Sobre folheações complexas transversalmente afins em codimensão arbitrária

Liliana Olga Jurado Cerrón

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática IM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

Rio de Janeiro

Junho de 2017

Sobre folheações complexas transversalmente afins em codimensão arbitrária

Liliana Olga Jurado Cerrón

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.
Aprovada por:

Prof. Bruno César Azevedo Scárdua IM-UFRJ
(Presidente)

Prof. Albetã Costa Mafra IM-UFRJ

Prof. Raimundo Nonato Araújo dos Santos ICMC-USP

Prof. Mitchael Alfonso Plaza Martelo IM-UFF

Prof. Mauricio Barros Corrêa Júnior ICEX-UFMG

Rio de Janeiro
22 de Junho de 2017

Dedico este trabalho à memória
meus avós Elisa e Esperancio.

Agradecimentos

Quero agradecer a cima de tudo à Deus por estar conosco em cada momento de nossas vidas.
Agradeço à minha familia, à minha mãe Olga e meu pai Samuel que fizeram tantos sacríficios para que eu pudesse ter bom estudo e assim ter boas oportunidades, como venho tendo. Se não fosse eles provavelmente não teria chegando onde cheguei.
Agradeço a meus irmãos, Williams y Alejandro, pelo apoio direito ou indireito durante toda minha vida acadêmica.
Ao Professor Bruno César Scárdua, pela orientação, apoio, amizade e sobre tudo pela confianza depositada. Aos membros da banca examinadora.
Quero agradecer a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contrubuíram para a construorientação de quem sou hoje e a todos que contrubuíram, direita ou indiretamente, com essa defensa.

Resumo

Liliana Olga Jurado Cerrón
Orientador: Bruno César de Azevedo Scárdua
Resumo da Tese de Doutorado submetida ao programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Ciências Matemáticas.

No primeiro capítulo desta tese são estudadas folheações de codimensão dois real sobre uma variedade diferenciável de dimensão $l+2$ real, que são transversalmente holomorfas de codimensão um. Como aplicação estudaremos o caso sobre uma variedade complexa de Stein de folheações holomorfas que admitem uma hipersuperfície real transversal.

No segundo capítulo estudaremos folheações holomorfas de codimensão q transversalmente afins definidas por um sistema de 1-formas holomorfas $\{\Omega_1, ..., \Omega_q\}$. Provamos uma caracterização de tais folheações em termos de matrizes de formas diferenciáveis. Tal resultado tem como consequência que uma folheação holomorfa de codimensão q sobre o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^m$ é tranversalmente afim no complemento de algum subconjunto invariante de codimensão um, sempre que admite uma integral primeira elementar.

No terceiro capítulo será provado um Teorema de Extensão para uma folheação holomorfa de codimensão arbitraria q em uma variedade complexa M. Essencialmente este teorema afirma que dada $\Lambda \subset M$ uma subvariedade analítica invariante irredutível, sobre determinadas hipóteses das singularidades, existe uma matriz $q \times q$ de 1-formas diferenciais definida em alguma vizinhança fora de $\Lambda \cup Sep(\Lambda)$, que pode ser estendida meromorficamente a uma vizinhança de Λ de forma especial.

Sumário

Introdução

Neste trabalho nos dedicamos ao estudo de folheações. Mais precisamente, duas classes de folheações, a saber:

- Folheações reais transversalmente holomorfas de codimensão um.
- Folheações holomorfas de codimensão arbitrária.

Para a primeira classe mencionada acima, estudamos alguns exemplos e principalmente o caso em que há uma estrutura transversal dada por um grupo de Lie, no complementar de um divisor invariante. Focaremos em teoremas de extensão e classificação das mesmas.

Para a segunda classe, estudamos aquelas com estrutura transversal afim e damos uma caracterização em termos de formas diferenciais da existência desta. No caso específico de folheações em espaços projetivos complexos, estudamos mais detalhadamente a existência e classificação destas.

No que segue damos uma motivação para o estudo de cada uma das classes acima, a partir de referências e trabalhos conhecidos. A Seção 0.1 é referente ao Capítulo 1 e a Seção 0.2 é referente aos Capítulos 2 e 3.

0.1 Folheações reais transversalmente holomorfas de codimensão um

Uma das principais ferramentas de estudo das folheações reais de dimensão l sobre uma variedade diferenciável M^{l+2k} são as folheações que são transversalmente holomorfas de codimensão k. Introduzimos a seguinte definição:

Definição 0.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação real de codimensão $2k$ em uma variedade suave $M^{\ell+2k}$ de dimensão real $\ell + 2k$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorfa de codimensão k se $\mathcal{F}$ é dada por uma coleção de submersões sobre subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^{2k} \cong \mathbb{C}^k$ tal que os mapas de transições são holomorfos.*

Afim de compreender a relevância de folheações transversalmente holomorfas citamos por um lado Brunella em [25] que fornece uma lista de folheações orientáveis 1-dimensionais sobre uma 3-variedade fechada e conexa, por outro lado, também citamos [26] onde Brunella juntamente com Ghys classifica as folheações transversalmente holomorfas de codimensão um sobre uma 3-variedade fechada e conexa, obtendo portanto, que ou a folheaçao é riemannianas (folheações que admitem uma métrica transversal), ou é um dos seis exemplos da lista de folheações em [25].

Por outro lado, dada uma folheação real de codimensão um sobre uma variedade compacta 3-dimensional, há sempre um círculo transversal. Fato este que muitas vezes tem consequências importantes sobre o comportamento global da folheação. Por exemplo, o Teorema de Novikov, diz que uma folheação de codimensão um na esfera S^3 terá uma folha compacta. Não há tal característica no caso complexo; uma folheação holomorfa de codimensão um em uma variedade complexa não é necessariamente transversal a alguma superfície compacta de Riemann.

Há muitos trabalhos que versam sobre a existência de seções transversais para uma folheação holomorfa de codimensão um, e também para a sua recíproca, as consequências de obter uma seção real transversal a uma folheação holomorfa de codimensão um. Por exemplo, em [40] de B. Scárdua e T. Ito, os autores mostrarom que, se M uma variedade 2-dimensional real fechada e conexa mergulhado em $\mathbb{C}^n$ e transversal a uma folheação holomorfa de codimensão um, então M é um toro.

No trabalho [41] de B. Scárdua e T. Ito, pesquisam se hipóteses geométricas para as folhas de uma folheação holomorfa de codimensão um, que são não compatíveis com a existência de seções transversais. Dos teoremas provados no [41] temos, por exemplo, o seguinte teorema:

Teorema I.
Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão um em uma variedade complexa X e transversal à fronteira regular $M = \partial D$ de um domínio de Stein relativamente compacto . Denote por $\mathcal{G}$ a restrição $\mathcal{F}|_M$. Se $\mathcal{G}$ admite uma integral primeira transversalmente holomorfa $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$ então $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira holomorfa $F\colon W \to \overline{C}$ em uma vizinhança W de $\overline{D}$ em X.

O *Teorema I* é um teorema de extensão, que estende uma propriedade de integral primeira em uma vizinhança. Com esse espírito do *Teorema I*, mostramos neste trabalho o *Teorema A* , onde X é uma variedade de Stein e a restrição $\mathcal{F}|_M$ é uma folheação transversalmente holomorficamente afim. Entretanto, sua prova se defere pelo uso de otras técnicas.

O estudo da Geometria das Folheações é muitas vezes relacionado com o estudo da sua estrutura transversal. Outra relevante classe de estrutura transversal é aquela dada por ações de grupos de Lie em algum espaço homogêneo. Esta é a classe de folheações transversalmente homogêneas introduzido por Blumenthal em [12] e [29].

No primeiro capítulo são estudadas folheações de dimensão real l ($l \geq 2$) sobre uma variedade diferenciável M^{l+2}, que são transversalmente holomorfas de codimensão um complexa.

Definição 0.2 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão um em M.*

1. *Dizemos que $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente aditiva (ou com estrutura aditiva) quando as funções g_{ij} (ver Definição 1.2 do Capítulo 1), são da forma $g_{ij}(z) = z + b_{ij}$, com $b_{ij} \in \mathbb{C}$ localmente constante em $U_i \cap U_j$.*

2. *Dizemos que $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente afim(ou com estrutura afim), se $g_{ij}(z) = a_{ij}z + b_{ij}$, onde $a_{ij} \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $b_{ij} \in \mathbb{C}$ são localmentes constantes.*

3. *Dizemos que $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente projetiva se $g_{ij}(z) = \frac{a_{ij}z+b_{ij}}{c_{ij}z+d_{ij}}$, com $\begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ localmente constante.*

Considerando esta Definição 0.2, podemos caracterizar as folheações transversalmente holomorfas de codimensão um, que são transversalmente holomorficamente homogênea (ver Definição 1.2), e não é díficil provar a seguinte proposição.

Proposição 0.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente holomorfica de codimensão um sobre M. Se $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente homogênea, então $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente aditiva, afim ou projetiva.*

Assim, consideramos a seguinte situação:

- $\mathcal{F}$ é uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão um sobre M;
- $\mathcal{F}$ tem uma estrutura transversal holomorfa afim e sem singularidades em algum subconjunto aberto $U \subset M$.

Na maioria das vezes consideramos o caso $U = M$ ou $U = M \setminus \Lambda$, onde Λ é a união finita de folhas compactas de $\mathcal{F}$. Considerando essa situação, sobre determinadas hipóteses, no primeiro capítulo da tese obtemos alguns resultados de extensão. A seguir, são:

Lema A. (Lema 1.12)
Se ω é uma 1-forma fechada transversalmente holomorfa definindo $\mathcal{F}$ em $W^* = W \setminus \Lambda$, então ω se estende a uma 1-forma fechada transversalmente meromorfa em W supondo que o grupo holonomia $Hol(\mathcal{F}, L)$ contém um atrator para cada folha $L \subset \Lambda$.

Esse resultado de extensão esta no mesmo espírito da Seção 3 em [6] (ver Lemas 3.1 e 3.2), no entanto é provado de uma maneira diferente, uma vez que não temos singularidades. Como consequência do *Lema A*, obtemos a seguinte proposição.

Proposição A. (Proposição 1.6)
Seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente holomorficamente afim sobre $M \setminus \Lambda$ e dada em M por uma $1-$forma Ω transversalmente holomorficamente integrável. Suponhamos que cada folha $L \subset \Lambda$ contenha um atrator sobre seu grupo de holonomia. Então existe uma forma fechada transversalmente meromorfa η em M com conjunto polar $(\eta)_\infty = \Lambda$ de ordem um e tal que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. Além disso, para qualquer folha $L \subset \Lambda$ temos:

1. Se $Res_L\eta = a \notin \{2, 3, 4...\}$, então $Hol\,(\mathcal{F}, L)$ é abeliano linearizável.
2. Se $Hol\,(\mathcal{F}, L)$ é não abeliano linearizável, então $Res_L\eta = k + 1$ com $k \in \mathbb{N}$ e $Hol\,(\mathcal{F}, L)$ mergulhado em $\mathbb{H}_k = \left\{ \left(z \to \frac{\lambda z}{\sqrt[k]{1+\mu z^k}} \right) \right\}$.

Na última seção do primeiro capítulo, contribuímos com alguns resultados sobre este tópico quando M é uma variedade de Stein, no caso de folheações holomorfas admitindo uma hipersuperfície real transversal.

Teorema A. (Teorema1.3)
Seja $\mathcal{G}$ folheação holomorfa de codimensão um com singularidades em uma variedade complexa de Stein X^n de dimensão $n \geq 2$. Seja $A \subset X$ subconjunto aberto relativamente compacto com um bordo $M = \partial\overline{A}$ simplemente conexo tranversal a $\mathcal{G}$. Onde $\mathcal{G}$ induz uma folheção transversalmente holomorfa $\mathcal{F} = \mathcal{G}|_M$ em M que é afim em $M \setminus \Lambda$ para algum subconjunto invariante $\Lambda = \Gamma \cap M$, onde $\Gamma \subset X$ é analítica invariante por $\mathcal{G}$. Também assumimos que cada folha de $\mathcal{F}$, $L \subset \Lambda$ contém um atrator em seu grupo de holonomia. Então $\mathcal{G}$ é dada em uma vizinhança de $\overline{A}$ em X por uma forma meromorfa fechada tipo logarítmica, ou seja $\mathcal{G}$ é dado por uma 1-forma meromorfa fechada do tipo $\omega = \sum \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$ onde $f_j : M \to \mathbb{C}$ é meromorfa.

Como aplicação do *Teorema A*, obtemos o seguinte corolário.

Corolário A. (Corolário 1.3)
Sobre as hipóteses acima se A é difeomorfa a uma bola $B^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ e M é difeomorfa à esfera $M \cong S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, então $n = 2$ e $\mathcal{G}|_{\overline{A}}$ é holomorficamente conjugado à folheação linear $\mathcal{L} : zd\omega - \lambda\omega dz = 0$ com $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

0.2 Folheações holomorfas de codimensão arbitrária

Na segunda parte desta tese estudamos folheações holomorfas com singularidades em codimensão arbitrária. Estudaremos aquelas que possuem estrutura transversal afim fora de um divisor de codimensão um. Relacionaremos tal fato com a existência de integrais primeiras Liouvilianas. Isto é feito nos capítulos 2 e 3 da tese. Funções Liouvilianas, são aquelas que podem ser escritas a partir das funções racionais utilizando uma sequência finita de operações algébricas. Basicamente, trata-se de uma torre finita de extensões de corpos, começando com o corpo das funções racionais em $\mathbb{C}^n$, sendo que cada extensão é do tipo simples, por adjunção de um elemento, cuja derivada ou derivada logarítmica pertence ao corpo anterior. No ano 1992, Michael F. Singer em sua obra *Liouvillian first integrals of differential equations* , caracterizou o sistema de equações diferenciais de duas variáveis complexas, que possui integral primeira Liouvilliana, que é uma função Liouviliana não constane que é constante ao longo das curvas da solução em algum conjunto aberto não vazio.

Motivado pela obra original de Singer [31] sobre a existência de integrais primeiras para sistemas de equações diferenciais ordinárias complexas polinomiais, o autor B. Scárdua em [4] estende os resultados para folheações de dimensão um e codimensão um sobre um espaço projetivo $\mathbb{C}P^n$, que admitem uma integral primeira Liouvilliana. Primeiro lembremos formalmente a definição de função Liouviliana em espaços projetivos.

Definição 0.3 *(Função Liouviliana em espaços projetivos). Uma função Liouviliana em* $\mathbb{C}P^n$ *é um elemento* f *de uma extensão Liouviliana* $(K, \hat{\Delta})$ *do corpo diferencial* $(\mu_n, \{\frac{\partial}{\partial y_j}, j = 1, \ldots, n\})$ *onde* $\mu_n = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ *é o corpo de funções racionais* $\frac{P(x_1,\ldots,x_n)}{Q(x_1,\ldots,x_n)}$, $P, Q \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *nas variáveis* $x_1, \ldots, x_n$ *e* $\frac{\partial}{\partial y_j} : \mu_n \to \mu_n$ *são no sentido usual as derivadas parciais,* $j = 1, \ldots, n$.

Pode-se provar que:

(i) $(\mu_n, \{\frac{\partial}{\partial y_j}\}_{j=1}^n)$ *é um corpo diferencial comutativo;*

(ii) *O corpo de constantes* $c(\mu_n, \{\frac{\partial}{\partial y_j}\}_{j=1}^n) = \mathbb{C}$;

(iii) *dada qualquer extensão Liouviliana* $(K, \tilde{\Delta})$ *de* $(\mu_n, \{\frac{\partial}{\partial y_j}\}_{j=1}^n)$, *qualquer elemento* $f \in K$ *define uma função analítica sobre algum* $U_f \subset \mathbb{C}P^n$ *aberto denso (Zariski).*

Obtendo B. Scárdua em [4] os seguintes teoremas.

Teorema II.
Seja $\mathcal{F}$ *uma folheação de* ***dimensão um*** *no espaço projetivo complexo* $\mathbb{C}P^n$ *tendo uma solução que satisfaz uma relação Liouviliana, mas que não está contida em uma folha algébrica de* $\mathcal{F}$. *Então* $\mathcal{F}$ *admite uma integral primeira Liouviliana.*

Teorema III.
Seja $\mathcal{F}$ *uma folheação de* ***codimensão um*** *no espaço projetivo complexo* $\mathbb{C}P^n$. *Então:*

1. $\mathcal{F}$ *admite uma integral primeira Liouviliana se, e somente se, admite uma solução que satisfaz uma relação Liouviliana mas não uma relação algébrica.*

2. $\mathcal{F}$ *admite uma integral primeira Liouviliana se, e somente se,* $\mathcal{F}$ *é dada em algum espaço afim por um 1-forma polinomial* $\Omega = \sum_{j=1}^n P_j dy_j$ *que tem um fator de integração da forma* $h = \Pi_{j=1}^r f_j^{\lambda_j} exp(\frac{g}{\Pi_{j=1}^r f_j^{n_j - 1}})$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $n_j \in \mathbb{N}$, *para polinômios* f_j, g.

Voltando ao estudo das folheações com estrutura transversal homogênea sobre uma variedade complexa, temos a seguinte definição:

Definição 0.4 *Uma folheação holomorfa de codimensão* q *com singularidades* $\mathcal{F}$ *sobre uma variedade complexa* M^n *é chamado transversalmente afim, se existe uma familia* $\{Y_i : U_i \to \mathbb{C}^q\}_{i \in I}$ *de submersões holomorfas, definidas em conjuntos abertos* $U_i \subset M$, *definindo* $\mathcal{F}$ *e satisfazendo* $M \setminus sing(\mathcal{F}) = \cup_{i \in I} U_i$ *e com relações afins* $Y_i = A_{ij} Y_j + B_{ij}$ *para algum* $A_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_q(\mathbb{C})$, $B_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^q$ *localmente constante em cada* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

A existência de uma estrutura transversal afim é muitas vezes relacionada com a existência de uma integral primeira Liouviliana. Em [4], é obtido um resultado geométrico das folheações de codimensão um que admitem uma integral primeira Liouviliana. Nesse artigo o autor B. Scárdua chega ao seguinte resultado.

Teorema IV.
Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um no espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ que admite uma integral primeira Liouviliana. Então $\mathcal{F}$ é transversalmente afim no complemento de algum subconjunto invariante algébrico de codimensão um.

0.2.1 Folheações transversalmente afins e formas diferenciais

Um dos objetivos deste trabalho é fornecer os recursos necessários para a investigação na classe de folheações de codimensão arbitrárias. No segundo capítulo consideramos uma folheação holomorfa de codimensão arbitrária e estendemos algumas propriedades de folheação de codimensão um e alguns exemplos para folheações de codimensão q, e damos uma caracterização do caso de folheações transversalmente afim em termos de matrizes. Além disso, definimos integral primeira elementar para uma folheação de codimensão q. Levando em conta que as folheações transversalmente afins de codimensão um, são caracterizados em termos de formas diferenciais, vamos generalizar as folheações transversalmente afins de dimensão arbitrária. Essa é uma das realizações do trabalho [5] de B. Scárdua, provando o seguinte teorema.

Teorema V. (Teorema 2.3)
Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão q em M. A folheação $\mathcal{F}$ é transversal afim em M se, e somente se, existe uma cobertura aberta $\cup_{i\in I}U_i = M$ e matrizes holomorfas $q\times 1$, $q\times q$ de 1 -formas, Ω_i, η_i em U_i $\forall i \in I$, satisfazendo:

1. *$\mathcal{F}|U_i = \mathcal{F}(\Omega_i)$.*
2. *$d\Omega_i = \eta_i \wedge \Omega_i$ e $d\eta_i = \eta_i \wedge \eta_i$.*
3. *Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então temos $\Omega_i = G_{ij}\cdot\Omega_j$ e $\eta_i = \eta_j + dG_{ij}\cdot G_{ij}^{-1}$ para alguma função holomorfa $G_{ij} : U_i \cap U_j \to Gl_q(\mathbb{C})$.*

Além disso, duas dessas coleções $(\Omega_i, \eta_i, U_i)_{i\in I}$ e $(\Omega_i^{'}, \eta_i^{'}, U_i^{'})_{i\in I}$ definem a mesma estrutura transversal afim de $\mathcal{F}$ se, e somente se, temos $\Omega_i^{'} = G_i\cdot\Omega_i$ e $\eta_i^{'} = \eta_i + dG_i\cdot G_i^{'}$ para alguma função holomorfa $G_i : U_i \to GL_q(\mathbb{C})$.

Além disso, o autor obtém, como consequência do *Teorema V*, o *Corolário I*, que é uma generalização do *Teorema IV*.

Corolário I. (Corolário 2.3)
Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão q sobre $\mathbb{CP}^n$ admitindo uma integral primeira elementar Liouviliana. Então, $\mathcal{F}$ é transversalmente afim no complemento de algum subconjunto algébrico invariante de codimensão um $A \subset \mathbb{CP}^n$.

No último capítulo de [5] por B. Scárdua, introduz o conceito de estrutura afim estendida para folheações de codimensão arbitraria com singularidades genéricas de *Tipo I* (Definição 3.3) e *Tipo II* (Definição 3.5), definidas por um sistema integrável de 1-formas e também vemos a generalização do Lema de Extensão de codimensão um (ver [6], pag 218) para codimensão arbitraria, obtendo o seguinte teorema.

Teorema VI. (Teorema 3.2)
(Teorema de Extensão) Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão q em M e $\Lambda \subset M$, uma subvariedade analítica invariante irredutível, suponha que:

1. *$sing(\mathcal{F}) \cap \Lambda$ é não vazio e consiste de singularidades genéricas do Tipo I e Tipo II, onde dim $sing(\mathcal{F}) \leq dim(\mathcal{F}) - 2$.*

2. *Existe uma 1-forma diferencial η definida em alguma vizinhança de $V \setminus (\Lambda \cup Sep(\Lambda))$ que define uma estrutura transversal afim de $\mathcal{F}$ neste conjunto.*

Então η se estende meromorficamente a uma vizinhança de Λ como uma forma adaptada de Ω ao longo de Λ.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão dois em $\mathbb{CP}^3$. Como consequencia do *Teorema VI* damos uma caracterização de η em uma vizinhança de um ponto singular do Tipo I e II, mais precisamente como resultados da tese, obtemos os seguintes corolários.

Corolário B. (Corolário 3.1)
Consideremos as hipóteses do Teorema VI. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão dois, η construída e estendida em $\mathbb{CP}^3$ e $p_0 \in sing(\mathcal{F})$ singularidade isolada de tipo I, dada em uma carta local pelo campo de vetores $X(x,y,z) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são linearmente independentes em $\mathbb{Q}$. Então, concluímos que η tem a seguinte expressão

$$\eta = \frac{dG}{G} + \begin{pmatrix} k_1 & k_3\frac{g_1}{g_4} \\ k_7\frac{g_4}{g_1} & k_5 \end{pmatrix}\omega_1 + \begin{pmatrix} k_2 & k_4\frac{g_1}{g_4} \\ k_8\frac{g_4}{g_1} & k_6 \end{pmatrix}\omega_2, \tag{1}$$

onde k_i é constante.

Corolário C. (Corolário 3.3)
Consideremos as hipóteses do Teorema VI. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão dois, η construída e estendida em $\mathbb{CP}^3$ e $p \in sing(\mathcal{F})$ singularidade isolada do tipo II, dada em uma carta local pelas formas $\omega_1 = xdy - \lambda ydx = xy\widetilde{\omega}_1$ $\lambda \notin (\mathbb{R}^- \cup \mathbb{Q}^+)$ e $\omega_2 = dz = \widetilde{\omega}_2$. Então, concluímos que η tem a seguinte expressão

$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{dg_4}{g_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & k_3\frac{xyg_1}{g_4} \\ k_7\frac{g_4}{xyg_1} & k_5 \end{pmatrix}\widetilde{\omega}_1 + \begin{pmatrix} k_2 & k_4\frac{xyg_1}{g_4} \\ k_8\frac{g_4}{xyg_1} & k_6 \end{pmatrix}\widetilde{\omega}_2.$$

Também obtivemos um resultado em $\mathbb{CP}^n$, para uma folheação holomorfa de codimensão $(n-1)$ em $\mathbb{CP}^n$, só damos a caracterização de η em uma vizinhança de um ponto singular do Tipo I.

Corolário D. (Corolário 3.2)
Consideremos as hipóteses do Teorema VI. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão $(n-1)$ em $\mathbb{CP}^n$, sejam η construída e estendida em $\mathbb{CP}^n$, $p_0 \in sing(\mathcal{F})$ singularidade isolada de tipo I, dada em uma carta local pelo campo de vetores $X(x_1, ..., x_n) =$

$(\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n)$ tal que $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \notin \mathbb{R}$, sejam $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$ as formas fechadas que definem a folheação. Então, concluímos que η tem a seguinte expressão

$$\eta = \frac{dG}{G} + \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \frac{g_1}{g_2} & \cdots & k_{1(n-1)}^1 \frac{g_1}{g_{n-1}} \\ k_{21}^1 \frac{g_2}{g_1} & k_{22}^1 & \cdots & k_{2(n-1)}^1 \frac{g_2}{g_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n-1)1}^1 \frac{g_{n-1}}{g_1} & k_{(n-1)2}^1 \frac{g_{n-1}}{g_2} & \cdots & k_{(n-1)(n-1)}^1 \end{pmatrix} \omega_1 +$$

$$... + \begin{pmatrix} k_{11}^k & k_{12}^k \frac{g_1}{g_2} & \cdots & k_{1(n-1)}^k \frac{g_1}{g_{n-1}} \\ k_{21}^k \frac{g_2}{g_1} & k_{22}^k & \cdots & k_{2(n-1)}^k \frac{g_2}{g_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n-1)1}^k \frac{g_{n-1}}{g_1} & k_{(n-1)2}^k \frac{g_{n-1}}{g_2} & \cdots & k_{(n-1)(n-1)}^k \end{pmatrix} \omega_k +$$

$$... + \begin{pmatrix} k_{11}^{n-1} & k_{12}^{n-1} \frac{g_1}{g_2} & \cdots & k_{1(n-1)}^{n-1} \frac{g_1}{g_{n-1}} \\ k_{21}^{n-1} \frac{g_2}{g_1} & k_{22}^{n-1} & \cdots & k_{2(n-1)}^{n-1} \frac{g_2}{g_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n-1)1}^{n-1} \frac{g_{n-1}}{g_1} & k_{(n-1)2}^{n-1} \frac{g_{n-1}}{g_2} & \cdots & k_{(n-1)(n-1)}^{n-1} \end{pmatrix} \omega_{(n-1)}.$$

Capítulo 1

Folheações transversalmente holomorfas com estrutura transversal homogênea

Neste capítulo estudaremos folheações de codimensão real dois sobre uma variedade diferenciável M^{l+2}, que são transversalmente holomorfas de codimensão um com estrutura transversal aditiva ou afim e sem singularidades. Na última seção do primeiro capítulo aplicamos o caso de folheações holomorfas de codimensão um admitindo uma hipersuperfície real transversal para variedades complexas de Stein.

1.1 Folheações transversalmente holomorfas sobre uma variedade diferenciável M^{l+2k}

Definição 1.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação real de codimensão $2k$ em uma variedade suave $M^{\ell+2k}$ de dimensão real $\ell + 2k$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorfa de codimensão k se $\mathcal{F}$ é dada por uma coleção de submersões sobre subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^{2k} \cong \mathbb{C}^k$ tal que os mapas de transições são holomorfos.*

Exemplo 1.1 *Um primeiro exemplo trivial é dada pela folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensão k em uma variedade complexa X.*

Exemplo 1.2 *Seja $\mathcal{F}$ como no Exemplo 1.1 e seja $M \subset X$ uma subvariedade real de dimensão real $\ell + 2k$. Se M é transversal a $\mathcal{F}$, então a folheação induzida $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}|_M$ é transversalmente holomorfa de codimensão k.*

De fato, como a função inclusão $M \subset X$ é transvesal a $\mathcal{F}$, existe uma única folheação em M de codimensão k. Seja $X = \cup_{i=1}^{n} U_i$ e as submersões do Exemplo 1.1 sobre subconjuntos abertos de $\mathbb{C}^k$. Temos $M = \cup_{i=1}^{n} (U_i \cap M)$ e definimos as submersões restrictas a $U_i \cap M$.

Exemplo 1.3 *Seja $\mathcal{F}, X$ como no exemplo 1.1 e seja $M = X \times N$ onde N é uma variedade diferenciável qualquer. A folheação produto $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \times N$ é então uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão k em M.*

De fato, é fácil ver que $\mathcal{F}_2$ é uma folheação real de codimensão k. Seja as submersões do Exemplo 1.1, g_i definidas em U_i sobre $\mathbb{C}^k$, definimos as submersões $g_i o \pi_1$ definidas em $U_i \cap N$, onde π_1 é a projeção da primeira coordenada.

Exemplo 1.4 *Seja $\varphi : \pi_1(N) \to Aut(F)$ um homomorfismo do grupo fundamental de uma variedade diferenciável N sobre o grupo de difeomorfismo holomorfos de uma variedade complexa F. A ação natural $\phi : \pi_1(N) \times (\tilde{N} \times F) \to (\tilde{N} \times F)$ onde $\tilde{N}$ é o recobrimento universal de N preserva qualquer folheação $\tilde{N} \times \mathcal{F}$ de $\tilde{N} \times F$. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de F preservado pelo subgrupo imagem $\varphi(\pi_1(N)) < Aut(F)$. Dada tal folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de F temos portanto uma folheação suspensão $\mathcal{F}_\varphi$ de uma variedade M_φ com as seguintes propriedades:*

(i) *M_φ admite uma fibração $\pi : M_\varphi \to N$ com fibra F; em particular $\pi : M_\varphi \to N$ é transversalmente holomorfa.*

(ii) *$\mathcal{F}_\varphi$ é transversalmente holomorfa. De fato, $\mathcal{F}_\varphi$ é transversal à fibração $\pi : M_\varphi \to N$.*

(iii) *O grupo de holonomia global de $\mathcal{F}_\varphi$ é isomorfo a $\varphi(\pi_1(N)) < Aut(F)$.*

De fato, este exemplo pode-se ver com mais detalhes em [10].

Definição 1.2 *Uma folheação transversalmente holomorfa $\mathcal{F}$ tem uma estrutura transversalmente holomorfa homogênea, se existe um Grupo de Lie complexo G, um subgrupo fechado conexo $H < G$ tal que $\mathcal{F}$ admite um atlas de submersão $y_j : U_j \subset M \to G/H$ satisfazendo $y_i = g_{ij} \circ y_j$ para algum mapeo localmente constante $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ para cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Em outras palavras, o atlas transversalmente holomorfo de submersões para $\mathcal{F}$ tem mapas de transição por translações à esquerda em G e submersões tomando valores no espaço homogêneo G/H. Nesta situação diremos que $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorfa homogênea de modelo G/H.*

Exemplo 1.5 *Qualquer folheação holomorfa transversalmente homogênea é uma folheação transversalmente holomorfa com uma estrutura transversalmente homogênea.*

Exemplo 1.6 *Dada uma folheação $\mathcal{F}$ em X como no Exemplo 1.5 de modelo G/H então qualquer subvariedade real $M \subset X$ transversal à $\mathcal{F}$ é equipada com uma folheação transversalmente holomorfa $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}|_M$ com estrutura transversalmente homogênea de modelo G/H.*

De fato, pelo exemplo 1.2 e a definição de estrutura transversalmente homogênea.

Exemplo 1.7 *Seja $F = G/H$ um espaço homogêneo de um grupo Lie complexo G, onde H é um subgrupo normal de Lie fechado. Qualquer representação do homomorfismo $\varphi : \pi_1(N) \to Aut(F)$ dá origem a uma folheação transversalmente holomorfa $\mathcal{F}_\varphi$ em $(\tilde{N} \times F)/\phi = M_\varphi$ a qual é transversalmente holomorficamente homogênea de modelo G/H.*

De fato, pelo exemplo 1.4 e a definição de estrutura transversalmente homogênea.

