



Diego da Silva Barros

Fluxo singular a dois parâmetros

Rio de Janeiro

8 de Março de 2018

Diego da Silva Barros

Fluxo singular a dois parâmetros

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Maria José Pacífico

Coorientador: Christian Bonatti

Rio de Janeiro

8 de Março de 2018

Diego da Silva Barros

Fluxo singular a dois parâmetros

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática. Trabalho aprovado por:

Presidente, Maria José Pacífico - IM/UFRJ

Christian Bonatti -
IMB/ Université de Bourgogne

Alexander Eduardo Arbieto Mendoza -
IM / UFRJ

Samuel Anton Senti - IM / UFRJ

Vitor Domingos Martins Araújo -
IM/UFBA

Paulo César Rodrigues Pinto Varandas -
IM/UFBA

Stefano Luzzato - ICTP-International
Center for Theoretical Physics

Rio de Janeiro, 8 de Março de 2018

Agradecimentos

Quando dedicamos uma vida inteira a realização de um projeto, é possível olhar para trás e se perguntar: O que tornou tudo isso possível? Ingredientes como disciplina, persistência e resiliência não bastam para justificar o êxito de uma conquista, estes são apenas condições necessárias para tal. Um bom palpite para o ingrediente faltante seria enumerar cada pessoa que exerceu influência e apoio para tal, tarefa essa que pode ser muito mais laboriosa. Dessa forma, os agradecimentos que se fazem aqui são as mais sinceras retribuições de carinho. Em primeiro lugar a minha amada esposa Juliana Botelho da Silva, que embora não pudesse decifrar os símbolos e conexões lógicas presentes nas linhas desse trabalho, compreendeu como nenhuma outra pessoa a importância que elas tinham para mim. Seu apoio irrestrito me fez encontrar a calma e serenidade que me permitiu concluir esse trabalho.

A meus pais: Paulo Cezar de Barros e Rosmari da Silva Barros e irmãos: Natália da Silva Barros e Lucas da Silva Barros. O amor da minha família deu-me coragem para perseguir meus objetivos e a convivência familiar ensinou como me comportar para alcançá-los. Aos meus sogros Geraldo Batista e Vanda Botelho e meu cunhado Gabriel Eloy por terem me acolhido como parte da família.

Aos meus orientadores seria necessário um capítulo a parte. Apoio e compreensão não são características compartilhadas por muitos matemáticos, adjetivos esses que ficam ainda mais escassos quando tratamos de pesquisadores de tamanho renome. A julgar por esses requisitos, sinto a feliz sensação de ser premiado duplamente. À minha orientadora Maria José Pacífico, pela paciência e serenidade as quais invejo no sentido mais puro, pelo tempo dedicado a ouvir meus seminários e idéias (mesmo que sem sentido) e pelas inúmeras oportunidades que me abriu, tantas que não fui capaz de aproveitá-las e sua totalidade. Ao meu co-orientador Christian Bonatti, por me ensinar que matemática é algo que não se estuda, se vive! Agradeço pela sugestão do problema e por todas as vezes que me recebeu. Se eu fosse aqui enumerar todas as suas qualidades, talvez a que mais se sobressaísse fosse sua paciência, capaz de causar inveja em um monge budista. Sinto-me orgulhoso através dessa tese em retribuir a confiança que me foi dada.

Aos muitos amigos que fiz no instituto ao longo de mais de 6 anos, pelas conversas de matemática sempre regadas a cerveja, pelos ouvidos aprontos e injeções de ânimo. Em particular: Renan Assimos Martins, Jennyffer Smith Bohorquez Barrera, Sara Cristina Campos Borges, Fred Pablo Castro Vicente, Leandro Domingues, Vinícius Martins, Rizwan Khan, Marcelo Leite, Rodrigo Schaefer, Gladson Duarte, Mariana del Pilar Lizarazo, Daniel Reis, Diego Ribas, Davi Obata, Andres Mauricio Lopez, Tiago Peixinho, Rafael Assimos, Roberto Mamude, Rafael Lucena, Marcio Cavalcante, Marcio Vieira do Nascimento e Marcos Vinícius Teixeira, Diego Koenikan e Evandro de Freitas. A meu professor de matemática do ensino médio Jefferson, e a Jorge Gomes Dias e Dager Lameck. O primeiro foi um dos grandes responsáveis por ter escolhido matemática como carreira e os dois últimos os grandes incentivadores para que eu terminasse.

Aos professores Alexander Eduardo Arbieto Mendoza, Samuel Anton Senti, Vitor Domingos Martins Araújo, Paulo César Rodrigues Pinto Varandas e Stefano Luzzato por terem aceitado tão gentilmente o convite para participar da banca dessa defesa e ao CNPQ pelo apoio financeiro que tornou possível a manutenção dos meus estudos.

Resumo

Construímos uma família de fluxos indexados por parâmetros em \mathbb{T}^2 contendo uma singularidade do tipo lorenz. Para cada elemento dessa família fizemos uma classificação topológica e a prova da existência de uma folheação estável invariante. Usamos esses resultados para provar existência de um atrator com estrutura singular hiperbólica para toda essa família de fluxos e classificar completamente os parâmetros de bifurcações μ e o tipo de atrator associado. Concluimos a existência de um conjunto com interior não vazio $\mathcal{V} \subset \mathbb{T}^2$, para o qual o maximal invariante Λ_μ contém um atrator de Lorenz e uma ferradura de Smale.

Abstract

We construct a family of flows indexed by parameters in \mathbb{T}^2 which contains a Lorenz-like singularity. For each of them, we provide a topological equivalence characterization and a proof of the existence of invariant stable foliation. We use these results to deduce the existence of a singular-hyperbolic attractor for each member of this family of flows and to classify all the bifurcation parameters μ and the associated attractor. We concluded the existence of a set $\mathcal{V} \subset \mathbb{T}^2$ with non empty interior such that the maximal invariant set Λ_μ contains a Lorenz attractor and a Smale horseshoe for each $\mu \in \mathcal{V}$.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Atrator de Lorenz	23
Figura 2 – Comportamento perto da origem	25
Figura 3 – Comportamento perto da origem	26
Figura 4 – $F(\Sigma^*)$	28
Figura 5 – Projecção em I	28
Figura 6 – Cilindro e alguns elementos do fluxo	30
Figura 7 – Linhas de fluxo entrando em D^i	31
Figura 8 – Linhas de fluxo saindo de D^i	31
Figura 9 – Intersecção entre D^i e as órbitas dos pontos em Σ^i	32
Figura 10 – Imagem da aplicação de Poincaré	33
Figura 11 – Gráfico da aplicação unidimensional	42
Figura 12 – Imagens das aplicações de Poincaré de X^t e X_μ^t	43
Figura 13 – Gráfico de \tilde{f}	46
Figura 14 – Exemplo de um pullback	49
Figura 15 – Gráfico da aplicação $f_{(\theta_1(y), \theta_2(y))}$	65
Figura 16 – Conjunto \mathcal{V}	66
Figura 17 – Ferradura de Smale	68

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	17
2.1	Noções gerais	17
2.1.1	Atratores	18
2.2	Teoria hiperbólica e singular hiperbólica	19
2.3	O atrator de Lorenz	22
3	FLUXO SINGULAR A DOIS PARÂMETROS	29
3.1	Construção	29
3.2	Aplicação de Poincaré em coordenadas	33
3.3	Existência de uma folheação invariante \mathcal{F} .	35
3.4	Função unidimensional associada	41
3.4.1	Fluxo a dois parâmetros	43
4	DINÂMICA SIMBÓLICA	45
4.1	Itinerários	45
4.2	Sequências admissíveis	47
4.3	Classificação topológica	51
5	EXISTÊNCIA DE ATRADORES	57
5.1	Dinâmica da aplicação unidimensional	57
5.2	Existência de atratores	61
5.3	Dinâmica a dois parâmetros	63
5.4	Estrutura singular hiperbólica	70
	REFERÊNCIAS	73

1 Introdução

Andronov and Pontrjagin, [2], introduziram o ponto de vista qualitativo na teoria das perturbações de equações diferenciais ordinárias. Sua ideia era caracterizar os campos de vetores no disco, apontando para o interior ao longo do bordo, possuindo a propriedade que perturbações pequenas no espaço de fase permaneciam topologicamente iguais. A noção de “topologicamente a mesma” requeria a existência de um homeomorfismo do disco preservando órbitas. Esta propriedade atualmente é denominada *estabilidade estrutural* e é uma das ideias centrais na teoria dos sistemas dinâmicos. Foi desenvolvida essencialmente para campos de vetores em variedades compactas e sem bordo. Já nos anos 50 pesquisadores voltaram sua atenção aos fluxos em superfícies fechadas, onde o resultado principal foi o teorema de Peixoto [19] caracterizando e provando a genericidade da estabilidade estrutural dos campos de vetores em superfícies fechadas. Em 1967 Smale, in [20] colocou os alicerces da teoria n-dimensional da estabilidade. O ponto fundamental foi a percepção da relação profunda da estabilidade estrutural de um sistema dinâmico em variedades compactas sem bordo com a hiperbolicidade de seu conjunto não errante. Neste trabalho seminal Smale introduziu o conceito de hiperbolicidade e nos anos subsequentes a comunidade esteve voltada para o entendimento da teoria da hiperbolicidade e sua relação com propriedades robustas ou estáveis. Já no ano 1970 Palis e Smale provaram que a hiperbolicidade do conjunto não errante mais algumas condições suplementares implicavam estabilidade estrutural e conjecturaram que estas condições suficientes são também necessárias [18]. Nos anos 80 Mañé [12] provou que esta conjectura reduzia-se à prova que estabilidade estrutural implica hiperbolicidade do conjunto não errante. Finalmente, a prova desta conjectura na topologia C^1 para difeomorfismos foi provada por Mañé nos anos 90 [13], o resultado equivalente para fluxos (também na topologia C^1) foi provado por Hyashi [9].

Num desenvolvimento paralelo, o conhecimento pelos matemáticos dos trabalhos do meteorologista Lorenz em [11] levou-os a formular os sistemas chamados caóticos e iniciar o seu estudo, principalmente o dos atratores caóticos. No estudo da previsão do tempo, Lorenz chegou a um conjunto de três equações muito simples (polinomiais de

grau dois) para governar a evolução do sistema, veja equação (2.1). Através de estudos numéricos conjecturou que tal sistema de equações deveria conter *um atrator estranho* (sensível com respeito a condições iniciais, i. é, trajetórias de pontos arbitrariamente próximos se afastam com o tempo). A dificuldade em tratar tais sistemas é tanto:

- (a) Conceitual: a presença de um equilíbrio acumulado por trajetórias regulares do sistema implica que tais atratores não são hiperbólicos, e portanto não foram inseridos no estabelecimento da teoria hiperbólica abordada por Smale e seus colaboradores na década dos 60.
- (b) Numérica : as trajetórias, a medida que se aproximam do equilíbrio, diminuem a sua velocidade e portanto acrescentam erros não limitados nos cálculos.

A dificuldade no tratamento destes sistemas levaram Guckenheimer e Williams [7], e Aframovich, Bikov e Shilnikov [1] a introduzirem o chamado modelo geométrico para tal comportamento, que apresenta todas as propriedades previstas por Lorenz. Na década de 90, um grande avanço no estudo destes sistemas foi alavancado por Morales, Pacifico e Pujals [17], quando introduziram a noção de hiperbolicidade singular, que requer alguma compatibilidade entre a hiperbolicidade do equilíbrio e a hiperbolicidade das órbitas regulares. Eles provaram que sistemas robustos entre campos de vetores tridimensionais contendo pontos de equilíbrio e trajetórias regulares acumulando no ponto de equilíbrio ou são atratores ou repulsores hiperbólicos singulares. O exemplo mais destacado de atrator hiperbólico singular é o atrator geométrico de Lorenz, o qual, de fato, motivou a definição deste conceito. No ano 2000, a solução da conjectura de Lorenz foi dada por Tucker [21], que verifica, em particular, que o atrator proveniente das equações de Lorenz, se encaixa perfeitamente na classe hiperbólica-singular introduzida por Morales, Pacifico e Pujals. A partir daí, tornou-se natural tentar conhecer quais as propriedades dos sistemas hiperbólicos que se estendem para esta nova classe, hoje denominada *hiperbólica-singular*. Em dimensão 3 as dificuldades introduzidas pela coexistência robusta de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas estão praticamente superadas. Atualmente existe uma extensa bibliografia a este respeito, estabelecendo resultados tanto do ponto de vista topológico como da medida. O leitor interessado pode consultar [5] e as referências lá indicadas para mais sobre este assunto.

Porém, a análise dos fluxos apresentando pontos de equilíbrio acumulados por trajetórias regulares do ponto de vista das bifurcações, que é um outro veio de investigação atual e de grande interesse, continua muito incipiente. Mesmo em dimensão 3 há grandes lacunas no que diz respeito ao estudo das bifurcações de famílias parametrizadas de fluxos hiperbólicos singulares que contenham um atrator tipo Lorenz. Nosso objetivo é começar a preencher esta lacuna, descrevendo a evolução da dinâmica de uma família a dois parâmetros de fluxos \mathcal{F}_μ em \mathbb{R}^3 com μ variando no toro bidimensional \mathbb{T}^2 , tal que para algum parâmetro μ_0 , o conjunto recorrente por cadeias de $X_{\mu_0}^t$ contém um atrator do tipo Lorenz. Para isso, construímos um fluxo X_0^t em \mathbb{R}^3 possuindo uma seção transversal global Σ homeomorfa a um cilindro, apresentando duas singularidades do tipo Lorenz e que satisfaz a uma série de hipóteses que denotaremos *Hipóteses* \mathcal{H} . A família \mathcal{F}_μ é obtida da seguinte maneira: Interpretando o parâmetro $\mu \in \mathbb{T}^2$ como um par de ângulos, perturbamos X_0^t de forma a obter, para cada μ , um fluxo X_μ^t tal que Σ ainda é uma seção transversal para X_μ^t e cuja imagem da aplicação de primeiro retorno \mathcal{P}_μ definida em Σ associada a X_μ^t coincide com uma rotação da imagem da aplicação de primeiro retorno \mathcal{P}_0 de X_0^t .

O estudo da evolução da dinâmica da família é feito através do entendimento da evolução da dinâmica da família de transformações de primeiro retorno \mathcal{P}_μ , com $\mu \in \mathbb{T}^2$. Segue da construção que para cada parâmetro μ , a aplicação de primeiro retorno possui uma folheação contratora invariante, com duas folhas singulares. Como veremos, tal como no caso do fluxo geométrico de Lorenz clássico, estas folhas singulares estão contidas na variedade estável da singularidade do fluxo X_μ^t . A prova deste fato é o primeiro resultado que provaremos:

Teorema A. *Existe aberto \mathcal{U} na topologia C^1 contendo X_0 , tal que todo $Y \in \mathcal{U}$ admite uma folheação contratora \mathcal{F}_Y na seção transversal Σ .*

O teorema acima reduz o estudo das bifurcações dos fluxos em \mathcal{F}_μ para o estudo das bifurcações da família de transformações unidimensionais definidas pela projeção ao longo das folhas das aplicações de primeiro retorno associadas a \mathcal{F}_μ . A dinâmica do atrator pode ser completamente descrita por um sistema de Bernoulli que se relaciona com a aplicação unidimensional através de suas órbitas. Uma das chaves para o entendimento das

bifurcações desta família de fluxos é a análise dos itinerários associados às singularidades da aplicação unidimensional. Lembramos que os itinerários são seqüências de símbolos induzidas por cada uma das aplicações f_μ . Veremos que nosso sistema é determinado por duas dessas seqüências que vem a ser os itinerários das singularidades. Tal como já é conhecido para a classe dos atratores geométricos de Lorenz, provaremos que uma condição necessária e suficiente para que dois fluxos X_1 e X_2 em \mathcal{F}_μ sejam topologicamente equivalentes em seus conjuntos maximais invariantes Λ_{X_i} é que seus itinerários sejam os mesmos. Denotando por $\mathcal{X}_\mathcal{C}$ ao conjunto de todos os campos que satisfazem as *Hipóteses* \mathcal{H} , o resultado é descrito no teorema:

Teorema B. *Existe uma função $\Psi : \mathcal{X}_\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}^2$ satisfazendo a seguinte propriedade: $\Psi(X_1) = \Psi(X_2)$ se, e somente se, $X_1^t : \Lambda_{X_1} \rightarrow \Lambda_{X_1}$ e $X_2^t : \Lambda_{X_2} \rightarrow \Lambda_{X_2}$ são topologicamente conjugados por um homeomorfismo próximo da identidade.*

Após a determinação das classes de equivalência dos fluxos em \mathcal{F}_μ , passamos à análise detalhada de como cada bifurcação altera a dinâmica dos fluxos no *conjunto maximal invariante*. Primeiro, provamos que o conjunto maximal invariante associado a cada fluxo de $\mathcal{X}_\mathcal{C}$ é de fato um atrator transitivo por cadeias. Além disso, provamos existência de um conjunto $\mathcal{V} \subset \mathbb{T}^2$ com interior não-vazio cujo interior é dividido em duas componentes conexas para o qual o fluxo associado apresenta atratores de Lorenz em suas seções transversais, cada um deles aparecendo em regiões distintas e complementares do cilindro. Tais atratores de Lorenz são relacionados com as singularidades da aplicação de primeiro retorno do fluxo correspondente. Existem ainda outros parâmetros que induzem fluxos cujo conjunto maximal invariante pode ser descrito como a união de dois atratores de Lorenz, virtualmente opostos e unidos pela singularidade, cada um deles denotado por Λ^+ e Λ^- respectivamente. Ao variar os parâmetros em \mathbb{T}^2 de forma a transformar o maximal invariante de um Lorenz do tipo Λ^+ para um Lorenz do tipo Λ^- , a dinâmica que se apresenta genericamente é a de um atrator no cilindro que contém todas as singularidades da aplicação de primeiro retorno associada e que será denotado por $\Lambda^{+,-}$. O resultado preciso é enunciado a seguir:

Teorema C. Λ_μ contém um atrator de Lorenz $\Leftrightarrow \mu \in \mathcal{V}$. Além disso, se $f'_\mu \geq \lambda > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, então qualquer fluxo X_μ^t com $\mu \in \mathcal{V}^c$ possui uma única classe recorrente por cadeias em Λ_μ como atrator que contém pontos de ambas as separatrizes da singularidade, ou seja, $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu^{+,-}$.

A fronteira do conjunto \mathcal{V} descrito no teorema acima descreve completamente como ocorrem as bifurcações do sistema e o tipo de dinâmica associada: o aparecimento de ferraduras de Smale.

Por último procederemos com a prova da estrutura singular hiperbólica do atrator. Em primeiro lugar, usaremos uma caracterização de conjuntos singulares hiperbólicos fornecida por Morales, Pacífico e Pujals, mostrando que as órbitas periódicas do sistema constituem um conjunto denso de órbitas hiperbólicas e que todo campo arbitrariamente próximo possui elementos do tipo sela e singularidades do tipo lorenz (ver [5] teorema 5.34). Por fim, usando a robustez da decomposição dominada devido a Mañé, estenderemos a decomposição de maneira contínua à singularidade (ver [5] lema 2.29).

2 Preliminares

2.1 Noções gerais

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão 3 e $X : M \rightarrow TM$ um campo de classe C^r ($r \geq 1$), o fluxo $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ associado a X é uma família de difeomorfismos de classe C^{r+1} satisfazendo:

- (a) $X^0 = Id : M \rightarrow M$;
- (b) $X^{t+s} = X^t \circ X^s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$;
- (c) $\frac{d}{dt} X^t(q)|_{t=t_0} = X(X^{t_0}(q))$.

O conjunto de todos os campos de classe C^r sobre uma variedade M munido da topologia C^r será denotado por $\mathcal{X}^r(M)$ e o conjunto dos fluxos associados munidos da topologia C^r será denotado por $\mathcal{F}^r(M)$.

Dado $X^t \in \mathcal{F}^r(M)$, as órbitas positiva e negativa de um ponto $p \in M$ são os conjuntos $\mathcal{O}^+(p) = \{X^t(p) | t \geq 0\}$ e $\mathcal{O}^-(p) = \{X^t(p) | t \leq 0\}$, definimos a órbita de um ponto $p \in M$ como $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}^-(p) \cup \mathcal{O}^+(p)$. O segmento de órbita $\{X^t(p) | a \leq t \leq b\}$ será denotado por $X^{[a,b]}(p)$. Denotaremos por DX^t a derivada de X^t com respeito a variável $p \in M$ e escreveremos $D_p X^t = DX^t(p)$. Um ponto de equilíbrio ou singularidade para o fluxo é um ponto $\sigma \in M$ que satisfaz $X^t(\sigma) = \sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou equivalentemente $X(\sigma) = 0$. Os pontos $p \in M$ que satisfazem $X(p) \neq 0$ são chamados regulares. Uma órbita periódica de X^t é uma órbita $\mathcal{O}(p)$ satisfazendo $X^T(p) = p$ para algum $T > 0$, os pontos periódicos de um fluxo serão denotados por $Per(X)$.

Um subconjunto $\Lambda \in M$ é chamado invariante para X^t se $X^t(\Lambda) = \Lambda \forall t \in \mathbb{R}$, para todo conjunto compacto e invariante Λ , definimos o conjunto estável e instável de Λ por

$$W_X^s(\Lambda) = \{q \in M | \mathcal{O}^+(q) \text{ se acumula em } \Lambda\}$$

$$W_X^u(\Lambda) = \{q \in M | \mathcal{O}^-(q) \text{ se acumula em } \Lambda\}$$

2.1.1 Atratores

Ao estudar o comportamento assintótico das órbitas de um sistema, faz-se necessário o conceito de indecomponibilidade, dentre os quais podemos citar a transitividade. Nesse capítulo nos concentraremos na noção mais geral de sistemas indecomponíveis: os sistemas transitivos por cadeia.

Dado um fluxo $X^t : M \rightarrow M$, uma ε -cadeia de tamanho T ligando x a y é uma sequência $\{x_0, x_1, \dots, x_n = y; t_1, \dots, t_n\}$ com $t_i > 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ satisfazendo $d(X^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ e $\sum t_i = T$. Dizemos que a ε -cadeia é periódica se $x_0 = x_n$.

