UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MISTURAS VISCOELÁSTICAS COM MEMÓRIA E TERMOVISCOELÁSTICAS COM EFEITO TÉRMICO DE CATTANEO.

Leonardo Henry Alejandro Aguilar

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Co-orientador: Pedro Gamboa Romero

Rio de Janeiro

26 de Outubro de 2018

MISTURAS VISCOELÁSTICAS COM MEMÓRIA E TERMOVISCOELÁSTICAS COM EFEITO TÉRMICO DE CATTANEO.

Leonardo Henry Alejandro Aguilar

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Co-orientador: Pedro Gamboa Romero

Rio de Janeiro

26 de Outubro de 2018

CIP - Catalogação na Publicação

A366m

Alejandro Aguilar, Leonardo Henry
Misturas viscoelásticas com memória e termoviscoelásticas com efeito térmico de Cattaneo / Leonardo Henry Alejandro Aguilar. -- Rio de Janeiro, 2018.
83 f.

Orientador: Jaime Edilberto Muñoz Rivera.
Coorientador: Pedro Gamboa Romero.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Matemática, 2018.

1. Preliminares. 2. Mistura de sólidos viscoelásticos com memória. 3. Decaimento Exponencial. 4. Mistura de sólidos com efeito térmico de Cattaneo. I. Muñoz Rivera, Jaime Edilberto, orient. II. Gamboa Romero, Pedro, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MISTURAS VISCOELÁSTICAS COM MEMÓRIA E TERMOVISCOELÁSTICAS COM EFEITO TÉRMICO DE CATTANEO.

Leonardo Henry Alejandro Aguilar

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Dr. JAIME E. MUÑOZ RIVERA - IM / UFRJ

Co-orientador, Dr. PEDRO GAMBOA ROMERO - IM / UFRJ

Dr. ADÁN CORCHO FERNANDEZ - IM / UFRJ

Dr. GUSTAVO PERLA MENZALA - LNCC - IM / UFRJ

Dr. RUY COIMBRA CHARÃO - UFSC

Dr. MARCIO VIOLANTE FERREIRA - IME-RJ

Rio de Janeiro

26 de Outubro de 2018

Dedicado para todos os peruanos
que mostram seu talento, esforço e
perseverança fora do seu país.

Agradecimentos

Eu compartilhei momentos agradáveis com muitas pessoas ao longo dos anos. Agradeço:

1. Aos meus pais Ana e Juan, que sempre lutaram pela minha educação.
2. À Universidade Federal do Rio de Janeiro, por me dar a oportunidade e confiança de fazer o mestrado e o doutorado.
3. A meu orientador Jaime Muñoz, pela eficiência e por compartilhar suas experiências na sua área de pesquisa.
4. A meu co-orientador Pedro Gamboa, pela eficiência, dedicação e confiança.
5. Aos professores do IM - UFRJ, pelas lições aprendidas.
6. A meus colegas e amigos da UFRJ.
7. À CAPES and CNPq, pela ajuda financeira.
8. Por fim, agradeço todos os que diretamente ou indiretamente contribuíram na realização da tese.

Resumo

Nesta tese estudamos o problema de mistura de materiais com memória. A teoria de misturas foi bem desenvolvida nos últimos anos e resultados sobre a boa-colocação do modelo linear, assim como do modelo não linear são bem conhecidos atualmente. Uma das principais características destes modelos é que o acoplamento das equações é de segunda ordem. Acreditamos que esta característica pouco usual implica em propriedades importantes.

Em todos os modelos com dissipação parcial, isto é, os mecanismos dissipativos não são efetivos em todas as equações, podem acontecer três situações com relação ao comportamento assintótico das soluções. 1) O modelo tem decaimento exponencial, 2) O modelo decai polinomialmente,

3) O modelo fica oscilante para algum subespaço do espaço de fase.

Um dos principais resultados desta tese é mostrar que os modelos de misturas com dissipação parcial não apresentam a segunda opção citada acima. Ou seja, provaremos que o sistema é exponencialmente estável se, e somente se, o modelo é fortemente estável.

Estudaremos também modelos de misturas termoelásticas com lei de Cattaneo. Nela provamos a estabilidade exponencial quando as matrizes de acoplamento possuem posto igual ao número de componentes da mistura.

Palavras-chave: Mistura de materiais, Material viscoelástico, Estabilidade exponencial, Estabilidade polinomial, Lei de Cattaneo.

Abstract

In this thesis we study the problem of materials mixture with memory. The mixtures theory has been well developed in recent years and results on the well posedness of the linear model as well as for the nonlinear model are well known today. One of the main characteristics of these models is that the coupling of the equations are of second order. We believe that this unusual feature allow to deduce important properties.

In all models with partial dissipation, that is with partial dissipative mechanisms which are not effective in all equations, three situations may occur with respect to asymptotic behavior. 1) The model has exponential decay, 2) The model decays polynomially, 3) The model oscillates for some subspace of the face space.

One of the main results of this thesis is to show that the models of mixtures with partial dissipation do not present the second option mentioned above. This is to prove that the system is exponentially stable if and only if the model is strongly stable.

We will also study models of thermoelastic mixtures with Cattaneo's law. In it we prove the exponential stability when the coupling matrices have rank equal to the number of components of the mixture.

Keywords: Mixture of materials, Viscoelastic material, Exponential stability, Polynomial stability, Cattaneo's law.

Introdução

Nos últimos anos, um crescente interesse tem sido direcionado para entender as chamadas de teorias termomecânicas não-clâssicas de materiais como materiais micromórficos, materiais porosos, etc. Uma delas é a mistura de materiais. A origem da formulação moderna das teorias termomecânicas contínuas de mistura de sólidos remonta aos trabalhos de [6], [7], [10], [11], [20], [21] and [27]. Estudos matemáticos para esta teoria sobre existência, unicidade, dependência contínua e comportamento assintótico foram estudadas em [4], [5], [13], [25], [26], [31] and [34]. Acreditamos que os estudos matemáticos e físicos são questões necessárias para esclarecer o alcance de sua aplicabilidade.

Uma das principais questões relativas às vibrações nos modelos de sistemas estruturais flexíveis é a questão da estabilização da estrutura, isto é, espera-se evitar um sistema de efeitos de ressonância e querer garantir o decaimento da energia total, exponencial ou pelo menos polinomial. Uma maneira de obter um efeito dissipativo e assim um decaimento da energia do sistema é adicionar uma força de amortecimento. Existem vários tipos de amortecimentos, como amortecimentos na fronteira, amortecimentos internos e amortecimentos localizados. É físicamente relevante ter em consideração os efeitos térmicos nas estruturas flexíveis. Quando o efeito térmico é governado pela lei do Fourier a temperatura tem velocidade infinita de propagação (Equação do Calor), mas esta propriedade do modelo não é consistente com a realidade, onde o aquecimento ou resfriamento de uma estrutura flexível geralmente levará algum tempo. Por outro lado, quando o efeito térmico é governado pela lei de Cattaneo (ver [3] e [30]), a temperatura tem velocidade finita de propagação. Observa-se experimentalmente que a baixa temperatura o calor se propaga como uma onda térmica. Este fenômeno é chamado de second sound, por analogia com a propagação do som no ar.

No primeiro capítulo, faz-se um breve resumo dos principais conceitos e resultados utilizados nos capítulos seguintes. No segundo capítulo, pesquisa-se o sistema unidimensional modelando as vibrações para uma mistura de n sólidos viscoelásticos interagindo continuamente com configuração de referência sobre $[0, \ell]$, onde a viscoelasticidade é dada por um termo memória e é chamada de viscoelasticidade de tipo Boltzmann. Primeiro introduzimos o problema com história associado ao problema original e demonstramos sua boa-colocação estabelecendo a existência e unicidade de soluções.

No terceiro capítulo, no caso quando a dissipação é total, demonstramos que o correspondente semigrupo é exponencialmente estável. Mas o resultado principal do capítulo e da tese apresenta-se quando a dissipação é parcial, pois aí demonstramos que o correspondente semigrupo é exponencialmente estável se, e somente se, o semigrupo é fortemente estável. Em particular, este resultado implica a falta de estabilidade polinomial do semigrupo.

No quarto capítulo, pesquisa-se o sistema unidimensional modelando as deformações termomecânicas para uma mistura de n sólidos termoviscoelásticos interagindo continuamente com configuração de referência sobre $[0, \ell]$ e com n temperaturas diferentes, onde a viscoelasticidade é de tipo Kelvin-Voigt e o efeito térmico é governado pela lei de Cattaneo. Primeiro estabelecemos a boa-colocação do sistema e depois demonstramos a estabilidade exponencial do correspondente semigrupo para um conjunto de condições iniciais e de contorno. As condições de contorno correspondem a uma estrutura rígidamente fixada com fluxo de calor zero sobre a fronteira.

Conteúdo

Notações

1. $\overline{a+i\,b} = a - i\,b$, para todo $a\,,\, b \in \mathbb{R}\,,\; i = \sqrt{-1}\,.$

2. $\overline{\mathcal{Z}} := \left(\overline{\mathcal{Z}_1}, \overline{\mathcal{Z}_2}, \cdots, \overline{\mathcal{Z}_n}\right)^T \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, onde $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \cdots, \mathcal{Z}_n)^T \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

3. $\mathcal{Z}^* := \overline{\mathcal{Z}}^T = \left(\overline{\mathcal{Z}_1}, \overline{\mathcal{Z}_2}, \cdots, \overline{\mathcal{Z}_n}\right) \in \mathbb{C}^{1\times n}$, onde $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \cdots, \mathcal{Z}_n)^T \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

4. $\overline{A} := (\overline{a}_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, onde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

5. $A^* := (\overline{a}_{ij})^T \in \mathbb{C}^{n\times m}$, onde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

6. $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \{\mathcal{A} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}\,;\, \mathcal{A}$ é linear e contínuo$\}$.

7. $\rho(\mathcal{A}) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda\, I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\right\}$, onde $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é um operador linear fechado.

8. $\sigma(\mathcal{A}) := \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})\,.$

9. $\|U\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|U(t)\|_X^p\, dt\right)^{1/p}$, $1 \le p < +\infty$, onde $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach.

10. $\|U\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup\limits_{0<t<T} ess\, \|U(t)\|_X$, onde $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços de Sobolev e os teoremas de imersão.

Definição 1.1. *Sejam* X *um espaço normado,* $B(\cdot,\cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ *e* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *aplicações.*

1. $B(\cdot,\cdot)$ *é uma* **forma sesquilinear,** *quando para todo* $u, v, w \in X$ *e para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *verificam-se*

   (a) $B(\alpha\, u + \beta\, w, v) = \alpha\, B(u,v) + \beta\, B(w,v)$

   (b) $B(u, \alpha\, v + \beta\, w) = \overline{\alpha}\, B(u,v) + \overline{\beta}\, B(u,w)$.

2. *Se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *então* $B(\cdot,\cdot)$ *é chamada de* **forma bilinear**.

3. f *é chamada de* **antilinear,** *quando* $f(\alpha\, u + v) = \overline{\alpha}\, f(u) + f(v)$, $\forall\, u, v \in X$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$.

Observações 1.1. *Se* f *é antilinear e* $g \in X'$, *então* $\overline{f} \in X'$ *e* $\overline{g}$ *é antilinear, onde* X *é um espaço normado complexo.*

Teorema 1.1 (Teorema de Representação de Riesz)**.** *Sejam* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ *um espaço de Hilbert. Se* $f \in H'$, *então existe um único* $v_f \in H$ *tais que* $f(u) = \langle u, v_f\rangle_H$, *para todo* $u \in H$ *e* $\|f\|_{H'} = \|v_f\|$. *Além disso, para cada* $v \in H$, *a aplicação* $g_v(u) = \langle u, v\rangle_H$, *para todo* $u \in H$ *pertence a* H' *e* $\|g_v\|_{H'} = \|v\|$.

Demonstração. Ver [36]. □

Definição 1.2. *Sejam* X *um espaço normado e* $B(\cdot,\cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ *uma forma sesquilinear.*

1. $B(\cdot,\cdot)$ *é contínua ou limitada, quando existe uma* $M > 0$ *tal que* $|B(u,v)| \leq M\|u\|\,\|v\|$, *para todo* $u, v \in X$.

2. $B(\cdot,\cdot)$ *é coerciva, quando existe uma* $C > 0$ *tal que* $B(u,u) \geq C\|u\|^2$, *para todo* $u \in X$.

Teorema 1.2 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sejam* H *um espaço de Hilbert e* $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma forma sesquilinear, contínua e coerciva.*
Então existe um único isomorfismo de espaços de Hilbert $T : H \longrightarrow H$ *tal que* $B(u,v) = \langle u, T\, v\rangle_H$, *para todo* u , $v \in H$.

Demonstração. Ver [36]. □

Corolário 1.1 (Caso real)**.** *Sejam* H *um espaço de Hilbert real e* $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma forma sesquilinear, contínua e coerciva.*
Se $f \in H'$, *então existe uma única* $u \in H$ *tal que* $B(u,v) = f(v)$, *para todo* $v \in H$.

Demonstração. Ver [12]. □

Corolário 1.2 (Caso complexo)**.** *Sejam* H *um espaço de Hilbert complexo e* $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma forma sesquilinear, contínua e coerciva.*
Se $f : H \longrightarrow \mathbb{C}$ *é uma aplicação antilinear, então existe uma única* $u \in H$ *tal que* $B(u,v) = f(v)$, *para todo* $v \in H$.

Demonstração. Ver [36]. □

Teorema 1.3 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $1 \leq p < +\infty$.
Então existe uma constante $C > 0$, *que depende só de* Ω *e* p , *tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\, \|\nabla\, u\|_{L^p(\Omega)}\, ,\ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)\, .$$

Demonstração. Ver [12]. □

Teorema 1.4 (Regularidade Elítica)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto regular,* $f \in L^2(\Omega)$ *e* L *um operador diferencial elítico de ordem* $2\,m$, $m \in \mathbb{N}$.
Se v *é solução de* $L\,u = f$ *no sentido distribucional, então* $v \in H^{2\,m}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [2]. □

Corolário 1.3. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto regular e* $f \in L^2(\Omega)$.
Se v *é solução de* $\begin{cases} -\Delta\, u = f & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$, *então*

$$v \in H^2(\Omega) \quad e \quad \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C\, \|f\|_{L^2(\Omega)}\, , \quad \text{onde} \ \ C > 0\, .$$

Demonstração. Ver [2]. □

Definição 1.3. *Denotemos por* $L^2_g\left(0,+\infty;H^1_0(0,\ell)\right)$ *o espaço das funções de quadrado integrável, com peso* g *e com valores no espaço* $H^1_0(0,\ell)$ *. Isto é,*

$$L^2_g\left(0,+\infty;H^1_0(0,\ell)\right) := \left\{ v:(0,+\infty)\longrightarrow H^1_0(0,\ell)\ ;\ \int_0^{+\infty} g(\tau)\int_0^{\ell} |v_x|^2\, dx\, d\tau < \infty \right\}.$$

Este espaço munido do produto interno

$$(v,w)_{L^2_g} := \int_0^{+\infty} g(\tau)\int_0^{\ell} v_x\,\overline{w}_x\, dx\, d\tau\,,$$

é um Espaço de Hilbert.

Teorema 1.5 (Inmersão Contínua). *Tem-se os seguintes casos:*

1. **Caso:** $n\in\mathbb{N}$ *com* $n\geq 2$, $m\in\mathbb{N}$ *e* $1\leq p<+\infty$.

   Verificam-se

   (a) *Se* $m\,p<n$ *e* $p\leq q\leq \dfrac{n\,p}{n-m\,p}$ *, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.

   (b) *Se* $m\,p=n$ *e* $p\leq q<+\infty$ *, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.

   (c) *Se* $m\,p>n$ *e* $k<m-\dfrac{n}{p}\leq k+1$, k *é um inteiro não negativo, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *, onde*

      i. $0<\lambda\leq m-k-\dfrac{n}{p}$ *se* $m-k-\dfrac{n}{p}<1$,

      ii. $0<\lambda<1$ *se* $m-k-\dfrac{n}{p}=1$.

2. **Caso:** $n=1$, $m\in\mathbb{N}$ *e* $1\leq p<+\infty$.

   Verificam-se

   (a) *Se* $p=1$ *, então* $W^{m,1}(\mathbb{R})\hookrightarrow C^{m-1}_b(\mathbb{R})$.

   (b) *Se* $1<p<+\infty$ *e* $0<\lambda\leq 1-\dfrac{1}{p}$ *, então* $W^{m,p}(\mathbb{R})\hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\mathbb{R})$.

3. **Caso:** $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$ *e* $p=+\infty$.

   Então $W^{m,+\infty}(\mathbb{R}^n)$ *é isomorfo a* $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [1]. □

Teorema 1.6 (Inmersão Contínua com domínio limitado). *Tem-se os seguintes casos:*

1. **Caso:** $n\in\mathbb{N}$ *com* $n\geq 2$, $m\in\mathbb{N}$ *e* $1\leq p<+\infty$.

   Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de clase* C^m *. Verificam-se*

(a) *Se* $m\,p < n$ *e* $1 \leq q \leq \dfrac{n\,p}{n - m\,p}$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

(b) *Se* $m\,p = n$ *e* $1 \leq q < +\infty$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

(c) *Se* $m\,p > n$ *e* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k + 1$, k *é um inteiro não negativo, então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, *onde*

i. $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$,

ii. $0 < \lambda < 1$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$.

2. **Caso:** $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto limitado. Verificam-se*

(a) *Se* $p = 1$, *então* $W^{m,1}(I) \hookrightarrow C^{m-1}(\overline{I})$.

(b) *Se* $1 < p < +\infty$ *e* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$, *então* $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\overline{I})$.

3. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $p = +\infty$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^m .

Então $W^{m,+\infty}(\Omega)$ *ísomorfo a* $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [1]. □

Corolário 1.4. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $m \in \mathbb{N}$.
Então $W_0^{m,+\infty}(\Omega)$ *é isomorfo a* $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [1]. □

1.2 C_o- semigrupos e Estabilização.

Nesta seção, todos os espaços vectoriais estão definidos sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.4. *Seja* X *um Espaço de Banach. Uma família de operadores lineares e limitados* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ *é chamado de Semigrupo em* X , *quando*

1. $S(0) = I$, *onde* I *é o operador identidade de* $\mathcal{L}(X)$.

2. $S(t+s) = S(t)\,S(s)$, $\forall\, t, s \geq 0$.

Definição 1.5. *Seja* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X .
O operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *definido por*

1. $\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in X : \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\,u - u}{t} \quad \textit{existe} \right\}$

2. $A\,u = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\,u - u}{t}\,, \; \forall\, u \in \mathcal{D}(A)\,,$

é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Teorema 1.7. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *semigrupos em* X . *Se* $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{T(t) - I}{t} = A = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{S(t) - I}{t}$, *então* $T(t) = S(t)\,, \; \forall\, t \geq 0\,.$

Demonstração. Ver [32]. □

Observações 1.2. 1. $\mathcal{D}(A) = \{u \in X : A\,u \in X\}\,.$

2. $S(t) = e^{t\,A}\,, \forall\, t \geq 0$ *é um semigrupo em* X *com gerador infinitesimal* A , *onde* $A \in \mathcal{L}(X)\,.$

Definição 1.6. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *um semigrupo em* X .
$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *é chamado de uniformemente contínuo, quando* $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0\,.$

Teorema 1.8. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *um semigrupo em* X .
$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *é uniformemente contínuo se, e somente se,* $S(t) = e^{t\,A}$, $\forall\, t \geq 0$, *para algúm* $A \in \mathcal{L}(X)\,.$

Demonstração. Ver [32]. □

Definição 1.7. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *um semigrupo em* X .

1. $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *é chamado de classe* C_0 *ou* C_0- *semigrupo, quando* $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} S(t)u = u, \, \forall u \in X.$

2. $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *é chamado de fortemente contínuo, quando* $\lim\limits_{t \longrightarrow r} S(t)\,u = S(r)\,u\,, \forall\, u \in X$.

Proposição 1.1. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *um semigrupo em* X .
$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *é um* C_0- *semigrupo se, e somente se, é fortemente contínuo.*

Demonstração. Ver [32]. □

Teorema 1.9. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo. Verificam-se*

1. $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \dfrac{ln\,\|S(t)\|}{t} = \inf\limits_{t > 0} \dfrac{ln\,\|S(t)\|}{t} := \omega_0\,.$

2. *Para todo* $\omega > \omega_0$, *existe uma constante* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\| \leq M\,e^{\omega\,t}\,, \; \forall\, t \geq 0\,.$

Demonstração. Ver [32]. □

Teorema 1.10 (Hille - Yosida)**.** *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador lineae não limitado.*
A *é o gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações se, e somente se,*

1. A *é fechado e* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *.*
2. $\mathbb{R}_+ \subset \varrho(A)$ *e* $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\lambda}\,,\ \forall\, \lambda > 0\,.$

Demonstração. Ver [32]. □

Teorema 1.11 (Lumer-Phillips)**.** *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear, densamente definido.*

1. *Se* A *é dissipativo e existe um* $\lambda_0 > 0$ *tal que* $Im\,(\lambda_0\, I - A) = X$ *, então* A *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações.*
2. *Se* A *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações, então* A *é dissipativo e* $Im\,(\lambda\, I - A) = X\,,\ \forall\, \lambda > 0\,.$

Demonstração. Ver [32]. □

Corolário 1.5. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear, fechado e densamente definido.*
Se A *e* A^* *são dissipativos, então* A *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações.*

Demonstração. Ver [32]. □

Teorema 1.12. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear dissipativo com* $Im\,(I - A) = X$ *. Se* X *é reflexivo, então* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *.*

Demonstração. Ver [32]. □

Teorema 1.13. *Sejam* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert e* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *um operador linear densamente definido. Se* $\mathcal{A}$ *é dissipativo e* $0 \in \rho(\mathcal{A})$ *, então* $\mathcal{A}$ *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações sobre* $\mathcal{H}$ *.*

Demonstração. Ver [28]. □

Definição 1.8. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Diz-se que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é exponencialmente estável, quando existem constantes* $\mu > 0$ *e* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{-\mu\, t}\,,\ \forall\, t \geq 0$.

Definição 1.9. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear. A Cota Superior do Espectro de* T, *denotado por* $\omega_\sigma(T)$, *é o valor*

$$\omega_\sigma(T) := \sup\{Re\,\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}\,.$$

Definição 1.10. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *O Tipo do Semigrupo gerado por* A, *denotado por* $\omega_0(A)$, *é o valor*

$$\omega_0(A) := \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{ln\,\|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{ln\,\|S(t)\|}{t}\,.$$

Proposição 1.2. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo de contrações com gerador infinitesimal* A.
Se $\omega_0(A) = 0$, *então* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1\,,\ \forall\, t > 0$.

Demonstração. Ver [16]. □

Lema 1.1. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Então*

1. $\omega_\sigma(A) \leq \omega_0(A)$.

2. $R_\sigma(S(t)) = e^{\omega_0(A)\, t}\,,\ \forall\, t > 0$.