Definição 1.3 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão um em M.*

1. *Dizemos que $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente aditiva (ou com estrutura aditiva) quando os mapas g_{ij} na Definição 1.2, são da forma $g_{ij}(z) = z + b_{ij}$, com $b_{ij} \in \mathbb{C}$ localmente constante em $U_i \cap U_j$.*

2. *Dizemos que $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente afim(ou com estrutura afim), se $g_{ij}(z) = a_{ij}z + b_{ij}$, onde $a_{ij} \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $b_{ij} \in \mathbb{C}$ são localmentes constantes.*

3. *Dizemos que $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente projetiva se $g_{ij}(z) = \frac{a_{ij}z+b_{ij}}{c_{ij}z+d_{ij}}$, com $\begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ localmente constante.*

Proposição 1.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão um sobre M. Se $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente homogênea, então $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente aditiva, afim ou projetiva.*

Prova: Como $\mathbb{C} \cong \frac{Aff(\mathbb{C})}{GL(\mathbb{C})}$ e $Aut\,(\mathbb{C}) = \{az + b/a \neq 0\}$, então

$$\begin{array}{ccc} Aff(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (a_{ij}, b_{ij}) \times z & \to & a_{ij}z + b_{ij}. \end{array}$$

Assim, $g_{ij}(z) = a_{ij}z + b_{ij}$, onde a_{ij} e b_{ij} são localmente constantes.
Por outro lado, $\overline{\mathbb{C}} \cong \frac{PSL(2,\mathbb{C})}{Aff(\mathbb{C})}$ e $Aut(\overline{\mathbb{C}}) = \left\{\frac{az+b}{cz+d}/ad - bc = 1\right\}$. Então

$$\begin{array}{ccc} PSL(2,\mathbb{C}) \times \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} & & \\ \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix} \times z & \to & \frac{a_{ij}z+b_{ij}}{c_{ij}z+d_{ij}}. \end{array}$$

Portanto, $g_{ij}(z) = \frac{a_{ij}z+b_{ij}}{c_{ij}z+d_{ij}}$, onde a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} e d_{ij} são localmente constantes.

Proposição 1.2 *Seja M^{l+2} uma variedade real de dimensão $l + 2$, e $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão um. Então, existem coleções $\{\Omega_j\}_{j\in I}$, $\{U_j\}_{j\in I}$ e $\{g_{ij}\}_{U_i\cap U_j\neq\emptyset}$ tais que :*

1. *$\{U_j\}_{j\in I}$ é uma cobertura aberta de M;*

2. *Ω_j é uma $1-$forma diferencial integrável não identicamente nula em U_i;*

3. *g_{ij} é uma função transversalmente holomorfa tal que $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$;*

4. *se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $\Omega_i = g_{ij}\Omega_j$ em $U_i \cap U_j$.*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos assumir que temos um atlas $\{U_i\}$ tal que em cada U_i está definida o par de difeomorfismos (f_i, g_i) de U_i em $\mathbb{R}^l \times \mathbb{C}$. Se $h : \mathbb{R}^l \times \mathbb{C} \to M$, é a inversa de (f_i, g_i), seja o conjunto de nível $h_c : \mathbb{R}^l \to M$, tal que $h_c(x) := h(x, c)$. Assim, que $g_i(h_c(x)) = c$. Diferenciando ambos lados temos que

$$(h_c^* dg_i)\,(x) = dg_i \left(\frac{\partial h_c(x)}{\partial x}\right) \equiv 0.$$

Desde que g_i é uma submersão, a diferencial dg_i tem posto máximo. Então , g_i define uma 1-forma diferenciável não nula. Note que dg_i no sistema de coordenadas pode ser visto como $dg_i = \frac{\partial g_i}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial g_i}{\partial x_l}dx_l + \frac{\partial g_i}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}dy_2 = \frac{\partial g_i}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial g_i}{\partial x_l}dx_l + \frac{\partial g_i}{\partial z}dz$. Assim, em cada U_i existe uma forma diferenciável $\Omega_i = dg_i$ cujas tangentes são as curvas de nível de g_i. Por hipótese temos que $g_j = h_{ij}g_i$ sobre $U_i \cap U_j$. Assim,

$$\Omega_j = dg_j = \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial z} \circ g_i\right) dg_i = \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial z} \circ g_i\right) \Omega_i,$$

Ω_i e Ω_j diferem pela mutiplicação $g_{ij} := \frac{\partial h_{ij}}{\partial z}\ g_i$ sobre $U_i \cap U_j$ que não é nula desde que h_{ij} é um biholomorfismo.

Observação 1.1 *A inversa da Proposição 1.2, também é valida.*

Corolário 1.1 *A definição 1.1 para uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão um é equivalente ao pseudogrupo de holonomia ser dada por mapas biholomorfos entre subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$.*

1.1.1 Germes de biholomorfismos em $(\mathbb{C}, 0)$ com ponto fixo

Nesta seção estudaremos os subgrupos do grupo de germes em $0 \in \mathbb{C}$, de biholomorfismos com ponto fixo em 0. A motivação para tal, é o estudo do grupo de holonomia das folhas de uma folheação de codimensão um.

Seja $f : U \to V$ uma aplicação holomorfa, onde U e V são vizinhanças conexas da origem $0 \in \mathbb{C}$ e $f(0) = 0$. Diremos que f é um biholomorfismos local em 0 se $f'(0) \neq 0$. Neste caso, pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças $U' \subset U$ e $V' \subset V$, com $0 \in U' \cap V'$, tais que $f(U') = V'$ e $f|_{U'} : U' \to V'$ é um biholomorfismo.

O conjunto de germes em $0 \in \mathbb{C}$ de biholomorfismos locais com ponto fixo em 0 será denotado por $Dif(\mathbb{C}, 0)$. Este conjunto é um grupo com a operação de composição (de germes). Diremos que dois subgrupos G_1 e G_2 de $Dif(\mathbb{C}, 0)$ são conjugados, se existe um germe $f \in Dif(\mathbb{C}, 0)$ tal que $f \circ G_1 = G_2 \circ f$. Isto é, para todo $g_1 \in G_1$, o germe $f \circ g_1 \circ f^{-1}$ está em G_2, ou seja, os elementos de G_1 são conjugados aos de G_2 por um mesmo germe de biholomorfismo. Não é dificil ver que a conjugação é uma relação de equivalência.

Outra relação de equivalência que consideramos é a C^0-conjugação, ou conjugação topológica: dizemos que dois germes $f_1, f_2 \in Dif(\mathbb{C}, 0)$ são topologicamente conjugados se existe um germe de homeomorfismo em $0 \in \mathbb{C}$, digamos g, tal que $g(0) = 0$ e $g \circ f_1 = f_2 \circ g$. De maneira análoga definimos a conjugação topológica entre subgrupos de $Dif(\mathbb{C}, 0)$.

Observemos que a operação de "conjugar um germe"corresponde a uma mudança de coordenadas em uma vizinhança de 0. Com isto podemos dizer que se $f \in Dif(\mathbb{C}, 0)$, então $\frac{df(z)}{dz}|_{z=0} = f'(0)$ não depende do sistema de coordenadas holomorfo z numa vizinhança da origem. O biholomorfismo $z \to f'(0) \cdot z$ é chamado de parte linear de f na origem.

Dizemos que um germe $f \in Dif(\mathbb{C}, 0)$ é um atrator (resp. repulsor) se $|f'(0)| < 1$ (resp. $|f'(0)| > 1$). Observe que f é um repulsor se, e somente se, f^{-1} é um atrator. No resultado seguinte, que é um caso particular do Teorema de linearização de Poincaré, veremos que um atrator ou repulsor é sempre linearizável.

Lema 1.1 *Sejam $f, g \in Dif(\mathbb{C}, 0)$, onde f é um atrator. Suponha que f e g comutam. Então g é linear em qualquer sistema de coordenadas que linearize f.*

Lema 1.2 *(Lema de linearização de Poincaré). Seja $f \in Dif(\mathbb{C},0)$. Suponha que a parte linear de f satisfaz $|f'(0)| \neq 1$. Então f é linearizável, ou seja, existe um germe $\phi \in Dif(\mathbb{C},0)$, tal que $\phi \circ f(z) = f'(0) \cdot \phi(z)$. Além disso, se ψ é um outro germe em $Dif(\mathbb{C},0)$ que lineariza f, então $\phi \circ \psi^{-1}$ é linear, ou seja, $\phi = \lambda \cdot \psi$ para alguma constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

Lema 1.3 *Sejam $f(z) = \lambda z$ um biholomorfismo linear de $\mathbb{C}$ e $g \in Dif(\mathbb{C},0)$ tal que $f \circ g = g \circ f$. Valem as seguintes propriedades:*

(i) *Se $\lambda^n \neq 1$ para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, então $g(z) = \mu z$ é também linear em z.*

(ii) *Se $\lambda^k = 1$ para $k \in \mathbb{N}$, então $g(z) = \mu z(1 + \varphi(z^k))$, para alguma função holomorfa $\varphi(z)$ tal que $\varphi(0) = 1$.*

Definição 1.4 *Um grupo G é solúvel, se a cadeia decrescente de iterados comutadores*

$$G^0,\ G^1, ...,\ G^l,\ G^0 = G,\ G^{k+1} = \left[G^k, G^k\right]\ k = 0,1,2,...,l-1$$

estabiliza no grupo trivial, ou seja,

$$G^0 \supseteq G^1 \supseteq G^2 \supseteq ... \supseteq G^{l-1} \supseteq G^l = \{id\}.$$

Se G é comutativo (abeliano), então $l = 1$. Grupos solúveis com $l = 2$ são chamados metabeliano, isto é G^1 é comutativo.

1.2 Folheações transversalmente holomorfas de codimensão um sobre M^{l+2}

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão um sobre M^{l+2}, $\mathcal{F}$ é holomorficamente afim se existe um atlas transversalmente holomorfo de submersões $y_j : U_j \to \mathbb{C}$ para $\mathcal{F}$ tal que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $y_i = a_{ij}y_j + b_{ij}$, para funções localmente constantes $a_{ij}, b_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$.

Proposição 1.3 *Uma estrutura transversalmente holomorficamente afim para $\mathcal{F}$ em M é caracterizado por uma coleção (Ω_j, η_j) de 1-formas diferenciáveis definidas em conjuntos abertos $U_j \subset M$ tal que:*

1. *Ω_j e η_j são transversalmente holomorfas, Ω_j é integrável e define $\mathcal{F}$ em U_j, com $d\Omega_j = \eta_j \wedge \Omega_j$ e $d\eta_j = 0$ em U_j. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $\Omega_i = g_{ij}\Omega_j$ e $\eta_i = \eta_j + \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$ para uma função transversalmente holomorfa não nula $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

2. *Duas coleções (Ω_j, η_j) e $\left(\Omega_j', \eta_j'\right)$ definem a mesma estrutura transversalmente afim para $\mathcal{F}$ em M se, e somente se, $\Omega_j' = g_j\Omega_j$ e $\eta_j' = \eta_j + \frac{dg_j}{g_j}$ para alguma função transversalmente holomorfa não nula $g_j : U_j \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Prova:

1. Vamos asumir que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim com atlas transversalmente holomorfas $y_j : U_j \to \mathbb{C}$, $y_j = y_j^1 + iy_j^2$, onde $y_j^1, y_j^2 : U_j \subset M^{l+2} \to \mathbb{R}$, e dy_j pode ser vista como um sistema formada por duas formas diferenciáveis $\left\{dy_j^1, dy_j^2\right\}$. Como $T_pL = T_p y_j^{-1}(q) = KerDy_j$ onde $p \in y_j^{-1}(q)$, então dy_j define $\mathcal{F}$ em U_j. Dado qualquer uma $1-$forma transversalmente holomorfa Ω_j definindo $\mathcal{F}$ em U_j, como dy_j e Ω_j definem a mesma folheação então para alguma função holomorfa transversalmente não nula $g_j : U_j \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos $\Omega_j = g_j dy_j$, e segue que
$$\begin{aligned}\Omega_j = g_j dy_j &= \left(g_j^1 + ig_j^2\right)\left(dy_j^1 + idy_j^2\right) = \left(g_j^1 dy_j^1 - g_j^2 dy_j^2\right) + i\left(g_j^1 dy_j^2 + g_j^2 dy_j^1\right)\\ &= \left(g_j^1 dy_j^1 - g_j^2 dy_j^2, g_j^1 dy_j^1 - g_j^2 dy_j^2\right).\end{aligned}$$
Assim, definimos as duas formas diferenciáveis $g_j^1 dy_j^1 - g_j^2 dy_j^2$ e $g_j^1 dy_j^1 - g_j^2 dy_j^2$, tal que
$$\begin{aligned} d\left(g_j^1 dy_j^1 - g_j^2 dy_j^2\right) \wedge \left(g_j^1 dy_j^1 - g_j^2 dy_j^2\right) \wedge g_j^1 dy_j^2 + g_j^2 dy_j^1 \equiv 0 \; e\\ d\left(g_j^1 dy_j^2 + g_j^2 dy_j^1\right) \wedge \left(g_j^1 dy_j^1 - g_j^2 dy_j^2\right) \wedge g_j^1 dy_j^2 + g_j^2 dy_j^1 \equiv 0.\end{aligned}$$
Então Ω_j é integrável.
Assim, definimos $\eta_j = \frac{dg_j}{g_j}$, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, e $y_i = a_{ij}y_j + b_{ij}$ implica que $dy_i = a_{ij}dy_j$, alem disso $\Omega_i = g_{ij}\Omega_j$ pela Observação 1.1, e portanto $a_{ij}g_i = g_j g_{ij}$. Assim, $\frac{dg_i}{g_i} = \frac{dg_j}{g_j} + \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$ em $U_i \cap U_j$, é claro que $d\eta_j = 0$, $d\Omega_j = \eta_j \wedge \Omega_j$ e $\eta_i = \eta_j + \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$.

2. Sejam os pares (Ω_j, η_j) e $\left(\Omega_j^{'}, \eta_j^{'}\right)$ que definem a mesma estrutura transversal $\mathcal{F}$ em U_j. Como Ω_j e $\Omega_j^{'}$ definem $\mathcal{F}$ em U_j temos que $\Omega_j^{'} = g_j\Omega_j$ para alguma $g : U_j \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ função transversalmente holomorfa não nula. Pelo item 1, sabemos que $\Omega_j = g_j dy_j$, $\Omega_j^{'} = g_j^{'} dy_j$, $\eta_j = \frac{dg_j}{g_j}$ e $\eta_j^{'} = \frac{dg_j^{'}}{g_j^{'}}$. Porém $g_j^{'} = gg_j$, logo $\eta_j^{'} = \eta_j + \frac{dg}{g}$.
Seja $\Omega_j^{'} = g\Omega_j$ e $\eta_j^{'} = \eta_j + \frac{dg}{g}$ para alguma função transversalmente holomorfa não nula $g : U_j \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Portanto usando a mesma notação do item (1) temos
$$\eta_j^{'} = \frac{dg_j}{g_j} + \frac{dg}{g} = \frac{d(g_j g)}{g_j g} = \frac{dg_j^{'}}{g_j^{'}} \;\; e \;\; \Omega|_{U_j}^{'} = g\Omega_j = (gg_j)dy_j = g_j^{'} dy_j^{'}$$
$g_j g = kg_j^{'}$, onde k é constante. Então em $U_i \cap U_j$ temos $g = \frac{kg_j^{'}}{g_j} = \frac{kg_i^{'}}{g_i^{'}}$, isto é, $\frac{g_j^{'}}{g_j} = \frac{g_i^{'}}{g_i}$, assim, $a_{ij} = a_{ij}^{'}$ e $gg_j a_{ij} = g_j^{'} a_{ij}^{'}$, ou seja, $gg_j = g_j^{'}$. Então $dy_j = dy_j^{'}$, logo, $y_j = y_j^{'}$, portanto $b_{ij} = b_{ij}^{'}$.

A seguir, estudamos a seguinte situação: $\mathcal{F}$ é uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão um sobre M e com uma estrutura transversal aditiva holomorfa sobre $M \setminus \Lambda$ onde $\Lambda \subset M$ é a união finita de folhas compactas de $\mathcal{F}$. Por razões de simplicidade suponhamos que $\mathcal{F}$ é globalmente definida por uma 1-forma Ω sobre M que é transversalmente holomorfa. O objetivo é estudar o grupo de holonomia de uma folha $L \in \mathcal{F}$, $L \subset \Lambda$.

Lema 1.4 *Dada qualquer folha $L \subset \Lambda$ o grupo de holonomia de L é solúvel.*

Prova. Dado um disco transversal á folheação $\mathcal{F}$, tal que $D \subset M$, $D \cap \Lambda = D \cap L = \{p\}$, consideremos a representação da holonomia $\text{Hol}(\mathcal{F}, L, D, p) \cong G < Dif(\mathbb{C}, 0)$ como um subgrupo do grupo de origem de difeomorfismos holomorfos fixando a origem $0 \in \mathbb{C}$. Assuma por contradição que $Hol(\mathcal{F}, L, D, p)$ não é solúvel. Por [34] podemos encontrar em D um subconjunto denso de pontos $q \in D$ o qual são pontos fixos hiperbólicos para elementos $f_q \in Hol(\mathcal{F}, L, D, p)$. dado um ponto fixo $f_q(q) = q$ escolhemos uma carta local $z : V \subset D \to \mathbb{C}$, tomando q em $0 \in \mathbb{C}$ e tal que $f_q(z) = \lambda z$ com $|\lambda| \neq 1$ é linear. A folha $L_q \in \mathcal{F}$ contém q e, portanto, a clase de homotopia $\gamma \in \pi_1(L_q, q)$ origina a função de holonomia $f_\gamma = f_q|_V \in Hol(\mathcal{F}, L_q, V, q)$. Sabemos que existe uma 1-forma holomorfa transversalmente fechada ω em $M \setminus \Lambda$ tal que $\mathcal{F}|_{M \setminus \Lambda}$ é dada por $\omega = 0$. Por construção, ω é invariante pelo pseudogrupo holonomia de $\mathcal{F}$ em $M \setminus \Lambda$ (ver [3] pag 43-47). Em particular, temos $f_\gamma^*(\omega|_V) = \omega|_V$. Escrevemos $\omega|_V = g(z)dz$ para obter $f_\gamma^*(\omega|_V) = \omega|_V \Rightarrow (\omega|_V)_{f(z)}\left(df_{\gamma(z)}v\right) = f_\gamma^*\left(\omega|_V\right)(p) = \left(\omega|_V\right)(p)v \Rightarrow \quad (*) \ \ \lambda g(\lambda z) = g(z) \Rightarrow g(z) = \frac{1}{z}g_{-1}$ para alguma constante $g_{-1} \in \mathbb{C}^*$. De fato, escrevemos $g(z) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} g_j z^j$ em series de Laurent. Então $(*)$ é equivalente a

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_j \lambda^{j+1} z^j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_z z^j \Rightarrow (\lambda^{j+1} - 1) \cdot g_j = 0, \ \forall j \in \mathbb{Z} \Rightarrow g_j = 0, \ \forall j \neq -1.$$

Assim, $\omega|_V = g_{-1}\frac{dz}{z}$, como o conjunto de pontos fixos hiperbólicos é denso em D existe uma sequencia $\lambda_n \to 0$. Então devemos ter $g_{-1} = 0$ e $\omega|_V = 0$. Assim, $\omega \equiv 0$ (Se que $\omega \neq 0$, então existe um p tal que é um ponto regular e uma carta trivializadora $\omega|_V = dz$) em $M \setminus \Lambda$, o que é uma contradição.

A seguir analisaremos o caso afim que requer outras técnicas: $\mathcal{F}$ é uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão um sobre M e com uma estrutura transversalmente holomorficamente afim sobre $M \setminus \Lambda$ onde $\Lambda \subset M$ é a união finita de folhas compactas de $\mathcal{F}$. Por razões de simplicidade suponhamos que $\mathcal{F}$ é globalmente definida por uma 1-forma Ω sobre M que é transversalmente holomorfa. O objetivo é estudar o grupo de holonomia de uma folha $L \in \mathcal{F}$, $L \subset \Lambda$.

Lema 1.5 *Dada uma folha $L \subset \Lambda$ o grupo de holomonia de L é solúvel.*

Prova. Dado o ponto $p \in M \setminus \Lambda$ consideremos uma vizinhança aberta simplesmente conexa $U_p \ni p$ em $M \setminus \Lambda$ onde podemos escrever $\eta|_{U_p} = \dfrac{dg_p}{g_p}$ para alguma função transversalmente holomorfa não identicamente nula $g_p : U_p \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Então, $0 = d\left(\dfrac{\Omega}{e^{\int \eta}}\right) = d\left(\dfrac{\Omega}{g_p}\right)$ em U_p implica $\Omega = g_p \cdot dF_p$ para alguma função transversalmente holomorfa $F_p : U_p \to \mathbb{C}$, o qual é uma integral primeira local para $\mathcal{F}$ em U_p. Se escolhemos outro $\bar{p} \in U_{\bar{p}} \subset M \setminus \Lambda$ então em caso $U_p \cap U_{\bar{p}} \neq 0$ temos $F_{\bar{p}} = \alpha F_p + \beta$ para alguma função afim $(z \mapsto \alpha z + \beta)$. Introduzimos a função multivalorada F em $M \setminus \Lambda$ escrevendo $F = \displaystyle\int \frac{\Omega}{e^{\int \eta}}$ ou também $dF = \frac{\Omega}{e^{\int \eta}}$. Esta é uma função transversalmente holomorfa localmente bem definida ($F|_{U_p} = F_p$ como acima), que se eleva a uma função transversalmente holomorfa bem definida no recobrimento universal $\widetilde{M \setminus \Lambda}$ de $M \setminus \Lambda$. Fixado um ponto $p \in M \setminus \Lambda$ e qualquer determinação local F_p de F e um caminho $\gamma : [0,1] \to M \setminus \Lambda$ podemos considerar a continuação transversalmente analítica $F_{p,\gamma}$ de F_p ao longo γ. Se γ é fechada e $\gamma(0) = \gamma(1)$, então $F_{p\gamma}$ depende apenas da classe de homotopia $[\gamma] \in \pi_1(M \setminus \Lambda; p)$. Seja $A(F) := \{F_{p,[\gamma]}; [\gamma] \in \pi_1(M \setminus \Lambda; p)\}$ o conjunto de tais continuações transversalmente analíticas e $P^{-1}(p) = \{\text{determinações}\, F_p \,\text{em}\, F \,\text{de}\, p\}$. Então, $\pi_1(M \setminus \Lambda; p)$ atua transversalmente em $P^{-1}(p)$. Existe portanto um recobrimento regular $A(F) \underset{P}{\to} M \setminus \Lambda$ com espaço total $A(F)$, fibra sobre p igual a $P^{-1}(p)$ e cobrindo o grupo de automorfismo isomorfico em $\pi_1(M \setminus \Lambda; p)/P_{\#}(\pi_1(A(F), F_p) =: \mathcal{M}(F)$. Denotaremos $\mathcal{M}(F)$ ao grupo de monodromia de F.

A projeção canônica $\mu : \pi_1(M \setminus \Lambda; p) \to \mathcal{M}(F)$ é denominada uma função de monodromia de F e associada a cada classe homotopia $[\gamma] \in \pi_1(M \setminus \Lambda; p)$ a correspondente determinação $F_{p,[\gamma]}$ no ponto $\gamma(1) = p$.

Dada qualquer folha $L_0 \subset \Lambda$ fixamos um ponto $p_0 \in L_0$ e um disco de holonomia holomorfa pequena D_0, $D_0 \pitchfork \mathcal{F}$, $D_0 \cap L_0 = \{p_0\}$ tal que temos uma representação de holonomia $Hol(\mathcal{F}, L_0, D_0, p_0) \subset Dif(D_0; p_0)$. Dada uma C^∞ vizinhança tubular $f : N \to L_0$ fibrada por discos de holonomia holomorfos $D_q = r^{-1}(q)$, $q \in L_0$ com $r^{-1}(p_0) = D_0$ e $N^* = N \setminus L = N \setminus \Lambda$ obtemos por restrição a C^∞-fibração $r^* : N^* \to L_0$ fibra um disco furado $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$. A sequencia de homotopia para esta fibração fornece a sequencia exata abaixo

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{D}^*) \longrightarrow \pi_1(N^*, \tilde{p}_0) \longrightarrow \pi_1(L_0; p) \longrightarrow 0$$

onde $\tilde{p}_0 \in N^*$ é um ponto base fixo com $r(\tilde{p}_0) = p_0$. Denote por $A(F)|_{N^*} \underset{p|_{N^*}}{\to} N^*$ a restrição natural de $A(F) \underset{P}{\to} M \setminus \Lambda$ e por $A(F)|_{N^*}$ a componente conexa a qual contém a determinação local $F_{\tilde{p}_0}$. Como acima, denotemos o mapa de monodromia por

$$\mu : \pi_1(N^*, \tilde{p}_0) \to \mathcal{M}(F)(N^*) \cong \frac{\pi_1(N^*, \tilde{p}_0)}{P_{\#}(\pi_1(A(F)|_{N^*}; F_{\tilde{p}_0})}.$$

Para concluir a prova do Lema 1.5 serão necessários quatro lemas que citaremos abaixo

Lema 1.6 *Existe um único morfismo* (μ) *o qual faz comutar o seguinte diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(N^*, \tilde{p}_0) & \longrightarrow & \pi_1(L_0, p_0) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \mu & & \downarrow (\mu) & & \\ & & & & \mathcal{M}(F; N^*) & \longrightarrow & \frac{\mathcal{M}(F;N^*)}{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

Finalmente definamos $\mu(F; L_0) := \frac{\mathcal{M}(F;N^*)}{\mathbb{Z}}$ como a monodromia de F associada a L_0 e denotaremos por $(\mu) : \pi_1(L_0; p) \to \mathcal{M}(F; L_0)$ o morfismo de monodromia de F relativamente a L_0. Agora usaremos

Lema 1.7 *Existe um morfismo sobrejetivo* α *a qual faz comutar o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(L_0; p_0) & \\ Hol \swarrow & & \searrow (\mu) \\ Hol(\mathcal{F}, L_0, D_0) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{M}(F; L_0). \end{array}$$

dada qualquer determinação local $\ell(y)$ de $F|_{D_0^*}$, onde y é uma coordenada holomorfa em D_0, denotamos por $\ell(y)_{[\gamma]}$ sua comutação analítica ao longo $[\gamma] \in \pi_1(L_0; p_0)$ assim, que temos um elemento $\ell(y)_{[\gamma]} = (\alpha \circ Hol)([\gamma])$ do grupo de monodromia $\mathcal{M}(F; L_0)$.

Lema 1.8 *Para cada* $[\gamma] \in \pi_1(L_0, p_0)$ *temos* $\ell(y)_{[\gamma]} = a_{[\gamma]}y + b_{[\gamma]}$*para algum mapeamento afim* $(z \mapsto a_{[\gamma]}z + b_{[\gamma]})$*. Em particular* $\mathcal{M}(F_0; L_0)$ *é solúvel.*

Lema 1.9 *Seja* $0 \to G \to H \to K \to 0$ *uma sequencia exata de grupos. Então,* H *é solúvel se, e somente se,* G *e* K *são solúveis.*

Desde que a sequencia exata $0 \to Ker\,\alpha \to Hol(\mathcal{F}, L_0, D_0) \stackrel{\alpha}{\to} \mathcal{M}(F; D_0^*) \to 0$ ela tem $\mathcal{M}(F, D_0^*)$ solúvel e $Ker(\alpha)$ abeliano concluimos que $Hol(\mathcal{F}, L_0, D_0)$ é solúvel, assim, concluímos o Lema 1.5.

Mostramos que dada qualquer folha $L \subset \Lambda$ possui grupo de holonomia solúvel sendo um subgrupo de $Dif\,(\mathbb{C}, 0)$. Como é bem conhecido um subgrupo solúvel $G < Dif\,(\mathbb{C}, 0)$ é formalmente conjugado ao subgrupo $\mathbb{H}_k = \left\{ \left(y \to \frac{ay}{\sqrt[k]{1+by^k}} \right); a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}$. A conjugação sempre converge se G contém um elemento f com $f'(0)$ não periódico.

Lema 1.10 *Como o grupo de holonomia* $G = Hol(\mathcal{F}, L, D)$ *é um grupo solúvel. Fixado um ponto regular* $q \in L \backslash (sing\,(\mathcal{F}) \cap L)$*, um pequeno disco transversal* $D \cong \mathbb{C}$*,* $L \cap D = \{q\}$*, e uma identificação da holonomia* $Hol(\mathcal{F}, L, D) \cong H < Dif(\mathbb{C}, 0)$*; sabemos que* H *é solúvel, assim, temos duas possibilidades:*

1. *H é abeliano. Então existe um campo vetorial formal $\widehat{\xi}$ em uma variável complexa $y \in D$, $y(D) = \mathbb{D}$, $y(q) = 0$, $\widehat{\xi}$ é escrita em alguns coordenadas formais* $\widehat{\xi}(\widehat{z}) = \frac{z^{k+1}}{1+a\widehat{z}^k} \frac{d}{d\widehat{z}}$ *tal que (a)* $g * \widehat{\xi} = \widehat{\xi}, \quad \forall g \in H.$

2. *Se H é solúvel não abeliano, então existe um campo vetorial formal $\widehat{\xi}$ tal que (b) $g * \widehat{\xi} = c\widehat{\xi}$, $c \in \mathbb{C}^*$ $\forall g \in H$ e $c \neq 1$ para algum $g \in H$. O campo vetor $\widehat{\xi}$ por ser escrito em alguma coordenada formal $\widehat{z}$ como* $\widehat{\xi}(\widehat{z}) = \widehat{z}^{k+1} \frac{d}{d\widehat{z}}$.

Prova A prova podemos encontrar na pag. 14-18 de [14] e pag 81-90 de [44].

Lema 1.11 *Qualquer folha* $L \subset \Lambda$ *tem uma vizinhança tubular* W *que é uma variedade fibrada pelos discos de holonomia* D *tal que em* W *temos definida uma 1-forma meromorfa transversalmente formal* $\hat{\eta}_L$ *com as seguintes propriedades:*

1. *$\hat{\eta}_L|_D$ é uma 1-forma meromorfa formal que se escreve em uma coordenada formal $\hat{y}$ em D*
$$\hat{\eta}_L|_D(\hat{y}) = a\frac{d\hat{y}}{\hat{y}} + \frac{d\hat{g}}{\hat{g}} \text{ com } a \in \mathbb{C} \text{ onde } \Omega|_D(\hat{y}) = \hat{g}d\hat{y} \tag{1.1}$$

2. *Além disso, se a holonomia de L é abeliana podemos tomar $a = 0$. Enquanto que se a holonomia é mergulhada analiticamente em $\mathbb{H}_k$ podemos tomar $a = k + 1$.*

Prova A prova podemos encontrar na pag. 11 de [8].

Lembremos, seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente holomorficamente afim sobre $M \setminus \Lambda$, então pela Proposição 1.3, existe η tal que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$, $d\eta = 0$.

Seja W uma vizinhança de Λ, consideremos a restrição de η a $W \setminus \Lambda = W \setminus L =: W^*$. Em W^* temos
$$\begin{aligned} d\Omega = \eta \wedge \Omega = \hat{\eta}_L \wedge \Omega \\ \eta - \hat{\eta}_L = \hat{h} \cdot \Omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

Se $\eta - \hat{\eta}_L \not\equiv 0$, então $\Omega|_{W^*}$ admite $\hat{h}$ como um fator integrante formal e η não pode estende-lo a L.

Se, o grupo de holonomia contém um atrator pelo Lema 1.11 temos a seguinte proposiçao.

Proposição 1.4 *Seja $L \subset \Lambda$ uma folha, cujo grupo de holonomia contém um atrator. Então, podemos encontrar uma vizinhança de L fibrada por discos de holonomia D como acima e uma 1-forma transversalmente meromorfa $\eta|_L$ em W, tal que:*

1. *$\eta_L|_D$ é uma 1-forma meromorfa, que se escreve em uma adequada coordenada holomorfa $\hat{y}$ em D*

$$\eta_L|_D(y) = a\frac{dy}{y} + \frac{dg}{g} \; \textit{com } a \in \mathbb{C} \; \textit{ onde } \Omega = gdy \tag{1.3}$$

2. *Se a holonomia de L é abeliana podemos tomar $a = 0$. Enquanto, se a holonomia é mergulhada em $\mathbb{H}_k$, podemos tomar $a = k + 1$.*

Na situação de acima a diferença $(\eta - \eta_L)|_{W^*}$ é $h\Omega$ para alguma função transversalmente meromorfa h em W^* tal que $d(h\Omega) = 0$. Agora vamos investigar a possível extensão de uma forma transversalmente fechada ω que define $\mathcal{F}$ para o conjunto invariante Λ.