O conjunto recorrente por cadeias de X^t é o conjunto de todos os pontos $x \in M$ tais que para todo $\varepsilon > 0$ e T , existe uma $\varepsilon > 0$ -cadeia periódica de tamanho T ligando x a x , nesse caso denotamos $x \sim x$ e escreveremos $\mathcal{R}(X^t) = \{x \in M \mid x \sim x\}$.

Note que \sim é uma relação de equivalência, logo \sim divide $\mathcal{R}(X^t)$ em classes de equivalência, que denotaremos $\mathcal{C}(x)$. Dizemos que Λ é transitivo por cadeias se $\Lambda = \mathcal{C}(x)$ para algum $x \in \Lambda$.

Definição 2.1.1. Λ é chamado atrator para o fluxo X^t se existe aberto U contendo Λ satisfazendo $X^t(\overline{U}) \subset U$ para todo $t > 0$ e $\Lambda = \bigcap_{t>0} X^t(U)$ e se Λ é uma classe recorrente por cadeias. Caso Λ seja transitivo dizemos que Λ é um atrator transitivo.

No caso de Λ possuir mais de uma classe recorrente por cadeias, podemos nos perguntar se Λ pode ser escrito como união finita de atratores $\Lambda = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Lambda_i$ onde cada $\Lambda_i = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U_i) \right)$. Caso cada $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U_i)$ seja transitivo então a resposta é sim, no contrário repetimos a pergunta para cada Λ_i e assim sucessivamente. Para sistemas com infinitas classes recorrentes por cadeias, o processo acima nunca terminará, isso motiva a definição de quase atrator.

Definição 2.1.2. Um conjunto compacto e invariante Λ é um quase atrator para o fluxo $X^t : M \rightarrow M$ se é uma classe recorrente por cadeias e se existe sequência encaixada de vizinhanças abertas U_n de Λ satisfazendo:

- $X^t(\overline{U_n}) \subset U_n$ para todo $t > 0$.
- $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n)$.

Todo atrator é um quase atrator. Embora nem todo o sistema possua um atrator, a existência de um quase-atrator pode ser demonstrada usando a existência das chamadas funções de Lyapunov.

Definição 2.1.3. *Uma função contínua $\phi : M \rightarrow [0, 1]$ é chamada uma função de Lyapunov para o fluxo X^t se as seguintes condições são satisfeitas:*

- $\phi \circ X^t(x) \leq \phi(x)$ para todo $x \in M$ e para todo $t > 0$.
- $\phi \circ X^t(x) < \phi(x)$ se, e somente se, $x \notin \mathcal{R}(X^t)$.

Teorema 2.1.4. (Conley) *Seja $X^t : M \rightarrow M$, então X^t admite uma função de Lyapunov.*

A existência de um quase atrator Λ é obtida como pré-imagem do valor mínimo global da função de Lyapunov. Se $\mathcal{R}(X^t)/\sim$ é composto por apenas finitas classes recorrentes por cadeia distintas, então Λ é um atrator, caso contrário Λ é acumulado por uma infinidade de conjuntos atratores e portanto é um quase atrator.

2.2 Teoria hiperbólica e singular hiperbólica

A teoria dos sistemas dinâmicos uniformemente hiperbólicos foi desenvolvida no início dos anos 60 pelo matemático Stephen Smale com a introdução da conhecida "Ferradura de Smale". Este objeto nasce da interpretação geométrica das equações de Cartwright-Littlewood e Levinson, que forneciam exemplos de sistemas com número infinito de órbitas periódicas. Antes os únicos conjuntos hiperbólicos conhecidos eram pontos fixos ou sistemas Morse-Smale. Para isso, introduziremos as seguintes notações: Dizemos que uma decomposição $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$ é invariante, se $DX^t(E_x^i) = E_{X^t(x)}^i$ e $i \in \{s, u, X\}$. Denote por $m(T) = \inf_{\|v\|=1} \|T(v)\|$ onde T é um operador linear sobre espaço de Banach, observe que $m(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$.

Definição 2.2.1. Um conjunto compacto invariante Λ é dito uniformemente hiperbólico para o fluxo X^t se:

(I) Existe uma decomposição contínua e invariante do fibrado tangente de Λ , ou seja,

$$T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u \text{ com } DX^t(E_x^i) = E_{X^t(x)}^i \text{ e } i \in \{s, u, X\}.$$

(II) Existem constantes $\lambda > 1$ e $K > 0$ satisfazendo:

$$(a) \|DX^t|_{E_x^s}\| \leq K^{-1}e^{-\lambda t} \text{ para } t > 0; (E_x^s \text{ é } (K^{-1}, \lambda)\text{-contratora}).$$

$$(b) m(DX^t|_{E_x^u}) \geq Ke^{\lambda t} \text{ para todo } t > 0 (E_x^u \text{ é } (K, \lambda)\text{-expanssora}).$$

Seja Λ um conjunto invariante para o fluxo X^t , para $p \in \Lambda$ os conjuntos estáveis e instáveis são definidos por

$$W_X^{ss}(p) = \{q \in M : \text{dist}(X^t(q), X^t(p)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0\}$$

$$W_X^{uu}(p) = \{q \in M : \text{dist}(X^t(q), X^t(p)) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0\}$$

respectivamente. Segue do teorema da variedade estável [?], que se Λ é hiperbólico então $W_X^{ss}(p)$ e $W_X^{uu}(p)$ são variedades imersas de classe C^r tangentes a E_p^s e E_p^u respectivamente. Se $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X(p) \subset \Lambda$, os conjuntos $W_X^s(\mathcal{O}) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_X^{ss}(X^t(p))$ e $W_X^u(\mathcal{O}) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_X^{uu}(X^t(p))$ são variedades invariantes de classe C^r tangentes a $E^s \oplus E^X$ e $E^u \oplus E^X$. Quando não houver confusão escreveremos $W_X^s(p) = W_X^s(\mathcal{O})$ e $W_X^u(p) = W_X^u(\mathcal{O})$.

Uma maneira útil de estudar a hiperbolicidade de conjuntos é através dos campos de cones. Seja $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo de classe C^1 e $\Lambda \subset M$ conjunto compacto invariante. Para cada $x \in \Lambda$ consideramos uma decomposição $T_x M = F^u(x) \oplus F^s(x)$ (não necessariamente invariante). Os cones estáveis e instáveis de tamanho γ sobre Λ são definidos por

$$C_\gamma^s(x) = \{(v_1, v_2) \in F^u(x) \oplus F^s(x) : \|v_1\| \leq \gamma \|v_2\|\}$$

$$C_\gamma^u(x) = \{(v_1, v_2) \in F^u(x) \oplus F^s(x) : \|v_2\| \leq \gamma \|v_1\|\}$$

Dizemos que o campo de cones C_γ^s é estritamente invariante por df^{-1} se $Df^{-1}(C_\gamma^s(f(x))) \subset C_{\alpha\gamma}^s(x)$, onde $\alpha < 1$. Analogamente, C_γ^u é estritamente invariante por Df se $Df(C_\gamma^u(x)) \subset C_{\alpha\gamma}^u(f(x))$, onde $\alpha < 1$. Observe que as inclusões anteriores podem ser escritas como $Df^{-1}(\overline{C_\gamma^s(f(x))}) \subset C_\gamma^s(x)$ e $Df(\overline{C_\gamma^u(x)}) \subset C_{\alpha\gamma}^u(f(x))$. Podemos caracterizar os conjuntos hiperbólicos em termos de cones através do seguinte teorema:

Teorema 2.2.2. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1 e seja $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante. Então Λ é um conjunto hiperbólico para f se, e somente se, existem uma decomposição $T_x M = F^u(x) \oplus F^s(x)$ em Λ e um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $T_x M$, e ainda, constantes $\mu, \gamma \in (0, 1)$ tais que para todo $x \in \Lambda$:*

$$(a) \quad Df_x \overline{C_\gamma^u} \subset C^u(f(x)) \text{ e } Df_x^{-1} \overline{C_\gamma^u} \subset C^u(f^{-1}(x)).$$

$$(b) \quad \|df_x v\| \geq \mu^{-1} \|v\| \text{ para } v \in C_\gamma^u(x).$$

$$(c) \quad \|df_x^{-1} v\| \geq \mu^{-1} \|v\| \text{ para } v \in C_\gamma^s(x).$$

Na tentativa de construir uma teoria hiperbólica equivalente a de difeomorfismo para fluxos, somos confrontados com seguinte dificuldade: a existência de singularidades. Embora pontos fixos hiperbólicos sejam elementos cotidianos na teoria uniformemente hiperbólica para difeomorfismos, sua existência é um impedimento para hiperbolicidade uniforme de fluxos. A existência de uma decomposição contínua de $T_\Lambda M$ em subfibrados E_Λ^i implica que todo conjunto hiperbólico Λ não trivial (que não seja composto apenas por pontos fixos) para um fluxo X^t é livre de singularidades, ou seja, se Λ é hiperbólico e conexo, $\sigma \in \Lambda$ e $X(\sigma) = 0$ então $\Lambda = \{\sigma\}$. Relaxando algumas das hipóteses da definição anterior, é possível pensar em alguma noção mais fraca de hiperbolicidade: a decomposição dominada. Através dela podemos nos perguntar que categorias de fluxos com singularidades podem se encaixar nessa noção. Em [15] foi introduzida uma classe de fluxos em dimensão 3 contendo singularidades pelos matemáticos Morales, Pacífico e Pujals os chamados: fluxos singulares hiperbólicos.

Definição 2.2.3. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão 3. Um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ para o fluxo X^t é dito singular hiperbólico se existe uma decomposição contínua $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ e invariante $DX^t(E_x^i) = E_{X^t(x)}^i$ e $i \in \{s, c\}$, com constantes $\lambda, K > 0$ satisfazendo:*

$$(a) \quad E_\Lambda^s \text{ (} K, \lambda \text{)-domina } E_\Lambda^c, \text{ isto é, para todo } x \in \Lambda \text{ e } t \geq 0 \text{ vale}$$

$$\|DX^t(x)|_{E_x^c}\| \leq K e^{-\lambda t} m(\|DX^t(x)|_{E_x^s}\|);$$

$$(b) \quad E_\Lambda^s \text{ é } (K, \lambda) \text{ contratora.}$$

(c) E_Λ^c expande volume, ou seja, $|\det(DX^t|_{E_x^c})| > Ke^{\lambda t}$ para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$.

Podemos a partir de agora tentar descrever propriedades e comportamentos assintóticos do sistema fazendo hipóteses sobre as singularidades. A primeira delas é:

Definição 2.2.4. *A singularidade σ é do tipo Lorenz se os autovalores λ_i de $DX^t(\sigma)$ são reais e satisfazem $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$.*

Definição 2.2.5. *Seja σ singularidade do fluxo X^t e λ_i os autovalores de $DX^t(\sigma)$. Dizemos que σ satisfaz a condição de não ressonância, se para todo $N > 2$ e qualquer escolha de números inteiros não negativos m_1, m_2, m_3 satisfazendo $2 \leq \sum_{j=1}^3 m_j < N$ vale*

$$\sum_{j=1}^3 m_j \lambda_j \neq \lambda_i.$$

Embora técnica, a definição anterior é necessária para que a conjugação que lineariza o fluxo de classe seja de classe C^2 , isto será visto com mais detalhes no próximo capítulo.

2.3 O atrator de Lorenz

Por fim, vamos apresentar o exemplo mais conhecido de atrator singular hiperbólico: o atrator geométrico de Lorenz. Este é um modelo simplificado para o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x), & a &= 10, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, & r &= 28, \\ \dot{z} &= xy - bz, & b &= 8/3,\end{aligned}$$

introduzido independentemente pelos matemáticos Afraimovich [1], Guckenheimer e Williams [7]. Estes modelos são fluxos em 3 dimensões para os quais podemos provar rigorosamente a existência de atratores caóticos que contêm algum ponto de equilíbrio para o fluxo, o qual é um ponto de acumulação para as soluções regulares.

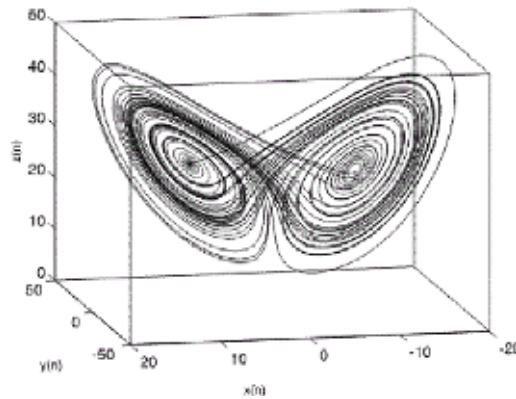


Figura 1 – Atrator de Lorenz

Para construir um modelo para as equações de Lorenz em (2.1), consideramos o campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$$F(x, y, z) = \left(10(y - x), 28x - y - xz, xy - \frac{8}{3}z \right).$$

O ponto $p = (0, 0, 0)$ é fixo para F , e mais, como

$$dF(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & -z \\ y & x & -\frac{8}{3} \end{pmatrix},$$

segue que

$$dF(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Observando que os autovalores de $dF(0, 0, 0)$ são $\lambda_1 \approx 11.83$, $\lambda_2 \approx -22.83$ e $\lambda_3 = -\frac{8}{3}$, pelo teorema de Hartman-Grobman, F é topologicamente conjugado a $dF(0, 0, 0)$ numa vizinhança da origem. Logo podemos considerar o sistema $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$ e tomar esse campo de vetores definido em $[-1, 1]^3$.

Para o campo de vetores acima, o fluxo linear é dado por

$$Y^t(x_0, y_0, z_0) = \left(x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t}, z_0 e^{\lambda_3 t} \right).$$

Considere os conjuntos

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(x, y, 1) : |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}\} \\ \Sigma^- &= \{(x, y, 1) \in \Sigma : x < 0\} \\ \Sigma^+ &= \{(x, y, 1) \in \Sigma : x > 0\} \\ \Sigma^* &= \Sigma^- \cup \Sigma^+ = \Sigma \setminus \Gamma \quad \text{onde } \Gamma = \{(x, y, 1) \in \Sigma : x = 0\}\end{aligned}$$

Note que Σ é uma secção transversal ao fluxo e toda órbita que cruza Σ , segue na direção negativa do eixo z . Considere também

$\tilde{\Sigma} = \{(x, y, z) : |x| = 1\} = \tilde{\Sigma}^+ \cup \tilde{\Sigma}^-$ onde $\tilde{\Sigma}^\pm = \{(x, y, z) : x = \pm 1\}$. Para cada $(x_0, y_0, 1) \in \Sigma^*$, o tempo t gasto para que $X^t(x_0, y_0, 1) \in \tilde{\Sigma}$ é dado por:

$$t(x_0) = -\frac{1}{\lambda_1} \log |x_0| \quad (2.1)$$

e depende somente de $x_0 \in \Sigma^*$.

Dessa forma, usando (2.1) obtemos

$$\begin{aligned}Y^{t(x_0)}(x_0, y_0, 1) &= \left(x_0 e^{\lambda_1 \left(-\frac{1}{\lambda_1} \log |x_0|\right)}, y_0 e^{\lambda_2 \left(-\frac{1}{\lambda_1} \log |x_0|\right)}, e^{\lambda_3 \left(-\frac{1}{\lambda_1} \log |x_0|\right)} \right) \\ &= \left(x_0^{\log |x_0|^{-1}}, y_0 e^{\log |x_0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}, e^{\log |x_0|^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}} \right) \\ &= \left(\frac{x_0}{|x_0|}, y_0 |x_0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, |x_0|^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \right) \\ &= \left(\text{sgn}(x_0), y_0 |x_0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, |x_0|^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \right).\end{aligned}$$

Defina $\alpha = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ e $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ e considere a aplicação $L : \Sigma^* \rightarrow \tilde{\Sigma}$ definida por

$$L(x, y, 1) = \left(\text{sgn}(x), y|x|^\beta, |x|^\alpha \right), \quad (2.2)$$

onde $\text{sgn}(x)$ é a função sinal de x . $L(\Sigma^\pm)$ tem a forma de um triângulo sem os vértices $(\pm 1, 0, 0)$ (que possuem o formato de cúspide). Observe também que a desigualdade $0 < \frac{\lambda_1}{2} \leq -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$ é equivalente a $0 < \alpha < 1 < \beta$. Logo a segunda coordenada da imagem de L é comprimida por um fator $|x|^\beta < 1$, portanto $L(\Sigma^\pm)$ é uniformemente comprimida na direção de y . Outra observação importante, é que fixado x_0 no intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$ o segmento $x_0 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times 1 \subset \Sigma^*$ é levado em outro segmento horizontal em $L(\Sigma^*)$, a situação é ilustrada na figura a seguir.

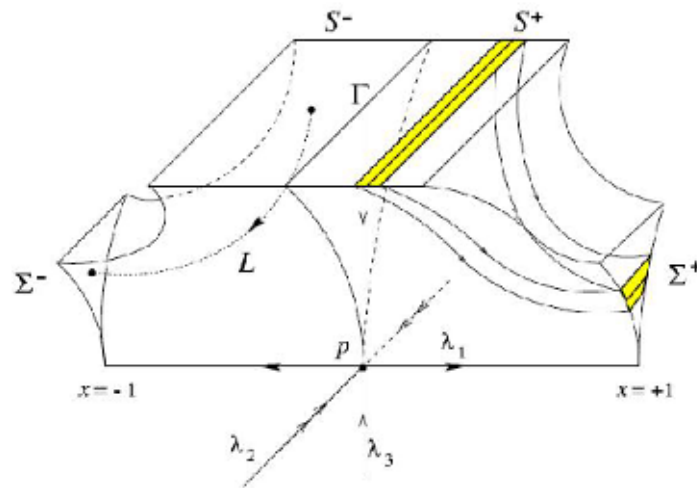


Figura 2 – Comportamento perto da origem

Para imitar as voltas aleatórias de uma órbita regular em torno da origem e obter a forma de uma borboleta para nosso fluxo, como no caso do fluxo original de Lorenz, procederemos da seguinte maneira: os conjuntos $L(\Sigma^\pm)$ devem retornar a secção Σ através de um fluxo descrito pela composição de uma rotação R_\pm , uma expansão $E_{\pm\theta}$ e uma translação T_\pm .

O eixo da rotação de R_\pm é paralelo ao eixo y , logo a rotação tem a forma:

$$R_\pm\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \pm \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Como o ângulo entre $L(\Sigma^\pm)$ é de $\frac{3\pi}{2}$ rad, segue que

$$R_\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A expansão ocorre somente na direção do eixo x e a matriz dessa transformação é dada por

$$E_\pm(\theta) = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queremos que a imagem de $L(\Sigma^\pm)$ pela composição $R_\pm \circ E_{\pm\theta} \circ T_\pm$ esteja contida dentro do quadrado Σ de forma que essa imagem ocupe mais da metade do quadrado.

Como $L(\Sigma^\pm)$ é um triângulo, a imagem desse conjunto por $R_\pm \circ E_{\pm\theta} \circ T_\pm$ continua sendo um triângulo, logo basta pedir que a distância do vértice até a base do triângulo seja maior do que $\frac{1}{2}$ e menor do que 1. Como a imagem do triângulo pela rotação R é da forma $(|x|^\alpha, y|x|^\beta, \text{sgn}(x))$, segue que a base do triângulo é da forma $\left(1, y \left(\frac{1}{2}\right)^\beta, \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\right)$ e o vértice oposto a base é $(1, 0, 0)$. Assim a distância entre o vértice e a base é $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$ e portanto após a expansão devemos ter:

$$\theta \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha > \frac{1}{2} \text{ e } \theta \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha < 1.$$

Por fim, a translação T_\pm é escolhida de forma que as imagens $L(\tilde{\Sigma}^+)$ e $L(\tilde{\Sigma}^-)$ sejam disjuntas e que a direção instável começando na origem seja mandada na fronteira de $\tilde{\Sigma}$. A composição $T_\pm \circ E_\pm \circ R_\pm$ descreve um campo vetorial na região fora de $[-1, 1]^3$. Para finalizar, definimos o fluxo X^t da seguinte maneira: a órbita de um ponto $(x_0, y_0, 1)$ em Σ pelo X^t é a órbita do mesmo ponto pelo fluxo Y^t , até $t(x_0) = -\frac{1}{\lambda_1} \log|x_0|$, depois a trajetória desse ponto segue pelo fluxo definido pela composição $T_\pm \circ E_\pm \circ R_\pm$ até chegar em Σ e assim por diante. A construção do fluxo X^t é descrita na ilustração abaixo

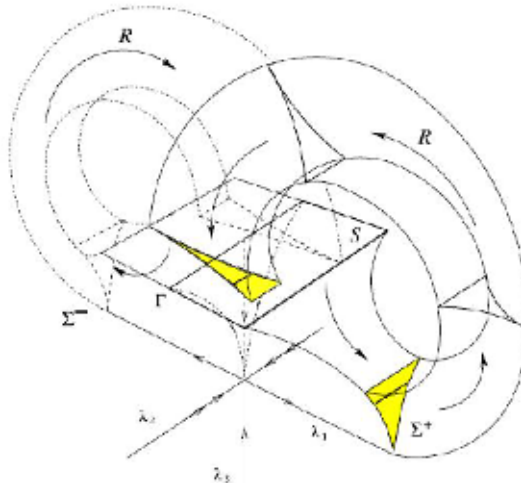


Figura 3 – Comportamento perto da origem

As propriedades anteriores nos permitem concluir que a aplicação de Poincaré F associada

ao fluxo é da forma

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y)), \quad (2.3)$$

onde $f : I \setminus \{0\} \rightarrow I$ e $f : I \setminus \{0\} \times I \rightarrow I$ são dados por:

$$f(x) = \begin{cases} -\theta x^\alpha + b_0 & , x > 0 \\ \theta(-x)^\alpha + b_1 & , x < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

$$g(x, y) = \begin{cases} y(x)^\beta & , x > 0 \\ y(-x)^\beta & , x < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Com base nas equações (2.3), (2.4) e (2.5), a expressão para a diferencial de F derivadas quando $x > 0$ é dada por:

$$dF(x, y) = \begin{pmatrix} -\theta\alpha x^{\alpha-1} & 0 \\ \beta y x^{\beta-1} & x^\beta \end{pmatrix} \quad x > 0 \quad (2.6)$$

Propriedades das funções g e f

Observe que o mapa G é suave por partes, e mais, as equações (2.6) nos permite deduzir as seguinte propriedades

- a) $\left| \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \right| = |x|^\beta \leq \left| \frac{1}{2} \right|^\beta < \frac{1}{2} < \lambda$.
- b) $\left| \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \right| \leq \beta |y| |x|^{\beta-1} \leq \beta \left(\frac{1}{2} \right)^{\beta-1} < +\infty$, (pois $\beta - 1 > 0$ e $|x| \leq \frac{1}{2}$)

O item a) implica que F é uniformemente contratora nas folhas γ , ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que se $\gamma \in \mathcal{F}^s$ e $x, y \in \gamma$, então $\text{dist}(F^n(x) - F^n(y)) \leq \lambda^n \cdot C \cdot \text{dist}(x, y)$.

