Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática

Sobre uma Classe de Sistemas Dispersivos de Ordem Superior: Boa Colocação, Controle e Estabilização

por

Rafael Martins Lobosco

Rio de Janeiro
2018

Sobre uma Classe de Sistemas Dispersivos de Ordem Superior: Boa Colocação, Controle e Estabilização

Rafael Martins Lobosco

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Rio de Janeiro
Maio de 2018

Sobre uma Classe de Sistemas Dispersivos de Ordem Superior: Boa Colocação, Controle e Estabilização

Rafael Martins Lobosco

Ademir Fernando Pazoto

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Ademir Fernando Pazoto - IM/UFRJ

Prof. Gustavo Alberto Perla Menzala - LNCC/MCT

Prof. Hugo Danilo Fernández Sare - UFJF

Prof. Juan Bautista Límaco Ferrel - UFF

Profa. Patrícia Nunes da Silva - UERJ

Rio de Janeiro - Brasil

2018

Agradecimentos

Agradeço a Deus, minha família e meus amigos, pelos bons momentos e pelo apoio nos momentos difíceis.

Agradeço ao meu orientador Ademir Fernando Pazoto, por compatilhar os conhecimentos que integram este trabalho.

Agradeço aos meus amigos da UFF, por estarem comigo desde o mestrado.

Agradeço aos meus colegas e amigos do Instituto de Matemática da UFRJ, dentre eles Vernny, Taynara, Andrea e Leandro, por cada conversa, cada palavra que tornou este doutorado mais belo.

À agência de fomento CAPES, pelo apoio financeiro durante anos de Doutorado.

Resumo

Neste trabalho, provamos alguns resultados de boa colocação, controlabilidade, estabilização e continuação única para uma classe de equações diferenciais parciais dispersivas. Primeiro, consideramos um sistema de Boussinesq que acopla duas equações de Korteweg-de Vries de quinta ordem, em um domínio limitado. Obtemos a controlabilidade exata através de uma configuração adequada da posição dos controles atuando na fronteira. Também consideramos uma família de mecanismos dissipativos, atuando na fronteira, para a qual as soluções com dados pequenos são globalmente definidas e exponencialmente decrescentes no espaço de energia. Em seguida, provamos a boa colocação global e um resultado de continuação única para um sistema Boussinesq que acopla duas equações do tipo Benjamin- Bona-Mahony, em domínio limitado.

Palavras chave: Controlabilidade, estabilização, sistema de Boussinesq, propriedade de continuação única.

Abstract

In this work, we prove some well-posedness, controllability, stabilization and unique continuation results for a class for dispersive partial differential equations. First, we consider a Boussinesq system which couples two fifth order Korteweg-de Vries equations, posed on a bounded domain. We obtain the exact controllability provided by a suitable configuration of the controls position in the boundary. We also design a feedback laws for which the solutions issuing from small data are globally defined and exponentially decreasing in the energy space. Next, we prove the global well-posedness and a unique continuation result for a Boussinesq system which couples two Benjamin-Bona-Mahony type equations, posed on a bounded domain.

Key words: Controllability, stabilization, Boussinesq system, unique continuation property.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O sistema de Boussinesq clássico foi introduzido pela primeira vez por Boussinesq em [3] para descrever a propagação de ondas de pequena amplitude na superfície de um canal de água. Tal modelo também se mostrou útil para quando se estuda a propagação de ondas em grandes lagos, oceanos, dentre outras aplicações.

Recentemente, em [2], J. L. Bona, M. Chen e J. C. Saut obtiveram a seguinte família de sistemas de Boussinesq de quinta ordem para descrever fenômenos de mesma natureza:

$$\begin{cases} u_t - bu_{2xt} + b_2u_{4xt} + v_x + av_{3x} + a_2v_{5x} + (uv)_x - b(uv)_{3x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +(a+b-\frac{1}{3})(uv_{2x})_x = 0, \\ v_t - dv_{2xt} + d_2v_{4xt} + u_x + cu_{3x} + c_2u_{5x} + vv_x + c(vv_x)_{2x}+ \\ \qquad\qquad +(uu_{2x})_x - (c+d-1)v_xv_{2x} - (c+d)vv_{3x} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde as constantes $a, b, c, d, a_2, b_2, c_2, d_2$ devem satisfazer as seguintes relações

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{1}{2}(\theta^2 - \frac{1}{3}), \\ c+d &= \frac{1}{2}(1-\theta^2), \\ a_2 - b_2 &= -\frac{1}{2}(\theta^2 - \frac{1}{3})b + \frac{5}{24}(\theta^2 - \frac{1}{5})^2, \\ c_2 - d_2 &= \frac{1}{2}(1-\theta^2)c + \frac{5}{24}(1-\theta^2)(\theta^2 - \frac{1}{5}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

para algum $\theta \in [0,1]$.

Neste sistema faremos o estudo do caso $a_2 = c_2$ e $b_2 = d_2 = b = d = 0$ que ocorre quando

$$\theta = \frac{1}{10}\sqrt{-50 + 10\sqrt{145}}.$$

Portanto, as constantes a_2 e c_2 são

$$a_2 = c_2 = \frac{5}{24}(-\frac{7}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{145})^2.$$

No que se refere ao estudo matemático, os problemas de Boussinesq de terceira ordem tem sido sistematicamente estudados (vide [17, 16, 4, 15] e as respectivas referências), contudo, continuam pouco explorados os problemas de controle e estabilização na fronteira para o caso de quinta ordem.

Na primeira e na segunda parte deste trabalho faremos um estudo da boa colocação e das propriedades de controle da seguinte versão simplificada do sistema (1.1):

$$\begin{cases} u_t(t,x) + v_x(t,x) + a_2 v_{5x}(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ v_t(t,x) + u_x(t,x) + a_2 u_{5x}(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \end{cases} \tag{1.3}$$

satisfazendo as seguintes condições de fronteira

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, \ t \in (0,T), \\ u_{xx}(t,L) - v_{xx}(t,L) = h(t), \ t \in (0,T), \\ v(t,0) = v(t,L) = v_x(t,0) = v_x(t,L) = 0, v_{xx}(t,0) = g(t), \ t \in (0,T), \end{cases} \tag{1.4}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} u(0,x) & = u_0(x), \quad x \in (0,L), \\ u(0,x) & = v_0(x), \quad x \in (0,L), \end{cases} \tag{1.5}$$

onde as funções h, g desempenharão o papel de controles que atuam na fronteira do domínio $[0, L]$. Mais precisamente, estamos interessados na seguinte questão:

Dados $T > 0$, um estado inicial (u_0, v_0) e um dado final (u_1, v_1) em $[L^2(0,L)]^2$, podemos encontrar controles apropriados $h = h(t)$ e $g = g(t)$ em $L^2(0,T)$, tais que o sistema (1.3)-(1.5) admite uma solução (u, v) que satisfaz $(u(0,.), v(0,.)) = (u_0, v_0)$ e $(u(T,.), v(T,.)) = (u_1, v_1)$?

Se a resposta for afirmativa, dizemos que o sistema é exatamente controlável.

Utilizando o *Hilbert Uniqueness Method* (HUM), introduzido em [6, 13], mostraremos que, nas condições acima, é possível obter a controlabilidade exata de (1.3)-(1.5). Nesse caso, a controlabilidade pode ser obtida provando uma desigualdade de observabilidade para as soluções do sistema adjunto associado a (1.3)-(1.5). Faremos isso utilizando as ideias introduzidas por Rosier em [17] que, através do uso de estimativas a priori, do efeito regularizante de Kato e argumentos de compacidade, reduz o problema a provar um princípio de continuação única para as soluções de um problema espectral. Nesse fato, reside um dos pontos principais do trabalho, onde se conclui através de um resultado provado por Santos et al [7] que, com as condições de contorno propostas em (1.4), essa propriedade de continuação única se verifica sem nenhuma restrição sobre o comprimento do intervalo. O mesmo não acontece, por exemplo, para a equação de Korteweg-de Vries [17] e para o sistema de Boussinesq do tipo KdV-KdV [4]. Esse é fenômeno, conhecido com *Critical Length Phenomenon*, foi provado pela primeira vez por Rosier em [17] estudando a controlabilidade na fronteira para a equação de Korteweg-de Vries.

Faremos também um estudo do comportamento assintótico das soluções de (1.3)-(1.5) considerando $h \equiv 0$, $g(t) = -u_{xx}(t,0)$ e incluindo as não linearidades que tiverem ordem menor ou igual a dois. Mais especificamente, consideremos o sistema

$$\begin{cases} u_t + v_x + a_2 v_{5x} + (uv)_x + (a - \frac{1}{3})u_x v_{2x} & = 0, \\ v_t + u_x + a_2 u_{5x} + v v_x + (2c+1)v_{2x}v_x + u_{2x}u_x & = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

para $(t,x) \in (0,\infty) \times (0,L)$, satisfazendo as condições de fronteira

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, u_{xx}(t,L) - v_{xx}(t,L) = 0, \\ v(t,0) = v(t,L) = v_x(t,0) = v_x(t,L) = 0, u_{xx}(t,0) + v_{xx}(t,0) = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

para $t \in (0,\infty)$ e tendo as condições iniciais

$$\begin{cases} u(0,x) & = u_0(x), \\ v(0,x) & = v_0(x), \end{cases} \tag{1.8}$$

para $x \in (0,L)$.

Observe que, se multiplicarmos a primeira equação de (1.6) por u, a segunda por v e integramos por partes no intevalo $(0,L)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L (u^2(t,x) + v^2(t,x))dx = -a_2 u_{2x}^2(t,L) - a_2 u_{2x}^2(t,0) \\ &-\int_0^L \frac{u^2}{2}\left(v_x + \left(\frac{1}{3} - a\right)v_{3x}\right) + v_x\left((2c+1)\frac{v_x^2}{2} + \frac{u_x^2}{2}\right)dx. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Portanto, considerando a energia associada ao modelo

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (u^2(t,x) + v^2(t,x))dx,$$

temos que as condições de fronteira atuam como um mecanismo dissipativo, pelo menos para o modelo linear. Assim, obteremos o decaimento exponencial do sistema linear, que nos possibilitará obter o decaimento exponencial do sistema não linear. A prova desse resultado é obtida da seguinte maneira: Primeiro estudamos o sistema linear para deduzir algumas estimativas a priori e o decaimento exponencial das soluções na norma $[L^2(0,L)]^2$. Estabelecemos o efeito regularizante de Kato usando o método dos multiplicadores, enquanto o decaimento exponencial é obtido com a ajuda de alguns argumentos de compacidade que reduz o trabalho a um problema espectral. Com essas estimativas, obtemos uma taxa de decaimento em $[H^2(0,L)]^2$ e provamos a boa colocação global e o decaimento exponencial das soluções do sistema não linear partindo de dados iniciais pequenos em $[L^2(0,L)]^2$. A ideia central consiste em combinar o efeito regularizante de Kato e a taxa de decaimento das soluções em $[H^2(0,L)]^2$ para estabelecer uma estimativa pontual e, então, aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach no espaço

$$F_\mu := \{U = (u, v) \in C(\mathbb{R}^+; [H^2(0, L)]^2); \| e^{\mu t} U(t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; [H^2(0,L)]^2)} < \infty\},$$

onde $\mu > 0$, será determinado posteriormente. Vale ressaltar que devido a falta de estimativas a priori na norma de $[L^2(0, L)]^2$, a questão da existência global de soluções é difícil de resolver. Entretanto, a existência global juntamente com a estabilidade exponencial podem ser estabelecidas para dados iniciais suficientemente pequenos. Para este propósito, o efeito regularizante de Kato e a taxa de decaimento exponencial em H^2 são combinados em uma estimativa pontual no tempo.

Na terceira parte, estudaremos um problema de continuação única para o sistema de Boussinesq linear do tipo Benjamin-Bona-Mahony de terceira ordem na presença de potenciais dependendo do tempo e do espaço. Mais especificamente,

$$\begin{cases} \eta_t(t, x) - \eta_{xxt}(t, x) = p_1(t, x)\omega_x(t, x) + q_1(t, x)\omega(t, x), \\ \omega_t(t, x) - \omega_{xxt}(t, x) = p_2(t, x)\eta_x(t, x) + q_2(t, x)\eta(t, x), \end{cases} \tag{1.10}$$

em $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$, onde assumimos que

$$p_i, q_i \in L^\infty((0, T) \times (0, 1)), \text{ para } i = 1, 2, \tag{1.11}$$

Façamos uma reflexão mais detalhada sobre a propriedade de continuação única do sistema acima: para algum intervalo $I \subset (0, 1)$ seria possível concluir que $\eta(t, x) = \omega(t, x) = 0$ em $(0, T) \times I$ implica que $\eta \equiv \omega \equiv 0$ em todo o domínio $(0, T) \times (0, 1)$? Em outra hipótese, seria possível concluir que as condições de fronteira $\eta(t, 1) = \omega(t, 1) = \eta_x(t, 1) = \omega_x(t, 1) = 0$ implicam que $\eta \equiv \omega \equiv 0$ em todo o domínio $(0, T) \times (0, 1)$?
Infelizmente, a continuação única não ocorre para estes casos, conforme podemos afirmar pelo seginte contra-exemplo semelhante ao utilizado por Zhang e Zuazua [21]: sejam $p_i = q_i = 0$, e defina $\omega(t, x) = \omega_0(x) \neq 0$ e $\eta(t, x) = \eta_0(x) \neq 0$ como funções independentes do tempo, tais que $\omega_0 \in C_0^\infty(0, 1)$, $\eta_0 \in C_0^\infty(0, 1)$, $\operatorname{supp} u_0 \subset (0, 1)\backslash\overline{I}$ e $\operatorname{supp} v_0 \subset (0, 1)\backslash\overline{I}$. Então, as funções $\omega(t, x)$ e $\eta(t, x)$ satisfazem (1.10) e as condições acima, mas não se anulam em todo o domínio $(0, T) \times (0, 1)$.

Este contra-exemplo demonstra uma dificuldade adicional que não é enfrentada em outros modelos, tais como a equação de Korteweg-de Vries. Por isso, precisamos de condições adicionais para garantir a continuação única. Por exemplo, Zhang e Zuazua [21] provaram um resultado de continuação única para a equação do tipo BBM

$$u_t(t, x) - u_{xxt}(t, x) = [p(x)u(t, x)]_x + q(x)u(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1),$$

onde p e q não dependem do tempo, com as condições de fronteira $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$. Assim, se $u(t, x) = 0$ em $(t, x) \in (0, T) \times I$, então $u(t, x) = 0$ em todo o domínio.

No presente trabalho, provamos a propriedade de continuação única considerando as seguintes condições de fronteira e iniciais do sistema (1.10)

$$\begin{cases} \eta(t,1) = \omega(t,1) = \eta_x(t,1) = \omega_x(t,1) = 0, \ t \in (0,T), \\ \eta(0,x) = \omega(0,x) = 0, \ x \in (0,1). \end{cases} \tag{1.12}$$

Observamos que para a equação de Benjamin-Bona-Mahony, não podemos provar a continuação única pelo método das características (Teorema 3.1-3.2 em [5]), por isso para o estudo da propriedade de continuação única de outras equações dispersivas, tais como a equação de Korteweg-de Vries, indicamos [11]. Em ambos os artigos [11] e [5], a principal ferramenta é uma desigualdade de Carleman. Para aplicações de desigualdades de Carleman para obter a propriedade de continuação única, vide [9], [10], [18] e [19].

A demonstração do resultado principal dessa parte do trabalho será obtida pela aplicação de uma desigualdade de Carleman provada por M. Yamamoto em [20].

Finalizamos a introdução mencionando alguns resultados obtidos para a equação de Korteweg-de Vries de quinta ordem e para a equação de Benjamin-Bona-Mahony que foram utilizados para o desenvolvimento deste trabalho: [1, 5, 8, 12].

Capítulo 2

Existência e unicidade para um sistema acoplado do tipo KdV-KdV de quinta ordem

Neste capítulo, faremos a demonstração dos teoremas de existência e unicidade de soluções de ambos os sistemas (1.3)-(1.5) e (1.6)-(1.8), assim como dos respectivos sistemas adjuntos.

Introduzimos o espaço

$$X = L^2(0,L) \times L^2(0,L),$$

com o produto interno usual

$$((u,v),(\phi,\psi))_X = \int_0^L (u\phi + v\psi)dx$$

e o espaço

$$D = C([0,T];X) \cap L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2),$$

munido da norma

$$\begin{aligned} \|(u,v)\|_D := sup_{t\in[0,T]} \|(u(t,.),v(t,.))\|_X \\ + \left(\int_0^T \|u(t,.)\|^2_{H^2(0,L)} + \|v(t,.)\|^2_{H^2(0,L)} dt\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

2.1 O sistema linear homogêneo de (1.3)-(1.5)

Nesta seção analisaremos a boa colocação do sistema homogêneo associado a (1.3)-(1.5), ou seja,

$$\begin{cases} u_t(t,x) + v_x(t,x) + a_2 v_{5x}(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T)\times(0,L), \\ v_t(t,x) + u_x(t,x) + a_2 u_{5x}(t,x) = 0, & (t,x) \in (0.T)\times(0,L), \end{cases} \tag{2.1}$$

satisfazendo as seguintes condições de fronteira

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,0) = u_x(t,L) = u_{xx}(t,L) - v_{xx}(t,L) = 0, \ t \in (0,T), \\ v(t,0) = v(t,L) = v_x(t,0) = v_x(t,L) = v_{xx}(t,0) = 0, \ t \in (0,T), \end{cases} \tag{2.2}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in (0,L), \\ v(0,x) &= v_0(x), \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{2.3}$$

Os resultados serão obtidos utilizando a teoria de semigrupos, por isso consideramos o operador

$$A : D(A) \subset X \to X, \tag{2.4}$$

com domínio

$$D(A) = \left\{ (u,v) \in H^5(0,L) \times H^5(0,L); \begin{array}{l} u(0) = u(L) = u_x(0) = u_x(L) = 0, \\ v(0) = v(L) = v_x(0) = v_x(L) = 0, \\ u_{xx}(L) - v_{xx}(L) = v_{xx}(0) = 0 \end{array} \right\}, \tag{2.5}$$

definido por

$$A(u,v) = (-v_x - a_2 v_{5x}, -u_x - a_2 u_{5x}). \tag{2.6}$$

Assim, se denotarmos por $U = (u,v)$, obtemos um problema de Cauchy abstrato para o sistema (2.1)-(2.3), ou seja,

$$\begin{cases} U_t = AU, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Com a notação acima, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1. *O operador A gera um semigrupo de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, em X.*

Demonstração. O operador A é dissipativo, pois dado $U = (u,v) \in D(A)$, obtemos

$$\begin{aligned} (U, AU)_X &= ((u,v), A(u,v))_X = ((u,v), (-v_x - a_2 v_{5x}, -u_x - a_2 u_{5x}))_X \\ &= \int_0^L u(-v_x - a_2 v_{5x})dx + \int_0^L v(-u_x - a_2 u_{5x})dx \\ &= \int_0^L (u_x + a_2 u_{5x})v dx + \int_0^L v(-u_x - a_2 u_{5x})dx \\ &\quad + [-uv]_0^L + a_2[-uv_{4x} + u_x v_{3x} - u_{xx} v_{xx} + u_{3x} v_x - u_{4x} v]_0^L \\ &= -a_2 v_{xx}^2(L) \leq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, o operador adjunto

$$A^* : D(A^*) \subset X \to X, \tag{2.8}$$

possui domínio

$$D(A^*) = \left\{ (f,g) \in H^5(0,L) \times H^5(0,L);\ \begin{array}{l} f(0) = f(L) = f_x(0) = f_x(L) = 0, \\ g(0) = g(L) = g_x(0) = g_x(L) = 0, \\ f_{xx}(L) + g_{xx}(L) = g_{xx}(0) = 0 \end{array} \right\} \tag{2.9}$$

e é definido por

$$A^*(f,g) = (g_x + a_2 g_{5x}, f_x + a_2 f_{5x}). \tag{2.10}$$

Logo, o operador A^* também é dissipativo, pois dado $W = (f,g) \in D(A^*)$ segue que

$$\begin{aligned} (W, A^*W)_X &= ((f,g), A(f,g))_X = ((f,g), (+g_x + a_2 g_{5x}, +f_x + a_2 f_{5x}))_X \\ &= \int_0^L f(+g_x + a_2 g_{5x})dx + \int_0^L g(+f_x + a_2 f_{5x})dx \\ &= \int_0^L (-f_x - a_2 f_{5x})gdx + \int_0^L g(+f_x + a_2 f_{5x})dx \\ &\quad +[fg]_0^L + a_2[+fg_{4x} - f_x g_{3x} + f_{xx} g_{xx} - f_{3x} g_x + f_{4x} g]_0^L \\ &= -a_2 g_{xx}^2(L) \leq 0. \end{aligned}$$

Além disso, $A = A^{**}$, o que nos garante que A é fechado. Como $D(A)$ e $D(A^*)$ são densos em X, pois o conjunto $C_0^\infty(0,L) \times C_0^\infty(0,L)$ é denso em X e está contido em ambos os domínios, A gera um semigrupo em X. □

Pelos resultados clássicos de semigrupos temos o seguinte teorema de existência global de soluções para o sistema linear homogêneo (2.1)-(2.3):

Teorema 2.2. *Se $U_0 = (u_0, v_0) \in D(A)$, existe uma única solução de* (2.1)-(2.3) *(que chamaremos de clássica), tal que*

$$U \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X). \tag{2.11}$$

Se, por outro lado, $U_0 = (u_0, v_0) \in X$, então existe uma única mild solution de (2.1)-(2.3), *tal que*

$$U \in C(\mathbb{R}^+; X). \tag{2.12}$$

No próximo teorema provaremos resultados adicionais para a mild solution do sistema homogêneo, obtida no Teorema 2.2.

