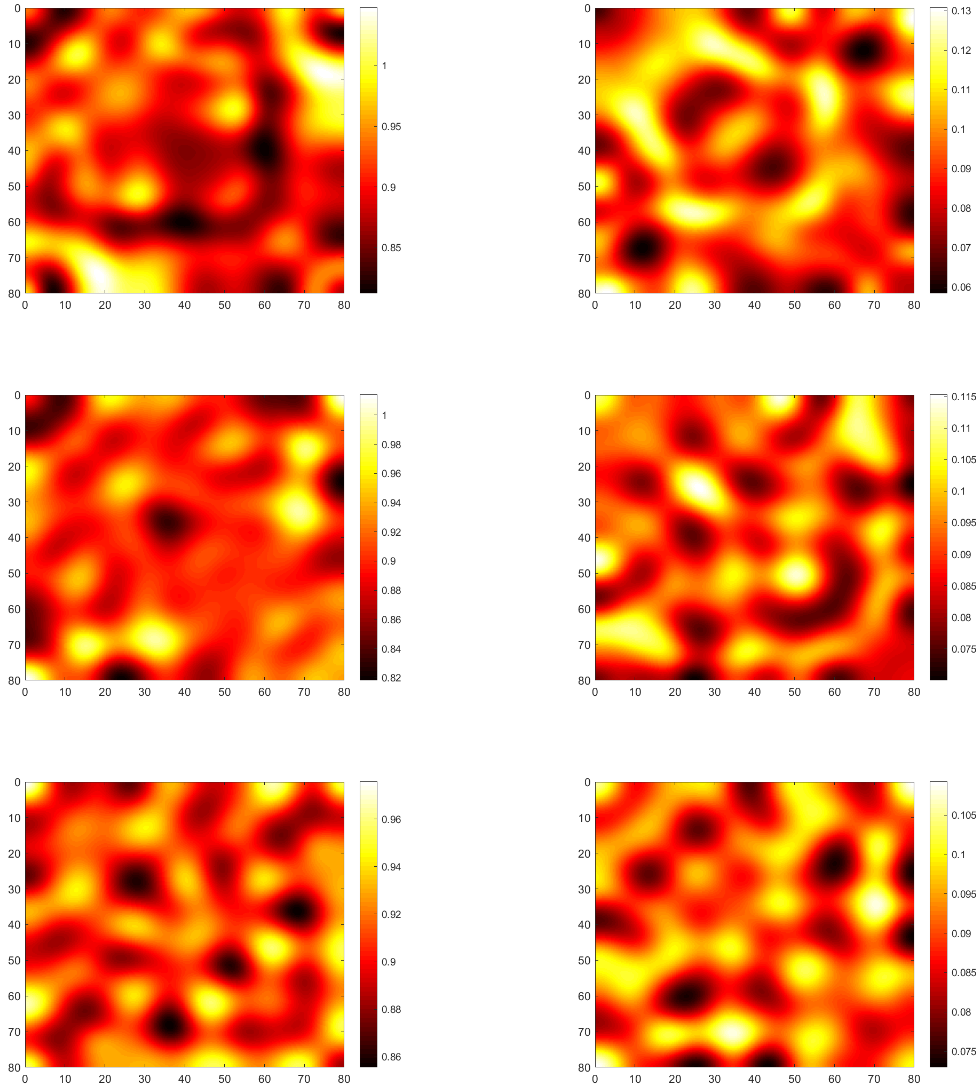


Figura 2.5: Dados iniciais para o Experimento 3. À esquerda a densidade inicial de predadores u_0, ao centro a densidade inicial de presas w_0 e à direita p_0 o dado inicial do feromônio da presa. O dado inicial p_0 foi obtido como a solução numérica de $-10\Delta p_0 = \delta_u u_0 - \delta_p p_0$.






0 10 20 30 40 50 60 70 80
0 10 20 30 40 50 60 70 80
1
0.95
0.9
0.85
0.13
0.12
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
0.88
0.86
0.84
0.82
0.115
0.11
0.105
0.1
0.095
0.09
0.085
0.08
0.075
0.96
0.94
0.92
0.9
0.88
0.86
0.105
0.1
0.095
0.09
0.085
0.08
0.075

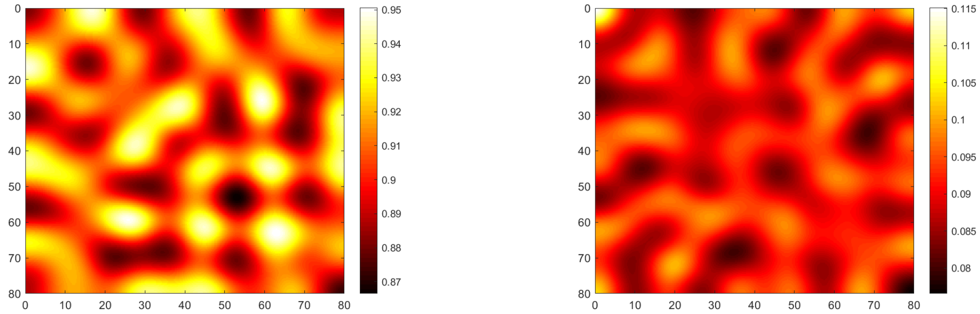


Figura 2.6: Resultado do primeiro experimento numérico para os parâmetros $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 10$, $\delta_w = 110$, $\delta_u = 100$, $\delta_p = 0.1$, $\delta_q = 0.35$, $\alpha = 11$ *e* $\beta = 5$, *nos instantes de tempo* $t = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25 *e* 30. *À esquerda encontra-se a população de* u *enquanto que à direita está a população de* w.

Capítulo 3

Análise do sistema (1.2) para $\tau_2 = 1$

Nesse capítulo faremos uma análise dos sistemas elíptico-parabólico/totalmente parabólico (1.2) apresentados no Capítulo 1 obtidos quando $\tau_2 = 1$. Em vista do que já foi discutido sobre este modelo, as expectativas não são tão boas como nos casos anteriores, e haverá a necessidade de uma cota para os dados iniciais envolvidos. O problema é definido em um domínio suave e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ para o sistema

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = wu - u \\ \partial_t w - \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = w - w^2 - wu \\ \tau_1 \partial_t p - \Delta p = w - p \\ \partial_t q - \Delta q = u - q \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0, \quad \tau_1 p(0) = \tau_1 p_0 \quad \text{e} \quad q(0) = q_0 \\ \displaystyle\int_\Omega w(t) + u(t)\, dx \leq \mathcal{M}, \end{cases} \tag{3.1}$$

com $\tau_1 \in \{0, 1\}$, onde consideramos, por simplicidade, todas as constantes do sistema como sendo 1.

A primeira observação que devemos fazer quanto aos resultados fundamentais de integrabilidade obtidos para os sistemas (1.10) e (1.11) é que tais técnicas não funcionam aqui. Mais precisamente, o mesmo desenvolvimento para esse problema como feito para (1.11) não daria resposta, uma vez que, como em (2.39), teríamos a necessidade de ter $\gamma/(\gamma - 1) < \gamma/(\alpha - 1)$, que é obviamente incompatível com $\gamma < \alpha$. Em vez de estudarmos o sistema (3.1) vamos primeiramente estudar o modelo

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = wu - u \\ \partial_t w - \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = w - w^2 - wu \\ \tau_1 \partial_t p - \Delta p = w - p \\ \partial_t q - \Delta q = F(u) - q \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{e} \quad q(0) = q_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função Lipschitz com $F(0) = 0$ e $F(s) \leq s^{\xi}$ para s suficientemente grande e $\xi \in (0, 1)$. Para a análise que iremos desenvolver, vamos considerar F definida por

$$F(s) = \begin{cases} s, & \text{se} \quad s \in [0, 1] \\ s^{\xi}, & \text{se} \quad s \in [1, +\infty) \end{cases} \tag{3.3}$$

para algum $\xi \in (0, 1)$ fixo. Através desse problema veremos como migrar para uma solução de (3.1).

Note que podemos generalizar o resultado do Lema 1 de existência local e também a conservação de massa $\mathcal{M}$ para o sistema (3.2), donde para dados iniciais $u_0, w_0, \tau_1 p_0, q_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ implicam na existência de $T_{\max} > 0$ e único quarteto $(u, w, p, q) \in C^0([0, T_{\max}) \times \Omega) \cap C^{1,2}((0, T_{\max}) \times \Omega)$ solução clássica de (3.2) em $(0, T_{\max}) \times \Omega$ com a propriedade de que caso $T_{\max} < \infty$, então

$$\lim_{t \to T_{\max}^-} \|u(t)\|_\infty + \|w(t)\|_\infty = +\infty. \tag{3.4}$$

Assim, como no capítulo anterior, numa primeira etapa faremos uma série de estimativas *a priori* em L^γ para as soluções u e w e então completaremos o método de De Giorgi [20] para obter estimativas L^∞ de u e w iniciada no final do Capítulo 1, onde obtemos a estimativa (1.37). Isso garantirá a extensão do resultado de existência local para intervalos de tempo gerais $[0, T]$. Obtemos após as soluções fracas para dados iniciais menos regulares que os exigidos no Lema 1 como limite dessas soluções clássicas.

Outras variantes dessa ideia dão resposta de forma análoga, podendo assim poupar a equação do feromônio da população de predadores de algo que podemos pensar como um efeito de saturação, como por exemplo a abordagem feita em [61], onde estudou-se uma variação do sistema de Keller-Segel (1.3) descrita por

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (D(u) \nabla u) - \nabla \cdot (S(u) \nabla v), \quad x \in \Omega, t > 0 \\ v_t - \Delta v = u - v \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla v \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = w_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde é necessário $\frac{S(u)}{D(u)} \leq cu^\alpha$ para todo $u > 1$, para algum $\alpha < 2/n$ e alguma constante $c > 0$. Esse sistema dá boa resposta caso a condição sobre α seja satisfeita e D (no nosso caso, $D \equiv 1$) apresente alguma regularidade. Porém, caso não seja verificado $\alpha < 2/n$, então para cada $M > 0$ existe massa inicial u_0 tal que $\|u_0\|_1 = M$ e a solução associada a u_0 tem explosão em tempo finito.

3.1 Integrabilidade para (3.2)

Temos o seguinte resultado fundamental de integrabilidade:

Proposição 7. *Seja (u, w, p, q) uma solução clássica não-negativa do sistema (3.2) no intervalo $[0, T]$ com $\tau_1 \in \{0, 1\}$. Considerando as normas dos dados iniciais u_0 em $L^\gamma(\Omega)$, $w_0 \in L^{\gamma^+}(\Omega)$, $\tau_1 \nabla p_0$ e ∇q_0 em $L^{2(\gamma+1)}(\Omega)$, para $\gamma \in (\sqrt{2}, \infty)$. Então existe constante C dependendo de $\mathcal{M}, \Omega, \alpha, \gamma, \xi$, $\|u_0\|_\gamma$, $\|w_0\|_{\gamma^+}$, $\tau_1 \|\nabla p_0\|_{2(\gamma+1)} \in L^{2(\gamma+1)(\Omega)}$ e $\|\nabla q_0\|_{2(\gamma+1)^+}$ tal que*

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \|u(t)\|_\gamma + \sup_{0 \leq s \leq T} \|w(t)\|_\gamma \leq C, \tag{3.6}$$

para todo $t \in (0, T]$.

Demonstração: Consideremos primeiramente $\tau_1 = 0$. Multiplicando a primeira equação de (3.2) por u^γ, $\gamma > 1$, e integrando em espaço como feito em (2.9), obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u^\gamma \, dx + C \int_\Omega u^{\gamma+1} \, dx \leq C \left(\int_\Omega w^{\gamma+1} \, dx + \int_\Omega u^\gamma \, dx \right).$$

Ainda, como $\|u\|_\gamma^\gamma \leq C + \epsilon \|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}$, temos que

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u^\gamma \, dx + C \|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \leq C + \gamma \|w\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}, \tag{3.7}$$

com a constante C dependendo de $\mathcal{M}$, porém independente de γ. O mesmo tratamento para a equação da presa nos dá, ao multiplicar a segunda equação de (3.2) por $w^{\alpha-1}$ e integrar em espaço, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega w^\alpha \, dx + 3\frac{\alpha - 1}{\alpha} \|\nabla w^{\alpha/2}\|_2^2 & \\ \leq \alpha(\alpha - 1) \int_\Omega |\nabla q|^2 w^\alpha \, dx + \alpha \int_\Omega w^\alpha \, dx & \\ \leq \alpha(\alpha - 1) \int_\Omega |\nabla q|^2 w^\alpha \, dx + C + \epsilon \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}. & \end{aligned} \tag{3.8}$$

Aí, usando a desigualdade de Hölder para o primeiro termo à direita, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla q(t)|^2 w^\alpha \, dx \leq C\|\nabla q(t)\|_{2(\alpha+1)}^{2(\alpha+1)} + \epsilon \|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}. \tag{3.9}$$

A fim de usar os resultados de interpolação de Lebesgue, vamos impor $\gamma < \alpha < \gamma + 1$. Usando (2.6) no segundo termo a esquerda de (3.8), substituindo (3.9) e tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^\alpha \, dx + C\|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \leq C + C\|\nabla q(t)\|_{2(\alpha+1)}^{2(\alpha+1)}. \tag{3.10}$$

Note que para o último termo de (3.7) podemos usar a desigualdade de Hölder a fim de obter

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma \, dx + C\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \leq C + \epsilon\|w\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}. \tag{3.11}$$

Definindo $Z(t) = \|u(t)\|_\gamma^\gamma + \|w(t)\|_\alpha^\alpha$ e combinando (3.11) e (3.10), obtemos para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$Z'(t) + C(\|u(t)\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + \|w(t)\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}) \leq C + C\|\nabla q(t)\|_{2(\alpha+1)}^{2(\alpha+1)},$$

donde, via (2.14),

$$Z'(t) + CZ^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \leq C + C\|\nabla q(t)\|_{2(\alpha+1)}^{2(\alpha+1)}. \tag{3.12}$$

A fim de estimar $\|\nabla q(t)\|_{2(\alpha+1)}^{2(\alpha+1)}$ escolhemos $\theta = \frac{\alpha}{\alpha+1}$, $s = 2(\alpha+1)$ e $f = F(u)$ no Lema 4 do Apêndice B para obter

$$\begin{aligned}
\|\nabla q(t)\|_{2(\alpha+1)} &\leq \|\nabla q_0\|_{2(\alpha+1)} + C\sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t} \|F(u(s))\|_{\frac{\theta s}{2}}^{\frac{\theta}{n}\frac{s(n-1)-n}{\theta s-2}} \\
&\leq \|\nabla q_0\|_{2(\alpha+1)} + C\sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t}\left[C_0 + \|u(s)\|_{\xi\alpha}^{\xi\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)(\alpha-1)}} \\
&\leq C + \|\nabla q_0\|_{2(\alpha+1)} + C\sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t}\left[\|u(s)\|_{\xi\alpha}^{\xi\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)(\alpha-1)}}
\end{aligned}$$

para todo $\alpha > \sqrt{2}$. Assim,

$$\|\nabla q\|_{2(\alpha+1)}^{2(\alpha+1)} \leq C + \|\nabla q_0\|_{2(\alpha+1)}^{2(\alpha+1)} + C\sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t}\left[\|u(s)\|_{\xi\alpha}^{\xi\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Forçamos agora $\xi\alpha < \gamma < \alpha$, onde usamos que $\xi < 1$. Usando interpolação de Lebesgue, temos que $\|u\|_{\xi\alpha} \leq \|u\|_1^{1-\theta}\|u\|_\gamma^\theta$ com $\theta = \gamma'/(\xi\alpha)'$. Assim,

$$\|u\|_{\xi\alpha}^{\xi\alpha} \leq C\left(\|u\|_\gamma^\gamma\right)^{\frac{\xi\alpha-1}{\gamma-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\|u(s)\|_{\xi\alpha}^{\xi\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \leq \left[\|u\|_\gamma^\gamma\right]^{\frac{\xi\alpha-1}{\gamma-1}\frac{\alpha}{\alpha-1}} \leq [Z(t)]^{\frac{\xi\alpha-1}{\gamma-1}\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Portanto,

$$\|\nabla q(t)\|_{2(\alpha+1)}^{2(\alpha+1)} \leq C + \|\nabla q_0\|_{2(\alpha+1)}^{2(\alpha+1)} + C \sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t} [Z(t)]^\beta$$

com $\beta = \frac{\xi\alpha-1}{\gamma-1}\frac{\alpha}{\alpha-1} < \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Substituindo em (3.12), obtemos

$$Z'(t) + CZ^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \leq C(\|\nabla q_0\|_{2(\alpha+1)}) + C \sup_{\frac{t}{2}\leq s\leq t} [Z(t)]^\beta.$$

Aplicando o Lema 7, obtemos $\sup\limits_{0\leq s\leq T} Z(s) \leq C$, isto é,

$$\sup_{0\leq s\leq T} \|u(s)\|_\gamma + \sup_{0\leq s\leq T} \|w(s)\|_\alpha \leq C, \quad \xi\alpha < \gamma < \alpha.$$

com a constante $C > 0$ dependendo adicionalmente das normas $\|w_0\|_\alpha$, $\|u_0\|_\gamma$ e também de $\|\nabla q_0\|_{2(\alpha+1)}$ e dos coeficientes α, γ e ξ.

