UFRJ

Estabilidade de sistemas termoelásticos hiperbólicos

Ruth Milena Cortés

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Ciências.

Orientador: Hugo D. Fernández Sare

Rio de Janeiro

Maio de 2016

Ficha Catalográfica

Cortés, Ruth Milena

Estabilidade de sistemas termoelásticos hiperbólicos/

Ruth Milena Cortés.

Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2106.

x, 140f.

Orientador: Hugo Danilo Fernández Sare

Tese (doutorado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 138-141

1. Preliminares. 2. Sistema Termoelástico Tipo III. 3. Sistema Termoelástico com lei de Fluxo de Cattaneo. Dissipação não linear na fronteira. 4. Sistema Termoelástico com lei de Fluxo de Cattaneo. Dissipação linear na fronteira. 5. Sistema Termoelástico misto com lei de Fluxo de Cattaneo.

I. Hugo Danilo Fernández Sare. II. Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemaćtica. III. Título.

Estabilidade de sistemas termoelásticos hiperbólicos

Ruth Milena Cortés

Orientador: Hugo D. Fernández Sare

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Ciências.

Banca examinadora:

_____

Presidente, Prof. Hugo Danilo Fernández Sare - UFRJ

_____

Prof. Gustavo Perla Menzala - UFRJ

_____

Prof. Jaime Edilberto Muñoz Rivera - UFRJ

_____

Prof. Carlos Alberto Raposo da Cunha - UFSJ

_____

Prof. Luci Harue Fatori - UEL

Rio de Janeiro

Maio de 2016

AGRADECIMENTOS

Quero expressar meu mais sincero agradecimento ao meu orientador de Tese, Professor Hugo D. Fernández Sare por vários motivos. O primeiro, pelo orientação neste trabalho de Tese, pela confiança e inúmeros aportes a minha formação de pesquisadora. Segundo, pela disponibilidade e flexibilidade que permitiram sempre ter um ambiente de trabalho ótimo, oferecendo diferentes meios de encontro e participação, para assim poder finalizar com sucesso os objetivos propostos no trabalho.

Gostaria também agradecer aos diferentes professores do Instituto de Matemática da UFRJ com os quais comparti em aulas e aos membros da banca pelos seus valiosos comentários que contribuiram notoriamente no aprimoramento deste trabalho.

Quero agradecer à mi familia, minha mãe Rosalba, irmã Janneth e sobrina Laura por seu apoio e inspiração e o sentimento de companhia que sempre tive delas. Igualmente o mais profundo sentimento de gratidão ao meu esposo Freddy por estar sempre a meu lado, me apoiando e me incentivando nos momentos difíceis que se apresentaram no decorrer do meu trabalho. A sua companhia sempre me fortalece e me anima a superar os mais grandes objetivos da minha vida.

Finalmente agradeço ao CNPq e demais entidades do governo de Brasil, pelo apoio financeiro que permitiram concentrarme na elaboração desta tese.

RESUMO

Estabilidade de sistemas termoelásticos hiperbólicos

Ruth Milena Cortés

Orientador: Hugo D. Fernández Sare

Resumo da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Ciências.

Estuda-se a existência de soluções e o comportamento assintótico da energia para alguns problemas termoelásticos no quais as leis de fluxo de calor são consideradas como aquelas propostas por: Cattaneo [10], e Green e Naghdi [16, 17, 18].

Alem disso, diferentes tipos de dissipações (lineares e não lineares) são introduzidas tanto no interior do dominio quanto na sua fronteira. Observa-se que o tipo de decaimento da energia, depende fortemente do tipo de dissipação considerada.

Algumas das ferramentas usadas ao longo do trabalho são a técnica de multiplicadores de Lyapunov e os resultados de estabilidade de semigrupos estabelecidos por Prüss, ver [31].

palavras-chave: Semigrupo C_0; Estabilidade Exponencial; Estabilidade Polinomial; Misturas termoelástica e dissipação na fronteira; lei de Fluxo de Cattaneo; lei de Fluxo tipo III.

Rio de Janeiro

Maio de 2016

ABSTRACT

On stability of hyperbolic thermoelastic systems

Ruth Milena Cortés

Adviser: Hugo D. Fernández Sare

The aim of this work is to study existence and asymptotic behavior of energy for solutions of some thermoelastic problems defined throughout heat flux laws proposed by: Cattaneo [10] and Green and Naghdi, [16, 17, 18].

In addition, different kinds of dissipations (linear and nonlinear) are introduced in the bulk dynamics as well as in the border conditions. The type of asymptotic decay obtained in each case strongly relies on the choice of the dissipation.

Some of the techniques used along the work are Lyapunov's multipliers and some stability results for semigroups established by Prüss, [31].

palavras-chave: C_0- semigroup; Exponential stability; Polynomial stability; thermoelastic mixture and feedback on a part of the boundary; Cattaneo and Type III law for the heat condution.

Rio de Janeiro

Maio de 2016

Sumário

1 Preliminares **21**

2 Sistema Termoelástico Tipo III. **29**

2.1 O modelo 29

2.2 Resultados Principais 32

2.3 Existência e Unicidade 35

2.4 Estabilidade. 43

3 Sistema Termoelástico com lei de Fluxo de Cattaneo. Dissipação não linear na fronteira. **59**

3.1 O modelo 59

3.2 Resultado Principal 61

3.3 Existência e Unicidade 62

3.4 Estabilidade. 72

4 Sistema Termoelástico com lei de Fluxo de Cattaneo. Dissipação linear na fronteira. **89**

4.1 O modelo 89

4.2 Resultado Principal 91

4.3 Existência e Unicidade 93

4.4 Estabilidade 103

5 Sistema Termoelástico de materias misto com lei de Fluxo de Cattaneo. **113**

5.1 O modelo 113

5.2 Resultado Principal 115

5.3 Existência e Unicidade 117

5.4 Estabilidade 122
5.4.1 Decaimento Exponencial 123
5.4.2 Perda de Estabilidade 139

Referências **145**

Introdução

Neste trabalho estudamos a estabilidade das soluções de alguns sistemas de evolução que envolvem essencialmente o sistema termoelástico com leis de fluxo de calor diferentes da lei de Fourier. De modo mais exato, estudamos o comportamento da energia de soluções, que denotamos por $E(t)$, e que corresponde à norma de soluções no espaço de fase, para problemas de valor inicial e de fronteira com dissipações associados ao sistema termoelástico para domínios regulares e limitados, com a finalidade de determinar com que taxa a energia está decaindo para zero.

No comportamento assintótico da energia estamos interessados em determinar dois tipos de decaimento. O primeiro é o decaimento exponencial, i.e. decaimento da forma

$$E(t) \leq Ce^{-mt}, \quad \forall t > 0, \tag{0.1}$$

com as constantes $C,\ m$ definidas positivas. O segundo tipo de decaimento a determinar é do tipo polinomial, da forma:

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \quad \forall t > 0, \tag{0.2}$$

com constantes $C,\ \alpha$ definidas positivas.

Nosso trabalho se focaliza em mostrar a existência e unicidade de soluções e o tipo de decaimento da energia para 4 diferentes sistemas termoelástico de caráter hiperbólico-hiperbólico. Sobre os sistemas termoelásticos tem-se numerosos resultados dependendo do tipo de domínio Ω onde o sistema esta definido, isto é: Ω limitado, regular ou sistemas definidos em $\mathbb{R}^n$, além mesmo dos diferentes resultados de estabilidade para dimensão $n = 1$ ou $n > 1$. Além disso, os sistemas termoelásticos estudados são definidos com leis

de fluxo de calor diferentes ao modelo clássico de Fourier, e os quais serão mencionados posteriormente. Para compreender bem os problemas estudados relembramos a seguir os sistemas termoelásticos onde o fluxo de calor é dado pela lei de Fourier, e as leis de fluxo de calor definidas pelos autores Green e Naghdi e a lei de Cattaneo.

Sistema Termoelástico

Existem muitos modelos para descrever a condução térmica em corpos elásticos. Neste trabalho vamos apresentar o sistema termoelástico formado pelo acoplamento de equações que envolvem componente elástica e componente de calor. De fato, vamos estudar o sistema termoelástico definido apartir do sistema de Lamé, que modela o comportamento de corpos elásticos, e adicionando um efeito térmico. Em forma geral, considere um domínio Ω, n-dimensional, limitado, homogêneo em um estado inicial não deformado e com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^2. Seja $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor deslocamento, $\theta = \theta(x,t) \in \mathbb{R}$ a diferença de temperatura com respeito a uma temperatura de referência onde o tempo é dado por $t = 0$ e $q = q(x,t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor fluxo de calor para $t \geq 0$. O sistema termoelástico em um meio isotrópico homogêneo, com dados iniciais, é definido como

$$\rho u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla div\ u + \beta\nabla\theta\ = 0 \quad em\ \Omega\times(0,\infty), \tag{0.3}$$

$$\theta' + div(q) + \delta div(u')\ = 0 \quad em\ \Omega\times(0,\infty), \tag{0.4}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u'(x,0) = u^1(x), \quad \theta(x,0) = \theta^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.5}$$

onde $\beta,\ \delta > 0$ são parâmetros de acoplamento e $\lambda,\ \mu > 0$ constantes de Lamé. Para simplificar a notação, a derivada com respeito ao tempo é denotada por $'$, assim $u_t = u',\ \theta_t = \theta'$. Os operadores Laplaciano, gradiente e divergente são definidos para a variável espacial x e correspondem às fórmulas

$$\Delta u = (\Delta u_1, \cdots, \Delta u_n), \quad \nabla u = (\nabla u_1, \cdots, \nabla u_n), \quad div\ u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \tag{0.6}$$

Assim, o sistema termoelástico (0.3)-(0.5), descreve o comportamento de um corpo elástico influenciado por efeitos térmicos, isto é, a ação recíproca entre o estresse elástico e a diferença de temperatura no corpo. Os sistemas termoelásticos estudados nesta tese serão

definidos a partir do sistema (0.3)-(0.5) com a seguinte condição sobre as constantes de Lamé:

$$\mu > 0, \quad n\lambda + (n+1)\mu > 0. \tag{0.7}$$

Note que nas condições iniciais para o sistema anterior não temos o dado inicial para a variável q pois a variável θ está determinada pela lei de condução de calor definido pelo fluxo q. A seguir veremos um dos sistemas termoelásticos mais bem estudados que esclarece a relação entre o fluxo de calor e temperatura e que corresponde ao sistema termoelástico clássico, definido pela lei de fluxo dada pela lei de Fourier.

Sistema Termoelástico e Lei de Fourier

No sentido clássico, a equação que relaciona o fluxo de calor q e a temperatura θ, é conhecida como Lei de Fourier, e é dada pelas equação

$$q = -k\nabla\theta, \tag{0.8}$$

isto é, a transferência de calor através do material é proporcional ao gradiente da temperatura, com k definida como constante de conductividade térmica. A conseqüência de usar este tipo de modelo para descrever a transferência de calor em um corpo é percebida a nível de aplicações (implementação computacional). Isto é, ele gera um modelo parabólico para a equação do calor, no o qual a velocidade de propagação de ondas para o fluxo de calor torna-se infinita. A equação (0.4) com lei de Fourier (0.8) fica da forma

$$\theta' - k\Delta\theta + \delta div\ u' = 0 \quad em\ \Omega \times (0,\infty), \tag{0.9}$$

e assim o sistema (0.3) e (0.9) é conhecido como o sistema termoelástico clássico. Este sistema tem sido objeto de muitos estudos. Trata-se de um sistema hiperbólico para a elasticidade, acoplado ao modelo clássico parabólico de condução de calor dado pela Lei de Fourier. Assim o sistema mostra uma estrutura acoplada de tipo hiperbólica-parabólica bastante usada no âmbito físico como no matemático. Da equação (0.3) podemos dizer que o gradiente do calor exerce uma força na componente elástica modelada pelo sistema de Lamé e na equação (0.9) a pressão da elasticidade atua sobre o calor.

A seguir, faremos um breve resumo de alguns fatos importantes que envolvem condições no domínio Ω e a dimensão espacial do sistema e que influenciam os resultados de estabilidade do sistema. No caso do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, limitado de fronteira regular, podemos dizer: se as condições na fronteira são do tipo Dirichlet-Dirichlet

$$u = 0, \quad \theta = 0 \ em \ \Gamma \times (0, \infty), \tag{0.10}$$

sabemos que a energia decresce porém, em geral, $E(t)$ não tende a zero quando $t \to \infty$. De fato, em [12] mostra-se que: *a energia de toda solução de (0.3), (0.9) e (0.10) tende a zero quando $t \to \infty$ se, e somente se, Ω satisfaz a seguinte condição:*

$$\begin{cases} \qquad\qquad Se \ \psi \in (H_0^1(\Omega)))^n \ satisfaz \\ -\mu\Delta\psi - (\lambda + \mu)\nabla div \ \psi = \gamma^2\psi \ em \ \ \Omega, \\ \qquad\qquad \psi = 0 \ em \ \ \partial\Omega, \\ \qquad\qquad div \ \psi = 0 \ em \ \ \Omega, \end{cases} \tag{0.11}$$

então $\psi = 0$, isto é, não existem funções proprias com divergente nulo do sistema de Lamé.

A situação em (0.11) funciona, em geral, em vários domínios porém não é válida quando Ω é a bola $n-$dimensional, ver [12] e [25]. Caraterizar os dominios para os quais tem-se a condição (0.11) é ainda um problema aberto conhecido como o problema de Pompeiu (Dimitrie Pompeiu). Desta forma, o sistema (0.3), (0.9) e (0.10) pode apresentar soluções que não decaem para domínios que não verificam (0.11). Em [24] é provado que o decaimento da energia nunca é uniforme em domínios convexos para o sistema termoelástico linear, $n = 3$, com condições de fronteira de Dirichlet.

No caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ apresenta a mesma situação, isto é, a energia não sempre decae. Assim uma ferramenta de estudo tem sido a partição da energia (chamada às veces energia total) em uma parte dissipativa e em outra conservativa. A partição da energia foi investigada inicialmente por Lax e Phillips, [23], para o estudo da equação de onda, onde a energia cinética e potencial torna-se iguais quando o tempo atinge o infinito. Um dos primeiros estudos da partição da energia para o problema termoelástico linear, $n = 3$, foi dado pelos

autores Dassios e Grillakis em [13], onde o sistema apresenta ondas transversais, longitudinais e térmicas. Eles estudaram como a energia das partes longitudinais e térmicas se dividem em energia cinética, tensão e térmica e demonstram como tais energias decaem a zero quando o tempo atinge o infinito, a uma taxa de $t^{-(m+3/2)}$ quando os dados iniciais são suficientemente regulares com soporte compacto e onde o m depende dos dados inicias. Já Henry, Lopes e Perisinotto, em [20], mostraram que as três partes da energia decaem exponencialmente a zero no caso unidimensional mas não em $n > 1$. Utilizando o método da energia, Rivera em [41] apresenta uma prova mais sencilla que dada em [20] para o sistema termoelástico unidimensional.

Voltando ao caso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado temos que se $E(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ o interesse fica por conta do comportamento assintótico da energia, isto é, determinar a taxa de decaimento da energia. A seguir vejamos alguns resultados. No caso unidimensional é conhecido que para qualquer condição de fronteira, a energia do sistema decai exponencialmente. Especificamente, a dissipação dada em (0.9) é suficientemente forte para dissipar exponencialmente o deslocamento, i.e. a função u, ver por exemplo [19], [28]. No entanto, no caso de dimensões superiores o resultado é diferente. Daí que alguns autores tenham estudado o sistema com outras dissipações extras para ter estabilidade em domínios convexos. Neste aspecto, um dos primeiros trabalhos para o estudo de sistemas elásticos com fronteira dissipativa não linear foi dado em [46], onde tem-se estabilização uniforme para o problema de equação de onda. Para sistemas termoelásticos, em [26] tem-se introduzido uma dissipação na fronteira do tipo linear na velocidade, isto é, do tipo u'. Em [27], encontramos um resultado mais geral, onde a dissipação na fronteira é do tipo não linear na velocidade, isto é, $g(u')$ com g não linear.

Sistema Termoelástico e Lei de Cattaneo

A nível de experiências físicas por exemplo, alguns cristais dielétricos apresentam um comportamento diferente ao modelado pela lei de Fourier na condução do calor. A baixas temperaturas os distúrbios térmicos se propagam a velocidade finita. Igualmente algumas aplicações com pequenos impulsos de laser em chips de computador levaram a reformular o processo de condução de calor. Destes fenômenos emerge a necessidade de se considerar outras teorias de condução de calor. Uma delas é a termoelasticidade com segundo som,

onde as lei de Fourier é substituido pela lei de Cattaneo definida como:

$$\tau_0 q' + q + k\nabla\theta = 0, \tag{0.12}$$

com τ_0 e k positivos. Para mais referências sobre a lei de Cattaneo, ver [10], [11]. Matematicamente o efeito do segundo som transforma o sistema termoelástico num sistema puramente hiperbólico. É claro que no caso $\tau_0 = 0$ estamos falando novamente da lei de Fourier. Sobre os sistemas termoelásticos com segundo som tem-se vários resultados. Em [42], se estabelece a existência de soluções para dados pequenos no caso de problemas definidos em domínios unidimensionais limitados e não limitados. Estabelece-se também que as soluções convergem ao equilíbrio quando $t \to \infty$, porém não apresenta resultados no estudo de taxas de decaimento. Posteriormente, Racke em [38] estabelece decaimento uniforme para problemas de valor inicial lineares e não lineares em dimensão $n = 1$. Em [21], se estabelece explicitamente a taxa de decaimento exponencial para o sistema termoelástico clássico e o sistema termoelástico com segundo som em uma dimensão e é feita uma comparação do comportamento assintótico das soluções dos dois sistemas. No caso $n > 1$, a dissipação dada pela condução de calor não é, em geral, suficientemente forte para garantir decaimento exponencial das soluções como decorre no caso unidimensional. Em [37], tem-se decaimento exponencial para $n = 2$ e 3 com a condição $rot\ u = rot\ q = 0$, que tem como aplicações domínios simétricos radiais.

Sistema Termoelástico Tipo III. Modelo de Green-Naghdi

Devido às experiências físicas que envolvem fenômenos de propagação de calor na forma de ondas térmicas tem-se considerado formulações alternativas para a condução de calor. Desta forma Green and Naghdi em [18] reexaminaram as equações de termoelasticidade e introduziram os modelos de termoelasticidade de tipo I, tipo II e tipo III. Ver secção 8 de [18]. Esta teoria, consegue incorporar a transmissão de impulso térmico de maneira lógica e consistente. Quando o modelo termoelástico de tipo I é linear, temos o modelo termoelástico clássico, isto é, a lei de Fourier aparece como modelo para a condução de calor. Por outra lado, o modelo termoelástico tipo II não admite dissipação da energia e é chamado usualmente de modelo sem energia dissipativa ou conservativo. O modelo termoelástico tipo III apresenta energia dissipativa com o qual torna-se interessante para

o estudo do comportamento assintótico da energia. No modelo termoelástico tipo III caso linear, o fluxo de calor q é asumido proporcional ao gradiente da temperatura e ao gradiente do deslocamento térmico, isto é:

$$q(x,t) = -a\nabla\theta(x,t) - b\nabla\int_{t_0}^{t}\theta(x,t)dx. \tag{0.13}$$

Ver (7.3)-(7.6) e (8.37) em [18] para dedução da fórmula. Entre alguns estudos sobre o sistema termoelástico tipo III linear, encontramos em [45] um resultado sobre o decaimento da energia para o problema de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ e para o problema em domínios limitados em $\mathbb{R}^n$ com $n \leq 3$ com condições de fronteira Dirichlet. Para o caso unidimensional, Racke e Quintanilla, ver [35], estudaram a estabilidade exponencial de soluções para a termoelasticidade tipo III linear com diferentes condições de fronteira, além disso a estabilidade exponencial para soluções simétricas radiais para $n = 2$ e $n = 3$. Utilizando o método de análise de frequências no espaço de fase para o desacoplamento do sistema hiperbólico-parabólico, em [39] é obtida boa colocação, propagação de singularidades e estimativas de decaimento para soluções da termoelástica linear tipo III em dimensão um. Em [44] se estuda o problema de Cauchy para o sistema termoelasticidade linear tipo III em $\mathbb{R}^3$ igualmente por um argumento de desacoplamento.

Sistemas Termoelásticos de materias mistos

Nos últimos anos as teorias termomecânicas não clássicas tem despertado grande interesse tanto a nível das possíveis e extensas aplicações físicas como a nível das diferenças nos resultados matemáticos com respeito às estabelecidas nas teorias termomecânicas clássicas. Como exemplo das teorias termomecânicas não clássicas tem-se os modelos termoelásticos que envolvem mais de um elemento elástico, modelos chamados termoelásticos de mistura. Entre os trabalhos iniciais sobre a formulação das equações constitutivas na teoria de mistura encontram-se as referências de Green e Naghdi [16, 17], Truesdell and Toupin [43], Kelly [22], Eringen and Ingram [14, 15], Muller [29] e Bowen and Wiese [8]. Em geral a teoria de mistura descreve a interação entre fluidos e gases de forma Euleriana. No caso da teoria de mistura de sólidos utiliza-se a descrição Lagrangiana. Os deslocamentos na teoria de misturas de 2 sólidos são descritas pelas equações $u = u(x,t)$ e $w = w(y,t)$, onde as partículas ocupam a mesma posição na configuração de referência,

isto é, $x = y$ para $t = 0$. A descrição lagrangiana para a teoria de mistura de sólidos elásticos foi utilizada primeiramente pelos autores Bedford e Stern em [5, 6]. Nesta teoria, as variáveis independentes são o gradiente do deslocamento e o deslocamento relativo.

A nível dos problemas termoelásticos com mistura de elementos sólidos, encontramos diferentes resultados, entre eles, resultados de existência, unicidade, dependência contínua e decaimento de soluções, ver [3]-[40]. Nestes resultados temos que a parte térmica do problema é modelada pela lei de Fourier, (0.9), e que o comportamento de certas propriedades como o decaimento das soluções é bem diferente ao presentes nos sistemas termoelásticos clássicos, isto é, sistemas que não envolvem mistura de materiais. Assim por exemplo, na referência [40] mostra como resultados os decaimentos exponenciais ou polinomiais para o caso unidimensional do sistema termoelástico de mistura. Estes resultados depedem de uma relação importante de constantes que definem o sistema e estes resultados contrastam com o problema termoelástico clássico (um elemento elástico) unidimensional que apresenta sempre decaimento exponencial. Ver Sistema Termoelástico e Lei de Fourier nesta introdução.

Sobre nossos sistemas, o domínio e os tipos de dissipações

Dada a introdução anterior sobre sistemas termoelásticos com um ou mais materias elásticos e as diferentes leis de fluxo de calor destacamos a seguir alguns aspectos importantes desta tese. Nos capítulos 2, 3 e 4, nosso interesse é estudar a estabilidade para domínios Ω limitados em $\mathbb{R}^n$ de sistemas termoelásticos com uma componente elástica e onde as leis de fluxo serão as definidas pela teoria de Cattaneo ou Green-Naghdi. Neste ponto, veremos que para obter uma estimativa de decaimento de tipo exponencial ou polinomial tivemos que introduzir algumas "formas dissipativas". Para isto nos três capítulos definimos condições de fronteira com algum tipo de dissipação, linear ou não linear, segundo a metodologia dos trabalhos [46], [26] e [27], para obter estabilidade exponencial ou polinomial, em domínios limitados regulares. É importante observar que a dissipação trabalhada na fronteira se define para a componente elástica do sistema, isto é, em u. Contudo, por exemplo no capítulo 2, vamos encontrar que para o sistema termoelástico com segundo som, este tipo de dissipação se mostra insuficiente para estabelecer a estabilidade e foi necessário introduzir um termo dissipativo na equação de temperatura.

Seguindo a metodologia de [46], [26] ou [27] nos capítulos 2, 3 e 4 consideramos as seguintes condições sobre o domínio e sobre os sistemas. Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ limitado, aberto e com fronteira Γ de classe C^2 composta de duas partes,

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \tag{0.14}$$

Os conjuntos Γ_1 e Γ_2 serão determinados da seguinte forma. Seja x_0 um ponto em $\mathbb{R}^n$, $m(x) = x - x_0$ e $\nu(x) = (\nu_1(x), \cdots, \nu_n(x))$ um vetor normal unitário exterior à Γ no punto $x \in \Gamma$, definimos

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x_0) &= \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\}, \\ \Gamma_2(x_0) &= \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}, \end{aligned} \tag{0.15}$$

simplificando a notação, $\Gamma_i(x_0) = \Gamma_i$. Sendo u a componente elástica, θ a componente térmica e q a componente do fluxo de calor, podemos definir em forma geral, para nossos sistemas, condições inicias como

$$\begin{cases} u(x,0) = u^0(x), \quad u'(x,0) = u^1(x), \\ \theta(x,0) = \theta^0(x), \quad q(x,0) = q^0(x), \qquad\qquad em \quad \Omega. \end{cases} \tag{0.16}$$

Na parte das condições de fronteira vamos sempre trabalhar sem troca de calor na fronteira e a dissipação na componente u definida como

$$\begin{cases} \theta = 0 & em\ \Gamma \times (0,\infty), \\ u = 0 & em\ \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda + \mu) div(u)\nu & \\ \quad + am \cdot \nu u + m \cdot \nu h(u') = 0 & em\ \Gamma_2 \times (0,\infty), \end{cases} \tag{0.17}$$

com $h \in (C^1(\mathbb{R}^n))^n$ linear ou não, segundo o sistema estudado. A função $a = a(x)$ é não negativa em Γ_2, onde

$$a(x) \in C^1(\Gamma_2), \tag{0.18}$$

com μ e λ as constantes de Lamé. Como mencionado anteriormente, este tipo de dissipação atua na componente elástica pois surge do tratamento da equação de onda dado em [46]. É importante notar que o método de energia utilizado para estimar o comporta-

mento assintótico da energia está fortemente influenciado pela dissipação (0.17) ao ponto de que os funcionais de Lyapunov definidos em cada sistema estudado são quase análogos.

No que se refere ao capítulo 5, estudamos um sistema termoelástico de mistura para 2 sólidos em uma dimensão e com lei de Cattaneo para o fluxo de calor, ver (0.12). Nosso objetivo, como nos outros sistemas apresentados, é estabelecer a estabilidade do sistema com lei de Cattaneo. Vamos mostrar que o tipo de decaimento do sistema é similar ao obtido em [40] no caso exponencial.

A seguir lembraremos algumas ferramentas e métodos aplicados no decorrer deste trabalho. Iniciamos com os espaços de Sobolev e a teoria de semigrupos, linear e não linear que são as ferramentas principais para nossos resultados nos problemas estudados, principalmente nas seções referentes à existência e unicidade de soluções dos mesmos.

Capítulo 1

Preliminares

Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ dotado da medida de Lebesgue com fronteira $\partial\Omega$. Seja $p \geq 1$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções mensuráveis u, para as quais $|u|^p$ é uma função integrável sobre Ω. Em $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$||u||_{L^p}^p = \int_\Omega |u(x)|^p dx; \quad 1 \leq p < \infty,$$

assim, com esta norma $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach. No caso $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ é o espaço formado por todas as funções u, essencialmente limitadas sobre Ω e com a norma

$$||u||_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|$$

também é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e norma induzida

$$||u||^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Teorema 1.0.1. *(Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $p,\ q$ satisfazendo $1 \leq p,\ q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então o produto $|fg| \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}. \tag{1.1}$$

Ver [9]. Quando $p = q = 2$, temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.
Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{a} \alpha_i$. Denotemos por D^α o operador derivada da ordem $|\alpha|$, que é definido como

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

No caso $\alpha = (0, 0, \ldots,)$ se define $D^\alpha u = u$. Assim, com estas notações se define o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

onde a derivada é considerada no sentido das distribuições definidas no espaço $C_0^\infty(\Omega)$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ dotado da norma

$$||u||_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx$$

é de Banach e é chamado o espaço de Sobolev de ordem m. O espaço de Banach $W_0^{m,p}(\Omega)$ é formado pelo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$ ou seja

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}},$$

e no caso $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) dx D^\alpha v(x) dx. \tag{1.2}$$

É usual notar $W^{m,2}(\Omega)$ e $W_0^{m,2}(\Omega)$ como

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) \tag{1.3}$$

e

$$W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega). \tag{1.4}$$

Teorema 1.0.2. *(Imersões de Sobolev). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^m. Seja $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$, as seguintes imersões são compactas:*

1. *Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^\star}(\Omega)$, $\quad \forall q \in [p, q^*]$, $\quad$ onde $\quad \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.*

2. *Se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ *, então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, \infty)$.

3. *Se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ *, então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. *Neste caso* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ *onde* $k = \lfloor m - \frac{n}{p} \rfloor$.

   No caso $n = m = 1$ *temos* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, *isto é, existe uma constante* c *que depende de* Ω *e* p *tal que* $||u||_{L^\infty} \leq c||u||_{W^{1,p}}$. *Além disso a imersão é compacta. Particularmente tem-se* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *com imersão compacta para* $1 \leq p \leq \infty$.

Prova. Ver [1]. □

Teorema 1.0.3. *(Desigualdade de Poincaré). Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então existe uma constante positiva* c_p *que depende unicamente de* Ω *e* n *tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq c_p||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.5}$$

No decorre do trabalho vamos utilizar frequentemente esta notação para indicar a constante de Poincaré: c_p.

Observação 1.0.4. *Se* u *se anula numa parte aberta da fronteira de* Ω, *então a desigualdade de Poincaré também é válida.*
Em $H_0^1(\Omega)$ *temos que a expressão* $||\nabla(\cdot)||_{L^2(\Omega)}$ *define uma norma equivalente à norma* $||\cdot||_{H1(\Omega)}$.

Abaixo, duas desigualdades frequentemente utilizadas neste trabalho.

Lema 1.0.5. *(Desigualdade de Young). Sejam* $1 < p, q < \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b \geq 0. \tag{1.6}$$

Lema 1.0.6. *(Desigualdade de Young 2). Sejam* $1 < p, q < \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $\epsilon > 0$. *Então*

$$ab \leq \frac{\epsilon a^p}{p} + \frac{C_\epsilon b^q}{q}, \quad a, b \geq 0. \tag{1.7}$$

com $C_\epsilon = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$.

Como ferramenta na solução de equações diferenciais parciais temos a fórmula de Green que no caso de dimensão 1 é a fórmula de integração por partes.

Teorema 1.0.7. *(Fórmula de Ostrogradsky-Gauss).*
Seja Ω um aberto limitado de classe C^1 e Γ a sua fronteira. Seja F uma função de classe $C^1(\overline{\Omega})$ com valores em $\mathbb{R}^n$. Então

$$\int_\Omega div(F(x))dx = \int_\Gamma F(x) \cdot n(x) d\Gamma, \tag{1.8}$$

onde $n(x)$ é o vetor unitário normal exterior à Γ no ponto x.

Corolário 1.0.8. *(Fórmula de Green).*
Seja Ω um aberto limitado de classe C^1. Então para todas as funções $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $v \in C^1(\overline{\Omega})$ temos

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x) dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) d\Gamma - \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \tag{1.9}$$

onde $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u(x) \cdot n(x)$ isto é a derivada normal de u.

Semigrupos e outras resultados.

Definição 1.0.9. *Seja X um espaço de Banach. Uma família parametrizada de operadores lineares limitados $T(t) : X \to X$, onde $0 \leq t < \infty$, é chamada Semigrupo de Operadores Lineares Limitados em X se*

1. *$T(0) = I$ onde I é operador identidade em X.*

2. *$T(s + t) = T(s)T(t)$ para todo $t, s \geq 0$.*

Definição 1.0.10. *Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados em X é dito Semigrupo Fortemente Contínuo de operadores lineares limitados se*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Todo semigrupo fortemente contínuo será chamado semigrupo de classe C_0 ou C_0-semigrupo.

Definição 1.0.11. *A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo, $T(t)$, se*

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt}|_{t=0}, \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

onde $D(A)$ é o domínio do operador A definido como

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ existe\}.$$

Definição 1.0.12. *Um operador linear A definido em um espaço de Hilbert H, com produto interno denotado $(\cdot,\cdot)$, é dito dissipativo se para todo $x \in D(A)$,*

$$Re(Ax, x) \leq 0.$$

Definição 1.0.13. *Um semigrupo $T(t)$, com $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert H é dito semigrupo de contrações se*

$$||T(t)||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{1.10}$$

Definição 1.0.14. *Um C_0-semigrupo $T(t)$ é dito exponencialmente estável se existem constantes $w > 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$||T(t)||_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{-wt}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{1.11}$$

Teorema 1.0.15. *Um operador linear (não limitado) A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações, $T(t),\ t \geq 0$ se, e somente se,*

1. *A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = H$.*
2. *O resolvente $\rho(A)$ de A, contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$,*

$$||R(\lambda; A)|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Ver [30] para demonstração.

Teorema 1.0.16. *Seja A um operador linear com domínio denso $D(A)$ em H.*

1. *Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagen de $\lambda_0 I - A$ é todo o espaço H, isto é $R(\lambda_0 I - A) = H$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.*
2. *Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de C_0-semigrupo de contrações em H, então $R(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Ver [30] para demonstração.

Corolário 1.0.17. *Seja A um operador linear (não limitado) densamente definido em H, espaço de Hilbert. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $T(t),\ t \geq 0$ em H.*

Ver [30] para demonstração.

Teorema 1.0.18. *Seja $S(t)$ o C_0-semigrupo de contrações no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal do semigrupo. Logo $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}) \tag{1.12}$$

e

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} ||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty \tag{1.13}$$

se satisfazem.

Ver [31] para demonstração.

Teorema 1.0.19. *Seja $(S(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo num espaço de Hilbert H com gerador A e tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Logo para $\alpha > 0$ fixo,*

$$\begin{aligned} &||(i\lambda I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} = O(|\lambda|^{\alpha}), \quad \lambda \to \infty \\ \text{se e somente se} \quad & \\ &||S(t)A^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} = O(t^{-\frac{1}{\alpha}}), \quad t \to \infty. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ver [7] para demonstração.

Sobre operadores em espaços de Banach. Resolvente e outras definições.

Proposição 1.0.20. *Seja A um operador fechado, $A : D(A) \to X$, X espaço de Banach, e suponha que $A^{-1} : X \to D(A)$ existe. Logo $\sigma(A) \subset \dfrac{1}{\sigma(A^{-1})}$ onde σ é o espectro do operador. Note que no caso de A^{-1} ser um operador compacto, o espectro de A, $\sigma(A)$, é o espectro pontual.*

Proposição 1.0.21 (Critério para resolvente compacto)**.** *Seja A em um espaço de Banach$X$, com conjunto resolvente não vazio, $\rho(A) \neq \emptyset$. Então A tem operador resolvente compacto,*

$R(\lambda, \mathcal{A})$, para todo $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, se, e somente se, a imersão canônica $i : (D(A), ||\cdot||_A) \to X$ é compacta.

Definição 1.0.22. *Um operador $(A, D(A))$ não linear, em um espaço de Hilbert H, é dissipativo se*

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \leq 0, \quad \forall x_1,\ x_2 \in D(A). \tag{1.15}$$

No caso do espaço de Hilbert complexo

$$Re(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \leq 0, \quad \forall x_1,\ x_2 \in D(A). \tag{1.16}$$

Definição 1.0.23. *Seja A um operador com domínio $D(A)$ e imagem $R(A)$. Um operador $A : D(A) \subset X \to X^*$ com X espaço de Banach e X^* espaço dual, é monótono se o grafo do operador A satisfaz*

$$(x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2) \geq 0, \quad \forall x_1,\ x_2 \in D(A). \tag{1.17}$$

Um operador $A : D(A) \subset X \to X^*$ é maximal monótono se seu grafo não esta contido propriamente contido em outro subconjunto monótono do $X \times X^*$.

Definição 1.0.24. *Um operador $A : D(A) \subset X \to X^*$ com X^* espaço dual, é hemicontínuo se para todo $x, y \in X$,*

$$w - \lim_{\lambda \to 0} A(x + \lambda y) = Ax, \tag{1.18}$$

com $w - \lim$ limite fraco. A se diz coercivo se

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - x^0, Ax_n)||x_n||^{-1} = \infty, \tag{1.19}$$

para algum $x^0 \in X$ e para todo $x_n \in D(A)$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = \infty$.

Teorema 1.0.25. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $A : X \to X^*$ um operador monótono e hemicontínuo. Logo B é maximal monótono em $X \times X^*$.*

Corolário 1.0.26. *Se $A : X \to X^*$ é um operador monótono, hemicontínuo e coercivo em um espaço de Banach reflexivo, então A é sobrejetivo.*

Demonstração. Ver [4].

Capítulo 2

Sistema Termoelástico Tipo III.

2.1 O modelo

Neste Capítulo apresenta-se alguns resultados sobre o sistema termoelástico com lei de fluxo chamada do tipo III. Esta lei faz parte dos modelos de fluxo de calor propostos por Green e Naghdi em [18]. Inicialmente, descrevemos algumas características do sistema. O sistema termoelástico Tipo III é um sistema acoplado de caráter hiperbólico-hiperbólico. Em comparação com o sistema Termoelástico Clássico, ver (0.3)-(0.4) e (0.8), onde o fluxo de calor obedece à lei de Fourier i.e

$$q = q(x,t) = -\nabla\theta(x,t) \tag{2.1}$$

que fornece ao sistema o caráter hiperbólico-parabólico, no sistema Termoelástico Tipo III, a lei que descreve o fluxo de calor é dada por

$$q(x,t) = -\tilde{a}\nabla\theta(x,t) - \tilde{b}\nabla\int_{t_0}^{t}\theta(x,s)ds, \tag{2.2}$$

que dá ao sistema um caráter puramente hiperbólico. Esta reformulação do fluxo de calor tenta resolver o problema de propagação infinita do calor que apresenta no sistema termoelástico clássico e é devido a Green-Naghdi em [18]. De fato, neste artigo se faz uma reformulação do modelo termoelástico, e se apresenta três relações para o fluxo de calor dando origem a três sistemas termoelásticos conhecidos na literatura como termoelástico tipo, I, II e III, ver seção 8 de [18]. O caso do modelo termoelástico tipo I linear corresponde ao modelo termoelástico clássico, i.e, o fluxo de calor obedece a lei de Fourier. O

modelo termoelástico tipo II tem energia caracterizada por ser não dissipativa diferentemente do modelo termoelástico tipo III, fazendo deste último modelo interessante para o estudo do tipo de decaimento que apresenta a energia do sistema.

Como tem-se dito anteriormente, no modelo termoelástico clássico descrito em (0.3)-(0.4) e (0.8) substitui-se a lei de fluxo de calor de Fourier para q, pela fórmula (2.2) com o qual concluimos, salvo constantes,

$$\alpha_{tt} - \gamma\Delta\alpha_t - c\Delta\alpha + \delta div(u_t) = 0, \tag{2.3}$$

onde

$$\alpha(x,t) = \int_{t_0}^{t} \theta(x,s)ds. \tag{2.4}$$

Uma versão frequentemente utilizada por outros autores é dada derivando com respeito a t nesta última equação. Assim, em forma geral, o sistema termoelástico tipo III com condições iniciais e de fronteira se define como

$$u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla div(u) + \beta\nabla\theta = 0, \tag{2.5}$$

$$\theta_{tt} - \gamma\Delta\theta_t - c\Delta\theta + \delta div(u_{tt}) = 0, \tag{2.6}$$

para um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ regular e dados

$$\begin{cases} u(x,0) = u^0(x),\ u'(x,0) = u^1(x), & \textit{condições usuais da termoelástica} \\ \alpha(x,0) = 0, & \textit{condição pela lei tipo III,} \\ u = \tilde{u}, \quad \alpha = \tilde{\alpha}, & \textit{em} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $\tilde{u}$ e $\tilde{\alpha}$ são funções dadas, definidas na fronteira Γ. A função α definida anteriormente faz parte das funções básicas utilizadas para descrever os sistemas termoelásticos tipo I, II e III definidos em [18].