Demonstração. Ver [16]. □

Teorema 1.14 (Gearhart - Pruss)**.** *Seja* $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo de contrações sobre um Espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *e com gerador infinitesimal* $\mathcal{A}$.
O semigrupo $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *é exponencialmente estável se, e somente se, se verificam as seguintes afirmações*

1. $i\,\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$,

2. *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $\left\|(i\,\lambda\, I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C\,,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver [18]. □

Teorema 1.15 (Huang)**.** *Seja* $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo sobre un Espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *e com gerador infinitesimal* $\mathcal{A}$ *.*
O semigrupo $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *é exponencialmente estável se, e somente se, se verificam as seguintes afirmações*

1. $\sup\{Re\,\lambda \;:\; \lambda\in\sigma(\mathcal{A})\}<0\,,$

2. $\sup_{Re\,\lambda\geq 0}\left\|(\lambda\, I-\mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}<\infty\,.$

Demonstração. Ver [24]. □

Teorema 1.16 (Borichev - Tomilov)**.** *Seja* $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo limitado sobre un Espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *e com gerador infinitesimal* $\mathcal{A}$ *, tal que* $i\,\mathbb{R}\subset\varrho(\mathcal{A})$ *.*
Então, para uma constante fixa $\alpha>0$ *, as seguintes afirmações são equivalentes*

1. *Existe uma constante* $C>0$ *tal que* $\dfrac{1}{|\lambda|^{\alpha}}\left\|(i\,\lambda\, I-\mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leq C\,,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\,.$

2. *Existe uma constante* $C>0$ *tal que* $\left\|\mathcal{S}(t)\,\mathcal{A}^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leq\dfrac{C}{t^{1/\alpha}}\,,\ \forall\, t>0\,.$

Demonstração. Ver [9]. □

1.3 Matrizes hermitianas e os teoremas de diagonalização.

Definição 1.11. *Seja* $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ *uma matriz. Definem-se*

1. $\mathcal{A}$ *é dita Hermitiana, quando* $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$ *.*

2. $\mathcal{A}$ *é dita simêtrica, quando* $\mathcal{A}=\mathcal{A}^T$ *.*

3. $\mathcal{A}$ *é dita normal, quando* $\mathcal{A}\,\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\,\mathcal{A}$ *.*

4. $\mathcal{A}$ *é dita unitária, quando* $\mathcal{A}^*\mathcal{A}=I$ *.*

5. $\mathcal{A}$ *é dita ortogonal, quando* $\mathcal{A}^T\mathcal{A}=I$ *.*

6. $\mathcal{A}$ *é dita semidefinida positiva, quando* $\mathcal{A}$ *é Hermitiana e* $z^*\,\mathcal{A}\,z\geq 0\,,\ \forall\,z\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ *.*

7. $\mathcal{A}$ *é dita semidefinida negativa, quando* $-\mathcal{A}$ *é semidefinida positiva.*

8. $\mathcal{A}$ *é dita definida positiva, quando* $\mathcal{A}$ *é Hermitiana e* $z^*\,\mathcal{A}\,z>0\,,\ \forall\,z\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ *.*

9. $\mathcal{A}$ *é dita definida negativa, quando* $-\mathcal{A}$ *é definida positiva.*

Teorema 1.17. *A matriz* $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *é hermitiana se, e somente se, pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita*

1. $z^* \mathcal{A}\, z \in \mathbb{R}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}^n$.
2. $\mathcal{A}$ *é normal e tem apenas autovalores reais.*
3. $S^* \mathcal{A}\, S$ *é hermitiana, para todo* $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Demonstração. Ver [23], página 228 . □

Teorema 1.18 (Caracterização)**.** *Seja* $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *uma matriz hermitiana. Verificam-se*

1. $\mathcal{A}$ *é definida positiva se, e somente se, todos os seus autovalores são positivos.*
2. $\mathcal{A}$ *é semidefinida positiva se, e somente se, todos os seus autovalores são não negativos.*

Demonstração. Ver [23], página 230 . □

Teorema 1.19. *Sejam* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrizes semidefinidas positivas (definidas positivas). Então todo autovalor de* $\mathcal{A}\mathcal{B}$ *é não negativo (positivo).*

Demonstração. Ver [8], página 424 . □

Teorema 1.20. *Seja* $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *uma matriz simêtrica. São equivalentes*

1. $\mathcal{A}$ *é definida positiva.*
2. *Existe uma constante* $C_0 > 0$ *tal que* $z^T \mathcal{A}\, z \geq C_0\ |z|^2$, *para todo* $z \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver [23]. □

Teorema 1.21. *Se* $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *então existe um* $\delta > 0$ *tal que* $(A + \epsilon\, I)$ *é não-singular, sempre que* $\epsilon \in \mathbb{C}$ *e* $0 < |\epsilon| < \delta$.

Demonstração. Ver [23], página 54 . □

Teorema 1.22 (Rayleigh)**.** *Seja* $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *uma matriz hermitiana.*
Se λ_{min} *e* λ_{max} *são o menor e o maior autovalor de* $\mathcal{A}$ *respectivamente, então*

$$\lambda_{min}\ |z|^2 \leq z^* \mathcal{A}\, z \leq \lambda_{max}\ |z|^2\ , \quad \textit{para todo} \quad z \in \mathbb{C}^n\ .$$

Demonstração. Ver [23], página 234 . □

Teorema 1.23. *Sejam* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *uma matiz semidefinida positiva e* $x \in \mathbb{C}^n$*.*
Então $x^* A\, x = 0$ *se, e somente se,* $A\, x = O$ *.*

Demonstração. Ver [23], página 431 . □

Teorema 1.24. *Sejam* $\kappa \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ *e* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *uma matriz semidefinida positiva. Verificam-se*

1. *Existe uma única matriz* $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *semidefinida positiva tal que* $B^{\kappa} = A$ *.*
2. *Existe um polinômio* $p \in \mathbb{R}[s]$ *tal que* $B = p(A)$ *. Além disso,* B *comuta com qualquer matriz que comuta com* A *.*
3. $rank(A) = rank(B)$ *.*
4. *Se* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *, então* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *.*

Demonstração. Ver [23], página 439 . □

Teorema 1.25. *Sejam* $\mathcal{A}$ *,* $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrizes hermitianas tal que* $\mathcal{A}$ *é definida positiva.*
Então existe uma matriz não singular $\mathcal{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tais que*

$$\mathcal{P}^* \mathcal{A}\, \mathcal{P} = I \quad e \quad \mathcal{P}^* \mathcal{B}\, \mathcal{P} \ \text{é diagonal.}$$

Demonstração. Ver [8], página 423 . □

Teorema 1.26 (Diagonalização Simultánea)**.** *Seja* $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ *uma família não-vazia de matrizes normais.*
$\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ *é uma família comutativa se, e somente se, existe uma matriz unitária* $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que* $U^*\, \mathcal{A}\, U$ *é uma matriz diagonal, para todo* $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ *.*
Isto é, para qualquer $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{F}$ *e para qualquer ordem do seus autovalores* $\lambda_1 , \dots , \lambda_n$ *, existe uma matriz unitária* $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que*

$$U^*\, \mathcal{A}_0\, U = diag(\lambda_1 , \dots , \lambda_n) \quad e \quad U^*\, \mathcal{B}\, U \ \text{é uma matriz diagonal, para todo } \mathcal{B} \in \mathfrak{F} .$$

Demonstração. Ver [23], página 135 . □

Capítulo 2

Mistura de sólidos viscoelásticos com memória.

2.1 Introdução.

Neste capítulo estudamos o sistema unidimensional modelando as vibrações para uma mistura de n sólidos viscoelásticos interagindo continuamente com configuração de referência sobre $[0,\ell]$, onde a viscoelasticidade é dada por um termo memória e é chamada de viscoelasticidade de tipo Boltzmann. Cada sólido do modelo é flexível, uniforme (a massa por unidade de comprimento é constante) e homogêneo (sem força externa de perturbação).

Para todo $i = 1, \cdots, n$, denotamos por $U^i := U^i(x_i, t)$ o deslocamento transversal das partículas do $i-$ sólido da mistura, com densidade de massa ρ_i e ocupando o intervalo finito $x_i \in [0,\ell]$ no intervalo de tempo $t \in [0, +\infty)$.

Assumimos que no tempo $t = 0$, as partículas consideradas ocupam a mesma posição, isto é,

$$x = x_i\,, \quad \text{para todo} \quad i = 1, \cdots, n\,.$$

Então podemos assumir que

$$U^i : [0,\ell] \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad \text{para todo} \quad i = 1, \cdots, n\,.$$

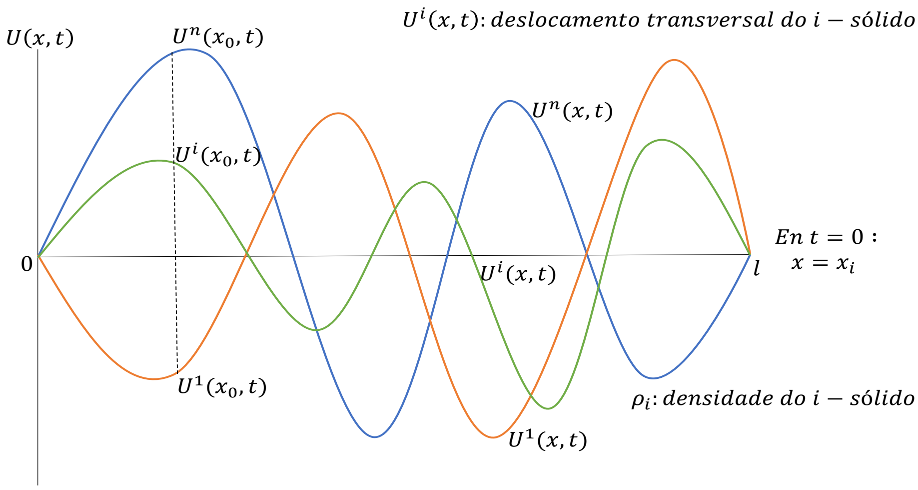
Por outro lado, pelo Princípio da Superposição do Boltzmann, a relação tensão-deformação que caracteriza a viscoelasticidade é dada por

$$\sigma_{ij} := a_{ij}\, U_x^j - b_{ij} \int_0^t g(t-\tau)\, U_x^j(\cdot, \tau)\, d\tau\,, \quad \text{para todo} \quad i\,,\, j = 1, \cdots, n\,,$$

onde,

1. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de memória adequada ou núcleo de relaxamento, a qual representa o comportamento viscoelástico.

2. $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $i, j = 1, \cdots, n$, são constantes.



Logo, as correspondentes equações de movimento são dadas por

$$\rho_i U^i_{tt} = T^i_x + P^i + F^i\,, \quad \text{para todo } \ i = 1, \cdots, n\,, \tag{2.1}$$

onde,

1. T^i é a contribuição da tensão da $i-$ ésima componente da mistura. A lei constitutiva usada

$$T^i := \sigma_{i1} + \sigma_{i2} + \cdots + \sigma_{in}\,, \quad \text{para todo } \ i = 1, \cdots, n\,.$$

2. P^i representa a força interna atuando sobre o corpo da $i-$ ésima componente da mistura, a qual depende dos deslocamentos verticais dos constituintes. Aqui é dada por

$$P^i := -d_{i1}U^1 - d_{i2}U^2 - \cdots - d_{in}U^n\,, \quad \text{para todo } \ i = 1, \cdots, n\,.$$

3. F^i representa a força externa ou efeito de amortecimento da $i-$ ésima componente da mistura, a qual produz um mecanismo dissipativo friccional. Aqui assumimos que F^i é pequeno de tal forma que pode ser omitido.

Substituindo as relações anteriores na equação (2.1) obtém-se o modelo matemático

$$R\,U_{tt} - A\,U_{xx} + N\,U + g * B\,U_{xx} = O\,, \quad 0 < x < \ell\,,\ t > 0\,, \tag{2.2}$$

onde,

1. $R = diag(\rho_1, \cdots, \rho_n)\,,\ A := (a_{ij})\,,\ N := (d_{ij})$ e $B := (b_{ij})$ são matrizes em $\mathbb{R}^{n\times n}$.
2. $U : [0,\ell] \times [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $U(x,t) = \big(U^1(x,t), ..., U^n(x,t)\big)^T$ é uma aplicação vetorial e os U^i denotam os deslocamentos verticais dos constituintes.
3. $(g * B\,U_{xx})\,(x,t) := \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\,B\,U_{xx}(x,\tau)\,d\tau$ é a Integral de Volterra.
4. A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a memória adequada ou núcleo de relaxamento.

Além disso, as condições iniciais são dadas por

$$U(x,0) = U_0(x) \quad \text{e} \quad U_t(x,0) = U_1(x)\,, \quad 0 \le x \le \ell\,. \tag{2.3}$$

Mas, com respeito às condições de fronteira, tratamos com uma estrutura rigidamente fixada

$$U(0,t) = O = U(\ell,t)\,, \quad t \ge 0\,. \tag{2.4}$$

Hipóteses.

1. Assumimos que: $A = (a_{ij})$ é definida positiva, $N = (d_{ij})$ semidefinida positiva e $O \ne B = (b_{ij})$ semidefinida positiva.
2. Condições sobre a memória g :

   ($\bullet$) $g \in C^1(0,+\infty) \cap L^1(0,+\infty)\,.$ (2.5)

   ($\bullet$) $0 < g(0^+) := \lim_{s\to 0^+} g(s) < \infty\,.$ (2.6)

   ($\bullet$) $g(s) > 0$ e $g'(s) < 0\,,$ para todo $s \in (0,+\infty)\,.$ (2.7)

   ($\bullet$) A matriz $\left(A - B\displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\,ds\right)$ é definida positiva. (2.8)

   ($\bullet$) Existe uma constante $\kappa > 0$ tal que $g'(s) \le -\kappa\, g(s)\,,$ para todo $s > 0\,.$ (2.9)

   Segue daí que $g(s) \le g(0^+)\,e^{-\kappa s}\,,$ para todo $s > 0\,.$

2.2 O Problema com história.

Para estudar a boa-colocação do problema (2.2)-(2.4) usando a Teoría de semigrupos, nós precisamos transformar o problema em estudo na forma de um problema de Cauchy autônomo $U_t = \mathcal{A}U\,,\ U(0) = U_0\,,$ mas a presença da convolução nos impede fazer isso, pois ela gera um problema de Cauchy não autônomo. Para superar essa dificuldade revemos a literatura sobre estudos com memória e usamos as idéias de Dafermos [14] e Fabrizio [17], isto é, primeiro generalizamos o problema (2.2)-(2.4) para um problema autônomo, chamado de Problema com história, e depois reescrevemos o problema com história na forma de um problema de Cauchy autônomo para após usar a teoría de semigrupos.

O procedimento para deixar o problema com história é baseado nos seguintes passos:

- Define-se a história de U. Isto é, assumimos que os valores da variável U são conhecidos para $0 \leq x \leq \ell$ e $t \leq 0$ de modo que

$$U(0,t) = O = U(\ell,t)\,, \quad t \leq 0\,.$$

- Define-se o problema para valores negativos na forma de convolução

$$\begin{aligned} R\,U_{tt} - A\,U_{xx} + N\,U + \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\,B\,U_{xx}(x,\tau)\,d\tau = &\quad O \quad , \ \ 0 < x < \ell\,,\ t > 0 \\ U(x,0) = U_0(x)\,,&\ \ 0 \leq x \leq \ell \\ U_t(x,0) = U_1(x)\,,&\ \ 0 \leq x \leq \ell \\ U(0,t) = U(\ell,t) = &\quad O \quad , \ \ t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

- Finalmente introduzimos a variável auxiliar η, adicionando um novo parâmetro s e tomando como coeficiente à raiz quadrada de B fornecida pelo Teorema 1.24. Isto é,

$$\eta(x,t,s) := B^{1/2}U(x,t) - B^{1/2}U(x,t-s)\,,\ \ 0 \leq x \leq \ell\,,\ t \geq 0\,,\ s \geq 0\,,$$

onde $\eta(x,t,s) = \left(\eta^1(x,t,s), \cdots, \eta^n(x,t,s)\right)^T$.

Derivando obtém-se

$$\eta_t(x,t,s) = B^{1/2}U_t(x,t) - B^{1/2}U_t(x,t-s) \quad \text{e} \quad \eta_s(x,t,s) = B^{1/2}U_t(x,t-s)\,.$$

Logo, η verifica a equação suplementar

$$\eta_t + \eta_s = B^{1/2}U_t\,,\ \ 0 < x < \ell\,,\ t > 0\,,\ s > 0\,, \tag{2.10}$$

com condição inicial, chamada de história de U no tempo $t = 0$,

$$\eta(x,0,s) := \eta_0(x,s) = B^{1/2}U_0(x) - B^{1/2}U(x,-s)\,, \quad 0 \le x \le \ell\,,\ s \ge 0\,,$$

e condições de contorno

$$\begin{aligned} \eta(x,t,0) = &\ O\,, \quad 0 \le x \le \ell\,,\ t \ge 0 \\ \eta(0,t,s) = &\ O\,, \quad t \ge 0\,,\ s \ge 0 \\ \eta(\ell,t,s) = &\ O\,, \quad t \ge 0\,,\ s \ge 0\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo-se a mudança de variável $\sigma = t - \tau$ tem-se

$$\int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\, B\, U_{xx}(x,\tau)\, d\tau = \int_0^{+\infty} g(\sigma)\, B\, U_{xx}(x,t-\sigma)\, d\sigma\,.$$

Além disso, $\eta_{xx}(x,t,s) = B^{1/2}U_{xx}(x,t) - B^{1/2}U_{xx}(x,t-s)$. Então

$$\int_0^{+\infty} g(s)\, B\, U_{xx}(x,t-s)\, ds = B\, U_{xx}(x,t) \int_0^{+\infty} g(s)\, ds - \int_0^{+\infty} g(s)\, B^{1/2}\eta_{xx}(x,t,s)\, ds\,.$$

Assim, o problema com memória não autônomo reescreve-se como o problema autônomo, chamado de Problema com história, seguinte

$$R\, U_{tt} - \mathcal{C}\, U_{xx} + N\, U - \int_0^{+\infty} g(s)\, B^{1/2}\eta_{xx}\, ds = \quad O \quad,\ 0 < x < \ell\,,\ t > 0 \tag{2.11}$$

$$\eta_t + \eta_s = B^{1/2}U_t\,,\ \ 0 < x < \ell\,,\ t > 0\,,\ s > 0 \tag{2.12}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} U(x,0) = &\quad U_0(x) &&,\quad 0 \le x \le \ell \\ U_t(x,0) = &\quad U_1(x) &&,\quad 0 \le x \le \ell \\ \eta(x,0,s) := \eta_0(x,s) = &\quad B^{1/2}U_0(x) - B^{1/2}U(x,-s) &&,\quad 0 \le x \le \ell\,,\ s \ge 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

e condições de contorno

$$\begin{aligned} U(0,t) = U(\ell,t) = &\ O\,, \quad t \ge 0 \\ \eta(x,t,0) = &\ O\,, \quad 0 \le x \le \ell\,,\ t \ge 0 \\ \eta(0,t,s) = \eta(\ell,t,s) = &\ O\,, \quad t \ge 0\,,\ s \ge 0\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $\mathcal{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\mathcal{C} := A - B\displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\, ds$.

Observações 2.1. *1. Pela hipótese (2.8) segue que a matriz $\mathcal{C}$ é definida positiva.*

2. A energia associada ao sistema (2.11)-(2.14) é dada por

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\left(\int_0^\ell U_x^* \mathcal{C}\, U_x dx + \int_0^\ell U^* N\, U\, dx + \int_0^\ell U_t^* R\, U_t dx + \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^* \eta_x dx\, ds\right).$$

Para calcular sua derivada, multiplicamos à equação (2.11) por U_t^* e depois integramos sobre $[0,\ell]$

$$\int_0^\ell U_t^* R\, U_{tt} dx - \int_0^\ell U_t^* \mathcal{C}\, U_{xx} dx + \int_0^\ell U_t^* N\, U\, dx - \int_0^\ell U_t^* \int_0^{+\infty} g(s)\, B^{1/2} \eta_{xx} ds\, dx = O\,. \tag{2.15}$$

Usando a simetria das matrizes tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell U_t^* R\, U_{tt} dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell U_t^* R\, U_t dx\,,\\
\int_0^\ell U_t^* N\, U\, dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell U^* N\, U\, dx\,,\\
\int_0^\ell U_t^* \mathcal{C}\, U_{xx} dx &= -\int_0^\ell U_{xt}^* \mathcal{C}\, U_x dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell U_x^* \mathcal{C}\, U_x dx\,.
\end{aligned}$$

Além disso, usando a equação (2.12) obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell U_t^* B^{1/2} \eta_{xx} dx ds &= -\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell U_{xt}^* B^{1/2} \eta_x dx ds\\
&= -\int_0^{+\infty} g(s) \left[\int_0^\ell (\eta_{xt}^* + \eta_{xs}^*)\, \eta_x dx\right] ds\\
&= -\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_{xs}^* \eta_x dx ds - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^* \eta_x dx ds
\end{aligned}$$

Logo, substituindo os cálculos anteriores na relação (2.15) e usando as hipóteses (2.9) e (2.7) tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathcal{E}(t) &= -\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_{xs}^*\, \eta_x\, dx\, ds\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(s)\, \frac{d}{ds}\int_0^\ell \eta_x^*\, \eta_x\, dx\, ds\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g'(s) \int_0^\ell \eta_x^*\, \eta_x\, dx\, ds - \frac{1}{2}\left(g(s)\int_0^\ell \eta_x^*\, \eta_x\, dx\right)\Bigg|_{s=0}^{s=+\infty}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g'(s) \int_0^\ell \eta_x^*\, \eta_x\, dx\, ds \le 0\,.
\end{aligned}$$

A seguir daremos um lema que será importante no decorrer do trabalho.

Lema 2.1. *Seja* $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *definida positiva. Verificam-se*

1. *A aplicação* $(\cdot,\cdot)_{[L^2]^n,\mathcal{R}} : \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que* $\left(\widetilde{W}, W\right)_{[L^2]^n,\mathcal{R}} = \displaystyle\int_0^\ell W^*\mathcal{R}\,\widetilde{W}\,dx$ *é um produto interno em* $\left[L^2(0,\ell)\right]^n$ *. Além disso, sua norma induzida* $\|\cdot\|_{[L^2]^n,\mathcal{R}}$ *é equivalente à norma usual* $\|W\|^2_{[L^2]^n} = \displaystyle\int_0^\ell W^*W\,dx$ *.*
2. *A aplicação* $(\cdot,\cdot)_{[H_0^1]^n,\mathcal{R}} : \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que* $\left(\widetilde{W}, W\right)_{[H_0^1]^n,\mathcal{R}} = \displaystyle\int_0^\ell W_x^*\mathcal{R}\,\widetilde{W}_x dx$ *é um produto interno em* $\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$ *. Além disso, sua norma induzida* $\|\cdot\|_{[H_0^1]^n,\mathcal{R}}$ *é equivalente à norma usual* $\|W\|^2_{[H_0^1]^n} = \displaystyle\int_0^\ell W_x^*W_x dx$ *.*
3. *A aplicação* $(\cdot,\cdot)_{[L_g^2]^n,\mathcal{R}} : L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right) \times L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que* $\left(\widetilde{W}, W\right)_{[L_g^2]^n,\mathcal{R}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell W_x^*\mathcal{R}\,\widetilde{W}_x dx\,ds$ *é um produto interno em* $L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)$*. Além disso, sua norma induzida* $\|\cdot\|_{[L_g^2]^n,\mathcal{R}}$ *é equivalente à norma usual* $\|W\|^2_{[L_g^2]^n} = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell W_x^*W_x dx\,ds$ *.*

Demonstração. Sejam μ e λ o menor e o maior autovalor de $\mathcal{R}$ respectivamente.

1. É claro que a aplicação $(\cdot,\cdot)_{[L^2]^n,\mathcal{R}}$ é linear na primeira variável.

   Desde que $\mathcal{R}$ é definida positiva, então

   $$(W,W)_{[L^2]^n,\mathcal{R}} = \int_0^\ell W^*\mathcal{R}\,W\,dx \geq 0\,, \quad \text{para todo } W \in \left[L^2(0,\ell)\right]^n .$$

   Além disso,

   $$\left(\widetilde{W}, W\right)_{[L^2]^n,\mathcal{R}} = \int_0^\ell \left(\widetilde{W}^*\mathcal{R}\,W\right)^* dx = \overline{\int_0^\ell \widetilde{W}^*\mathcal{R}\,W\,dx} = \overline{\left(W,\widetilde{W}\right)}_{[L^2]^n,\mathcal{R}} .$$

   Por outro lado, pelo Teorema 1.22 obtém-se

   $$\mu\,\|W\|^2 \leq W^*\mathcal{R}\,W \leq \lambda\,\|W\|^2\ , \quad \text{para todo } W \in \left[L^2(0,\ell)\right]^n .$$

   Então,

   $$\mu\int_0^\ell \|W\|^2\,dx \leq \int_0^\ell W^*\mathcal{R}\,W\,dx \leq \lambda\int_0^\ell \|W\|^2\,dx\,, \quad \text{para todo } W \in \left[L^2(0,\ell)\right]^n .$$

   Logo,

   $$(W,W)_{[L^2]^n,\mathcal{R}} = 0\,, \quad \text{se e somente se,} \quad W = O\,.$$

   Além disso, tem-se a equivalência das normas.

2. A prova é análoga ao anterior.

3. É claro que a aplicação $(\cdot,\cdot)_{[L_g^2]^n,\mathcal{R}}$ é linear na primeira variável.

   Desde que $\mathcal{R}$ é definida positiva, então

$$(W,W)_{[L_g^2]^n,\mathcal{R}} = \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^{\ell} W_x^*\mathcal{R}\, W_x dx\, ds \geq 0\,,\ \forall\, W \in L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right).$$

   Além disso,

$$\left(\widetilde{W},W\right)_{[L_g^2]^n,\mathcal{R}} = \overline{\int_0^{+\infty} g(s)\int_0^{\ell} \widetilde{W}_x^*\mathcal{R}\, W_x dx\, ds} = \overline{\left(W,\widetilde{W}\right)}_{[L_g^2]^n,\mathcal{R}}.$$

   Por outro lado, pelo Teorema 1.22 obtém-se

$$\mu\,\|W_x\|^2 \leq W_x^*\mathcal{R}\, W_x \leq \lambda\,\|W_x\|^2\,,\ \text{ para todo }\ W \in L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right).$$

   Então,

$$\mu\int_0^{+\infty} g(s)\int_0^{\ell} \|W_x\|^2\, dxds \leq \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^{\ell} W_x^*\mathcal{R}W_x dxds \leq \lambda\int_0^{+\infty} g(s)\int_0^{\ell} \|W_x\|^2\, dxds,$$

   para todo $W \in L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)$.

   Logo,

$$(W,W)_{[L_g^2]^n,\mathcal{R}} = 0\,,\ \text{ se e somente se, }\ W = O\,.$$

   Além disso, tem-se a equivalência das normas.

□

Agora introduzimos algumas notações que serão usadas ao longo de todo o trabalho.