Teorema 2.3. *Sejam $U_0 = (u_0, v_0) \in X$ e (u,v) a mild solution dada pelo Teorema 2.2 com dado inicial U_0. Então, temos as seguintes estimativas:*

$$\int_0^T u_{xx}^2(t,L)dt = \frac{1}{2a_2}\left(\int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x))dx - \int_0^L (u^2(T,x) + v^2(T,x))dx\right), \tag{2.13}$$

$$\int_0^T \int_0^L (u^2+v^2)dxdt \le T\int_0^L (u_0^2+v_0^2)dx, \tag{2.14}$$

$$\int_0^T u_{xx}^2(t,0)dt \le \frac{2}{a_2}\int_0^L (u_0^2+v_0^2)dx, \tag{2.15}$$

$$\int_0^T \int_0^L (u_{xx}^2+v_{xx}^2)dxdt \le C\|(u_0,v_0)\|_X^2, \tag{2.16}$$

onde $C = \frac{3L}{5a_2} > 0.$

Demonstração. Podemos considerar dados iniciais em $D(A)$ e concluir o resultado usando um argumento de densidade. Seja $q \in C^\infty((0,T)\times(0,L))$. Multiplicamos a primeira equação de (2.1) por qu e a segunda por qv:

$$\begin{cases} quu_t + quv_x + a_2 quv_{5x} &= 0, \quad (t,x)\in(0,T)\times(0,L),\\ qvv_t + qvu_x + a_2 qvu_{5x} &= 0, \quad (t,x)\in(0,T)\times(0,L). \end{cases}$$

Somando e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \frac{q}{2}\frac{d}{dt}(u^2+v^2)dxdt + \int_0^T\int_0^L q(uv)_x dxdt +\\ +a_2\int_0^T\int_0^L ((qu)_{xx}v_{3x} + (qv)_{xx}u_{3x})dxdt = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Fazendo $q = 1$ e usando as condições de fronteira (2.2), segue que

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^L (u^2(T,x)+v^2(T,x))dx - \int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx\right) = -a_2\int_0^T u_{xx}^2(t,L)dt,$$

de onde se obtém (2.13).

Para provar (2.14) fazemos $q = T-t$ em (2.17) e integramos por partes, obtendo

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L (u^2+v^2)dxdt - \frac{T}{2}\int_0^L (u_0^2+v_0^2)dx = -a_2\int_0^T (T-t)u_{xx}^2(t,L)dt \le 0,$$

o que nos dá a estimativa (2.14).

Para provar (2.15) multiplicamos a primeira equação de (2.1) por pv, a segunda por pu, integramos por partes em $(0,T)\times(0,L)$ e somamos as identidades, obtendo

$$0 \;=\; \int_0^T\int_0^L pv(u_t+v_x+a_2v_{5x})dxdt + \int_0^T\int_0^L pu(v_t+u_x+a_2u_{5x})dxdt$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \int_0^T \int_0^L p(vu)_t dxdt + \int_0^T \int_0^L \frac{p}{2}(v^2+u^2)_x dxdt + a_2 \int_0^T \int_0^L (pv)_{xx}(v_{3x}) dxdt \\
&+ a_2 \int_0^T (pv)v_{4x}|_0^L dt - a_2 \int_0^T (pv)_x v_{3x}|_0^L dt + a_2 \int_0^T \int_0^L (pu)_{xx}(u_{3x}) dxdt \\
&+ a_2 \int_0^T (pu)u_{4x}|_0^L dt - a_2 \int_0^T (pu)_x u_{3x}|_0^L dt.
\end{aligned}
$$

Logo, por (2.2) tem-se

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& \int_0^T \int_0^L p(vu)_t dxdt + \int_0^T \int_0^L \frac{p}{2}(v^2+u^2)_x dxdt + a_2 \int_0^T \int_0^L (pv)_{xx}(v_{3x}) dxdt \\
&+ a_2 \int_0^T \int_0^L (pu)_{xx}(u_{3x}) dxdt. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Se considerarmos $p(t,x) = 1$ em (2.18), obtemos a seguinte identidade

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& \int_0^T \int_0^L (vu)_t dxdt + \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2}(v^2+u^2)_x dxdt + a_2 \int_0^T \int_0^L v_{xx}v_{3x} dxdt \\
&+ a_2 \int_0^T \int_0^L u_{xx}u_{3x} dxdt \\
=\;& \int_0^L (vu)|_0^T dx + \int_0^T \frac{1}{2}(v^2+u^2)|_0^L dt + a_2 \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2}(v_{xx}^2 + u_{xx}^2)_x dxdt \\
=\;& \int_0^L (vu)|_0^T dx + a_2 \int_0^T \frac{1}{2}(v_{xx}^2 + u_{xx}^2)|_0^L dt \\
=\;& \int_0^L (vu)|_0^T dx + a_2 \int_0^T \frac{1}{2}(2v_{xx}^2(t,L) - u_{xx}^2(t,0)) dt,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\frac{a_2}{2} \int_0^T u_{xx}^2(t,0) dt \;=\; \int_0^L (vu)|_0^T dx + a_2 \int_0^T v_{xx}^2(t,L) dt.
$$

Usando a desigualdade $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ no lado direito da igualdade acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{a_2}{2} \int_0^T u_{xx}^2(t,0) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^L (v^2(T,x) + u^2(T,x)) dx& \\
+ \frac{1}{2} \int_0^L (v_0^2(x) + u_0^2(x)) dx + a_2 \int_0^T v_{xx}^2(t,L) dt.&
\end{aligned}
$$

Como $u_{xx}(t,L) = v_{xx}(t,L)$, aplicando (2.13) concluímos que

$$
\int_0^T u_{xx}^2(t,0) dt \leq \frac{2}{a_2} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx,
$$

ou seja, temos (2.15).

A desigualdade (2.16) será provada tomando inicialmente $p(t,x) = x$ em (2.18):

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_0^L x(vu)_t dxdt + \int_0^T \int_0^L \frac{x}{2}(v^2+u^2)_x dxdt + a_2 \int_0^T \int_0^L (xv)_{xx}(v_{3x})dxdt \\
&\quad + a_2 \int_0^T \int_0^L (xu)_{xx}(u_{3x})dxdt \\
&= \int_0^L x(vu)|_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2}(v^2+u^2)dxdt \\
&\quad + a_2 \int_0^T \int_0^L (2v_x + xv_{xx})(v_{3x})dxdt + a_2 \int_0^T \int_0^L (2u_x + xu_{xx})(u_{3x})dxdt \\
&= \int_0^L x(vu)|_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2}(v^2+u^2)dxdt - 2a_2 \int_0^T \int_0^L (v_{xx}^2 + u_{xx}^2)dxdt \\
&\quad + a_2 \int_0^T \int_0^L \left(\frac{x}{2}(v_{xx}^2)_x + \frac{x}{2}(u_{xx}^2)_x\right) dxdt.
\end{aligned}$$

As condições de fronteira (2.2) e a identidade acima, nos garantem que

$$\frac{5}{2}a_2 \int_0^T \int_0^L (v_{xx}^2 + u_{xx}^2)dxdt \leq \int_0^L x(vu)_0^T dx + a_2 \int_0^T Lu_{xx}^2(t,L)dt.$$

Novamente, pela desigualdade $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ e (2.13),

$$\frac{5}{2}a_2 \int_0^T \int_0^L (v_{xx}^2 + u_{xx}^2)dxdt \leq L \int_0^L (v_0^2 + u_0^2)dx + a_2 L \int_0^T u_{xx}^2(t,L)dt$$

e também

$$\int_0^T \int_0^L (v_{xx}^2 + u_{xx}^2)dxdt \leq C \left\|(u_0, v_0)\right\|_X^2, \tag{2.19}$$

onde $C = \frac{3L}{5a_2}$. □

2.2 O sistema linear não homogêneo (1.3)-(1.5)

Utilizando os resultados da seção anterior, vamos provar resultados de boa colocação para o sistema não homogêneo (1.3)-(1.5). Inicialmente provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.4. *Para* $(u_0, v_0) \in D(A)$ *e* h, $g \in C^2([0,T])$, *tais que* $h(0) = g(0) = 0$, *o sistema* (1.3)-(1.5) *possui uma única solução clássica*

$$(u,v) \in C([0,T]; D(A)) \cap C^1([0,T]; X).$$

Além disso,

$$\int_0^L (u^2(t,x)+v^2(t,x))dx \leq C\left(\int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx + \int_0^T h^2(t)dt + \int_0^T g^2(t)dt\right), \tag{2.20}$$

$$\int_0^T\int_0^L (v_{xx}^2+u_{xx}^2)dxdt \leq C\left(\int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx + \int_0^T h^2(t)dt + \int_0^T g^2(t)dt\right). \tag{2.21}$$

Seja o conjunto $C_0^2(0,T)=\{f\in C^2([0,T]) \quad | \quad f(0)=0\}$. Se definirmos a aplicação

$$\Gamma : ((u_0,v_0),(h,g)) \in D(A)\times[C_0^2(0,T)]^2 \mapsto (u,v)\in D,$$

que leva os dados iniciais e de fronteira na solução clássica de (1.3)-(1.5), os resultados acima garantem que podemos estendê-la de forma única para uma aplicação contínua

$$\Gamma : X\times[L^2(0,T)]^2 \to D.$$

Assim, se $(u_0,v_0)\in X$ e $(h,g)\in[L^2(0,T)]^2$,

$$\Gamma((u_0,v_0),(h,g))$$

é a solução fraca do sistema.

Demonstração.
Existência de solução:
Sejam β, $\gamma\in C^\infty([0,L])$ funções tais que

$$\beta_{xx}(L)=-1,$$
$$\gamma_{xx}(0)=-1,$$

com as demais condições de fronteira nulas:

$$\beta(0)=\beta(L)=\beta_x(0)=\beta_x(L)=\beta_{xx}(0)=0,$$
$$\gamma(0)=\gamma(L)=\gamma_x(0)=\gamma_x(L)=\gamma_{xx}(L)=0.$$

Fazendo a mudança de funções

$$\begin{pmatrix} z(t,x) \\ w(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} - S(t)\begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(t)\beta(x) \\ g(t)\gamma(x) \end{pmatrix},$$

transformamos (1.3)-(1.5) em

$$\begin{cases} z_t(t,x) + w_x(t,x) + a_2 w_{5x}(t,x) = h'(t)\beta(x) + g(t)(\gamma_x(x) + a_2\gamma_{5x}(x)), \\ w_t(t,x) + z_x(t,x) + a_2 z_{5x}(t,x) = g'(t)\gamma(x) + h(t)(\beta_x(x) + a_2\beta_{5x}(x)), \end{cases} \tag{2.22}$$

satisfazendo às seguintes condições de fronteira

$$\begin{cases} z(t,0) = z(t,L) = z_x(t,0) = z_x(t,L) = z_{xx}(t,L) - w_{xx}(t,L) = 0, \\ w(t,0) = w(t,L) = w_x(t,0) = w_x(t,L) = w_{xx}(t,0) = 0, \end{cases} \tag{2.23}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} z(0,x) &= 0, \quad x \in (0,L), \\ w(0,x) &= 0, \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{2.24}$$

Denotando por $F = \begin{pmatrix} h'(t)\beta(x) + g(t)(\gamma_x(x) + a_2\gamma_{5x}(x)) \\ g'(t)\gamma(x) + h(t)(\beta_x(x) + a_2\beta_{5x}(x)) \end{pmatrix}$, temos $F \in C^1([0,T];X)$. Segue então da teoria de semigrupos e do Teorema 2.3 que o sistema (1.3)-(1.5) tem uma única solução

$$(z(t,x), w(t,x)) \in C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T];X), \tag{2.25}$$

de onde concluímos que (1.3)-(1.5) admite uma única solução clássica

$$(u(t,x), v(t,x)) \in C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T];X). \tag{2.26}$$

Estimativas a priori:

Seja $q \in C^\infty([0,T]\times[0,L])$. Multiplicamos a primeira equação de (1.3) por qu e a segunda por qv:

$$\begin{cases} quu_t + quv_x + a_2 quv_{5x} &= 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times(0,L), \\ qvv_t + qvu_x + a_2 qvu_{5x} &= 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times(0,L). \end{cases}$$

Somando e integrando por partes (com $S > 0$), obtemos

$$\int_0^S \int_0^L \frac{q}{2}\frac{d}{dt}(u^2+v^2)dxdt - \int_0^S \int_0^L q_x(uv)dxdt$$
$$+a_2 \int_0^S \int_0^L ((qu)_{xx}v_{3x} + (qv)_{xx}u_{3x})\, dxdt = 0.$$

Tomando $q = 1$, segue que

$$\int_0^L (u^2(S,x) \quad +v^2(S,x))dx + 2a_2 \int_0^S v_{xx}^2(t,L)dt = \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x))dx + \\ +2a_2 \int_0^S (-h(t)v_{xx}(t,L) + g(t)u_{xx}(t,0))\, dt. \tag{2.27}$$

Analogamente, podemos obter a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^S \int_0^L qv(u_t + v_x + a_2 v_{5x})dxdt + \int_0^S \int_0^L qu(v_t + u_x + a_2 u_{5x})dxdt \\ &= \int_0^S \int_0^L q(vu)_t dxdt + \int_0^S \int_0^L \frac{q}{2}(v^2 + u^2)_x dxdt + a_2 \int_0^S \int_0^L (qv)_{xx}(v_{3x})dxdt \\ &\quad + a_2 \int_0^S (qv)v_{4x}|_0^L dt - a_2 \int_0^S (qv)_x v_{3x}|_0^L dt + a_2 \int_0^S \int_0^L (qu)_{xx}(u_{3x})dxdt \\ &\quad + a_2 \int_0^S (qu)u_{4x}|_0^L dt - a_2 \int_0^S (qu)_x u_{3x}|_0^L dt \end{aligned}$$

Usando as condições de fronteira (1.4) e integrando por partes mais uma vez, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^S \int_0^L q(vu)_t dxdt - \int_0^S \int_0^L \frac{q_x}{2}(v^2 + u^2)dxdt + a_2 \int_0^S \int_0^L (qv)_{xx}(v_{3x})dxdt \\ &\quad + a_2 \int_0^S \int_0^L (qu)_{xx}(u_{3x})dxdt. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Tomando $q(t,x) = 1$ em (2.28) e usando mais uma vez as condições de fronteira (1.4), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^S \int_0^L (vu)_t dxdt + a_2 \int_0^S \int_0^L v_{xx} v_{3x} dxdt + a_2 \int_0^S \int_0^L u_{xx} u_{3x} dxdt \\ &= \int_0^L (vu)|_0^S dx + a_2 \int_0^S \int_0^L \frac{1}{2}(v_{xx}^2 + u_{xx}^2)_x dxdt \\ &= \int_0^L (vu)|_0^S dx + a_2 \int_0^S \frac{1}{2}(v_{xx}^2 + u_{xx}^2)|_0^L dt \\ &= \int_0^L (vu)|_0^S dx + \frac{a_2}{2} \int_0^S (v_{xx}^2(t,L) - g^2(t) + (v_{xx}(t,L) + h(t))^2 - u_{xx}^2(t,0))dt, \end{aligned}$$

donde

$$0 = \int_0^L (vu)|_0^S dx + \frac{a_2}{2} \int_0^S (v_{xx}^2(t,L) - g^2(t) + (v_{xx}(t,L) + h(t))^2 - u_{xx}^2(t,0))dt. \tag{2.29}$$

Combinando (2.27) e (2.29) obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned}\int_0^L (u^2(S,x)+v^2(S,x))dx - \int_0^L (vu)|^S dx + a_2\int_0^S v_{xx}^2(t,L)dt + \frac{a_2}{2}\int_0^S u_{xx}^2(t,0)dt = \\ \int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx + \int_0^L (vu)|_0 dx \\ +2a_2\int_0^S (-h(t)v_{xx}(t,L)+g(t)u_{xx}(t,0))dt \\ +\frac{a_2}{2}\int_0^S (-g^2(t)+2v_{xx}(t,L)h(t)+h^2(t))dt \qquad (2.30)\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade $-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\leq -xy$ no segundo termo de (2.30), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L (u^2(S,x)+v^2(S,x))dx + a_2\int_0^S v_{xx}^2(t,L)dt + \frac{a_2}{2}\int_0^S u_{xx}^2(t,0)dt \leq \\ \leq \frac{3}{2}\int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx + a_2\int_0^S -h(t)v_{xx}(t,L)dt + 2a_2\int_0^S g(t)u_{xx}(t,0)dt \\ +\frac{a_2}{2}\int_0^S h^2(t)dt, \qquad (2.31)\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\left(\frac{x}{\epsilon}\right)(\epsilon y)\leq \frac{x^2}{2\epsilon^2}+\frac{\epsilon^2 y^2}{2}$, com $\epsilon=1$ no antepenúltimo termo e $\epsilon=2$ no penúltimo termo de (2.31), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L (u^2(S,x)+v^2(S,x))dx + \frac{a_2}{2}\int_0^S v_{xx}^2(t,L)dt + \frac{a_2}{4}\int_0^S u_{xx}^2(t,0)dt \leq \\ \leq \frac{3}{2}\int_0^L (u_0^2(x)+v_0^2(x))dx \\ +a_2\int_0^S h^2(t)dt + 4a_2\int_0^S g^2(t)dt, \qquad (2.32)\end{aligned}$$

o que nos fornece a estimativa (2.20).