Como foi mencionado na Introdução, o sistema termoelástico clássico em domínios li-

mitados tem sido estudado intensamente nos últimos anos, contudo no caso do sistema termoelástico tipo III conhece-se muito pouco. Depois da publicação dos trabalhos de Green e Naghdi, vários autores obtiveram alguns resultados concernentes à unicidade e inestabilidade das soluções [36, 32, 34], estabilidade estrutural [33]. Em [45] se estuda o comportamento da energia, para o sistema termoelástico linear de tipo III para o problema de Cauchy em $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou em domínios limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n = 1, 2,\ 3$ e com condições de Dirichlet na fronteira usando o método da energia e método espectral. Em [35] se estuda a estabilidade exponencial de soluções para a termoelásticidade linear tipo III com diferentes condições de fronteira pelo método de energia e método espectral.

Seguindo as ideas introduzidas em [46] para a equação de onda, e que são utilizadas também em [27] para o sistema Termoelástico, onde se incorporam condições de fronteira dissipativas com objetivo de obter estabilidade exponencial em domínios limitados, vamos estudar o seguinte sistema termoelástico tipo III com dissipação na fronteira.

Seja Ω, um domínio em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, limitado, aberto e com fronteira Γ de classe C^2 composta de duas partes, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Os conjuntos Γ_1 e Γ_2 serão determinadas da seguinte forma. Seja x_0 um ponto em $\mathbb{R}^n$, $m(x) = x - x_0$ e $\nu(x) = (\nu_1(x), \cdots, \nu_n(x))$ um vetor normal unitário exterior à Γ no ponto $x \in \Gamma$, e defina-se

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x_0) &= \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\}, \\ \Gamma_2(x_0) &= \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

com a notação, $\Gamma_i(x_0) = \Gamma_i$. Nestas condições, seja o sistema termoelástico do tipo III

$$\rho u'' - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla div\ u + \beta \nabla \alpha' = 0 \qquad em \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{2.9}$$

$$c\alpha'' - k\Delta \alpha' - b\Delta \alpha + \beta div\ u' = 0 \qquad em \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{2.10}$$

com notação $'$ como a derivada de com respeito à variável t, e condições inicias e de fronteira

$$\begin{cases} \alpha' = \theta,\ u(x,0) = u^0(x),\ u'(x,0) = u^1(x), & \\ \alpha(x,0) = \alpha^0(x),\ \alpha'(x,0) = \alpha^1(x) & em\ \Omega, \\ \alpha = 0 & em\ \Gamma \times (0,\infty), \\ u = 0 & em\ \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(u)\nu + am\cdot\nu u + m\cdot\nu g(u') = 0 & em\ \Gamma_2 \times (0,\infty), \end{cases} \tag{2.11}$$

onde a função $a = a(x)$ é não negativa em Γ_2 satisfazendo

$$a \in C^1(\Gamma_2), \tag{2.12}$$

e

$$g = (g_1, \cdots, g_n) \in (C^1(\mathbb{R}^n))^n. \tag{2.13}$$

Além disso, λ e μ são chamadas as constantes de Lamé e satisfazem a equação (0.7). Para nosso estudo é importante redefinir a constante no termo final $divu'$ da equação (2.10) de forma que seja igual a constante β. Por isso encontramos redefinidas as constantes de (2.10) em comparação à equação (2.3). A constante β é o parâmetro de acoplamento relacionada com o coeficiente térmico, $b > 0$ é o parâmetro de conductividade térmica, $c > 0$ o calor especifico e $k > 0$ o parâmetro dado pela teoria de tipo III. Na seção seguinte se apresenta os resultados de estabilidades para nosso sistema termoelástico tipo III com dissipação na fronteira não linear.

2.2 Resultados Principais

O objetivo geral é estimar a taxa de decaimento da energia para o sistema termoelástico tipo III, (2.9)-(2.11). Vamos ver que este resultado, como acontece para sistemas com este tipo de condições de fronteira, entre eles por exemplo os problemas estudados em [46] e [27], depende principalmente das condições de fronteira, especificamente da parte dissipativa não linear definida pela função g e que intervém na parte elástica do sistema. Antes de apresentar o resultado principal para o sistema, vamos dar algumas definições que serão frequentemente utilizadas no Capítulo.

Seja Ω o domínio indicado anteriormente e Γ a sua fronteira. Seja $H^m(\Omega)$ com $m \in \mathbb{R}$ e $H_0^m(\Omega)$ com $m \geq 0$ como em (1.3) e (1.4). Se define

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) : w = 0 \ sobre \ \Gamma_1\}, \tag{2.14}$$

com Γ_1 como em (2.8). O espaço $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ é um espaço de Hilbert, com produto interno e norma definidos como

$$\langle u, v\rangle_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = \int_\Omega [\mu \nabla u \cdot \nabla v + (\lambda + \mu)(div(u))(div(v))]dx + \int_{\Gamma_2} am \cdot \nu u \cdot v d\Gamma, \tag{2.15}$$

$$||u||^2_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = \int_\Omega (\mu|\nabla u|^2 + (\lambda + \mu)|div(u)|^2)dx + \int_{\Gamma_2} am \cdot \nu |u|^2 d\Gamma, \tag{2.16}$$

onde $\nu(x) = (\nu_1(x), \cdots, \nu_n(x))$ é um vetor normal unitário exterior à Γ no ponto x e os operadores ∇ e div são como em (0.6). Pode-se mostrar que a norma $||\cdot||_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}$ é equivalente à norma usual induzida por $(H^1(\Omega))^n$, ver [26] e [27]. Seja R e a_0 definidas como

$$R = \max_{x \in \overline{\Omega}} |m(x)| = \max_{x \in \overline{\Omega}} |\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2|^{1/2} \ , \tag{2.17}$$

$$a_0 = \max_{x \in \Gamma_2} a(x). \tag{2.18}$$

Alem disso, seja γ a menor constante positiva tal que

$$\int_{\Gamma_2} |u|^2 d\Gamma \leq \gamma^2 ||u||^2_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}, \quad \forall u \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n. \tag{2.19}$$

A seguir se enuncia o resultado de estabilidade exponencial, Teorema 2.2.1, cuja demonstração será estabelecida logo após da prova de existência e unicidade global do sistema (2.9)-(2.11), no Teorema 2.3.4.

Teorema 2.2.1. *Seja* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ *definidas por (2.8) tal que*

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \tag{2.20}$$

$$\Gamma_1 \neq \emptyset \quad ou \quad a(x) \neq 0. \tag{2.21}$$

Além disso, suponha as seguintes condições para a função g

$$0 = g(0), \tag{2.22a}$$

$$0 \leq [g(u_1) - g(u_2)] \cdot (u_1 - u_2), \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{2.22b}$$

$$k_1|u|^2 \leq g(u) \cdot u \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n \quad com\ |u| \geq 1, \tag{2.22c}$$

$$k_1|u|^{p+1} \leq g(u) \cdot u, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n \quad com\ |u| \leq 1, \tag{2.22d}$$

$$k_2|u_1 - u_2| \geq |g(u_1) - g(u_2)|, \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n \quad com\ |u_1 - u_2| \geq 1, \tag{2.22e}$$

$$k_2|u_1 - u_2|^{\mathfrak{z}} \geq |g(u_1) - g(u_2)|, \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n \quad com\ |u_1 - u_2| \leq 1, \tag{2.22f}$$

para $k_1,\ k_2 > 0$ *e* $p > 0$ *e com* $0 < \mathfrak{z} \leq 1$ *logo,*

1. *Se* $p = \mathfrak{z} = 1$ *temos estabilidade exponencial para o sistema (2.9)-(2.11) isto é, existem* $M \geq 1$ *e* $\omega > 0$ *independente do dado inicial* $(u^0, u^1, \alpha^0, \alpha^1)$ *tais que*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.23}$$

2. *Se* $p + 1 > 2\mathfrak{z}$*, temos estabilidade polinomial, isto é, existem* $\tilde{\beta} > 0$ *e* $\omega > 0$ *tais que*

$$E(t) \leq 2E(0)\tilde{\beta}[1 + \tfrac{p+1-2\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}}\omega t]^{\frac{-2\mathfrak{z}}{p+1-2\mathfrak{z}}} \tag{2.24}$$

com

$$\omega = \frac{dE^{\sigma}(0)}{2[1 + dCE^{\sigma}(0)]} \tag{2.25}$$

e

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{[1 - dCE^{\sigma}(0)]} \tag{2.26}$$

A seguir, na seção 2.3 veremos a boa colocação do sistema. Finalmente, na seção 2.4, a prova de estabilidade do sistema.

2.3 Existência e Unicidade

Para estabelecer o resultado de existência e unicidade global para nosso sistema usaremos técnicas de semigrupos não lineares. Para isto, começamos definindo o espaço de fase de energia $\mathcal{H}$ e operadores auxiliares que permitem reescrever (2.9) - (2.11) como um problema de Cauchy na teoria de semigrupos não lineares visto que entre eles definiremos por exemplo, o operador não linear que denotamos por B e está associado com a dissipação não linear na fronteira.

Seja o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n \times H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega), \tag{2.27}$$

com produto interno e norma em $\mathcal{H}$, dada a partir da energia do sistema (2.9) - (2.11), como

$$\begin{aligned}\langle (u_1, v_1, \alpha_1, \zeta_1), (u_2, v_2, \alpha_2, \zeta_2)\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; & \int_\Omega [\rho v_1 \cdot \overline{v_2} + \mu \nabla u_1 \cdot \overline{\nabla u_2} + (\lambda+\mu) div(u_1)\overline{div(u_2)} \\ & +\; c\zeta_1\overline{\zeta_2} + k\nabla\alpha_1 \cdot \overline{\nabla\alpha_2}]dx + \int_{\Gamma_2} am \cdot \nu u_1 \cdot \overline{u_2} d\Gamma,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}||(u, v, \alpha, \zeta)||^2_{\mathcal{H}} \;=\; & \int_\Omega [\rho|v|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|div(u)|^2 + c|\zeta|^2 + k|\nabla\alpha|^2]dx \\ & + \int_{\Gamma_2} am \cdot \nu |u|^2 d\Gamma, \qquad (2.28) \\ =\; & ||u||^2_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \rho||v||^2_{(L^2(\Omega))^n} + c||\zeta||^2_{L^2(\Omega)} + k||\alpha||^2_{H^1_0(\Omega)},\end{aligned}$$

respectivamente.

Observação 2.3.1. *Note que a variável $\alpha \in H^1_0(\Omega)$ e, para simplificar, vamos normalizá-la dado que isto não influencia o análise da boa colocação do sistema, assim tomamos a norma como*

$$||\alpha||^2_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla\alpha|^2 dx. \tag{2.29}$$

Operador não linear.

Definimos o operador não linear B da seguinte forma

$$\langle Bu, v\rangle = \frac{1}{\rho}\int_{\Gamma_2} m\cdot \nu g(u)\cdot v d\Gamma, \quad \forall u, v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n. \tag{2.30}$$

Assim temos o seguinte resultado.

Lema 2.3.2. *Suponha que a função $g \in (C(\mathbb{R}^n))^n$. Suponha que existe uma constante $c > 0$ e um $\sigma \geq 0$ tais que para qualquer $u \in \mathbb{R}^n$ temos*

$$|g(u)| \leq \begin{cases} c[1+|u|^{n/(n-2)}], & n \geq 3, \\ c[1+|u|^{\sigma}], & n = 2, \end{cases} \tag{2.31}$$

então, o operador B se define de $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ injetivamente em $[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$. Além disso, B é hemicontínuo, isto é

$$\lim_{t\to 0}\langle B(u^1 + tu^2), v\rangle = \langle Bu^1, v\rangle \tag{2.32}$$

para todo $u^1,\ u^2,\ v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$.

Prova. Ver prova em [27]. □

Observação 2.3.3. *Note que, das condições (2.22a), (2.22e) e (2.22f) do Teorema 2.2.1, temos que a função g satisfaz (2.31) e portanto o operador B satisfaz (2.32).*

Boa colocação do sistema

Para descrever o problema de Cauchy associado ao sistema, vamos utilizar as equações (2.9)-(2.10) da seguinte forma. De (2.9) multiplicando por $v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ e integrando

em Ω temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (\rho u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla div\ u + \beta\nabla\alpha')\cdot \upsilon dx \\
&= \int_\Omega \rho u''\cdot\upsilon dx - \mu\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}\cdot\upsilon d\Gamma - (\lambda+\mu)\int_\Gamma \upsilon\cdot\nu div\ u d\Gamma \\
&\quad + \int_\Omega (\mu\nabla u\cdot\nabla\upsilon + (\lambda+\mu)div(v)div(\upsilon))dx + \beta\int_\Omega \nabla\alpha'\cdot\upsilon dx \\
&= \int_\Omega \rho u''\cdot\upsilon dx + \int_{\Gamma_2} am\cdot\nu u\cdot\upsilon d\Gamma + \int_\Omega (\mu\nabla u\cdot\nabla\upsilon + (\lambda+\mu)div(u)div(\upsilon))dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(u')\cdot\upsilon d\Gamma + \beta\int_\Omega \nabla\alpha'\cdot\upsilon dx,
\end{aligned}$$

onde os operadores $\Delta,\ \nabla$ e div são definidos em (0.6) e $\nabla\alpha = (\frac{\partial\alpha}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial\alpha}{\partial x_n})$. Desta forma podemos escrever em termos da dualidade $\langle,\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}$ o seguinte resultado,

$$0 = \langle u'',\upsilon\rangle + \langle Au,\upsilon\rangle + \langle Bu',\upsilon\rangle + \langle S_0\alpha',\upsilon\rangle, \tag{2.33}$$

sendo $A : (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \to [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ o operador definido como

$$\langle Au,\upsilon\rangle = \frac{1}{\rho}(u,\upsilon)_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n},\quad u\in(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n, \tag{2.34}$$

B como (2.30) e o operador $S_0 : H^1_0(\Omega)\to[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ definido como

$$\langle S_0\alpha',\upsilon\rangle = \frac{\beta}{\rho}(\nabla\alpha',\upsilon)_{(L^2(\Omega))^n},\quad \alpha'\in H^1_0(\Omega). \tag{2.35}$$

Assim, de (2.33) obtemos

$$u'' + Au + Bu' + S_0\alpha' = 0. \tag{2.36}$$

Procedemos de forma similar em (2.10). De fato, multiplicando por $\upsilon\in H^1_0(\Omega)$ temos

$$0 = \int_\Omega (c\alpha'' - k\Delta\alpha - b\Delta\alpha' + \beta div\ u')\cdot\upsilon dx,$$

assim

$$\alpha'' + kS_1\alpha + bS_1\alpha' + \beta S_2u' = 0, \tag{2.37}$$

com $S_1 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definido como

$$\langle S_1\phi, \upsilon\rangle = \frac{1}{c}(\nabla\phi, \nabla\upsilon)_{L^2(\Omega)}, \quad \phi \in H_0^1(\Omega), \tag{2.38}$$

e $S_2 : (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \to H^{-1}(\Omega)$ definido como

$$\langle S_2u', \upsilon\rangle = \frac{1}{c}(div\ u', \upsilon)_{L^2(\Omega)}, \quad u' \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n. \tag{2.39}$$

Desta forma, podemos definir para $\Phi = (u, u', \alpha, \alpha') \in \mathcal{H}$, o operador $\Lambda : D(\Lambda) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como

$$\Lambda\Phi \ = (-u', Au + Bu' + S_0\alpha', -\alpha', kS_1\alpha + bS_1\alpha' + \beta S_2u'), \tag{2.40}$$

com $D(\Lambda) \subset \mathcal{H}$ a determinar posteriormente. Logo o sistema (2.9) - (2.11) pode ser escrito como um problema abstrato de Cauchy da forma

$$\begin{cases} \Phi' + \Lambda\Phi = 0, \qquad t > 0, \\ \\ \Phi(0) = (u^0, u^1, \alpha^0, \alpha^1), \end{cases} \tag{2.41}$$

com $D(\Lambda) \subset \mathcal{H}$. Da definição dos operadores $A,\ B,\ S_i,\ i = 0, 1, 2$, podemos dar explicitamente o domínio $D(\Lambda)$, do operador não linear Λ, assim obtemos:

$$\begin{aligned} D(\Lambda) =& \{(u, w, \alpha, \zeta) \in \mathcal{H} : \Lambda(u, w, \alpha, \zeta) \in \mathcal{H}\} \\ =& \{(u, w, \alpha, \zeta) \in \mathcal{H} : w \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n,\ Au + Bw \in (L^2(\Omega))^n, \zeta \in H_0^1(\Omega)\}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Segue pela teoria de semigrupos não lineares o seguinte resultado.

Teorema 2.3.4. *Sejam Γ_1 e Γ_2 definidos em (2.8) tais que (2.20) e (2.21) sejam válidos. Além disso, seja g satisfazendo (2.22a), (2.22b) e (2.31). Logo, para qualquer dado inicial $(u^0, u^1, \alpha^0, \alpha^1) \in \mathcal{H}$, o sistema (2.9)-(2.11) tem uma única mild solution satisfazendo*

$$(u, u', \alpha, \alpha') \in C([0, \infty), \mathcal{H}). \tag{2.43}$$

O Teorema 2.3.4 utiliza a teoria de operadores não lineares estudada no Capítulo 3 de [4] e a prova se deduz com os seguintes lemas.

Lema 2.3.5. *Suponha g satisfaz (2.22a), (2.22b) e (2.31) logo o operador $-\Lambda$ é m-dissipativo.*

Prova. Seja $(u_1, w_1, \alpha_1, \zeta_1)$, $(u_2, w_2, \alpha_2, \zeta_2) \in D(\Lambda)$, logo pela definição da norma em $\mathcal{H}$ temos

$$\begin{aligned}\star &= Re(\langle \Lambda(u_1, w_1, \alpha_1, \zeta_1) - \Lambda(u_2, w_2, \alpha_2, \zeta_2), (u_1, w_1, \alpha_1, \zeta_1) - (u_2, w_2, \alpha_2, \zeta_2)\rangle_{\mathcal{H}}) \\ &= Re(\langle w_2 - w_1, u_1 - u_2\rangle_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \rho\langle A(u_1 - u_2) + B(w_1 - w_2) + S_0(\zeta_1 - \zeta_2), w_1 - w_2\rangle_{(L^2(\Omega))^n} \\ &\quad -k\langle \zeta_1 - \zeta_2, \alpha_1 - \alpha_2\rangle_{H^1_0(\Omega)} + c\langle kS_1(\alpha_1 - \alpha_2) + bS_1(\zeta_1 - \zeta_2) + \beta S_2(w_1 - w_2), \zeta_1 - \zeta_2\rangle_{L^2(\Omega)}),\end{aligned}$$

das definições da norma $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ e dos operadores A, B e S_i, $i = 0, 1, 2$ concluimos

$$\begin{aligned}\star = Re(&\textstyle\int_\Omega [\mu\nabla(w_2 - w_1)\cdot\overline{\nabla(u_1 - u_2)} + (\lambda+\mu)div(w_2 - w_1)\overline{div(u_1 - u_2)}]dx \\ &+ \textstyle\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu(w_2 - w_1)\cdot\overline{u_1 - u_2}d\Gamma \\ &- \textstyle\int_\Omega [\mu\nabla(u_1 - u_2)\cdot\overline{\nabla(w_2 - w_1)} + (\lambda+\mu)div(u_1 - u_2)\overline{div(w_2 - w_1)} \\ &-\beta\nabla(\zeta_1 - \zeta_2)\cdot\overline{(w_2 - w_1)}]dx - \textstyle\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu(u_1 - u_2)\cdot\overline{(w_2 - w_1)}d\Gamma \\ &+ \textstyle\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(w_1 - w_2)\cdot\overline{(w_1 - w_2)}d\Gamma + \int_\Omega [-k\nabla(\zeta_1 - \zeta_2)\cdot\overline{\nabla(\alpha_1 - \alpha_2)} \\ &+k\nabla(\alpha_1 - \alpha_2)\cdot\overline{\nabla(\zeta_1 - \zeta_2)} + b|\nabla(\zeta_1 - \zeta_2)|^2 + \beta div(w_1 - w_2)\overline{(\zeta_1 - \zeta_2)}]dx,\end{aligned}$$

e finalmente, pela fórmula de Ostrogradsky, (1.8), de (2.22a) e (2.22b) obtemos

$$\star = b||\nabla(\zeta_1 - \zeta_2)||^2_{(L^2(\Omega))^n} > 0.$$

Assim, concluimos a dissipação do operador $-\Lambda$.

Vejamos agora a maximalidade do operador. Mostremos que $(I + \Lambda)(D(\Lambda)) = \mathcal{H}$, isto é dado $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ mostremos que existe solução $(u, w, \alpha, \zeta) \in D(\Lambda)$ para o sistema

$$u - w = f_1, \tag{2.44}$$

$$w + Au + Bw + S_0\zeta = f_2, \tag{2.45}$$

$$\alpha - \zeta = f_3, \tag{2.46}$$

$$\zeta + S_1\alpha + bS_1\zeta + \beta S_2 w = f_4. \tag{2.47}$$

Usando (2.44) e (2.46) obtemos $u = w + f_1$ e $\alpha = \zeta + f_3$, logo solucionar o sistema (2.44)-(2.47) é equivalente a solucionar

$$\begin{cases} w + Aw + Bw + S_0\zeta = f_2 - Af_1, \\ \zeta + S_1\zeta + bS_1\zeta + \beta S_2 w = f_4 - S_1 f_3 \end{cases} \tag{2.48}$$

para $w \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ e $\zeta \in H^1_0(\Omega)$. De fato, se temos solução de (2.48) e posto que $f_1,\ w \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n,\ \zeta,\ f_3 \in H^1_0(\Omega),\quad f_2 \in (L^2(\Omega))^n$ e $f_4 \in L^2(\Omega)$ temos

$$S_0\zeta \in (L^2(\Omega))^n \quad e \quad Au + Bw = f_2 - w - S_0\zeta \in (L^2(\Omega))^n,$$

assim o vetor (u, w, α, ζ) pertence a $D(\Lambda)$.

A seguir, para resolver (2.48), definimos o operador $\mathcal{O}$ da forma:

$$\mathcal{O} : (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^1_0(\Omega) \to [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]' \times H^{-1}(\Omega) \tag{2.49}$$

tal que

$$\mathcal{O}(w, \zeta) = (\rho w + \rho Aw + \rho Bw + \rho S_0\zeta, c\zeta + cS_1\zeta + cbS_1\zeta + c\beta S_2 w), \tag{2.50}$$

assim, mostramos que operador $\mathcal{O}$ é sobrejetivo, provando que satisfaz as propriedades de monotonia, coercividade e hemicontinuidade, ver [4].

Monotonia do $\mathcal{O}$: seja $F = (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^1_0(\Omega)$, então temos:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{O}(w^1, \zeta^1) - \mathcal{O}(w^2, \zeta^2), (w^1, \zeta^1) - (w^2, \zeta^2)\rangle_{F',F} \\
&= \langle \rho(w^1 - w^2), w^1 - w^2\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \rho\langle Aw^1 - Aw^2, w^1 - w^2\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} \\
&+\rho\langle Bw^1 - Bw^2, w^1 - w^2\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \rho\langle S_0(\zeta^1 - \zeta^2), w^1 - w^2\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} \\
&+c\langle \zeta_1 - \zeta_2, \zeta_1 - \zeta_2, \rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} + c\langle S_1(\zeta^1 - \zeta^2), \zeta_1 - \zeta_2, \rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} \\
&+cb\langle S_1(\zeta^1 - \zeta^2), \zeta^1 - \zeta^2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} + c\beta\langle S_2(w^1 - w^2), \zeta^1 - \zeta^2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)},
\end{aligned}$$

e segundo a definição dos operadores (2.30), (2.34), (2.35) e (2.38) e (2.39) concluimos

$$\langle \mathcal{O}(w^1,\zeta^1) - \mathcal{O}(w^2,\zeta^2), (w^1,\zeta^1) - (w^2,\zeta^2)\rangle_{F',F} \geq 0. \tag{2.51}$$

De forma análoga mostramos a coercividade do $\mathcal{O}$, utilizando (2.22a) e (2.22b), e visto que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}(w,\zeta),(w,\zeta)\rangle_{F',F} &= \rho\langle w,w\rangle + \rho\langle Aw,w\rangle + \rho\langle Bw,w\rangle + \langle \rho S_0\zeta, w\rangle \\ &\quad + c\langle\zeta,\zeta\rangle + c\langle S_1\zeta,\zeta\rangle + cb\langle S_1\zeta,\zeta\rangle + c\beta\langle div(w),\zeta\rangle \\ &\geq ||w||^2_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + cb||\zeta||^2_{H^1_0(\Omega)}.\end{aligned}$$

Finalmente se deduz a hemicontinuidade do operador $\mathcal{O}$ devido ao Lema 2.3.2 e que os operadores A, S_1, S_2, são claramente hemicontínuos, isto é

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\langle \mathcal{O}[(w^1,\zeta^1) + t(w^2,\zeta^2)],(w,\zeta)\rangle_{F',F} \\ &= \lim_{t\to 0}\langle \rho\langle w^1+tw^2,w\rangle + \rho\langle A(w^1+tw^2),w\rangle + \rho\langle B(w^1+tw^2),w\rangle + \langle \rho S_0(\zeta^1+t\zeta^2),w\rangle \\ &\quad + c\langle\zeta^1+t\zeta^2,\zeta\rangle + c\langle S_1(\zeta^1+t\zeta^2),\zeta\rangle + cb\langle S_1(\zeta^1+t\zeta^2),\zeta\rangle + c\beta\langle S_2(w^1+tw^2),\zeta\rangle \\ &= \langle \mathcal{O}(w^1,\zeta^1),(w,\zeta)\rangle,\end{aligned}$$

para (w^1,ζ^1), (w^2,ζ^2), e (w,ζ) em $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^1_0(\Omega)$. Desta forma o operador $\mathcal{O}$ é sobrejetivo, logo o sistema (2.48) tem solução e finalizamos a prova do Lema, concluindo $-\Lambda$ é m-dissipativo. □

Lema 2.3.6. *Suponha (2.20) e além disso g satisfaz (2.22a), logo $D(\Lambda)$ é denso em $\mathcal{H}$.*

Prova. Para mostrar que $D(\Lambda)$ é denso em $\mathcal{H}$, definimos o seguinte conjunto auxiliar

$$\begin{aligned}D = \{\,(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathcal{H}: \quad & v_1\in(H^2(\Omega)\cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n, \quad v_2\in(H^1_0(\Omega))^n, \\ & v_3,\ v_4\in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega), \quad \mu\tfrac{\partial v_1}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)div(v_1)\nu + am\cdot\nu v_1 = 0 \ em\ \Gamma_2\},\end{aligned}$$

e mostramos as seguintes duas propriedades: $D\subset D(\Lambda)$ e D denso em $\mathcal{H}$. Para esta última propriedade, devido às densidades de $(C^\infty_0(\Omega))^n$ em $(L^2(\Omega))^n$ $n\geq 1$, basta mostrar a densidade de D em $\mathcal{H}$ mostrando a densidade na primeira coordenada, isto é, em

$(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Desta forma seja

$$W = \{w \in (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n : \mu\frac{\partial w}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(w)\nu + am\cdot\nu w = 0 \ em\ \Gamma_2\}$$

é mostremos que W é denso em $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Seja $v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ tal que

$$(v,w)_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = 0, \qquad para\ todo\ w \in W.$$

Pela teoria de regularidade elíptica, para todo $f \in (L^2(\Omega))^n$ fixo, o problema elíptico

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla div u = f & em\ \Omega \\ u = 0 & em\ \Gamma_1 \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(u)\nu + am\cdot\nu u = 0 & em\ \Gamma_2, \end{cases}$$

possui uma solução $u \in W$. Desta forma, tendo as igualdades

$$(f,v)_{(L^2(\Omega))^n} = (u,v)_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = 0,$$

se segue que $v = 0$. Logo, pelo teorema de Hanh-Banach, W é denso em $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$.

A inclusão $D \subset D(\Lambda)$ é satisfeita pelo seguinte resultado. Seja $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in D$, então $v_2 = 0$ em Γ e $v_1 \in (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Seja $w \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$, então pela condição (2.22a), definição dos operadores $A,\ B$ e sendo $A + B \in [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$, temos

$$\begin{aligned} \langle Av_1 + Bv_2, w\rangle &= \frac{1}{\rho}(v_1,w)_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(v_2)w d\Gamma \\ &= \frac{1}{\rho}(v_1,w)_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} \\ &= \frac{1}{\rho}\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu v_1 w d\Gamma + \frac{1}{\rho}\int_\Omega (\mu\nabla v_1\nabla w + (\lambda+\mu)div(v_1)div(w))dx \\ &= -\frac{1}{\rho}\int_\Omega (\mu\Delta v_1 + (\mu+\lambda)\nabla div(v_1))\cdot w dx. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Como $v_1 \in (H^2(\Omega))^n$ temos que existe uma constante $C > 0$, e dada (2.52), a constante

depende de v_1, tal que

$$|\langle Av_1 + Bv_2, w\rangle| \leq C||w||_{(L^2(\Omega))^n}. \tag{2.53}$$

Sendo $(C_0^\infty(\Omega))^n$ denso em $(L^2(\Omega))^n$ temos que $Av_1 + Bv_2 \in [(L^2(\Omega))^n]'$ e pela igualdade (2.52) e teorema de Riesz, $Av_1 + Bv_2 \in (L^2(\Omega))^n$. Do anterior tem-se a densidade $D(\Lambda)$ em $\mathcal{H}$.

Dos resultados dos Lemas 2.3.5, 2.3.6 e pela teoria de semigrupos de operadores não lineares, ver [4], temos o resultado do Teorema 2.3.4. □

2.4 Estabilidade.

Nesta seção mostra-se o resultado de estabilidade do sistema associado a (2.9)-(2.11) quando $t \to \infty$, apresentado no Teorema 2.2.1. Vamos mostrar como o decaimento exponencial ou decaimento polinomial da energia depende das condições na função g. Este propósito será obtido utilizando as técnicas do método de Lyapunov. A principal ideia do método é encontrar um funcional que permita chegar às conclusões desejadas.

Para iniciar com o método de Lyapunov, definimos a energia do sistema como sendo,

$$\begin{aligned} E(t) = \ & \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\rho|u'|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|divu|^2 + c|\alpha'|^2 dx + k|\nabla\alpha|^2\right) dx \\ & + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma, \end{aligned} \tag{2.54}$$

a qual satisfaz

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(u')u' d\Gamma - b\int_\Omega |\nabla\alpha'|^2 dx. \tag{2.55}$$

Observe que das condições do Teorema 2.2.1, $g(u)\cdot u > 0$ assim temos que a energia é descrescente. Para a prova deste Teorema consideremos a seguinte notação. Denotando por $(\cdot,\cdot)$ (respectivamente $||\cdot||$) o produto interno em $L^2(\Omega)^n$ (a norma em $L^2(\Omega)^n$),

introduzimos os seguintes funcionais

$$F(t) = \int_\Omega [2\rho u_i'(m \cdot \nabla u_i) + (n-1)(\rho u_i' u_i) + c\alpha'\alpha + \frac{b}{2}|\nabla\alpha|^2 + \beta(div(u)\alpha)]dx \qquad (2.56)$$

e

$$V(t) = E(t) + d[E(t)]^\sigma F(t), \qquad (2.57)$$

com d e σ a determinar-se posteriormente.

Como podemos encontrar em [46], o funcional F é utilizado em sistemas que envolvem equacões de onda com dissipação na fronteira e os funcionais do tipo $V(t)$ são frequentemente utilizados em dissipações não lineares na fronteira.

A prova do Teorema 2.2.1 será feita através de vários lemas. Dos Lemas, podemos dizer brevemente que o Lema 2.4.3 se centra em aplicar identidade de Green e propriedades geométricas de Γ descritas em (2.8), e no caso do Lema 2.4.4 estabelecemos conclusões que dependem fortemente das condições de fronteira (2.11). Inicialmente vejamos que o funcional $F(t)$ é equivalente com a energia $E(t)$.

Lema 2.4.1. *O funcional $F(t)$ definido por (2.56), verifica*

$$|F(t)| \leq CE(t) \qquad (2.58)$$

com $C > 0$.

Prova. Sejam C_0 e c_p as constantes de Poincaré para as variáveis u e α respectivamente, e R como em (2.17). Então temos

$$\begin{aligned}
|F(t)| &= |\int_\Omega [2\rho u_i'(m \cdot \nabla u_i) + (n-1)(\rho u_i' u_i) + c\alpha'\alpha + \frac{b}{2}|\nabla\alpha|^2 + \beta(div(u)\alpha)]dx| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega [2\rho|u_i'|^2 + 2\rho\frac{R^2}{\mu}\mu|\nabla u_i|^2 + (n-1)\rho^2|u_i'|^2 + C_0\frac{(n-1)}{\mu}\mu|\nabla u_i|^2 \\
&\quad + c|\alpha'|^2 + c_p(\tfrac{c}{k} + \tfrac{b}{2kc_p} + \tfrac{\beta}{k})k|\nabla\alpha|^2 + \tfrac{\beta}{(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)|divu|^2]dx \\
&\leq CE(t)
\end{aligned}$$

onde $C = \max\{(2+(n-1)\rho), (2\rho\frac{R_0^2}{\mu} + C_0\frac{(n-1)}{\mu}), c_p(\frac{c}{k} + \frac{b}{2kc_p} + \frac{\beta}{k}), \frac{\beta}{(\lambda+\mu)}\}$. □

Observação 2.4.2. *Da desigualdade (2.58) é fácil mostrar que o funcional $V(t)$ satisfaz*

$$(1 - CdE^{\sigma}(t))E(t) \leq V(t) \leq (1 + CdE^{\sigma}(t))E(t). \tag{2.59}$$

Lema 2.4.3. *Seja o funcional $F(t)$ definido por (2.56), então*

$$\begin{aligned} F'(t) = &\rho\int_{\Gamma_2} |u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma - 2E(t) + \int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1}\mu|\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma \\ &+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}|div(u)|^2 m\cdot\nu d\Gamma \\ &-(n-1)\int_{\Gamma_2}[am\cdot\nu|u|^2 + m\cdot\nu g(u')\cdot u]dx - \int_{\Gamma_2}\mu|\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma \\ &-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}|div(u)|^2 m\cdot\nu d\Gamma - 2\int_{\Gamma_2}[am\cdot\nu u_i + m\cdot\nu g_i(u')](m\cdot\nabla u_i)d\Gamma \\ &-2\int_{\Omega}\beta\frac{\partial\alpha'}{\partial x_i}(m\cdot\nabla u_i)dx + n\int_{\Omega}\beta\alpha' div(u)dx + 2\int_{\Omega} c|\alpha'|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Prova. Primeiro note que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\rho u'\cdot u dx\right) = \int_{\Omega}\rho u''\cdot u dx + \int_{\Omega}\rho|u'|^2 dx, \tag{2.61}$$

Além disso, de (2.9) temos

$$\int_{\Omega}\rho u''\cdot u\ dx = \int_{\Omega}(\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla div\ u - \beta\nabla\alpha')\cdot u dx. \tag{2.62}$$

Lembrando a definição (0.6), vamos omitir a notação de somatória no decorrer das provas. Usando fórmula de Green tem-se as seguintes expressões para os termos na direita de (2.62)

$$\int_{\Omega}\Delta u\cdot u dx = \int_{\Gamma}\nabla u_i\cdot\nu u_i d\Gamma - \int_{\Omega}|\nabla u_i|^2 dx, \tag{2.63}$$

e

$$\int_{\Omega}\nabla div(u)\cdot u dx\ \ = \int_{\Gamma} div(u)u_i\cdot\nu_i d\Gamma - \int_{\Omega}|div(u)|^2 dx. \tag{2.64}$$

Assim, de (2.61) e (2.64) temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \rho u'\cdot u dx\right) &= \int_\Omega \rho|u'|^2dx - \int_\Omega \mu|\nabla u_i|^2dx + \int_\Gamma \mu\nabla u_i\cdot \nu u_i d\Gamma \\ &-(\lambda+\mu)\int_\Omega |div(u)|^2dx + (\lambda+\mu)\int_\Gamma div(u)u\cdot\nu d\Gamma \\ &-\int_\Omega \beta\nabla\alpha'\cdot u dx.\end{aligned} \tag{2.65}$$

Por outro lado, note que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u_i'(m\cdot\nabla u_i)dx\right) = \int_\Omega [u_i''(m\cdot\nabla u_i) - \frac{n}{2}|u_i'|^2]dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma |u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma, \tag{2.66}$$

pois

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_i'(m\cdot\nabla u_i')dx &= \int_\Omega (u_i'm)\cdot\nabla u_i' dx = \int_\Omega div(|u_i'|^2 m)dx - \int_\Omega u_i' div(u_i'm)dx \\ &= \int_\Gamma |u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma - n\int_\Omega |u_i'|^2dx - \int_\Omega u_i'(m\cdot\nabla u_i')dx.\end{aligned}$$

Além disso, como

$$\rho\int_\Omega u''\cdot(m\cdot\nabla u)\ dx = \int_\Omega(\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla div\ u - \beta\nabla\alpha')\cdot(m\cdot\nabla u)\ dx, \tag{2.67}$$

De (2.66)-(2.67) temos que $\dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_\Omega \rho u_i'(m\cdot\nabla u_i)dx\right)$ satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\int_\Omega \rho u_i'(m\cdot\nabla u_i)dx &= \frac{\rho}{2}\int_{\Gamma_2}|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma - \frac{n\rho}{2}\int_\Omega |u_i'|^2dx + \frac{n}{2}\int_\Omega \mu|\nabla u_i|^2dx \\ &-\int_\Omega \mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx - \int_\Gamma \frac{\mu}{2}|\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma + \int_\Gamma \mu\nabla u_i\cdot\nu(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma \\ &-\tfrac{(\lambda+\mu)}{2}\int_\Gamma |div(u)|^2 m\cdot\nu d\Gamma + \int_\Gamma(\lambda+\mu)div(u)\nu_i(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma \\ &+\int_\Omega \frac{(\lambda+\mu)n}{2}|div\ u|^2dx - \int_\Omega(\lambda+\mu)|div\ u|^2dx - \int_\Omega \beta\nabla\alpha'(m\cdot\nabla u_i)dx,\end{aligned}$$

e simplificando obtemos

$$\frac{d}{dt}(\rho\int_\Omega u_i'(m\cdot\nabla u_i)\ dx) = \frac{\rho}{2}\int_{\Gamma_2}|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma - \frac{n\rho}{2}\int_\Omega |u_i'|^2 dx + \frac{n-2}{2}\int_\Omega \mu|\nabla u_i|^2 dx$$

$$-\int_\Gamma \frac{\mu}{2}|\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma + \int_\Gamma \mu\nabla u_i\cdot\nu(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma \tag{2.68}$$

$$-\frac{(\lambda+\mu)}{2}\int_\Gamma |div(u)|^2 m\cdot\nu d\Gamma + \int_\Gamma(\lambda+\mu)div(u)\nu_i(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma$$

$$+\int_\Omega \frac{(n-2)(\lambda+\mu)}{2}|div\ u|^2 dx - \int_\Omega \beta\nabla\alpha'(m\cdot\nabla u_i)dx.$$

Em (2.65) e (2.68) temos uma expressão geral sobre as condições da fronteira, sem atender por enquanto a condição em Γ_2.