Agora, vamos esboçar algumas propriedades da função f , lembremos que θ foi escolhido de forma a termos $\theta \cdot \alpha \cdot 2^{1-\alpha} > 1$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = +\infty$.

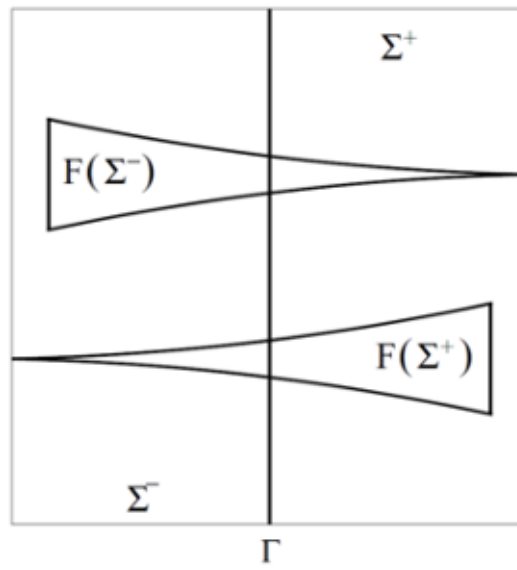
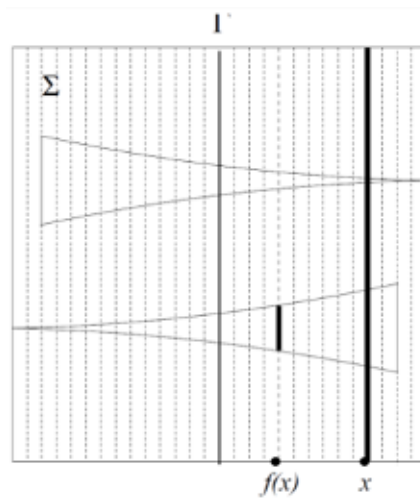
Figura 4 – $F(\Sigma^*)$ 

Figura 5 – Projeção em I

3 Fluxo singular a dois parâmetros

Nesse capítulo, iniciaremos a descrição geométrica de um fluxo indexado a dois parâmetros que possui uma singularidade do tipo Lorenz e é transversal a um cilindro. Após essa descrição, provaremos que esse fluxo possui uma folheação estável invariante de classe C^1 , utilizaremos a existência dessa folheação para quocientar as folhas estáveis da aplicação de Poincaré através das holonomias a fim de transformá-la em um produto cruzado. Isso permitirá realizar um estudo topológico do nosso sistema, que será o tema do próximo capítulo.

3.1 Construção

Seja Σ um cilindro em \mathbb{R}^3 de comprimento finito cujo eixo coincide com o eixo coordenado x e de forma que seja dividido pelo plano yz em duas porções de comprimentos iguais (ver figura 3.1). Note que Σ pode ser pensado como $\mathbb{R}/\sim \times [-1, 1]$ através do difeomorfismo $\mathbb{R}/\sim \times [-1, 1] \rightarrow \Sigma$ dado por $\Phi(t, x) = (x, e^{2\pi ti})$. Consideraremos a existência de um campo de vetores $X_0 \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^3)$ cujo fluxo associado X_0^t satisfaz as seguintes propriedades que denotaremos por *Hipóteses* \mathcal{H} .

- (H1) Existe um conjunto aberto e limitado $U \subset \mathbb{R}^3$ contendo Σ e que satisfaz $X_0^t(U) \subset U$ para todo $t \geq 0$.
- (H2) X_0^t é transversal a Σ .
- (H3) Para qualquer base $\{v_1, v_2\}$ de $T_p\Sigma$ orientada positivamente, a base $\{v_1, v_2, X_0(p)\}$ será orientada negativamente.
- (H4) X_0 possui apenas uma singularidade em U que está situada no ponto $(0, 0, 0)$ e que será denotada por σ , esta singularidade será do tipo Lorenz, ou seja, satisfaz $\lambda_2 < \lambda_1 < 0 < -\lambda_3 < -\lambda_2$. Pediremos também que o campo satisfaça condição fortemente dissipativa em σ , ou seja, $\lambda_1 + \lambda_2 < \lambda_3$.

- (H5) O campo X_0 é linear numa vizinhança aberta V da singularidade e σ satisfaz a condição de não ressonância (ver definição 2.2.5).
- (H6) $W_{loc}^s(\sigma)$ está contida no plano xz e é dividida pelo eixo x em duas componentes, interceptando Σ em duas curvas γ_-^s e γ_+^s , ou seja, $W_{loc}^s(\sigma) \setminus \{\sigma\} = W_-^s(\sigma) \cup W_+^s(\sigma)$ com $W_{\pm}^s(\sigma) \cap \Sigma = \gamma_{\pm}^s$, onde vale que $\Sigma \setminus \{\gamma_-^s, \gamma_+^s\} := \Sigma^1 \cup \Sigma^2 := \Sigma^*$.
- (H7) O plano xz divide o interior da região delimitada por Σ em duas, em cada uma dessas regiões consideraremos um cilindro D^1 e D^2 , cada um paralelo a Σ cujo eixo está contido no plano $z = 0$. Suporemos também que os D^i não intersectam a região linearizada V .

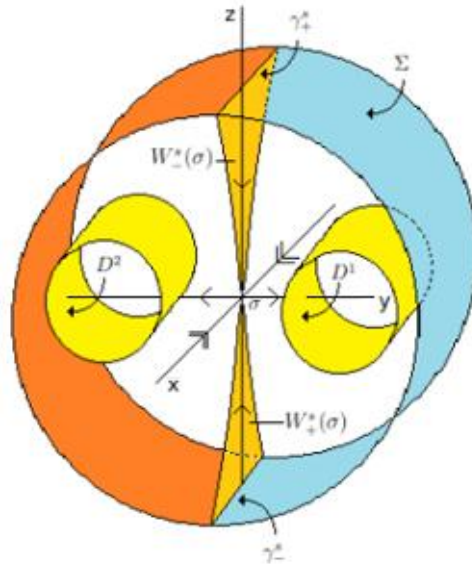
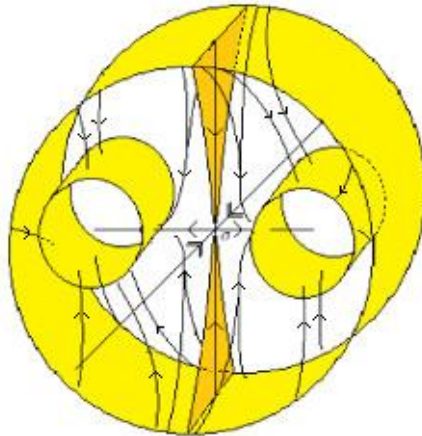
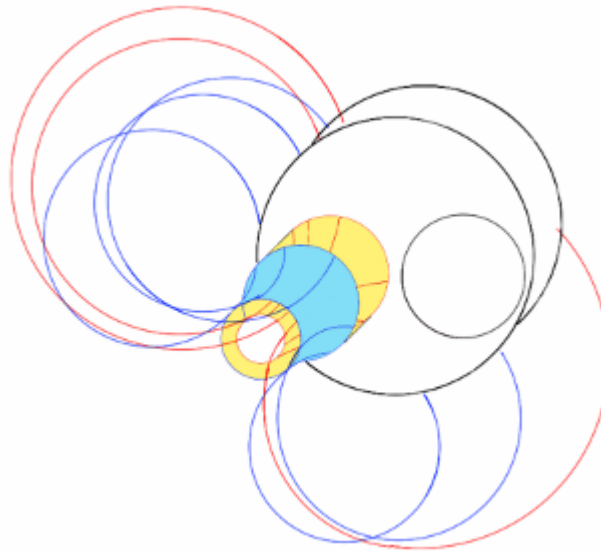


Figura 6 – Cilindro e alguns elementos do fluxo

- (H8) A órbita dos pontos $p \in \Sigma^i$ intersectam D^i transversalmente (ver figura 3.1 (a)). O fluxo envia D^i de volta a Σ num tempo uniforme $t_0 > 0$. A imagem da aplicação $R = X_0^{t_0} : D^i \rightarrow \Sigma$ é uma faixa que envolve todo o cilindro Σ (ver figura 3.1 (b)). Segue ainda que R pode ser descrita como a composição de uma rotação, uma expansão na direção radial seguida de uma translação e satisfaz $R(D^1) \cap R(D^2) = \emptyset$.

Figura 7 – Linhas de fluxo entrando em D^i Figura 8 – Linhas de fluxo saindo de D^i

(H9) O fluxo induz uma aplicação de Poincaré $P : \Sigma^* \rightarrow \Sigma$ que é um produto semi-direto nas coordenadas de Φ , ou seja, vale:

$$\Phi^{-1} \circ P \circ \Phi(x, y) = (f(x), g(x, y)).$$

(H10) Sobre Σ existem campos de cones $C_\alpha^s = \{(v_1, v_2) \in F^u \times F^s \mid \|v_1\| \leq \alpha \|v_2\|\}$ e $C_\alpha^u = \{(v_1, v_2) \in F^u \times F^s \mid \|v_2\| \leq \alpha \|v_1\|\}$, com $F^u = T_p S^1 \times \{0\}$ e $F^s = \{0\} \times \mathbb{R}$, invariantes por DP^{-1} e por DP . Os vetores em C_α^u na direção $\frac{\partial}{\partial \theta} = d\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ são expandidos por DP por um fator maior que $\sqrt{2}$. Os vetores em C_α^s na direção $\frac{\partial}{\partial y}$ são expandidos por DP^{-1} por um fator maior do que 2.

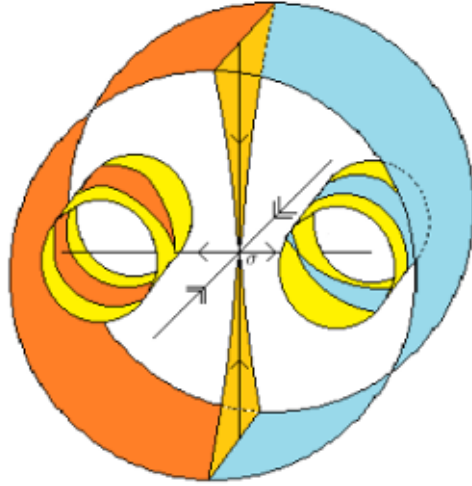


Figura 9 – Interseção entre D^i e as órbitas dos pontos em Σ^i .

Vamos fazer algumas considerações a respeito da hipótese 10. Sendo P um produto semi-direto, podemos escrever

$$DP^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(DP)} \begin{pmatrix} \partial_y g & 0 \\ -\partial_x g & \partial_x f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\partial_x f \partial_y g} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\partial_y g} \end{pmatrix}$$

As propriedades de C^s mais a igualdade acima implicam que $\|DP^{-1}v\|_{sup} = \frac{1}{|\partial_y g|} > 2$ e portanto $|\partial_y g| < \frac{1}{2}$. Para o cone instável C_γ^u , se $v = (1, b) \in C^u$, com $\|v\|_{sup} = 1$, temos:

$$DP(v) = \begin{pmatrix} \partial_y g \\ -\partial_x g + b\partial_y f \end{pmatrix}$$

Pela, invariância de C^u segue que $|\partial_x g + b\partial_y g| < \gamma|\partial_x f|$ e portanto $\|DPv\|_{sup} = |\partial_x f|$, pelas propriedades de C^u segue que $|\partial_x f| > \sqrt{2}$. Uma observação importante que pode ser feita, é a existência do campo de cones satisfazendo as condições da propriedade (H10) é equivalente as condições $\partial_f > \sqrt{2}$, $|\partial_y g| < 1/2$ e $|\partial_x g| < M$ para algum $M > 0$. De fato, a recíproca dessa afirmação pode ser encontrada em [10]. A imagem $P(\Sigma^i)$ de cada semifaixa Σ^i envolve D^i exatamente uma vez, sendo contraída na direção $\frac{\partial}{\partial y}$ e expandida na direção $\frac{\partial}{\partial \theta}$, além disso, $P(\Sigma^*) = P(\Sigma^1) \cup P(\Sigma^2)$. A singularidade opera realizando um efeito de cúspide nos pontos D^i que são trazidos de uma vizinhança de γ_\pm^s em Σ por X^t .



Figura 10 – Imagem da aplicação de Poincaré

3.2 Aplicação de Poincaré em coordenadas

Nesta seção, vamos deduzir uma expressão em coordenadas para a aplicação de primeiro retorno, um detalhe importante deve ser levado em consideração: a regularidade dessa aplicação. Ao utilizar o teorema de Hartman-Grobman para linearizar o fluxo X^t numa vizinhança de σ , a mudança de coordenadas $h : V \rightarrow B_\delta(0)$ é apenas contínua. Dessa forma, as representações das perturbações do fluxo X^t na vizinhança nessas coordenadas não permaneceriam lineares (mesmo que X^t o seja), assim precisamos garantir uma melhor regularidade para h . Para isso, usaremos uma linearização suave cuja teoria pode ser encontrada em Hartman [8] capítulo 9 e cujo enunciado é descrito no próximo teorema.

Teorema 3.2.1 (Hartman). *Seja $n > 0$ inteiro, então existe um inteiro $N(n) \geq 2$ com a seguinte propriedade: se Γ é uma matriz $d \times d$ de coeficientes reais, constante, e não singular cujos autovalores $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ satisfazem:*

$$2 \leq \sum_{j=1}^d m_j \lambda_j < N \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^d m_j \lambda_j \neq \lambda_i$$

para qualquer escolha de inteiros não negativos m_1, m_2, \dots, m_d e se na aplicação dada por $X(v) = \Gamma(v) + \psi(v)$, ψ é de classe C^N para $\|v\|$ pequeno satisfazendo $\psi(0) = 0$ e $\partial_v \psi(0) = 0$, então existe um difeomorfismo h de classe C^n que conjuga as trajetórias de X e de sua linearização.

Pela hipótese de não ressonância de σ (ver definição 2.2.5) e a linearidade do fluxo em V , segue que pelo teorema anterior que toda perturbação suficientemente pequena do fluxo admite uma conjugação de classe C^2 com a derivada do fluxo. Podemos supor que

o aberto em torno de σ onde o fluxo é linear é da forma $V = (-1, 1) \times (-a, a)^2$, nessa região o fluxo será dado por

$$X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t}, z_0 e^{\lambda_3 t}), \quad (3.1)$$

suporemos também que $cl(V) \cap D^i = \{(x, \pm a, 0) | x \in [-a, a]\}$. Para $y, z \in V$, definimos os conjuntos abaixo contidos na região linearizável em torno da singularidade σ .

$$\begin{aligned} S_z &= \{(x, y, \operatorname{sgn}(z)a), \text{ com } |x| < 1 \text{ e } 0 < |y| < a\} \\ S_y &= \{(x, \operatorname{sgn}(y)a, z) \text{ com } |z| < a \text{ e } 0 < |y| < a\} \end{aligned}$$

Se Γ é uma seção transversal ao fluxo, denotaremos por $t(p, \Gamma) \in \mathbb{R}$ o primeiro iterado positivo onde a órbita do ponto p intersecta Γ . Usando a equação (3.1), a aplicação $L : S_z \rightarrow S_y$ definida por $L(p) = X^{t(p, S_y)}(p)$ pode ser escrita como

$$L(x, y, z) = (|a|^{-\beta} x |y|^\beta, \operatorname{sgn}(y)a, \operatorname{sgn}(z)a |a|^{-\alpha} |y|^\alpha) \quad (3.2)$$

onde $0 < \alpha = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} < 1 < \beta = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Seja $\Gamma_{\gamma_s^+}$ pequena vizinhança aberta de γ_s^+ em Σ e Γ_{S_y} aberto em S_y contendo $L(S_z)$. Definimos as aplicações $\phi : \Gamma_{\gamma_s^+} \rightarrow S_z$ e $\psi : \Gamma_{S_y} \rightarrow D^1 \cup D^2$ por $\phi(p) = X^{t(p, S_z)}(p)$ e $\psi(p) = X^{t(p, D)}(p)$. Pelo teorema do fluxo tubular, as funções acima são difeomorfismos sobre suas imagens, pelas propriedades da função R e do fato de

$$P = R \circ \psi \circ L \circ \phi \quad (3.3)$$

segue que

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= (\phi_1(x), \phi_2(y, z), \operatorname{sgn}(z)a) \\ \psi(x, y, z) &= (\psi_1(x, z), \psi_2(z), \psi_3(z)) \end{aligned}$$

Para o caso em que $(x, y, z) \in \Sigma$ e $0 < |y| < a$, a equação (3.3) nos permitem escrever $P(p) = (P_1(p), P_2(p), P_3(p))$ onde:

$$\begin{aligned} P_1(x, y, z) &= \psi_1 \left(a^{-\beta} \phi_1(x) |\phi_2(y, z)|^\beta, \operatorname{sgn}(z)a^{1-\alpha} |\phi_2(y, z)|^\alpha \right) \\ P_2(x, y, z) &= \psi_2(a^{1-\alpha} |\phi_2(y, z)|^\alpha) \\ P_3(x, y, z) &= \psi_3(a^{1-\alpha} |\phi_2(y, z)|^\alpha) \end{aligned}$$

Seja $D^+ = \{(x, re^{2\pi rti}); t \in [0, 1], x \in [-1, 1]\}$, e considerando $\bar{\Phi} : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow \Sigma$ dada por $\bar{\Phi}(x, y) = (y, e^{-2\pi(x+3/4)i})$, a expressão de P nessa carta é escrita como

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} \circ P \circ \bar{\Phi}^{-1}(t, x) &= \bar{\Phi} \circ \psi \circ L \circ \phi \circ \bar{\Phi}^{-1} \\ &= (f(t), g(t, x)).\end{aligned}$$

Onde $f(t) = c_1|\bar{\phi}_2(t)|^\alpha + c_2$ e $g(t, x) = \psi_1(a^{-\beta}c_1\phi_1(x)|\bar{\phi}_2(t)|^\beta, a^{1-\alpha}|\bar{\phi}_2(t)|^\alpha)$, com $\bar{\phi}_2(t) = \phi_2 \circ \bar{\Phi}_2^{-1}(t)$ onde $\bar{\Phi}_2$ é a segunda coordenada de $\bar{\Phi}$. Observe em particular que:

- (a) $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{\phi}_2(t) = \lim_{t \rightarrow 1/2} \bar{\phi}_2(t) = 0$.
- (b) $(\partial_x \phi_1) \cdot (\partial_y \phi_2) \neq 0$.

3.3 Existência de uma folheação invariante \mathcal{F} .

A prova da existência de uma folheação invariante para o fluxo geométrico de Lorenz foi feita por Pacífico, Manê, Labarca e Bamom em [6]. Na demonstração original, a folheação invariante é obtida como ponto fixo de um operador T que representa a inclinação de vetores tangentes é contração. Para isso, foi usado que a derivada da aplicação de Poincaré se escreve como $DP = DR \cdot DL$, onde DL é a derivada da aplicação dada na equação (2.2) e $(DR)^t$ é uma matriz diagonal cujos autovalores m e M representam contração e expansão, a saber: $0 < m < 1/2$ e $M > 1$ (ver [5], 3.3.4), lá algumas conclusões foram estabelecidas fazendo suposições extras sobre essas constantes. Nessa secção adaptamos essa demonstração fazendo apenas a exigência de que o campo de cones contraia vetores a uma taxa menor do que $1/2$, com essa hipótese é possível provar que para o operador T definido anteriormente, T^n é contração para n suficientemente grande. O principal teorema a ser mostrado nesse capítulo é:

Teorema A. *Existe aberto \mathcal{U} na topologia C^1 contendo X_0 , tal que todo $Y \in \mathcal{U}$ admite uma folheação contratora \mathcal{F}_Y na seção transversal Σ .*

Considere o campo de cones C_α^s definido sobre Σ . Seja \mathcal{A} o espaço das funções contínuas $\phi : \mathcal{U} \times \Sigma^* \rightarrow [-\alpha, \alpha]$, para cada $Y \in \mathcal{U}$ e $\phi \in \mathcal{A}$ definimos $\phi_Y : \Sigma^* \rightarrow [-\alpha, \alpha]$ por $\phi_Y(q) = \phi(Y, q)$ para todo $q \in \Sigma^*$. Podemos associar a ϕ_Y um campo vetorial $\eta_Y^\phi : \Sigma^* \rightarrow [-\alpha, \alpha] \times \{1\}$ dado por $\eta_Y^\phi(q) = (\phi_Y(q), 1)$ que pode ser visto como um vetor em $T_q(S^1 \times \mathbb{R})$, integrando o campo η obtemos uma família de curvas que induzem uma folheação em Σ . Devemos mostrar que existe $\phi \in \mathcal{A}$ tal que η_Y^ϕ induz uma folheação invariante sobre P_Y .