Se considerarmos $p(t,x)=x$ em (2.28), obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^T\int_0^L x(vu)_t dxdt - \int_0^T\int_0^L \frac{1}{2}(v^2+u^2)dxdt + a_2\int_0^T\int_0^L (xv)_{xx}(v_{3x})dxdt \\ &\quad +a_2\int_0^T\int_0^L (xu)_{xx}(u_{3x})dxdt \\ &= \int_0^L x(vu)|_0^T dx - \int_0^T\int_0^L \frac{1}{2}(v^2+u^2)dxdt \\ &\quad +a_2\int_0^T\int_0^L (2v_x+xv_{xx})(v_{3x})dxdt + a_2\int_0^T\int_0^L (2u_x+xu_{xx})(u_{3x})dxdt\end{aligned}$$

$$= \int_0^L x(vu)|_0^T dxdt - \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2}(v^2+u^2)dxdt - 2a_2 \int_0^T \int_0^L (v_{xx}^2 + u_{xx}^2)dxdt$$
$$+a_2 \int_0^T \int_0^L \frac{x}{2}(v_{xx}^2)_x + \frac{x}{2}(u_{xx}^2)_x dxdt$$
$$= \int_0^L x(vu)|_0^T dxdt - \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2}(v^2+u^2)dxdt - \frac{5}{2}a_2 \int_0^T \int_0^L (v_{xx}^2 + u_{xx}^2)dxdt$$
$$+a_2 \int_0^T \frac{x}{2}(v_{xx}^2) + \frac{x}{2}(u_{xx}^2)|_0^L dt.$$

Segue das condições de fronteira e da estimativa (2.32) que existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de L, tal que

$$\int_0^T \int_0^L (v_{xx}^2 + u_{xx}^2)dxdt + \int_0^T \int_0^L (v^2+u^2)dxdt \leq$$
$$\leq C\left(\int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x))dx + \int_0^T h^2(t) + \int_0^T g^2(t)dt\right). \tag{2.33}$$

Portanto, temos (2.21). □

2.3 O sistema adjunto de (1.3)-(1.5)

Para o estudo da controlabilidade do sistema linear faz-se necessário o estudo do seguinte sistema adjunto

$$\begin{cases} \phi_t(t,x) + \psi_x(t,x) + a_2\psi_{5x}(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ \psi_t(t,x) + \phi_x(t,x) + a_2\phi_{5x}(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \end{cases} \tag{2.34}$$

com as condições na fronteira

$$\begin{cases} \phi(t,0) = \phi(t,L) = \phi_x(t,0) = \phi_x(t,L) = \phi_{xx}(t,L) + \psi_{xx}(t,L) = 0, \ t \in (0,T), \\ \psi(t,0) = \psi(t,L) = \psi_x(t,0) = \psi_x(t,L) = \psi_{xx}(t,0) = 0, \ t \in (0,T), \end{cases} \tag{2.35}$$

e condições finais

$$\begin{cases} \phi(T,x) &= \phi_1(x), \quad x \in (0,L), \\ \psi(T,x) &= \psi_1(x), \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{2.36}$$

Notemos que a mudança de variável $t \to T - t$ transforma o sistema (2.34)-(2.36) em

$$\begin{cases} \phi_t(t,x) - \psi_x(t,x) - a_2\psi_{5x}(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ \psi_t(t,x) - \phi_x(t,x) - a_2\phi_{5x}(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \end{cases} \tag{2.37}$$

com condições na fronteira

$$\begin{cases} \phi(t,0)=\phi(t,L)=\phi_x(t,0)=\phi_x(t,L)=\phi_{xx}(t,L)+\psi_{xx}(t,L)=0, \text{para } t\in(0,T), \\ \psi(t,0)=\psi(t,L)=\psi_x(t,0)=\psi_x(t,L)=\psi_{xx}(t,0)=0, \text{para } t\in(0,T), \end{cases} \tag{2.38}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} \phi(0,x) &= \phi_1(x) \quad x\in(0,L), \\ \psi(0,x) &= \psi_1(x) \quad x\in(0,L). \end{cases} \tag{2.39}$$

Por outro lado, o sistema (2.37)-(2.39) é equivalente a

$$\begin{cases} U_t = A^*U, \\ U(0)=U_0=(\phi_1,\psi_1), \end{cases} \tag{2.40}$$

onde A^* foi definido em (2.8)-(2.10). Portanto, procedendo como na demonstração do Teorema 2.2, podemos obter o seguinte resultado:

Teorema 2.5. *Seja* $U_0=(\phi_1,\psi_1)\in D(A^*)$*. Existe uma única solução clássica de* (2.37)-(2.39)*, tal que*

$$U\in C(\mathbb{R}^+;D(A^*))\cap C^1(\mathbb{R}^+;X). \tag{2.41}$$

Se $U_0=(\phi_1,\psi_1)\in X$*, existe uma única mild solution de* (2.37)-(2.39)*, tal que*

$$U\in C(\mathbb{R}^+;X). \tag{2.42}$$

Se chamarmos o semigrupo associado ao sistema (2.37)-(2.39) de

$$\{R(t)\}_{t\geq 0},$$

o semigrupo associado ao sistema (2.34)-(2.36) será dado por

$$Q(t)=R(T-t).$$

No próximo resultado vamos provar estimativas para a mild solution de (2.34)-(2.36), dada pelo Teorema 2.5, que usaremos para o estudo das propriedades de controlabilidade.

Teorema 2.6. *Sejam* $U_1=(\phi_1,\psi_1)\in X$ *e* (ϕ,ψ) *a mild solution de* (2.34)-(2.36)*. Então, temos as seguintes estimativas:*

$$\int_0^T \phi_{xx}^2(t,L)dt = \frac{1}{2a_2}\left(\int_0^L(\phi_1^2(x)+\psi_1^2(x))dx - \int_0^L(\phi^2(0,x)+\psi^2(0,x))dx\right), \tag{2.43}$$

$$\int_0^T \phi_{xx}^2(t,0)dt \leq C\int_0^L(\phi_1^2(x)+\psi_1^2(x))dx, \tag{2.44}$$

$$\int_0^L (\phi_1^2(x) + \psi_1^2(x))dx \leq \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^L (\phi^2 + \psi^2)dxdt + 2a_2 \int_0^T \phi_{xx}^2(t, L)dt, \quad (2.45)$$

$$\int_0^T \int_0^L (\phi_{xx}^2 + \psi_{xx}^2)dxdt \leq C \int_0^L (\phi_1^2(x) + \psi_1^2(x))dx, \quad (2.46)$$

onde $C = \frac{3L}{5a_2}$.

Demonstração. Usando um argumento de densidade, podemos considerar apenas dados regulares. Seja $q \in C^\infty([0, T] \times [0, L])$. Multiplicamos a primeira equação do sistema por $q\phi$ e a segunda por $q\psi$:

$$\begin{cases} q\phi\phi_t + q\phi\psi_x + a_2 q\phi\psi_{5x} &= 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ q\psi\psi_t + q\psi\phi_x + a_2 q\psi\phi_{5x} &= 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, L). \end{cases}$$

Somando as identidades acima e integrando por partes, usando as condições de fronteira (2.35), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \frac{q}{2}\frac{d}{dt}(\phi^2 + \psi^2)dxdt - \int_0^T \int_0^L q_x(\phi\psi)dxdt \\ + a_2 \int_0^T \int_0^L (q\phi)_{xx}\psi_{3x} + (q\psi)_{xx}\phi_{3x}dxdt = 0. \end{aligned}$$

Se $q = 1$, então

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^L (\phi_1^2(x) + \psi_1^2(x))dx - \int_0^L (\phi^2(0, x) + \psi^2(0, x))dx\right) = a_2 \int_0^T \phi_{xx}^2(t, L)dt, \quad (2.47)$$

de onde se obtém (2.43).

Analogamente, se tomarmos $q = t$, obtemos (2.45).

Para $q \in C^\infty([0, T] \times [0, L])$, obtemos, por cálculos análogos, a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L q\psi(\phi_t + \psi_x + a_2\psi_{5x})dxdt + \int_0^T \int_0^L q\phi(\psi_t + \phi_x + a_2\phi_{5x})dxdt \\ &= \int_0^T \int_0^L q(\psi\phi)_t dxdt + \int_0^T \int_0^L \frac{q}{2}(\psi^2 + \phi^2)_x dxdt + a_2 \int_0^T \int_0^L (q\psi)_{xx}(\psi_{3x})dxdt \\ &\quad + a_2 \int_0^T (q\psi)\psi_{4x}|_0^L dt - a_2 \int_0^T (q\psi)_x\psi_{3x}|_0^L dt + a_2 \int_0^T \int_0^L (q\phi)_{xx}(\phi_{3x})dxdt \\ &\quad + a_2 \int_0^T (q\phi)\phi_{4x}|_0^L dt - a_2 \int_0^T (q\phi)_x\phi_{3x}|_0^L dt. \end{aligned}$$

Usando as condições de fronteira (2.35) e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T\int_0^L q(\psi\phi)_t dxdt - \int_0^T\int_0^L \frac{q_x}{2}(\psi^2+\phi^2)dxdt + a_2\int_0^T\int_0^L (q\psi)_{xx}(\psi_{3x})dxdt \\ &\quad + a_2\int_0^T\int_0^L (q\phi)_{xx}(\phi_{3x})dxdt. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Se considerarmos $q(t,x) = 1$ em (2.48) e usarmos mais uma vez as condições de fronteira (2.35), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T\int_0^L (\psi\phi)_t dxdt + a_2\int_0^T\int_0^L (\psi)_{xx}(\psi_{3x})dxdt + a_2\int_0^T\int_0^L (\phi)_{xx}(\phi_{3x})dxdt \\ &= \int_0^L (\psi\phi)|_0^T dx + a_2\int_0^T\int_0^L \frac{1}{2}(\psi_{xx}^2+\phi_{xx}^2)_x dxdt \\ &= \int_0^L (\psi\phi)|_0^T dx + a_2\int_0^T \frac{1}{2}(\psi_{xx}^2+\phi_{xx}^2)|_0^L dt \\ &= \int_0^L (\psi\phi)|_0^T dx + a_2\int_0^T \frac{1}{2}(2\psi_{xx}^2(t,L) - \phi_{xx}^2(t,0))dt. \end{aligned}$$

Então vale a seguinte identidade

$$0 = \int_0^L (\psi\phi)|_0^T dxdt + a_2\int_0^T \frac{1}{2}(2\psi_{xx}^2(t,L) - \phi_{xx}^2(t,0))dt. \tag{2.49}$$

Por (2.49) e (2.43) concluímos (2.44):

$$\int_0^T \phi_{xx}^2(t,0)dt \le C\int_0^L (\phi_1^2(x)+\psi_1^2(x))dx, \tag{2.50}$$

onde $C > 0$.

Para provar (2.46), tomamos $q(t,x) = x$ em (2.48):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T\int_0^L x(\psi\phi)_t dxdt - \int_0^T\int_0^L \frac{1}{2}(\psi^2+\phi^2)dxdt + a_2\int_0^T\int_0^L (x\psi)_{xx}(\psi_{3x})dxdt \\ &\quad + a_2\int_0^T\int_0^L (x\phi)_{xx}(\phi_{3x})dxdt \\ &= \int_0^L x(\psi\phi)|_0^T dx - \int_0^T\int_0^L \frac{1}{2}(\psi^2+\phi^2)dxdt \\ &\quad + a_2\int_0^T\int_0^L (2\psi_x + x\psi_{xx})(\psi_{3x})dxdt + a_2\int_0^T\int_0^L (2\phi_x + x\phi_{xx})(\phi_{3x})dxdt \\ &= \int_0^L x(\psi\phi)|_0^T dx - \int_0^T\int_0^L \frac{1}{2}(\psi^2+\phi^2)dxdt - 2a_2\int_0^T\int_0^L (\psi_{xx}^2+\phi_{xx}^2)dxdt \\ &\quad + a_2\int_0^T\int_0^L \frac{x}{2}(\psi_{xx}^2)_x + \frac{x}{2}(\phi_{xx}^2)_x dxdt \end{aligned}$$

$$= \int_0^L x(\psi\phi)|_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2}(\psi^2+\phi^2)dxdt - \frac{5}{2}a_2\int_0^T\int_0^L(\psi_{xx}^2+\phi_{xx}^2)dxdt$$
$$+a_2\int_0^T \frac{x}{2}(\psi_{xx}^2)+\frac{x}{2}(\phi_{xx}^2)|_0^L dt.$$

Pelas condições de fronteira (2.35), obtemos

$$\frac{5}{2}a_2\int_0^T\int_0^L(\psi_{xx}^2+\phi_{xx}^2)dxdt + \int_0^T\int_0^L\frac{1}{2}(\psi^2+\phi^2)dxdt$$
$$\leq \int_0^L x(\psi\phi)|_0^T dxdt + a_2\int_0^T L\phi_{xx}^2(t,L)dxdt. \tag{2.51}$$

Portanto, existe uma constante $C=\frac{2L}{5a_2}>0$, tal que

$$\int_0^T\int_0^L(\psi_{xx}^2+\phi_{xx}^2)dxdt \leq C\int_0^L(\phi_1^2(x)+\psi_1^2(x))dx + C\int_0^T\phi_{xx}^2(t,L)dxdt. \tag{2.52}$$

Usando a estimativa (2.43), obtemos $C=\frac{3L}{5a_2}>0$ satisfazendo

$$\int_0^T\int_0^L(\psi_{xx}^2+\phi_{xx}^2)dxdt \leq C\int_0^L(\phi_1^2(x)+\psi_1^2(x))dx. \tag{2.53}$$

□

Observe que fazendo a mudança de variável no sitema (2.34)-(2.36)

$$t \mapsto T-t,$$

é imediato que valem as seguintes estimativas:

Teorema 2.7. *Sejam $U_0=(\phi_1,\psi_1)\in X$ e (ϕ,ψ) a mild solution de* (2.37)-(2.39). *Então, temos as seguintes estimativas:*

$$\int_0^T\phi_{xx}^2(t,L)dt = \frac{1}{2a_2}\left(\int_0^L(\phi_1^2(x)+\psi_1^2(x))dx - \int_0^L(\phi^2(T,x)+\psi^2(T,x))dx\right), \tag{2.54}$$

$$\int_0^T\phi_{xx}^2(t,0)dt \leq C\int_0^L(\phi_1^2(x)+\psi_1^2(x))dx, \tag{2.55}$$

$$\int_0^L(\phi_1^2(x)+\psi_1^2(x))dx \leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L(\phi^2+\psi^2)dxdt + 2a_2\int_0^T\phi_{xx}^2(t,L)dt, \tag{2.56}$$

$$\int_0^T\int_0^L(\phi_{xx}^2+\psi_{xx}^2)dxdt \leq C\int_0^L(\phi_1^2(x)+\psi_1^2(x))dx, \tag{2.57}$$

onde $C = \frac{3L}{5a_2}$.

2.4 O problema linear de (1.6)-(1.8)

Estudaremos a parte linear do sistema (1.6)-(1.8). Mais especificamente, seja

$$\begin{cases} u_t + v_x + a_2 v_{5x} & = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,L), \\ v_t + u_x + a_2 u_{5x} & = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,L), \end{cases} \tag{2.58}$$

satisfazendo as condições de fronteira (1.7) e as condições iniciais (1.8).

Procedemos como no capítulo anterior, utilizando a teoria de semigrupos. Seja o operador

$$A : D(A) \subset X \to X, \tag{2.59}$$

com domínio

$$D(A) = \left\{ (u,v) \in H^5(0,L) \times H^5(0,L); \begin{array}{l} u(0) = u(L) = u_x(0) = u_x(L) = 0, \\ v(0) = v(L) = v_x(0) = v_x(L) = 0, \\ u_{xx}(L) - v_{xx}(L) = u_{xx}(0) + v_{xx}(0) = 0 \end{array} \right\}, \tag{2.60}$$

definido por

$$A(u,v) = (-v_x - a_2 v_{5x}, -u_x - a_2 u_{5x}). \tag{2.61}$$

Assim, denotando por $U = (u,v)$, obtemos um problema de Cauchy abstrato para o sistema, ou seja,

$$\begin{cases} U_t = AU, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.62}$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.8. *O operador A gera um semigrupo de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, em X.*

Demonstração. Mostraremos apenas os pontos principais da demonstração, visto que os cálculos são análogos ao capítulo anterior.

O operador A é dissipativo, pois dado $U = (u,v) \in D(A)$, obtemos

$$(U, AU)_X \quad = \quad -a_2(v_{xx}^2(L) + v_{xx}^2(0)) \leq 0.$$

Temos o operador adjunto

$$A^* : D(A^*) \subset X \to X, \tag{2.63}$$

cujo domínio é

$$D(A^*) = \left\{ (f,g) \in H^5(0,L) \times H^5(0,L); \begin{array}{c} f(0) = f(L) = f_x(0) = f_x(L) = 0, \\ g(0) = g(L) = g_x(0) = g_x(L) = 0, \\ f_{xx}(L) + g_{xx}(L) = f_{xx}(0) - g_{xx}(0) = 0 \end{array} \right\}, \tag{2.64}$$

definido por

$$A^*(f,g) = (g_x + a_2 g_{5x}, f_x + a_2 f_{5x}). \tag{2.65}$$

O operador A^* é dissipativo, pois dado $W = (f,g) \in D(A^*)$, obtemos

$$(W, A^*W)_X \;\; = \;\; -a_2(g_{xx}^2(L) + g_{xx}^2(0)) \leq 0.$$

Temos $A = A^{**}$, logo A é fechado e temos também que $D(A)$ e $D(A^*)$ são densos em X. Assim sendo, o operador A gera um semigrupo de classe C_0. □

Combinando a Proposição (2.8) e a teoria de semigrupos, obtemos a existência e unicidade de soluções:

Teorema 2.9. *Se $U_0 = (u_0, v_0) \in D(A)$, existe uma única solução de* (2.58),(1.7),(1.8) *(que chamaremos clássica), tal que*

$$U \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X). \tag{2.66}$$

Se, por outro lado, $U_0 = (u_0, v_0) \in X$, então existe uma única mild solution de (1.6)-(1.8), *tal que*

$$U \in C(\mathbb{R}^+; X). \tag{2.67}$$

No próximo teorema obtemos estimativas para a mild solution. Omitiremos a demonstração porque os argumentos usados são análogos aos usados na demonstração do Teorema 2.3.

Teorema 2.10. *Sejam $U_0 = (u_0, v_0) \in X$ e (u,v) a mild solution dada pelo Teorema 2.9 com dado inicial U_0. Então, temos as seguintes estimativas:*

$$\int_0^T (u_{xx}^2(t,L) + u_{xx}^2(t,0))dt = \frac{1}{2a_2}\left(\int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x))dx - \int_0^L (u^2(T,x) + v^2(T,x))dx\right), \tag{2.68}$$

$$\int_0^L (u_0^2 + v_0^2) \leq \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^L (u^2 + v^2)dx + 2a_2 \int_0^T (u_{xx}^2(t,L) + u_{xx}^2(t,0))dt, \tag{2.69}$$

$$\int_0^T \int_0^L (u_{xx}^2 + v_{xx}^2)dxdt \leq C \int_0^L (u_0^2 + v_0^2)dx, \tag{2.70}$$

onde $C = \frac{3L}{5a_2} > 0$.

Capítulo 3

Controle e estabilização na fronteira para um sistema acoplado do tipo KdV-KdV de quinta ordem

3.1 Controle na fronteira para o sistema linear (1.3)-(1.5)

Nesta seção, estudaremos a controlabilidade exata do sistema (1.3)-(1.5). Nossa análise será feita utilizando o método HUM, introduzido em [13, 14]. Veremos que, em contraste com o que acontece com a equação de Korteweg-de Vries ou outros sistemas dispersivos, os resultados são obtidos sem a necessidade de impor restrições sobre o comprimento do intervalo. Seja o sistema linear

$$\begin{cases} u_t(t,x) + v_x(t,x) + a_2 v_{5x}(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ v_t(t,x) + u_x(t,x) + a_2 u_{5x}(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \end{cases} \tag{3.1}$$

considerando controles $h = h(t)$ e $g = g(t)$ atuando da seguinte forma

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, u_{xx}(t,L) - v_{xx}(t,L) = h(t), \ t \in (0,T), \\ v(t,0) = v(t,L) = v_x(t,0) = v_x(t,L) = 0, v_{xx}(t,0) = g(t), \ t \in (0,T), \end{cases} \tag{3.2}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} u(0,x) & = 0, \quad x \in (0,L), \\ v(0,x) & = 0, \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{3.3}$$

Para $T > 0$, buscamos h e g em (3.2) que levem o sistema ao seguinte estado previamente estabelecido

$$\begin{cases} u(T,x) & = u_1(x), \quad x \in (0,L), \\ v(T,x) & = v_1(x), \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{3.4}$$

O resultado principal dessa seção é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Seja $T > 0$. Então, para todo dado inicial $(u_0, v_0) \in X$ e para todo dado final $(u_1, v_1) \in X$, existem controles $h, g \in L^2(0,T)$, tais que a mild solution*

$$(u(.), v(.)) \in C([0,T]; X) \cap L^2(0,T; [H^2(0,L)]^2) \cap H^1(0,T; [H^{-3}(0,L)]^2)$$

de (3.1)-(3.3) *satisfaz*

$$(u(T), v(T)) = (u_1, v_1), \text{ em } X. \tag{3.5}$$

Observação 3.2. *O sentido de* (3.1) *é obtido em $D'(0,T; [H^{-3}(0,L)]^2)$ enquanto que o sentido de* (3.3) *e* (3.5) *é obtido em X.*

Sem perda de generalidade, podemos analisar somente a controlabilidade exata para o caso $u_0 = v_0 = 0$. De fato, sejam (u_0, v_0) e (u_1, v_1) dados arbitrários em X e sejam h, $g \in L^2(0,T)$ os controles que levam a solução (u, v) do sistema (1.3)-(1.5) com dados iniciais nulos ao estado final $(u_1, v_1) - S(T)(u_0, v_0)$. Então, o mesmo controle também leva as condições iniciais (u_0, v_0) para o estado final (u_1, v_1).

