

Universidade Federal do Rio de Janeiro

SOBRE A BOA COLOCAÇÃO DO SISTEMA
SCHRÖDINGER-DEBYE

Raphael Antunes dos Santos

2016



SOBRE A BOA COLOCAÇÃO DO SISTEMA SCHRÖDINGER-DEBYE

Raphael Antunes dos Santos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Orientador: Xavier Carvajal Paredes

Rio de Janeiro

Janeiro de 2016

CIP - Catalogação na Publicação

231s Antunes dos Santos, Raphael
 Sobre a boa colocação do sistema Schrödinger
Debye / Raphael Antunes dos Santos. -- Rio de
Janeiro, 2016.
 75 f.

 Orientador: Xavier Carvajal Paredes.
 Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, 2016.

 1. sistema Schrödinger-Debye. 2. boa colocação
global. 3. estimativas à priori. 4. interpolação
não-linear. 5. má colocação. I. Carvajal Paredes,
Xavier, orient. II. Título.

SOBRE A BOA COLOCAÇÃO DO SISTEMA SCHRÖDINGER-DEBYE

Raphael Antunes dos Santos

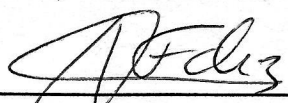
Orientador: Xavier Carvajal Paredes

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Aprovada por:



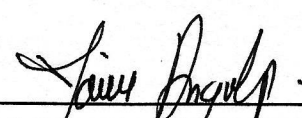
Presidente, Prof. Xavier Carvajal Paredes- IM/UFRJ



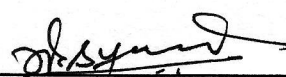
Prof. Adán Jose Corcho Fernandez IM/UFRJ



Prof. Huy Hoang Nguyen - IM/UFRJ



Prof. Jaime Angulo Pava - IME/USP



Prof. Mahendra Prasad Panthee - IMECC/UNICAMP

Rio de Janeiro
Janeiro de 2016

*Dedico este trabalho à todos os cabofrienses que deixam “o lugar do sol” para buscarem um
lugar ao sol!*

Agradecimentos

A Deus, pelo espetáculo da vida!

Ao professor Xavier Carvajal por aceitar ser o meu orientador e também por acreditar no meu trabalho. Muito obrigado Xavier!

Aos membros da banca pela participação na minha defesa de tese.

A Capes por financiar meus estudos durante o mestrado e o doutorado.

Aos familiares por suportar as tantas horas de minha ausência durante esta caminhada.

A minha esposa por ser quem é e sempre acreditar em mim, mesmo quando as minhas esperanças se apequenavam. Te amo muito, mais que ∞ !

Aos meus pais pelos valores que me passaram, pelo carinho e pelo amor! Amo vocês!

Aos meus irmãos, por proporcionarem alegrias durante minha infância! Amo vocês!

A minha sogra pelo apoio e pelos tantos peixes que me mandou: eles contribuíram para o meu cérebro! Uma “belheza” !

A tia Léa por sempre disponibilizar o seu côlo e também ter as palavras certas! Você é especial!

Aos amigos da rua Casimiro de Abreu pelas saudosas “peladas” no paralelepípedo! ☺

Aos amigos que fiz na pós graduação do IM/UFRJ, pelas “conversas fiadas”, por compartilharmos momentos incríveis e por terem me ensinado bastante sobre Matemática e tantas outras coisas! Obrigado a todos, sem exceção!

Ao grupo de estudos em equações dispersivas: Adán, Didier, Gastão, Leandro, Márcio e Xavier pelas discussões e valiosos seminários.

Ao Leandro "pelaxx palavraxx" de "incentivo".

A amizade de longa data com o Rômulo. Suas palavras, às vezes duras, me ajudaram a manter o foco! "No pain, no Gain!"

Ao grande amigo Glauter, pelo acolhimento em sua casa, em Niterói, proporcionando o início desta caminhada.

Aos funcionários da secretaria da pós-graduação, pelas muitas solicitações atendidas!

Aos funcionários da limpeza que sempre zelaram pelo asseio das dependências que usei! Vocês são importantes!

Ao Andrés por entrar em contato com o seu colega russo Казаков Алешей que obteve junto a Russian State Library, em Moscow, o raro artigo [25]. Thank you so much!

Ao professor Ademir Pazoto por estar sempre à disposição. Obrigado!

A professora Cecília Fernandez, por me ajudar a dar os primeiros passos rumo ao mestrado. Muito Obrigado!

Aos professores do ciclo básico da engenharia da UFRJ- Campus Macaé, por acomodarem meus horários e pela compreensão quando da minha ausência.

A cidade do Rio de Janeiro por me acolher tão bem e proporcionar grande mudança em minha vida!

A todos os meus professores de Matemática, por transmitirem a melhor Matemática possível! Muito obrigado, Luis Cláudio, Elisabeth Gomes, José Luis, Fátima Figueiredo, Marcos Carrerette, Ronald Ferreira, Adelino Pais, Manuel Vieira, Cláudio Manso, Roberto Póvoas, Pedro Paulo, Eliane Mendonça, Vitório Teixeira, Cecília Fernandez, Regina Moreth, Jorge Bria, Paulo Trales, Ana Kaleff, Carla Lopes, Xavier Carvajal, Luiza Amália, Antônio Roberto, Luciane Quoos, Vitor Araújo, Alexander Arbieto, Maria Fernanda, Wladimir Neves, Felipe Linares, Gustavo Perla, Hugo Sare, Ademir Pazoto, Milton Lopes, Didier Pilod e Adán Corcho.

“A persistência é o caminho do êxito”.
(Charles Chaplin)

RESUMO

SOBRE A BOA COLOCAÇÃO DO SISTEMA SCHRÖDINGER-DEBYE

Raphael Antunes dos Santos

Orientador: Prof. Xavier Carvajal Paredes

O presente trabalho se propõe a estudar a boa colocação do sistema Schrödinger-Debye

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = uv, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \mu\partial_t v + v = \lambda|u|^2, & \mu > 0, \quad \lambda = \pm 1, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x). \end{cases}$$

Em dimensões $n = 1$ e $n = 2$ estabelecemos estimativas *à priori* no contexto dos espaços de Sobolev do tipo $H^{k_1}(\mathbb{R}^n) \times H^{k_2}(\mathbb{R}^n)$, com k_1, k_2 inteiros. Combinando tais estimativas com o “Fourier restriction norm method”, desenvolvido em [6], estabelecemos a boa colocação global, considerando os dados iniciais $(u_0, v_0) \in H^{k_1}(\mathbb{R}^n) \times H^{k_2}(\mathbb{R}^n)$. Utilizando métodos de interpolação de operadores não-lineares, provamos resultados de boa colocação global quando $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)$, com $s, l \in \mathbb{R}$ sendo combinações convexas de índices de Sobolev (pertencentes a $\mathbb{Z}$). Em dimensão $n = 1$, provamos também a C^2 -*má colocação* do sistema quando os dados iniciais u_0 e v_0 pertencem a espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}) \times H^l(\mathbb{R})$, onde os índices (s, l) estão em algumas regiões complementares às regiões de boa colocação obtidas em [13].

Palavras-chave: sistema Schrödinger-Debye. boa colocação global. estimativas *à priori*. interpolação não-linear. má colocação.

ABSTRACT

ON WELL-POSEDNESS OF THE SCHRÖDINGER-DEBYE SYSTEM

Raphael Antunes dos Santos

Advisor: Prof. Xavier Carvajal Paredes

In this work we study the well-posedness of the Schrödinger-Debye system

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = uv, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \mu\partial_t v + v = \lambda|u|^2, & \mu > 0, \quad \lambda = \pm 1, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x). \end{cases}$$

In dimensions $n = 1$ and $n = 2$, in the context of Sobolev spaces of type $H^{k_1}(\mathbb{R}^n) \times H^{k_2}(\mathbb{R}^n)$, where k_1, k_2 are integers, we prove some *à priori* estimates. Combining these estimates with the “Fourier restriction norm method” developed in [6], we establish a global well-posedness results, considering the initial data $(u_0, v_0) \in H^{k_1}(\mathbb{R}^n) \times H^{k_2}(\mathbb{R}^n)$. Using interpolation of nonlinear operators, we prove some global well-posedness results when $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)$, with $s, l \in \mathbb{R}$ being convex combinations of Sobolev index (belonging to $\mathbb{Z}$). Also, in dimension $n = 1$ we prove *C^2 -ill-posedness* when the initial data (u_0, v_0) belong to Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}) \times H^l(\mathbb{R})$, where the index (s, l) are in some complementary regions to the regions of well-posedness obtained in [13].

Keywords: Schrödinger-Debye system. global well-posedness. *à priori* estimates. nonlinear interpolation. ill-posedness.

Sumário

	INTRODUÇÃO	11
1	PRELIMINARES	15
1.1	Resultados Elementares	15
1.2	Operadores não-lineares e interpolação de espaços de Banach	16
1.3	Espaços de Bourgain	21
1.4	Sobre a Boa Colocação em espaços de Bourgain	25
2	ESTIMATIVAS À <i>PRIORI</i> E SOLUÇÕES GLOBAIS	38
2.1	Estimativas à priori no caso 2D	38
2.2	Estimativas à priori no caso 1D	52
3	INTERPOLAÇÃO NÃO-LINEAR E SOLUÇÕES GLOBAIS	57
3.1	Boa colocação global para o sistema (S D) em dimensão $n = 2$	57
3.2	Boa colocação global para o sistema (S D) em dimensão $n = 1$	61
4	MÁ COLOCAÇÃO DO SISTEMA (S D) NO CASO 1D	63
4.1	C^2 -má colocação	63
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	72

INTRODUÇÃO

Consideremos o problema de valor inicial (PVI) para o sistema Schrödinger-Debye

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = uv, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \mu\partial_t v + v = \lambda|u|^2, & \mu > 0, & \lambda = \pm 1, \\ u(0, x) = u_0(x), & v(0, x) = v_0(x), \end{cases} \quad (\text{S D})$$

onde $u = u(t, x)$ e $v = v(t, x)$ são funções, complexa e real, respectivamente, definidas em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ e Δ é o operador Laplaciano na variável espacial.

Este sistema modela a propagação de uma onda eletromagnética em um meio não-resonante onde o tempo de resposta do material é relevante. Em [26] temos uma discussão mais ampla sobre este modelo.

Pela fórmula de Duhamel, temos as seguintes expressões integrais associadas ao sistema (S D):

$$u(t) = e^{it\Delta/2}u_0 + i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2}u(t')v(t')dt' \quad (1)$$

e

$$v(t) = e^{-t/\mu}v_0 + \frac{\lambda}{\mu} \int_0^t e^{-(t-t')/\mu}|u(t')|^2 dt', \quad (2)$$

onde $\{e^{it\Delta/2}\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o grupo unitário em $H^s(\mathbb{R}^n)$, associado a equação linear de Schrödinger, dado por $e^{it\Delta/2}f := (e^{-it|\cdot|^2/2}\hat{f}(\cdot))^\vee$.

Se a solução (u, v) deste sistema for suficientemente regular, então a massa da solução u é conservada em $[0, T]$, i.e.,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (3)$$

Não são conhecidas outras quantidades conservadas, porém o sistema (S D) possui a seguinte estrutura pseudo-Hamiltoniana

$$\frac{d}{dt}E(t) = 2\lambda\mu \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t v|^2 dx, \quad (4)$$

onde

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + 2v|u|^2 - \lambda v^2) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + \lambda|u|^4 - \lambda\mu^2|\partial_t v|^2) dx. \quad (5)$$

Neste trabalho, buscamos soluções globais do sistema (S D). Pela natureza das identidades (3) e (4), é razoável considerar que os dados iniciais (u_0, v_0) pertençam a um tipo específico de espaço: os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)$. Vamos então definir precisamente o conceito de boa colocação para o PVI (S D).

Dizemos que o PVI (S D) é *localmente bem posto* em $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)$ se valem

Existência e Unicidade. Para qualquer dado inicial $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)$, existem um tempo $T > 0$ e um espaço de Banach X_T para os quais existe uma única solução $(u, v) \in X_T$ que satisfaz as equações integrais (1) e (2) em $[0, T]$.

Persistência. O espaço $X_T \subset C^0([0, T] : H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n))$.

Dependência Contínua. A aplicação dado-solução

$$\begin{aligned} A : V(u_0, v_0) &\longrightarrow C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)) \\ (\phi, \psi) &\mapsto (u, v) \end{aligned} \quad (6)$$

é contínua, onde $V(u_0, v_0) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)$ é uma vizinhança de (u_0, v_0) .

Se $T > 0$ puder ser escolhido arbitrariamente grande, dizemos que o PVI é *globalmente bem posto*. Além disso, caso a unicidade ocorra em $C^0([0, T] : H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n))$, dizemos que a boa colocação é *incondicional*.

A boa colocação do sistema (S D) foi estudada em diversos trabalhos. Em 1998 e 2000, Bidegaray (ver [3], [4]) obteve boa colocação local em $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n)$, para $s > n/2$, $s = 0$ e $s = 1$, em dimensões $n = 1, 2, 3$. Em 2004 Corcho e Linares, em [12], obtiveram um melhor resultado de boa colocação local em dimensão $n = 1$.

Em 2009, ainda em dimensão $n = 1$, Corcho e Matheus (ver [13]) obtiveram um resultado mais refinado de boa colocação, usando o "Fourier Restriction norm Method" e seguindo as ideias de Bourgain (ver [6] e [17]) e Kenig, Ponce e Vega (ver [20]). Mais precisamente obtiveram o seguinte resultado

Teorema 1. Para todo $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^l(\mathbb{R})$, onde

$$|s| - 1/2 \leq l < \min\{s + 1/2, 2s + 1/2\} \quad e \quad s > -1/4, \quad (7)$$

existe $T = T(\|u_0\|_{H^s}, \|v_0\|_{H^l}) > 0$ e uma única solução $(u(t), v(t))$ do PVI (S D) no intervalo de tempo $[0, T]$ tal que

$$(u, v) \in C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}) \times H^l(\mathbb{R})).$$

Além disso, a aplicação dado solução $(u_0, v_0) \mapsto (u(t), v(t))$ é localmente Lipschitziana.

Também, usando o I-método, desenvolvido por Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka e Tao (ver [9] e [11]), obtiveram boa colocação global em $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, com $-3/14 < s \leq 0$.

Em 2013, Corcho, Oliveira e Silva (ver [14]), obtiveram o seguinte resultado de boa colocação local em dimensão $n = 2, 3$

Teorema 2. Sejam $n = 2, 3$ e $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)$, onde

$$\max\{0, s - 1\} \leq l \leq \min\{2s, s + 1\} \quad e \quad s \geq 0.$$

Então existe $T = T(\|u_0\|_{H^s}, \|v_0\|_{H^l}) > 0$ e uma única solução $(u(t), v(t))$ do PVI (S D) no intervalo de tempo $[0, T]$ tal que

$$(u, v) \in C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)).$$

Mais ainda, a aplicação dado solução $(u_0, v_0) \mapsto (u, v)$ é localmente Lipschitziana.

Ainda neste trabalho, provaram a boa colocação global em $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$, e também em $H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ e em $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$.

Finalmente, Carvajal e Gamboa (ver [8]) provaram a boa colocação global do PVI (S D) em $H^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2)$, usando estimativas de Strichartz e um lema do tipo Gronwall. Também obtiveram solução global em $H^s(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ com $2/3 < s \leq 1$, com as restrições $2c_0\|u_0\|_{L^2} < 1$ e $\lambda = -1$, usando uma técnica de Bourgain que consiste em escrever o dado inicial u_0 como a soma de sua frequência alta com a sua frequência baixa (ver [7], [16] ou [28]). Em nosso trabalho, provamos os seguintes resultados sobre o sistema (S D):

Teorema 3. O P.V.I. (S D) é globalmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}^2) \times H^s(\mathbb{R}^2)$, para $s \geq 1$, e em $H^s(\mathbb{R}^2) \times H^k(\mathbb{R}^2)$, onde $s \in [k, k+1]$, com $k \geq 1$ um inteiro. (ver Gráfico 1)

Teorema 4. O P.V.I. (S D) é globalmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$. (ver Gráfico 2)

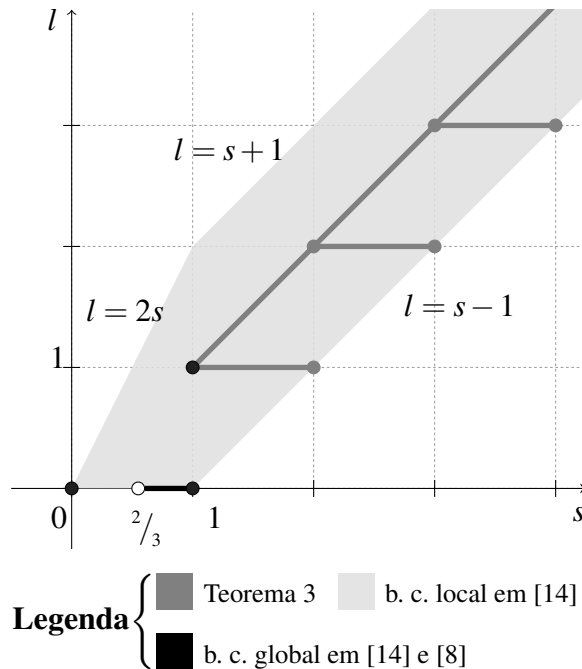


Gráfico 1: Teorema 3.

Para provarmos estes teoremas, estabelecemos inicialmente estimativas *à priori* em espaços de Sobolev $H^{k_1} \times H^{k_2}$ para certos k_1 e k_2 inteiros. Com estas desigualdades, lembramos

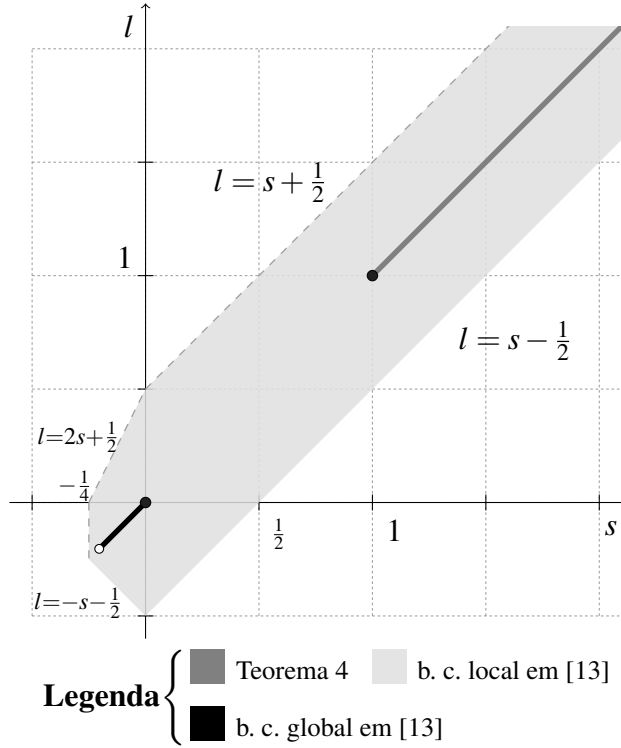


Gráfico 2: Teorema 4.

do método de interpolação não linear desenvolvido em [5] e [30] para obtermos novas estimativas *à priori* em espaços de Sobolev $H^s \times H^l$, onde os índices s e l são combinações convexas dos índices $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Com estas estimativas podemos iterar o argumento utilizado na prova dos Teoremas 1 e 2 para obtermos os nossos resultados globais. Observamos ainda que a estimativa *à priori* que obtivemos em $H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ (ver o Lema 2.2 para $k = 0$) é ligeiramente melhor do que a obtida em [14], Thm. 3.1. De fato, em [14] o intervalo de tempo $[0, T]$ onde se tem tal estimativa é tal que $T \sim (1 + \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)})^{-1}$ e isto dificulta a argumentação na globalização do resultado local. Também, [8] apresenta uma estimativa *à priori* em $H^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2)$ para solução $(u(t), v(t))$, $t \in [0, T]$, mas o controle da norma $\|\nabla v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ depende do controle da norma de u e v em $L_T^\infty L_x^2$. No Lema 2.6 apresentamos uma estimativa mais eficiente para argumentarmos com o teorema local e obtermos a boa colocação global.