Para $\tau_1 = 1$ basta combinar as ideias das Proposições 3 e o que foi desenvolvido acima, completando a demonstração. ■

O resultado da Proposição 7, para $1 \leq \gamma < \infty$, nos dá condição de estabelecer um ambiente onde poderemos dar continuidade ao método de De Giorgi para obter estimativas L^∞ das soluções u e w do sistema (3.1), como foi descrito no final do Capítulo 1, onde na equação (1.37) obtemos

$$0 \leq u(t,x) + w(t,x) \leq C_0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

com C_0 dependendo de

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \sup_{t\geq 0} \|u\nabla p\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0} \|u^2 w\|_{q'},\\
\mathcal{C}_2 &= \sup_{t\geq 0} \|w\nabla q\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0} \|w\|_{2q'}^2,\\
U_0 &= \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx\, dt,\\
W_0 &= \sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_\Omega |\nabla w(t)|^2\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

A hipótese fundamental dessa seção será considerar a norma dos dados iniciais

$$u_0, w_0 \text{ em } L^{3^+}(\Omega),\ \tau_1 \nabla p_0, \nabla q_0 \text{ em } L^{8^+}(\Omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{M} \tag{3.13}$$

e combinar com a estimativa obtida da Proposição 7. Podemos definir $\mathcal{M}_3$ por

$$\mathcal{M}_3 = \sup_{\gamma \in [1,3^+]} \left\{ \sup_{s\geq 0} \|u(s)\|_\gamma, \sup_{s\geq 0} \|w(s)\|_\gamma \right\}.$$

Tendo primeiramente em mente a definição de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ em (1.35) e (1.36), temos que, caso $\tau_1 = 0$,

$$\|u\nabla p\|_{2q'} \leq \|\nabla p\|_\infty \|u\|_{2q'},$$

e

$$\begin{aligned} \|u^2 w\|_{q'} &\leq \|u^2 w\|_{q'} \\ &\leq \left(\int_\Omega (u^2 w)^{q'} \, dx \right)^{1/q'} \\ &\leq \left(\int_\Omega u^{2sq'} \, dx \right)^{1/sq'} \left(\int_\Omega w^{s'q'} \, dx \right)^{1/s'q'}. \end{aligned}$$

Escolhendo $s = 3/2q'$, temos que

$$\|u^2 w\|_{q'} \leq \left(\int_\Omega u^3 \, dx \right)^{2/3} \left(\int_\Omega w^{\frac{3q'}{3-2q'}} \, dx \right)^{(3-2q')/3}.$$

Então, para q suficientemente grande, $\frac{3q'}{3-2q'} = 3^+$, donde pela Proposição 7, temos

$$\mathcal{C}_1 = \sup_{t\geq 0} \|u\nabla p\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0} \{\|u^2 w\|_{q'}\} < \infty.$$

Também,

$$\begin{aligned} \|w\nabla q\|_{2q'}^2 &\leq \left(\int_\Omega w^{2q'} |\nabla q|^{2q'} \, dx \right)^{1/q'} \\ &\leq \|w\|_{3q'}^2 \|\nabla q\|_{6q'}^2, \end{aligned}$$

e, pelo Lema 4 do Apêndice B, considerando que $F(u) \leq u$, tem-se para $\theta = 1/q'$ que

$$\sup_{0\leq s\leq T} \|\nabla q(s)\|_{6q'} \leq \|\nabla q_0\|_{6q'} + C \sup_{0\leq s\leq T} \left[\|u(s)\|_3^3 \right]^{(3q'-1)/2}.$$

Ainda, $\|w^2\|_{q'} = \|w\|_{2q'}^2$. Logo, para q suficientemente grande,

$$\mathcal{C}_2 = \sup_{t\geq 0} \|w\nabla q\|_{2q'}^2 + \sup_{t\geq 0} \|w\|_{2q'}^2 < \infty.$$

Caso $\tau_1 = 1$, estimamos $\|u\nabla p\|_{2q'}$ da mesmo modo que estimamos $\|w\nabla q\|_{2q'}$ acima. De qualquer forma, obtemos via (1.37) que

$$0 \leq u(t,x) + w(t,x) \leq C_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \tag{3.14}$$

em $[t_*, T]$, com

$$C_0 = C(\sqrt{U_0} + U_0^{\frac{1}{q+1}} + \sqrt{W_0} + W_0^{\frac{1}{q+1}}) \tag{3.15}$$

e $C = C(3.13)$. Sumarizamos então o principal resultado de integrabilidade do caso:

3.1.1 Integrabilidade para $\tau_1 = 0$

Com base na discussão da seção anterior, temos a seguinte proposição:

Proposição 8. *Seja (u, w, p, q) uma solução clássica não-negativa do sistema (3.2) com $\tau_1 = 0$ e consideremos a norma dos dados iniciais como em (3.13). Então, para todo $t \in (0, T]$, temos*

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C(3.13) \tag{3.16}$$

para todo $\gamma \in [1, 3]$ e para $3 < \gamma \leq \infty$ temos

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C(3.13) \left(1 + \frac{1}{t^{1/2\gamma'}}\right), \tag{3.17}$$

onde a constante C depende de (3.13), porém é independente de $T > 0$. Se acrescentarmos a dependência da norma L^∞ de u_0, temos então que

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty e^{3CT} \quad \textit{ou} \quad \|u(t)\|_\infty \leq C(\mathcal{M}_3, \|u_0\|_\infty, \|w_0\|_{3^+}), \tag{3.18}$$

com a constante $C > 0$ independente do tempo T. Finalmente, considerando as normas de u_0 e w_0 em $L^\infty(\Omega)$ e o dado inicial em $q_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ com ∇q_0 satisfazendo a condição de compatibilidade $\nabla q_0 \cdot \boldsymbol{n} = 0$, então podemos melhorar a estimativa para

$$\sup_{0\leq s\leq T} \|w(s)\|_\infty + \sup_{0\leq s\leq T} \|u(s)\|_\infty \leq C,$$

com $C = C(\Omega, \|w_0\|_\infty, \|u_0\|_\infty, \|\nabla q_0\|_\infty)$.

Demonstração: Usando a equação de u, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2\,dx + 2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \;\leq\; \int_\Omega \nabla u^2 \nabla p\,dx + 2\int_\Omega u^2 w\,dx.$$

onde, no último passo, usamos o resultado que segue ao multiplicar a segunda equação de (3.2) por u^2 e integrar em espaço, isto é,

$$\int_\Omega \nabla u^2\nabla p\,dx \leq \int_\Omega u^2 w\,dx - \int_\Omega pu^2\,dx \leq \int_\Omega u^2 w\,dx.$$

Substituindo, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2\,dx + 2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leq 3\int_\Omega u^2 w\,dx.$$

Integrando em $[0,t]$ para $t\in[0,T]$, obtemos

$$\int_\Omega u^2(t)\,dx + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u(t')|^2\,dx\,dt' \leq \int_\Omega u_0^2\,dx + 3\int_0^t\int_\Omega u^2 w\,dx\,dt'.$$

Observemos que dessa desigualdade segue que

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_\Omega u^2(t)\,dx \leq \int_\Omega u_0^2\,dx + \int_0^T\int_\Omega u^2 w\,dx\,dt'.$$

e também

$$\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dt' \leq \int_\Omega u_0^2\,dx + \int_0^T\int_\Omega u^2 w\,dx\,dt'$$

Somando essas desigualdades, obtemos

$$\frac{U_0}{2} \leq \int_\Omega u_0^2\,dx + \int_0^T\int_\Omega u^2 w\,dx\,dt' \leq C(T+1). \tag{3.19}$$

O mesmo procedimento para w nos dá

$$\begin{aligned} W_0 &\leq 2\int_\Omega w_0^2\,dx + 2\int_0^T\int_\Omega |w\nabla q|^2\,dx\,dt' + 2\int_0^T\int_\Omega w^2\,dx\,dt \\ &\leq C(T+1) + 2\int_0^T \|w\|_2^2\|\nabla q\|_6^2\,dt' \\ &\leq C(T+1). \end{aligned}$$

Logo,

$$0 \leq u(t,x) + w(t,x) \leq C(T+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \tag{3.20}$$

onde consideramos que $0 < t_* < 1$. Extensão para intervalos gerais sem a dependência de $T > 0$ é feita de maneira já padrão, seguindo então a estimativa (3.17). Ainda, considerando a norma dos dados iniciais u_0 e w_0 em $L^{3^+}(\Omega)$ e ∇q_0 em $L^{8^+}(\Omega)$, temos portanto para todo $\gamma > 1$ que $\|u(t)\|_\gamma \leq \|u(t)\|_1^{1/\gamma}\|u(t)\|_\infty^{1/\gamma'}$ e $\|w(t)\|_\gamma \leq \|w(t)\|_1^{1/\gamma}\|w(t)\|_\infty^{1/\gamma'}$, donde melhoramos a estimativa da Proposição 7 para

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \leq C\left(1 + \frac{1}{t^{(1/2\gamma')^+}}\right),$$

quando $\gamma \in (3, +\infty)$. Se $\gamma \in [1, 3]$ é mais vantajosa a estimativa já obtida na Proposição 7.

Usaremos então esse resultado para demonstrar a estimativa (3.18). Para isso, considerando então a norma de u_0 em $L^\infty(\Omega)$, temos que ao multiplicar a primeira equação de (3.2) por $u^{\gamma-1}$, $\gamma > 1$, e integrar em espaço, que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\, dx + 4\frac{\gamma-1}{\gamma}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{\gamma}{2}}|^2\, dx &\leq \int_\Omega u^{\gamma-1}\nabla u \nabla p\, dx + \int_\Omega u^\gamma w\, dx \\
&\leq \gamma\int_\Omega \nabla u^\gamma \cdot \nabla p\, dx + \gamma\int_\Omega u^\gamma w\, dx.
\end{aligned}$$

Multiplicando a terceira linha de (3.2) por u^γ e integrando em espaço, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u^\gamma \cdot \nabla p\, dx \leq \int_\Omega u^\gamma w\, dx.$$

Assim, utilizando o resultado da estimativa (3.17), temos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\, dx \leq 2\gamma\int_\Omega u^\gamma w\, dx \leq C\gamma\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega u^\gamma\, dx.$$

Definindo $U(t) := \int_\Omega u^\gamma(t)\, dx$, temos que

$$\frac{d}{dt}\, U(t) \leq C\gamma\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)U(t),$$

donde implica

$$U(t) \leq U(0)e^{C\gamma\int_0^t\left(1+1/\sqrt{s}\right)\, ds} \leq U(0)e^{3CT\gamma}.$$

Assim, $[U(t)]^{1/\gamma} \leq U(0)e^{3CT}$. Fazendo $\gamma \to +\infty$, obtemos $\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty e^{3CT}$ para algum T qualquer, podendo ser pequeno. Combinando com (3.17), concluímos a limitação para todo $T > 0$ sem a dependência de T. Finalmente, consideremos as normas de u_0 e w_0 em L^∞ e q_0 elemento de $C^1(\overline{\Omega})$

com ∇q_0 satisfazendo a condição de compatibilidade $\nabla q_0 \cdot \mathbf{n} = 0$. Nesse cenário já sabemos que $\|u(t)\|_\infty \leq C\|u_0\|_\infty$. Vamos obter uma estimativa para $\|\nabla q\|_\infty$ em tempo e espaço. Pela fórmula de Duhamel para $q(t)$ temos que

$$\|\nabla q(t)\|_\infty = \|\nabla e^{t\Delta} q_0\|_\infty + \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta} u(s)\|_\infty \, ds.$$

Temos que a condição $\nabla q_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ garante $\|\nabla e^{t\Delta} q_0\|_\infty \leq C\|\nabla q_0\|_\infty$ (ver [44], imersão (2.29)), para $t \in (0,1]$. Usaremos agora o Lema 3. Pelo item (ii) desse lema, temos que

$$\|\nabla e^{(t-s)\Delta} u(s)\|_\infty \leq \frac{C}{\sqrt{t-s}} \|u(s)\|_\infty,$$

para $t \in (0,1]$. Logo, como consequêcia, temos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla q\|_\infty &:= \sup_{0\leq s\leq 1} \|\nabla q(s)\|_\infty \\
&= C\left(\|\nabla q_0\|_\infty + \sqrt{t} \sup_{0\leq s\leq T} \|u(s)\|_\infty\right) \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

para $t \in (0,1]$. Ainda, pela fórmula de Duhamel,

$$w(t) = e^{t\Delta} w_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}[\nabla \cdot (w(s)\nabla q(s)) + w(s) - w^2(s) - u(s)w(s)] \, ds. \tag{3.21}$$

Por um lado, usando a estimativa (1.8) de [69], temos que $\|e^{t\Delta} w_0\|_\infty \leq C\|w_0\|_\infty$ para todo $t \in (0,1]$. Por outro lado, usando o Lema 5 do Apêndice B, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} \nabla (w(s)\nabla q(s))\|_\infty \, ds &\leq C\int_0^t \frac{\|w(s)\nabla q(s)\|_\infty}{\sqrt{t-s}} \, ds \\
&\leq C\|\nabla q\|_\infty \sqrt{t} \sup_{0\leq s\leq t} \|w(s)\|_\infty,
\end{aligned}$$

para $t \in (0,1]$. Voltando a (3.21), temos que para qualquer $0 < t \leq t_0 \leq 1$, que

$$\begin{aligned}
\|w(t)\|_\infty &\leq C\|w_0\|_\infty + C\|\nabla q\|_\infty \sqrt{t_0} \sup_{0\leq s\leq t_0} \|w(s)\|_\infty + Ct_0 \sup_{0\leq s\leq t_0} \|w(s)\|_\infty \\
&\leq C\|w_0\|_\infty + C(\|\nabla q\|_\infty \sqrt{t_0} + t_0) \sup_{0\leq s\leq t_0} \|w(s)\|_\infty \\
&\leq C\|w_0\|_\infty + C\sqrt{t_0}(\|\nabla q\|_\infty + 1) \sup_{0\leq s\leq t_0} \|w(s)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Assim, tomando o supremo de $t \in (0, t_0]$ e escolhendo $\sqrt{t_0} = \min\{1, 1/2C(\|\nabla q\|_\infty + 1)\}$, concluímos que

$$\sup_{0 \le s \le t_0} \|w(s)\|_\infty \le C\|w_0\|_\infty.$$

Combinando esse resultado com a estimativa (3.17) concluímos a demonstração. ■

3.1.2 Integrabilidade para $\tau_1 = 1$

Consideramos finalmente o caso $\tau_1 = 1$ em (3.2). Combinando as análises feitas nos sistemas (1.11) e (1.12), chegamos na Proposição 9. Vale reparar que a limitação de u em L^∞ no caso anterior requer apenas a norma de u_0 em L^∞, porém, para $\tau_1 = 1$ é necessário um pouco mais.