O próximo resultado nos dá uma condição equivalente para o problema de controlabilidade:

Lema 3.3. *Seja $(u_1, v_1) \in X$. Existem controles $h, g \in L^2(0,T)$, tais que a solução (u, v) de* (3.1)-(3.3) *satisfaz* (3.4) *se, e somente se, para todo (ϕ, ψ) solução do sistema adjunto* (2.34)-(2.36) *com condição final $(\phi_1, \psi_1) \in X$, verifica-se a seguinte identidade*

$$\int_0^L (u_1(x)\phi_1(x) + v_1(x)\psi_1(x))dx = -a_2 \int_0^T (h(t)\psi_{xx}(t,L) - g(t)\phi_{xx}(t,0))dt. \tag{3.6}$$

Demonstração. Multipliquemos a primeira equação de (3.1) por ϕ, a segunda por ψ e integremos por partes considerando primeiro (ϕ, ψ) e (u, v) soluções clássicas de (2.34)-(2.36) e (3.1)-(3.3), respectivamente. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_0^L (u_t(t,x) + v_x(t,x) + a_2 v_{5x}(t,x))\phi(t,x)dxdt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^L (v_t(t,x) + u_x(t,x) + a_2 u_{5x}(t,x))\psi(t,x)dxdt \\
&= \int_0^T \int_0^L (-\phi_t(t,x) - \psi_x(t,x) - a_2\psi_{5x}(t,x))u(t,x)dxdt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^L (-\psi_t(t,x) - \phi_x(t,x) - a_2\phi_{5x}(t,x))v(t,x)dxdt \\
&= \int_0^T \int_0^L (-\phi_t(t,x) - \psi_x(t,x) - a_2\psi_{5x}(t,x))u(t,x)dxdt +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T\int_0^L(-\psi_t(t,x)-\phi_x(t,x)-a_2\phi_{5x}(t,x))v(t,x)dxdt\\
&+\int_0^L[u\phi]_0^T dx+\int_0^T[v\phi]_0^L+a_2[v_{4x}\phi-v_{3x}\phi_x+v_{xx}\phi_{xx}-v_x\phi_{3x}+v\phi_{4x}]_0^L dt\\
&+\int_0^L[v\psi]_0^T dx+\int_0^T[u\psi]_0^L+a_2[u_{4x}\psi-u_{3x}\psi_x+u_{xx}\psi_{xx}-u_x\psi_{3x}+u\psi_{4x}]_0^L dt\\
=&\int_0^L[u\phi+v\psi]^T dx+\int_0^T a_2[+u_{xx}\psi_{xx}+v_{xx}\phi_{xx}]_0^L dt\\
=&\int_0^L[u\phi+v\psi]^T dx+a_2\int_0^T[h(t)\psi_{xx}(t,L)-g(t)\phi_{xx}(t,0)]dt,
\end{aligned}
$$

donde segue o resultado por um argumento de densidade. □

3.1.1 A desigualdade de observabilidade

Precisaremos da seguinte desigualdade de observabilidade relacionada ao sistema adjunto.

Proposição 3.4. *Para todo $T>0$ e para todo $L\in(0,\infty)$, $\exists C=C(T,L)>0$, tal que, para todo $(\phi_1,\psi_1)\in X$, a mild solution (ϕ,ψ) do sistema adjunto* (2.34)-(2.36) *satisfaz*

$$\|(\phi_1,\psi_1)\|_X^2\le C\int_0^T(\psi_{xx}^2(t,L)+\phi_{xx}^2(t,0))dt. \tag{3.7}$$

Demonstração. Vamos argumentar por contradição. Se a desigualdade (3.7) não ocorre, existe uma sequência de dados finais em X, $(\phi_1^n,\psi_1^n)_{n>0}$, tal que:

$$1=\|(\phi_1^n,\psi_1^n)\|_{X_0}^2\ge n\int_0^T(\psi_{xx}^n(t,L))^2+(\phi_{xx}^n(t,0))^2dt. \tag{3.8}$$

Por (2.53), temos

$$\|(\phi^n,\psi^n)\|_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)}\le C\|(\phi_1^n,\psi_1^n)\|_X=C,$$

ou seja, temos a limitação das soluções (ϕ^n,ψ^n) em $L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)$.

Por outro lado, como $\phi_t^n(t,x)=-\psi_x^n(t,x)-a_2\psi_{5x}^n(t,x)$ e $\psi_t^n(t,x)=-\phi_x^n(t,x)-a_2\phi_{5x}^2(t,x)$, obtemos

$$\|(\phi_t^n,\psi_t^n)\|_{L^2(0,T;[H^{-3}(0,L)]^2)}\le C.$$

Considerando as imersões contínuas, nas quais a primeira é compacta

$$[H^2(0,L)]^2\hookrightarrow X\hookrightarrow[H^{-3}(0,L)]^2, \tag{3.9}$$

podemos, pelo Teorema de Aubin-Lions, obter uma subsequência, também denotada por

(ϕ^n, ψ^n), que converge forte em $L^2(0,T;X)$, ou seja,

$$(\phi^n, \psi^n) \to (\phi, \psi) \text{ em } L^2(0,T;X). \tag{3.10}$$

Por (3.8) temos que $\phi^n_{xx}(t,L) =\!\!\to 0$ em $L^2(0,T)$. Logo, por (2.45) e (3.10) temos que as condições finais (ϕ^n_1, ψ^n_1) são uma sequência de Cauchy em X. Seja

$$(\phi_1, \psi_1) = \lim_{n\to\infty} (\phi^n_1, \psi^n_1)$$

e

$$(\phi, \psi) = Q(.)(\phi_1, \psi_1).$$

Usando as estimativas (2.43) e (2.44), obtém-se que $\phi^n_{xx}(.,0) \to \phi_{xx}(.,0)$ e $\phi^n_{xx}(.,L) \to \phi_{xx}(.,L)$ em $L^2(0,T)$. Por outro lado, devido a (3.8), temos que $\phi^n_{xx}(.,0) \to 0$ e $\phi^n_{xx}(.,L) \to 0$ em $L^2(0,T)$.

Da análise desenvolvida acima, obtemos (ϕ, ψ), mild solution de (2.34)-(2.36), com condição inicial (ϕ_1, ψ_1), que satisfaz

$$1 = \| (\phi_1, \psi_1) \|^2_X \text{ e } \phi_{xx}(.,0) = \phi_{xx}(.,L) = 0.$$

Mas, conforme veremos no seguinte lema, $(\phi_1, \psi_1) \equiv (0,0)$, o que nos dá uma contradição.

Lema 3.5. *Dado $T > 0$, seja N_T o espaço de todos os dados finais $(\phi_1, \psi_1) \in X$, tais que a mild solution $(\phi(t,x), \psi(t,x)) = Q(t)(\phi_1(x), \psi_1(x))$ do sistema adjunto* (2.34)-(2.36) *satisfaz $\phi_{xx}(.,0) = \phi_{xx}(.,L) = 0$ em $L^2(0,T)$. Então, $N_T = \{(0,0)\}$.*

Demonstração. Inicialmente façamos a mudança de variável

$$t \mapsto T - t$$

no sistema (2.34)-(2.36) e consideremos o sistema (2.37)-(2.39), para o qual valem as estimativas dadas pelo Teorema 2.7.

Observe que se $0 < T < T'$, então $N_{T'} \subset N_T$. Assim, para provarmos que $N_{T'} = \{(0,0)\}$, para um $T' > 0$ fixado previamente, basta provar que $N_T = \{(0,0)\}$ para qualquer $0 < T < T'$.

Inicialmente, mostraremos que $\overline{B_1(0)}$ de X é um conjunto compacto de N_T. De fato, seja $(\phi^n_1, \psi^n_1)_{n>0}$ uma sequência de $\overline{B_1(0)} \cap N_T$. Por (2.57) temos que $R(.)(\phi^n_1, \psi^n_1) = (\phi^n, \psi^n)$ é limitada em $L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)$. Assim, temos a limitação de (ϕ^n_t, ψ^n_t) em $L^2(0,T;[H^{-3}(0,L)]^2)$. Então, pelo Teorema de Aubin-Lions, obtemos uma subsequência, também chamada (ϕ^n, ψ^n), que converge forte em $L^2(0,T;[L^2(0,L)]^2)$. Por outro lado, temos que (ϕ^n_1, ψ^n_1) é uma sequência de Cauchy em X, devido à (2.56), e por isso converge para algum (ϕ_1, ψ_1) em X.

Precisamos provar que (ϕ_1, ψ_1) está de fato em N_T, mas isso é imediato pelas estimativas do Teorema 2.7. Logo, aplicando o Teorema de Riesz, pelo fato do fecho da bola unitária ser compacto em N_T, temos que N_T tem dimensão finita.

Observe que a aplicação
$$T \mapsto dim(N_T),$$
está bem definida de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$. Como ela é não crescente , existem $T > 0$ e $\epsilon > 0$, tais que
$$T < T + \epsilon < T'$$
e
$$dim(N_T) = dim(N_{T+\epsilon}).$$
Em particular $N_t = N_T$, para todo $T \leq t \leq T + \epsilon$.

Queremos provar inicialmente que $N_T \subset D(A)$. Seja portanto $(\phi_1, \psi_1) \in N_T = N_{T+\epsilon}$ e $(\phi, \psi) = R(.)(\phi_1, \psi_1)$. Para que $N_T \subset D(A)$ precisamos da existência em X do seguinte limite:
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{R(t)(\phi_1, \psi_1) - (\phi_1, \psi_1)}{t}.$$

Se $0 < t < \epsilon$, $0 \leq k \leq T$ e $(\phi_1, \psi_1) \in N_T = N_{T+\epsilon}$, lembrando que
$$R(k + t)(\phi_1, \psi_1) = R(k)R(t)(\phi_1, \psi_1),$$
temos
$$R(t)(\phi_1, \psi_1) \in N_T.$$

Portanto,
$$\frac{R(t)(\phi_1, \psi_1) - (\phi_1, \psi_1)}{t} \in N_T. \tag{3.11}$$

Seja
$$M_T := \{v = R(k)v_0 | 0 \leq k \leq T \text{ e } v_o \in N_T\} \subset C([0, T], X). \tag{3.12}$$

Temos que $(\phi, \psi) \in C([0, T]; X) \cap H^1(0, T + \epsilon; [H^{-3}(0, L)]^2)$. Logo, o limite
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{(\phi, \psi)(. + t) - (\phi, \psi)(.)}{t} = (\phi', \psi')(.)$$
está bem definido em $L^2(0, T; [H^{-3}(0, L)]^2)$.

Mas devido à (3.11), temos que $\frac{(\phi,\psi)(.+t)-(\phi,\psi)(.)}{t} \in M_T$ para $0 < t < \epsilon$. E, além disso, sabemos que M_T é fechado em $L^2(0, T; [H^{-3}(0, L)]^2)$ por ter dimensão finita. Então, concluímos que o limite acima existe e pertence a M_T, ou seja,
$$(\phi, \psi)(.) \in C^1([0, T], X).$$

Por isso podemos escrever que

$$(\phi', \psi')(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\phi,\psi)(0+t) - (\phi,\psi)(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{R(t)(\phi_1,\psi_1) - (\phi_1,\psi_1)}{t},$$

em X. Daí, concluímos que $(\phi_1, \psi_1) \in D(A)$ e que $A(\phi_1,\psi_1) = (\phi', \psi')(0) \in N_T$. Assim, $A(N_T) \subset N_T$.

Observe também que, como $(\phi_1,\psi_1) \in D(A)$, temos que $(\phi,\psi) \in C([0,T]; D(A))$ e por isso as condições de fronteira estão em $C([0,T])$. Em particular,

$$\phi_{1,xx}(L) = \phi_{xx}(0, L) = \phi_{1,xx}(0) = \phi_{xx}(0,0) = 0,$$

donde, se $N_T \neq \emptyset$, temos que o operador $A : \overline{N_T} \to \overline{N_T}$, onde $\overline{N_T}$ é a complexificação de N_T, admite um autovalor e um autovetor. Então, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(\phi_1,\psi_1) \in [H^5(0, L; \mathbb{C})]^2$, tais que

$$\begin{aligned} \lambda\phi_1 + \psi_1' + a_2\psi_1''''' &= 0, \\ \lambda\psi_1 + \phi_1' + a_2\phi_1''''' &= 0, \\ \phi_1(0) = \phi_1(L) = \phi_1'(0) &= \phi_1'(L) = \phi_1''(0) = \phi_1''(L) = 0, \\ \psi_1(0) = \psi_1(L) = \psi_1'(0) &= \psi_1'(L) = \psi_1''(0) = \psi_1''(L) = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Provaremos no lema a seguir que o problema espectral acima apenas admite solução $\phi_1 = \psi_1 = 0$. □

Lema 3.6. *Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(\phi_1,\psi_1) \in [H^5(0, L; \mathbb{C})]^2$ satisfazendo o problema espectral* (3.13). *Então, $\phi_1 = \psi_1 = 0$.*

Demonstração. Seja $(\phi_1,\psi_1) \in [H^5(0, L; \mathbb{C})]^2$ solução do sistema

$$\begin{aligned} \lambda\phi_1 + \psi_1' + a_2\psi_1''''' &= 0, \\ \lambda\psi_1 + \phi_1' + a_2\phi_1''''' &= 0, \\ \phi_1(0) = \phi_1(L) = \phi_1'(0) &= \phi_1'(L) = \phi_1''(0) = \phi_1''(L) = 0, \\ \psi_1(0) = \psi_1(L) = \psi_1'(0) &= \psi_1'(L) = \psi_1''(0) = \psi_1''(L) = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Então, multiplicando a primeira e segunda equação do sistema (3.14) por $e^{-ix\xi}$, temos:

$$\lambda\phi_1 e^{-ix\xi} + \psi_1' e^{-ix\xi} + a_2\psi_1''''' e^{-ix\xi} = 0, \tag{3.15}$$

$$\lambda\psi_1 e^{-ix\xi} + \phi_1' e^{-ix\xi} + a_2\phi_1''''' e^{-ix\xi} = 0. \tag{3.16}$$

Se integrarmos por partes em $[0, L]$, segue que

$$\begin{aligned}\lambda\widehat{\phi_1} + (i\xi + a_2(i\xi)^5)\widehat{\psi_1} &= -(e^{-ix\xi}\psi_1)_0^L \\ &\quad -a_2\left(e^{-ix\xi}(\psi_1'''' + (i\xi)\psi_1''' + (i\xi)^2\psi_1'' + (i\xi)^3\psi_1' + (i\xi)^4\psi_1)\right)_0^L\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\lambda\widehat{\psi_1} + (i\xi + a_2(i\xi)^5)\widehat{\phi_1} &= -(e^{-ix\xi}\phi_1)_0^L \\ &\quad -a_2\left(e^{-ix\xi}(+\phi_1'''' + (i\xi)\phi_1''' + (i\xi)^2\phi_1'' + (i\xi)^3\phi_1' + (i\xi)^4\phi_1)\right)_0^L,\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde pelas condições de fronteira de (3.14)

$$\begin{aligned}\lambda\widehat{\phi_1} + (i\xi + a_2(i\xi)^5)\widehat{\psi_1} &= -a_2\left(e^{-ix\xi}(\psi_1'''' + (i\xi)\psi_1''')\right)_0^L, \\ \lambda\widehat{\psi_1} + (i\xi + a_2(i\xi)^5)\widehat{\phi_1} &= -a_2\left(e^{-ix\xi}(\phi_1'''' + (i\xi)\phi_1''')\right)_0^L.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Observe que, multiplicando a primeira equação de (3.14) pelo conjugado $\overline{\phi_1}$ e a segunda pelo conjugado $\overline{\psi_1}$, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\phi_1\overline{\phi_1} + \psi_1'\overline{\phi_1} + a_2\psi_1'''''\overline{\phi_1} &= 0, \\ \lambda\psi_1\overline{\psi_1} + \phi_1'\overline{\psi_1} + a_2\phi_1'''''\overline{\psi_1} &= 0.\end{aligned}$$

Somando as identidades acima e integrando em $[0, L]$, deduzimos que λ é um imaginário puro:

$$\lambda\int_0^L |\phi_1|^2 + |\psi_1|^2 dx + \int_0^L 2iIm(\phi_1'\overline{\psi_1}) + a_2 2iIm(\phi_1'''''\overline{\psi_1})dx = 0, \tag{3.20}$$

ou seja, $\lambda = ik$, com $k \in \mathbb{R}$.

Assim, se somarmos as identidades em (3.19) e definirmos $\widehat{u} = \widehat{\phi}_1 + \widehat{\psi}_1$, obtém-se

$$i(k + \xi + a_2\xi^5)\widehat{u} = -a_2\left(e^{-ix\xi}(\psi_1'''' + (i\xi)\psi_1''' + \phi_1'''' + (i\xi)\phi_1''')\right)_0^L.$$

Por outro lado, fazendo a diferença das identidades em (3.19) e fazendo $\widehat{v} = \widehat{\phi}_1 - \widehat{\psi}_1$, temos

$$ik\widehat{v} - (i\xi + a_2 i\xi^5)\widehat{v} = -a_2\left(e^{-ix\xi}(\psi_1'''' + (i\xi)\psi_1''' - \phi_1'''' - (i\xi)\phi_1''')\right)_0^L.$$

Fazendo a mudança de variável $\xi \to -\xi$ nesta última equação, continuando a chamá-la de v:

$$i(k + \xi + a_2\xi^5)\widehat{v} = -a_2\left(e^{ix\xi}(\psi_1'''' - i\xi\psi_1''' - \phi_1'''' + i\xi\phi_1''')\right)_0^L.$$

Assim, obtemos

$$\widehat{u} = \quad -a_2 \frac{\left(e^{-ix\xi}(\psi_1'''' + (i\xi)\psi_1''' + \phi_1'''' + (i\xi)\phi_1''')\right)_0^L}{i(k+\xi+a_2\xi^5)},$$

e

$$\widehat{v} = \quad -a_2 \frac{\left(e^{ix\xi}(\psi_1'''' - i\xi\psi_1''' - \phi_1'''' + i\xi\phi_1''')\right)_0^L}{i(k+\xi+a_2\xi^5)}.$$

Usando o Teorema de Paley-Wiener e a caracterização usual de $H^3(\mathbb{R};\mathbb{C})$ por transformadas de Fourier, a existência de tais $\widehat{u}$ e $\widehat{v}$ implicam na existência de $k \in \mathbb{R}$ e constantes $\psi_1'''(0), \psi_1'''(L), \psi_1''''(0), \psi_1''''(L), \phi_1'''(0), \phi_1'''(L), \phi_1''''(0), \phi_1''''(L)$ em $\mathbb{C}$, tais que

(i) $\widehat{u}$ e $\widehat{v}$ são inteiras em $\mathbb{C}$;

(ii) $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}|^2(1+|\xi|^2)^3 d\xi < \infty$, o mesmo valendo para $\widehat{v}$;

(iii) $\forall \xi \in \mathbb{C}$, $|\widehat{u}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N e^{L|Im\xi|}$, para algumas constantes positivas C e N, o mesmo valendo para $\widehat{v}$.