Ainda em dimensão $n = 1$ provamos (ver os Teoremas 4.1 e 4.2) que se o sistema (S D) for localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}) \times H^l(\mathbb{R})$, então a aplicação dado-solução (6) não pode ser de classe C^2 na origem quando (s, l) satisfaz

$$l < -1/2 \text{ ou } s < -1/4 \text{ ou } l - 2s > 1/2 \text{ ou } |l - s| > 2.$$

Consequentemente, lembrando da teoria abstrata de boa colocação local desenvolvida em [1], concluímos que não podemos obter a boa colocação do P.V.I. (S D) em tais regiões através do método utilizado nas provas dos Teoremas 1 e 2.

1 PRELIMINARES

Neste Capítulo recordamos alguns resultados que serão úteis ao longo deste trabalho.

Na Seção 1.1 enunciamos um lema do tipo Gronwall, e alguns resultados elementares utilizados nos capítulos seguintes.

Na Seção 1.2 lembramos dos resultados básicos de interpolação em espaços de Banach e interpolação de operadores não-lineares. Algumas referências clássicas são [2],[5], [27], [30] e [31]. Seguimos de perto [5], de onde os principais resultados sobre interpolação de operadores não-lineares usados neste trabalho foram retirados.

Na Seção 1.3 definimos os Espaços de Bourgain (ver [6]). Enunciamos as principais propriedades sobre estes espaços, cujas demonstrações estão em diversos trabalhos (e.g. [?], [23] ou [29]).

Na Seção 1.4 fazemos alguns comentários sobre o método utilizado para obtermos a boa colocação local, inspirados em [19]. Provamos alguns resultados sobre a boa colocação global, importantes na sequência do nosso trabalho.

1.1 Resultados Elementares

Lema 1.1 (Lema do Tipo Gronwall). *Consideremos um intervalo de números reais $I = [c, d]$. Seja $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e não negativa tal que*

$$u(t) \leq a(t) + b(t) \int_c^t k(t,s)u(s)ds, \quad t \in I, \quad (1.1)$$

onde $a(t), b(t), k(s,t)$ são funções não negativas e contínuas para $c \leq s \leq t \leq d$. Então

$$u(t) \leq A(t) \exp\left(B(t) \int_c^t K(t,s)ds\right), \quad t \in I, \quad (1.2)$$

onde $A(t) = \sup_{c \leq \tau \leq t} a(\tau)$, $B(t) = \sup_{c \leq \tau \leq t} b(\tau)$ e $K(t,s) = \sup_{s \leq \tau \leq t} k(\tau,s)$.

Demonstração. Ver o Teorema 2, página 359 em [24] ou mesmo a referência original [25]. $\square$

Lema 1.2. *Sejam $A, B, R \subset \mathbb{R}^n$ tais que $R - B \subset A$. Então*

$$\|\chi_R\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\chi_B\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\chi_A * \chi_B\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

onde χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω .

Demonstração. Ver o Lema 3.1, página 37 de [15]. $\square$

Lema 1.3. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $|a| > b > 0$. Então*

$$|\xi_1 - a| < b \Leftrightarrow \langle a - b \rangle \leq \langle \xi_1 \rangle \leq \langle a + b \rangle \Rightarrow |a - b| \leq \langle \xi_1 \rangle \leq \langle a \rangle \langle b \rangle.$$

Também, se $c, d \in \mathbb{R}$, com $d > 0$, são tais que $|a + c| > b + d$ então

$$|\xi_1 - a| < b \text{ e } |\xi_2 - c| < d \Leftrightarrow \langle (a + c) - (b + d) \rangle \leq \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \leq \langle (a + c) + (b + d) \rangle.$$

Demonstração. Imediata, lembrando que $\langle \cdot \rangle = 1 + |\cdot|$. □

1.2 Operadores não-lineares e interpolação de espaços de Banach

Relembramos o *K-método de interpolação* (ver [2] e [31]). Sejam B_0 e B_1 espaços de Banach tais que $B_1 \hookrightarrow B_0$ (i.e. $B_1 \subset B_0$ com a aplicação de inclusão contínua). Seja $f \in B_0$ e defina

$$K(f, \varepsilon, B_0, B_1) = \inf_{g \in B_1} \left\{ \|f - g\|_{B_0} + \varepsilon \|g\|_{B_1} \right\}, \quad (1.3)$$

onde $\varepsilon > 0$ e $\|\cdot\|_{B_i}$ é a norma em B_i , $i = 0, 1$. Escreveremos $K(f, \varepsilon)$ em lugar de $K(f, \varepsilon, B_0, B_1)$, quando não houver perigo de confusão. Agora, para $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p \leq +\infty$ defina

$$B_{\theta, p} = [B_0, B_1]_{\theta, p} = \left\{ f \in B_0 : (\cdot)^{-\theta} K(f, \cdot) \in L_*^p(\mathbb{R}^+) \right\}, \quad (1.4)$$

onde $L_*^p(\mathbb{R}^+)$ é o espaço de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^+)$ com respeito à medida $d\varepsilon/\varepsilon$ em $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. O espaço $B_{\theta, p}$ munido da norma

$$\|f\|_{B_{\theta, p}} := \|\varepsilon^{-\theta} K(f, \varepsilon)\|_{L_*^p} \quad (1.5)$$

é um espaço de Banach (ver [2], Teorema 3.4.2, pag. 47). Os espaços que constituem esta família são ditos *espaços de interpolação real*.

Dados os pares (θ_1, p_1) e (θ_2, p_2) tais que $0 < \theta_i < 1$ e $1 \leq p_i \leq +\infty$, $i = 1, 2$, escreveremos

$$(\theta_1, p_1) < (\theta_2, p_2) \quad (1.6)$$

quando quisermos dizer que $\theta_1 < \theta_2$ ou $\theta_1 = \theta_2$ e $p_1 > p_2$.

Com as definições e notações anteriores temos o seguinte

Teorema 1.4. *Se $(\theta_1, p_1) < (\theta_2, p_2)$, então*

$$B_1 \hookrightarrow B_{\theta_2, p_2} \hookrightarrow B_{\theta_1, p_1} \hookrightarrow B_0. \quad (1.7)$$

Mais ainda, se $1 \leq p_2 < +\infty$, a primeira imersão é densa.

Demonstração. Ver [2], Teoremas 3.4.1 e 3.4.2 (pág. 46 e 47) para as imersões e o resultado de densidade, respectivamente. □

Para os nossos propósitos, será útil a seguinte

Proposição 1.5. *Sejam A_1, B_1, A_2 e B_2 espaços de Banach tais que $B_i \hookrightarrow A_i$, $i = 1, 2$. Então se $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p \leq +\infty$,*

$$[A_1 \times A_2, B_1 \times B_2]_{\theta, p} = [A_1, B_1]_{\theta, p} \times [A_2, B_2]_{\theta, p}. \quad (1.8)$$

Demonstração. Basta notar que se $F = (f_1, f_2) \in A_1 \times A_2$

$$\begin{aligned} K(F, \varepsilon) &= \inf_{G=(g_1, g_2) \in B_1 \times B_2} \left\{ \|F - G\|_{A_1 \times A_2} + \varepsilon \|G\|_{B_1 \times B_2} \right\} \\ &= \inf_{g_1 \in B_1} \left\{ \|f_1 - g_1\|_{A_1} + \varepsilon \|g_1\|_{B_1} \right\} + \inf_{g_2 \in B_2} \left\{ \|f_2 - g_2\|_{A_2} + \varepsilon \|g_2\|_{B_2} \right\} \\ &= K(f_1, \varepsilon) + K(f_2, \varepsilon) \\ &\geq K(f_i, \varepsilon), \end{aligned}$$

$i = 1, 2$. Assim, se $F \in [A_1 \times A_2, B_1 \times B_2]_{\theta, p}$, então $F = (f_1, f_2) \in A_1 \times A_2$ e a desigualdade acima garante que cada $f_i \in [A_i, B_i]_{\theta, p}$, $i = 1, 2$. Por outro lado, a terceira igualdade garante a inclusão contrária. $\square$

A seguir, provaremos dois resultados úteis para concluirmos um terceiro e importante resultado sobre interpolação de operadores não-lineares que será utilizado neste trabalho. Estes resultados se encontram em [5] (Proposições 1 e 2 e Teorema 1). Faremos as provas com maiores detalhes. A primeira proposição está demonstrada em [22], Lemma 3.1.

Proposição 1.6. *Sejam $f \in B_0$ (com $B_1 \hookrightarrow B_0$), $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Suponha que para cada $\varepsilon > 0$ existam $g_i(\varepsilon) \in B_i$ tais que $f = g_0(\varepsilon) + g_1(\varepsilon)$ com $\|g_i(\varepsilon)\|_{B_i} \leq G_i(\varepsilon)$ e tais que*

$$M_i := \|\varepsilon^{i-\theta} G_i(\varepsilon)\|_{L_*^p} < \infty \quad (1.9)$$

para $i = 0, 1$. Então $f \in B_{\theta, p}$ e

$$\|f\|_{B_{\theta, p}} \leq 2M_0^{1-\theta} M_1^\theta. \quad (1.10)$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned} K(f, \varepsilon) &= \inf_{g \in B_1} \left\{ \|f - g\|_{B_0} + \varepsilon \|g\|_{B_1} \right\} \\ &\leq \|f - g_1(\varepsilon)\|_{B_0} + \varepsilon \|g_1(\varepsilon)\|_{B_1} \\ &= \|g_0(\varepsilon)\|_{B_0} + \varepsilon \|g_1(\varepsilon)\|_{B_1}, \end{aligned}$$

e então

$$\|f\|_{B_{\theta, p}} \leq 2 \max \left\{ \|\varepsilon^{-\theta} G_0(\varepsilon)\|_{L_*^p}, \|\varepsilon^{1-\theta} G_1(\varepsilon)\|_{L_*^p} \right\}. \quad (1.11)$$

Agora, para $\lambda > 0$, como $\lambda \varepsilon > 0$, por hipótese, existem $g_i^\lambda(\varepsilon) = g_i(\lambda \varepsilon)$, $i = 0, 1$, tais que $f = g_0^\lambda(\varepsilon) + g_1^\lambda(\varepsilon)$, onde $\|g_i^\lambda(\varepsilon)\|_{B_i} \leq G_i(\lambda \varepsilon)$. Notando que $\|\varepsilon^{i-\theta} G_i(\lambda \varepsilon)\|_{L_*^p} = \lambda^{\theta-i} \|\varepsilon^{i-\theta} G_i(\varepsilon)\|_{L_*^p}$ e

raciocinando como antes

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{\theta,p}} &\leq 2 \max \left\{ \|\epsilon^{-\theta} G_0(\lambda\epsilon)\|_{L_*^p}, \|\epsilon^{1-\theta} G_1(\lambda\epsilon)\|_{L_*^p} \right\} \\ &= 2 \max \left\{ \lambda^\theta \|\epsilon^{-\theta} G_0(\epsilon)\|_{L_*^p}, \lambda^{\theta-1} \|\epsilon^{1-\theta} G_1(\epsilon)\|_{L_*^p} \right\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Escolhendo λ tal que

$$\lambda^\theta \|\epsilon^{-\theta} G_0(\epsilon)\|_{L_*^p} = \lambda^{\theta-1} \|\epsilon^{1-\theta} G_1(\epsilon)\|_{L_*^p}$$

obtemos o desejado. $\square$

Proposição 1.7. *Sejam $f \in B_0$ e $f_\epsilon \in B_1$ satisfazendo a desigualdade*

$$\|f - f_\epsilon\|_{B_0} + \epsilon \|f_\epsilon\|_{B_1} \leq 2K(f, \epsilon) \quad (1.13)$$

para algum $\epsilon > 0$. Então,

$$\|f_\epsilon\|_{B_0} \leq 3\|f\|_{B_0}. \quad (1.14)$$

Mais ainda, se $f \in B_{\theta,p}$ para algum $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p \leq \infty$, então

$$\|f_\epsilon\|_{B_{\theta,p}} \leq 3\|f\|_{B_{\theta,p}}. \quad (1.15)$$

Demonstração. Vejamos primeiro (1.14). Com efeito, tomando $g = 0$ em (1.3), temos que $K(\epsilon, f) \leq \|f\|_{B_0}$ e por (1.13) segue que

$$\|f - f_\epsilon\|_{B_0} \leq 2K(f, \epsilon) \leq 2\|f\|_{B_0}. \quad (1.16)$$

Escrevendo $f_\epsilon = f_\epsilon - f + f$, usando a desigualdade triangular da norma $\|\cdot\|_{B_0}$ e (1.16), obtemos a primeira desigualdade. Para provarmos a outra igualdade, fixemos $\delta > 0$. Escolhendo $g = f_\epsilon$ na definição (1.3) de $K(f, \epsilon)$ e usando (1.13)

$$K(f_\epsilon, \delta) \leq \delta \|f_\epsilon\|_{B_1} \leq 2 \frac{\delta}{\epsilon} K(f, \epsilon). \quad (1.17)$$

Agora, para cada $f \in B_0$, a função $\epsilon \mapsto \epsilon^{-1} K(f, \epsilon)$ é não-decrescente. Portanto,

$$K(f_\epsilon, \delta) \leq 2K(f, \delta), \quad \text{desde que } \delta \leq \epsilon. \quad (1.18)$$

Por outro lado, para toda $g \in B_1$,

$$\begin{aligned} K(f_\epsilon, \delta) &\leq \|f_\epsilon - g\|_{B_0} + \delta \|g\|_{B_1} \\ &\leq \|f_\epsilon - f\|_{B_0} + \|f - g\|_{B_0} + \delta \|g\|_{B_1}. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre $g \in B_1$, segue que

$$\begin{aligned} K(f_\epsilon, \delta) &\leq \|f_\epsilon - f\|_{B_0} + K(f, \delta) \\ &\leq 2K(f, \epsilon) + K(f, \delta). \end{aligned}$$

Mas, para cada $f \in B_0$ fixada, $\varepsilon \mapsto K(f, \varepsilon)$ é não-decrescente, e então

$$K(f_\varepsilon, \delta) \leq 3K(f, \delta), \quad \text{desde que } \delta \geq \varepsilon. \quad (1.19)$$

Segue de (1.18) e (1.19) que para todo $\delta > 0$, $\delta^{-\theta} K(f_\varepsilon, \delta) \leq 3\delta^{-\theta} K(f, \delta)$. Tomando a norma $\|\cdot\|_{L_*^p}$ segue o desejado. $\square$

A seguir estabelecemos um resultado sobre limitação de aplicações em espaços intermediários.

Teorema 1.8. *Consideremos B_0^j e B_1^j espaços de Banach tais que $B_1^j \hookrightarrow B_0^j$, $j = 1, 2$. Sejam λ e q tais que $0 < \lambda < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$ e A uma aplicação satisfazendo*

(i) $A : B_{\lambda,q}^1 \longrightarrow B_0^2$ e para $f, g \in B_{\lambda,q}^1$

$$\|Af - Ag\|_{B_0^2} \leq c_0 \left(\|f\|_{B_{\lambda,q}^1} + \|g\|_{B_{\lambda,q}^1} \right) \|f - g\|_{B_0^1}, \quad (1.20)$$

(ii) $A : B_1^1 \longrightarrow B_1^2$ e para $h \in B_1^1$

$$\|Ah\|_{B_1^2} \leq c_1 \left(\|h\|_{B_{\lambda,q}^1} \right) \|h\|_{B_1^1}, \quad (1.21)$$

onde $c_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 0, 1$, são funções contínuas e não-decrescentes e $B_{\lambda,q}^j = [B_0^j, B_1^j]_{\lambda,q}$, $j = 1, 2$. Então, se $(\theta, p) \geq (\lambda, q)$, temos que $A : B_{\theta,p}^1 \rightarrow B_{\theta,p}^2$ e para $f \in B_{\theta,p}^1$

$$\|Af\|_{B_{\theta,p}^2} \leq c \left(\|f\|_{B_{\lambda,q}^1} \right) \|f\|_{B_{\theta,p}^1}, \quad (1.22)$$

onde $c(\rho) = 4[c_0(4\rho)]^{1-\theta}[c_1(3\rho)]^\theta$, $\rho > 0$.

Observação 1.9. A demonstração deste Teorema se baseia na desigualdade (1.15) e por isto as hipóteses (i) e (ii) foram enunciadas com o espaço interpolado $B_{\lambda,q}^1$. O Teorema continua valendo se trocarmos $B_{\lambda,q}^1$ por B_0^1 nas hipóteses e na tese, e a prova é essencialmente a mesma, utilizando a desigualdade (1.14).