Proposição 9. *Seja (u, w, p, q) uma solução clássica não-negativa do sistema (3.1) com $\tau_1 = 1$ e consideremos a norma dos dados iniciais como em (3.13). Então existe $C > 0$ tal que para todo $t \in (0, T]$ temos*

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \le C(3.13) \tag{3.22}$$

para todo $\gamma \in [1, 3]$ e para $3 < \gamma \le \infty$ temos

$$\|u(t)\|_\gamma + \|w(t)\|_\gamma \le C(3.13)\left(1 + \frac{1}{t^{1/2\gamma'}}\right), \tag{3.23}$$

onde a constante C é independente de $T > 0$. Acrescentando a constante C as dependências de $\|u_0\|_\infty$, $\|w_0\|_\infty$, $\|\nabla p_0\|_\infty$ e $\|\nabla q_0\|_\infty$, temos então que

$$\|u(t)\|_\infty \le C(T)\|u_0\|_\infty \quad ou \quad \|u(t)\|_\infty \le C. \tag{3.24}$$

Acrescentando ainda p_0 e q_0 elementos de $C^1(\overline{\Omega})$ com ∇p_0 e ∇q_0 satisfazendo a condição de compatibilidade $\nabla p_0 \cdot \boldsymbol{n} = \nabla q_0 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ em $\partial\Omega$, então temos a estimativa

$$\sup_{0 \le s \le T} \|w(s)\|_\infty + \sup_{0 \le s \le T} \|u(s)\|_\infty \le C.$$

Demonstração: A mesma análise feita nos capítulos anteriores vale aqui considerando cada caso em questão e combinando com a Proposição 7, obtendo (3.22) e (3.23). Considerando então as normas de u_0, ∇p_0 e ∇q_0 em $L^\infty(\Omega)$ com $\|u_0\|_\infty > 0$, temos que, ao multiplicar a segunda equação de (3.1) por $u^{\gamma-1}$, γ suficientemente grande, e integramos em espaço, que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\, dx + 4\frac{\gamma-1}{\gamma}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{\gamma}{2}}|^2\, dx \\
&\qquad\qquad \leq \int_\Omega u^{\gamma-1}\nabla u \nabla p\, dx + \int_\Omega u^\gamma w\, dx \\
&\qquad\qquad \leq \frac{2}{\gamma}\int_\Omega u^{\gamma/2}\nabla u^{\gamma/2}\nabla p\, dx + \gamma\int_\Omega u^\gamma w\, dx. \\
&\qquad\qquad \leq \frac{2}{\gamma}\int_\Omega |\nabla u^{\gamma/2}|^2\, dx + \frac{2}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma |\nabla p|^2\, dx + \gamma\int_\Omega u^\gamma w\, dx.
\end{aligned}$$

Aí, usando o resultado da estimativa (3.23), temos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\, dx + C\int_\Omega |\nabla u^{\frac{\gamma}{2}}|^2\, dx \leq \frac{2}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma|\nabla p|^2\, dx + C\gamma\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega u^\gamma\, dx.$$

Agora, usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (2.6), temos que

$$\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \leq C\|u\|_1(\|\nabla u^{\gamma/2}\|_2^2 + \|u\|_\gamma^\gamma) \leq C(T)\|u_0\|_1(\|\nabla u^{\gamma/2}\|_2^2 + \|u\|_\gamma^\gamma),$$

que é resultado de integrar a equação do predador em espaço para obter

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u\, dx \leq \int_\Omega uw\, dx \leq C\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega u\, dx \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega u\, dx \leq \|u_0\|_1 e^{3CT}.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\, dx + \frac{1}{C(T)\|u_0\|_1}\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \leq \frac{2}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma|\nabla p|^2\, dx + C\gamma\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega u^\gamma\, dx.$$

Observe que

$$\int_\Omega u^\gamma|\nabla p|^2\, dx \leq \left(\int_\Omega u^{\gamma+1}\, dx\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\|\nabla p\|_{2(\gamma+1)}^2 \leq \|u\|_{\gamma+1}^\gamma \|\nabla p\|_{2(\gamma+1)}^2.$$

Vale a pena observar também que para todo $s > 2$, pelo Lema 4 do Apêndice B, temos

$$\|\nabla p(t)\|_s \leq \|\nabla p_0\|_s + \sup_{0\leq s\leq T}\|w(s)\|_{\frac{\theta s}{2}}^{\frac{\theta}{2}\frac{s-2}{\theta s-2}},$$

onde deve ser satisfeito $s\theta/2 > 1$ e $s\theta/(2-\theta) > 2$. Escolhemos $s = 2(\gamma+1)$ e $\theta = 3/(\gamma+1)$ para obter

$$\begin{aligned}
\|\nabla p(t)\|_{2(\gamma+1)} &\leq \|\nabla p_0\|_{2(\gamma+1)} + \sup_{0\leq s\leq T}\|w(s)\|_3^{\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\gamma+1}} \\
&\leq \|\nabla p_0\|_\infty + C \\
\Rightarrow \|\nabla p(t)\|_{2(\gamma+1)} &= \mathcal{N}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\gamma\,dx &\leq \mathcal{N}\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma} - \frac{1}{\mathcal{M}}\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + C\gamma\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega u^\gamma\,dx \\
&\leq \frac{\mathcal{N}(C(T)\|u_0\|_1)^{\gamma/(\gamma+1)}}{(C(T)\|u_0\|_1)^{\gamma/(\gamma+1)}}\,\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma} - \frac{1}{C(T)\|u_0\|_1}\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} \\
&\quad + C\gamma\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega u^\gamma\,dx \\
&\leq \mathcal{N}^{\gamma+1}(C(T)\|u_0\|_1)^{\gamma+1} + \frac{1}{C(T)\|u_0\|_1}\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} - \frac{1}{C(T)\|u_0\|_1}\|u\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} + \\
&\quad + C\gamma\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega u^\gamma\,dx \\
&\leq \mathcal{N}^{\gamma+1}(C(T)\|u_0\|_1)^{\gamma+1} + C\gamma\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\int_\Omega u^\gamma\,dx
\end{aligned}$$

Definindo $U(t) := \int_\Omega u^\gamma(t)\,dx$, temos que

$$\frac{d}{dt}\,U(t) \leq \mathcal{N}^{\gamma+1}(C(T)\|u_0\|_1)^{\gamma+1} + C\gamma\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)U(t),$$

donde implica

$$\begin{aligned}
U(t) &\leq \left[U(0) + \mathcal{N}^{\gamma+1}(C(T)\|u_0\|_1)^{\gamma+1}t\right]\,e^{C\gamma\int_0^t\left(1+1/\sqrt{s}\right)\,ds} \\
&\leq \left[U(0) + \mathcal{N}^{\gamma+1}(C(T)\|u_0\|_1)^{\gamma+1}T\right]\,e^{3CT\gamma} \\
\Rightarrow\quad [U(t)]^{1/\gamma} &\leq \left[U(0) + \mathcal{N}^{\gamma+1}(C(T)\|u_0\|_1)^{\gamma+1}T\right]^{1/\gamma}\,e^{3CT} \\
&\leq \left([U(0)]^{1/\gamma} + \mathcal{N}^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(C(T)\|u_0\|_1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}T^{1/\gamma}\right)e^{3CT} \\
&\leq \left([U(0)]^{1/\gamma} + (1+\mathcal{N})^2(C(T)\|u_0\|_1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}T^{1/\gamma}\right)e^{3CT}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\gamma \to +\infty$, obtemos

$$\|u(t)\|_\infty \leq C(T,\mathcal{N})\max\{\|u_0\|_\infty, C(T)\|u_0\|_1\}. \tag{3.25}$$

Isso prova limitação em $[0,T]$, para algum T pequeno. Extensão para todo $T>0$ sem dependência de T pode ser feita combinando (3.25) com (3.23), obtendo a estimativa sem dependência de T. A última estimativa também segue análoga aos casos anteriores. ■

3.2 Soluções clássica e fraca para (3.2)

As estimativas obtidas até então nos deixa aptos a enunciar o seguinte teorema de boa colocação global:

Teorema 5. *Consideremos os dados iniciais não-negativos $u_0, w_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $\tau_1 p_0, q_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo a condição de compatibilidade $\tau_1 \nabla p_0 \cdot \boldsymbol{n} = \nabla q_0 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ em $\partial\Omega$, com $\tau_1 \in \{0,1\}$. Então o sistema (3.2) admite um único quarteto $(u,w,p,q) \in C^0([0,T)\times\Omega) \cap C^{1,2}((0,T)\times\Omega)$ solução clássica não-negativa para qualquer $T > 0$. Essa solução satisfaz as estimativas da Proposição 8 caso $\tau_1 = 0$ e da Proposição 9 caso $\tau_1 = 1$. Além disso, fixamos $T > 0$ arbitrário e assumimos dados não-negativos $u_0 \in L^3(\Omega)$,$w_0 \in L^{3^+}(\Omega)$ e p_0, q_0 tais que $\tau_1 \nabla p_0, \nabla q_0 \in L^{8^+}(\Omega)$. Nesse caso, existe e é única a solução fraca não-negativa para o Sistema (3.2). Tal solução também satisfaz as estimativas da Proposição 8 caso $\tau_1 = 0$ e da Proposição 9 caso $\tau_1 = 1$.*

Demonstração: Como no capítulo anterior, com ligeiras óbvias diferenças e usando que a função F é Lipschitz, conseguimos o resultado semelhante: Sejam (u_i, w_i, p_i, q_i) são soluções clássicas onde vamos considerar a norma dados iniciais $u_{0,i}$ em $L^3(\Omega)$, $w_{0,i}$ em $L^{3^+}(\Omega)$, $\tau_1 \nabla p_{0,i}$ em $L^{8^+}(\Omega)$ e $\nabla q_{0,i}$ em $L^8(\Omega)$, $i = 1,2$, então existe constante $C > 0$ dependendo das respectivas normas L^3 de $u_{0,i}$, L^{3^+} de $w_{0,i}$, L^{8^+} de $\tau_1 \nabla p_{0,i}$ e da norma L^8 de $\nabla q_{0,i}$ tal que

$$
\begin{aligned}
&\|u_1(t) - u_2(t)\|_2 + \|w_1(t) - w_2(t)\|_2 + \|p_1(t) - p_2(t)\|_{H^1} + \|q_1(t) - q_2(t)\|_2 \\
&\leq \Big(\|u_{1,0}(t) - u_{2,0}(t)\|_2 + \|w_{1,0}(t) - w_{2,0}(t)\|_2 + \|q_{1,0} - q_{2,0}\|_2 \\
&\qquad + \tau_1 \|\nabla p_{1,0} - \nabla p_{2,0}\|_6^2 + \|\nabla q_{1,0} - \nabla q_{2,0}\|_6^2 \\
&\qquad + (\|u_{1,0} - u_{2,0}\|_1 + \|w_{1,0} - w_{2,0}\|_1)^{2/3} \Big) e^{Ct}.
\end{aligned}
$$

A demonstração então segue análoga aos demais casos. ∎

Segue abaixo o que sabemos até então do sistema original (3.1). Consideremos $\tau_1 = 0$. À luz desses resultados, fixado $T > 0$, temos que se (u_0, w_0, p_0, q_0) são dados iniciais suficientemente regulares para que exista a solução clássica (3.2) no intervalo $[0,T]$, ou seja, temos que o quarteto (u,w,p,q) é solução no sentido clássico de

$$
\begin{cases}
\partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = wu - u \\
\partial_t w - \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = w - w^2 - wu \\
\tau_1 \partial_t p - \Delta p = w - p \\
\partial_t q - \Delta q = F(u) - q \\
\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\
u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{e} \quad q(0) = q_0,
\end{cases}
$$

com
$$F(s) = \begin{cases} s, & \text{se} \quad s \in [0,1] \\ s^{\xi}, & \text{se} \quad s \in [1, +\infty) \end{cases}$$
Ora, via (3.18), temos que
$$\|u(t)\|_{\infty} \leq \|u_0\|_{\infty} e^{CT}.$$
Como o tempo $T > 0$ é fixo, temos que existe uma faixa onde podemos tomar o dado u_0 de maneira que $0 \leq u_0(x) \leq 1/e^{CT}$, donde segue que $\|u(t)\|_{\infty} \leq 1$, para todo $t \in [0, T]$, para todo $x \in \Omega$. Assim, a solução clássica obtida é, em particular, solução de
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla p) = wu - u \\ \partial_t w - \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla q) = w - w^2 - wu \\ \tau_1 \partial_t p - \Delta p = w - p \\ \partial_t q - \Delta q = u - q \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{e} \quad q(0) = q_0, \end{cases}$$
que é o sistema (3.1). O raciocínio se aplica também para soluções fracas, uma vez que as estimativas de integrabilidade são conservadas. Tendo em vista (3.24), as mesmas conclusões para $\tau_1 = 0$ seguem para $\tau_1 = 1$.

3.3 Experimentos numéricos

À luz do que foi introduzido no Apêndice A, apresentamos alguns experimentos numéricos. Para o caso em estudo nesse capítulo precisamos deixar clara a escolha dos parâmetros D_u, D_w, D_p, D_q, δ_u, δ_w, δ_p, δ_q, α e β, bem como dados inicias $u(0,x) = u_0(x)$, $w(0,x) = w_0(x)$, $\tau_1 p(0,x) = \tau_1 p_0(x)$ e $q(0,x) = q_0(x)$. Da mesma forma que no no capítulo anterior, apresentaremos a extensão dos experimentos do Capítulo 1, porém agora com dinâmica populacional, e após, outros experimentos numéricos com maior duração de tempo.

Experimento 1a

Repetiremos a análise numérica do terceiro e quarto experimento do Capítulo 1 referentes aos sistemas (1.12) e (1.13), porém agora considerando a dinâmica populacional. Usaremos novamente os coeficientes $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q =$

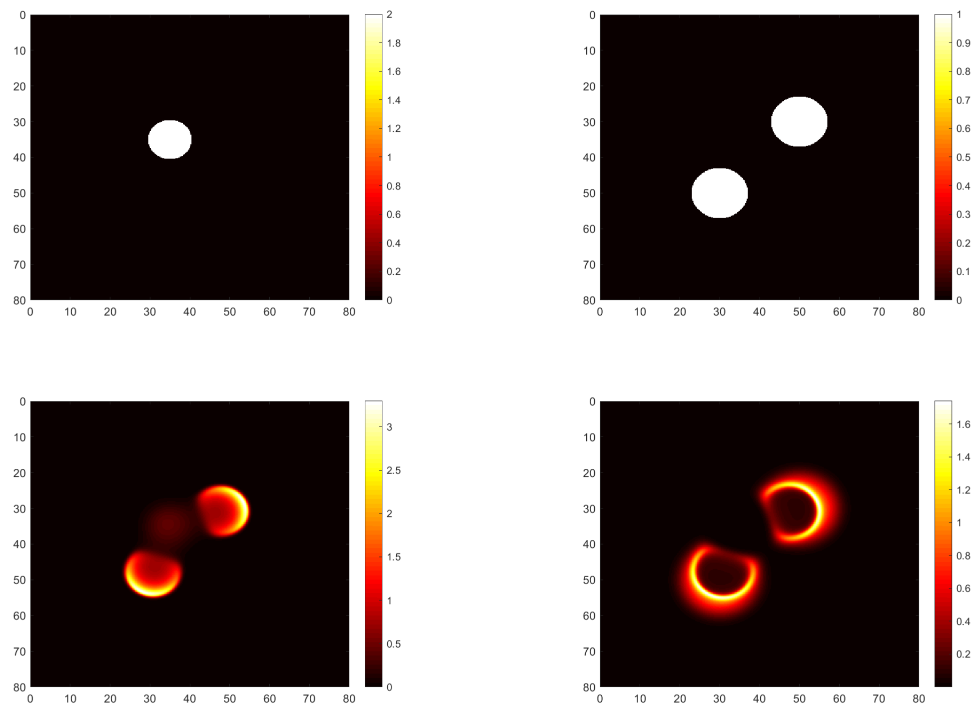
10, $\delta_w = \delta_u = 120$ e $\delta_p = \delta_q = 1$, e $\alpha = 10$ e $\beta = 2$. Ainda, consideremos os mesmos dados iniciais

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x-35)^2 + (y-35)^2 < 40 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$w_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x-30)^2 + (y-50)^2 < 60 \ \text{ ou } \ (x-50)^2 + (y-30)^2 < 60 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Completamos o sistema considerando o dado inicial $q_0(x)$ sendo a solução numérica de $-D_q q_0 = \delta_u u_0 - \delta_q q_0$, que pode ser vista na Figura 1.5. Temos tal dinâmica apresentada para alguns instantes de tempo na Figura 3.1.

Lembramos que nesse caso o predador detecta a presença da presa antes de ser detectado por ela. Durante a perseguição, pela maior eficiência, sua população cresce enquanto a população de presas diminui. No próximo experimento consideremos um caso onde a dinâmica se estende por um tempo maior.