Como (i) implica em (ii) e (iii), basta provarmos (i). Mas para isso, precisamos que todas as raízes do polinômio $p(\xi) = (k + \xi + a_2\xi^5)$, sejam raízes dos numeradores de $\widehat{u}$ e $\widehat{v}$.

Mas $p(\xi) = (k + \xi + a_2\xi^5)$ tem coeficientes reais, logo tem pelo menos uma raiz real. (A sua derivada, quando restrita aos reais é dada por

$$p'(\xi) = (1 + a_2 5\xi^4),$$

sendo sempre positiva. Logo, a função é sempre crescente quando considerada com domínio real e por isso temos uma única raiz real.)

Por outro lado, como temos uma única raiz real, teremos outras 4 raízes complexas e conjugadas. Se todas tiverem multiplicidade 1, então teremos 5 raízes distintas; se uma raiz tiver multiplicidade dois, então esta raiz deve ser complexa, e assim teremos uma raiz real, uma raiz complexa de multiplicidade dois e o conjugado também com multiplicidade dois, logo teríamos 3 raízes distintas. Como não é possível ter uma raiz de multiplicidade maior ou igual a três, então temos 3 ou 5 raízes distintas. Provarems que é impossível o caso de 3 raízes.

Sejam r a raiz real e a a raiz complexa de multiplicidade dois. Então,

$$(\xi - r)(\xi - a)^2(\xi - \overline{a})^2 = \frac{k}{a_2} + \frac{\xi}{a_2} + \xi^5. \tag{3.21}$$

Denotemos $m =: \frac{k}{a_2}$ e $n =: \frac{1}{a_2}$. Então,

$$\begin{aligned}
m + n\xi + \xi^5 &= (\xi - r)(\xi - a)^2(\xi - \overline{a})^2 = (\xi - r)(\xi^2 - (a + \overline{a})\xi + |a|^2)^2 \\
&= (\xi - r)(\xi^2 - 2Re(a)\xi + |a|^2)^2 \\
&= (\xi - r)(\xi^4 - 4Re(a)\xi^3 + (|a|^2 + 4Re(a)^2 + |a|^2)\xi^2 \\
&\quad +(-2Re(a)|a|^2 - 2|a|^2Re(a))\xi + |a|^4) \\
&= (\xi^5 - 4Re(a)\xi^4 + (|a|^2 + 4Re(a)^2 + |a|^2)\xi^3 \\
&\quad +(-2Re(a)|a|^2 - 2|a|^2Re(a))\xi^2 + |a|^4\xi) + \\
&\quad +(-r\xi^4 + 4rRe(a)\xi^3 + (-r|a|^2 - 4rRe(a)^2 - r|a|^2)\xi^2 \\
&\quad +(2rRe(a)|a|^2 + 2r|a|^2Re(a))\xi - r|a|^4) \\
&= \xi^5 + (-4Re(a) - r)\xi^4 + (2|a|^2 + 4Re(a)^2 + 4rRe(a))\xi^3 \\
&\quad +(-4Re(a)|a|^2 - 2r|a|^2 - 4rRe(a)^2)\xi^2 \\
&\quad +(|a|^4 + 4rRe(a)|a|^2)\xi - r|a|^4.
\end{aligned}$$

Igualando o coeficiente de ξ^4 a zero, obtemos $-4Re(a) = r$. Substituindo no coeficiente de ξ^2, também igualando a zero, segue que

$$0 = -4Re(a)|a|^2 - 2r|a|^2 - 4rRe(a)^2 \tag{3.22}$$

$$= -4Re(a)|a|^2 - 2(-4Re(a))|a|^2 - 4(-4Re(a))Re(a)^2 \tag{3.23}$$

$$= Re(a)(4|a|^2 + 16Re(a)^2). \tag{3.24}$$

Temos dois casos para analisar, o primeiro seria $Re(a) = 0$, que implica em $0 = -4Re(a) = r$. Daí, teremos, pelos coeficientes independentes, $\frac{k}{a_2} = 0$, ou seja, $k = 0$. Com isso, pelos cálculos anteriores, devemos ter

$$n\xi + \xi^5 = \xi^5 + 2|a|^2\xi^3 + |a|^4\xi, \tag{3.25}$$

donde concluímos que $|a|^2 = 0$ e, consequentemente, $n = 0$. Isso é uma contradição, pois sabemos que $n = \frac{1}{a_2}$ e $a_2 \neq 0$.

O segundo caso a ser analisado é

$$4|a|^2 + 16Re(a)^2 = 0,$$

de onde se conclui que $|a| = Re(a) = 0$, gerando a mesma contradição.

Portanto, o polinômio em questão $p(\xi) = k + \xi + a_2\xi^5$ possui cinco raízes distintas, sendo apenas uma real.

Precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.7. *Para todas constantes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, tais que o discriminante $\triangle(a, b, c, d) :=$*

$ad - bc \neq 0$ e para todo $L > 0$, não existe transformada de Mobius

$$M(\xi) = \frac{a\xi + b}{c\xi + d},$$

tal que

$$M(\xi) = e^{-iL\xi}$$

com $\xi \in \{\xi_1, \xi_2, \overline{\xi_1}, \overline{\xi_2}\}$ distintos.

Demonstração. Vide [7]. □

Passemos agora a analisar as funções

$$\widehat{u} = \quad -a_2 \frac{\left(e^{-ix\xi}(\psi_1'''' + (i\xi)\psi_1''' + \phi_1'''' + (i\xi)\phi_1''')\right)_0^L}{i(k+\xi+a_2\xi^5)}$$

e

$$\widehat{v} = \quad -a_2 \frac{\left(e^{ix\xi}(\psi_1'''' - i\xi\psi_1''' - \phi_1'''' + i\xi\phi_1''')\right)_0^L}{i(k+\xi+a_2\xi^5)}.$$

Para que o sistema espectral (3.14) tenha solução é necessário que as cinco raízes distintas de $p(\xi) = k + \xi + a_2\xi^5$ sejam também raízes de $f(\xi) := \left(e^{-ix\xi}(\psi_1'''' + (i\xi)\psi_1''' + \phi_1'''' + (i\xi)\phi_1''')\right)_0^L$ e também de $g(\xi) := \left(e^{ix\xi}(\psi_1'''' - i\xi\psi_1''' - \phi_1'''' + i\xi\phi_1''')\right)_0^L$.

Mas dizer que f possui uma raiz ξ_0 é equivalente a dizer que existem constantes $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{C}$, tais que

$$e^{-i\xi_0 L} = \frac{l_2\xi_0 + l_4}{l_1\xi_0 + l_3}. \tag{3.26}$$

Analogamente, para g possuir uma raiz ξ_0, devemos obter constantes $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{C}$, tais que

$$e^{i\xi_0 L} = \frac{m_2\xi_0 + m_4}{m_1\xi_0 + m_3}. \tag{3.27}$$

Como $p(\xi)$ possui quatro raízes complexas distintas $\{\xi_1, \xi_2, \overline{\xi_1}, \overline{\xi_2}\}$, pelo Lema 3.7, obtemos que necessariamente $l_2 l_3 - l_1 l_4 = 0$ e $m_2 m_3 - m_1 m_4 = 0$, donde

$$e^{-i\xi L} = constante$$

e

$$e^{i\xi L} = constante.$$

Nesse caso, as quatro raízes distintas se diferenciam por múltiplos de $\frac{2\pi}{L}$ e não poderiam ser conjugadas, o que nos leva a uma contradição. Assim sendo, concluímos a demonstração do Lema 3.6. □

Pelo lema acima, concluímos a prova da desigualdade de observabilidade. □

3.1.2 Demonstração do resultado principal (Teorema 3.1)

Aplicaremos o método HUM [13, 14].

Demonstração. Definiremos Λ a aplicação linear contínua

$$(\phi_1, \psi_1) \in X \mapsto (u(T,.), v(T,.) \in X, \tag{3.28}$$

onde (u, v) é a solução do sistema com dados

$$h(t) = -\phi_{xx}(t, L) \in L^2(0, T)$$

e

$$g(t) = \phi_{xx}(t, 0) \in L^2(0, T).$$

Segue então do Lema 3.3 e da Proposição 3.4, que Λ é coerciva, ou seja,

$$(\Lambda(\phi_1, \psi_1), (\phi_1, \psi_1))_X = a_2\|\phi_{xx}(t, 0)\|^2_{L^2(0,T)} + a_2\|\phi_{xx}(t, L)\|^2_{L^2(0,T)} > C\|(\phi_1, \psi_1)\|^2_X. \tag{3.29}$$

Então, Λ é invertível pelo Teorema de Lax-Milgram, o que demonstra o nosso resultado. □

3.2 Estabilização na fronteira do sistema não linear (1.6)-(1.8)

Nesta seção provaremos o seguinte teorema de estabilização:

Teorema 3.8. *Existem constantes $\rho > 0$, $C > 0$ e $\mu > 0$, tais que, para quaisquer $(u_0, v_0) \in X$, com $\|(u_0, v_0)\|_X \leq \rho$, o sistema* (1.6)-(1.8) *admite uma única solução*

$$(u, v) \in C(\mathbb{R}^+; X) \cap C(\mathbb{R}^{+*}; [H^2(0, L)]^2) \cap L^2(0, 1; [H^2(0, L)]^2), \tag{3.30}$$

que satisfaz

$$\|(u, v)\|_X \leq Ce^{-\mu t} \|(u_0, v_0)\|_X, \ \forall t \geq 0, \tag{3.31}$$

$$\|(u, v)\|_{[H^2(0,L)]^2} \leq C\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \|(u_0, v_0)\|_X, \ \forall t > 0. \tag{3.32}$$

3.2.1 Decaimento exponencial do sistema linear (2.58),(1.7),(1.8)

Para provar o Teorema 3.8, utilizaremos a estabilidade da parte linear do problema (1.6)-(1.8). Mais precisamente, necessitamos do teorema a seguir.

Teorema 3.9. *Se* $(u_0, v_0) \in X$*, a mild solution* (u, v) *de* (2.58) *com dados iniciais e de fronteira* (1.7)-(1.8)*, dada pelo Teorema 2.9, decai exponencialmente a zero quando* $t \to +\infty$*, ou seja, existem constantes* C_0 *e* μ_0*, tais que*

$$\|(u(t), v(t))\|_X \leq C_0 e^{-\mu_0 t} \|(u_0, v_0)\|_X, \ \forall t \geq 0. \tag{3.33}$$

Primeiramente, observe que este problema é equivalente a provarmos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\| \ (u_0, v_0) \ \|_X^2 \leq C \int_0^T (u_{xx}^2(t, L) + u_{xx}^2(t, 0))dt. \tag{3.34}$$

De fato, pela estimativa (2.68),

$$E(T) - E(0) = -a_2 \int_0^T (u_{xx}^2(t, L) + u_{xx}^2(t, 0))dt, \tag{3.35}$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u^2(t, x) + v^2(t, x))dx.$$

Aplicando (3.34), obtemos

$$E(T) \leq \left(1 - \frac{2a_2}{C}\right) E(0). \tag{3.36}$$

Se tormarmos C suficientemente grande, obtemos $E(T) \leq \delta E(0)$, com $\delta \in (0, 1)$. Esta estimativa, juntamente com a propriedade de semigrupos, implica em (3.33), com $C_0 = \delta^{-\frac{1}{2}}$ e $\mu_0 = -\frac{ln\delta}{2T}$.

A prova de (3.34) é semelhante a da Proposição 3.4, por isso a omitiremos.

Definição 3.10. *Denotamos por* X_s *a interpolação* $[X, D(A)]_{\frac{s}{5}}$.

Proposição 3.11. *Seja* $s \in [0, 5]$*. Então, existe uma constante* $C_s > 0$*, tal que para todo* $(u_0, v_0) \in X_s$*, a solução* (u, v) *de* (2.58) *com dados iniciais e de fronteira* (1.7)-(1.8) *está em* $C([0, T]; X_s)$ *e satisfaz*

$$\|(u, v)\|_{X_s} \leq C_s e^{-\mu_0 t} \|(u_0, v_0)\|_{X_s}. \tag{3.37}$$

Demonstração. (3.37) já está provado para $s = 0$. De fato, como mencionamos acima, o resultado segue da desigualdade (3.34), cuja demonstração é semelhante a da Proposição 3.4. Provaremos agora o caso $s = 5$. Seja $(u_0, v_0) \in X_5 = D(A)$ e seja $(u(t), v(t)) = S(t)(u_0, v_0)$.

Defina $(g(t),h(t)) = (u(t),v(t))' = A((u(t),v(t))$. Então $(g(t),h(t))$ é solução de

$$(g(t),h(t))' = A(g(t),h(t)), \tag{3.38}$$

$$(g(0),h(0)) = A(u_0,v_0). \tag{3.39}$$

Pelo teorema anterior temos que $\|(g(t),h(t))\|_X < C_0e^{-\mu_0 t}\|(g(0),h(0))\|_X$. Mas observamos que $(g(0),h(0)) = A(u_0,v_0)$ e as normas $\|.\|_X + \|A(.)\|_X$ e $\|.\|_{X_5}$ são equivalentes em X_5. Então,

$$\begin{aligned}
\|(u(t),v(t))\|_{X_5} \quad &\leq \quad C(\|(u(t),v(t))\|_X + \|A(u(t),v(t))\|_X) \\
&\leq CC_0e^{-\mu_0 t}(\|(u_0,v_0)\|_X + \|A(u_0,v_0)\|_X) \\
&\leq C_3e^{-\mu_0 t}\|(u_0,v_0)\|_{X_5}.
\end{aligned}$$

Isto prova (3.37) para $s = 5$. Os demais casos seguem por interpolação, pois $X_s = [X,X_5]_{\frac{s}{5}}$. □

3.2.2 Decaimento exponencial para o problema não linear (1.6)-(1.8)

Sejam $U = (u,v)$, $U_0 = (u_0,v_0)$, A o operador definido em (2.59) e

$$N(U) = \left(-(uv)_x - (a-\frac{1}{3})u_xv_{xx}, -vv_x - (2c+1)v_{xx}v_x - u_{xx}u_x\right).$$

Com a notação acima podemos escrever o sistema (1.6)-(1.8) como um problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{cases} U_t = AU + N(U), \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{3.40}$$

Observe que, se U é solução de (3.40) e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ denota o semigrupo gerado por A, então

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U(s))ds. \tag{3.41}$$

Provaremos que (3.41) é localmente bem-posto no espaço $C([0,T];X)\cap L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)$.

Teorema 3.12. *Para todo $W_0 \in X$, existe uma única mild solution $W \in C([0,T];X) \cap L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)$ de*

$$\begin{cases} W_t = AW + F, \\ W(0) = W_0, \end{cases} \tag{3.42}$$

onde $F = (f,g) \in L^1(0,T;X)$.

Demonstração. Decompomos a solução como $W = U + V$, onde

$$\begin{cases} U_t = AU + F, \\ U(0) = 0 \end{cases} \tag{3.43}$$

e

$$\begin{cases} V_t = AV, \\ V(0) = W_0. \end{cases} \tag{3.44}$$

Inicialmente, observe que a mild solution de (3.44) é

$$V(t) = S(t)W_0 \tag{3.45}$$

dada pelo Teorema 2.9.

Por outro lado, a solução de (3.43) é definida por

$$U(t) = \int_0^t S(t-s)F(s)ds,$$

donde podemos obter a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \| U(t) \|_X &\leq \| \int_0^t S(t-s)F(s)ds \|_X \\ &\leq \int_0^t \| S(t-s)F(s) \|_X \, ds \\ &\leq \int_0^t \| F(s) \|_X \, ds \\ &\leq \int_0^T \| F(s) \|_X \, ds. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Para obter estimativas de U em $L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)$, considere o sistema

$$\begin{cases} u_t + v_x + a_2 v_{5x} &= f, \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ v_t + u_x + a_2 u_{5x} &= g, \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \end{cases} \tag{3.47}$$

satisfazendo as condições de fronteira (1.7) e condições iniciais nulas. Multiplicando a primeira equação de (3.47) por xv, a segunda por xu, obtemos

$$\begin{cases} xvu_t + xvv_x + a_2 xvv_{5x} &= xvf, \\ xuv_t + xuu_x + a_2 xuu_{5x} &= xug. \end{cases}$$

Somando as equações e integrando em $(0,T)\times(0,L)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_0^L x(uv)_t dxdt + \int_0^T\int_0^L \frac{x}{2}(u^2+v^2)_x dxdt + \\ + \quad & a_2\int_0^T\int_0^L x(vv_{5x}+uu_{5x})dxdt = \int_0^T\int_0^L x(vf+ug)dxdt. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Podemos estimar o termo à direita da igualdade acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |\int_0^T\int_0^L x(vf+ug)dxdt| &\leq |\int_0^T ((xf,xg),(v,u))_X dt| \\ &\leq L\int_0^T \| (f,g) \|_X \| U \|_X \, dt \end{aligned}$$

Aplicando (3.46), temos

$$|\int_0^T\int_0^L x(vf+ug)dxdt| \leq L \| F \|^2_{L^1(0,T;X)} . \tag{3.49}$$

Por (3.45), (3.48) e (3.49), obtemos uma constante $C=C(L)>0$, tal que

$$\| U \|^2_{L^2(0,T,[H^2(0,L)]^2)} \leq C \| F \|^2_{L^1(0,T;X)} . \tag{3.50}$$

Procedendo como no Teorema 2.3 e levando em consideração as estimativas (3.46) e (3.50), obtemos que

$$\| W \|^2_{C([0,T];X)} + \| W \|^2_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)} \leq C(\| W_0 \|^2_X + \| F \|^2_{L^1(0,T;X)}), \tag{3.51}$$

para uma constante $C=C(L)>0$. □

Defina a aplicação Γ por

$$(\Gamma U)(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U)(s)ds. \tag{3.52}$$

Provaremos que Γ possui um único ponto fixo em alguma bola fechada $\overline{B_R(0)}$ de $L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)$ (tal ponto fixo será nossa mild solution). Mas antes precisamos provar a estimativa a seguir.

Proposição 3.13. *Se U_1, $U_2 \in [H^2(0,L)]^2$, existe uma constante $K>0$, tal que*

$$\| N(U_1)-N(U_2) \|_X \leq K(\| U_1 \|_{[H^2(0,L)]^2} + \| U_2 \|_{[H^2(0,L)]^2})(\| U_1 - U_2 \|_{[H^2(0,L)]^2}). \tag{3.53}$$

Demonstração. Sejam $U_1 = (u_1, v_1)$ e $U_2 = (u_2, v_2)$. Então,

$$\begin{aligned}
\| \quad N(U_1) \quad & -N(U_2) \|_X^2 = \| -((u_1v_1)_x + (a - \frac{1}{3})u_{1,x}v_{1,xx}, \; v_1v_{1,x} + (2c+1)v_{1,xx}v_{1,x} \\
& +u_{1,xx}u_{1,x}) + ((u_2v_2)_x + (a - \frac{1}{3})u_{2,x}v_{2,xx}, \; v_2v_{2,x} \\
& +(2c+1)v_{2,xx}v_{2,x} + u_{2,xx}u_{2,x}) \|_X^2 \\
= \quad & \| -(u_1v_1)_x - (a - \frac{1}{3})u_{1,x}v_{1,xx} + (u_2v_2)_x + (a - \frac{1}{3})u_{2,x}v_{2,xx} \|_{L^2}^2 \\
& + \| -v_1v_{1,x} - (2c+1)v_{1,xx}v_{1,x} - u_{1,xx}u_{1,x} + u_2u_{2,x} \\
& +(2c+1)u_{2,xx}u_{2,x} + u_{2,xx}u_{2,x} \|_{L^2}^2 \\
\leq \quad & C(\| -(u_1v_1)_x + (u_2v_2)_x \|_{L^2}^2 + \| -(a - \frac{1}{3})u_{1,x}v_{1,xx} + (a - \frac{1}{3})u_{2,x}v_{2,xx}) \|_{L^2}^2 \\
& + \| -v_1v_{1,x} + u_2u_{2,x} \|_{L^2}^2 + \| -(2c+1)v_{1,xx}v_{1,x} + (2c+1)u_{2,xx}u_{2,x}) \|_{L^2}^2 \\
& + \| -u_{1,xx}u_{1,x} + u_{2,xx}u_{2,x}) \|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

Usando a imersão $H^2(0, L) \hookrightarrow L^\infty(0, L)$, temos que

$$\begin{aligned}
\| -(a - \frac{1}{3})u_{1,x}v_{1,xx} + (a - \frac{1}{3})u_{2,x}v_{2,xx}) \|_{L^2}^2 \leq C \| -u_{1,x}v_{1,xx} + u_{2,x}v_{2,xx}) \|_{L^2}^2 \\
= C \| (-u_{1,x} + u_{2,x})v_{1,xx} + u_{2,x}(-v_{1,xx} + v_{2,xx}) \|_{L^2}^2 \\
\leq C \| (-u_{1,x} + u_{2,x}) \|_{L^\infty}^2 \| v_{1,xx} \|_{L^2}^2 + \| u_{2,x} \|_{L^\infty}^2 \| (-v_{1,xx} + v_{2,xx}) \|_{L^2}^2 \\
\leq C(\| U_1 \|_{X_2}^2 + \| U_2 \|_{X_2}^2)(\| U_1 - U_2 \|_{X_2}^2).
\end{aligned}$$

Portanto, analisando os demais termos de maneira análoga, segue que

$$\| N(U_1) - N(U_2) \|_X \leq K(\| U_1 \|_{X_2} + \| U_2 \|_{X_2})(\| U_1 - U_2 \|_{X_2}), \tag{3.54}$$

onde $K > 0$. □

Estamos prontos para provar a existência local de soluções.