Demonstração. Seja $f \in B_{\theta,p}^1 \subset B_0^1$. Para cada $\varepsilon > 0$, pela definição de ínfimo, escolha $f_\varepsilon \in B_1^1 \subset B_{\lambda,q}^1$ tal que

$$\|f - f_\varepsilon\|_{B_0^1} + \varepsilon \|f_\varepsilon\|_{B_1^1} \leq 2K(f, \varepsilon). \quad (1.23)$$

Como $(\theta, p) \geq (\lambda, q)$, então $f \in B_{\lambda,q}^1$ e decorre da Proposição 1.7, desigualdade (1.15) que

$$\|f_\varepsilon\|_{B_{\lambda,q}^1} \leq 3\|f\|_{B_{\lambda,q}^1}. \quad (1.24)$$

Combinando isto com as hipóteses (i) e (ii) temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \|Af - Af_\varepsilon\|_{B_0^2} &\leq c_0(\|f\|_{B_{\lambda,q}^1} + \|f_\varepsilon\|_{B_{\lambda,q}^1})\|f - f_\varepsilon\|_{B_0^1} \\ &\leq 2c_0(4\|f\|_{B_{\lambda,q}^1})K(f, \varepsilon) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|Af_\varepsilon\|_{B_1^2} &\leq c_1(\|f_\varepsilon\|_{B_{\lambda,q}^1})\|f_\varepsilon\|_{B_1^1} \\ &\leq 2c_1(3\|f\|_{B_{\lambda,q}^1})\varepsilon^{-1}K(f, \varepsilon). \end{aligned}$$

Escrevendo $Af = (Af - Af_\varepsilon) + Af_\varepsilon$, pondo $g_0(\varepsilon) = (Af - Af_\varepsilon)$ e $g_1(\varepsilon) = Af_\varepsilon$, $G_i(\varepsilon) = 2c_i((4 - i)\|f\|_{B_{\lambda,q}^1})\varepsilon^{-i}K(f, \varepsilon)$, $i = 0, 1$, neste caso temos que para $i = 0, 1$

$$M_i := \|\varepsilon^{i-\theta}G_i(\varepsilon)\|_{L_*^p} = 2c_i((4 - i)\|f\|_{B_{\lambda,q}^1})\|f\|_{B_{\theta,p}^1},$$

e uma aplicação direta da Proposição 1.6 estabelece o resultado. $\square$

No presente trabalho, mostraremos que o problema de Cauchy para o sistema Schrödinger-Debye é globalmente bem-posto. Para aplicarmos os resultados de interpolação com sucesso, precisaremos estudar a interpolação de espaços de Banach da forma $C^0([0, T] : B)$, espaços de funções $f : [0, T] \rightarrow B$ contínuas, onde B é um espaço de Banach e $T > 0$, munido da norma

$$\|f\|_{C^0([0, T] : B)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_B.$$

Por simplicidade escreveremos $C(B)$ quando não houver perigo de confusão. Temos então a seguinte

Proposição 1.10. *Sejam B_0 e B_1 espaços de Banach tais que $B_1 \hookrightarrow B_0$ e sejam também θ e p tais que $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então para todo $T > 0$ fixado,*

$$[C(B_0), C(B_1)]_{\theta,p} \hookrightarrow C([B_0, B_1]_{\theta,p}). \quad (1.25)$$

Demonstração. Dada $f \in C(B_0)$ e $\varepsilon > 0$, seja

$$K^c(f, \varepsilon) := \inf_{g \in C(B_1)} \left\{ \|f - g\|_{C(B_0)} + \varepsilon \|g\|_{C(B_1)} \right\} \quad (1.26)$$

a função de interpolação entre $C(B_0)$ e $C(B_1)$. Denotaremos, como antes, $K(f, \varepsilon)$ a função de interpolação entre B_0 e B_1 . Para $f \in C(B_0)$ temos que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} K(f(t), \varepsilon) &= \sup_{0 \leq t \leq T} \inf_{h \in B_1} \left\{ \|f(t) - h\|_{B_0} + \varepsilon \|h\|_{B_1} \right\} \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \inf_{g \in C(B_1)} \left\{ \|f(t) - g(t)\|_{B_0} + \varepsilon \|g(t)\|_{B_1} \right\} \\ &\leq \inf_{g \in C(B_1)} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \|f(t) - g(t)\|_{B_0} + \varepsilon \|g(t)\|_{B_1} \right\} \\ &\leq K^c(f, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.27)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Portanto,

$$\|f\|_{[C(B_0), C(B_1)]_{\theta, p}} \geq \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_{[B_0, B_1]_{\theta, p}} = \|f\|_{L^\infty([B_0, B_1]_{\theta, p})},$$

ou seja, $[C(B_0), C(B_1)]_{\theta, p} \hookrightarrow L^\infty([B_0, B_1]_{\theta, p})$. Pelo Teorema 1.4 temos que $C(B_1)$ é um subespaço denso de $[C(B_0), C(B_1)]_{\theta, p}$. Claramente $Z = C([B_0, B_1]_{\theta, p}) \cap [C(B_0), C(B_1)]_{\theta, p}$ é também um subespaço denso do espaço $[C(B_0), C(B_1)]_{\theta, p}$, pois $C(B_1) \subset C([B_0, B_1]_{\theta, p})$. Deste modo, dada $f \in [C(B_0), C(B_1)]_{\theta, p}$, existe uma sequência $(f_n) \subset Z$ tal que $f_n \rightarrow f$ na topologia de $L^\infty([B_0, B_1]_{\theta, p})$. Mas como f_n pertence ao subespaço $C([B_0, B_1]_{\theta, p})$, fechado na topologia de $L^\infty([B_0, B_1]_{\theta, p})$, então $f \in C([B_0, B_1]_{\theta, p})$, e o resultado segue. $\square$

Terminamos esta seção enunciando um resultado clássico na teoria de interpolação de espaços de Sobolev. A demonstração de um resultado mais geral do que o apresentado aqui pode ser visto em [2], Teorema 6.2.4, item (10), pág. 142.

Teorema 1.11. *Se $s_1 \neq s_2$ e $0 < \theta < 1$, então*

$$[H^{s_1}(\mathbb{R}^n), H^{s_2}(\mathbb{R}^n)]_{\theta, 2} = H^s(\mathbb{R}^n), \quad \text{onde } s = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2. \quad (1.28)$$

$\square$

1.3 Espaços de Bourgain

Consideremos o seguinte P.V.I.

$$\begin{cases} \partial_t u - i\phi(D)u = N(u), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.29)$$

onde $\phi(D)f := \{\phi(\cdot)\hat{f}(\cdot)\}^\vee$ com $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Em geral, $\phi(D)$ é um operador diferencial, com $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sendo um polinômio e $D = -i\nabla = -i(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, por exemplo $\phi(D)f = \Delta f = |Df|^2$, com $\phi(\xi) = |\xi|^2$. Também, em geral, N é uma função não linear em u e em suas derivadas. Temos que $\phi(D)$ é auto-adjunto e portanto $\left\{e^{it\phi(D)}\right\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o grupo unitário em $H^s(\mathbb{R}^n)$ associado a equação (1.29), tal que $e^{it\phi(D)}u_0 := \{e^{it\phi(\cdot)}\hat{u}_0(\cdot)\}^\vee$ é solução da equação homogênea associada.

Dados $s, b \in \mathbb{R}$, o espaço de Bourgain $X_\phi^{s, b}(\mathbb{R}^{n+1})$ é definido como sendo o completamento do espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ com respeito à norma

$$\|u\|_{X_\phi^{s, b}} := \left\| \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \phi(\xi) \rangle^b \widehat{u}(\tau, \xi) \right\|_{L_{\tau, \xi}^2}, \quad (1.30)$$

onde a transformada em u é no espaço-tempo. Usando as propriedades da transformada de Fourier e uma mudança de variáveis temos que

$$\|u\|_{X_\phi^{s, b}} = \|e^{-it\phi(D)}u\|_{H_x^s H_t^b} \quad (1.31)$$

e então $X_\phi^{s,b} \hookrightarrow X_\phi^{s',b'}$ sempre que $s \geq s'$ e $b \geq b'$.

A seguir listamos alguns resultados sobre este espaço. Escreveremos por comodidade $X_\phi^{s,b}$ em lugar de $X_\phi^{s,b}(\mathbb{R}^{n+1})$, sempre que não houver perigo de confusão.

Proposição 1.12. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $b > 1/2$ e $Y \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^{n+1})$ um espaço de Banach de funções com crescimento polinomial no infinito, tais que*

$$\|e^{it\tau_0} e^{it\phi(D)} f\|_Y \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.32)$$

para todos $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $\tau_0 \in \mathbb{R}$. Então, temos a seguinte imersão

$$\|u\|_Y \lesssim_b \|u\|_{X_\phi^{s,b}}. \quad (1.33)$$

Demonstração. É suficiente provar a desigualdade para o caso em que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. De fato, uma vez provado isto, basta usar um argumento de densidade: dada $u \in X_\phi^{s,b}$, existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. Temos então que $u_n \rightarrow u$ em $S'(\mathbb{R}^{n+1})$ e usando (1.33) com $u_n - u_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ no lugar de u , vemos que (u_n) é uma sequência de Cauchy em Y , e portanto converge para um elemento $y \in Y$. Mas, como $Y \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^{n+1})$, então esta convergência também se dá no sentido das distribuições temperadas e portanto, por unicidade, $u = y$ em $S'(\mathbb{R}^{n+1})$. Portanto $u \in Y$ e $u_n \rightarrow u$ em Y . Disto segue que $X_\phi^{s,b} \hookrightarrow Y$, lembrando também de tomar o limite na desigualdade (1.33).

Sendo assim, dada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, por inversão de Fourier,

$$u(t, x) = \left\{ e^{it\phi(D)} \left(e^{-it\phi(D)} \widehat{u}(\tau, x) \right) \right\}^\vee(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} e^{it\phi(D)} \left(e^{-it\phi(D)} \widehat{u}(\tau, x) \right) d\tau. \quad (1.34)$$

Portanto, aplicando a desigualdade integral de Minkowski com a norma de Y na integral acima e usando a hipótese (1.32), ficamos com

$$\|u\|_Y \lesssim \int_{\mathbb{R}} \|e^{-it\phi(D)} \widehat{u}(\tau, x)\|_{H^s} d\tau.$$

Agora, lembrando de (1.31), basta multiplicar e dividir o integrando acima por $\langle \tau \rangle^b$ e então usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz na variável τ para obter o desejado, lembrando que $\|\langle \tau \rangle^{-b}\|_{L_\tau^2} < \infty$ uma vez que $b > 1/2$. $\square$

Se considerarmos o espaço de Banach $Y = C^0(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{R}^n))$, as hipóteses da Proposição 1.12 estão satisfeitas e

$$\|e^{it\tau_0} e^{it\phi(D)} f\|_Y = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|e^{it\tau_0} e^{it\phi(D)} f\|_{H^s} = \|f\|_{H^s},$$

lembrando que $\{e^{it\phi(D)}\}_{t \in \mathbb{R}}$ é unitário. Portanto

$$X_\phi^{s,b} \hookrightarrow C^0(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{R}^n)), \quad \text{se } b > 1/2. \quad (1.35)$$

Uma outra classe importante de espaços de Banach Y onde temos $X^{s,b}$ imerso são os espaços de Lebesgue do tipo $L_t^q L_x^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, onde o par (q, r) é bastante especial e que definimos a seguir. Um par de expoentes (q, r) é dito *admissível* se

$$\frac{2}{q} = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right), \quad (1.36)$$

onde

$$(i) \quad 2 \leq r \leq 2n/(n-2) \quad \text{se } n > 2,$$

$$(ii) \quad 2 \leq r < \infty \quad \text{se } n = 2,$$

$$(iii) \quad 2 \leq r \leq \infty \quad \text{se } n = 1.$$

As seguintes estimativas desempenham papel fundamental nos estudos de boa colocação da equação de Schrödinger não-linear, dada por (1.29) com $\phi(D) = \Delta/2$ e $N(u) = \lambda|u|^{\alpha-1}u$, $\alpha > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Neste caso $e^{it\phi(D)}u_0 = e^{it\Delta/2}u_0 = (e^{-it|\cdot|^2/2}\hat{u}_0(\cdot))^\vee$ é dito o *grupo livre de Schrödinger*.

Teorema 1.13. (Estimativas do tipo Strichartz) *Sejam $n \geq 1$, $s \in \mathbb{R}$, (q_1, r_1) e (q_2, r_2) pares admissíveis. Então, valem as seguintes estimativas:*

$$(a) \quad \|e^{it\Delta/2}u_0\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}} \lesssim_{n, q_1, r_1} \|u_0\|_{L_x^2},$$

$$(b) \quad \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it'\Delta/2} F(t') dt' \right\|_{L_x^2} \lesssim_{n, q_2, r_2} \|F\|_{L_t^{q_2'} L_x^{r_2'}},$$

$$(c) \quad \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} F(t') dt' \right\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}} \lesssim_{n, q_2, r_2} \|F\|_{L_t^{q_2'} L_x^{r_2'}},$$

onde $1/q_2 + 1/q_2' = 1$ e $1/r_2 + 1/r_2' = 1$.

Demonstração. Ver [16], Teorema 4.2, Capítulo 4 ou [29], Teorema 2.3, Capítulo 2. $\square$

Com a estimativa (a) em mãos e lembrando que os espaços $L_t^q L_x^r$ são invariantes por multiplicação por funções do tipo $e^{it\tau_0}$, segue da Proposição 1.12 que se (q, r) é um par admissível e $b > 1/2$, então

$$X_{-|\cdot|^{2/2}}^{0,b} \hookrightarrow L_t^q L_x^r.$$

A seguir enunciamos alguns resultados importantes sobre os espaços de Bourgain, que serão úteis para o estudo da boa colocação do sistema (S D). As referências clássicas para as provas destas estimativas são [?], [18] ou [29].

Proposição 1.14. *Sejam $s, b \in \mathbb{R}$, $0 < T \leq 1$ e $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então,*

$$\|\eta(t/T)e^{it\phi(D)}f\|_{X^{s,b}} = \|\eta(t/T)\|_{H_t^b} \|f\|_{H_x^s} \leq T^{\frac{1}{2}-b} \|\eta\|_{H_t^b} \|f\|_{H_x^s}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}). \quad (1.37)$$

□

Proposição 1.15. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $b' + 1 \geq b \geq 0 \geq b' > -1/2$, $0 < T < 1$ e $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\text{supp}(\eta)$ é compacto. Então a seguinte estimativa é verdadeira*

$$\|\eta(t/T) \int_0^t e^{i(t-t')\phi(D)} F(t') dt'\|_{X^{s,b}} \lesssim_{b',\eta} T^{1+b'-b} \|F\|_{X^{s,b'}}, \quad \forall F \in X^{s,b'}. \quad (1.38)$$

□

Fixemos um número real $T > 0$. Definimos o *espaço de Bourgain restrito a um intervalo* $[0, T]$, denotado por $X_\phi^{s,b}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, ou simplesmente por $X_T^{s,b}$, como o espaço quociente $X^{s,b}/E_T$, onde $E_T = \{g \in X^{s,b} : g(t) = 0, \forall t \in [0, T]\}$ é um subespaço fechado de $X^{s,b}$ (lembre-se da imersão (1.35)). Deste modo,

$$X_T^{s,b} = \left\{ f|_{[0,T]} : f \in X_\phi^{s,b} \right\}, \quad (1.39)$$

é um espaço de Hilbert (pois $X^{s,b}$ o é) com a norma dada por

$$\begin{aligned} \|f|_{[0,T]}\|_{X_T^{s,b}} &= d(f, E_T) \\ &= \inf \left\{ \|f - g\|_{X^{s,b}} : g \in E_T \right\} \\ &= \inf \left\{ \|\tilde{f}\|_{X^{s,b}} : \tilde{f} \in X^{s,b} \text{ e } \tilde{f}(t) = f(t), \forall t \in [0, T] \right\}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Agora, para cada $f \in X^{s,b}$ fixada, sendo E_T um subconjunto fechado e convexo do espaço de Hilbert $X^{s,b}$, segue que existe uma única $g_0 \in E_T$ tal que $d(f, E_T) = \|f - g_0\|_{X^{s,b}}$, i.e., existe uma única $\tilde{f} := f - g_0 \in X^{s,b}$ tal que $\tilde{f}(t) = f(t)$ para todo $t \in [0, T]$ e

$$\|f|_{[0,T]}\|_{X_T^{s,b}} = \|\tilde{f}\|_{X^{s,b}}. \quad (1.41)$$

Também, é contínua a aplicação

$$\begin{aligned} Q: X^{s,b} &\longrightarrow X_T^{s,b} \\ f &\longmapsto f|_{[0,T]}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Dada $f|_{[0,T]} = \{h \in X^{s,b} : h - f \in E_T\} \in X_T^{s,b}$ escrevemos, para cada $t \in [0, T]$, $f|_{[0,T]}(t) := h(t)$, onde h está na classe $f|_{[0,T]}$. Note que esta definição independe do representante h que escolhemos, e então escrevemos simplesmente

$$f|_{[0,T]}(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.43)$$

e as operações de soma e multiplicação ficam assim bem definidas. Disto segue (ver (1.35)) a imersão

$$X_T^{s,b} \hookrightarrow C^0([0, T] : H^s(\mathbb{R}^n)). \quad (1.44)$$

Por comodidade, para cada $f \in X^{s,b}$ escrevemos $\|f\|_{X_T^{s,b}}$ quando na verdade deveríamos escrever $\|f|_{[0,T]}\|_{X_T^{s,b}}$.

1.4 Sobre a Boa Colocação em espaços de Bourgain

Vejamos como os espaços de Bourgain são utilizados para se obter a boa colocação do P.V.I. (S D). Observando tal sistema e lembrando das definições da Seção 1.3, notamos que a equação em u é a equação de Schrödinger cujo símbolo e a não-linearidade são, respectivamente

$$\phi_1(\xi) = -|\xi|^2/2 \quad \text{e} \quad N_1(u, v) := uv. \quad (1.45)$$

A equação em v precisa ser melhor analisada. Podemos escrevê-la como

$$\partial_t v - i \frac{\lambda}{\mu} v = \frac{\lambda}{\mu} |u|^2.$$

Neste caso, o símbolo $\phi_2(\xi) = i/\mu \notin \mathbb{R}$. Para utilizarmos com sucesso os espaços de Bourgain, vamos reescrever então a segunda equação adequadamente:

$$\partial_t v = \frac{\lambda}{\mu} |u|^2 - \frac{1}{\mu} v,$$

sendo agora o símbolo e a não-linearidade, respectivamente,

$$\phi_2(\xi) \equiv 0 \quad \text{e} \quad N_2(u, v) := \mathcal{N}_2(u, \bar{u}) - \frac{1}{\mu} v := \frac{\lambda}{\mu} |u|^2 - \frac{1}{\mu} v. \quad (1.46)$$

Portanto os espaços onde trabalharemos serão da forma

$$X_{-|\cdot|^{2/2}}^{s,b} \times H^{l,c},$$

com a norma $\|(f, g)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}} := \|f\|_{X^{s,b}} + \|g\|_{H^{l,c}}$, onde usamos a notação $H^{l,c} = X_0^{l,c} = H_x^l H_t^c$, lembrando de (1.31).