Notações 2.1. *Seja $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida positiva. Denotam-se*

1. $\left(\widetilde{W},W\right)_{[L^2]^n,\mathcal{R}} := \int_0^{\ell} W^*\mathcal{R}\,\widetilde{W}\, dx$ *e sua norma induzida por* $\|\cdot\|_{[L^2]^n,\mathcal{R}}$.
Quando $\mathcal{R}$ é a identidade, escrevemos simplesmente como $(\cdot,\cdot)_{[L^2]^n}$ *e* $\|\cdot\|_{[L^2]^n}$.

2. $\left(\widetilde{W},W\right)_{[H_0^1]^n,\mathcal{R}} := \int_0^{\ell} W_x^*\mathcal{R}\,\widetilde{W}_x dx$ *e sua norma induzida por* $\|\cdot\|_{[H_0^1]^n,\mathcal{R}}$.
Quando $\mathcal{R}$ é a identidade, escrevemos simplesmente como $(\cdot,\cdot)_{[H_0^1]^n}$ *e* $\|\cdot\|_{[H_0^1]^n}$.

3. $\left(\widetilde{W},W\right)_{[L_g^2]^n,\mathcal{R}} := \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^{\ell} W_x^*\mathcal{R}\,\widetilde{W}_x dx\, ds$ *e sua norma induzida por* $\|\cdot\|_{[L_g^2]^n,\mathcal{R}}$.
Quando $\mathcal{R}$ é a identidade, escrevemos simplesmente como $(\cdot,\cdot)_{[L_g^2]^n}$ *e* $\|\cdot\|_{[L_g^2]^n}$.

2.3 Existência e unicidade.

Para demonstrar a boa-colocação do Problema com história (2.11)-(2.14), reescrevemos o problema na forma de um problema de Cauchy autônomo $\frac{d}{dt}\mathcal{U} = \mathcal{A}\mathcal{U}\,,\ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0$ e mostramos que o operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações para garantir a existência e unicidade de soluções.

Primeiro fazemos $V := U_t\,.$

Logo, o Problema com história (2.11)-(2.14) reduz-se à equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U \\ V \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ R^{-1}\mathcal{C}\,U_{xx} - R^{-1}N\,U + \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\,R^{-1}B^{1/2}\eta_{xx}ds \\ B^{1/2}V - \eta_s \end{pmatrix},$$

onde o Espaço de fase é dado por

$$\mathcal{H} := \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right),$$

munido do produto interno

$$\left(\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}\right)_{\mathcal{H}} := \int_0^\ell U_x^*\mathcal{C}\,\widetilde{U}_x dx + \int_0^\ell U^*N\,\widetilde{U}\,dx + \int_0^\ell V^*R\,\widetilde{V}\,dx + \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell \eta_x^*\widetilde{\eta}_x dx\,ds\,,$$

para todo $\mathcal{U} = (U,V,\eta)\,,\ \widetilde{\mathcal{U}} = \left(\widetilde{U},\widetilde{V},\widetilde{\eta}\right) \in \mathcal{H}\,.$

É simples verificar que o espaço $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}})$ é um Espaço de Hilbert.

Definição 2.1. *Define-se o operador linear autônomo $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ por*

$$\mathcal{A}\mathcal{U} := \begin{pmatrix} V \\ R^{-1}\mathcal{C}\,U_{xx} - R^{-1}N\,U + \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\,R^{-1}B^{1/2}\eta_{xx}ds \\ B^{1/2}V - \eta_s \end{pmatrix},$$

onde seu domínio é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A}) &:= \{\mathcal{U} = (U,V,\eta) \in \mathcal{H}\ :\ \mathcal{A}\mathcal{U} \in \mathcal{H} \quad e \quad \eta(x,t,0) = O\} \\ &= \Big\{\mathcal{U} \in \mathcal{H} : V \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n,\ \Big(\mathcal{C}\,U_{xx} - N\,U + \int_0^{+\infty} g(s)\,B^{1/2}\eta_{xx}ds\Big) \in \left[L^2(0,\ell)\right]^n, \\ &\qquad \eta(x,t,0) = O \quad e \quad \left(B^{1/2}V - \eta_s\right) \in L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)\Big\} \\ &= \Big\{\mathcal{U} = (U,V,\eta) \in \mathcal{H} : V \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n,\ \Big(\mathcal{C}\,U + \int_0^{+\infty} g(s)\,B^{1/2}\eta\,ds\Big) \in \left[H^2(0,\ell)\right]^n, \\ &\qquad \eta(x,t,0) = O \quad e \quad \eta_s \in L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)\big\}\,.\end{aligned}$$

Assim, o Problema com história (2.11)-(2.14) reescreve-se como o problema de Cauchy autônomo

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U} = \mathcal{A}\mathcal{U}\,, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0\,, \tag{2.16}$$

onde $\mathcal{U} = (U, V, \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{U}_0 = (U_0, U_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$.

Teorema 2.1. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações $e^{\mathcal{A}(t)}$.*

Demonstração. A demonstração é baseada em verificar as hipóteses do Teorema 1.13.
Para mostrar que o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é denso em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$, notemos que

$$[C_0^\infty(0,\ell)]^n \times [C_0^\infty(0,\ell)]^n \times W_g^1\left(\mathbb{R}_+; [C_0^\infty(0,\ell)]^n\right) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})\,,$$

onde,

$$W_g^1\left(\mathbb{R}_+; [C_0^\infty(0,\ell)]^n\right) := \left\{\eta \in L_g^2\left(0, +\infty; [C_0^\infty(0,\ell)]^n\right) : \eta_s \in L_g^2\left(0, +\infty; [C_0^\infty(0,\ell)]^n\right)\right\},$$

de onde segue a densidade.
Mostraremos a seguir que o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato,

$$(\mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell U_x^* \mathcal{C}\, V_x dx + \int_0^\ell U^* N\, V\, dx + \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^* \left(B^{1/2} V_x - \eta_{xs}\right) dx\, ds + \int_0^\ell V^* \left(\mathcal{C} U_{xx} - N\, U + \int_0^{+\infty} g(s)\, B^{1/2} \eta_{xx} ds\right) dx\,,$$

para todo $\mathcal{U} = (U, V, \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Notemos que

$$\int_0^\ell V^* \mathcal{C}\, U_{xx} dx = -\int_0^\ell V_x^* \mathcal{C}\, U_x dx = -\overline{\int_0^\ell U_x^* \mathcal{C}\, V_x dx}$$
$$\int_0^\ell V^* N\, U\, dx = -\overline{\int_0^\ell U^* N\, V\, dx}$$
$$\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell V^* B^{1/2} \eta_{xx} dx\, ds = -\overline{\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^* B^{1/2} V_x dx\, ds}\,.$$

Então,

$$(\mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}} = 2iIm \int_0^\ell U_x^* \mathcal{C} V_x dx + 2iIm \int_0^\ell U^* N V dx + 2iIm \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^* B^{1/2} V_x dx ds - \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^* \eta_{xs} dx ds\,.$$

Logo, usando as hipóteses (2.6), (2.7) e (2.9) têm-se

$$Re\,(\mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}} = -Re \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^*\, \eta_{xs}\, dx\, ds$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(s)\,\frac{d}{ds}\int_0^{\ell} \eta_x^*\,\eta_x\,dx\,ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g'(s)\int_0^{\ell} \eta_x^*\,\eta_x\,dx\,ds - \frac{1}{2}\left(g(s)\int_0^{\ell} \eta_x^*\,\eta_x\,dx\right)\Bigg|_{s=0}^{s=+\infty} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g'(s)\int_0^{\ell} \eta_x^*\eta_x\,dx\,ds \le 0\,.
\end{aligned}
$$

Assim, o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Finalmente mostraremos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, isto é $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Primeiro mostraremos que $\mathcal{A}$ é bijetiva.

De fato, seja $\mathcal{F} = \left(\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{\eta}\right) \in \mathcal{H} = \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)$.

Reescrevendo a equação $\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{F}$ obtém-se

$$
V = \widetilde{U} \tag{2.17}
$$

$$
\mathcal{C}\,U_{xx} - N\,U + \int_0^{+\infty} g(s)\,B^{1/2}\eta_{xx}ds = R\,\widetilde{V} \tag{2.18}
$$

$$
B^{1/2}V - \eta_s = \widetilde{\eta}\,, \tag{2.19}
$$

onde $\mathcal{U} = (U, V, \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Lembremos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Bigg\{&\mathcal{U} = (U,V,\eta) \in \mathcal{H} : V \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n,\ \left(\mathcal{C}\,U + \int_0^{+\infty} g(s)B^{1/2}\eta\,ds\right) \in \left[H^2(0,\ell)\right]^n, \\
&\eta(x,t,0) = O \quad \text{e} \quad \eta_s \in L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)\Bigg\}\,.
\end{aligned}
$$

Da relação (2.17) tem-se

$$
V = \widetilde{U} \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\,.
$$

Da relação (2.19) tem-se

$$
\eta_s = \left(B^{1/2}\widetilde{U} - \widetilde{\eta}\right) \in L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right).
$$

Além disso, uma primitiva da equação anterior é

$$
\eta(x,t,s) = s\,B^{1/2}\widetilde{U}(x,t) - \int_0^s \widetilde{\eta}(x,t,\tau)\,d\tau\,.
$$

Segue daí que $\eta(x,t,0) = O$ e $\eta(\cdot,t,s) \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$, $\forall\, t \ge 0$, $\forall\, s \ge 0$.

Resta mostrar que $\eta \in L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)$. Para isso, basta provar a desigualdade

$$
\|\eta\|_{[L_g^2]^n} \le \frac{2}{\kappa}\,\|\eta_s\|_{[L_g^2]^n}\,. \tag{2.20}
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^{\ell} \eta_x^* \, \eta_x \, dx \, ds &\leq \frac{-1}{\kappa} \int_0^{+\infty} g'(s) \int_0^{\ell} \eta_x^* \, \eta_x \, dx \, ds \\
&= \frac{-1}{\kappa} \left[\left(g(s) \int_0^{\ell} \eta_x^* \, \eta_x \, dx \right) \Big|_{s=0}^{s=+\infty} - \int_0^{+\infty} g(s) \, \frac{d}{ds} \int_0^{\ell} \eta_x^* \, \eta_x \, dx \, ds \right] \\
&= \frac{2}{\kappa} \, Re \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^{\ell} \eta_x^* \, \eta_{xs} \, dx \, ds \\
&\leq \frac{2}{\kappa} \left| \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^{\ell} \eta_x^* \, \eta_{xs} \, dx \, ds \right| \\
&\leq \frac{2}{\kappa} \; \|\eta\|_{[L_g^2]^n} \, \|\eta_s\|_{[L_g^2]^n} \\
&\leq \frac{1}{2} \; \|\eta\|_{[L_g^2]^n}^2 + \frac{2}{\kappa^2} \; \|\eta_s\|_{[L_g^2]^n}^2 \; .
\end{aligned}
$$

Assim, tem-se o desejado.

Por outro lado, usaremos o Teorema de Lax-Milgram para mostrar a existência e unicidade da função U . Define-se a aplicação

$$\Phi : \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \longrightarrow \mathbb{C} \;\text{ tal que }\; \Phi(\widetilde{W}, W) := \int_0^{\ell} W_x^* \mathcal{C} \, \widetilde{W}_x dx + \int_0^{\ell} W^* N \, \widetilde{W} \, dx \, .$$

É claro que Φ é uma forma sesquilinear, contínua e coerciva.

Além disso, define-se a forma antilinear

$$f : \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \longrightarrow \mathbb{C} \;\text{ tal que }\; f(W) := -\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^{\ell} W_x^* B^{1/2} \eta_x dx \, ds - \int_0^{\ell} W^* R \, \widetilde{V} \, dx \, .$$

Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $U \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$ tal que

$$\Phi(U, W) = f(W) \, , \quad \text{para todo } \; W \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n .$$

Isto é,

$$\int_0^{\ell} W_x^* \left(\mathcal{C} \, U_x + \int_0^{+\infty} g(s) \, B^{1/2} \eta_x ds \right) dx = -\int_0^{\ell} W^* \left(R \, \widetilde{V} + N \, U \right) dx \, , \; \forall \, W \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n . \tag{2.21}$$

Então U é solução fraca de (2.18).

Pelo Princípio da regularidade elítica tem-se

$$\left(\mathcal{C} U + \int_0^{+\infty} g(s) \, B^{1/2} \eta \, ds \right) \in \left[H^2(0,\ell)\right]^n .$$

Por outro lado, seja $\varphi \in D(0,\ell)$.

Para todo $i = 1, \cdots, n$, denotemos por $W_i = \bar{\varphi} \, e_i$, onde e_i é o i-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^n$.

Então $W_i \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$, para todo $i = 1, \cdots, n$.

Substituindo na relação (2.21) obtém-se

$$\int_0^\ell \varphi_x \left(\mathcal{C} U_x + \int_0^{+\infty} g(s) B^{1/2} \eta_x ds \right)^i dx = - \int_0^\ell \varphi \left(R\widetilde{V} + NU \right)^i dx \,, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in D(0,\ell)\,.$$

Pela definição da derivada fraca tem-se

$$\left(R\,\widetilde{V} + N\,U \right)^i = \left(\mathcal{C}\,U_x + \int_0^{+\infty} g(s)\,B^{1/2} \eta_x ds \right)_x^i = \left(\mathcal{C}\,U_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)\,B^{1/2} \eta_{xx} ds \right)^i ,$$

para todo $i = 1, \cdots, n$. Logo

$$\left(\mathcal{C}\,U + \int_0^{+\infty} g(s) B^{1/2} \eta\, ds \right) \in \left[H^2(0,\ell)\right]^n \quad \text{e} \quad \mathcal{C}\,U_{xx} - N\,U + \int_0^{+\infty} g(s) B^{1/2} \eta_{xx} ds = R\,\widetilde{V}\,.$$

Assim, existe uma única $\mathcal{U} = (U, V, \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Resta mostrar que $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado.

De fato, seja $\mathcal{F} = \left(\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{\eta}\right) \in \mathcal{H} = \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times L_g^2\left(0, +\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)$.

Denotemos por $\mathcal{U} := \mathcal{A}^{-1}\,\mathcal{F}$, onde $\mathcal{U} = (U, V, \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Deve-se mostrar que existe uma constante $C > 0$, que não depende de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$, tal que

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Reescrevendo a equação $\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{F}$ obtém-se

$$V = \widetilde{U} \tag{2.22}$$

$$\mathcal{C}\,U_{xx} - N\,U + \int_0^{+\infty} g(s)\,B^{1/2} \eta_{xx} ds = R\,\widetilde{V} \tag{2.23}$$

$$B^{1/2} V - \eta_s = \widetilde{\eta}\,. \tag{2.24}$$

Como

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\ell U_x^* \mathcal{C}\,U_x dx + \int_0^\ell U^* N\,U\,dx + \int_0^\ell V^* R\,V\,dx + \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^* \eta_x dx\,ds\,,$$

então basta limitar cada somando.

Primeiro passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^* \eta_x dx\,ds$.

Pela propriedade dissipativa do operador $\mathcal{A}$ tem-se

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{[L_g^2]^n}^2 = \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^* \eta_x dx\,ds &\leq \frac{-1}{\kappa} \int_0^{+\infty} g'(s) \int_0^\ell \eta_x^* \eta_x dx\,ds \\ &= \frac{-2}{\kappa}\,Re\,(\mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{-2}{\kappa}\,Re\,(\mathcal{F}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{2}{\kappa}\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Segundo passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^\ell V^* R\, V\, dx$.
Usando relação (2.22), a desigualdade de Poincaré e a equivalência de normas, obtém-se

$$\int_0^\ell V^* R\, V\, dx = \int_0^\ell \widetilde{U}^* R\, \widetilde{U}\, dx \leq C \int_0^\ell \widetilde{U}_x^* \mathcal{C}\, \widetilde{U}_x dx \leq C \left\| \mathcal{F} \right\|_{\mathcal{H}}^2 , \qquad (2.26)$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$.
Terceiro passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^\ell U_x^* \mathcal{C}\, U_x dx + \int_0^\ell U^* N\, U\, dx$.
Multiplicando por U^* à relação (2.23) e integrando sobre $[0, \ell]$ tem-se

$$\int_0^\ell U_x^*\, \mathcal{C}\, U_x\, dx + \int_0^\ell U^*\, N\, U\, dx = -\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell U_x^*\, B^{1/2} \eta_x\, dx\, ds - \int_0^\ell U^* R\, \widetilde{V}\, dx . \qquad (2.27)$$

Agora, usando a desigualdade do Poincaré, a equivalência de normas e a relação (2.25), obtém-se

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell U_x^*\, B^{1/2} \eta_x\, dx\, ds \right| &\leq \left\| U \right\|_{[L_g^2]^n} \left\| B^{1/2} \eta \right\|_{[L_g^2]^n} \\
&\leq C \left\| U \right\|_{[H_0^1]^n} \left\| \eta \right\|_{[L_g^2]^n} \\
&\leq C \left\| \mathcal{U} \right\|_{\mathcal{H}} \left\| \eta \right\|_{[L_g^2]^n} \\
&\leq \frac{1}{2} \left\| \mathcal{U} \right\|_{\mathcal{H}}^2 + C \left\| \eta \right\|_{[L_g^2]^n}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \left\| \mathcal{U} \right\|_{\mathcal{H}}^2 + C \left\| \mathcal{U} \right\|_{\mathcal{H}} \left\| \mathcal{F} \right\|_{\mathcal{H}} .
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\ell U^* R\, \widetilde{V}\, dx \right| &\leq \left\| U \right\|_{[L^2]^n} \left\| R\, \widetilde{V} \right\|_{[L^2]^n} \\
&\leq C \left\| U \right\|_{[H_0^1]^n} \left\| \widetilde{V} \right\|_{[L^2]^n} \\
&\leq C \left\| \mathcal{U} \right\|_{\mathcal{H}} \left\| \mathcal{F} \right\|_{\mathcal{H}} .
\end{aligned}$$

Logo, na relação (2.27) obtém-se

$$\int_0^\ell U_x^* \mathcal{C}\, U_x\, dx + \int_0^\ell U^* N\, U\, dx \leq \frac{1}{2} \left\| \mathcal{U} \right\|_{\mathcal{H}}^2 + C \left\| \mathcal{U} \right\|_{\mathcal{H}} \left\| \mathcal{F} \right\|_{\mathcal{H}} , \qquad (2.28)$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$.

Finalmente, somando as relações (2.25), (2.26) e (2.28) tem-se

$$\left\| \mathcal{U} \right\|_{\mathcal{H}} \leq C \left\| \mathcal{F} \right\|_{\mathcal{H}} ,$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$. □

Agora introduzimos o teorema de existência e unicidade de soluções.

Teorema 2.2. *Se* $\mathcal{U}_0 = (U_0, U_1, \eta_0) \in \mathcal{H} = \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)$, *então a aplicação*

$$\mathcal{U} : [0,+\infty) \longrightarrow \mathcal{H} \quad \textit{tal que} \quad \mathcal{U}(t) = e^{\mathcal{A}\,t}\,\mathcal{U}_0\,,$$

é a única solução do problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U} = \mathcal{A}\mathcal{U}\,, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0\,,$$

satisfazendo $\mathcal{U} \in C\left([0,+\infty),\mathcal{H}\right)$, *onde* $\mathcal{U} = (U, V, \eta)$.
Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *então* $\mathcal{U} \in C^1\left([0,+\infty),\mathcal{H}\right) \cap C\left([0,+\infty),\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)$.

Demonstração. Ver [32]. □

2.4 Regularidade das soluções.

Desde que usamos a abordagem do semigrupo para pesquisar a solubilidade do problema com história (2.11)-(2.14), temos que esclarecer a relação que existe entre a solução semigrupo dada por $\mathcal{U}(t) = e^{\mathcal{A}\,t}\mathcal{U}_0$ e a solução do problema anterior. Ou seja, nós precisamos mostrar em que sentido as aplicações componentes U e η satisfazem o problema com história (2.11)-(2.14).

1. Se $\mathcal{U}_0 = (U_0, U_1, \eta_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então pelo Teorema 2.2 tem-se

$$\mathcal{U} \in C^1\left([0,+\infty),\mathcal{H}\right) \cap C\left([0,+\infty),\mathcal{D}(\mathcal{A})\right).$$

   Segue daí

$$\begin{aligned} U &\in C^2\left([0,+\infty), \left[L^2(0,\ell)\right]^n\right) \cap C^1\left([0,+\infty), \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right), \\ \eta &\in C^1\left([0,+\infty), L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)\right) \quad \text{e} \\ (U, U_t, \eta) &\in C\left([0,+\infty),\mathcal{D}(\mathcal{A})\right)\,. \end{aligned}$$

   Além disso, eles satisfazem as equações (2.11) e (2.12) em $\left[L^2(0,\ell)\right]^n$, para todo $t > 0$ e para todo $s > 0$. As condições iniciais (2.13) são satisfeitas no sentido forte e as condições de contorno (2.14) são satisfeitas no sentido do traço.

2. Se $\mathcal{U}_0$ é mais regular, por exemplo $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^2)$, então

$$\mathcal{U} \in C^2\left([0,+\infty),\mathcal{H}\right) \cap C^1\left([0,+\infty),\mathcal{D}(\mathcal{A})\right).$$

Segue daí

$$
\begin{aligned}
U &\in C^3\left([0,+\infty), \left[L^2(0,\ell)\right]^n\right) \cap C^2\left([0,+\infty), \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right), \\
\eta &\in C^2\left([0,+\infty), L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)\right) \quad \text{e} \\
(U, U_t, \eta) &\in C^1\left([0,+\infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})\right) .
\end{aligned}
$$

Além disso, eles satisfazem as equações (2.11) e (2.12) em $\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$, para todo $t > 0$ e para todo $s > 0$. As condições iniciais (2.13) e as condições de contorno (2.14) são satisfeitas no sentido forte. Portanto, obtém-se uma solução clássica do problema com história.

3. Se $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$, então $\mathcal{V}(t) = e^{\mathcal{A}t}\mathcal{U}_0$ é a única mild solução do problema

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t) = \mathcal{A}\mathcal{U} , \;\; \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0 , \quad \text{onde } \mathcal{U} = (U, V, \eta) .
$$

Logo, (U, η) é solução fraca do problema com história no sentido que verifica o sistema

$$
\int_0^\ell \varphi^* R\, U_t dx - \int_0^\ell \varphi^* R\, U_1 dx + \int_0^t \int_0^\ell \varphi_x^* \mathcal{C}\, U_x dx\, d\tau + \int_0^t \int_0^\ell \varphi^* N\, U\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \varphi_x^* B^{1/2} \eta_x dx\, ds\, d\tau = O
$$

$$
\int_0^\ell \psi^* \eta\, dx - \int_0^\ell \psi^* \eta_0 dx + \int_0^t \int_0^\ell \psi^* \eta_s dx - \int_0^\ell \psi^* B^{1/2} U\, dx + \int_0^\ell \psi^* B^{1/2} U_0 dx = O ,
$$

para todo φ , $\psi \in D(0, \ell)$ e para todo $t > 0$.

2.5 Retorno à equação original.

Como se viu nas seções anteriores, a fim de resolver o problema (2.2)-(2.4) usando a teoria de semigrupos, nós realmente estudamos o problema com história (2.11)-(2.14). Naturalmente nasce a questão se o procedimento usado é consistente, isto é, se existe alguma relação entre o problema (2.2)-(2.4) e o problema com história (2.11)-(2.14).

De fato, verifica-se que o problema com história é uma generalização do problema (2.2)-(2.4), ou para ser mais preciso, quando $\eta = O$ obtemos o problema original.

Se $\eta = O$, então $B^{1/2}U(\cdot, t) = B^{1/2}U(\cdot, t-s)$, $\forall\, t \geq 0$ e $\forall\, s \geq 0$. Além disso, segue daí que a variável história verifica

$$
B^{1/2}U(\cdot, t) = B^{1/2}U_0(\cdot) , \;\; \text{para todo } \; t \leq 0 .
$$

Logo, se U é uma solução variacional do problema (2.2)-(2.4) com $B^{1/2}U(t) = B^{1/2}U_0$, para todo $t \leq 0$ e $U_t(0) = U_1$, então para todo $W \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$ e para todo $t > 0$ tem-se

$$\int_0^\ell W^* R\, U_t dx - \int_0^\ell W^* R\, U_1 dx + \int_0^t\int_0^\ell W_x^* A\, U_x dx\, d\tau + \int_0^t\int_0^\ell W^* N\, U\, dx\, d\tau -$$
$$\int_0^t\int_0^\ell\int_0^\tau g(s) W_x^* B\, U_x(x,\tau-s)\, ds\, dx\, d\tau - \int_0^t\int_0^\ell\int_\tau^{+\infty} g(s) W_x^* B\,(U_0)_x\, ds\, dx\, d\tau = O\,. \tag{2.29}$$

Por outro lado, se (U, O) é uma solução variacional do problema com história (2.11)-(2.14), então para todo $W \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$ e para todo $t > 0$ tem-se

$$\int_0^\ell W^* R\, U_t dx - \int_0^\ell W^* R\, U_1 dx + \int_0^t\int_0^\ell W_x^* \mathcal{C}\, U_x dx\, d\tau + \int_0^t\int_0^\ell W^* N\, U\, dx\, d\tau = O\,. \tag{2.30}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^\ell W_x^* \mathcal{C}\, U_x dx\, d\tau &= \int_0^t\int_0^\ell W_x^* A\, U_x dx\, d\tau - \int_0^t\int_0^\ell\int_0^{+\infty} g(s) W_x^* B\, U_x ds\, dx\, d\tau \\ &= \int_0^t\int_0^\ell W_x^* A\, U_x dx\, d\tau - \int_0^t\int_0^\ell\int_0^\tau g(s) W_x^* B\, U_x(x,\tau-s)\, ds\, dx\, d\tau - \\ &\quad \int_0^t\int_0^\ell\int_\tau^{+\infty} g(s) W_x^* B\,(U_0)_x\, ds\, dx\, d\tau\,.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Logo, substituindo a relação (2.31) na relação (2.30) e depois comparando o resultado com a relação (2.29) tem-se o desejado.