Teorema 3.14. *Para cada $U_0 \in X$, existe um tempo $T > 0$, tal que existe uma única mild solution de* (1.6)-(1.8) *em $C([0, T]; X) \cap L^2(0, T; [H^2(0, L)]^2)$, dada por*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t - s)N(U(s))ds. \tag{3.55}$$

Demonstração. Observe que (veja (3.52))

$$\begin{aligned}
\| \quad \Gamma U \quad & \|_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)} \leq \| S(t)U_0 \|_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)} \\
& + \| \int_0^t S(t - s)N(U)(s)ds \|_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \ \| S(t)U_0 \|_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)} + C\int_0^t \| N(U)(s) \|_X \, ds \\
&\leq \ \| S(t)U_0 \|_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)} + KC \| U \|^2_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)},
\end{aligned} \tag{3.56}$$

onde utilizamos (3.50) na segunda desigualdade e (3.53) na terceira. Logo,

$$\Gamma : L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2) \to L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2).$$

Seja U_0 em X. Podemos definir $R = 2 \| S(t)U_0 \|_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)}$, sendo que fixaremos depois um tempo $T > 0$ apropriado. Tomando $U \in \overline{B_R(0)}$, teremos

$$\| \Gamma U \|_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)} \leq \frac{R}{2} + KCR^2. \tag{3.57}$$

Observe que

$$\frac{R}{2} + KCR^2 < R, \tag{3.58}$$

se a seguinte relação for satisfeita

$$R < \frac{1}{2KC}. \tag{3.59}$$

Como as constantes C e K não dependem de T, podemos tomá-lo suficientemente pequeno para obter um R satisfazendo a relação acima. Assim, teremos

$$\Gamma : \overline{B_R(0)} \to \overline{B_R(0)}.$$

Provaremos agora que Γ é uma contração. Da Proposição 3.13, obtemos

$$\begin{aligned}
\| \Gamma U_1 - \Gamma U_2 \|_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)} &= \left\| \int_0^t S(t-s)(NU_1(s) - NU_2(s))ds \right\|_{L^2(0,T;[H^2(0,L)]^2)} \\
&\leq C \int_0^t \| N(U_1) - N(U_2) \|_X \, ds \\
&\leq CK \int_0^t \| U_1 - U_2 \|_{[H^2(0,L)]^2} (\| U_1 \|_{[H^2(0,L)]^2} + \| U_2 \|_{[H^2(0,L)]^2}) ds \\
&\leq CK(2R) \left(\int_0^t \| U_1 - U_2 \|^2_{[H^2(0,L)]^2} \, ds \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo, para R suficientemente pequeno temos que Γ é uma contração. Mas, conforme o caso anterior, podemos facilmente obter tal R através de um $T > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, concluímos o resultado pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. $\square$

Lema 3.15. *Sejam $U_0 \in X$ e $\mu \in (0, \mu_0)$. Existe uma constante $C = C(\mu) > 0$, tal que*

$$\| S(t)U_0 \|_{[H^2(0,L)]^2} \leq C \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \| U_0 \|_X \,, \ \textit{para todo } t > 0. \tag{3.60}$$

Demonstração. Seja $U(t) := S(t)U_0$ e $T = 1$. Por (2.70), temos que $U(t) \in [H^2(0,L)]^2$ para quase todo t em $(0,1)$. Em particular, temos que existe uma sequência $(t_n)_{n\geq 0}$ em $(0,1]$, com $t_n \to 0^+$, tal que $U(t_n) \in [H^2(0,L)]^2$. Tomando $S(t)U(t_n)$ e usando a Proposição 3.11, temos que $U(t) \in [H^2(0,L)]^2$, para $t \in [t_n, +\infty)$. Portanto, aplicando a desigualdade (3.37), obtemos

$$\| U(T) \|_{[H^2(0,L)]^2} \leq Ce^{-\mu_0(T-t)} \| U(t) \|_{[H^2(0,L)]^2}, \tag{3.61}$$

para todo $T \geq t > 0$.

Por outro lado, se $T \in (0,1]$, integrando (3.61) em $t \in (0,T)$ obtemos

$$\frac{\| U(T) \|^2_{[H^2(0,L)]^2}}{C^2} \int_0^T e^{2\mu_0(T-t)} dt \leq \int_0^T \| U(t) \|^2_{[H^2(0,L)]^2} \, dt \leq C^2 \| U_0 \|^2_X,$$

donde,

$$\| U(T) \|_{[H^2(0,L)]^2} \leq C\sqrt{\frac{2\mu_0}{e^{2\mu_0 T} - 1}} \| U_0 \|_X \leq C\frac{\| U_0 \|_X}{\sqrt{T}},$$

para $0 < T \leq 1$. Assim, concluímos que

$$\| U(t) \|_{[H^2(0,L)]^2} \leq Ce^{\mu}\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \| U_0 \|_X, \tag{3.62}$$

para todo $0 < t \leq 1$.

Caso $t > 1$, podemos obter (3.60) por (3.61) e (3.62). De fato,

$$\begin{aligned} \| U(t) \|_{[H^2(0,L)]^2} \leq Ce^{-\mu_0(t-1)} \| U(1) \|_{[H^2(0,L)]^2} &\leq Ce^{-\mu_0(t-1)} Ce^{\mu}\frac{e^{-\mu 1}}{\sqrt{1}} \| U_0 \|_X \\ &\leq Ce^{-\mu_0(t-1)} \| U_0 \|_X \leq C\frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \| U_0 \|_X . \end{aligned} \tag{3.63}$$

$\square$

Agora podemos provar a boa colocação global e estabilidade exponencial do sistema não linear para dados pequenos em $[H^2(0,L)]^2$. Para cada $\mu \in (0, \mu_0)$, definimos o espaço

$$F_\mu := \{U = (u,v) \in C(\mathbb{R}^+; [H^2(0,L)]^2); \| e^{\mu t}U(t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;[H^2(0,L)]^2)} < \infty\},$$

com a norma

$$\| U \|_F = \sup_{t\geq 0} ess \| e^{\mu t}U(t) \|_{[H^2(0,L)]^2} .$$

Teorema 3.16. *Existe $r_0 > 0$, tal que, para todo dado inicial $U_0 \in [H^2(0,L)]^2$ satisfazendo*

$$\| U_0 \| < r_0,$$

o sistema (1.6)-(1.8) *admite uma única mild solution*

$$U \in F_\mu.$$

Demonstração. Com a mesma notação introduzida em (3.41), defina a aplicação Γ por

$$(\Gamma U)(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U)(s)ds. \tag{3.64}$$

Provaremos que se r_0 for pequeno, então Γ possui um único ponto fixo em alguma bola fechada $\overline{B_R(0)}$ de F_μ. Pela relação (3.51) temos que $\Gamma U \in C(\mathbb{R}^+; X) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; [H^2(0,L)]^2)$, com $(\Gamma U)(0) = U_0$. Precisamos provar que $\Gamma U \in F_\mu$.

Pelo decaimento exponencial do semigrupo, podemos estimar o primeiro termo de (3.64) por

$$\| e^{\mu t} S(t) U_0 \|_{[H^2(0,L)]^2} \leq C \| U_0 \|_{[H^2(0,L)]^2},$$

para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, podemos analisar o segundo termo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \| e^{\mu t} \int_0^t S(t-s)N(U)(s)ds \|_{[H^2(0,L)]^2} &\leq e^{\mu t} \int_0^t C \frac{e^{-\mu(t-s)}}{\sqrt{t-s}} \| N(U)(s) \|_X \, ds \\ &\leq CK(2+\mu^{-1}) \| U \|_F^2, \end{aligned} \tag{3.65}$$

onde aplicamos o Lema 3.15. Então, se escolhermos um $R > 0$, tal que $2CK(2+\mu^{-1})R < 1$ e definirmos $r_0 > 0$ por $Cr_0 = \frac{R}{2}$, teremos

$$\| e^{\mu t} (\Gamma U)(t) \|_{[H^2(0,L)]^2} \leq Cr_0 + CK(2+\mu^{-1})R^2 \leq R. \tag{3.66}$$

É fácil ver que Γ é uma contração para $2CK(2+\mu^{-1})R < 1$. Portanto, temos uma única mild solution na bola fechada de F_μ de raio R, para r_0 pequeno. $\square$

Vamos provar o Teorema 3.8.

Demonstração. Seja $T = 1$, $\| U_0 \|_X \leq \rho$ e $\overline{C}$ a constante de (2.70). Podemos definir $\frac{R}{2} = \| S(.)U_0 \|_{L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)} \leq \overline{C}\rho$.

Também podemos definir a aplicação integral:

$$\Gamma U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U)(s)ds. \tag{3.67}$$

Provaremos que Γ é uma contração da bola fechada $\overline{B_R(0)}$ de $L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)$, se ρ for suficientemente pequeno.

De fato, se $U \in \overline{B_R(0)}$,

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma U(t) \|_{L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)} \leq \| S(t)U_0 \|_{L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)} \\
&\quad + \| \int_0^t S(t-s)N(U)(s)ds \|_{L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)} \leq \frac{R}{2} + C\int_0^t \| N(U)(s) \|_X \, ds \\
&\quad \leq \frac{R}{2} + CK\int_0^1 \| U(s) \|^2_{[H^2(0,L)]^2} \, ds = \frac{R}{2} + CKR^2 = R(\frac{1}{2} + CKR),
\end{aligned}$$

onde aplicamos (2.70) e (3.53).

Portanto, precisamos ter $(\frac{1}{2} + CKR) \leq 1$, que ocorre se $R < \frac{1}{2CK}$. Como

$$\frac{R}{2} = \| S(.)U_0 \|_{L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)} \leq \overline{C}\rho,$$

podemos obter o resultado se tomarmos ρ, tal que $R \leq 2\overline{C}\rho < \frac{1}{2CK}$, ou seja, se tomarmos $\rho < \frac{1}{4\overline{C}CK}$.

Agora precisamos provar que tal aplicação é de fato uma contração. Sejam U e V em $B_R(0) \subset L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)$, então

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma U - \Gamma V \|_{L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)} \leq \| \int_0^t S(t-s)(N(U) - N(V))(s)ds \|_{L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)} \\
&\leq C\int_0^t \| (N(U) - N(V))(s) \|_X \, ds \\
&\leq CK\int_0^1 \| U(s) - V(s) \|_{[H^2(0,L)]^2} (\| U(s) \|_{[H^2(0,L)]^2} + \| V(s) \|_{[H^2(0,L)]^2})ds \\
&= CK2R \| U(s) - V(s) \|_{L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)},
\end{aligned}$$

Precisamos que $CK2R < 1$, ou seja, $R < \frac{1}{CK2}$, que já é satisfeita pela escolha de ρ.

Portanto, para dados iniciais pequenos, temos uma única solução $U \in B_R(0) \subset L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)$ onde $\frac{R}{2} = \| S(.)U_0 \|_{L^2(0,1;[H^2(0,L)]^2)} \leq C \| U_0 \|_X$.

Em particular, existe $t_0 \in (0,1)$, tal que $U(t_0) \in [H^2(0,L)]^2$ e $\| U(t_0) \|_{[H^2(0,L)]^2} \leq R$. Se, além disso, escolhermos $R \leq r_0$, então, pelo Teorema 3.16, teremos que U pode ser estendida como solução para $t > 0$, com

$$\| U(t) \|_{[H^2(0,L)]^2} \leq Ce^{-\mu(t-t_0)} \| U(t_0) \|_{[H^2(0,L)]^2} \leq C_1 e^{-\mu t} \| U_0 \|_X, \tag{3.68}$$

onde $C_1 > 0$.

Se $t \in [0,1]$, podemos usar as desigualdades (3.51) e (3.53) pra obter (3.31).

Por fim, para provar a desigualdade (3.32) em $(0,1]$, basta proceder como no Lema 3.15. Portanto, valem (3.31) e (3.32). $\square$

Capítulo 4

Continuação única para um sistema do tipo Benjamin-Bona-Mahony

No presente capítulo, estudaremos um problema de continuação única para um sistema acoplado linear do tipo Benjamin-Bona-Mahony, com potenciais dependentes tanto do tempo quanto do espaço. Mais precisamente, seja o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \eta_t(t,x) - \eta_{xxt}(t,x) = p_1(t,x)\omega_x(t,x) + q_1(t,x)\omega(t,x) & , (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \\ \omega_t(t,x) - \omega_{xxt}(t,x) = p_2(t,x)\eta_x(t,x) + q_2(t,x)\eta(t,x) & , (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde assumimos que

$$p_i, q_i \in L^\infty((0,T) \times (0,1)), \text{ para } i = 1,2. \tag{4.2}$$

Inicialmente, assumimos que (η, ω) satisfazem as condições de fronteira

$$\left\{ \eta(t,1) = \eta(t,0) = \omega(t,1) = \omega(t,0) = 0, \text{em } t \in (0,T) \right. \tag{4.3}$$

e as condições iniciais

$$\begin{cases} \eta(0,x) = \eta_0(x),\ x \in (0,1), \\ \omega(0,x) = \omega_0(x),\ x \in (0,1). \end{cases} \tag{4.4}$$

Nessas condições, provaremos resultados de boa colocação para o sistema (4.1)-(4.4). Em seguida consideraremos o sistema (4.1)-(4.2) com as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \eta(t,1) = \omega(t,1) = \eta_x(t,1) = \omega_x(t,1) = 0, \text{em } t \in (0,T), \\ \eta(0,x) = \omega(0,x) = 0, \text{em } x \in (0,1). \end{cases} \tag{4.5}$$

Nessas condições temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Seja (η, ω) tal que $\partial_t^k \partial_x^j \eta, \partial_t^k \partial_x^j \omega \in C([0,T] \times [0,1])$, solução clássica de*

(4.1) e (4.2) satisfazendo (4.5). Então,

$$\eta = \omega = 0 \text{ para } (t,x) \in [0,T] \times [0,1]. \tag{4.6}$$

Observação 4.2. *As condições (4.5) são as melhores possíveis para se obter o resultado de continuação única. De fato, se retirarmos somente a condição inicial $\omega(0,x) = 0$ de (4.5), então a continação única falha pelo seguinte contra-exemplo (semelhante ao aplicado por Zhang e Zuazua em [21]):*

- *Sejam $p_i = q_i = 0$, para $i = 1, 2$,*
- *seja $\omega(t,x) = \omega_0(x) \neq 0$ em $C_0^\infty(0,1)$,*
- *seja $\eta(t,x) = 0$ em $C_0^\infty(0,1)$,*

então evidentemente (η, ω) constitui uma solução não nula de (4.1)-(4.2) e satisfaz (4.5) exceto pela condição $\omega(0,x) = 0$.

Em todo este capítulo, usaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} (u,v) &:= (u,v)_{L^2(0,1)}, \\ ((u,v)) &:= (u,v)_{H_0^1(0,1)} = (\bigtriangledown u, \bigtriangledown v), \\ (((u,v))) &:= (u,v)_{H^2 \cap H_0^1} = (\triangle u, \triangle v), \end{aligned}$$

com as normas correspondentes $|.|$, $\|.\|$ e $|||.|||$.

4.1 Existência de soluções fracas

Faremos o estudo da existência e unicidade de soluções para o sistema (4.1)-(4.4) usando o método de Faedo-Galerkin.

Definição 4.3. *Dado $T > 0$, uma solução fraca do sistema (4.1)-(4.4) é uma função vetorial $(\eta, \omega) : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, na classe*

$$\eta,\ \eta_t,\ \omega \text{ e } \omega_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,1)), \tag{4.7}$$

que satisfaz

$$\int_0^T (\eta_t, v_1) + ((\eta_t, v_1))dt = \int_0^T (p_1 \omega_x, v_1) + (q_1 \omega, v_1)dt \tag{4.8}$$

e

$$\int_0^T (\omega_t, v_2) + ((\omega_t, v_2))dt = \int_0^T (p_2 \eta_x, v_2) + (q_2 \eta, v_2)dt, \tag{4.9}$$

$\forall v_1$ e v_2 em $L^2(0,T;H_0^1(0,1))$, que verifica a seguinte condição inicial

$$(\eta(0,x),\omega(0,x)) = (\eta_0,\omega_0). \tag{4.10}$$

Temos a existência e unicidade de soluções fracas dadas pelo seguinte teorema:

Teorema 4.4. *Para cada $(\eta_0,\omega_0) \in [H_0^1(0,1)]^2$, existe uma única solução fraca para o sistema* (4.1)-(4.4).

Demonstração. Utilizaremos o método de aproximação de Faedo-Galerkin. Para facilitar a leitura, faremos a demonstração em vários passos.

Problema Aproximado

Seja $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ o conjunto das autofunções do operador Laplaciano $-\triangle$ em $H_0^1(0,1)$, sendo λ_j o autovalor correspondente à v_j:

$$\begin{cases} -\triangle v_j = \lambda_j v_j & , x \in (0,1), \\ v_j(0) = v_j(1) = 0 & , i \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Temos que

$$\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ é uma base ortogonal de } H_0^1(0,1) \tag{4.12}$$

e

$$\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ é uma base ortonormal de } L^2(0,1). \tag{4.13}$$

A partir dessa base definimos V_N como sendo o subespaço de dimensão finita gerado pelos N primeiro vetores v_1,..., v_N, ou seja, $V_N = [v_1, v_2, ..., v_N]$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, buscamos um par de funções da forma

$$\eta_N(t,x) = \sum_{j=1}^{N} g_{j,N}(t) v_j(x) \tag{4.14}$$

e

$$\omega_N(t,x) = \sum_{j=1}^{N} h_{j,N}(t) v_j(x), \tag{4.15}$$

que sejam soluções do seguinte problema aproximado

$$\begin{cases} (\eta_{N,t}, v_i) + ((\eta_{N,t}, v_i)) = (p_1\omega_{N,x}, v_i) + (q_1\omega_N, v_i), \; i = 1,2,3,...,N, \\ (\omega_{N,t}, v_i) + ((\omega_{N,t}, v_i)) = (p_2\eta_{N,x}, v_i) + (q_2\eta_N, v_i), \; i = 1,2,3,...,N, \end{cases} \tag{4.16}$$

tais que

$$g_{j,N}(0) = (\eta_0, v_j) \tag{4.17}$$

e

$$h_{j,N}(0) = (\omega_0, v_j). \tag{4.18}$$

Temos que

$$(\eta_N(0,x),\omega_N(0,x)) = (\eta_{N,0},\omega_{N,0}) \to (\eta_0,\omega_0) \text{ em } [H_0^1(0,1)]^2. \tag{4.19}$$

O sistema de equações ordinárias (4.16)-(4.18) pode ser reescrito da seguinte forma: sejam $g_N = (g_{1,N},...,g_{N,N})$, $h_N = (h_{1,N},...,h_{N,N})$, D a matriz diagonal dos autovalores $\lambda_1,...,\lambda_N$, ou seja, $D = diag(\lambda_1,...,\lambda_N)$ e $A = A(t)$ uma matriz cujos elementos são da forma $A_{i,j} = (p_1(t,x)v_{j,x},v_i) + (q_1(t,x)v_j,v_i)$. Analogamente, definimos $B = B(t)$ por $B_{i,j} = (p_2(t,x)v_{j,x},v_i) + (q_2(t,x)v_j,v_i)$. Então,

$$g_{N,t} + Dg_{N,t} = A(t)h_N, \tag{4.20}$$

e

$$h_{N,t} + Dh_{N,t} = B(t)g_N, \tag{4.21}$$

verificando as condições iniciais (4.17)-(4.18).