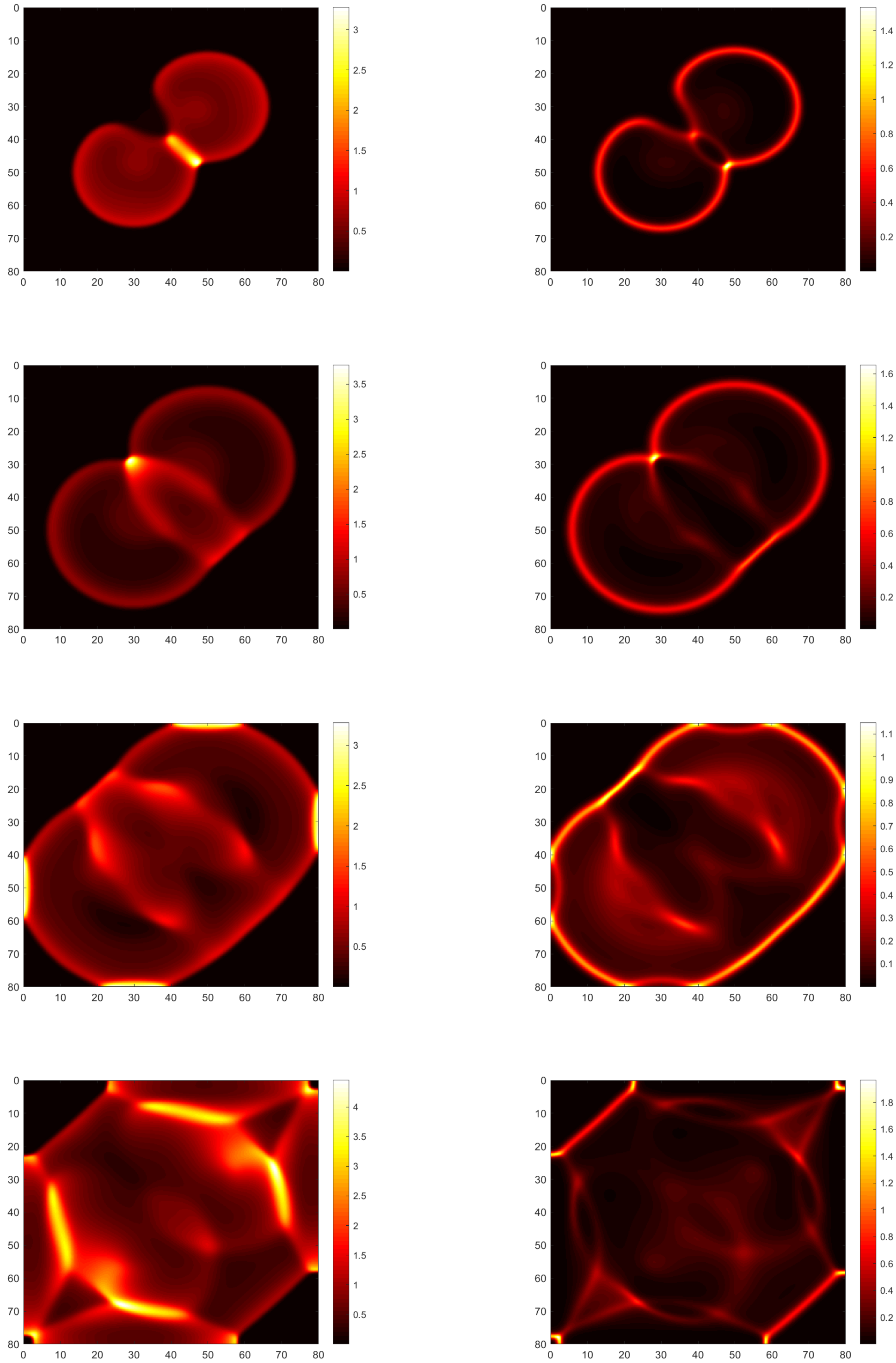

0 10 20 30 40 50 60 70 80
0 10 20 30 40 50 60 70 80
0.5 1 1.5 2 2.5 3
0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4
0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5
0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6
0.5 1 1.5 2 2.5 3
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1
0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4
0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8

Figura 3.1: Resultado do Experimento 1a para os parâmetros $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 10$, $\delta_w = \delta_u = 120$, $\delta_p = \delta_q = 1$, $\alpha = 10$ e $\beta = 2$, nos instantes de tempo $t = 0$, 1, 2, 3, 4, e 5. À esquerda encontra-se a população de u enquanto que à direita está a população de w.

Experimento 2

Para o segundo experimento numérico, consideremos novamente $\tau_1 = 0$ e $\tau_2 = 1$ e mudamos os dados iniciais e os coeficientes, a saber, escolhemos $D_u = 4$, $D_w = 7$, $D_p = 14$, $D_q = 10$, $\delta_w = 100$, $\delta_u = 80$, $\delta_p = 0.1$, $\delta_q = 0.25$, $\alpha = 9$ e $\beta = 3$. Para dados iniciais como na Figura 3.2 obtemos o resultado numérico exibidos na Figura 3.3, onde apresentamos respectivamente as soluções numéricas do predador e da presa.

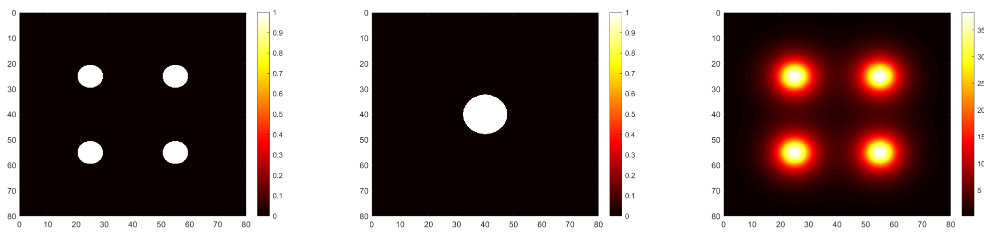
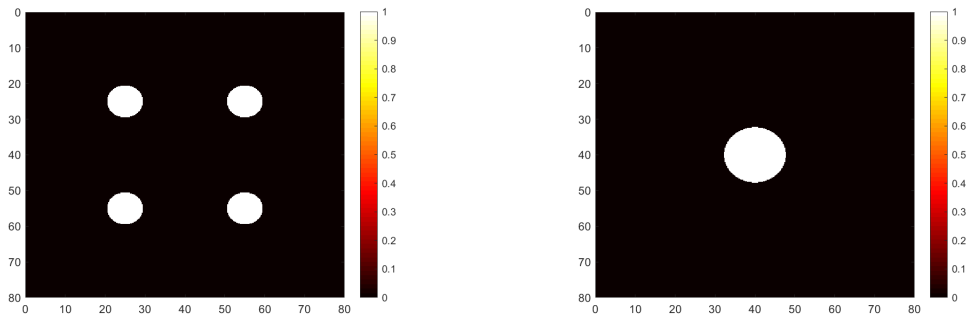
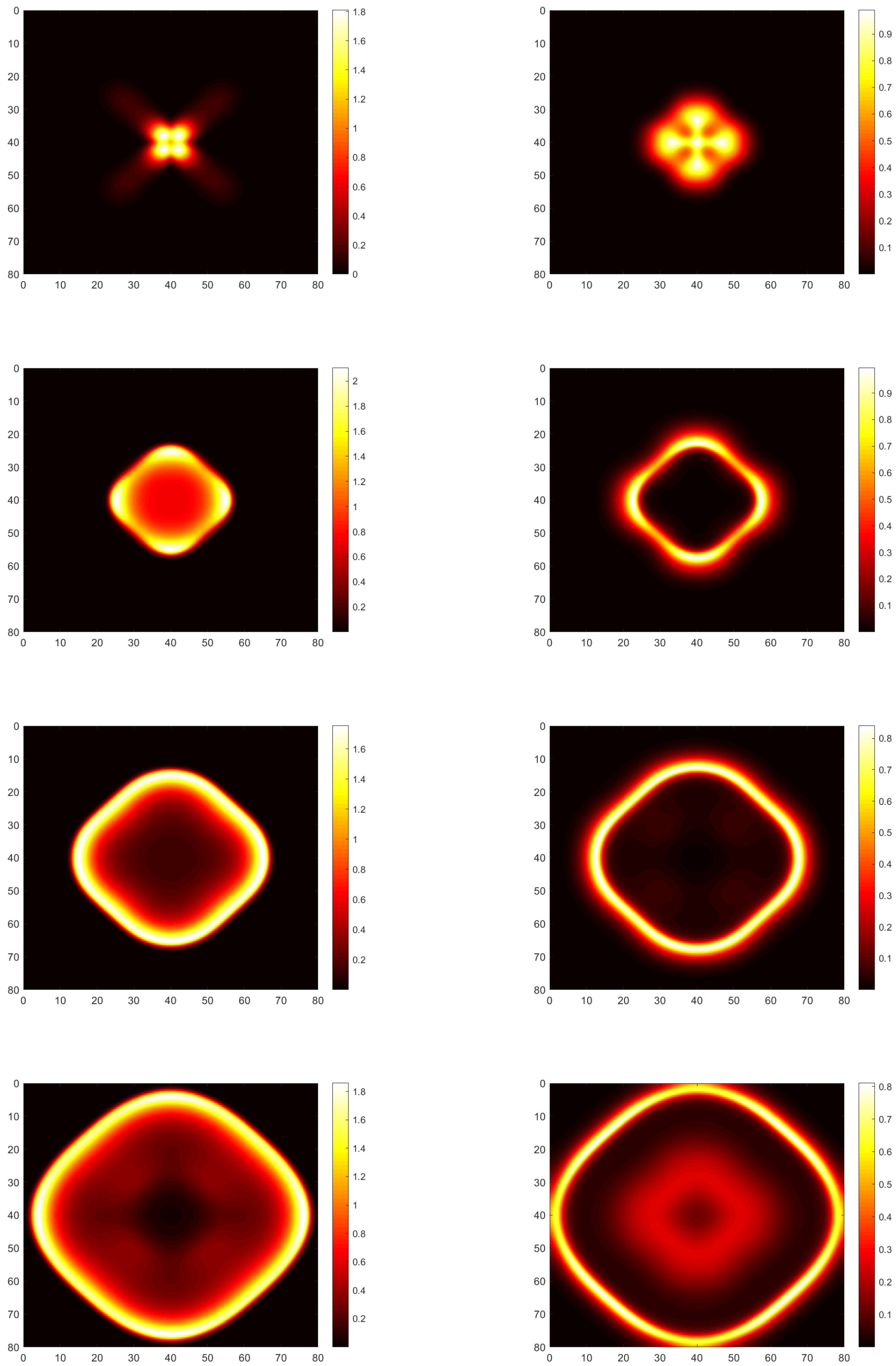
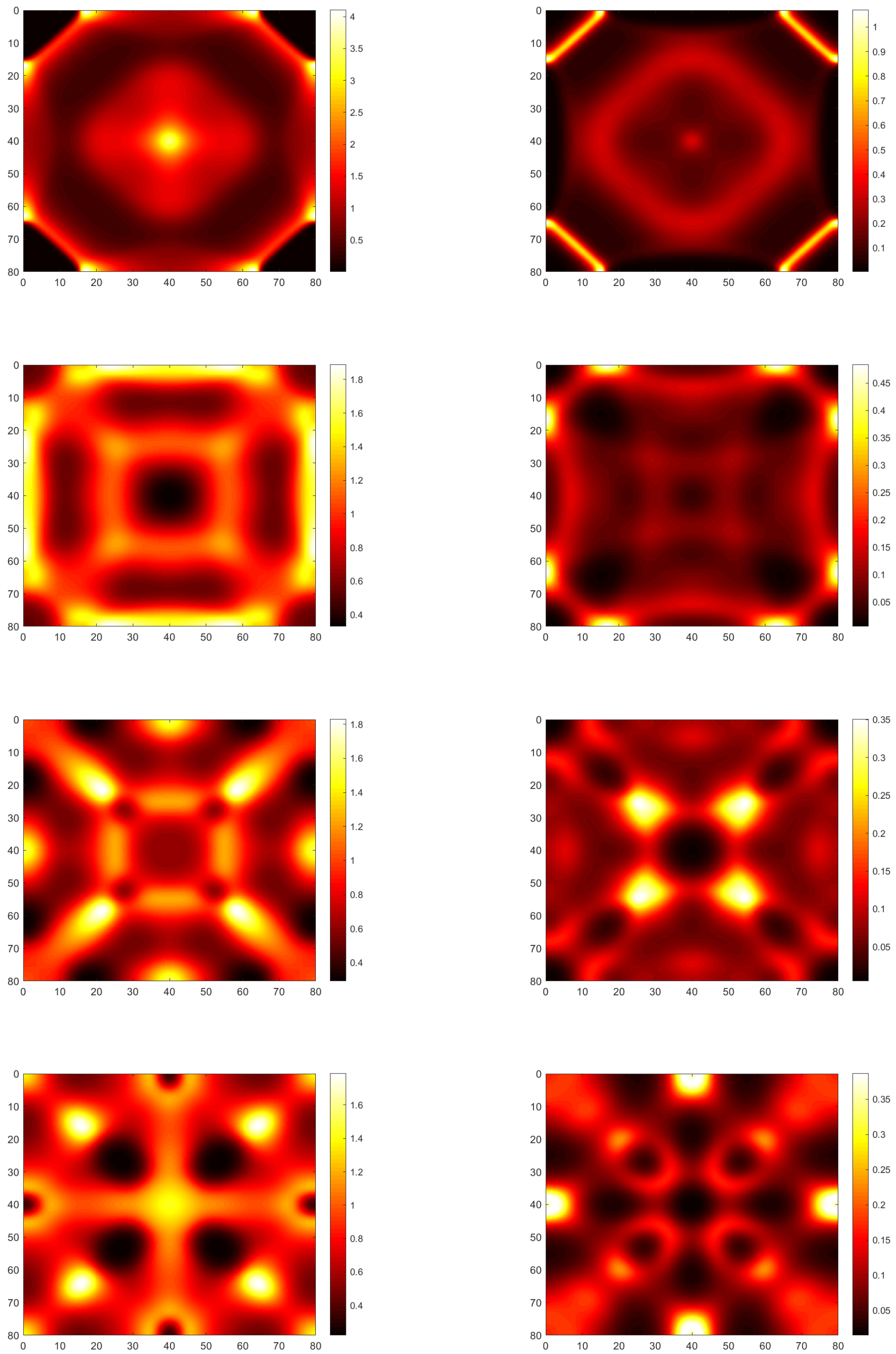


Figura 3.2: Dados iniciais para o segundo Experimento 2. À esquerda a densidade inicial de predadores u_0, ao centro a densidade inicial de presas w_0 e à direita o dado inicial p_0 do feromônio do predador. Obtemos p_0 como a solução numérica de $-D_p \Delta p_0 = \delta_w w_0 - \delta_q q_0$.







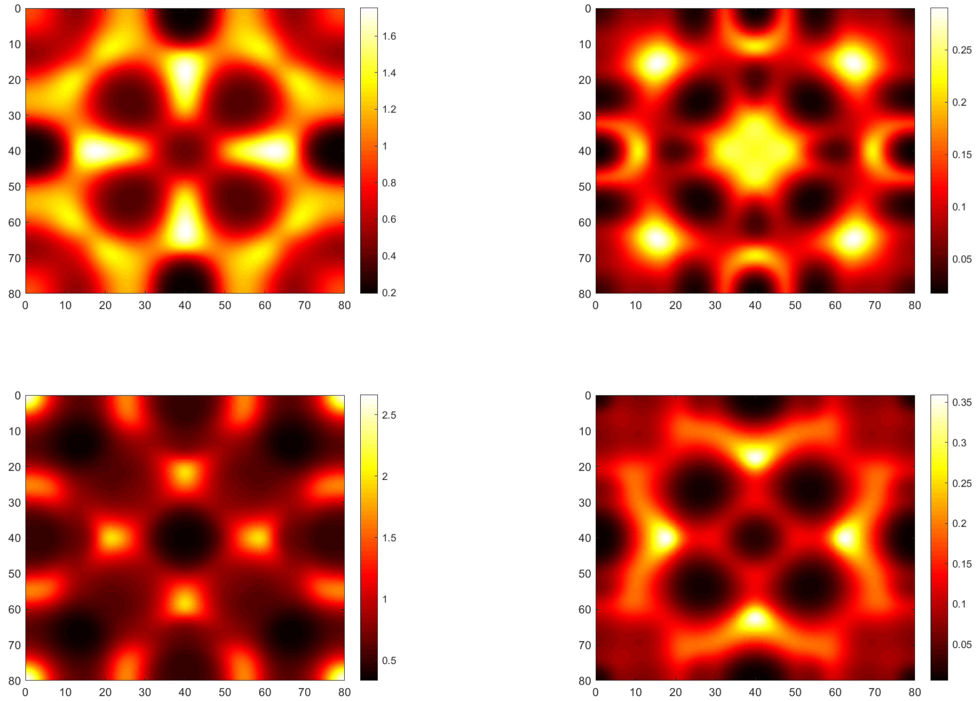
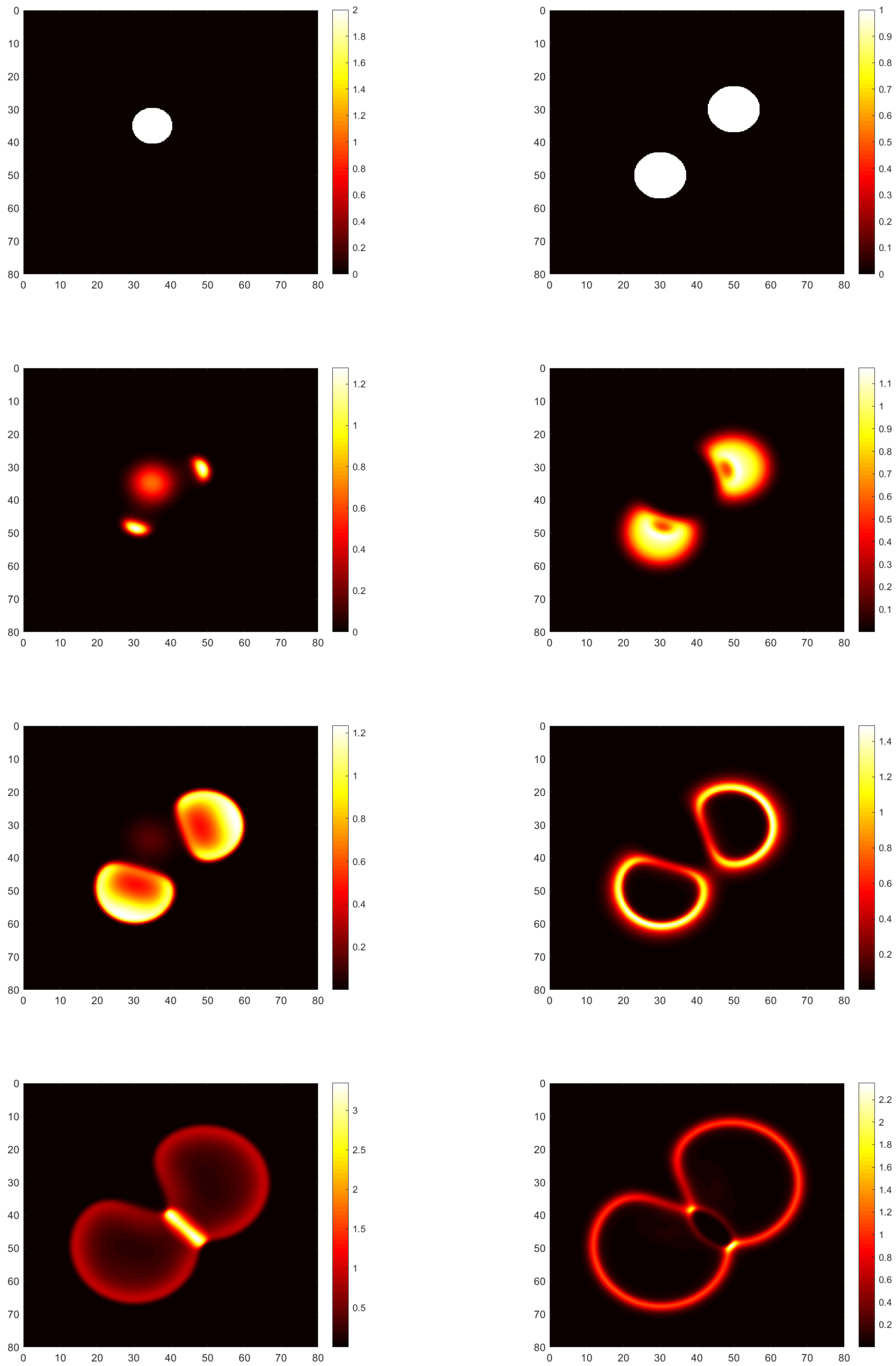


Figura 3.3: Resultado do Experimento 2 para os parâmetros $D_u = 4$, $D_w = 7$, $D_p = 14$, $D_q = 10$, $\delta_w = 100$, $\delta_u = 80$, $\delta_p = 0.1$, $\delta_q = 0.25$, $\alpha = 9$ e $\beta = 3$, nos instantes de tempo $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25$ e 30. À esquerda encontra-se a população de u enquanto que à direita está a população de w.