Capítulo 3

Decaimento Exponencial.

3.1 Dissipação é total.

Nesta seção estudamos a estabilidade do semigrupo associado ao problema com história (2.11)-(2.14) quando a dissipação dada pela memória é total, ou seja, quando $rank(B) = n$. Neste caso temos que os mecanismos dissipativos são efetivos em todas as equações do sistema. Verificando as hipóteses do Teorema 1.14, demonstramos que o semigrupo correspondente é exponencialmente estável.

Lembremos que $R = diag(\rho_1, \cdots, \rho_n)$ é definida positiva, N semidefinida positiva e $\mathcal{C}$ definida positiva. Como $rank(B) = n$, então B é definida positiva. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right),\\
\left(\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}\right)_{\mathcal{H}} &= \int_0^\ell U_x^*\mathcal{C}\,\widetilde{U}_x\,dx + \int_0^\ell U^*\,N\,\widetilde{U}\,dx + \int_0^\ell V^*R\,\widetilde{V}\,dx + \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell \eta_x^*\widetilde{\eta}_x dx\,ds,\\
\mathcal{A}\mathcal{U} &= \begin{pmatrix} V \\ R^{-1}\mathcal{C}\,U_{xx} - R^{-1}N\,U + \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\,R^{-1}B^{1/2}\eta_{xx}ds \\ B^{1/2}V - \eta_s \end{pmatrix},\\
\mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \Big\{\mathcal{U} = (U,V,\eta)\in\mathcal{H} : V\in\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n, \left(\mathcal{C}U + \int_0^{+\infty} g(s)B^{1/2}\eta ds\right)\in\left[H^2(0,\ell)\right]^n,\\
&\qquad \eta(x,t,0) = O \quad \text{e} \quad \eta_s\in L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Antes de apresentar o teorema principal da seção, mostraremos dois lemas que serão importantes no decorrer da tese. O primeiro deles tem aplicação para qualquer gerador infinitesimal de um C_o- semigrupo.

Lema 3.1. *Seja* $\mathcal{A}_o : \mathcal{D}(\mathcal{A}_o) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ *o gerador infinitesimal de um* C_o- *semigrupo* $\left(e^{\mathcal{A}_o t}\right)_{t\geq 0}$ *, onde* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ *é um espaço de Banach.*
Se $i\,\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A}_o)$ *e* $0 \in \rho(\mathcal{A}_o)$ *, então existem um* $\lambda_0 > 0$ *e sequências* $(\mathcal{U}_m)_{m\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_o)$ *e* $(\lambda_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ *tais que*

1. $i\,\lambda_m \in \rho(\mathcal{A}_o)\,,\ \forall\, m \geq 1$ *e* $\lambda_m \longrightarrow \lambda_0\,,$
2. $\|\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{X}} = 1\,,\ \forall\, m \geq 1\,,$
3. $(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)\mathcal{U}_m \longrightarrow O$ *em* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})\,.$

Demonstração. Define-se o conjunto $\mathcal{G} := \{s \in \mathbb{R}_+ :\ i\,\lambda \in \rho(\mathcal{A}_o)\,,\ \forall\,\lambda \in]-s, s[\}\,.$
Notemos que $\mathcal{G} \neq \emptyset$, pois como $0 \in \rho(\mathcal{A}_o)$, então

$$i\,\lambda \in \rho(\mathcal{A}_o)\,,\ \forall\,\lambda \in \Big]-\|\mathcal{A}_o^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^{-1}\,,\|\mathcal{A}_o^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^{-1}\Big[\,.$$

Denotemos por $\lambda_0 := \sup \mathcal{G}\,.$
Se $\lambda_0 = +\infty$, então $i\,\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_o)$, o que é um absurdo. Logo $\lambda_0 < +\infty\,.$
Segue daí que existe uma sequência $(s_m)_{m\geq 1} \subset \mathcal{G}$ tal que $s_m \longrightarrow \lambda_0\,.$
Agora, da definição do conjunto $\mathcal{G}$ temos que para todo $m \in \mathbb{N}$, existe um $\lambda_m > 0$ tais que $i\,\lambda_m \in \rho(\mathcal{A}_o)$ e $|\lambda_m - s_m| < 1/m\,.$ Então

$$|\lambda_m - \lambda_0| \leq |\lambda_m - s_m| + |s_m - \lambda_0| < 1/m + |s_m - \lambda_0| \longrightarrow 0\,,\ \text{ quando }\ m \longrightarrow +\infty\,.$$

Assim, existem $\lambda_0 > 0$ e uma sequência $(\lambda_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $i\,\lambda_m \in \rho(\mathcal{A}_o)$, para todo $m \geq 1$ e $\lambda_m \longrightarrow \lambda_0\,.$
Por outro lado, mostraremos um resultado importante no decorrer da prova do lema.

$$\text{Afirmação. } \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\|(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = +\infty\,.$$

Procedendo por contradição, suponhamos que $\sup_{m\in\mathbb{N}} \left\|(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = L < +\infty\,.$
A seguir provaremos que $(\lambda_0 + 1/L) \in \mathcal{G}$. Mas isso contradiz a definição de $\lambda_0 = \sup \mathcal{G}\,.$
De fato, seja $\lambda \in]-\lambda_0 - 1/L, \lambda_0 + 1/L[\,.$
Deve-se mostrar que $i\,\lambda \in \rho(\mathcal{A}_o)\,.$

1. Se $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$, então existe um $s \in \mathcal{G}$ tal que $|\lambda| < s \leq \lambda_0\,.$

   Segue daí que $i\,\lambda \in \rho(\mathcal{A}_o)\,.$

2. Se $\lambda \in]-\lambda_0 - 1/L, -\lambda_0] \cup [\lambda_0, \lambda_0 + 1/L[$, então existe um $\gamma \in]-\lambda_0, \lambda_0[$ tal que $|\lambda - \gamma| < 1/L$. Então

$$(i\,\lambda - \mathcal{A}_o) = (i\,(\lambda - \gamma) + (i\,\gamma - \mathcal{A}_o)) = (i\,\gamma - \mathcal{A}_o)\left(I - i\,(\gamma - \lambda)\,(i\,\gamma - \mathcal{A}_o)^{-1}\right) \quad (3.1)$$

$$\text{e} \quad |\gamma - \lambda|\,\left\|(i\,\gamma - \mathcal{A}_o)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < \frac{\left\|(i\,\gamma - \mathcal{A}_o)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}}{L} \leq 1\,. \quad (3.2)$$

Segue da relação (3.2) que $\left(I - i\,(\gamma - \lambda)\,(i\,\gamma - \mathcal{A}_o)^{-1}\right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Logo, da relação (3.1) tem-se $i\,\lambda \in \rho(\mathcal{A}_o)$.

Assim a afirmação fica provada.

Agora, da definição de norma de um operador tem-se que, para todo $m \in \mathbb{N}$, existe uma $F_m \in \mathcal{X}\backslash\{O\}$ tal que

$$\left\|(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} - \frac{1}{m} < \frac{\left\|(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)^{-1}F_m\right\|_{\mathcal{X}}}{\|F_m\|_{\mathcal{X}}}\,.$$

Logo, usando a afirmação anterior obtém-se $\displaystyle\sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{\left\|(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)^{-1}F_m\right\|_{\mathcal{X}}}{\|F_m\|_{\mathcal{X}}} = +\infty$.
Daí existe uma subsequência de $(\lambda_m)_{m\geq 1}$, que sem perda de generalidade a denotamos por $(\lambda_m)_{m\geq 1}$, tal que

$$\frac{\left\|(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)^{-1}F_m\right\|_{\mathcal{X}}}{\|F_m\|_{\mathcal{X}}} \longrightarrow +\infty\,, \text{ quando } m \longrightarrow +\infty\,. \quad (3.3)$$

Finalmente, para todo $m \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{U}_m := \dfrac{(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)^{-1}F_m}{\|(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)^{-1}F_m\|_{\mathcal{X}}}$.
É claro que $\mathcal{U}_m \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_o)$ e $\|\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{X}} = 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$.
Além disso, da relação (3.3) tem-se

$$(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)\,\mathcal{U}_m = \frac{F_m}{\|(i\,\lambda_m - \mathcal{A}_o)^{-1}F_m\|_{\mathcal{X}}} \longrightarrow O \text{ em } (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})\,.$$

Assim, o lema fica provado. □

Voltando a nosso problema em estudo, o seguinte lema é importante para provar a estabilidade forte do semigrupo correspondente.

Lema 3.2. *Se* $i\,\mathbb{R} \nsubseteq \rho(\mathcal{A})$, *então existem* $\lambda_0 > 0$ *e* $\widehat{\mathcal{U}} = \left(\widehat{U}, \widehat{V}, O\right) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *tais que*

$$\left\|\widehat{\mathcal{U}}\right\|_{\mathcal{H}} = 1 \quad e \quad i\,\lambda_0\widehat{\mathcal{U}} - \mathcal{A}\widehat{\mathcal{U}} = O\,.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1, existem $\lambda_0 > 0$ e sequências $(\mathcal{U}_m)_{m\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $(\lambda_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$i\,\lambda_m \in \rho(\mathcal{A})\,,\ \forall\, m \geq 1 \quad \text{e} \quad \lambda_m \longrightarrow \lambda_0\,, \tag{3.4}$$

$$\|\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{H}} = 1\,,\ \forall\, m \geq 1\,, \tag{3.5}$$

$$(i\,\lambda_m - \mathcal{A})\mathcal{U}_m \longrightarrow O \quad \text{em} \quad (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})\,. \tag{3.6}$$

A afirmação seguinte será crucial para obter a conclusão desejada.

$$\text{Afirmação. Existe uma } \widehat{\mathcal{U}} = \left(\widehat{U}, \widehat{V}, O\right) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \text{ tal que } \mathcal{U}_m \longrightarrow \widehat{\mathcal{U}} \text{ em } (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})\,. \tag{3.7}$$

De fato, denotemos por $\mathcal{F}_m := (i\,\lambda_m - \mathcal{A})\,\mathcal{U}_m\,,\ \forall\, m \geq 1\,.$

Como $\mathcal{A}$ é um operador linear fechado, então $\left(\mathcal{D}(\mathcal{A}), (\cdot,\cdot)_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\right)$ é um espaço de Hilbert, onde $\left(\widetilde{W}, W\right)_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} := \left(\widetilde{W}, W\right)_{\mathcal{H}} + \left(\mathcal{A}\,\widetilde{W}, \mathcal{A}\,W\right)_{\mathcal{H}}\,.$

Além disso, das relações (3.4), (3.5) e (3.6) obtém-se

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \leq \|\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{A}\,\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{H}} &= 1 + \|i\,\lambda_m\,\mathcal{U}_m - \mathcal{F}_m\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq 1 + |\lambda_m|\,\|\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{F}_m\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C\,, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Então, pela reflexividade de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ e da relação (3.8), existem uma $\widehat{\mathcal{U}} = \left(\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{\eta}\right) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e uma subsequência de $(\mathcal{U}_m)_{m\geq 1}$, que sem perda de generalidade a denotamos por $(\mathcal{U}_m = (U_m, V_m, \eta_m))_{m\geq 1}$, tal que

$$\mathcal{U}_m \text{ converge fracamente a } \widehat{\mathcal{U}} \text{ em } \left(\mathcal{D}(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\right). \tag{3.9}$$

Notemos que, se $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear e contínuo em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$, então $g := f|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear e contínuo em $\left(\mathcal{D}(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\right)$, pois

$$|g(\mathcal{U})| = |f(\mathcal{U})| \leq \|f\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\,, \quad \text{para todo } \mathcal{U} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\,.$$

Logo, da relação (3.9) segue que

$$\mathcal{U}_m \text{ converge fracamente a } \widehat{\mathcal{U}} = \left(\widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{\eta}\right) \text{ em } (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})\,. \tag{3.10}$$

Por outro lado, mostraremos que $\widehat{\eta} = O$ e $\mathcal{U}_m \longrightarrow \widehat{\mathcal{U}} = \left(\widehat{U}, \widehat{V}, O\right)$ em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.

Primeiro, pela propriedade dissipativa tem-se

$$\begin{aligned}
\|\eta_m\|^2_{[L^2_g]^n} &= \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^{\ell} (\eta_m)^*_x\,(\eta_m)_x\,dx\,ds \\
&\le \frac{-1}{\kappa}\int_0^{+\infty} g'(s) \int_0^{\ell} (\eta_m)^*_x\,(\eta_m)_x\,dx\,ds \\
&= \frac{-2}{\kappa}\,Re\,(\mathcal{A}\mathcal{U}_m, \mathcal{U}_m)_{\mathcal{H}} \\
&= \frac{2}{\kappa}\,Re\,(\mathcal{F}_m, \mathcal{U}_m)_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0\,, \quad \text{quando} \;\; m \longrightarrow +\infty\,.
\end{aligned}$$

Então,

$$\eta_m \longrightarrow O \;\; \text{em} \;\; \left(L^2_g\left(0,+\infty;\left[H^1_0(0,\ell)\right]^n\right), \|\cdot\|_{[L^2_g]^n}\right). \tag{3.11}$$

Além disso, da relação (3.8) têm-se

$$\|\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{H}} \le C \;\; \text{e} \;\; \|\mathcal{A}\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{H}} \le C\,, \quad \text{para todo} \;\; m \in \mathbb{N}\,.$$

Segue daí as seguintes conclusões:

1. $\|V_m\|_{[H^1_0]^n} \le C$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Então pela compacidade de $\left[H^1_0(0,\ell)\right]^n$ em $\left[L^2(0,\ell)\right]^n$, existem uma $\chi_2 \in \left[L^2(0,\ell)\right]^n$ e uma subsequência de V_m, que sem perda de generalidade a denotamos por V_m, tal que

$$V_m \longrightarrow \chi_2 \;\; \text{em} \;\; \left(\left[L^2(0,\ell)\right]^n, \|\cdot\|_{[L^2]^n}\right). \tag{3.12}$$

2. $\|U_m\|_{[H^1_0]^n} \le C$ e $\left\|\mathcal{C}\,(U_m)_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)\,B^{1/2}\,(\eta_m)_{xx}\,ds - N\,U_m\right\|_{[L^2]^n} \le C$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{C}\,(U_m)_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)\,B^{1/2}\,(\eta_m)_{xx}\,ds\right\|_{[L^2]^n} &\le \|N\,U_m\|_{[L^2]^n} + C \\
&\le C\,,
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{C}\,U_m + \int_0^{+\infty} g(s)\,B^{1/2}\eta_m ds\right\|_{[H^1_0]^n} &\le \|\mathcal{C}\,U_m\|_{[H^1_0]^n} + \int_0^{+\infty} g(s)\left\|B^{1/2}\eta_m\right\|_{[H^1_0]^n} ds \\
&\le C\int_0^{+\infty} g(s)\int_0^{\ell} (\eta_m)^*_x\,(\eta_m)_x\,dx\,ds + C \\
&\le C\,,
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Então pela compacidade de $\left[H^2(0,\ell)\right]^n$ em $\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$, existem uma $\chi_3 \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$ e uma subsequência de $\left(\mathcal{C}\, U_m + \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\, B^{1/2}\eta_m ds\right)$, que sem perda de generalidade a denotamos por $\left(\mathcal{C}\, U_m + \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\, B^{1/2}\eta_m ds\right)$, tal que

$$\left(\mathcal{C}\, U_m + \int_0^{+\infty} g(s)\, B^{1/2}\eta_m ds\right) ds \longrightarrow \chi_3 \ \text{ em } \ \left(\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n, \|\cdot\|_{[H_0^1]^n}\right). \tag{3.13}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^{+\infty} g(s)\, B^{1/2}\eta_m ds\right\|_{[H_0^1]^n} &\leq \int_0^{+\infty} g(s) \left\|B^{1/2}\eta_m\right\|_{[H_0^1]^n} ds \\ &\leq C\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^{\ell} (\eta_m)_x^* \,(\eta_m)_x \, dx\, ds \longrightarrow 0\,,\end{aligned}$$

quando $m \longrightarrow +\infty$. Logo, da relação (3.13) tem-se

$$U_m \longrightarrow \chi_1 := \mathcal{C}^{-1}\chi_3 \ \text{ em } \ \left(\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n, \|\cdot\|_{[H_0^1]^n}\right). \tag{3.14}$$

Portanto, das relações (3.10), (3.11), (3.12) e (3.14) obtém-se

$$\widehat{\mathcal{U}} = (\chi_1, \chi_2, O) \ \text{ e } \ \mathcal{U}_m \longrightarrow \widehat{\mathcal{U}} \ \text{ em } \ (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})\,.$$

Assim, a afirmação está provada.

Finalmente, para terminar de mostrar o lema, da relação (3.5) tem-se $\left\|\widehat{\mathcal{U}}\right\|_{\mathcal{H}} = 1$.

Além disso, da relação (3.6) obtém-se $\mathcal{A}\mathcal{U}_m \longrightarrow i\,\lambda_0 \widehat{\mathcal{U}}$ em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.

Então, usando a afirmação anterior e o fato de que $\mathcal{A}$ é um operador linear fechado tem-se

$$i\,\lambda_0 \widehat{\mathcal{U}} - \mathcal{A}\widehat{\mathcal{U}} = O\,.$$

Assim, o lema fica provado. $\square$

Agora apresentamos o teorema principal da seção.

Teorema 3.1 (Estabilidade exponencial)**.** *O C_0- semigrupo $\left(e^{\mathcal{A}\,t}\right)_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável.*

Demonstração. A demonstração é baseada em verificar as hipóteses do Teorema 1.14.

O primeiro passo é demonstrar que o semigrupo correspondente é fortemente estável. Isto é,

$$i\,\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})\,. \tag{3.15}$$

De fato, procedendo por contradição, suponhamos que $i\,\mathbb{R} \nsubseteq \rho(\mathcal{A})$.
Pelo Lema 3.2, existem $\lambda_0 > 0$ e $\widehat{\mathcal{U}} = \left(\widehat{U}, \widehat{V}, O\right) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tais que

$$\left\|\widehat{\mathcal{U}}\right\|_{\mathcal{H}} = 1 \quad \text{e} \quad i\,\lambda_0 \widehat{\mathcal{U}} - \mathcal{A}\widehat{\mathcal{U}} = O\,.$$

Ou seja,

$$i\,\lambda_0\,\widehat{U} - \widehat{V} = O\,, \tag{3.16}$$

$$i\,\lambda_0 R\,\widehat{V} - \mathcal{C}\,\widehat{U}_{xx} + N\,\widehat{U} = O\,, \tag{3.17}$$

$$B^{1/2}\widehat{V} = O\,. \tag{3.18}$$

Pelo Teorema 1.24, a matriz $B^{1/2}$ é definida positiva. Então das relações (3.16) e (3.18) segue que

$$\widehat{U} = O = \widehat{V}\,.$$

Logo $\widehat{\mathcal{U}} = (O, O, O)$, que é um absurdo, pois $\left\|\widehat{\mathcal{U}}\right\|_{\mathcal{H}} = 1$.
Assim, a relação (3.15) é satisfeita.
Finalmente, resta demonstrar que o operador resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Isto é, deve-se mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\|(i\,\lambda\, I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le C\,,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{3.19}$$

Seja $\mathcal{F} = \left(\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{\eta}\right) \in \mathcal{H} = \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times L_g^2\left(0, +\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)$.
Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| > 1$.
Denotemos por $\mathcal{U} := (i\,\lambda\, I - \mathcal{A})^{-1}\,\mathcal{F}$, onde $\mathcal{U} = (U, V, \eta) \in D(\mathcal{A})$.
Deve-se mostrar que existe uma constante $C > 0$, que não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ, tal que

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \le C\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Reescrevendo a equação espectral $(i\,\lambda\, I - \mathcal{A})\,\mathcal{U} = \mathcal{F}$ obtém-se

$$i\,\lambda\, U - V \;=\; \widetilde{U}\,, \tag{3.20}$$

$$i\,\lambda\, R\, V - \mathcal{C}\, U_{xx} + N\, U - \int_0^{+\infty} g(s)\, B^{1/2}\eta_{xx}\, ds \;=\; R\,\widetilde{V}\,, \tag{3.21}$$

$$i\,\lambda\,\eta - B^{1/2}V + \eta_s \;=\; \widetilde{\eta}\,. \tag{3.22}$$

Desde que

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\ell U_x^*\,\mathcal{C}\,U_x\,dx + \int_0^\ell U^*\,N\,U\,dx + \int_0^\ell V^* R\, V\,dx + \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^*\,\eta_x\,dx\,ds\,,$$

então basta limitar cada somando.

Primeiro passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(s) \int_0^{\ell} \eta_x^* \, \eta_x \, dx \, ds \, .$

Notemos que

$$(\mathcal{F},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} = ((i\,\lambda\, I - \mathcal{A})\mathcal{U},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} = i\,\lambda\, \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} \, .$$

Então pela propriedade dissipativa do operador $\mathcal{A}$ tem-se

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{[L_g^2]^n}^2 = \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^{\ell} \eta_x^* \, \eta_x \, dx \, ds &\leq \frac{-1}{\kappa} \int_0^{+\infty} g'(s) \int_0^{\ell} \eta_x^* \, \eta_x \, dx \, ds \\ &= \frac{-2}{\kappa} \, Re\, (\mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{2}{\kappa} \, Re\, (\mathcal{F},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{2}{\kappa} \, \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \, \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} \, . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Segundo passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^{\ell} U_x^* \, \mathcal{C} \, U_x \, dx + \int_0^{\ell} U^* \, N \, U \, dx \, .$

Integrando sobre $[0, s]$ na relação (3.22) obtém-se

$$i\,\lambda \int_0^s \eta(x,t,\tau)\, d\tau - s\, B^{1/2} V(x,t) + \eta(x,t,s) = \int_0^s \widetilde{\eta}(x,t,\tau)\, d\tau \, . \tag{3.24}$$

Denotemos por

$$\eta_1(x,t,s) := \int_0^s \eta(x,t,\tau)\, d\tau \quad \text{e} \quad \eta_2(x,t,s) := \int_0^s \widetilde{\eta}(x,t,\tau)\, d\tau \, .$$

Segue daí

$$\begin{aligned} \eta_1(x,t,0) = O \quad &\text{e} \quad (\eta_1)_s = \eta \in L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right) , \\ \eta_2(x,t,0) = O \quad &\text{e} \quad (\eta_2)_s = \widetilde{\eta} \in L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right) . \end{aligned}$$

Então da relação (2.20) têm-se

$$\begin{aligned} \eta_1 \in L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right) \quad &\text{e} \quad \|\eta_1\|_{[L_g^2]^n} \leq \frac{2}{\kappa} \, \|\eta\|_{[L_g^2]^n} \, , \\ \eta_2 \in L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right) \quad &\text{e} \quad \|\eta_2\|_{[L_g^2]^n} \leq \frac{2}{\kappa} \, \|\widetilde{\eta}\|_{[L_g^2]^n} \, . \end{aligned}$$

Além disso, da relação (3.23) segue que

$$\|\eta_1\|_{[L_g^2]^n}^2 \leq \frac{8}{\kappa^3} \, \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \, \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} \quad \text{e} \quad \|\eta_2\|_{[L_g^2]^n}^2 \leq \frac{4}{\kappa^2} \, \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \, . \tag{3.25}$$

Por outro lado, usando a relação (3.25) na relação (3.24) obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\lambda|^2}\,\left\| s\,B^{1/2}V\right\|^2_{[L^2_g]^n} &= \left\| i\,\eta_1 - \frac{1}{\lambda}\,\eta_2 + \frac{1}{\lambda}\,\eta\right\|^2_{[L^2_g]^n} \\
&\leq \left(\|\eta_1\|_{[L^2_g]^n} + \frac{1}{|\lambda|}\,\|\eta_2\|_{[L^2_g]^n} + \frac{1}{|\lambda|}\,\|\eta\|_{[L^2_g]^n}\right)^2 \\
&\leq \left(\|\eta_1\|_{[L^2_g]^n} + \|\eta_2\|_{[L^2_g]^n} + \|\eta\|_{[L^2_g]^n}\right)^2 \\
&\leq 4\,\|\eta_1\|^2_{[L^2_g]^n} + 4\,\|\eta_2\|^2_{[L^2_g]^n} + 2\,\|\eta\|^2_{[L^2_g]^n} \\
&\leq \frac{32}{\kappa^3}\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{16}{\kappa^2}\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{4}{\kappa}\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\left\| s\,B^{1/2}V\right\|^2_{[L^2_g]^n} = \left(\int_0^{+\infty} s^2\,g(s)\,ds\right)\int_0^{\ell} V_x^*\,B\,V_x\,dx\,, \quad \text{onde} \quad \int_0^{+\infty} s^2\,g(s)\,ds > 0\,.$$

Substituindo a relação anterior na relação (3.26) tem-se

$$\frac{1}{|\lambda|^2}\int_0^{\ell} V_x^*\,B\,V_x\,dx \leq C\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,, \qquad (3.27)$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Então, pela equivalência de normas segue que

$$\frac{1}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[H^1_0]^n} \leq C\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,, \qquad (3.28)$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Logo, usando a relação (3.28) na relação (3.20) obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ell} U_x^*\,\mathcal{C}\,U_x\,dx + \int_0^{\ell} U^*\,N\,U\,dx &\leq C\,\|U\|^2_{[H^1_0]^n} \\
&= \left\|\frac{1}{\lambda}\,V + \frac{1}{\lambda}\,\widetilde{U}\right\|^2_{[H^1_0]^n} \\
&\leq \frac{2}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[H^1_0]^n} + 2\,\left\|\widetilde{U}\right\|^2_{[H^1_0]^n} \\
&\leq C\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,, \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Terceiro passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^{\ell} V^* R\,V\,dx$.