Lema 1.12 *Se ω é uma 1-forma fechada transversalmente holomorfa definindo $\mathcal{F}$ em $W^* = W \setminus \Lambda$, então ω se estende a uma 1-forma fechada transversalmente meromorfa em W supondo que o grupo de holonomia $Hol(\mathcal{F}, L)$ contém um atrator para cada folha $L \subset \Lambda$.*

Prova.
Assumamos que $\Lambda = L$ é uma única folha compacta de $\mathcal{F}$. Escolhamos uma C^∞ vizinhança tubular $\mathbb{U}$ de Λ fibrada por discos de holonomia holomorfos e assumamos que $\mathbb{U} = W$. A extensão é um problema local em torno de Λ. Seja $\pi : \widetilde{W^*} \to W^*$ um recobrimento universal de W^* com projeção transversalmente holomorfa. O levantamento de ω é $\tilde{\omega} = \pi^*(\omega)$ em $\widetilde{W^*}$. Então $\tilde{\omega}$ é fechada, transversalmente holomorfa, portanto $\tilde{\omega} = d\tilde{F}$ (pois $\tilde{W^*}$ é simplemente conexo) para alguma função $\widetilde{F} : \widetilde{W^*} \to \mathbb{C}$ a qual é transversalmente holomorfa (submersão).

$$\begin{tikzcd} \widetilde{W^*} \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\widetilde{F}"] & \\ W^* \arrow[r, "F"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Assim, $\omega = dF$ para alguma função multivaluada transversalmente holomorfa F em W^*, note que F não é realmente uma função em W^* (Para mais detalhes ver [22] pag 52). Dado um ponto $p \in \Lambda$ consideramos o correspondente disco $D_p \ni p$ e seu disco furado $D_p^* = D_p - \{p\} \subset W^*$. Temos $D_p^* \approx \mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$ por equivalência conforme. A restrição $\pi|_{\pi^{-1}(D_p^*)} : \pi^{-1}(D_p^*) \to D_p^*$ é portanto um recobrimento holomorfo de um disco unitario furado $\mathbb{D}^*$. D^* tem um único recobrimento universal salvo equivalência holomorfa de recobrimentos holomorfos, podemos portanto considerar um recobrimento holomorfo $\Pi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}^*$, onde $\Pi(\tilde{z}) = e^{2\pi i \tilde{z}} = z$ (ver [32], pag 196). Seja $f \in Hol(\mathcal{F}, L)$ o difeomorfismo atrator e definido em $\mathbb{D}$, ou seja $f(z) = \lambda z$, $|\lambda| < 1$. Como $(f \circ \Pi)$ é continua e $\mathbb{D}$ é simplemente conexo, então exite um único levantamento tal que $\Pi \circ \tilde{f} = f \circ \Pi$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\Pi"] & \mathbb{D} \arrow[d, "\Pi"] \\ \mathbb{D}^* \arrow[r, "f(z)=\lambda z"] & \mathbb{D}^* \end{tikzcd}$$

Seja $\lambda = e^{2\pi i \mu}$, $g(\tilde{z}) = \tilde{z} + \mu$ verifica $\Pi o g = f o \Pi$, então $g = \tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{z} \in \mathbb{D} \arrow[d, "\Pi|_{\mathbb{D}}"] & \subset \tilde{W}^* \arrow[d, "\Pi"] \arrow[dr, "\tilde{F}"] & \\ \mathbb{D} \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f o \Pi"] & x_0 \in \mathbb{D}^* & \subset W^* \arrow[r, "F"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

O levantamento $\tilde{f}$ preserva as folhas de $\widetilde{\mathcal{F}} = \Pi^*(\mathcal{F})$, pois

$$\tilde{z} \in \Pi^{-1}(x_0) \subset \Pi^{-1}(L), \Rightarrow \Pi(\tilde{z}) = x_0$$

$$\Pi o \tilde{f}(\tilde{z}) = f o \Pi(\tilde{z}) = f(x_0) \Rightarrow \tilde{f}(\tilde{z}) \in \Pi^{-1}(x_0) \subset \Pi^{-1}(L).$$

Portanto $\tilde{F}(\tilde{f}(\tilde{z})) = \tilde{F}(\tilde{z})$, $\forall \tilde{z} \in \mathbb{D}$, assim, $\tilde{F}(\tilde{z})$ satisfaz

$$(*) \begin{cases} d\tilde{F}(\tilde{z} + \mu) = d\tilde{F}(\tilde{z}) \\ \tilde{F}(\tilde{z} + \mu) = \tilde{F}(\tilde{z}). \end{cases}$$

Como $f(z) = z \in Hol(\mathcal{F}, L)$, análogo ao caso que foi feito anteriormente, $f(z) = \lambda z$, $\tilde{F}(\tilde{z})$ satisfaz

$$(*) \begin{cases} d\tilde{F}(\tilde{z} + 1) = d\tilde{F}(\tilde{z}) \\ \tilde{F}(\tilde{z} + 1) = \tilde{F}(\tilde{z}). \end{cases}$$

Como $|\lambda| < 1$ temos μ é um número complexo com parte imaginaria positiva. Assim, temos

$$(*) \begin{cases} d\widetilde{F}(\tilde{z} + 1) = d\widetilde{F}(\tilde{z}) \\ d\widetilde{F}(\tilde{z} + \mu) = d\widetilde{F}(\tilde{z}) \end{cases}$$

Então, $d\widetilde{F}(\tilde{z})$ é uma $1-$forma diferencial no toro complexo $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mu\mathbb{Z})$, portanto, $d\widetilde{F}(\tilde{z})$ deve ser linear (ver [28], pag 31).

Logo,

$$d\widetilde{F}(\tilde{z}) = \alpha d\tilde{z} \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Como $\Pi(\tilde{z}) = e^{2\pi i \tilde{z}} = z$, segue que $\tilde{\omega} = \alpha \frac{d(\log z)}{2\pi i} = \alpha(2\pi i)^{-1}\frac{dz}{z}$, assim

$$\alpha(2\pi i)^{-1}\frac{dz}{z} = \tilde{\omega}(\tilde{z}) = d\left(F o \Pi\right)(\tilde{z}) = dF_z((2\pi i)z).$$

Portanto $\omega(z) = \alpha(2\pi i)^{-2}\frac{dz}{z}$ para alguma constante $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Isto prova a extensão de $\omega|_{\mathbb{D}^*}$. Pelo teorema de extensão de Hartog ω se estende a uma 1-forma transversalmente meromorfa em W com conjunto polar $(\omega)_\infty = \Lambda$ de ordem um, assim, concluímos a prova do Lema 1.12.

Agora temos duas possibilidades:

1^{ro} $Hol(\mathcal{F}, L)$ é abeliano. Neste caso, como esse contém um atrator linearizável, $Hol(\mathcal{F}, L)$ é abeliano linearizável (ver [3],pag 137).

Afirmação 1.1 *Como L é uma folha compacta existe um recubrimento finito tal que $L = \cup_{i=1}^{k} W_i$, onde W_i é uma vizinhança fibrada tal que $\epsilon|_D(z) = \frac{dz_i}{z_i}$ em W_i e $\epsilon|_D(z) = \frac{dz_j}{z_j}$ em W_j, e como $Hol(\mathcal{F}, L)$ contém um elemento hiperbólico, então $z_i = c_{ij} z_j$.*

De fato: Seja $q_i \in W_i$ e $q_j \in W_j$, um caminho $\gamma : I \to L$, tal que $\gamma(0) = q_i$ e $\gamma(1) = q_j$, e o difeomorfismo de holonomia $f_{[\gamma]} : (\Sigma_j, q_j) \to (\Sigma_i, q_i)$, obtido a partir de γ. Seja $g \in Hol\,(\mathcal{F}, \Sigma_j)$ um atrator, consideramos a conjugação $\tilde{g} := f_{[\gamma]} \circ g \circ f_{\gamma]}^{-1} \in Dif\,(\Sigma_i, q_i)$, que é também um atrator. Então, $z_i = c_{ij} z_j$. Assim, devemos ter ϵ único, sobre constantes multiplicativas.

Observação 1.2 *Se $\mathcal{F}$ for simultaneamente definida por duas formas fechadas não multiplas por uma constante, digamos ω_1 e ω_2, então ela tem uma integral primeira.*

De fato: Neste caso temos $\omega_2 = f\omega_1$, onde f é função transversalmente holomorfa. Por otro lado $0 = d\omega_2 = df \wedge \omega_1$, logo df também define $\mathcal{F}$ e f e uma integral primeira de $\mathcal{F}$.

Assim, desde que a $Hol\,(\mathcal{F}, L)$ contém um elemento hiperbólico, então não existe uma integral primeira para $\mathcal{F}$ em W, portanto, $\omega(z) = \varphi_{-1} \frac{dz}{z}$ e

$$\begin{array}{c} \eta|_D(z) = \eta_L|_D(z) + \varphi_{-1} \frac{dz}{z} \\ \eta|_D(z) = \eta_L|_D(z) + \varphi_{-1} \epsilon|_D(z). \end{array} \tag{1.4}$$

Portanto, $\eta = \eta_L + cte.\ \epsilon$ em W.

2^{do} $Hol(\mathcal{F}, L)$ é solúvel porém não abeliano. Neste caso existe um mergulho holomorfo $Hol(\mathcal{F}, L, D) \hookrightarrow \mathbb{H}_k$ para um único $k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{F}|_W$ não pode ser dada por 1-forma fechada transversalmente meromorfa. Se fosse dada por uma forma meromorfa $L \subset (\omega)_\infty$ onde ω tem pólo de ordem 1 ao longo de L, então $Hol(\mathcal{F}, L)$ é abeliana e linearizável, que uma contradição. Portanto

$$\omega \equiv 0 \ \text{ e } \ \eta = \eta_L \text{ em } W. \tag{1.5}$$

Em particular obtemos:

Proposição 1.5 *Suponhamos que cada folha $L \subset \Lambda$ contém um atrator em seu grupo holonomia. Então, η estende para 1-forma transversalmente meromorfa em M. Além disso, seus polos são simples e temos o Residuo de η, $Res_L \eta = a$ com*

(i) *$a = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ se $Hol(\mathcal{F}, L) \hookrightarrow \mathbb{H}_k$ é não abeliano.*

(ii) *Se $a - 1 \notin \mathbb{N}$, então $Hol(\mathcal{F}, L)$ é abeliano linearizável.*

Prova. De fato, se $Hol(\mathcal{F}, L)$ é não abeliano, $\eta = \eta_L$ em W, por (ii) do Lema 1.11, temos $a = k + 1$.
Se $a - 1 \notin \mathbb{N}$, então $Hol(\mathcal{F}, L)$ é abeliano linearizável, ver ([3], pag 217).

Pelo feito acima a gente tem provado.

Proposição 1.6 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente holomorficamente afim sobre $M \setminus \Lambda$ e dada em M por uma $1-$forma Ω transversalmente holomorficamente integrável. Suponhamos que cada folha $L \subset \Lambda$ contenha um atrator sobre seu grupo de holonomia. Então existe uma forma fechada transversalmente meromórfica η em M com conjunto polar $(\eta)_\infty = \Lambda$ de ordem um e tal que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. Além disso, para qualquer folha $L \subset \Lambda$ temos:*

1. *Se $Res_L \eta = a \notin \{2, 3, 4...\}$, então $Hol\,(\mathcal{F}, L)$ é abeliano linearizável.*
2. *Se $Hol\,(\mathcal{F}, L)$ é não abeliano, então $Res_L \eta = k + 1$ com $k \in \mathbb{N}$ e $Hol\,(\mathcal{F}, L)$ mergulhado em $\mathbb{H}_k$.*

Agora consideramos o caso especial; o caso $\Lambda = L$ é uma única folha de $\mathcal{F}$. Seja $a \in \mathbb{C}$, denote o resíduo $Res_L \eta$. Assumamos que $Hol(\mathcal{F}, L)$ é não abeliano tal que $a = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Lema 1.13 *Se qualquer uma 1-forma fechada transversalmente holomorfa em M é exata e $\Lambda = L = \{f = 0\}$ para alguma função transversalmente holomorfa $f : M \to \mathbb{C}$. Então, $\mathcal{F}$ é dada em uma vizinhança de Λ por uma 1-forma fechada transversalmente meromorfa ω com polos simples, definida em uma vizinhança $U \supset \Lambda$ de Λ em M.*

Prova. Sabemos que η é fechado e $Res_L \eta = k + 1$, então $\eta - (k + 1)\frac{df}{f}$ é fechado, por hipótese qualquer uma 1-forma fechada transversalmente holomorfa em M é exata, assim $\eta = (k + 1)\frac{df}{f} + d\varphi$, para alguma função transversalmente holomorfa $\varphi : M \to \mathbb{C}$. Assim, também por uma hipótese $d\Omega = \eta \wedge \Omega$ implica $d\left(\frac{\Omega}{f^{k+1}e^{\varphi}}\right) = 0$.
Assim, $\omega = \frac{\Omega}{f^{k+1}e^{\varphi}}$ é fechada transversalmente meromórfica e define $\mathcal{F}$ em M com conjunto polar $(\omega)_\infty = \Lambda$. Porém isto implica que $Hol(\mathcal{F}, \Lambda)$ é abeliano (pela 2^{do} possibilidade do Lema 1.12) e portanto abeliano linearizável contendo um atrator.

Afirmação 1.2 *Podemos construir uma 1-forma transversalmente meromórfica ω, com conjunto polar de ordem um $(\omega)_\infty = \Lambda$, em uma vizinhança U de Λ em M,*

De fato: Dado um ponto $p \in L$, escolhemos um sistema de coordenadas $\phi = (x, z) : U \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{C}$, com $p \in U$, $\phi(p) = (0, 0)$ e $\phi(U) = \{(x, z)\,;|x| < 1, |z| < 1\}$, onde y_α é uma submersão tal que

1. $\mathcal{F}$ é a folheação cujas folhas são da forma $z = cte$.
2. $L \cap U \subset (z = 0)$.
3. $D = (x = 0)$ é uma seção transversal a $\mathcal{F}$ e $z|_D$ é um sistema de coordenadas que lineariza a holonomia $Hol\,(\mathcal{F}, D)$.

A partir daí podemos obter uma cobertura aberta, digamos $(U_\alpha)_\alpha$, de D, por abertos conexos, onde são definidas coordenadas locais $(x_\alpha, z_\alpha) : U_\alpha \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{C}$, com as propriedades (1), (2) e (3) acima. Suponhamos que se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $U_\alpha \cap U_\beta$ é conexo. Por uma afirmação 1.1, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $z_\alpha = c_{\alpha\beta} z_\beta$, para alguma constante $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^*$. Decorre da que se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\frac{dz_\alpha}{z_\alpha} = \frac{z_\beta}{z_\beta}$ em $U_\alpha \cap U_\beta$. Logo existe uma forma ω em $L = \cup_\alpha U_\alpha$, tal que $\omega|_{U_\alpha} := \frac{dz_\alpha}{\alpha}$. Como L é compacto existe um cobrimento finito $\cup_{\alpha=1}^{p} U_\alpha$ tal que $\omega|_{U_\alpha} := \frac{dz_\alpha}{\alpha}$.
Assim, $\mathcal{F}|_U$ é dada por ω: dado qualquer disco de holonomia D com $D \cap \Lambda \neq 0$ e qualquer coordenada holomorfa $z \in D$ que lineariza $Hol(\mathcal{F}, \Lambda, D)$, definamos $\omega|_D := \frac{dz}{z}$.

Usando a mesma técnica de extensão podemos provar:

Proposição 1.7 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão um em M e suponhamos que $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente aditiva em $M \setminus \Lambda$ onde $\Lambda \subset M$ é uma união finita de folhas compactas. Então, $\mathcal{F}$ é dada por uma 1-forma fechada transversalmente meromórfica ω com polos simples e divisor polar $(\omega)_\infty = \Lambda$ desde que cada folha $L \subset \Lambda$ contém um atrator em seu grupo holonomia.*

Prova: Se $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente aditiva, existe um atlas de submersões transversalmente holomorfas $y_j : U_j \to \mathbb{C}$ que define $\mathcal{F}$ que pode ser escolhido com as relações $y_i = y_j + b_{ij}$ para $b_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$ localmente constante e $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Tal folheação é dada por uma $1-$forma fechada transversalmente holomorfa definida por $\omega|_{U_i} = dy_i$. Assim, na Proposição 1.7 acima só temos provado que tal 1-forma fechada transversalmente holomorfa ω em $M \setminus \Lambda$ estende a Λ com polo simples. Este fato é devido ao Lema 1.13.

Corolário 1.2 *Se $\mathcal{F}$ é transversalmente holomorficamente aditiva em $M \setminus \Lambda$ como na Proposição 1.7 e a folha $L \subset \Lambda$ contém algum atrator hiperbólico em seu grupo de holonomia, então $Hol(\mathcal{F}, L)$ é abeliano linearizável.*

Prova: Isso é devido ao fato que uma 1-forma fechada transversalmente meromorfa ω tem polos simples.

1.3 Folheações holomorfas admitindo hipersuperfícies transversais reais

Nesta seção apresentaremos algumas definições e proposições sobre uma variedade de Stein, que podemos ver em [9], e ao final da seção vamos ver o Teorema principal do Capítulo 1, o Teorema 1.3.

Definição 1.5 *Seja K um subconjunto de uma variedade X. O conjunto*

$$\widehat{K}_X := \{x \in X | \, |f(x)| \leq sup_{y \in K} |f(y)| \,, \;\; \forall f \in \mathcal{O}(X)\}$$

é chamada a envoltura convexa holomorficamente de K em X. A variedade X é chamada holomorficamente convexa se para qualquer compacto $K \subset X$ a envoltura convexa $\widehat{K}_X$ é também compacto.

Definição 1.6 *Uma variedade holomorficamente convexa X é chamada Stein se uma das seguintes condições equivalentes é satisfeita*

1. *Para qualquer ponto $x \in X$, existem funções holomorfas $f_1, f_2, ..., f_m$ em X tal que x é um ponto isolado do conjunto $\{x \in X / f_1 = f_2 = ...f_m = 0\}$.*

2. *Funções holomorfas sobre X separam os pontos de X, ou seja, para quaisquer x e y em X existe uma função holomorfa sobre X tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Proposição 1.8 *Temos*

1. *Cada função holomorfa sobre uma variedade fechada Y de uma variedade Stein X estende para uma função holomorfa sobre X.*

2. *Qualquer subvariedade fechada de uma variedade Stein é uma variedade de Stein.*

Seja $\mathcal{G}$ uma folheação singular de codimensão $q \geq 1$ em uma variedade complexa X de dimensão $n \geq 2$. Denotemos por $sing\,(\mathcal{G})$ o conjunto singular de $\mathcal{G}$. Dada uma subvariedade real $M \subset X$, de dimensão $m \geq 1$ e C^{∞}, dizemos que $\mathcal{G}$ é transversal a M se $sing\,(\mathcal{G}) \cap M = \emptyset$ e $T_p\mathcal{G} + T_pM = T_pX$, como espaço vetorial real, para cada $p \in M$. Lembramos que dado um ponto $p \in X \setminus sing\,(\mathcal{G})$, o espaço tangente $T_p\mathcal{G}$ é por definição o espaço tangente $T_p\,(L_p)$, da única folha L_p de $\mathcal{G}$ que contém o ponto p.

Neste trabalho consideraremos: $\mathcal{G}$ é uma folheção holomorfa de codimensão um e com singularidades na variedade complexa X de dimensão $n \geq 1$. Suponhamos que $\mathcal{G}$ é transversalmente afim sobre $X \setminus \Gamma$ para algum subconjunto analítico invariante de codimensão um $\Gamma \subset X$. Seja $M \subset X$ uma hipersuperfície fechada real que suponhamos transversalemente a $\mathcal{G}$. Então, a folheação induzida $\mathcal{F} = \mathcal{G}|_M$ é transversalmente holomorfa de codimensão um pelo Exemplo 1.2 tem estrutura transversalmente afim sobre $M \setminus \Lambda$, $\Lambda := \Gamma \cap M$ é a união de folhas compactas de $\mathcal{F}$.

A partir de agora, suponhamos que, X é uma variedade de Stein e $M = \partial A$ é uma fronteira suave de um subconjunto aberto relativamente compacto $A \subset X$, e também M é simplesmente conexo.

Lema 1.14 *Na situação acima para $\mathcal{F}$, Λ, $\mathcal{G}$, Γ, M e X. Suponhamos que cada folha $L \subset \Lambda$ contém um atrator no seu grupo de holonomia. Então, $\mathcal{G}$ admite em uma pequena vizinhança tubular W de M em X, uma 1-forma η meromorfa fechada em W com polos simples $\eta_{\infty} = \Gamma \cap W$ e tal que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$, onde Ω é uma 1-forma holomorfa que define $\mathcal{G}$ em W.*

Prova. Seja Ω que define a folheação $\mathcal{G}$ em X, tal que $\mathcal{G}$ é transversalmente afim em $X \setminus \Gamma$, então existe η em $X \setminus \Gamma$ tal que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$ e $d\eta = 0$. Seja $\mathcal{F} = \mathcal{G}|_M$ é transversalmente afim sobre $M \setminus \Lambda$ tal que $d\Omega|_M = \eta \wedge \Omega|_M$ e $d\eta|_{(M \setminus \Lambda)} = 0$, pela Proposição 1.5, η se estende meromorficamente em M, com conjunto polar $(\eta)_{\infty} = \Lambda$ de ordem um. Por outro lado como M é compacto existe uma vizinhança tubular W e pela transversavilidade podemos estender η a uma pequena vizinhança W de M em X como o feito em ([26], pag 124), terminando a prova do Lema.

Sobre as hipóteses do Lema 1.14, e $M = \partial A$ segue pelo Teorema de Extensão de Levi, a 1-forma η se estende meromorficamente (fechada) sobre $W \cup \overline{A}$.

Proseguimos com a hipóteses que M é simplemente conexo e $(\tilde{\eta})_{\infty} = \tilde{\Lambda}$ é irredutível, dada por uma equação analítica $\tilde{\Lambda} = \left\{\tilde{f} = 0\right\}$, para algum $\tilde{f} : W \cup \overline{A} \to \mathbb{C}$ holomorfa e reduzida. Denotemos por $\widetilde{\mathcal{F}}$ a restrição de $\mathcal{G}$ para $W \cup \overline{A}$.

Lema 1.15 *O grupo holonomia $Hol(\widetilde{\mathcal{F}}, \tilde{L})$ da folha $\tilde{L} \subset \Gamma \cap (W \cup \bar{A})$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ é abeliano linearizável.*

Prova. Denotamos por $\widetilde{\Omega}$ e $\tilde{\eta}$ as restrições de Ω e η em $W \cup \bar{A}$. Temos $(\tilde{\eta})_{\infty} = \left\{\tilde{f} = 0\right\}$ de ordem um para uma desejavel constante $a \in \mathbb{C}^*$ temos $\tilde{\eta} - a\frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}} = \tilde{\varphi}$ é holomorfa e fechada em $W \cup \bar{A}$. Desde que M é simplesmente conexo, podemos obter uma função holomorfa $\tilde{h}$ em uma vizinhança de M em $W \cup \bar{A}$ tal que $\tilde{\varphi} = d\tilde{h}$ em esta vizinhança. Pelo teorema de extensão de Levi, $\tilde{h}$ estende-se holomorfamente em $W \cup \bar{A}$ e temos $\tilde{\varphi} = d\tilde{h}$ em $W \cup \bar{A}$.

Isto é, $\tilde{\eta} - a\frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}} = d\tilde{h}$ e como $d\tilde{h} = \frac{d}{}$ temos

$$\tilde{\eta} = a\frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}} + \frac{d(e^{\tilde{h}})}{e^{\tilde{h}}} = a\frac{d(\tilde{f}e^{\frac{\tilde{h}}{a}})}{(fe^{\frac{\tilde{h}}{a}})}.$$

Podemos portanto assumir que $\tilde{\eta} = a\frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}}$ em $W \cup \bar{A}$.

Caso 1: $a = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Neste caso

$$d\widetilde{\Omega} = \tilde{\eta} \wedge \widetilde{\Omega} \Rightarrow d\left(\frac{\widetilde{\Omega}}{\tilde{f}^{k+1}}\right) = 0.$$

Assim, $\widetilde{\mathcal{F}}$ é dada por uma 1-forma meromorfa fechada em $W \cup \bar{A}$. Porém, desde que $\frac{\widetilde{\Omega}}{\tilde{f}^{k+1}}$ tem conjunto polar $\{\tilde{f} = 0\}$ de ordem $k + 1 \geq 2$ devemos integrar isso (como acima for para φ) e obtemos $\frac{\widetilde{\Omega}}{\tilde{f}^{k+1}} = d\widetilde{F}$ onde $\widetilde{F} : W \cup \bar{A} \to \bar{\mathbb{C}}$ é meromorfa com conjunto polar $(\widetilde{F})_{\infty} = \{\tilde{f} = 0\}$ de ordem k. Assim, atualmente temos $\widetilde{F} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{f}^k}$ para alguma função holomorfa $\tilde{G} : W \cup \bar{A} \to \mathbb{C}$. Isto dá

$$\widetilde{\Omega} = \tilde{f}^{k+1} d\left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{f}^k}\right) = \frac{\tilde{f}^{k+1}(\tilde{f}^k d\tilde{G} - \tilde{G}k\tilde{f}^{k-1}d\tilde{f}^k)}{\tilde{f}^{2k}} \Rightarrow \widetilde{\Omega} = \tilde{f}d\tilde{G} - k\tilde{G}d\tilde{f}.$$

Desde que $\widetilde{\Omega}$ é o pull-back de uma folheação linear 2-dimesional a holonomia de seu analítica folhas, e em particular da folha $\{\tilde{f} = 0\}$, é abeliana linearizável.

Caso 2: $a - 1 \notin \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Neste caso, por [6] Seção 3, o grupo holonomia do $\{\tilde{f} = 0\}$ é abeliano linearizável: podemos encontrar coordenadas locais $(x_j, y_j) \in U_j$ cobrendo a vizinhança do $\{\tilde{f} = 0\}$ em $W \cup \bar{A}$ tal que: $\{\tilde{f} = 0\} \cap U_j : \{y_j = 0\}$; $\widetilde{\mathcal{F}}|_{U_j} : dy_j = 0$; $\widetilde{\Omega}(x_j, y_j) = g_j dy_j$, $\tilde{\eta}(x_j, y_j) = \frac{dg_j}{g_j} + a\frac{dy_j}{y_j}$.

Desde que em cada iteração $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ duas de tais cartas temos

$$\begin{cases} g_i dy_i = g_j dy_j \\ a\frac{dy_i}{y_i} + \frac{dg_i}{g_i} = a\frac{dy_j}{y_j} + \frac{dg_j}{g_j} \end{cases}$$

devemos ter (para $a - 1 \notin \mathbb{N}$) tal que $y_i = c_{ij} y_j$ para alguma constante localmente c_{ij} em $U_i \cap U_j$ [6].

Assim, o Lema é provado.

Observação 1.3 *De acordo a [40], desde que A não pode conter um subconjunto compacto analítico de dimensão ≥ 1, o conjunto singular sing($\widetilde{\mathcal{F}}$) é um conjunto finitos de pontos. Além disso, também de acordo a [6], pag 205, $\widetilde{\mathcal{F}}$ em cada ponto singular tem uma integral primeira holomorfa.*

Assim, se denotamos por $\tilde{\Lambda} = \Gamma \cap (W \cup \bar{A})$, então $\pi_1(\tilde{\Lambda})$ é naturalmente isomorfa a $\pi_1(\tilde{L})$ e usando o Lema 1.15 e a construção da Proposição 1 de [10], assim, temos $\tilde{\xi}$ em uma vizinhança de $\tilde{\Lambda}$ em $W \cup \tilde{A}$ tal que $\tilde{\xi}$ define $\widetilde{\mathcal{F}}$ fora do conjunto polar $(\tilde{\xi}_\infty) = \tilde{\Lambda}$ o qual é de ordem um.

Afirmação 1.3 *A dinâmica de $\widetilde{\mathcal{F}}$ perto de M, permite estender $\tilde{\xi}$ a uma vizinhança de M.*

De fato: A holonomia de qualquer folha de $\mathcal{F}$ não está contida em Λ é abeliano linearizável, portanto, podemos escrever localmente $\xi = \frac{dy}{y}$ e estender a função y para uma função holomorfa multivaluada constante sobre as folhas de $\mathcal{F}$. Assim, podemos tomar $\tilde{\xi}$ como $\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}}$ para tal extensão o qual dá a extensão desejada de $\tilde{\xi}$. Finalmente, $\tilde{\xi}$ estende-se por transversalidade a uma vizinhança de M em $W \cup \bar{A}$ e pelo Teorema de Extensão de Levi estende-se a $W \cup \bar{A}$.

Agora, temos obtido uma 1-forma meromorfa fechada $\tilde{\xi}$ em $W \cup \bar{A}$ com polos simples tal que $(\tilde{\xi})_\infty = \{\tilde{f} = 0\}$. Portanto, de novo, podemos integrar $\tilde{\xi} - \alpha\frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}} = \tilde{\varphi}$ para um adequado $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e obtemos $\tilde{\xi} = \alpha\frac{d\widetilde{F}}{\widetilde{F}}$ para alguma função holomorfa $\widetilde{F} : W \cup \bar{A} \to \mathbb{C}$.

Agora se $(\eta)_\infty = \Lambda$ tem mais que uma componente irredutível, então o mesmo argumento acima mostra a existência de $\tilde{\xi}$ com conjunto polar de ordem um $(\tilde{\xi})_\infty = \tilde{\Lambda}$ e que escreve $\tilde{\xi} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \frac{d\tilde{f}_j}{\tilde{f}_j}$ para $\tilde{f}_j : W \cup \bar{A} \to \mathbb{C}$ holomorfa e $\alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. A fim de assegurar a coerência da extensão única tem observado que em uma vizinhança de uma componente $\Lambda_j \subset \Lambda$ menos Λ_j existe (até a multiplicação por constantes) uma única 1-forma holomorfa fechada que define $\widetilde{\mathcal{F}}$, isto é, porque o quociente de duas 1-formas fechadas é uma primeira integral meromorfa por $\mathcal{F}$ (ver a Observação 1.2). Por outro lado, desde que o grupo holonomia de Λ_j contém um atrator, dada qualquer vizinhança V_j de Λ_j em M, não existe integral primeira meromorfa para $\mathcal{F}$ em $V_j \setminus \Lambda_j$ exceto constantes.

Assim, temos quase provado o seguinte:

Teorema 1.1 *Seja $\mathcal{G}$ uma folheação holomorfa de codimensão um com singularidades em uma variedade complexa Stein X^n de dimensão $n \geq 2$. Seja $A \subset X$ um subconjunto aberto relativamente compacto com um bordo $M = \partial A$ simplemente conexo e tranversal a $\mathcal{G}$. Onde $\mathcal{G}$ induz uma folheação transversalmente holomorfa $\mathcal{F} = \mathcal{G}|_M$ em M que é afim em $M \setminus \Lambda$ para algum subconjunto invariante $\Lambda = \Gamma \cap M$ onde $\Gamma \subset X$ é analítica invariante por $\mathcal{G}$. Também assumimos que cada folha de $\mathcal{F}$, $L \subset \Lambda$ contém um atrator em seu grupo de holonomia. Então, $\mathcal{G}$ é dada em uma vizinhança de $\overline{A}$ em X por uma forma meromorfa fechada tipo logarítmica.*

Prova. Escrevemos $\Lambda = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_r$ em componentes irredutíveis Λ_j com $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$, $\forall \;\; i \neq j$. Se $r = 1$, então fazemos em razão à discussão acima. Se $r \geq 2$ e $a_j = Res_{\Lambda_j}\eta$ satisfaz uma das seguintes condições:

Caso 1. $2 \leq a_j = k+1$, $k_j \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{1, ..., r\}$. Pelo Lema 1.14, e pelo Caso 1 do Lema 1.15, $\widetilde{\mathcal{F}}$ é dada por uma 1-forma meromorfa fechada $\frac{\widetilde{\Omega}}{f_1^{k_1+1} ... f_r^{k_r+1}}$ em $W \cup \overline{A}$.

Caso 2. $a_j - 1 \notin \mathbb{N}$, $\forall j \in \{1, ..., r\}$. Neste caso, cada Λ_j tem uma holonomia abeliana linealizável e podemos construir 1-forma meromorfa com polos simples $\widetilde{\xi}$ definindo $\widetilde{\mathcal{F}}$ em uma vizinhança $W \cup \overline{A}$ de $\overline{A}$ em X.

Caso 3. Continua a considerar o caso $2 \leq a_j = k_j + 1$, $k_j \in \mathbb{N}$ para $j \in \{1, ..., j_0\}$ e $a_j - 1 \notin \mathbb{N}$, $\forall j \in \{j_0 + 1, ..., r\} \neq \emptyset$.

Começando com alguma componente Λ_j com $j \in \{j_0 + 1, ..., r\}$, construímos uma 1-forma fechada $\widetilde{\xi}$ em uma vizinhança de Λ_j e estendê-lo a uma vizinhança de cada Λ_j com $j \in j_0 + 1, ..., r$.

Resta estender $\widetilde{\xi}$ para uma vizinhança de Λ_j para cada $j \in \{j_0 + 1, ..., r\}$.