A partir de agora, vamos considerar o sistema (S D) como

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = uv, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t v = \frac{\lambda}{\mu} |u|^2 - \frac{1}{\mu} v, & \mu > 0, & \lambda = \pm 1, \\ u(0, x) = u_0(x), & v(0, x) = v_0(x), \end{cases} \quad (1.47)$$

e toda vez que fizermos menção ao sistema Schrödinger-Debye através da sigla (S D) estaremos nos referindo ao sistema (1.47). A formulação integral (fórmula de Duhamel) para este sistema é dada por

$$u(t) = e^{it\Delta/2} u_0 + i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} u(t') v(t') dt', \quad (1.48)$$

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{\mu} \int_0^t \{ \lambda |u(t')|^2 - v(t') \} dt'. \quad (1.49)$$

Pela definição de boa colocação dada na introdução, devemos obter uma única solução $(u, v) \in X_{-|\cdot|^{2/2}}^{s,b} \times H^{l,c}$ das equações integrais associadas (1.48) e (1.49). Neste caso poderíamos

nos indagar se por exemplo $e^{it\Delta/2}u_0 \in X_{-|\cdot|^{3/2}}^{s,b}$. Isto em geral não ocorre, pois se $b > 0$ e $u_0 \in H^s$, lembrando de (1.31)

$$\|e^{it\Delta/2}u_0\|_{X^{s,b}} = \|u_0\|_{H_x^s H_t^b} = \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau \rangle^b \hat{u}_0 \delta_0\|_{L_{\tau,\xi}^2} = \|u_0\|_{H_x^s} \|\langle \tau \rangle^b \delta_0\|_{L_{\tau}^2},$$

mas a distribuição delta de Dirac $\delta_0 \notin L^2$. Como não estamos buscando solução no intervalo $[0, +\infty[$, e sim em um intervalo $[0, T]$, com $T > 0$, as Proposições 1.14 e 1.15 sugerem uma alternativa: localizar o lado direito de cada uma das expressões (1.48) e (1.49) no tempo. Consideremos $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ uma função par tal que $\eta|_{[-1,1]} \equiv 0$ e $\text{supp}(\eta) \subset [-2, 2]$. Note que se encontrarmos uma função $(u, v) \in X^{s,b} \times H^{l,c}$ satisfazendo as equações integrais

$$u(t) = \eta(t)e^{it\Delta/2}u_0 + i\eta(t/T) \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2}u(t')v(t')dt', \quad (1.50)$$

$$v(t) = \eta(t)v_0 + \eta(t/T) \int_0^t \left\{ \frac{\lambda}{\mu} |u(t')|^2 - \lambda v(t') \right\} dt', \quad (1.51)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, em particular (u, v) satisfaz as equações integrais (1.48) e (1.49) no intervalo de tempo $[0, T]$. Note que as Proposições 1.14 e 1.15 garantem que o lado direito de (1.50) e (1.51) são elementos de $X^{s,b} \times H^{l,c}$, desde que $N_1(u, v)$ e $\mathcal{N}_2(u, \bar{u})$ (o segundo termo $-\frac{1}{\mu}v$ de N_2 não oferece problemas!) pertençam a algum espaço $X^{s,b'} \times H^{l,c'}$, com $b' \leq b$ e $c' \leq c$.

Sobre as não linearidades, precisamos entender quais propriedades sobre elas garantem que ambas pertençam a $X^{s,b'} \times H^{l,c'}$. Neste caso, e em geral na maioria deles, $N_1(u, v)$ e $\mathcal{N}_2(u, \bar{u})$ são bilineares em $u \in X^{s,b}$ e em $v \in H^{l,c}$. Além disso, busca-se mostrar que sob certas condições sobre s, l, b, c

$$\|N_1(u, v)\|_{X^{s,b'}} \lesssim \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{H^{l,c}}, \quad (1.52)$$

$$\|\mathcal{N}_2(u, \bar{w})\|_{H^{l,c'}} \lesssim \|u\|_{X^{s,b}} \|w\|_{X^{s,b}}, \quad (1.53)$$

para toda $u, v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. Por densidade podemos estender N_1 e $\mathcal{N}_2$ (e portanto N_2) aos espaços $X^{s,b} \times H^{l,c}$. Estas desigualdades são a chave para o que procuramos. Vamos reservar estas estimativas, pois elas desempenharão papel decisivo mais à frente.

Outras questões precisam ser respondidas afim de se obter a boa colocação do sistema (S D). Precisamos encontrar um $T > 0$ tal que a única solução (u, v) pertença a $C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n))$ e para tal, devemos começar supondo que $b, c > 1/2$. Trabalhar com soluções em $X^{s,b} \times H^{l,c}$ ainda trará problemas: quaisquer outras funções $(\tilde{u}, \tilde{v})$ que são iguais a (u, v) em $[0, T]$ serão também soluções das equações (1.48) e (1.49) neste intervalo, mesmo não satisfazendo (1.50) e (1.51). Logo não garantimos uma única solução em $X^{s,b} \times H^{l,c}$, que satisfaz (1.48) e (1.49) em $[0, T]$.

Entra em cena o espaço de Bourgain restrito $X_T^{s,b} \times H_T^{l,c}$, que captura todas estas funções em uma mesma classe, e que muito provavelmente garantirá a unicidade. Note que neste caso é imediato que

$$(u|_{[0,T]}, v|_{[0,T]}) \in C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)).$$

Também, $(u|_{[0,T]}, v|_{[0,T]})$ satisfaz (1.48) e (1.49) em $[0, T]$, quando (u, v) satisfaz (1.50) e (1.51), bastando lembrar de (1.43).

Por fim, precisamos da dependência contínua em relação aos dados iniciais. Neste ponto, retornamos às não linearidades N_1 e $\mathcal{N}_2$ e notamos que

$$\begin{aligned} N_1(u_1, v_1) - N_1(u_2, v_2) &= (u_1 - u_2)v_1 + (v_1 - v_2)u_2 \\ \mathcal{N}_2(u_1, \bar{w}_1) - \mathcal{N}_2(u_2, \bar{w}_2) &= (u_1 - u_2)\bar{w}_1 + (\bar{w}_1 - \bar{w}_2)u_2, \end{aligned}$$

e então, as estimativas (1.52) e (1.53) implicam nas estimativas

$$\|N_1(u_1, v_1) - N_1(u_2, v_2)\|_{X^{s,b'}} \lesssim c_0 \left(\|v_1\|_{H^{l,c}} + \|u_2\|_{X^{s,b}} \right) \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}}, \quad (1.54)$$

$$\|\mathcal{N}_2(u_1, \bar{w}_1) - \mathcal{N}_2(u_2, \bar{w}_2)\|_{H^{l,c'}} \lesssim \tilde{c}_0 \left(\|w_1\|_{X^{s,b}} + \|u_2\|_{X^{s,b}} \right) \|(u_1 - u_2, w_1 - w_2)\|_{X^{s,b} \times X^{s,b}}, \quad (1.55)$$

onde a função $c_0(\rho) = \tilde{c}_0(\rho) = \rho$, com $\rho \geq 0$. Em geral, no que diz respeito ao estudo da boa colocação, estabelecer as estimativas anteriores para não linearidades quaisquer, desde que as funções $c_0, \tilde{c}_0 : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sejam contínuas e não decrescentes, desempenham papel fundamental para provarmos a dependência contínua. Cabe observar ainda que as estimativas anteriores podem e serão usadas em lugar das estimativas (1.52) e (1.53), como veremos na demonstração do próximo teorema.

Teorema 1.16. *Sejam s, l, b, c, b', c' , com $b, c > 1/2$, tais que b, c, b', c' satisfazem as condições da Proposição 1.15 e que também (1.54) e (1.55) sejam válidas. Dado $r > 0$, consideremos a bola*

$$B_r = \{(\phi, \psi) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n) : \|(\phi, \psi)\|_{H^s \times H^l} = \|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^l} < r\}.$$

Então, existe $T = T(r) > 0$ tal que para qualquer dado inicial $(u_0, v_0) \in B_r$, existe uma única solução $(u|_{[0,T]}, v|_{[0,T]}) \in X_T^{s,b} \times H_T^{l,c}$ que satisfaz as equações integrais (1.48) e (1.49) em $[0, T]$. Além disso, a aplicação dado-solução

$$\begin{aligned} A : B_r &\longrightarrow C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^n) \times H^l(\mathbb{R}^n)) \\ (u_0, v_0) &\mapsto (A_1(u_0, v_0), A_2(u_0, v_0)) = (u|_{[0,T]}, v|_{[0,T]}) \end{aligned} \quad (1.56)$$

é Lipschitz contínua.

Demonstração. Faremos uso de uma técnica muito familiar que conduzirá ao Teorema do ponto fixo de Banach. Pela discussão anterior, primeiro devemos mostrar a existência de um tempo $T > 0$ e uma única função $(u, v) \in X^{s,b} \times H^{l,c}$ que satisfaz as equações (1.50) e (1.51), depois mostrar a unicidade nos espaços de Bourgain restritos e por fim mostrar a propriedade da aplicação dado-solução. Considere $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ como antes e $r > 0$. Dado $(u_0, v_0) \in B_r$, seja

$$\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v)),$$

onde $\Phi_1(u, v)$ e $\Phi_2(u, v)$ são definidos como sendo iguais ao lado direito de (1.50) e (1.51), respectivamente. Consideremos o espaço métrico completo

$$D_R = \left\{ (u, v) \in X^{s,b} \times H^{l,c} : \|(u, v)\|_{D_R} := \|(u, v)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}} \leq R \right\},$$

onde $R = R(r) > 0$. Vejamos que, escolhendo $T = T(r) > 0$ e $R = R(r) > 0$ adequados, $\Phi(D_R) \subset D_R$ e $\Phi : D_R \rightarrow D_R$ é uma contração. Utilizando as Proposições 1.14 e 1.15, dado $(u, v) \in D_R$

$$\|\Phi(u, v)\|_{D_R} \lesssim \|(u_0, v_0)\|_{H^s \times H^l} + T^\theta \left[\|(N_1(u, v), \mathcal{N}_2(u, \bar{u}))\|_{X^{s,b'} \times H^{l,c'}} + \|v\|_{H^{l,c'}} \right] \quad (1.57)$$

onde $\theta = \min\{1 + b' - b, 1 + c' - c\}$ e lembrando de (1.54) e (1.55), o lado esquerdo de (1.57) é por sua vez

$$\begin{aligned} &\lesssim \|(u_0, v_0)\|_{H^s \times H^l} + T^\theta \{c_0(\|v\|_{H^{l,c}}) + \tilde{c}_0(\|u\|_{X^{s,b}})\|u\|_{X^{s,b}} + 1\} \|(u, v)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}} \\ &\leq Cr + CT^\theta \{c_0(R(r)) + R(r)\tilde{c}_0(R(r)) + 1\}R(r), \end{aligned} \quad (1.58)$$

onde C resulta de todas as constantes que aparecem nas desigualdades utilizadas e dos parâmetros do sistema (S D). Também, de maneira análoga, dados $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in D_R$

$$\begin{aligned} \|\Phi(u, v) - \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})\|_{D_R} &\lesssim T^\theta \|(N_1(u, v) - N_1(\tilde{u}, \tilde{v}), \mathcal{N}_2(u, \bar{u}) - \mathcal{N}_2(\tilde{u}, \bar{\tilde{u}}))\|_{X^{s,b'} \times H^{l,c'}} \\ &\quad + T^\theta \|v - \tilde{v}\|_{H^{l,c'}} \end{aligned} \quad (1.59)$$

e por sua vez

$$\begin{aligned} &\lesssim T^\theta \left\{ c_0(\|(\tilde{u}, v)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}}) + \tilde{c}_0(\|u\|_{X^{s,b}} + \|\tilde{u}\|_{X^{s,b}})\|u - \tilde{u}\|_{X^{s,b}} + \right. \\ &\quad \left. + 1 \right\} \|(u - \tilde{u}, v - \tilde{v})\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}} \\ &\leq CT^\theta \{c_0(2R(r)) + 2R(r)\tilde{c}_0(2R(r)) + 1\} \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Portanto, analisando (1.58) e (1.60), escolhemos $R(r) = 2Cr$ e $T = T(r)$ satisfazendo

$$2CT^\theta \{c_0(2R(r)) + R(r)\tilde{c}_0(2R(r)) + 1\} < 1, \quad (1.61)$$

para concluirmos que $\Phi(D_R) \subset D_R$ e Φ é uma contração. Portanto, existem $T = T(r) > 0$ e uma única $(u, v) \in D_R \subset X^{s,b} \times H^{l,c}$ tal que $\Phi(u, v) = (u, v)$. Vejamos agora a unicidade da solução em $X_T^{s,b} \times H_T^{l,c}$. Sejam então

$$(u_1|_{[0,T]}, v_1|_{[0,T]}), (u_2|_{[0,T]}, v_2|_{[0,T]}) \in X_T^{s,b} \times H_T^{l,c}$$

soluções das equações integrais (1.48) e (1.49) em $[0, T]$. Por simplicidade escreveremos somente (u_1, v_1) e (u_2, v_2) . Considere

$$J := \{t \in [0, T] : (u_1(t), v_1(t)) = (u_2(t), v_2(t))\}, \quad (1.62)$$

não vazio e fechado (ver (1.35)). Provemos então que J é aberto em $[0, T)$. Fixemos $t_0 \in J$, i.e., $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ e $v_1(t_0) = v_2(t_0)$. Tomemos $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$0 < \varepsilon_0 < (T - t_0)/2. \quad (1.63)$$

Mostremos que a vizinhança $V(t_0) := t_0 + I$ está contida em J , onde $I = I(\varepsilon_0) = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \cap [0, T)$. Consideremos as translações

$$\begin{aligned} (\tau_{-t_0}(u_2 - u_1))(t) &= u_2(t + t_0) - u_1(t + t_0), \\ t &\in I \\ (\tau_{-t_0}(v_2 - v_1))(t) &= v_2(t + t_0) - v_1(t + t_0). \end{aligned}$$

Temos que $(\tau_{-t_0}(u_2 - u_1), \tau_{-t_0}(v_2 - v_1)) \in X_I^{s,b} \times H_I^{l,c}$, uma vez que $t + t_0 \in [0, T)$, quando $t \in I$, e $(u_2 - u_1, v_2 - v_1) \in X_T^{s,b} \times H_T^{l,c}$. Também,

$$\begin{aligned} (\tau_{-t_0}(u_2 - u_1))(t) &= \tau_{t_0} \left(i \int_0^{(\cdot)} e^{i(\cdot - t')\Delta/2} \{N_1(u_1, v_1) - N_1(u_2, v_2)\}(t') dt' \right)(t) \\ &= i e^{t\Delta/2} \int_0^{t_0} e^{(t_0 - t')\Delta/2} \{N_1(u_1, v_1) - N_1(u_2, v_2)\}(t') dt' + \\ &\quad + i \int_{t_0}^{t_0+t} e^{i(t+t_0-t')\Delta/2} \{N_1(u_1, v_1) - N_1(u_2, v_2)\}(t') dt' \\ &= i e^{t\Delta/2} (u_2(t_0) - u_1(t_0)) + \\ &\quad + i \int_{t_0}^{t_0+t} e^{i(t+t_0-t')\Delta/2} \{N_1(u_1, v_1) - N_1(u_2, v_2)\}(t') dt' \\ &= i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \tau_{t_0} \{N_1(u_1, v_1) - N_1(u_2, v_2)\}(t') dt' \\ &= i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \{N_1(\tau_{t_0} u_1, \tau_{t_0} v_1) - N_1(\tau_{t_0} u_2, \tau_{t_0} v_2)\}(t') dt'. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Analogamente,

$$(\tau_{-t_0}(v_2 - v_1))(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t \{N_2(\tau_{t_0} u_1, \tau_{t_0} v_1) - N_2(\tau_{t_0} u_2, \tau_{t_0} v_2)\}(t') dt'. \quad (1.65)$$

Lembrando de (1.41), sejam $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) \in X^{s,b} \times H^{l,c}$ extensões de u_i e v_i , $i = 1, 2$, respectivamente. Usando a igualdade (1.64) e argumentando como na desigualdade (1.60) temos que a norma

$$\begin{aligned} &\|(\tau_{-t_0}(u_2 - u_1), \tau_{-t_0}(v_2 - v_1))\|_{X_I^{s,b} \times H_I^{l,c}} \\ &\leq \|\eta(t/\varepsilon_0) \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \{N_1(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) - N_1(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)\}(t') dt'\|_{X^{s,b}} + \\ &\quad + \|\eta(t/\varepsilon_0) \frac{1}{\mu} \int_0^t \{N_2(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) - N_2(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)\}(t') dt'\|_{H^{l,c}} \\ &\lesssim \varepsilon_0^\theta \left\{ c_0(\|(\tilde{u}_2, \tilde{v}_1)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}}) + \tilde{c}_0(\|\tilde{u}_1\|_{X^{s,b}} + \|\tilde{u}_2\|_{X^{s,b}}) \|\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1\|_{X^{s,b}} + \right. \\ &\quad \left. + 1 \right\} \|(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1, \tilde{v}_2 - \tilde{v}_1)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}}, \\ &= C\varepsilon_0^\theta \left\{ c_0(\|(\tilde{u}_2, \tilde{v}_1)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}}) + \tilde{c}_0(\|\tilde{u}_1\|_{X^{s,b}} + \|\tilde{u}_2\|_{X^{s,b}}) \|\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1\|_{X^{s,b}} + \right. \\ &\quad \left. + 1 \right\} \|(u_2 - u_1, v_2 - v_1)\|_{X_I^{s,b} \times H_I^{l,c}}, \end{aligned}$$

e diminuindo ε_0 , tal que

$$C\varepsilon_0^\theta \left\{ c_0(\|(\tilde{u}_2, \tilde{v}_1)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}}) + \tilde{c}_0(\|\tilde{u}_1\|_{X^{s,b}} + \|\tilde{u}_2\|_{X^{s,b}}) \|\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1\|_{X^{s,b}} + 1 \right\} < 1,$$

então

$$\|(\tau_{-t_0}(u_2 - u_1), \tau_{-t_0}(v_2 - v_1))\|_{X_I^{s,b} \times H_I^{l,c}} = 0,$$

ou seja, $\tau_{-t_0}(u_2 - u_1)(t) = 0$ e $\tau_{-t_0}(v_2 - v_1)(t) = 0$ para todo $t \in I$. Portanto $V(t_0) \subset J$. Finalmente, uma argumentação análoga a que usamos para mostrar que Φ é uma contração, garante que a aplicação

$$\begin{aligned} A_0 : B_r &\longrightarrow X^{s,b} \times H^{l,c} \\ (\phi, \psi) &\mapsto (A_0^1(\phi, \psi), A_0^2(\phi, \psi)), \end{aligned}$$

onde $A_0^1(\phi, \psi)$ e $A_0^2(\phi, \psi)$ satisfazem, respectivamente, as equações integrais (1.50) e (1.51) com dados iniciais ϕ, ψ , é lipschitziana, i.e.,

$$\|A_0(\phi, \psi) - A_0(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}} \leq 2\|(\phi, \psi) - (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{H^s \times H^l}, \quad (1.66)$$

para todo $(\phi, \psi), (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in B_r$, desde que se tome $T > 0$ tal que a expressão no lado esquerdo de (1.61) seja menor do que $1/2$. Finalmente, lembrando de (1.42) e denotando por i a inclusão contínua (1.44), temos que a aplicação dado-solução A está bem definida como uma composição de aplicações contínuas

$$A(\phi, \psi) := i(Q(A_0(\phi, \psi))) \in C^0([0, T] : H^s \times H^l), \quad \forall (\phi, \psi) \in B_r.$$

□

Observamos que a demonstração do resultado anterior permite concluir a boa colocação local no intervalo $[-T, T]$.

A eficácia do método empregado na demonstração do teorema anterior depende da validade das estimativas (1.52) e (1.53) (na verdade usamos (1.54) e (1.55)). Com relação ao sistema (S D), foram provadas em [13] e [14], respectivamente, as seguintes estimativas

Proposição 1.17. ($n=1$)

(i) Se $-1/2 < b' < -1/4$, $b > 1/2$ e $|s| - l \leq 1/2$ então vale a seguinte estimativa bilinear

$$\|uv\|_{X^{s,b'}} \lesssim \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{H^{l,b}} \quad (1.67)$$

(ii) Se $\max\{0, l\} < 2s + 1/2$, $l \leq s + 1/2$, $-1/2 < b' < \min\{-1/4, 2s - \max\{0, l\}\}$ e $b > 1/2$ então vale a estimativa

$$\|u\bar{w}\|_{H^{l,b'}} \lesssim \|u\|_{X^{s,b}} \|w\|_{X^{s,b}}. \quad (1.68)$$

Proposição 1.18. ($n=2,3$) Sejam $s \geq 0$ e $0 < T < 1$.