Multiplicando por V^* à relação (3.21) e integrando sobre $[0,\ell]$ tem-se

$$i\,\lambda\int_0^{\ell} V^* R\,V\,dx = -\int_0^{\ell} V_x^*\mathcal{C}\,U_x dx - \int_0^{\ell} V^* N\,U\,dx - \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^{\ell} V_x^* B^{1/2}\eta_x dx\,ds + \int_0^{\ell} V^* R\,\widetilde{V}\,dx\,.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\ell V^* R V dx \leq\; & \frac{1}{|\lambda|}\,\|V\|_{[H_0^1]^n}\,\|\mathcal{C}U\|_{[H_0^1]^n} + \frac{1}{|\lambda|}\,\|V\|_{[L^2]^n}\,\|NU\|_{[L^2]^n} + \frac{1}{|\lambda|}\,\|V\|_{[L_g^2]^n}\left\|B^{1/2}\eta\right\|_{[L_g^2]^n} \\
& + \frac{1}{|\lambda|}\,\|V\|_{[L^2]^n}\left\|R\,\widetilde{V}\right\|_{[L^2]^n} \\
\leq\; & \frac{1}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[H_0^1]^n} + \|\mathcal{C}\,U\|^2_{[H_0^1]^n} + \frac{1}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[L^2]^n} + \|N\,U\|^2_{[L^2]^n} + \frac{1}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[L_g^2]^n} \\
& + \left\|B^{1/2}\eta\right\|^2_{[L_g^2]^n} + \frac{1}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[L^2]^n} + \left\|R\,\widetilde{V}\right\|^2_{[L^2]^n} \\
\leq\; & \frac{1}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[H_0^1]^n} + C\,\|U\|^2_{[H_0^1]^n} + \frac{1}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[L^2]^n} + C\,\|U\|^2_{[L^2]^n} + \frac{C}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[H_0^1]^n} \\
& + C\,\|\eta\|^2_{[L_g^2]^n} + \frac{1}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[L^2]^n} + C\left\|\widetilde{V}\right\|^2_{[L^2]^n} \\
\leq\; & C\,\|U\|^2_{[H_0^1]^n} + \frac{C}{|\lambda|^2}\,\|V\|^2_{[H_0^1]^n} + C\,\|\eta\|^2_{[L_g^2]^n} + C\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\,. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Logo, usando as relações (3.23), (3.28) e (3.29) na relação (3.30) obtém-se

$$
\int_0^\ell V^* R\,V\,dx \leq C\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,, \qquad (3.31)
$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Portanto, das relações (3.23), (3.29) e (3.31) tem-se que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$
\left\|(i\,\lambda\,I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C_1\,,\ \forall\ |\lambda| > 1\,.
$$

Além disso, pela continuidade do operador resolvente, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$
\left\|(i\,\lambda\,I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C_2\,,\ \forall\ |\lambda| \leq 1\,.
$$

Assim, a relação (3.19) é satisfeita. □

3.2 Dissipação é parcial.

Nesta seção estudamos a estabilidade do semigrupo associado ao problema com história (2.11)-(2.14) quando a dissipação dada pela memória é parcial, ou seja, quando $rank(B) < n$. Neste caso temos que os mecanismos dissipativos não são efetivos em todas as equações do sistema.
No artigo Córdova e Rivera [13], estudaram o modelo de mistura de n materiais com dissipação friccional parcial, o modelo é dado por

$$\begin{aligned} RU_{tt} - AU_{xx} + BU_t = \quad & O\,, \quad 0 < x < \ell\,,\ t > 0 \\ U(x,0) = U_0(x)\,, \quad & 0 \le x \le \ell \\ U_t(x,0) = U_1(x)\,, \quad & 0 \le x \le \ell \\ U(0,t) = U(\ell,t) = \quad & O\,, \quad t \ge 0\,, \end{aligned}$$

onde $R = diag(\rho_1, \cdots, \rho_n)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são definidas positivas e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é semidefinida positiva com $rank(B) < n$ e é o responsável da presença da dissipação friccional parcial.
Eles obtiveram os seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Denotemos por* $\mathscr{A} := R^{-1}A$. *As seguintes declarações são equivalentes*

1. $\left(e^{\mathcal{A}t}\right)_{t\ge 0}$ *é exponencialmente estável.*
2. $\left(e^{\mathcal{A}t}\right)_{t\ge 0}$ *é fortemente estável.*
3. *dim span* $\left\{B_j\,,\ B_j\mathscr{A}\,,\ B_j\mathscr{A}^2\,,\ \cdots\,,\ B_j\mathscr{A}^{n-1}\ :\ j = 1, \cdots, n\right\} = n$,
   onde $B_j = [b_{j1}\,,\ b_{j2}\,,\ \cdots\,,\ b_{jn}]$ *é o* $j-$ *vetor linha de* B.

Em particular, este resultado implica a falta de estabilidade polinomial do semigrupo.

Demonstração. Ver [13]. □

A referência anterior motivou o estudo do problema com memória parcial dentro do modelo. Em todos os modelos com dissipação parcial, três situações podem acontecer com relação ao comportamento assintótico das soluções: 1) o modelo tem decaimento exponencial, 2) o modelo decai polinomialmente e 3) o modelo fica oscilante para algum subespaço do espaço de fase.
O modelo com memória parcial é um modelo mais complexo e para tratar seu comportamento assintótico das soluções, introduzimos o conceito de matriz controlável e caracterizamos a estabilidade forte do sistema. De forma mais precisa, demostramos que o semigrupo correspondente é

fortemente estável se, e somente se, a matriz $B^{1/2}$ é controlável com respeito a $\mathcal{C}$.

O resultado principal do capítulo e da tese é: o semigrupo correspondente é exponencialmente estável se, e somente se, o semigrupo é fortemente estável. Isto daqui verifica a propriedade da dimensão finita: Se um sistema dinâmico linear decai para zero, então decai exponencialmente. Esta é uma propriedade muito rara em dimensão infinita e acreditamos que seja devido ao acoplamento de segunda ordem do sistema. Em particular, este resultado implica a falta de estabilidade polinomial do semigrupo.

Assumiremos que $R = I$, $N = O$ e B semidefinida positiva com $rank(B) < n$. Além disso, o Teorema 1.24 garanta que $B^{1/2}$ é semidefinida positiva com $rank(B^{1/2}) = rank(B)$.

Lembremos que $\mathcal{C} = A - B\displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\, ds$ é definida positiva e

$$\mathcal{H} = \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right),$$

$$\left(\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}\right)_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell U_x^* \mathcal{C}\, \widetilde{U}_x dx + \int_0^\ell V^* \widetilde{V}\, dx + \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^\ell \eta_x^* \widetilde{\eta}_x dx\, ds\,,$$

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = \begin{pmatrix} V \\ \mathcal{C}\, U_{xx} + \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)\, B^{1/2} \eta_{xx} ds \\ B^{1/2} V - \eta_s \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{\mathcal{U} = (U, V, \eta) \in \mathcal{H} : V \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n, \left(\mathcal{C}U + \int_0^{+\infty} g(s) B^{1/2} \eta ds\right) \in \left[H^2(0,\ell)\right]^n,$$
$$\eta(x,t,0) = O \quad \text{e} \quad \eta_s \in L_g^2\left(0,+\infty; \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)\Big\}.$$

A seguir introduzimos o conceito de matriz controlável com respeito a outra e depois demonstramos um lema que será crucial para caracterizar a estabilidade forte.

Definição 3.1. *Sejam $\mathcal{B} = (b_{ij})$ e $\mathcal{D} = (d_{ij})$ matrizes semidefinidas positivas em $\mathbb{C}^{n\times n}$. Diz-se que $\mathcal{B}$ é controlável com respeito a $\mathcal{D}$, quando verifica-se a condição seguinte*

$$dim\, span \left\{\mathcal{B}_j\,,\ \mathcal{B}_j\,\mathcal{D}\,,\ \mathcal{B}_j\,\mathcal{D}^2\,,\ \cdots\,,\ \mathcal{B}_j\,\mathcal{D}^{n-1}\ :\ j = 1,\cdots,n\right\} = n\,,$$

onde $\mathcal{B}_j = [b_{j1}\,,\, b_{j2}\,,\,\cdots\,,\, b_{jn}]$ é o $j-$ vetor linha de $\mathcal{B}$.

Lema 3.3. *Se $dim\, span\left\{B_j^{1/2}\,,\, B_j^{1/2}\mathcal{C}\,,\, B_j^{1/2}\mathcal{C}^2\,,\,\cdots\,,\, B_j^{1/2}\mathcal{C}^{n-1}\ :\ j = 1,\cdots,n\right\} < n$, ou seja, se $B^{1/2}$ não é controlável com respeito a $\mathcal{C}$, então existem $\tau > 0$ e $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^n \backslash \{O\}$ tais que*

$$B^{1/2}\mathcal{Y} = O \quad e \quad (\mathcal{C} - \tau\, I)\, \mathcal{Y} = O\,. \tag{3.32}$$

Demonstração. Consideremos o sistema linear homogêneo de variável $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{bmatrix} B^{1/2} \\ B^{1/2}\mathcal{C} \\ B^{1/2}\mathcal{C}^2 \\ \vdots \\ B^{1/2}\mathcal{C}^{n-1} \end{bmatrix} \mathcal{X} = O\,. \tag{3.33}$$

Da hipótese segue que o sistema linear homogêneo (3.33) tem infinitas soluções.

Então existe um $\mathcal{X}_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \{O\}$ tal que a relação (3.33) é verificada. Isto é,

$$B^{1/2}\mathcal{C}^j\mathcal{X}_0 = O\,, \quad \text{para todo} \;\; j = 0, 1, \cdots, n-1\,. \tag{3.34}$$

Seja $p(s) \in \mathbb{R}[s]$ o polinômio característico de $\mathcal{C}$.

Como a matriz $\mathcal{C}$ é definida positiva, então todos seus autovalores são positivos. Logo,

$$p(s) = (s-\mu_1)\,(s-\mu_2)\,\cdots\,(s-\mu_n) \quad \text{e} \quad p(\mathcal{C}) = O\,, \tag{3.35}$$

onde μ_1, μ_2, ... μ_n são os autovalores de $\mathcal{C}$.

Por outro lado, definimos o subconjunto M de $\mathbb{N}$ como

$$M := \{j \in \mathbb{N} \,:\, \text{Existem reais positivos} \;\; \tau_1, \cdots, \tau_j \;\; \text{tal que} \;\; (\mathcal{C}-\tau_1 I)\cdots(\mathcal{C}-\tau_j I)\,\mathcal{X}_0 = O\}\,.$$

Notemos que $M \neq \emptyset$, pois pela relação (3.35) tem-se que $n \in M$.

Pelo Princípio da Boa Ordem, existe o menor elemento de M, o qual o denotamos por m.

Então existem números reais positivos $\tau_1, \cdots, \tau_m$, onde $m \leq n$, tal que

$$(\mathcal{C}-\tau_1 I)\,\cdots\,(\mathcal{C}-\tau_m I)\,\mathcal{X}_0 = O\,. \tag{3.36}$$

1. Se $m = 1$, então das relações (3.34) e (3.36) tem-se

   $$B^{1/2}\mathcal{X}_0 = O \quad \text{e} \quad (\mathcal{C}-\tau_1 I)\,\mathcal{X}_0 = O\,.$$

   Logo, basta tomar $\tau := \tau_1$ e $\mathcal{Y} := \mathcal{X}_0$.

   Portanto, a relação (3.32) é verificada.

2. Se $m \geq 2$, então das relações (3.34) e (3.36) obtém-se

   $$B^{1/2}\mathcal{C}^j\,\mathcal{X}_0 = O\,,\; \forall\, j = 0, 1, \cdots, m-1 \quad \text{e} \quad (\mathcal{C}-\tau_1 I)\,(\mathcal{C}-\tau_2 I)\,\cdots\,(\mathcal{C}-\tau_m I)\,\mathcal{X}_0 = O\,. \tag{3.37}$$

Pela minimalidade de m tem-se que $\mathcal{Y}_1 := (\mathcal{C} - \tau_2 I) \cdots (\mathcal{C} - \tau_m I)\, \mathcal{X}_0 \neq O$.

Então da relação (3.37) obtém-se

$$B^{1/2}\mathcal{Y}_1 = B^{1/2}(\mathcal{C} - \tau_2 I) \cdots (\mathcal{C} - \tau_m I)\, \mathcal{X}_0 = O \quad \text{e} \quad (\mathcal{C} - \tau_1 I)\, \mathcal{Y}_1 = O\,.$$

Logo, basta tomar $\tau := \tau_1$ e $\mathcal{Y} := \mathcal{Y}_1$.

Portanto, a relação (3.32) é verificada.

Assim, o lema está provado. □

Agora apresentamos o teorema que caracteriza a estabilidade forte.

Teorema 3.3 (Caracterização da Estabilidade Forte)**.** *Para que* $i\,\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, *é necessário e suficiente que, a matriz* $B^{1/2}$ *seja controlável com respeito a* $\mathcal{C}$. *Isto é,*

$$dim\, span \left\{ B_j^{1/2}\,,\; B_j^{1/2}\mathcal{C}\,,\; B_j^{1/2}\mathcal{C}^2\,,\, \dots\,,\; B_j^{1/2}\mathcal{C}^{n-1} \;:\; j = 1, \dots, n \right\} = n\,, \tag{3.38}$$

onde $\mathcal{B}_j^{1/2}$ *é o* $j-$ *vetor linha de* $\mathcal{B}^{1/2}$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que a condição (3.38) é necessária.

Procedendo por contradição, suponhamos que a condição (3.38) não ocorre.

Então pelo Lema 3.3, existem $\tau > 0$ e $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^n \backslash \{O\}$ tais que

$$B^{1/2}\mathcal{Y} = O \quad \text{e} \quad (\mathcal{C} - \tau\, I)\, \mathcal{Y} = O\,. \tag{3.39}$$

Por outro lado, definimos a sequência $(\mathcal{U}_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{H}$ como

$$\mathcal{U}_m := \left(\mathcal{Y} \,\sin\left(\frac{m\,\pi}{\ell}\, x\right), i\,\lambda_m \mathcal{Y} \,\sin\left(\frac{m\,\pi}{\ell}\, x\right), O \right), \quad \text{onde} \;\; \lambda_m := \frac{m\,\pi}{\ell}\, \sqrt{\tau} > 0\,. \tag{3.40}$$

É claro que $\mathcal{U}_m \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, para todo $m \geq 1$.

Afirmação. $\mathcal{A}\mathcal{U}_m = i\,\lambda_m \mathcal{U}_m\,,\; \forall\, m \geq 1\,.$

De fato, usando as relações (3.39) e (3.40) tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{U}_m - i\,\lambda_m\, \mathcal{U}_m &= \begin{pmatrix} i\,\lambda_m \mathcal{Y} \,\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}\, x\right) \\ -\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 \mathcal{C}\, \mathcal{Y} \,\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}\, x\right) \\ i\,\lambda_m\, B^{1/2}\mathcal{Y} \,\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}\, x\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i\,\lambda_m \mathcal{Y} \,\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}\, x\right) \\ -\lambda_m^2 \mathcal{Y} \,\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}\, x\right) \\ O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O \\ -\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 (\mathcal{C} - \tau\, I)\, \mathcal{Y} \,\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}\, x\right) \\ i\,\lambda_m\, B^{1/2}\mathcal{Y} \,\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}\, x\right) \end{pmatrix} \\ &= O\,. \end{aligned}$$

Assim, a afirmação está provada.

Logo, da afirmação anterior obtém-se $i\,\lambda_m \in \sigma(\mathcal{A})$, para todo $m \geq 1$, o que é um absurdo, pois $i\,\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Assim, a condição (3.38) é necessária.

Finalmente mostraremos que a condição (3.38) é suficiente.

Procedendo por contradição, suponhamos que $i\,\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A})$.

Pelo Lema 3.2, existem $\lambda_0 > 0$ e $\widehat{\mathcal{U}} = \left(\widehat{U}, \widehat{V}, O\right) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tais que

$$\left\|\widehat{\mathcal{U}}\right\|_{\mathcal{H}} = 1 \quad \text{e} \quad i\,\lambda_0\widehat{\mathcal{U}} - \mathcal{A}\widehat{\mathcal{U}} = O\,.$$

Isto é,

$$i\,\lambda_0\widehat{U} - \widehat{V} = O\,, \tag{3.41}$$

$$i\,\lambda_0\widehat{V} - \mathcal{C}\,\widehat{U}_{xx} = O\,, \tag{3.42}$$

$$B^{1/2}\widehat{V} = O\,. \tag{3.43}$$

Da relação (3.41) obtém-se $\widehat{V} = i\,\lambda_0\widehat{U}$.

Subtituindo a relação anterior nas relações (3.42) e (3.43) têm-se

$$-\lambda_0^2\widehat{U} = \mathcal{C}\,\widehat{U}_{xx}\,,$$
$$B^{1/2}\widehat{U} = O\,.$$

Multiplicando a primeira equação por $B^{1/2}$ obtém-se $B^{1/2}\mathcal{C}\,\widehat{U}_{xx} = O$, o que implica $B^{1/2}\mathcal{C}\,\widehat{U} = O$.

Logo, multiplicando a primeira equação por $B^{1/2}\mathcal{C}$ obtém-se $B^{1/2}\mathcal{C}^2\,\widehat{U}_{xx} = O$, o que implica $B^{1/2}\mathcal{C}^2\,\widehat{U} = O$. Então, usando indução tem-se

$$B^{1/2}\mathcal{C}^m\,\widehat{U} = O\,, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}\,.$$

Da relação anterior segue que

$$B_j^{1/2}\mathcal{C}^m\,\widehat{U} = O\,, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \cdots, n \text{ e } m = 0, 1, \cdots, n-1\,. \tag{3.44}$$

Logo, usando a hipótese (3.38) na relação (3.44) obtém-se $\widehat{U} = O$. Além disso, na relação (3.41) tem-se $\widehat{V} = O$. Portanto $\widehat{\mathcal{U}} = O$, o que é um absurdo, pois $\left\|\widehat{\mathcal{U}}\right\|_{\mathcal{H}} = 1$.

Assim, a condição (3.38) é suficiente. □

A seguir demonstramos que os conceitos de estabilidade exponencial e estabilidade forte são equivalentes. Mas, antes mostramos um lema crucial para a obtenção do resultado.

Lema 3.4. *Consideremos a equação resolvente* $(i\,\lambda\, I-\mathcal{A})\mathcal{U}=\mathcal{F}$ *com* $|\lambda|>1$ *, onde* $\mathcal{F}=\left(\widetilde{U},\widetilde{V},\widetilde{\eta}\right)\in\mathcal{H}$ *e* $\mathcal{U}=(U,V,\eta)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *.*

Então, para todo $\epsilon>0$ *, existe uma constante* $C_\epsilon>0$ *, que depende só de* ϵ *, tais que*

$$\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|^2_{[H_0^1]^n}:=\int_0^\ell\left|B^{1/2}\mathcal{C}^m U_x\right|^2dx\leq\epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}}+C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\quad e$$

$$\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m V\right\|^2_{[L^2]^n}:=\int_0^\ell\left|B^{1/2}\mathcal{C}^m V\right|^2dx\leq\epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}}+C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\ ,$$

para todo $m=0\,,\,1\,,\cdots,\,n-1$ *.*

Demonstração. Reescrevendo a equação espectral obtém-se

$$i\,\lambda\,U-V=\widetilde{U}\,, \tag{3.45}$$

$$i\,\lambda\,V-\mathcal{C}\,U_{xx}-\int_0^{+\infty}g(s)\,B^{1/2}\eta_{xx}\,ds=\widetilde{V}\,, \tag{3.46}$$

$$i\,\lambda\,\eta-B^{1/2}V+\eta_s=\widetilde{\eta}\,. \tag{3.47}$$

Notemos que repetindo os mesmos argumentos feitos para a obtenção das relações (3.23) e (3.27) têm-se

$$\|\eta\|^2_{[L_g^2]^n}=\int_0^{+\infty}g(s)\int_0^\ell\eta_x^*\,\eta_x\,dx\,ds\leq\frac{2}{\kappa}\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\quad\text{e} \tag{3.48}$$

$$\frac{1}{|\lambda|^2}\left\|B^{1/2}V\right\|^2_{[H_0^1]^n}=\frac{1}{|\lambda|^2}\int_0^\ell V_x^*\,B\,V_x\,dx\leq C\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}+C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\ , \tag{3.49}$$

onde a constante $C>0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ .

A seguir demonstramos as desigualdades para $m=0$ e depois para $m\geq1$.

Caso $m=0$.

Primeiro passo. Limitação do termo $\|B^{1/2}U\|^2_{[H_0^1]^n}=\int_0^\ell\left|B^{1/2}U_x\right|^2dx$.

Usando a relação (3.49) na relação (3.45) obtém-se

$$\begin{aligned}\left\|B^{1/2}U\right\|^2_{[H_0^1]^n}&=\left\|\frac{1}{\lambda}\,B^{1/2}V+\frac{1}{\lambda}\,B^{1/2}\widetilde{U}\right\|^2_{[H_0^1]^n}\\&\leq\frac{2}{|\lambda|^2}\,\left\|B^{1/2}V\right\|^2_{[H_0^1]^n}+\frac{2}{|\lambda|^2}\,\left\|B^{1/2}\widetilde{U}\right\|^2_{[H_0^1]^n}\\&\leq\frac{2}{|\lambda|^2}\,\left\|B^{1/2}V\right\|^2_{[H_0^1]^n}+C\left\|\widetilde{U}\right\|^2_{[H_0^1]^n}\\&\leq C\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}+C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\ ,\end{aligned} \tag{3.50}$$

onde a constante $C>0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ .

Além disso, segue daí

$$\left\|B^{1/2}U\right\|^2_{[H_0^1]^n}\leq\epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}}+C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\ , \tag{3.51}$$

onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ.

Segundo passo. Limitação do termo $\left\|B^{1/2}V\right\|^2_{[L^2]^n} = \int_0^\ell \left|B^{1/2}V\right|^2 dx$.

Multiplicando pela esquerda por $(B\,U)^*$ à relação (3.46) e integrando sobre $[0,\ell]$ tem-se

$$i\,\lambda\int_0^\ell U^* B\,V\,dx = \int_0^\ell U^* B\,\widetilde{V}\,dx - \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell U_x^* B^{3/2}\eta_x dx\,ds - \int_0^\ell U_x^* B\,\mathcal{C}\,U_x dx\,,$$

ou seja,

$$i\,\lambda\int_0^\ell U^* B\,V\,dx = \int_0^\ell U^* B\,\widetilde{V}\,dx - \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell \left(B^{1/2}U\right)_x^* (B\,\eta)_x\,dx\,ds - \int_0^\ell \left(B^{1/2}U\right)_x^* \left(B^{1/2}\mathcal{C}\,U\right)_x dx\,. \tag{3.52}$$

Por outro lado, tomando $*$ na relação (3.45), depois multiplicando pela direita por $B\,V$ e integrando sobre $[0,\ell]$ obtém-se

$$-i\,\lambda\int_0^\ell U^* B\,V\,dx - \int_0^\ell V^* B\,V\,dx = \int_0^\ell \widetilde{U}^* B\,V\,dx\,. \tag{3.53}$$

Somando as relações (3.52) e (3.53) tem-se

$$\begin{aligned}
\left\|B^{1/2}V\right\|^2_{[L^2]^n} &\le \left|\int_0^\ell \widetilde{U}^* B\,V\,dx\right| + \left|\int_0^\ell U^* B\,\widetilde{V}\,dx\right| + \left|\int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell \left(B^{1/2}U\right)_x^* (B\,\eta)_x\,dx\,ds\right| + \\
&\quad \left|\int_0^\ell \left(B^{1/2}U\right)_x^* \left(B^{1/2}\mathcal{C}\,U\right)_x dx\right| \\
&\le \left\|\widetilde{U}\right\|_{[L^2]^n} \|B\,V\|_{[L^2]^n} + \|U\|_{[L^2]^n} \left\|B\,\widetilde{V}\right\|_{[L^2]^n} + \left\|B^{1/2}U\right\|_{[L_g^2]^n} \|B\,\eta\|_{[L_g^2]^n} + \\
&\quad \left\|B^{1/2}U\right\|_{[H_0^1]^n} \left\|B^{1/2}\mathcal{C}\,U\right\|_{[H_0^1]^n} \\
&\le C\left\|\widetilde{U}\right\|_{[L^2]^n} \|V\|_{[L^2]^n} + C\,\|U\|_{[L^2]^n} \left\|\widetilde{V}\right\|_{[L^2]^n} + C\left\|B^{1/2}U\right\|_{[H_0^1]^n} \|\eta\|_{[L_g^2]^n} + \\
&\quad C\,\|U\|_{[H_0^1]^n} \left\|B^{1/2}U\right\|_{[H_0^1]^n} \\
&\le C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \left\|B^{1/2}U\right\|_{[H_0^1]^n}\,,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

a qual, usando a relação (3.50) obtém-se

$$\begin{aligned}
\left\|B^{1/2}V\right\|^2_{[L^2]^n} &\le \epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|B^{1/2}U\right\|^2_{[H_0^1]^n} \\
&\le \epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\,,
\end{aligned}$$

onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ.