Seja F um campo vetorial contínuo sobre Σ^* e P_Y transformação definida acima, integrando F nos obtemos uma folheação de Σ , essa folheação é invariante se

$$DP(q)(F(q)) \text{ e } F(P(q)) \text{ são paralelos, ou} \quad (3.4)$$

$$F(q) \text{ e } [DP(q)]^{-1}F(P(q)) \text{ são paralelos.} \quad (3.5)$$

Sendo assim, a folheação é invariante se

$$\text{inclinação}(F(q)) = \text{inclinação}([DP(q)]^{-1}F(P(q)))$$

Ou seja, para η_Y^ϕ , a folheação \mathcal{F} é invariante se

$$\phi_Y(q) = \text{inclinação}(\eta_Y^\phi) = \text{inclinação}([DP_Y(q)]^{-1}\eta_Y^\phi(P_Y(q)))$$

Definindo o operador $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ como

$$T(\phi_Y)(q) = \text{inclinação}([DP_Y(q)]^{-1}(\eta_Y^\phi(P_Y(q))))$$

Observe que $[DP_Y]^{-1}$ é dada por

$$[DP_Y]^{-1} = \frac{1}{\det(DP)} \begin{pmatrix} \partial_y g_Y & -\partial_y f_Y \\ -\partial_x g_Y & \partial_x f_Y \end{pmatrix}$$

consequentemente

$$[DP_Y]^{-1}\eta_Y^\phi(P_Y) = \frac{1}{\det(DP)} \begin{pmatrix} \partial_y g_Y & -\partial_y f_Y \\ -\partial_x g_Y & \partial_x f_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_Y(P_Y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

E portanto

$$T(\phi_Y)(q) = \frac{[\phi_Y(P_Y(q))]\partial_y g_Y(q) - \partial_y f_Y(q)}{-[\phi_Y(P_Y(q))]\partial_x g_Y(q) + \partial_x f_Y(q)} \quad (3.6)$$

Para a regularidade da folheação estável, consideramos \mathcal{A}_1 como o conjunto das funções contínuas $A : \mathcal{U} \times S \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ satisfazendo a propriedade $\sup_{(X,q)} |A(X, q)| < +\infty$ e $A(X, (0, y)) = 0$ para todo $y \in [-1, 1]$. Definimos o operador $S : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1$:

$$S(\phi, A) = V_1(\phi) + T(\phi)V_2(\phi) + N(\phi)(A \circ P_Y)DP_Y$$

Onde

$$\begin{aligned} V_1(\phi) &= \frac{\phi \circ P_Y}{\partial_x f_Y - \phi \circ P_Y \partial_x g_Y} \cdot D\partial_y g_Y - \frac{1}{\partial_x f_Y - (\phi \circ P_Y) \partial_x g_Y} D\partial_y f_Y \\ V_2(\phi) &= \frac{\phi \circ P_Y}{\partial_x f_Y - (\phi \circ P_Y) \partial_x g_Y} D\partial_x f_Y - \frac{1}{\partial_x f_Y - (\phi \circ P_Y) \partial_x g_Y} D\partial_x g_Y \\ N(\phi) &= \frac{\det DP_Y}{(\partial_x f_Y - (\phi \circ P_Y) \partial_x g_Y)^2} \end{aligned}$$

Observe que

$$DT(\phi) = V_1(\phi) + T(\phi)V_2(\phi) + N(\phi)D(\phi \circ P_Y).$$

Por fim, consideramos o operador $\tilde{T} : \mathcal{A} \times \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}_1$ dado por $\tilde{T}(\phi, A) = (T(\phi), S(\phi, A))$ e que satisfaz $\tilde{T}(\phi, DT(\phi)) = (T(\phi), DT(\phi))$ para $\phi \in C^1$. Concluimos que X possui folheação estável invariante se, e somente se, \tilde{T} possui ponto fixo de classe C^1 .

Podemos enunciar o seguinte lema:

Lema 3.3.1. *Existem constantes positivas $\{k_i\}_0^8$ e $\varepsilon > 0$, tal que para todo campo Y numa ε -vizinhança de X e para todo $x \in S^1$ valem as seguintes estimativas:*

$$(1) \left| \frac{\partial_y g_Y(x)}{\partial_x f_Y(x)} \right| \leq k_1 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha+1}, \quad \left| \frac{\partial_y f_Y(x)}{\partial_x f_Y(x)} \right| \leq k_2 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha+1}.$$

$$(2) |\det DP_Y| \leq k_3 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta+\alpha-1}.$$

$$(4) \left| \frac{D\partial_y g_Y}{\partial_x f_Y} \right| \leq k_4 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha}, \quad \left| \frac{D\partial_x g_Y}{\partial_x f_Y} \right| \leq k_5 |\bar{\phi}_2(x)|^{-1}.$$

$$(5) \left| \frac{D\partial_y f_Y}{\partial_x f_Y} \right| \leq k_6 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha}, \quad \left| \frac{D\partial_x f_Y}{\partial_x f_Y} \right| \leq k_7 |\bar{\phi}_2(x)|^{-1}$$

$$(6) \frac{|\det DP|}{|\partial_x f|^2} |DP_Y| \leq k_8 |\bar{\phi}_2(x)|^\beta,$$

Demonstração. Usando 3.4, seguem as expressões para as derivadas parciais de P :

$$|\partial_x f| = c_1 \alpha |\bar{\phi}_2(x)|^{\alpha-1} |(\bar{\phi}_2(x))'|$$

$$|\partial_x g| = |(\partial_x \psi_1) a^{-\beta} c_1 \phi_1(y) \beta (\bar{\phi}_2)^{\beta-1} (\bar{\phi}_2)'(x)| + |(\partial_y \psi_1) a^{1-\alpha} \alpha (\bar{\phi}_2(x))^{\alpha-1} (\bar{\phi}_2(x))'|$$

$$|\partial_y g| = |(\partial_y \psi_1) a^{-\beta} c_1 (\bar{\phi}_2(x))^\beta (\bar{\phi}_1(y))'|$$

Para qualquer fluxo Y que esteja C^1 suficientemente próximo de X , a aplicação de Poincaré $P_Y : \Sigma \rightarrow \Sigma$ dada por $P_Y(x, y) = (f_Y(x, y), g_Y(x, y))$ também está definida e pode ser escrita $P_Y = J_Y \circ P$, onde $J_Y = (x + \varepsilon_1, y + \varepsilon_2)$, assim

$$\begin{aligned} DP_Y &= \begin{pmatrix} (1 + \partial_x \varepsilon_1) \partial_x f + \partial_y \varepsilon_1 \partial_x g & (\partial_y \varepsilon_1) \partial_y g \\ (\partial_x \varepsilon_1) \partial_x f + (1 + \partial_y \varepsilon_2) \partial_x g & (1 + \partial_y \varepsilon_2) \partial_y g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f_Y & \partial_y f_Y \\ \partial_x g_Y & \partial_y g_Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\left| \frac{\partial_y g_Y(x)}{\partial_x f_Y(x)} \right| \leq \frac{|(1 + \partial_y \varepsilon_2)(\partial_y \psi_1) a^{-\beta} c_1 (\bar{\phi}_2(x))^\beta (\bar{\phi}_1(y))'|}{|(1 + \partial_x \varepsilon_1) c_1 \alpha |\bar{\phi}_2(x)|^{\alpha-1} |(\bar{\phi}_2(x))'|} \leq k_1 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha-1}$$

Da mesma forma

$$\left| \frac{\partial_y f_Y(x)}{\partial_x f_Y(x)} \right| < \frac{|(\partial_y \varepsilon_1)(\partial_y \psi_1) a^{-\beta} c_1 (\bar{\phi}_2(x))^\beta (\bar{\phi}_1(y))'|}{|(1 + \partial_x \varepsilon_1) c_1 \alpha |\bar{\phi}_2(x)|^{\alpha-1} |(\bar{\phi}_2(x))'|} \leq k_2 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha+1}.$$

$$\begin{aligned} |\det DP_Y| &= |\partial_x f_Y \partial_y g_Y - \partial_y f_Y \partial_x g_Y| \\ &= |((1 + \partial_x \varepsilon_1) \partial_x f + \partial_y \varepsilon_1 \partial_x g)((1 + \partial_y \varepsilon_2) \partial_y g) \\ &\quad + (\partial_y \varepsilon_1) \partial_y g ((\partial_x \varepsilon_1) \partial_x f + (1 + \partial_y \varepsilon_2) \partial_x g)| \\ &= |(1 + \partial_x \varepsilon_1) \partial_x f (1 + \partial_y \varepsilon_2) \partial_y g - \partial_y \varepsilon_1 \partial_y g (1 + \partial_y \varepsilon_2) \partial_x g| \\ &\leq k_3 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta+\alpha-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{D \partial_y g_Y}{\partial_x f_Y} \right| &\leq \frac{|(\partial_{xy}^2 \varepsilon_2) \partial_y g| + |(1 + \partial_y \varepsilon_2) \partial_{xy}^2 g| + |\partial_y^2 \varepsilon_2 \partial_y g| + |(1 + \partial_y \varepsilon_2) \partial_{yy}^2 g|}{|(1 + \partial_x \varepsilon_1) c_1 \alpha |\bar{\phi}_2(x)|^{\alpha-1} |(\bar{\phi}_2(x))'|} \\ &\leq \frac{|\partial_{xy}^2 \varepsilon_2 + \partial_{yy}^2 \varepsilon_2| |\partial_y g| + |1 + \partial_y \varepsilon_2| |\partial_{xy}^2 g + \partial_{yy}^2 g|}{|(1 + \partial_x \varepsilon_1) c_1 \alpha |\bar{\phi}_2(x)|^{\alpha-1} |(\bar{\phi}_2(x))'|} \\ &\leq \frac{c_1 |\bar{\phi}_2(x)^\beta| + c_2 |\bar{\phi}_2(x)|^{2\beta-1} + c_3 |\bar{\phi}_2|^{\beta-\alpha-1} + c_4 |\bar{\phi}_2|^{\beta-1}}{|(1 + \partial_x \varepsilon_1) c_1 \alpha |\bar{\phi}_2(x)|^{\alpha-1} |(\bar{\phi}_2(x))'|} \\ &\leq k_4 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

O item (5) é feito de maneira análoga ao anterior. Para provar (6), as expressões para as derivadas parciais de f e g permitem fazer a majoração

$$|DP_Y| \leq \tilde{k} |\bar{\phi}_2(x)|^{\alpha-1}.$$

Portanto

$$\frac{|\det DP| |DP_Y|}{|\partial_x f|^2} \leq \frac{k_3 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta+\alpha+1} \tilde{k} |\bar{\phi}_2(x)|^{\alpha-1}}{(c_1(x) |\bar{\phi}_2(x)|^{\alpha-1})^2} \leq k_8 |\bar{\phi}_2(x)|^\beta.$$

□

Proposição 3.3.2. *Suponha que Y seja um campo satisfazendo as hipóteses do lema 3.3.1. Então operador \tilde{T} satisfaz:*

- (1) $\tilde{T}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}_1$.
- (2) $\tilde{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é contração.
- (3) Se $\tilde{T}(\phi, \tilde{\phi}) = (\phi, \tilde{\phi})$, então ϕ é de classe C^1 e $\tilde{\phi} = D\phi$.

Demonstração. (1) Para todo ponto q , o vetor $v = (\phi_Y \circ P_Y(q), 1)$ pertence ao cone $C^s(P(q))$ se, e somente se $\phi_Y \circ P_Y(q) \in \mathcal{A}$. Pela invariância de DP^{-1} e pela expressão 3.6, concluímos

$$T(\phi_Y)(q) = \frac{|(\phi_Y \circ P_Y)\partial_y g_Y - \partial_y f_Y|}{|\partial_x f_Y - (\phi_Y \circ P_Y)\partial_x g_Y|} < \alpha.$$

Ou seja, $T(\Phi_Y) \in C^s(p)$. Como $|\partial_x g_Y| < +\infty$ e o supremo dos ângulos dos cones C^s pode ser tomado pequeno, para alguma constante $\delta > 0$ pequena, vale a desigualdade:

$$(1 + \delta)|\partial_x f_Y| > |\partial_x f_Y - (\phi_Y \circ F_Y)\partial_x g_Y| > (1 - \delta)|\partial_x f_Y| \quad (3.7)$$

Dessa forma:

$$|T(\phi_Y)| \leq K \frac{|\partial_y g_Y| + |\partial_y f_Y|}{|\partial_x f_Y|} \leq K |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha+1}.$$

Onde $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow 1/2 \Rightarrow |\bar{\phi}(x)| \rightarrow 0$, ou seja, $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

Para \tilde{T} e $\phi \in \mathcal{A}$, segue que

$$\begin{aligned} |V_1(\phi)| &\leq \frac{1}{1-\delta} \left(\alpha k_4 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha} + k_6 |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha} \right) \leq K |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha}. \\ |V_2(\phi)| &\leq \alpha \frac{|D\partial_x f_Y|}{|\partial_x f_Y| |1 - (\phi_Y \circ P_Y)\frac{\partial_x g_Y}{\partial_x f_Y}|} + \frac{|D\partial_x g_Y|}{|\partial_x f_Y| |1 - (\phi_Y \circ P_Y)\frac{\partial_x g_Y}{\partial_x f_Y}|} \\ &\leq K |\bar{\phi}_2(x)|^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto $|T(\phi)V_1(\phi)| \leq K |\bar{\phi}_2(x)|^{\beta-\alpha}$, onde concluímos que $\tilde{T}(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_1$.

Para provar (2), vamos mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que T^{n_0} e \tilde{T}^{n_0} são contração. Tome $\phi_2, \phi_1 \in \mathcal{A}$ e escreva $q_n = P^n(q)$, logo $|T^{n+1}(\phi_2) - T^{n+1}(\phi_1)| = C_n |T^n(\phi_2) - T^n(\phi_1)|$, onde

$$C_n = \frac{|\det DP^n|}{| -T^n(\phi_2)\partial_x g_Y + \partial_x f_Y | | -T^n(\phi_1)\partial_x g_Y + \partial_x f_Y |}.$$

Repetindo o argumento, segue que $|T^{n+1}(\phi_2) - T^{n+1}(\phi_1)| = K_n|\phi_2 - \phi_1|$ onde

$$K_n = \prod_{0 \leq i \leq n} \frac{|det DP^{i+1}(q)|}{|-T^i(\phi_2)\partial_x g_Y + \partial_x f_Y| \cdot |-T^i(\phi_1)\partial_x g_Y + \partial_x f_Y|}.$$

Observe que cada $|-T^i(\phi_2)\partial_x g_Y + \partial_x f_Y|$ é tomado no ponto $P^i(q)$. Para Y suficientemente próximo de X e todo $i \in \mathbb{N}$ segue a desigualdade

$$|\partial_x g_Y(P^i(q))\partial_y f_Y(P^i(q))| < \delta \partial_x f_Y(\partial_x g_Y(P^i(q))\partial_y f_Y(P^i(q)))$$

dessa forma

$$\begin{aligned} |det DP(P^i(q))| &= |\partial_x f_Y(P^i(q))\partial_y g_Y(P^i(q)) - \partial_x g_Y(P^i(q))\partial_y f_Y(P^i(q))| \\ &< \partial_x f_Y(P^i(q))(\delta + \partial_y g_Y(P^i(q))) \leq |\partial_x f_Y(P^i(q))|(\delta + \lambda). \end{aligned}$$

Da desigualdade anterior e de 3.7

$$K_n \leq \prod_{0 \leq i \leq n} \frac{|\partial_x f_Y(P^i(q))|(\delta + \lambda)^n}{(1 - \delta)^{2n} \partial_x(f_Y(P^i(q)))^2} \leq \frac{(\delta + \lambda)^n}{(1 - \delta)^{2n} \prod_{0 \leq i \leq n} \partial_x(f_Y(P^i(q)))}.$$

Para δ suficientemente pequeno e n_0 grande, $K_{n_0} < 1/2$ e portanto T^{n_0} é contração.

$$\begin{aligned} \|S^n(\phi, A_2) - S^n(\phi, A_1)\| &= \|N(\phi)^n[A_2 \circ P_Y - A_1 \circ P_Y]DP_Y^n\| \\ &\leq |N(\phi)|^n |DP_Y^n| \|A_2 - A_1\| \\ &\leq C_N \|A_2 - A_1\|. \end{aligned}$$

Com $C_n = K_n \|DP_Y^n(q)\|$, observe que $\|DP_Y^n(q)\|$ pode ser majorado pela norma da matriz

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

Onde

$$\begin{aligned} A_n &= 2^{n-1} \prod_{0 \leq i \leq n} \partial_x f_Y(P^{i-1}(q)) \\ B_n &= (2^{n-1})\varepsilon \prod_{0 \leq i \leq n} \partial_x f_Y(P^{i-1}(q)) \\ C_n &= 2^n \prod_{0 \leq i \leq n} \partial_x f_Y(P^{i-1}(q)) \left(\sum_{0 \leq j < n} \frac{\partial_x g_Y(P^j(q))}{2^j} \right) \\ D_n &= (2^{n-1})\varepsilon \prod_{0 \leq i \leq n} \partial_x f_Y(P^{i-1}(q)) \end{aligned}$$

A relação $|\partial_x g_Y| < M$, implica na existência de um $l \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\|DP^n(q)\| \leq 2^{n+l} \prod_{0 \leq i \leq n} \partial_x f_Y(P^{i-1}(q)).$$

E portanto obtemos

$$\begin{aligned} C_n &\leq \frac{(\delta + \lambda)^n}{(1 - \delta)^{2n} \prod_{0 \leq i \leq n} \partial_x f_Y(P^{i-1}(q))} 2^l \prod_{0 \leq i \leq n} \partial_x f_Y(P^{i-1}(q)) \\ &\leq 2^l \frac{2^n (\delta + \lambda)^n}{(1 - \delta)^{2n}} \leq 2^l \frac{(2\delta + 2\lambda)^n}{(1 - \delta)^{2n}}. \end{aligned}$$

Como $2\lambda < 1$, se δ for tomado suficientemente pequeno então $C_n \rightarrow 0$ e portanto $S^n(\phi, \cdot)$ é contração para n suficientemente grande. Para provar (3), observe que o ponto fixo $(\bar{\phi}, \bar{A})$ de \tilde{T} é um atrator, logo $\tilde{T}^n(\bar{\phi}, D\bar{\phi}) = (T^n(\bar{\phi}), D(T^n(\bar{\phi}))) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (\bar{\phi}, D(\bar{\phi})) = (\bar{\phi}, \bar{A})$ e concluímos dessa forma que $D(\bar{\phi}) = \bar{A} \in C^1$. \square

3.4 Função unidimensional associada

Observe que por construção, a aplicação de Poincaré do fluxo X^t construído no capítulo 1 possui estrutura de produto semi-direto. Por outro lado, não podemos garantir que aplicações de Poincaré associadas as perturbações desse campo ainda gozem dessa propriedade. Esse problema pode ser contornado pela existência da folheação invariante \mathcal{F} , esta permite quociente o espaço de forma a transformar as folhas em Σ em segmentos verticais. Fixado campo $Y \in \mathcal{U}$ dado pelo teorema A, considere a relação de equivalência \sim em Σ dada por $p \sim q \Leftrightarrow \gamma_p^s = \gamma_q^s$, onde γ_p^s denota a folha estável contendo o ponto p , denotaremos por $\tilde{\Sigma}$ o espaço quociente gerado por \sim . Definimos a projeção ao longo das folhas estáveis por $\pi_{\mathcal{F}} : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$, por $\pi_{\mathcal{F}}(p) = (x, \pi_y(p))$, onde $x \in S^1$ é o único elemento onde $\gamma_p^s = \gamma_{(x,0)}^s$ e π_y é a projeção canônica na segunda coordenada. A invariância da folheação estável implica na existência de uma única transformação $P_{\mathcal{F}} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ satisfazendo:

$$\begin{cases} P_{\mathcal{F}}(x, y) = (f_{\mathcal{F}}(x), g_{\mathcal{F}}(x, y)) & (3.8) \\ P_{\mathcal{F}} \circ \pi_{\mathcal{F}} = \pi_{\mathcal{F}} \circ P & (3.9) \end{cases}$$

As igualdades acima significam que a aplicação de primeiro retorno P_Y associada a qualquer campo $Y \in \mathcal{U}$ pode ser sempre considerada como um produto cruzado. A regularidade dessa aplicação está diretamente relacionada com a regularidade folheação

\mathcal{F}_s . Para nosso sistema, a folheação estável é de fato uma folheação topológica, mas a suavidade das folhas não implicam na suavidade da folheação. Recentemente, Araújo, Melbourne e Varandas deram uma condição suficiente para a suavidade da folheação para o atrator de Lorenz [3] e posteriormente para qualquer atrator singular hiperbólico [4].

Teorema 3.4.1 (Araújo, Melbourne). *Seja M variedade diferenciável de dimensão 3, $\Lambda \subset M$ conjunto singular hiperbólico para X^t e $\{W_x^s\}$ uma folheação estável invariante. Seja q inteiro não negativo e suponha que exista $t > 0$ satisfazendo:*

$$\|DX^t|_{E^s(x)}\| \cdot \|DX^{-t}|_{E^{cu}(x)}\| \cdot \|DX^t|_{E_x^{cu}}\|^q < 1$$

para todo $x \in \Lambda$. Então a folheação $\{W_x^s\}$ é de classe C^q .

No teorema 5.4.4 será provado que todo campo Y contido numa vizinhança \mathcal{U} de X satisfaz as hipóteses do teorema 3.4.1 e portanto a regularidade da folheação descrita no teorema anterior implicará suavidade da aplicação unidimensional associada $f_{\mathcal{F}}$. Para todo campo $X \in \mathcal{U}$, a aplicação unidimensional associada goza das seguintes propriedades:

- (a) $f : S^1 \rightarrow S^1$ possui exatamente duas descontinuidades que denotaremos por " a_1 " e " a_2 ", essas são imagens de γ_{\pm}^s pela projeção $\pi_{\mathcal{F}}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x)$ para $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2\}$.
- (b) $f' > \sqrt{2}$ e $\lim_{x \rightarrow a_i} f'(x) = +\infty$ $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2\}$.
- (c) $S^1 \setminus \{a_1, a_2\} = I_1 \cup I_2$, onde $f_i = f|_{I_i} : I_i \rightarrow S^1$ é difeomorfismo para cada $i \in \{1, 2\}$.