Experimento 1b

Repetiremos a análise numérica feita no Capítulo 1 referente ao sistema (1.13) para $\tau_1 = \tau_2 = 1$, porém, agora considerando a dinâmica populacional. Usaremos novamente os coeficientes $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 10$, $\delta_w = \delta_u = 120$ e $\delta_p = \delta_q = 1$, e também $\alpha = 10$ e $\beta = 2$. Ainda, consideremos os mesmos dados iniciais u_0 e w_0 do Experimento 1a, e completamos o sistema considerando os dados iniciais $p_0(x)$ sendo a solução numérica de $-D_p p_0 = \delta_w w_0 - \delta_p p_0$, que está exibida na Figura 1.6 e $q_0(x)$ sendo a solução numérica de $-D_q q_0 = \delta_u u_0 - \delta_q q_0$, que pode ser vista na Figura 1.5. Os resultados numéricos, para alguns instantes de tempo, são apresentados na Figura 3.4. Lembramos que nesse caso nem a presa nem o predador detecta imediatamente o outro, o predador consegue se aproximar com boa eficiência e ainda a presa deixa um rastro de feromônio ao evadir. No próximo experimento consideremos um caso onde a dinâmica se estende por um tempo maior.


0 10 20 30 40 50 60 70 80
0 10 20 30 40 50 60 70 80
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1
0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2
0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4
0.5 1 1.5 2 2.5 3
0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.2

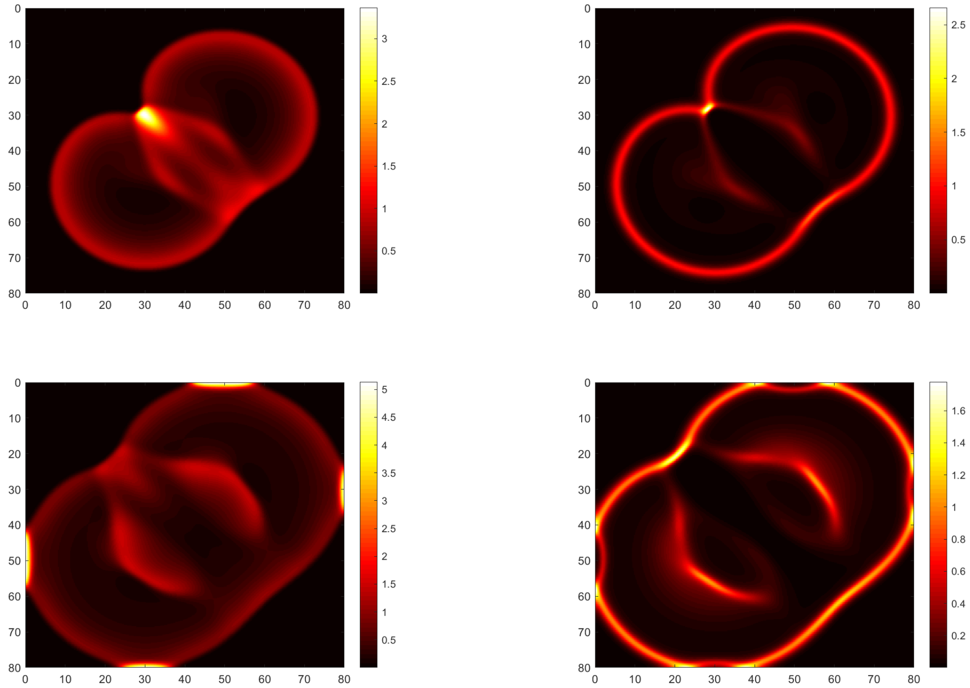
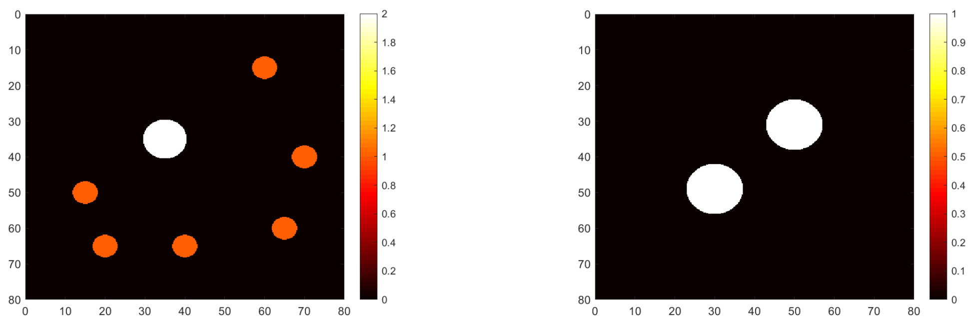
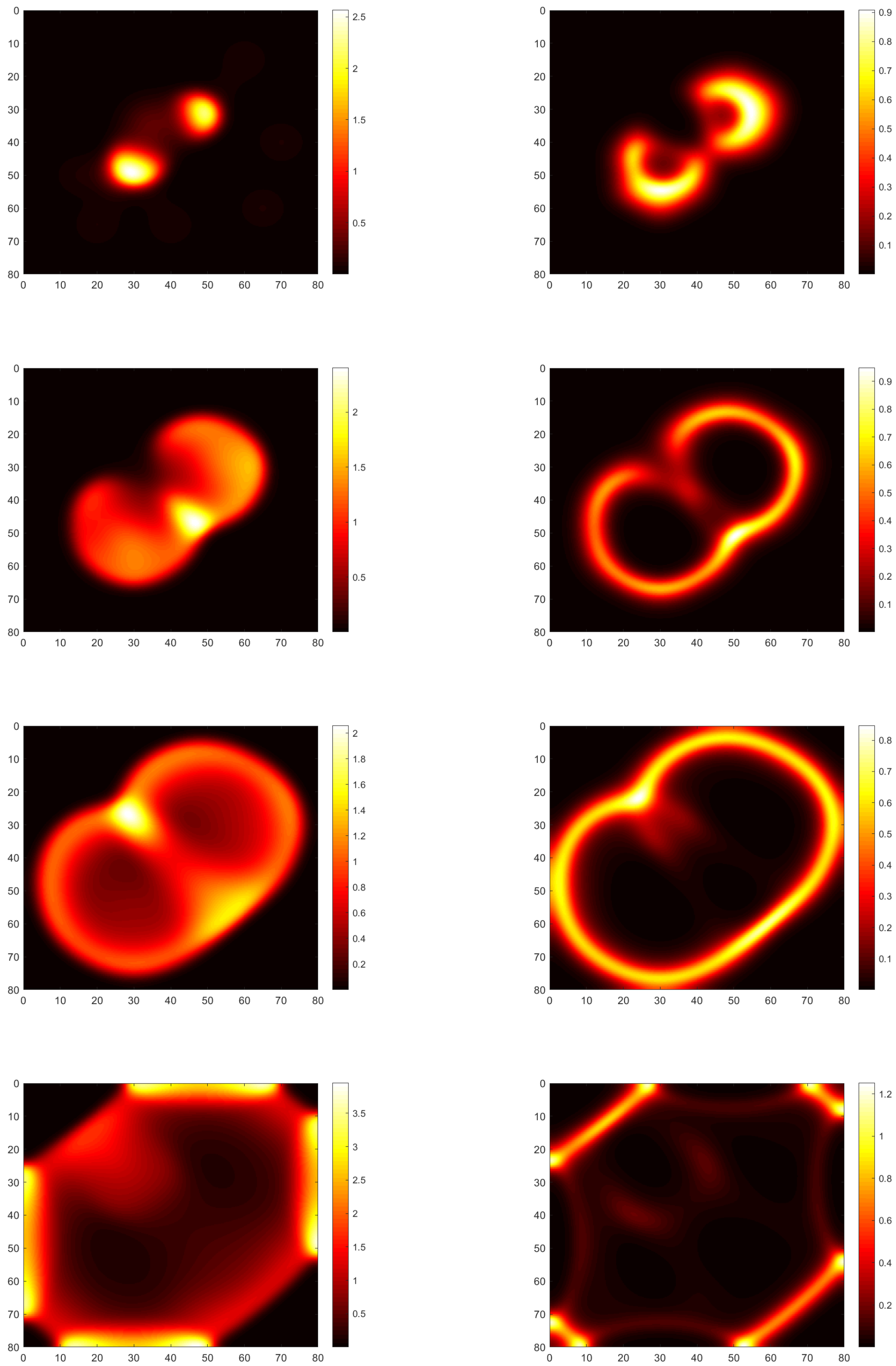


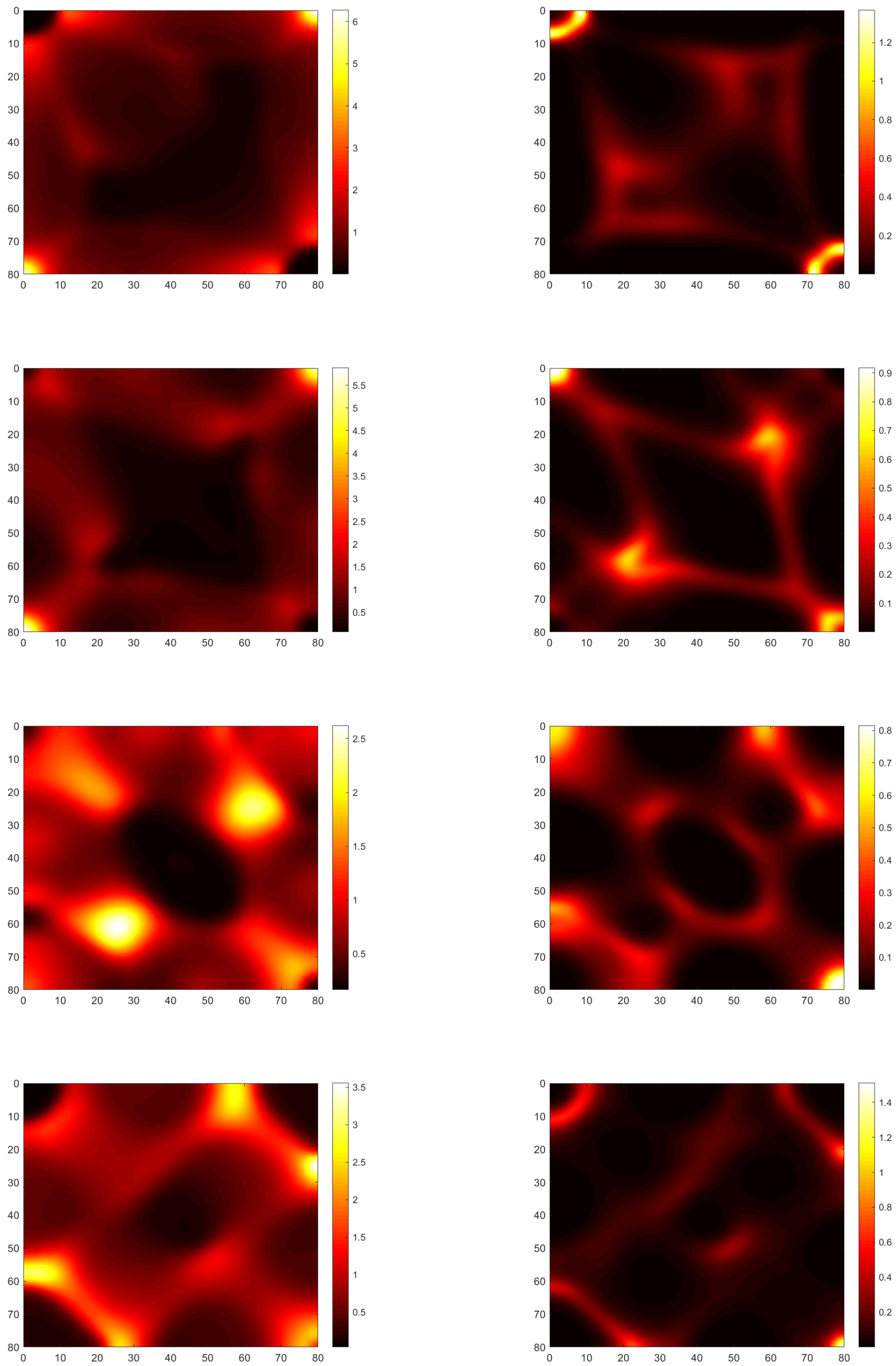
Figura 3.4: Resultado Experimento 1b para os parâmetros $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 10$, $\delta_w = \delta_u = 120$, $\delta_p = \delta_q = 1$, $\alpha = 10$ e $\beta = 2$, nos instantes de tempo $t = 0, 1, 2, 3, 4,$ e 5. À esquerda encontra-se a população de u enquanto que à direita está a população de w.

Experimento 3

Consideremos um segundo experimento numérico para $\tau_1 = 1$ considerando os parâmetros $D_u = D_w = 10$, $D_p = D_q = 20$, $\delta_w = 100$, $\delta_u = 120$, $\delta_p = 1$, $\delta_q = 0.1$, $\alpha = 10$ e $\beta = 2$. Ainda, tomemos a distribuição dos dados iniciais do predador u_0 e da presa w_0 como nas primeiras imagens da Figura 3.5. Ainda consideraremos $p_0(x) = w_0(x)$ e $q_0(x) = u_0(x)$. Temos os resultados da simulação numérica apresentados na Figuras 3.5.







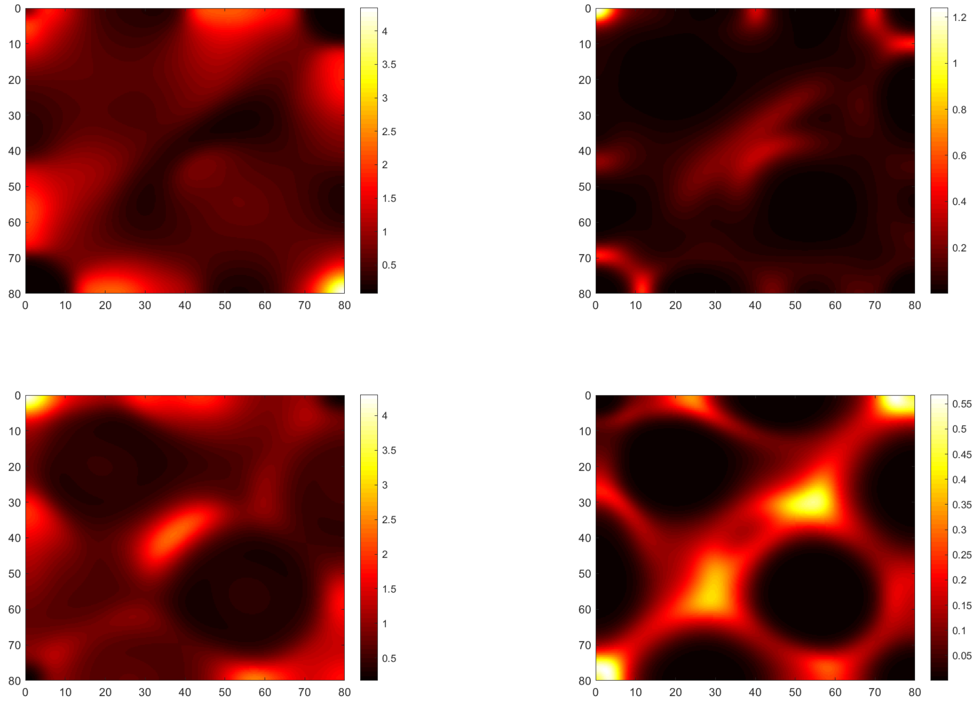


Figura 3.5: Resultados do Experimento 3 para os parâmetros $D_u = D_w = 10$, $D_p = D_q = 20$, $\delta_w = 100$, $\delta_u = 120$, $\delta_p = 1$, $\delta_q = 0.1$, $\alpha = 10$ e $\beta = 2$, nos instantes de tempo $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25$ e 30. À esquerda encontra-se a população de u enquanto que à direita está a população de w.