Utilizando a equação (2.10) e lembrando que α se anula na fronteira, temos o seguinte resultado

$$\int_\Omega (c\alpha'' - k\Delta\alpha - b\Delta\alpha' + \beta div\ u')\,\alpha = 0,$$

logo,

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega c\alpha'\alpha dx\right) - \int_\Omega c|\alpha'|^2 dx - \int_\Gamma k\nabla\alpha\cdot\nu\alpha d\Gamma + \int_\Omega k|\nabla\alpha|^2 dx$$

$$-\int_\Gamma b\nabla\alpha'\cdot\nu\alpha d\Gamma + \int_\Omega \frac{b}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\alpha|^2 dx + \int_\Omega \beta\frac{d}{dt}(div(u)\alpha)dx - \int_\Omega \beta(div(u)\alpha')dx.$$

Assim, como $\alpha = \int_{t_0}^t \theta(x,s)ds = 0$ em Γ, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(c\alpha'\alpha + \frac{b}{2}|\nabla\alpha|^2 + \beta div(u)\alpha\right)dx = \int_\Omega [c|\alpha'|^2 - k|\nabla\alpha|^2 + \beta div(u)\alpha']dx. \tag{2.69}$$

Como $u = 0$ em Γ_1, temos

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial\nu}\nu_k \quad e \quad |\nabla u_i|^2 = |\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2, \quad em\ \ \Gamma_1 \tag{2.70}$$

assim, utilizando (2.65), (2.68) e (2.69), organizando os termos de modo conveniente e integrando por partes em alguns outros termos, obtemos

$$\begin{aligned}
F'(t)= \ & \rho\int_{\Gamma_2}|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma-\int_\Omega[\rho|u_i'|^2+\mu|\nabla u_i|^2+(\lambda+\mu)|div\ u|^2+k|\nabla\alpha|^2+c|\alpha'|^2]dx\\
&-\int_\Gamma\mu|\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma+2\int_\Gamma\mu\nabla u_i\cdot\nu(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma-(\lambda+\mu)\int_\Gamma|div(u)|^2 m\cdot\nu d\Gamma\\
&+2\int_\Gamma(\lambda+\mu)div(u)\nu_i(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma-2\int_\Omega\beta\nabla\alpha'(m\cdot\nabla u_i)dx\\
&+(n-1)\int_\Omega\beta\alpha' div(u)dx+\int_\Omega\beta(div(u)\alpha')dx\\
&+(n-1)\int_\Gamma[\mu\nabla u_i\nu(u)+(\lambda+\mu)div(u)u\cdot\nu]dx+2\int_\Omega c|\alpha'|^2dx,
\end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned}
F'(t)= \ & \rho\int_{\Gamma_2}|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma-\int_\Omega[\rho|u_i'|^2+\mu|\nabla u_i|^2+(\lambda+\mu)|div\ u|^2+k|\nabla\alpha|^2+c|\alpha'|^2]dx\\
&+\int_{\Gamma_1}\mu|\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma-\int_{\Gamma_2}\mu|\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma+2\mu\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_i}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma\\
&+(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1}|div(u)|^2 m\cdot\nu d\Gamma-(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}|div(u)|^2 m\cdot\nu d\Gamma\\
&+2(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2}div(u)\nu_i(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma \qquad (2.71)\\
&-2\int_\Omega\beta\nabla\alpha'(m\cdot\nabla u_i)dx+(n-1)\int_\Omega\beta\alpha' div(u)dx+\int_\Omega\beta(div(u)\alpha')dx\\
&+(n-1)\int_{\Gamma_2}[\mu\nabla u_i\nu(u)+(\lambda+\mu)div(u)u\cdot\nu]dx.+2\int_\Omega c|\alpha'|^2dx.
\end{aligned}$$

Note que completando os termos da energia $E(t)$, ver (2.54), e pela condição em Γ_2 concluimos facilmente (2.60).

□

Lema 2.4.4. *Suponha válidas as condições geométricas (2.8), as condições (2.17)-(2.19) e além disso suponha que a função $a(x)$ satisfaz as seguintes condições*

$$\begin{aligned} a_0^2 &< \frac{\mu}{4R^3\gamma^2} \qquad \text{para } n=2, \qquad (2.72)\\ a_0 &\leq \frac{(n-2)\mu}{2R^2} \qquad \text{para } n\geq 3, \qquad (2.73)\end{aligned}$$

então podemos concluir a seguinte desigualdade para o funcional $F(t)$:

$$\begin{aligned} F'(t) \leq & \int_{\Gamma_2}\rho|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma + 2\int_\Omega [\frac{\beta^2R^2}{2\epsilon\mu}+\frac{c_0n^2\beta^2}{4(\lambda+\mu)\epsilon}+cc_0]|\nabla\alpha'|^2d\Gamma \\ & -E(t)+\int_{\Gamma_2}[\frac{2R^2}{\mu}+(n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]m\cdot\nu|g(u_i')|^2d\Gamma \end{aligned} \qquad (2.74)$$

com

$$\begin{cases} \epsilon < \frac{1-2P}{3} & \text{se (2.72) onde } P \text{ é igual a } P = R\gamma^2[\frac{2a_0R^2}{\mu}]a_0, \\ \epsilon < \frac{1}{3} & \text{se (2.73).} \end{cases}$$

Prova. Aplicando a desigualdade de Young (1.6) obtemos facilmente

i)

$$-2\int_{\Gamma_2}[am\cdot\nu u+m\cdot\nu g(u')](m\cdot\nabla u_i)d\Gamma \leq 2\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu[\frac{a^2R^2}{\mu}|u|^2+\frac{R^2}{\mu}|g(u')|^2+\frac{\mu}{2}|\nabla u_i|^2]d\Gamma, \qquad (2.75)$$

ii)

$$-2\int_\Omega \beta\nabla\alpha'(m\cdot\nabla u_i)dx \leq 2\int_\Omega\frac{\beta^2R^2}{2\epsilon\mu}|\nabla\alpha'|^2+2\int_\Omega\frac{\mu\epsilon}{2}|\nabla u_i|^2dx, \qquad (2.76)$$

iii) denotando por c_0 a constante para desigualdade de Poincaré na variável α temos as seguintes desigualdades para α':

$$\begin{aligned} n\int_\Omega\beta\alpha' div(u)dx &\leq \frac{n^2}{2(\lambda+\mu)\epsilon}\int_\Omega\beta^2|\alpha'|^2dx+\frac{(\lambda+\mu)\epsilon}{2}\int_\Omega|div(u)|^2dx \\ &\leq \frac{c_0n^2}{2(\lambda+\mu)\epsilon}\int_\Omega\beta^2|\nabla\alpha'|^2dx+\frac{(\lambda+\mu)\epsilon}{2}\int_\Omega|div(u)|^2dx \end{aligned} \qquad (2.77)$$

e

$$2\int_\Omega c|\alpha'|^2dx \leq 2\int_\Omega cc_0|\nabla\alpha'|^2dx, \qquad (2.78)$$

iv) Pela desigualdade dada por (2.19), definição (2.17) e desigualdade de Poincaré para a variável u, cuja constante denotamos como c_p, temos

$$-(n-1)\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(u')\cdot u d\Gamma \leq (n-1)\int_{\Gamma_2}\frac{(m\cdot\nu)^{1/2}\gamma\sqrt{Rc_p}}{\sqrt{\epsilon\mu}}|g(u')|\frac{(m\cdot\nu)^{1/2}\sqrt{\epsilon\mu}}{\gamma\sqrt{Rc_p}}|u|d\Gamma$$

$$\leq \int_\Omega \frac{\epsilon\mu}{2}|\nabla u_i|^2 dx + \int_{\Gamma_2}(n-1)^2\frac{\gamma^2 c_p R m\cdot\nu|g(u_i')|^2}{2\mu\epsilon}d\Gamma. \tag{2.79}$$

Além disso, usando (2.75)-(2.79) em (2.60) e pelas condições geométricas em Γ temos

$$F'(t) \leq \int_{\Gamma_2}\rho|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma + 2\int_\Omega[\frac{\beta^2R^2}{2\epsilon\mu}+\frac{c_0n^2\beta^2}{4(\lambda+\mu)\epsilon}+cc_0]|\nabla\alpha'|^2dx - 2E(t)+3\epsilon E(t)$$

$$+\int_{\Gamma_2}[\frac{2aR^2}{\mu}-(n-2)]am\cdot\nu|u|^2d\Gamma+\int_{\Gamma_2}[\frac{2R^2}{\mu}+(n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]m\cdot\nu|g(u_i')|^2d\Gamma. \tag{2.80}$$

Por outro lado, no caso (2.73), tem- se (2.74) com $\epsilon<\frac{1}{3}$ visto que

$$\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u_i|^2[-n+2+\frac{2aR^2}{\mu}]d\Gamma\leq 0.$$

No caso (2.72), por (2.17)-(2.19),

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2}[\frac{2aR^2}{\mu}-(n-2)]am\cdot\nu|u|^2d\Gamma &\leq [2-n+\frac{2a_0R^2}{\mu}]a_0\int_{\Gamma_2}m\cdot\nu|u_i|^2d\Gamma\\ &\leq P||u||^2_{H_{\Gamma_1}}\\ &\leq 2PE(t),\end{aligned}$$

com $P=R\gamma^2[\frac{2a_0R^2}{\mu}]a_0$. Portanto,

$$F'(t) \leq \int_{\Gamma_2}\rho|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma + 2\int_\Omega[\frac{\beta^2R^2}{2\epsilon\mu}+\frac{c_0n^2\beta^2}{4(\lambda+\mu)\epsilon}+cc_0]|\nabla\alpha'|^2dx$$

$$-2E(t)+3\epsilon E(t)+2PE(t)+\int_{\Gamma_2}[\frac{2R^2}{\mu}+(n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]m\cdot\nu|g(u_i')|^2d\Gamma.$$

e como $2P<1$, logo tem-se (2.74) com $\epsilon<\frac{1-2P}{3}$. □

Finalizamos assim as ferramentas necessárias para provar o Teorema 2.2.1 que se a-

presenta a seguir.

Prova do Teorema 2.2.1. Da definição do funcional V dado por (2.57), do resultado $E'(t) \leq 0$, da desigualdade (2.58) e do resultado (2.74) temos

$$\begin{aligned} V' &= E' + d\sigma(E^{\sigma-1})E'F + dF'E^{\sigma} \\ &\leq (1 - d\sigma CE^{\sigma})E' - dE^{\sigma+1} + dE^{\sigma}\int_{\Gamma_2} \rho m\cdot\nu|u_i'|^2 d\Gamma \\ &+ dE^{\sigma}2[\frac{\beta^2R^2}{2\epsilon\mu} + \frac{c_0n^2\beta^2}{4(\lambda+\mu)\epsilon} + cc_0]||\nabla\alpha'||^2 + dE^{\sigma}\int_{\Gamma_2}[\frac{2R^2}{\mu} + (n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]m\cdot\nu|g(u_i')|^2 d\Gamma, \end{aligned}$$

e substituindo E' como em (2.55) concluímos

$$\begin{aligned} V' \leq\ & -(1 - d\sigma CE^{\sigma})\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(u')\cdot u' d\Gamma - dE^{\sigma+1} \\ & + \left(dE^{\sigma}[\frac{\beta^2R^2}{\epsilon\mu} + \frac{c_0n^2\beta^2}{2(\lambda+\mu)\epsilon} + 2cc_0 + b\sigma C] - b\right)||\nabla\alpha'||^2 \qquad (2.81) \\ & + dE^{\sigma}\int_{\Gamma_2}\left(\rho|u_i'|^2 + [\frac{2R^2}{\mu} + (n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]|g(u_i')|^2\right)m\cdot\nu d\Gamma. \end{aligned}$$

Seguindo as ideias de [46] e [27] vemos que a partir desta última expressão se apresentam os casos 1 e 2 descritos no Teorema 2.2.1, que surgem do estudo dos termos

$$\int_{\Gamma_2}(\rho|u_i'|^2 + [\frac{2R^2}{\mu} + (n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]|g(u_i')|^2)m\cdot\nu d\Gamma$$

e

$$\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(u')\cdot u' d\Gamma$$

que são os termos centrais da análise de decaimento do sistema.

Caso 1. Sejam $p = \mathfrak{z} = 1$. Usando (2.22c)-(2.22f), escolhemos $\sigma = 0$ em (2.81). As-

sim temos:

$$\begin{aligned}
V' &\leq -\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(u')\cdot u' d\Gamma - dE + \left(d[\frac{\beta^2R^2}{\epsilon\mu}+\frac{c_0n^2\beta^2}{2(\lambda+\mu)\epsilon}+2cc_0]-b\right)||\nabla\alpha'||^2 \\
&\quad +d\int_{\Gamma_2}\left(\rho|u_i'|^2+[\frac{2R^2}{\mu}+(n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]|g(u_i')|^2\right)m\cdot\nu d\Gamma \\
&\leq -\int_{\Gamma_2} k_1 m\cdot\nu|u'|^2 d\Gamma - dE + \left(d[\frac{\beta^2R^2}{\epsilon\mu}+\frac{c_0n^2\beta^2}{2(\lambda+\mu)\epsilon}+2cc_0]-b\right)||\nabla\alpha'||^2 \\
&\quad +d\int_{\Gamma_2}\left(\rho|u_i'|^2+[\frac{2R^2}{\mu}+(n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]k_2|u_i'|^2\right)m\cdot\nu d\Gamma \\
&\leq -dE+\left(d[\frac{\beta^2R^2}{\epsilon\mu}+\frac{c_0n^2\beta^2}{2(\lambda+\mu)\epsilon}+2cc_0]-b\right)||\nabla\alpha'||^2 \\
&\quad +\int_{\Gamma_2}\left(d\rho+d[\frac{2R^2}{\mu}+(n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]k_2-k_1\right)|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma,
\end{aligned}$$

em consequência tomando d da seguinte forma,

$$d=\min\left\{b/[\frac{\beta^2R^2}{\epsilon\mu}+\frac{c_0n^2\beta^2}{2(\lambda+\mu)\epsilon}+2cc_0], k_1/(\rho+[\frac{2R^2}{\mu}+(n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]k_2)\right\}$$

temos,

$$V'(t)\leq -dE(t).$$

É claro que a partir desta desigualdade obtemos o resultado de decaimento exponencial, visto que da desigualdade (2.59), integrando no intervalo $[0,t]$ e apurando a escolha da constante d da seguinte forma

$$d=\min\left\{b/[\frac{\beta^2R^2}{\epsilon\mu}+\frac{c_0n^2\beta^2}{2(\lambda+\mu)\epsilon}+2cc_0], k_1/(\rho+[\frac{2R^2}{\mu}+(n-1)^2\frac{\gamma^2c_pR}{2\mu\epsilon}]k_2), \frac{1}{C}\right\}, \tag{2.82}$$

conseguimos

$$V'(t) \leq \frac{-d}{1+dC}V(t)$$

e daí

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{1}{[1-dC]}V(t) \leq \frac{1}{[1-dC]}V(0)e^{-\frac{dt}{[1+dC]}} \\ &\leq \frac{[1+dC]}{[1-dC]}E(0)e^{-\frac{dt}{[1+dC]}}. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Caso 2. $p+1 > 2\mathfrak{z}$.

Inicialmente vamos estimar o termo

$$E^{\sigma}\int_{\Gamma_2}(\rho|u_i'|^2 + [\frac{2R^2}{\mu} + (n-1)^2\frac{\gamma^2 c_p R}{2\mu\epsilon}]|g(u_i')|^2)m\cdot\nu d\Gamma, \tag{2.84}$$

utilizando principalmente as desigualdades de Young e de Hölder, e as condições (2.22a) - (2.22f). A idea é estimar (2.84) por termos da forma: $E^{c\sigma}$ e termos integrais da forma

$$B_1\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}\rho(m\cdot\nu)(u'\cdot g(u'))d\Gamma$$

e

$$B_2\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\geq 1\}}\rho(m\cdot\nu)(u'\cdot g(u'))d\Gamma$$

com c, B_1 e B_2 a serem determinados posteriormente. O procedimento será feito em vários passos, iniciando com o estudo da integral

$$E^{\sigma}\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}\rho m\cdot\nu|u_i'|^{2\mathfrak{z}}d\Gamma, \tag{2.85}$$

para um $\mathfrak{z} > 0$ arbitrário. Consequentemente a limitação para a integral (2.84) e finalmente o estudo em (2.81).

Passo 1. Estimativa para (2.85). Sejam $\mathfrak{z}$, b constantes positivas arbitrárias, então pela desigualdade de Young (1.6) (com pares conjugados s, t) e pela desigualdade de

Hölder (1.1) (com pares conjugados $\frac{1}{\tau},\ \frac{1}{(1-\tau)}$) respectivamente, temos

$$
\begin{aligned}
& E^{\sigma}\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}\rho m\cdot\nu|u_i'|^{2\mathfrak{z}}d\Gamma \\
& \leq \frac{(E^{\sigma}b)^{s}}{s}+\frac{1}{tb^{t}}(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}(\rho m\cdot\nu)^{\tau}(\rho m\cdot\nu)^{(1-\tau)}|u_i'|^{2\mathfrak{z}}d\Gamma)^{t} \qquad (2.86)\\
& \leq \frac{(E^{\sigma}b)^{s}}{s}+\frac{1}{tb^{t}}(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}\rho m\cdot\nu d\Gamma)^{t\tau}(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}\rho m\cdot\nu|u_i'|^{\frac{2\mathfrak{z}}{1-\tau}}d\Gamma)^{t(1-\tau)}.
\end{aligned}
$$

É claro que

$$(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}\rho m\cdot\nu d\Gamma)^{t\tau}\leq(R\rho mes(\Gamma_2))^{t\tau}.$$

Logo, para valores apropriados de τ e t, vejamos que é possível associar a integral da direita em (2.86) com o termo

$$\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}\rho(m\cdot\nu)(u'\cdot g(u'))d\Gamma.$$

De fato, procedendo segundo as ideas de [46], temos que $\frac{2\mathfrak{z}}{1-\tau}=p+1$ e $t(1-\tau)=1$, quando $t=\frac{p+1}{2\mathfrak{z}},\ s=\frac{p+1}{p+1-2\mathfrak{z}},\ \tau=\frac{p+1-2\mathfrak{z}}{p+1}$. Como $s>0$ logo vemos que é natural a condição $p+1-2\mathfrak{z}>0$ do Teorema 2.2.1. Por outro lado, em (2.86) e pela condição (2.22d) temos

$$
\begin{aligned}
E^{\sigma}\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} & \rho m\cdot\nu|u_i'|^{2\mathfrak{z}}d\Gamma\leq\frac{(p+1-2\mathfrak{z})(E^{\sigma}b)^{\frac{p+1}{p+1-2\mathfrak{z}}}}{p+1}\\
& +\frac{2\mathfrak{z}}{(p+1)b^{\frac{p+1}{2\mathfrak{z}}}}(R\rho mes(\Gamma_2))^{\frac{p+1-2\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}}}\times(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}\rho m\cdot\nu|u_i'|^{p+1}d\Gamma)\\
& \leq\frac{(p+1-2\mathfrak{z})(E^{\sigma}b)^{\frac{p+1}{p+1-2\mathfrak{z}}}}{p+1}+\frac{2\mathfrak{z}}{k_1(p+1)b^{\frac{p+1}{2\mathfrak{z}}}}(R\rho mes(\Gamma_2))^{\frac{p+1-2\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}}}\times \qquad (2.87)\\
& (\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}\rho m\cdot\nu g(u_i')\cdot u_i'd\Gamma).
\end{aligned}
$$

Passo 2. Estimativa de (2.84). Para $\Gamma_2 \cap [|u'| \leq 1]$, como $0 < \mathfrak{z} \leq 1$ temos que $|u'|^2 \leq |u'|^{2\mathfrak{z}}$ para $|u'| \leq 1$. Assim podemos usar os resultados anteriores, além disso, usando (2.22a), (2.22f) e escolhendo as constantes

$$b = \left(\frac{p+1}{2C_1(p+1-2\mathfrak{z})}\right)^{\frac{p+1-2\mathfrak{z}}{p+1}} \qquad C_1 = \frac{k_2^2}{\rho}[(n-1)^2\frac{\gamma^2 c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] + 1,$$

temos

$$\begin{aligned} & E^\sigma \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \leq 1\}} \rho m \cdot \nu \left(\frac{1}{\rho}|g(u_i')|^2[(n-1)^2\frac{\gamma^2 c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] + |u_i'|^2\right) d\Gamma \\ & \leq E^\sigma \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \leq 1\}} \rho m \cdot \nu \left(\frac{k_2^2}{\rho}[(n-1)^2\frac{\gamma^2 c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] + 1\right) |u_i'|^{2\mathfrak{z}} d\Gamma \qquad (2.88) \\ & \leq \frac{1}{2} E^{\frac{\sigma(p+1)}{p+1-2\mathfrak{z}}} + \frac{\mathfrak{z}}{k_1}\left(\frac{2C_1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{2\mathfrak{z}}} (R\rho m e s(\Gamma_2)(p+1-2\mathfrak{z}))^{\frac{p+1-2\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}}} \times \\ & \qquad (\int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \leq 1\}} \rho m \cdot \nu g(u_i') \cdot u_i' d\Gamma). \end{aligned}$$

Além disso, no caso $\Gamma_2 \cap [|u'| \geq 1]$, temos pelas condições (2.22e), (2.22c) a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & E^\sigma(t) \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \geq 1\}} \rho m \cdot \nu \left(\frac{1}{\rho}|g(u_i')|^2[(n-1)^2\frac{\gamma^2 c_p R}{2\mu\epsilon} + \frac{2R^2}{\mu}] + |u_i'|^2\right) d\Gamma \\ & \leq E^\sigma(0) \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \geq 1\}} C_1 \rho m \cdot \nu |u_i'|^2 d\Gamma \qquad (2.89) \\ & \leq E^\sigma(0) \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \geq 1\}} \frac{C_1}{k_1} \rho m \cdot \nu g(u_i') \cdot u_i' d\Gamma. \end{aligned}$$

Passo 3. Estimativa de (2.81). Resumindo o procedimento. Utilizando (2.88) e (2.89) vamos estimar V' pelos termos $E^{\sigma+1}(t)$ e $E^{\frac{\sigma(p+1)}{p+1-2\mathfrak{z}}}(t)$ o que leva a entender as condições sobre o exponente σ e igualmente se entenderá naturalmente a condição (2.93), para estimar os termos correspondentes aos fatores, $||\nabla\alpha'||^2$, e $\int_{\Gamma_2} k\delta m \cdot \nu g(u_i') \cdot u_i' d\Gamma$ de maneira análoga ao caso $p = \mathfrak{z} = 1$. De fato, como E é decrescente e agrupando com fator comum

d temos

$$V' \leq -dE^{\sigma+1} + \frac{d}{2}E^{\frac{\sigma(p+1)}{p+1-2\mathfrak{z}}} + \left(dE^{\sigma}[\frac{\beta^2R^2}{\epsilon\mu} + \frac{c_0n^2\beta^2}{2(\lambda+\mu)\epsilon} + 2cc_0 + b\sigma C] - b\right)||\nabla\alpha'||^2$$

$$\left(d(E^{\sigma}(0)\tfrac{C_1}{k_1} + \tfrac{1}{\rho}\sigma CE^{\sigma}(0)) - \tfrac{1}{\rho}\right)\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\geq 1\}}\rho m\cdot\nu g(u_i')\cdot u_i' d\Gamma$$
$$+\left\{\frac{d\mathfrak{z}}{k_1}\left(\frac{2C_1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{2\mathfrak{z}}}(R\rho mes(\Gamma_2)(p+1-2\mathfrak{z}))^{\frac{p+1-2\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}}} + \frac{1}{\rho}(d\sigma CE^{\sigma}(0)-1)\right\}\times$$

$$(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}}\rho m\cdot\nu g(u_i')\cdot u_i' d\Gamma). \tag{2.90}$$

Definimos

$$\sigma = \frac{p+1-2\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}}. \tag{2.91}$$

Seja, em princípio $\tilde{d}$ como sendo

$$\tilde{d} = \min\left\{b/[E^{\sigma}(\frac{\beta^2R^2}{\epsilon\mu} + \frac{c_0n^2\beta^2}{2(\lambda+\mu)\epsilon} + 2cc_0 + b\sigma C)],\ 1/[\rho E^{\sigma}(0)\frac{C_1}{k_1} + \sigma CE^{\sigma}(0)],\right.$$

$$\left. 1/\left[\frac{\rho\mathfrak{z}}{k_1}\left(\frac{2C_1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{2\mathfrak{z}}}(Rk\delta mes(\Gamma_2)(p+1-2\mathfrak{z}))^{\frac{p+1-2\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}}} + \sigma CE^{\sigma}(0)\right]\right\}.$$

Para σ como em (2.91) e lembrando a desigualdade (2.59), obtemos

$$V'(t) \ \leq -\tfrac{\tilde{d}}{2}E^{\sigma+1}(t) \leq \tfrac{-\tilde{d}}{2[1+\tilde{d}CE^{\sigma}(0)]^{\sigma+1}}V^{\sigma+1}(t).$$

Integrando em $[0,t]$, e usando novamente (2.59) obtemos

$$V(t) \ \leq \left[\frac{\tilde{d}\sigma t}{2[1+\tilde{d}CE^{\sigma}(0)]^{\sigma+1}} + V^{-\sigma}(0)\right]^{-1/\sigma}$$

$$\leq E(0)(1+\tilde{d}CE^{\sigma}(0))\left[\frac{\tilde{d}\sigma tV^{\sigma}(0)}{2[1+\tilde{d}CE^{\sigma}(0)]^{\sigma+1}} + 1\right]^{-1/\sigma} \tag{2.92}$$

$$\leq E(0)(1+\tilde{d}CE^{\sigma}(0))\left[\frac{\tilde{d}\sigma tE^{\sigma}(0)}{2[1+\tilde{d}CE^{\sigma}(0)]} + 1\right]^{-1/\sigma}.$$

De (2.59) e definindo d da forma

$$d = \min\left\{\frac{E^{-\sigma}(0)}{C}, \tilde{d}\right\}, \tag{2.93}$$

temos

$$E(t) \quad \leq 2E(0)\tilde{\beta}[1 + \tfrac{p+1-2\mathfrak{z}}{2\mathfrak{z}}\omega t]^{\frac{-2\mathfrak{z}}{p+1-2\mathfrak{z}}} \tag{2.94}$$

com

$$\omega = \frac{dE^{\sigma}(0)}{2[1 + dCE^{\sigma}(0)]} \tag{2.95}$$

e

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{[1 - dCE^{\sigma}(0)]} \tag{2.96}$$

o qual finaliza a demonstração do resultado de estabilidade polinomial.

Capítulo 3

Sistema Termoelástico com lei de Fluxo de Cattaneo. Dissipação não linear na fronteira.

3.1 O modelo

Neste capítulo estudamos a estabilidade exponencial do sistema (0.3)-(0.4), com a lei de Cattaneo para descrever o fluxo de calor, i.e. mudamos a equação (0.8) pela (0.12) e além disso, adicionamos um termo de tipo dissipativo na equação de calor (0.4).

Na literatura, os sistemas com lei de Cattaneo para o fluxo são chamados sistemas com segundo som e em nosso caso, o nosso sistema termoelástico será chamado, às vezes, pelas siglas TESS, Sistema Termoelástico com Segundo Som. Seja Ω, um domínio em $\mathbb{R}^n$ limitado, suave, aberto e com fronteira Γ de classe C^2 composta de duas partes, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Os conjuntos Γ_1 e Γ_2 serão determinadas da seguinte forma. Seja x_0 um ponto em $\mathbb{R}^n$, $m(x) = x - x_0$ e $\nu(x) = (\nu_1(x), \cdots, \nu_n(x))$ um vetor normal unitário exterior à Γ no ponto x, assim definimos

$$\Gamma_1(x_0) = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\},$$
$$\Gamma_2(x_0) = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}. \tag{3.1}$$

com a notação, $\Gamma_i(x_0) = \Gamma_i$. Dadas as notações anteriores, o sistema TESS se define como

$$u'' - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla div\ u + \beta\nabla\theta = 0 \qquad em\ \Omega \times (0, \infty), \tag{3.2}$$
$$\theta' + \gamma div(q) + \delta div\ u' - \tilde{\alpha}\Delta\theta = 0 \qquad em\ \Omega \times (0, \infty), \tag{3.3}$$
$$\tau_0 q' + q + k\nabla\theta = 0 \qquad em\ \Omega \times (0, \infty), \tag{3.4}$$

onde $'$ representa a derivada com respeito a variável t; as condições iniciais e condições de fronteira se definem como:

$$\begin{cases} u(x,0) = u^0(x), \quad u'(x,0) = u^1(x), & \\ \theta(x,0) = \theta^0(x), \quad q(x,0) = q^0(x) & em\ \Omega \\ \theta = 0 & em\ \Gamma \times (0, \infty), \\ u = 0 & em\ \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda + \mu)div(u)\nu & \\ \quad + am \cdot \nu u + m \cdot \nu g(u') = 0 & em\ \Gamma_2 \times (0, \infty). \end{cases} \tag{3.5}$$

λ e μ são chamadas as constantes de Lame e satifazem a equação (0.7). Todas as constantes são positivas e τ_0 é chamada de tempo de relaxamento o qual é bem menor em comparação às outras constantes. As constantes δ, γ e β são os parâmetros positivos de acoplamento do sistema termoelástico clássico (0.3)-(0.4) que relaciona as variáveis temperatura, fluxo de calor e deslocamento. O termo $\tilde{\alpha}\Delta\theta$ da equação (3.3) deve ser entendido como a dissipação no sistema, assim nosso sistema apresenta duas formas dissipativas, a anteriormente mencionada e a dissipação de tipo não linear, dada na fronteira e descrita nas condições (3.5). Vamos ver que o sistema assim descrito nos permite estabelecer um resultado de estabilidade exponencial ou polinomial segundo condições na função g e sendo a lei de fluxo de Cattaneo, (3.4). As funções $a(x)$ e $g(x)$ são como no capítulo anterior, isto é a função $a = a(x)$ é não negativa em Γ_2 com $a(x) \in C^1(\Gamma_2)$ e $g(u) = (g_1(u_1, u_2, \cdots, u_n), \cdots, g_n(u_1, u_2, \cdots, u_n)) \in (C^1(\mathbb{R}^n))^n$. Na seção seguinte enunci-

amos os resultados de estabilidades para nosso sistema TESS com dissipação na fronteira não linear e no sistema.

3.2 Resultado Principal

O objetivo geral para o sistema TESS é estimar a taxa de decaimento da energia e mais precisamente, apresentar algumas relações entre a taxa de decaimento e o comportamento da função não linear g, que forma parte das condições de fronteira do sistema. O Teorema a seguir apresenta o resultado mais importante sobre a estabilidade do sistema. Inicialmente lembremos as definições (2.17) - (2.19), do Capítulo 2 que utilizaremos a seguir no resultado principal.

Teorema 3.2.1. • *Suponha para* Γ *as condições dada em (3.1) e além disso*

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \tag{3.6}$$

$$\Gamma_1 \neq \emptyset \quad ou \quad a(x) \neq 0. \tag{3.7}$$

• *Suponha as seguintes condições para a função* $a(x)$

$$a_0^2 < \frac{\mu}{2R^3\gamma^2} \quad para \;\; n \leq 2, \tag{3.8}$$

$$a_0 \leq \frac{(n-2)\mu}{2R^2} \quad para\; n \geq 3, \tag{3.9}$$

• *Suponha as seguintes condições para a função* g

$$g(0) = 0, \tag{3.10a}$$

$$[g(u_1) - g(u_2)] \cdot (u_1 - u_2) \geq 0, \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{3.10b}$$

$$g(u) \cdot u \geq k_1 |u|^2, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n \quad com\; |u| \geq 1, \tag{3.10c}$$

$$g(u) \cdot u \geq k_1 |u|^{p+1}, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n \quad com\; |u| \leq 1, \tag{3.10d}$$

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leq k_2 |u_1 - u_2|, \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n \;\; com\; |u_1 - u_2| \geq 1, \tag{3.10e}$$

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leq k_2 |u_1 - u_2|^{\alpha}, \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n \;\; com\; |u_1 - u_2| \leq 1, \tag{3.10f}$$

para $k_1,\ k_2 > 0$ *e* $p > 0,\ \alpha$ *com* $0 < \alpha \leq 1$. *Com as condições anteriormente dadas temos:*

1. *Se* $p = \alpha = 1$ *temos estabilidade exponencial para o sistema (3.2)-(3.5) isto é, existem* $M \geq 1$ *e* $\omega > 0$ *independentes do dado inicial* $(u^0, u^1, u^0, \theta^0, q^0)$ *tais que*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.11}$$

2. *Se* $p + 1 > 2\alpha$, *existem* $\tilde{\beta} > 0$ *e* $\omega > 0$ *tais que*

$$E(t) \quad \leq 2E(0)\tilde{\beta}[1 + \tfrac{p+1-2\alpha}{2\alpha}\omega t]^{\frac{-2\alpha}{p+1-2\alpha}}. \tag{3.12}$$

onde

$$E(t) = \tfrac{1}{2}\int_\Omega [k\delta|u'|^2 + k\delta\mu|\nabla u|^2 + k\delta(\lambda+\mu)|divu|^2 + k\beta|\theta|^2 + \gamma\beta\tau_0|q|^2]dx$$

$$+ \frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma.$$

Inicialmente provamos a boa colocação do sistema e a seguir mostremos a estabilidade do sistema.

3.3 Existência e Unicidade

Devido à dissipação não linear na fronteira, observamos que ao reescrever o sistema (3.2) - (3.5) no âmbito de semigrupos e do problema abstrato de Cauchy, estaremos imersos na teoria de semigrupos não lineares. Antes de estabelecer o resultado de existência e unicidade para nosso sistema, vamos definir o espaço $\mathcal{H}$ e definir operadores auxiliares que permitiram reescrever (3.2) - (3.5) como um problema de Cauchy, entre eles definiremos o operador B não linear associado com a dissipação não linear na fronteira.

Sejam $H^m(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$ como em (1.3) e (1.4) respectivamente. Sejam os espaços $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega)$

e $\mathcal{H}$ definidos como

$$\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ sobre \ \Gamma_1\}, \tag{3.13}$$

$$\mathcal{H} = (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n \times L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^n. \tag{3.14}$$

O espaço $(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ dotado do produto interno

$$\begin{array}{rl}(u,v)_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} & = \int_\Omega k\delta(\mu\nabla u\overline{\nabla v}+(\lambda+\mu)div(u)div(\overline{v}))dx \\ & + \int_{\Gamma_2} k\delta am\cdot\nu u\cdot\overline{v}d\Gamma,\end{array} \tag{3.15}$$

e norma induzida

$$||u||^2_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = \int_\Omega k\delta(\mu|\nabla u|^2+(\lambda+\mu)|div(u)|^2)dx + \int_{\Gamma_2} k\delta am\cdot\nu|u|^2d\Gamma, \tag{3.16}$$

é um espaço de Hilbert e a norma $||\cdot||_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}$ é equivalente à norma usual induzida por $(H^1(\Omega))^n$. A partir da energia do sistema TESS, (3.2)-(3.5), o espaço $\mathcal{H}$, dotado da norma

$$\begin{array}{rl}||(u,v,\theta,q)||^2_{\mathcal{H}} & = \int_\Omega [k\delta|v|^2 + k\delta\mu|\nabla u|^2 + k\delta(\lambda+\mu)|divu|^2 + k\beta|\theta|^2 + \gamma\beta\tau_0|q|^2]dx \\ & \quad + k\delta\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2d\Gamma \\ & = ||u||^2_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + k\delta||v||^2_{L^2(\Omega)^n} + k\beta||\theta||^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\beta\tau_0||q||^2_{L^2(\Omega)^n},\end{array} \tag{3.17}$$

é também um espaço de Hilbert. Utilizando o espaço $\mathcal{H}$ podemos descrever o sistema (3.2) - (3.5) como um problema de Cauchy. A seguir mostramos a existência e unicidade de soluções para nosso sistema.

Operador não linear.

Como no Capítulo anterior, definimos o operador não linear B da seguinte forma

$$\langle Bu, v\rangle = \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(u)\cdot\upsilon d\Gamma, \quad \forall u,\upsilon \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n. \tag{3.18}$$

Do operador B anterior tem-se o seguinte resultado do Lema 2.3.2 .

Problema de Cauchy, operador Λ.

De modo análogo ao capítulo anterior, definimos o operador Λ com o qual descrevemos o problema de Cauchy associado ao nosso sistema TESS. Este operador é não linear, logo estaremos trabalhando na teoria de semigrupos não lineares e para definir Λ começamos utilizando as equações (3.2)-(3.4) da seguinte forma. De (3.2) multiplicando por $\upsilon \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ e integrando em Ω temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla div\ u + \beta\nabla\theta)\overline{\upsilon}dx \\
&= \int_\Omega u''\overline{\upsilon}dx - \mu\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\overline{\upsilon}d\Gamma - (\lambda+\mu)\int_\Gamma \upsilon\nu div\overline{\upsilon}ud\Gamma \\
&\quad + \int_\Omega (\mu\nabla u\nabla\overline{\upsilon} + (\lambda+\mu)div(u)div(\overline{\upsilon}))dx + \beta\int_\Omega \nabla\theta\overline{\upsilon}dx \\
&= \int_\Omega u''\overline{\upsilon}dx + \int_{\Gamma_2} am\cdot\nu u\cdot\overline{\upsilon}d\Gamma + \int_\Omega (\mu\nabla u\cdot\nabla\overline{\upsilon} + (\lambda+\mu)div(u)div(\overline{\upsilon}))dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(u')\cdot\overline{\upsilon}d\Gamma + \beta\int_\Omega \nabla\theta\cdot\overline{\upsilon}dx,
\end{aligned}$$

com Δ, ∇ e div definidos como em (0.6) e $\nabla\theta = (\frac{\partial\theta}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\theta}{\partial x_n})$. Definindo o operador $A : (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \to [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ o operador

$$\langle Au, \upsilon\rangle = \frac{1}{k\delta}(u,\upsilon)_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}, \qquad \upsilon \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n, \tag{3.19}$$

o operador B como em (3.18) e o operador $S_0 : H^1_0(\Omega) \to [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ como

$$\langle S_0\theta, \upsilon\rangle = \beta(\nabla\theta, \upsilon)_{(L^2(\Omega))^n}, \quad \theta \in H^1_0(\Omega), \tag{3.20}$$

podemos escrever em termos da dualidade $\langle , \rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]', (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}$ o seguinte resultado,

$$0 = \langle u'', \upsilon\rangle + \langle Au, \upsilon\rangle + \langle Bu', \upsilon\rangle + \langle S_0\theta, \upsilon\rangle, \tag{3.21}$$

ou seja

$$u'' + Au + Bu' + S_0\theta = 0. \tag{3.22}$$

Procedendo de forma análoga em (3.3), multiplicando por $\upsilon \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$0 = \int_\Omega (\theta' + \gamma div\ q + \delta div\ u' - \tilde{\alpha}\Delta\theta) \cdot \upsilon dx, \tag{3.23}$$

logo podemos definir os seguintes operadores: $S_1 : (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \to H^{-1}(\Omega)$ como

$$\langle S_1 u', \upsilon\rangle = (\delta div u', \upsilon)_{L^2(\Omega)}, \qquad \upsilon \in H_0^1(\Omega), \tag{3.24}$$

o operador $S_2 : (L^2(\Omega))^n \to H^{-1}(\Omega)$ por

$$\langle S_2 q, \upsilon\rangle = -\gamma(q, \nabla\upsilon)_{(L^2(\Omega))^n}, \qquad \upsilon \in H_0^1(\Omega), \tag{3.25}$$

e finalmente o operador $S_3 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ por

$$\langle S_3\theta, \upsilon\rangle = (\tilde{\alpha}\nabla\theta, \nabla\upsilon)_{(L^2(\Omega))^n}, \qquad \upsilon \in H_0^1(\Omega). \tag{3.26}$$

Assim, de (3.23) temos em termos da dualidade $\langle , \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ a seguinte notação

$$\theta' + S_1 u' + S_2 q - S_3\theta = 0. \tag{3.27}$$

De forma análoga, de (3.4), multiplicando por $\upsilon \in (L^2(\Omega))^n$ e integrando em Ω

$$0 = \int_\Omega (\tau_0 q' + q + k\nabla\theta) \cdot \upsilon dx \tag{3.28}$$

definimos os operadores $S_4 : (L^2(\Omega))^n \to (L^2(\Omega))^n$ como

$$\langle S_4 q, \upsilon\rangle = (\frac{q}{\tau_0}, \upsilon)_{(L^2(\Omega))^n}, \qquad \upsilon \in (L^2(\Omega))^n, \tag{3.29}$$

e $S_5 : H_0^1(\Omega) \to (L^2(\Omega))^n$ como

$$\langle S_5\theta, \upsilon\rangle = (\frac{k}{\tau_0}\nabla\theta, \upsilon)_{(L^2(\Omega))^n}, \qquad \upsilon \in (L^2(\Omega))^n, \tag{3.30}$$

para ter na dualidade $<,>_{(L^2(\Omega))^n,(L^2(\Omega))^n}$ a expressão

$$q' + S_4 q + S_5 \theta = 0. \tag{3.31}$$

Desta forma , a partir de (3.22), (3.27) e (3.31) definimos para $\Phi \in \mathcal{H}$ o operador $\Lambda : D(\Lambda) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como

$$\begin{aligned} \Phi &= (u, u', \theta, q) \\ \Lambda\Phi &= (-u', Au + Bu' + S_0\theta, S_1 u' + S_2 q - S_3\theta, S_4 q + S_5\theta). \end{aligned}$$

Explicitamente $D(\Lambda)$ deve satisfazer:

$$\begin{aligned} D(\Lambda) &= \{(u, w, \theta, q) \in \mathcal{H} : \Lambda(u, w, \theta, q) \in \mathcal{H}\} \\ &= \{(u, w, \theta, q) \in \mathcal{H} : w \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n,\ Au + Bw \in (L^2(\Omega))^n, \\ &\qquad S_2 q \in L^2(\Omega),\ \theta \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)\}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Desta forma, o sistema (3.2) - (3.5) pode ser visto como o problema abstrato de Cauchy

$$\begin{cases} \Phi' + \Lambda\Phi = 0, \qquad t > 0, \\ \Phi(0) = (u_0, u_0', \theta_0, q_0), \end{cases} \tag{3.33}$$

com $D(\Lambda) \subset \mathcal{H}$. Segue pela teoria de semigrupos não lineares o seguinte resultado.