(i) Se $l \geq \max\{0, s-1\}$ e u e v estão suportadas em $\{(t, x) : |t| \lesssim T\}$ então vale a seguinte estimativa bilinear

$$\|uv\|_{X^{s,b'}} \lesssim T^\theta \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{H^{l,c}}, \quad (1.69)$$

desde que $c = 1/2 + \varepsilon$, $b' = -1/2 + \varepsilon$ e $b = 1/2 + \varepsilon$, com $0 \leq \varepsilon < 1$.

(ii) Se $l \leq \min\{2s, s+1\}$ e u e w estão suportadas $\{(t, x) : |t| \lesssim T\}$ então vale a seguinte estimativa bilinear

$$\|u\bar{w}\|_{H^{l,c'}} \lesssim T^\theta \|u\|_{X^{s,b}} \|w\|_{X^{s,b}}, \quad (1.70)$$

desde que $c' = -1/2 + \varepsilon$, $b = 1/2 + \varepsilon$, com $0 \leq \varepsilon < 1$.

Com estas estimativas, o teorema anterior garante os resultados de boa colocação em [13] e em [14], enunciados na introdução. Na verdade, o resultado em dimensão 2,3 requer alguns cuidados e não segue imediatamente do que foi feito no Teorema 1.16, pois as estimativas bilineares foram provadas no caso em que $b = b' + 1 = c = c' + 1 = 1/2$ e, por exemplo não temos garantida a imersão dos espaços de Bourgain, além de outras dificuldades. Vamos somente fazer alguns comentários sobre estas dificuldades, que podem ser vistos em [10] (Section 7), [18] ou também no Remark 2.5 em [14]. Caso $|s-l| < 1$, podemos escolher na Proposição 1.18 índices b, b', c, c' que permitam argumentar como no Teorema 1.16, além de, neste caso, não precisarmos da hipótese sobre o suporte das funções envolvidas (veremos tal necessidade à frente). Agora, quando $|l-s| = 1$, precisamos tomar $b = b' + 1 = c = c' + 1 = 1/2$ para que valha a estimativa. Queremos utilizar o mesmo argumento de antes e por isso precisamos introduzir um espaço auxiliar: o espaço de Banach Y_ϕ^s , definido como o fecho de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ na norma

$$\|f\|_{Y_\phi^s} := \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \phi(\xi) \rangle^{-1} \hat{f}\|_{L_\xi^2 L_\tau^1}. \quad (1.71)$$

Por Cauchy-Schwarz, temos que

$$X_\phi^{s,b'} \hookrightarrow Y_\phi^s, \quad b' > -1/2. \quad (1.72)$$

Usaremos o mesmo método de antes para obtermos a boa colocação local neste caso, i.e., o método da contração em $X_{-|\cdot|^{1/2}}^{s,1/2} \times H^{l,1/2}$. Se obtivermos sucesso, ainda assim não é imediato que

$$(u, v) \in C^0([0, T] : H^s \times H^l), \quad (1.73)$$

pois não temos a imersão como antes. Isto pode ser contornado com o seguinte

Lema 1.19. Se $f \in Y_\phi^s$, então $\int_0^t e^{i(t-t')\phi(D)} f(t') dt' \in C^0([-T, T] : H^s)$, para todo $0 < T < \infty$ e vale

$$\sup_{|t| \leq T} \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\phi(D)} f(t') dt' \right\|_{H^s} \lesssim \langle T \rangle \|f\|_{Y_\phi^s}. \quad (1.74)$$

Demonstração. Ver [19], Lemma 1.8 ou [18] Lemma 2.2, pág. 395. □

Note que em nosso caso temos que garantir que $(N_1(u, v), \mathcal{N}_2(u, \bar{u})) \in Y_{\phi_1}^s \times Y_{\phi_2}^s$ sempre que $(u, v) \in X_{\phi_1}^{s, 1/2} \times H^{l, 1/2}$ (lembrando que o outro termo de N_2 satisfaz $\|\frac{1}{\lambda}v\|_{Y_{\phi_2}^s} \lesssim \|v\|_{H^{1/2, c}}$, por (1.72)), para garantirmos a inclusão (1.73). Além disso, precisaremos estimar N_1 e $\mathcal{N}_2$ também em $X^{s, b'} \times H^{l, c'}$, com $b' + 1 = c' + 1 = 1/2$, para usarmos o método de contração, conforme mostra o resultado seguinte, mais geral do que a Proposição 1.15

Proposição 1.20. *Sejam $b' \leq 0 \leq b \leq b' + 1$, $0 < T < 1$ e $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ com suporte compacto. Então vale a seguinte estimativa*

$$\|\eta(t/T) \int_0^t e^{i(t-t')\phi(D)} F(t') dt'\|_{X_{\phi}^{s, b}} \lesssim T^{1+b'-b} \|F\|_{X_{\phi}^{s, b'}} + \lambda T^{1/2-b} \|F\|_{Y_{\phi}^s}. \quad (1.75)$$

Se $b' > 1/2$, (1.20) vale com $\lambda = 0$.

Demonstração. Ver [18] Lemma 2.1 ou [19] Lemma 1.9. □

No que segue, escreveremos Y_1^s e Y_2^l em lugar de $Y_{\phi_1}^s = Y_{-|\cdot|^2/2}^s$ e $Y_{\phi_2}^l = Y_0^l$, respectivamente. Observemos que sendo $b = b' + 1 = c = c' + 1 = 1/2$, perdemos as potências de T tanto nesta última estimativa quanto na estimativa (1.37), importantes no argumento de contração. Para contornarmos este problema e ainda responder às questões anteriores, o seguinte resultado (que pode ser visto em [19]) reduz a boa colocação local ($b = b' + 1 = c = c' + 1 = 1/2$) a estimar N_1 e $\mathcal{N}_2$ apropriadamente.

Proposição 1.21. *Dados $s, l \in \mathbb{R}$ e $b = b' + 1 = c = c' + 1 = 1/2$. Assuma que valem as estimativas*

$$\|N_1(u_1, v_1) - N_1(u_2, v_2)\|_{X^{s, b'} \cap Y_1^s} \lesssim C_0 \left(\|v_1\|_{H^{l, c}} + \|u_2\|_{X^{s, b}} \right) \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_{X^{s, b} \times H^{l, c}}, \quad (1.76)$$

$$\|\mathcal{N}_2(u_1, \bar{w}_1) - \mathcal{N}_2(u_2, \bar{w}_2)\|_{H^{l, c'} \cap Y_2^l} \lesssim \tilde{C}_0 \left(\|\omega_1\|_{X^{s, b}} + \|u_2\|_{X^{s, b}} \right) \|(u_1 - u_2, \omega_1 - \omega_2)\|_{X^{s, b} \times X^{s, b}}, \quad (1.77)$$

com $C_0, \tilde{C}_0 : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ contínuas e não decrescentes satisfazendo $C_0(\alpha\rho) \leq \alpha^\gamma C_0(\rho)$, para algum $\gamma \geq 0$, com $\tilde{C}_0$ satisfazendo também uma desigualdade análoga.

Além disso, suponha que exista $\theta > 0$ tal que para todo $0 < T \ll 1$ e para todas u e v suportadas em $\{(t, x) : x \in \mathbb{R}^n, |t| \leq T\}$, valem as estimativas anteriores com um fator T^θ multiplicando o lado direito de ambas.

Então, $N_1(u, v)$ e $\mathcal{N}_2(u, \bar{u})$ estão bem definidas para $(u, v) \in X^{s, b} \times H^{l, c}$ e pertencem à $X^{s, b'} \cap Y_1^s \times H^{l, c'} \cap Y_2^l$. E, portanto, (SD) é localmente bem posto em $H^s \times H^l$, com $|l - s| = 1$.

Demonstração. Vamos somente dar os principais passos para a prova desta Proposição. Note que agora ganhamos uma potência positiva de T o que permite argumentar com o método da contração. Para tal, precisamos de um pequeno ajuste nas equações integrais (1.50) e (1.51).

Consideramos as equações integrais

$$u(t) = \eta(t)e^{it\Delta/2}u_0 + i\eta_T(t)\int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2}\eta_{2T}(t')u(t')\eta_{2T}(t')v(t')dt' \quad (1.78)$$

$$v(t) = \eta(t)v_0 + \frac{1}{\mu}\eta_T(t)\int_0^t \{\lambda|\eta_{2T}(t')u(t')|^2 - \eta_{2T}(t')v(t')\}dt', \quad (1.79)$$

com a notação $\eta_\delta(t) := \eta(t/\delta)$, $\delta > 0$. Elas são idênticas às equações (1.50) e (1.51), respectivamente, pois $\eta_{2T}|_{\text{supp}(\eta)} \equiv 1$. Argumentamos como antes, usando as estimativas (1.37), (1.75), (1.76) e (1.77) e levamos em conta toda a discussão anterior, para obtermos uma única solução em $X_T^{s,1/2} \times H_T^{l,1/2}$, com $|s-l| = 1$. O lema a seguir será útil no processo descrito anteriormente e sua demonstração pode ser vista em [18], pág. 398, Lemma 2.5. Observe que a hipótese sobre as funções C_0 e $\tilde{C}_0$ são importantes.

Lema 1.22. *Para todos $b \geq 0$, $q \geq 2$ com $bq > 1$ a seguinte estimativa é verdadeira*

$$\|\eta_\delta f\|_{X^{s,b}} \lesssim \{1 + (bq - 1)^{-1/q}\delta^{-b+1/q}\}\|f\|_{X^{s,b}}. \quad (1.80)$$

Neste Lema observamos que se $b > 1/2$, podemos tomar $q = 2$ tal que a localização produza um fator $\delta^{1/2-b}$, enquanto para $b = 1/2$ podemos tomar qualquer $q > 2$ para então obtermos um fator $\delta^{-\varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, que não nos atrapalhará na argumentação.

Também, o Lema 1.19 garante a persistência (1.73). Restando somente mostrar que a aplicação dado solução é Lipschitz contínua de B_r em $C([0, T] : H^s \times H^l)$. Com efeito, dadas $(\phi, \psi), (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in B_r$, pelo Lema 1.19 e pelas desigualdades (1.76) e (1.77) temos que

$$\begin{aligned} \|A(\phi, \psi) - A(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{C_T H^s \times H^l} &\lesssim \|(\phi, \psi) - (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{H^s \times H^l} + \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \{N_1(u, v) - N_1(\tilde{u}, \tilde{v})\} dt' \right\|_{Y_1^s} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \{ \mathcal{N}_2(u, \bar{u}) - \mathcal{N}_2(\tilde{u}, \bar{\tilde{u}}) - (v - \tilde{v}) \} dt' \right\|_{Y_2^l} \end{aligned}$$

e por sua vez

$$\begin{aligned} &\lesssim \|(\phi, \psi) - (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{H^s \times H^l} + \left\{ c_0(\|(\tilde{u}, v)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}}) + \tilde{c}_0(\|u\|_{X^{s,b}} + \|\tilde{u}\|_{X^{s,b}}) \|u - \tilde{u}\|_{X^{s,b}} + \right. \\ &\quad \left. + 1 \right\} \| (u - \tilde{u}, v - \tilde{v}) \|_{X^{s,b} \times H^{l,c}} \\ &\leq C \|(\phi, \psi) - (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{H^s \times H^l} + 2C \{ c_0(2R(r)) + 2R(r)\tilde{c}_0(2R(r)) + 1 \} \|(\phi - \tilde{\phi}, \psi - \tilde{\psi})\|_{H^s \times H^l} \\ &\leq C \{ c_0(2R(r)) + 2R(r)\tilde{c}_0(2R(r)) + 2 \} \|(\phi - \tilde{\phi}, \psi - \tilde{\psi})\|_{H^s \times H^l}, \end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade lembramos que o método utilizado para obtenção da solução em $[0, T]$ garante que

$$\|(u, v)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}} \leq R(r),$$

onde $R(r) > 0$ é o raio da bola onde argumentamos com o método de contração e

$$\|(u - \tilde{u}, v - \tilde{v})\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}} \leq 2 \|(\phi - \tilde{\phi}, \psi - \tilde{\psi})\|_{H^s \times H^l}.$$

Portanto a aplicação dado solução A é Lipschitz contínua. $\square$

De posse deste teorema, surge ainda um outro questionamento sobre a solução obtida: se o dado inicial for mais regular, temos a persistência na mesma regularidade e no mesmo intervalo local de tempo? Nesta direção, temos o

Corolário 1.23. *Seja $(u, v) \in C^0([0, T] : H^s \times H^l)$ a solução local obtida anteriormente. Se o dado inicial $(u_0, v_0) \in H^{s+k} \times H^{l+k}$, onde $k \in [0, +\infty)$, e nesta mesma regularidade o sistema é localmente bem posto, então*

$$(u, v) \in C^0([0, T] : H^{s+k} \times H^{l+k}). \quad (1.81)$$

Demonstração. Com efeito, o tempo de existência $T > 0$ da solução $(u, v) \in C^0([0, T] : H^s \times H^l)$ depende do raio $R(r) > 0$ tal que $\|u_0\|_{H^s} + \|v_0\|_{H^l} < r$, de modo que $\|(u, v)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}} \leq R(r)$. Como u e v satisfazem as equações integrais (1.50) e (1.51), respectivamente, então se $b, c > 1/2$

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_{X^{s+k,b} \times H^{l+k,c}} &\lesssim \|(u_0, v_0)\|_{H^{s+k} \times H^{l+k}} + T^\theta \{ \|uv\|_{X^{s,b'}} + \|u\bar{u}\|_{H^{l,c'}} \\ &\quad + \|D^k(uv)\|_{X^{s,b'}} + \|D^k(u\bar{u})\|_{H^{l,c'}} \}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

onde $(D^k f)(x) := \{|\xi|^k \hat{f}(\xi)\}^\vee(x)$. Agora, note que usando a desigualdade triangular $|\xi| \leq |\xi - \eta| + |\eta|$ temos que

$$\begin{aligned} |\{D^k(uv)\}^\vee| &= |\cdot|^k |\widehat{uv}| = |\cdot|^k |\hat{u} * \hat{v}| \\ &\leq \| |\cdot|^k \hat{u} \| * |\hat{v}| + |\hat{u}| * \| |\cdot|^k \hat{v} \| \\ &= \{D^k(|\hat{u}|^\vee)\}^\vee * |\hat{v}| + |\hat{u}| * \{D^k(|\hat{v}|^\vee)\}^\vee \\ &= \left[\{D^k(|\hat{u}|^\vee)\} |\hat{v}|^\vee + |\hat{u}|^\vee \{D^k(|\hat{v}|^\vee)\} \right]^\wedge, \end{aligned} \quad (1.83)$$

e então usando as estimativas bilineares obtidas nas Proposições 1.17 e 1.18 temos que

$$\begin{aligned} \|D^k(uv)\|_{X^{s,b'}} &\leq \|\{D^k(|\hat{u}|^\vee)\} |\hat{v}|^\vee\|_{X^{s,b'}} + \|\hat{u}^\vee \{D^k(|\hat{v}|^\vee)\}\|_{X^{s,b'}} \\ &\lesssim \|D^k(|\hat{u}|^\vee)\|_{X^{s,b}} \|\hat{v}|^\vee\|_{H^{l,c}} + \|\hat{u}^\vee\|_{X^{s,b}} \|D^k(|\hat{v}|^\vee)\|_{H^{l,c}} \\ &= \|D^k(|\hat{u}|^\vee)\|_{X^{s,b}} \|v\|_{H^{l,c}} + \|u\|_{X^{s,b}} \|D^k(|\hat{v}|^\vee)\|_{H^{l,c}}, \\ &\leq \|u\|_{X^{s+k,b}} \|v\|_{H^{l,c}} + \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{H^{l+k,c}} \end{aligned}$$

e analogamente

$$\|D^k(u\bar{u})\|_{H^{l,c'}} \lesssim \|u\|_{X^{s+k,b}} \|u\|_{X^{s,b}}.$$

Portanto, combinando estas desigualdades com (1.82) e usando mais uma vez as estimativas bilineares obtidas nas Proposições 1.17 e 1.18,

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_{X^{s+k,b} \times H^{l+k,c}} &\lesssim \|(u_0, v_0)\|_{H^{s+k} \times H^{l+k}} + T^\theta \{ \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{H^{l,c}} + \|u\|_{X^{s,b}}^2 + \\ &\quad + \|u\|_{X^{s+k,b}} \|v\|_{H^{l,c}} + \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{H^{l+k,c}} + \|u\|_{X^{s+k,b}} \|v\|_{H^{l,c}} \} \\ &\lesssim \|(u_0, v_0)\|_{H^{s+k} \times H^{l+k}} + T^\theta \|(u, v)\|_{X^{s,b} \times H^{l,c}} \|(u, v)\|_{X^{s+k,b} \times H^{l+k,c}} \\ &\lesssim \|(u_0, v_0)\|_{H^{s+k} \times H^{l+k}} + T^\theta R(r) \|(u, v)\|_{X^{s+k,b} \times H^{l+k,c}}. \end{aligned}$$

Lembrando da escolha de $T > 0$ em (1.61) e observando que a constante implícita nas desigualdades anteriores não dependem de $k > 0$, diminuindo-o se necessário, concluímos que

$$\|(u, v)\|_{X^{s+k, b} \times H^{l+k, c}} \lesssim \|(u_0, v_0)\|_{H^{s+k} \times H^{l+k}}. \quad (1.84)$$

Lembrando que $b, c > 1/2$ segue o desejado. Se $b = c = 1/2$, lembramos que $X^{s+k, 1/2} \times H^{l+k, 1/2} \hookrightarrow Y_1^{s+k} \times Y_2^{l+k_2}$ e usamos (1.76) e (1.77) em lugar das estimativas da Proposição 1.18 (caso $n = 2, 3$) nos passos acima, para obtermos uma desigualdade análoga a (1.84). $\square$

A seguir provaremos um resultado que garante a boa colocação global de (S D) se conhecermos uma estimativa *à priori*, ou seja, uma desigualdade obtida quando supõe-se que a solução existe. Entendemos por estimativa *à priori* em $H^s \times H^l$ para o PVI (S D), como sendo uma desigualdade da forma

$$\|(u(t), v(t))\|_{H^s \times H^l} \leq F(T, \|(u_0, v_0)\|_{H^s \times H^l}), \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.85)$$

desde que (u, v) seja uma solução de (1.48) e (1.49) num intervalo $[0, T]$ e a função $F(\tau, \rho)$ seja contínua nas variáveis τ e ρ .