Caso $m = 1, 2, \cdots, n-1$.

O primeiro passo é obter uma limitação anterior do termo $\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|^2_{[H_0^1]^n} = \int_0^\ell \left|B^{1/2}\mathcal{C}^m U_x\right|^2 dx$

antes da limitação pedida.

Multiplicando pela esquerda por $\left(\mathcal{C}^{m-1}B\mathcal{C}^{m}U\right)^{*}$ à relação (3.46) e integrando sobre $[0,\ell]$ tem-se

$$i\,\lambda\int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}V\,dx+\int_0^\ell U_x^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m U_x\,dx=\int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}\widetilde{V}\,dx-\int_0^{+\infty}g(s)\int_0^\ell U_x^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}B^{1/2}\eta_x\,dx\,ds\,,$$

ou seja,

$$i\,\lambda\int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}V\,dx+\int_0^\ell \left(B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right)_x^*\left(B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right)_x dx=\int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}\widetilde{V}\,dx-\int_0^{+\infty}g(s)\int_0^\ell \left(B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right)_x^*\left(B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1}B^{1/2}\eta\right)_x dx\,ds\,. \tag{3.55}$$

Por outro lado, tomando $*$ na relação (3.45), depois multiplicando pela direita por $\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}V$ e integrando sobre $[0,\ell]$ obtém-se

$$-i\,\lambda\int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}V\,dx=\int_0^\ell V^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}V\,dx+\int_0^\ell \widetilde{U}^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}V\,dx\,. \tag{3.56}$$

Somando as relações (3.55) e (3.56) tem-se

$$\begin{aligned}
\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|_{[H_0^1]^n}^2 &\le \left|\int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}\widetilde{V}\,dx\right|+\left|\int_0^\ell \left(B^{1/2}\mathcal{C}^m V\right)^*\left(B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1}V\right)dx\right|+\\
&\quad\left|\int_0^{+\infty}g(s)\int_0^\ell \left(B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right)_x^*\left(B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1}B^{1/2}\eta\right)_x dx\,ds\right|+\left|\int_0^\ell \widetilde{U}^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}V\,dx\right|\\
&\le \|U\|_{[L^2]^n}\left\|\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}\widetilde{V}\right\|_{[L^2]^n}+\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|_{[L_g^2]^n}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1}B^{1/2}\eta\right\|_{[L_g^2]^n}+\\
&\quad\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m V\right\|_{[L^2]^n}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1}V\right\|_{[L^2]^n}+\left\|\widetilde{U}\right\|_{[L^2]^n}\left\|\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m-1}V\right\|_{[L^2]^n}\\
&\le C\,\|U\|_{[H_0^1]^n}\left\|\widetilde{V}\right\|_{[L^2]^n}+C\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|_{[H_0^1]^n}\|\eta\|_{[L_g^2]^n}+C\,\|V\|_{[L^2]^n}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1}V\right\|_{[L^2]^n}+\\
&\quad C\left\|\widetilde{U}\right\|_{[L^2]^n}\|V\|_{[L^2]^n}\\
&\le C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}+C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1}V\right\|_{[L^2]^n}+\frac{1}{2}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|_{[H_0^1]^n}^2+C\,\|\eta\|_{[L_g^2]^n}^2\,,
\end{aligned}$$

a qual, usando a relação (3.48) obtém-se

$$\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|_{[H_0^1]^n}^2\le C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}+C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1}V\right\|_{[L^2]^n}\,, \tag{3.57}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Além disso, segue daí

$$\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|^2_{[H_0^1]^n} \leq \epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1}V\right\|_{[L^2]^n}, \tag{3.58}$$

onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ.

O segundo passo é obter uma limitação análoga ao anterior para o termo $\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m V\right\|^2_{[L^2]^n}$.

Tomando $*$ na relação (3.45), depois multiplicando pela direita por $\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m V$ e integrando sobre $[0,\ell]$ obtém-se

$$-i\,\lambda\int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m V\,dx - \int_0^\ell V^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m V\,dx = \int_0^\ell \widetilde{U}^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m V\,dx. \tag{3.59}$$

Por outro lado, multiplicando pela esquerda por $(\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m U)^*$ à relação (3.46) e integrando sobre $[0,\ell]$ tem-se

$$\begin{aligned} i\,\lambda\int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m V\,dx &= \int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m \widetilde{V}\,dx - \int_0^\ell U_x^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^{m+1}U_x dx - \\ &\quad \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell U_x^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m B^{1/2}\eta_x dx\,ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} i\,\lambda\int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m V\,dx &= \int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m \widetilde{V}\,dx - \int_0^\ell \left(B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right)^*_x \left(B^{1/2}\mathcal{C}^{m+1}U\right)_x dx - \\ &\quad \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell \left(B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right)^*_x \left(B^{1/2}\mathcal{C}^m B^{1/2}\eta\right)_x dx\,ds. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Somando as relações (3.59) e (3.60) tem-se

$$\begin{aligned} \left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m V\right\|^2_{[L^2]^n} &\leq \left|\int_0^\ell U^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m \widetilde{V}\,dx\right| + \left|\int_0^\ell \left(B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right)^*_x \left(B^{1/2}\mathcal{C}^{m+1}U\right)_x dx\right| + \\ &\quad \left|\int_0^\ell \widetilde{U}^*\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m V\,dx\right| + \left|\int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell \left(B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right)^*_x \left(B^{1/2}\mathcal{C}^m B^{1/2}\eta\right)_x dx\,ds\right| \\ &\leq \|U\|_{[L^2]^n}\left\|\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m \widetilde{V}\right\|_{[L^2]^n} + \left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|_{[H_0^1]^n}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^{m+1}U\right\|_{[H_0^1]^n} + \\ &\quad \left\|\widetilde{U}\right\|_{[L^2]^n}\|\mathcal{C}^m B\,\mathcal{C}^m V\|_{[L^2]^n} + \left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|_{[L_g^2]^n}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m B^{1/2}\eta\right\|_{[L_g^2]^n} \\ &\leq C\,\|U\|_{[L^2]^n}\left\|\widetilde{V}\right\|_{[L^2]^n} + C\,\|U\|_{[H_0^1]^n}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|_{[H_0^1]^n} + C\left\|\widetilde{U}\right\|_{[L^2]^n}\|V\|_{[L^2]^n} + \\ &\quad C\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|_{[H_0^1]^n}\|\eta\|_{[L_g^2]^n} \\ &\leq C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|_{[H_0^1]^n}, \end{aligned} \tag{3.61}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ .

Além disso, se $D_\epsilon > 0$ é qualquer constante que depende só de ϵ , então repetindo o processo anterior obtém-se

$$D_\epsilon \left\| B^{1/2}\mathcal{C}^m V \right\|^2_{[L^2]^n} \leq C_\epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|_{\mathcal{H}} \left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|_{\mathcal{H}} \left\| B^{1/2}\mathcal{C}^m U \right\|_{[H^1_0]^n} , \tag{3.62}$$

onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ .

Finalmente, usamos as limitações (3.57), (3.58), (3.61) e (3.62) para obter a conclusão pedida.

De fato, usando a relação (3.57) na relação (3.61) tem-se

$$\begin{aligned}
\left\| B^{1/2}\mathcal{C}^m V \right\|^2_{[L^2]^n} &\leq \epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{F}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\| B^{1/2}\mathcal{C}^m U \right\|^2_{[H^1_0]^n} \\
&\leq \epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{F}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|_{\mathcal{H}} \left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|_{\mathcal{H}} \left\| B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1} V \right\|_{[L^2]^n} , \\
&\leq \epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{F}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\| B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1} V \right\|^2_{[L^2]^n} ,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ .

Análogamente ao anterior, na relação (3.62) obtém-se

$$D_\epsilon \left\| B^{1/2}\mathcal{C}^m V \right\|^2_{[L^2]^n} \leq \epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{F}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\| B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1} V \right\|^2_{[L^2]^n} , \tag{3.64}$$

onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ .

Então usando a relação (3.64) de maneira indutiva na relação (3.63) tem-se

$$\begin{aligned}
\left\| B^{1/2}\mathcal{C}^m V \right\|^2_{[L^2]^n} &\leq \epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{F}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\| B^{1/2}\mathcal{C}^{m-1} V \right\|^2_{[L^2]^n} \\
&\leq \epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{F}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\| B^{1/2}\mathcal{C}^{m-2} V \right\|^2_{[L^2]^n} \\
&\dots \\
&\leq \epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{F}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\| B^{1/2} V \right\|^2_{[L^2]^n} ,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ .

Além disso, procedendo de maneira análoga ao anterior, na relação (3.58) obtém-se

$$\left\| B^{1/2}\mathcal{C}^m U \right\|^2_{[H^1_0]^n} \leq \epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{F}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\| B^{1/2} V \right\|^2_{[L^2]^n} , \tag{3.66}$$

onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ .

Logo, usando as relações (3.54) e (3.50) nas relações (3.65) e (3.66) têm-se

$$\begin{aligned}
\left\| B^{1/2}\mathcal{C}^m U \right\|^2_{[H^1_0]^n} &\leq \epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{F}\right\|^2_{\mathcal{H}} \\
\left\| B^{1/2}\mathcal{C}^m V \right\|^2_{[L^2]^n} &\leq \epsilon \left\|\mathcal{U}\right\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \left\|\mathcal{F}\right\|^2_{\mathcal{H}} ,
\end{aligned}$$

onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ.

Assim, o lema está provado. $\square$

Teorema 3.4. $\left(e^{\mathcal{A}\,t}\right)_{t\geq 0}$ *é exponencialmente estável se, e somente se,* $\left(e^{\mathcal{A}\,t}\right)_{t\geq 0}$ *é fortemente estável. Em particular, este resultado implica a falta de estabilidade polinomial do semigrupo correspondente.*

Demonstração. A demonstração do teorema é baseada em verificar as hipóteses do Teorema 1.14.

Suponhamos que $\left(e^{\mathcal{A}\,t}\right)_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável.

Então pelo Teorema 1.14 segue que $\left(e^{\mathcal{A}\,t}\right)_{t\geq 0}$ é fortemente estável.

Recíprocamente, suponhamos que $\left(e^{\mathcal{A}\,t}\right)_{t\geq 0}$ é fortemente estável, isto é, $i\,\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Então pelo Teorema 3.3 tem-se

$$dim\,span\left\{B_j^{1/2}\,,\; B_j^{1/2}\mathcal{C}\,,\; B_j^{1/2}\mathcal{C}^2\,,\;\cdots\,,\; B_j^{1/2}\mathcal{C}^{n-1}\;:\; j=1,\cdots,n\right\} = n\,, \tag{3.67}$$

onde $\mathcal{B}_j^{1/2}$ é o $j-$ vetor linha de $\mathcal{B}^{1/2}$.

Consideremos uma base do espaço vetorial da relação (3.67)

$$\mathcal{V}_i := B_{j_i}^{1/2}\mathcal{C}^{m_i}\,,\; i=1,\cdots,n\,, \tag{3.68}$$

onde $1 \leq j_i \leq n$ e $0 \leq m_i \leq n-1$, para todo $i=1,\cdots,n$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que a base é ortonornal.

Por outro lado, resta demonstrar que o operador resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Isto é, deve-se mostrar que existe uma constante $C>0$ tal que

$$\left\|(i\,\lambda\,I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C\,,\;\forall\,\lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Sejam $\epsilon>0$ e $\mathcal{F} = \left(\widetilde{U},\widetilde{V},\widetilde{\eta}\right) \in \mathcal{H} = \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times L_g^2\left(0,+\infty;\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right)$.

Dado $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $|\lambda|>1$.

Denotemos por $\mathcal{U} := (i\,\lambda\,I - \mathcal{A})^{-1}\,\mathcal{F}$, onde $\mathcal{U} = (U,V,\eta)\in D(\mathcal{A})$.

Deve-se mostrar que existe uma constante $C>0$, que não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ, tal que

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,.$$

De fato, aplicando o Lema 3.4 à equação espectral $(i\,\lambda\,I - \mathcal{A})\mathcal{U} = \mathcal{F}$ têm-se

$$\begin{aligned}\left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m U\right\|^2_{[H_0^1]^n} &\leq \epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} \quad \text{e}\\ \left\|B^{1/2}\mathcal{C}^m V\right\|^2_{[L^2]^n} &\leq \epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\,,\end{aligned} \tag{3.69}$$

para todo $m = 1, \cdots, n-1$, onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ.

Além disso, da relação (3.68) segue que

$$\begin{aligned} U_x(x) &= \alpha_1(x)\,\mathcal{V}_1^* + \alpha_2(x)\,\mathcal{V}_2^* + \cdots + \alpha_n(x)\,\mathcal{V}_n^* \quad \text{e} \\ V(x) &= \beta_1(x)\,\mathcal{V}_1^* + \beta_2(x)\,\mathcal{V}_2^* + \cdots + \beta_n(x)\,\mathcal{V}_n^*, \end{aligned}$$

onde $\alpha_i(x) = \mathcal{V}_i\,U_x(x)$ e $\beta_i(x) = \mathcal{V}_i\,V(x)$, para todo $i = 1, \cdots, n$.

Então da relação anterior têm-se

$$\begin{aligned} \|U\|^2_{[H_0^1]^n} &= \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\,\mathcal{V}_i^*\right\|^2_{[L^2]^n} \le \sum_{i=1}^n C\,\|\alpha_i\,\mathcal{V}_i^*\|^2_{[L^2]^n} = \sum_{i=1}^n C\,\|\alpha_i\|^2_{L^2} \quad \text{e} \\ \|V\|^2_{[L^2]^n} &= \left\|\sum_{i=1}^n \beta_i\,\mathcal{V}_i^*\right\|^2_{[L^2]^n} \le \sum_{i=1}^n C\,\|\beta_i\|^2_{L^2}\,. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Usando a relação (3.69) obtém-se

$$\begin{aligned} \|\alpha_i\|^2_{L^2} = \|\mathcal{V}_i U_x\|^2_{L^2} &= \left\|B_{j_i}^{1/2}\mathcal{C}^{m_i}U\right\|^2_{H_0^1} \le \left\|B^{1/2}\mathcal{C}^{m_i}U\right\|^2_{[H_0^1]^n} \le \epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} \quad \text{e} \\ \|\beta_i\|^2_{L^2} = \|\mathcal{V}_i V\|^2_{L^2} &= \left\|B_{j_i}^{1/2}\mathcal{C}^{m_i}V\right\|^2_{L^2} \le \epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\,, \end{aligned} \tag{3.71}$$

para todo $i = 1, \cdots, n$, onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ.

Logo, usando a relação (3.71) na relação (3.70) têm-se

$$\begin{aligned} \|U\|^2_{[H_0^1]^n} &\le \epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} \quad \text{e} \\ \|V\|^2_{[L^2]^n} &\le \epsilon\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{3.72}$$

onde a constante $C_\epsilon > 0$ depende só de ϵ.

Além disso, da propriedade dissipativa tem-se

$$\|\eta\|^2_{[L_g^2]^n} = \int_0^{+\infty} g(s)\int_0^\ell \eta_x^*\eta_x dx\,ds \le \frac{2}{\kappa}\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{3.73}$$

Portanto, das relações (3.72) e (3.73) tem-se que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\left\|(i\,\lambda\,I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le C_1\,,\ \forall\ |\lambda| > 1\,.$$

Além disso, pela continuidade do operador resolvente, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\left\|(i\,\lambda\,I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le C_2\,,\ \forall\ |\lambda| \le 1\,.$$

Assim, o teorema está provado. □

Capítulo 4

Mistura de sólidos com efeito térmico de Cattaneo.

4.1 Introdução.

Neste capítulo estudamos o sistema unidimensional modelando as deformações termomecânicas para uma mistura de n sólidos termoviscoelásticos interagindo continuamente com configuração de referência sobre $[0,\ell]$ e adicionamos o efeito de aquecimento do material durante o processo de deformação. A viscoelasticidade é de tipo Kelvin-Voigt e o efeito térmico é governado pela lei de Cattaneo (second sound). Cada sólido do modelo é flexível, uniforme (a massa por unidade de comprimento é constante) e homogêneo (sem força externa de perturbação).

Para todo $i=1,\cdots,n$, denotamos por $U^i:=U^i(x_i,t)$ o deslocamento transversal das partículas do $i-$ sólido da mistura com densidade de massa ρ_i e ocupando o intervalo finito $x_i\in[0,\ell]$ no intervalo de tempo $t\in[0,+\infty)$. Assumimos que:

- As partículas consideradas ocupam a mesma posição no tempo $t=0$, isto é $x=x_i$, para todo $i=1,\cdots,n$. Então podemos assumir que

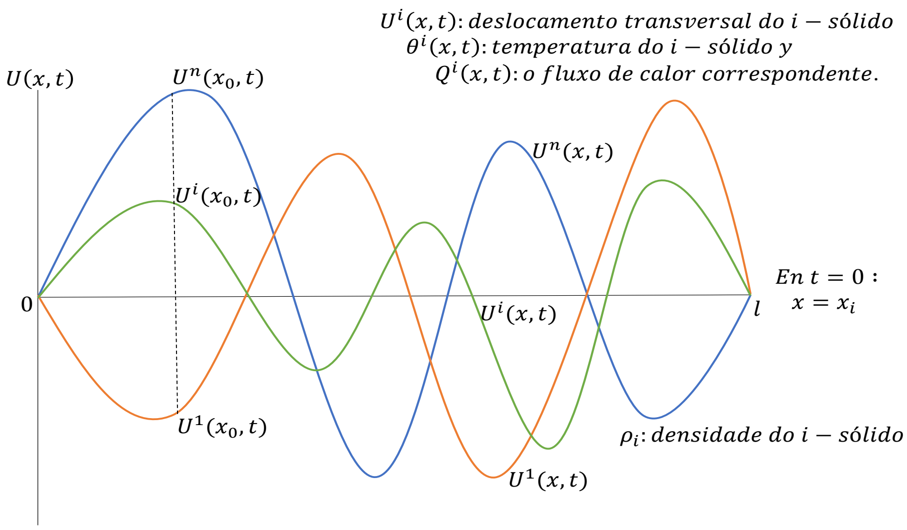
$$U^i:[0,\ell]\times[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}\,,\quad \text{para todo } i=1,\cdots,n\,.$$

- Existem n temperaturas diferentes (ver [25]) dadas por

$$\Theta^i:[0,\ell]\times[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}\,,\quad \text{para todo } i=1,\cdots,n\,.$$

  Além disso, o fluxo de calor correspondente é denotado por

$$Q^i:[0,\ell]\times[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}\,,\quad \text{para todo } i=1,\cdots,n\,.$$



Por outro lado, as correspondentes equações de movimento e equações de energia são dadas por

$$\rho_i U^i_{tt} = T^i_x + P^i + F^i \quad \text{e}$$
$$\mathcal{T}_0 \rho_i \mathcal{E}^i_t = \widetilde{Q}^i_x + \mathcal{W}^i\,, \quad \text{para todo } \ i = 1, \cdots, n\,, \tag{4.1}$$

onde $\mathcal{T}_0$ é a temperatura absoluta na configuração de referência. As equações constitutivas são dadas por:

1. T^i é a contribuição da tensão da $i-$ ésima componente da mistura. A lei constitutiva usada

$$T^i := \left(a_{i1}U^1_x + a_{i2}U^2_x + \cdots + a_{in}U^n_x\right) + \left(b_{i1}U^1_{xt} + b_{i2}U^2_{xt} + \cdots + b_{in}U^n_{xt}\right) - \left(c_{i1}\Theta^1 + c_{i2}\Theta^2 + \cdots + c_{in}\Theta^n\right),$$

para todo $i = 1, \cdots, n$, onde as constantes $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $i, j = 1, \cdots, n$.

2. P^i representa a força interna do corpo da $i-$ ésima componente da mistura, que depende dos deslocamentos verticais dos sólidos constituintes. Aqui é dada por

$$P^i := -\eta_{i1}U^1 - \eta_{i2}U^2 - \cdots - \eta_{in}U^n\,, \quad \text{para todo } \ i = 1, \cdots, n\,,$$

onde as constantes $\eta_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $i\,,\, j = 1, \cdots, n$.

3. F^i representa a força externa da $i-$ ésima componente da mistura. Aqui assumimos que é pequena, de modo que pode ser omitido.

4. $\mathcal{E}^i$ representa a densidade de entropia da $i-$ ésima componente da mistura. Aquí é dada

$$\mathcal{E}^i := \left(\mathcal{T}_0^{-1}\rho_i^{-1}c_{i1}U_x^1 + \mathcal{T}_0^{-1}\rho_i^{-1}c_{i2}U_x^2 + \cdots + \mathcal{T}_0^{-1}\rho_i^{-1}c_{in}U_x^n\right) + \left(\widetilde{d}_{i1}\Theta^1 + \widetilde{d}_{i2}\Theta^2 + \cdots + \widetilde{d}_{in}\Theta^n\right),$$

para todo $i = 1, \cdots, n$, onde as constantes $\widetilde{d}_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $i, j = 1, \cdots, n$.

5. As funções $\mathcal{W}^i$ são dadas por

$$\mathcal{W}^i := -\widehat{d}_{i1}\Theta_t^1 - \widehat{d}_{i2}\Theta_t^2 - \cdots - \widehat{d}_{in}\Theta_t^n, \quad \text{para todo } i = 1, \cdots, n,$$

onde as constantes $\widehat{d}_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $i, j = 1, \cdots, n$.

6. $\widetilde{Q}^i$ é a contribuição do fluxo de calor da $i-$ ésima componente da mistura. Aquí é dada

$$\widetilde{Q}^i := -s_{i1}Q^1 - s_{i2}Q^2 - \cdots - s_{in}Q^n, \quad \text{para todo } i = 1, \cdots, n,$$

onde as constantes $s_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $i, j = 1, \cdots, n$.

7. A condução de calor é dada pela lei de Cattaneo

$$\left(\tau_{i1}Q_t^1 + \tau_{i2}Q_t^2 + \cdots + \tau_{in}Q_t^n\right) + Q^i + \left(s_{i1}\Theta_x^1 + s_{i2}\Theta_x^2 + \cdots + s_{in}\Theta_x^n\right) = 0,$$

para todo $i = 1, \cdots, n$, onde as constantes $\tau_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $i, j = 1, \cdots, n$.

Logo, substituindo as relações anteriores na relação (4.1) obtém-se o modelo matemático

$$R\,U_{tt} - A\,U_{xx} + N\,U - B\,U_{xxt} + \mathcal{C}\,\Theta_x = O \quad , \quad 0 < x < \ell,\ t > 0 \tag{4.2}$$

$$D\,\Theta_t + S\,Q_x + \mathcal{C}\,U_{xt} = O \quad , \quad 0 < x < \ell,\ t > 0 \tag{4.3}$$

$$\mathcal{T}\,Q_t + Q + S\,\Theta_x = O \quad , \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \tag{4.4}$$

onde,

1. $R := diag\,(\rho_1, \cdots, \rho_n)$, $A := (a_{ij})$, $N := (\eta_{ij})$, $B := (b_{ij})$, $\mathcal{C} := (c_{ij})$, $S := (s_{ij})$, $\mathcal{T} := (\tau_{ij})$ e $D := (d_{ij})$, $d_{ij} = \mathcal{T}_0\rho_i\widetilde{d}_{i1} + \widehat{d}_{i1}$ são matrizes em $\mathbb{R}^{n\times n}$.

2. $U : [0, \ell] \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $U(x,t) = \left(U^1(x,t), \cdots, U^n(x,t)\right)^T$ é uma aplicação vetorial e os U^i denotam os deslocamentos verticais dos constituintes.

3. $\Theta : [0, \ell] \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $\Theta(x,t) = \left(\Theta^1(x,t), \cdots, \Theta^n(x,t)\right)^T$ é uma aplicação vetorial e os Θ^i denotam as temperaturas dos constituintes.

4. $Q : [0, \ell] \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $Q(x,t) = \big(Q^1(x,t), \cdots, Q^n(x,t)\big)^T$ é o vetor de fluxo de calor e os Q^i denotam os fluxos de calor dos constituintes.