Afirmação 1.4 *$Hol\,(\mathcal{F}, \Lambda_1)$ é abeliano.*

De fato: Suponhamos por contradição que $Hol(\mathcal{F}, \Lambda_1)$ é não abeliano, então, em uma vizinhança V_1 de Λ_1 menos Λ_1 existe, até à multiplicação por constante, uma única $1-$forma η_1 tal que $d\widetilde{\Omega} = \eta_1 \wedge \widetilde{\Omega}$, pois sim, dada duas $1-$formas η_1 e $\eta_1^{'}$ temos $d\widetilde{\Omega} = \eta_1 \wedge \Omega = \eta_1^{'} \wedge \Omega$, então, $\eta_1 - \eta_1^{'} = h\widetilde{\Omega}$ que é uma $1-$forma fechada em $V_1 \setminus \Lambda_1$ definindo $\mathcal{F}$ caso não trivial. Desde que a holonomia da folha Λ_1 de $\mathcal{F}$ é não abeliano, então, $\eta = \eta_1$ em $V_1 \setminus \Lambda_1$ (ver equação 1.5).

Assim, dada h_1 em $V_1 \setminus \Lambda_1$ por $\widetilde{\Omega} = h_1\widetilde{\xi}$ temos $d\widetilde{\Omega} = \frac{dh_1}{h_1} \wedge (h_1\widetilde{\xi}) = \frac{dh_1}{h_1} \wedge \widetilde{\Omega}$ e portanto $\frac{dh_1}{h_1} = \widetilde{\eta}$ em $V_1 \setminus \Lambda_1$. Isto implica que, sobre a hipótese que $Hol(\mathcal{F}, \Lambda_1)$ é não abeliano, devemos ter $Res_{\Lambda_1}\eta = 1$, contradição (pois $Res_{\Lambda_1}\eta \geq 2$), concluímos a afirmação.

Assim, temos obtido, que para componente $\Lambda_j \subset \Lambda$ tem um grupo de holonomia abeliano linearizável. Pela Afirmação 1.3 podemos obter 1-forma global $\widehat{\xi}$ em uma vizinhança de $\overline{A}$ em X.

Corolário 1.3 *Considere as hipóteses do Teorema . Então, se A é difeomorfa a uma bola $B^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ e M é difeomorfa à esfera $M \cong S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, então $n = 2$ e $\mathcal{G}|_{\tilde{A}}$ é holomorficamente conjugado à folheação linear $\mathcal{L} : zd\omega - \lambda\omega dz = 0$ com $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.*

Prova: $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira $f : M \to \overline{\mathbb{C}}$, então pelo Lema 3 de [37], existe uma fibração $S^{2n-1} \to S^2$ e por tanto $n = 2$, assim, pelo Teorema 3 de [37], $\mathcal{G}$ é dada por

$$\lambda z \frac{\partial}{\partial z} + \mu w \frac{\partial}{\partial w}, \lambda/\mu \notin \mathbb{R}_- \ \ \textit{ou} \ \ z \frac{\partial}{\partial z} + (z^n + nw) \frac{\partial}{\partial w}, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema 1.3 é dada por uma forma meromorfa fechada tipo logarítmica, assim, é provado o corolário.

Capítulo 2

Folheações holomorfas de codimensão arbitrária

Neste capítulo definimos uma folheação holomorfa de codimensão arbitrária, estendemos algumas propriedades de folheção de codimensão um, damos alguns exemplos para folheações de codimensão q e apresentamos uma caracterização do caso de folheações transversalmente afins em termos de matrizes.

2.1 Folheações holomorfas de codimensão arbitrária e formas diferenciais

Definição 2.1 *Uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$, de codimensão q, em uma variedade complexa M, de dimensão m, onde $1 \leq m-q \leq m$, é uma decomposição de M em subvariedades holomorfas imersas conexas de dimensão $m-q$, chamadas folhas de $\mathcal{F}$, com as seguintes propriedades:*

1. *Para todo ponto $p \in M$ existe uma única folha L_p de $\mathcal{F}$ passando por p. Se $q \in L_p$ então $L_p = L_q$.*
2. *Para todo $p \in M$, existe uma carta local holomorfa (U, ϕ) de M com $p \in U$, e tal que $\phi : U \to V_{m-q} \times V_q$, onde V_{m-q} e V_q são abertos conexos de $\mathbb{C}^{m-q}$ e $\mathbb{C}^q$ respectivamente. Para todo $(x, y) \in V_{m-q} \times V_q$ a sub-variedade de dimensão $m-q$ de U, $\phi^{-1}(V_{m-q} \times \{y\})$, é um aberto de L_q, onde $q = \phi^{-1}(x, y)$.*

Definição 2.2 *Dado um sistema $\Omega := \{\Omega_1, ..., \Omega_q\}$, de 1-formas holomorfas definidas em um conjunto aberto $U \subset M$, diremos que o sistema é integrável se para cada $j \in \{1, ..., q\}$ temos $d\Omega_j \wedge \Omega_1 \wedge ... \wedge \Omega_q = 0$ em U.*

Se tal sistema de formas tem posto máximo em cada ponto, então pelo Teorema de Frobenius este define uma folheação holomorfa de codimensão q sobre U.

A folheação é dada por uma distribução de $(n-q)$-planos $Ker(\Omega) := \cap_{j=1}^{q} Ker(\Omega_j)$, dado $p \in M$ é definida $Ker(\Omega_j)(p) := \{v \in T_p(M) : \Omega_j(p)v = 0\}$.

Afirmação 2.1 *Dois sistemas integráveis de postos máximos $\Omega = \{\Omega_1, ..., \Omega_q\}$ e $\Omega' = \left\{\Omega'_1, ..., \Omega'_q\right\}$ definem a mesma folheação em U se, e somente se, temos $\Omega'_i = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\Omega_j$*

para algumas funções holomorfas a_{ij} em U, com a propriedade que a matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^q$ é não singular em cada ponto de U.
De fato:

1. *Se $\Omega_1, ..., \Omega_q$ são 1-formas linearmente independentes, então é claro que $\Omega_1^{'}, ..., \Omega_q^{'}$ são 1-formas linearmente independentes.*

2.

$$\begin{aligned} d\Omega_j^{'} \wedge \Omega_1^{'} \wedge ... \wedge \Omega_q^{'} &= d\left(\sum_{i=1}^q a_{ji}\Omega_i\right) \wedge \sum_{j=1}^q a_{1j}\Omega_j ... \wedge \sum_{j=1}^q a_{qj}\Omega_j \\ &= [d(a_{i1})\Omega_1 + a_{i1}d(\Omega_1) + ... + d(a_{iq})\Omega_q + a_{iq}d(\Omega_q)] \wedge \sum_{j=1}^q a_{1j}\Omega_j ... \\ &\quad \wedge \sum_{j=1}^q a_{qj}\Omega_j. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Fazendo cálculos simples e sabendo que $d\Omega_i \wedge \Omega_1 \wedge ... \wedge \Omega_q = 0$ temos que

$$d\Omega_i^{'} \wedge (\Omega_1^{'} \wedge ... \wedge \Omega_q^{'}) = 0.$$

3. *Seja $v \in Ker\left(\Omega^{'}\right) \Rightarrow v \in \cap_{j=1}^q Ker\Omega_j^{'} \Rightarrow \Omega_j^{'}(p)v = 0, \quad j = 1, ..., q$, como $\Omega_j(p) = \dfrac{\sum b_j^i \Omega_j^{'}(p)v}{det(a_{ij})(p)} \Rightarrow \Omega_j(p)v = 0$, assim, $Ker\left(\Omega^{'}\right) = Ker\left(\Omega\right)$.*

Dado o sistema $\Omega := \{\Omega_1, ..., \Omega_q\}$, como acima, denotamos por $\mathcal{F}(\Omega)$ a folheação definida pelo sistema.

Agora, introduzimos algumas notações: dadas as matrizes $k \times l$ e $l \times s$ de 1-formas $A = (a_{ij})$ e $B = (b)_{jt}$, respectivamente, podemos definir o produto exterior de matrizes de A e B, denotado por $A \wedge B$, como a matriz $k \times s$, tal que

$$A \wedge B = (\sum_{j=1}^l a_{ij} \wedge b_{jt})_{i,t}.$$

Da mesma forma, podemos definir a derivada exterior dA como a matriz $k \times l$ de 2-formas onde a entrada na posição (i, j) é a 2-forma da_{ij}.

Exemplo 2.1 *Sejam $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_q$ folheações transversalmente afins de codimensão um em M, que são transversais em toda parte. Segue que, a folheação interseção $\cap_{j=1}^q \mathcal{F}_j$ é uma folheação de codimensão q em M a qual é transversalmente afim. De fato: se $\mathcal{F}_i = \left\{\left(U_j^i\right), y_j^i\right\}$, então $\cap \mathcal{F}_i = \left\{\left(\cap U_j^i\right), \left(y_j^1, ..., y_j^q\right)\right\}$ como as folheações são transversais temos que $\left(y_j^1, ..., y_j^q\right)$ é uma submersão. Além disso, como $\mathcal{F}_i$ é transversalemnte afim, temos $y_j^i = a_{jk}^i y_k^i + b_{jk}^i$, $a_{jk}^i, b_{jk}^i \neq 0$, assim,*

$$\begin{pmatrix} Y_j^1 \\ \vdots \\ Y_j^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{jk}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{jk}^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{jk}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_k^1 \\ \vdots \\ Y_k^q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{jk}^1 \\ \vdots \\ b_{jk}^q \end{pmatrix},$$

onde $\begin{pmatrix} a^1_{jk} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a^1_{jk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^q_{jk} \end{pmatrix}$ *é não singular.*

De acordo com [3], Capítulo I Proposição 1.1 temos que $d\Omega_j = \eta_j \wedge \Omega_j, d\eta_j = 0$, *para alguma 1-forma* η_j *em* M. *Definimos* Ω *como a matriz* $q \times 1$ *cujas componentes são* Ω_j *e* η *uma matriz* $q \times q$ *tendo na sua diagonal* η_j *e as demais componentes como zeros,* Ω *e* η *avaliadas em* M. *Em seguida, na notação acima temos* $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. *Como* η *é diagonal, temos* $d\eta = 0 = \eta \wedge \eta$.

Exemplo 2.2 *Seja* M *uma variedade complexa de dimensão* ≥ 2, *e* $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_k\}$ *um sistema de* $1-$ *formas fechadas holomorfas linearmente independente em* M, *isto é* $d\Omega = \begin{pmatrix} d\omega_1 \\ d\omega_2 \\ \vdots \\ d\omega_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. *Então,* Ω *é claramente integrável* ($d\omega_i \wedge \omega_1 ... \wedge \omega_k = 0$) *e portanto define uma folheação* $\mathcal{F}$ *em* M. *O Lema de Poincaré, garante que dado um aberto simplesmente conexo* $U \subset M$, *existe uma função holomorfa* $f : U \to \mathbb{C}$, *tal que* $\omega_i|_U = df^i$. *Se* $g^i : V \to \mathbb{C}$ *é uma função tal que* $dg^i = \omega_i$, *onde* $U \cap V$ *é conexo e não vazio, então* g^i *e* f^i *diferem por uma constante em* $U \cap V$. *Desta forma, a folheação* $\mathcal{F}$ *pode ser localmente definida por funções holomorfas no seguinte sentido: existem coleções* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $F = \left\{f^1_\alpha, ..., f^k_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$, *e* $C = \left\{c^1_{\alpha\beta}, ..., c^k_{\alpha\beta}\right\}_{U_\alpha \cap U_\beta}$ *tais que:*

1. $\mathcal{U}$ *é uma cobertura de* M *por abertos simplesmente conexos.*

2. *Se* $\alpha \in A$, *então* f^i_α *é uma função holomorfa não constante em* U_α *tal que* $df^i_\alpha = \omega^i|_{U_\alpha}$, $1 \leq i \leq k$.

3. *Se* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *então* $U_\alpha \cap U_\beta$ *é conexo,* $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ *e* $f^i_\alpha = f^i_\beta + c^i_{\alpha\beta}$ *em* $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$.

Observe que se o sistema não tem singularidades, então $\left\{Y_\alpha = \left(f^1_\alpha, ..., f^k_\alpha\right)\right\}$. *Assim,* $\mathcal{F}$ *é uma folheação regular onde tem-se*

$$\begin{pmatrix} f^1_\alpha \\ f^2_\alpha \\ \vdots \\ f^k_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1_\beta \\ f^2_\beta \\ \vdots \\ f^k_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^1_{\alpha\beta} \\ c^2_{\alpha\beta} \\ \vdots \\ c^k_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

então $\mathcal{F}$ *é transversal afim, pela relação 2.2 dizemos que* $\mathcal{F}$ *tem uma estrutura tranversal aditiva. No caso em que* $sing\,(\Omega) \neq \emptyset$, *vemos que* $\mathcal{F}$ *tem uma estrutura transversal aditiva em* $M \setminus sing(\mathcal{F})$.
Reciprocamente, se $\mathcal{F}$ *é uma folheação com estrutura transversal aditiva em* $M \setminus sing\,(\mathcal{F})$ *e tal que* $cod\,(sing\,(\mathcal{F})) \geq 2$, *então* $\mathcal{F}$ *pode ser definida por uma* $1-$*forma holomorfa fechada. De fato, sejam* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $F = \left\{f^1_\alpha, ..., f^k_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$, *e* $C = \left\{c^1_{\alpha\beta}, ..., c^k_{\alpha\beta}\right\}_{U_\alpha \cap U_\beta}$ *coleções satisfazendo* (2) *e* (3), *onde* $\mathcal{F}$ *é uma cobertura aberta de* $M \setminus sing\,(\mathcal{F})$. *De* (3) *obtemos*

que, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *então* $\begin{pmatrix} df_\alpha^1 \\ df_\alpha^2 \\ \vdots \\ df_\alpha^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df_\beta^1 \\ df_\beta^2 \\ \vdots \\ df_\beta^k \end{pmatrix}$ *em* $U_\alpha \cap U_\beta$. *Isto implica que existe um sistema de* $1-$*formas holomorfas* $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_k\}$ *em* $M \setminus sing(\mathcal{F})$ *tal que* $\omega_i|_{U_\alpha} = df_\alpha^i$. Ω *é fechada e define* $\mathcal{F}$ *em* $M \setminus sing(\mathcal{F})$. *Por outro lado, como* $cod(sing(\mathcal{F})) \geq 2$, *o Teorema de Hartogs implica que* Ω *se estende a uma forma holomorfa em* M, *a qual é também fechada e define a folheação* $\mathcal{F}$.

Podemos então enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *Seja* M *uma variedade holomorfa e* $\mathcal{F}$ *uma folheação em* M, *cujo conjunto singular tem codimensão* ≥ 2. *Então,* $\mathcal{F}$ *pode ser definida por uma 1-forma matricial fechada se, e somente se,* $\mathcal{F}$ *tem uma estrutura transversal aditiva em* $M \setminus sing(\mathcal{F})$.

Exemplo 2.3 *Fixemos um sistema de coordenadas afim* $(z_1, ..., z_n)$ *de* $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. *De acordo com a definição de folheação de codimensão* k, *as folheações* $\mathcal{F}_1$ *e* $\mathcal{F}_2$ *definidas pelos sistemas de* $1-$*formas* $\Omega_1 = \left\{\omega_1^1 := d\left(z_1^2\right), \omega_1^2 := d\left(z_2^2\right), ..., \omega_1^k := d\left(z_k^2\right)\right\}$ *e* $\Omega_2 = \left\{\omega_2^1 := d\left(z_1^3\right), \omega_2^2 := d\left(z_2^3\right), ..., \omega_2^k := d\left(z_k^3\right)\right\}$, *coincidem, já que* $sing(\mathcal{F}_1) = ... = sing(\mathcal{F}_k) = (z_1 = 0)$ *e as folhas são hipersuperfícies* $(z_1 = c)$, *onde* $c \neq 0$. *Este exemplo, ilustra o fato que se o conjunto singular das folheações possuem componentes de codimensão* k *as suas formas definidoras não são necessariamente múltiplas uma da outra e vice-versa.*

Definição 2.3 *Seja* M *uma variedade complexa de dimensão* q. *Uma folheação holomorfa singular de codimensão* q *em* M *é um objeto* $\mathcal{F}$ *dado por coleções* $\left\{\Omega_\alpha = \left\{\Omega_\alpha^1, ..., \Omega_\alpha^q\right\}\right\}_{\alpha \in A}$ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *e* $\{A_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi}$ *tais que:*

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *é uma cobertura de* M *por abertos.*

(ii) Para todo α, Ω_α *é um sistema de 1-formas holomorfas integráveis em* U_α *de posto máximo em cada ponto.*

(iii) $A_{\alpha\beta}$ *é uma matriz holomorfa de ordem* $q \times q$ *em* $U_\alpha \cap U_\beta$ *não singular.*

(iv) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *então* $\Omega_\alpha = A_{\alpha\beta}\Omega_\beta$.

Exemplo 2.4 *Sejam* N *e* M *variedades complexas e* $\mathcal{F}$ *una folheação de codimensão* k *em* N. *Dada uma aplicação holomorfa não constante* $f : M \to N$, *podemos definir uma folheação de codimensão* k *em* M, *que será denotada por* $f^*(\mathcal{F})$, *da seguinte maneira:*
se $\mathcal{F}$ *é definida pelo termo* $((U_j)_{j \in J},\ (\Omega_j := \omega_1^j, ..., \omega_k^j)_{j \in J},\ (A_{ij})_{U_{ij}})$, *então* $f^*(\mathcal{F})$ *é definida por* $((V_j)_{j \in J},\ (\Theta_j)_{j \in J},\ (B_{ij})_{V_{ij} \neq \emptyset})$ $V_j := f^{-1}(U_j)$, $\Theta_j := f^*(\Omega_j)$ *e* $B_{ij} := A_{ij} \circ f$. *A folheação* $f^*(\mathcal{F})$ *será chamada de pull-back, o pré-imagem de* $\mathcal{F}$ *por* f. *Assim,* $f^*(\mathcal{F})$ *é uma folheação de codimensão* k *em* M

- $M = f^{-1}(N) \subset \bigcup f^{-1}(U_j) = \bigcup V_j$.

- $f^*(\omega_1^j) \wedge f^*(\omega_2^j) \wedge ... \wedge f^*(\omega_q^j) \wedge d(f^*(\omega_i)) = f^*(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge ... \wedge \omega_q \wedge d\omega_j) = 0$

- $\Omega_j = A_{ij}\Omega i$

$$\begin{pmatrix} \omega_1^j \\ \omega_2^j \\ \vdots \\ \omega_q^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} \end{pmatrix}_{q\times q} \begin{pmatrix} \omega_1^i \\ \omega_2^i \\ \vdots \\ \omega_q^i \end{pmatrix} \textit{ então } f^*(\omega_r^j) = \textstyle\sum_{s=1}^n (a_{rs}f) f^*(\omega_s^i)$$

A proposição a seguir foi feito em codimensão um em [22] pag 17, pode-se utilizar a mesma ideia para folheações de codimensão q .

Proposição 2.2 *Seja $\mathcal{F}$ a folheação definida por um sistema integrável $\Omega = \{\Omega_1, ..., \Omega_q\}$ em $\mathbb{C}^n$. Podemos estender $\mathcal{F}$ a $\mathbb{CP}^n$.*

Prova: Consideremos as cartas afins $E_j := \{[z] := [z_0; ...; z_{j-1}; z_j; z_{j+1}; ...; z_n] \in \mathbb{CP}^n;\ z_j = 1\}$, seja $\mathbb{C}^n$ como a carta afim E_0, o hiperplano do infinito dessa carta é dado por $H = \{[z] \in \mathbb{CP}^n;\ z_0 = 0\}$.

Usando as mudanças de coordenadas entre E_1 e E_0.

$$\phi(x) = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_0(x_1, 1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$$

Portanto, a expressão de Ω na carta E_1 é o sistema de componentes:

$$\phi^*(\Omega^i) = f_1^i\left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) d\left(\frac{1}{x_1}\right) + \sum_{j=2}^n f_j^i\left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) d\left(\frac{x_j}{x_1}\right)$$

onde $\Omega^i = \sum_{j=1}^n f_j^i(z) dz_j \not\equiv 0,\ \ 1 \le i \le q$.
Seja $f_j^i(z_1, \ldots, z_n) = f_j^{0i}(z_1, \ldots, z_n) + \ldots + f_j^{ri}(z_1, \ldots, z_n) + \ldots$
tal que f_j^{ri} $(r \ge 0,\ 1 \le j \le n)$ são componentes homogéneas de grau r dos f_j^i, respectivamente. Assim:

$$\phi^*(\Omega_i) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_1^{mi}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) \frac{-dx_1}{x_1^2} + \sum_{j=2}^n \sum_{m=0}^{+\infty} f_j^{mi}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) \frac{dx_j x_1 - dx_1 x_j}{x_1^2}$$

$$\phi^*(\Omega^i) = -(\sum_{m=0}^{+\infty} x_1^{-m} f_1^{mi}(1, x_2, \ldots, x_n) \frac{1}{x_1^2} + \sum_{j=2}^n \sum_{m=0}^{+\infty} x_1^{-m} f_j^{mi}(1, x_2, \ldots, x_n) \frac{x_j}{x_1^2}) dx_1$$

$$+ \sum_{j=2}^n \sum_{m=0}^{+\infty} x_1^{-m} f_j^{mi}(1, x_1, \ldots, x_n) \frac{dx_j}{x_1}$$

$$\phi^*(\Omega^i) = \frac{1}{x_1^{k+2}}[-\sum_{m=0}^{+\infty} x_1^{k-m}\left(f_1^{mi}(1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=2}^n f_j^{mi}(1, x_2, \ldots, x_n) x_j)\right) dx_1 +$$

$$\sum_{j=2}^n \sum_{m=0}^{+\infty} x_1^{k+1-m} f_j^{mi}(1, x_2, \ldots, x_n) dx_j)]. \tag{2.3}$$

Como os $f_{j's}^{mi}$ são todos polinomios, a 1-forma acima é meromorfa, sendo $|\phi_*(\Omega^i)|_\infty = (x_1 = 0)$. Notamos que a multiplicidade de x_1 como polo de $\phi^*(\Omega^i)$ é $k_i \geq 2$. Podemos então, escrever $\phi^*(\Omega^i) = \dfrac{\overline{\Omega^i}}{x_1^{k_i}}$, onde $\overline{\Omega^i}$ tem coeficientes polinomiais.
O sistema de componentes $\overline{\Omega^i}$ é integrável. De fato:
Como $\Omega_1 \wedge \Omega_2 .. \wedge \Omega_q \wedge d\Omega_l = 0$, $l = 1, \ldots, q$, tem-se $\phi^*(\Omega_1) \wedge \phi^*(\Omega_2) ... \wedge \phi^*(\Omega_q) \wedge d(\phi^*(\Omega_l)) = 0$ e $\phi^*(\Omega_i) = \dfrac{\overline{\Omega^i}}{x_1^{k_i}}$, então

$$\frac{\overline{\Omega^1}}{x_1^{k_1}} \wedge \frac{\overline{\Omega^2}}{x_1^{k_2}} \cdots \frac{\overline{\Omega^q}}{x_1^{k_q}} \wedge \left(\frac{d\overline{\Omega^l}}{x_1^{k_l}} - \frac{k_l \overline{\Omega^l}}{x_1^{k_l+1}} \wedge dx_1 \right) = 0$$

$$\left(\frac{\overline{\Omega^1}}{x_1^{k_1}} \wedge \frac{\overline{\Omega^2}}{x_1^{k_2}} \cdots \frac{\overline{\Omega^q}}{x_1^{k_q}} \wedge \frac{d\overline{\Omega^l}}{x_1^{k_l}} \right) - \left(\frac{\overline{\Omega^q}}{x_1^{k_1}} \wedge \frac{\overline{\Omega^2}}{x_1^{k_2}} \cdots \frac{\overline{\Omega^q}}{x_1^{k_q}} \wedge \frac{k_l \overline{\Omega^l}}{x_1^{k_l+1}} dx_1 \right) = 0 \tag{2.4}$$

por (2.3)

$$\overline{\Omega^i} = \left(- \sum_{m=0}^{+\infty} x_1^{k_i - m} \left(f_1^{mi}(1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=2}^{n} f_j^{mi}(1, x_2, \ldots, x_n)\, x_j \right) \right) dx_1$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} \sum_{m=0}^{+\infty} x_1^{k_i + 1 - m} f_j^{mi}(1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_j$$

Segue que:

$$\frac{\overline{\Omega^l}}{x_1^{k_l}} \wedge \frac{k \overline{\Omega^l}}{x_1^{k_l+1}} dx_1 = \left(\frac{1}{x_1^{k+2}} - \sum_{m=0}^{+\infty} x_1^{k_l - m} \left(f_1^{ml}(1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=2}^{n} f_j^{ml}(1, x_2, \ldots, x_n)\, x_j \right) dx_1\right.$$

$$\left. + \frac{1}{x_1^{k_l+1}} \sum_{j=2}^{n} \sum_{m=0}^{+\infty} x_1^{k_l - m} f_j^{ml}(1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_j \right) \wedge k \frac{1}{x_1^{k+2}} \sum_{j=2}^{n} \sum_{m=0}^{+\infty} x_1^{k_l - m} f_j^{ml}(1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_j dx_1$$

Como $dx_i \wedge dx_i = 0$ e $dx_i \wedge dx_j = 0$ se $i \neq j$ temos portanto $\dfrac{\overline{\Omega^i}}{x_1^{k_i}} \wedge \dfrac{\overline{\Omega^2}}{x_1^{k_i}} ... \dfrac{\overline{\Omega^q}}{x_1^{k_i}} \wedge \dfrac{k \overline{\Omega^l}}{x_1^{k+1}} dx_1 = 0$, assim:

$$\overline{\Omega^1} \wedge \overline{\Omega^2} ... \wedge \overline{\Omega^q} \wedge d\overline{\Omega^l} = 0$$

Observação 2.1 *Pelos cálculos feitos se observa que a ordem do polo k_i é a mesma em todas as cartas E_j para Ω^i.*

Podemos então, definir uma folheação $\overline{\mathcal{F}}$ em $\mathbb{CP}(n)$ tal que $\overline{\mathcal{F}}$ restringida a E^j é definida pelo sistema de $1-$formas Z^j, isto é:

1. $Z^0 = \Omega = \{\Omega^1, ..., \Omega^q\}$ em E_0
2. $Z^1 = \left\{ (\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1})^* (\Omega^1)\, x_1^{k_1}, ..., (\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1})^* (\Omega^q)\, x_1^{k_q} \right\}$ em E_1.
3. $Z^j = \left\{ (\varphi_0 \circ \varphi_l^{-1})^* (\Omega^1)\, x_j^{k_1}, ..., (\varphi_0 \circ \varphi_l^{-1})^* (\Omega^q)\, x_j^{k_q} \right\}$ em E_j.

Assim em $E_1 \cap E_0$ se verifica a seguinte igualdade

$$\begin{pmatrix} x_1^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1^{k_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_1^{k_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\varphi_1^{-1}\right)^* \Omega^1 \\ \left(\varphi_1^{-1}\right)^* \Omega^2 \\ \vdots \\ \left(\varphi_1^{-1}\right)^* \Omega^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\varphi_0^{-1}\right)^* \left(Z^1\right)^1 \\ \left(\varphi_0^{-1}\right)^* \left(Z^1\right)^2 \\ \vdots \\ \left(\varphi_0^{-1}\right)^* \left(Z^1\right)^q \end{pmatrix}$$

Verifica a definição de uma folheação em $\mathbb{CP}^n$. A folheação $\overline{\mathcal{F}}$ obtida é chamada compactificação de $\mathcal{F}$. Ela será denotada por $\mathcal{F}(\Omega)$.

Observação 2.2 ***Expressão em coordenadas homogêneas.***

Seja $\mathcal{G}$ a folheação de $\mathbb{CP}^n$ definida por um sistema integrável polinomial $\Omega := \{\omega_i\}_{i=1}^q$

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n f_j^i(z) dz_j$$

na carta afim E_0 de $\mathbb{C}^n$. Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ a projeção da relação de equivalência que define $\mathbb{CP}^n$: $\pi(z) = [z]$. Na carta E_0 ela é expressa como

$$\pi(z) = \pi(z_0, \ldots, z_n) = \left[1 : \frac{z_1}{z_0} : \ldots : \frac{z_n}{z_0}\right] := \left[1 : \frac{y}{z_0}\right].$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi_0 \circ \pi"'] & \mathbb{CP}^n \arrow[d, "\varphi_0"] \\ & \mathbb{C}^n \approx E_0 \end{tikzcd}$$

Assim; $\varphi_0 \circ \pi \left(z_0, ..., z_n\right) = \left(\frac{y}{z_0}\right)$.

Em particular,

$$\left(\varphi_0 \circ \pi\right)^* (\omega_i) = \frac{1}{z_0^2} \sum_{j=1}^n f_j^i \left(\frac{y}{z_0}\right) (z_0 dz_j - z_j dz_0). \qquad (*)$$

Para simplificar, identificaremos $\varphi_0 \circ \pi$ com π. Como os $f_{j's}^i$ são polinomios, multiplicando $\pi^*(\omega_i)$ por uma potencia apropriada de z_0, obtemos uma 1-forma polinomial $\overline{\omega_i} = z_0^k \dot{\pi}^*(\omega_i) = \sum_{j=0}^n F_j^i(z) dz_j$. Seja $\overline{\Omega}$ um sistema de 1-formas $\overline{\omega_i}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) Ω é integrável e define a folheação $\pi^*(\mathcal{G})$. Como $\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k \wedge d\omega_l = 0$ tem-se $\pi^*(\omega_1) \wedge ...\pi^*(\omega_k) \wedge d(\pi^*(\omega_l)) = 0$ e $\pi^*(\omega_l) = \dfrac{\overline{\omega_l}}{z_0^{k_l}}$, então

$$\frac{\overline{\omega_1}}{z_0^{k_1}} \wedge \frac{\overline{\omega_2}}{z_0^{k_2}} \wedge ... \wedge \frac{\overline{\omega_k}}{z_0^{k_k}} \wedge \left(\frac{d\overline{\omega_l}}{z_0^{k_l}} - \frac{k_l \overline{\omega_l}}{z_0^{k_l+1}} \wedge dz_0\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\overline{\omega_1}}{z_0^{k_1}} \wedge \frac{\overline{\omega_2}}{z_0^{k_2}} \wedge ... \wedge \frac{\overline{\omega_k}}{z_0^{k_k}} \wedge \frac{d\overline{\omega_l}}{z_0^{k_l}}\right) - \left(\frac{\overline{\omega_1}}{z_0^{k_1}} \wedge \frac{\overline{\omega_2}}{z_0^{k_2}} \wedge ... \wedge \frac{\overline{\omega_k}}{z_0^{k_k}} \wedge \frac{k_l \overline{\omega_l}}{z_0^{k_l+1}} \wedge dz_0\right) = 0 \quad (2.5)$$

tendo a forma explícita de $\overline{\omega_l}$ *e desdobrando (2.5), temos que*

$$\overline{\omega_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\omega_k} \wedge d\overline{\omega_l} = 0.$$

Assim Ω *é integrável.*

(2) *Os polinômios* F_j^i *são homogêneos do mesmo grau, digamos* $k_i \geq 1$.

$$\pi^*(\omega_i) = \left(-\frac{1}{z_0^2}\sum_{j=1}^{n} f_j^i\left(\frac{y}{z_0}\right)\right)dz_0 + \left(\frac{1}{z_0}\sum_{j=1}^{n} f_j^i\left(\frac{y}{z_0}\right)dz_j\right)$$

para cada $j = 1, \ldots, n$; *seja* s_j = *grau de* f_j^i, *em seguida, tomamos*

$$k_i = \min\{1 + s_1^i, \ldots, 1 + s_n^i, 1 + \max\{s_1^i, \ldots, s_n^i\}\}$$

assim, temos

$$\overline{\omega_i} = z_0^{k_i}\pi^*(\omega_i) = \left(-z_0^{k_i-2}\sum_{j=1}^{n} f_j^i\left(\frac{y}{z_0}\right)\right)dz_0 + \left(z_0^{k_i-1}\sum_{j=1}^{n} f_j^i\left(\frac{y}{z_0}\right)dz_j\right),$$

basta tomar $F_0^i(z) = -z_0^{k_i-2}\sum_{j=1}^{n} f_j^i\left(\frac{y}{z_0}\right)$ *e* $F_j^i(z) = z_0^{k_i-1}\sum_{j=1}^{n} f_j^i\left(\frac{y}{z_0}\right)$.