Pelo Teorema de Carathéodory, o sistema acima tem solução local em $0 \leq t \leq t_N$, sendo que t_N depende do N. Assim, precisamos provar a extensão de soluções para todo o intervalo $[0,T]$, onde $T > 0$ é fixado previamente. Isso será feito usando as estimativas a-priori a seguir.

Estimativa I

Em (4.16), tomando $v_i = \eta_N$ na primeira equação e $v_i = \omega_N$ na segunda, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta_N\|^2 = (p_1\omega_{N,x},\eta_N) + (q_1\omega_N,\eta_N), \tag{4.22}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_N\|^2 = (p_2\eta_{N,x},\omega_N) + (q_2\eta_N,\omega_N). \tag{4.23}$$

Os termos que aparecem à direita das igualdades (4.22)-(4.23), podem ser estimados como segue:

$$(p_1\omega_{N,x},\eta_N) = \int_0^1 p_1\omega_{N,x}\eta_N dx \leq \| p_1 \|_{L_x^\infty(0,1)} \int_0^1 |\omega_{N,x}\eta_N| dx \tag{4.24}$$

$$\leq \frac{\| p_1 \|_{L_x^\infty(0,1)}}{2} \int_0^1 |\omega_{N,x}|^2 + |\eta_N|^2 dx. \tag{4.25}$$

Analogamente, podemos estimar também os outros termos, obtendo

$$(q_1\omega_N,\eta_N) \leq \frac{\| q_1 \|_{L_x^\infty(0,1)}}{2} \int_0^1 |\omega_N|^2 + |\eta_N|^2 dx, \tag{4.26}$$

$$(p_2\eta_{N,x},\omega_N) \leq \frac{\| p_2 \|_{L_x^\infty(0,1)}}{2} \int_0^1 |\eta_{N,x}|^2 + |\omega_N|^2 dx. \tag{4.27}$$

$$(q_2\eta_N,\omega_N) \leq \frac{\| q_2 \|_{L^\infty_x(0,1)}}{2}\int_0^1 |\eta_N|^2+|\omega_N|^2dx. \tag{4.28}$$

Substituindo (4.24)-(4.28) em (4.22)-(4.23), obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| \eta_N \|^2 \leq \frac{\| p_1 \|_{L^\infty_x(0,1)}}{2}\int_0^1 |\omega_{N,x}|^2+|\eta_N|^2dx+\frac{\| q_1 \|_{L^\infty_x(0,1)}}{2}\int_0^1 |\omega_N|^2+|\eta_N|^2dx, \tag{4.29}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| \omega_N \|^2 \leq \frac{\| p_2 \|_{L^\infty_x(0,1)}}{2}\int_0^1 |\eta_{N,x}|^2+|\omega_N|^2dx+\frac{\| q_2 \|_{L^\infty_x(0,1)}}{2}\int_0^1 |\eta_N|^2+|\omega_N|^2dx. \tag{4.30}$$

De (4.29) e (4.30), segue que

$$\frac{d}{dt}[\| \eta_N \|^2+\| \omega_N \|^2] \leq C[\| \eta_N \|^2+\| \omega_N \|^2], \tag{4.31}$$

onde $C=\sum_{i=1,2}\| p_i \|_{L^\infty(0,T;L^\infty(0,1))}+\| q_i \|_{L^\infty(0,T;L^\infty(0,1))}$.

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (4.31), obtemos a seguinte estimativa de energia:

$$[\|\eta_N\|^2+\|\omega_N\|^2](t) \leq C[\|\eta_{0N}\|^2+\|\omega_{0N}\|^2] \leq \overline{C}, \tag{4.32}$$

onde $\overline{C}=\overline{C}(T)>0$, pela convergência dos dados iniciais em (4.19). Portanto, podemos estender a solução do sistema aproximado em $[0,T]$.

Estimativa II

O próximo passo é obter uma segunda estimativa de energia que, juntamente com a estimativa (4.32), nos possibilitará a passagem ao limite no problema aproximado. Em (4.16), tomamos $v_i=\eta_{N,t}$ na primeira equação e $v_i=\omega_{N,t}$ na segunda, donde obtém-se que

$$[|\eta_{N,t}|^2+\|\eta_{N,t}\|^2+|\omega_{N,t}|^2+\|\omega_{N,t}\|^2]=(p_1\omega_{N,x},\eta_{N,t})+(q_1\omega_N,\eta_{N,t})+(p_2\eta_{N,x},\omega_{N,t})+(q_2\eta_N,\omega_{N,t}). \tag{4.33}$$

Para estimar os termos que estão à direita da igualdade (4.33) procedemos da seguinte forma:

$$(p_1\omega_{N,x},\eta_{N,t})=\int_0^1 p_1\omega_{N,x}\eta_{N,t}dx \leq \| p_1 \|_{L^\infty_x(0,1)}\int_0^1 |\omega_{N,x}\eta_{N,t}|dx \tag{4.34}$$

$$\leq \| p_1 \|_{L^\infty_x(0,1)}\int_0^1 \frac{|\omega_{N,x}|^2}{4\epsilon}+\epsilon|\eta_{N,t}|^2dx, \tag{4.35}$$

onde $\epsilon>0$. Analogamente, podemos estimar também os outros termos de (4.33), obtendo

$$(q_1\omega_N,\eta_{N,t}) \leq \| q_1 \|_{L^\infty_x(0,1)}\int_0^1 \frac{|\omega_N|^2}{4\epsilon}+\epsilon|\eta_{N,t}|^2dx, \tag{4.36}$$

$$(p_2\eta_{N,x},\omega_{N,t}) \leq \| p_2 \|_{L^\infty_x(0,1)} \int_0^1 \frac{|\eta_{N,x}|^2}{4\epsilon} + \epsilon|\omega_{N,t}|^2 dx, \tag{4.37}$$

$$(q_2\eta_N,\omega_{N,t}) \leq \| q_2 \|_{L^\infty_x(0,1)} \int_0^1 \frac{|\eta_N|^2}{4\epsilon} + \epsilon|\omega_{N,t}|^2 dx, \tag{4.38}$$

onde $\epsilon > 0$. Substituindo (4.34)-(4.38) em (4.33), com ϵ suficientemente pequeno, segue que

$$[|\eta_{N,t}|^2 + \|\eta_{N,t}\|^2 + |\omega_{N,t}|^2 + \|\omega_{N,t}\|^2] \leq C[\|\eta_N\|^2 + \|\omega_N\|^2], \tag{4.39}$$

com $C = C(p_1, p_2, q_1, q_2)$. Mas pela estimativa de energia (4.32), temos os termos que estão à direita de (4.39) são estimados por uma constante $\overline{C} = \overline{C}(T) > 0$. Portanto,

$$[\|\eta_{N,t}\|^2 + \|\omega_{N,t}\|^2](t) \leq C[\|\eta_{0N}\|^2 + \|\omega_{0N}\|^2] \leq \overline{C}, \tag{4.40}$$

sendo novamente $\overline{C} = \overline{C}(T) > 0$.

Passagem ao Limite no Problema Aproximado

Agora podemos voltar ao problema aproximado e fazer a passagem ao limite. Como as sequências $(\eta_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(\omega_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(\eta_{N,t})_{N\in\mathbb{N}}$, $(\omega_{N,t})_{N\in\mathbb{N}}$ são limitadas em $L^\infty(0,T;H_0^1(0,1))$, podemos obter subsequências, que também denotaremos por simplicidade de $(\eta_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(\omega_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(\eta_{N,t})_{N\in\mathbb{N}}$, $(\omega_{N,t})_{N\in\mathbb{N}}$, que convergem fraco estrela. Mais precisamente,

$$\eta_N \rightharpoonup \eta \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)), \tag{4.41}$$
$$\eta_{N,t} \rightharpoonup \eta_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)), \tag{4.42}$$
$$\omega_N \rightharpoonup \omega \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)), \tag{4.43}$$
$$\omega_{N,t} \rightharpoonup \omega_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)). \tag{4.44}$$

Observe que (4.41) significa que para toda $v \in L^1(0,T;H^{-1}(0,1))$ ocorre a seguinte convergência

$$\int_0^T < \eta_N(t), v(t) >_{H_0^1\times H^{-1}} dt \to \int_0^T < \eta(t), v(t) >_{H_0^1\times H^{-1}} dt. \tag{4.45}$$

Considerações análogas valem para (4.42)-(4.44), ou seja,

$$\int_0^T < \eta_{N,t}(t), v(t) >_{H_0^1\times H^{-1}} dt \to \int_0^T < \eta_t(t), v(t) >_{H_0^1\times H^{-1}} dt, \tag{4.46}$$

$$\int_0^T < \omega_N(t), v(t) >_{H_0^1\times H^{-1}} dt \to \int_0^T < \omega(t), v(t) >_{H_0^1\times H^{-1}} dt, \tag{4.47}$$

$$\int_0^T < \omega_{N,t}(t), v(t) >_{H_0^1\times H^{-1}} dt \to \int_0^T < \omega_t(t), v(t) >_{H_0^1\times H^{-1}} dt, \tag{4.48}$$

para toda $v \in L^1(0,T;H^{-1}(0,1))$.

Multiplicando o sistema aproximado (4.16) por $\theta \in D(0,T)$ e integrando de 0 a T, fazendo $N > i$ com i fixo, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T (\eta_{N,t}, v_i)\theta(t)dt + \int_0^T ((\eta_{N,t}, v_i))\theta(t)dt = \int_0^T (p_1\omega_{N,x}, v_i)\theta(t)dt + \int_0^T (q_1\omega_N, v_i)\theta(t)dt, \\ \int_0^T (\omega_{N,t}, v_i)\theta(t)dt + \int_0^T ((\omega_{N,t}, v_i))\theta(t)dt = \int_0^T (p_2\eta_{N,x}, v_i)\theta(t)dt + \int_0^T (q_2\eta_N, v_i)\theta(t)dt. \end{array} \right. \tag{4.49}$$

Observe que no primeiro termo acima,

$$\int_0^T (\eta_{N,t}, v_i)\theta(t)dt, \tag{4.50}$$

temos que $\theta(t)v_i(x) \in L^1(0,T;V_i) \hookrightarrow L^1(0,T;H_0^1(0,1)) \hookrightarrow L^1(0,T;H^{-1}(0,1))$. Portanto, de (4.42) obtém-se

$$\int_0^T (\eta_{N,t}, v_i)\theta(t)dt \to \int_0^T (\eta_t, v_i)\theta(t)dt, \text{ quando } N \to +\infty. \tag{4.51}$$

Analogamente, obtemos a convergência dos demais termos de (4.52), mostrando assim que (η, ω) satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T (\eta_t, v_i)\theta(t)dt + \int_0^T ((\eta_t, v_i))\theta(t)dt = \int_0^T (p_1\omega_x, v_i)\theta(t)dt + \int_0^T (q_1\omega, v_i)\theta(t)dt, \\ \int_0^T (\omega_t, v_i)\theta(t)dt + \int_0^T ((\omega_t, v_i))\theta(t)dt = \int_0^T (p_2\eta_x, v_i)\theta(t)dt + \int_0^T (q_2\eta, v_i)\theta(t)dt, \end{array} \right. \tag{4.52}$$

$\forall \theta \in D(0,T)$. Como as combinações lineares finitas dos elementos de V_N são densas em $H_0^1(0,1)$, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T (\eta_t, v)\theta(t)dt + \int_0^T ((\eta_t, v))\theta(t)dt = \int_0^T (p_1\omega_x, v)\theta(t)dt + \int_0^T (q_1\omega, v)\theta(t)dt, \\ \int_0^T (\omega_t, v)\theta(t)dt + \int_0^T ((\omega_t, v))\theta(t)dt = \int_0^T (p_2\eta_x, v)\theta(t)dt + \int_0^T (q_2\eta, v)\theta(t)dt, \end{array} \right. \tag{4.53}$$

$\forall v \in H_0^1(0,1)$ e $\theta \in D(0,T)$. Além disso, como o conjunto de todas as funções $\theta(t)v(x)$ são densas em $L^2(0,T;H_0^1(0,1))$, temos

$$\int_0^T (\eta_t, v_1) + ((\eta_t, v_1))dt = \int_0^T (p_1\omega_x, v_1) + (q_1\omega, v_1)dt \tag{4.54}$$

e

$$\int_0^T (\omega_t, v_2) + ((\omega_t, v_2))dt = \int_0^T (p_2\eta_x, v_2) + (q_2\eta, v_2)dt, \tag{4.55}$$

$\forall v_1$ e v_2 em $L^2(0,T;H_0^1(0,1))$.

Verificação dos Dados Iniciais

Vimos que

$$\eta_N \rightharpoonup \eta \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)), \tag{4.56}$$

$$\eta_{N,t} \rightharpoonup \eta_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)), \tag{4.57}$$

$$\omega_N \rightharpoonup \omega \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)), \tag{4.58}$$

$$\omega_{N,t} \rightharpoonup \omega_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)). \tag{4.59}$$

Como consequência, $\eta, \omega \in C([0,T];H_0^1(0,1))$. Portanto, $\eta(0)$ e $\omega(0)$ estão bem definidas. Por outro lado, tomando $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$ e $v \in H_0^1(0,1)$, obtemos

$$\int_0^T (\eta_N, v)\theta_t(t)dt \to \int_0^T (\eta, v)\theta_t(t)dt, \ \forall v \in H_0^1(0,1), \tag{4.60}$$

$$\int_0^T (\eta_{N,t}, v)\theta(t)dt \to \int_0^T (\eta_t, v)\theta(t)dt, \ \forall v \in H_0^1(0,1). \tag{4.61}$$

Somando os termos acima, tem-se a seguinte convergência

$$\int_0^T [(\eta_N, v)\theta(t)]_t dt \to \int_0^T [(\eta, v)\theta(t)]_t dt, \ \forall v \in H_0^1(0,1), \tag{4.62}$$

ou seja,

$$[(\eta_N, v)\theta(t)]_0^T \to [(\eta, v)\theta(t)]_0^T, \ \forall v \in H_0^1(0,1). \tag{4.63}$$

Logo,

$$(\eta_N(0), v) \to (\eta(0), v), \ \forall v \in H_0^1(0,1). \tag{4.64}$$

Segue então de (4.19) que

$$\eta(0) = \eta_0. \tag{4.65}$$

Analogamente,

$$\omega(0) = \omega_0. \tag{4.66}$$

Unicidade das Soluções

Para provar a unicidade, suponha que temos dois pares de soluções (η_1, ω_1) e (η_2, ω_2) que satisfazem as mesmas condições iniciais. Nesse caso, podemos obter uma solução (u, v), onde $u = \eta_1 - \eta_2$ e $v = \omega_1 - \omega_2$, que será solução do sistema (4.1) com condição inicial nula. Pela estimativa de energia (4.32), a solução (u, v) é nula, provando que $\eta_1 = \eta_2$ e $\omega_1 = \omega_2$. Portanto, temos a unicidade de soluções. $\square$

4.2 Existência de soluções fortes

Definição 4.5. *Dado $T > 0$, uma solução forte do sistema* (4.1)-(4.4) *é uma função vetorial $(\eta, \omega) : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, na classe*

$$\eta,\ \eta_t,\ \omega \ e\ \omega_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)), \tag{4.67}$$

que satisfaz (4.8)-(4.10).

Teorema 4.6. *Para cada η_0 e ω_0 em $H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ existe uma única solução forte para o sistema* (4.1)-(4.4).

Demonstração. Utilizaremos novamente o método de aproximação de Faedo-Galerkin, como na seção anterior, considerando uma base $\{v_j\}_{N\in\mathbb{N}} \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$, formada pelas autofunções do problema espectral

$$\begin{cases} \triangle v_j = \lambda_j v_j & , x \in (0,1), \\ v_j(0) = v_j(1) = 0 & , i \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.68}$$

A partir dessa base definimos V_N como sendo o subespaço de dimensão finita gerado pelos N primeiro vetores v_1,..., v_N, ou seja, $V_N = [v_1, v_2, ..., v_N]$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, buscamos um par de funções da forma

$$\eta_N(t,x) = \sum_{j=1}^{N} g_{j,N}(t) v_j(x) \tag{4.69}$$

e

$$\omega_N(t,x) = \sum_{j=1}^{N} h_{j,N}(t) v_j(x), \tag{4.70}$$

que sejam soluções do seguinte problema aproximado

$$\begin{cases} (\eta_{N,t}, v_i) - (\triangle \eta_{N,t}, v_i) = (p_1 \omega_{N,x}, v_i) + (q_1 \omega_N, v_i), & \text{i=1,2,3,...,N}, \\ (\omega_{N,t}, v_i) - (\triangle \omega_{N,t}, v_i) = (p_2 \eta_{N,x}, v_i) + (q_2 \eta_N, v_i), & \text{i=1,2,3,...,N}, \end{cases} \tag{4.71}$$

tais que

$$g_{j,N}(0) = (\eta_0, v_j) \tag{4.72}$$

e

$$h_{j,N}(0) = (\omega_0, v_j). \tag{4.73}$$

Temos que

$$(\eta_N(0,x), \omega_N(0,x)) = (\eta_{N,0}, \omega_{N,0}) \to (\eta_0, \omega_0) \text{ em } [H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)]^2. \tag{4.74}$$

Estimativa I

Tomando $v_i = \triangle\eta_N \in V_N$ na primeira equação de (4.71) e $v_i = \triangle\omega_N \in V_N$ na segunda, segue que

$$(\eta_{N,t}, \triangle\eta_N) - (\triangle\eta_{N,t}, \triangle\eta_N) = (p_1\omega_{N,x}, \triangle\eta_N) + (q_1\omega_N, \triangle\eta_N), \tag{4.75}$$

$$(\omega_{N,t}, \triangle\omega_N) - (\triangle\omega_{N,t}, \triangle\omega_N) = (p_2\eta_{N,x}, \triangle\omega_N) + (q_2\eta_N, \triangle\omega_N). \tag{4.76}$$

Portanto, de (4.75) obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \eta_N \|^2 + |||\eta_N|||^2] \leq \| p_1 \|_{L^\infty_x(0,1)} \int_0^1 |\omega_{N,x}||\triangle \eta_N| dx + \| q_1 \|_{L^\infty_x(0,1)} \int_0^1 |\omega_N||\triangle \eta_N| dx, \tag{4.77}$$

donde, aplicando a desigualdade de Cauchy, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \eta_N \|^2 + |||\eta_N|||^2] \leq C[|\triangle \eta_N|^2 + \| \omega_N \|^2 + |\omega_N|^2], \tag{4.78}$$

onde $C > 0$. Analogamente, de (4.76) obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \omega_N \|^2 + |||\omega_N|||^2] \leq C[|\triangle \omega_N|^2 + \| \omega_N \|^2 + |\eta_N|^2], \tag{4.79}$$

onde $C > 0$.

Somando as duas últimas desigualdades, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\| \eta_N \|^2 + |||\eta_N|||^2 + \| \omega_N \|^2 + |||\omega_N|||^2] \tag{4.80}$$
$$\leq C[\| \eta_N \|^2 + |||\eta_N|||^2 + \| \omega_N \|^2 + |||\omega_N|||^2]. \tag{4.81}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, temos

$$[\| \eta_N \|^2 + |||\eta_N|||^2 + \| \omega_N \|^2 + |||\omega_N|||^2](t) \leq \overline{C}, \tag{4.82}$$

por (4.74), onde a constante $\overline{C}$ só depende de T.