Proposição 1.24. *Suponhamos que soluções do P.V.I. (S D) num intervalo qualquer I , suficientemente regulares, satisfazem (1.85) para um par de expoentes (s, l) . Consideremos $(u, v) \in C^0([0, T] : H^s \times H^l)$ uma solução das equações integrais (1.48) e (1.49) em $[0, T]$. Se (S D) é localmente bem posto em $H^s \times H^l$, então esta solução (u, v) também satisfaz (1.85) em $H^s \times H^l$, para todo $t \in [0, T]$.*

Demonstração. Fixemos $T > 0$ e consideremos o conjunto

$$J = \{t \in [0, T] : (u(t), v(t)) \text{ satisfaz (1.85)}\}.$$

Como $0 \in J$ e $(u(t), v(t))$ é contínua em t , então J é não-vazio e fechado em $[0, T]$. Vejamos que J é também aberto em $[0, T]$. Seja $t_0 \in J$ e denotemos

$$u_0 := u(t_0) \quad \text{e} \quad v_0 := v(t_0).$$

Pelo Teorema 1.16, de boa colocação local em $H^s \times H^l$, dado $r > 0$ tal que $\|(u_0, v_0)\|_{H^s \times H^l} < r$, existe $T_0 = T_0(r) > 0$ tal que a aplicação dado-solução $A : B_r \rightarrow C^0(I_0 : H^s \times H^l)$ é Lipschitz contínua, onde $I_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \cap [0, T]$. Seja $(u_{0,n}, v_{0,n}) \in H^{s_k} \times H^{l_k}$, onde $s_k = s + k$ e $l_0 = l + k$, com $k \geq 0$ suficientemente grande, tal que

$$(u_{0,n}, v_{0,n}) \rightarrow (u_0, v_0) \quad \text{em} \quad H^s \times H^l.$$

Temos que $(u_n, v_n) := A(u_{0,n}, v_{0,n}) \in C^0(I_0 : H^s \times H^l)$ e por continuidade da aplicação A e pela unicidade

$$(u_n, v_n) \rightarrow A(u_0, v_0) = (u, v) \quad \text{em} \quad C^0(I_0 : H^s \times H^l).$$

Pelo Corolário 1.23 temos que $(u_n, v_n) \in C^0(I_0 : H^{s_k} \times H^{l_k})$. Portanto, (u_n, v_n) é uma solução suficientemente regular e que também satisfaz (1.85) para o par (s, l) , no intervalo I_0 . Tomando o limite nesta desigualdade concluímos o mesmo para a solução (u, v) . Portanto $I_0 \subset J$, provando o desejado. $\square$

Agora provaremos o último resultado desta seção, que diz respeito à obtenção de soluções globais através de estimativas *à priori*.

Teorema 1.25. (Boa Colocação Global) *Suponhamos que o PVI (S D) possua uma estimativa à priori em $H^s \times H^l$, em qualquer intervalo limitado de tempo contendo 0. Se temos Boa Colocação Local em $H^s \times H^l$, dada pelo Teorema 1.16 (mesmo quando $b = c = 1/2$: ver a Proposição 1.21), então o P.V.I. (S D) é globalmente bem posto.*

Demonstração. Fixemos $T > 0$ e mostremos que o P.V.I. (S D) é bem posto em $[0, T]$. Por hipótese, se (u, v) for uma solução em $[0, T]$, então existe $F(\tau, \rho)$ contínua tal que

$$\|(u(t), v(t))\|_{H^s \times H^l} \leq F(T, \|(u_0, v_0)\|_{H^s \times H^l}), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.86)$$

Sabemos que existe uma solução do P.V.I. (S D) num intervalo de tempo, digamos, menor do que $[0, T]$. Logo vale a estimativa anterior neste mesmo intervalo e, em particular, para $t = 0$. Vamos então aplicar o Teorema 1.16 para

$$r = F(T, \|(u_0, v_0)\|_{H^s \times H^l}) > 0,$$

já que $(u_0, v_0) \in B_r$. Então existe $T_1 = T_1(r) > 0$ tal que o P.V.I. (S D) é bem posto em $[0, T_1]$, i.e., existe uma única solução $(\overset{1}{u}, \overset{1}{v}) \in C^0([0, T_1] : H^s \times H^l)$ das equações integrais (1.48) e (1.49) em $[0, T_1]$. Se $T_1 \geq T$, não há o que provar. Suponhamos que $T_1 < T$. Por (1.86),

$$\|(\overset{1}{u}(T_1), \overset{1}{v}(T_1))\|_{H^s \times H^l} \leq F(T, \|(u_0, v_0)\|_{H^s \times H^l}) = r. \quad (1.87)$$

O Teorema 1.16 garante então que existe uma única $(\overset{2}{u}, \overset{2}{v}) \in C^0([0, T_1] : H^s \times H^l)$ satisfazendo as equações integrais

$$\overset{2}{u}(t) = e^{it\Delta/2} \overset{1}{u}(T_1) + i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \overset{2}{u}(t') \overset{2}{v}(t') dt', \quad (1.88)$$

$$\overset{2}{v}(t) = \overset{1}{v}(T_1) + \frac{1}{\mu} \int_0^t \{ \lambda | \overset{2}{u}(t')|^2 - \overset{2}{v}(t') \} dt', \quad (1.89)$$

para todo $t \in [0, T_1]$. Consideremos então

$$(u(t), v(t)) := \begin{cases} (\overset{1}{u}(t), \overset{1}{v}(t)), & t \in [0, T_1], \\ (\overset{2}{u}(t - T_1), \overset{2}{v}(t - T_1)), & t \in [T_1, 2T_1]. \end{cases} \quad (1.90)$$

Evidentemente, $(u, v) \in C^0([0, 2T_1] : H^s \times H^l)$. Vejamos que (u, v) satisfaz as equações integrais (1.48) e (1.49) em $[0, 2T_1]$. De fato, isto é claro se $t \in [0, T_1]$. Agora, se $t \in [T_1, 2T_1]$,

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \overset{2}{u}(t - T_1) = e^{i(t-T_1)\Delta/2} \overset{1}{u}(T_1) + i \int_0^{t-T_1} e^{i(t-T_1-t')\Delta/2} \overset{2}{u}(t') \overset{2}{v}(t') dt' \\
 &= e^{i(t-T_1)\Delta/2} \left\{ e^{iT_1\Delta/2} u_0 + i \int_0^{T_1} e^{i(T_1-t')\Delta/2} \overset{1}{u}(t') \overset{1}{v}(t') dt' \right\} + \\
 &\quad + i \int_0^{t-T_1} e^{i(t-T_1-t')\Delta/2} \overset{2}{u}(t') \overset{2}{v}(t') dt' \\
 &= e^{it\Delta/2} u_0 + i \int_0^{T_1} e^{i(t-t')\Delta/2} \overset{1}{u}(t') \overset{1}{v}(t') dt' + i \int_0^{t-T_1} e^{i(t-T_1-t')\Delta/2} \overset{2}{u}(t') \overset{2}{v}(t') dt' \\
 &= e^{it\Delta/2} u_0 + i \int_0^{T_1} e^{i(t-t')\Delta/2} \overset{1}{u}(t') \overset{1}{v}(t') dt' + i \int_{T_1}^t e^{i(t-t')\Delta/2} \overset{2}{u}(t' - T_1) \overset{2}{v}(t' - T_1) dt' \\
 &= e^{it\Delta/2} u_0 + i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} u(t') v(t') dt'. \tag{1.91}
 \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que $v(t)$ satisfaz (1.49) em $[0, 2T_1]$. A unicidade em $[0, 2T_1]$ segue da unicidade em cada subintervalo $[0, T_1]$ e $[T_1, 2T_1]$. Agora, definindo a aplicação dado solução $S : B_r \rightarrow C^0([0, 2T_1]; H^s \times H^l)$ por

$$S(u_0, v_0) := \begin{cases} A(u_0, v_0)(t), & t \in [0, T_1] \\ A(A_1(u_0, v_0)(T_1), A_2(u_0, v_0)(T_1))(t - T_1), & t \in [T_1, 2T_1], \end{cases}$$

temos que se $(u_0, v_0), (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in B_r$, lembrando de (1.66)

$$\|S(u_0, v_0)(t) - S(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)(t)\|_{H^s \times H^l} \leq 2^2 \|(u_0, v_0) - (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\|_{H^s \times H^l}, \tag{1.92}$$

para todo $t \in [0, 2T_1]$, onde o expoente 2 representa o número de colagens, que foram duas. Caso $2T_1 < T$, procedemos como antes até atingirmos $T > 0$ em n etapas, onde $n = [T/T_1] + 1$. Observe que a constante que aparecerá na estimativa acima, após estas n iterações, será como 2^n . $\square$

2 ESTIMATIVAS À PRIORI E SOLUÇÕES GLOBAIS

Neste capítulo obteremos estimativas *à priori* para o sistema (S D).

Na Seção 2.1 obtemos estimativas *à priori* para o caso $n = 2$ e obtemos como consequência um resultado de boa colocação global.

Na Seção 2.2 também obtemos estimativas *à priori* para o sistema S D em dimensão $n = 1$ e também um resultado de boa colocação global.

Em todo este capítulo consideramos k um número inteiro.

2.1 Estimativas à priori no caso 2D

O seguinte resultado sobre o sistema (S D) em dimensão $n = 2$ será importante no próximo capítulo, onde trabalharemos com o conceito de interpolação visto no Capítulo 1, Seção 1.2.

Teorema 2.1. *O sistema (S D) é globalmente bem posto em $H^{s(k)}(\mathbb{R}^2) \times H^k(\mathbb{R}^2)$ onde*

$$s(k) = k + 1 \quad (k \geq 0) \quad (2.1)$$

ou

$$s(k) = k \quad (k \geq 1). \quad (2.2)$$

Para provarmos o Teorema 2.1, lembrando da região onde se tem a boa colocação local, de acordo com a Proposição 1.24 e o Teorema 1.25, é suficiente estabelecer as seguintes estimativas:

Proposição 2.2. *Seja $T > 0$. Para todo $k \geq 0$, se $(u(t), v(t))$ é solução, suficientemente regular, do sistema (S D) em $[0, T]$, então existe uma função $c_{k,t}(\rho)$, contínua e crescente em ρ e em t , tal que*

$$\|(u(t), v(t))\|_{H^{k+1} \times H^k} \leq c_{k,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^k \times H^k} \right) \|(u_0, v_0)\|_{H^{k+1} \times H^k}, \quad (2.3)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Proposição 2.3. *Seja $T > 0$. Para todo $k \geq 2$, se $(u(t), v(t))$ é solução, suficientemente regular, do sistema (S D) em $[0, T]$, então existe uma função $c_{k,t}(\rho)$, contínua e crescente em ρ e em t , tal que*

$$\|(u(t), v(t))\|_{H^k \times H^k} \leq c_{k,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} \right) \|(u_0, v_0)\|_{H^k \times H^k}, \quad (2.4)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Estas proposições serão provadas utilizando-se o princípio da indução em k .

Observação 2.4. *Nas Proposições 2.2 e 2.3 usamos as notações c e c para distinguir as funções contínuas e crescentes. O fato primordial, conforme veremos no próximo capítulo, é que ambas são crescentes.*

Observação 2.5. A Proposição 2.3 não foi enunciada para $k = 1$. No entanto vale uma desigualdade parecida, garantindo o resultado do Teorema 2.2 em $H^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2)$, como veremos a seguir.

Lema 2.6. Seja $T > 0$. Se $(u(t), v(t))$ é solução, suficientemente regular, do sistema (S D) em $[0, T]$, então existe uma função $\mathbf{c}_{1,t}(\rho)$, contínua e crescente em ρ e em t , tal que

$$\|(u(t), v(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq \mathbf{c}_{1,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2} \right) \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1}, \quad (2.5)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Com efeito, usando a forma integral (2), a desigualdade integral de Minkowski, as desigualdades de Hölder e Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^1} &\leq \|v_0\|_{H^1} + \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{\mu} \int_0^t e^{\frac{t'}{\mu}} \|u^2\|_{H^1} dt' \\ &\lesssim \|v_0\|_{H^1} + \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{\mu} \int_0^t e^{\frac{t'}{\mu}} \left\{ \|u^2\|_{L_x^2} + \|\nabla |u|^2\|_{L_x^2} \right\} dt' \\ &\stackrel{(a)}{\leq} \|v_0\|_{H^1} + \frac{e^{-\frac{t}{\mu}}}{\mu} \int_0^t e^{\frac{t'}{\mu}} \left\{ \|u^2\|_{L_x^2} + 2\|u \nabla u\|_{L_x^2} \right\} dt' \\ &\leq \|v_0\|_{H^1} + \frac{2e^{-\frac{t}{\mu}}}{\mu} \int_0^t e^{\frac{t'}{\mu}} \left\{ \|u\|_{L_x^4}^2 + \|u\|_{L_x^4} \|\nabla u\|_{L_x^4} \right\} dt' \\ &\leq \|v_0\|_{H^1} + \frac{2e^{-\frac{t}{\mu}}}{\mu} \|e^{\frac{t'}{\mu}}\|_{L_t^2} \left\{ \|u\|_{L_x^4}^2 \|e^{\frac{t'}{\mu}}\|_{L_t^2} + \|u\|_{L_x^4} \|\nabla u\|_{L_x^4} \|e^{\frac{t'}{\mu}}\|_{L_t^2} \right\} \\ &\leq \|v_0\|_{H^1} + \sqrt{2/\mu} \left\{ \|u\|_{L_t^4 L_x^4}^2 + \|u\|_{L_t^4 L_x^4} \|\nabla u\|_{L_t^4 L_x^4} \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde em (a) usamos a igualdade $\nabla |u|^2 = \nabla(u\bar{u}) = 2\Re(u \nabla \bar{u})$.

Vamos estimar $\|u\|_{L_t^4 L_x^4}$ e $\|\nabla u\|_{L_t^4 L_x^4}$ separadamente. Com efeito, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg e usando a conservação da norma $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\|u\|_{L_t^4 L_x^4} \leq c_0 \|u\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_x^2}^{1/2} \|e^{\frac{t}{\mu}}\|_{L_t^2} = c_0 \|u_0\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2}. \quad (2.7)$$

Temos que

$$\nabla u = e^{it\Delta/2} \nabla u_0 + i(I_1 + I_2),$$

onde

$$I_1 = \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} v \nabla u dt' \quad \text{e} \quad I_2 = \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} u \nabla v dt'.$$

Usando as estimativas de Strichartz, as desigualdades de Hölder e Gagliardo-Nirenberg

$$\begin{aligned} \|I_1\|_{L_t^4 L_x^4} &\leq c \|v \nabla u\|_{L_t^{4/3} L_x^{4/3}} \leq c \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2} \|v\|_{L_t^4 L_x^4} \\ &\leq c c_0 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2} \|v\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla v\|_{L_x^2}^{1/2} \|e^{\frac{t}{\mu}}\|_{L_t^2} \\ &\leq c c_0 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2} \|v\|_{L_t^\infty L_x^2}^{1/2} \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para I_2 , basta trocar os papéis de u e v na desigualdade anterior e usar a conservação da norma L^2 de u

$$\|I_2\|_{L_t^4 L_x^4} \leq c c_0 \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2} \|u_0\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2}. \quad (2.9)$$

Combinando as estimativas (2.7), (2.8) e (2.9) com a estimativa (2.6) e lembrando que pelas estimativas de Strichartz (Teorema 1.13), $\|e^{it\Delta/2} \nabla u_0\|_{L_t^4 L_x^4} \leq c \|\nabla u_0\|_{L_x^2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^1} &\leq \|v_0\|_{H^1} + \sqrt{\frac{2}{\mu}} c_0 \|u_0\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2} \left\{ c_0 \|u_0\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2} + c \|\nabla u_0\|_{L_x^2} \right. \\ &\quad \left. + c c_0 \left[\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2} \|v\|_{L_t^\infty L_x^2}^{1/2} \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2} + \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2} \|u_0\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para controlarmos $\|v\|_{L_t^\infty L_x^2}$, procedemos de maneira análoga ao que fizemos na estimativa (2.6) com a norma $L^2(\mathbb{R}^2)$ em lugar da norma $H^1(\mathbb{R}^2)$ e utilizamos a estimativa (2.7) para obtermos

$$\|v\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq \|v_0\|_{L_x^2} + \sqrt{2/\mu} c_0^2 \|u_0\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}. \quad (2.11)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^1} &\leq \|v_0\|_{H^1} + \sqrt{\frac{2}{\mu}} c_0 \|u_0\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2} \left\{ c_0 \|u_0\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2} + c \|\nabla u_0\|_{L_x^2} \right. \\ &\quad + c c_0 \|v_0\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2} \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2} + c c_0 \sqrt{\frac{2}{\mu}} \|u_0\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{3/2} \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2} \\ &\quad \left. + c c_0 \|u_0\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por outro lado,

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = E(t) - 2 \int_{\mathbb{R}^2} v |u|^2 dx + \lambda \|v\|_{L^2}^2 \leq |E(t)| + 2 \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 |v| dx + \lambda \|v\|_{L^2}^2. \quad (2.13)$$

Lembrando que $E'(t) = 2\lambda\mu \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t v|^2 dx$, que v satisfaz a segunda equação do sistema (S D) e usando a desigualdades de Minkowski, Hölder e Gagliardo-Nirenberg

$$\begin{aligned} |E(t)| &= \left| E_0 + 2\lambda\mu \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t v|^2 \right) dt' \right| \\ &\leq |E_0| + 2\mu \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t v)^2 dx \right) dt' \\ &= |E_0| + 2\mu \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\mu^2} (\lambda |u|^2 - v)^2 dx \right) dt' \\ &\leq |E_0| + \frac{4}{\mu} \int_0^t \left(\|u\|_{L_x^4}^4 + \|v\|_{L_x^2}^2 \right) dt' \\ &\leq |E_0| + \frac{4}{\mu} \int_0^t \left(c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2 \right) dt' \\ &\leq |E_0| + \frac{4}{\mu} \left(c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + 1 \right) \int_0^t \left(\|\nabla u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2 \right) dt'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Também, usando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Gagliardo-Nirenberg,

$$\begin{aligned}
|E_0| &\leq \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L_x^2}^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^2} |v_0| |u_0|^2 dx \\
&\leq \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L_x^2}^2 + 2 \|v_0\|_{L_x^2} \|u_0\|_{L_x^4}^2 \\
&\leq \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L_x^2}^2 + 2c_0^2 \|v_0\|_{L_x^2} \|u_0\|_{L_x^2} \|\nabla u_0\|_{L_x^2} \\
&\leq \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L_x^2}^2 + 4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|v_0\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 \\
&= \frac{5}{4} \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L_x^2}^2 + 4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|v_0\|_{L_x^2}^2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Substituindo (2.15) em (2.14) obtemos

$$\begin{aligned}
|E(t)| &\leq \frac{5}{4} \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L_x^2}^2 + 4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|v_0\|_{L_x^2}^2 + \\
&\quad + \frac{4}{\mu} \left(c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + 1 \right) \left(\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \|v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Raciocinando como na estimativa (2.15),

$$2 \int_{\mathbb{R}^2} |v| |u|^2 dx \leq 4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|v\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L_x^2}^2. \tag{2.17}$$

Portanto, combinando as estimativas (2.16) e (2.17) com (2.13) e lembrando da estimativa (2.11) obtemos