(3) *Os polinômios* F_j^i *não têm fator comum. Pois como* $\overline{\omega_i} = z_0^{k_i}\pi^*(\omega_i) = \sum_{j=1}^{n} F_j^i(z)dz_j$ *temos que* $z_0^{k_i}$ *não divide a* $F_j^i(z)$ *para todo* $j = 1, \ldots, n$. *Assim, se existe* g *tal que* g *divide* F_j^i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *então* g *divide* $\pi^*(\omega_i)$ *em consequência* $\pi_*(g)$ *divide* ω_i *o que é absurdo.*

(4) *A forma* $\overline{\omega_i}$ *satisfaz a relação* $i_R(\overline{\omega_i}) = 0$, *onde* $R = \sum_{j=0}^{n} z_j\frac{\partial}{\partial z_j}$ *é um campo radial de* $\mathbb{C}^{n+1}$. *Esta relação é equivalente a*

$$\sum_{j=1}^{n} z_j F_j^i(z) \equiv 0. \qquad (**)$$

Devido que $\overline{\omega_i} = z_0^{k_i-2}\sum_{j=1}^{n} f_j^i\left(\frac{y}{z_0}\right)(z_0dz_j - z_jdz_0)$ *e* $R = \sum_{j=1}^{n} z_j\frac{\partial}{\partial z_j}$ *temos*

$$i_R(\overline{\omega_i}) = z_0^{k_i-2}\sum_{j=1} f_j^i\left(\frac{y}{z_0}\right)(z_0z_j - z_jz_0) = 0$$

assim, $i_R(\overline{\omega_i}) = 0$ *é equivalente a* $\sum_{j=0}^{n} z_jF_j^i(z) = 0$.

Observe que $sing(\pi^*(\mathcal{G}))$ *tem codimensão* ≥ 2, *por* (3).
Note também que $\Omega = \overline{\Omega}|_{(z_0=1)}$, *ou seja, restringindo* $\overline{\Omega}$ *ao hiperplano* $z_0 = 1$ *recuperamos o sistema de 1-formas* Ω *original.*

Exemplo 2.1 *Uma folheação holomorfa singular de codimensão q $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{CP}(q+1)$ é definida em qualquer carta $(x_1,\cdots,x_{q+1})\in\mathbb{C}^{q+1}\hookrightarrow\mathbb{CP}(q+1)$ por um campo vetorial polinomial $X=\sum_{j=1}^{q+1}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ onde A_j é um polinômio em $(x_1,\ldots,x_{q+1})$.*

Se os A_j's não tem um fator em comum, $\mathcal{F}$ tem um conjunto singular dado em $\mathbb{C}^{q+1}$ por

$$sing(\mathcal{F})\cap\mathbb{C}^{q+1}=\{A_1=\cdots=A_{q+1}=0\}.$$

Como um exemplo desta situação, podemos considerar uma equação diferencial ordinaria complexa de ordem $q\geq 1$:

$$y^{(q)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(q-1)}) \qquad (*)$$

onde f é um polinômio. Consideremos um campo vetorial polinomial $Z(x_1,\ldots,x_{q+1})$ em $\mathbb{C}^{q+1}$ definida por

$$Z=1.\frac{\partial}{\partial x_1}+x_3.\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+x_{q+1}.\frac{\partial}{\partial x_q}+f(x_1,\ldots,x_{q+1}).\frac{\partial}{\partial x_{q+1}}\,.$$

Então dada qualquer solução $y(x)\colon x\in U\to y(x)\in\mathbb{C}$ de $(*)$ definimos $(x_1,\ldots,x_{q+1})\colon U\to\mathbb{C}^{q+1}$ dada por $x_1=x,x_2=y,\ldots,x_q=y^{(q-2)}$ e $x_{q+1}=y^{(q-1)}$. Então temos

$$\begin{array}{c} x_1'=\frac{\partial x_1}{\partial x}=1\\ x_2'=\frac{\partial x_2}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x}=y'=x_3\\ \vdots\\ x_q'=x_{q+1}\\ x_{q+1}'=y^{(q)}=f(x,y,\ldots,y^{(q-1)})=f(x_1,x_2,\ldots,x_q)\end{array} \tag{2.6}$$

assim $(x_1,\ldots,x_{q+1})(x)$ define localmente uma folha de uma folheação holomorfa de codimensão q definida por X. Assim, as folhas da folheação $\mathcal{F}$ induzida por X contêm as soluções de (*) .

2.2 Folheações com estrutura transversal de Lie

As definições e provas desde a definição 2.4 até o Corolário 2.1 podem ser encontrados em [22].

Uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão q em uma variedade complexa M, de dimensão $m>q$, pode ser definida por coleções $\{(U_j,\psi_j)\}_{j\in J}$ e $\{g_{ij}\}_{U_{ij}\neq\emptyset}$ onde $\{U_j\}_{j\in J}$ é uma cobertura de M por abertos conexos, tais que $\psi_j:U_j\to\mathbb{C}^q$ é uma submersão, para todo $j\in J$ e $g_{ij}:\psi_j(U_{ij})\to\psi_i(U_{ij})$ é um difeomorfismo satisfazendo $g_{ij}\circ\psi_j=\psi_i$, para todo (i,j) tal que $U_{ij}=U_i\cap U_j\neq\emptyset$, então $g_{ij}\circ g_{jk}\circ g_{ki}=id$ em $\psi_i(U_{ijk})$, onde $U_{ijk}=U_{i\cap U_j\cap U_k}$
Lembremos que uma ação de um grupo $(G,*)$ em uma variedade S é uma aplicação $\Psi:G\times S\to S$ satisfazendo $\Psi_1=id_S$ e $\Psi_{g*h}=\Psi_g\circ\Psi_h$, onde $\Psi_g(s)=\Psi(g,s)$ é um homeomorfismo de S, para todo $g\in G$. Estamos interessados no caso em que S, é uma variedade complexa e G é um sub-grupo de Lie do conjunto $Aut(S)$, dos biholomorfismos de S. Neste caso, usaremos a notação $\Psi_g(p)=g(p)$.

Definição 2.4 *Sejam M e S variedades conexas complexas, M de dimensão n, $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão q e $G\subset Aut(S)$ um sub-grupo de Lie de $Aut(S)$. Dizemos que*

$\mathcal{F}$ tem estrutura transversal modelada em G se existe uma cobertura $\{U_j\}_{j\in J}$ de M por abertos de coleções $\{\psi_j\}_{j\in J}$ e $\{g_{ij}\}_{U_{ij}\neq\emptyset}$ tais que:

1. *Para todo $j \in J$, $\psi_j : U_j \to \psi_j(U_j) \subset S$ é uma submersão.*
2. *Se $U_i \cap U_j := U_{ij} \neq \emptyset$, então $g_{ij} : \psi_i(U_{ij}) \to \psi_j(U_{ij})$ é a restrição de uma transformação $h_{ij} \in G$ a $\psi_i(U_{ij})$, tal que $h_{ij} \circ \psi_i = \psi_j$.*
3. *Para todo $j \in J$, as folhas $\mathcal{F}|_{U_j}$ são as variedades de nível $\psi_j^{-1}(q)$, $q \in \psi_j(U_j)$.*

Dizemos então que a coleção $\{h_{jk}\}_{U_{jk}\neq\emptyset}$ é um cociclo em G.

Suponha que $\mathcal{F}$ possui duas estruturas transversais modeladas em G, dadas pelas coleções $\{U_j\}_{j\in J}$, $\{\psi_j\}_{j\in J}$, $\{g_{ij}\}_{U_{ij}\neq\emptyset}$ e $\{V_i\}_{i\in I}$, $\{\phi_i\}_{i\in I}$, $\{h_{ij}\}_{V_{ij}\neq\emptyset}$, respectivamente. Após considerar um refinamento das duas coberturas, podemos supor que elas coincidem: $I = J$ e $U_j = V_j$, $\forall j$. Diremos que as duas estruturas são equivalentes, se para todo $j \in J$ existe $k_j \in G$ tal que $\psi = k_j \circ \phi_j$.

Observação 2.3 *Os cociclos $\{g_{ij}\}_{U_{ij}\neq\emptyset}$ e $\{h_{ij}\}_{U_{ij}\neq\emptyset}$ são equivalentes, isto é, que $h_{ij} = k_i^{-1} \circ g_{ij} \circ k_j$ para todo (i,j) tal que $U_{ij} \neq \emptyset$.*

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em M com estrutura transversal modelada em $G \subset Aut(S)$. Sejam $\pi : \widehat{M} \to M$ o recobrimento universal holomorfo de M e $\widehat{\mathcal{F}} = \pi^*(\mathcal{F})$.

Teorema 2.1 *Nas condições acima, $\widehat{\mathcal{F}}$ tem estrutura transversal modelada em G. Além disso, existe uma submersão $\phi : \widehat{\mathcal{M}} \to S$ tal que as folhas de $\widehat{\mathcal{F}}$ são as superfícies de nível $\phi : \psi^{-1}(s)$, $s \in S$. Em particular, se M é simplesmente conexa, então $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ e existe uma submersão $\phi : M \to S$ tal que as folhas de $\mathcal{F}$ são as superfícies de nível de ϕ.*

O par $(\widehat{\mathcal{F}}, \phi)$ será chamado de corpo de $\mathcal{F}$ com respeito à estrutura transversal.

Observação 2.4 *Duas estruturas transversais de $\mathcal{F}$ modeladas no mesmo grupo $G \subset Aut(S)$, digamos T_1 e T_2, dão origem a corpos diferentes $(\widehat{\mathcal{F}}, \phi_1)$ e $(\widehat{\mathcal{F}}, \phi_2)$. No entanto, se estas estruturas são equivalentes, existe uma transformação $h \in Aut(S)$ tal que $\phi_2 = h \circ \phi_1$.*

Utilizando o Teorema 2.1, vamos definir em seguida a monodromia da estrutura transversal. Sabemos da teoria do recobrimento que existe um homomorfismo injetivo natural de grupos $H : \Pi_1(M,p) \to Aut(\widehat{M})$, onde $\Pi_1(M,p)$ denota o grupo fundamental de M com base em $p \in M$. A imagem $H(\Pi_1(M,p)) := Aut(\pi)$ é o grupo de automorfismos de recobrimento $\pi : \widehat{M} \to M$. Seja $(\mathcal{F}, \phi)$ o desenvolvimento de $\mathcal{F}$ com respeito a uma estrutura modelada em $G \subset Aut(S)$. Dada $\gamma \in \Pi_1(M,p)$, como $H(\gamma) \in Aut(\widehat{M})$, a aplicação $\phi \circ H(\gamma) : \widehat{M} \to S$ é uma submersão que também define a folheação $\widehat{\mathcal{F}}$.

Observação 2.5 *Existe um único $h(\gamma) \in G$ tal que $\phi \circ H(\gamma) = h(\gamma) \circ \phi$.*

Isto define uma aplicação $\gamma \in \Pi_1(M,p) \to h(\gamma) \in G$, é claro que

$$h(\gamma_1 * \gamma_2) \circ \phi = \phi \circ H(\gamma_1 * \gamma_2) = \phi \circ H(\gamma_1 \circ H(\gamma_2)) = h(\gamma_1) \circ h(\gamma_2) \circ \phi \Rightarrow h(\gamma_1 * \gamma_2) = h(\gamma_1) \circ h(\gamma_2),$$

já que π é submersão. Daí $h : \Pi_1(M,p) \to G$ é um homomorfismo de grupos.

Corolário 2.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em M com estrutura transversal modelada em $G \subset Aut(S)$. Seja $(\mathcal{F}, \phi)$ o desenvolvimento de $\mathcal{F}$ no recobrimento universal $\pi : \widehat{M} \to M$, com respeito à estrutura. Então, existe uma submersão $\psi : M \to S$ que define $\mathcal{F}$ tal que $\psi \circ \pi = \phi$ se, e somente se, a monodromia $h : \Pi_1(M, p) \to G$ da estrutura é trivial, isto é, $h(\gamma) = id_S$ para todo $\gamma \in \Pi_1(M, p)$.*

Em geral se define uma G- folheação de Lie, na definição 2.4 em vez de $S = G$ onde G é um grupo de Lie e $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ tais que $\psi_j = g_{ij}.f_i$ em $U_i \cap U_j$.
Reformulando o Teorema 2.1 e o Corolário 2.1, temos a seguinte proposição, que é provada em [27]

Proposição 2.3 *Dada uma estrutura de G- folheação de Lie para uma folheação $\mathcal{F}$ de uma variedade conexa M é equivalente aos dados*

1. *um recobrimento universal $\pi : \widehat{M} \to M$;*
2. *um homomorfismo $h : \pi_1(M) \to G$;*
3. *uma submersão $\Phi : \widehat{M} \to G$; com as seguintes propriedades:*
   - *Φ é equivariante para h;*
   - *$\pi^*\mathcal{F}$ é uma folheação definida pela submersão Φ.*

Além disso, dois de tais desenvolvimentos (π, h_i, Φ_i), $i = 1, 2$, definem a mesma G-folheação de Lie se, e somente se, existe um elemento g de G tal que $h_2 = g.h_1.g^{-1}$ e $\Phi_2 = g\Phi_1$.

Seja G um grupo de Lie conexo de dimensão q. Um campo vetorial sobre G é invariante à esquerda, se ele é invariante por todas as translações à esquerda de G. A algebra de Lie de G, a qual denotamos por $\mathfrak{g}$, é definida $\mathfrak{g} \cong X_L(G) \cong T_eG$.

Pela identificação $\mathfrak{g}$ com T_eG definindo o colchete em T_eG como $[X, Y] = \left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right]$, onde $\tilde{X}(g) = dL_g(e).X$. Tomando uma base $\beta = \{X_1, ..., X_q\}$ de T_eG, escrevemos

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1} c_{ij}^q X_k.$$

As constantes c_{ij}^k recebem o nome de constantes estruturais de $\mathfrak{g}$ relativas á base β. Usando as propriedades de colchete de Lie, temos que :

1. $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$;
2. $\sum_{h=1}^q (c_{ij}^h.c_{hk}^l + c_{jk}^h.c_{hi}^l + c_{ki}^h.c_{hj}^l) = 0$.

Podemos expressar as constantes estruturais de β por meio de 1-formas diferenciais sobre G. Uma forma α sobre G é dita invariante à esquerda por G se ela é invariante por todas as translações à esquerda de G. Se α é uma 1-forma invariante à esquerda sobre G, e $\tilde{X}, \tilde{Y} \in X_L(G)$ são dois invariantes à esquerda, segue que

$$d\alpha(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X}(\alpha(\tilde{Y})) - \tilde{Y}(\alpha(\tilde{X})) - \alpha\left(\left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right]\right)$$

$$= -\alpha\left(\left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right]\right).$$

Em particular

$$d\alpha(e)(X,Y) = -\alpha(e)\left([X,Y]\right). \tag{2.7}$$

Seja $\beta^* = \{\alpha_1(e), ..., \alpha_q(e)\}$ a base dual de β mencionada acima. Usando 2.7, obtemos

$$d\alpha(e)(X,Y) = -\alpha(e)\left([X,Y]\right). \tag{2.8}$$

Logo, temos uma forma natural de definir uma 1-forma sobre G tomando valores em $\mathfrak{g}$. Mais geralmente, podemos considerar a noção de formas diferenciais sobre uma variedade diferenciável tomando valores em uma álgebra de Lie. Uma r-forma em M, $r \geq 1$, com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma aplicação Ω que a cada $p \in M$, associa uma aplicação r-linear alternada.

$$\Omega(p) : T_p(M) \times ...T_p(M) \to \mathfrak{g}$$

Para definir o caso $r = 0$, considere as funções suaves $f : M \to \mathfrak{g}$. Se $(X_1, ..., X_q)$ é uma base para $\mathfrak{g}$, existem q formas diferenciáveis de grau r, $\omega_1, ..., \omega_q$ sobre M, tais que ,

$$\Omega(p)\left(Y_1(p), ..., Y_r(p)\right) = \sum_{l=1}^{q} \omega_l(p)\left(Y_1(p), ..., Y_r(p)\right) X_i$$

para cada r-upla $Y_1(p), ..., Y_r(p) \in T_p(M)$. Temos que Ω é suave quando as formas $\omega_1, .., \omega_q$ são suaves. Quando for conveniente, escrevemos $\Omega = \sum_l^q \omega_l X_l$. Denotaremos por $\Lambda^r(M)\otimes\mathfrak{g}$ o conjunto de r-formas sobre M com valores em $\mathfrak{g}$. Podemos definir um operador diferencial

$$d : \Lambda^r(M) \otimes \mathfrak{g} \to \Lambda^{r+1}(M) \otimes \mathfrak{g}$$

da seguinte maneira: se $(X_1, ..., X_q)$ é uma base de $\mathfrak{g}$ e $\Omega = \sum_{l=1}^q \omega_l X_l$, então fazemos

$$d\Omega := \sum_{l=1}^{q} d\omega_l X_l.$$

Seja $X_1, ..., X_q$ uma base de $\mathfrak{g}$ e Z um campo de vetores suave sobre M. Para cada função $f : M \to \mathfrak{g}$, definimos

$$Z(f) = \sum_{l=1}^{q} Z(f_l) X_l,$$

onde $f = \sum_{l=1}^q f_l X_l$, a função $Z(f)$ com valores em $\mathfrak{g}$. Se $\Omega \in \Lambda^1(M) \otimes \mathfrak{g}$ e X e Y são dois campos suaves sobre M, temos que

$$d\Omega(X,Y) = X\Omega(Y) - Y\Omega(X) - \Omega\left([X,Y]\right).$$

Fixada a base $\{X_1, ..., X_q\}$ de $\mathfrak{g}$, se

$$\xi = \sum_{l=1}^{q} \xi_l X_l$$

é uma r-forma e

$$\eta = \sum_{l=1}^{q} \eta_l X_l$$

é uma s-forma sobre M com valores em $\mathfrak{g}$, podemos usar uma aplicação linear o colchete de Lie $[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ para definir sobre M a $(r+s)-$forma

$$[\xi,\eta]:=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\xi_i\wedge\eta_j\left[X_i,X_j\right].$$

$[\xi,\eta]$ não depende da base escolhida. Além disso, se $\Omega\in\Lambda^1(M)\otimes\mathfrak{g}$, então para quaisquer campos suaves X e Y sobre M, temos a igualdade

$$[\Omega,\Omega]\,(X,Y)=2\left[\Omega(X),\Omega(Y)\right].$$

Se G é um grupo de Lie conexo com algebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\tilde{X}(g)$ é um vetor qualquer em T_eG, podemos definir a 1-forma α com valores em $\mathfrak{g}$ dada por

$$\alpha(g)\left(\tilde{X}(g)\right):=X, \tag{2.9}$$

onde $dL_g(e)X=\tilde{X}(g)$. Por construção, temos que α é invariante à esquerda. Além disso, para cada $g\in G$, $\alpha_g:T_eG\to\mathfrak{g}$ é sobrejetiva. Se $\beta=\{X_1,...,X_q\}$ é uma base para $\mathfrak{g}$ e $\beta^*=\{\alpha_1,..,\alpha_q\}$ é a base de 1-formas invariantes à esquerda sobre G obtida de β por dualidade, se verifica que a forma α definida em 2.9 pode ser escrita como

$$\alpha=\sum_{k=1}^{q}\alpha_kX_k$$

Pela relação entre as constantes estruturais descrita acima, temos

$$d\alpha=\sum_{k=1}^{q}d\alpha_kX_k=-\sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{i<j}c_{ij}^k\alpha_i\wedge\alpha_j\right)X_k. \tag{2.10}$$

Como $[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{q}c_{ij}^kX_k$, temos que

$$[\alpha,\alpha]=\sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}c_{ij}^k\alpha_i\wedge\alpha_j\right)X_k \tag{2.11}$$

De (2.10) e (2.11), concluímos que

$$d\alpha=\frac{-1}{2}\left[\alpha,\alpha\right]$$

A forma α é conhecida como forma de Maurer-Cartan de G. Mais geralmente, seja $\mathfrak{g}$ uma algebra de Lie de dimensão q e $X_1,...,X_q$ uma base de $\mathfrak{g}$ com constantes estruturais $\left\{c_{ij}^k\right\}$. Suponha que uma variedade dferenciável M de dimensão $n\geq q$ admite q 1-formas suaves $\omega_1,...,\omega_q$ satisfazendo

$$d\omega_k=-\sum_{i<j}c_{ij}^k\omega_i\wedge\omega_j. \tag{2.12}$$

Reciprocamente, seja Ω uma 1-forma sobre M com valores em $\mathfrak{g}$ satisfazendo 2.12. Se $X_1,..,X_q$ é uma base de $\mathfrak{g}$ e $\Omega=\sum_{l=1}^{q}\omega_lX_l$, então $d\omega_k=-\sum_{i<j}c_{ij}\omega_i\wedge\omega_j$. Uma tal forma Ω é sobrejetiva em cada ponto se, e somente se, as formas $\omega_1,...,\omega_q$ são linearmente

independentes em cada ponto. Neste caso, o núcleo de Ω coincide com o núcleo do sistema $\{\omega_1, ..., \omega_q\}$ e, pelo Teorema de Frobenius, tal núcleo define uma folheação de Lie, de codimensão q.

O seguinte Teorema Darbox-Lie é importante para a prova da caracterização de folheações transversalmente afins em termos de matrizes, o Teorema encontra-se provado em [27].

Teorema 2.2 *(Darboux-Lie)*

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão q sobre U e seja G um grupo de Lie de dimensão q. Seja $\omega_1, ..., \omega_l$ uma base da álgebra de Lie com estrutura transversal constante c_{ij}^k. Se $\mathcal{F}$ admite uma G-estrutura transversal, então existem 1-formas $\Omega_1, ..., \Omega_q$ em U satisfazendo as seguintes condições.

1. *$\{\Omega_1, ..., \Omega_q\}$ é posto q e um sistema integrável que define $\mathcal{F}$.*
2. *$d\Omega_k = \sum_{i<j} c_{ij}^k \Omega_i \wedge \Omega_j$.*

Se $\mathcal{F}$,$\mathcal{U}$ e G são complexos e holomorfas, então Ω_j pode ser tomado como sendo holomorfo Reciprocamente, dado um sistema de classificação máxima de 1-formas $\Omega_1, ..., \Omega_q$ em U tal que

$$d\Omega_k = \sum_{i<j} c_{ij}^k \Omega_i \wedge \Omega_j$$

onde c_{ij}^k são constantes de estrutura de uma base dada $\omega_1, .., \omega_q$ da algebra de Lie de G, as seguintes condições foram satisfeitas.

1. *Para cada ponto $p \in U$, existe uma vizinhança U_p de p em U e uma submersão $f_p : U_p \to G$ que define $\mathcal{F}$ em U_p tal que $f^*(\omega_j) = \Omega_j$ em U_p para todo $j \in 1, .., q$.*
2. *Se U é simplemente conexo, então temos $U_p = U$.*
3. *Se $U_p \cap U_q \neq 0$, então existe um elemento localmente constante g_{pq} de G tal que $f_q = L_{pq}(f_p)$ em $U_p \cap U_q$.*

Em particular, $\mathcal{F}$ tem uma G estrutura transversal.

2.3 Folheação holomorfa de codimensão arbitrária transversalmente afim

Definição 2.5 *O grupo afim $Aff(n)$ é definido como o grupo de transformações afins $z \to Az + a$ em $\mathbb{C}^n$.*

Assim, o grupo afim é parametrizado por um par (A, a) que consiste de uma matriz invertível $A \in GL(n)$ e um vetor $a \in \mathbb{C}^n$, sendo isomorfo como variedade ao produto cartesiano $GL(n) \times \mathbb{C}^n$. Não obstante, $Aff(n)$ não é o produto cartesiano dos grupos $GL(n)$ e $\mathbb{C}^n$, é o produto semidireto do grupo linear geral $GL(n)$ que atua sobre o grupo abeliano $\mathbb{C}^n$, escrito $Aff(n) = GL(n) \rtimes \mathbb{C}^n$, desde que a lei multiplicação é dada por $(A,a).(B,b) = (AB, a+Ab)$. O grupo afim pode ser identificado como um subgrupo de $GL(n+1)$ pela identificação do grupo de elemento (A,a) com a matriz $\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$.

Dada uma ação do grupo de Lie G em uma variedade M, o subgrupo de isotropia de um ponto $x \in M$ é $G_x = \{g; g.x = x\} \subset G$ que consiste de todos os elementos do grupo g que fixam x, G_x é um subgrupo de Lie.

Observação 2.6 *Dado qualquer $x \in M$, temos*

$$\frac{G}{G_x} \cong \mathcal{O}_x.$$

Observação 2.7 *O grupo afim $Aff(\mathbb{C}^q) = GL_q(\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{C}^q$ age de modo natural sobre $\mathbb{C}^q$.*

$$(GL_q(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q) \times \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^q$$

$$((A,B),Z) \to AZ + B.$$

O subgrupo de isotropia da origem $0 \in \mathbb{C}^q$ é $GL_q(\mathbb{C})$, de modo que $\mathbb{C}^q$ pode ser identificado com o espaço homogêneo $\frac{Aff(\mathbb{C}^q)}{GL_q(\mathbb{C})}$.

Lema 2.1 *A álgebra de Lie $aff(\mathbb{C}^q)$ de $Aff(\mathbb{C}^q)$ tem a base dada por $\Omega = X \cdot dY$, $\eta = dX \cdot X^{-1}$ onde $X \in GL_q(\mathbb{C})$ e $Y \in \mathbb{C}^q$ são coordenadas globais. Além disso, temos $d\Omega = \eta \wedge \Omega$, $d\eta = \eta \wedge \eta$.*

Prova. Denotemos por $M(q \times q, \mathbb{C})$ ao espaço linear de matrizes complexas $q \times q$. Desde que $GL_q(\mathbb{C}) \subset M(q \times q, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{q^2}$, $GL_q(\mathbb{C})$ é um conjunto aberto de $\mathbb{C}^{q^2}$, temos uma coordenada global natural X em $GL_q(\mathbb{C})$. Denotamos por Y a coordenada global natural em $\mathbb{C}^q$. Fixado qualquer elemento $(X_o, Y_o) \in Aff(\mathbb{C}^q)$ definimos à translação a esquerda por

$$L_{(X_o,Y_o)} : GL_q(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q \to GL_q(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q$$

$$L_{(X_o,Y_o)}(X,Y) = (X_o \cdot X, X_o \cdot Y + Y_o).$$

Lembremos que um campo invariante à esquerda $\{\mathcal{X}\}$, verifica $DL_{(X_0,Y_0)}\{\mathcal{X}\}_{(I,0)} = \{\mathcal{X}\}_{(X_0,Y_0)}$.
Seja $(V,W) \in T_{(X_0,Y_0)}(GL_q(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q)$, temos $DL_{(X_0,Y_0)}(V,W) = (X_0 \cdot V, X_0 \cdot W)$.
Portanto, uma base do campo vetorial invariante à esquerda em $Aff(\mathbb{C}^q)$ é dada por:

$$\mathcal{X} = X \cdot \frac{\partial}{\partial X} + X \cdot \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Isto é, uma base de $aff(\mathbb{C}^q)$ é dada pela base dual $\{\Omega, \eta\}$ de $\{\mathcal{X}\}$. Onde

$$\begin{cases} \Omega &= X \cdot dY \\ \eta &= dX \cdot X^{-1} \end{cases}$$

é uma base para aff$(\mathbb{C}^q)$.
Lembremos que:

Definição 2.6 *Uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensão q com singularidades sobre M^n é chamado transversalmente afim, se existe uma familia $\{Y_i : U_i \to \mathbb{C}^q\}_{i\in I}$ de submersões holomorfas, definidas em conjuntos abertos $U_i \subset M$, definindo $\mathcal{F}$ e satisfazendo $M \setminus sing(\mathcal{F}) = \cup_{i\in I} U_i$ e com relações afins $Y_i = A_{ij}Y_j + B_{ij}$ para algum $A_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_q(\mathbb{C})$, $B_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^q$ localmente constante em cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.*

A seguir, um teorema que caracteriza uma folheação transversalmente afim de codimensão q, análogo ao que acontece em folheação transversalmente afim de codimensão um.

Teorema 2.3 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão q em M. A folheação $\mathcal{F}$ é transversal afim em M se, e somente se, existe uma cobertura aberta $\cup_{i\in I} U_i = M$ e matrizes holomorfas $q \times 1$, $q \times q$ de $1-$formas, Ω_i, η_i em U_i $\forall i \in I$, satisfazendo:*

1. *$\mathcal{F}|U_i = \mathcal{F}(\Omega_i)$;*

2. *$d\Omega_i = \eta_i \wedge \Omega_i$ e $d\eta_i = \eta_i \wedge \eta_i$;*

3. *se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então temos $\Omega_i = G_{ij} \cdot \Omega_j$ e $\eta_i = \eta_j + dG_{ij} \cdot G_{ij}^{-1}$ para alguma função holomorfa $G_{ij} : U_i \cap U_j \to Gl_q(\mathbb{C})$.*

Além disso, duas dessas coleções $(\Omega_i, \eta_i, U_i)_{i\in I}$ e $(\Omega_i^{'}, \eta_i^{'}, U_i^{'})_{i\in I}$ definem a mesma estrutura transversal afim de $\mathcal{F}$, se, e somente se, temos $\Omega_i^{'} = G_i \cdot \Omega_i$ e $\eta_i^{'} = \eta_i + dG_i \cdot G_i^{'}$ para alguma função holomorfa $G_i : U_i \to GL_q(\mathbb{C})$.

Enunciamos alguns resultados, que serão utilizados na prova do Teorema 2.3. Iniciamos com o seguinte lema bem conhecido do análise real, adaptado ao caso holomorfo:

Lema 2.2 *Seja $X : U \subset \mathbb{C}^n \to GL_q(\mathbb{C}^n)$ uma função holomorfa, então $d(X^{-1}) = -X^{-1} \cdot dX \cdot X^{-1}$.*

Prova:
Lembremos que, $d(X)(z)(v) = v(X)$, $z \in \mathbb{C}^n, v \in \mathbb{C}^n$, onde $v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, então

$$dX(z)(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i(z)\frac{\partial X}{\partial z_i}(z), \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(XX^{-1})}{\partial y_j} &= \frac{\partial I_n}{\partial y_j} = 0, \\ &= \frac{\partial X}{\partial y_j}.X^{-1} + X\frac{\partial X^{-1}}{\partial y_j}, \\ \frac{\partial X^{-1}}{\partial y_i} &= -X^{-1}\frac{\partial X}{\partial y_j}X^{-1} \end{aligned} \tag{2.14}$$

e

$$\begin{aligned} dX^{-1}(w)(V) = V(X^{-1}) &= \sum_{j=1}^m bj\frac{\partial}{\partial y_j}X^{-1} \\ &= X^{-1} \cdot \sum_{j=1}^m b_j\frac{\partial X}{\partial y_j} \cdot X^{-1}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

De (2.14), (2.13) e (2.15) tem-se o desejado.

Lema 2.3 *Seja $X : U \subset \mathbb{C}^n \to GL_q(\mathbb{C})$ holomorfa e η é definida diagonal $\eta = dX \cdot X^{-1}$, então temos $d\eta = \eta \wedge \eta$. Dado η uma matriz holomorfa $q \times q$ de 1-formas em $U \subset \mathbb{C}^n$ tal que $d\eta = \eta \wedge \eta$, e um mapa holomorfo $G : U \to GL_q(\mathbb{C})$, então a 1-forma $\widetilde{\eta} := \eta + dG \cdot G^{-1}$ satisfaz $d\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta} \wedge \widetilde{\eta}$.*

Prova:
Usando o Lema 2.3 temos

$$d(X^{-1}) = -X^{-1} \cdot dX \cdot X^{-1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} d\eta = d(dX \cdot X^{-1}) &= d(dX) \wedge X^{-1} + (-1)dX \wedge d(X^{-1}) \\ &= (-1)dX \wedge (-X^{-1} \cdot dX \cdot X^{-1}) \\ &= (dX \cdot X^{-1}) \wedge (dX \cdot X^{-1}) \\ &= \eta \wedge \eta. \end{aligned}$$

O que comprova a primeira parte.

Quanto à segunda parte, temos

$$\begin{aligned} d\widetilde{\eta} &= d\eta + d(dG \cdot G^{-1}) \\ &= \eta \wedge \eta + dG \cdot G^{-1} \wedge dG \cdot G^{-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \widetilde{\eta} \wedge \widetilde{\eta} &= (\eta + dG \cdot G^{-1}) \wedge (\eta + dG \cdot G^{-1}) \\ &= \eta \wedge \eta + \eta \wedge dG \cdot G^{-1} + dG \cdot G^{-1} \wedge \eta + dG \cdot G^{-1} \wedge \eta + dG \cdot G^{-1} \wedge dG \cdot G^{-1} \\ &= \eta \wedge \eta + dG \cdot G^{-1} \wedge dG \cdot G^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $d\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta} \wedge \widetilde{\eta}$.