Experimento 4

Consideremos um quarto experimento numérico para $\tau_1 = 1$ com os parâmetros $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 6$, $\delta_w = 130$, $\delta_u = 150$, $\delta_p = 2$, $\delta_q = 2$, $\alpha = 1.7$ e $\beta = 2$. Ainda, tomemos a distribuição dos dados iniciais do predador e da presa como nas Figuras 3.6 e 3.7. Ainda consideraremos $p_0(x)$ e $q_0(x)$ as soluções numéricas de

$$-3\Delta p_0 = \delta_u u_0 + \delta_p p_0 \tag{3.26}$$

$$-3\Delta q_0 = \delta_w w_0 + \delta_q q_0 \tag{3.27}$$

que podem ser melhor observadas nas Figuras 3.8 e 3.9. A dinâmica completa é apresentada na Figura 3.10.

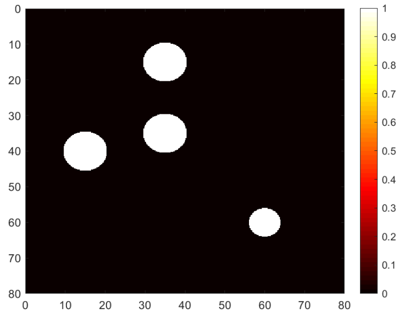


Figura 3.6: Dado inicial $u_0(x)$ para o Experimento 4.

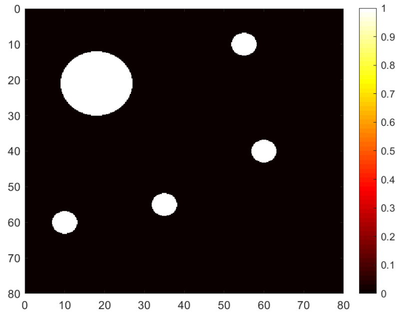


Figura 3.7: Dado inicial $w_0(x)$ para o Experimento 4.

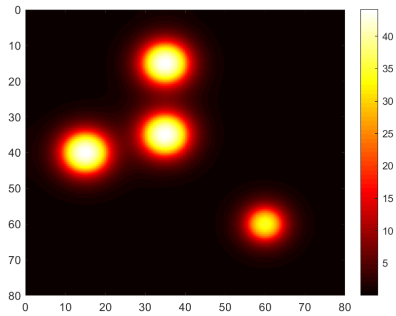


Figura 3.8: Solução numérica de (3.27), dado inicial $q_0(x)$ para o Experimento 4.

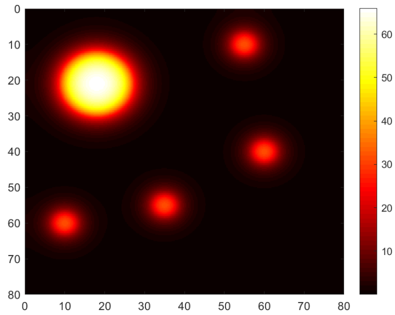
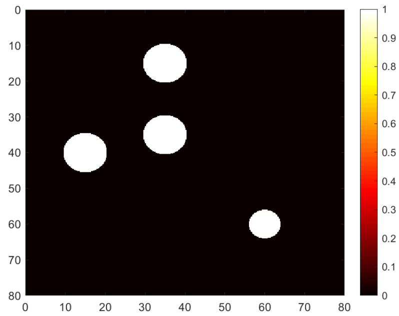
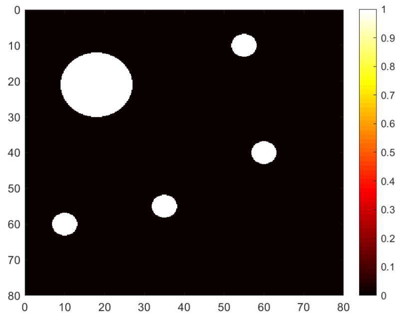
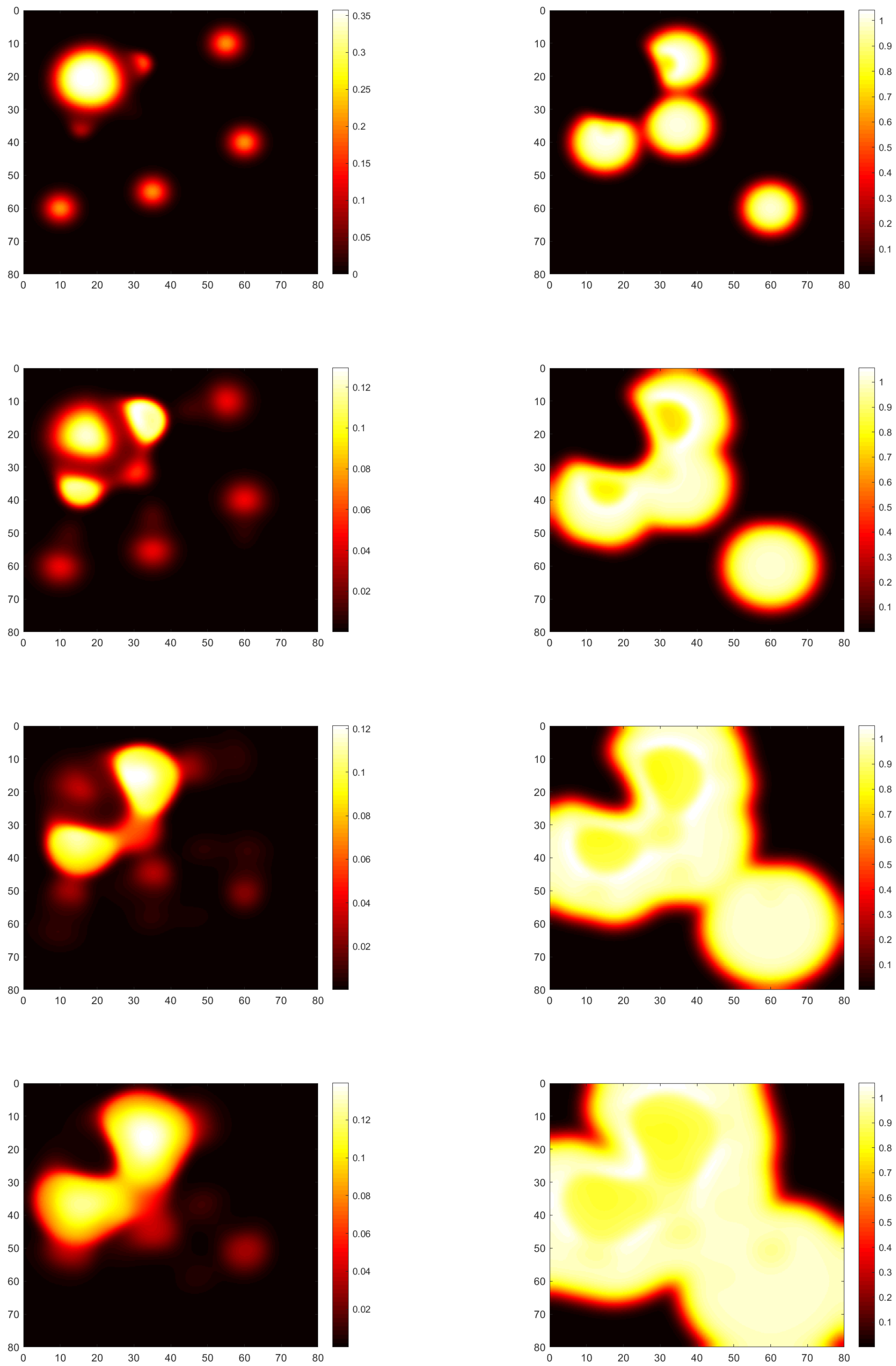
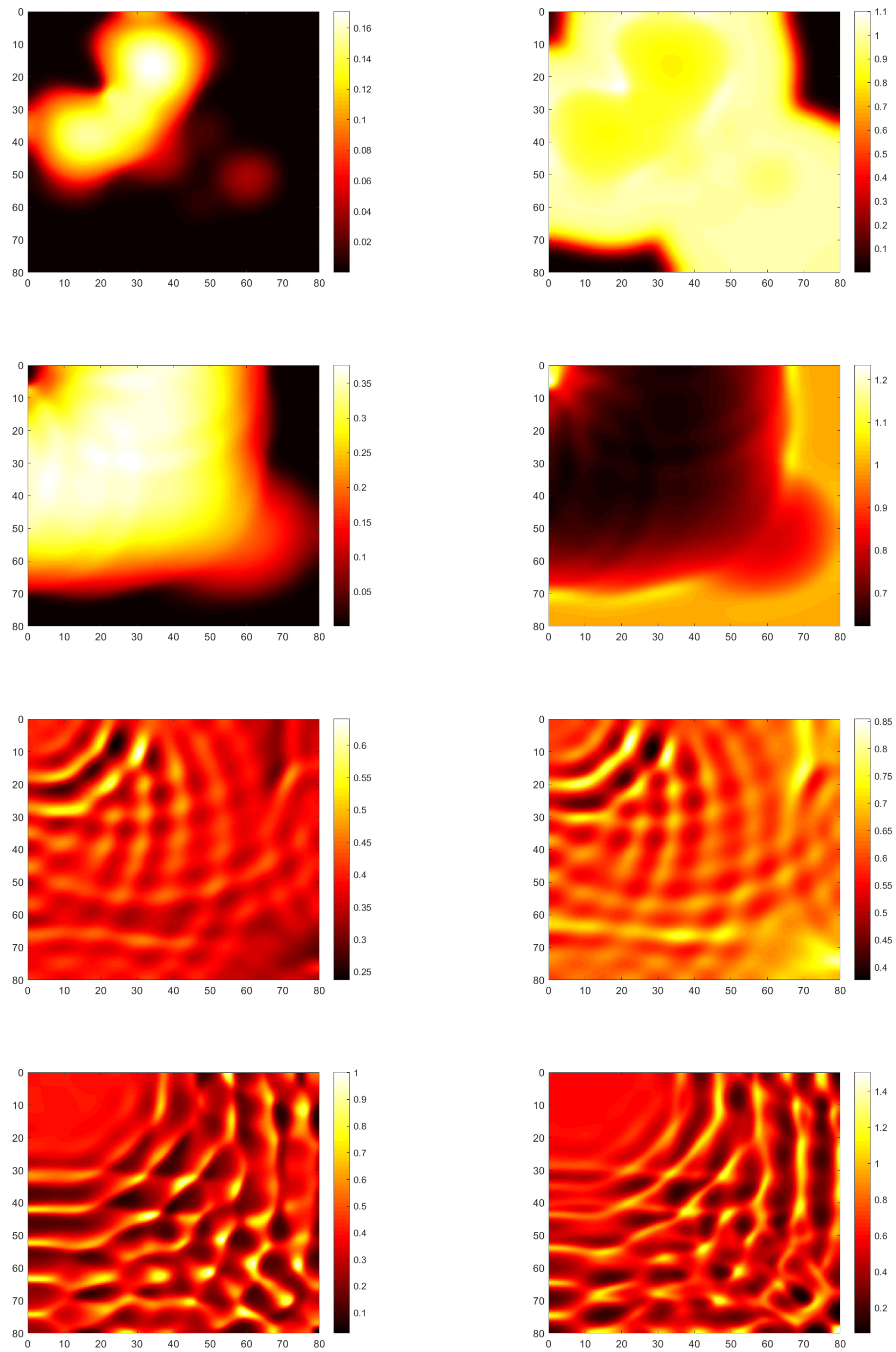


Figura 3.9: Solução numérica de (3.26), dado inicial $p_0(x)$ para o Experimento 4.









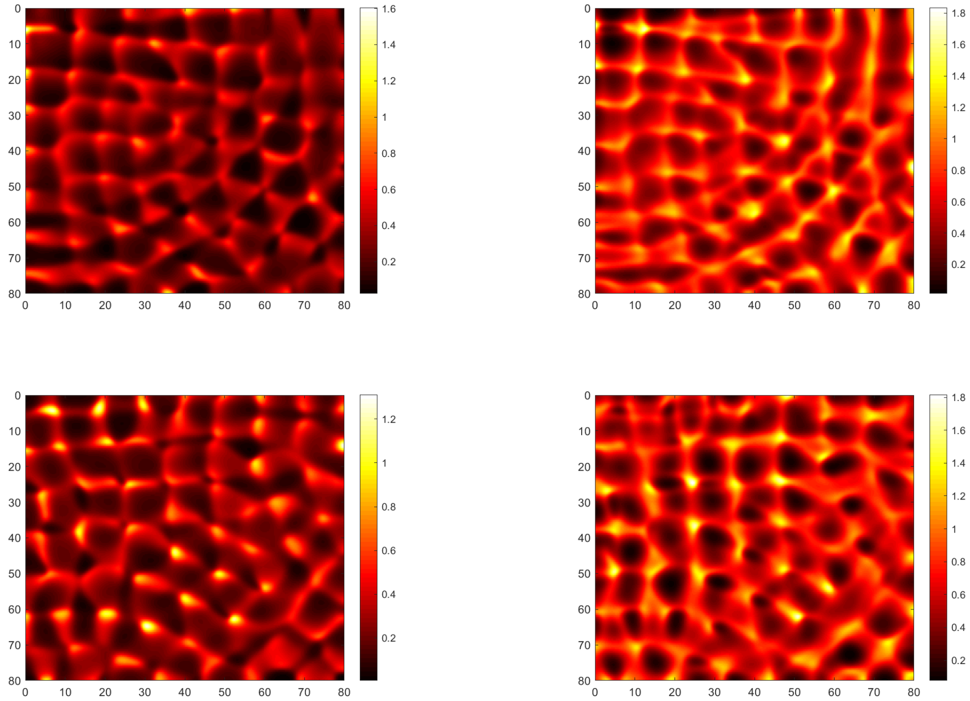


Figura 3.10: Resultados do Experimento 4 para os parâmetros $D_u = D_w = 3$, $D_p = D_q = 6$, $\delta_w = 130$, $\delta_u = 150$, $\delta_p = 2$, $\delta_q = 2$, $\alpha = 1.7$ e $\beta = 2$, nos instantes de tempo $t = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25 e 30. À esquerda encontra-se a população de u enquanto que à direita está a população de w.

3.4 Comentários sobre o capítulo e perspectivas futuras

Ainda não se sabe se para modelo (3.1) pode apresentar explosão da solução em tempo finito mesmo para $\tau_1 = 1$ ou $\tau_1 = 0$. Por ora, temos que a existência depende da pequenez da norma L^∞ do dado inicial u_0. Já haviamos discutido isso brevemente a respeito do clássico sistema de Keller-Segel, apresentado em (1.3), onde [51, 18] determinam $8\pi/\chi$ como o número que representa o limite de uma faixa de dados que podemos tomar caso desejamos evitar esse comportamento. Cronologicamente, a existência de tal número com a propriedade descrita acima foi comprovada em [34] para um sistema simplificado com a equação do feromônio sendo $-\Delta v = -(u - 1)$. Mais tarde, [47] obteve o mesmo resultado para o caso $\tau = 0$. A constante $8\pi/\chi$ foi conjecturada em [18] e de fato é o número limite no sentido descrito acima para soluções radialmente simétricas. No decorrer dos anos, vários trabalhos foram dedicados ao sistema completo (1.3) com $\tau = 1$, como por exemplo em [28] foi construída uma solução radialmente simétrica e com o colapso na origem em tempo finito, onde a massa inicial era $8\pi/\chi$. Por fim, em [49] foi concluído que soluções radiais existem globalmente no tempo com limites uniformes, desde que $\|u_0\|_1 < 8\pi/\chi$.

Dessa maneira, a conjectura para a constante feita em [19] quase fecha o ciclo para o caso de soluções radialmente simétricas. Porém, esse ambiente de dados inicias não faz muito sentido para o contexto desse trabalho, então direcionamos para o caso geral, que ao contrário da conjectura descrita acima, [48] sugere $\|u_0\|_1 < 4\pi/\chi$ como critério para a existência de soluções globais. Mas o número $4\pi/\chi$ também é entendido como a melhor cota possível e a razão da discrepância entre casos radiais e não radiais foram tratadas em [48] e [58], onde [48] estudou o modelo com $\tau = 0$ e concluiu que se $4\pi/\chi < \|u_0\|_1 < 8\pi/\chi$ e mesmo assim a solução explode em um tempo finito, então a concentração em direção a $\partial\Omega$ ocorre para a solução u.