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L_x^2}^2 &\leq \frac{5}{4} \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L_x^2}^2 + 4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|v_0\|_{L_x^2}^2 + \\
&\quad + \frac{4}{\mu} \left(c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + 1 \right) \left(\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \|v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \right) + \\
&\quad + \left(4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \lambda \right) \|v\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L_x^2}^2 \\
&\leq \frac{5}{4} \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L_x^2}^2 + 4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|v_0\|_{L_x^2}^2 + \\
&\quad + \frac{4}{\mu} \left(c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + 1 \right) \left(\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \|v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \right) + \\
&\quad + 2 \left(4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \lambda \right) \left(\|v_0\|_{L_x^2}^2 + \frac{2}{\mu} c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \right) + \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L_x^2}^2,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L_x^2}^2 &\leq \frac{5}{3} \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \frac{4}{3} \|v_0\|_{L_x^2}^2 + \frac{16}{3} c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|v_0\|_{L_x^2}^2 + \frac{8}{3} (4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \lambda) \|v_0\|_{L_x^2}^2 + \\
&\quad + \frac{4}{3} \left\{ \frac{4}{\mu} (c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + 1) + 2(4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \lambda) \frac{2}{\mu} c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \right\} \left(\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \|v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Desta desigualdade e da desigualdade (2.11) obtemos

$$\|\nabla u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2 \leq \alpha_0 + \beta_0 \int_0^t \left(\|\nabla u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2 \right) dt', \quad t \in [0, T] \tag{2.20}$$

onde

$$\alpha_0 = \frac{5}{3} \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \frac{4}{3} \|v_0\|_{L_x^2}^2 + \frac{16}{3} c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|v_0\|_{L_x^2}^2 + \frac{8}{3} (4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \lambda + 1) \|v_0\|_{L_x^2}^2 \quad (2.21)$$

e

$$\beta_0 = \frac{4}{3} \left\{ \frac{4}{\mu} (c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + 1) + 2(4c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \lambda + 1) \frac{2}{\mu} c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \right\}. \quad (2.22)$$

Pelo Lema 1.1 (lema de Gronwall)

$$\|\nabla u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2 \leq \alpha_0 e^{\beta_0 t}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.23)$$

Com a desigualdade (2.23) em mãos poderemos estimar as normas $\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}$ e $\|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}$ que figuram na estimativa (2.12), com a qual trabalharemos agora. De fato, observemos que

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^1}^2 &\leq 2\|v_0\|_{H^1}^2 + \frac{8}{\mu} c_0^2 \|u_0\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2} \left\{ c_0^2 \|u_0\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2} + c^2 \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \right. \\ &\quad + c^2 c_0^2 \|v_0\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_x^2}^2 \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2} + 2(cc_0)^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}} \|u_0\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^3 \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2} + \\ &\quad \left. + c^2 C_0^2 \|u_0\|_{L_x^2} \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2} \right\} \\ &= 2\|v_0\|_{H^1}^2 + \frac{8}{\mu} c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \frac{8}{\mu} c^2 c_0^2 \|u_0\|_{L_x^2} \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2} + \\ &\quad + \frac{8}{\mu} c^2 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2} \|v_0\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^3 \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2} + \frac{8\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu}} c^2 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^4 \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2} + \\ &\quad + \frac{8}{\mu} c^2 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Agora, usando a desigualdade elementar $2ab \leq a^2 + b^2$ e também a desigualdade (2.23), o lado direito de (2.24) por sua vez é

$$\begin{aligned} &\leq 2\|v_0\|_{H^1}^2 + \frac{8}{\mu} c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \frac{16}{\mu^2} c^4 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^4 + \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \\ &\quad + \frac{4}{\mu} c^2 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2} \|v_0\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \left(\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \right) + \\ &\quad + \frac{4\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu}} c^2 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^3 \left(\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \right) + \frac{8}{\mu} c^2 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \\ &\stackrel{(2.23)}{\leq} 2\|v_0\|_{H^1}^2 + \frac{8}{\mu} c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \frac{16}{\mu^2} c^4 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^4 + \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \\ &\quad + \frac{4}{\mu} c^2 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2} \|v_0\|_{L_x^2} \alpha_0 e^{\beta_0 t} t \left(\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \right) + \\ &\quad + \frac{4\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu}} c^2 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \alpha_0^{3/2} e^{\frac{3}{2}\beta_0 t} t^{\frac{3}{2}} \left(\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \right) + \\ &\quad + \frac{8}{\mu} c^2 c_0^4 \|u_0\|_{L_x^2}^2 \alpha_0 e^{\beta_0 t} t \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \\ &\leq \gamma_0 + \theta_0(t) \left(\|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde

$$\gamma_0 = 2\|v_0\|_{H^1}^2 + \frac{16}{\mu}c^4c_0^4\|u_0\|_{L_x^2}^2\|\nabla u_0\|_{L_x^2}^4 \quad (2.26)$$

e

$$\theta_0(t) = \frac{8}{\mu}c_0^4\|u_0\|_{L_x^2}^2 + 1 + \frac{4}{\mu}c^2c_0^4\|u_0\|_{L_x^2}\alpha_0e^{\beta_0 t}t \left(\|v_0\|_{L_x^2} + 2\|u_0\|_{L_x^2} + \sqrt{2/\mu}\|u_0\|_{L_x^2}\sqrt{\alpha_0 t e^{\beta_0 t}} \right). \quad (2.27)$$

Portanto, usando (2.20)

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^1}^2 &= \|u\|_{L_x^2}^2 + \|\nabla u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{H^1}^2 \\ &\leq \|u_0\|_{L_x^2}^2 + (\gamma_0 + \alpha_0) + (\theta_0(t) + \beta_0) \int_0^t (\|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^1}^2) dt', \end{aligned} \quad (2.28)$$

e pelo Lema 1.1 (Lema de Gronwall)

$$\|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^1}^2 \leq (\|u_0\|_{L_x^2}^2 + \gamma_0 + \alpha_0)e^{t(\theta_0(t) + \beta_0(t))}, \quad t \in [0, T],$$

e então

$$\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \leq (\|u_0\|_{L_x^2}^2 + \gamma_0 + \alpha_0)^{1/2} e^{\frac{1}{2}(\theta_0(t) + \beta_0(t))t}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.29)$$

Finalmente, relembrando (2.26) e (2.21) observamos que

$$\begin{aligned} (\|u_0\|_{L_x^2}^2 + \gamma_0 + \alpha_0)^{1/2} &\leq \|u_0\|_{L^2} + \sqrt{2}\|v_0\|_{H^1} + \frac{4}{\sqrt{\mu}}c^2c_0^2\|u_0\|_{L_x^2}\|\nabla u_0\|_{L_x^2} + \\ &+ \sqrt{\frac{5}{3}}\|\nabla u_0\|_{L_x^2} + \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{8}{3}(6c_0^4\|u_0\|_{L_x^2} + \lambda + 1)}\|v_0\|_{L_x^2} \\ &\leq \left[6 + \frac{4}{\sqrt{\mu}}c^2c_0^2\|u_0\|_{L_x^2} + (7 + 16c_0^4\|u_0\|_{L_x^2})^{\frac{1}{2}} \right] (\|u_0\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^1}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Combinando (2.30) com (2.29) obtemos a desigualdade (2.5). Note que, lembrando de (2.27), (2.21) e (2.22), temos que

$$\mathbf{c}_{1,t}(\rho) = \left[6 + \frac{4}{\sqrt{\mu}}c^2c_0^2\rho + (7 + 16c_0^4\rho)^{\frac{1}{2}} \right] e^{\frac{1}{2}t(g_t(\rho) + f(\rho))}, \quad (2.31)$$

onde

$$f(\rho) = \frac{4}{3} \left\{ \frac{4}{\mu}(c_0^4\rho^2 + 1) + 2(4c_0^4\rho^2 + \lambda + 1)\frac{2}{\mu}c_0^4\rho^2 \right\}, \quad (2.32)$$

$$g_t(\rho) = \frac{8}{\mu}c_0^4\rho^2 + 1 + \frac{4}{\mu}h_t(\rho) \left(3\rho + \sqrt{\frac{2}{\mu}}\sqrt{h_t(\rho)} \right), \quad (2.33)$$

onde

$$h_t(\rho) = \frac{5}{3}\rho^2 + \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3}(6c_0^4\rho^2 + \lambda + 1) \right) \rho^2 t e^{f(\rho)}. \quad (2.34)$$

□

Com este lema estamos em condições de provar as Proposições 2.2 e 2.3. Provaremos primeiro a Proposição 2.3, que será utilizada na prova da Proposição 2.2.

Demonstração. (da Proposição 2.3) Primeiro vejamos que (2.4) vale para $k = 2$. Com efeito, usando (1), o fato de $\left\{e^{it\Delta/2}\right\}_{t \in \mathbb{R}}$ ser unitário e as estimativas de Strichartz (Teorema 1.13, com o par admissível $(\infty, 2)$)

$$\|\Delta u\|_{L_x^2} \leq \|\Delta u_0\|_{L_x^2} + c\|\Delta(uv)\|_{L_t^{4/3}L_x^{4/3}}. \quad (2.35)$$

Também, lembrando de (2)

$$\begin{aligned} \Delta v &= e^{-t/\mu}\Delta v_0 + \frac{\lambda}{\mu} \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \Delta(u\bar{u})(t') dt' \\ &= e^{-t/\mu}\Delta v_0 + \frac{2\lambda}{\mu} \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \{\Re(u\Delta\bar{u}) + |\nabla u|^2\} dt'. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Então, usando a desigualdade integral de Minkowski, as desigualdades de Hölder e Cauchy-Schwarz, analogamente ao que fizemos em (2.6), temos

$$\|\Delta v\|_{L_x^2} \leq \|\Delta v_0\|_{L_x^2} + \sqrt{2/\mu} \left\{ \|\nabla u\|_{L_t^4L_x^4}^2 + \|u\|_{L_t^4L_x^4} \|\Delta u\|_{L_t^4L_x^4} \right\}. \quad (2.37)$$

Também, analogamente ao que fizemos em (2.35), sendo $(4, 4)$ um par admissível,

$$\|\Delta u\|_{L_t^4L_x^4} \leq \|\Delta u_0\|_{L_x^2} + c\|\Delta(uv)\|_{L_t^{4/3}L_x^{4/3}}. \quad (2.38)$$

Combinando (2.38) com (2.37),

$$\|\Delta v\|_{L_x^2} \leq \|\Delta v_0\|_{L_x^2} + \sqrt{\frac{2}{\mu}} \left\{ \|\nabla u\|_{L_t^4L_x^4}^2 + \|u\|_{L_t^4L_x^4} \left[\|\Delta u_0\|_{L_x^2} + c\|\Delta(uv)\|_{L_t^{4/3}L_x^{4/3}} \right] \right\}. \quad (2.39)$$

Vamos então estimar $\|\Delta(uv)\|_{L_t^{4/3}L_x^{4/3}}$, que é o termo onde aparece a derivada de maior ordem nas estimativas (2.35) e (2.39). Com efeito,

$$\Delta(uv) = \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j}^2(uv) = \sum_{j=1}^2 \left[u \partial_{x_j}^2 v + 2 \partial_{x_j} u \partial_{x_j} v + v \partial_{x_j}^2 u \right], \quad (2.40)$$

e usando a desigualdade de Hölder em cada parcela da soma em (2.40)

$$\begin{aligned} \|\Delta(uv)\|_{L_t^{4/3}L_x^{4/3}} &\leq \sum_{j=1}^2 \left[\|u\|_{L_t^4L_x^4} \|\partial_{x_j}^2 v\|_{L_t^2L_x^2} + 2 \|\partial_{x_j} u\|_{L_t^4L_x^2} \|\partial_{x_j} v\|_{L_t^2L_x^4} + \right. \\ &\quad \left. + \|v\|_{L_t^4L_x^4} \|\partial_{x_j}^2 u\|_{L_t^2L_x^2} \right] \\ &\leq \|u\|_{L_t^4L_x^4} \|\Delta v\|_{L_t^2L_x^2} + 2 \|\nabla u\|_{L_t^4L_x^2} \|\nabla v\|_{L_t^2L_x^4} + \|v\|_{L_t^4L_x^4} \|\Delta u\|_{L_t^2L_x^2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Combinando as desigualdades (2.7) e (2.9) com (2.11)

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L_t^4L_x^4} &\leq c\|\nabla u_0\|_{L_x^2} + c c_0 \|v_0\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2L_x^2} \|\nabla v\|_{L_t^2L_x^2}^{1/2} + \\ &\quad + c c_0 \sqrt{\frac{2}{\mu}} \|u_0\|_{L_x^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_t^2L_x^2}^{3/2} \|\nabla v\|_{L_t^2L_x^2}^{1/2} + c c_0 \|u_0\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla v\|_{L_t^2L_x^2} \|\nabla u\|_{L_t^2L_x^2}^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Lembrando que $\|\cdot\|_{H^2} \sim \|\cdot\|_{L_x^2} + \|\Delta(\cdot)\|_{L_x^2}$, por (2.35) e (2.39)

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2} &\lesssim \|u_0\|_{L_x^2} + \|v\|_{L_x^2} + \|\Delta u_0\|_{L^2} + \|\Delta v_0\|_{L_x^2} + \sqrt{\frac{2}{\mu}} \|\nabla u\|_{L_t^4 L_x^4}^2 + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\mu}} \|u\|_{L_t^4 L_x^4} \|\Delta u_0\|_{L_x^2} + c(1 + \sqrt{\frac{2}{\mu}} \|u\|_{L_t^4 L_x^4}) \|\Delta(uv)\|_{L_t^{4/3} L_x^{4/3}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Levando em conta as desigualdades (2.41) e (2.42), o lado direito de (2.43) por sua vez é

$$\begin{aligned} &\lesssim_{c,c_0,\mu} \|u_0\|_{L_x^2} + \|v\|_{L_x^2} + \|\Delta v_0\|_{L_x^2} + \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2} + \|u_0\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^3 \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2} \\ &+ \|u_0\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_t^2 L_x^2}^{\frac{1}{2}} + \left[\|u\|_{L_t^4 L_x^4} + 1 \right] \left[\|\Delta u_0\|_{L_x^2} + \|u\|_{L_t^4 L_x^4} \|\Delta v\|_{L_t^2 L_x^2} + \|\nabla u\|_{L_t^4 L_x^2} \|\nabla v\|_{L_t^2 L_x^4} \right. \\ &\left. + \|v\|_{L_t^4 L_x^4} \|\Delta u\|_{L_t^2 L_x^2} \right] \\ &\lesssim \|\Delta v_0\|_{L_x^2} + \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2} + \left[\|u_0\|_{L^2} + \|v_0\|_{L^2} \right] \left[1 + \|u\|_{L_t^2 H_x^1}^3 \|v\|_{L_t^2 H_x^1} + \|v\|_{L_t^2 H_x^1}^2 \|u\|_{L_t^2 H_x^1}^{1/2} + \right. \\ &\left. + \|u\|_{L_t^2 H_x^1}^2 \|v\|_{L_t^2 H_x^1} \right] + \left[\|u\|_{L_t^4 H_x^1} + 1 \right] \|\Delta u_0\|_{L_x^2} + \left[\|u\|_{L_t^4 H_x^1} + 1 \right] \left[\|u\|_{L_t^4 H_x^1} + \|v\|_{L_t^4 H_x^1} \right] \left[\|u\|_{L_t^2 H_x^2} + \|v\|_{L_t^2 H_x^2} \right], \end{aligned} \quad (2.44)$$

lembrando que na última desigualdade usamos imersões de Sobolev. Utilizando a desigualdade (2.5), do Lema 2.6, estimamos cada uma das normas L_x^2 e H_x^1 em u e v que aparecem no lado esquerdo da desigualdade anterior. Com efeito,

$$\|v\|_{L_x^2} \leq \mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2}) \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} \quad (2.45)$$

e também,

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L_t^2 H_x^1}^3 \|v\|_{L_t^2 H_x^1} + \|v\|_{L_t^2 H_x^1}^2 \|u\|_{L_t^2 H_x^1}^{1/2} + \|u\|_{L_t^2 H_x^1}^2 \|v\|_{L_t^2 H_x^1} \\ &\lesssim \left[\mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2}) \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} \right]^4 t^2 + \left[\mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2}) \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} \right]^{\frac{5}{2}} t^{\frac{5}{4}} + \\ &+ \left[\mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2}) \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} \right]^3 t^{3/2} \\ &\lesssim \left\{ \left[\mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2}) \right]^4 \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1}^3 t^2 + \left[\mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2}) \right]^{\frac{5}{2}} \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1}^{\frac{3}{2}} t^{\frac{5}{4}} + \right. \\ &\left. + \left[\mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2}) \right]^3 \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1}^2 t^{3/2} \right\} \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Analogamente,

$$\{\|u\|_{L_t^4 H_x^1} + 1\} \|\Delta u_0\|_{L_x^2} \lesssim \left[\mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2}) \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} t^{\frac{1}{4}} + 1 \right] \|\Delta u_0\|_{L_x^2} \quad (2.47)$$

e também

$$\begin{aligned} &\{\|u\|_{L_t^4 H_x^1} + 1\} \{3\|u\|_{L_t^4 H_x^1} + \|v\|_{L_t^4 H_x^1}\} \\ &\lesssim \left[\mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2}) \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} t^{\frac{1}{4}} + 1 \right] \mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2}) \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} t^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Combinando as desigualdades (2.45)-(2.48) com a desigualdade (2.44), obtemos

$$\|u\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^2}^2 \leq \gamma_1(t) + \beta_1(t) \int_0^t \left\{ \|u\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^2}^2 \right\} dt', \quad (2.49)$$

onde¹

$$\sqrt{\beta_1(t)} = (2.48)_D, \quad (2.50)$$

e

$$\sqrt{\gamma_1(t)} = \|\nabla u_0\|_{L_x^2}^2 + \|\Delta v_0\|_{L_x^2} + (2.45)_D + [\|u_0\|_{L^2} + \|v_0\|_{L^2}](1 + (2.46)_D) + (2.47)_D. \quad (2.51)$$

Portanto, pelo Lema 1.1 (Lema de Gronwall) segue (2.4) para $k = 2$. Vejamos o caso $k = 3$, que será usado na prova do passo de indução. Pela regra de Leibniz, a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_j}^3(uv)\|_{L_x^2} &\lesssim \sum_{l=0}^3 \|\partial_{x_j}^l u \partial_{x_j}^{3-l} v\|_{L_x^2} \\ &\leq \|u\|_{L_x^\infty} \|\partial_{x_j}^3 v\|_{L_x^2} + \|v\|_{L_x^\infty} \|\partial_{x_j}^3 u\|_{L_x^2} + \sum_{l=1}^2 \|\partial_{x_j}^l u\|_{L_x^4} \|\partial_{x_j}^{3-l} v\|_{L_x^4} \\ &\leq \|u\|_{H^2} \|\partial_{x_j}^3 v\|_{L_x^2} + \|v\|_{H^2} \|\partial_{x_j}^3 u\|_{L_x^2} + c_0 \sum_{l=1}^2 \|\partial_{x_j}^l u\|_{H^1} \|\partial_{x_j}^{3-l} v\|_{H^1} \\ &\lesssim_{c_0} \|u\|_{H^2} \|\partial_{x_j}^3 v\|_{L_x^2} + \|v\|_{H^2} \|\partial_{x_j}^3 u\|_{L_x^2} + \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^3} + \|u\|_{H^3} \|v\|_{H^2}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Logo, usando a forma integral (1) de u , a desigualdade integral de Minkowski e (2.52)