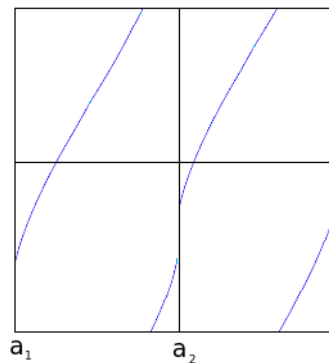


Figura 11 – Gráfico da aplicação unidimensional

3.4.1 Fluxo a dois parâmetros

Sobre o campo X construído no início do capítulo, associaremos uma família de fluxos obtidos pela ação de pares de parâmetros $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$, definidos da seguinte forma: $X_{(\theta_1, \theta_2)}^t$ é o fluxo cuja aplicação $R_{(\theta_1, \theta_2)} : D^i \rightarrow \Sigma$, dada por $R_{(\theta_1, \theta_2)}(p) = X_{(\theta_1, \theta_2)}^t$, satisfaz $R_{(\theta_1, \theta_2)}(D^i) = R(D^i) + \theta_i$ com $i \in \{1, 2\}$ (ver propriedade H8 da construção de X^t).

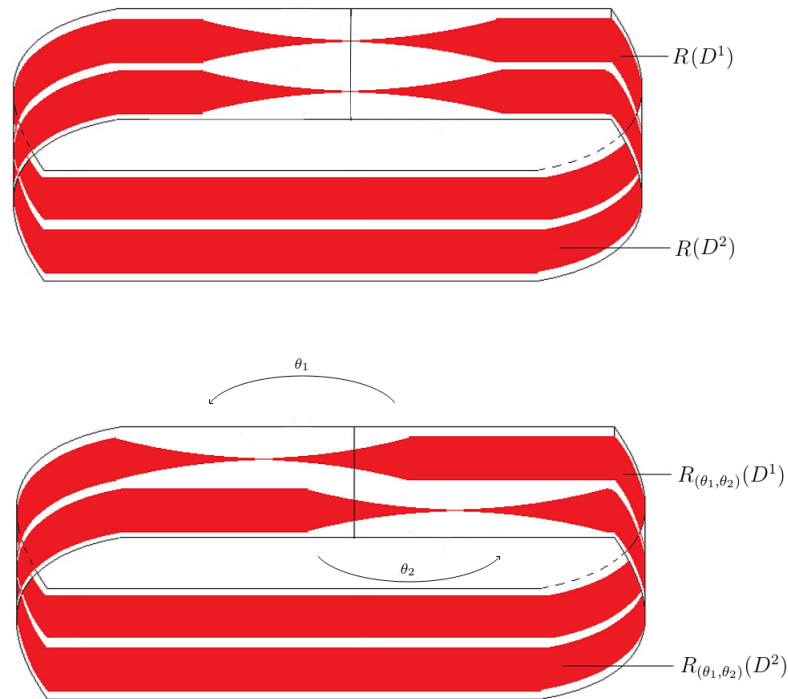


Figura 12 – Imagens das aplicações de Poincaré de X^t e X_μ^t

Geometricamente, os parâmetros (θ_1, θ_2) agem sobre X^t girando as duas faixas que compõe a imagem da aplicação de Poincaré $P(\Sigma)$, cada uma de um ângulo θ_i . A figura abaixo indica a imagem da aplicação de Poincaré do campo X e de sua rotação induzida. Fazendo a hipótese de compatibilidade $a_1 = 0$ e $a_2 = 1/2$, a aplicação unidimensional associada a um campo $X_{(\theta_1, \theta_2)}^t$ é dada por

$$f_{(\theta_1, \theta_2)}(x) = \begin{cases} f_1(x) + \theta_1, & \text{se } x \in (0, 1/2) \\ f_2(x) + \theta_2, & \text{se } x \in (1/2, 1) \end{cases} \quad (3.10)$$

4 Dinâmica simbólica

No capítulo anterior, vimos que a diferenciabilidade da folheação estável do campo X permite considerar as aplicações unidimensionais associadas como produtos cruzados via a aplicação de holonomia. Este capítulo tem como objetivo fazer o estudo topológico dessas aplicações por meio das chamadas “sequência de itinerários”. Itinerários são sequências unilaterais definidas sobre um conjunto de símbolos, originalmente foram introduzidas por John Milnor e Willian Thuston em [14] com objetivo de relacionar a dinâmica dos pontos de máximo e mínimo de funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ com dinâmica simbólica. Posteriormente, John Guckenheimer e John Williams usaram essas idéias para fazer o estudo topológico dos atratores de Lorenz em [22] definindo itinerários para funções $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ trocando as órbitas dos pontos de máximo e mínimo pelas das singularidades. Iremos construir uma nova definição de itinerário para a classe de fluxos construída no capítulo 2 e usar as idéias em [22] para realizar a classificação topológica. Mostraremos como essas sequências se relacionam com as órbitas da aplicação unidimensional associada e os parâmetros do toro que agem sobre o fluxo. A seção 1 é destinada às definições e propriedades enquanto que a seção 2 estabelece o principal resultado desse capítulo: a equivalência entre mapas com os mesmos itinerários.

4.1 Itinerários

Considere o conjunto $\mathcal{S} = \{b, d\}$ com a ordenação $b < d$ e X o conjunto das sequências unilaterais definidas sobre $\mathcal{S} \times \{0, 1\}$. Muniremos $\mathcal{S} \times \{0, 1\}$ com a relação de ordem lexicográfica, ou seja, $(x^1, t^1) < (x^2, t^2)$ se, e somente se, $x^1 < x^2$ ou $x^1 = y^1$ e $t^1 < t^2$, onde $(x^i, t^i) \in \mathcal{S} \times \{0, 1\}$. Estendemos essa relação de ordem a X da seguinte forma: dadas sequências $A, B \in X$, $A < B$ se, e somente se, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_i = B_i$ para todo $0 \leq i < n_0$ e $A_{n_0} < B_{n_0}$. Seja, $\sigma : X \rightarrow X$ o shift unilateral, ou seja, $\sigma(A_0, A_1, A_2, \dots) = (A_1, A_2, \dots)$, $d(A, B)$ representa a distância entre duas sequências, onde $d(A, B) = 2^{-n}$ com $n = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid A_i \neq B_i\}$. Representaremos por $s_i(A)$ e $d_i(A)$ os símbolos que aparecem na primeira e segunda coordenadas do i -ésimo termo da sequência

A , ou seja, $A_i = (s_i(A), d_i(A))$. Se A e B forem duas sequências (onde A é finita), AB denotará a concatenação da sequência A com a sequência B .

A partir desse momento f sempre denotará a aplicação unidimensional associada a um algum campo Y dado pelo teorema A, o conjunto dessas funções será denotado por $E_{\sqrt{2}}(S^1, 0, 1/2)$. Nosso objetivo é estabelecer uma conexão entre o X e $\mathcal{O}_f(x)$, para tal, fixaremos uma classe de levantamentos de f e associaremos a cada ponto da aplicação uma sequência simbólica que chamaremos itinerário.

Definição 4.1.1. Para cada $f : S^1 \rightarrow S^1$, denotaremos por $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o levantamento de f que satisfaz:

(a) $0 \leq \tilde{f}(0^+), \tilde{f}(1/2^+) < 1$.

(b) $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x)$, para todo $x \notin \{k, 1/2+k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Para um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, escreveremos indistintamente $f(X)$ para nos referir a $f(\pi(X))$ onde π é a projeção sobre S^1 .

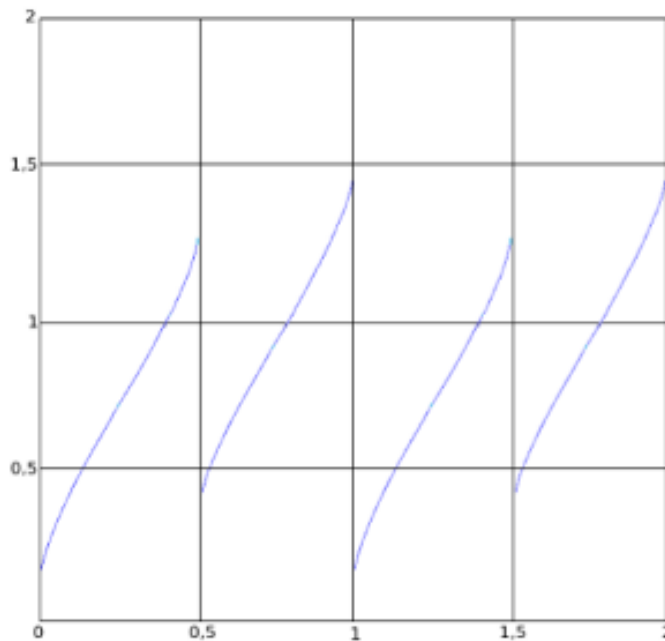


Figura 13 – Gráfico de \tilde{f}

Se $[\cdot]$ denota a função parte inteira, considere a sequência de funções $\{s_n\}_{n=0}^{+\infty} : [0, 1) \rightarrow \mathcal{S}$, onde $s_0(x) = s(x)$ e $s_n(x) = s(\tilde{f}^n(x) - [f^n(x)])$, e $s : [0, 1) \rightarrow \mathcal{S}$ é dada por

$$s(x) = \begin{cases} b, & \text{se, } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ d, & \text{se, } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (4.1)$$

Considere também a sequência $\{d_n\}_{n=0}^{+\infty} : [0, 1) \setminus \{0, 1/2\} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $d_n(x) = [\tilde{f}^{n+1}(x)]$. Fixado x , tais sequências estão definidas para todo $n < \min\{i \in \mathbb{N} \mid f^i(x) \in \{0, 1/2\}\}$. Como $f^n : S^1 \rightarrow S^1$ é descontínua apenas num número finito de pontos e a derivada $(f^n)'$ é maior que 1, para cada ponto $x \in S^1$, sempre existirá um intervalo $(x, x + \delta)$ (respectivamente $(x - \delta, x)$) para o qual $f^n(y)$ estará no interior de um dos intervalos $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, $[1, 3/2]$ e $[3/2, 2]$, isso motiva a seguinte definição:

Definição 4.1.2. *Seja $I_n(x) = (s_n(x), d_n(x))$. Para cada inteiro $n > 0$, existe $\delta_n > 0$ tal que $I_n(y)$ assume um valor constante para todo y no intervalo $(x - \delta, x)$ (e respectivamente, para todo y no intervalo $(x, x + \delta)$), determinamos $I_n(x^-)$ (e respectivamente, $I_n(x^+)$) por esse valor. Definimos os itinerários a esquerda e direita de um ponto x pela função f por*

$$I(x^-) = I_0(x^+)I_1(x^+) \dots \quad \text{e} \quad I(x^+) = I_0(x^+)I_1(x^+) \dots \quad (4.2)$$

Diremos que x é regular se $\mathcal{O}_f(x) \cap \{0, 1/2\} = \emptyset$, caso contrário dizemos que x é um ponto singular. Observe que $I(x^-) = I(x^+)$ se, e somente se, x é regular e neste caso escreveremos $I(x) = I_0(x)I_1(x) \dots$

4.2 Sequências admissíveis

A partir de agora, descreveremos como as órbitas da aplicação unidimensional se relacionam com as sequências do espaço X , somos motivados a considerar a:

Definição 4.2.1. *Dizemos que uma sequência $A \in X$ é admissível por f , se:*

- (i) $I(0^+) \leq \sigma^i(A) \leq I(1^-)$ para todo i .
- (ii) Se para algum n , $s_n(A) = b$ então $\sigma^n(A) \leq I(1/2^-)$.
- (iii) Se para algum n , $s_n(A) = d$, então $\sigma^n(A) \geq I(1/2^+)$.

Denotaremos o conjunto das sequências admissíveis por Γ_f .

Observações:

- Γ_f é compacto e invariante por σ .
- Diremos que Γ_f é gerado pelo par $(I_f(0^+), I_f(1^-))$.

Note Γ_f é gerado por apenas duas sequências, a saber: $I(x^i)$ e $I(y^j)$ com $x, y \in \{0, 1/2\}$, $i, j \in \{-, +\}$ e $x \neq y$ e $i \neq j$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x). \quad (4.3)$$

No caso em que $\{f^m(0^+), f^n(1/2^-), m, n \in \mathbb{N}^*\} \cap \{0, 1/2\} = \emptyset$, fica fácil concluir a afirmação anterior, pois os itinerários pode ser escritos como $I(1/2^-) = (b, 1)\sigma(I(0^+))$ e $I(1/2^+) = (d, 0)\sigma(I(1^-))$. Veremos adiante que a dinâmica de f será de certa forma determinada pelas singularidades via seus itinerários.

Dados os intervalos $I_b = [0, 1/2]$ e $I_d = [1/2, 1]$, podemos associar a cada termo $A_i = (s_i(A), d_i(A))$ da sequência A o intervalo $I(A_i) = I_{s_i(A)} + d_{i-1}(A)$, onde $I_{s_i(A)} + d_{i-1}(A)$ representa $\{x + d_{i-1}(A) \mid x \in I_{s_i(A)}\}$.

Sendo \tilde{f} formado por dois ramos \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 , cada um difeomorfismo entre os intervalos $(0, 1/2)$ e $(1/2, 1)$ e suas respectivas imagens, dado qualquer intervalo compacto I , sua pré-imagem é composta por no máximo dois intervalos disjuntos, cada um deles pertencente a um dos intervalos I_b ou I_d , dessa forma faremos a seguinte convenção: $\tilde{f}^{-1}(I) = [\xi_1, \xi_2] \cup [\xi_3, \xi_4]$ onde $\xi_2 \leq \xi_3$.

Definição 4.2.2. *Seja $A = (A_0, A_1, \dots) \in \Gamma_f$ uma sequência admissível. Para cada A_i e $X \subset [0, 1]$, o pullback do conjunto X por \tilde{f} restrito a A_i é:*

$$\tilde{f}_{A_i}^*(X) = \left(\tilde{f}^{-1}(X + d_i(A)) \right) \cap I_{s_i(A)}.$$

Quando $X = I_{s_{i+1}(A)}$, escrevemos $\tilde{f}_{A_i}^*(X) = I_{i+1}^i(A)$.

Supondo que I_n^{k+1} esteja definido, o pullback da sequência $A_k A_{k+1} \dots A_n$ é definido por

$$I_n^k(A) = \tilde{f}_{A_k}^*(I_n^{k+1}(A)).$$

onde denotamos $I_n(A) = I_n^0(A)$.

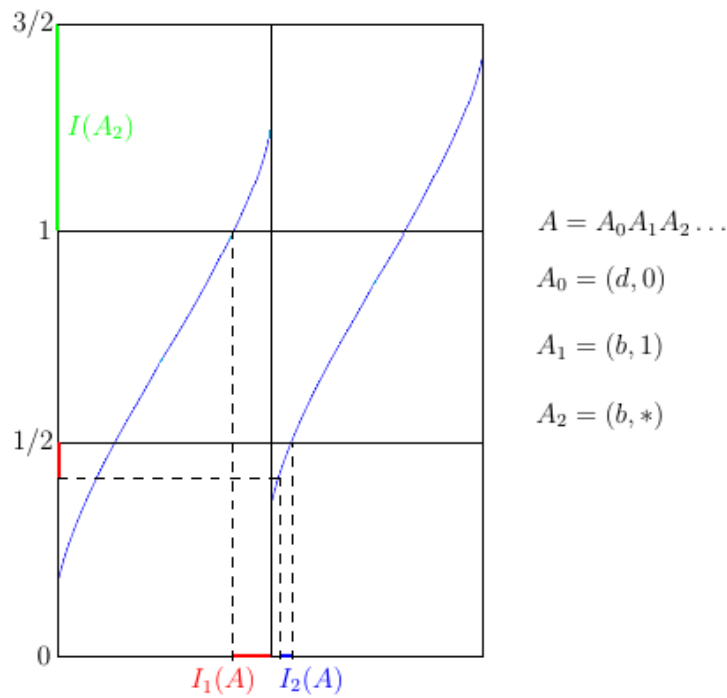


Figura 14 – Exemplo de um pullback

Dada uma sequência admissível A , gostaríamos de determinar os pontos $x \in [0, 1]$ para o qual vale $I(x^\pm) = A_0 A_1 \dots$. Para isso, o primeiro a se fazer é fixar n e nos perguntar: quais pontos satisfazem $I(x) = A_n$? A resposta para essa pergunta é dada no próximo lema:

Lema 4.2.3. *Se $A \in \Gamma_f$, então $I_n(A)$ é o maior intervalo fechado não vazio com a seguinte propriedade: \tilde{f}^n mapeia $I_n(A)$ homeomorficamente dentro do intervalo $I(A_n)$.*

Demonstração. Vamos usar indução sobre n para provar o lema. A afirmação vale trivialmente para $n = 1$, suponha que ela valha para $n = k$. Como $\sigma(\Gamma_f) \subset \Gamma_f$, pela hipótese de indução $I_k^0(\sigma(A)) = I_{k+1}^1(A)$ é o maior intervalo fechado mapeado homeomorficamente dentro de $I(A_{k+1})$ por \tilde{f}^k , observe que $I_{k+1}(A) = \left(\tilde{f}^{-1} \left(I_{k+1}^1(A) + d_0(A) \right) \right) \cap I_{s_0(A)}$, escreva $I_{k+1}^1(A) = [\alpha, \beta]$. Vamos supor sem perda de generalidade que $\tilde{f}(0^+) < \tilde{f}(1/2^+)$, dividiremos a demonstração em várias situações:

Caso 1 : $[\alpha, \beta] \subset [\tilde{f}(0^+), \tilde{f}(1/2^+)]$

(Caso 1a) $s_0(A) = b$.

Nesse caso vale a relação $I_{k+1} \neq \emptyset$ e a inclusão $\tilde{f}(I_{s_0(A)}) \supset I_{k+1}(A)$, usando a hipótese de indução sobre I_{k+1}^1 , podemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{k+1}(I_{k+1}(A)) &= \tilde{f}^k \circ \tilde{f} \left((\tilde{f}^{-1}(I_{k+1}^1(A) + d_0(A))) \cap I_{s_0} \right) \\ &= \tilde{f}^k \left((I_{k+1}^1(A) + d_0(A)) \cap \tilde{f}(I_{s_0(A)}) \right) \\ &= \tilde{f}^k(I_{k+1}^1(A)) \cap \tilde{f}^k(\tilde{f}(I_{s_0(A)})) \\ &\subset I(A_{k+1}) \cap Im(\tilde{f}) \\ &\subset I(A_{k+1}) \end{aligned}$$

Logo segue o resultado.

(Caso 1b) $s_0(A) = d$.

Vamos mostrar que essa situação não pode ocorrer pois implicaria $A \notin \Gamma_f$. Suponha primeiramente que $d_k(A) = 0$, então existirá $n_0 \leq k$ satisfazendo $\tilde{f}^{n_0}(I_{k+1}^1(A)) \subset I(A_{k+1})$ e $\tilde{f}^{n_0}(\beta) \in \{1/2, 1\}$, pois caso contrário existiria um $\varepsilon > 0$ onde $\tilde{f}^i(\beta - \varepsilon) \in I(A_{i+1})$ para todo $0 \leq i \leq k$ o que contrariaria a maximalidade de $I_{k+1}^1(A)$. Tome o menor inteiro $0 \leq l \leq n_0$ satisfazendo $\tilde{f}^l(\beta) \in \{1/2, 1\}$ ou $\tilde{f}^{l+1}(1/2^+) \in \{1/2, 1\}$. Dessa forma, para todo $i < l$ temos $\tilde{f}^i(\beta) \in \text{int}(I(A_{i+1}))$, como $\beta \leq f(1/2^+)$ ocorre:

(b') $\tilde{f}^i(\beta)$ e $\tilde{f}^i(\tilde{f}(1/2^+))$ estão no mesmo $I(A_{i+1})$ para $i < l$ e $\tilde{f}^l(\beta) \leq \tilde{f}^l(1/2^+)$.

(b'') existe um inteiro $0 \leq l_0 < l$ satisfazendo $\tilde{f}^{l_0}(\beta) < 1 < \tilde{f}^{l_0}(\tilde{f}(1/2^+))$ ou $\tilde{f}^{l_0}(\beta) < 1/2 + d_{l_0}(A) < \tilde{f}^{l_0}(\tilde{f}(1/2^+))$.

No caso (b') vale $(s_i(A), d_i(A)) = (s_i(I_f(1/2^+)), d_i(I_f(1/2^+)))$ sempre que $0 \leq i \leq l$. Como $\tilde{f}^l(K)$ é intervalo não degenerado e \tilde{f}^l preserva a orientação, $A_{l+1} < (s_{l+1}(I_f(1/2^+)), d_{l+1}(I_f(1/2^+)))$. No caso (b''), segue que $A_l < (s_l(I_f(1/2^+)), d_l(I_f(1/2^+)))$ e portanto $A < I_f(1/2^+)$.

Se por outro lado, $d_k(A) = 1$, existirá $n_0 \leq k$ satisfazendo a inclusão $\tilde{f}^{n_0}(I_{k+1}^1(A)) \subset I(A_{k+1})$ e $\tilde{f}^{n_0}(\alpha) \in \{1/2, 1\}$ pois caso contrário existiria um $\varepsilon > 0$ onde $\tilde{f}^i(\alpha + \varepsilon) \in I(A_{i+1})$ para todo $0 \leq i \leq k$ o que contrariaria a maximalidade de $I_{k+1}^1(A)$. Tome o menor inteiro $0 \leq l \leq n_0$ onde

$\tilde{f}^l(\alpha) \in \{1/2, 1\}$ ou $\tilde{f}^{l+1}(1/2^+) \in \{1/2, 1\}$, dessa forma, para todo $i < l$ temos $\tilde{f}^i(\alpha) \in \text{int}(I(A_{i+1}))$, como $\alpha \leq f(1/2^+)$ podemos proceder como no caso anterior e encontraremos $A < I_f(1/2^+)$.

Caso 2 $\tilde{f}(1/2^+) \in \text{int}(\alpha, \beta)$.