Uma das suposições irrealistas nos modelos de Lotka-Volterra foi tratada inicialmente, que era o crescimento ilimitado das presas na ausência de predação. Na forma em que foi escrito o modelo de equações diferenciais ordinárias, os termos à direita podem ser entendidos como as taxas de crescimento per capita dependentes da densidade, e para ser mais realista, estas taxas de crescimento devem depender tanto das densidades de presas quanto de predadores, isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = w \cdot F(w, u) \\ \dfrac{du}{dt} = u \cdot G(w, u). \end{cases}$$

onde F e G dependem da interação das espécies e assim por diante. Para a presa foi utilizado um mecanismo de crescimento logístico, induzindo uma capacidade de carga máxima. Em modelos mais realistas, o termo de predação, que é a resposta funcional do predador para alterar a densidade de presas, geralmente mostra algum efeito de saturação. Em vez de uma resposta do predador do tipo bwu, como no modelo de Lotka-Volterra utilizado nesse trabalho, algumas alternativas podem ser dadas por $wuR(w)$ onde $wR(w)$ satura para w grande. Alguns exemplos clássicos da literatura, ver [45, 46, 14, 38, 25, 42, 65], são

(a) $R(w) = A$, o tipo insaturado de Lotka-Volterra

(b) $R(w) = \frac{A}{w+B}$,

(c) $R(w) = \frac{Aw}{w^2+B^2}$, e

(d) $R(w) = \frac{A(1-e^{-aw})}{w}$, onde A, B e a são constantes positivas e os gráficos de $wR(w)$ estão ilustradas na Figura 3.11.

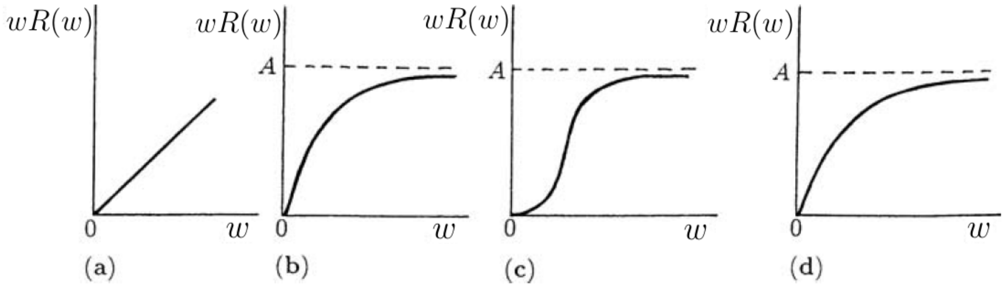


Figura 3.11: Possibilidades de taxas de crescimento. Retirada de [45].

Já para a equação da população predadora também podemos fazer ajustes mais realistas, que inclusive eliminariam o termo quadrático do nosso modelo. Possíveis e clássicas formulações da resposta funcional são

$$G(w,u) = k\left(1 - \frac{hu}{w}\right) \quad \text{ou} \quad G(w,u) = -d + eR(w),$$

onde k, h, d e e são constantes positivas e $R(w)$ é como em **(a)**, **(b)**, **(c)** ou **(d)**. O nosso modelo (1.2) é feito com a formulação **(a)**, porém modelos dados pelas demais combinações são apenas exemplos dos muitos que foram propostos e estudados, e são todos mais realistas do que o modelo clássico de Lotka-Volterra inicial.

A outra etapa da construção do modelo proposto nessa tese foi a introdução da quimiotaxia. Em uma abordagem mais geral para a introdução do feromônio primeiramente para uma única espécie (como feita em [45, 46]) é suposto que a presença de um gradiente em um atrativo, $v(t,x)$ dá origem a um movimento das células de densidade $u(t,x)$ acima do gradiente. O fluxo de células aumentará com o número de células presentes, e a equação de reação-difusão-quimiotaxia básica é dada por

$$u_t = f(u) - \nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v) + \nabla \cdot D\nabla u, \tag{3.28}$$

onde D é o coeficiente de difusão das celulas. Como o atrativo $v(t,x)$ é um produto químico, ele também difunde e é produzido pelas amebas, que sugere ser modelado também por uma equação do tipo

$$v_t = g(u,v) + \nabla \cdot D_v \nabla v, \tag{3.29}$$

onde D_v é o coeficiente de difusão de v e $g(u,v)$ é a fonte, que pode depender tanto de u quanto de v. Em nosso estudo, o termo quimiotático $\chi(v)$ é considerado uma constante χ, e essa em geral é determinada experimentalmente.

Porém há outras formas propostas para o fator quimiotático $\chi(v)$, que podem ser vistas com frequência na literatura (ver [45, 46]), por exemplo

$$\chi(v) = \frac{\chi}{v}, \quad \chi(v) = \frac{\chi K}{(K+v)^2}, \quad \chi > 0,\ K > 0,$$

que são conhecidos, respectivamente, como a lei de registro e lei de receptor. Nessas propostas, à medida em que o feromônio diminui o efeito quimiotático aumenta. Sendo assim, nosso trabalho se encontra dentro de uma proposta mais geral de modelos predador presa com quimiotaxia apresentados da seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (\chi_1(p) u \nabla p) = u \cdot F(w,u) \\ \partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (\chi_2(q) w \nabla q) = w \cdot G(w,u) \\ \tau_1 \partial_t p - D_p \Delta p = g_1(w,p) \\ \tau_2 \partial_t q - D_q \Delta q = g_2(w,p) \\ + \text{Condições de fronteiras} \\ + \text{Dados iniciais} \\ \tau_1, \tau_2 \in \{0,1\}. \end{cases}$$

com as taxas F_1, F_2, g_1 e g_2 e o efeito quimiotático χ_1 e χ_2 como na discussão acima.

Referências Bibliográficas

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions - I, Commun. Pure Appl. Math. 12 (1959) 623–727.

[2] B. Ainseba, M. Bendahmane, A. Noussair A reaction-diffusion system modeling predator-prey with prey-taxis Nonlinear Analysis: Real World Applications 9 (2008) 2086–2105

[3] R. Alonso, P. Amorim, T. Goudon, Analysis of a chemotaxis system modeling ant foraging.Math. Models Methods Appl. Sci. 26, 1785 (2016)

[4] P. Amorim, B. Telch, L.M. Villada, A reaction-diffusion predator-prey model with pursuit, evasion, and nonlocal sensing. AIMS Press, Mathematical Biosciences and Engineering, MBE, 16(5): 5114–5145. 2019.

[5] P. Amorim, R.M. Colombo, A. Teixeira, A Numerical Approach to Scalar Nonlocal Conservation Laws. 1303.5983, 2013, arXiv.

[6] N. Bellomo, A. Bellouquid, Y. Tao, M. Winkler, Toward a mathematical theory of Keller-Segel models of pattern formation in biological tissues, Math. Models Methods Appl. Sci. 25 (2015), 1663-1763.

[7] M. Bendahmane, Weak and classical solutions to predator-prey system with cross-diffusion, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 73, Issue 8, 15 October 2010, Pages 2489-2503

[8] M. Bendahmane, M. Saad, A predator-prey system with L1 data, J. Math. Anal. Appl. 277 (2003) 272-292

[9] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications (Masson, 1987).

[10] R. Bürger, R. Ruiz-Baier, and K. Schneider. Adaptive multiresolution methods for the simulation of waves in excitable media. *Journal of Scientific Computing* 43,2 (2010), 261-290.

[11] L. Caffarelli and A. Vasseur, The De Giorgi method for nonlocal fluid dynamics, in Nonlinear Partial Differential Equations, Advanced Courses in Mathematics–CRM Barcelona (Birhäuser, 2012), pp. 1–38.

[12] L. Caffarelli and A. Vasseur, Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation, Ann. Math. 171 (2010) 1903–1930.

[13] V. Calvez, L. Corrias, The parabolic–parabolic Keller–Segel model in $\mathbb{R}^2$. Commun. Math. Sci. 6 (2) (2008) 417–447.

[14] C. Cannings, F. Hoppensteadt, Mathematical methods of population biology, Cambridge University Press 1982

[15] R.S. Cantrell, C. Cosner, Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations, Wiley Series in Mathematical and Computational Biology, 2003.

[16] A. Chakraborty, M. Singh, D. Lucy, P. Ridland, Predator-prey model with prey-taxis and diffusion, Mathematical and Computer Modelling, Volume 46, Issues 3-4, August 2007, 482-498.

[17] A. Chertock, A. Kurganov. A second-order positivity preserving central-upwind scheme for chemotaxis and haptotaxis models. *Numer. Math.* 111 (208), 169-205.

[18] S. Childress, J. K. Percus, Chemotactic collapse in two dimensions, Lecture Notes in Biomath. 55, Springer, Berlin, 1984, pp. 61-66

[19] S. Childress, Nonlinear aspects of chemotaxis, Math. Biosci. 56 (1981), 217-237.

[20] E. De Giorgi, Sulla differenciabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Acccad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (3) **3** (1957) 25-43.

[21] E. Feireisl, P. Laurencot and H. Petzeltova, On convergence to equilibria for the Keller-Segel chemotaxis model, J. Differential Equations, 236 (2007), 551-569.

[22] K. Fujie, M. Winkler and T. Yokota, Blow-up prevention by logistic sources in a parabolic-elliptic Keller-Segel system with singular sensitivity, Nonlinear Anal. 109 (2014), 56-71.

[23] T. Goudon, B. Nkonga, M. Rascle, M. Ribot, Self-organized populations interacting under pursuit-evasion dynamics, Physica D: Nonlinear Phenomena, Volumes 304-305, 2015, 1-22

[24] T. Goudon, L. Urrutia Analysis of kinetic and macroscopic models of pursuit-evasion dynamics, Communications in Mathematical Sciences, vol. 14 nr 8 (2016) 2253-2286

[25] A. Hastings, Population Biology -Concepts and Models, Springer 1996

[26] X. He and S. Zheng, Global boundedness of solutions in a reaction-diffusion system of predator-prey model with prey-taxis, Applied Mathematics Letters, 49 (2015), 73–77.

[27] M. Henry, D. Hilhorst, R. Schtzle: Convergence to a viscocity solution for an advection-reaction-diffusion equation arising from a chemotaxis-growth model. Hiroshima Math. J. 29, 591-630 (1999)

[28] M.A. Herrero, J.J.L. Velázquez, A blow-up mechanism for a chemotaxis model. Ann. Sc. Norm. Super. 24 (1997) 663–683.

[29] T. Hillen and K. Painter, A user's guide to PDE models for chemotaxis, J. Math. Biol., 58 (2009), 183-217

[30] T. Hillen and A. Potapov, The one-dimensional chemotaxis model: global existence and asymptotic profile, Math. Methods Appl. Sci. 27 (2004), 1783-1801.

[31] H. Holden, K.H. Karlsen, N.H. Risebro. On uniqueness and existence of entropy solutions of weakly coupled systems of nonlinear degenerate parabolic equations. *Electron. J. Differential Equations* 46 (2003), 1-31.

[32] D. Horstmann, G. Wang, Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions, European J. Appl. Math. 12 (2001), 159-177.

[33] D. Horstmann, From 1970 until now: the Keller-Segal model in chaemotaxis and its consequence I, Jahresber DMV, 105 (2003), 103-165.

[34] W. Jäger, S. Luckhaus: On explosions of solutions to a system of partial differential equations modeling chemotaxis. Trans. Amer. Math. Soc. 329(2), 819-824 (1992)

[35] H. Jin, Z. Wang, Global stability of prey-taxis systems, Journal of Differential Equations, Volume 262, Issue 3, 2017

[36] E. Keller, L. Segel, Initiation of slide mold aggregation viewed as an instability. J. Theor. Biol. 26 (1970), 399–415.

[37] E. Keller, L. Segel, Model for Chemotaxis. J. theor. Biol. 30, 225–234. 1971.

[38] M. Kot, Elements of Mathematical Ecology, Cambridge University Press, 2001

[39] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N Ural'ceva, Linear and quasi-linear equation of parabolic type reference AMS, Providence, 1968

[40] J. M. Lee , T. Hillen M. A. Lewis, Continuous traveling waves for prey-taxis. Bull. Math. Biol. 70: 654, 2008.

[41] J. M. Lee , T. Hillen M. A. Lewis, Pattern formation in prey-taxis systems, Journal of Biological Dynamics, 3:6, 551-573, 2009.

[42] P. Magal, S. Ruan, Structured Population Models in Biology and Epidemiology, Springer, 2008

[43] M. Mimura, T. Tsujikawa: Aggregation pattern dynamics in a chemotaxis model including growth. Physica A 230, 499-543 (1996)

[44] X. Mora. Semilinear parabolic problems define semiflows on Ck spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 278 (1983) 21–55.

[45] J.D. Murray, Mathematical Biology I - An Introduction. Third Edition, Springer, 2000.

[46] J.D. Murray, Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications, Third Edition. Springer, 2000.

[47] T. Nagai, Blow-up of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains, J. Inequal. Appl. 6 (2001), 37-55.

[48] T. Nagai, T. Senba, T. Suzuki, Chemotactic collapse in a parabolic system of mathematical biology, Hiroshima Math. J.30 - (2000), 463–497.

[49] T. Nagai, T. Senba, K. Yoshida, Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis, Funkcial. Ekvac. 40 (1997), 411-433.

[50] V. Nanjundiah, S. Saran. The determination of spatial pattern in Dictyostelium discoideum, Journal of Biosciences vol. 17, 353-394. 1992.

[51] V. Nanjundiah, Chemotaxis, signal relaying, and aggregation morphology, J. Theor. Biol.42 (1973), 63-105.

[52] K. Osaki, A. Yagi, Finite dimensional attractor for one-dimensional Keller-Segel equations, Funkcial. Ekvac. 44 (2001), 441-469.

[53] K. Osaki, A. Yagi: Global existence for a chemotaxis-growth system in $\mathbb{R}^2$. Adv. Math. Sci. Appl. 12, 587-606 (2002)

[54] K. Osaki,T. Tsujikawa, A. Yagi, M. Mimura, Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations, Nonlinear Anal. 51, 119-144 (2002).

[55] K.J. Painter, T.Hillen, Volume-filling and quorum-sensing in models for chemosensitive movement. Can. Appl. Math. Quart. 10 (4), 501-543 (2002)

[56] B. Perthame. Transport Equations in Biology. Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin.

[57] B. Perthame, A. Vasseur, Regularization in Keller-Segel type systems and the De Giorgi method, Commun. Math. Sci. 10 (2012) 463–476

[58] T. Senba, T. Suzuki, Parabolic system of chemotaxis: blowup in a finite and the infinite time, Methods Appl. Anal. 8 (2001), 349-367

[59] R. Strehl, BIO APP program to PDE models for chemotaxis. Manuscript, Dortmund (2009)

[60] Y. Tao, Global existence of classical solutions to a predator-prey model with nonlinear prey-taxis Nonlinear Analysis: Real World Applications 11 (2010) 2056-2064

[61] Y. Tao, M. Winkler. Boundedness vs. blow-up in a two-species chemotaxis system with two chemicals. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 20(9):3165–3183, 2015.

[62] T. Tona, N. Hieu, Dynamics of species in a model with two predators and one prey, Nonlinear Analysis 74 (2011) 4868-4881.

[63] E. Tulumello, M. C. Lombardo, M. Sammartino Cross-Diffusion Driven Instability in a Predator-Prey System with Cross-Diffusion, Acta Applicandae Mathematicae, August 2014, Volume 132, Issue 1, pp 621-633

[64] Y. Tyutyunov, L. Titova, R. Arditi, A Minimal Model of Pursuit-Evasion in a Predator-Prey System. Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2(4), 122–134 (2007)

[65] P. Waltman, Competition Models in Population Biology, Siam -society for industrial and applied mathematics, Philadelphia

[66] K. Wang, Q. Wang, F. Yu, Stationary and time-periodic patterns of two-predator and one-prey systems with prey-taxis, Discrete & Continuous Dynamical Systems - A, 37, 1: 505-543, 2016

[67] X. Wang, W. Wang, G. Zhang, Global bifurcation of solutions for a predator-prey model with prey-taxis, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 38 (2015), 431–443.

[68] Z. Wang, J. Wu, Qualitative analysis for a ratio-dependent predator-prey model with stage structure and diffusion, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Volume 9, Issue 5, December 2008, Pages 2270-2287

[69] M. Winkler, Aggregation versus global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller-Segel model, J. Differential Equations 248 (2010) 2889-2905.

[70] M. Winkler. Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller-Segel system, J. Math. Pures Appl. 100 (2013), 748-767.

[71] M, Winkler. (2010). Boundedness in the Higher-Dimensional Parabolic-Parabolic Chemotaxis System with Logistic Source. Communications in Partial Differential Equations. 35. 1516-1537.

[72] M. Winkler, Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller-Segel system, J. Math. Pures Appl. 100 (2013), 748-767.