Teorema 3.3.1. *Suponha (3.1), (3.6) e (3.7). Suponha g satisfaz (3.10a), (3.10b) e (2.31). Então para toda condição inicial $(u^0, u^1, \theta^0, q^0) \in \mathcal{H}$ o sistema (3.2) - (3.5) tem uma única mild solution satisfazendo*

$$(u, u', \theta, q) \in C([0, \infty); \mathcal{H}). \tag{3.34}$$

Além disso, se (u, u', θ, q) e (ν, ν', ζ, p) são duas soluções correspondentes ao dado inicial $(u^0, u^1, \theta^0, q^0)$ e $(\nu^0, \nu^1, \zeta^0, p^0)$, então temos para cada $t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} &||(u(t), u'(t), \theta(t), q(t)) - (\nu(t), \nu'(t), \zeta(t), p(t))||_{\mathcal{H}} \leq \\ &\qquad ||(u^0, u^1, \theta^0, q^0) - (\nu^0, \nu^1, \zeta^0, p^0)||_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

A prova do Teorema 3.3.1 se deduz dos seguintes lemas.

Lema 3.3.2. *Suponha g satisfaz (3.10a), (3.10b), logo o operador $-\Lambda$ é m-dissipativo.*

Prova. Sejam $(u_1, w_1, \theta_1, q_1)$, $(u_2, w_2, \theta_2, q_2) \in D(\Lambda)$ logo pela da definição da norma $\mathcal{H}$ temos

$$
\begin{aligned}
&\star = \\
&Re[\Lambda(u_1, w_1, \theta_1, q_1) - \Lambda(u_2, w_2, \theta_2, q_2), (u_1, w_1, \theta_1, q_1) - (u_2, w_2, \theta_2, q_2)]_{\mathcal{H}} = \\
&Re[(w_2 - w_1, u_1 - u_2)_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + k\delta\langle A(u_1 - u_2) + B(w_1 - w_2) + S_0(\theta_1 - \theta_2), w_1 - w_2\rangle_{(L^2(\Omega))^n} \\
&+k\beta\langle S_2 q_1 - S_2 q_2 - S_3\theta_1 + S_3\theta_2 + S_1 w_1 - S_1 w_2, \theta_1 - \theta_2\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&+\gamma\beta\tau_0\langle S_4 q_1 + S_5\theta_1 - S_4 q_2 - S_5\theta_2, q_1 - q_2\rangle_{(L^2(\Omega))^n}]
\end{aligned}
$$

Das definições dos operadores A, B e S_i, $i = 0, \ldots, 5$ concluimos

$$
\begin{aligned}
\star = Re\Bigg[&\int_\Omega k\delta[\mu\nabla(w_2 - w_1)\cdot\overline{\nabla(u_1 - u_2)} + (\lambda+\mu)div(w_2 - w_1)\overline{div(u_1 - u_2)}]dx \\
&+\int_{\Gamma_2} k\delta am\cdot\nu(w_2 - w_1)\cdot\overline{(u_1 - u_2)}d\Gamma \\
&-\int_\Omega k\delta[\mu\nabla(u_1 - u_2)\cdot\overline{\nabla(w_2 - w_1)} + (\lambda+\mu)div(u_1 - u_2)\overline{div(w_2 - w_1)} \\
&-\beta\nabla(\theta_1 - \theta_2)\cdot\overline{(w_2 - w_1)}]dx \\
&-\int_{\Gamma_2}[k\delta am\cdot\nu(u_1 - u_2)\cdot\overline{(w_2 - w_1)} - k\delta m\cdot\nu g(w_1 - w_2)\cdot\overline{(w_1 - w_2)}]d\Gamma \\
&+\int_\Omega k\beta[(\gamma(q_1 - q_2) - \tilde{\alpha}\nabla(\theta_1 - \theta_2))\cdot\overline{\nabla(\theta_2 - \theta_1)} + \delta div(w_1 - w_2)\overline{(\theta_1 - \theta_2)}]dx \\
&+\int_\Omega \gamma\beta[(q_1 - q_2)\overline{(q_1 - q_2)} + k\nabla(\theta_1 - \theta_2)\overline{(q_1 - q_2)}]dx\Bigg],
\end{aligned}
$$

e cancelando termos convenientemente temos

$$\star = k\delta(B(w_1 - w_2), w_1 - w_2) + k\beta\tilde{\alpha}||\nabla(\theta_2 - \theta_1)||^2 + \gamma\beta||q_1 - q_2||^2 > 0,$$

assim o operador $-\Lambda$ é dissipativo. Vejamos agora a maximalidade do operador $-\Lambda$, isto é, mostrar

$$(I + \Lambda)D(\Lambda) = \mathcal{H}. \tag{3.36}$$

Seja $(\phi, \psi, \xi, \zeta) \in \mathcal{H}$, logo vamos mostrar que existe uma solução $(u, w, \theta, q) \in D(\Lambda)$ da

equação (3.36), ou seja resolver o sistema

$$u - w = \phi, \tag{3.37}$$

$$w + Au + Bw + S_0\theta = \psi, \tag{3.38}$$

$$\theta + S_1 w + S_2 q - S_3\theta = \xi, \tag{3.39}$$

$$q + S_4 q + S_5\theta = \zeta. \tag{3.40}$$

Usando (3.37) obtemos $u = w + \phi$. Logo temos que é suficiente mostrar que existe $w \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$, $\theta \in H^1_0(\Omega)$ e $q \in (L^2(\Omega))^n$ solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} w + Aw + Bw + S_0\theta = \psi - A\phi, \\ \theta + S_1 w + S_2 q - S_3\theta = \xi, \\ q + S_4 q + S_5\theta = \zeta. \end{cases} \tag{3.41}$$

De fato, se $w,\ \theta$ e q é solução de (3.41) e dado $\phi\ \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$, $\psi \in (L^2(\Omega))^n$ e $\xi \in L^2(\Omega)$ temos

$$Au + Bw = \psi - w - \beta\nabla\theta \in (L^2(\Omega))^n \tag{3.42}$$

e

$$S_2 q = \xi - \delta div\ w - \theta + \tilde{\alpha}\nabla\theta \in L^2(\Omega). \tag{3.43}$$

Assim o vetor $(u, w, \theta, q) \in D(\Lambda)$.

Para solucionar o sistema (3.41) definimos o operador não linear $\mathcal{A}$ por

$$\mathcal{A}(w,\theta,q) = (w + Aw + Bw + S_0\theta, \theta + S_2 q + S_1 w - S_3\theta, \frac{\delta\tau_0}{k}q + \frac{\delta\tau_0}{k}S_4 q + \frac{\delta\tau_0}{k}S_5\theta) \tag{3.44}$$

tal que

$$\mathcal{A} : \mathbb{F} = (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^1_0(\Omega) \times (L^2(\Omega))^n \to [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]' \times H^{-1}(\Omega) \times [(L^2(\Omega))^n]'$$

e mostrar que ele é sobrejetivo utilizando os resultados em [4]. De fato, se $\mathcal{A}$ é sobrejetivo, e sendo $(\psi - A\phi) \in [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$, $\xi \in L^2(\Omega)$ e $\zeta \in (L^2(\Omega))^n$, temos a existência de

$w \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$, $\theta \in H^1_0(\Omega)$ e $q \in (L^2(\Omega))^n$, que satisfazem

$$\tau_0 q + q + k\nabla\theta \in (L^2(\Omega))^n,$$

logo

$$Au + Bw \in (L^2(\Omega))^n,$$

e

$$S_2 q - S_3\theta = \xi - \theta - \delta div\ w \in L^2(\Omega).$$

Portanto, para mostrar $\mathcal{A}$ é sobrejetivo basta mostrar que satisfaz as propriedades de monotonia, coercividade e hemicontinuidade. Assim para a primeira propriedade, monotonia, organizando segundo o operador $\mathcal{A}$ e as definições dos operadores $A\ B, S_i,\ i = 0, \ldots, 5$ temos:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{A}(w^1,\theta^1,q^1) - \mathcal{A}(w^2,\theta^2,q^2), (w^1,\theta^1,q^1) - (w^2,\theta^2,q^2)\rangle_{\mathbb{F}',\mathbb{F}} \\
&= \langle (w^1 - w^2) + A(w^1 - w^2) + Bw^1 - Bw^2, w^1 - w^2\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} \\
&+\langle S_0\theta^1 - S_0\theta^2, w^1 - w^2\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \langle S_1 w^1 - S_1 w^2, \theta^1 - \theta^2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} \\
&+\langle \theta^1 - \theta^2, \theta^1 - \theta^2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} - \langle S_3\theta^1 - S_3\theta^2, \theta^1 - \theta^2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} \\
&+\langle \tfrac{\delta\tau_0}{k}(q^1 - q^2), q^1 - q^2\rangle_{[(L^2(\Omega))^n]',(L^2(\Omega))^n} + \tfrac{\delta\tau_0}{k}\langle q^1 - q^2, q^1 - q^2\rangle_{[(L^2(\Omega))^n]',(L^2(\Omega))^n} \\
&+\langle S_2 q^1 - S_2 q^2, \theta^1 - \theta^2\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} + \langle \tfrac{\delta\tau_0}{k} S_5(\theta^1 - \theta^2), q^1 - q^2\rangle_{[(L^2(\Omega))^n]',(L^2(\Omega))^n},
\end{aligned}$$

e lembrando (3.10b) implica na positividade do operador B temos a monotocidade do operador $\mathcal{A}$ pois,

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{A}(w^1,\theta^1,q^1) - \mathcal{A}(w^2,\theta^2,q^2), (w^1,\theta^1,q^1) - (w^2,\theta^2,q^2)\rangle_{\mathbb{F}',\mathbb{F}} = \\
&c_1||w^1 - w^2||^2_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \langle Bw^1 - Bw^2, w^1 - w^2\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} \\
&+c_2||\theta^1 - \theta^2||^2_{H^1_0(\Omega)} + c_3||q^1 - q^2||^2_{(L^2(\Omega))^n} \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

com $c_1,\ c_2$ e c_3 constantes positivas. De forma análoga mostramos a coercividade do $\mathcal{A}$.

De fato, a partir de (3.10a), (3.10b), (3.1) e visto que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(w,\theta,q),(w,\theta,q)\rangle &= \langle w + Aw + Bw, w\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \langle S_0\theta, w\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}\\ &\quad + \langle \theta + S_2 q + S_1 w - S_3\theta, \theta\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}\\ &\quad + \tfrac{\delta\tau_0}{k}\langle q + S_4 q + S_5\theta, q\rangle_{[(L^2(\Omega))^n]',(L^2(\Omega))^n}\\ &\geq c_1||w||^2_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \langle Bw, w\rangle_{[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]',(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}\\ &\quad + c_2||\theta||^2_{H^1_0(\Omega)} + c_3||q||^2_{(L^2(\Omega))^n}.\end{aligned}$$

Finalmente, é claro que os operadores $A, S_i,\ i = 0, \cdots, 5$ são operadores hemicontínuos e pelo Lema 2.32 se deduz a hemicontinuidade do operador $\mathcal{A}$, isto é

$$\lim_{t\to 0}\langle \mathcal{A}[(w^1,\theta^1,q^1) + t(w^2,\theta^2,q^2)],(w,\theta,q)\rangle = \langle \mathcal{A}(w^1,\theta^1,q^1),(w,\theta,q)\rangle$$

para (w^1,θ^1,q^1), (w^2,θ^2,q^2) e (w,θ,q) em $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^1_0(\Omega) \times (L^2(\Omega))^n$. □

Lema 3.3.3. *Suponha (3.6) e g satisfaz (3.10a) como também a condição (2.31), logo $D(\Lambda)$ é dendo em $\mathcal{H}$.*

Prova. Análogo ao capítulo anterior, para mostrar que $D(\Lambda)$ é denso em $\mathcal{H}$, definimos o seguinte conjunto auxiliar

$$\begin{aligned}D = \{(v_1,v_2,v_3,v_4) \in \mathcal{H} : v_1 \in (H^2(\Omega)\cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n,\ v_2 \in (H^1_0(\Omega))^n,\ v_3 \in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega),\\ div(v_4) \in L^2(\Omega),\ \mu\tfrac{\partial v_1}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(v_1)\nu + am\cdot\nu v_1 = 0 \ em\ \Gamma_2\}\end{aligned}$$

e mostramos as seguintes duas propriedades: $D \subset D(\Lambda)$ e D denso em $\mathcal{H}$. Para esta última propriedade, sendo $(C^\infty_0(\Omega))^n$ e $C^\infty_0(\Omega)$ densas em $(L^2(\Omega))^n$ e $L^2(\Omega)$ respectivamente, é suficiente mostrar a densidade D em $\mathcal{H}$, mostrando densidade em $(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Desta forma seja

$$W = \{w \in (H^2(\Omega)\cap \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n : \mu\tfrac{\partial w}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(w)\nu + am\cdot\nu w = 0 \ em\ \Gamma_2\}$$

é mostremos que W é denso em $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Seja $v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ tal que

$$(v, w)_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = 0, \qquad \textit{para todo } w \in W. \tag{3.46}$$

Para todo $f \in (L^2(\Omega))^n$ fixo, o problema elíptico

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla div u = f & em\ \Omega \\ u = 0 & em\ \Gamma_1 \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(u)\nu + am\cdot\nu u = 0 & em\ \Gamma_2, \end{cases}$$

possui uma solução $u \in W$. Desta forma, das igualdades

$$(f, v)_{(L^2(\Omega))^n} = (u, v)_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = 0,$$

se segue que $v = 0$ e pelo teorema de Hanh Banach e (3.46) concluimos que W é denso em $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$.

A inclusão $D \subset D(\Lambda)$ é feita analogamente como no capítulo anterior. Se $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in D$, então $v_2 = 0$ em Γ e $v_1 \in (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Seja $w \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$, então pela condição (3.10a) temos

$$\begin{aligned} \langle Av_1 + Bv_2, w\rangle &= (v_1, w)_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(v_2) w d\Gamma \\ &= (v_1, w)_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} \\ &= \int_{\Gamma_2} am\cdot\nu v_1 w d\Gamma + \int_\Omega (\mu\nabla v_1\nabla w + (\lambda+\mu)div(v_1)div(w))dx \\ &= -\int_\Omega (\mu\Delta v_1 + (\mu+\lambda)\nabla div(v_1))\cdot w dx. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Como $v_1 \in (H^2(\Omega))^n$ temos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|\langle Av_1 + Bv_2, w\rangle| \leq c||w||_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}, \tag{3.48}$$

o que implica $Av_1 + Bv_2 \in (L^2(\Omega))^n$. Do anterior tem-se a densidade $D(\Lambda)$ em $\mathcal{H}$.

Dos resultados dos Lemas 3.3.2, 3.3.3 e pela teoria de semigrupos de operadores não lineares, ver [4], temos o resultado do Teorema 3.3.1. □

3.4 Estabilidade.

Se estuda nesta seção o decaimento da energia $E(t)$, associado ao sistema (3.2)-(3.5) quando $t \to \infty$. Análogo ao procedimento realizado no sistema do Capítulo anterior para o sistema Termoelástico Tipo III, mostra-se que a estabilidade depende fortemente de algumas condições sobre a função g, função que define as condições de fronteira do sistema. De forma análoga ao caso anterior, neste sistema vamos aplicar as técnicas do método de Lyapunov para mostrar o Teorema 3.2.1.

Inicialmente vemos que a energia (a qual corresponde a norma em $\mathcal{H}$),

$$\begin{aligned} E(t) = \tfrac{1}{2}\int_\Omega [k\delta|u'|^2 + k\delta\mu|\nabla u|^2 + k\delta(\lambda+\mu)|divu|^2 + k\beta|\theta|^2 + \gamma\beta\tau_0|q|^2]dx \\ + \frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma, \end{aligned} \tag{3.49}$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma\beta\int_\Omega |q|^2dx - \int_{\Gamma_2} k\delta(m\cdot\nu)(u'\cdot g(u'))d\Gamma - k\tilde{\alpha}\beta\int_\Omega |\nabla\theta|^2dx. \tag{3.50}$$

Neste momento já encontramos que a condição (3.10b) do Teorema 3.2.1 é necessária, para que a energia seja descrescente. A prova do Teorema 3.2.1 será feita por meio de lemas. Denotando por $(\cdot,\cdot)$ (respectivamente $|\cdot|$) o produto interno em $L^2(\Omega)^n$ (a norma em $L^2(\Omega)^n$) introduzimos os seguintes funcionais.

$$F(t) = \int_\Omega [2k\delta u_i'(m\cdot\nabla u_i) + (n-1)(k\delta u_i'\cdot u_i)]dx. \tag{3.51}$$

A partir do funcional F vamos definir o funcional $V(t)$ que será a ferramenta chave na prova do teorema 3.2.1. Seja

$$V(t) = V(u,\theta,t) = E(t) + d[E(t)]^\sigma F(t), \tag{3.52}$$

com d e σ constantes a serem definidas posteriormente.

Para o desenvolvimento dos resultados nesta seção serão utilizadas frequentemente as constantes seguintes:

- R e a_0 as constantes positivas definidas como

$$R = \max_{x\in\overline{\Omega}} |m(x)| = \max_{x\in\overline{\Omega}} |\sum_{n=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2|^{1/2} \ , \tag{3.53}$$

$$a_0 = \max_{x\in\Gamma_2} a(x), \tag{3.54}$$

- γ a menor constante positiva tal que

$$\int_{\Gamma_2} |u|^2 d\Gamma \leq \gamma^2 ||u||^2_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}, \quad \forall u \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n, \tag{3.55}$$

- denotando igualmente por $|\cdot|$ a norma em $L^2(\Omega)$ ou $(L^2(\Omega))^n$ sejam λ_0 e λ_1 as menores constantes positivas tais que

$$|u| \leq \lambda_0 ||u||_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}, \qquad \forall u \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n, \tag{3.56}$$

$$|u| \leq \lambda_1 |\nabla u|, \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega). \tag{3.57}$$

Analogamente como decorre no sistema Termoelástico tipo III, os Lemas 3.4.3 e 3.4.4 se centram principalmente na identidade de Green e propriedades geométricas de Γ descritas em (3.1), e no caso do Lema 3.4.5 temos conclusões que dependem fortemente das condições de fronteira (3.5). No que segue, apresentaremos algumas observações cujas demonstrações são simples.

Observação 3.4.1.

$$|F(t)| \leq CE(t) \tag{3.58}$$

Pois, a partir da definição de $F(t)$, concluimos utilizando a desigualdade de Hölder para o primeiro termo na direita de (3.51) e pelas constantes (3.53),

$$|\int_\Omega 2k\delta u_i'(m\cdot\nabla u_i)| \leq \frac{R}{\sqrt{\mu}}(k\delta||u_i'||^2 + k\delta\mu||\nabla u_i||^2) \leq \frac{2R}{\sqrt{\mu}}E(t). \tag{3.59}$$

Além disso, de (3.56) temos

$$\int_\Omega k\delta u_i' \cdot u_i dx \leq k\delta \int_\Omega [\frac{\lambda_0 |u_i'|^2}{2} + \frac{|u_i|^2}{2\lambda_0}] dx \leq \lambda_0 E(t). \tag{3.60}$$

Assim

$$|F(t)| \leq (\frac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1))E(t). \tag{3.61}$$

Observação 3.4.2. *De (3.61) temos*

$$[1 - d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1))E^\sigma(t)]E(t) \leq V(t) \leq [1 + d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1))E^\sigma(t)]E(t). \tag{3.62}$$

Lema 3.4.3. *O funcional F satisfaz*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F(t)) = &-k\delta \int_\Omega (|u'|^2 + \mu|\nabla u_i|^2 + (\lambda+\mu)|div\ u|^2) dx \\ &+k\delta \int_{\Gamma_2} (|u_i'|^2 - |\nabla u|^2) m \cdot \nu d\Gamma + I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \tag{3.63}$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= -k\delta(n-1) \int_{\Gamma_2} [am \cdot \nu u_i + m \cdot \nu g_i(u')] u_i d\Gamma, \\ I_2 &= k\delta \int_{\Gamma_1} (\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|divu|^2) m \cdot \nu d\Gamma - k\delta(\lambda+\mu) \int_{\Gamma_2} |divu|^2 m \cdot \nu d\Gamma, \\ I_3 &= -2k\delta \int_{\Gamma_2} (am \cdot \nu u_i + m \cdot \nu g_i(u'))(m \cdot \nabla u_i) d\Gamma, \\ I_4 &= -\beta(n-1)k\delta \int_\Omega \nabla\theta \cdot u\ dx - 2k\delta\beta \int_\Omega \nabla\theta (m \cdot \nabla u)\ dx. \end{aligned}$$

Prova. Note que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega k\delta u' \cdot u dx\right) = \int_\Omega k\delta u'' \cdot u dx + \int_\Omega k\delta |u'|^2 dx. \tag{3.64}$$

Além disso temos

$$\int_\Omega k\delta u'' \cdot u\ dx = \int_\Omega k\delta(\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla div\ u - \beta\nabla\theta) \cdot u\ dx. \tag{3.65}$$

Usando fórmula de Green e as condições na fronteira (3.5) tem-se as seguintes expressões para os termos na direita de (3.65)

$$\int_\Omega \Delta u \cdot u dx = \int_\Gamma \nabla u_i \cdot \nu u_i d\Gamma - \int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx, \tag{3.66}$$

e

$$\int_\Omega \nabla div(u) \cdot u dx \ = \int_\Gamma div(u) u_i \cdot \nu_i d\Gamma - \int_\Omega |div(u)|^2 dx. \tag{3.67}$$

Substituindo em (3.65) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\left(\int_\Omega k\delta u' \cdot u dx\right) &= \int_\Omega k\delta |u'|^2 dx - k\delta \int_\Omega [\mu |\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|div(u)|^2] dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} k\delta a m \cdot \nu |u|^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_2} k\delta m \cdot \nu u_i \cdot g_i(u') \ d\Gamma \\ &\quad - \int_\Omega k\delta\beta \nabla\theta \cdot u dx. \end{aligned} \tag{3.68}$$

De modo análogo, para o primeiro termo na direita em (3.51) temos

$$\tfrac{d}{dt}\left(\int_\Omega u_i'(m \cdot \nabla u_i) dx\right) = \int_\Omega [u_i''(m \cdot \nabla u_i) - \frac{n}{2}|u_i'|^2] dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} |u_i'|^2 m \cdot \nu d\Gamma, \tag{3.69}$$

pois

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_i'(m \cdot \nabla u_i') dx \ &= \int_\Omega (u_i' m) \cdot \nabla u_i' dx = \int_\Omega div(|u_i'|^2 m) dx - \int_\Omega u_i' div(u_i' m) dx \\ &= \int_{\Gamma_2} |u_i'|^2 m \cdot \nu dx - n\int_\Omega |u_i'|^2 dx - \int_\Omega u_i'(m \cdot \nabla u_i') dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int_\Omega k\delta u'' \cdot (m \cdot \nabla u) \ dx = \int_\Omega k\delta(\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla div \ u - \beta\nabla\theta) \cdot (m \cdot \nabla u) \ dx, \tag{3.70}$$

logo, utilizando fórmula de Green, as condições (3.5) e o fato que $u = 0$ em Γ_1 satisfaz $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu}\nu_k$ e $|\nabla u_i|^2 = |\dfrac{\partial u}{\partial \nu}|^2$ obtemos para os dois primeiros termos da direita em (3.70)

os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u_i(m\cdot\nabla u_i)dx &= \int_\Gamma(\nabla u_i\cdot\nu)(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma-\int_\Omega(\nabla u_i)\cdot\nabla(m\cdot\nabla u_i)dx\\ &= \int_{\Gamma_1}(\frac{\partial u_i}{\partial\nu}\nu_k\nu_k)(m_j\frac{\partial u_i}{\partial\nu}\nu_j)d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_i}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma\\ &-\int_\Omega|\nabla u_i|^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega m_k\frac{\partial}{\partial x_k}|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|^2dx\\ &=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|\frac{\partial u_i}{\partial\nu}|^2m\cdot\nu d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_i}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma\\ &-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}|\nabla u_i|^2m\cdot\nu d\Gamma+\frac{n-2}{2}\int_\Omega|\nabla u_i|^2dx.\end{aligned}\tag{3.71}$$

E

$$\begin{aligned}\int_\Omega\nabla(div\ u)\cdot(m\cdot\nabla u)dx &= \int_{\Gamma_1}div(u)m_k\frac{\partial u_i}{\partial\nu}\nu_k\nu_id\Gamma+\int_{\Gamma_2}div(u)\nu_i(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma\\ &-\int_\Omega|div(u)|^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega m_j\frac{\partial}{\partial x_j}|div(u)|^2dx\\ &=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|div(u)|^2m\cdot\nu d\Gamma+\int_{\Gamma_2}div(u)\nu_i(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma\\ &+\frac{n-2}{2}\int_\Omega|div\ u|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}|div\ u|^2m\cdot\nu d\Gamma.\end{aligned}\tag{3.72}$$

De (3.69)-(3.72) temos que $\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega k\delta u_i'(m\cdot\nabla u_i)dx\right)$ satisfaz

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}(\int_\Omega k\delta u_i'(m\cdot\nabla u_i)dx)=\frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_2}|u_i'|^2m\cdot\nu d\Gamma-\frac{nk\delta}{2}\int_\Omega|u_i'|^2dx\\ &+\int_{\Gamma_1}\frac{k\delta\mu}{2}|\frac{\partial u_i}{\partial\nu}|^2m\cdot\nu d\Gamma+\int_{\Gamma_2}k\delta\mu\frac{\partial u_i}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma-\frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_2}\mu|\nabla u_i|^2m\cdot\nu d\Gamma\\ &+\frac{(n-2)k\delta}{2}\int_\Omega\mu|\nabla u_i|^2dx+\frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_1}(\lambda+\mu)|div(u)|^2m\cdot\nu d\Gamma\\ &+\int_{\Gamma_2}k\delta(\lambda+\mu)div(u)\nu_i(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma+\frac{(n-2)k\delta}{2}\int_\Omega(\lambda+\mu)|div\ u|^2dx\\ &-\frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_2}(\lambda+\mu)|div\ u|^2m\cdot\nu d\Gamma-\int_\Omega k\delta\beta\nabla\theta(m\cdot\nabla u)dx.\end{aligned}\tag{3.73}$$

Finalmente de (3.51), (3.68) e (3.73) temos o resultado do lema. □

Lema 3.4.4. *Pelas condições geométricas (3.1), tem-se a seguinte desigualdade para o funcional F:*

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\ (F(t)) \leq & -2E + [c_p k\beta + k\delta(\beta(n-1))^2 \tfrac{c_p}{\epsilon\mu} + 4k\delta\beta^2 \tfrac{R^2}{\epsilon\mu}] \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx \\ & + \int_\Omega \gamma\beta\tau_0 |q|^2 dx + \int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu |u_i'|^2 d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu |g_i(u')|^2 [(n-1)^2 \frac{c_t c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_2} k\delta a m\cdot\nu |u_i|^2 [-n+2+\frac{2aR^2}{\mu}] d\Gamma + \int_\Omega k\delta\epsilon\mu |\nabla u|^2\ dx,\end{aligned} \tag{3.74}$$

onde c_t e c_p são constantes.

Prova. De (3.63) temos que $I_1,\ I_2,\ I_3$, e I_4 satisfazem as seguintes estimativas: primeiro, é claro que pelas condições geometricas (3.1), $I_2 \leq 0$. Além disso, da desigualdade de Hölder e pelo teorema de traço e desigualdade de Poincaré na variável u_i, cujas constantes serão denotadas c_t e c_p respectivamente, e pelas constantes definidas em (3.53)-(3.54), temos

$$\begin{aligned} I_1 &= -k\delta(n-1)\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu |u_i|^2 d\Gamma - k\delta(n-1)\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g_i(u')u_i d\Gamma \\ &\leq -k\delta(n-1)\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu |u_i|^2 d\Gamma + k\delta\int_{\Gamma_2} \frac{1}{2c_t c_p}\epsilon\mu |u_i|^2 d\Gamma \\ &+k\delta\int_{\Gamma_2} (n-1)^2 \frac{c_t c_p R m\cdot\nu |g_i(u')|^2}{2\mu\epsilon} d\Gamma \\ &\leq -k\delta(n-1)\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu |u_i|^2 d\Gamma + \int_\Omega \frac{k\delta}{2}\epsilon\mu |\nabla u_i|^2 dx \\ &+k\delta\int_{\Gamma_2} (n-1)^2 \frac{c_t c_p R m\cdot\nu |g_i(u')|^2}{2\mu\epsilon} d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Para I_3 e I_4 temos respectivamente,

$$I_3 \leq 2k\delta\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu(\frac{a^2R^2|u|^2}{\mu} + \frac{R^2|g(u')|^2}{\mu} + \frac{\mu}{2}|\nabla u|^2) d\Gamma, \tag{3.76}$$

e

$$\begin{aligned} I_4 \leq & k\delta(\beta(n-1))^2 \int_\Omega \frac{c_p}{\epsilon\mu}|\nabla\theta|^2 dx + \int_\Omega k\delta\frac{\epsilon\mu}{4}|\nabla u|^2\ dx \\ & +k\delta(\beta)^2 \int_\Omega \frac{4R^2}{\epsilon\mu}|\nabla\theta|^2 + \int_\Omega k\delta\frac{\epsilon\mu}{4}|\nabla u|^2\ dx. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Desta forma, completando os termos da energia $E(t)$ em (3.63), pela desigualdade de

Poincare em θ e pelas estimativas encontradas para $I_1, \cdots, I_4$ temos

$$
\begin{aligned}
F'(t) \leq & -2E + \int_\Omega [c_p k\beta |\nabla\theta|^2 + \gamma\beta\tau_0 |q|^2] dx + \int_{\Gamma_2} k\delta |u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma \\
& -k\delta(n-2)\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu |u_i|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k\delta(n-1)^2 \frac{c_t c_p R m\cdot\nu |g_i(u')|^2}{2\mu\epsilon} d\Gamma \\
& + \int_\Omega \frac{k\delta\epsilon\mu}{2} |\nabla u_i|^2 dx + 2k\delta \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu \left(\frac{a^2R^2|u|^2}{\mu} + \frac{R^2|g(u')|^2}{\mu}\right) d\Gamma \\
& + k\delta(\beta(n-1))^2 \int_\Omega \frac{c_p}{\epsilon\mu} |\nabla\theta|^2 + \int_\Omega \frac{k\delta\epsilon\mu}{4} |\nabla u|^2 \, dx - k\delta\mu \int_{\Gamma_2} |\nabla u|^2 m\cdot\nu d\Gamma \\
& + k\delta(\beta)^2 \int_\Omega \frac{4R^2}{\epsilon\mu} |\nabla\theta|^2 dx + \int_\Omega \frac{k\delta\epsilon\mu}{4} |\nabla u|^2 \, dx + k\delta\mu \int_{\Gamma_2} |\nabla u|^2 m\cdot\nu d\Gamma,
\end{aligned}
$$

reorganizando os termos conclui-se (3.74). □

É importante notar que no Lema 3.4.4 a estimativa para F' por enquanto só foram usados desigualdades de Poincaré e Hölder, porém na expressão (3.74) existem termos que dependem fortemente das condições de fronteira, mais exatamente da parte dissipativa não linear definida pela função g. Nos lemas a seguir vamos estudar as condições que deve satisfazer a componente dissipativa da fronteira e a função a também usada nas condições de fronteira. Este estudo envolve grande parte das condições do Teorema 3.2.1

Lema 3.4.5. *Suponha as condições geométricas (3.1). Seja a_0 e R como em (3.53)-(3.54). Suponha*

$$
a_0^2 < \frac{\mu}{2R^3\gamma^2} \quad \text{para} \quad n = 2, \tag{3.78a}
$$

$$
a_0 \leq \frac{(n-2)\mu}{2R^2} \quad \text{para } n \geq 3, \tag{3.78b}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
F'(t) \leq & -E + [c_p k\beta + k\delta(\beta(n-1))^2 \tfrac{c_p}{\epsilon\mu} + 4k\delta\beta^2 \tfrac{R^2}{\epsilon\mu}] \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx \\
& + \int_\Omega \gamma\beta\tau_0 |q|^2 dx + \int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu |u_i'|^2 d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu |g_i(u')|^2 [(n-1)^2 \frac{c_t c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.79}
$$

com $\epsilon < \frac{1}{2}$ se (3.78b), ou com $\epsilon < \frac{1-2P}{2}$ se (3.78a) onde P é igual a $P = k\delta R\gamma[\frac{2a_0R^2}{\mu}]a_0$ com γ como em (3.55).

Prova. No caso (3.78b), a integral

$$I = \int_{\Gamma_2} k\delta am \cdot \nu |u_i|^2 [+\frac{2aR^2}{\mu}] d\Gamma \leq 0,$$

e portanto tem-se (3.79) com $\epsilon < \frac{1}{2}$. No caso (3.78a), por (3.53)-(3.55),

$$\begin{aligned} I &\leq k\delta[\frac{2a_0R^2}{\mu}]a_0 \int_{\Gamma_2} m \cdot \nu |u_i|^2 d\Gamma \\ &\leq P||u||^2_{H_{\Gamma_1}} \\ &\leq 2PE(t), \end{aligned}$$

com $P = k\delta R\gamma^2[\frac{2a_0R^2}{\mu}]a_0$. Logo,

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -2E + [c_pk\beta + k\delta(\beta(n-1))^2\tfrac{c_p}{\epsilon\mu} + 4k\delta\beta^2\tfrac{R^2}{\epsilon\mu}] \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx \\ &+ \int_\Omega \gamma\beta\tau_0 |q|^2 dx + \int_{\Gamma_2} k\delta m \cdot \nu |u_i'|^2 d\Gamma + 2PE(t) \\ &+ \int_{\Gamma_2} k\delta m \cdot \nu |g_i(u')|^2 [(n-1)^2 \frac{c_tc_pR}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] d\Gamma + \int_\Omega k\delta\epsilon\mu |\nabla u|^2 \, dx, \end{aligned}$$

logo tem-se (3.79) com $\epsilon < \frac{1-2P}{2}$. □

Temos assim as ferramentas necessárias para a prova do Teorema 3.2.1. Para resumir a notação na prova, simplificaremos em muitos casos $V(t),\ E(t)$ como $V,\ E$ respectivamente.

Prova do Teorema 3.2.1. Da definição de V dada por (3.52), temos

$$V' = E' + d\tfrac{d}{dt}(E^\sigma F) = E' + d\sigma(E^{\sigma-1})E'F + dF'E^\sigma.$$

Além disso, como $E' \leq 0$, de (3.61) e (3.79) temos

$$V' \leq (1 - d\sigma(\tfrac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1))E^\sigma)E' - dE^{\sigma+1} + dE^\sigma \int_{\Gamma_2} k\delta m \cdot \nu |u_i'|^2 d\Gamma$$

$$+[c_p k\beta + k\delta(\beta(n-1))^2 \frac{c_p}{\epsilon\mu} + 4k\delta\beta^2 \frac{R^2}{\epsilon\mu}]dE^\sigma ||\nabla\theta||^2$$

$$+dE^\sigma \int_{\Gamma_2} k\delta m \cdot \nu |g_i(u')|^2 [(n-1)^2 \frac{c_t c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}]d\Gamma + dE^\sigma \int_\Omega \gamma\beta\tau_0 |q|^2 dx.$$

Substituindo E' por (3.50) temos,

$$\begin{aligned} V' \leq \; & -(1 - (\frac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1))d\sigma E^\sigma)\gamma\beta \int_\Omega |q|^2 dx \\ & -(1 - (\tfrac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1))d\sigma E^\sigma) \int_{\Gamma_2} k\delta(m\cdot\nu)(u' \cdot g(u'))d\Gamma \\ & -(1 - (\frac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1))d\sigma E^\sigma)k\tilde{\alpha}\beta \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - dE^{\sigma+1} + dE^\sigma \int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu |u_i'|^2 d\Gamma \\ & +[c_p k\beta + k\delta(\beta(n-1))^2 \frac{c_p}{\epsilon\mu} + 4k\delta\beta^2 \frac{R^2}{\epsilon\mu}]dE^\sigma ||\nabla\theta||^2 \\ & +dE^\sigma \int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu |g_i(u')|^2 [(n-1)^2 \frac{c_t c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}]d\Gamma + dE^\sigma \int_\Omega \gamma\beta\tau_0 |q|^2 dx, \end{aligned}$$

reorganizando os termos,

$$\begin{aligned} V' \leq & -(1 - (\frac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1))d\sigma E^\sigma - dE^\sigma\tau_0)\gamma\beta \int_\Omega |q|^2 dx - dE^{\sigma+1} \\ & -(1 - (\frac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1))d\sigma E^\sigma) \int_{\Gamma_2} k\delta(m\cdot\nu)(u' \cdot g(u'))d\Gamma \\ & +k\beta \left([c_p + \delta\beta(n-1)^2 \tfrac{c_p}{\epsilon\mu} + 4\delta\beta \tfrac{R^2}{\epsilon\mu}]dE^\sigma - (1 - (\tfrac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1))d\sigma E^\sigma)\tilde{\alpha} \right) ||\nabla\theta||^2 \\ & +dE^\sigma \int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu \left(|g_i(u')|^2 [(n-1)^2 \frac{c_t c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] + |u_i'|^2 \right) d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Desta última expressão vamos estudar os casos 1 e 2 descritos no Teorema 3.2.1. Como é feito em [46] e [27], para concluir os resultados de decaimento o ponto principal é estudar os termos

$$dE^{\sigma}\int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu\left(|g_i(u')|^2[(n-1)^2\frac{c_tc_pR}{2\mu\epsilon}+2\frac{R^2}{\mu}]+|u_i'|^2\right)d\Gamma$$

e

$$(1-d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))\sigma E^{\sigma})\int_{\Gamma_2} k\delta(m\cdot\nu)(u'\cdot g(u'))d\Gamma$$

e isto leva a aplicar as condições (3.10a)-(3.10f) e associar convenientemente os resultados.