Se $s_0(A) = b$, basta proceder como no caso 1a. Se $s_0(A) = d$, então $I_{k+1}(A)$ tem a forma $[1/2, \beta']$ com $\tilde{f}(1/2^+) = \alpha$ e $\tilde{f}(\beta') < \beta$.

Caso 3 : $\tilde{f}(1/2^-) \in \text{int}(\alpha, \beta)$, $\tilde{f}(0^-) \in \text{int}(\alpha, \beta)$ e $\tilde{f}(1^+) \in \text{int}(\alpha, \beta)$.

Basta proceder como no caso 2a.

Caso 4 $\beta < \tilde{f}(0^+)$ ou $\tilde{f}(1^+) < \alpha$.

Basta proceder como no caso 1b.

Caso 5 $\tilde{f}(1/2^-) < \alpha < \tilde{f}(1^+)$

Procedemos como no caso 1a se $s_0(A) = d$ e como no caso 1b se $s_0(A) = b$ encontrando $A > I_f(1/2^-)$.

□

4.3 Classificação topológica

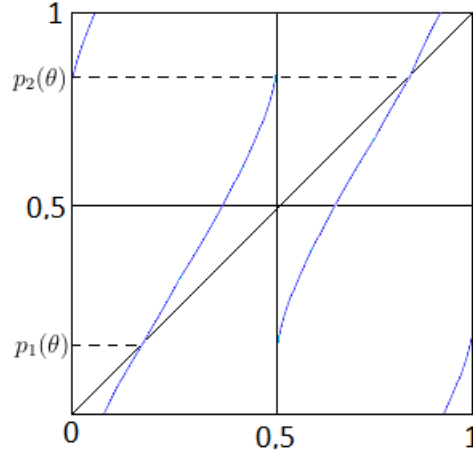
Nosso objetivo é analisar a classe de fluxos construída no capítulo 3, baseado nisso consideramos a definição:

Definição 4.3.1. Denotaremos por $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ o conjunto dos campos em $\mathcal{X}^1(\mathbb{R}^3)$ que satisfazem as Hipóteses \mathcal{H} .

Fixado $X^t \in \mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ e uma região atratora U , gostaríamos de entender como a dinâmica no conjunto maximal invariante $\Lambda_{\mu} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{X_{\mu}^t(U)}$ é influenciada por μ e caracterizar a dinâmica em cada um desses parâmetros. Isso nos permite perguntar: Dado $X \in \mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ e $\mu_1 \neq \mu_2$, as dinâmicas em Λ_{μ_1} e Λ_{μ_2} são “essencialmente diferentes”? Em nosso contexto, “*dinâmicas diferentes*” significam sistemas que não são topologicamente conjugados. Para isso, considere as perturbações X_{μ_1} e X_{μ_2} de um campo X , cujas respectivas aplicações unidimensionais $f : S^1 \rightarrow S^1$ e $g : S^1 \rightarrow S^1$ satisfaçam as hipóteses:

1. f e g possuem dois pontos fixos, denotados por $p_i(f)$ e $p_i(g)$ $i \in \{1, 2\}$.
2. $f(0^+) = p_2(f)$, $f(1/2^+) = p_1(f)$, $g(0^+) = p_2(g)$ e $g(1/2^+) = p_1(g)$.

A seguinte figura representa o gráfico dessas aplicações.



Observe que f e g possuem as mesmas seqüências admissíveis embora os pares de ângulos agindo no sistema sejam diferentes. O próximo teorema determina a condição para que dois campos sejam topologicamente equivalentes: a manutenção dos itinerários. Isso significa que o par (θ_1, θ_2) pode atuar no campo X de maneira a não modificar a dinâmica. Ao quocientar os campos que possuem a mesma dinâmica, podemos nos perguntar quais parâmetros realmente agem em X de maneira não trivial. A resposta para essa pergunta é dada no teorema a seguir.

Teorema B. *Existe uma função $\Psi : \mathcal{X}_C \rightarrow \mathbb{T}^2$ satisfazendo a seguinte propriedade: $\Psi(X_1) = \Psi(X_2)$ se, e somente se, $X_1^t : \Lambda_{X_1} \rightarrow \Lambda_{X_1}$ e $X_2^t : \Lambda_{X_2} \rightarrow \Lambda_{X_2}$ são topologicamente conjugados por homeomorfismo próximo da identidade.*

Demonstração. Seja $\tilde{\psi} : (\mathcal{S} \times \{0, 1\})^{\mathbb{N}} \rightarrow S^1$ definida por

$$\tilde{\psi}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(A_n) 2^{-n}$$

onde $\psi(b, 0) = \psi(b, 1) = 0$ e $\psi(d, 0) = \psi(d, 1) = 1$.

Para cada $X \in \mathcal{X}_{\Sigma}$ definimos $\Psi : \mathcal{X}_{\Sigma} \rightarrow \mathbb{T}^2$ pondo

$$\Psi(X) = (\tilde{\psi}(I(0^+)), \tilde{\psi}(I(1^-)))$$

onde $I(0^+)$ e $I(1^-)$ representam os itinerários das singularidades da aplicação unidimensional associada ao campo X . Denotaremos por Γ_{f_1} e Γ_{f_2} os conjuntos de sequências admissíveis onde f_i é aplicação unidimensional associada a X_i .

(\Leftarrow) Para todo $i \in \{1, 2\}$ existe uma coleção finita de compactos L_{f_i} contendo uma das singularidades em seu interior e invariante por f_i (a existência de tais intervalos é provada no capítulo 5). Seja \mathcal{H} o homeomorfismo próximo da identidade que conjugua $X_1^t : \Lambda_{X_1} \rightarrow \Lambda_{X_1}$ e $X_2^t : \Lambda_{X_2} \rightarrow \Lambda_{X_2}$, isso implica que existe homeomorfismo $h : L_{f_1} \rightarrow L_{f_2}$ conjugando $f_1 : L_{f_1} \rightarrow L_{f_1}$ e $f_2 : L_{f_2} \rightarrow L_{f_2}$, fixando as singularidades e preservando a orientação, dessa forma f_1 e f_2 possuem os mesmos itinerários e conseqüentemente $\Psi(X_1) = \Psi(X_2)$.

(\Rightarrow) Suponha agora que $\Psi(X_1) = \Psi(X_2)$, vamos provar que $\Gamma_{f_1} = \Gamma_{f_2}$. Pelas propriedades de \tilde{f}_i , $\min\{n \in \mathbb{N} \mid d_n(I_{f_1}(0^+)) \neq d_n(I_{f_2}(0^+))\} \geq 0$, o que mostra em particular que $\tilde{f}_1(0^+)$ e $\tilde{f}_2(0^+)$ pertencem ao mesmo intervalo $I(A_0)$.

Suponha por indução que $d_n(I_{f_1}(0^+)) = d_n(I_{f_2}(0^+))$ para todo $n < k$, vamos provar que $d_k(I_{f_1}(0^+)) = d_k(I_{f_2}(0^+))$. Para $j < k$ os j -ésimos termos dessas sequências coincidem e serão denotados por A_j , para $j \geq k$ denotaremos o j -ésimo termo de $I_{f_i}(0^+)$ por A_j^i . Denotando $I_j(I_{f_i}(0^+)) = [0, \alpha_i^j]$ e $I(A_j) \cap \text{Im}(\tilde{f}_i) = [x_i^j, y_i^j]$, o lema 4.2.3 nos permite escrever $\tilde{f}_i^j(0, \alpha_i^j) = (\tilde{f}_i^j(0^+), \tilde{f}_i^j(\alpha_i^j)) \subset (x_i^j, y_i^j)$ com $\tilde{f}_i^j(0^+) = x_i^j$ ou $\tilde{f}_i^j(\alpha_i^j) = y_i^j$ e $\{x_i^j, y_i^j\} \cap \{0, 1/2, 1, 3/2\} \neq \emptyset$. Caso ocorra $x_1^k = x_2^k \in \{0, 1/2, 1, 3/2\}$, necessariamente $\tilde{f}_i^k(0^+) = x_i^k$ e portanto $[\tilde{f}_1^{k+1}(0^+)] = [\tilde{f}_2^{k+1}(0^+)]$. Para o caso em que $y_1^k = y_2^k \in S$ e $x_1^k \neq x_2^k$, se fosse $[\tilde{f}_1^{k+1}(0^+)] \neq [\tilde{f}_2^{k+1}(0^+)]$, então $f_1^{-1}(I(A_{k+1}^1))$ e $f_2^{-1}(I(A_{k+1}^2))$ seriam intervalos disjuntos contidos em extremidades opostas de $[0, 1/2]$ ou de $[1/2, 1]$, mas $\{x_1^k, x_2^k\} \cap S = \emptyset$ e portanto para algum i , $I(A_{k+1}^i) \cap \text{im}(\tilde{f}_i) \subsetneq f_i^{k+1}(0, \alpha_i^{k+1})$ o que contraria o lema 4.2.3, logo $[\tilde{f}_1^{k+1}(0^+)] = [\tilde{f}_2^{k+1}(0^+)]$. Dessa forma, concluímos que $A_k^1 = A_k^2$ o que prova a afirmação.

Considere $h_{f_i} : \Gamma_{f_i} \rightarrow I$ dada por $h_{f_i}(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n(A)$, pelo lema 4.2.3 essa função está bem definida, é contínua e sobrejetiva. Segue também que h_{f_i} é injetiva com exceção das pré-imagens das sequências $\{I_{f_i}^\pm(0), I_{f_i}^\pm(1/2)\}$. Como $\Gamma_{f_1} = \Gamma_{f_2}$, segue que $h_1 \circ h_2^{-1}$ induz uma conjugação $h : S^1 \rightarrow S^1$ entre f_1 e f_2 . Seja $P_{X_i} : \Lambda_{P_{X_i}} \rightarrow \Lambda_{P_{X_i}}$ aplicação de Poincaré associada a $X_i^t : \Lambda_{X_i} \rightarrow \Lambda_{X_i}$ e $\pi_x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção canônica na primeira coordenada. Fixado $p \in \Lambda_{P_{X_i}}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe um único $s_i \in \{b, d\}$ para o qual $\pi_x(F^{-i}(p)) \in I_s$,

definimos $\Phi_{P_i}(p) = (s_0, s_1, s_2, \dots)$. Ψ_i está bem definida fora dos pontos pertencentes as folhas singulares. Como h conjugua f_1 e f_2 , segue que $\Phi_{P_1}(\Lambda_{P_{X_1}}) = \Phi_{P_2}(\Lambda_{P_{X_2}})$. Para dois pontos $p \neq q \in \Lambda_{P_{X_i}}$, $|\partial_y G| < 1/2$ implica $d(F^{-n}(p), F^{-n}(q)) \geq 2^n$, para o menor natural l satisfazendo $d(F^{-l}(p), F^{-l}(q)) > 1$ necessariamente $\pi_x(F_i^{-l}(p)) \in I_{s_l} \neq I_{s'_l} \ni \pi_x(F_i^{-l}(q))$ e portanto $\Phi_i(p) \neq \Phi_i(q)$. Note ainda que Φ_i é homeomorfismo sobre sua imagem e portanto podemos considerar $H = \Phi_{P_2} \circ \Phi_{P_1}^{-1}$ fora dos pontos singulares e pondo $H(p) = p$ para $p \in \gamma_s \cap \Lambda_{P_{X_1}}$.

Para terminar, construímos a conjugação entre os atratores dos fluxos usando comprimento de arco das trajetórias. Sejam D_X^i e D_Y^i $i \in \{1, 2\}$ os cilindros transversais ao fluxo (ver condição H8 na construção do fluxo), estendemos a conjugação anterior aos segmentos de arco partindo de Σ e chegando a D_X^i e D_Y^i , ou seja, a conjugação H satisfaz a propriedade de enviar uma curva γ_X em outra γ_Y onde cada uma está parametrizada pelo comprimento de arco. Estendemos essa conjugação de maneira similar aos segmentos que partem de D_X^i e D_Y^i e retornam a Σ (a construção pode ser encontrada em [7]), o que prova o teorema. \square

O teorema anterior associa o campo X a um número real cuja representação em base 2 coincide com $\Psi(X)$. Dessa forma dois campos são conjugados se, e somente se, eles podem ser vistos como rotações de dois campos base X e Y que preservam os itinerários. Podemos nos perguntar como se comporta a restrição da imagem de Ψ a rotações de apenas um campo X . Sendo mais explícito, fixado X e escrevendo $\mathcal{F}_\mu = \{X_\mu \mid \mu \in \mathbb{T}^2\}$, podemos indagar: $\Psi(\mathcal{F}_\mu) = \mathbb{T}^2$? A resposta para essa pergunta implicaria que apenas um campo X descreveria a dinâmica de todos os elementos em \mathcal{X}_C , pois a menos de conjugações, todos os demais seriam obtidos como rotações de X . No próximo capítulo provaremos que para todo campo X cuja derivada da aplicação unidimensional associada satisfaça $f' > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, existirão parâmetros μ para o qual a existência de apenas uma folha singular γ^s no maximal invariante implica que este é um atrator de Lorenz. Mostraremos também a existência de uma classe de campos em \mathcal{X}_C cujo maximal invariante possui apenas uma única folha singular e cujos atratores não são topologicamente conjugados a nenhum atrator de Lorenz.

Persistindo ainda mais, refazemos as mesmas perguntas voltando ao contexto original, ou seja, $\Psi : \mathcal{X}_C \rightarrow \mathbb{T}^2$ é sobrejetiva? Esperando que a imagem por Ψ de alguma vizinhança

aberta \mathcal{U} de X em \mathcal{X}_C contenha algum aberto de \mathbb{T}^2 , a ação das rotações desses campos parecem implicar que Ψ seja sobrejetiva. Embora nossa intuição nos diga que tal afirmação pareça verdadeira, mostraremos que esse fato também não ocorre, ou seja, $\Psi : \mathcal{X}_C \rightarrow \mathbb{T}^2$ não é sobrejetiva.

Para provar a afirmação acima, mostraremos que $\Psi(\mathcal{X}_C)$ não contém nenhum aberto. Suponha por absurdo que $(a, b) \in \text{int}(\Psi(\mathcal{X}_C)) \neq \emptyset$ e considere os itinerários das sequências $I(0^+) = A = (A_0, A_1, \dots)$ e $I(1^-) = B = (B_0, B_1, \dots)$ de algum campo $X \in \Psi^{-1}(a, b)$. Para algum inteiro positivo l , considere as sequências A^l e B^l definidas por

$$A_i^l : \begin{cases} A_i, & \text{se } 0 \leq i \leq l \\ (d, 1), & \text{se } i > l \end{cases} \quad (4.4)$$

$$B_i^l : \begin{cases} B_i, & \text{se } 0 \leq i \leq l \\ (b, 0), & \text{se } i > l \end{cases} \quad (4.5)$$

Seja Γ o conjunto de sequências admissíveis gerado por pelas sequências A^l e B^l . Para l suficientemente grande, existe campo Y que realiza as sequências acima de forma que $\Psi(Y) \in \text{int}(\Psi(\mathcal{X}_C))$, além disso $\sigma^{l+1}(A^l) > B^l$ e $\sigma^{l+1}(B^l) < A^l$ e portanto $A^l, B^l \notin \Gamma$. Para cada ponto p do conjunto formado pelas pré-imagens das singularidades, existe uma vinhança aberta V_p^n com a propriedade de que os itinerários desses pontos e das singularidades coincidem nos n primeiros termos, o que implica que $I(x) \notin \Gamma$ para todo V_p^n . Isso mais a densidade das pré-imagens das singularidades em S^1 implica que Γ é um conjunto finito, o que é absurdo.

5 Existência de atratores

Neste capítulo, nos concentraremos no estudo da existência de atratores para a família a dois parâmetros $X_\mu \in \mathcal{X}_C$. O principal resultado do capítulo consiste na prova da existência de um atrator em Λ_μ para o fluxo para qualquer $\mu \in \mathbb{T}^2$. Será demonstrado também a existência de um aberto na família dos parâmetros para o qual o maximal invariante se divide em um “atrator de Lorenz” e numa ferradura de Smale, o que em particular fornece a existência de conjuntos hiperbólicos mais complexos que órbitas periódicas. Para isso, faremos um estudo da aplicação unidimensional f_μ associada a X_μ usando algumas idéias de Morales e Pujals em [16].

5.1 Dinâmica da aplicação unidimensional

A importância das aplicações unidimensionais associadas a fluxos reside no fato de permitirem deduzir importantes propriedades do sistema, tais como transitividade e recorrência. No artigo [16], Morales e Pujals estudaram fluxos indexados a um parâmetro que induziam aplicações unidimensionais com propriedades semelhantes às estudadas nos capítulos anteriores com a diferença de possuírem apenas uma singularidade. Usando as ideias ali contidas e adaptando a definição ao nosso caso, consideraremos:

Definição 5.1.1. (Morales, Pujals) *Seja I subintervalo de \mathbb{R} ou de S^1 . Denotamos por $E_{\sqrt{2}}(I, a_1, a_2)$ o conjunto de funções da forma $f : I \setminus \{a_1, a_2\} \rightarrow I$ satisfazendo:*

1. *f é C^1 por partes e descontínua em $\{a_1, a_2\}$, além disso $|f'(x)| > \sqrt{2}$ para todo $x \in I \setminus \{a_1, a_2\}$.*
2. *Existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow \pm a_i} f(x) = s^\pm$.*
3. *f possui derivada infinita nos pontos de descontinuidade.*

Quando $a_1 = a_2$, escrevemos $E_{\sqrt{2}}(I, a_1)$ onde os elementos desse conjunto são chamados de aplicações de Lorenz unidimensionais. Para essas funções, Morales e Pujals provaram o seguinte resultado:

Teorema 5.1.2 (Morales, Pujals). *Seja $f \in E_{\sqrt{2}}(I, a_1)$, então existe um compacto invariante L_f de I contendo a_1 em seu interior e satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i) *A restrição $f|_{L_f}$ é topologicamente transitiva.*
- (ii) *A variedade estável de L_f , $W^s(L_f) = \{x : f^n(x) \rightarrow L_f\}$ é densa.*

Em nosso trabalho foram usadas as ideias em [16], adaptando a demonstração do teorema acima para o caso de aplicações unidimensionais contendo duas singularidades. Esse resultado será de fundamental importância no restante desse trabalho e será enunciado no seguinte lema:

Lema 5.1.3. *Seja $f \in E_{\sqrt{2}}(S^1, a_1, a_2)$, então existe um compacto invariante L_f contendo ao menos uma das singularidades, cuja variedade estável $W^s(L_f)$ é densa em S^1 . Além disso, L_f satisfaz apenas uma das propriedades abaixo:*

1. *L_f é topologicamente transitivo.*
2. *$L_f = L_f^1 \cup L_f^2$ onde cada L_f^i é compacto, invariante, topologicamente transitivo, contém a singularidade a_i e satisfaz $\text{int}(L_f^1) \cap \text{int}(L_f^2) = \emptyset$.*

Demonstração. Denote por $V_r(a)$ a vizinhança de raio r de um ponto a , $V_r^+(a) = (a, a+r)$ e $V_r^-(a) = (a-r, a)$ e defina $n_r^\pm(a_i, a_j)$ por $n_r^\pm(a_i, a_j) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_j \in f^k(V_r^\pm(a_i))\}$. Como $f' > \sqrt{2}$, $f^n(V_r(a_i))$ sempre cortará ao menos uma das singularidades para infinitos valores de n , portanto existem duas escolhas distintas de i e j para o qual a $r \rightarrow n_r(a_i, a_j)$ está definida para todo $r > 0$ e satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f^{n_r^\pm(a_i, a_j)}(V_r^\pm(a_i))$ é aberto.
2. a função $r \rightarrow n_r^\pm(a_i, a_j)$ é não crescente.
3. $\lim_{r \rightarrow 0} n_r^\pm(a_i, a_j) = +\infty$.

A demonstração será dividida em dois casos:

Caso 1: $n_r(a_i, a_j)$ está definido para todo $r > 0$ apenas quando $i = j$.

Podemos fixar $b > 2$ e $\varepsilon_b > 0$ tal que $\min\{(\sqrt{2})^{n_\gamma^\pm(a_i, a_i)}\} > b$, para todo $\gamma < \varepsilon_b$ e $i \in \{1, 2\}$.

Afirmção: Ocorrem as seguintes inclusões:

$$V_{\gamma\frac{b}{2}}^+(a_i) \subset f^{n_\gamma^+(a_i, a_i)}(V_\gamma^+(a_i)) \quad \text{ou} \quad V_{\gamma\frac{b}{2}}^-(a_i) \subset f^{n_\gamma^-(a_i, a_i)}(V_\gamma^-(a_i))$$

$$V_{\gamma\frac{b}{2}}^+(a_i) \subset f^{n_\gamma^-(a_i, a_i)}(V_\gamma^-(a_i)) \quad \text{ou} \quad V_{\gamma\frac{b}{2}}^-(a_i) \subset f^{n_\gamma^+(a_i, a_i)}(V_\gamma^+(a_i))$$

De fato, como $a_i \in f^{n_\gamma^\pm(a_i, a_i)}(V_\gamma^\pm(a_i))$ segue que

$$\ell(f^{n_\gamma^+(a_i, a_i)}(V_\gamma^\pm(a_i))) > (\sqrt{2})^{n_\gamma^+(a_i, a_i)} \ell(V_\gamma^\pm(a_i)) \quad (5.1)$$

$$> \frac{b}{2} \ell(V_\gamma^\pm(a_i)) \quad (5.2)$$

$$= \ell(V_{\gamma\frac{b}{2}}^\pm(a_i)) \quad (5.3)$$

Tome $\delta > 0$ pequeno o suficiente para que se tenha

$$V_\delta(a_i) \subset f^{n_{\varepsilon_b}^+(a_i, a_i)}(V_{\varepsilon_b}^+(a_i)) \cap f^{n_{\varepsilon_b}^-(a_i, a_i)}(V_{\varepsilon_b}^-(a_i)) \quad (5.4)$$

Afirmção 2: $\forall 0 < \varepsilon < \delta$, existe n tal que $V_\delta(a_i) \subset f^n(V_\varepsilon(a_i))$.