[73] S. Wu, J. Shi, B. Wu, Global existence of solutions and uniform persistence of a diffusive predator–prey model with prey-taxis, Journal of Differential Equations, Volume 260, Issue 7, 2016.

[74] T. Xiang, Boundedness and global existence in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with/without growth source, J. Differential Equations 258 (2015), 4275-4323.

[75] T. Xiang, Global dynamics for a diffusive predator-prey model with prey-taxis and classical Lotka–Volterra kinetics, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Volume 39, 2018.

[76] T. Xiang, Sub-logistic source can prevent blow-up in the 2D minimal Keller-Segel chemotaxis system. Journal of Mathematical Physics. 59. 10.1063/1.5018861, (2017).

[77] T. Xiang, On effects of sampling radius for the nonlocal Patlak-Keller-Segel chemotaxis model, Discrete Contin. Dyn. Syst. 34 (2014), 4911-4946.

[78] T. Youshan, M. Winkler. Boundedness in a quasilinear parabolic-parabolic Keller-Segel system with subcritical sensitivity, Journal of Differential Equations Volume 252, Issue 1, 1 January 2012, Pages 692-715

[79] X. Zhao and S. Zheng, Global boundedness to a chemotaxis system with singular sensitivity and logistic source, Z. Angew. Math. Phys. 68 (2017), no. 1, Art. 2, 13 pp.

Apêndice A

Esquema numérico

Para as simulações numéricas apresentaremos os seguintes esquemas de volume finito implícito-explícito do sistema

$$\begin{cases} \partial_t u - D_u \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla w) = \alpha w u - u \\ \partial_t w - D_w \Delta w - \nabla \cdot (w \nabla u) = \beta w (1 - w - u) \\ \partial_t p - D_p \Delta p = \delta_w w - \delta_p p \\ -D_q \Delta q = \delta_u u - \delta_q q \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \nabla q \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{e} \quad p(0) = p_0. \end{cases} \tag{A.1}$$

As ideias aqui abordadas podem ser generalizadas facilmente para os outros possíveis casos das escolhas de $\tau_1, \tau_2 \in \{0, 1\}$. Consideremos o sistema (A.1) em um domínio retangular $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$, onde introduzimos a grade cartesiana definida pelas células $I_{i,j} := [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$, que por simplicidade, serão assumidas de tamanho uniforme, isto é, $|I_{i,j}| := h^2$ para todo i e j. Consideremos o tamanho passo $\Delta t > 0$ para discretizar o intervalo de tempo $(0, T)$. Seja $N > 0$ o menor inteiro tal que $N\Delta t \leq T$ e tomemos $t^n := n\Delta t$ para $n \in \{0, 1, ..., N\}$. A média da célula de uma quantidade v no instante de tempo t é definido via

$$\overline{v}_{i,j}(t) := \frac{1}{h^2} \int_{I_{i,j}} v(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

e definimos também $\overline{v}_{i,j}^n := \overline{v}_{i,j}(t^n)$. Note que estamos usando a notação $\mathbf{x} = (x, y)$ para denotar as variáveis espaciais. Sejam $f_1(u, w)$ e $f_2(u, w)$ os termos de reação do lado direito das duas primeiras equações de (A.1). Então, os termos

$$\frac{1}{h^2} \int_{I_{i,j}} f_k(u(t, \mathbf{x}), w(t, \mathbf{x})) dx, \quad k = 1, 2$$

são aproximados por $f_{k,i,j} := f_k(\overline{u}_{i,j}, \overline{w}_{i,j}), k = 1, 2$. O Laplaciano na grade cartesiana pode ser descretizado por

$$\Delta_{i,j} u := \frac{1}{h}(F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}) + \frac{1}{h}(F_{i,j+\frac{1}{2}} - F_{i,j-\frac{1}{2}}),$$

com

$$F_{i+\frac{1}{2},j} := \frac{1}{h}(\overline{u}_{i+1,j} - \overline{u}_{i,j}), \quad F_{i,j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{h}(\overline{u}_{i,j+1} - \overline{u}_{i,j}).$$

Além disso, os fluxos numéricos nas direções x- e y- são discretizados respectivamente por

$$\mathcal{F}^1_{i+\frac{1}{2},j}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \overline{u}_{i,j}\overline{p}_{i+\frac{1}{2},j} & \text{caso } \overline{p}_{i+\frac{1}{2},j} > 0 \\ \overline{u}_{i+1,j}\overline{p}_{i+\frac{1}{2},j} & \text{caso } \overline{p}_{i+\frac{1}{2},j} < 0, \end{cases} \qquad \overline{p}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\overline{p}_{i+1,j} - \overline{p}_{i,j}}{h}, \tag{A.2}$$

e

$$\mathcal{F}^1_{i,j+\frac{1}{2}}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \overline{u}_{i,j}\overline{p}_{i,j+\frac{1}{2}} & \text{caso } \overline{p}_{i,j+\frac{1}{2}} > 0 \\ \overline{u}_{i,j+1}\overline{p}_{i,j+\frac{1}{2}} & \text{caso } \overline{p}_{i,j+\frac{1}{2}} < 0, \end{cases} \qquad \overline{p}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\overline{p}_{i,j+1} - \overline{p}_{i,j}}{h}, \tag{A.3}$$

e de maneira similar para $\mathcal{F}^2_{i+\frac{1}{2},j}(\mathbf{q})$ e $\mathcal{F}^2_{i,j+\frac{1}{2}}(\mathbf{q})$. Finalmente, usaremos o método de Euler de integração de primeira ordem para as componentes de p, u e w. Os termos de difusão serão tratados na forma implícita e a forma explícita será usada para os termos de convecção e reação. Os dados iniciais são aproximados por suas médias nas celulas,

$$\overline{u}^0_{i,j} := \frac{1}{h^2}\int_{I_{i,j}} u_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \overline{w}^0_{i,j} := \frac{1}{h^2}\int_{I_{i,j}} w_0(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \overline{p}^0_{i,j} := \frac{1}{h^2}\int_{I_{i,j}} p_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Para obter a solução numérica de t^n para $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ usaremos o seguinte esquema de volume finito: Dados $\mathbf{u}^n = (\overline{u}^n_{i,j})$, $\mathbf{w}^n = (\overline{w}^n_{i,j})$ e $\mathbf{p}^n = (\overline{p}^n_{i,j})$ para todas as células $I_{i,j}$ no instante de tempo $t = t^n$, os valores desconhecidos $\mathbf{u}^{n+1}$, $\mathbf{w}^{n+1}$ e $\mathbf{p}^{n+1}$ são determinados pelos seguintes passos:

Passo 1 Resolva para $\mathbf{q} = (\overline{q}_{i,j})$

$$-D_q\Delta_h\mathbf{q} + \delta_q\mathcal{I}\mathbf{q} = \delta_u\mathcal{I}\mathbf{u}^n. \tag{A.4a}$$

Passo 2 Resolva para $\mathbf{p} = (\overline{p}_{i,j})$, $\mathbf{u}^{n+1} = (\overline{u}_{i,j}^{n+1})$ e $\mathbf{w}^{n+1} = (\overline{w}_{i,j}^{n+1})$

$$\overline{p}_{i,j}^{n+1} - \Delta t D_p \Delta_{i,j} \overline{p}_{i,j}^{n+1} = \overline{p}_{i,j}^{n} + \Delta t \left(\delta_w \overline{w}_{i,j}^{n} - \delta_p \overline{p}_{i,j}^{n} \right) \tag{A.5a}$$

$$\begin{aligned} \overline{u}_{i,j}^{n+1} - \Delta t D_u \Delta_{i,j} u^{n+1} &= \overline{u}_{i,j}^{n} + \Delta t f_{1,i,j}^{n} \\ &+ \Delta t \left(\frac{\mathcal{F}^1_{i+\frac{1}{2},j}(\mathbf{p}) - \mathcal{F}^1_{i-\frac{1}{2},j}(\mathbf{p})}{h} + \frac{\mathcal{F}^1_{i,j+\frac{1}{2}}(\mathbf{p}) - \mathcal{F}^1_{i,j-\frac{1}{2}}(\mathbf{p})}{h} \right) \end{aligned} \tag{A.5b}$$

$$\begin{aligned} \overline{w}_{i,j}^{n+1} - \Delta t D_w \Delta_{i,j} w^{n+1} &= \overline{w}_{i,j}^{n} + \Delta t f_{2,i,j}^{n} \\ &+ \Delta t \left(\frac{\mathcal{F}^2_{i+\frac{1}{2},j}(\mathbf{q}) - \mathcal{F}^2_{i-\frac{1}{2},j}(\mathbf{q})}{h} + \frac{\mathcal{F}^2_{i,j+\frac{1}{2}}(\mathbf{q}) - \mathcal{F}^2_{i,j-\frac{1}{2}}(\mathbf{q})}{h} \right) \end{aligned} \tag{A.5c}$$

onde usamos a notação $\Delta_h = (\Delta_{i,j})$ para indicar a matriz do operador Laplaciano discretizado e $\mathcal{I}$ é a matriz identidade. Cada um dos sistemas lineares para $\overline{q}_{i,j}$ e $\overline{p}_{i,j}^{n+1}$, $\overline{u}_{i,j}^{n+1}$ e $\overline{w}_{i,j}^{n+1}$ podem ser resolvidos usando eficientes algoritmos bem conhecidos na literatura.

Apêndice B

Estimativas L^p para a equação parabólica do feromônio

Seja ϕ uma solução do problema

$$\begin{aligned} \partial_t \phi - \Delta\phi &= f \quad \text{em} \;\; (0,\infty)\times\Omega \\ \nabla\phi\cdot\mathbf{n} &= 0 \quad \text{em} \;\; (0,\infty)\times\partial\Omega \\ \phi\big|_{t=0} &= \phi_0 \quad \text{em} \;\; \Omega. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Então, via a fórmula de Duhamel, ϕ é dada explicitamente por

$$\phi(t) = e^{t\Delta}\phi_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)\, ds,$$

onde $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ é o semigrupo da equação do calor de Neumann em Ω. Um resultado que vamos usar por diversas vezes durante esse trabalho é o Lema 1.3 de [69] apresentado abaixo:

Lema 3. *Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ conexo e suave. Seja $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ o semigrupo do calor com condições de Neumann em Ω e denotamos $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor não nulo de $-\Delta$ em Ω com condições de fronteira de Neumann. Então existem constantes $C_1, ..., C_4$ dependendo apenas de Ω que satisfazem as seguintes propriedades:*

(a) *Se $1 \leq q \leq p \leq \infty$ então*

$$\|e^{t\Delta}\phi\|_p \leq C_1 \left(1 + \frac{1}{t^{1/q-1/p}}\right) e^{-\lambda_1 t}\, \|\phi\|_q, \quad \forall t > 0,$$

para todo $\phi \in L^q(\Omega)$ satisfazendo $\int_\Omega \phi\, dx = 0$.

(b) *Se* $1 \leq q \leq p \leq \infty$ *então*

$$\|\nabla e^{t\Delta}\phi\|_p \leq C_2 \left(1 + \frac{1}{t^{1/q-1/p+1/2}}\right) e^{-\lambda_1 t} \|\phi\|_q, \quad \forall t > 0,$$

para todo $\phi \in L^q(\Omega)$.

(c) *Se* $2 \leq q < \infty$ *então*

$$\|\nabla e^{t\Delta}\phi\|_p \leq C_3 e^{-\lambda_1 t}\|\nabla\phi\|_p, \quad \forall t > 0$$

para todo $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$.

(d) *Se* $1 < q \leq p < \infty$ *então*

$$\|e^{t\Delta}\nabla \cdot \phi\|_p \leq C_4 \left(1 + \frac{1}{t^{1/q-1/p+1/2}}\right) e^{-\lambda_1 t} \|\phi\|_q, \quad \forall t > 0, \qquad \text{(B.2)}$$

para todo $\phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^n$. *Consequentemente, para todo* $t > 0$ *o operador* $e^{t\Delta}\nabla$ *possui uma única determinada extensão para um operador de* $L^q(\Omega)$ *em* $L^p(\Omega)$ *com a norma controlada de acordo com (B.2)*

Temos como consequencia o seguinte lema técnico:

Lema 4. *Fixe* $s \in (n, \infty)$ *e* $\theta \in (0, 2]$ *tais que*

$$\frac{\theta s}{2} \geq 1, \quad \frac{\theta s}{2 - \theta} > n$$

Adicionalmente, assumimos que para algum $T > 0$*:*

$$\nabla\phi_0 \in L^s(\Omega), \quad f \in L^\infty(0, T; (L^1 \cap L^{\frac{s\theta}{2}})(\Omega)).$$

Seja ϕ *uma solução de (B.1). Então para cada* $t \in (0, T]$,

$$\|\nabla\phi(t)\|_s \leq \|\phi_0\|_s + C\left(1 + \frac{1}{t^{\frac{n-s'}{2s'}}}\right) \times \left(1 + \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_1\right) \sup_{t/2 \leq t' \leq t} \|f(t')\|_{\frac{s\theta}{2}}^{\frac{\theta}{n}\frac{s(n-1)-n}{\theta s - 2}}.$$

A constante C *depende de* Ω, n, s *e* θ. *Além disso, o supremo em tempo pode ser estimado para qualquer* $T \geq 1$ *por*

$$\sup_{0 \leq t' \leq t} \|\nabla\phi(t')\|_s \leq \|\nabla\phi_0\|_s + C\left(1 + \sup_{0 \leq t' \leq t} \|f(t')\|_1\right) \sup_{0 \leq t' \leq t} \|f(t')\|_{\frac{s\theta}{2}}^{\frac{\theta}{n}\frac{s(n-1)-n}{\theta s - 2}}.$$

A constante C *depende de* Ω, n, s *e* θ.

Demonstração: Ver [3]. ■

Esse resultado pode ser estendido para

$$\begin{aligned} \partial_t \phi - \Delta \phi &= f - \delta \phi \quad \text{em} \ (0,\infty) \times \Omega \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{em} \ (0,\infty) \times \partial\Omega \\ \phi\big|_{t=0} &= \phi_0 \quad \text{em} \ \Omega. \end{aligned}$$

com o semigrupo associado $e^{-\delta t} e^{t\Delta}$. Assim,

$$\|\nabla e^{-\delta t} e^{t\Delta}\| = \|e^{-\delta t} \nabla e^{t\Delta}\| \leq \|\nabla e^{t\Delta}\|.$$

Por fim, temos o seguinte lema:

Lema 5. *Seja* $1 \leq r \leq s \leq \infty$. *Então*

$$\|e^{t\Delta} \nabla \phi\|_s \leq C \left(1 + \frac{1}{t^{\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right)}} \right) \|\phi\|_r,$$

válido para qualquer $\phi \in \{v \in [L^r(\Omega)]^n, \ \nabla \cdot v \in L^2(\Omega), \ v \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ \ em \ \partial\Omega\}$.

Demonstração: Ver [3]. ■

Apêndice C

Lemas de equações diferenciais ordinárias

Apresentamos alguns Lemas usuais de equações diferenciais ordinárias:

Lema 6. *Sejam X e Y duas funções não-negativas e absolutamente contínuas em $[0,T]$ tais que para todo $t > 0$ temos*

$$Y'(t) + aY^{\alpha}(t) \geq b + \delta + c\left(1 + \frac{1}{t^{\gamma}}\right) \sup_{\tau(t) \leq s \leq t} Y^{\alpha_0}(s)$$

e

$$X'(t) + aX^{\alpha}(t) \leq b + c\left(1 + \frac{1}{t^{\gamma}}\right) \sup_{\tau(t) \leq s \leq t} X^{\alpha_0}(s)$$

para algum mapa contínuo $t \mapsto \tau(t) \in [0,t]$ e constantes $b \geq 0$, $c \geq 0$, $a > 0$, $\delta > 0$, $\alpha > \alpha_0 \geq 0$ e $\gamma \geq 0$. Se $Y(0) > X(0)$ então $Y \geq X$ em $[0,T]$. Em particular, se $\gamma = 0$ então

$$\sup_{t \in [0,T]} X(t) \leq \max\{X(0), C\}, \tag{C.1}$$

onde a constante $C > 0$ depende de todos os parâmetros, exceto $\tau(\cdot)$, δ e T.

Demonstração: Ver [3]. ■

Também segue o seguinte resultado:

Lema 7. *Assumimos que X seja absolutamente contínua em $[0,T]$ tal que*

$$X' + aX^{\alpha} \leq b + c\left(1 + \frac{1}{t^{\gamma}}\right) \sup_{\frac{t}{2} \leq s \leq t} X^{\alpha_0}(s),$$

com $b \geq 0$*,* $c \geq 0$*,* $\alpha > \alpha_0 \geq 0$ *e* $\gamma \geq 0$*. Então*

$$X(t) \leq C\left(1 + \frac{1}{t^\beta}\right), \qquad \beta = \max\left\{\frac{1}{1-\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha - \alpha_0}\right\}.$$

A constante $C > 0$ *depende de todos os parâmetros, exceto* T*.*

Demonstração: Ver [3]. ■