Caso 1. Se $p=\alpha=1$, de (3.10c)-(3.10d), (3.10e)-(3.10f) , basta tomar $\sigma=0$, em (3.80) logo

$$\begin{aligned}V' \ &\leq -(1-d\tau_0)\gamma\beta\int_{\Omega}|q|^2dx-dE\\ &+k\beta\left([c_p+\delta\beta(n-1)^2\tfrac{c_p}{\epsilon\mu}+\delta\beta\tfrac{R^2}{\epsilon\mu}]d-\tilde{\alpha}\right)||\nabla\theta||^2\\ &+(d+dk_2[(n-1)^2\frac{c_tc_pR}{2\mu\epsilon}+2\frac{R^2}{\mu}]-k_1)\int_{\Gamma_2}k\delta m\cdot\nu|u_i'|^2d\Gamma,\end{aligned}$$

e se d satisfaz

$$d=\min\left\{\frac{1}{\tau_0},\frac{\tilde{\alpha}}{([c_p+\delta\beta(n-1)^2\frac{c_p}{\epsilon\mu}+4\delta\beta\frac{R^2}{\epsilon\mu}]},\frac{k_1}{1+k_2[(n-1)^2\frac{c_tc_pR}{2\mu\epsilon}+2\frac{R^2}{\mu}]}\right\}\tag{3.81}$$

temos que cada uma das constantes que acompanham as quantidades $\int_{\Omega}|q|^2dx$, $||\nabla\theta||^2$ e $\int_{\Gamma_2}k\delta m\cdot\nu|u_i'|^2d\Gamma$ são negativas, logo de (3.62)

$$V'(t) \ \leq -dE(t)\leq -\frac{d}{[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))]}V(t).$$

assim, integrando em $[0,t]$ e sem perda de generalidade denotando d como satisfazendo além de (3.81) o seguinte

$$d\leq\frac{1}{\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1)}\tag{3.82}$$

temos

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{1}{[1-d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))]}V(t) \\ &\leq \frac{1}{[1-d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))]}V(0)e^{-\frac{dt}{[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))]}} \\ &\leq \frac{[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))]}{[1-d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))]}E(0)e^{-\frac{dt}{[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))]}}. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Em resumo, neste caso temos decaimento exponencial.

Caso 2. $p+1>2\alpha$. Inicialmente vamos estimar o termo

$$E^{\sigma}\int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu\left(|g_i(u')|^2[(n-1)^2\frac{c_tc_pR}{2\mu\epsilon}+2\frac{R^2}{\mu}]+|u_i'|^2\right)d\Gamma. \tag{3.84}$$

O procedimento se resume em aplicar desigualdades de Young e de Hölder, e as condições (3.10a)-(3.10f), para obter termos separados da forma $E^{c\sigma}$ e

$$B_1\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta(m\cdot\nu)(u'\cdot g(u'))d\Gamma$$

e

$$B_2\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\geq 1\}} k\delta(m\cdot\nu)(u'\cdot g(u'))d\Gamma$$

com c, B_1 e B_2 a determinar convenientemente posteriormente. O procedimento será feito em três passos. Inicialmente estudaremos a integral

$$E^{\sigma}\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta m\cdot\nu|u_i'|^{2\alpha}d\Gamma, \tag{3.85}$$

para um $\alpha>0$ arbitrário, em seguida calculamos uma estimativa para a integral (3.84) e finalmente o estudo de (3.80).

Passo 1. Estimativa para (3.85). Sejam α, b constantes positivas arbitrárias, então pela desigualdade de Young (1.6) (com pares conjugados s, t) e pela desigualdade de

Hölder (1.1) (com pares conjugados $\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{(1-\tau)}$) respectivamente temos

$$E^\sigma \int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta m\cdot\nu|u_i'|^{2\alpha}d\Gamma$$

$$\leq \frac{(E^\sigma b)^s}{s} + \frac{1}{tb^t}(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} (k\delta m\cdot\nu)^\tau (k\delta m\cdot\nu)^{(1-\tau)}|u_i'|^{2\alpha}d\Gamma)^t \tag{3.86}$$

$$\leq \frac{(E^\sigma b)^s}{s} + \frac{1}{tb^t}(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta m\cdot\nu d\Gamma)^{t\tau}(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta m\cdot\nu|u_i'|^{\frac{2\alpha}{1-\tau}}d\Gamma)^{t(1-\tau)}.$$

Da expressão anterior vemos que a integral

$$(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta m\cdot\nu d\Gamma)^{t\tau} \leq (Rk\delta mes(\Gamma_2))^{t\tau}$$

e que dado para valores apropriados de τ, e t podemos associar a integral da direita em (3.86) com o termo

$$\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta(m\cdot\nu)(u'\cdot g(u'))d\Gamma.$$

Seguindo as ideias de [46], temos que $\frac{2\alpha}{1-\tau} = p+1$ e $t(1-\tau)=1$, assim $t=\frac{p+1}{2\alpha}$, $s=\frac{p+1}{p+1-2\alpha}$, $\tau=\frac{p+1-2\alpha}{p+1}$. Como $s>0$ logo vemos que é natural (consequente) a condição $p+1-2\alpha>0$ do Teorema 3.2.1. Por outro lado, de (3.86) e pela condição (3.10d) temos

$$E^\sigma \int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta m\cdot\nu|u_i'|^{2\alpha}d\Gamma$$

$$\leq \frac{(p+1-2\alpha)(E^\sigma b)^{\frac{p+1}{p+1-2\alpha}}}{p+1} + \frac{2\alpha}{(p+1)b^{\frac{p+1}{2\alpha}}}(Rk\delta mes(\Gamma_2))^{\frac{p+1-2\alpha}{2\alpha}}\times$$

$$(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta m\cdot\nu|u_i'|^{p+1}d\Gamma) \tag{3.87}$$

$$\leq \frac{(p+1-2\alpha)(E^\sigma b)^{\frac{p+1}{p+1-2\alpha}}}{p+1} + \frac{2\alpha}{k_1(p+1)b^{\frac{p+1}{2\alpha}}}(Rk\delta mes(\Gamma_2))^{\frac{p+1-2\alpha}{2\alpha}}\times$$

$$(\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta m\cdot\nu g_i(u')u_i'd\Gamma).$$

Passo 2. Estimativa para (3.84). Para $\Gamma_2 \cap [|u'| \leq 1]$, se $0 \leq \alpha \leq 1$ temos que $|u'|^2 \leq |u'|^{2\alpha}$ para $|u'| \leq 1$, assim podemos utilizar os resultados anteriores, além disso, utilizando (3.10a) e (3.10f) temos

$$\begin{aligned} & E^\sigma \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \leq 1\}} k\delta m \cdot \nu \left(|g_i(u')|^2 [(n-1)^2 \frac{c_t c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] + |u_i'|^2 \right) d\Gamma \\ & \leq E^\sigma \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \leq 1\}} k\delta m \cdot \nu \left(k_2^2 [(n-1)^2 \frac{c_t c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] + 1 \right) |u_i'|^{2\alpha} d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Como b é constante arbitrária podemos tomar $b = \left(\frac{p+1}{2C_1(p+1-2\alpha)} \right)^{\frac{p+1-2\alpha}{p+1}}$ onde C_1 é igual a $C_1 = k_2^2[(n-1)^2 \frac{c_t c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] + 1$, logo por (3.87) temos

$$\begin{aligned} & E^\sigma \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \leq 1\}} k\delta m \cdot \nu \left(|g_i(u')|^2 [(n-1)^2 \frac{c_t c_p R}{2\mu\epsilon} + 2\frac{R^2}{\mu}] + |u_i'|^2 \right) d\Gamma \\ & \leq \frac{1}{2} E^{\sigma \frac{p+1}{p+1-2\alpha}} + \frac{\alpha}{k_1} \left(\frac{2C_1}{p+1} \right)^{\frac{p+1}{2\alpha}} (Rk\delta mes(\Gamma_2)(p+1-2\alpha))^{\frac{p+1-2\alpha}{2\alpha}} \times \\ & \qquad (\int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \leq 1\}} k\delta m \cdot \nu g_i(u') u_i' d\Gamma). \end{aligned} \tag{3.89}$$

Para $\Gamma_2 \cap [|u'| \geq 1]$, temos pelas condições (3.10e), (3.10c) e sendo a energia E decrescente, a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & E^\sigma(t) \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \geq 1\}} k\delta m \cdot \nu \left(|g_i(u')|^2 [(n-1)^2 \frac{c_t c_p R}{2\mu\epsilon} + \frac{2R^2}{\mu}] + |u_i'|^2 \right) d\Gamma \\ & \leq E^\sigma(0) \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \geq 1\}} C_1 k\delta m \cdot \nu |u_i'|^2 d\Gamma \\ & \leq E^\sigma(0) \int_{\Gamma_2 \cap \{|u'| \geq 1\}} \frac{C_1}{k_1} k\delta m \cdot \nu g_i(u') u_i' d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Passo 3. Estimativa para (3.80). Breve resumo do procedimento. Se $C = \frac{2R}{\sqrt{\mu}} + \lambda_0(n-1)$, utilizando (3.89) e (3.90) vamos encontrar que ao estimar V' obtemos termos como $E^{\sigma+1}(t)$ e $E(t)^{\frac{\sigma(p+1)}{p+1-2\alpha}}$ o que leva a dar condições sobre o exponente σ. Neste momento também

se entenderá naturalmente a condição (3.93), para limitar os termos correspondentes aos fatores, $||\nabla\theta||^2$, $\int_\Omega |q|^2dx$, e $\int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu g_i(u')u_i'd\Gamma$ de maneira semelhante ao feito no caso $p=\alpha=1$. De fato, como E é descrescente e agrupando com fator comum d temos

$$\begin{aligned}V'(t) \leq\ & (d(C\sigma E^\sigma(0)+E^\sigma(0)\tau_0)-1)\gamma\beta|q|^2 - dE^{\sigma+1}(t)+\frac{d}{2}E(t)^{\frac{\sigma(p+1)}{p+1-2\alpha}}\\ &+(d(C\sigma E^\sigma(0)+E^\sigma(0)\frac{C_1}{k_1})-1)\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\geq 1\}} k\delta(m\cdot\nu)(u'\cdot g(u'))d\Gamma\\ &+k\beta\left(d\left([c_p+\delta\beta(n-1)^2\tfrac{c_p}{\epsilon\mu}+\delta\beta\tfrac{R^2}{\epsilon\mu}]E^\sigma(0)+C\sigma E^\sigma(0)\alpha\right)-\alpha\right)||\nabla\theta||^2\\ &+\left(d\left[\frac{\alpha}{k_1}\left(\frac{2C_1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{2\alpha}}(Rk\delta mes(\Gamma_2)(p+1-2\alpha))^{\frac{p+1-2\alpha}{2\alpha}}+C\sigma E^\sigma(0)\right]-1\right)\times\\ &\int_{\Gamma_2\cap\{|u'|\leq 1\}} k\delta m\cdot\nu g_i(u')u_i'd\Gamma.\end{aligned}$$

Definimos agora

$$\sigma+1=\frac{\sigma(p+1)}{p+1-2\alpha}$$

isto é, podemos tomar

$$\sigma=\frac{p+1-2\alpha}{2\alpha}. \tag{3.91}$$

Logo se d satisfaz

$$\begin{aligned}d=\min\Bigg\{&\frac{1}{E^\sigma(0)(C\sigma+\tau_0)},\frac{1}{E^\sigma(0)(C\sigma+1)},\ \frac{\tilde\alpha}{E(0)\left([c_p+\delta\beta(n-1)^2\frac{c_p}{\epsilon\mu}+\delta\beta\frac{R^2}{\epsilon\mu}]+C\sigma\tilde\alpha\right)},\\ &1/\left[\frac{\tilde\alpha}{k_1}\left(\frac{2C_1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{2\alpha}}(Rk\delta mes(\Gamma_2)(p+1-2\alpha))^{\frac{p+1-2\alpha}{2\alpha}}+C\sigma E^\sigma(0)\frac{C_1}{k_1}\right]\Bigg\},\end{aligned}$$

e se $\tilde\sigma$ é como em (3.91) obtemos

$$V'(t)\leq-\frac{d}{2}E^{\tilde\sigma+1}(t).$$

Pela desigualdade (3.62), temos

$$V'(t) \leq \frac{-d}{2[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))E^{\sigma}(0)]^{\tilde{\sigma}+1}} V^{\tilde{\sigma}+1}(t)$$

isto é, temos a seguinte equação diferencial

$$\frac{V'(t)}{V^{\tilde{\sigma}+1}(t)} \leq \frac{-d}{2[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))E^{\sigma}(0)]^{\tilde{\sigma}+1}}$$

com solução dada pela seguinte desigualdade

$$V(t) \leq \left[\frac{d\tilde{\sigma}t}{2[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))E^{\sigma}(0)]^{\tilde{\sigma}+1}} + V^{-\tilde{\sigma}}(0)\right]^{-1/\tilde{\sigma}}. \tag{3.92}$$

Lembrando (3.62) devemos estabelecer uma condição a mais em d, isto é

$$\begin{aligned} d = \min\Bigg\{ & C^{-1}E^{-\sigma}(0), \frac{1}{E^{\sigma}(0)(C\sigma+\tau_0)}, \frac{1}{E^{\sigma}(0)(C\sigma+1)}, \\ & \frac{\tilde{\alpha}}{E(0)\left(c_p+\delta\beta(n-1)^2\frac{c_p}{\epsilon\mu}+\delta\beta\frac{R^2}{\epsilon\mu}+C\sigma\alpha\right)}, \\ & 1/\left[\frac{\tilde{\alpha}}{k_1}\left(\frac{2C_1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{2\alpha}}(Rk\delta mes(\Gamma_2)(p+1-2\alpha))^{\frac{p+1-2\alpha}{2\alpha}} + C\sigma E^{\sigma}(0)\frac{C_1}{k_1}\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.93}$$

com o qual obtemos

$$V(0) \leq [1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))E^{\sigma}(0)]E(0).$$

Assim

$$\begin{aligned} V(t) &\leq [\frac{d\tilde{\sigma}t}{2[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))E^{\sigma}(0)]^{\tilde{\sigma}+1}} + V^{-\tilde{\sigma}}(0)]^{-1/\tilde{\sigma}} \\ &\leq [\frac{d\tilde{\sigma}tV^{\sigma}(0)}{2[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))E^{\sigma}(0)]^{\tilde{\sigma}+1}} + 1]^{-1/\tilde{\sigma}}E(0)(1+dCE^{\sigma}(0)) \\ &\leq 2E(0)[\frac{d\tilde{\sigma}tE^{\sigma}(0)}{2[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))E^{\sigma}(0)]} + 1]^{-1/\tilde{\sigma}}, \end{aligned} \tag{3.94}$$

assim de novo por (3.62) temos

$$E(t) \quad \leq 2E(0)\tilde{\beta}[1+\tfrac{p+1-2\alpha}{2\alpha}\omega t]^{\frac{-2\alpha}{p+1-2\alpha}} \tag{3.95}$$

com

$$\omega = \frac{dE^{\sigma}(0)}{2[1+d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))E^{\sigma}(0)]} \tag{3.96}$$

e

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{[1-d(\frac{2R}{\sqrt{\mu}}+\lambda_0(n-1))E^{\sigma}(0)]} \tag{3.97}$$

e com isto termina o prova de decaimento. □

Capítulo 4

Sistema Termoelástico com lei de Fluxo de Cattaneo. Dissipação linear na fronteira.

4.1 O modelo

Neste capítulo considera-se um sistema termoelástico semelhante ao Capítulo 3. De fato, este sistema surge da motivação inicial de responder as seguintes perguntas sobre o sistema termoelástico de refêrencia (0.3)-(0.4): podemos deduzir a estabilidade do sistema (0.3)-(0.4) considerando lei de Cattaneo para o fluxo de calor? Precisamos de dissipações na fronteira? Em tal caso, de qual tipo? Desta forma encontramos que se definimos o sistema termoelástico com dissipação de caráter linear mostra-se estabilidade de tipo polinomial.

Dada a direta relação com o sistema do Capítulo 3 descrevemos brevemente o novo sistema. Considere um domínio Ω n-dimensional, homogêneo, isotrópico e com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^2. Seja $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de deslocamento e $\theta = \theta(x,t) \in \mathbb{R}$, a diferença de temperatura no tempo t com respeito a uma de referencia, tomada em $t = 0$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Considere-se a função vetorial $q = q(x,t) \in \mathbb{R}^n$, que representa o

fluxo de calor em Ω e o sistema

$$u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla div\ u + \alpha\nabla\theta = 0 \qquad em\ \Omega\times(0,\infty), \tag{4.1}$$

$$\theta' + \gamma div(q) + \delta div\ u' = 0 \qquad em\ \Omega\times(0,\infty), \tag{4.2}$$

$$\tau_0 q' + q + k\nabla\theta = 0 \qquad em\ \Omega\times(0,\infty). \tag{4.3}$$

Como no sistema do capítulo anterior (3.2)-(3.5), todas as constantes são positivas e τ_0, o tempo de relaxamento continua sendo bem menor em comparação às outras constantes. λ e μ, constantes de Lame, como em (0.7). O sistema (4.1)-(4.3) é também chamado do sistema termoelástico com segundo som. É claro que quando $\tau_0 = 0$ tem-se o sistema termoelástico clássico. Em [38] mostra-se a estabilidade exponencial do sistema unidimensional com três diferentes condições de fronteira, além disso, estuda-se o comportamento da estabilidade quando $\tau_0 \to 0$. Também se mostra a estabilidade exponencial no caso não linear. Para dimensões $n = 2$ e $n = 3$ tem-se estabilidade exponencial no caso de domínios radialmente simétricos, ver [37].

Neste capítulo o objetivo é estudar o sistema termoelástico com segundo som e dissipação do tipo linear na fronteira em dimensões superiores, isto é, o sistema (4.1)-(4.3) com as condições

$$\begin{cases} u(x,0) = u^0, \quad u'(x,0) = u^1, & \\ \theta(x,0) = \theta^0(x), \quad q(x,0) = q^0(x) & em\ \Omega, \\ \theta = 0 & em\ \Gamma\times(0,\infty), \\ u = 0 & em\ \Gamma_1\times(0,\infty), \\ \mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)div(u)\nu & \\ +\ am\cdot\nu u + m\cdot\nu u' = 0 & em\ \Gamma_2\times(0,\infty). \end{cases} \tag{4.4}$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, um domínio limitado, aberto, convexo com $n\geq 2$, e com fronteira $\Gamma = \Gamma_1\cup\Gamma_2$,

Γ_1 e Γ_2, definidas a seguir:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(x_0) &= \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\},\\ \Gamma_2(x_0) &= \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\},\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde $\Gamma_i(x_0)$ será denotada Γ_i, além disso, com $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $m(x) = x - x_0$ e $\nu(x) = (\nu_1(x), \cdots, \nu_n(x))$ vetor normal unitário exterior à Γ no ponto x de Γ. A função $a = a(x) \geq 0$ e satisfazendo

$$a \in C^1(\Gamma_2), \tag{4.6}$$

e além disso se considera

$$\Gamma_1 \neq \emptyset \quad ou \quad a(x) \not\equiv 0. \tag{4.7}$$

α, δ e γ são parâmetros de acoplamento e k constante de condutividade térmica. Em Γ_1 o deslocamento, u, é nulo i.e. a parte fixa do sistema, e em Γ_2 se aplicará a dissipação do tipo linear u'. Na seção 2 se resume o resultado principal e algumas definições a utilizar no decorrer do capítulo. Na seção 3, temos a prova do Existência e Unicidade. Na seção 4 apresenta-se a estabilidade polinomial do sistema e na seção 5 algumas observações sobre os conjuntos Γ_1, Γ_2 e a função $a(x)$.

4.2 Resultado Principal

Nosso principal resultado está centrado em estabelecer o decaimento da energia para o sistema termoelástico com segundo som e com dissipação linear na fronteira. Vamos mostrar, utilizando o método da energia, que o sistema $(4.1) - (4.4)$ apresenta estabilidade polinomial em domínios limitados. Note-se que o sistema (3.2)-(3.5) estudado no Capítulo 3 difere do sistema $(4.1) - (4.4)$ não só na dissipação definida na fronteira como também na equação do calor (4.2) que não apresenta o termo dissipativo $-\alpha\Delta\theta$ adicionado em (3.3) e que permite estabelecer o resultado de estabilidade exponencial nesse sistema.

Antes de apresentar o teorema principal definimos as energias E_1 e E_2, energia de primeiro e segundo ordem associadas ao sistema (4.1)-(4.4). Multiplicando (4.1) por $k\delta u'$, (4.2)

por $k\alpha\theta$ e (4.3) por $\gamma\alpha q$, e integrando em Ω tem-se a energia do primeiro ordem

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega [k\delta|u'|^2 + k\delta\mu|\nabla u|^2 + k\delta(\lambda+\mu)|divu|^2 + k\alpha|\theta|^2 + \gamma\alpha\tau_0|q|^2]dx$$

$$+ \quad \frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma$$

$$:= E_1(t,u,\theta,q) \tag{4.8}$$

satisfazendo

$$\frac{d}{dt}E_1(t) = -\gamma\alpha\int_\Omega |q|^2dx - \int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu|u'|^2 d\Gamma, \tag{4.9}$$

o que indica que o sistema é dissipativo. Analogamente, derivando com respeito a t o sistema (4.1)- (4.3) e multiplicando por $k\delta u''$, $k\alpha\theta'$, $\gamma\alpha q'$ respectivamente, determina-se a energia de segundo ordem

$$E_2(t) = E_1(t,u',\theta',q') \tag{4.10}$$

com

$$\frac{d}{dt}E_2(t) = -\gamma\alpha\int_\Omega |q'|^2dx - \int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu|u''|^2 d\Gamma. \tag{4.11}$$

Para o enunciado do teorema principal e desenvolvimento dos resultados neste capítulo serão utilizadas frequentemente as constantes definidas em (2.17), (2.18) e (2.19) do Capítulo 2.

Teorema 4.2.1. *Suponha que as condições geométricas (4.5) são válidas e*

$$a_0^2 < \frac{\mu}{2R^3\gamma^2} \quad \textit{para} \;\; n=2, \tag{4.12a}$$

$$a_0 \le \frac{(n-2)\mu}{2R^2} \quad \textit{para } n\ge 3. \tag{4.12b}$$

Então, para todo dado inicial $U_0 \in D(\Lambda)$ existe uma constante $M = M(U_0,) > 0$ tal que a energia do sistema (4.1)-(4.4) satisfaz

$$E_1(t) \le \frac{M}{t}(E_1(0)+E_2(0)) \qquad \forall t>0, \tag{4.13}$$

onde $D(\Lambda)$ é definido em (4.21).

A seguir veremos a boa colocação do sistema e logo a seguir a prova de estabilidade.

4.3 Existência e Unicidade

Em virtude da dissipação linear na fronteira e pelo visto dos sistemas estudados nos capítulos 2 e 3, vamos encontrar que ao reescrever o sistema (4.1)-(4.4) no âmbito de semigrupos e do problema abstrato de Cauchy, estaremos utilizando ferramentas da teoria de semigrupos linear. Antes de estabelecer o resultado de existência e unicidade para nosso sistema, vamos definir o espaço de fase $\mathbb{H}$ e a norma induzida pela energia do sistema. Denote-se por $H^m(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$ os espaços de Sobolev definidos em (1.3) e (1.4) respectivamente. Defina-se, como nos capítulos 2 e 3, os espaços de Hilbert

$$\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ sobre \ \Gamma_1\}, \tag{4.14}$$

$$\mathbb{H} = (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n \times L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^n, \tag{4.15}$$

com produto interno e norma induzida $(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ definido como

$$\langle u, v\rangle_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = \frac{1}{2}\int_\Omega k\delta(\mu\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + (\lambda+\mu)div(u)\overline{div(v)})dx + \int_{\Gamma_2} k\delta am \cdot \nu u \cdot \overline{v} d\Gamma, \tag{4.16}$$

$$||u||^2_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = \frac{1}{2}\int_\Omega k\delta(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|div(u)|^2)dx + \int_{\Gamma_2} k\delta am \cdot \nu |u|^2 d\Gamma. \tag{4.17}$$

Em $\mathbb{H}$, dada a partir da energia, definimos a norma como

$$2||(u, v, \theta, q)||^2_{\mathbb{H}} = ||u||^2_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + k\delta||v||^2_{(L^2(\Omega))^n} + k\alpha||\theta||^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\alpha\tau_0||q||^2_{(L^2(\Omega))^n}. \tag{4.18}$$

Agora vamos reformular o problema de valor inicial (4.1)-(4.4) para $u,\ \theta,\ q$ num sistema de primeiro ordem para

$$V \equiv \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \\ V^4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ \theta \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+1}, \quad V(0) \equiv V_0 := \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \\ q^0 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Note-se que das equações (4.1)-(4.3) podemos escrever $\frac{dV}{dt} = \Lambda V$ onde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mu\Delta + (\lambda+\mu)\nabla div & 0 & -\alpha\nabla & 0 \\ 0 & -\delta div & 0 & -\gamma div \\ 0 & 0 & -\frac{k}{\tau_0}\nabla & -\frac{1}{\tau_0} \end{pmatrix}.$$

O domínio de todo operador Λ deve satisfazer

$$D(\Lambda) = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{H} : \Lambda(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{H}\}, \tag{4.20}$$

logo podemos especificar o domínio do operador Λ como

$$\begin{aligned} D(\Lambda) = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \ \in \mathbb{H} : v_1 \in (H^2(\Omega))^n,\ v_2 \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n,\ v_3 \in H^1_0(\Omega), \\ div(v_4) \in L^2(\Omega)\}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

então o problema (4.1)-(4.4) transforma-se em

$$\begin{cases} V' = \Lambda V, & \forall t > 0, \\ V(0) = V_0 \in D(\Lambda), \end{cases} \tag{4.22}$$

assim, solucionar (4.1)-(4.4) é equivalente a solucionar (4.22). Agora vamos estabelecer algumas propriedades do operador Λ.

Proposição 4.3.1. *São válidas as seguintes afirmações:*

1. $D(\Lambda)$ *é denso em* $\mathbb{H}$.

2. *O operador* Λ *é dissipativo.*

3. $0 \in \rho(-\Lambda)$, *onde* $\rho(-\Lambda)$ *é o conjunto resolvente do operador* $-\Lambda$.

Prova. 1. De forma análoga ao capítulos 2 e 3, definimos o seguinte conjunto auxiliar

$$D = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{H} : v_1 \in (H^2(\Omega))^n,\ v_2 \in (H_0^1(\Omega))^n,\ v_3 \in H_0^1(\Omega),\ \ div(v_4) \in L^2(\Omega),$$

$$\mu\frac{\partial v_1}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(v_1)\nu + am\cdot\nu v_1 = 0 \ em\ \Gamma_2\}$$

e mostramos que $D \subset D(\Lambda)$ e D é denso em $\mathbb{H}$. De fato, a inclusão $D \subset D(\Lambda)$ é clara pois seja $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in D$, logo $v_2 = 0$ em Γ, implicando

$$\mu\frac{\partial v_1}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(v_1)\nu + am\cdot\nu v_1 + m\cdot\nu v_2 = 0 \ em\ \Gamma_2,$$

ficando provada a inclusão. Das densidades $(C_0^\infty(\Omega))^n$ e $C_0^\infty(\Omega)$ em $(L^2(\Omega))^n$ e $L^2(\Omega)$ é suficiente mostrar a densidade em $(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Se

$$W = \{w \in (H^2(\Omega)\cap \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n : \mu\frac{\partial w}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(w)\nu + am\cdot\nu w = 0 \ em\ \Gamma_2\},$$

então W é denso em $(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. De fato, se $v \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ tal que

$$(v, w)_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = 0, \qquad para\ todo\ w \in W,$$

logo, para todo $f \in (L^2(\Omega))^n$ fixo, o problema elíptico

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla div u = f & em\ \Omega \\ u = 0 & em\ \Gamma_1 \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(u)\nu + am\cdot\nu u = 0 & em\ \Gamma_2, \end{cases}$$

possui uma solução $u \in W$. Desta forma, como

$$(f, v)_{(L^2(\Omega))^n} = (u, v)_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = 0,$$

se segue que $v = 0$ e pelo teorema de Hanh Banach, W é denso em $(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Finalmente, do anterior tem-se a densidade $D(\Lambda)$ em $\mathbb{H}$.

2. Pela definição do produto interno em $\mathbb{H}$, é fácil provar Λ é dissipativo, pois se $V \in D(\Lambda)$

com $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ então

$$Re\langle \Lambda V, V\rangle_{\mathcal{H}} = Re\left((v_2, v_1)_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \frac{k\delta}{2}(\mu\Delta v_1 + (\lambda+\mu)\nabla v_1 - \alpha\nabla v_3, v_2)_{(L^2(\Omega))^n}\right.$$

$$\left. -\frac{k\alpha}{2}(\delta div(v_2) + \gamma div(v_4), v_3)_{(L^2(\Omega))} - \frac{\gamma\alpha\tau_0}{2}(\frac{k}{\tau_0}\nabla v_3 + \frac{1}{\tau_0}v_4, v_4,)_{(L^2(\Omega))^n}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(k\delta\int_{\Gamma_2}(m\cdot\nu)|v_2|^2 d\Gamma + \gamma\alpha\int_\Omega |v_4|^2 dx\right) \tag{4.23}$$

$$\leq 0.$$

3. Mostra-se que $-\Lambda^{-1}$ existe e é um operador contínuo. Seja $W = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in D(\Lambda)$ com $\Lambda W = 0$. Logo

$$-w_2 = 0 \tag{4.24}$$

$$-\mu\Delta w_1 - (\lambda+\mu)\nabla div w_1 + \alpha\nabla w_3 = 0 \tag{4.25}$$

$$\delta div(w_2) + \gamma div(w_4) = 0 \tag{4.26}$$

$$\frac{k}{\tau_0}\nabla w_3 + \frac{1}{\tau_0}w_4 = 0. \tag{4.27}$$

De (4.24) implica $w_2 = 0$ e de $\Lambda W = 0$, tem-se $Re(\Lambda W, W) = 0$. Assim de (4.23) tem-se o resultado $w_4 = 0$.

De (4.27), $\nabla w_3 = 0$, e dado que $w_3 \in H^1_0(\Omega)$ logo pela desigualdade de Poincaré, $w_3 = 0$. Finalmente de (4.25) tem- se que w_1 é solução do problema

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla div(u) = 0 & em\ \Omega \\ u = 0, & em\ \Gamma_1 \\ \mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)div(u)\nu + am\cdot\nu u = 0 & em\ \Gamma_2, \end{cases}$$

assim $w_1 = 0$. Desta maneira $W = 0$, assim $-\Lambda$ é injetivo.

Por outro lado, mostremos que operador $-\Lambda$ é sobrejetivo isto é, dado $F = (F_1, \cdots, F_4) \in \mathbb{H}$ mostremos que existe $W \in D(\Lambda)$ tal que $\Lambda W = F$. A afirmação anterior implica definir

o sistema

$$-w_2 = F_1 \tag{4.28}$$

$$-\mu\Delta w_1 - (\lambda+\mu)\nabla div w_1 + \alpha\nabla w_3 = F_2 \tag{4.29}$$

$$\delta div(w_2) + \gamma div(w_4) = F_3 \tag{4.30}$$

$$\frac{k}{\tau_0}\nabla w_3 + \frac{1}{\tau_0}w_4 = F_4. \tag{4.31}$$

De (4.28) tem-se $w_2 \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ e pela equivalência das normas $(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ e $(\mathbb{H}^1(\Omega))^n$ temos

$$k\delta||w_2||^2_{(L^2(\Omega))^n} \leq ck\delta||F_1||^2_{(L^2(\Omega))^n} \leq c||F||^2_{\mathbb{H}}.$$

De (4.30), $div(w_4) \in L^2(\Omega)$ e de (4.31) tem-se,

$$\gamma k\Delta w_3 = \gamma\tau_0 div F_4 - F_3 - \delta div F_1 \ em \ \ H^{-1}(\Omega),$$

como consequência do Teorema de Riesz, $w_3 \in H^1_0(\Omega)$ é a única solução do problema $-\Delta w = g \ em \ \ \Omega$ com $g \in H^{-1}(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned} ||w_3||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla w_3||_{(L^2(\Omega))^n} &\leq c||\gamma\tau_0 div F_4 - F_3 - \delta div F_1||_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq c(||\gamma\tau_0 F_4||_{(L^2(\Omega))^n} + ||F_3||_{L^2(\Omega)} + ||\delta F_1||_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}) \\ &\leq c||F||_{\mathbb{H}}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Como $w_3 \in H^1_0(\Omega)$, de (4.31) tem-se $w_4 \in (L^2(\Omega))^n$ assim w_4 satisfaz as condições do domínio $D(\Lambda)$, isto é, $w_4 \in (L^2(\Omega))^n$ e $div(w_4) \in L^2(\Omega)$. Além disso, de (4.31) e (4.32) tem-se

$$||w_4||_{(L^2(\Omega))^n} \leq c||F||_{\mathbb{H}}.$$

Finalmente provemos que $w_1 \in (H^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Sendo $w_2 \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ logo se h é restrita em Γ como

$$h = -(m\cdot\nu)w_2|_{\Gamma} \tag{4.33}$$

temos $h \in (H^{1/2}(\Gamma))^n$; disto e de (4.29) temos que $w_1 \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ é a única solução de

$$\begin{cases} -\mu\Delta w_1 - (\lambda+\mu)\nabla div w_1 = (F_2 - \alpha\nabla w_3) & em\ \Omega \\ w_1 = 0 & em\ \Gamma_1 \\ \mu\frac{\partial w_1}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)div(w_1)\nu + am\cdot\nu w_1 = h & em\ \Gamma_2, \end{cases} \tag{4.34}$$

onde $f = (F_2 - \alpha\nabla w_3) \in (L^2(\Omega))^n$. De fato, seja $\phi \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ logo pelas fórmulas (1.9) e (1.8) temos

$$\begin{aligned} -\int_\Omega (\mu\Delta w_1(x) + \ & (\lambda+\mu)\nabla div w_1(x))\phi(x)dx = \int_\Omega \mu\nabla w_1(x)\cdot\nabla\phi(x)dx - \int_{\Gamma_2}\mu\frac{\partial w_1}{\partial\nu}(x)\phi(x)d\Gamma \\ &+ \int_\Omega (\lambda+\mu)div w_1(x)div\phi(x)dx - \int_{\Gamma_2}(\lambda+\mu)div w_1(x)\phi(x)d\Gamma \\ &= \int_\Omega (\mu\nabla w_1(x)\cdot\nabla\phi(x) + (\lambda+\mu)div w_1(x)div\phi(x))dx \\ &+ \int_{\Gamma_2}(am\cdot\nu w_1(x)\cdot\phi(x) - h(x)\phi(x))d\Gamma, \end{aligned} \tag{4.35}$$

assim, definindo a aplicação bilinear em $(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$

$$a(w_1,\phi) = \frac{1}{k\delta}\langle w_1,\phi\rangle_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} \tag{4.36}$$

e o funcional $F \in [(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$

$$F(\phi) = \int_\Omega (F_2(x) - \alpha\nabla w_3(x))\phi(x)dx + \int_{\Gamma_2} h(x)\phi(x)d\Gamma, \tag{4.37}$$

estamos nas hipóteses do teorema de Lax-Milgram e mostramos assim a existência de uma única solução $w_1 \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Além disso concluimos

$$||w_1||_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} \leq ||f||_{(L^2(\Omega))^n} \leq ||F||_{\mathbb{H}}.$$

Para provar $w_1 \in H^2(\Omega)$, resolveremos um outro problema elítico que estará associado a (4.34) e utilizaremos o método de translação de Nirenberg para mostrar a regularidade de w_2. Para isto, seja $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ o vetor normal unitário em Γ exterior a Ω e

considere o seguinte sistema

$$B\zeta = (\mu I_{n\times n} + (\lambda+\mu)\tilde{V})\zeta = h \tag{4.38}$$

com h como em (4.33), $I_{n\times n}$ a matriz identidade $n \times n$ e $\tilde{V}$ a matriz definida como

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \nu_1^2 & \nu_1\nu_2 & \cdots & \nu_1\nu_n \\ \nu_1\nu_2 & \nu_2^2 & \cdots & \nu_2\nu_n \\ & \ddots & & \\ \nu_1\nu_n & v_2\nu_n & \cdots & \nu_n^2 \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Devido a forma particular da simetria da matriz $\tilde{V}$, e sendo B a soma das matrizes identidade e $\tilde{V}$, pode-se mostrar que o determinante da matriz B é da forma $\mu^{n-1}(\lambda+2\mu)$. Da condição (0.7) concluimos que a matriz B é invertível logo existe uma solução $\zeta \in (H^{1/2}(\Gamma))^n$. Do teorema de Traço para a derivada normal podemos encontrar uma função $\phi \in (H^2(\Omega)^n)$ tal que satisfaz a relação

$$(\phi|_\Gamma, \frac{\partial\phi}{\partial\nu}|_\Gamma) = (0,\zeta) \in (\mathbb{H}^{3/2}(\Gamma))^n \times (\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma))^n. \tag{4.40}$$

Note que $\phi \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Além disso note que podemos tomar uma base ortonormal conveniente em $\mathbb{R}^n$ de modo que para todo $x \in \Gamma$ a equação em (4.38) implica

$$\mu\frac{\partial\phi}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)div(\phi)\nu + am\cdot\nu\phi = B\zeta = h \tag{4.41}$$

em Γ_2. De fato, tomamos o vetor $\nu(x)$ e completamos para formar uma base ortonormal em $\mathbb{R}^n$ para quase todo $x \in \Gamma$. Denotemos $\{\nu(x), \tau^1(x), \tau^2(x), \cdots, \tau^{n-1}(x)\}$. Por outro lado, podemos encontrar coeficientes $c^{k,j}$ com $j = 1, 2\cdots, n;\ k = 1, 2, \cdots, n-1$; tais que as combinações $\sum_{k=1}^{n-1} c^{k,j}\frac{\partial\phi_j}{\partial\tau^k}$ sejam nulas, assim $div(\phi) = \nu\cdot\zeta$ pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_j}{\partial x_j} &= \nu_i\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu} + \sum_{k=1}^{n-1} c^{k,j}\frac{\partial\phi_j}{\partial\tau^k} \\ &= \nu_i\tfrac{\partial\phi_j}{\partial\nu} = \nu_i\zeta_i \quad em\ \Gamma. \end{aligned}$$

Da igualdade (4.41) temos que se tomamos $z = w_1 - \phi$ podemos descrever o seguinte sistema para z

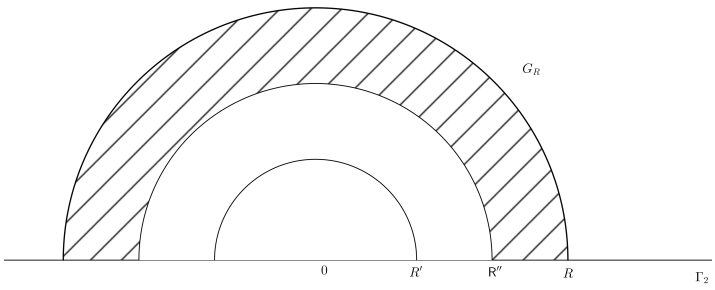
$$\begin{cases} -\mu\Delta z - (\lambda+\mu)\nabla div z = (F_2 - \alpha\nabla w_3) - \mu\Delta\phi - (\lambda+\mu)\nabla div\phi & em\ \Omega \\ z = 0 & em\ \Gamma_1 \\ \mu\frac{\partial z}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)div(z)\nu + am\cdot\nu z = 0 & em\ \Gamma_2, \end{cases} \tag{4.42}$$

com $F = (F_2 - \alpha\nabla w_3) - \mu\Delta\phi - (\lambda+\mu)\nabla div\phi \in (L^2(\Omega))^n$. De forma análoga ao sistema (4.34) demonstra-se que o sistema (4.42) tem solução $z \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. Nesta parte aplicaremos o método de translação de Nirenberg para mostrar que se $F \in (L^2(\Omega))^n$ logo $z \in (H^2(\Omega))^n$ e portanto temos $w_1 \in (H^2(\Omega))^n$. Para isso basta mostrar a regularidade localmente para todo $x \in \overline{\Omega}$, isto é, mostrar que existe uma vizinhança $O(x)$ tal que $z \in (H^2(O(x)\cap\Omega))^n$.