Lema 2.4 *Sejam $G, G^{'} : U \subset \mathbb{C}^n \to GL_q(\mathbb{C})$ mapas holomorfos. Então, temos $dG \cdot G^{-1} = dG^{'} \cdot G^{'-1}$ se, e somente se, $G^{'} = G \cdot A$ para alguma constante $A \in GL_q(\mathbb{C})$.*

Prova:
Primeiro assumimos que $G^{'} = G \cdot A$ com A localmente constante. Assim, temos $G^{-1} \cdot G^{'} = A$ e portanto $d(G^{-1} \cdot G^{'}) = dA = 0$ em U, isso implica $d(G^{-1}) \cdot G^{'} + G^{-1} \cdot d(G^{'}) = 0$. Usando que $d(G^{-1}) = -G^{-1} \cdot dG \cdot G^{-1}$ temos

$$(-G^{-1} \cdot dG \cdot G^{-1}) \cdot G^{'} + G^{-1} \cdot dG^{'} = 0,$$

multiplicando à esquerda por G obtemos:

$$-dG \cdot G^{-1} \cdot G^{'} + dG^{'} = 0$$

multiplicando à direita esta última igualdade por $G^{'-1}$ obtemos

$$-dG \cdot G^{-1} + dG^{'} \cdot G^{'-1} = 0$$

o que comprova a primeira parte.

Agora suponhamos que $dG \cdot G^{-1} = dG^{'} \cdot G^{'-1}$ em U. Definimos $A = G^{-1} \cdot G^{'}$ Assim, temos que $G^{'} = G \cdot A$. Somente temos que mostrar que $dA = 0$ em U.
Temos

$$dA = d(G^{-1} \cdot G^{'}) = d(G^{-1}) \cdot G^{'} + G^{-1} \cdot d(G^{'}),$$

desde que

$$d(G^{-1}) = -G^{-1} \cdot dG \cdot G^{-1},$$

obtemos

$$\begin{aligned} dA &= -G^{-1}\cdot dG\cdot G^{-1}\cdot G' + G^{-1}\cdot dG' \\ &= -G^{-1}\cdot (dG\cdot G^{-1} - dG'\cdot G'^{-1})\cdot G', \end{aligned}$$

por hipótese $dG\cdot G^{-1} = dG'\cdot G'^{-1}$, obtemos $dA = 0$, concluindo assim a prova.

Proposição 2.4 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão q sobre M. Suponhamos que $\mathcal{F}$ é definida por algum sistema holomorfo integrável $\{\Omega_1,\ldots,\Omega_q\}$ de 1-formas. Se $\mathcal{F}$ é transversalmente afim, então existe uma matriz holomorfa $q\times q$ de 1−formas $\eta = (\eta_{ij})$ satisfazendo:*

$$d\Omega = \eta\wedge\Omega, \quad d\eta = \eta\wedge\eta \quad \textit{onde} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_q \end{pmatrix}.$$

Prova: Seja $\{\Omega_1,\ldots,\Omega_q\}$ um sistema holomorfo integrável no qual define $\mathcal{F}$ em M e suponhamos que $\{Y_i : U_i \to \mathbb{C}^q\}_{i\in I}$ é uma estrutura afim transversal para $\mathcal{F}$ em M, com

$$Y_i = A_{ij}Y_j + B_{ij} \ \text{ em } \ U_i\cap U_j \neq \emptyset, \tag{2.16}$$

como na Definição 2.6.
Desde que as submerções Y_i também definem $\mathcal{F}$, podemos escrever

$$\Omega = G_i\cdot dY_i = G_i\cdot \begin{pmatrix} dY_i^1 \\ dY_i^2 \\ \cdots \\ dY_i^q \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

em cada U_i, para alguma mapeo holomorfa $G_i : U_i \to GL_q(\mathbb{C})$. Aqui $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_q \end{pmatrix}$.

Em cada $U_i\cap U_j \neq \emptyset$ temos

$$G_i\cdot dY_i = G_j\cdot dY_j \tag{2.18}$$

e segue de (2.16) que

$$G_j = G_i\cdot A_{ij}. \tag{2.19}$$

De acordo aos Lemas 2.4 e 2.19 segue imediatamente

$$dG_j\cdot G_j^{-1} = dG_i\cdot G_i^{-1} \tag{2.20}$$

em cada $U_i\cap U_j \neq \emptyset$.
Isso permite definir η em M por

$$\eta|_{U_i} = dG_i\cdot G_i^{-1}. \tag{2.21}$$

De acordo ao Lema 2.3 temos $d\eta = \eta\wedge\eta$. Também, temos em cada U_i

$$\begin{aligned} d\Omega = d(G_i\cdot dY_i) &= dG_i\wedge dY_i \\ &= dG_i\cdot G_i^{-1}\wedge dY_i \\ &= dG_i\cdot G_i^{-1}\wedge G_i\cdot dY_i \\ &= \eta\wedge\Omega. \end{aligned}$$

Portanto, o par (Ω,η) satisfaz $d\Omega = \eta\wedge\Omega$ e conclui-se a prova.

Corolário 2.2 *Seja η uma matriz holomorfa $q \times q$ de 1-formas em M satisfazendo $d\eta = \eta \wedge \eta$. Então, localmente em M temos $\eta = dX \cdot X^{-1}$ para alguma função holomorfa $X : U \subset M \to GL_q(\mathbb{C})$. Se M é simplesmente conexo podemos escolher $U = M$. Além disso, dadas duas trivializações (X, U) e $(\tilde{X}, \tilde{U})$ com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ conexo, então temos $\tilde{X} = X \cdot A$ para algum $A \in GL_q(\mathbb{C})$ constante.*

Prova: Sejam $A, B \in GL_q(\mathbb{C})$, identificando $A \approx (A, 0), B \approx (B, 0)$,

$$AB \approx (AB, 0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (A, 0).(B, 0)$$

então, $GL_q(\mathbb{C})$ é um subgrupo fechado em $Aff(\mathbb{C}^q)$.

Além disso, $[(A, 0), (B, 0)] = ([A, B], 0)$, $GL_q(\mathbb{C})$ é um subgrupo de Lie em $aff(\mathbb{C}^q)$. Do Lema 2.1 temos uma base da álgebra de Lie de $GL_q(\mathbb{C}) \subset aff(\mathbb{C}^q)$, ω^i_j tal que

$$d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j.$$

Em M, por hipótese temos que existe um $\eta = (\eta^i_j)$ tal que $d\eta^i_j = -\eta^i_k \wedge \eta^k_j$, pelo Teorema de Darboux-Lie 2.2 existe uma submersão tal que $f^*\left(\widehat{\omega^i_j}\right) = \eta^i_j$.

Sejam

$$\begin{aligned} \eta &= f^*\widehat{\eta}, \\ X &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \\ X^{-1} &= \frac{1}{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}} \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde $\widehat{\eta} = dX \cdot X^{-1}$, então

$$\begin{aligned} \eta &= f^*\widehat{\eta} = \begin{pmatrix} f^*dx_{11} & f^*x_{12} \\ f^*x_{21} & f^*x_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{(x_{11} \circ f)(x_{22} \circ f) - (x_{12} \circ f)(x_{21} \circ f)} \begin{pmatrix} x_{22} \circ f & -x_{12} \circ f \\ -x_{21} \circ f & x_{11} \circ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_{11} \circ f) & (x_{12} \circ f) \\ (x_{21} \circ f) & (x_{22} \circ f) \end{pmatrix} \frac{1}{(x_{11} \circ f)(x_{22} \circ f) - (x_{12} \circ f)(x_{21} \circ f)} \begin{pmatrix} x_{22} \circ f & -x_{12} \circ f \\ -x_{21} \circ f & x_{11} \circ f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em geral, se $X \in GL_q(\mathbb{C})$ e $\widehat{\eta} = dX \cdot X^{-1}$ onde cada coordenada de X é x_{ij} e $\eta = f^*\widehat{\eta}$, então $\eta = dZ \cdot Z^{-1}$ onde cada coordenada de Z é $z_{ij} = x_{ij} \circ f$.

Dadas duas trivializações (X, U) e $(\tilde{X}, \tilde{U})$ com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ temos $\eta = dX \cdot X^{-1} = d\tilde{X} \cdot \tilde{X}^{-1}$. Pelo Lema 2.4, $\tilde{X} = X \cdot A$ para algum $A \in GL_q(\mathbb{C})$ constante. Assim, concluimos a prova.

A prova do Teorema 2.3 é simplesmente uma consequência do Corolário 2.2 e dos argumentos usados na prova da Proposição 2.4.

Prova do Teorema 2.3. A Proposição 2.4 mostra que se $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em M, então podemos construir coleções (Ω_j, η_j) em cada subconjuntos abertos $U_j \subset M$ cobrindo M como estabelecido. Reciprocamente, assuma que (Ω, η) é um par, onde Ω define $\mathcal{F}$ em M, como no enunciado do teorema. Desde que η é holomorfa e satisfaz

$d\eta = \eta \wedge \eta$ em M, existe uma cobertura aberta $\{\cup U_i\}_{i \in I}$ de M, para cada U_i, existe $G_i : U_i \to GL_q(\mathbb{C})$ tal que $\eta|_{U_i} = dG_i \cdot G_i^{-1}$ pelo Corolário 2.2.

Agora, da condição $d\Omega = \eta \wedge \Omega$ temos

$$\begin{aligned} d(G_i^{-1}\Omega) &= -G_i^{-1} \cdot dG_i \cdot G_i^{-1} \wedge \Omega + G_i^{-1} \cdot d\Omega \\ &= -G_i^{-1} \cdot \eta \wedge \Omega + G_i^{-1} \cdot \eta \wedge \Omega = 0 \end{aligned}$$

e portanto, $G_i^{-1} \cdot \Omega_i = dY_i$ para alguma função holomorfa $Y_i : U_i \to \mathbb{C}^q$ a qual é uma submersão. Assim, temos $\Omega = G_i \cdot dY_i$ em U_i.

Por outro lado, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ temos $\dfrac{dG_i}{G_i} = \eta = \dfrac{dG_j}{G_j}$ e de acordo ao Lema 2.4 temos $G_i^{-1}G_j = A_{ij}$ para alguma função localmente constante $A_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_q(\mathbb{C})$, em cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Portanto,

$$G_i \cdot dY_i = \Omega = G_j \cdot dY_j = G_i \cdot A_{ij} \cdot dY_j.$$

Assim $dY_i = A_{ij}dY_j = d(A_{ij}Y_j)$ em cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e $Y_i = A_{ij}Y_j + B_{ij}$ para alguma localmente constante $B_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^q$. Isto mostra que $\mathcal{F}$ é transversalmente afim em M.

Provemos agora a última parte do Teorema 2.3. Sejam (Ω, η) um par dado e $G : U \to GL_q(\mathbb{C})$ uma função holomorfa como no enunciado. Coloquemos $\Omega' = G \cdot \Omega$ e $\eta' = \eta + \dfrac{dG}{G}$. Usando a mesma notação de antes temos que

$$\eta'|_{U_i} = \eta|_{U_i} + \frac{dG}{G} = \frac{dG_i}{G_i} + \frac{dG}{G} = \frac{d(GG_i)}{GG_i} = \frac{dG_i'}{G_i'} \;\; e \;\; \Omega'|_{U_i} = G\Omega|_{U_i} = GG_idY_i = G_i'dY_i$$

e isto mostra que

$$G_i' = A_{ij}G_j' \;\; Y_i' = Y_i \quad \text{de modo que } \; A_{ij}' = A_{ij} \;\; e \;\; B_{ij}' = B_{ij}$$

Assim, os pares (Ω, η) e (Ω', η') definem a mesma estrutura transversal para $\mathcal{F}$ em U. Finalmente, suponha que (Ω, η) e (Ω', η') definem a mesma estrutura transversal para $\mathcal{F}$ em U. Como Ω e Ω' definem $\mathcal{F}$, temos $\Omega' = G \cdot \Omega$. Usando a mesma notação de sempre, escrevemos localmente $\Omega = G_i \cdot dY_i$, $\Omega' = G_i' \cdot dY_i'$, $\eta = \dfrac{dG_i}{G_i}$ e $\eta' = \dfrac{dG_i'}{G_i'}$ mas $G_i' = G \cdot G_i$, dai $\eta' = \eta + \frac{dG}{G}$, completando a prova do Teorema 2.3.

Observação 2.8 *(O caso de um sistema globalmente definido). Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão q sobre M. Suponhamos que $\mathcal{F}$ é (globalmente) definido por algum sistema holomorfo integrável $\{\Omega_1, \dots, \Omega_q\}$ de 1-formas em M. Então, dos resultados do acima, qualquer estrutura transversal afim para $\mathcal{F}$ é dada por uma matriz holomorfa $q \times q$ 1-forma $\eta = (\eta_{ij})$ satisfazendo:*

$$d\Omega = \eta \wedge \Omega, \quad d\eta = \eta \wedge \eta \;\; onde \;\; \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_q \end{pmatrix}$$

Além disso, dois de tais pares (Ω, η) *e* (Ω', η') *definem a mesma estrutura transversal afim para* $\mathcal{F}$ *se, e somente se, temos* $\Omega' = G \cdot \Omega$ *e* $\eta' = \eta + dG \cdot G^{-1}$ *para alguma aplicação holomorfa* $G : M \to GL_q(\mathbb{C})$.

2.3.1 Um exemplo de suspensão

O seguinte exemplo generaliza o exemplo 1.5 do Capítulo I em [22].

Exemplo 2.5 *Definimos uma folheação holomorfa transversalmente afim de codimensão* q *sobre uma variedade compacta pelo método de suspensão.*
Seja M *uma variedade complexa e seja* w *uma matriz holomorfa* $q \times 1$ *de 1-forma sobre* M *fechada e satisfazendo* $f^*w = Aw$ *para algum biholomorfismo* $f : M \to M$ *e alguma matriz hiperbólica* $A \in GL_q(\mathbb{C})$. *Definem* Ω *e* η *no produto* $M \times GL_q(\mathbb{C})$ *por* $\Omega(x,T) = T \cdot w(x)$ *e* $\eta(x,T) = dT \cdot T^{-1}$.
Então, temos

$$\begin{aligned} d\Omega(x,T) &= dT \wedge w(x) + T dw(x) = \\ &= dT \wedge w(x) = dT \cdot T^{-1} \wedge T w(x) = \\ &= \eta(x,T) \wedge \Omega(x,T) \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} d\eta(x,T) &= d(dT \cdot T^{-1}) = dT \cdot T^{-1} \wedge dT \cdot T^{-1} = \\ &= \eta(x,T) \wedge \eta(x,T). \end{aligned}$$

Além disso, o biholomorfismo $F : M \times GL_q(\mathbb{C}) \to M \times GL_q(\mathbb{C})$ *definido por* $F(x,T) = (f(x), TA^{-1})$ *satisfaz*

$$F^*\Omega = TA^{-1} f^* w = TA^{-1} A w = Tw = \Omega$$

e

$$F^*\eta = d(TA^{-1}) \cdot (TA^{-1})^{-1} = dT \cdot T^{-1} = \eta.$$

Isto é, pelo Teorema 2.3, o par Ω, η *induz uma folheação* $\tilde{\mathcal{F}}$ *não singular de codimensão* q *a qual é transversalmente afim em* $M \times GL_q(\mathbb{C})$. *Essa folheação induz uma folheação* $\mathcal{F}$*não singular de codimensão* q *sobre uma variedade quociente* $V = (M \times GL_q(\mathbb{C}))/\mathbb{Z}$ *pela ação* $\mathbb{Z} \times (M \times GL_q(\mathbb{C})) \to M \times GL_q(\mathbb{C})$, $\eta, (x,T) \mapsto (f^n(x), TA^{-n})$. *Essa última folheação* $\mathcal{F}$ *herda a estrutura transversal afim de* $\tilde{\mathcal{F}}$.

2.4 Integral primeira Liouviliana com estrutura transversal afim

A seguir, vamos definir uma integral primeira Liouviliana, para maiores detalhes o leitor pode consultar [31] e [18].

Seja R um anel (comutativo com unidade $1 \in R$). A derivação de R é um mapa $\delta : R \to R$ satisfazendo:

1. $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$.
2. $\delta(a.b) = a.\delta(b) + b.\delta(a)$.

Um corpo diferencial é um par (k, Δ) onde k é um corpo e $\Delta = \{\delta_i\}_{i \in I}$ é um conjunto de derivações de k. Consideramos apenas corpos diferenciáveis comutativos, tais que, as derivações $\delta_i \in \Delta$ comutam $\delta_i o \delta_j = \delta_j o \delta_i$, $\forall i, j \in I$. As constantes de (k, Δ) são os elementos $c \in k$ tal que $\delta_i c = 0$, $\forall i \in I$, eles formam um subcorpo $c(k, \Delta)$ de k.

Uma função $h : (k, \Delta) \to (k', \Delta')$ entre dois corpos diferenciáveis é denominada uma função diferencial se

(i) existe um mapa $\tau : \Delta :\to \Delta'$;

(ii) temos $h \circ \delta = \tau(\delta) \circ h$, $\forall \in \Delta$.

Uma extensão diferencial de (k, Δ) é um corpo diferencial $(\tilde{k}, \tilde{\Delta})$ onde $\tilde{k}$ é uma extensão de k e cada derivação $\tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$ induz por restrição um elemento $\delta \in \Delta$ e reciprocamente, cada elemento $\delta \in \Delta$ estende um elemento $\tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$. É natural pensar de $\tilde{\Delta}$ como Δ extendido para $\tilde{k}$, e se escreve $(\tilde{k}, \Delta)$ ao invés de $(\tilde{k}, \tilde{\Delta})$.

Definição 2.7 *Seja (k, Δ) um corpo diferencial, uma extensão Liouviliana $(k(t), \tilde{\Delta})$ de (k, Δ) é do tipo:*

1. *adjunção de uma integral se $\tilde{\delta} t \in k$, $\forall \tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$;*
2. *adjunção do exponencial de uma integral se $\frac{\tilde{\delta} t}{t} \in k, \forall \tilde{\delta} \in \tilde{\Delta}$.*

Uma extensão Liouviliana de (k, Δ) é uma extensão diferencial $(K, \tilde{\Delta})$ de (k, Δ) para o qual existe a cadeia de extensões diferenciais:

$$k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_m = K$$

tal que $k_{i+1}/k_i = k_i(t_i)/k_i$ é uma extensão algébrica ou é do tipo adjunção de uma integral ou adjunção do exponencial de uma integral.

Introduzimos a noção de uma função Liouviliana em uma variedade complexa, começaremos ressaltando a noção de uma função Liouviliana em espaços projetivos complexos n-dimensional.

Definição 2.8 *(Função Liouviliana em espaços projetivos). Uma função Liouviliana em $\mathbb{C}P^n$ é um elemento f de uma extensão Liouviliana $(K, \hat{\Delta})$ do corpo diferencial $(\mu_n, \{\frac{\partial}{\partial y_j}, j = 1, \ldots, n\})$ onde $\mu_n = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ é o corpo de funções racionais $\frac{P(x_1, \ldots, x_n)}{Q(x_1, \ldots, x_n)}$, $P, Q \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e $\frac{\partial}{\partial y_j} : \mu_n \to \mu_n$ são as usuais derivadas parciais, $j = 1, \ldots, n$.*
É claro que:

(i) *$(\mu_n, \{\frac{\partial}{\partial y_j}\}_{j=1}^n)$ é um corpo diferencial comutativo;*

(ii) *O corpo de constantes $c(\mu_n, \{\frac{\partial}{\partial y_j}\}_{j=1}^n) = \mathbb{C}$;*

(iii) *dada qualquer extensão Liouviliana $(K, \tilde{\Delta})$ de $(\mu_n, \{\frac{\partial}{\partial y_j}\}_{j=1}^n)$, qualquer elemento $f \in K$ define uma função analítica sobre algum $U_f \subset \mathbb{C}P^n$ aberto denso (Zariski).*

Claramente a noção de função Liouviliana introduzida acima pode ser também definida para funções em $\mathbb{C}^n$ ou em subconjuntos abertos conexos de $\mathbb{C}^n$; porém daremos umas noções mais gerais.

Definição 2.9 *(Função Liouviliana). Seja M uma variedade complexa conexa. Denote por $\mu(M)$ o corpo de funções meromorficas em M. Um conjunto comutativo de derivações $\Delta = \{\delta_j\}_{j=1}^n$ de $\mu(M)$ é denominado básico se*

(i) $dim M \geq n$;

(ii) $c(\mu(M), \Delta) = \mathbb{C}$;

(iii) *qualquer derivação de $\mu(M)$ é localmente uma (meromorfica) combinação linear de derivações δ_j de Δ.*

Sobre essas hipóteses, qualquer elemento que torna-se uma extensão Liouviliana de $(\mu(M), \{\delta_j\}_{j=1}^n)$ e denominado uma função Liouviliana em M.

Lembremos em $\mathbb{CP}^2$ o Teorema de Singer quando uma folheação admite uma integral primeira Liouviliana, o teorema encontra-se provado em [31].

Teorema 2.4 *(Singer). Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa sobre $\mathbb{CP}^2$ dada em algum espaço afim $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$, dada por uma 1-forma polinomial $\Omega = Pdy - Qdx$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ admite uma integral primeira Liouviliana;*
2. *Ω tem um fator integrante da forma $h = exp \int \eta$, onde η e uma forma racional fechada;*
3. *Existe uma forma racional fechada η satisfazendo $d\Omega = \eta \wedge \Omega$.*

O Teorema 2.4 menciona que quando uma folheação em $\mathbb{CP}^2$ admite uma integral primeira Liouviliana. Uma generalização do Teorema 2.4 é o Teorema III (ver a Introdução) para uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensão um em $\mathbb{CP}^n$. Uma importante consequência do Teorema III é o fato de uma folheação de codimensão um admitindo uma integral primeira Liouviliana, que na verdade admite uma integral primeira de uma forma simple chamada *elementar.* A seguir vamos estender a definição de integral primeira elementar para uma folheação de codimensão q.

Definição 2.10 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão q, definida por um sistema integrável de 1-formas $\{\Omega_1, ..., \Omega_q\}$, $\mathcal{F}$ admite integral primeira elementar Liouviliana se podemos completar Ω, em um par Ω, η, onde η é uma matriz $q \times q$ de 1-formas racionais $\eta = (\eta_{ij})$, satsfazendo*

$$d\Omega = \eta \wedge \Omega \quad d\eta = \eta \wedge \eta$$

Corolário 2.3 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão q sobre $\mathbb{CP}^n$ admitindo uma integral primeira elementar Liouviliana. Então, $\mathcal{F}$ é transversalmente afim no complemento de algum subconjunto algébrico invariante de codimensão um $A \subset \mathbb{CP}^n$.*

De fato: É suficiente considerar A como a parte $\mathcal{F}$-invariante do conjunto polar de η e aplicar Teorema 2.3.

Definição 2.11 *Dada uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ em M uma variedade complexa, seja $U \subset M$ um aberto e $F : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante. Dizemos que F é uma integral primeira holomorfa em U para $\mathcal{F}$, se a restrição F é constante nas componentes conexas de $\mathcal{L} \cap U$, onde $\mathcal{L}$ é uma folha de $\mathcal{F}$.*

O seguinte é uma generalização que podemos encontrar em [3] pag 176, a prova é a mesma.

Corolário 2.4 *(Folheações transversalmente afins em variedades simplesmente conexas). Sejam M uma variedade complexa simplesmente conexa e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão k em M com conjunto singular de codimensão maior ou igual a dois. Então, $\mathcal{F}$ possui uma estrutura transversalmente afim se, e somente se, possui uma integral primeira holomorfa $f : M \to \mathbb{C}$, a qual é uma submersão fora de $sing(\mathcal{F})$.*

Proposição 2.5 *Não existe folheação holomorfa transversalmente afim em $\mathbb{CP}^n$.*

Prova: De fato, $\mathbb{CP}^n$ é simplesmente conexo e, como é compacto, não admite função holomorfa não constante.

Exemplo 2.2 *Seja $\Phi : N \to M$ uma função holomorfa transversal à folheação $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é transversalmente afim, então o mesmo vale para a folheação induzida $\Phi^*\mathcal{F}$. Isto se verifica facilmente tomando-se as submersões locais que definem a estrutura afim para $\mathcal{F}$ e compondo-as como Φ, para definir uma estrutura afim para $\Phi^*\mathcal{F}$.*

Capítulo 3

Folheações holomorfas com singularidades genéricas

Neste capítulo será provado um Teorema de Extensão para uma folheação holomorfa de codimensão arbitraria q em uma variedade complexa M. Essencialmente este teorema afirma que dada $\Lambda \subset M$ uma subvariedade analítica invariante irredutível, sobre determinadas hipóteses das singularidades, existe uma matriz $q \times q$ de 1-formas diferenciais definida em alguma vizinhança fora de $\Lambda \cup Sep(\Lambda)$, que pode ser estendida meromorficamente a uma vizinhança de Λ de forma especial.

Uma folheação holomorfa de codimensão q com singularidades $\mathcal{F}$ sobre uma variedade complexa M de dimensão $n \geq 2$ é definida como um par $(\mathcal{F}_0, sing(\mathcal{F}))$, onde $sing(\mathcal{F}) \subset M$ é um subconjunto analítico de codimensão ≥ 2, e uma folheação holomorfa regular $\mathcal{F}_0$, na variedade aberta $M \setminus sing(\mathcal{F})$. Então, todas as noções de $\mathcal{F}$ são definidas em termos de $\mathcal{F}_0$. Por exemplo, as folhas de $\mathcal{F}$ são definidas como folhas de $\mathcal{F}_0$, e seus grupos de holonomia são definidas da mesma maneira. Podemos assumir que o conjunto singular $sing(\mathcal{F})$ é saturado no sentido que não existe outro par $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_0, sing(\mathcal{F}'))$ com $sing(\mathcal{F}') \subset sing(\mathcal{F})$ e tal que $\mathcal{F}'_0$ coincide com $\mathcal{F}_0$ sobre $M \setminus sing(\mathcal{F})$.

A seguir, lembraremos a definição de folheação holomorfa transversalmente afim.

Definição 3.1 *Uma folheação holomorfa de codimensão q com singularidades $\mathcal{F}$ sobre uma variedade complexa M^n é chamada transversalmente afim, se existe uma familia $\{Y_i : U_i \to \mathbb{C}^q\}_{i \in I}$ de submersões holomorfas, $Y_i : U_i \to \mathbb{C}^q$ definidas em conjuntos abertos $U_i \subset M$, definindo $\mathcal{F}$ e satisfazendo $M \setminus sing(\mathcal{F}) = \cup_{i \in I} U_i$ e com relações afins $Y_i = A_{ij} Y_j + B_{ij}$ para algum $A_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_q(\mathbb{C})$, $B_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^q$ localmente constante em cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.*

3.1 Singularidades genéricas

Neste parágrafo introduziremos o que consideramos como tipos genéricos de uma singularidade para uma folheação de codimensão ≥ 2. Dada uma folheação holomorfa com singularidades $\mathcal{F}$ sobre uma variedade complexa M, o conjunto singular de $\mathcal{F}$ é um subconjunto analítico $\text{sing}(\mathcal{F}) \subset M$ de codimensão ≥ 2, também tendo dimensão dim sing($\mathcal{F}$) $\leq dim(\mathcal{F})$. Em particular, esse pode ter uma componente de dimensão $dim(\mathcal{F})$, tanto como uma componente de dimensão $dim(\mathcal{F}) - 1$. Como para o segundo caso, por interseção com o apropriado disco transversal pequeno, podemos considerar o seguinte modelo genérico de singularidade:

3.1.1 Singularidades isoladas

Definição 3.2 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa unidimensional, definida pelo corpo vetorial holomorfo X, com singularidade isolada no origem $0 \in \mathbb{C}^{q+1}$. A singularidade é chamada Poincaré não ressonante se a envoltória convexa do conjunto de autovalores da parte linear $DX(0)$ não contém a origem, e não existe $\lambda_j = n_1\lambda_1 + \cdots + n_{q+1}\lambda_{q+1}$ para $n_1, \ldots, n_{q+1} \in \mathbb{N}$.*

Pelo Teorema de Linearização de Poincaré, temos que dada alguma vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^{q+1}$ uma singularidade no domínio de Poincaré e sem ressonâncias, de um campo vetorial holomorfo X é analiticamente linearizável como $X = \sum_{j=1}^{q+1} \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$.

Os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_{q+1}$ satisfazendo a seguinte hipótese de não ressonância; se $n_1, \ldots, n_{q+1} \in \mathbb{Z}$, com $\sum_{j=1}^{q+1} n_j\lambda_j = 0$, então $n_1 = n_2 = \cdots = n_{q+1} = 0$.

Na situação acima, defina 1-formas $\omega^1, \cdots, \omega^q$ sobre $U \setminus \Lambda$, fixando $\omega^\nu(X) = 0$ e $\omega^\nu = \sum_{j=1}^{q+1} \alpha_j^\nu \frac{dz_j}{z_j}$, onde $\nu = 1, \cdots, q$ e $\alpha_j^\nu \in \mathbb{C}$, conseguimos o seguinte sistema de equação $\sum_{j=1}^{q+1} \alpha_j^\nu \lambda_j = 0$, $\nu = 1, \ldots, q$ a equação $\sum_{j=1}^{q+1} \lambda_j z_j = 0$ define um hiperplano em $\mathbb{C}^{q+1}$ implica que podemos escolher q vetores linearmente independentes $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_q$, isto é, $\vec{\alpha}_\nu = (\alpha_1^\nu, \cdots, \alpha_q^\nu, \alpha_{q+1}^\nu) \in \mathbb{C}^{q+1}$ tal que $\sum_{j=1}^{q+1} \alpha_j^\nu \lambda_j = 0, \quad \nu = 1, \ldots, q$ e portanto o sistema $\omega^1, \ldots, \omega^q$ tem posto máximo q fora do hiperplano de coordenadas $(z_i = 0)$. Tendo em conta as notações dos ω^i, vamos a provar o seguinte lema.

Lema 3.1 *Seja $f(z)$ uma função holomorfa no conjunto $U \setminus \{z_1 \cdots z_{q+1} = 0\}$, onde U é uma vizinhança conexa da origem em $\mathbb{C}^{q+1}$. Então, $f(z)$ é constante desde que $df \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^q = 0$.*

Prova.
Seja $\omega_i = \sum_{j \geq 1} a_j^i \frac{dz_j}{z_j}$; $1 \leq j \leq q$

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge ... \wedge \omega_q = det(a_i^1, a_i^3, ..., a_i^{q+1}) \frac{dz_1 \wedge dz_3 \wedge ... \wedge dz_{q+1}}{z_1 z_3 ... z_{q+1}}$$

$$+det(a_i^1, a_i^2, a^4 ..., a_i^{q+1}) \frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_4 \wedge ... \wedge dz_{q+1}}{z_1 z_2 z_4 ... z_{q+1}} +$$

$$.... + det(a_i^2, a_i^3, ..., a_i^{q+1}) \frac{dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4 \wedge ... \wedge dz_{q+1}}{z_2 z_3 z_4 ... z_{q+1}}.$$

Escrevemos

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge ... \wedge \omega_q = \alpha_{13...(q+1)} \frac{dz_1 \wedge dz_3 \wedge ... \wedge dz_{q+1}}{z_1 z_3 ... z_{q+1}}$$

$$+\alpha_{124...(q+1)} \frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_4 \wedge ... \wedge dz_{q+1}}{z_1 z_2 z_4 ... z_{q+1}} + ... + \alpha_{23...(q+1)} \frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_4 \wedge ... \wedge dz_{q+1}}{z_2 z_3 ... z_{q+1}}$$

Agora notamos que, dada uma função holomorfa $f(z_1, z_2, ..., z_{q+1})$ em U_0, a equação

$$df \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge ... \wedge \omega_q = \left(\sum_{i=1}^{q+1} \frac{(-1)^{i+1} f_{z_i} \alpha_{12..\widehat{i}..(q+1)}}{z_1 z_2 ... \widehat{z_i} ... z_{q+1}} \right) dz_1 dz_2 ... dz_{q+1}$$

está satisfeita. Portanto, $df \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge ... \wedge \omega_q = 0$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{q+1} \frac{(-1)^{i+1} f_{z_i} \alpha_{12..\widehat{i}..(q+1)}}{z_1 z_2 ... \widehat{z_i} ... z_{q+1}} = 0.$$

Agora, expandindo a série de Laurent $f = \sum_{r_1 r_2 ... r_{q+1}} f_{r_1 r_2 ... r_{q+1}} z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_{q+1}^{r_{q+1}}$ permite-nos ver que a última equação é equivalente a

$$\sum_{r_1, r_2, .., r_{q+1} \in \mathbb{Z}} \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \alpha_{12..\widehat{i}..(q+1)} r_i f_{r_1 r_2 ... r_{q+1}} z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_{q+1}^{r_{q+1}} = 0,$$

o que equivale a

$$(\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \alpha_{12..\widehat{i}..(q+1)} r_i) f_{r_1 r_2 ... r_{q+1}} = 0,$$

$\forall r_1, r_2, .., r_{q+1} \in \mathbb{Z}$. Lembre-se que

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{13...(q+1)} = & det(a_i^1, a_i^3, ..., a_i^{q+1}) \\ \alpha_{124...(q+1)} = & det(a_i^1, a_i^2, a^4 ..., a_i^{q+1}) \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{23...(q+1)} = & det(a_i^2, a_i^3, ..., a_i^{q+1}) \end{array}$$

, e que

$$\sum_{j=1}^{q+1} a_j^{\nu} \lambda_j = 0, \ \nu = 1, \ldots, q$$

Assim, os dois vetores complexos $(\alpha_{13...(q+1)}, \alpha_{124...(q+1)}, ..., \alpha_{23...(q+1)})$ e $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{q+1})$ são colineares, isto é, $\alpha_{12..\widehat{i}..(q+1)} = t\lambda_i$ para algum $t \in \mathbb{C}^*$. Assim $df \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge ... \wedge \omega_q = 0$ se, e somente se, $\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \lambda_i r_i)$ para todo $r_i \in \mathbb{Z}$. Pela hipótese não existe ressonância, a única solução para a última equação é trivial. Portanto, uma função holomorfa $f(x_1, x_2, ..., x_{q+1})$ em U_0 satisfaz $df \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge ... \wedge \omega_q = 0$ se, e somente se, f é constante.