Prova: Escreva $\varepsilon_n = \varepsilon \left(\frac{b}{2}\right)^n$, pela afirmação 1, podemos encontrar $k_1 = n_\varepsilon(a_i, a_i)$ onde $V_{\varepsilon_1}^+ \subset f^{k_1}(V_\varepsilon(a_i))$ ou $V_{\varepsilon_1}^- \subset f^{k_1}(V_\varepsilon(a_i))$. Se $\varepsilon_1 < \varepsilon_b$ repetimos o argumento e encontraremos $k_2 = n_{\varepsilon_2}(a_i, a_i)$ onde $V_{\varepsilon_2}^+(a_i) \subset f^{k_2}(V_{\varepsilon_1}(a_i))$ ou $V_{\varepsilon_2}^-(a_i) \subset f^{k_2}(V_{\varepsilon_1}(a_i))$.

Procedendo indutivamente, encontraremos k_0 onde $\varepsilon_{k_0} < \varepsilon_b < \varepsilon_{k_0+1}$ e portanto:

$$V_{\varepsilon_b}^+(a_i) \subset f^{k_1+k_2+\dots+k_{n_0}}(V_\varepsilon(a_i)) \quad \text{ou} \quad V_{\varepsilon_b}^-(a_i) \subset f^{k_1+k_2+\dots+k_{n_0}}(V_\varepsilon(a_i))$$

Escrevendo $k = k_1 + k_2 + \dots + k_{n_0}$, segue que $V_\delta(a_i) \subset f^{n_{\varepsilon_b}^+ + k}(V_\varepsilon(a_i))$ ou que $V_\delta(a_i) \subset f^{n_{\varepsilon_b}^- + k}(V_\varepsilon(a_i))$.

Defina $H_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k V_\delta(a_i)$, cada conjunto H_i é transitivo, pois dados U, V abertos em H_i , existirá n_0 satisfazendo $a_i \in f^{n_0}(U)$, como $f^{n_0}(U)$ é aberto, tomando $\varepsilon > 0$ dado pela afirmação 2 de forma que tenhamos $V_\varepsilon(a_i) \subset f^{n_0}(U)$, segue pela definição de H_i que $V \cap f^{n_1}(V_\varepsilon(a_i)) \neq \emptyset$ e portanto $f^{n_0+n_1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Note ainda que $\text{int}H_i \cap \text{int}H_j = \emptyset$ pois do contrário existiria $r > 0$ para o qual $n_r(a_i, a_j)$ está definido. Defina $L_f^i = \overline{H_i}$, $W^s(L_f) = W^s(L_f^1) \cup W^s(L_f^2)$ pois $n_r(a_i, a_i)$ está definida para todo $r > 0$ e portanto a variedade estável é densa em I .

Caso 2: Existe $i \neq j$ para o qual $n_r(a_i, a_j)$ está definido para todo $r > 0$.

Isso implica que $n_r(a_j, a_j)$ também está definido para todo $r > 0$ e algum j . Procedendo de forma exatamente análoga a demonstração anterior, podemos tomar $\delta > 0$ pequeno o suficiente para que se tenha

$$V_\delta(a_j) \subset f^{n_{\varepsilon_b^+}(a_j, a_j)}(V_{\varepsilon_b^+}(a_j)) \cap f^{n_{\varepsilon_b^-}(a_j, a_j)}(V_{\varepsilon_b^-}(a_j)) \quad (5.5)$$

Defina $L_f = \overline{H_j}$, onde $H_j = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^n(V_\delta(a_j)))$. Caso $n_r(a_i, a_i)$ não esteja definido para todo $r > 0$ a variedade estável $W^s(L_f)$ será densa em S^1 e teremos $a_i \notin L_f$. Caso $n_r(a_i, a_i)$ esteja definido para todo $r > 0$, tomamos $H_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^n(V_\delta(a_i)))$ com δ satisfazendo 5.5 e a inclusão $V_\delta(a_i) \subset f^{n_r^+(a_i, a_i)}(V_\gamma^+(a_i)) \cap f^{n_r^-(a_i, a_i)}(V_\gamma^-(a_i))$. Nesse caso $H_i = H_j$ e portanto $W^s(L_f)$ é densa em S^1 , a prova da transitividade é a mesma no caso anterior.

□

Os intervalos invariantes obtidos anteriormente refletem a dinâmica do atrator sistema. Usando o lema 4.2.3 enunciado no capítulo 3 mais a transitividade de $f|_{L_f} : L_f \rightarrow L_f$ obtida no lema anterior, podemos obter a densidade de pontos periódicos em L_f , que será demonstrado no próximo resultado. Isso nos permitirá provar a densidade dos pontos fixos para o atrator do fluxo.

Corolário 5.1.4. *Seja L_f compacto obtido no lema anterior, então os pontos periódicos de $f|_{L_f} : L_f \rightarrow L_f$ são densos em L_f .*

Demonstração. Seja J intervalo em L_f e considere \tilde{f} levantamento de f definido em 4.1.1. Diminuindo se necessário o comprimento de I , podemos supor que $J \subset I_\xi$, onde $\xi \in \{b, d\}$. Tome $y \in \text{int}(J)$ satisfazendo $\overline{\mathcal{O}^+(y)} = L_f$ e considere $I_f(y) = (A_0, A_1, A_2, \dots)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(y) \in J$ e $I_{n_0}(I_f(y)) \subset J$. O lema 4.2.3 garante que f^{n_0} envia $I_{n_0}(I_f(y))$ homeomorficamente sobre $I_\xi \cap f(S^1)$ e portanto $f^{-n_0}|_{I_\xi} \rightarrow I_{n_0}(I_f(y))$ é contração, logo f^{n_0} possui ponto fixo em J . □

5.2 Existência de atratores

Nesta seção vamos provar a existência de atratores para qualquer família de fluxos a dois parâmetros induzida do fluxo X^t construído no capítulo 2. Dado um conjunto aberto U para o qual $\overline{X^t(U)} \subset U$ para todo $t > 0$, definimos $\Lambda_X(U) = \bigcap_{t \geq 0} X^t(U)$ e $\Lambda_P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{P^n(\Sigma)}$ onde P representa a aplicação de Poincaré associada ao fluxo X^t , nesse caso vale que $\Lambda_X(U) = \overline{\bigcup_{t \geq 0} X^t(\Lambda_P)}$. O primeiro passo nessa direção é estudar conjuntos contidos no maximal invariante que possuam estrutura uniformemente hiperbólica. Seja N_p o complemento ortogonal de $X(p)$ e π_{N_p} a projeção ortogonal sobre N_p , o fluxo linear de Poincaré é a aplicação $P : N_p \rightarrow N_{X^t(p)}$ definida como $P_p^t(v) = \pi_{N_{X^t(p)}}(DX^t(v))$. É conhecido que a hiperbolicidade de X^t equivalente a hiperbolicidade de P_p^t (ver [5] capítulo 1), a próxima proposição estabelece a hiperbolicidade dos pontos em Λ_X que estão uniformemente afastados da singularidade.

Lema 5.2.1. *Seja $K \subset U$ um conjunto compacto e invariante por X^t , suponha que exista $\varepsilon > 0$ tal que $d_H(\mathcal{O}_X(p), \sigma) > \varepsilon$ para todo $p \in K$, então K é uniformemente hiperbólico.*

Demonstração. Seja $t(p, \Sigma) = \min\{t > 0 \mid X^t(p) \in \Sigma\}$ e considere a aplicação $\mathcal{P} : K \rightarrow \Sigma$, definida por $\mathcal{P}(p) = X^{t(p, \Sigma)}(p)$, escrevendo $K_\Sigma = \mathcal{P}(K)$ segue que K_Σ é invariante pela aplicação de Poincaré P e $d(\mathcal{O}_P(q), \gamma_\pm^s) > \varepsilon$. A existência dos cones C^s e C^u em Σ implicam que K_Σ é hiperbólico para P .

Sejam $E^s(p)$ e $E^u(p)$ os espaços estáveis e instáveis em \mathcal{H}_Σ para $v^s \in E^s(p)$ e $v^u \in E^u(p)$, defina os conjuntos

$$\begin{aligned} F_t^s(p) &= \{\alpha DX_p^t(v^s) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} & e & & N_t^s(p) &= \pi_{N_{X^t(p)}}(F_t^s(p)) \\ F_t^u(p) &= \{\beta DX_p^t(v^u) \mid \beta \in \mathbb{R}\} & e & & N_t^u(p) &= \pi_{N_{X^t(p)}}(F_t^u(p)) \end{aligned}$$

onde $\pi_{N_{X^t(p)}}$ representa a projeção ortogonal sobre $N_{X^t(p)}$. A invariância dos espaços E^s e E^u por P implica na invariância de N_t^s e N_t^u por P_p^t para todo $t \geq 0$ e $p \in K$. Fixado p , denotaremos por t_i o tempo de batida que satisfaz $X^{t_i}(p) \in \Sigma$ e $P^i(p) \in \Sigma$, existe $\tau > 0$ tal que $t_{i+1} - t_i < \tau$ para todo i , dessa forma qualquer t suficientemente grande pode ser escrito como $t = \sum_{0 \leq i \leq n} t_i + \bar{t}$ com $0 \leq \bar{t} \leq \tau$. Se $v^s \in E^s(p)$ e $\|v^s\| = 1$, $DX^{t_i}(v^s)$ pode ser escrito como $\alpha P^i(v^s) + \gamma X^{t_i}(p)$ para algum α e γ , logo:

$$\begin{aligned}
\|P_p^t \pi_{N_p}(v^s)\| &= \|P_p^{\bar{t}} \pi_{N_p}(v^s) \circ P_p^{t_n} \pi_{N_p}(v^s) \circ \dots \circ P_p^{t_0} \pi_{N_p}(v^s)\| \\
&\leq \|P_p^{\bar{t}} \pi_{N_p}(v^s)\| \prod_{0 \leq i \leq n} \|\mathcal{O}_{X^{t_i}(p)} \circ DX_p^{t_i} \pi_{N_p}(v^s)\| \\
&\leq C \prod_{0 \leq i \leq n} \|\mathcal{O}_{X^{t_i}(p)} \circ DX_p^{t_i} \pi_{N_p}(v^s)\| \\
&\leq C \prod_{0 \leq i \leq n} \|\mathcal{O}_{X^{t_i}(p)} \circ DX_p^{t_i}(v^s)\| \\
&= C \prod_{0 \leq i \leq n} \|\mathcal{O}_{X^{t_i}(p)} \circ (DP^i(v^s) + X(X^{t_i}(p)))\| \\
&= C \prod_{0 \leq i \leq n} \|\mathcal{O}_{X^{t_i}(p)} \circ (DP^i(v^s))\| \\
&\leq C \prod_{0 \leq i \leq n} \|DP^i(v^s)\| \\
&\leq C \lambda^n \|v^s\| \\
&\leq C \lambda^{\frac{t-\bar{t}}{\tau}} \|\pi_{N_p}(v^s)\| \\
&\leq \bar{C} \cdot \bar{\lambda}^t \|\pi_{N_p}(v^s)\|
\end{aligned}$$

Onde $\bar{\lambda} < 1$. Repetindo os argumentos segue que P_p^t expande vetores na direção de N_t^u e portanto K é hiperbólico. \square

Usando o resultado acima e os lemas anteriores, podemos enunciar:

Proposição 5.2.2. *Seja X o campo construído no capítulo 2, $\Lambda_X(U)$ contém um único atrator em U que coincide com a classe recorrente por cadeias da singularidade.*

Demonstração. Seja U região atratora para Λ_X , pelo teorema de Conley, existe um único quase atrator em U . Como U é aberto e invariante, existe curva $\gamma_u \subset U \cap \Sigma$ tangente ao cone C^u , que é expandida por um fator maior que $\sqrt{2}$ e portanto o comprimento de $P^n(\gamma_u)$ aumenta exponencialmente. Dessa forma, para algum iterado n_0 temos que $P^{n_0}(\gamma_u) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$ e portanto $U \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$. Tome $p \in U \cap W^s(\sigma)$, logo $X^t(p) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \sigma$ e portanto $\sigma \in U$. Isso mostra que o único quase atrator é a classe recorrente por cadeias da singularidade. Vamos mostrar que $\mathcal{C}(\sigma)$ é um atrator. Considere o conjunto definido por $\mathcal{H}_f = (\text{int}W^s(L_f))^c$, este conjunto é invariante pois $W^s(L_f)$ é invariante e as órbitas dos elementos de $\partial(W^s(L_f))$ não intersectam a singularidade. Isso implica que os conjuntos $\mathcal{H}_P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P^n(\mathcal{H}_f \times [-1, 1])$ e $\mathcal{H}_X = \bigcup_{t > 0} X^t(\mathcal{H}_P)$, são compactos e invariantes. Seja $X^t|_{\mathcal{H}}$ a restrição do fluxo X^t ao conjunto \mathcal{H}_X , então $\mathcal{R}(X^t) \setminus \mathcal{R}(\sigma) \subset \mathcal{R}(X^t|_{\mathcal{H}_X})$.

Se $\mathcal{R}(X^t|_{\mathcal{H}_X}) = \emptyset$ não há nada a fazer, caso contrário o lema 5.2.1 garante que $\mathcal{R}(X^t|_{\mathcal{H}_X})$ é hiperbólico e portanto existem finitas classes recorrentes por cadeia em $\Lambda_X(U)$ o que prova que $\mathcal{C}(\sigma)$ é um atrator. \square

5.3 Dinâmica a dois parâmetros

Pelo teorema anterior podemos concluir que para todo par de parâmetros, o maximal invariante $\Lambda_{X_\mu}(U)$ possui um atrator que denotaremos Λ_μ , como $\Lambda_\mu \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$, seria interessante caracterizar os atratores que satisfazem:

1. $\Lambda_\mu \cap W_+^s(\sigma) \neq \emptyset$ e $\Lambda_\mu \cap W_-^s(\sigma) = \emptyset$.
2. $\Lambda_\mu \cap W_-^s(\sigma) \neq \emptyset$ e $\Lambda_\mu \cap W_+^s(\sigma) = \emptyset$.
3. $\Lambda_\mu \cap W_+^s(\sigma) \neq \emptyset$ e $\Lambda_\mu \cap W_-^s(\sigma) \neq \emptyset$.

Nos casos (1),(2) e (3) acima o atrator será denotado por Λ_μ^+ , Λ_μ^- e $\Lambda_\mu^{+,-}$ respectivamente. Veremos no próximo teorema que é possível classificar a região dos parâmetros para o qual cada um desses tipos de atrator existem. A partir de agora, vamos estudar individualmente a dinâmica associada a $\Lambda_{(\theta_1, \theta_2)}$ em cada parâmetro e mostraremos a existência de um conjunto em \mathbb{T}^2 com interior não vazio onde $\Lambda_{(\theta_1, \theta_2)}^\pm$ pode ser de fato visto como o atrator geométrico de Lorenz.

Para provar essas afirmações estabeleceremos a seguinte notação: \tilde{f} denotará o levantamento de $f : S^1 \rightarrow S^1$ definido no capítulo anterior. Reciprocamente, se usarmos a notação \tilde{g} para denotar uma função real $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então g significará a função $g : S^1 \rightarrow S^1$ que tem \tilde{g} por levantamento. Podemos agora enunciar o próximo teorema.

Teorema 5.3.1. *Existe um conjunto $\mathcal{V} \subset \mathbb{T}^2$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- \mathcal{V} tem interior não vazio.
- para todo $(\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{V}$, existe um intervalo $I_{(\theta_1, \theta_2)}^i \subset S^1$ invariante por $f_{(\theta_1, \theta_2)}$ e que contém a singularidade a_i onde a restrição de $f_{(\theta_1, \theta_2)}$ a $I_{(\theta_1, \theta_2)}^i$ é uma aplicação de Lorenz.
- $\partial\mathcal{V}$ é composta por duas curvas diferenciáveis decrescentes que ligam $(0, 0)$ a $(-1/2, -1/2)$ e que se intersectam transversalmente.

Demonstração. A ideia da prova é encontrar intervalos invariantes que contenham uma das singularidades e cujas extremidades sejam pontos fixos. Para isso, devemos comparar o crescimento de cada ramo de f nos pontos que são simétricos com respeito a singularidade $1/2$. Isso motiva definir a função auxiliar $L : (0, 1/2) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L(x) = \tilde{f}_1^{-1}(1 - \tilde{f}_2(1 - x)) + \tilde{f}_2(1 - x) - 1 + x. \quad (5.6)$$

A função L satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} L(x) = 0$.
2. L é C^1 em $(0, 1/2)$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} L'(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} L'(x) = -\infty$

Podemos então considerar os seguintes conjuntos:

- $\mathcal{L}^- = \{x \in (0, 1), L(x) < 0\}$,
- $\mathcal{L}^+ = \{x \in (0, 1), L(x) > 0\}$,
- $\mathcal{L}^0 = \{x \in (0, 1), L(x) = 0\}$.

Pelas propriedades da função L , segue que $\mathcal{L}^0 \neq \emptyset$ e \mathcal{L}^- e \mathcal{L}^+ tem interior não vazio. Mostraremos que cada um desses conjuntos induzem aplicações de Lorenz no seguinte sentido: os ângulos para os quais $\Lambda_{(\theta_1, \theta_2)}$ é um atrator geométrico de Lorenz dependem

dos conjuntos acima definidos.

Para isso, definimos as funções ângulo $\tilde{\theta}_i : (0, 1/2) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\tilde{\theta}_2(x) = \tilde{f}_1^{-1}(1 - \tilde{f}_2(1 - x)) \quad \text{e} \quad \tilde{\theta}_1(x) = -\tilde{f}_1(\tilde{\theta}_2(x)) + \tilde{\theta}_2(x).$$

Observe que $\tilde{\theta}'(x)_i < 0$, $\tilde{\theta}_1(0) = \tilde{\theta}_2(0) = 0$ e $-\tilde{\theta}_1(1/2) = \tilde{\theta}_2(1/2) = 1/2$, logo $f_{(\theta_1(x), \theta_2(x))}$ sempre possui dois pontos fixos. Suponha $y \in \mathcal{L}^-$ e sejam $p_1(y)$ e $p_2(y)$ os pontos fixos de $\tilde{f}_{(\theta_1(y), \theta_2(y))}$, valem as seguintes afirmações:

- (i) $p_{f_1}(y) = \tilde{\theta}_2(y)$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 1/2^-} \tilde{f}_{(\theta_1(y), \theta_2(y))} < 1 - y$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} \tilde{f}_{(\theta_1(y), \theta_2(y))} = p_{f_1}(y)$.
- (iv) $1 - y < p_{f_2}(y)$.

Vamos provar as afirmações acima.

- (i) $\tilde{f}_{(\theta_1(y), \theta_2(y))}(\tilde{\theta}_2(y)) = \tilde{f}_1(\tilde{\theta}_2(y)) + \tilde{\theta}_1(y) = \tilde{f}_1(\tilde{\theta}_2(y)) - \tilde{f}_1(\tilde{\theta}_2(y)) + \tilde{\theta}_2(y) = \tilde{\theta}_2(y)$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 1/2^-} \tilde{f}_{(\theta_1(y), \theta_2(y))} = 1 - \tilde{f}_1(\tilde{\theta}_2(y)) + \tilde{\theta}_2(y) = \tilde{f}_2(1 - y) + \tilde{f}_1^{-1}(1 - \tilde{f}_1(1 - y)) < 1 - y$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} \tilde{f}_{(\theta_1(y), \theta_2(y))} = \lim_{x \rightarrow 1/2^+} \tilde{f}_2(x) + \tilde{\theta}_2(y) = 0 + \tilde{\theta}_2(y)$
- (iv) $\tilde{f}_{(\theta_1(y), \theta_2(y))}(1 - y) = \tilde{f}_2(1 - y) + \tilde{\theta}_2(y) = \tilde{f}_2(1 - y) + \tilde{f}_1^{-1}(1 - \tilde{f}_1(1 - y)) < 1 - y$

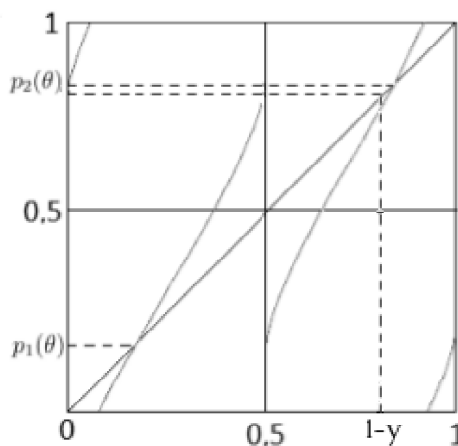


Figura 15 – Gráfico da aplicação $f_{(\theta_1(y), \theta_2(y))}$

As propriedades (i) a (iv) estão sintetizadas no gráfico anterior. A última desigualdade significa que para $x > 1/2$, a função $\tilde{f}_{(\theta_1(y), \theta_2(y))}(x)$ está abaixo da função identidade e portanto $p_2(y) > 1 - y$.

As condições acima implicam que o intervalo $[p_{f_1}(y), p_{f_2}(y)]$ é invariante por $f_{(\theta_1, \theta_2)}$ e contém a singularidade $1/2$ para qualquer que seja $y \in \mathcal{L}^-$. Além disso, (ii) e (iv) implicam que o mesmo acontece para um aberto no conjunto de parâmetros.