Estimativa II:

Tomando $v_i = \triangle\eta_{N,t}$ na primeira equação de (4.71) e $v_i = \triangle\omega_{N,t}$ na segunda, obtemos

$$(\eta_{N,t}, \triangle\eta_{N,t}) - (\triangle\eta_{N,t}, \triangle\eta_{N,t}) = (p_1\omega_{N,x}, \triangle\eta_{N,t}) + (q_1\omega_N, \triangle\eta_{N,t}), \tag{4.83}$$

$$(\omega_{N,t}, \triangle\omega_{N,t}) - (\triangle\omega_{N,t}, \triangle\omega_{N,t}) = (p_2\eta_{N,x}, \triangle\omega_{N,t}) + (q_2\eta_N, \triangle\omega_{N,t}). \tag{4.84}$$

Portanto, de (4.83) obtém-se

$$\| \eta_{N,t} \|^2 + |||\eta_{N,t}|||^2 \leq \| p_1 \|_{L_x^\infty(0,1)} \int_0^1 |\omega_{N,x}||\triangle \eta_{N,t}|dx + \| q_1 \|_{L_x^\infty(0,1)} \int_0^1 |\omega_N||\triangle \eta_{N,t}|dx, \tag{4.85}$$

donde, tomando $0 \leq C = max\{\| p_1 \|_{L_x^\infty(0,1)}, \| q_1 \|_{L_x^\infty(0,1)}\}$ e aplicando a desigualdade $ab \leq C(\epsilon)a^2 + \epsilon b^2$, onde $\epsilon, C(\epsilon) > 0$, obtemos

$$\| \eta_{N,t} \|^2 + |||\eta_{N,t}|||^2 \leq C[C(\epsilon)(\| \omega_N \|^2 + |\omega_N|^2) + \epsilon|||\eta_{N,t}|||]. \tag{4.86}$$

Analogamente, de (4.84) obtém-se

$$\| \omega_{N,t} \|^2 + |||\omega_{N,t}|||^2 \leq C[C(\epsilon)(\| \eta_N \|^2 + |\eta_N|^2) + \epsilon|||\omega_{N,t}|||]. \tag{4.87}$$

Fazendo $\epsilon = \frac{1}{2C}$ e somando (4.86) e (4.87), obtemos

$$[\| \eta_{N,t} \|^2 + |||\eta_{N,t}|||^2 + \| \omega_{N,t} \|^2 + |||\omega_{N,t}|||^2] \leq C[\| \omega_N \|^2 + |\omega_N|^2 + \| \eta_N \|^2 + |\eta_N|^2], \tag{4.88}$$

onde $C > 0$. Logo, aplicando a estimativa de energia (4.82), obtemos

$$|||\eta_{N,t}|||^2 + |||\omega_{N,t}|||^2 \leq \overline{C}, \tag{4.89}$$

onde a constante $\overline{C} > 0$ só depende de T.

Segue das estimativas (4.82) e (4.89) que as sequências $(\eta_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(\omega_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(\eta_{N,t})_{N\in\mathbb{N}}$ e $(\omega_{N,t})_{N\in\mathbb{N}}$ são limitadas em $L^\infty(0,T; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1))$, o que nos permite proceder como no Teorema 4.4 e passar o limite no problema aproximado (4.71). A unicidade de soluções, assim como a verificação dos dados iniciais, também são feitas como no Teorema 4.4. $\square$

4.3 Estimativa de Carleman

Nesta seção, provaremos um resultado continuação única para soluções da equação (4.1)-(4.4), ou seja, provaremos o Teorema 4.1. O resultado que apresentamos a seguir, provado em [20], será usado na demonstração:

Lema 4.7. *Seja $\varphi \in C(\boldsymbol{R}^2)$, tal que, para todo $t \in (-T,T)$ fixado, $\varphi = \varphi(.,t) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Além disso, assuma que*

$$\partial_x^2\varphi(t,x) > 0,\ (t,x) \in \overline{Q} \tag{4.90}$$

e

$$|\partial_x\varphi(t,x)| > 0,\ (t,x) \in \overline{Q}, \tag{4.91}$$

onde $Q \subset (0,1) \times (-T,T)$ é um subdomínio com fronteira ∂Q de classe C^2 por partes.

Então, existem constantes $C = C(\varphi, Q) > 0$ e $S = S(\varphi, Q) > 0$, tais que

$$\int_Q (s|\partial_x u|^2 + s^3|u|^2)e^{2s\varphi}dxdt \le C \int_Q |\partial_x^2 u|^2 e^{2s\varphi}dxdt, \tag{4.92}$$

para todo $s > S$ e $u \in C^2(Q)$, tal que $u = \partial_x u = 0$ sobre ∂Q.

Sejam $\mu \in (0,1)$, $\delta > 0$ e

$$\begin{cases} \psi(t,x) = 1 - (x-(1+\delta))^2 - \left(\frac{|t|}{T}\right)^\mu, \\ \varphi(t,x) = e^{\lambda\psi(t,x)} - 1. \end{cases} \tag{4.93}$$

Se fixarmos $\lambda > 0$ suficientemente grande, teremos que φ satisfaz (4.90) e (4.91) para $Q \subset (0,1) \times (-T,T)$. Também definimos

$$Q(\epsilon) = \{(t,x) \in (0,1) \times \mathbb{R}; \varphi(t,x) > \epsilon\}, \tag{4.94}$$

para $\epsilon \ge 0$ e

$$h_\epsilon(t) = 1 + \delta - \left(1 - \frac{1}{\lambda} log(1+\epsilon) - \left(\frac{t}{T}\right)^\mu\right)^{\frac{1}{2}}, \, t > 0. \tag{4.95}$$

Então, para $\lambda > 0$ suficientemente grande e $\epsilon \ge 0$ suficientemente pequeno, temos

$$Q(\epsilon) = \{(t,x) \in (0,1) \times \mathbb{R}; h_\epsilon(|t|) < x < 1\}. \tag{4.96}$$

Podemos verificar diretamente que $(t,x) \in Q(\epsilon)$ implica

$$|t| < T\left(1 - \delta^2 - \frac{1}{\lambda} log(1+\epsilon)\right)^{\frac{1}{\mu}} < T. \tag{4.97}$$

Com as considerações acima, usaremos também a seguinte inequação integral provada em [10]:

Lema 4.8. *Existe uma constante $C = C(\varphi, \epsilon, T) > 0$, tal que*

$$\int_{Q(\epsilon)} \left| \int_0^t |u(\eta, x)| d\eta \right|^2 e^{2s\varphi} dxdt \le C \int_{Q(\epsilon)} |u(t,x)|^2 e^{2s\varphi} dxdt, \tag{4.98}$$

para todo $s > 0$ e $u \in L^2(Q(\epsilon))$.

4.4 Demonstração do resultado principal (Teorema 4.1)

Seja (η, ω) solução do sistema

$$\begin{cases} \eta_t(t,x) - \eta_{xxt}(t,x) = p_1(t,x)\omega_x(t,x) + q_1(t,x)\omega(t,x) & (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \\ \omega_t(t,x) - \omega_{xxt}(t,x) = p_2(t,x)\eta_x(t,x) + q_2(t,x)\eta(t,x) & (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \end{cases} \tag{4.99}$$

com

$$p_i, q_i \in L^\infty((0,T) \times (0,1)), \text{ sendo } i = 1, 2, \tag{4.100}$$

satisfazendo às seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \eta(t,1) = \eta_x(t,1) = \omega(t,1) = \omega_x(t,1) = 0, \text{em } t \in (0,T), \\ \eta(0,x) = \omega(0,x) = 0, \text{em } x \in (0,1). \end{cases} \tag{4.101}$$

Considere as extensões ímpares das funções η, ω, p_i e q_i em $t \in (-T,T)$, usando a mesma notação. Então, temos

$$\begin{cases} \eta_t(t,x) - \eta_{xxt}(t,x) = p_1(t,x)\omega_x(t,x) + q_1(t,x)\omega(t,x) & (t,x) \in (-T,T) \times (0,1), \\ \omega_t(t,x) - \omega_{xxt}(t,x) = p_2(t,x)\eta_x(t,x) + q_2(t,x)\eta(t,x) & (t,x) \in (-T,T) \times (0,1), \end{cases} \tag{4.102}$$

e

$$\begin{cases} \eta(t,1) = \eta_x(t,1) = 0, \text{em } t \in (-T,T), \\ \omega(t,1) = \omega_x(t,1) = 0, \text{em } t \in (-T,T). \end{cases} \tag{4.103}$$

Provaremos o resultado usando a desigualdade de Carleman do Lema 4.7 e a desigualdade integral do Lema 4.8.

Seja ϵ suficientemente pequeno e seja $\chi = \chi(t,x)$, tal que

$$\begin{cases} \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \ 0 \le \chi \le 1, \\ \chi(t,x) = \begin{cases} 1, \ (t,x) \in Q(2\epsilon) \\ 0, \ (t,x) \in Q(0) \backslash Q(\epsilon). \end{cases} \end{cases} \tag{4.104}$$

Assim, se considerarmos $y_1 = \eta\chi$ e $y_2 = \omega\chi$, temos que $\partial_t^k \partial_x^j y_1$ e $\partial_t^k \partial_x^j y_2 \in C([-T,T] \times [0,1])$, com $k = 0, 1$ e $j = 0, 1, 2$. Também temos que, para $i = 1, 2$,

$$y_i = \partial_x y_i = 0 \text{ sobre } \partial Q(0). \tag{4.105}$$

De fato, observe que $y_{1,x} = \eta_x \chi + \eta \chi_x$ e $y_{2,x} = \omega_x \chi + \omega \chi_x$ e $\partial Q(0) \subset \{(t,x) \in [-T,T] \times \{1\}\} \cup Q(0) \backslash Q(\epsilon)$. Pelas condições (4.101), temos que η, ω, η_x e ω_x se anulam em $\{(t,x) \in [-T,T] \times \{1\}\}$ e pela definição (4.104) temos que χ e χ_x se anulam em $Q(0) \backslash Q(\epsilon)$.

Podemos então aplicar a desigualdade de Carleman do Lema 4.7, para as funções $y_{1,t}$

e $y_{2,t}$, obtendo

$$\int_{Q(0)}(s|y_{1,tx}|^2+s^3|y_{1,t}|^2)e^{2s\varphi}dxdt \le C\int_{Q(0)}|y_{1,txx}|^2e^{2s\varphi}dxdt \tag{4.106}$$

e

$$\int_{Q(0)}(s|y_{2,tx}|^2+s^3|y_{2,t}|^2)e^{2s\varphi}dxdt \le C\int_{Q(0)}|y_{2,txx}|^2e^{2s\varphi}dxdt, \tag{4.107}$$

onde $C>0$. Mas sabemos que

$$y_{1,txx}=y_{1,t}-p_1y_{2,x}-q_1y_2+I_1, \tag{4.108}$$

onde

$$I_1=\chi_{txx}\eta-\chi_t\omega+p_1\chi_x\omega+2\chi_{tx}\eta_x+\chi_{xx}\eta_t+\chi_t\eta_{xx}+2\chi_x\eta_{tx} \tag{4.109}$$

e

$$y_{2,txx}=y_{2,t}-p_2y_{1,x}-q_1y_2+I_2, \tag{4.110}$$

onde

$$I_2=\chi_{txx}\omega-\chi_t\eta+p_2\chi_x\eta+2\chi_{tx}\omega_x+\chi_{xx}\omega_t+\chi_t\omega_{xx}+2\chi_x\omega_{tx}. \tag{4.111}$$

Consequentemente, (4.106) e (4.107) podem ser estimados da seguinte forma:

$$\int_{Q(0)}(s|y_{1,tx}|^2+s^3|y_{1,t}|^2)e^{2s\varphi}dxdt \le C\int_{Q(0)}(|y_{1,t}|^2+p_1^2|y_{2,x}|^2+q_1^2|y_2|^2+|I_1|^2)e^{2s\varphi}dxdt \tag{4.112}$$

e

$$\int_{Q(0)}(s|y_{2,tx}|^2+s^3|y_{2,t}|^2)e^{2s\varphi}dxdt \le C\int_{Q(0)}(|y_{2,t}|^2+p_2^2|y_{1,x}|^2+q_2^2|y_1|^2+|I_2|^2)e^{2s\varphi}dxdt, \tag{4.113}$$

onde $C>0$. Como I_1 e I_2 não se anulam somente em $Q(\epsilon)\backslash Q(2\epsilon)$, temos que

$$\int_{Q(0)}|I_i(t,x)|^2e^{2s\varphi}dxdt \le Ce^{4s\epsilon}\max_{(t,x)\in[0,1]\times[-T,T]}|I_i(t,x)|^2 \le Ce^{4s\epsilon}, \tag{4.114}$$

onde $i=1,2$.

Por outro lado, devido às condições (4.101),

$$y_{i,x}(t,x)=\int_0^t y_{i,tx}(l,x)dl \tag{4.115}$$

e

$$y_i(t,x) = \int_0^t y_{i,t}(l,x)dl, \tag{4.116}$$

donde, pelo Lema 4.8, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{Q(0)} |y_{i,x}|^2 e^{2s\varphi} dxdt &= \int_{Q(0)} | \int_0^t y_{i,tx}(l,x)dl|^2 e^{2s\varphi} dxdt \\ &\leq C \int_{Q(0)} |y_{i,tx}(t,x)|^2 e^{2s\varphi} dxdt \end{aligned} \tag{4.117}$$

e

$$\int_{Q(0)} |y_i|^2 e^{2s\varphi} dxdt \leq C \int_{Q(0)} |y_{i,t}(t,x)|^2 e^{2s\varphi} dxdt, \tag{4.118}$$

onde $C > 0$. Combinando as desigualdades (4.112)-(4.114) e (4.117)-(4.118), segue que

$$\begin{aligned}\int_{Q(0)} (s|y_{1,tx}|^2 + s^3|y_{1,t}|^2) e^{2s\varphi} dxdt + \int_{Q(0)} (s|y_{2,tx}|^2 + s^3|y_{2,t}|^2) e^{2s\varphi} dxdt \\ \leq C \int_{Q(0)} (|y_{1,t}|^2 + |y_{1,tx}|^2) e^{2s\varphi} dxdt + Ce^{4s\epsilon} + \\ +C \int_{Q(0)} (|y_{2,t}|^2 + |y_{2,tx}|^2) e^{2s\varphi} dxdt + Ce^{4s\epsilon}.\end{aligned}$$

Tomando $s > 0$ suficientemente grande, podemos absorver os termos integrais da direita da desigualdade pelos termos da esquerda. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{Q(0)} (s|y_{1,tx}|^2 + s^3|y_{1,t}|^2) e^{2s\varphi} dxdt + \int_{Q(0)} (s|y_{2,tx}|^2 + s^3|y_{2,t}|^2) e^{2s\varphi} dxdt \\ \leq +Ce^{4s\epsilon}.\end{aligned}$$

Como $Q(3\epsilon) \subset Q(0)$, temos

$$\begin{aligned} e^{6s\epsilon} \int_{Q(3\epsilon)} s^3 |y_{1,t}|^2 dxdt + e^{6s\epsilon} \int_{Q(3\epsilon)} s^3 |y_{2,t}|^2 dxdt \\ \leq \int_{Q(3\epsilon)} (s|y_{1,tx}|^2 + s^3|y_{1,t}|^2) e^{2s\varphi} dxdt + \int_{Q(03\epsilon)} (s|y_{2,tx}|^2 + s^3|y_{2,t}|^2) e^{2s\varphi} dxdt \\ \leq +Ce^{4s\epsilon},\end{aligned}$$

para todo $s > 0$ suficientemente grande, ou seja,

$$\int_{Q(3\epsilon)} |y_{1,t}|^2 dxdt + \int_{Q(3\epsilon)} |y_{2,t}|^2 dxdt \leq Cs^{-3} e^{-2s\epsilon}. \tag{4.119}$$

Fazendo $s \to \infty$, obtemos $y_{i,t}(t,x) = 0$ em $Q(3\epsilon)$. Segue então de (4.3) que $y_i(t,x) = 0$, para $(t, x) \in Q(3\epsilon)$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, vemos que $y_i(t, x) = 0$ se

$$(1+\delta) - (1 - (t/T)^{\mu})^{1/2} < x < 1, \tag{4.120}$$

$$0 < t < T(1-\delta^2)^{1/2}. \tag{4.121}$$

Sendo δ arbitrário, temos que $y_i(t, x) = 0$, se $1 - (1 - (t/T)^{\mu})^{1/2} < x < 1$ e $0 < t < T$. Como $\mu \in (0, 1)$ também é arbitrário, podemos tomar μ tendendo a 0 e concluir que $y_i(t, x) = 0$, se $0 < t < T$ e $0 < x < 1$.

Bibliografia

[1] Barreto, R. K., De Caldas, C. S., Gamboa, P., and Limaco, J. Existence of solutions to the Rosenau and Benjamin–Bona–Mahony equation in domains with moving boundary. *Electronic Journal of Differential Equations* (2004), Paper No. 35, 12pp.

[2] Bona, J. L., Chen, M., and Saut, J.-C. Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. II. The nonlinear theory. *Nonlinearity 17* (2004), 925.

[3] Boussinesq, J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal de vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, Liouvilles. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées. 17* (1872), 55–108.

[4] Capistrano-Filho, R. A., Pazoto, A. F., and Rosier, L. Control of a Boussinesq system of KdV-KdV type on a bounded interval. *arXiv preprint arXiv:1709.09924* (2017).

[5] Davila, M., and Menzala, G. P. Unique continuation for the Benjamin–Bona–Mahony and Boussinesq's equations. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA 5* (1998), 367–382.

[6] Dolecki, S., and Russell, D. L. A general theory of observation and control. *SIAM Journal on Control and Optimization 15* (1977), 185–220.

[7] dos Santos, A. L. C., da Silva, P. N., and Vasconcellos, C. F. Entire functions related to stationary solutions of the Kawahara equation. *Electronic Journal of Differential Equations* (2016), Paper No. 43, 13pp.

[8] Glass, O., and Guerrero, S. On the controllability of the fifth-order Korteweg–de Vries equation. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire 26* (2009), 2181–2209.

[9] Hörmander, L. *Linear partial differential operators*, vol. 116. Springer, 2013.

[10] Isakov, V. *Inverse source problems.* Mathematical Surveys and Monographs, 34. American Mathematical Society, 1990.

[11] Isakov, V. Carleman type estimates in an anisotropic case and applications. *Journal of Differential Equations 105* (1993), 217–238.

[12] Límaco, J., Clark, H., and Medeiros, L. On equations of Benjamin–Bona–Mahony type. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 59* (2004), 1243–1265.

[13] Lions, J.-L. *Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués (Tome 1, 2).* Recherches en Mathématiques Appliquées. Masson, 1988.

[14] Lions, J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM review 30* (1988), 1–68.

[15] Micu, S., Ortega, J. H., Rosier, L., and Zhang, B.-Y. Control and stabilization of a family of Boussinesq systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems 24* (2009), 273–313.

[16] Pazoto, A. F., and Rosier, L. Stabilization of a boussinesq system of KdV–KdV type. *Systems & Control Letters 57* (2008), 595–601.

[17] Rosier, L. Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 2* (1997), 33–55.

[18] Saut, J.-C., and Scheurer, B. Unique continuation for some evolution equations. *Journal of Differential Equations 66* (1987), 118–139.

[19] Tataru, D. Unique continuation for solutions to PDE's; between Hormander's theorem and Holmgren's theorem. *Communications in Partial Differential Equations 20* (1995), 855–884.

[20] Yamamoto, M. One unique continuation for a linearized Benjamin–Bona–Mahony equation. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems 11* (2003), 537–543.

[21] Zhang, X., and Zuazua, E. Unique continuation for the linearized Benjamin-Bona-Mahony equation with space-dependent potential. *Mathematische Annalen 325* (2003), 543–582.