Definição 3.3 *(Singularidade genérica de tipo II.) Uma singularidade $p \in sing(\mathcal{F})$, será chamada singularidade genérica de tipo II se p pertence a uma parte suave do conjunto $sing(\mathcal{F})$, onde:*

1. *Existe um único ramo $sing(\mathcal{F})_p \subset sing(\mathcal{F})$ através de p.*

2. *$dim\ sing(\mathcal{F})_p = dim(\mathcal{F}) - 1$*

3. *Para algum (e portanto para cada) disco transversal $\sum_p$ de dimensão $q + 1$, com $\sum_p \cap sing(\mathcal{F})_p = \sum_p \cap sing(\mathcal{F}) = \{p\}$, a folheação induzida $\mathcal{F}|_{\sum_p}$ apresenta uma singularidade isolada tipo Poincaré não ressonante na origem p.*

3.1.2 Singularidades não-isoladas

Agora vamos nos concentrar nas componentes do conjunto singular que não podem ser reduzidas a singularidades isoladas por seções transversais. Vamos primeiro lembrar algumas noções para uma folheação de codimensão um.

Definição 3.4 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em uma variedade complexa M de dimensão n. Dizemos que $p \in sing(\mathcal{F})$ é um ponto de tipo Kupla, se $\mathcal{F}$ pode ser representada em uma vizinhança de p, por uma 1-forma ω tal que $\omega(p) = 0$, $d\omega(p) \neq 0$.*

Nesse caso, com as notações da definição 3.4, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Se U é suficientemente pequeno, existe um sistema de coordenadas locais $(x, y, z_1, ..., z_{n-2}) \in U$ de M, centrado em p tal que $\mathcal{F}|_U$ é dada por $\alpha(x, y) = 0$, para alguma $1-$forma holomorfa $\alpha = P(x, y)dy - Q(x, y)dx$,*

Observação 3.1 *A 1-forma $\alpha = P(x, y)dy - Q(x, y)dx$, diz que: $sing\,(\mathcal{F}|_U\,(\alpha)) = \{(x, y, z)\,|P(x, y) = Q(x, y) = 0\}$, se 0 é ponto isolado de $(P = Q = 0) \subset \mathbb{C}^2$, logo $sing\,(\mathcal{F}\,(\alpha))$ em 0 é dada por $(x = y = 0)$, é de codimensão dois. Caso contrário, podemos escrever $P = f.P_1$ e $Q = f.Q_1$, onde P_1 e Q_1 não têm fatores em comun e $f(0) = 0$. Neste caso $(f = 0)$ é uma componente de codimensão um de $sing\,(\mathcal{F}\,(\alpha))$.*

A 1-forma α é chamada tipo transversal de $\mathcal{F}$ para p, tem uma singularidade isolada no origem $0 \in \mathbb{C}^2$ e satisfaz $d\alpha(0) \neq 0$. O tipo genérico é definido como segue: Vamos dizer que uma singularidade $p \in sing(\mathcal{F})$ é do tipo Poincaré se é do tipo Kupla e seu tipo transversal corresponde à forma $xdy - \lambda ydx + hot = 0, \lambda \in \mathbb{C} \setminus ((R)_- \cup \mathbb{Q}_+)$. As razões para isso são baseadas na classificação das singularidades de germes de folheações em dimensão dois. Neste caso, a singularidade $\alpha(x, y) = 0$ é analiticamente linearizável, assim existe coordenadas $(x, y, z_1, z_2, ..., z_{n-2})$, tal que $\mathcal{F}$ é dada nestas coordenadas por $xdy - \lambda ydx = 0$. Vamos agora motivar nosso segundo tipo de singularidade genérica para folheação de codimensão $q \geq 2$, através da discussão de um exemplo:

Exemplo 3.1 *Sejam $\mathcal{F}_1, .., \mathcal{F}_q$ folheações holomorfas singulares de codimensão um em uma variedade complexa M de dimensão $q + 1$. Suponha que as folheações $\mathcal{F}_j$ são transversais fora da união dos conjuntos singulares e seu conjunto de pontos de tangência. Então, podemos definir da maneira natural a folheação interseção $\mathcal{F} = \cap_{j=1}^{q}\mathcal{F}_j$ quando as folhas são obtidos como as componentes conexas da interseção das folhas de $\mathcal{F}_1, .., \mathcal{F}_q$ através de pontos de M, e tem conjunto singular $sing(\mathcal{F}) = \cup_{j=1}^{q} sing(\mathcal{F}_j) \cup T_2$. Suponha que $\mathcal{F}_j$ tem apenas singularidades de tipo Poincaré, tal como é definida acima. Então, dado qualquer ponto $p \in sing(\mathcal{F}_j) \setminus \cup_{i \neq j} sing(\mathcal{F}_i)$, existe uma carta local $(x, y, z_1, ..., z_{n-2}) \in U$ de M, centrada em p, tal que $\mathcal{F}_j|_U$ é dada por*

$$xdy - \lambda ydx = 0 \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \mathbb{Q}_+)\,,$$

e para cada $i \neq j$, $\mathcal{F}_i|_U$ é regular dada por $dz_{k_i} = 0$ para algum $k_i \in \{1, ..., n-2\}$.

Definição 3.5 *(Singularidades genéricas do tipo I.) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão q sobre M^n. Uma singularidade $p \in sing(\mathcal{F})$ é uma singularidade genérica do tipo I, se p pertence a uma parte lisa do conjunto $sing(\mathcal{F})$, onde:*

1. *Existe um único ramo $sing(\mathcal{F})_p \subset sing(\mathcal{F})$ através de p.*

2. *dim $sing(\mathcal{F})_p$=dim$(\mathcal{F})$*

3. *Existe uma carta local $(x, y, z_1, ..., z_{n-2}) \in U$ de M, centrada em p, tal que $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ é dada por*

$$xdy - \lambda ydx = 0, \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \mathbb{Q}_+) \ \ e \ \ dz_j = 0, j = 1, ..., q-1.$$

Portanto, em uma vizinhança de p, a folheação $\mathcal{F}$ tem uma estrutura da interseção de uma folheação linear singular $xdy - \lambda ydx = 0$ sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ e $(q-1)$ folheações triviais regulares.

3.2 Extensão de estruturas transversais afins com pólos

Consideraremos uma folheação $\mathcal{F}$ definida em uma superfície complexa M que possui curva analítica invariante e não singular Λ. Suponhamos que $\mathcal{F}$ pode ser definida em M por $1-$forma meromorfa Ω (fora de$(\Omega)_\infty$).

Lema 3.2 *Lema de Extensão . Na situação acima, suponha que:*

1. *Para toda singularidade $p \in \Lambda \cap sing(\mathcal{F})$, existe uma carta holomorfa $((x, y), U)$ tal que $p \in U$, $x(p) = y(p) = 0$, $\Lambda \cap U = \{y = 0\}$ e $\mathcal{F}$ é dada por $xdy - \lambda ydx = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{Q}_+$.*

2. *Uma das singularidades, digamos $p_0 \in \Lambda \cap sing(\mathcal{F})$, é não ressonante (o que significa que temos $\lambda \notin \mathbb{Q}$ em 1).*

3. *Existem uma vizinhança V de Λ e uma $1-$ forma meromorfa η definida em $V \setminus (\Lambda \cup Sep(\Lambda))$ satisfazendo:*

   - *η é meromorfa e fechada*
   - *$d\Omega = \eta \wedge \Omega$*
   - *$(\eta)_\infty \supset (\Omega)_\infty$. Além disto, para cada componente L de Ω_∞ então η tem um polo de ordem 1 ao longo de L e $Res_L \eta = -$ordem do polo de Ω ao longo de L.*

   Então, η se estende meromorficamente a uma vizinhança de Λ, como uma derivada logarítmica adaptada a Ω ao longo de Λ.

Nesta seção estendemos a definição de derivada logarítmica adaptada a Ω, para uma folheação de codimensão arbitrária em uma variedade complexa e estendemos o Lema 3.2, cuja definição e prova do Lema 3.2, encontra-se em [3]
Comecemos considerando a seguinte situação:

1. $\mathcal{F}$ é uma folheação holomorfa singular de codimensão q sobre M.

2. $\Lambda \subset M$ é uma subvariedade invariante irredutível analítica de codimensão q (isto é, $\Lambda \setminus sing(\mathcal{F})$ é uma folha de $\mathcal{F}$.)

3. Existem subvariedades analíticas de codimensão um $S_1, S_2, ..., S_q \subset M$, tais que Λ é uma componente irredutível de $\cap_{j=1}^{q} S_j$ e S_j é folheado por $\mathcal{F}$, $j = 1, ..., q$.

Sobre estas hipóteses fazemos a seguinte definição :

Definição 3.6 *Seja $\{\Omega_1, \Omega_2, ...\Omega_q\}$ um sistema integrável de 1-formas definindo $\mathcal{F}$. Uma matriz $q \times q$ avaliada meromorfa de 1-formas η definida em uma vizinhança de Λ é chamada uma derivada logarítmica parcialmente fechada adaptada a Ω ao longo de Λ se:*

1. *$d\Omega = \eta \wedge \Omega$ e η é parcialmente fechada ($d\eta = \eta \wedge \eta$), meromorfa com polos simples.*

2. *$(\eta)_\infty = \cup_{j=1}^{q} S_j$, a união de subconjuntos analíticas irredutíveis de codimensão um $S_j \subset V$ em uma vizinhança V de Λ.*

3. *Dado um ponto regular $p \in \Lambda \backslash sing(\mathcal{F})$ existe uma carta local $(y_1, ..., y_q, z_1, ..., z_{n-q}) \in U$ de M, centrada em p, tal que:*

$$\begin{array}{rcl} U \cap S_j & = & \{y_j = 0\}, \quad j = 1, ..., q \\ \Omega & = & G dY, \qquad e \\ \eta & = & dGG^{-1} + \sum_{j=1}^{q} A_j \frac{dy_j}{y_j}, \quad onde \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}, \end{array}$$

$G : U \to GL_q(\mathbb{C})$ é holomorfa e A_j é uma matriz $q \times q$ constante.

A matriz A_j é chamado a matriz resíduo de η com respeito a S_j.

3.2.1 Lema de Extensão

A seguir, consideramos o problema de estender uma forma η de estrutura transversal afim de $\mathcal{F}$, em uma hipersuperfície analítica invariante. A existência dessa extensão, como derivada logarítmica parcialmente fechada adaptada é, como veremos a seguir, garantido pelo seguinte resultado:

Teorema 3.2 *(Teorema de Extensão) Sejam $\mathcal{F}$ e Λ como acima. Suponha que:*

1. *$sing(\mathcal{F}) \cap \Lambda$ é não vazio e consiste de singularidades genéricas do tipo I e tipo II, e singularidades onde dim $sing(\mathcal{F}) \leq dim(\mathcal{F}) - 2$.*

2. *Existe uma 1-forma diferencial η definida em alguma vizinhança $V \backslash (\Lambda \cup Sep(\Lambda))$, que define uma estrutura transversal afim de $\mathcal{F}$ neste conjunto, no sentido da proposição 2.3.*

Então, η se estende meromorficamente a uma vizinhança de Λ como uma forma adaptada (no sentido da definição 3.6) de Ω ao longo de Λ.

Vamos estender η a Λ através das singularidades de $\mathcal{F}$ em Λ. De acordo com o clássico Teorema de extensão de Hartogs, isto implica a extensão a Λ. Escolhemos $p \in sing\,(\mathcal{F}) \cap \Lambda$ e um sistema local de coordenadas $(x, y, z_1, ..., z_{n-2}) \in U$, centrado em p como na definição .

Lema 3.3 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão q com singularidades, definida em um polidisco aberto $U \subset \mathbb{C}^{q+n}$, com singularidades genéricas do tipo I ou II na origem $0 \in sing(\mathcal{F}) \subset \mathcal{U}$. Suponha que F é transversalmente afim em $U \setminus \Lambda$, onde $\Lambda \subset U$ é uma união finita de hipersuperfícies invariantes irredutíveis, cada uma contendo a origem.*

Então, se estende meromorficamente a uma vizinhança de Λ como uma derivada logarítmica parcialmente fechada adaptada a Ω ao longo Λ.

Prova: A prova vai ser dividida em dois casos, singularidade de tipo I e de tipo II.

Caso 1 Suponhamos que $\mathcal{F}$ tem codimensão $q = 2$ e o ambiente tem dimensão $q+1 = 3$. Suponhamos também que a singularidade é isolada, é decir, de tipo Poincaré não-ressonante I. Seja $X = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j x_j (\frac{\partial}{\partial x_j})$ um campo vetorial holomorfo definindo $\mathcal{F}$ em coordenadas apropriadas $(x_1, x_2, x_3) \in U'$, em uma vizinhança conexa $0 \in U' \subset U$ de $0 \in \mathbb{C}^3$, com $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Dados os números complexos a_1, a_2, a_3 que definem uma 1-forma fechada $\omega = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{dx_k}{x_k}$. Então, $\omega(X) = 0$ se, e somente se, $\sum_{k=1}^{3} a_k \lambda_k = 0$. Assim, podemos escolher 1-formas ω_1, ω_2 dada por $\omega_j = \sum_{j=1}^{3} a_k^j \frac{dx_k}{x_k}, a_k^j \in \mathbb{C}$, tais que ω_1 e ω_2 são linearmente independentes no complemento de $\cup_{j=1}^{3}(x_j = 0)$ e $\omega_j(X) = 0, j = 1, 2$.
Uma vez que fixadas tais 1-formas, a folheação $\mathcal{F}$ é definida pelo sistema integrável meromorfo de 1-formas $\{\omega_1, \omega_2\}$ em U. Observe que o conjunto polar de ω_j em U' consiste em coordenadas os hiperplanos $x_i = 0 \subset U', i = 1, 2, 3$. Seja Ω_0 ser a matriz meromorfa 2×1 dada por $\{\omega_1, \omega_2\}$.

Afirmação 3.1 *Seja η_0 uma matriz holomorfa 2×2 de 1-formas definida em $U' \setminus \cup_{i=1}^{3} \{x_i = 0\}$ tal que $d\Omega_0 = \eta_0 \wedge \Omega_0$, $d\eta_0 = \eta_0 \wedge \eta_0$. Então:*

1. *η_0 é fechada, $d\eta_0 = 0$.*
2. *A matriz de 1-forma η_0 estende-se a uma matriz meromorfa em U', tendo um divisor polar de ordem um em U'.*
3. *A extensão de η_0 é adaptada a Ω_0 ao longo de Λ.*

Prova da afirmação: Desde que cada ω_j é fechada a matriz de 1-forma Ω_0 é fechada. De $d\Omega_0 = \eta_0 \wedge \Omega_0$, temos $\eta_0 \wedge \Omega_0 = 0$. Agora observamos que existem matrizes holomorfas 2×2 M_1, M_2 definidas em $U' \setminus \{x_1 x_2 x_3 = 0\}$, tal que $\eta_0 = M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2$, onde a multiplicação da matriz pela 1-forma é a multiplicação tipo escalar padrão. Com efeito, é suficiente completar ω_1, ω_2 em uma base do espaço de 1-formas holomorfas e expressar η_0 nesta base. Em seguida, a condição $\eta_0 \wedge \Omega_0$ significa que os coeficientes de η_0 nos outros elementos de base são todos identicamente zero.

Para qualquer matriz holomorfa 2×2, e a matriz 1-forma 2×1 Ω temos a fórmula facilmente verificada para a derivada exterior:

$$d(M\Omega) = dM \wedge \Omega + M d\Omega.$$

Temos, portanto

$$d\eta_0 = dM_1 \wedge \omega_1 + dM_2 \wedge \omega_2.$$

Também de fácil verificação, temos

$$\eta_0 \wedge \eta_0 = [M_1, M_2]\omega_1 \wedge \omega_2,$$

onde $[,]$ denota a matriz colchete de Lie. Assim, obtém-se

$$dM_1 \wedge \omega_1 + dM_2 \wedge \omega_2 = [M_1, M_2]\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Tomando o produto exterior com ω_2 na equação acima, obtém-se

$$dM_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

Seja $M_1 = \begin{pmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 \end{pmatrix}$, então

$$\begin{array}{c} dm_{11}^1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \\ dm_{12}^1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \\ dm_{21}^1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \\ dm_{22}^1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \end{array}$$

Assim, M_1 é uma integral primeira meromorfa para a folheação definida pelo sistema $\omega_1 \wedge \omega_2$ em $\widetilde{U} := U' \setminus \{x_1x_2x_3 = 0\}$. Essa folheação é exatamente a restrição de $\mathcal{F}$ a esse conjunto aberto. Desde que $\mathcal{F}$ é definida pelo campo vetorial X em $\widetilde{U}$ e este campo vetorial é linear sem ressonância, segue-se do Lema 3.1 que M_1 é constante em $\widetilde{U}$. Da mesma forma, podemos concluir que M_2 é constante. Isso implica o resultado de extensão e os itens (1) e (2) da Afirmação 3.1.

Neste caso, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$, onde

$$\begin{array}{c} \Lambda_1 = \{x_3 = 0\} \cap \{x_2 = 0\} \\ \Lambda_2 = \{x_1 = 0\} \cap \{x_3 = 0\} \\ \Lambda_1 = \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\} \end{array}$$

Seja $p \in \Lambda_2 \backslash sing\,(\mathcal{F})$, existe uma carta local $(x_1, x_2, x_3) \in V$, tal que $\Omega_0 = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_3 \end{pmatrix}$, assim, $\eta_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{dx_1}{x_1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{dx_3}{x_3}$, do mesmo modo para $p \in \Lambda_1 \setminus sing\,(\mathcal{F})$ e $p \in \Lambda_3 \setminus sing\,(\mathcal{F})$, assim, verificamos o item (3) da Afirmação 3.1.

Voltando à prova do Lema 3.3, sejam as formas originais Ω e η, temos $\Omega = G\Omega_0$ para alguma matriz holomorfa $G : \widetilde{U} \to GL_q(\mathbb{C})$. Assim $\eta_0 = \eta - dG.G^{-1}$. Então, pela afirmação 3.1 concluímos que η se estende a U' como uma 1-forma meromorfa fechada com polos simples e divisor polar consistindo de planos coordenados. Portanto, a mesma conclusão da afirmação acima vale para η e provamos o lema para o caso 1, quando $\mathcal{F}$ tem codimensão $q = 2$ e o ambiente tem dimensão $q + 1 = 3$.

Caso 2 No caso a singularidade é genérica de tipo II, pela definição 3.5 tomamos $\omega_1 = xdy - \lambda ydx$, $\omega_2 = dz_1, \cdots, \omega_q = dz_{q-1}$, onde $\widetilde{\omega_1} = \frac{\omega_1}{xy}, \omega_2, \cdots, \omega_q$ são fechados, e continuamos a mesma ideia como no caso da singularidade genérica do tipo I, tomamos Ω_0 a matriz meromorfa $q \times 1$ dada por $\{\widetilde{\omega_1}, \omega_2, ..., \omega_q\}$, sejam as formas originais Ω e η, temos $\Omega = G \begin{pmatrix} \widetilde{\omega_1} \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_q \end{pmatrix}$ onde $G = \begin{pmatrix} xy & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ e $\eta_0 = \eta - \frac{dG}{G} = \eta_0 - \begin{pmatrix} \frac{d(xy)}{xy} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, usando a afirmação 3.1 se cumpre o Lema 3.3.

Prova do Teorema 3.2 A prova segue a mesma argumentação que a prova do Lema 3.2 em [6]. De fato, o Lema 3.3 , implica que η se estende meromorficamente $\Lambda \cup Sep\,(\Lambda)$. Por construção esta extensão é adaptada para η ao longo de Λ.
Considerando tudo o que fizemos anteriormente, iremos a seguir caracterizar η em $\mathbb{CP}^3$.

3.2.2 Caracterização de η no ponto singular

Caso I: Singularidade genérica tipo I.

Dada η construída e estendida em $\mathbb{CP}^3$, $p_0 \in sing(\mathcal{F})$ singularidade isolada dada em uma carta local pelo campo de vetores $X(z_1, z_2, z_3) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \lambda_3 z_3)$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são linearmente independentes em $\mathbb{Q}$, vejamos qual é a forma de η.

Na situação acima, descrita na Definição 3.2, $X = \sum_{j=1}^{q+1} \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$, com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_{q+1}$ satisfazendo a hipótese de não ressonância, foram definidas 1-formas $\omega^1, \cdots, \omega^q$ sobre $U \setminus \Lambda$ fixando $\omega^\nu(X) = 0$ e $\omega^\nu = \sum_{j=1}^{q+1} a_j^\nu \frac{dz_j}{z_j}$, onde $\nu = 1, \ldots, q$ e $a_j^\nu \in \mathbb{C}$.

Daqui conseguimos o seguinte sistema de equações $\sum_{j=1}^{q+1} a_j^\nu \lambda_j = 0$, $\nu \in \{1, \ldots, q\}$, a equação $\sum_{j=1}^{q+1} \lambda_j z_j = 0$ define um hiperplano em $\mathbb{C}^{q+1}$ e implica que podemos escolher q vetores linearmente independentes $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_q$, isto é, $\vec{\alpha}_\nu = (a_1^\nu, \cdots, a_q^\nu, a_{q+1}^\nu) \in \mathbb{C}^{q+1}$ tal que $\sum_{j=1}^{q+1} a_j^\nu \lambda_j = 0$, $\nu \in \{1, \ldots, q\}$ e, portanto, o sistema $\omega^1, \ldots, \omega^q$ tem posto máximo q fora do hiperplano de coordenadas.

Para uma carta local de $\mathbb{CP}^3$, temos ω_1 e ω_2, e formamos um sistema de 1-formas Ω_0 associadas ao campo X.

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 \frac{dx_1}{x_1} + a_2^1 \frac{dx_2}{x_2} + a_3^1 \frac{dx_3}{x_3} \\ a_1^2 \frac{dx_1}{x_1} + a_2^2 \frac{dx_2}{x_2} + a_3^2 \frac{dx_3}{x_3} \end{pmatrix}$$

Seja $G : \tilde{U} \to GL_2(\mathbb{C})$ holomorfa tal que $G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$, $det(G) = g_1 g_4 - g_2 g_3 \neq 0$ em U.

$$\Omega = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1\omega_1 + g_2\omega_2 \\ g_3\omega_1 + g_4\omega_2 \end{pmatrix}, \text{ então } d\Omega = \begin{pmatrix} dg_1 \wedge \omega_1 + dg_2 \wedge \omega_2 \\ dg_3 \wedge \omega_1 + dg_4 \wedge \omega_2 \end{pmatrix}$$

Por outro lado,

$$\eta \wedge \Omega = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_3 & \eta_4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} g_1\omega_1 + g_2\omega_2 \\ g_3\omega_1 + g_4\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1\eta_1 \wedge \omega_1 + g_2\eta_1 \wedge \omega_2 + g_3\eta_2 \wedge \omega_1 + g_4\eta_2 \wedge \omega_2 \\ g_1\eta_3 \wedge \omega_1 + g_2\eta_3 \wedge \omega_2 + g_3\eta_4 \wedge \omega_1 + g_4\eta_4 \wedge \omega_2 \end{pmatrix}$$

Como

$$d\Omega = \eta \wedge \Omega$$

Temos

$$dg_1 \wedge \omega_1 + dg_2 \wedge \omega_2 = g_1\eta_1 \wedge \omega_1 + g_2\eta_1 \wedge \omega_2 + g_3\eta_2 \wedge \omega_1 + g_4\eta_2 \wedge \omega_2 \tag{3.1}$$

$$dg_3 \wedge \omega_1 + dg_4 \wedge \omega_2 = g_1\eta_3 \wedge \omega_1 + g_2\eta_3 \wedge \omega_2 + g_3\eta_4 \wedge \omega_1 + g_4\eta_4 \wedge \omega_2 \tag{3.2}$$

Multiplicando (3.1) por $g_3\omega_1$ e somando com (3.1) multiplicado por $g_4\omega_2$ obtemos :

$$[g_3(dg_2 - g_2\eta_1) - g_4(dg_1 - g_1\eta_1)] \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 = 0$$

$$\eta_1 = \frac{-g_3dg_2 + g_4dg_1}{det(G)} + f_1\omega_1 + f_2\omega_2$$

Como $\eta_\infty = \cup_{i=1}^{3} \{x_i = 0\}$, temos que f_1, f_2 são holomorfas. Assim, substituindo η_1 em (3.1) temos

$$\eta_2 = \frac{-g_2dg_1 + g_1dg_2}{det(G)} + f_3\omega_1 + f_4\omega_2$$

de forma semelhante (3.2) por $g_1\omega_2$ e somando com (3.1) multiplicado por $g_2\omega_2$ obtemos :

$$\eta_4 = \frac{-g_2dg_3 + g_1dg_4}{det(G)} + f_5\omega_1 + f_6\omega_2$$

$$\eta_3 = \frac{g_4dg_3 - g_3dg_4}{det(G)} + f_7\omega_1 + f_8\omega_2$$

Assim, temos:

$$\eta = \frac{1}{detG} \begin{pmatrix} g_4dg_1 - g_3dg_2 & g_1dg_2 - g_2dg_1 \\ g_4dg_3 - g_3dg_4 & g_1dg_4 - g_2dg_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1\omega_1 & f_3\omega_1 \\ f_7\omega_1 & f_5\omega_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_2\omega_2 & f_4\omega_2 \\ f_8\omega_2 & f_6\omega_2 \end{pmatrix}$$

$$\eta = dG \cdot G + \begin{pmatrix} f_1 & f_3 \\ f_7 & f_5 \end{pmatrix} \omega_1 + \begin{pmatrix} f_2 & f_4 \\ f_8 & f_6 \end{pmatrix} \omega_2 \tag{3.3}$$

derivando (3.3)

$$d\eta = \begin{pmatrix} (d\eta)_{11} & (d\eta)_{12} \\ (d\eta)_{21} & (d\eta)_{22} \end{pmatrix}$$

onde

$$(d\eta)_{11} = \frac{g_1g_3dg_4dg_2 + g_2g_4dg_3dg_1 - g_1g_4dg_3dg_2 - g_2g_3dg_4dg_1}{(g_1g_4 - g_2g_3)^2} + df_1\omega_1 + df_2\omega_2$$

$$(d\eta)_{12} = \frac{-g_1g_4dg_1dg_2 - g_1^2dg_2dg_4 + g_1g_2dg_1dg_4 - g_2g_3dg_1dg_2 + g_1g_2dg_2dg_3 - g_2^2dg_3dg_1}{(g_1g_4 - g_2g_3)^2}$$
$$+df_3\omega_1 + df_4\omega_2$$

$$(d\eta)_{21} = \frac{-g_4^2dg_1dg_3 + g_3g_4dg_1dg_4 - g_1g - 4dg_3dg_4 + g_3g_4dg_2dg_3 - g_3^2dg_2dg_4 - g_2g_3dg_3dg_4}{(g_1g_4 - g_2g_3)^2}$$
$$+df_7\omega_1 + df_8\omega_2$$

$$(d\eta)_{22} = \frac{g_4g_2dg_1dg_3 + g_1g_3dg_2dg_4 - g_1g_4dg_2dg_3 - g_2g_3dg_1dg_4}{(g_1g_4 - g_2g_3)^2} + df_5\omega_1 + df_6\omega_2$$

$$\eta \wedge \eta = \begin{pmatrix} (\eta \wedge \eta)_{11} & (\eta \wedge \eta)_{12} \\ (\eta \wedge \eta)_{21} & (\eta \wedge \eta)_{22} \end{pmatrix}$$

de (3.3) temos

$$(\eta \wedge \eta)_{11} = \frac{g_1g_4dg_2dg_3 - g_1g_3dg_2dg_4 - g_2g_4dg_1dg_3 + g_2g_3dg_1dg_4}{(g_1g_4 - g_2g_3)^2} + \frac{f_7\left(g_1dg_2 - g_2dg_1\right)\omega_1}{(g_1g_4 - g_2g_3)}$$
$$+\frac{f_8\left(g_1dg_2 - g_2dg_1\right)\omega_2}{(g_1g_4 - g_2g_3)} - \frac{f_3\left(g_4dg_3 - g_3dg_4\right)\omega_1}{(g_1g_4 - g_2g_3)} - \frac{f_4\left(g_4dg_3 - g_3dg_4\right)\omega_2}{(g_1g_4 - g_2g_3)} + (f_3f_8 - f_4f_7)\,\omega_1 \wedge \omega_2$$

$$(\eta \wedge \eta)_{12} = \frac{g_4g_1dg_1dg_2 + g_3g_2dg_2dg_1}{(g_1g_4 - g_2g_3)^2} + \frac{g_1^2dg_2dg_4 - g_1g_2dg_2dg_3 - g_2g_1dg_1dg_4 + g_2^2dg_1dg_3}{(g_1g_4 - g_2g_3)^2}$$
$$-\frac{f_3\omega_1\left(g_4dg_1 - g_3dg_2\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} - \frac{f_4\omega_4\left(g_4dg_1 - g_3dg_2\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} + \frac{f_1\omega_1\left(g_1dg_2 - g_2dg_1\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} + \frac{f_2\omega_2\left(g_1dg_2 - g_2dg_1\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)}$$
$$-\frac{f_5\omega_1\left(g_1dg_2 - g_2dg_1\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} - \frac{f_6\omega_2\left(g_1dg_2 - g_2dg_1\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} + \frac{f_3\omega_1\left(g_1dg_4 - g_2dg_3\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} + \frac{f_4\omega_2\left(g_1dg_4 - g_2dg_3\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)}$$
$$+\left(f_1f_4 - f_2f_3 + f_3f_6 - f_4f_5\right)\omega_1 \wedge \omega_2$$

$$(\eta \wedge \eta)_{21} = \frac{g_4^2dg_3dg_1 - g_4g_3dg_3dg_2 - g_3g_4dg_1dg_4 + g_3^2dg_4dg_2}{(g_1g_4 - g_2g_3)^2} + \frac{g_1g_4dg_4dg_3 + g_2g_3dg_3dg_4}{(g_1g_4 - g_2g_3)^2}$$
$$-\frac{f_1\omega_1\left(g_4dg_3 - g_3dg_4\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} - \frac{f_2\omega_2\left(g_4dg_3 - g_3dg_4\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} + \frac{f_7\omega_2\left(g_4dg_1 - g_3dg_2\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} + \frac{f_8\omega_2\left(g_4dg_1 - g_3dg_2\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)}$$
$$-\frac{f_7\omega_1\left(g_1dg_4 - g_2dg_3\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} - \frac{f_8\omega_2\left(g_1dg_4 - g_2dg_3\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} + \frac{f_5\omega_1\left(g_4dg_3 - g_3dg_4\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)} + \frac{f_6\omega_2\left(g_4dg_3 - g_3dg_4\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)}$$
$$+\left(f_7f_2 - f_1f_8 + f_5f_8 - f_6f_7\right)\omega_1 \wedge \omega_2$$

$$(\eta \wedge \eta)_{22} = \frac{g_4g_1dg_3dg_2 - g_4g_2dg_3dg_1 - g_3g_1dg_4dg_2 + g_3g_2dg_4dg_1}{(g_1g_4 - g_2g_3)^2} - \frac{f_3\omega_1\left(g_4dg_3 - g_3dg_4\right)}{(g_1g_4 - g_2g_3)}$$

$$-\frac{f_4\omega_2\left(g_4dg_3-g_3dg_4\right)}{\left(g_1g_4-g_2g_3\right)}+\frac{f_7\omega_1\left(g_1dg_2-g_2dg_1\right)}{\left(g_1g_4-g_2g_3\right)}+\frac{f_8\omega_2\left(g_1dg_2-g_2dg_1\right)}{\left(g_1g_4-g_2g_3\right)}+\left(f_7f_4-f_8f_3\right)\omega_1\wedge\omega_2$$

Seja, em particular,

$$G=\begin{pmatrix} g_1 & 0\\ 0 & g_4\end{pmatrix}$$

Então,

- $d\eta=\begin{pmatrix} df_1\omega_1+df_2\omega_2 & df_3\omega_1+df_4\omega_2\\ df_7\omega_1+df_8\omega_2 & df_5\omega_1+df_6\omega_2\end{pmatrix}$
- $\eta\wedge\eta=\begin{pmatrix} 0 & \left(f_3\omega_1+f_4\omega_2\right)\left(\frac{-dg_1}{g_1}+\frac{dg_4}{g_4}\right)\\ \left(f_7\omega_1+f_8\omega_2\right)\left(\frac{-dg_4}{g_4}+\frac{dg_1}{g_1}\right) & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}$

onde

$$\beta_1=(f_3f_8-f_4f_7)\omega_1\wedge\omega_2;$$

$$\beta_2=(f_1f_4+f_3f_6-f_2f_3-f_4f_5)\omega_1\wedge\omega_2;$$

$$\beta_3=(f_2f_7+f_8f_5-f_1f_8-f_7f_6)\omega_1\wedge\omega_2;$$

$$\beta_4=(f_7f_4-f_3f_8)\omega_1\wedge\omega_2.$$

Como

$$d\eta=\eta\wedge\eta,$$

temos

1. $df_1\omega_1+df_2\omega_2=(f_3f_8-f_4f_7)\omega_1\wedge\omega_2$, multiplicando por ω_1 temos $df_2\wedge\omega_2\wedge\omega_1=0$, pelo Lema 3.1, f_2 é constante, multiplicando por ω_2 temos $df_1\wedge\omega_1\wedge\omega_2=0$, f_1 é constante.
2. $df_5\omega_1+df_6\omega_2=(f_7f_4-f_3f_8)\omega_1\wedge\omega_2$ tem-se f_5 e f_6 constantes.
3. $df_3\omega_1+df_4\omega_2=\left(f_3\omega_1+f_4\omega_2\right)\left(\frac{-dg_1}{g_1}+\frac{dg_4}{g_4}\right)+\left(f_1f_4+f_3f_6-f_2f_3-f_4f_5\right)\wedge\omega_1\wedge\omega_2$, multiplicando por ω_1,

$$\left(df_4-f_4\left(\frac{dg_1}{g_1}-\frac{dg_4}{g_4}\right)\right)\wedge\omega_2\wedge\omega_1=0,$$

$$\left(df_4-f_4.\frac{g_4}{g_1}d\left(\frac{g_1}{g_4}\right)\right)\wedge\omega_2\wedge\omega_1=0,$$

multiplicando por $\frac{g_1}{g_4}$ *obtemos*, $\left(\frac{g_1}{g_4}df_4-f_4d\left(\frac{g_1}{g_4}\right)\right)\wedge\omega_2\wedge\omega_1=0,$

$$\frac{\frac{g_1}{g_4}df_4-f_4d\left(\frac{g_1}{g_4}\right)}{\left(\frac{g_1}{g_4}\right)^2}\wedge\omega_2\wedge\omega_1=0\ \ onde\ \ \frac{g_1}{g_4}\neq 0,$$

$$d\left(\frac{f_4}{\frac{g_1}{g_4}}\right)\wedge\omega_1\wedge\omega_2=0,$$

então pelo Lema 3.1, $f_4=k_4\frac{g_1}{g_4}$ e multiplicando ω_2 temos $f_3=k_3\frac{g_1}{g_4}$.