Caso $x \in \Gamma$. Pode-se assumir $x = 0$ e a vizinhança reta com vetor normal orientado na direção $-x_n$. Desta forma assumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$. Seja $R > 0$ tal que o conjunto $G_R = \{x : |x| < R,\ x_n > 0\}$ satisfaz

$$G_R \subset \Omega \quad e \quad \Gamma_{2,G_R} = \{x \in \overline{G}_R, x_n = 0\} \subset \Gamma_2.$$

De forma análoga defina $G_{R'}$ e $G_{R''}$ com $0 < R' < R$ e $R'' = \frac{1}{2}(R' + R'')$ respectivamente.



Seja $\theta \in (C_0^\infty(G_R \cup \Gamma_{2,G_R}))^n$, de forma análoga como na equação (4.35) temos:

$$\int_{G_R} (\mu\nabla z\cdot\nabla\theta + (\lambda+\mu)div(z)div(\theta))dx + \int_{\Gamma_{2,G_R}} am\cdot\nu z\cdot\theta d\Gamma = \int_{G_R} F\cdot\theta dx. \tag{4.43}$$

Note que a função $\theta \neq 0$ em Γ_{2,G_R} com isso a integral nesta parte pode ser não nula. Seja $(H^1_{\Gamma_{2,G_R}}(G_R))^n$ o completado de $(C_0^\infty(G_R \cup \Gamma_{2,G_R}))^n$ segundo a norma $(H^1(G_R))^n$. Note

que o lado esquerdo de (4.43) define uma forma bilinear, que denotaremos por B, e além disso, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$c||u||^2_{(H^1(G_R))^n} \leq B(u,u), \tag{4.44}$$

pois como em (4.36) a forma bilinear B é equivalente a norma definida em $(H^1_{\Gamma_{2,G_R}}(G_R))^n$ e esta última é equivalente a norma $(H^1(G_R))^n$. Note também que B satisfaz

$$|B(z,\theta)| \leq ||F||_{(L^2(G_R))^n}||\theta||_{(L^2(G_R))^n}. \tag{4.45}$$

Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ infinitamente diferenciável tal que:

$$\begin{cases} \varphi = 1 & em \quad G_{R'} \\ \varphi = 0 & fora \quad G_{R''}, \end{cases}$$

sendo não nula em Γ_{2,G_R}. Utilizando o funcional bilinear B e a função φ vamos mostrar que $\frac{\partial z}{\partial x_i} \in (H^1(G_{R'}))^n$ com $i = 1, \cdots, n-1$. Já no caso n vamos mostrar $\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \in L^2(G_{R'})$. Seja d_i^h operador definido como

$$d_i^h(z) = [z(x_1, \cdots, x_i + h, \cdots, x_n) - z(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)]/h, \quad i = 1, \cdots, n.$$

É claro da definição de d_i^h que comuta com os operadores ∇ e div. Assim avaliando d_i^h no produto φz e na forma bilinear temos para $i = 1, \cdots, n-1$:

$$B(d_i^h(\varphi z), \theta) = \int_{G_R} (\mu d_i^h(\nabla(\varphi z))\cdot\nabla\theta + (\lambda+\mu) d_i^h(div(\varphi z))div(\theta))dx + \int_{\Gamma_{2,G_R}} am\cdot\nu(d_i^h(\varphi z))\cdot\theta d\Gamma, \tag{4.46}$$

lembrando que $\nabla z = (\nabla z_1, \cdots, \nabla z_n)$ e $div(z) = (\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial z_n}{\partial x_n})$ e fazendo mudança de

variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
B(d_i^h(\varphi z),\theta) =& \sum_{j=1}^{n}\int_{G_R} \mu d_i^h((\nabla\varphi)z_j+\varphi\nabla z_j)\cdot\nabla\theta_j+(\lambda+\mu)d_i^h((\nabla(\varphi)\cdot z_j)+\varphi divz)div(\theta)dx\\
&+\int_{\Gamma_{2,G_R}} am\cdot\nu d_i^h(\varphi z)\cdot\theta d\Gamma\\
=&\sum_{j=1}^{n}\int_{G_R}\mu[d_i^h(\nabla\varphi z_j)\cdot\nabla\theta_j+\varphi\nabla z_i\cdot d_i^{-h}(\nabla\theta_j)]+(\lambda+\mu)d_i^h(\nabla(\varphi)\cdot z_j)div(\theta)dx\\
&+(\lambda+\mu)\int_{G_R}\varphi divz d_i^{-h}(div(\theta))dx+\int_{\Gamma_{2,G_R}} am\cdot\nu(\varphi z)\cdot(d_i^{-h}\theta)d\Gamma,
\end{aligned}$$

como tem-se as igualdades $\varphi\nabla z_i\cdot d_i^{-h}(\nabla\theta_j)=\nabla z_i\cdot\nabla(\varphi d_i^{-h}(\theta_j)-\nabla z_i\cdot\nabla\varphi d_i^{-h}(\theta_j)$ e $\varphi divz d_i^{-h}(div(\theta))=divzdiv(\varphi d_i^{-h}\theta)-divz(\nabla\varphi\cdot d_i^{-h}\theta)$ e pelo (4.45) podemos estimar o $B(d_i^h(\varphi z),\theta)$ como

$$\begin{aligned}
|B(d_i^h(\varphi z),\theta)| &= |B(z,\varphi d_i^{-h}\theta)+\mu\int_{G_R}\sum_{j=1}^{n}[d_i^h(\nabla\varphi z_j)\cdot\nabla\theta_j-\nabla z_i\cdot\nabla\varphi d_i^{-h}(\theta_j)]dx\\
&\quad +(\lambda+\mu)\int_{G_R} d_i^h(\nabla(\varphi)\cdot z_j)div(\theta)-divz(\nabla\varphi\cdot d_i^{-h}\theta)dx|\\
&\leq ||F||_{(L^2(G_R))^n}||\varphi d_i^{-h}\theta||_{(L^2(G_R))^n}+\tilde{c}||\theta||_{(H^1(G_R))^n}||z||_{(H^1(G_R))^n}\\
&\leq \tilde{c}(||F||_{(L^2(G_R))^n}||+||z||_{(H^1(G_R))^n})||\theta||_{(H^1(G_R))^n}.
\end{aligned}$$

Note que a última estimativa é válida para todo $\theta\in(H^1_{\Gamma_{2,G_R}}(G_R))^n$ pela densidade das $(C_0^\infty(G_R\cup\Gamma_{2,G_R}))^n$ em $(H^1_{\Gamma_{2,G_R}}(G_R))^n$. Disto, para h suficientemente pequeno e da estimativa (4.44) temos que a função $d_i^h(\varphi z)\in(H^1_{\Gamma_{2,G_R}}(G_R))^n$, logo

$$\begin{aligned}
c||d_i^h(\varphi z)||^2_{(H^1(G_R))^n} &\leq |B(d_i^h(\varphi z),d_i^h(\varphi z))|\\
&\leq \tilde{c}(||F||_{(L^2(G_R))^n}||+||z||_{(H^1(G_R))^n})||d_i^h(\varphi z)||_{(H^1(G_R))^n}.
\end{aligned}$$

Disto conclui-se

$$c||d_i^h(\varphi z)||_{(H^1(G_R))^n} \leq \tilde{c}(||F||_{(L^2(G_R))^n}||+||z||_{(H^1(G_R))^n}), \tag{4.47}$$

assim do Teorema 3.16 do [2], conclui-se

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i}\in(H^1(G_{R'}))^n \qquad para \quad i=1,\cdots,n-1 \quad e \quad j=1,\cdots,n. \tag{4.48}$$

No caso $\frac{\partial^2 z_j}{\partial^2 x_n} \in (L^2(G_{R'}))^n$ com $j = 1, \cdots, n$ podemos utilizar a primeira equação que descreve o sistema (4.42) e a conclusão anterior. De fato, de (4.48) temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial z_j}{\partial x_i}) \in (L^2(G_{R'}))^n \qquad para \quad i = 1, \cdots, n-1 \quad e \quad j = 1, \cdots, n,$$

logo da definição de $div\ z$, de (4.42) e notando $\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$ obtemos

$$\begin{cases} -\mu\frac{\partial^2 z_j}{\partial x_n^2} &= \mu\tilde{\Delta} z_j + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_j}(divz) + F_j \in L^2(G_{R'}), \qquad j = 1, \cdots, n-1, \\ \\ -(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 z_n}{\partial x_n^2} &= \mu\tilde{\Delta} z_n + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_{n-1}}) + F_n \in L^2(G_{R'}), \quad j = n. \end{cases} \tag{4.49}$$

Desta forma é demonstrado que se $F \in (L^2(\Omega))^n$ logo $z \in H^2(\Omega)$ e daí $w_1 \in H^2(\Omega)$. Assim, o operador $-\Lambda^{-1}$ existe e é um operador contínuo.

□

Teorema 4.3.2. *Existe uma única solução $V \in C^0([0,\infty), D(\Lambda)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H})$ do problema (4.22) e esta dada por $V(t) = e^{-t\Lambda}V_0$. Consequentem ente, as funções u, θ e q soluções de (4.1)-(4.4) satisfazem*

$$\begin{aligned} &u \in C^2([0,\infty), (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n) \cap C^1([0,\infty), (H^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n) \\ &\theta \in C^0([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty), L^2(\Omega)) \\ &q \in C^1([0,\infty), (L^2(\Omega))^n). \end{aligned}$$

4.4 Estabilidade

Nesta seção estudamos o comportamento assintótico da energia do sistema (4.1)-(4.4) quando o tempo tende para infinito. O objetivo é apresentar o resultado do estabilidade polinomial da energia associada ao sistema e para tal situação, combina-se os métodos de multiplicadores usados em [27], para o sistema termoelástico com dissipações na fronteira, com as ideias de [38], onde se estuda um sistema é unidimensional termoelástico com segundo som.

Como se apresentará no Teorema 4.2.1, a estabilidade polinomial depende das energias de primeiro e segundo ordem do sistema (4.1)-(4.4) definidas em (4.8) e (4.10), respectivamente. Lembremos também as constantes (2.17), (2.18) e (2.19), do Capítulo 2 e denotando por $||\cdot||$ a norma em $L^2(\Omega)$ ou $(L^2(\Omega))^n$ sejam λ_0 e λ_1 as menores constantes positivas tais que

$$||u|| \leq \lambda_0 ||u||_{(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}, \qquad \forall u \in (\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n, \tag{4.50}$$

$$||u|| \leq \lambda_1 ||\nabla u||, \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega). \tag{4.51}$$

Observações 4.4.1. *As condições (4.12a) e (4.12b) no teorema (4.2.1) implica que estamos considerando uma função $a(x)$ de valores pequenos.*

Definimos os funcionais

$$F(t) = \int_\Omega [2k\delta u_i'(m \cdot \nabla u_i) + (n-1)(k\delta u_i' \cdot u_i)]dx, \tag{4.52}$$

e

$$L(t) = F(t) + M(E_1(t) + E_2(t)), \tag{4.53}$$

onde $M > 0$ será determinado posteriormente. É importante mencionar que a notação de indice repetido indica somátoria, isto é,

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega [2k\delta u_i'(m \cdot \nabla u_i) + (n-1)(k\delta u_i' \cdot u_i)]dx.$$

A prova do Teorema 4.2.1 é construtiva no sentido de mostrar como os funcionais $F(t)$ e $L(t)$ estão associados ao sistema (4.1)-(4.4) e satisfazem algumas propriedades que facilitaram a prova do mesmo. Estes resultados serão mencionados nos seguintes lemas.

Lema 4.4.2. *O funcional $F(t)$ satisfaz*

$$\begin{aligned}
F'(t) \quad &= k\delta \int_{\Gamma_2} |u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma - k\delta \int_\Omega |u_i'|^2 dx + \int_{\Gamma_1} k\delta\mu |\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma_2} 2k\delta[\mu\frac{\partial u_i}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)div(u)\nu_i](m\cdot\nabla u_i)d\Gamma - \int_{\Gamma_2} k\delta\mu|\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma \\
&-k\delta\mu\int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx + k\delta(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_1} |div(u)|^2 m\cdot\nu d\Gamma - k\delta(\lambda+\mu)\int_\Omega |div\ u|^2 dx \\
&-k\delta(\lambda+\mu)\int_{\Gamma_2} |div\ u|^2 m\cdot\nu d\Gamma + \int_\Omega 2\delta\alpha(q_i+\tau_0 q_i')(m\cdot\nabla u_i)dx \\
&-k\delta(n-1)\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u_i|^2 d\Gamma - (n-1)k\delta\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu u_i u_i' d\Gamma \qquad (4.54)\\
&+(n-1)\int_\Omega k\delta\alpha\theta div(u)dx.
\end{aligned}$$

Prova do Lema. Multiplicando (4.1) por $k\delta u$ em $(L^2(\Omega))^n$ e integrando em Ω, temos

$$\int_\Omega k\delta u''\cdot u\ dx = \int_\Omega k\delta(\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla div\ u - \alpha\nabla\theta)\cdot u\ dx, \qquad (4.55)$$

por outro lado,

$$\int_\Omega k\delta u''\cdot u dx = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega k\delta u'\cdot u dx\right) - \int_\Omega k\delta|u'|^2 dx. \qquad (4.56)$$

Usando identidade de Green e as condições na fronteira (4.4) tem-se as seguintes expressões para os termos na direita de (4.55)

$$\int_\Omega \Delta u\cdot u dx = \int_{\Gamma_2} \nabla u_i\cdot\nu u_i d\Gamma - \int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx, \qquad (4.57)$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla div(u)\cdot u dx \ &= \int_\Omega div(div(u)u)dx - \int_\Omega div(u)div(u)dx \\
&= \int_{\Gamma_2} div(u)u_i\cdot\nu_i d\Gamma - \int_\Omega |div(u)|^2 dx,
\end{aligned} \qquad (4.58)$$

e

$$\int_\Omega \nabla\theta \cdot u \; dx = \int_\Omega div(\theta u)dx - \int_\Omega \theta div(u)dx = -\int_\Omega \theta div(u)dx, \tag{4.59}$$

pois $\theta = 0$ em Γ. Substituindo em (4.55) podemos escrever,

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\left(\int_\Omega k\delta u' \cdot u dx\right) &= \int_\Omega k\delta|u'|^2dx - \int_\Omega \mu k\delta|\nabla u|^2dx - k\delta(\lambda+\mu)\int_\Omega |div(u)|^2dx \\ &- \int_{\Gamma_2} k\delta am\cdot\nu|u|^2d\Gamma - \int_{\Gamma_2} k\delta m\cdot\nu u\cdot u' \; d\Gamma + \int_\Omega k\delta\alpha\theta div(u)dx.\end{aligned} \tag{4.60}$$

De modo análogo, multiplicando a equação (4.1) pelo termo $k\delta m\cdot\nabla u$ em $(L^2(\Omega))^n$, com $m\cdot\nabla u = (m\cdot\nabla u_1, \ldots, m\cdot\nabla u_n)$, e integrando em Ω obtemos

$$\int_\Omega k\delta u'' \cdot (m\cdot\nabla u)dx = \int_\Omega k\delta(\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla(div\; u) - \alpha\nabla\theta)\cdot(m\cdot\nabla u)dx, \tag{4.61}$$

por outro lado

$$\int_\Omega u'' \cdot (m\cdot\nabla u)dx = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u_i'(m\cdot\nabla u_i)dx\right) - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma + \frac{n}{2}\int_\Omega |u_i'|^2dx, \tag{4.62}$$

pois das condições (4.4) tem-se

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_i'(m\cdot\nabla u_i')dx &= \int_\Omega (u_i'm)\cdot\nabla u_i'dx = \int_\Omega div(|u_i'|^2m)dx - \int_\Omega u_i'div(u_i'm)dx \\ &= \int_{\Gamma_2}|u_i'|^2 m\cdot\nu dx - n\int_\Omega |u_i'|^2dx - \int_\Omega u_i'(m\cdot\nabla u_i')dx.\end{aligned}$$

Agora, para os termos na direita de (4.61), utilizando identidade de Green, (4.4) e o fato

que $u = 0$ em Γ_1 satisfaz $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu}\nu_k$ e $|\nabla u_i|^2 = |\dfrac{\partial u}{\partial \nu}|^2$, obtemos

$$\int_\Omega \Delta u_i (m \cdot \nabla u_i) dx = \int_\Gamma (\nabla u_i \cdot \nu)(m \cdot \nabla u_i) d\Gamma - \int_\Omega (\nabla u_i) \cdot \nabla (m \cdot \nabla u_i) dx$$

$$= \int_{\Gamma_1} (\frac{\partial u_i}{\partial \nu}) \frac{\partial u_i}{\partial \nu} m_j \nu_j d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_i}{\partial \nu}(m \cdot \nabla u_i) d\Gamma \ - \int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega m \cdot \nabla(|\nabla u_i|^2) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |\frac{\partial u_i}{\partial \nu}|^2 m \cdot \nu d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_i}{\partial \nu}(m \cdot \nabla u_i) d\Gamma \ - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} |\nabla u_i|^2 m \cdot \nu d\Gamma$$

$$+ \frac{n-2}{2}\int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx. \tag{4.63}$$

e

$$\int_\Omega \nabla(div\ u) \cdot \ (m \cdot \nabla u) dx = \int_\Gamma div(u) m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\nu_i d\Gamma - \int_\Omega |div(u)|^2 dx$$

$$- \int_\Omega div(u) m_j \frac{\partial}{\partial x_j}(div(u)) dx,$$

$$= \int_{\Gamma_1} div(u) m_k \frac{\partial u_i}{\partial \nu}\nu_k \nu_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} div(u)\nu_i (m \cdot \nabla u_i) d\Gamma - \int_\Omega |div(u)|^2 dx$$

$$- \frac{1}{2}\int_\Omega m_j \frac{\partial}{\partial x_j}|div(u)|^2 dx \tag{4.64}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |div(u)|^2 m \cdot \nu d\Gamma + \int_{\Gamma_2} div(u)\nu_i (m \cdot \nabla u_i) d\Gamma + \frac{n-2}{2}\int_\Omega |div\ u|^2 dx$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} |div\ u|^2 m \cdot \nu d\Gamma.$$

Usando (4.3) e substituindo em (4.61) os resultados (4.62) - (4.64) concluimos que,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega k\delta u_i'(m\cdot\nabla u_i)dx\right) = \frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_2}|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma - \frac{nk\delta}{2}\int_\Omega |u_i'|^2dx + \int_{\Gamma_1}\frac{k\delta\mu}{2}|\frac{\partial u_i}{\partial\nu}|^2 m\cdot\nu d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_2} k\delta\mu\frac{\partial u_i}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma - \frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_2}\mu|\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma + \frac{(n-2)k\delta}{2}\int_\Omega \mu|\nabla u_i|^2dx$$

$$+\frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_1}(\lambda+\mu)|div(u)|^2 m\cdot\nu d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k\delta(\lambda+\mu)div(u)\nu_i(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma \tag{4.65}$$

$$+\frac{(n-2)k\delta}{2}\int_\Omega(\lambda+\mu)|div\ u|^2dx - \frac{k\delta}{2}\int_{\Gamma_2}(\lambda+\mu)|div\ u|^2 m\cdot\nu d\Gamma$$

$$+\int_\Omega \alpha\delta(q_i+\tau_0 q_i')(m\cdot\nabla u_i)dx.$$

Assim, das condições (4.4) e das expressões (4.60) e (4.65), o funcional $F(t)$ definido em (4.52), satisfaz (4.54). □

Lema 4.4.3. *Nas condições do sistema (4.1)-(4.4) tem-se para $\epsilon > 0$,*

$$F'(t) \leq -2E_1(t) + (c_3\tilde{c}+1)\epsilon E_1(t) + (k\delta + \frac{2R^2k\delta}{\mu} + k\delta(n-1)^2\frac{R}{2\epsilon\mu})\int_{\Gamma_2}|u_i'|^2 m\cdot\nu d\Gamma$$

$$+(\gamma\tau_0\alpha + \frac{2c_2\delta}{k} + \frac{\delta\alpha^2 4R^2}{k\epsilon\mu} + ((n-1)\alpha)^2\frac{c_2\delta}{k\epsilon(\lambda+\mu)})\int_\Omega |q|^2dx$$

$$+(\frac{2c_2\delta\tau_0^2}{k} + \frac{4\delta\alpha^2R^2\tau_0^2}{k\epsilon\mu} + ((n-1)\alpha)^2\frac{c_2\delta\tau_0^2}{k\epsilon(\lambda+\mu)})\int_\Omega |q'|^2dx \tag{4.66}$$

$$+k\delta\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu(\frac{2aR^2}{\mu} - (n-2))|u_i|^2d\Gamma.$$

Prova do Lema. De fato, pelas condições geométricas em (4.5) temos que os seguintes termos na direita de (4.54)

$$\int_{\Gamma_1}|\nabla u_i|^2 m\cdot\nu d\Gamma, \quad -\int_{\Gamma_2}|div\ u|^2 m\cdot\nu d\Gamma, \quad \int_{\Gamma_1}|div(u)|^2 m\cdot\nu d\Gamma, \tag{4.67}$$

são negativos. Por outro lado, pela desigualdade de Poincaré para θ e pela equação (4.3) tem-se

$$k\int_\Omega |\theta|^2 dx \leq \frac{2c_2\tau_0^2}{k}\int_\Omega |q'|^2 dx + \frac{2c_2}{k}\int_\Omega |q|^2 dx,$$

logo

$$\begin{aligned}(n-1)\int_\Omega k\delta\alpha\theta div(u)dx &\leq k\delta\int_\Omega((n-1)\alpha|\theta|)^2\frac{1}{2\epsilon(\lambda+\mu)} + k\delta\int_\Omega\frac{\epsilon(\lambda+\mu)}{2}|div(u)|^2dx \\ &\leq \delta((n-1)\alpha)^2\frac{1}{\epsilon(\lambda+\mu)}\left(\int_\Omega\frac{c_2\tau_0^2}{k}|q'|^2dx + \int_\Omega\frac{c_2}{k}|q|^2dx\right) \\ &+k\delta\int_\Omega\frac{\epsilon(\lambda+\mu)}{2}|div(u)|^2dx,\end{aligned} \tag{4.68}$$

onde c_2 é a constante dada pela desigualdade de Poincaré. Analogamente, pela desigualdade de Young, teorema de traço e de novo desigualdade de Poincaré em u temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} 2k\delta[\mu\frac{\partial u_i}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)div(u)\nu_i](m\cdot\nabla u_i)d\Gamma] &= -\int_{\Gamma_2} 2k\delta(am\cdot\nu u_i + m\cdot\nu u_i')(m\cdot\nabla u_i)d\Gamma \\ &\leq k\delta\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu[\frac{2a^2R^2}{\mu}|u_i|^2 + \mu|\nabla u_i|^2 + \frac{2R^2}{\mu}|u_i'|^2]d\Gamma,\end{aligned} \tag{4.69}$$

e

$$\begin{aligned}-(n-1)k\delta\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu u_i u_i' d\Gamma &\leq k\delta\int_{\Gamma_2}[R(n-1)^2\frac{(m\cdot\nu)}{2\epsilon\mu}|u_i'|^2 + \frac{\mu\epsilon}{2}|u_i|^2]d\Gamma \\ &\leq k\delta\frac{R(n-1)^2}{2\epsilon\mu}\int_{\Gamma_2}(m\cdot\nu)|u_i'|^2d\Gamma + c_3\tilde{c}\epsilon\frac{k\delta\mu}{2}\int_\Omega|\nabla u_i|^2dx,\end{aligned} \tag{4.70}$$

onde $\tilde{c}$ é a constante dada pelo teorema de traço. Da desigualdade de Hölder temos

$$\int_\Omega 2\delta\alpha(q_i+\tau_0 q_i')(m\cdot\nabla u_i)dx \leq \int_\Omega\frac{4R^2\delta\alpha^2}{k\epsilon\mu}(\tau_0^2|q_i'|^2 + |q_i|^2)dx + \int_\Omega\frac{k\epsilon\mu\delta}{2}|\nabla u_i|^2dx. \tag{4.71}$$

Desta forma, substituindo em (4.54) as expressões (4.67)-(4.71), e adicionando os termos para completar a energia (4.8) temos (4.66).

□

Lema 4.4.4. *Nas hipóteses do teorema (4.2.1), $L(t)$, satisfaz*

1. $\frac{d}{dt}L(t) \leq -E_1(t)$,
2. $L(t) \equiv E_1(t) + E_2(t)$.

Demonstração do Lema. Vamos demonstrar o lema estudando a dimensão n. Seja

$$\begin{aligned} M \geq \max\Bigg\{ & k\delta + \frac{2R^2k\delta}{\mu} + \frac{k\delta(n-1)^2R}{2\epsilon\mu}, \\ & \gamma\tau_0\alpha + \frac{2c_2\delta}{k} + \frac{\delta\alpha^2 4R^2}{k\epsilon\mu} + \frac{((n-1)\alpha)^2\delta c_2}{k\epsilon(\lambda+\mu)}, \\ & \frac{2c_2\delta\tau_0^2}{k} + \frac{4\delta\alpha^2R^2}{k\epsilon\mu}\tau_0^2 + \frac{\delta c_2\tau_0^2((n-1)\alpha)^2}{k\epsilon(\lambda+\mu)} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Como em $n = 2$ a função $a(x)$ satisfaz (4.12a) então, usando (2.19), temos que

$$k\delta \int_{\Gamma_2} am \cdot \nu |u_i|^2 (\frac{2aR^2}{\mu}) d\Gamma \leq a_0^2 \frac{2R^3}{\mu}\gamma^2 E_1(t), \tag{4.72}$$

logo assumindo $\epsilon < \dfrac{(1 - a_0^2\frac{2R^3}{\mu}\gamma^2)}{(c_3c_t + 1)}$, pelo Lema 4.4.3 tem-se o resultado 1. do lema nesta dimensão. Analogamente, usando (4.12b) e definindo $\epsilon < \dfrac{1}{c_3c_t + 1}$ no Lema (4.4.3), podemos deduzir 1. para caso $n \geq 3$.

Finalmente, para demonstrar 2. do lema, combinamos (4.50) e desigualdade de Cauchy em (4.52), e definindo

$$\tilde{M} = \max\left\{ M, (\frac{R^2}{\mu} + 1 + \frac{(n-1)}{2} + \frac{(n-1)}{2}\lambda_0^2) \right\},$$

podemos deduzir que o funcional $L(t)$ satisfaz 2 . □

Utilizando os lemas vamos então demonstrar o Teorema 4.2.1.

Demonstração do Teorema 4.2.1. Como $E_1(t) \leq -\frac{d}{dt}L(t)$ logo integrando em [0,t] e usando a equivalencia (2) temos que

$$\int_0^t E_1(s)ds \leq L(0) \equiv M(E_1(0) + E_2(0)).$$

Além disso, como

$$\frac{d}{dt}\{tE_1(t)\} = E_1(t) + \frac{d}{dt}\{E_1(t)\}$$

e sendo $\frac{d}{dt}\{E_1(t)\} \leq 0$ segue-se que $\frac{d}{dt}\{tE_1(t)\} \leq E_1(t)$ assim

$$tE_1(t) = \int_0^t E_1(s)ds \leq M(E_1(0) + E_2(0)),$$

obtendo-se o resultado do teorema. □

Capítulo 5

Sistema Termoelástico de materias misto com lei de Fluxo de Cattaneo.

5.1 O modelo

Se considera uma barra composta pela mistura de 2 elementos térmicos de comprimento finito l com variáveis u e w de deslocamentos e θ variável de temperatura. Mais exatamente o modelo satisfaz as seguintes condições:

- O deslocamento de cada elemento térmico denotado com as variáveis $u,\ w$ cumprem $u = u(x,t) : (0,l) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $w = w(y,t) : (0,l) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$.
- Assumimos que as partículas estão na mesma posição no tempo $t = 0$, isto é $x = y$.
- A temperatura $\theta = \theta(x,t) : (0,l) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é a mesma para ambos elementos no instante x e no tempo t.
- As densidades da massa no tempo $t = 0$ são denotadas por $\rho_i,\ i = 1,2$.
- O estresse parcial associado a cada componente térmica é $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ respectivamente, além disso P é a força interna do corpo e Θ a entropia da densidade.
- q é o fluxo de calor e θ_0 é a temperatura absoluta na configuração de referência.

O sistema de equações proposto, em ausência de forças externas está dado por:

a. Equações de movimento

$$\rho_1 u_{tt} = \mathcal{T}_x - P, \quad \rho_2 w_{tt} = \mathcal{S}_x + P, \tag{5.1}$$

b. Equação de energia

$$(\rho_1 + \rho_2)\theta_0\Theta_t = q_x, \tag{5.2}$$

c. Equações constitutivas e lei de fluxo de calor de Cattaneo

$$\mathcal{T} = a_{11}u_x + a_{12}w_x + \beta_1\theta, \qquad \mathcal{S} = a_{12}u_x + a_{22}w_x + \beta_2\theta, \tag{5.3}$$

$$P = \alpha(u - w), \qquad \Theta = \beta_1 u_x + \beta_2 w_x - \varsigma\theta, \tag{5.4}$$

$$\tau_0 q_t + q + k\theta_x = 0. \tag{5.5}$$

Substituindo nas equações constitutivas (5.3)-(5.5) as equações de movimento e de energia (5.1)-(5.2), obtemos o sistema de equações

$$\rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + \alpha(u - w) - \beta_1\theta_x = 0, \tag{5.6}$$

$$\rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} - \alpha(u - w) - \beta_2\theta_x = 0, \tag{5.7}$$

$$\varsigma\theta_t - \beta_1 u_{xt} - \beta_2 w_{xt} + \frac{1}{m}q_x = 0, \tag{5.8}$$

$$\tau_0 q_t + q + k\theta_x = 0, \tag{5.9}$$

com $m = (\rho_1 + \rho_2)\theta_0$. Os parâmetros $m > 0$, $\varsigma > 0$, são a conductividade térmica e capacidade térmica, respectivamente. O parâmetro $\alpha > 0$ está relacionado com a parte conservativa do sistema assim como os coeficientes a_{ij}, sendo estes últimos os acoplamentos das componentes elásticas. Os coeficientes β_i, $i = 1, 2$, são os acoplamentos das partes elásticas com a temperatura e o parâmetro $k > 0$ é o acoplamento entre a lei do fluxo de Cattaneo com a equação de temperatura, conductividade térmica nesta lei.

As condições iniciais do sistema (5.6)-(5.9) são

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad em\ (0,l), \tag{5.10}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x) \qquad em\ (0,l), \tag{5.11}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x) \qquad em\ (0,l), \tag{5.12}$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \qquad em\ (0,\infty), \tag{5.13}$$

$$w(0,t)=0, \quad w(l,t)=0 \qquad em\ (0,\infty), \tag{5.14}$$

$$q(0,t)=0, \quad q(l,t)=0 \qquad em\ (0,\infty). \tag{5.15}$$

O sistema tem algumas restrições sobre os coeficientes a_{ij} e β_i. A matriz formada pelos termos a_{ij}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

é definida positiva, isto é,

$$a_{11}>0 \quad e \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0. \tag{5.17}$$

Os coeficientes β_i satisfazem $\beta_1+\beta_2\neq 0$ e além disso, $\beta_1,\beta_2\neq 0$. τ_0 e k são definidos como em (0.12). Tais condições são indispensáveis para ter soluções que pelo menos decaiam pois se $\beta_1+\beta_2=0$ com $\rho_2(a_{11}+a_{12})=\rho_1(a_{12}+a_{22})$, podemos mostrar substituindo que $u=w$ e $\theta=q=0$ são soluções para nosso sistema que não decaem no tempo. Substituindo em (5.8) a equação (5.9) temos que se $u(x,t), w(x,t), \theta(x,t)$ e $q(x,t)$ são soluções de (5.6)- (5.9) com $\beta_1+\beta_2>0$ então $u(l-x,t), w(l-x,t), \theta(l-x,t)$ e $q(l-x,t)$ são soluções também do sistema para $\beta_1+\beta_2<0$. Assim, sem perda de generalidade podemos tomar $\beta_1+\beta_2>0$ para estudar o sistema (5.6)- (5.15).

Observação 5.1.1. *Note que de (5.9) e (5.15) temos* $\theta_x(0,t)=\theta_x(l,t)=0$.

5.2 Resultado Principal

A seguir apresentamos uma recapitulação das principais conclusões de estabilidade do sistema (5.6)-(5.15). Estas conclusões foram obtidas ao utilizar os resultados estabelecidos em [31], de estabilidade exponencial para semigrupos de contrações $S(t)$ em espaços de Hilbert. O resultado em [31] esta relacionado com o resolvente do gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ associado ao semigrupo $S(t)$ e para nosso caso, o resolvente do operador associado ao sistema (5.6)-(5.15) envolve uma serie de constantes que são calculadas a partir dos coe-

ficientes do sistema. Inicialmente apresentamos tais constantes e um Lema que dá uma relação entre $i\mathbb{R}$ e o resolvente de $\mathcal{A}$ para logo estabelecer o Teorema de Estabilidade.

Notações 5.2.1. *A partir das constantes utilizadas para descrever o sistema (5.6)-(5.15) definimos:*

1. *Seja D o determinante da matriz (5.16) e D_1 de D_2 os determinantes das matrizes*

$$D_1 = det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad e \quad D_2 = det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

2. *Seja χ_0, χ_1, A_1 e A_2 definidos como*

$$\chi_0 = \beta_2\rho_1 D_2 + \beta_1\rho_2 D_1, \tag{5.19}$$

$$\chi_1 = \beta_2\rho_1 - \beta_1\rho_2, \tag{5.20}$$

$$A_1 = \beta_1\rho_2 a_{11} + \beta_2\rho_1 a_{12}, \tag{5.21}$$

$$A_2 = \beta_1\rho_2 a_{12} + \beta_2\rho_1 a_{22}. \tag{5.22}$$

Observação 5.2.2. *Note que $\chi_0 = \beta_2 A_1 - \beta_1 A_2$, e por outro lado, $D_1 = D_2 = 0$ não é possível pois ao substituir em D concluimos que $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ o que contradiz (5.17).*

Lema 5.2.3. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $S(t)$ associado ao sistema (5.6)-(5.15) e seja $\rho(\mathcal{A})$ o resolvente do operador $\mathcal{A}$. Então $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ se e somente se alguma das seguintes condições se satisfazem*

1) Se $\chi_0 \neq 0$, e

$$1 + \frac{D_1\chi_1}{\chi_0} < 0 \qquad ou \qquad \frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha(\beta_1+\beta_2)\chi_1}{\chi_0}} \notin \mathbb{N}. \tag{5.23}$$

2) Se $\chi_0 = 0$ e $\chi_1 \neq 0$.

3) Se $\chi_0 = 0$, $\chi_1 = 0$ e $\pi^2 D_1 n^2 + l^2\alpha(\beta_1+\beta_2) < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

A seguir o resultado mais importante para o sistema (5.6)-(5.15) no que diz respeita à estabilidade.

Teorema 5.2.4. *Seja $S(t)$ o C_0-semigrupo associado ao sistema (5.6)-(5.15). Então se as condições 1) o 3) do Lema 5.2.3 são satisfeitas, o C_0-semigrupo $S(t)$ é exponencialmente estável.*

5.3 Existência e Unicidade

Nosso objetivo principal é mostrar a boa colocação do sistema (5.6)-(5.15), i.e. existência e unicidade das soluções do problema com valores complexos. Os espaços $L^2(0,l)$, $H_0^1(0,l)$ e $H^{-1}(0,l)$, com $(0,l) \subset \mathbb{R}$ serão denotados brevemente como L^2, H_0^1 e H^{-1}. O produto interno e norma em L^2 serão denotadas como $\langle , \rangle$ e $||\cdot||$. Devido à desigualdade de Poincaré, temos que o espaço H_0^1 será munido com o produto interno $\langle f, g\rangle_{H_0^1} = \langle f_x, g_x\rangle$.

Consideremos o espaço de Hilbert:

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2_\star(0,l) \times L^2(0,l), \tag{5.24}$$

onde

$$L^2_\star(0,l) = \left\{ f \in L^2(0,l) : \int_0^l f(x)dx = 0 \right\},$$

e com produto interno definido como

$$\begin{aligned}\langle (u,w,v,\nu,\theta,q), (\tilde{u},\tilde{w},\tilde{v},\tilde{\nu},\tilde{\theta},\tilde{q})\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}[a_{11}\langle u_x, \overline{\tilde{u}}_x\rangle + a_{12}(\langle u_x, \overline{\tilde{w}}_x\rangle + \langle w_x, \overline{\tilde{u}}_x\rangle) \\ + a_{22}\langle w_x, \overline{\tilde{w}}_x\rangle + \alpha\langle (u-w), \overline{(\tilde{u}-\tilde{w})}\rangle + \rho_1\langle v, \overline{\tilde{v}}\rangle + \rho_2\langle \nu, \overline{\tilde{\nu}}\rangle + \varsigma\langle \theta, \overline{\tilde{\theta}}\rangle + \frac{\tau_0}{km}\langle q, \overline{\tilde{q}}\rangle].\end{aligned} \tag{5.25}$$

Tomando $\nu = u_t$ e $\eta = w_t$ e denotando por $U = (u, w, \nu, \eta, \theta, q)$ podemos reescrever o sistema (5.6)-(5.15) como um problema de evolução de primer ordem

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, \\ U(0) = (u_0, w_0, u_1, w_1, \theta_0, q_0), \end{cases} \tag{5.26}$$

onde o operador $\mathcal{A}$ é definido como

$$\mathcal{A}U = (\nu, \eta, \frac{a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - \alpha(u-w) + \beta_1\theta_x}{\rho_1}, \frac{a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} + \alpha(u-w) + \beta_2\theta_x}{\rho_2},$$

$$\frac{\beta_1\nu_x + \beta_2\eta_x - \frac{1}{m}q_x}{\varsigma}, -\frac{q + k\theta_x}{\tau_0}) \tag{5.27}$$

com dominio $D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H} : \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}$.