Além disso, as condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned} U(x,0) = U_0(x) \ \text{ e } \ U_t(x,0) = U_1(x)\ , \quad 0 \le x \le \ell \\ \Theta(x,0) = \Theta_0(x)\ , \quad 0 \le x \le \ell \\ Q(x,0) = Q_0(x)\ , \quad 0 \le x \le \ell\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Mas, com respeito às condições de fronteira, tratamos com uma estrutura rigidamente fixada com fluxo de calor zero sobre a fronteira, isto é,

$$\begin{aligned} U(0,t) = O = U(\ell,t)\ , \quad \forall\, t \ge 0 \\ Q(0,t) = O = Q(\ell,t)\ , \quad \forall\, t \ge 0\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Observações 4.1. *Integrando formalmente a equação (4.3) sobre* $[0,\ell]$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell D\,\Theta(x,t)\,dx = O\,, \quad \forall\, t \ge 0\,. \tag{4.7}$$

Isto é, a média de $D\,\Theta$ *é conservada no tempo, de modo que podemos estudar o problema para as aplicações* Θ *tal que* $\displaystyle\int_0^\ell D\,\Theta\,dx = O\,.$

Hipóteses.

1. Assumimos que todas as matrizes do problema (4.2)-(4.4), exceto N , são definidas positivas e N é semidefinida positiva.

2. Assumimos que $\displaystyle\int_0^\ell \Theta_0\,dx = O\,.$
   Então da relação (4.7) segue que

$$\int_0^\ell \Theta(x,t)\,dx = O\,, \quad \forall\, t \ge 0\,. \tag{4.8}$$

Introduzimos as seguintes notações

$$\begin{aligned} \big[L^2_*(0,\ell)\big]^n &= \left\{ W \in \big[L^2(0,\ell)\big]^n \ : \ \int_0^\ell W\,dx = O \right\}, \\ \big[H^1_*(0,\ell)\big]^n &= \left\{ W \in \big[H^1(0,\ell)\big]^n \ : \ \int_0^\ell W\,dx = O \right\}. \end{aligned}$$

Os espaços $\Big(\big[L^2_*(0,\ell)\big]^n, \|\cdot\|_{[L^2]^n}\Big)$ e $\Big(\big[H^1_*(0,\ell)\big]^n, \|\cdot\|_{[H^1]^n}\Big)$ são Espaços de Hilbert.

Observações 4.2. *A energia associada ao sistema (4.2)-(4.6) é dada por*

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\left(\int_0^\ell U_t^* R U_t dx + \int_0^\ell U_x^* A U_x dx + \int_0^\ell U^* N U\, dx + \int_0^\ell \Theta^* D \Theta\, dx + \int_0^\ell Q^* \mathcal{T} Q\, dx\right).$$

Para calcular sua derivada, multiplicamos à equação (4.2) por U_t^* *, à equação (4.3) por* Θ^* *e à equação (4.4) por* Q^* *, depois integrando sobre* $[0,\ell]$ *têm-se*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^\ell U_t^* R\, U_t dx + \int_0^\ell U_x^* A\, U_x dx + \int_0^\ell U^* N\, U\, dx\right) = -\int_0^\ell U_{xt}^* B\, U_{xt} dx - \int_0^\ell U_t^* \mathcal{C}\, \Theta_x dx\,,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Theta^* D\, \Theta\, dx = -\int_0^\ell \Theta^* S\, Q_x dx + \int_0^\ell U_t^* \mathcal{C}\, \Theta_x dx\,,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell Q^* \mathcal{T}\, Q\, dx = -\int_0^\ell Q^* Q\, dx + \int_0^\ell \Theta^* S\, Q_x dx\,.$$

Logo, somando as relações anteriores obtém-se

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -\int_0^\ell U_{xt}^* B\, U_{xt} dx - \int_0^\ell Q^* Q\, dx \leq 0\,.$$

4.2 Existência e unicidade.

Para demonstrar a boa-colocação do problema (4.2)-(4.6), reescrevemos o problema na forma de um problema de Cauchy autônomo $\frac{d}{dt}\mathcal{U} = \mathcal{A}\mathcal{U}$, $\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0$ e mostramos que o operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações para garantir a existência e unicidade de soluções.

Primeiro fazemos $V := U_t$.

Logo, o problema (4.2)-(4.6) reduz-se à equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U \\ V \\ \Theta \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ R^{-1}A\, U_{xx} - R^{-1}N\, U + R^{-1}B\, V_{xx} - R^{-1}\mathcal{C}\, \Theta_x \\ -D^{-1}S\, Q_x - D^{-1}\mathcal{C}\, V_x \\ -\mathcal{T}^{-1}Q - \mathcal{T}^{-1}S\, \Theta_x \end{pmatrix},$$

onde o Espaço de fase é dado por

$$\mathcal{H} := \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times \left[L_*^2(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n,$$

munido do produto interno

$$\left(\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}\right)_{\mathcal{H}} := \int_0^\ell U_x^* A \widetilde{U}_x dx + \int_0^\ell U^* N \widetilde{U}\, dx + \int_0^\ell V^* R \widetilde{V}\, dx + \int_0^\ell \Theta^* D \widetilde{\Theta}\, dx + \int_0^\ell Q^* \mathcal{T} \widetilde{Q}\, dx\,,$$

para todo $\mathcal{U} = (U, V, \Theta, Q)$, $\widetilde{\mathcal{U}} = \left(\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{\Theta}, \widetilde{Q}\right) \in \mathcal{H}$.

É simples verificar que o espaço $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}})$ é um Espaço de Hilbert.

Definição 4.1. *Define-se o operador linear autônomo* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *por*

$$\mathcal{A}\mathcal{U} := \begin{pmatrix} V \\ R^{-1}A\,U_{xx} - R^{-1}N\,U + R^{-1}B\,V_{xx} - R^{-1}\mathcal{C}\,\Theta_x \\ -D^{-1}S\,Q_x - D^{-1}\mathcal{C}\,V_x \\ -\mathcal{T}^{-1}Q - \mathcal{T}^{-1}S\,\Theta_x \end{pmatrix},$$

onde seu domínio é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}) &:= \{\mathcal{U} = (U, V, \Theta, Q) \in \mathcal{H} \,:\, \mathcal{A}\mathcal{U} \in \mathcal{H} \;\; e \;\; Q(0,t) = O = Q(\ell,t)\} \\
&= \big\{\mathcal{U} \in \mathcal{H} \,:\, \big(R^{-1}A\,U_{xx} - R^{-1}N\,U + R^{-1}B\,V_{xx} - R^{-1}\mathcal{C}\,\Theta_x\big) \in \big[L^2(0,\ell)\big]^n, \\
&\qquad V \in \big[H_0^1(0,\ell)\big]^n, \, \big(D^{-1}S\,Q_x + D^{-1}\mathcal{C}\,V_x\big) \in \big[L_*^2(0,\ell)\big]^n, \\
&\qquad \big(\mathcal{T}^{-1}Q + \mathcal{T}^{-1}S\,\Theta_x\big) \in \big[L^2(0,\ell)\big]^n \;\; e \;\; Q(0,t) = O = Q(\ell,t)\big\} \\
&= \big\{\mathcal{U} = (U, V, \Theta, Q) \in \mathcal{H} \,:\, (A\,U + B\,V) \in \big[H^2(0,\ell)\big]^n, \, V \in \big[H_0^1(0,\ell)\big]^n, \\
&\qquad \Theta \in \big[H_*^1(0,\ell)\big]^n \;\; e \;\; Q \in \big[H_0^1(0,\ell)\big]^n\big\}.
\end{aligned}$$

Assim, o problema (4.2)-(4.6) reescreve-se como o problema de Cauchy autônomo

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U} = \mathcal{A}\mathcal{U}\,, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0\,, \tag{4.9}$$

onde $\mathcal{U} = (U, V, \Theta, Q) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{U}_0 = (U_0, U_1, \Theta_0, Q_0) \in \mathcal{H}$.

Teorema 4.1. *O operador* $\mathcal{A}$ *é o gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações* $e^{\mathcal{A}(t)}$.

Demonstração. A demonstração é baseada em verificar as hipóteses do Teorema 1.13.

Para mostrar que o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é denso em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$, notemos que

$$[C_0^\infty(0,\ell)]^n \times [C_0^\infty(0,\ell)]^n \times \big[H_*^1(0,\ell)\big]^n \times [C_0^\infty(0,\ell)]^n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

de onde segue a densidade.

Mostraremos a seguir que o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell U_x^* A V_x dx + \int_0^\ell U^* N V dx + \int_0^\ell (V^*AU_{xx} - V^*NU + V^*BV_{xx} - V^*\mathcal{C}\Theta_x)\,dx \\
- \int_0^\ell (\Theta^* S\,Q_x + \Theta^* \mathcal{C}\,V_x)\,dx - \int_0^\ell (Q^*Q + Q^*S\,\Theta_x)\,dx\,,
\end{aligned}$$

para todo $\mathcal{U} = (U, V, \Theta, Q) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Então

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} = {} & \left(\int_0^\ell U_x^* A\, V_x dx - \overline{\int_0^\ell U_x^* A\, V_x dx}\right) + \left(\int_0^\ell U^* N\, V\, dx - \overline{\int_0^\ell U^* N\, V\, dx}\right) + \\
& \left(\int_0^\ell \Theta_x^* \mathcal{C}\, V\, dx - \overline{\int_0^\ell \Theta_x^* \mathcal{C}\, V\, dx}\right) + \left(\int_0^\ell \Theta_x^* S\, Q\, dx - \overline{\int_0^\ell \Theta_x^* S\, Q\, dx}\right) - \\
& \int_0^\ell V_x^* B\, V_x dx - \int_0^\ell Q^* Q\, dx \\
= {} & 2\, i\, Im \left(\int_0^\ell U_x^* A\, V_x dx + \int_0^\ell U^* N\, V\, dx + \int_0^\ell \Theta_x^* \mathcal{C}\, V\, dx + \int_0^\ell \Theta_x^* S\, Q\, dx\right) - \\
& \int_0^\ell V_x^* B\, V_x dx - \int_0^\ell Q^* Q\, dx\, .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
Re\, (\mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} = -\int_0^\ell V_x^* B\, V_x dx - \int_0^\ell Q^* Q\, dx \leq 0\, . \tag{4.10}
$$

Assim, o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Finalmente mostraremos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, isto é, $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Primeiro mostraremos que $\mathcal{A}$ é bijetiva.

De fato, seja $\mathcal{F} = \left(\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{\Theta}, \widetilde{Q}\right) \in \mathcal{H} = \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times \left[L_*^2(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n$.

Reescrevendo a equação $\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{F}$ obtém-se

$$
V = \widetilde{U} \tag{4.11}
$$

$$
A\, U_{xx} - N\, U + B\, V_{xx} - \mathcal{C}\, \Theta_x = R\, \widetilde{V} \tag{4.12}
$$

$$
S\, Q_x + \mathcal{C}\, V_x = -D\, \widetilde{\Theta} \tag{4.13}
$$

$$
Q + S\, \Theta_x = -\mathcal{T}\, \widetilde{Q}\, , \tag{4.14}
$$

onde $\mathcal{U} = (U, V, \Theta, Q) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Lembremos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \big\{ & \mathcal{U} = (U, V, \Theta, Q) \in \mathcal{H} \, : \, (A\, U + B\, V) \in \left[H^2(0,\ell)\right]^n,\, V \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n, \\
& \Theta \in \left[H_*^1(0,\ell)\right]^n \ \text{ e } \ Q \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \big\}\, .
\end{aligned}
$$

Da relação (4.11) tem-se

$$
V = \widetilde{U} \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n .
$$

Da relação (4.13) tem-se $Q_x = -S^{-1}\left(\mathcal{C}\,\widetilde{U}_x + D\,\widetilde{\Theta}\right) \in \left[L^2(0,\ell)\right]^n$.

Então uma primitiva é

$$Q = \left(-S^{-1}\mathcal{C}\,\widetilde{U} - S^{-1}D\int_0^x \widetilde{\Theta}\,dy\right) \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n .$$

Além disso, da relação (4.14) tem-se $\Theta_x = -S^{-1}\left(Q + \mathcal{T}\,\widetilde{Q}\right) \in \left[L^2(0,\ell)\right]^n$.

Então uma primitiva é

$$\Theta = \left(-S^{-1}\int_0^x \left(Q + \mathcal{T}\,\widetilde{Q}\right)dy + \frac{1}{\ell}\,S^{-1}\int_0^\ell\int_0^x \left(Q + \mathcal{T}\,\widetilde{Q}\right)dy\,dx\right) \in \left[H_*^1(0,\ell)\right]^n .$$

Por outro lado, usaremos o Teorema de Lax-Milgram para mostrar a existência e unicidade da função U. Define-se a aplicação

$$\Phi : \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \Phi(\widetilde{W}, W) := \int_0^\ell W_x^* A \widetilde{W}_x dx + \int_0^\ell W^* N \widetilde{W} dx .$$

É claro que Φ é uma forma sesquilinear, contínua e coerciva.

Além disso, define-se a forma antilinear

$$f : \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f(W) := -\int_0^\ell W_x^* B V_x dx - \int_0^\ell W^* \mathcal{C}\Theta_x dx - \int_0^\ell W^* R\widetilde{V} dx .$$

Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $U \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$ tal que

$$\Phi(U, W) = f(W)\,, \text{ para todo } W \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n .$$

Isto é,

$$\int_0^\ell W_x^*\,(AU_x + BV_x)\,dx = -\int_0^\ell W^*\left(R\widetilde{V} + NU + \mathcal{C}\Theta_x\right)dx\,, \text{ para todo } W \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n . \tag{4.15}$$

Então U é solução fraca de (4.12).

Logo, pelo Princípio da regularidade elítica tem-se

$$(A\,U + B\,V) \in \left[H^2(0,\ell)\right]^n .$$

Por outro lado, seja $\varphi \in D(0,\ell)$.

Para todo $i = 1, ..., n$, denotemos por $W_i = \bar{\varphi}\,e_i$.

Então $W_i \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n$, para todo $i = 1, ..., n$.

Substituindo o anterior na relação (4.15) obtém-se

$$\int_0^\ell \varphi_x\,(A\,U_x + B\,V_x)^i\,dx = -\int_0^\ell \varphi\left(R\,\widetilde{V} + N\,U + \mathcal{C}\,\Theta_x\right)^i dx\,, \text{ para todo } \varphi \in D(0,\ell) .$$

Pela definição da derivada fraca tem-se

$$\left(R\,\widetilde{V} + N\,U + \mathcal{C}\,\Theta_x\right)^i = (A\,U_x + B\,V_x)^i_x = (A\,U_{xx} + B\,V_{xx})^i\,, \quad \text{para todo} \;\; i = 1, \cdots, n\,.$$

Logo, $A\,U_{xx} - N\,U + B\,V_{xx} - \mathcal{C}\,\Theta_x = R\,\widetilde{V}$.

Assim, $\mathcal{A}$ é bijetiva.

Resta mostrar que $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado.

De fato, seja $\mathcal{F} = \left(\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{\Theta}, Q\right) \in \mathcal{H} = \left[H^1_0(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2_*(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n$.

Denotemos por $\mathcal{U} := \mathcal{A}^{-1}\,\mathcal{F}$, onde $\mathcal{U} = (U, V, \Theta, Q) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Deve-se mostrar que existe uma constante $C > 0$, que não depende de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$, tal que

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\ .$$

Reescrevendo a equação $\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{F}$ obtém-se

$$V = \widetilde{U} \tag{4.16}$$

$$A\,U_{xx} - N\,U + B\,V_{xx} - \mathcal{C}\,\Theta_x = R\,\widetilde{V} \tag{4.17}$$

$$S\,Q_x + \mathcal{C}\,V_x = -D\,\widetilde{\Theta} \tag{4.18}$$

$$Q + S\,\Theta_x = -\mathcal{T}\,\widetilde{Q}\,, \tag{4.19}$$

Como

$$\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell U_x^* A\,U_x dx + \int_0^\ell U^* N\,U\,dx + \int_0^\ell V^* R\,V\,dx + \int_0^\ell \Theta^* D\,\Theta\,dx + \int_0^\ell Q^* \mathcal{T}\,Q\,dx\,, \tag{4.20}$$

então basta limitar cada somando.

Primeiro passo. Pela propriedade dissipativa (4.10) segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell V_x^* B\,V_x dx + \int_0^\ell Q^* Q\,dx &= -Re\,(\mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}} \\
&= -Re\,(\mathcal{F}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}$$

Logo, usando a desigualdade de Poincaré, a equivalência de normas e a relação anterior tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell V^* R\,V\,dx + \int_0^\ell Q^* \mathcal{T}\,Q\,dx &\leq C\left(\int_0^\ell V_x^* B\,V_x dx + \int_0^\ell Q^* Q\,dx\right) \\
&\leq C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$.

Segundo passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^\ell \Theta^* D\,\Theta\,dx$.

Usando a relação (4.21) na relação (4.19) obtém-se

$$\begin{aligned}
\|\Theta_x\|^2_{[L^2]^n} = \left\|-S^{-1}Q - S^{-1}\mathcal{T}\,\widetilde{Q}\right\|^2_{[L^2]^n} &\le \left(\left\|S^{-1}Q\right\|_{[L^2]^n} + \left\|S^{-1}\mathcal{T}\,\widetilde{Q}\right\|_{[L^2]^n}\right)^2 \\
&\le 2\left\|S^{-1}Q\right\|^2_{[L^2]^n} + 2\left\|S^{-1}\mathcal{T}\,\widetilde{Q}\right\|^2_{[L^2]^n} \\
&\le C\,\|Q\|^2_{[L^2]^n} + C\left\|\widetilde{Q}\right\|^2_{[L^2]^n} \\
&\le C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\,, \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$.

Logo, usando a desigualdade de Poincaré, a equivalência de normas e a relação (4.22) tem-se

$$\int_0^\ell \Theta^* D\,\Theta\,dx \le C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\,, \qquad (4.23)$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$.

Terceiro passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^\ell U_x^* A\,U_x dx + \int_0^\ell U^* N\,U\,dx$.

Multiplicando por U^* à relação (4.17) e integrando sobre $[0,\ell]$ obtém-se

$$\int_0^\ell U_x^* A\,U_x dx + \int_0^\ell U^* N\,U\,dx = -\int_0^\ell U_x^* B\,V_x dx - \int_0^\ell U^* \mathcal{C}\,\Theta_x dx - \int_0^\ell U^* R\,\widetilde{V}\,dx\,.$$

Então, usando a relação (4.16), a equivalência de normas e a relação (4.22) tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell U_x^* A\,U_x dx + \int_0^\ell U^* N\,U\,dx &\le \left|\int_0^\ell U_x^* B\,\widetilde{U}_x dx\right| + \left|\int_0^\ell U^* \mathcal{C}\,\Theta_x dx\right| + \left|\int_0^\ell U^* R\,\widetilde{V}\,dx\right| \\
&\le C\,\|U_x\|_{[L^2]^n}\left\|\widetilde{U}_x\right\|_{[L^2]^n} + C\,\|U\|_{[L^2]^n}\,\|\Theta_x\|_{[L^2]^n} + C\,\|U\|_{[L^2]^n}\left\|\widetilde{V}\right\|_{[L^2]^n} \\
&\le C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\Theta_x\|_{[L^2]^n} + C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} \\
&\le \frac{1}{2}\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C\,\|\Theta_x\|^2_{[L^2]^n} + C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} \\
&\le \frac{1}{2}\,\|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\,, \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$.

Finalmente, usando as relações (4.21), (4.23) e (4.24) na relação (4.20) tem-se

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \le C\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,,$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$.

Assim, o teorema está provado. □

Agora introduzimos o teorema de existência e unicidade de soluções.

Teorema 4.2. *Se* $\mathcal{U}_0 = (U_0, U_1, \Theta_0, Q_0) \in \mathcal{H} = \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times \left[L_*^2(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n$, *então a aplicação*

$$\mathcal{U} : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{H} \quad \textit{tal que} \quad \mathcal{U}(t) = e^{\mathcal{A}\,t}\,\mathcal{U}_0\,,$$

é a única solução do problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U} = \mathcal{A}\mathcal{U}\,, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0\,,$$

satisfazendo $\mathcal{U} \in C\left([0,+\infty), \mathcal{H}\right)$.
Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *então* $\mathcal{U} \in C^1\left([0,+\infty), \mathcal{H}\right) \cap C\left([0,+\infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})\right)$.

Demonstração. Ver [32]. □

4.3 Regularidade das soluções.

Desde que usamos a abordagem do semigrupo para pesquisar a solubilidade do problema (4.2)-(4.6), temos que esclarecer a relação que existe entre a solução semigrupo dada por $\mathcal{U}(t) = e^{\mathcal{A}\,t}\mathcal{U}_0$ e a solução do problema anterior. Ou seja, nós precisamos mostrar em que sentido as aplicações componentes U, Θ e Q satisfazem o problema (4.2)-(4.6).

1. Se $\mathcal{U}_0 = (U_0, U_1, \Theta_0, Q_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então pelo Teorema 2.2 tem-se

   $$\mathcal{U} \in C^1\left([0,+\infty), \mathcal{H}\right) \cap C\left([0,+\infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})\right).$$

   Segue daí

   $$\begin{aligned} U &\in C^2\left([0,+\infty), \left[L^2(0,\ell)\right]^n\right) \cap C^1\left([0,+\infty), \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right), \\ \Theta &\in C^1\left([0,+\infty), \left[L_*^2(0,\ell)\right]^n\right) \cap C\left([0,+\infty), \left[H_*^1(0,\ell)\right]^n\right), \\ Q &\in C^1\left([0,+\infty), \left[L^2(0,\ell)\right]^n\right) \cap C\left([0,+\infty), \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right) \quad \text{e} \\ (A\,U + B\,U_t) &\in C\left([0,+\infty), \left[H^2(0,\ell)\right]^n\right). \end{aligned}$$

   Além disso, eles satisfazem as equações (4.2)-(4.4) em $\left[L_*^2(0,\ell)\right]^n$, para todo $t > 0$. As condições iniciais (4.5) são satisfeitas no sentido forte e as condições de contorno (4.6) são satisfeitas no sentido do traço.

2. Se $\mathcal{U}_0$ é mais regular, por exemplo $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^2)$, então

$$\mathcal{U} \in C^2\left([0,+\infty),\mathcal{H}\right) \cap C^1\left([0,+\infty),\mathcal{D}(\mathcal{A})\right).$$

Segue daí

$$\begin{aligned}
U &\in C^3\left([0,+\infty),\left[L^2(0,\ell)\right]^n\right) \cap C^2\left([0,+\infty),\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right),\\
\Theta &\in C^2\left([0,+\infty),\left[L_*^2(0,\ell)\right]^n\right) \cap C^1\left([0,+\infty),\left[H_*^1(0,\ell)\right]^n\right),\\
Q &\in C^2\left([0,+\infty),\left[L^2(0,\ell)\right]^n\right) \cap C^1\left([0,+\infty),\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\right) \quad \text{e}\\
(A\,U + B\,U_t) &\in C^1\left([0,+\infty),\left[H^2(0,\ell)\right]^n\right).
\end{aligned}$$

Além disso, eles satisfazem as equações (4.2)-(4.4) em $\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \cap \left[H_*^1(0,\ell)\right]^n$, para todo $t > 0$. As condições iniciais (4.5) e as condições de contorno (4.6) são satisfeitas no sentido forte. Portanto, obtém-se uma solução clássica do problema (4.2)-(4.6).

3. Se $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$, então $\mathcal{V}(t) = e^{\mathcal{A}\,t}\mathcal{U}_0$ e a única mild solução do problema

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t) = \mathcal{A}\mathcal{U}\,,\ \ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0\,.$$

Logo, (U,Θ,Q) é solução fraca do problema (4.2)-(4.6) no sentido que verifica o sistema

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \varphi^* R U_t dx - \int_0^\ell \varphi^* R U_1 dx + \int_0^t\int_0^\ell \varphi_x^* A U_x dx d\tau + \int_0^t\int_0^\ell \varphi^* N U dx d\tau + \int_0^\ell \varphi_x^* B U_x dx&\\
- \int_0^\ell \varphi_x^* B\left(U_0\right)_x dx - \int_0^t\int_0^\ell \varphi_x^* \mathcal{C}\Theta dx d\tau = O&,\\
\int_0^\ell \psi^* D\Theta dx - \int_0^\ell \psi^* D\Theta_0 dx - \int_0^t\int_0^\ell \psi_x^* S Q dx - \int_0^t\int_0^\ell \psi_x^* \mathcal{C} U dx + \int_0^t\int_0^\ell \psi_x^* \mathcal{C} U_0 dx = O&,\\
\int_0^\ell \phi^* \mathcal{T}\, Q\, dx - \int_0^\ell \phi^* \mathcal{T} Q_0 dx + \int_0^t\int_0^\ell \phi^*\, Q\, dx - \int_0^t\int_0^\ell \phi_x^* S\,\Theta\, dx = O&,
\end{aligned}$$

para todo φ , ψ , $\phi \in D(0,\ell)$ e para todo $t > 0$.