4. $df_7\omega_1 + df_8\omega_2 = (f_7\omega_1 + f_8\omega_2)\left(\dfrac{-dg_4}{g_4} + \dfrac{dg_1}{g_1}\right) + (f_2f_7 + f_8f_5 - f_1f_8 - f_7f_6)\omega_1 \wedge \omega_2,$

multiplicando por ω_2

$$\left(df_7 - f_7\left(\frac{dg_4}{g_4} - \frac{dg_1}{g_1}\right)\right) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

$$\left(df_7 - f_7.\frac{g_1}{g_4}d\left(\frac{g_4}{g_1}\right)\right) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

multiplicando por $\dfrac{g_4}{g_1}$ *obtemos* $\left(\dfrac{g_4}{g_1}df_7 - f_7d\left(\dfrac{g_4}{g_1}\right)\right) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$ então pelo Lema

$$\frac{\frac{g_4}{g_1}df_7 - f_7d\left(\frac{g_4}{g_1}\right)}{\left(\frac{g_4}{g_1}\right)^2} \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 = 0 \ \ onde \ \ \frac{g_4}{g_1} \neq 0,$$

$$d\left(\frac{f_7}{\frac{g_4}{g_1}}\right) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

3.1, $f_7 = k_7\dfrac{g_4}{g_1}$ e multiplicando ω_1 temos $f_8 = k_8\dfrac{g_4}{g_1}$.

Assim, obtemos o seguinte corolário

Corolário 3.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão dois, η construída e estendida em $\mathbb{CP}^3$ e $p_0 \in sing(\mathcal{F})$ singularidade isolada de tipo I, dada em uma carta local pelo campo de vetores $X(z_1, z_2, z_3) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \lambda_3 z_3)$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são linearmente independentes em $\mathbb{Q}$. Então, concluímos que η tem a seguinte expressão*

$$\eta = dG \cdot G + \begin{pmatrix} k_1 & k_3\frac{g_1}{g_4} \\ k_7\frac{g_4}{g_1} & k_5 \end{pmatrix}\omega_1 + \begin{pmatrix} k_2 & k_4\frac{g_1}{g_4} \\ k_8\frac{g_4}{g_1} & k_6 \end{pmatrix}\omega_2 \tag{3.4}$$

onde k_i é constante.

Observação 3.2 *Seja $A_1 = \begin{pmatrix} k_1 & k_3\frac{g_1}{g_4} \\ k_7\frac{g_4}{g_1} & k_5 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} k_2 & k_4\frac{g_1}{g_4} \\ k_8\frac{g_4}{g_1} & k_6 \end{pmatrix}$, então*

$$\eta = dG \cdot G + A_1\omega_1 + A_2\omega_2$$

onde traçoA_1 = constante e traçoA_2 = constante.

Observação 3.3 *A mesma ideia tem-se para $X(z_1, z_2, z_3) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \lambda_3 z_3)$, onde $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \notin \mathbb{R}$. Os λ_i satisfazem a hipótese de não ressonância (pois se existem $n_i \in \mathbb{Z}$ tais que $n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + n_3\lambda_3 = 0$ tem-se, $n_1 = -n_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - n_3\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$)*

Corolário 3.2 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão (n-1) em $\mathbb{CP}^n$, sejam η construída e estendida em $\mathbb{CP}^n$, $p_0 \in sing(\mathcal{F})$ singularidade isolada de tipo I, dada em uma carta local pelo campo de vetores $X(z_1, ..., z_n) = (\lambda_1 z_1, ..., \lambda_n z_n)$ tal que $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \notin \mathbb{R}$, sejam $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$ as formas fechadas que definem a folheação. Então, concluímos que η tem a seguinte expressão*

$$\eta = \frac{dG}{G} + \begin{pmatrix} k^1_{11} & k^1_{12}\frac{g_1}{g_2} & \cdots & k^1_{1(n-1)}\frac{g_1}{g_{n-1}} \\ k^1_{21}\frac{g_2}{g_1} & k^1_{22} & \cdots & k^1_{2(n-1)}\frac{g_2}{g_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k^1_{(n-1)1}\frac{g_{n-1}}{g_1} & k^1_{(n-1)2}\frac{g_{n-1}}{g_2} & \cdots & k^1_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}\omega_1 +$$

$$
... + \begin{pmatrix} k_{11}^{k} & k_{12}^{k}\frac{g_1}{g_2} & \cdots & k_{1(n-1)}^{k}\frac{g_1}{g_{n-1}} \\ k_{21}^{k}\frac{g_2}{g_1} & k_{22}^{k} & \cdots & k_{2(n-1)}^{k}\frac{g_2}{g_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n-1)1}^{k}\frac{g_{n-1}}{g_1} & k_{(n-1)2}^{k}\frac{g_{n-1}}{g_2} & \cdots & k_{(n-1)(n-1)}^{k} \end{pmatrix} \omega_k +
$$

$$
... + \begin{pmatrix} k_{11}^{n-1} & k_{12}^{n-1}\frac{g_1}{g_2} & \cdots & k_{1(n-1)}^{n-1}\frac{g_1}{g_{n-1}} \\ k_{21}^{n-1}\frac{g_2}{g_1} & k_{22}^{n-1} & \cdots & k_{2(n-1)}^{n-1}\frac{g_2}{g_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n-1)1}^{n-1}\frac{g_{n-1}}{g_1} & k_{(n-1)2}^{n-1}\frac{g_{n-1}}{g_2} & \cdots & k_{(n-1)(n-1)}^{n-1} \end{pmatrix} \omega_{(n-1)}
$$

Prova: Seja $\Omega = G\Omega_0$, onde $G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$, em seguida, fazendo cálculos com a mesma ideia anterior tem-se η.

Seja $A_k = \begin{pmatrix} k_{11}^{k} & k_{12}^{k}\frac{g_1}{g_2} & \cdots & k_{1(n-1)}^{k}\frac{g_1}{g_{n-1}} \\ k_{21}^{k}\frac{g_2}{g_1} & k_{22}^{k} & \cdots & k_{2(n-1)}^{k}\frac{g_2}{g_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n-1)1}^{k}\frac{g_{n-1}}{g_1} & k_{(n-1)2}^{k}\frac{g_{n-1}}{g_2} & \cdots & k_{(n-1)(n-1)}^{k} \end{pmatrix}$, observa-se que seu traço é constante.

A seguir, veremos para o caso de singularidade de tipo II,

Caso II: Singularidade genérica tipo II.

Seja

$$
\begin{aligned} \widetilde{\omega}_1 &= \tfrac{dy}{y} - \lambda\tfrac{dx}{x} \\ \widetilde{\omega}_2 &= dz \end{aligned}
$$

onde $\widetilde{\omega}_1$, $\widetilde{\omega}_2$ são fechadas e $\widetilde{\omega}_1 \wedge \widetilde{\omega}_2 = \left(\frac{dy}{y} - \lambda\frac{dx}{x}\right) \wedge dz$.

Lema 3.4 *Com as notações anteriores do caso de singularidade genérica tipo II, se* $df \wedge \widetilde{\omega}_1 \wedge \widetilde{\omega}_2 = 0$*, então* f *é constante.*

Prova: Dada uma função holomorfa $f(x, y, z)$ em U, a equação

$$
df \wedge \widetilde{\omega}_1 \wedge \widetilde{\omega}_2 = \left(f_x\frac{1}{y} + \lambda f_y\frac{1}{x}\right) dxdydz.
$$

Portanto, $df \wedge \widetilde{\omega}_1 \wedge \widetilde{\omega}_2 = 0$ se, e somente se, $xf_x + y\lambda f_y = 0$. Ampliando a série de Laurent $f = \sum_{i,j,k\in\mathbb{Z}} f_{ijk}x^i y^j z^k$ permite-nos ver que a última equação é equivalente a

$$
(i + \lambda j)\, f_{ijk} = 0.
$$

Pela hipóteses de que $\lambda \notin (\mathbb{R}^- \cup \mathbb{Q}^+)$, a única solução para a última equação é $f_{ijk} = 0$, então f é constante.

Corolário 3.3 *seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão dois, η construída e estendida em $\mathbb{CP}^3$ e $p \in sing(\mathcal{F})$ singularidade isolada do tipo II, dada em uma carta local dada pelas formas $\omega_1 = xdy - \lambda ydx$ $\lambda \notin (\mathbb{R}^- \cup \mathbb{Q}^+)$ e $\omega_2 = dz$. Então, dadas a tais condições, concluímos que η tem a seguinte expressão*

$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{dg_4}{g_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \frac{xyg_1}{g_4} \\ k_7 \frac{g_4}{xyg_1} & k_5 \end{pmatrix} \widetilde{\omega}_1 + \begin{pmatrix} k_2 & k_4 \frac{xyg_1}{g_4} \\ k_8 \frac{g_4}{xyg_1} & k_6 \end{pmatrix} \widetilde{\omega}_2$$

Prova: Seja $G : U \to GL_q(\mathbb{C})$ holomorfa tal que $G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_4 \end{pmatrix}$, $det(G) = g_1 g_4 \neq 0$ em U, $\Omega_0 = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$, $\Omega = G\Omega_0 = \begin{pmatrix} g_1\omega_1 \\ g_4\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 xy\widetilde{\omega}_1 \\ g_4\widetilde{\omega}_2 \end{pmatrix}$;

a seguir, de forma semelhante ao caso de singularidade de tipo I e o Lema anterior 3.4, temos o η.

Voltando ao caso de singularidade de tipo I

A seguir, voltando ao caso de singularidade de tipo I, vamos ver qual é a relação das constantes k_i.

Do Corolário 3.1, temos

$$\begin{aligned} \eta &= \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{dg_4}{g_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \frac{g_1}{g_4} \\ k_7 \frac{g_4}{g_1} & k_5 \end{pmatrix} \omega_1 + \begin{pmatrix} k_2 & k_4 \frac{g_1}{g_4} \\ k_8 \frac{g_4}{g_1} & k_6 \end{pmatrix} \omega_2 \\ &= \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.5}$$

então

$$d\eta = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{dg_1 g_4 - g_1 dg_4}{g_4^2}\right)(k_3\omega_1 + k_4\omega_2) \\ \left(\frac{dg_4 g_1 - g_4 dg_1}{g_1^2}\right)(k_7\omega_1 + k_8\omega_2) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$$\eta \wedge \eta = \begin{pmatrix} (\eta\wedge\eta)_{11} & (\eta\wedge\eta)_{12} \\ (\eta\wedge\eta)_{21} & (\eta\wedge\eta)_{22} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

onde

- $(\eta\wedge\eta)_{11} = \eta_{11}\wedge\eta_{11} + \eta_{12}\wedge\eta_{21} = (k_3k_8 - k_4k_7)\,\omega_1\wedge\omega_2$;
- $(\eta\wedge\eta)_{12} = \eta_{11}\wedge\eta_{12} + \eta_{12}\wedge\eta_{22} = \left(\frac{dg_1 g_4 - g_1 dg_4}{g_4^2}\right)(k_3\omega_1 + k_4\omega_2) + K_1\left(\frac{g_1}{g_4}\right)\omega_1\wedge\omega_2$

  onde $K_1 = k_1k_4 - k_2k_3 + k_3k_6 - k_4k_5$;

- $(\eta \wedge \eta)_{21} = \eta_{21} \wedge \eta_{11} + \eta_{22} \wedge \eta_{21} = \left(\frac{dg_4 g_1 - g_4 dg_1}{g_1^2}\right)(k_7\omega_1 + k_8\omega_2) + K_2 \left(\frac{g_4}{g_1}\right)\omega_1 \wedge \omega_2,$
onde $K_2 = (k_7k_2 - k_8k_1 + k_5k_8 - k_6k_7)$;
- $(\eta \wedge \eta)_{22} = \eta_{21} \wedge \eta_{11} + \eta_{22} \wedge \eta_{22} = (k_7k_4 - k_8k_3)\,\omega_1 \wedge \omega_2.$

Como $d\eta = \eta \wedge \eta$, temos

1. $(\eta \wedge \eta)_{11} \equiv 0$ e $(\eta \wedge \eta)_{22} \equiv 0$
$$(k_3k_8 - k_4k_7) = 0$$
$$k_3 = Kk_7 \;\; e \;\; k_4 = Kk_8; \tag{3.8}$$

2. $(\eta \wedge \eta)_{12} = d\eta_{12}$
$$(k_1k_4 - k_2k_3 + k_3k_6 - k_4k_5)\left(\frac{g_1}{g_4}\right)\omega_1 \wedge \omega_2 \equiv 0,$$
onde $\omega_1 \wedge \omega_2 = \left(a_1^1a_2^2 - a_2^1a_1^2\right)\frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_1x_2} + \left(a_1^1a_3^2 - a_3^1a_1^2\right)\frac{dx_1 \wedge dx_3}{x_1x_3} + \left(a_2^1a_3^2 - a_3^1a_2^2\right)\frac{dx_2 \wedge dx_3}{x_2x_3}$, como ω_1 e ω_2 são linearmente independentes, pelo menos um dos
$$a_1^1a_2^2 - a_2^1a_1^2 = C_1 \;,\; a_1^1a_3^2 - a_3^1a_1^2 = C_2 \; e \; a_2^1a_3^2 - a_3^1a_2^2 = C_3$$
é diferente de zero.
Além disso, $g_4 \neq 0$ em U e as identidades se verificam em $U \setminus \{x_1x_2x_3 = 0\}$, temos
$$(k_1k_4 - k_2k_3 + k_3k_6 - k_4k_5)\,g_1\,[C_1x_3dx_1 \wedge dx_2 + C_2x_2dx_1 \wedge dx_3 + C_3x_1dx_2 \wedge dx_3] = 0$$
$$(k_1k_4 - k_2k_3 + k_3k_6 - k_4k_5)\,g_1 = 0; \tag{3.9}$$

3. $(\eta \wedge \eta)_{21} = d\eta_{21}$, temos $(k_7k_2 - k_8k_1 + k_5k_8 - k_6k_7)\left(\frac{g_4}{g_1}\right)\omega_1 \wedge \omega_2 \equiv 0$ pela mesma ideia anterior,temos
$$(k_7k_2 - k_8k_1 + k_5k_8 - k_6k_7)\,g_4 = 0. \tag{3.10}$$

De (3.8) substituindo em (3.9), temos
$$K\,(k_1k_8 - k_2k_7 + k_7k_6 - k_8k_5)\,g_1 = 0. \tag{3.11}$$
De (3.10) e (3.11) a única solução é $(k_1k_8 - k_2k_7 + k_7k_6 - k_8k_5) = 0$, isto é,
$$\frac{k_6 - k_2}{k_5 - k_1} = \frac{k_8}{k_7}.$$

Conclusão:
$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{dg_4}{g_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & k_3\frac{g_1}{g_4} \\ k_7\frac{g_4}{g_1} & k_5 \end{pmatrix}\omega_1 + \begin{pmatrix} k_2 & k_4\frac{g_1}{g_4} \\ k_8\frac{g_4}{g_1} & k_6 \end{pmatrix}\omega_2, \tag{3.12}$$
com a relação adicional
$$\frac{k_6 - k_2}{k_5 - k_1} = \frac{k_8}{k_7} = \frac{k_4}{k_3}.$$

3.2.3 Caracterização de η no ponto regular

A seguir iremos tratar a tentativa da forma η, em torno do ponto regular p.

TENTATIVA

$$d\Omega = \eta_0 \wedge \Omega \; tal\ que \; \eta_0 = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{dg_2}{g_2} \end{pmatrix},$$

$$d\Omega = \eta \wedge \Omega \; tal\ que \; \eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix},$$

então $(\eta - \eta_0) \wedge \Omega = 0$, isto é,

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} - \frac{dg_1}{g_1} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} - \frac{dg_2}{g_2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} g_1 dy_1 \\ g_2 dy_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(g_1\eta_{11} - dg_1)\, dy_1 + g_2\eta_{12} dy_2 = 0$$

$$g_1\eta_{21} dy_1 + (g_2\eta_{22} - dg_2)\, dy_2 = 0$$

- $\eta_{11} = \frac{dg_1}{g_1} + A^1_{11}dy_1 + A^2_{11}dy_2 + A^3_{11}dy_3,$
- $\eta_{12} = A^1_{12}dy_1 + A^2_{12}dy_2 + A^3_{12}dy_3,$
- $\eta_{21} = A^1_{21}dy_1 + A^2_{21}dy_2 + A^3_{21}dy_3,$
- $\eta_{22} = \frac{dg_2}{g_2} + A^1_{22}dy_1 + A^2_{22}dy_2 + A^3_{22}dy_3.$

Observação 3.4 *Seja* $G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix}$

- $\eta_{11} = \eta_1 = \frac{-g_3dg_2 + g_4dg_1}{det(G)} + +A^1_{11}dy_1 + A^2_{11}dy_2 + A^3_{11}dy_3,$
- $\eta_{12} = \frac{-g_2dg_1 + g_1dg_2}{det(G)} + A^1_{12}dy_1 + A^2_{12}dy_2 + A^3_{12}dy_3,$
- $\eta_{21} = \frac{g_4dg_3 - g_3dg_4}{det(G)} + A^1_{21}dy_1 + A^2_{21}dy_2 + A^3_{21}dy_3,$
- $\eta_{22} = \frac{-g_2dg_3 + g_1dg_4}{det(G)} + A^1_{22}dy_1 + A^2_{22}dy_2 + A^3_{22}dy_3.$

Voltando ao nosso caso

$$d\Omega = \eta \wedge \Omega,$$

isto é

$$\begin{pmatrix} dg_1dy_1 \\ dg_2dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{g_1} + A^1_{11}dy_1 + A^2_{11}dy_2 + A^3_{11}dy_3 & A^1_{12}dy_1 + A^2_{12}dy_2 + A^3_{12}dy_3 \\ A^1_{21}dy_1 + A^2_{21}dy_2 + A^3_{21}dy_3 & \frac{dg_2}{g_2} + A^1_{22}dy_1 + A^2_{22}dy_2 + A^3_{22}dy_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} g_1dy_1 \\ g_2dy_2 \end{pmatrix},$$

$$0 = \left(-g_1A^2_{11} + g_2A^1_{12}\right) dy_1dy_2 + g_1A^3_{11}dy_3dy_1 + g_2A^3_{12}dy_3dy_2,$$

então

$$A^3_{11} = 0, \;\; A^3_{12} = 0, \;\; A^2_{11} = \frac{g_2}{g_1}A^1_{12},$$

$$0 = \left(-g_1 A_{21}^2 + g_2 A_{22}^1\right) dy_1 dy_2 + g_1 A_{21}^3 dy_3 dy_1 + g_2 A_{22}^3 dy_3 dy_2,$$

então

$$A_{21}^3 = 0, \quad A_{22}^3 = 0, \quad A_{21}^2 = \frac{g_2}{g_1} A_{22}^1.$$

Como

$$d\eta = \eta \wedge \eta,$$

temos

$$dA_{11}^1 dy_1 + dA_{11}^2 dy_1 = \left(A_{12}^1 A_{21}^2 - A_{12} A_{21}^1\right) dy_1 dy_2, \tag{3.13}$$

$$dA_{12}^1 dy_1 + dA_{12}^2 dy_2 = \left(A_{11}^1 A_{12}^2 - A_{11}^2 A_{12}^1 + A_{12}^1 A_{22}^2 - A_{12}^2 A_{22}^1\right) dy_1 dy_2 + \left(\frac{dg_1}{g_1} - \frac{dg_2}{g_2}\right)\left(A_{12}^1 dy_1 + A_{12}^2 dy_2\right), \tag{3.14}$$

$$dA_{21}^1 dy_1 + dA_{21}^2 dy_2 = \left(A_{21}^1 A_{11}^2 - A_{21}^2 A_{11}^1 + A_{22}^1 A_{21}^2 - A_{22}^2 A_{21}^1\right) dy_1 dy_2 + \left(\frac{dg_2}{g_2} - \frac{dg_1}{g_1}\right)\left(A_{21}^1 dy_1 + A_{21}^2 dy_2\right), \tag{3.15}$$

$$dA_{22}^1 dy_1 + dA_{22}^2 dy_2 = \left(A_{21}^1 A_{12}^2 - A_{21}^2 A_{12}^1\right) dy_1 dy_2. \tag{3.16}$$

De 3.13 e 3.16, temos que A_{11}^1, A_{11}^2, A_{22}^1 e A_{22}^2 só dependem de y_1 e y_2. De 3.14, temos que

$$\left(d\left(\frac{A_{12}^1}{\frac{g_1}{g_2}}\right)\right) \wedge dy_1 \wedge dy_2 = 0,$$

$$\left(d\left(\frac{A_{12}^2}{\frac{g_1}{g_2}}\right)\right) \wedge dy_2 \wedge dy_1 = 0,$$

,então $\frac{A_{12}^1}{\frac{g_1}{g_2}}$ e $\frac{A_{12}^2}{\frac{g_1}{g_2}}$ só dependem de y_1 e y_2,

De 3.15, temos que

$$\left(d\left(\frac{A_{21}^1}{\frac{g_2}{g_1}}\right)\right) \wedge dy_1 \wedge dy_2 = 0,$$

$$\left(d\left(\frac{A_{21}^2}{\frac{g_2}{g_1}}\right)\right) \wedge dy_2 \wedge dy_1 = 0,$$

então $\frac{A_{21}^1}{\frac{g_2}{g_1}}$ e $\frac{A_{21}^2}{\frac{g_2}{g_1}}$ só dependem de y_1 e y_2,

Assim

$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{dg_2}{g_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}^1 dy_1 + A_{11}^2 dy_2 & A_{12}^1 dy_1 + A_{12}^2 dy_2 \\ A_{21}^1 dy_1 + A_{21}^2 dy_2 & A_{22}^1 dy_1 + A_{22}^2 dy_2 \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{dg_2}{g_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}^1(y_1,y_2) dy_1 + A_{11}^2(y_1,y_2) dy_2 & \frac{g_1}{g_2} B_{12}^1(y_1,y_2) dy_1 + \frac{g_1}{g_2} B_{12}^2(y_1,y_2) dy_2 \\ \frac{g_2}{g_1} B_{21}^1(y_1,y_2) dy_1 + \frac{g_2}{g_1} B_{21}^2(y_1,y_2) dy_2 & A_{22}^1(y_1,y_2) dy_1 + A_{22}^2(y_1,y_2) dy_2 \end{pmatrix}$$

Onde sabemos que η é meromorfa em U, tomando um caminho de p_0 um ponto singular, ao ponto regular p (onde tem polo de ordem um, ver Corolário 3.1), já que o caminho é compacto, existe uma cobertura finita e tentamos conectar pelas interseções daquela cobertura e assim justificar que tem polo de ordem um. Depois de justificar tentar uma mudança de variável, assim eliminar a parte holomorfa (”falta justificar ”) e ficar com η

$$\eta = \frac{dG}{G} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \frac{dx}{x} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \frac{dz}{z}.$$

Referências Bibliográficas

[1] A. Haefliger ; J. Girbau *On deformation of transversely holomorphic foliations,* Journal für die reine und angewandte Mathematic, Vol 345, 122-147 (1983).

[2] A. Haefliger, D. Sundararaman *Complexifications of transversely holomorphic foliations*, Mathematische Annalen-271 (1985).

[3] A. Lins-Neto ; B. Scárdua *Folheações algebraicas complexas,* 21 Coloquio Brasileiro de Matemática, 1997.

[4] B. Scárdua *Differential álgebra and Liouvillian first integrals of foliations* Journal of Pure and Applied Álgebra, 215(5), 764-788, (2011).

[5] B. Scárdua *On Elementary Integration and Affine Transverse Structures for Algebraic Foliations of Arbitrary Codimension.* (2015).

[6] B. Scárdua *Transversely affine and transversely projetive holomorphic foliation* Ann. Sci École Norm. Sup, 4^e série, t.30, 1997, p. 169 a 204.

[7] B. Scárdua; A. Mafra *One-dimensional Lie foliations with generic singularities in complex dimension three,* J. Aust. Math. Soc. 91, 2011.

[8] B. Scárdua *Integration of complex differential equations*, Journal of Dynamical and Control Systems (1999).

[9] César. Camacho, H. Movasati, *Topics in complex geometry and holomorphic foliations*, http://w3.impa.br/ hossein/myarticles/ComplexGeometry.pdf .

[10] C. Camacho; A. Lins Neto and P. Sad *Foliation with Algebraic Limit Sets,* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 136, (1992).

[11] C. Camacho; A. Lins Neto *Teoria geométrica das folheações,* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1979).

[12] C. Godbillon, *Feuilletages. Études Géométriques, Progress in Mathematics,98* Birkhauser Verlag, Basel (1991).

[13] D. Cerveau, R. Moussu *Groupes d'automorphismes de (C,0) et équations différentielles ydy+...=0,*, Bull. Soc. Math. France, 116(1988), 459-488

[14] E. Paul *Feuilletages holomorphes singuliers á holonomie résoluble*, Journal fur die reine und angewande Mathematik (1999).

[15] E.Fedida, *Feuilleteges de Lie,* Thése Strasbourg, 1973, Lecture Notes in Mathematics, 352, (1971).

[16] F. Loray *Feuilletages holomorphes á holonomie résoluble,*, These Université de Rennes I (1994).

[17] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifold and Lie grops*, Springer-Verlag, (1974).

[18] I. Kaplansky, *An Introduction to differential álgebra*, Hermann, Paris (1957).

[19] I. Moerdijk, *An Introduction to foliations and Lie Groupoids*, Cambridge University Press, Usa (2003).

[20] J. F. Ritt, *Integration in finite terms* , Columbia Univ. Press New York, 1948.

[21] J. F. Ritt, *Introduction to holomorphic functions of several variables* Wadworth and Brooks/Cole (1990).

[22] L. Neto *Componentes irredutíveis dos espaços de folheações*, Publicações Matemáticas, 26° Colóquio Brasileiro de Matemática (2007).

[23] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential gemetry, Vol I* , Brandeis Univ. Walthan Mass, (1970).

[24] M. Brunella *On transversely holomorphic flows I*, Invent. math. Phys (1996), Vol 126.

[25] M. Brunella, E. Ghys *Umbilical foliations and transversely holomorphic flows* , J. Differential Geometry (1991), Vol 41.

[26] M. Brunella *On Holomorphic foliations in complex surfaces transverse to a sphere*, Sociedade Brasileira de Matemática (1995), Vol.26.

[27] M. Tavares *Folheações, grupos de Lie e fibrações*, Tese doutorado em Matemática (2010).

[28] O. Debarre *Tores et variétés abéliennes complexes,* Société Mathématique de France (1999).

[29] R. Blumenthal., *Transversely homogeneus foliations,* Ann. Inst. Fourier. 29(4), (1979), 143-158.

[30] R. Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variables* Wadworth and Brooks/Cole, 1990.

[31] Singer M.F., *Liouvillian first integral of differential equations,* Trans. Amer. Math. Soc. 333, no. 2, 673-688, (1992).

[32] T. Napier, M. Ramachandran, *An Introduction to Riemann surfaces*, Springer (2010).

[33] T. Ito, B. Scárdua *Holomorphic foliations of codimension one transverse to polydiscs.*

[34] M. Belliart, I. Liousse, F. Loray *Sur l'existence de points fixes attractifs pour les sous-groupes de Aut(C,0)*, C.R.Acad. Sci. Paris Série I Math. 324 (1997), no.4.

[35] M. Belliart, I. Liousse, F. Loray *Some results on secundary characteristic classes of transversely holomorphic foliations*, Foliations Geometry and Dynamics (2002), 3-16.

[36] T. Casavecchia, I. Nisoli, J. Raissy, M. Ruggiero *Local dynamics of singular holomorphic foliations*, http://www.dm.unipi.it/ raissy/papers/assets/testo.pdf.

[37] T. Ito, B. Scárdua *Holomorphic foliations: Moderate geometry versus transverse sections*, pre-print (2002).

[38] T. Ito, B. Scárdua *Holomorphic foliations of codimension transverse to polydisc*, Mathematics Subject Classification (2000).

[39] T. Ito *A Poincaré-Bendixon type Theorem for Holomorphic vector fields* (1994).

[40] T. Ito, B. Scárdua *On real transverse sections of holomorphic foliations* , to appear.

[41] T. Ito, B. Scárdua *On the geometry of holomorphic flows and foliations having transverse sections* , Geometriae Dedicata (2005), Vol 111.

[42] T. Ito, B. Scárdua *A survey of real transverse sections of holomorphic foliations* , Kyoto University Research Informtion Repository.

[43] X. Gomez-Mont *Transversal holomorphic structures*, J. Diff. Geom, 15(1980), 161-185.

[44] Y. Ilyashenko, S. Yakovenko *Lectures on Analytic Differential Equations,* American Mathematical Society Providence, Rhode Island (2007)