Uma análise das componentes de $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$ leva a especificar o dominio de $\mathcal{A}$, da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\nu,\ \eta &\in H_0^1(0,l)\\
\frac{a_{11}}{\rho_1}u_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_1}u + \frac{a_{12}}{\rho_1}w_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_1}w + \frac{\beta_1}{\rho_1}\theta_x &\in L^2(0,l)\\
\frac{a_{12}}{\rho_2}u_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_2}u + \frac{a_{22}}{\rho_2}w_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_2}w + \frac{\beta_2}{\rho_2}\theta_x &\in L^2(0,l)\\
\frac{\beta_1}{\varsigma}\nu_x + \frac{\beta_2}{\varsigma}\eta_x - \frac{1}{\varsigma m}q_x &\in L^2_\star(0,l)\\
-\frac{k}{\tau_0}\theta_x - \frac{1}{\tau_0}q &\in L^2(0,l),
\end{aligned}$$

desta forma concluimos que

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H} : u,\ w \in H^2,\ \nu,\ \eta \in H_0^1, \theta \in H_\star^1,\ q \in H_0^1\}, \tag{5.28}$$

onde $H_\star^1(0,l) = H^1(0,l) \cap L_\star^2(0,l)$. Note que $D(\mathcal{A})$ é denso en $\mathcal{H}$.

Teorema 5.3.1. *O operador $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t),\ t \geq 0$.*

Prova. Vamos mostrar que o operador $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$, com $\rho(\mathcal{A})$ o resolvente do operador. Sendo claro que $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, a prova do teorema será consequência do teorema de Lumer-Phillips.

A dissipação do operador $\mathcal{A}$ é fácil de verificar pois se $U \in D(\mathcal{A})$ logo

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^l \frac{|q|^2}{km}dx \leq 0, \tag{5.29}$$

de fato

$$\begin{aligned}
&Re\langle(\nu, \eta, \frac{a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - \alpha(u-w) + \beta_1\theta_x}{\rho_1}, \frac{a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} + \alpha(u-w) + \beta_2\theta_x}{\rho_2},\\
&\frac{\beta_1\nu_x + \beta_2\eta_x - \frac{1}{m}q_x}{\varsigma}, -\frac{q + k\theta_x}{\tau_0}), (u, w, \nu, \eta, \theta, q)\rangle_{\mathcal{H}} =\\
&\frac{1}{2}Re[a_{11}\langle\nu_x, \overline{u}_x\rangle + a_{12}(\langle\nu_x, \overline{w}_x\rangle + \langle\eta_x, \overline{u}_x\rangle) + a_{22}\langle\eta_x, \overline{w}_x\rangle + \alpha\langle(\nu-\eta), \overline{(u-w)}\rangle +\\
&\rho_1\langle\frac{a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - \alpha(u-w) + \beta_1\theta_x}{\rho_1}, \overline{\nu}\rangle + \rho_2\langle\frac{a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} + \alpha(u-w) + \beta_2\theta_x}{\rho_2}, \overline{\eta}\rangle\\
&+\varsigma\langle\frac{\beta_1\nu_x + \beta_2\eta_x - \frac{1}{m}q_x}{\varsigma}, \overline{\theta}\rangle + \frac{\tau_0}{km}\langle-\frac{q + k\theta_x}{\tau_0}, \overline{q}\rangle] = -\frac{1}{2}\int_0^l \frac{|q|^2}{km}dx.
\end{aligned}$$

Provemos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$ e mostremos que existe um único vetor $U = (u, w, \nu, \eta, \theta, q) \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U = F$, isto é, em termo de equações devemos ter

$$\nu = f_1 \in H_0^1(0, l), \tag{5.30}$$

$$\eta = f_2 \in H_0^1(0, l), \tag{5.31}$$

$$a_{11}u_{xx} - \alpha u + a_{12}w_{xx} + \alpha w + \beta_1\theta_x = \rho_1 f_3 \in L^2(0, l), \tag{5.32}$$

$$a_{12}u_{xx} + \alpha u + a_{22}w_{xx} - \alpha w + \beta_2\theta_x = \rho_2 f_4 \in L^2(0, l), \tag{5.33}$$

$$m\beta_1\nu_x + m\beta_2\eta_x - q_x = m\varsigma f_5 \in L^2_\star(0, l), \tag{5.34}$$

$$-k\theta_x - q = \tau_0 f_6 \in L^2(0, l). \tag{5.35}$$

Substituindo (5.30) e (5.31) em (5.34) obtemos

$$q_x = m\beta_1 f_{1x} + m\beta_2 f_{2x} - m\varsigma f_5 \;\; L^2_\star(0, l). \tag{5.36}$$

Claramente $q_x \in L^2(0, l)$ e integrando de 0 a l a equação (5.36) vemos que

$$\int_0^l q_x(x)dx = (m\beta_1 f_1 + m\beta_2 f_2)\,|_0^l - m\varsigma\int_0^l f_5(x)dx = 0.$$

Desta forma, dadas as condições iniciais do sistema, existe um único $q \in H_0^1$ que satisfaz (5.36). Além disso, da desigualdade de Poincaré temos,

$$||q||^2 \leq c(||f_{1x}||^2 + ||f_{2x}||^2 + ||f_5||^2). \tag{5.37}$$

De (5.35) temos

$$k\theta_x = -q - \tau_0 f_6 \quad \in L^2(0,l), \tag{5.38}$$

logo existe um único $\theta \in H_\star^1$, de fato,

$$\theta(x) = \frac{1}{-k}\int_0^x [q(y) + \tau_0 f_6(y)]dy + \frac{1}{kL}\int_0^L \int_0^x [q(y) + \tau_0 f_6(y)]dydx,$$

satisfazendo (5.38) e a definição de $L_\star^2$, desta forma temos

$$||\theta||^2 \leq c||\theta_x||^2 \leq \tilde{c}(||q||^2 + ||f_6||^2). \tag{5.39}$$

Por outro lado, conhecendo agora a função θ, das equações (5.32) e (5.33) obtemos que as variáveis u e w satisfazem

$$\begin{aligned} a_{11}u_{xx} - \alpha u + a_{12}w_{xx} + \alpha w = \rho_1 f_3 - \beta_1\theta_x = g_1 \quad &\in \ L^2(0,l) \\ a_{12}u_{xx} + \alpha u + a_{22}w_{xx} - \alpha w = \rho_2 f_4 - \beta_2\theta_x = g_2 \quad &\in \ L^2(0,l), \end{aligned} \tag{5.40}$$

portanto para determinar u e w como em (5.28) começaremos utilizando o teorema de Lax-Milgram aplicado a seguinte forma sesquilinear. Seja

$$\begin{aligned} B : H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1 &\to \mathbb{C} \\ B((u,w),(\tilde{u},\tilde{w})) &= a_{11}\langle u_x, \overline{\tilde{u}}_x\rangle + a_{12}(\langle u_x, \overline{\tilde{w}}_x\rangle + \langle w_x, \overline{\tilde{u}}_x\rangle) + a_{22}\langle w_x, \overline{\tilde{w}}_x\rangle \\ &\quad + \alpha\langle u - w, \overline{\tilde{u} - \tilde{w}}\rangle. \end{aligned}$$

De (5.24)- (5.25) definimos naturalmente a norma induzida em $H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$ dada pelo produto interno

$$\begin{aligned} \langle (u,w),(\tilde{u},\tilde{w})\rangle_{H_0^1\times H_0^1\times H_0^1\times H_0^1} &= a_{11}\langle u_x, \overline{\tilde{u}}_x\rangle + a_{12}(\langle u_x, \overline{\tilde{w}}_x\rangle + \langle w_x, \overline{\tilde{u}}_x\rangle) + a_{22}\langle w_x, \overline{\tilde{w}}_x\rangle \\ &\quad + \alpha\langle u - w, \overline{\tilde{u} - \tilde{w}}\rangle, \end{aligned}$$

assim temos que a aplicação B é uma forma sesquilinear contínua e coerciva. Logo, aplicando o teorema de Lax Milgram, concluimos que existem únicas funções u e w em H_0^1 tais que, dados $-g_1,\ -g_2 \in L^2(0,l)$, então

$$B((u,w),(\phi,\zeta)) = -\int_0^l (g_1\overline{\phi} + g_2\overline{\zeta})dx,$$

para todo $\phi,\ \zeta \in H_0^1$. Assim, tomando os pares $(\phi,0)$ e $(0,\zeta)$ temos

$$a_{11}\int_0^l u_x\overline{\phi}_x dx + a_{12}\int_0^l w_x\overline{\phi}_x dx + \alpha\int_0^l u\overline{\phi}dx - \alpha\int_0^l w\overline{\phi}dx = -\int_0^l g_1\overline{\phi}dx, \tag{5.41}$$

$$a_{12}\int_0^l u_x\overline{\zeta}_x dx + a_{22}\int_0^l w_x\overline{\zeta}_x dx - \alpha\int_0^l u\overline{\zeta}dx + \alpha\int_0^l w\overline{\zeta}dx = -\int_0^l g_2\overline{\zeta}dx, \tag{5.42}$$

o que resolve de forma fraca o problema (5.40). Por outro lado, temos a seguinte estimativa: sejam $\phi = u$, e $\zeta = w$, em (5.41) e (5.42). Somando os resultados temos

$$\min\{a_{11},a_{22}\}\max\{||u_x||,||w_x||\}^2 \leq (a_{11}||u_x||^2 + a_{22}||w_x||^2)$$

$$\leq (||g_1|| + ||g_2||)\max\{||u||,||w||\} \leq c(||g_1|| + ||g_2||)\max\{||u_x||,||w_x||\}$$

com c constante de Poincaré. Assim temos que

$$(||u_x|| + ||w_x||) \leq C(||g_1|| + ||g_2||) \leq C(||f_{1x}|| + ||f_{2x}|| + ||f_5|| + ||f_6||) \tag{5.43}$$

e da desigualdade de Poincaré e propriedades da norma, obtemos

$$\alpha||u-w||^2 \leq c_2(||f_{1x}||^2 + ||f_{2x}||^2 + ||f_5||^2 + ||f_6||^2). \tag{5.44}$$

Além disso, de (5.40) temos que as combinações lineares

$$a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx},\ a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} \in L^2(0,l).$$

Logo $a_{11}u + a_{12}w,\ a_{12}u + a_{22}w \in H_0^1 \cap H^2$, e das condições (5.16) - (5.17) concluimos

$$u = \frac{a_{22}}{D}(a_{11}u + a_{12}w) + \frac{a_{12}}{D}(a_{11}u + a_{12}w), \tag{5.45}$$

$$\tag{5.46}$$

$$w = \frac{-a_{12}}{D}(a_{11}u + a_{12}w) + \frac{a_{11}}{D}(a_{11}u + a_{12}w). \tag{5.47}$$

Assim $u,\ w \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$ e finalmente temos solução do problema (5.40). Das expressões (5.30), (5.31), (5.37), (5.39) e (5.43) - (5.44) temos que

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}},$$

desta forma garantimos que o operador $\mathcal{A}^{-1}$ existe e é contínuo, com o qual finalizamos a prova do Teorema 5.3.1. □

Como consequência temos

Teorema 5.3.2. *Se $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, \theta_0, q_0) \in \mathcal{H}$ existe uma única solução do problema (5.6)-(5.15) que satisfaz*

$$u,\ w \in C([0,\infty); H_0^1(0,l)) \cap C^1([0,\infty); L^2(0,l)),$$
$$\theta \in C([0,\infty); L_\star^2(0,l)), \quad q \in C([0,\infty); L^2(0,l)).$$

Além disso, se $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, \theta_0, q_0) \in D(\mathcal{A})$ temos a regularidade

$$u,\ w \in C([0,\infty); H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(0,l)) \cap C^2([0,\infty); L^2(0,l)),$$
$$\theta \in C([0,\infty); H_\star^1(0,l)) \cap C^1[0,\infty); L^2(0,l)),$$
$$q \in C([0,\infty); H_0^1(0,l)) \cap C^1[0,\infty); L^2(0,l)).$$

5.4 Estabilidade

O principal resultado de estabilidade apresentado no Teorema 5.2.4 para o sistema (5.6)-(5.15) será provado nesta seção. Igualmente mostramos na subseção 5.4.2 as condições para que o sistema tenha perda de estabilidade exponencial. Nosso objetivo será atingido usando o resultado estabelecido em [31] sobre estabilidade exponencial para C_0-semigrupos

de contrações, ver Teoremas 1.0.18.

Esta seção é dividida da seguinte forma. Na subseção 5.4.1 estudamos o resultado de estabilidade exponencial, utilizando fortemente o teorema 1.0.18. A seguir estudamos o resultado de perda de estabilidade exponencial, subseção 5.4.2.

5.4.1 Decaimento Exponencial

Para obter o resultado de decaimento exponencial, enunciado no Teorema 5.2.4, vamos usar o resultado estabelecido no teorema 1.0.18. O ponto central deste teorema é mostrar que o gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ do sistema (5.6)-(5.15) satisfaz as condições (1.12) e (1.13), isto é

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}) \quad e \quad \overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} ||i\lambda I - \mathcal{A}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Primeira condição de Teorema 1.0.18, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A})$.

Inicialmente vejamos que operador $\mathcal{A}$ tem espectro pontual.

Proposição 5.4.1. *Seja $\mathcal{A}$ o operador definido em 5.27. Então o operador $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador compacto.*

Prova. Pelo critério para resolvente compacta, proposição (1.0.21), temos que é suficiente provar que a imersão $i : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ é compacta, com $D(\mathcal{A})$ como em (5.28). Seja $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$ uma sequência limitada e mostremos que existe uma subsequência convergente em $\mathcal{H}$. Seja C tal que $||U_n||_{D(\mathcal{A})} \leq C$ isto é, em suas componentes

$$||(u_n, w_n, \nu_n, \eta_n, \theta_n, q_n)||_{\mathcal{H}} + ||(\nu_n, \eta_n, \frac{a_{11}u_{nxx} + a_{12}w_{nxx} - \alpha(u_n - w_n) + \beta_1\theta_{nx}}{\rho_1}, \tag{5.48}$$
$$\frac{a_{12}u_{nxx} + a_{22}w_{nxx} + \alpha(u_n - w_n) + \beta_2\theta_{nx}}{\rho_2}, \frac{\beta_1\nu_{nx} + \beta_2\eta_{nx} - \frac{1}{m}q_{nx}}{\varsigma}, \frac{q_n + k\theta_{nx}}{\tau_0})||_{\mathcal{H}} \leq C.$$

Assim, da norma em $\mathcal{H}$ induzida por (5.25), das propriedades da norma e do teorema de imersão compacta em espaços de Sobolev, (1.0.2), teremos o resultado. De fato, da

definição (5.25) e de (5.48) é facil obter as seguintes estimativas

$$||q_n||^2, \quad ||\theta_n||^2, \quad ||u_n - w_n||^2 \leq C \tag{5.49}$$

$$||\nu_{nx}||^2 + ||\eta_{nx}||^2 \leq C \tag{5.50}$$

$$||a_{11}u_{nxx} + a_{12}w_{nxx} - \alpha(u_n - w_n) + \beta_1\theta_{nx}||^2 \leq C \tag{5.51}$$

$$||a_{12}u_{nxx} + a_{22}w_{nxx} + \alpha(u_n - w_n) + \beta_2\theta_{nx}||^2 \leq C \tag{5.52}$$

$$||\beta_1\nu_{nx} + \beta_2\eta_{nx} - \frac{1}{m}q_{nx}||^2 \leq C \tag{5.53}$$

$$||q_n + k\theta_{nx}||^2 \leq C. \tag{5.54}$$

Seja C constante em geral, logo da desigualdade de Poincaré e de (5.50)

$$||\nu_n||^2 + ||\eta_n||^2 \leq C, \tag{5.55}$$

e da propriedades da norma, temos

$$||k\theta_{nx}||^2 \leq c(||q_n + k\theta_{nx}||^2 + ||q_n||^2) \leq C \tag{5.56}$$

$$||a_{11}u_{nxx} + a_{12}w_{nxx}||^2 \leq ||\alpha(u_n - w_n)||^2 + ||\beta_1\theta_{nx}||^2 + C \leq C \tag{5.57}$$

$$||a_{12}u_{nxx} + a_{22}w_{nxx}||^2 \leq ||\alpha(u_n - w_n)||^2 + ||\beta_2\theta_{nx}||^2 + C \leq C \tag{5.58}$$

$$||\frac{1}{m}q_{nx}||^2 \leq c(||\beta_1\nu_{nx} + \beta_2\eta_{nx} - \frac{1}{m}q_{nx}||^2 + ||\beta_1\nu_{nx} + \beta_2\eta_{nx}||^2) \leq C. \tag{5.59}$$

Das expressões (5.45) e (5.47) concluimos de (5.57) e (5.58) que

$$||u_{nxx}|| \leq C \tag{5.60}$$

$$||w_{nxx}|| \leq C. \tag{5.61}$$

Desta forma temos que

$$||u_n||_{H^2\cap H_0^1} + ||w_n||_{H^2\cap H_0^1} + ||\nu_n||_{H_0^1} + ||\eta_n||_{H_0^1} + ||\theta_n||_{H^1} + ||q_n||_{H^1} \leq C, \tag{5.62}$$

e sendo as imersões $H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l) \hookrightarrow H_0^1(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$ contínuas e compactas, existe uma subsequência $U_{nk} = (u_{nk}, w_{nk}, \nu_{nk}, \eta_{nk}, \theta_{nk}, q_{nk}) \in \mathcal{H}$, convergente em $\mathcal{H}$ e desta forma concluimos que a imersão $i : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ é compacta e assim que o operador $\mathcal{A}^{-1}$ é compacto. □

Sendo o espectro do operador $\mathcal{A}$ pontual, isto é $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A})$, temos o seguinte lema que caracteriza o espectro através das constantes definidas em (5.16) e (5.18)-(5.20).

Lema 5.4.2. *$i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ se e somente se*

$$\star = \begin{pmatrix} \alpha(\beta_2+\beta_1) \\ \alpha(\beta_2+\beta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2\rho_1 & -D_1 \\ \beta_1\rho_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \mu^2 \end{pmatrix}.$$

para algum $\mu^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ com $n \in \mathbb{N}$.

Prova do lema 5.4.2. Inicialmente definimos o seguinte sistema. Seja $F \in \mathcal{H}$ tal que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ e seja o sistema resolvente, isto é,

$$(i\lambda - \mathcal{A})U = F \tag{5.63}$$

que em termos de suas componentes é

$$i\lambda u - \nu = f_1, \tag{5.64}$$

$$i\lambda w - \eta = f_2, \tag{5.65}$$

$$i\lambda\rho_1\nu - a_{11}u_{xx} + \alpha u - a_{12}w_{xx} - \alpha w - \beta_1\theta_x = \rho_1 f_3, \tag{5.66}$$

$$i\lambda\rho_2\eta - a_{12}u_{xx} - \alpha u - a_{22}w_{xx} + \alpha w - \beta_2\theta_x = \rho_2 f_4, \tag{5.67}$$

$$i\lambda m\varsigma\theta - m\beta_1\nu_x - m\beta_2\eta_x + q_x = m\varsigma f_5, \tag{5.68}$$

$$i\lambda\tau_0 q + k\theta_x + q = \tau_0 f_6. \tag{5.69}$$

Suponha que existe pelo menos um autovalor imaginário da forma $i\lambda$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, logo existe um autovetor $U_\lambda \neq 0$ tal que $(i\lambda - \mathcal{A})U_\lambda = 0$. Consequentemente do caráter dissipativo do operador $\mathcal{A}$, ver (5.29), segue que

$$Re\langle(i\lambda - A)U_\lambda, U_\lambda\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^l \frac{|q|^2}{km}dx, \tag{5.70}$$

daí temos que $q = 0$. Por outro lado, de (5.69) sendo $f_6 = 0$, temos $\theta_x = 0$. Pela condição

$$\int_0^l \theta dx = 0$$

temos que $\theta = 0$. Por outro lado, de (5.64) e (5.65) temos que

$$i\lambda u = \nu, \quad i\lambda w = \eta, \tag{5.71}$$

e de (5.66)-(5.68) temos

$$-\lambda^2\rho_1 u - a_{11}u_{xx} + \alpha u - a_{12}w_{xx} - \alpha w = 0, \tag{5.72}$$

$$-\lambda^2\rho_2 w - a_{12}u_{xx} - \alpha u - a_{22}w_{xx} + \alpha w = 0, \tag{5.73}$$

$$m\beta_1\nu_x + m\beta_2\eta_x = 0. \tag{5.74}$$

De (5.74) e de (5.71) concluimos que

$$\beta_1 u_x + \beta_2 w_x = 0.$$

Como $\beta_1,\ \beta_2 \neq 0$ então temos $w = -\frac{\beta_1}{\beta_2}u$, e consequentemente podemos rescrever (5.72) e (5.73) em termos da variável u, isto é

$$-(a_{11}\beta_2 - a_{12}\beta_1)u_{xx} = \beta_2\lambda^2\rho_1 u - \alpha(\beta_2 + \beta_1)u, \tag{5.75}$$

$$-(a_{12}\beta_2 - a_{22}\beta_1)u_{xx} = -\beta_1\lambda^2\rho_2 u + \alpha(\beta_2 + \beta_1)u. \tag{5.76}$$

As equações anteriores lembram o problema de Dirichlet para o Laplaciano, assim denotando

$$\mu^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \tag{5.77}$$

com $n \in \mathbb{N}$, obtemos de (5.75), (5.76) e de (5.18) as seguintes igualdades nos coeficientes:

$$D_1\mu^2 = \beta_2\rho_1\lambda^2 - \alpha(\beta_2 + \beta_1) \tag{5.78}$$

$$D_2\mu^2 = -\beta_1\rho_2\lambda^2 + \alpha(\beta_2 + \beta_1), \tag{5.79}$$

ou equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \alpha(\beta_2+\beta_1) \\ \alpha(\beta_2+\beta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2\rho_1 & -D_1 \\ \beta_1\rho_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \mu^2 \end{pmatrix}. \tag{5.80}$$

Caso 1. Usado a notação (5.19) com $\chi_0 \neq 0$ temos que existe uma única solução para μ

e λ, com

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \alpha(\beta_2+\beta_1)\frac{D_1+D_2}{\beta_2\rho_1 D_2+\beta_1\rho_2 D_1} = \frac{\alpha(\beta_2+\beta_1)}{\beta_2\rho_1}\left(1+\frac{D_1\chi_1}{\chi_0}\right)\\ \mu^2 &= \alpha(\beta_2+\beta_1)\frac{\beta_2\rho_1-\beta_1\rho_2}{\beta_2\rho_1 D_2+\beta_1\rho_2 D_1} = \alpha(\beta_2+\beta_1)\frac{\chi_1}{\chi_0}.\end{aligned} \tag{5.81}$$

De (5.77) e sendo que λ^2 dever ser um número positivo chegamos às condições

$$1+\frac{D_1\chi_1}{\chi_0}>0 \qquad e \qquad \frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha(\beta_1+\beta_2)\chi_1}{\chi_0}} \in \mathbb{N}. \tag{5.82}$$

Caso 2. Da expressão (5.80) e do fato $\chi_0 = 0$ conclui-se que existe um $\gamma_0 \neq 0$ tal que

$$(D_2, D_1) = \gamma_0(-\beta_2\rho_1, \beta_1\rho_2), \tag{5.83}$$

pois facilmente se observa que χ_0 é o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} \beta_2\rho_1 & -D_1 \\ \beta_1\rho_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Assim, de (5.78)-(5.79) concluimos que o sistema

$$\alpha(\beta_2+\beta_1) = \gamma_0\beta_2\rho_1\mu^2 + \beta_2\rho_1\lambda^2 \tag{5.84}$$

$$\alpha(\beta_2+\beta_1) = \gamma_0\beta_1\rho_2\mu^2 + \beta_1\rho_2\lambda^2, \tag{5.85}$$

tem uma solução se

$$\beta_1\rho_2 = \beta_2\rho_1, \tag{5.86}$$

isto é, se $\chi_1 = 0$. De (5.83) e (5.86) concluimos que λ^2 satisfaz

$$\lambda^2\beta_1\rho_2 = D_1\mu^2 + \alpha(\beta_2+\beta_1) = D_1\frac{n^2\pi^2}{l^2} + \alpha(\beta_2+\beta_1) \tag{5.87}$$

assim, se $D_1 > 0$ temos infinitos valores para λ, ou seja infinitos autovalores para o operador $\mathcal{A}$. Por outra parte, se $D_1 < 0$ existem no máximo n valores próprios, sendo n o maior natural tal que $(D_1\pi^2n^2 + l^2\alpha(\beta_2+\beta_1)) > 0$ pois

$$\lambda^2 l^2 = \frac{1}{\beta_1\rho_2}(D_1\pi^2n^2 + l^2\alpha(\beta_2+\beta_1)) > 0. \tag{5.88}$$

Caso 3. Se $\chi_0 = 0$ e $\chi_1 \neq 0$ o sistema $\star$ não tem solução, o que conclue a demonstração do Lema. □

Prova do lema 5.2.3 É claro que o lema anterior 5.4.2 permite concluir o lema 5.2.3. Com isto fica provada a primeira condição do Teorema 1.0.18.

O objetivo agora é mostrar que $\overline{\lim}_{|\lambda|\to\infty} ||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$, para isto, utiliza-se uma série de resultados que serão apresentados a seguir que permite chegar à conclusão limitando cada componente. Inicialmente temos a seguinte limitação. Seja $U = (u, w, v, \eta, \theta, q)$ solução de $(i\lambda - \mathcal{A})U = F$, é claro que da equação (5.70) temos

$$||q||^2 \leq c||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}. \tag{5.89}$$

Lema 5.4.3. *Suponha as condições do lema 5.2.3 são verdadeiras. Se $U = (u, w, \nu, \eta, \theta, q)$ é solução do sistema $(i\lambda - \mathcal{A})U = F$, descrito em (5.64) - (5.69), logo para qualquer $\epsilon > 0$ existe $c_\epsilon > 0$ tal que*

$$||\beta_1\nu + \beta_2\eta||^2 \leq c_\epsilon||U||||F|| + c||F||^2 + \epsilon||A_1u_x + A_2w_x||^2 + \epsilon||u - w||^2, \tag{5.90}$$

onde A_1 e A_2 são como em (5.21) e (5.22) respectivamente.

Prova. A prova do lema será feita por passos.

Passo 1. Seja ζ tal que

$$-\zeta_{xx} = \beta_1\nu + \beta_2\eta, \quad \zeta_x(0) = \zeta_x(l) = 0,$$

logo da equação (5.68), e do produto interno em L^2 com ζ_x temos

$$\begin{aligned} ||\beta_1\nu + \beta_2\eta||^2 &= -i\lambda\varsigma\langle\theta, \overline{\zeta_x}\rangle - \frac{1}{m}\langle q_x, \overline{\zeta_x}\rangle + \langle\varsigma f_5, \overline{\zeta_x}\rangle \\ &= -i\lambda\varsigma\langle\theta, \overline{\zeta_x}\rangle + \frac{1}{m}\langle q, \overline{\zeta_{xx}}\rangle + \langle\varsigma f_5, \overline{\zeta_x}\rangle \\ &\leq |i\lambda\varsigma\langle\theta, \overline{\zeta_x}\rangle| + \frac{1}{m}||q||||\beta_1\nu + \beta_2\eta|| + \varsigma||f_5||||\zeta_x||. \end{aligned} \tag{5.91}$$

Passo 2. A seguir estimamos o primeiro e último termo em (5.91). Da desigualdade de

Poincaré para ζ_x temos para o último termo em (5.91) a estimativa

$$||f_5||||\zeta_x|| \leq c||F||_{\mathcal{H}}||\zeta_{xx}|| = c||F||_{\mathcal{H}}||\beta_1\nu + \beta_2\eta||_{L^2}. \tag{5.92}$$

Para o primeiro termo em (5.91) temos a seguinte estimativa:

$$|i\lambda\varsigma\langle\theta, \overline{\zeta_x}\rangle| \ \leq \varsigma|\lambda|||\theta||\ ||\zeta_x||_{L^2} \leq \varsigma|\lambda|||\theta||\ ||\zeta_{xx}||_{H^{-1}} = \varsigma|\lambda|||\theta||\ ||\beta_1\nu + \beta_2\eta||_{H^{-1}}. \tag{5.93}$$

Por outro lado, multiplicando (5.66) e (5.67) por $\rho_2\beta_1$ e $\rho_1\beta_2$ respectivamente, e logo somando os resultados temos

$$\begin{aligned} i\lambda\rho_1\rho_2(\beta_1\nu + \beta_2\eta) &= \rho_2\beta_1 a_{11}u_{xx} - \rho_2\beta_1\alpha u + \rho_2\beta_1 a_{12}w_{xx} + \rho_2\beta_1\alpha w + \rho_2\beta_1^2\theta_x \\ &\quad +\rho_2\beta_1\rho_1 f_3 + \rho_1\beta_2 a_{12}u_{xx} + \rho_1\beta_2\alpha u + \rho_1\beta_2 a_{22}w_{xx} - \rho_1\beta_2\alpha w \\ &\quad +\rho_1\beta_2^2\theta_x + \rho_1\beta_2\rho_2 f_4 \\ &= A_1u_{xx} + A_2w_{xx} - \alpha(\rho_2\beta_1 - \rho_1\beta_2)(u - w) + (\rho_2\beta_1^2 + \rho_1\beta_2^2)\theta_x \\ &\quad +\rho_1\rho_2(\beta_1 f_3 + \beta_2 f_4), \end{aligned} \tag{5.94}$$

com A_1 e A_2 como em (5.21) e (5.22), assim tomando norma em H^{-1}

$$|\lambda|||\beta_1\nu + \beta_2\eta||_{H^{-1}} \leq c||A_1u_x + A_2w_x||_{L^2} + c||u - w||_{H^{-1}} + c||\theta||_{L^2} + c||F||_{\mathcal{H}}. \tag{5.95}$$

Devido à desigualdade anterior, podemos deduzir em (5.93) que

$$\begin{aligned} |i\lambda\varsigma\langle\theta, \overline{\zeta_x}\rangle| \ &\leq c||\theta||||A_1u_x + A_2w_x||_{L^2} + c||\theta||||u - w||_{H^{-1}} + c||\theta||||F||_{\mathcal{H}} + c||\theta||_{L^2}^2 \\ &\leq c_\epsilon||\theta||^2 + \epsilon||A_1u_x + A_2w_x||_{L^2}^2 + \epsilon||u - w||_{L^2}^2 + c||F||_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \tag{5.96}$$

Passo 3. De forma análoga aos passos anteriores, seja z tal que

$$-z_{xx} = \theta, \quad z_x(0) = z_x(l) = 0, \tag{5.97}$$

logo do produto em L^2 de z_x com (5.69), integrando por partes e aplicando desigualdade

de Poincaré na variável z_x temos

$$\begin{aligned} k||\theta||^2_{L^2} &= (\tau_0 f_6, \overline{z_x}) - (q, \overline{z_x}) - (i\lambda\tau_0 q, \overline{z_x}) \\ &\leq \tau_0||f_6||||z_x|| + ||q||||z_x|| + |(i\lambda\tau_0 q, z_x)| \\ &\leq c\tau_0||f_6||||\theta|| + c||q||||\theta|| + |(i\lambda\tau_0 q, z_x)| \end{aligned} \tag{5.98}$$

Passo 4. Seja φ tal que

$$-\varphi_{xx} = q, \quad \varphi_x(0) = \varphi_x(l) = 0 \tag{5.99}$$

logo considerando (5.97) e o último termo na direita em (5.98) podemos dizer

$$\begin{aligned} (i\lambda\tau_0 q, \overline{z_x}) &= -(i\lambda\tau_0\varphi_{xx}, \overline{z_x}) = (\tau_0\varphi_{xx}, \overline{i\lambda z_x}) \\ &= -\tau_0(\varphi_x, \overline{i\lambda z_{xx}}) = \tau_0(\varphi_x, \overline{i\lambda\theta}). \end{aligned}$$

Utilizando a equação (5.68), e aplicando Poincaré para a variável φ_x temos,

$$\begin{aligned} \tau_0(\varphi_x, \overline{i\lambda\theta}) &= \frac{\tau_0}{\varsigma}(\varphi_x, \overline{(\beta_1\nu_x + \beta_2\eta_x)}) - \frac{\tau_0}{m\varsigma}(\varphi_x, \overline{q_x}) + \tau_0(\varphi_x, \overline{f_5}) \\ &= -\frac{\tau_0}{\varsigma}(\varphi_{xx}, \overline{(\beta_1\nu + \beta_2\eta)}) + \frac{\tau_0}{m\varsigma}(\varphi_{xx}, \overline{q}) + \tau_0(\varphi_x, \overline{f_5}), \end{aligned}$$

assim

$$|\tau_0(\varphi_x, \overline{i\lambda\theta})| \leq \frac{\tau_0}{\varsigma}||q||||\beta_1\nu + \beta_2\eta|| + \frac{\tau_0}{m\varsigma}||q||^2 + \tau_0 c_p||q||||f_5||,$$

e portanto

$$|(i\lambda\tau_0 q, \overline{z}_x)| = |\tau_0(\varphi_x, \overline{i\lambda\theta})| \leq \frac{\tau_0}{\varsigma}||q||||\beta_1\nu + \beta_2\eta|| + \frac{\tau_0}{m\varsigma}||q||^2 + \tau_0 c_p||q||||f_5||. \tag{5.100}$$

Passo 5. Resumindo as constantes em geral, de (5.98) e (5.100) e agrupando convenientemente concluimos que

$$\begin{aligned} k||\theta||^2_{L^2} &\leq c\tau_0||f_6||||\theta|| + c||q||||\theta|| + \frac{\tau_0}{\varsigma}||q||||\beta_1\nu + \beta_2\eta|| + \frac{\tau_0}{m\varsigma}||q||^2 + \tau_0 c_p||q||||f_5|| \\ &\leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}} + \epsilon||\theta||^2_{L^2} + c_\epsilon||q||^2 + \frac{\tau_0}{\varsigma}||q||||\beta_1\nu + \beta_2\eta|| + \frac{\tau_0 c}{m\varsigma}||q||^2, \end{aligned}$$

e pela desigualdade (5.89) e para ϵ bem pequeno tal que podemos transladar o termo $\epsilon||\theta||^2_{L^2}$ a esquerda, fica a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}||\theta||^2_{L^2} \leq & C_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}} + c||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + c||q||||\beta_1\nu + \beta_2\eta|| \\ \leq & C_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}} + c||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + c_\epsilon||q||^2 + \epsilon||\beta_1\nu + \beta_2\eta||^2. \end{aligned} \tag{5.101}$$

Passo 6. Substituindo em (5.91) as estimativas (5.101), (5.92) e (5.96) concluimos

$$||\beta_1\nu + \beta_2\eta||^2 \leq c_\epsilon||\theta||^2 + \epsilon||A_1u_x + A_2w_x||^2_{L^2} + \epsilon||u-w||^2_{L^2} + c||F||^2_{\mathcal{H}}$$

$$+\tfrac{1}{m}||q||||\beta_1\nu + \beta_2\eta|| + \varsigma||F||_{\mathcal{H}}||\beta_1\nu + \beta_2\eta||_{L^2}$$

$$\leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}} + c_\epsilon||U||||F|| + c_\epsilon||q||^2 + \epsilon||\beta_1\nu + \beta_2\eta||^2_{L^2}$$

$$+\epsilon||A_1u_x + A_2w_x||^2_{L^2} + \epsilon||u-w||^2_{L^2} + c||F||^2_{\mathcal{H}}$$

$$+c_\epsilon||q||^2 + \epsilon||\beta_1\nu + \beta_2\eta||^2_{L^2} + c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}} + \epsilon||\beta_1\nu + \beta_2\eta||^2_{L^2}.$$

Finalmente de (5.89) e tomando ϵ suficientemente pequeno tal que podemos passar o termo $2\epsilon||\beta_1\nu + \beta_2\eta||^2_{L^2}$ a esquerda, podemos chegar ao resultado proposto no lema, isto é

$$||\beta_1\nu + \beta_2\eta||^2 \leq c||F||^2_{\mathcal{H}} + c||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \epsilon||A_1u_x + A_2w_x||^2_{L^2} + \epsilon||u-w||^2_{L^2}, \tag{5.102}$$

com c constante em geral. □

Observação 5.4.4. *No caso $\chi_0 = 0$, temos que $\beta_2A_1 = \beta_1A_2$, assim, em (5.95) e (5.96) temos respectivamente*

$$|\lambda|||\beta_1\nu + \beta_2\eta||_{H^{-1}} \leq c\frac{|A_2|}{|\beta_2|}||\beta_1u_x + \beta_2w_x||_{L^2} + c||u-w||_{H^{-1}} + c||\theta||_{L^2} + c||F||_{\mathcal{H}},$$

$$|i\lambda\varsigma\langle\theta, \overline{\zeta}_x\rangle| \quad \leq c_\epsilon||\theta||^2 + \epsilon\frac{|A_2|}{|\beta_2|}||\beta_1u_x + \beta_2w_x||^2_{L^2} + \epsilon||u-w||^2_{L^2} + c||F||^2_{\mathcal{H}}.$$

Tomando ϵ de forma conveniente, somando (5.101) obtemos a seguinte estimativa em

(5.91)

$$\begin{aligned} ||\beta_1\nu+\beta_2\eta||^2 &\leq c||F||^2_{\mathcal{H}}+c||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\epsilon||\beta_1 u_x+\beta_2 w_x||^2_{L^2}+\epsilon||u-w||^2_{L^2}, \\ &\leq c||F||^2_{\mathcal{H}}+c||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\epsilon||U|^2_{\mathcal{H}} \end{aligned} \tag{5.103}$$

que é de fato equivalente ao resultado em (5.102).