4.4 Decaimento Exponencial.

Nesta seção estudamos a estabilidade do semigrupo associado ao problema (4.2)-(4.6). Verificando as hipóteses do Teorema 1.14, demonstramos que o semigrupo correspondente é exponencialmente estável.

Lembremos que

$$\mathcal{H} = \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n \times \left[L_*^2(0,\ell)\right]^n \times \left[L^2(0,\ell)\right]^n ,$$
$$\left(\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}\right)_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell U_x^* A \widetilde{U}_x dx + \int_0^\ell U^* N \widetilde{U}\, dx + \int_0^\ell V^* R \widetilde{V}\, dx + \int_0^\ell \Theta^* D \widetilde{\Theta}\, dx + \int_0^\ell Q^* \mathcal{T} \widetilde{Q}\, dx .$$

$$\mathcal{A}\mathcal{U} := \begin{pmatrix} V \\ R^{-1}A\,U_{xx} - R^{-1}N\,U + R^{-1}B\,V_{xx} - R^{-1}\mathcal{C}\,\Theta_x \\ -D^{-1}S\,Q_x - D^{-1}\mathcal{C}\,V_x \\ -\mathcal{T}^{-1}Q - \mathcal{T}^{-1}S\,\Theta_x \end{pmatrix} .$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{\mathcal{U} = (U,V,\Theta,Q) \in \mathcal{H} \,:\, (A\,U + B\,V) \in \left[H^2(0,\ell)\right]^n ,\, V \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n ,$$
$$\Theta \in \left[H_*^1(0,\ell)\right]^n \;\text{ e }\; Q \in \left[H_0^1(0,\ell)\right]^n \Big\} .$$

Agora apresentamos o teorema principal da seção.

Teorema 4.3 (Estabilidade Exponencial)**.** *O* C_0- *semigrupo* $\left(e^{\mathcal{A}\,t}\right)_{t\geq 0}$ *é exponencialmente estável.*

Demonstração. A demonstração é baseada em verificar as hipóteses do Teorema 1.14.
Primeiro demonstramos que o semigrupo é fortemente estável. Isto é,

$$i\,\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) . \tag{4.25}$$

De fato, procedendo por contradição, suponhamos que $i\,\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A})$.
Pelo Lema 3.1, existem um $\lambda_0 > 0$ e sequências $(\mathcal{U}_m = (U_m, V_m, \Theta_m, Q_m))_{m\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $(\lambda_m)_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$i\,\lambda_m \in \rho(\mathcal{A}) ,\ \forall\, m \geq 1 \quad \text{e} \quad \lambda_m \longrightarrow \lambda_0 , \tag{4.26}$$

$$\|\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{H}} = 1 ,\ \forall\, m \geq 1 , \tag{4.27}$$

$$(i\,\lambda_m - \mathcal{A})\mathcal{U}_m \longrightarrow O \quad \text{em} \quad (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) . \tag{4.28}$$

Denotemos por $\mathcal{F}_m := (i\,\lambda_m - \mathcal{A})\,\mathcal{U}_m$, onde $\mathcal{F}_m = \left(\widetilde{U}_m, \widetilde{V}_m, \widetilde{\Theta}_m, \widetilde{Q}_m\right)$, para todo $m \geq 1$.
Provaremos que $\mathcal{U}_m \longrightarrow O$ em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$, a qual contradiz a hipótese (4.27).
De fato, reescrevendo a relação (4.28) obtém-se

$$i\,\lambda_m U_m - V_m = \widetilde{U}_m\,, \tag{4.29}$$

$$i\,\lambda_m R\,V_m - A\,(U_m)_{xx} + N\,U_m - B\,(V_m)_{xx} + \mathcal{C}\,(\Theta_m)_x = R\,\widetilde{V}_m\,, \tag{4.30}$$

$$i\,\lambda_m D\,\Theta_m + S\,(Q_m)_x + \mathcal{C}\,(V_m)_x = D\,\widetilde{\Theta}_m\,, \tag{4.31}$$

$$i\,\lambda_m \mathcal{T}\,Q_m + Q_m + S\,(\Theta_m)_x = \mathcal{T}\,\widetilde{Q}_m\,. \tag{4.32}$$

onde,

$$\int_0^\ell \left(\widetilde{U}_m\right)_x^* A \left(\widetilde{U}_m\right)_x dx + \int_0^\ell \widetilde{U}_m^* \mathcal{N}\,\widetilde{U}_m dx \longrightarrow 0\,, \quad \text{quando } m \longrightarrow +\infty\,, \tag{4.33}$$

$$\int_0^\ell \widetilde{V}_m^* R\,\widetilde{V}_m dx \longrightarrow 0\,, \quad \text{quando } m \longrightarrow +\infty\,, \tag{4.34}$$

$$\int_0^\ell \widetilde{\Theta}_m^* D\,\widetilde{\Theta}_m dx \longrightarrow 0\,, \quad \text{quando } m \longrightarrow +\infty\,, \tag{4.35}$$

$$\int_0^\ell \widetilde{Q}_m^* \mathcal{T}\,\widetilde{Q}_m dx \longrightarrow 0\,, \quad \text{quando } m \longrightarrow +\infty\,. \tag{4.36}$$

Primeiro passo. Mostraremos que $\displaystyle\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\int_0^\ell V_m^* R\,V_m dx + \int_0^\ell Q_m^* \mathcal{T}\,Q_m dx\right) = 0$.
De fato, tomando produto interno com $\mathcal{U}_m$ na relação (4.28) tem-se

$$i\,\lambda_m \|\mathcal{U}_m\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}\mathcal{U}_m, \mathcal{U}_m)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{F}_m, \mathcal{U}_m)_{\mathcal{H}} \quad \text{e} \quad (\mathcal{F}_m, \mathcal{U}_m)_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0\,, \quad \text{quando } m \longrightarrow +\infty\,.$$

Então da propriedade dissipativa (4.10) e a relação anterior segue que

$$\begin{aligned} \int_0^\ell (V_m)_x^* B\,(V_m)_x\,dx + \int_0^\ell Q_m^* Q_m dx &= -Re\,(\mathcal{A}\mathcal{U}_m, \mathcal{U}_m)_{\mathcal{H}} \\ &= Re\,(\mathcal{F}_m, \mathcal{U}_m)_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0\,, \quad \text{quando } m \longrightarrow +\infty\,. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Logo, usando a desigualdade de Poincaré, a equivalência de normas e a relação (4.37) obtém-se

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\ell V_m^* R\,V_m dx + \int_0^\ell Q_m^* \mathcal{T}\,Q_m dx\right) &\leq C \left(\int_0^\ell (V_m)_x^* B\,(V_m)_x\,dx + \int_0^\ell Q_m^* Q_m dx\right) \\ &= C\,Re\,(\mathcal{F}_m, \mathcal{U}_m)_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0\,, \quad \text{quando } m \longrightarrow +\infty\,. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Segundo passo. Mostraremos que $\displaystyle\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\int_0^\ell (U_m)_x^* A\,(U_m)_x\,dx + \int_0^\ell U_m^* \mathcal{N}\,U_m dx\right) = 0$.
De fato, da relação (4.37) tem-se $\|V_m\|_{[H_0^1]^n} \longrightarrow 0$, quando $m \longrightarrow +\infty$.

Então usando as relações (4.29), (4.33) e a relação anterior obtém-se

$$\begin{aligned}
\|U_m\|_{[H_0^1]^n} &= \frac{1}{|\lambda_m|}\left\|V_m+\widetilde{U}_m\right\|_{[H_0^1]^n}\\
&\le \frac{1}{|\lambda_m|}\|V_m\|_{[H_0^1]^n}+\frac{1}{|\lambda_m|}\left\|\widetilde{U}_m\right\|_{[H_0^1]^n}\longrightarrow 0\,,\quad \text{quando}\ \ m\longrightarrow +\infty\,.
\end{aligned}$$

Logo, pela equivalência de normas e a relação anterior tem-se

$$\left(\int_0^\ell (U_m)_x^*\,A\,(U_m)_x\,dx+\int_0^\ell U_m^*\mathcal{N}\,U_m dx\right)\le C\,\|U_m\|^2_{[H_0^1]^n}\longrightarrow 0\,,\quad \text{quando}\ \ m\longrightarrow +\infty\,. \tag{4.39}$$

Terceiro passo. Mostraremos que $\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}\displaystyle\int_0^\ell \Theta_m^* D\,\Theta_m dx=0$.

De fato, da relação (4.37) tem-se $\|Q_m\|_{[L^2]^n}\longrightarrow 0$, quando $m\longrightarrow+\infty$.

Então usando as relações (4.32), (4.36) e a relação anterior obtém-se

$$\begin{aligned}
\|(\Theta_m)_x\|_{[L^2]^n} &= \left\|S^{-1}\mathcal{T}\,\widetilde{Q}_m - i\,\lambda_m S^{-1}\mathcal{T}\,Q_m - S^{-1}Q_m\right\|_{[L^2]^n}\\
&\le \left\|S^{-1}\mathcal{T}\,\widetilde{Q}_m\right\|_{[L^2]^n}+|\lambda_m|\left\|S^{-1}\mathcal{T}\,Q_m\right\|_{[L^2]^n}+\left\|S^{-1}Q_m\right\|_{[L^2]^n}\\
&\le C\left\|\widetilde{Q}_m\right\|_{[L^2]^n}+C\,|\lambda_m|\,\|Q_m\|_{[L^2]^n}+C\,\|Q_m\|_{[L^2]^n}\longrightarrow 0\,,
\end{aligned}$$

quando $m\longrightarrow+\infty$.

Logo, pela desigualdade de Poincaré e a relação anterior tem-se

$$\int_0^\ell \Theta_m^* D\,\Theta_m dx\le C\,\|(\Theta_m)_x\|^2_{[L^2]^n}\longrightarrow 0\,,\quad \text{quando}\ \ m\longrightarrow+\infty\,. \tag{4.40}$$

Portanto, as relações (4.38), (4.39) e (4.40) contradizem a relação (4.27).

Assim, a relação (4.25) é satisfeita.

Finalmente, resta demonstrar que o operador resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Isto é, deve-se mostrar que existe uma constante $C>0$ tal que

$$\left\|(i\,\lambda\,I-\mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\le C\,,\quad \text{para todo}\ \ \lambda\in\mathbb{R}\,. \tag{4.41}$$

Seja $\mathcal{F}=\left(\widetilde{U},\widetilde{V},\widetilde{\Theta},\widetilde{Q}\right)\in\mathcal{H}=\left[H_0^1(0,\ell)\right]^n\times\left[L^2(0,\ell)\right]^n\times\left[L^2_*(0,\ell)\right]^n\times\left[L^2(0,\ell)\right]^n$.

Dado $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $|\lambda|>1$.

Denotemos por $\mathcal{U}:=(i\,\lambda\,I-\mathcal{A})^{-1}\mathcal{F}$, onde $\mathcal{U}=(U,V,\Theta,Q)\in D(\mathcal{A})$.

Deve-se mostrar que existe uma constante $C>0$, que não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ, tal que

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\le C\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Reescrevendo a equação espectral $(i\,\lambda\, I - \mathcal{A})\mathcal{U} = \mathcal{F}$ obtém-se

$$i\,\lambda\, U - V = \widetilde{U}\,, \tag{4.42}$$

$$i\,\lambda\, R\,V - A\,U_{xx} + N\,U - B\,V_{xx} + \mathcal{C}\,\Theta_x = R\,\widetilde{V}\,, \tag{4.43}$$

$$i\,\lambda\, D\,\Theta + S\,Q_x + \mathcal{C}\,V_x = D\,\widetilde{\Theta}\,, \tag{4.44}$$

$$i\,\lambda\, \mathcal{T}\,Q + Q + S\,\Theta_x = \mathcal{T}\,\widetilde{Q}\,. \tag{4.45}$$

Desde que

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\ell U_x^* A\,U_x dx + \int_0^\ell U^* N\,U\,dx + \int_0^\ell V^* R\,V\,dx + \int_0^\ell \Theta^* D\,\Theta\,dx + \int_0^\ell Q^* \mathcal{T}\,Q\,dx\,,$$

então basta limitar cada somando.

Primeiro passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^\ell V^* R\,V\,dx + \int_0^\ell Q^* \mathcal{T}\,Q\,dx\,.$

Notemos que

$$(\mathcal{F},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} = ((i\,\lambda\, I - \mathcal{A})\mathcal{U},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} = i\,\lambda\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U})_{\mathcal{H}}\,.$$

Então da propriedade dissipativa (4.10) e a relação anterior segue que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell V_x^* B\,V_x dx + \int_0^\ell Q^* Q\,dx &= -Re\,(\mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U})_{\mathcal{H}}\\ &= Re\,(\mathcal{F},\mathcal{U})_{\mathcal{H}}\\ &\le \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,,\end{aligned} \tag{4.46}$$

Logo, usando a desigualdade de Poincaré, a equivalência de normas e a relação (4.46) tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^\ell V^* R\,V\,dx + \int_0^\ell Q^* \mathcal{T}\,Q\,dx &\le C\left(\int_0^\ell V_x^* B\,V_x dx + \int_0^\ell Q^* Q\,dx\right)\\ &\le C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,,\end{aligned} \tag{4.47}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Segundo passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^\ell U_x^* A\,U_x dx + \int_0^\ell U^* N\,U\,dx\,.$

Da relação (4.46) tem-se

$$\|V\|_{[H_0^1]^n}^2 \le C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,,$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Então usando a relação (4.42) e relação anterior obtém-se

$$\begin{aligned}\|U\|_{[H_0^1]^n}^2 = \frac{1}{|\lambda|^2}\left\|V + \widetilde{U}\right\|_{[H_0^1]^n}^2 &\le 2\,\|V\|_{[H_0^1]^n}^2 + 2\left\|\widetilde{U}\right\|_{[H_0^1]^n}^2\\ &\le C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,,\end{aligned}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Logo, pela equivalência de normas e a relação anterior tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^\ell U_x^* A\, U_x dx + \int_0^\ell U^* N\, U\, dx &\leq C\, \|U\|^2_{[H_0^1]^n} \\ &\leq C\, \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\, \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + C\, \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,, \end{aligned} \tag{4.48}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Terceiro passo. Limitação do termo $\displaystyle\int_0^\ell \Theta^* D\, \Theta\, dx$.

Da relação (4.45) obtém-se

$$\frac{1}{\lambda}\,\Theta_x = \frac{1}{\lambda}\, S^{-1}\mathcal{T}\, \widetilde{Q} - \frac{1}{\lambda}\, S^{-1} Q - i\, S^{-1}\mathcal{T}\, Q\,.$$

Então da relação (4.46) segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\lambda|^2}\, \|\Theta_x\|^2_{[L^2]^n} &= \left\| \frac{1}{\lambda}\, S^{-1}\mathcal{T}\, \widetilde{Q} - \frac{1}{\lambda}\, S^{-1} Q - i\, S^{-1}\mathcal{T}\, Q \right\|^2_{[L^2]^n} \\ &\leq \left(\left\| S^{-1}\mathcal{T}\, \widetilde{Q} \right\|_{[L^2]^n} + \left\| S^{-1} Q \right\|_{[L^2]^n} + \left\| S^{-1}\mathcal{T}\, Q \right\|_{[L^2]^n} \right)^2 \\ &\leq C \left\| S^{-1}\mathcal{T}\, \widetilde{Q} \right\|^2_{[L^2]^n} + C \left\| S^{-1} Q \right\|^2_{[L^2]^n} + C \left\| S^{-1}\mathcal{T}\, Q \right\|^2_{[L^2]^n} \\ &\leq C \left\| \widetilde{Q} \right\|^2_{[L^2]^n} + C\, \|Q\|^2_{[L^2]^n} \\ &\leq C\, \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\, \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + C\, \|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}}\,, \end{aligned} \tag{4.49}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Por outro lado, multiplicando por Θ^* à relação (4.44) tem-se

$$i\,\lambda \int_0^\ell \Theta^* D\, \Theta\, dx + \int_0^\ell \Theta^* S\, Q_x dx + \int_0^\ell \Theta^* \mathcal{C}\, V_x dx = \int_0^\ell \Theta^* D\, \widetilde{\Theta}\, dx\,,$$

ou seja,

$$i\,\lambda \int_0^\ell \Theta^* D\, \Theta\, dx = \int_0^\ell \Theta^* D\, \widetilde{\Theta}\, dx + \int_0^\ell \Theta_x^* S\, Q\, dx - \int_0^\ell \Theta^* \mathcal{C}\, V_x dx\,.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \Theta^* D\, \Theta\, dx &\leq \frac{1}{|\lambda|} \left| \int_0^\ell \Theta^* D\, \widetilde{\Theta}\, dx \right| + \frac{1}{|\lambda|} \left| \int_0^\ell \Theta_x^* S\, Q\, dx \right| + \frac{1}{|\lambda|} \left| \int_0^\ell \Theta^* \mathcal{C}\, V_x dx \right| \\ &\leq C\, \|\Theta\|_{[L^2]^n} \left\| \widetilde{\Theta} \right\|_{[L^2]^n} + C \left(\frac{1}{|\lambda|}\, \|\Theta_x\|_{[L^2]^n} \right) \|Q\|_{[L^2]^n} + C\, \|\Theta\|_{[L^2]^n}\, \|V_x\|_{[L^2]^n} \\ &\leq C\, \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\, \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\lambda|^2}\, \|\Theta_x\|^2_{[L^2]^n} + C\, \|Q\|^2_{[L^2]^n} + C\, \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\, \|V_x\|_{[L^2]^n} \\ &\leq C\, \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\, \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\lambda|^2}\, \|\Theta_x\|^2_{[L^2]^n} + C\, \|\mathcal{F}\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\, \|\mathcal{U}\|^2_{\mathcal{H}} + C\, \|V_x\|^2_{[L^2]^n}\,. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Logo, usando as relações (4.46) e (4.49) na relação (4.50) obtém-se

$$\int_0^\ell \Theta^* D\,\Theta\,dx \leq \frac{1}{2}\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2\,, \tag{4.51}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Finalmente, somando as relações (4.46), (4.47) e (4.51) tem-se

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\,\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + C\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2\,,$$

onde a constante $C > 0$ não depende de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ e λ.

Portanto, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\left\|(i\,\lambda\,I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C_1\,,\ \forall\ |\lambda| > 1\,.$$

Além disso, pela continuidade do operador resolvente, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\left\|(i\,\lambda\,I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C_2\,,\ \forall\ |\lambda| \leq 1\,.$$

Assim, a relação (4.41) é satisfeita. □

Contribuições e trabalhos futuros.

No primeiro capítulo, faz-se um breve resumo dos principais conceitos e resultados utilizados nos capítulos seguintes. No segundo capítulo, pesquisa-se o sistema unidimensional modelando uma mistura de n sólidos viscoelásticos com memória e mostramos a boa-colocação estabelecendo a existência e unicidade de soluções. No terceiro capítulo, fazem-se as seguintes contribuições:

1. Quando a dissipação é total, demonstra-se que o semigrupo correspondente é exponencialmente estável.

2. Quando a dissipação é parcial, introduzimos o conceito de matriz controlável e provamos que o semigrupo correspondente é fortemente estável se, e somente se, a matriz $B^{1/2}$ é controlável com respeito a $\mathcal{C}$. O resultado principal da tese é que, o semigrupo correspondente é exponencialmente estável se, e somente se, o semigrupo é fortemente estável. Em particular, este resultado implica a falta de estabilidade polinomial do semigrupo.

No entanto, se trocamos a condição da memória g ter decaimento exponencial pela condição de ter decaimento polinomial, espera-se caracterizar a estabilidade polinomial do semigrupo correspondente. Além disso, para condições de contorno mistas, espera-se obter resultados melhores ou pelo menos semelhantes ao feito na tese.

No quarto capítulo, pesquisa-se o sistema unidimensional modelando uma mistura de n sólidos termoviscoelásticos com n temperaturas diferentes, para condições de Dirichlet nas extremidades do fluxo Q. A viscoelasticidade é de tipo Kelvin-Voigt e o efeito térmico é governado pela lei de Cattaneo. No caso em que todas as matrizes têm posto n, exceto a matriz N, demonstramos a boa-colocação estabelecendo a existência e unicidade de soluções e a estabilidade exponencial do semigrupo correspondente. No entanto, se considerar dissipação parcial ou considerar as matrizes de acoplamento com posto menor que n, espera-se obter resultados semelhantes ao feito na tese.

Bibliografia

[1] R. A. Adams and J. F. Fournier, **Sobolev Spaces**. Second edition, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] S. Agmon, H. Douglis and L. Nirenberg, **Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II**, Comm. Pure Appl. Math, 17, 35-92, 1964.

[3] M. S. Alves, P. Gamboa, G. C. Gorain, A. Rambaud and O. Vera, **Asymptotic behavior of a flexible structure with Cattaneo type of thermal effect**, Indagationes Mathematicae 27 (2016) 821 - 834.

[4] M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, and R. Quintanilla, **Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids**, Internat. J. Solids Structures 46(7,8) (2009), 1659-1666.

[5] M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, M. Sepúlveda and O. V. Villagrán, **Exponential stability in thermoviscoelastic mixtures of solids**, Internat. J. Solids Structures 46(24) (2009), 4151-4162.

[6] R. J. Atkin and R. E. Craine, **Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development**, Quat. J. Mech. Appl. Math. 29 (1976), 209-243.

[7] A. Bedford and D. S. Drumheller, **Theories of immiscible and structured mixtures**, International Journal of Engineering Science, 21 (1983), 863-960.

[8] D. S. Bernstein, **Matrix Mathematics: theory, facts and formulas**, Princenton, New Jersey, United States, 2009.

[9] A. Borichev and Y. Tomilov, **Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups**, Math. Ann., 347 (2009), pp. 455-478.

[10] R. M. Bowen, **Continuum Physics III: Theory of mixtures**, A. C. Erigen, ed., Academic Press, New York, 1976, pp. 689-722.

[11] R. M. Bowen and J. C. Wiese, **Diffusion in mixtures of elastic materials**, Int. J. Eng. Sci. 7 (1969), 689 - 722.

[12] H. Brezis, **Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications**, Masson, Paris, 1983.

[13] F.F. Córdova Puma and J.E. Muñoz Rivera, **The lack of Polynomial stability to mixtures with frictional dissipation**, J. Math. Anal. Appl. (2016).

[14] C. M. Dafermos, **On abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity**, Differential and Integral Equations Vol. 7(1), 554-569, (1970).

[15] C. M. Dafermos, **Asymptotic Stability in Viscoelasticity**, Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 37(1), 297-308, (1970).

[16] K. J. Engel and R. Nagel, **One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations**, Springer-Verlag, Inc., New York, 2000.

[17] M. Fabrizio and A. Morro, **Mathematical problems in linear viscoelasticity**, SIAM - Studies in Applied Mathematics Vol. 12, Philadelphia, (1992).

[18] L. Gearhart, **Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Spaces**, Trans. AMS 236, 385 - 394, 1978.

[19] M. Grasselli and V. Pata, **Uniform Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems with Memory**, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 50, 155 - 178.

[20] A. E. Green and P. M. Naghdi, **A dynamical theory of interacting continua**, International Journal of Engineering Science, 3 (1965), 231-241.

[21] A. E. Green and P. M. Naghdi, **A note on mixtures**, International Journal of Engineering Science, 6 (1968), 631-635.

[22] C. W. Groetsch, **Elements of Applicable Functional Analysis**, Marcel Dekker, New York and Basel, 1983.

[23] R. A. Horn and C. R. Johnson, **Matrix Analysis**. Cambridge University Press, United States of America, 1999.

[24] F. L. Huang, **Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces**, Ann. Differential Equations, 1 (1985), pp. 43-56.

[25] D. Iesan, **A theory of mixtures with different constituent temperatures**, J. Thermal Stresses, 20 (2) (1997) 147-167.

[26] D. Iesan and R. Quintanilla, **Existence and continuous dependence results in the theory of interacting continua**, Journal Elasticity, 36 (1) (1994) 85-98.

[27] K. R. Rajagopal and L. Tao, **Mechanics of mixtures**, World Scientific, Singapore, 1995.

[28] Z. Liu and S. Zheng, **Semigroups associated with dissipative systems**, In CRC Reseach Notes in Mathematics 398. Chapman and Hall. (1999).

[29] A. Moreira Gomes, **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**, UFRJ / IM, 2012.

[30] A. Montanaro, **On the constitutive relations for second sound in thermo-electroelasticity**, Arch. Mech. 63 (3) (2011).

[31] J. E. Muñoz Rivera, M. Grazia Naso and R. Quintanilla, **Decay of solutions for a mixture of thermoelastic solids with different temperatures**, Computers and Mathematics with Applications 71 (2016), 991-1009.

[32] A. Pazy, **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**, Springer-Verlag (1983). New York.

[33] J. Pruss, **On the spectrum of C_0-semigroups**, Trans. AMS. 284 (1984), pp. 847-857.

[34] R. Quintanilla, **Exponential decay in mixtures with localized dissipative term**, Appl. Math. Lett., 18 (2005), pp. 1381-1388.

[35] M. Renardy, **On the type of certain C_0-semigroups**, Comm. Partial Differential Equations, 18 (1993), pp. 1299-1309.

[36] K. Yosida, **Functional Analysis**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.