Prosseguindo da mesma forma para $y \in \mathcal{L}^+$, encontraremos uma região aberta em \mathbb{T}^2 para o qual existe aplicação de Lorenz contendo a singularidade 0 . Se $y \in \mathcal{L}^0$, existem duas regiões invariantes por $f_{(\theta_1, \theta_2)}$ cada uma delas contendo uma das singularidades. Observe que a curva $\gamma_1 : (0, 1/2) \rightarrow S^1$ definida por $\gamma(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$ determina a fronteira na parte inferior de \mathcal{V} . A fronteira superior de \mathcal{V} é determinada pelos pontos fixos $p_2(y)$ de $\tilde{f}_{(\theta_1, \theta_2)}$, ou seja, pelas curvas de nível $h^{-1}(0)$ da aplicação $h : (0, 1/2) \times (0, 1/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y) = \tilde{f}_2(x) + \tilde{\theta}_2(y) - x$. Como $\frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$ o teorema da função implícita implica que existe uma função $\xi : (0, 1/2) \rightarrow \mathbb{R}$ que é C^1 em I e satisfaz $h(\xi(y), y) = 0$, defina $\gamma_2(t) : (0, 1/2) \rightarrow S^1$ por $\gamma_2(t) = (\theta_2(t), \xi(t))$, segue portanto que γ_1 e γ_2 definem a fronteira de \mathcal{V} e se intersectam transversalmente nos pontos $\mathcal{L}(x) = 0$. \square

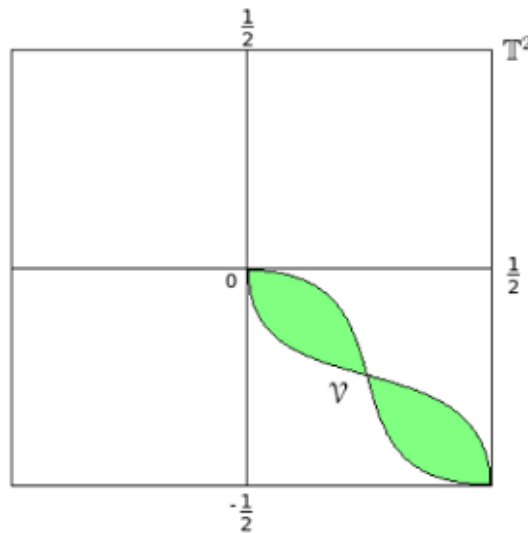


Figura 16 – Conjunto \mathcal{V}

Quando $x \in \text{int}(\mathcal{V})$ o intervalo $(p_1(x), p_2(x))$ contém o conjunto L_f em seu interior (L_f é dado pela situação 1 do lema 5.1.3). Isso implica que para todo $x \in \text{int}(\mathcal{V})$, a vizinhança atratora pode ser tomada propriamente contida em Σ e portanto $\Lambda_{P_{(\theta_1(x), \theta_2(x))}}$

é um atrator de Lorenz usual para aplicação de Poincaré $P_{(\theta_1(x), \theta_2(x))}$. Em particular, se $x \in \text{int}(\mathcal{V}) \cap \mathcal{L}^-$, então γ_-^s é a única folha singular contida na região atratora e portanto $\bigcup_{t \geq 0} X^t(\Lambda_{P_{(\theta_1(x), \theta_2(x))}}) = \Lambda_{(\theta_1(x), \theta_2(x))}^-$. De maneira equivalente se conclui que a igualdade $\bigcup_{t \geq 0} X^t(\Lambda_{P_{(\theta_1(x), \theta_2(x))}}) = \Lambda_{(\theta_1(x), \theta_2(x))}^+$ quando $x \in \text{int}(\mathcal{V}) \cap \mathcal{L}^+$. Para o caso em que $x \in \mathcal{L}^0$, existem dois intervalos invariantes para a aplicação unidimensional (correspondente a situação 2 do lema 5.1.3). O maximal invariante será formado por dois Lorenz, colados um ao outro, cada um contendo uma das folhas singulares, em particular o atrator não será transitivo.

Pela riqueza dinâmica dessa família de fluxos, podemos nos perguntar se para algum conjunto de parâmetros, o conjunto hiperbólico $\bigcup_{t > 0} X^t(\mathcal{H})$ obtido em 5.2.2, possui uma estrutura conhecida. Isso será dado pelo próximo teorema.

Teorema 5.3.2. *Para todo par de parâmetros $(\theta_1, \theta_2) \in \text{int}(\mathcal{V})$ existe um conjunto compacto invariante $\mathcal{H.S} \subset \Sigma$ que é uma ferradura de Smale.*

Demonstração. Sejam p_1 e p_2 pontos fixos de $f_{(\theta_1, \theta_2)}$, esses pontos dividem S^1 em dois intervalos compactos: I_1 e I_2 , com $a_i \in I_i$. Supondo $f(I_1) \cap I_1$, escrevemos $R_0 = \pi_x^{-1}(I_2)$, onde π_x é projeção na primeira coordenada. Defina $R_1 = P^{-1}(R_0)$ e $R^1 = P(R_0)$, como $(\theta_1, \theta_2) \in \text{int}\mathcal{V}$ temos que $f(a_i^\pm) \notin I_2$, isso implica que R_1 e R^1 são uma união de duas faixas compactas $R_1 = H_1 \cup H_2$ e $R^1 = V_1 \cup V_2$ onde $\gamma_2^s \cap P(H_j) = \emptyset$ para $j \in \{1, 2\}$ e V_i é transversal a H_j para todo $i, j \in \{1, 2\}$. Portanto $R_1^1 = R_1 \cap R^1$ é uma união de quatro semi-faixas disjuntas (ver figura 5.3), com diâmetro $C \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{diam}(R)$, onde C é uma constante. Procedendo indutivamente, segue que os conjuntos $R_n = P^{-n}(R) = \bigcup_{0 \leq i \leq 2^n} H_{n_i}$ e $R^n = P^n(R) = \bigcup_{0 \leq n_i \leq 2^n} V_{n_i}$ são formados pela união de 2^n faixas compactas disjuntas, satisfazendo $R_n \subset R_{n-1}$, $R^n \subset R^{n-1}$, $P^n(H_{n_i}) \cap \gamma_2^s = \emptyset$ e V^{n_i} transversal a H_{n_i} para todo $i \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$. Portanto $R_n^n = R_n \cap R^n$ é formado por 2^n semi-faixas disjuntas com diâmetro $C \frac{1}{(2\sqrt{2})^n}$. Dessa forma $\mathcal{H.S} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} P^n(R)$ é uma ferradura de Smale. \square

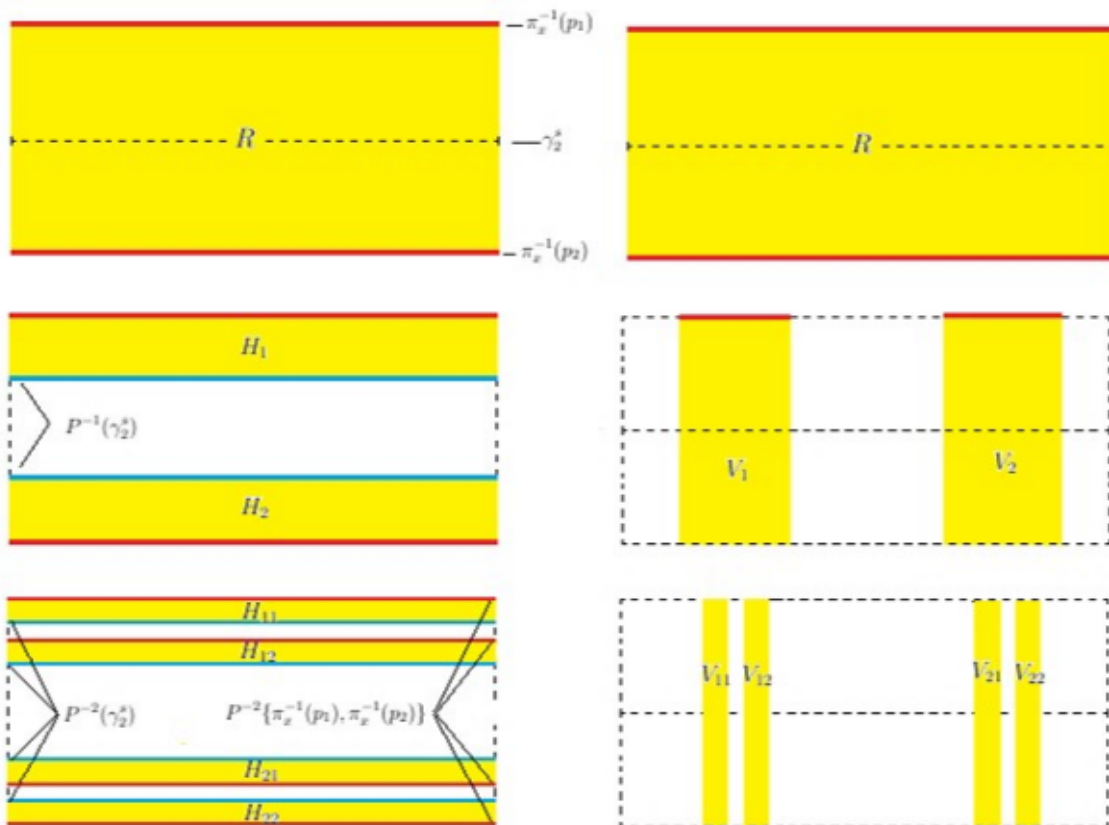


Figura 17 – Ferradura de Smale

O próximo passo é identificar o atrator cujos parâmetros estão fora de \mathcal{V} , estudando quantas singularidades eles podem conter. Isso é fornecido pelo principal teorema do capítulo:

Teorema C. Λ_μ contém um atrator de Lorenz $\Leftrightarrow \mu \in \mathcal{V}$. Além disso, se $f'_\mu \geq \lambda > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, então qualquer fluxo X_μ^t com $\mu \in \mathcal{V}^c$ possui uma única classe recorrente por cadeias em Λ_μ como atrator que contém pontos de ambas as separatrizes da singularidade, ou seja, $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu^{+, -}$.

Demonstração. Para simplificar a notação, escreveremos f ao invés de $f_{(\theta_1, \theta_2)}$.

(\Leftarrow) Foi provado no teorema 5.3.1

(\Rightarrow) Suponha que Λ possua um lorenz, isso significa que o compacto invariante L_f dado pelo lema 5.1.3 é um intervalo contendo apenas uma singularidade, esta divide L_f em dois intervalos compactos L^- e L^+ satisfazendo $\text{int}(L^i) \subset S^1 \setminus \{a_1, a_2\}$. Dessa forma, $f(a^-) \in (\text{int}L^+)$ e $f(a^+) \in (\text{int}L^-)$. Caso $a = 1/2$, então $L^+ \subset (1/2, 1)$ e $L^- \subset (0, 1/2)$ logo $f(1/2^+) \in (0, 1/2)$ e $f(1/2^-) \in (1/2, 1)$, caso $a = 0$, então temos $L^- \subset (1/2, 1)$

e $L^+ \subset (0, 1/2)$. Isso significa que logo $f(0^-) \in (1/2, 1)$ e $f(0^+) \in (1/2, 1)$, ou seja, f possui dois pontos fixos. Por outro lado, se f possuísse dois pontos fixos e $(\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{V}^c$, f_{L_i} conteria um ponto fixo em seu interior o que implicaria que $L_f = S^1$ (absurdo), logo $(\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{V}$ o que prova a primeira parte.

Por fim, se $f' > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\mu \in \mathcal{V}^c$ suporemos por absurdo que L_f contém apenas uma singularidade, seja L_0 a componente conexa de L_f que contém essa singularidade, $f(L_0)$ está dividido em dois intervalos L_1 e L_2 , onde podemos supor que cada um deles não possui comprimento maior do que $\ell(L_0)$. Como $\ell(L_1) + \ell(L_2) > \lambda\ell(L)$, o comprimento de L_1 e L_2 é maior do que $(\lambda - 1)\ell(L)$. $f(L_0)$ possui uma componente L_1 fora de L_0 que não contém singularidades portanto: $\ell(f(L_1)) > \lambda\ell(L_1) > \lambda(\lambda - 1)\ell(L_0) > \ell(L_0)$ isso implica que $f^n(L_1) \cap L_0 = \emptyset$ para todo n , iterando indefinidamente obtemos $\ell(f^n(L_f)) \rightarrow +\infty$ (absurdo) e portanto L_f deve conter a outra singularidade. \square

Apenas a hipótese $f' > \sqrt{2}$ não é suficiente para garantir que parâmetros fora do conjunto \mathcal{V} induzam atratores da forma $\Lambda^{-,+}$, isso é mostrado no seguinte exemplo:

Exemplo 1. *Existe função $f : S^1 \rightarrow S^1$ com $f' > \sqrt{2}$ tal que L_f contém apenas uma singularidade e não é intervalo.*

Para construir o exemplo, tome $\varepsilon > 0$ pequeno satisfazendo $\sqrt{2} + \varepsilon < \frac{3}{2}$. Tomamos f com apenas um ponto fixo $p_f = 1/2 - \varepsilon$ e com derivada constante igual a $\sqrt{2} + \varepsilon$ no conjunto $(I_\varepsilon(a_1) \cup (I_\varepsilon(a_2)))^c$, escrevendo $\xi^- = f_{(\theta_1, \theta_2)}(1/2^-)$ e $\xi^+ = f_{(\theta_1, \theta_2)}(1/2^+)$ é possível supor que:

1. $f(\xi^+) = p_f$
2. $f(1/2^-) - 1/2 = \frac{\varepsilon}{2}$.
3. $f(\xi^-) - f(1/2^+) = \varepsilon$.

Defina $L_f = [p_f, \xi^-] \cup (f(1/2^+), f(\xi^-))$, das propriedades descritas acima, segue que $\ell(f^2((0, \xi^-))) \leq (\sqrt{2} + \varepsilon)\ell(f(0, \xi^-)) < (\sqrt{2} + \varepsilon)\varepsilon < \frac{3\varepsilon}{2} = \ell(p_f, \xi^-)$ e portanto L_f é invariante e contém apenas uma singularidade.

5.4 Estrutura singular hiperbólica

Nessa seção, mostraremos que o atrator Λ_X do campo construído no capítulo 2 possui estrutura singular hiperbólica. Além disso, estenderemos os resultados do capítulo anterior a uma vizinhança \mathcal{U} de X em \mathcal{X}_C . O primeiro passo consiste na seguinte caracterização do conjunto L_f :

Lema 5.4.1. *Se $\{0, 1/2\} \subset L_f$ então $L_f = S^1$.*

Demonstração. Para n suficientemente grande, $I_n(I(0^+)) = I_1$ e $I_n(I(1/2^-)) = I_2$ são intervalos contidos em L_f , cada um deles contendo uma das singularidades. Segue ainda que $f^{k+1}(\text{int}(I_1) \cup \text{int}(I_2)) = S^1 \setminus \{f(0^+)\}$, pela invariância de L_f segue o resultado. \square

A seguir, enunciaremos dois resultados que serão usados na obtenção de uma estrutura singular hiperbólica para a família de fluxos estudada. Esses resultados podem ser encontrados em [5] (lema 2.29 e teorema 5.34).

Teorema 5.4.2. *Dado um conjunto invariante e conexo Λ que possua decomposição (C, λ) -dominada para o fluxo linear de Poincaré com respeito a um campo X , então existe uma vizinhança U de Λ e $\delta > 0$ tal que o conjunto $\Lambda_Y(U) = \bigcap_{t \geq 0} Y^t(U)$ possui (C', λ') -decomposição dominada para o fluxo linear de Poincaré com respeito ao campo $Y \in \mathcal{U}$ $\delta - C^1$ -próximo de X , onde C' e λ' são constantes positivas dependendo somente de δ , U e (C, λ) e satisfazem $(C', \lambda') \rightarrow (C, \lambda)$ quando $\delta \rightarrow 0$ e $U \rightarrow \Lambda$.*

Teorema 5.4.3. *(Moraes, Pacífico, Pujals) Seja $\Lambda = \Lambda_X(U)$ compacto invariante isolado de $X \in \mathcal{X}^1(M)$ tal que:*

1. Λ é conexo e contém um conjunto denso de órbitas periódicas.
2. Para todo campo vetorial C^1 -próximo de X , todos os elementos críticos em U são hiperbólicos do tipo sela.
3. Para todo campo vetorial C^1 -próximo todo ponto de equilíbrio em U é do tipo Lorenz.

Então Λ_X é singular hiperbólico.

Podemos agora enunciar o principal teorema da seção.

Teorema 5.4.4. *Considere o campo X satisfazendo as hipóteses \mathcal{H} . Existe uma vizinhança \mathcal{U} de X em \mathcal{X}_C tal que para todo $Y \in \mathcal{U}$ o atrator Λ_Y é um conjunto singular hiperbólico, além disso vale a seguinte propriedade: existe $t > 0$ tal que para todo $x \in C$ vale*

$$\|DY^t|_{E^s(x)}\| \cdot \|DY^{-t}|_{E^{cu}(X^t(x))}\| \cdot \|DY^t|_{E^{cu}(x)}\| < 1. \quad (5.7)$$

Demonstração. Vamos mostrar que X satisfaz as hipóteses do teorema 5.4.3. Dado aberto V em Σ , existe ponto periódico p para f e conjunto $A \subset \gamma_p \subset V$ satisfazendo $\pi(A) = p$. Temos $\pi(P^{-n}) = p$ para infinitos valores positivos de n , como $\ell(P^{-n}(A)) \rightarrow 1$, existe n_0 positivo para o qual $A \subset P^{-n_0}(A)$ e portanto $P_X : \Sigma \rightarrow \Sigma$ possui ponto periódico em V e dessa forma os pontos periódicos também são densos em Λ_X . Aplicando o lema 5.2.1, a existência dos campos de cones em Σ garantem que os elementos do tipo sela são hiperbólicos para todo campo C^1 próximo de X , logo Λ_X é singular hiperbólico. Pelo teorema 5.4.2, existe decomposição dominada para todo campo próximo de X , a continuidade do determinante garante todo campo suficientemente próximo expande o determinante na direção centro-instável e portanto Λ_Y é atrator singular hiperbólico para todo Y suficientemente próximo de X . Seja V o aberto em torno de σ onde X é linear e $V_x \subset S^1$ a projeção $\pi_{\mathcal{F}}$ dos pontos em torno de uma vizinhança de γ_{\pm}^s em Σ que são levados em V pelo fluxo. Para todo ponto $q \in V$ e $t > 0$ tal que $X^s(q) \in V$ para $0 < s < t$, valem as igualdades $\|DX^t|_{E^s}\| = e^{\lambda_2 t}$, $\|DX^t|_{E^{cu}}\| = e^{\lambda_1 t}$ e $\|DX^{-t}|_{E^{cu}}\| = e^{-\lambda_3 t}$ com $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$ e $\lambda_1 + \lambda_2 < \lambda_3$. Por outro lado, o tempo de retorno a V dos pontos de Λ fora de V é uniformemente limitado por uma constante t_0 , se $b > 0$ é constante que limita a derivada de DX^t de 0 a t_0 , então existe $K > 0$ satisfazendo $\|DX^t|_{E^s}\| < Ke^{\lambda_2 t}$, $\|DX^t|_{E^{cu}}\| < Ke^{\lambda_1 t}$ e $\|DX^{-t}|_{E^{cu}}\| < Ke^{-\lambda_3 t}$ para todo t e portanto:

$$\|DX^t|_{E^s(x)}\| \cdot \|DX^{-t}|_{E^{cu}(X^t(x))}\| \cdot \|DX^t|_{E^{cu}(x)}\| < 1 \quad (5.8)$$

para t suficientemente grande. Tomando \mathcal{U} suficientemente pequena no teorema A, segue que todo campo $Y \in \mathcal{U}$ satisfaz a desigualdade 5.8, o que prova o teorema. \square

Referências

- [1] Valentin S Afraimovich, VV Bykov, and Leonid P Shilnikov. On the origin and structure of the lorenz attractor. In *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, volume 234, pages 336–339, 1977.
- [2] AA Andronov and L Pontrjagin. Systemes grossiers. compt. rend. *Doklady Acc. Sc. USSR*, 14, 1937.
- [3] V Araujo, I Melbourne, and P Varandas. Rapid mixing for the lorenz attractor and statistical limit laws for their time-1 maps. *Communications in Mathematical Physics*, 340(3):901–938, 2015.
- [4] Vitor Araújo and Ian Melbourne. Existence and smoothness of the stable foliation for sectional hyperbolic attractors. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 49(2):351–367, 2017.
- [5] Vítor Araújo and Maria José Pacifico. *Three-dimensional flows*, volume 53. Springer Science & Business Media, 2010.
- [6] Rodrigo Bamón, Rafael Labarca, Ricardo Mañé, and María José Pacifico. The explosion of singular cycles. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 78(1):207–232, 1993.
- [7] John Guckenheimer and Robert F Williams. Structural stability of lorenz attractors. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 50(1):59–72, 1979.
- [8] Philip Hartman. Ordinary differential equations, classics in applied mathematics, vol. 38, society for industrial and applied mathematics (siam), philadelphia, pa, 2002, corrected reprint of the second (1982) edition. *Corrected reprint of the second*, 1982.
- [9] Shuhei Hayashi. Connecting invariant manifolds and the solution of the c^1 stability and ω -stability conjectures for flows. *Annals of mathematics*, pages 81–137, 1997.

-
- [10] Renaud Leplaideur and Vilton Pinheiro. Thermodynamic formalism for lorenz maps. *arXiv preprint arXiv:1209.2008*, 2012.
- [11] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [12] Ricardo Mañé. Contributions to the stability conjecture. *Topology*, 17(4):383–396, 1978.
- [13] Ricardo Mañé. A proof of the c^1 stability conjecture. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 66(1):161–210, 1987.
- [14] John Milnor and William Thurston. On iterated maps of the interval. In *Dynamical systems*, pages 465–563. Springer, 1988.
- [15] C Morales, M Pacifico, and Enrique Pujals. Singular hyperbolic systems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(11):3393–3401, 1999.
- [16] CA Morales and ER Pujals. Singular strange attractors on the boundary of morse-smale systems. In *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 30, pages 693–717. Elsevier, 1997.
- [17] Carlos A Morales, Maria J Pacifico, and Enrique R Pujals. Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers. *Annals of mathematics*, pages 375–432, 2004.
- [18] Jacob Palis and Stephen Smale. Structural stability theorems. In *The Collected Papers of Stephen Smale: Volume 2*, pages 739–747. World Scientific, 2000.
- [19] Mauricio Matos Peixoto. Structural stability on two-dimensional manifolds. Technical report, BRAZIL UNIV RIO DE JANEIRO, 1961.
- [20] Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967.
- [21] Warwick Tucker. The lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 328(12):1197–1202, 1999.

-
- [22] Robert F Williams. The structure of lorenz attractors. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 50(1):73–99, 1979.