Observação 5.4.5. *Da norma induzida por (5.25), de (5.89), (5.101) e de (5.102) temos para ϵ suficientemente pequeno,*

$$||\theta||^2_{L^2}\leq C_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}}+c||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\epsilon||U||^2_{\mathcal{H}}. \tag{5.104}$$

Lema 5.4.6. *Suponha as condições do lema 5.2.3 verdadeiras. Logo para todo $\epsilon>0$ existe um $c_\epsilon>0$ tal que, para todo $|\lambda|\neq 0$.*

$$||\beta_1 u_x+\beta_2 w_x||^2\leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}}+\epsilon||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}}+||F||^2_{\mathcal{H}}]. \tag{5.105}$$

Prova. A ideia é de (5.66) e (5.67), determina-se $\beta_1 u_{xx}+\beta_2 w_{xx}$ e em seguida estimar a sua norma utilizando $\beta_1 u+\beta_2 w$. De fato, das equações (5.66) e (5.67) temos

$$\begin{aligned} a_{11}u_{xx}+a_{12}w_{xx} &= i\lambda\rho_1\nu+\alpha(u-w)-\rho_1 f_3-\beta_1\theta_x \\ a_{12}u_{xx}+a_{22}w_{xx} &= i\lambda\rho_2\eta-\alpha(u-w)-\rho_2 f_4-\beta_2\theta_x. \end{aligned}$$

Se D, D_1 e D_2 são como em (5.16) e (5.18), podemos escrever u_{xx} e w_{xx} como sendo

$$u_{xx}=\frac{1}{D}[a_{22}(i\lambda\rho_1\nu+\alpha(u-w)-\beta_1\theta_x-\rho_1 f_3)-a_{12}(i\lambda\rho_2\eta-\alpha(u-w)-\beta_2\theta_x-\rho_2 f_4)]$$

e

$$w_{xx}=\frac{1}{D}[a_{11}(i\lambda\rho_2\eta-\alpha(u-w)-\beta_2\theta_x-\rho_2 f_4)-a_{12}(i\lambda\rho_1\nu+\alpha(u-w)-\beta_1\theta_x-\rho_1 f_3)],$$

desta forma

$$\begin{aligned}\beta_1 u_{xx} + \beta_2 w_{xx} &= \tfrac{\beta_1}{D}[a_{22}(i\lambda\rho_1\nu + \alpha(u-w) - \beta_1\theta_x - \rho_1 f_3)\\ &\quad -a_{12}(i\lambda\rho_2\eta - \alpha(u-w) - \beta_2\theta_x - \rho_2 f_4)]\\ &\quad +\tfrac{\beta_2}{D}[a_{11}(i\lambda\rho_2\eta - \alpha(u-w) - \beta_2\theta_x - \rho_2 f_4)\\ &\quad -a_{12}(i\lambda\rho_1\nu + \alpha(u-w) - \beta_1\theta_x - \rho_1 f_3)].\end{aligned}$$

Tomando o produto em L^2 dos termos $\beta_1 u_{xx} + \beta_2 w_{xx}$ com $\overline{\beta_1 u + \beta_2 w}$, temos

$$\begin{aligned}||\beta_1 u_x + \beta_2 w_x||^2 &= \frac{1}{D}\langle -[\beta_1 a_{22}(i\lambda\rho_1\nu + \alpha(u-w) - \beta_1\theta_x - \rho_1 f_3)\\ &\quad + \beta_1 a_{12}(i\lambda\rho_2\eta - \alpha(u-w) - \beta_2\theta_x - \rho_2 f_4)], (\overline{\beta_1 u + \beta_2 w})\rangle\\ &\quad - \frac{1}{D}\langle[\beta_2 a_{11}(i\lambda\rho_2\eta - \alpha(u-w) - \beta_2\theta_x - \rho_2 f_4)\\ &\quad + \beta_2 a_{12}(i\lambda\rho_1\nu + \alpha(u-w) - \beta_1\theta_x - \rho_1 f_3)], (\overline{\beta_1 u + \beta_2 w})\rangle\\ &= \frac{1}{D}\langle[i\lambda\rho_1\nu + \alpha(u-w) - \beta_1\theta_x - \rho_1 f_3], D_2\overline{(\beta_1 u + \beta_2 w)}\rangle\\ &\quad + \frac{1}{D}\langle -[i\lambda\rho_2\eta - \alpha(u-w) - \beta_2\theta_x - \rho_2 f_4], D_1\overline{(\beta_1 u + \beta_2 w)}\rangle.\end{aligned}$$

Distribuindo o produto interno, substituindo as equações (5.64) e (5.65) e associando convenientemente as constantes temos,

$$\begin{aligned}||\beta_1 u_x + \beta_2 w_x||^2 = \frac{1}{D}[&\langle\beta_1\nu + \beta_2\eta, -D_1\rho_2\overline{\eta} + D_2\rho_1\overline{\nu}\rangle + \langle D_1\rho_2\eta - D_2\rho_1\nu, \beta_1\overline{f_1} + \beta_2\overline{f_2}\rangle\\ &+(D_2 + D_1)\langle\alpha(u-w), (\overline{\beta_1 u} + \overline{\beta_2 w})\rangle + (D_2\beta_1 - D_1\beta_2)\langle\theta, (\overline{\beta_1 u_x} + \overline{\beta_2 w_x})\rangle\\ &-\langle(D_2\rho_1 f_3 - D_1\rho_2 f_4), (\overline{\beta_1 u} + \overline{\beta_2 w})\rangle].\end{aligned}$$

Desta forma podemos limitar o lado esquerdo na expressão anterior da forma que,

$$\begin{aligned}&||\beta_1 u_x + \beta_2 w_x||^2 \leq c||\beta_1\nu + \beta_2\eta||||D_1\rho_2\eta - D_2\rho_1\nu|| + C||u-w|||\beta_1 u + \beta_2 w||\\ &+C||D_1\rho_2\eta - D_2\rho_1\nu||||F||_{\mathcal{H}} + c||\theta||||\beta_1 u_x + \beta_2 w_x|| + c||F||_{\mathcal{H}}||\beta_1 u + \beta_2 w||.\end{aligned} \tag{5.106}$$

A conclusão do lema se obtem ao estimar os dois primeiros termos na direita da expressão (5.106). De fato, para o primeiro termo temos, pelo lema 5.4.3 e da norma induzida por

(5.25), que

$$\begin{aligned}
&||\beta_1\nu+\beta_2\eta||||D_1\rho_2\eta-D_2\rho_1\nu|| \\
&\leq (c_\epsilon||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+c||F||^2_{\mathcal{H}}+\epsilon||A_1u_x+A_2w_x||^2+\epsilon||u-w||^2)^{1/2}c||U||_{\mathcal{H}} \\
&\leq c_\epsilon^{1/2}||U||^{1/2}_{\mathcal{H}}||F||^{1/2}_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}+||U||_{\mathcal{H}}\ ||F||_{\mathcal{H}}+\epsilon^{1/2}||A_1u_x+A_2w_x||||U||_{\mathcal{H}} \\
&\quad +\epsilon^{1/2}||u-w||\ ||U||_{\mathcal{H}} \\
&\leq \epsilon||U||^2_{\mathcal{H}}+c_\epsilon||F||_{\mathcal{H}}\ ||U||_{\mathcal{H}}+c\epsilon^{1/2}||U||^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{5.107}$$

Para o segundo termo, utilizando (5.64)-(5.65) a desigualdade de Poincaré nas variáveis $u,\ w$, temos

$$\begin{aligned}
C||u-w|||\beta_1u+\beta_2w|| &\leq \frac{c}{\epsilon|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}}+||F||^2_{\mathcal{H}}]+\frac{\epsilon}{2}||\beta_1u+\beta_2w||^2 \\
&\leq \frac{c}{\epsilon|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}}+||F||^2_{\mathcal{H}}]+\frac{c\epsilon}{2}||\beta_1u_x+\beta_2w_x||^2,
\end{aligned} \tag{5.108}$$

assim, em (5.106) usando (1.0.6), (5.101), (5.107), (5.108), e agrupando convenientemente as constantes temos inicialmente

$$\begin{aligned}
||\beta_1u_x+\beta_2w_x||^2 \leq\ & \epsilon||U||^2_{\mathcal{H}}+c_\epsilon||F||_{\mathcal{H}}\ ||U||_{\mathcal{H}}+c\epsilon^{1/2}||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{c}{\epsilon|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}}+||F||^2_{\mathcal{H}}] \\
&+\frac{c\epsilon}{2}||\beta_1u_x+\beta_2w_x||^2+c\epsilon^{1/2}||U||^2_{\mathcal{H}}+c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}}+c_\epsilon||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \\
&+c_\epsilon||q||||\beta_1\nu+\beta_2\eta||+\epsilon||\beta_1u_x+\beta_2w_x||^2+c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}}+\epsilon||\beta_1u_x+\beta_2w_x||^2 \\
\leq\ & \tilde{c}_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}}+\tilde{\epsilon}||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{c}{\epsilon|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}}+||F||^2_{\mathcal{H}}]+c_\epsilon||q||^2+\tilde{\epsilon}||\beta_1\nu+\beta_2\eta||^2 \\
&+\tilde{\epsilon}||\beta_1u_x+\beta_2w_x||^2.
\end{aligned}$$

Finalmente associando os termos correspondentes, usando (5.89) e tomando ϵ suficientemente pequeno e convenientemente tal que ao passar o termo $(\frac{c\epsilon}{2}+2\epsilon)||\beta_1u_x+\beta_2w_x||^2$ a esquerda na última expressão, obtemos a seguinte estimativa

$$||\beta_1u_x+\beta_2w_x||^2 \leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}}+\epsilon||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}}+||F||^2_{\mathcal{H}}].$$

□

Lema 5.4.7. *Se $\chi_0\neq 0$ então para todo ϵ existe um $c_\epsilon>0$ tal que, para $|\lambda|\neq 0$*

$$||A_1u_x+A_2w_x||^2 \leq c_\epsilon||F||^2+\epsilon||U||^2+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|}(||U||^2_{\mathcal{H}}+|F||^2_{\mathcal{H}}) \tag{5.109}$$

Prova. Procedendo de modo análogo ao lema anterior; utilizando a expressão (5.94), fazendo produto interno em L^2 com $\overline{A_1u + A_2w}$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle i\lambda\rho_1\rho_2\ (\beta_1\nu + \beta_2\eta), \overline{A_1u + A_2w}\rangle &= \langle A_1u_{xx} + A_2w_{xx}, \overline{A_1u + A_2w}\rangle \\ &-\langle\alpha(\rho_2\beta_1 - \rho_1\beta_2)(u - w), \overline{A_1u + A_2w}\rangle + \langle(\rho_2\beta_1^2 + \rho_1\beta_2^2)\theta_x, \overline{A_1u + A_2w}\rangle \\ &+\langle(\rho_2\beta_1\rho_1 f_3 + \rho_1\beta_2\rho_2 f_4), \overline{A_1u + A_2w}\rangle.\end{aligned} \tag{5.110}$$

Usando as expressões (5.64)-(5.65), o termo à esquerda em (5.110) fica da forma

$$|\langle i\lambda\rho_1\rho_2(\beta_1\nu + \beta_2\eta), \overline{A_1u + A_2w}\rangle| \leq |\langle\rho_1\rho_2(\beta_1\nu + \beta_2\eta), \overline{A_1(\nu + f_1) + A_2(\eta + f_2)}\rangle|.$$

Além disso, usando (5.64)-(5.65) e desigualdade de Poincaré para as variáveis u e v obtemos para o segundo termo na direita em (5.110) a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}|\alpha(\rho_2\beta_1 - \rho_1\beta_2)||\langle(u - w), \overline{A_1u + A_2w}\rangle| &\leq \frac{c}{|\lambda|}||(\nu + f_1) - (\eta + f_1)||c(||u_x|| + ||w_x||) \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|}(||\nu|| + ||f_1|| + ||\eta|| + ||f_2||)||U|| \leq \frac{c}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Logo de (5.110), da desigualdade de Poincaré, integração por partes e substituindo as duas expressões anteriores temos

$$\begin{aligned}||A_1u_x + A_2w_x||^2 &\leq c||(\beta_1\nu + \beta_2\eta)||||A_1\nu + A_2\eta|| + c||(\beta_1\nu + \beta_2\eta)||||A_1f_1 + A_2f_2|| \\ &+\frac{c}{|\lambda|}||U||^2 + \frac{c}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + c||\theta||||A_1u_x + A_2w_x|| + c||F||||A_1u_x + A_2w_x|| \\ &\leq c_\epsilon||(\beta_1\nu + \beta_2\eta)||^2 + \epsilon||A_1\nu + A_2\eta||^2 + c||F||^2 + c_\epsilon||\theta||^2 + 2\epsilon||A_1u_x + A_2w_x||^2 \\ &+c_\epsilon||F||^2 + \frac{c}{|\lambda|}||U||^2 + \frac{c}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.\end{aligned} \tag{5.111}$$

Finalmente do Lema 5.4.3, de (5.89) e da expressão (5.101) obtemos o resultado, isto é

$$\begin{aligned}||A_1u_x + A_2w_x||^2 &\leq c_\epsilon||U||||F|| + c||F||^2 + \epsilon||U||^2 + c\epsilon(||\nu||^2 + ||\eta||^2) + c_\epsilon||F||^2 \\ &+c_\epsilon||q||^2 + \frac{c}{|\lambda|}||U||^2 + \frac{c}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \\ &\leq c_\epsilon||F||^2 + \epsilon||U||^2 + \frac{c}{|\lambda|}||U||^2 + \frac{c}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.\end{aligned} \tag{5.112}$$

□

Observação 5.4.8. *Como foi dito anteriormente, no caso $\chi_0 = 0$ temos $\beta_2A_1 = \beta_1A_2$,*

logo $||A_1u_x + A_2w_x||^2 = c||\beta_1u_x + \beta_2w_x||^2$ *desta forma o resultado é obtido aplicando o lema 5.4.6.*

Agora, usaremos os lemas provados anteriormente para a prova do Teorema 5.2.4 que se apresenta a seguir.

Prova do Teorema 5.2.4. **Caso 1.** Suponha válida a condição (i) do lema 5.2.3. Então temos as estimativas $||A_1u_x + A_2w_x||^2$ e $||\beta_1u_x + \beta_2w_x||^2$ fornecidas pelos lemas 5.4.6 e 5.4.7, isto é

$$||A_1u_x + A_2w_x||^2 \leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}} + \epsilon||U||^2_{\mathcal{H}} + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|}||U||^2 + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \tag{5.113}$$

$$||\beta_1u_x + \beta_2w_x||^2 \leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}} + \epsilon||U||^2_{\mathcal{H}} + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}} + ||F||^2_{\mathcal{H}}]. \tag{5.114}$$

Além disso, se G é a matriz definida por:

$$G = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \tag{5.115}$$

então pela observação 5.2.2, temos

$$\begin{pmatrix} u_x \\ w_x \end{pmatrix} = \frac{G^{-1}}{|G|} \begin{pmatrix} A_1u_x + A_2w_x \\ \beta_1u_x + \beta_2w_x \end{pmatrix}. \tag{5.116}$$

Logo podemos deduzir a estimativa

$$\begin{aligned} ||u_x||^2 + ||w_x||^2 &\leq c(||A_1u_x + A_2w_x||^2 + ||\beta_1u_x + \beta_2w_x||^2) \\ &\leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}} + \epsilon||U||^2_{\mathcal{H}} + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}} + ||F||^2_{\mathcal{H}}]. \end{aligned} \tag{5.117}$$

Além disso, tomando o produto interno das equações (5.64), (5.65), com $\rho_1\overline{\nu}$ e $\rho_2\overline{\eta}$ respectivamente, e somando os resultados, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1||\nu||^2 + \rho_2||\eta||^2 &= \rho_1\langle i\lambda u, \overline{\nu}\rangle - \rho_1\langle f_1, \overline{\nu}\rangle + \rho_2\langle i\lambda w, \overline{\eta}\rangle - \rho_2\langle f_2, \overline{\eta}\rangle \\ &= -\rho_1\langle u, \overline{i\lambda\nu}\rangle - \rho_1\langle f_1, \overline{\nu}\rangle - \rho_2\langle w, \overline{i\lambda\eta}\rangle - \rho_2\langle f_2, \overline{\eta}\rangle. \end{aligned}$$

Assim, substituindo na expressão anterior as equações (5.66) e (5.67), utilizando a desi-

gualdade de Poincaré nas variáveis u e v, utilizando as estimativas (5.104) e (5.105) e a definição da norma em $\mathcal{H}$ definida por (5.25), concluimos

$$\begin{aligned}\rho_1||\nu||^2+\rho_2||\eta||^2 &= a_{11}||u_x||^2+\alpha||u-w||^2+a_{12}(\langle u_x,\overline{w}_x\rangle+\langle w_x,\overline{u}_x\rangle)+a_{22}||w_x||^2\\ &+\langle\beta_1u_x+\beta_2w_x,\overline{\theta}\rangle-\rho_1\langle u,\overline{f}_3\rangle-\rho_1\langle f_1,\overline{\nu}\rangle-\rho_2\langle w,\overline{f}_4\rangle-\rho_2\langle f_2,\overline{\eta}\rangle\\ &\leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}}+\epsilon||U||^2_{\mathcal{H}}+c||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}}+||F||^2_{\mathcal{H}}].\\ &\leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}}+\epsilon||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}}+||F||^2_{\mathcal{H}}].\end{aligned} \tag{5.118}$$

Dos resultados anteriores concluímos o resultado de estabilidade exponencial visto que, das estimativas (5.89), (5.104), (5.117) e (5.118), temos

$$||U||^2_{\mathcal{H}}\leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}}+\epsilon||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}}+||F||^2_{\mathcal{H}}],$$

logo tomando ϵ suficientemente pequeno e para λ da forma $\dfrac{1}{\epsilon}\leq|\lambda|$ concluímos

$$||U||_{\mathcal{H}}\leq c||F||_{\mathcal{H}}, \tag{5.119}$$

assim, fica provado (1.13) e portanto o primeiro caso do Teorema 5.2.4.

Caso 2. Assumindo válida a condição (iii) do lema 5.2.3 temos de (5.19) - (5.20) as igualdades $\beta_2\rho_1D_2+\beta_1\rho_2D_1=0$ e $\beta_2\rho_1=\beta_1\rho_2$ respectivamente, logo $D_2=-D_1$. Multiplicando as equações (5.66) e (5.67) por β_2 e β_1 respectivamente, concluimos que

$$\begin{aligned}i\lambda\rho_1\beta_2(\nu-\eta)&-\beta_2a_{11}u_{xx}+\beta_1a_{12}u_{xx}-\beta_2a_{12}w_{xx}+\beta_1a_{22}w_{xx}\\ &+\alpha\beta_2u-\alpha\beta_2w+\alpha\beta_1u-\beta_1\alpha w=\rho_1\beta_2f_3-\rho_2\beta_1f_4.\end{aligned}$$

Logo, de (5.18), temos

$$i\lambda\rho_1\beta_2(\nu-\eta)-D_1u_{xx}-D_2w_{xx}+\alpha(\beta_2+\beta_1)(u-w)=\rho_1\beta_2(f_3-f_4). \tag{5.120}$$

Assim em (5.120), fazendo produto interno em L^2 por $\overline{u-w}$, e utilizando (5.64) e (5.65) temos

$$\begin{aligned}&-\langle\rho_1\beta_2(\nu-\eta),\overline{i\lambda(u-w)}\rangle-\langle D_1(u-w)_{xx},\overline{u-w}\rangle+\alpha(\beta_2+\beta_1)||u-w||^2\\&=\langle\rho_1\beta_2 f_3-\rho_2\beta_1 f_4,\overline{u-w}\rangle.\end{aligned}$$

Lembrando que $-D_1>0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\min\{\rho_1\beta_2,\,-D_1\}[||\nu-\eta||^2+||(u-w)_x||^2]&\leq\rho_1\beta_2||\nu-\eta||^2-D_1||(u-w)_x||^2\\&=-\langle\rho_1\beta_2 f_3-\rho_2\beta_1 f_4,\overline{u-w}\rangle-\langle\rho_1\beta_2(\nu-\eta),\overline{f_1-f_2}\rangle+\alpha(\beta_2+\beta_1)||u-w||^2\\&\leq 2c||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}+\alpha(\beta_2+\beta_1)||u-w||^2.\end{aligned}\tag{5.121}$$

De novo pelas equações (5.64) e (5.65) e desigualdade de Poincaré em $u,\ w$, temos, para $|\lambda|\neq 0$ a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\alpha(\beta_2+\beta_1)||u-w||^2&=\alpha(\beta_2+\beta_1)\langle u-w,\overline{(\tfrac{\nu+f_1}{i\lambda}-\tfrac{\eta+f_2}{i\lambda})}\rangle\\&\leq\frac{c_1}{|\lambda|}||(u-w)_x||\ ||\nu-\eta||+\frac{c_1}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}\ ||F||_{\mathcal{H}}\\&\leq\frac{c_1}{|\lambda|}||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{c_1}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}\ ||F||_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Desta forma em (5.121) e pela última estimativa, temos que existe um $c>0$ tal que

$$||\nu-\eta||^2+||(u-w)_x||^2\leq c||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\frac{c_1}{|\lambda|}||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{c_1}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}\ ||F||_{\mathcal{H}}.\tag{5.122}$$

Além disso, dos resultados (5.103) e (5.105) podemos proceder de forma análoga como em (5.113)-(5.115), pois

$$||\beta_1\nu+\beta_2\eta||^2\leq c_\epsilon||F||^2+\epsilon||U||^2,\tag{5.123}$$

$$||\beta_1 u_x+\beta_2 w_x||^2\leq c_\epsilon||F||^2+\epsilon||U||^2+\frac{c_\epsilon}{|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}}+||F||^2_{\mathcal{H}}],\tag{5.124}$$

logo usando (5.122), e notando que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é invertível, concluimos que existem constantes positivas C_1 e C_2 tal que

$$\begin{aligned} ||\eta||^2 + ||\nu||^2 &\leq C_1(||\beta_1\nu + \beta_2\eta||^2 + ||\nu - \eta||^2) \\ &\leq c_\epsilon||F||^2 + \epsilon||U||^2 + \frac{c_1}{|\lambda|}||U||^2_{\mathcal{H}} + \frac{c_1}{|\lambda|}||U||_{\mathcal{H}}\ ||F||_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{5.125}$$

$$\begin{aligned} ||u_x||^2 + ||w_x||^2 \leq &\quad C_2(||\beta_1 u_x + \beta_2 w_x||^2 + ||u_x - w_x||^2) \\ \leq &\quad c_\epsilon||F||^2 + \epsilon||U||^2 + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}} + ||F||^2_{\mathcal{H}}]. \end{aligned} \tag{5.126}$$

Desta forma, das estimativas (5.89), (5.104), (5.125) e (5.126) temos

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \leq c_\epsilon||F||^2_{\mathcal{H}} + \epsilon||U||^2_{\mathcal{H}} + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|}[||U||^2_{\mathcal{H}} + ||F||^2_{\mathcal{H}}],$$

assim, tomando ϵ suficientemente pequeno tal que $\epsilon \leq \frac{1}{|\lambda|}$ temos o resultado.

□

5.4.2 Perda de Estabilidade

Nesta seção, vamos supor que as condições 1) e 3) do lema 5.2.3 não são válidas, logo temos a perda de estabilidade exponencial para o sistema (5.6)-(5.15). Em resume temos as hipóteses $\chi_0 = 0$ e $\chi_1 \neq 0$. Para chegar ao resultado vamos tomar um $F \in \mathcal{H}$ especial e determinar a solução $U = (u, w, \nu, \eta, \theta, q)$ de forma que ao estimar a sua norma, $||U||_{\mathcal{H}}$, alguma das suas componentes não seja limitada quando $|\lambda| \to \infty$. O procedimento para mostrar perda de estabilidade será feito por passos.

Passo 1. Construção do um sistema conveniente. Considere-se o sistema (5.64)-(5.69) com $f_1 = f_2 = f_5 = f_6 = 0$ e $f_3 = h,\ f_4 = g$, a especificar posteriormente tais

funções, então,

$$i\lambda u = \nu, \tag{5.127}$$

$$i\lambda w = \eta, \tag{5.128}$$

$$i\lambda\rho_1\nu - a_{11}u_{xx} + \alpha u - a_{12}w_{xx} - \alpha w - \beta_1\theta_x = h, \tag{5.129}$$

$$i\lambda\rho_2\eta - a_{12}u_{xx} - \alpha u - a_{22}w_{xx} + \alpha w - \beta_2\theta_x = g, \tag{5.130}$$

$$i\lambda m\varsigma\theta - m\beta_1\nu_x - m\beta_2\eta_x + q_x = 0, \tag{5.131}$$

$$k\theta_x = -(i\lambda\tau_0 + 1)q. \tag{5.132}$$

Substituindo (5.127)-(5.128) e (5.132) em (5.129)-(5.131) temos

$$-\lambda^2\rho_1 u - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + \alpha(u - w) - \beta_1\theta_x = h, \tag{5.133}$$

$$-\lambda^2\rho_2 w - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} - \alpha(u - w) - \beta_2\theta_x = g, \tag{5.134}$$

$$i\lambda m\varsigma\theta - i\lambda m\beta_1 u_x - i\lambda m\beta_2 w_x - \frac{k}{(i\lambda\tau_0 + 1)}\theta_{xx} = 0, \tag{5.135}$$

Passo 2. Primeira equação. Multiplicando (5.133) e (5.134) por $\rho_2\beta_1$ e $\rho_1\beta_2$ respectivamente, e somando os resultados temos

$$\begin{aligned} &-\rho_2\lambda^2\rho_1(\beta_1 u + \beta_2 w) - \alpha(\rho_1\beta_2 - \rho_2\beta_1)(u - w) - (\rho_2\beta_1^2 + \rho_1\beta_2^2)\theta_x \\ &-(\rho_2\beta_1 a_{11} + \rho_1\beta_2 a_{12})u_{xx} - (\rho_2\beta_1 a_{12} + \rho_1\beta_2 a_{22})w_{xx} = \rho_2\beta_1 h + \rho_1\beta_2 g; \end{aligned} \tag{5.136}$$

por outro lado, como $\chi_0 = 0$, logo da definição (5.19) temos

$$\beta_2\rho_1(a_{12}\beta_2 - \beta_1 a_{22}) + \beta_1\rho_2(a_{11}\beta_2 - \beta_1 a_{12}) = 0,$$

assim da expressão anterior, associando os termos convenientemente encontramos

$$\frac{\rho_2\beta_1 a_{11} + \rho_1\beta_2 a_{12}}{\beta_1} = \frac{\rho_2\beta_1 a_{12} + \rho_1\beta_2 a_{22}}{\beta_2} = \gamma_0 \tag{5.137}$$

desta forma, utilizando (5.20) e (5.137) e denotando $V = \beta_1 u + \beta_2 w$, $W = u - w$, a equação (5.136) pode-se escrever como

$$-\lambda^2\rho_2\rho_1 V - \gamma_0 V_{xx} - \alpha\chi_1 W - (\rho_2\beta_1^2 + \rho_1\beta_2^2)\theta_x = \rho_2\beta_1 h + \rho_1\beta_2 g, \tag{5.138}$$

Passo 3. Segunda equação. Substituindo (5.127) e (5.128) em (5.129) e (5.130), multiplicando logo os resultado por ρ_2 e ρ_1 respectivamente, e finalmente subtraindo as equações temos

$$\begin{aligned} &-\lambda^2\rho_1\rho_2(u-w) - (\rho_2 a_{11} - \rho_1 a_{12})u_{xx} - (\rho_2 a_{12} - \rho_1 a_{22})w_{xx} \\ &+\alpha(\rho_2+\rho_1)(u-w) + \chi_1\theta_x = \rho_2 h - \rho_1 g. \end{aligned} \tag{5.139}$$

Procurando descrever a equação (5.139) com nas variáveis V e W definimos α_0 e α_1 tais que $\beta_1\alpha_1 + \alpha_0 = \rho_2 a_{11} - \rho_1 a_{12}$ e $\beta_2\alpha_1 - \alpha_0 = \rho_2 a_{12} - \rho_1 a_{22}$ isto é, dado

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ \beta_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_2 a_{11} - \rho_1 a_{12} \\ \rho_2 a_{12} - \rho_1 a_{22} \end{pmatrix},$$

concluimos que tais constantes são

$$\alpha_1 = \frac{\rho_2(a_{11}+a_{12}) - \rho_1(a_{22}+a_{12})}{\beta_1+\beta_2}, \qquad \alpha_0 = \frac{\rho_2\beta_2 a_{11} - (\rho_1\beta_2 + \rho_2\beta_1)a_{12} + \rho_1\beta_1 a_{22}}{\beta_1+\beta_2}, \tag{5.140}$$

pois $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ e assim a equação (5.139) fica como

$$\begin{aligned} &-\lambda^2\ \rho_1\rho_2(u-w) - \alpha_1(\beta_1 u + \beta_2 w)_{xx} - \alpha_0(u-w)_{xx} + \alpha(\rho_2+\rho_1)(u-w) + \chi_1\theta_x \\ &= -\lambda^2\rho_1\rho_2 W - \alpha_0 W_{xx} + \alpha(\rho_2+\rho_1)W - \alpha_1 V_{xx} + \chi_1\theta_x \\ &= \rho_2 h - \rho_1 g. \end{aligned} \tag{5.141}$$

Passo 4. Solução do sistema. Desta forma podemos descrever um sistema com variáveis V e W tomando as equações (5.135), (5.138) e (5.141). Além disso, sejam h e g tais

que $\rho_2\beta_1 h + \rho_1\beta_2 g = 0$, e $\rho_2 h - \rho_1 g = \sin(\mu x)$, logo o novo sistema fica

$$\begin{cases} -\lambda^2\rho_2\rho_1 V - \gamma_0 V_{xx} - \alpha\chi_1 W - (\rho_2\beta_1^2 + \rho_1\beta_2^2)\theta_x & = 0 \\ (-\lambda^2\rho_1\rho_2 + \alpha(\rho_2+\rho_1))W - \alpha_0 W_{xx} - \alpha_1 V_{xx} + \chi_1\theta_x & = \sin(\mu x) \\ i\lambda m\varsigma\theta - i\lambda m V_x - \frac{k}{(i\lambda\tau_0+1)}\theta_{xx} & = 0. \end{cases} \tag{5.142}$$

Tomando soluções da forma $V = A\sin(\mu x)$, $W = B\sin(\mu x)$ e dado (5.132) tomamos $q = \dfrac{kC\mu\sin(\mu x)}{(i\lambda\tau_0+1)}$, para substituir em (5.142) e obter

$$(-\lambda^2\rho_2\rho_1 A + \gamma_0 A\mu^2 - \alpha\chi_1 B + C\mu(\rho_2\beta_1^2 + \rho_1\beta_2^2))\sin(\mu x) = 0 \tag{5.143}$$

$$((-\lambda^2\rho_1\rho_2 + \alpha(\rho_2+\rho_1))B + \alpha_0\mu^2 B + \alpha_1 A\mu^2 - C\mu\chi_1)\sin(\mu x) = \sin(\mu x) \tag{5.144}$$

$$(i\lambda m\varsigma C - i\lambda m A\mu + \tfrac{k}{(i\lambda\tau_0+1)}C\mu^2)\cos(\mu x) = 0. \tag{5.145}$$

O sistema (5.143)-(5.145) é equivalente ao seguinte sistema

$$M\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com

$$M = \begin{pmatrix} P_1 & -\alpha\chi_1 & \mu(\rho_2\beta_1^2 + \rho_1\beta_2^2) \\ \alpha_1\mu^2 & P_2 & -\mu\chi_1 \\ -i\lambda m\mu & 0 & P_3 \end{pmatrix} \tag{5.146}$$

e

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &= -\lambda^2\rho_2\rho_1 + \gamma_0\mu^2, \\ P_2(\lambda) &= -\lambda^2\rho_1\rho_2 + \alpha(\rho_2+\rho_1) + \alpha_0\mu^2, \\ P_3(\lambda) &= i\lambda m\varsigma + \tfrac{k}{(i\lambda\tau_0+1)}\mu^2. \end{aligned}$$

Note-se que pelas definições das constantes ρ_1, ρ_2, e γ os polinômios P_1, P_2 são reais e que se queremos mostrar $||U||_{\mathcal{H}} \to \infty$ quando $|\lambda| \to \infty$, então de (5.25), é suficiente calcular a norma de $W = u - v = B\sin(\mu x)$, isto é, determinar o valor de B. Desta forma temos

$$B = \frac{P_1P_3 + i\lambda m\mu^2(\rho_2\beta_1^2 + \rho_1\beta_2^2)}{(P_1P_2 + \alpha_1\alpha\mu^2\chi_1)P_3 + i\lambda m\mu^2(P_2(\rho_2\beta_1^2 + \rho_1\beta_2^2) - \alpha\chi_1^2)}. \tag{5.147}$$

Do sistema (5.143)-(5.145) podemos concluir que a variável μ depende do valor de λ, além disso, dos polinômios P_1 e P_2 podemos ver que μ e λ são da mesma ordem. De fato, se $P_2 = c_0$ logo

$$\rho_1\rho_2\lambda^2 = \alpha(\rho_2+\rho_1) + \alpha_0\mu^2 - c_0. \tag{5.148}$$

Por outro lado, dado que queremos $|B| \to \infty$ quando $|\lambda| \to \infty$ podemos escolher c_0 tal que

$$P_2P_1 + \alpha_1\alpha\mu^2\chi_1 = 0, \tag{5.149}$$

desta forma B fica

$$B = \frac{P_1P_3 + i\lambda m\mu^2(\rho_2\beta_1^2+\rho_1\beta_2^2)}{i\lambda m\mu^2(c_0(\rho_2\beta_1^2+\rho_1\beta_2^2) - \alpha\chi_1^2)}. \tag{5.150}$$

Note que P_3 pode-se escrever como

$$P_3 = i\lambda m\varsigma + \frac{k}{(i\lambda\tau_0+1)}\mu^2 = i\lambda(m\varsigma - \frac{k\tau_0\mu^2}{1+\lambda^2\tau_0^2}) + \frac{k\mu^2}{1+\lambda^2\tau_0^2}.$$

Observe que a parte Real e Imaginária de B são

$$Re(B)=\frac{(-\lambda^2\rho_2\rho_1+\gamma_0\mu^2)(m\varsigma(1+\lambda^2\tau_0^2)-k\tau_0\mu^2)+m\mu^2(\rho_2\beta_1^2+\rho_1\beta_2^2)(1+\lambda^2\tau_0^2)}{m\mu^2(c_0(\rho_2\beta_1^2+\rho_1\beta_2^2)-\alpha\chi_1^2))(1+\lambda^2\tau_0^2)}=\frac{P(\lambda^4)}{P(\lambda^4)}$$

e

$$Im(B) = \frac{-k(-\lambda^2\rho_2\rho_1+\gamma_0\mu^2)}{(1+\lambda^2\tau_0^2)\lambda m(c_0(\rho_2\beta_1^2+\rho_1\beta_2^2)-\alpha\chi_1^2))} = \frac{P(\lambda^2)}{P(\lambda^3)},$$

onde P quer dizer polinômio, assim a parte real de B é um quociente de dois polinômios de grau 4 com variável λ e parte imaginaria de B é um quociente com numerador um polinômio de grau 2 e denominador um polinômio de grau 3 na variável λ. Desta forma e sem perda de generalidade tomando o comprimento do intervalo como $l = \pi$ concluimos

$$\begin{aligned} ||U||_{\mathcal{H}}^2 &\geq a_{11}||u_x||^2 + a_{22}||w_x||^2 \geq \min\{a_{11},a_{22}\}||u_x - w_x||^2 \\ &= c\mu^2|B|^2\int_0^\pi |\cos(\mu x)|^2dx = c\mu^2|B|^2[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\sin(\mu\pi)}{\mu\pi}] \end{aligned} \tag{5.151}$$

onde c constante. Dado (5.148), temos que

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \approx c\lambda^2 \to \infty \tag{5.152}$$

o que mostra a perda de estabilidade exponencial.

Referências

[1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces. 1975.* Academic Press, New York, 1975.

[2] Agmon, S. *Lectures on elliptic boundary value problems*, vol. 369. American Mathematical Soc., 2010.

[3] Alves, M., Rivera, J. M., Quintanilla, R. Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids. *International Journal of Solids and Structures 46*, 7 (2009), 1659–1666.

[4] Barbu, V. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces.* Editura Academiei Bucharest-Noordhoff, Leyden, 1976.

[5] Bedford, A., Stern, M. A multi-continuum theory for composite elastic materials. *Acta Mechanica 14*, 2-3 (1972), 85–102.

[6] Bedford, A., Stern, M. Towards a diffusing continuum theory of composite elastic materials. *Journal of Applied Mechanics 28*, 38 (1972), 8–14.

[7] Borichev, A., Tomilov, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen 347*, 2 (2010), 455–478.

[8] Bowen, R. M., Wiese, J. C. Diffusion in mixtures of elastic materials. *International Journal of Engineering Science 7*, 7 (1969), 689–722.

[9] Brezis, H. Analyse fonctionnelle.

[10] Cattaneo, C. Sulla conduzione del calore. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 3* (1948), 83–101.

[11] Chandrasekharaiah, D. Thermoelasticity with second sound: a review. *Applied Mechanics Reviews 39*, 3 (1986), 355–376.

[12] Dafermos, C. M. On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 20*, 5 (1968), 241–271.

[13] Dassios, G., Grillakis, M. Dissipation rates and partition of energy in thermoelasticity. *Archive for rational mechanics and analysis 87*, 1 (1984), 49–91.

[14] Eringen, A. C., Ingram, J. D. A continuum theory of chemically reacting media-i. *International Journal of Engineering Science 3*, 2 (1965), 197–212.

[15] Eringen, A. C., Ingram, J. D. A continuum theory of chemically reacting media-ii. *International Journal of Engineering Science 5*, 4 (1967), 289–322.

[16] Green, A. E., Naghdi, P. M. A dynamical theory of interacting continua. *International Journal of Engineering Science 3*, 2 (1965), 231–241.

[17] Green, A. E., Naghdi, P. M. A note on mixtures. *International Journal of Engineering Science 6*, 11 (1968), 631–635.

[18] Green, A. E., Naghdi, P. M. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (1991), vol. 432, The Royal Society, pp. 171–194.

[19] Hansen, S. W. Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 167*, 2 (1992), 429–442.

[20] Henry, D. B., Perissinitto, A., Lopes, O. On the essential spectrum of a semigroup of thermoelasticity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 21*, 1 (1993), 65–75.

[21] Irmscher, T., Racke, R. Sharp decay rates in parabolic and hyperbolic thermoelasticity. *IMA Journal of Applied Mathematics 71*, 3 (2006), 459–478.

[22] Kelly, P. D. A reacting continuum. *International Journal of Engineering Science 2*, 2 (1964), 129–153.

[23] Lax, P., Phillips, R. *Scattering Theory. 1967.* Academic Press, New York.

[24] Lebeau, G., Zuazua, E. Sur la décroissance non uniforme de l'énergie dans le système de la thermoélasticité linéaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics 324*, 4 (1997), 409–415.

[25] Lions, J.-L., Zuazua, E. 21. a generic uniqueness result for the stokes system and its control theoretical consequences. *partial differential equations and applications: Collected Papers in Honor of Carlo Pucci 177* (1996), 221.

[26] Liu, W. Partial exact controllability and exponential stability in higher-dimensional linear thermoelasticity. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 3* (1998), 23–48.

[27] Liu, W.-J., Zuazua, E. Uniform stabilization of the higher-dimensional system of thermoelasticity with a nonlinear boundary feedback. *Quarterly of Applied Mathematics 59*, 2 (2001), 269–314.

[28] Liu, Z., Zheng, S. Exponential stability of the semigroup associated with a thermoelastic system. *Quarterly of Applied Mathematics 51*, 3 (1993), 535–545.

[29] Muller, I. A thermodynamic theory of mixtures of fluids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 28*, 1 (1968), 1–39.

[30] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[31] Prüss, J. On the spectrum of c_0-semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society 284*, 2 (1984), 847–857.

[32] Quintanilla, R. Existence in thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of Thermal Stresses 25*, 2 (2002), 195–202.

[33] Quintanilla, R. Convergence and structural stability in thermoelasticity. *Applied Mathematics and Computation 135*, 2 (2003), 287–300.

[34] Quintanilla, R. Some remarks on growth and uniqueness in thermoelasticity. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2003*, 10 (2003), 617–623.

[35] Quintanilla, R., Racke, R. Stability for thermoelasticity of type iii. *Discrete Contin. Dynamical Systems B3* (2002), 383–400.

[36] Quintanilla, R., Straughan, B. Growth and uniqueness in thermoelasticity. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (2000), vol. 456, The Royal Society, pp. 1419–1429.

[37] Racke, R. Asymptotic behavior of solutions in linear 2-or 3-d thermoelasticity with second sound. *Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik*, 144 (2001).

[38] Racke, R. Thermoelasticity with second sound—exponential stability in linear and non-linear 1-d. *Mathematical Methods in the Applied Sciences 25*, 5 (2002), 409–441.

[39] Reissig, M., Wang, Y.-G. Cauchy problems for linear thermoelastic systems of type iii in one space variable. *Mathematical Methods in the Applied Sciences 28*, 11 (2005), 1359–1381.

[40] Rivera, J. E. M., Naso, M. G., Quintanilla, R. Decay of solutions for a mixture of thermoelastic one dimensional solids. *Computers and Mathematics with Applications 66* (2013), 41–55.

[41] Rivera, J. M. Energy decay rates in linear thermoelasticity. *Funkc. Ekvacioj 35*, 1 (1992), 19–30.

[42] Tarabek, M. A. On the existence of smooth solutions in one-dimensional nonlinear thermoelasticity with second sound. *Quarterly of Applied Mathematics 50*, 4 (1992), 727–742.

[43] Truesdell, C., Toupin, R. *The classical field theories*, vol. 3. Springer, 1960.

[44] Yang, Lin Wang, Y.-G., Wang, Y.-G. Well-posedness and decay estimates for cauchy problems of linear thermoelastic systems of type iii in 3-d. *Indiana University Mathematics Journal 55*, 4 (2006), 1333–1362.

[45] Zhang, X., Zuazua, E. Decay of solutions of the system of thermoelasticity of type iii. *Communications in Contemporary Mathematics 5*, 01 (2003), 25–83.

[46] Zuazua, E. Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback. *SIAM Control and Optimization 3* (1990), 466–477.