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^3} &\leq \|u_0\|_{H^3} + c \int_0^t \left[\|uv\|_{L_x^2} + \sum_{j=1}^2 \|\partial_{x_j}^3(uv)\|_{L_x^2} \right] dt' \\ &\lesssim_{c_0} \|u_0\|_{H^3} + (1 + \|u_0\|_{L_x^2}) \int_0^t \{ \|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2} \} \{ \|u\|_{H^3} + \|v\|_{H^3} \} dt'. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Analogamente,

$$\|v\|_{H^3} \lesssim_{c_0, \mu} \|v_0\|_{H^3} + (1 + \|u_0\|_{L_x^2}) \int_0^t \|u\|_{H^2} \|u\|_{H^3} dt'. \quad (2.54)$$

Combinando as desigualdades (2.53), (2.54) com o caso $k = 2$, provado anteriormente, temos que

$$\begin{aligned} \|(u, v)\|_{H^3 \times H^3} &\lesssim_{c_0, \mu} \|(u_0, v_0)\|_{H^3 \times H^3} + [1 + \|u_0\|_{L_x^2}] \mathbf{c}_{2,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1}) \|(u_0, v_0)\|_{H^2 \times H^2} \int_0^t \{ \|u\|_{H^3} + \|v\|_{H^3} \} dt' \end{aligned} \quad (2.55)$$

e o caso $k = 3$ fica provado usando o Lema 1.1 (Lema de Gronwall). Provaremos agora o passo de indução. Suponhamos então que (2.4) vale para $3 \leq j \leq k$. Usando (1), a regra de Leibniz, a

¹ $(a.b)_D$ significa que estamos considerando o lado direito da desigualdade $(a.b)$.

desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev,

$$\begin{aligned}
\|\partial_{x_j}^{k+1}(uv)\|_{L_x^2} &\lesssim \|u\partial_{x_j}^{k+1}v\|_{L_x^2} + \|v\partial_{x_j}^{k+1}u\|_{L_x^2} + \|\partial_{x_j}u\partial_{x_j}^kv\|_{L_x^2} + \|\partial_{x_j}u\partial_{x_j}^kv\|_{L_x^2} + \sum_{l=2}^{k-1} \|\partial_{x_j}^l u \partial_{x_j}^{k+1-l} v\|_{L_x^2} \\
&\leq c\|u\|_{H^2} \|\partial_{x_j}^{k+1}v\|_{L^2} + c\|v\|_{H^2} \|\partial_{x_j}^{k+1}u\|_{L_x^2} + c_0^2 \|\partial_{x_j}u\|_{H^1} \|\partial_{x_j}^kv\|_{H^1} + c_0^2 \|\partial_{x_j}v\|_{H^1} \|\partial_{x_j}^ku\|_{H^1} \\
&\quad + c_0^2 \sum_{l=2}^{k-1} \|\partial_{x_j}^l u\|_{H^1} \|\partial_{x_j}^{k-1-l} v\|_{H^1} \\
&\leq 2(c+c_0)\{\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2}\}\{\|u\|_{H^{k+1}} + \|v\|_{H^{k+1}}\} + c_0^2 \|u\|_{H^k} \|v\|_{H^k} \\
&\lesssim_{c_0, u} \mathbf{c}_{2,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} \right) \|(u_0, v_0)\|_{H^2 \times H^2} \{\|u\|_{H^{k+1}} + \|v\|_{H^{k+1}}\} \\
&\quad + \mathbf{c}_{k,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} \right)^2 \|(u_0, v_0)\|_{H^k \times H^k}^2, \tag{2.56}
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a hipótese de indução e o caso $k = 2$. Portanto, usando a forma integral (1) de u , a desigualdade integral de Minkowski, imersão de Sobolev e a desigualdade (2.56)

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{k+1}} &\leq \|u_0\|_{H^{k+1}} + \int_0^t \left[\|uv\|_{L^2} + \sum_{j=1}^2 \|\partial_{x_j}^{k+1}(uv)\|_{L_x^2} \right] dt' \\
&\leq \|u_0\|_{H^{k+1}} + \int_0^t \left[c\|u_0\|_{L^2} \|v\|_{H^2} + \sum_{j=1}^2 \|\partial_{x_j}^{k+1}(uv)\|_{L_x^2} \right] dt' \\
&\lesssim_{c_0, u} \|u_0\|_{H^{k+1}} + (1 + \|u_0\|_{L_x^2}) \mathbf{c}_{2,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} \right) \|(u_0, v_0)\|_{H^2 \times H^2} \int_0^t \{\|u\|_{H^{k+1}} + \|v\|_{H^{k+1}}\} dt' \\
&\quad + \mathbf{c}_{k,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} \right)^2 \|(u_0, v_0)\|_{H^k \times H^k}^2 t. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H^{k+1}} &\lesssim_{c_0, u} \|v_0\|_{H^{k+1}} + (1 + \|u_0\|_{L_x^2}) \mathbf{c}_{2,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} \right) \|(u_0, v_0)\|_{H^2 \times H^2} \int_0^t \|u\|_{H^{k+1}} dt' \\
&\quad + \mathbf{c}_{k,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} \right)^2 \|(u_0, v_0)\|_{H^k \times H^k}^2 t. \tag{2.58}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|(u, v)\|_{H^{k+1} \times H^{k+1}} &\lesssim_{c_0, u} \|u_0\|_{H^{k+1}} + \|v_0\|_{H^{k+1}} + \mathbf{c}_{k,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} \right)^2 \|(u_0, v_0)\|_{H^k \times H^k}^2 t \\
&\quad + (1 + \|u_0\|_{L_x^2}) \mathbf{c}_{2,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} \right) \|(u_0, v_0)\|_{H^2 \times H^2} \int_0^t \{\|u\|_{H^{k+1}} + \|v\|_{H^{k+1}}\} dt', \tag{2.59}
\end{aligned}$$

e pelo Lema 1.1 (Lema de Gronwall) segue o desejado e portanto segue o resultado para todo $k \geq 2$. $\square$

Agora vamos provar a Proposição 2.2, também por indução, mas utilizando um raciocínio ligeiramente diferente.

Demonstração. (da Proposição 2.2) Primeiro observamos que a desigualdade (2.23), provada anteriormente, nos dá imediatamente o resultado quando $k = 0$. A seguir, provaremos a desigualdade (2.3) para $k = 1$ e $k = 2$, que serão utilizadas no passo de indução. Com efeito, usando a equação em u de (S D) e integração por partes

$$\begin{aligned}\partial_t \|\Delta u\|_{L_x^2}^2 &= 2\Re(\Delta u_t, \Delta u)_{L_x^2} \\ &= -4\Re\{i(\Delta u_t, u_t)_{L_x^2}\} + 4\Re(\Delta u_t, uv)_{L_x^2} \\ &= 4\Re(\Delta u_t, uv)_{L_x^2} \\ &= 4\{\partial_t \Re(\Delta u, uv)_{L_x^2} - \Re(\Delta u, \partial_t(uv))_{L_x^2}\}.\end{aligned}\quad (2.60)$$

Mas, usando que $\Delta|u|^2 = \Delta(u\bar{u}) = 2\Re(\bar{u}\Delta u) + |\nabla u|^2$, temos que

$$\begin{aligned}\Re(\Delta u, \partial_t(uv))_{L_x^2} &= \Re(\Delta u, u_t v)_{L_x^2} + \Re(\Delta u, uv_t)_{L_x^2} \\ &= \Re(\Delta u, u_t v)_{L_x^2} + (\Delta|u|^2, v_t)_{L_x^2} - (|\nabla u|^2, v_t)_{L_x^2}.\end{aligned}\quad (2.61)$$

Vamos então estudar cada um dos três termos de (2.61) separadamente. Usando a equação em u de (S D) e integração por partes

$$\begin{aligned}\Re(\Delta u, u_t v)_{L_x^2} &= \Re(\Delta u, i/2 \Delta uv)_{L_x^2} + \Re(\Delta u, -i(uv)v)_{L_x^2} \\ &= -1/2 \Re\{i(\Delta u, v\Delta u)_{L_x^2}\} + \Re\{i(\Delta u, uv^2)_{L_x^2}\} \\ &= -\Re\{i/2 (\Delta u, v\Delta u)_{L_x^2} + i(\nabla u, \nabla uv^2)_{L_x^2} + i(\nabla u, 2uv\nabla v)_{L_x^2}\} \\ &= -2\Re\{i(\nabla u, uv\nabla v)_{L_x^2}\},\end{aligned}\quad (2.62)$$

notando que na penúltima igualdade os dois primeiros termos são imaginários. Agora, usando integração por partes, a equação em v de (S D) e a identidade $\nabla|u|^2 = 2\Re(u\bar{\nabla}u)$ temos que

$$\begin{aligned}(\Delta|u|^2, v_t)_{L_x^2} &= -(\nabla|u|^2, \nabla v_t)_{L_x^2} \\ &= -(2\Re(u\bar{\nabla}u), 1/\mu \nabla\{\lambda|u|^2 - v\})_{L_x^2} \\ &= -2\lambda/\mu \Re(u\bar{\nabla}u, u\bar{\nabla}u)_{L_x^2} + 2/\mu \Re(u\bar{\nabla}u, \nabla v)_{L_x^2},\end{aligned}\quad (2.63)$$

e também,

$$-(|\nabla u|^2, v_t)_{L_x^2} = -\lambda/\mu (|\nabla u|^2, |u|^2)_{L_x^2} + 1/\mu (|\nabla u|^2, v)_{L_x^2}.\quad (2.64)$$

Combinando (2.61)-(2.64) com a igualdade (2.60) temos que

$$\begin{aligned}\partial_t \|\Delta u\|_{L_x^2}^2 &= 4\partial_t \Re(\Delta u, uv)_{L_x^2} + 8\Re\{i(\nabla u, uv\nabla v)_{L_x^2}\} + 8\lambda/\mu \Re(u\bar{\nabla}u, u\bar{\nabla}u)_{L_x^2} \\ &\quad + 8/\mu \Re(u\bar{\nabla}u, \nabla v)_{L_x^2} + 4\lambda/\mu (|\nabla u|^2, |u|^2)_{L_x^2} - 4/\mu (|\nabla u|^2, v)_{L_x^2}.\end{aligned}\quad (2.65)$$

Deste modo, lembrando que $\|u\|_{L_x^2} = \|u_0\|_{L_x^2}$,

$$\begin{aligned}\partial_t \{\|u\|_{L_x^2}^2 + \|\Delta u\|_{L_x^2}^2 - 4\Re(\Delta u, uv)_{L_x^2}\} &= +8\Re\{i(\nabla u, uv\nabla v)_{L_x^2}\} + 8\lambda/\mu \Re(u\bar{\nabla}u, u\bar{\nabla}u)_{L_x^2} \\ &\quad + 8/\mu \Re(u\bar{\nabla}u, \nabla v)_{L_x^2} + 4\lambda/\mu (|\nabla u|^2, |u|^2)_{L_x^2} \\ &\quad - 4/\mu (|\nabla u|^2, v)_{L_x^2}.\end{aligned}\quad (2.66)$$

Mas, por Cauchy-Schwarz, Hölder e imersão de Sobolev

$$\begin{aligned} \Re\{i(\nabla u, uv\nabla v)_{L_x^2}\} &\leq \|\nabla v\|_{L_x^2} \|\nabla u\|_{L_x^4} \|u\|_{L_x^\infty} \|v\|_{L_x^4} \\ &\lesssim_{c_0} \|v\|_{H_x^1}^2 \|\nabla u\|_{H^1} \|u\|_{H^2}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

e analogamente,

$$\|u\nabla \bar{u}\|_{L_x^2}^2 \lesssim_{c_0} \|\nabla u\|_{L_x^2}^2 \|u\|_{H^2}^2, \quad (2.68)$$

$$\Re(u\nabla \bar{u}, \nabla v)_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|\nabla v\|_{L_x^2} \|u\|_{H^1} \|\nabla u\|_{H^1}, \quad (2.69)$$

$$(|\nabla u|^2, |u|^2)_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|\nabla u\|_{H^1}^2 \|u\|_{H^1}^2 \|\nabla u\|_{H^1}, \quad (2.70)$$

$$(|\nabla u|^2, v)_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|\nabla u\|_{H^1}^2 \|v\|_{L^2} \quad (2.71)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \partial_t \{ \|u\|_{L_x^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 - 4\Re(\Delta u, uv)_{L_x^2} \} &\lesssim_{c_0, \mu} \|\nabla u\|_{L_x^2}^2 \|u\|_{H^2}^2 + \|\nabla v\|_{L_x^2} \|u\|_{H^1} \|\nabla u\|_{H^1} \\ &\quad + \|\nabla u\|_{H^1}^2 \|u\|_{H^1}^2 \|\nabla u\|_{H^1} + \|\nabla u\|_{H^1}^2 \|v\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Como

$$\Re(\Delta u, uv)_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|\Delta u\|_{L_x^2} \|u\|_{L_x^4} \|v\|_{L_x^4} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \|\Delta u\|_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \frac{1}{2} \|u\|_{H^1}^2 \|v\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|_{L_x^2}^2, \quad (2.73)$$

integrando (2.72) de 0 a t segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|_{L_x^2}^2 &\lesssim_{c_0, \mu} \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \frac{3}{2} \|\Delta u_0\|_{L_x^2}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{H^1}^2 \|v\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^1}^2 \|v_0\|_{H^1}^2 \\ &\quad + \int_0^t \left\{ \|\nabla v\|_{L_x^2}^2 \|\nabla u\|_{L_x^2} \|u\|_{H^2} + \|\nabla u\|_{L_x^2}^2 \|u\|_{H^2}^2 + \|\nabla v\|_{L_x^2} \|u\|_{H^1} \|\nabla u\|_{H^1} + \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla u\|_{H^1}^2 \|u\|_{H^1}^2 + \|\nabla u\|_{H^1} \|v\|_{L_x^2} \right\} dt'. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Lembrando da desigualdade (2.5), no Lema 2.6, segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_x^2}^2 + \|\Delta u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{H^1}^2 &\lesssim 2\|u_0\|_{L_x^2}^2 + 3\|\Delta u_0\|_{L_x^2}^2 + \|u_0\|_{H^1}^2 \|v_0\|_{H^1}^2 + 2\mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2})^2 \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1}^2 \\ &\quad + 5\mathbf{c}_{1,t} (\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2})^2 \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1}^2 \int_0^t \{ \|u\|_{L_x^2}^2 + \|\Delta u\|_{L_x^2}^2 \} dt'. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Aplicando o Lema 1.1 (Lema de Gronwall) segue então a desigualdade (2.3) quando $k = 1$.

Vejamos agora quando $k = 2$. Primeiro, observamos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^3}^2 &\lesssim \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \| |\xi| |\xi|^2 \hat{u} \|_{L_x^2}^2 \lesssim \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \sum_{j=1}^2 \| |\xi_j| |\xi|^2 \hat{u} \|_{L_x^2}^2 \\ &\sim \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \sum_{j=1}^2 \|\partial_{x_j} \Delta u\|_{L_x^2}^2. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Agora, analogamente ao que fizemos em (2.60)

$$\partial_t \|\partial_{x_j} \Delta u\|_{L_x^2}^2 = 4 \{ \partial_t \Re(\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} (uv))_{L_x^2} - \Re(\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} \partial_t (uv))_{L_x^2} \}. \quad (2.77)$$

Temos que

$$\Re(\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} \partial_t (uv))_{L_x^2} = \Re(\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} (u_t v))_{L_x^2} + \Re(\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} (uv_t))_{L_x^2}, \quad (2.78)$$

e usando as equações em (S D)

$$\partial_{x_j} (uv_t) = \lambda/\mu \partial_{x_j} u |u|^2 - {}^1/\mu \partial_{x_j} uv = \sum_{l=0}^1 \left\{ \lambda/\mu \partial_{x_j}^l u^2 \partial_{x_j}^{1-l} \bar{u} - {}^1/\mu \partial_{x_j}^l u \partial_{x_j}^{1-l} v \right\} \quad (2.79)$$

e

$$\partial_{x_j} (u_t v) = \sum_{l=0}^1 \left\{ i/2 \partial_{x_j}^l \Delta u \partial_{x_j}^{1-l} v - i \partial_{x_j}^l u \partial_{x_j}^{1-l} v^2 \right\}. \quad (2.80)$$

Substituindo (2.79) e (2.80) em (2.78) obtemos

$$\begin{aligned} \Re(\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} \partial_t (uv))_{L_x^2} &= \Re \sum_{l=0}^1 \left\{ -i/2 (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j}^l \Delta u \partial_{x_j}^{1-l} v)_{L_x^2} + i (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j}^l u \partial_{x_j}^{1-l} v^2)_{L_x^2} \right. \\ &\quad \left. + \lambda/\mu (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j}^l u^2 \partial_{x_j}^{1-l} \bar{u})_{L_x^2} - {}^1/\mu (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j}^l u \partial_{x_j}^{1-l} v)_{L_x^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Vamos estimar cada um dos oito produtos internos em (2.81). Com efeito, por Cauchy-Schwarz, Hölder e imersão de Sobolev

$$\begin{aligned} \Re \{ -i/2 (\partial_{x_j} \Delta u, \Delta u \partial_{x_j} v)_{L_x^2} \} &\leq \|\partial_{x_j} \Delta u\|_{L_x^2} \|\Delta u\|_{L_x^4} \|\partial_{x_j} v\|_{L_x^4}, \\ &\lesssim_{c_0} \|u\|_{H^3}^2 \|v\|_{H^2}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \Re \{ i (\partial_{x_j} \Delta u, u \partial_{x_j} v^2)_{L_x^2} \} &= 2 \Re \{ i (\partial_{x_j} \Delta u, uv \partial_{x_j} v)_{L_x^2} \} \\ &\leq \|\partial_{x_j} \Delta u\|_{L_x^2} \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty} \|\partial_{x_j} v\|_{L_x^2} \\ &\lesssim_{c_0} \|u\|_{H^3} \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2} \|v\|_{H^1}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\Re \{ \lambda/\mu (\partial_{x_j} \Delta u, u^2 \partial_{x_j} \bar{u})_{L_x^2} \} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^3} \|u\|_{H^2}^2 \|u\|_{H^1} \quad (2.84)$$

e também,

$$\Re \{ {}^1/\mu (\partial_{x_j} \Delta u, u \partial_{x_j} v)_{L_x^2} \} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^3} \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^1}. \quad (2.85)$$

Também,

$$\Re \{ i/2 (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} \Delta uv)_{L_x^2} \} = 0, \quad (2.86)$$

e analogamente ao que fizemos anteriormente,

$$i (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} uv^2)_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^3} \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2}^2 \quad (2.87)$$

$$\lambda/\mu (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} u^2 \bar{u})_{L_x^2} \lesssim_{c_0, \mu} \|u\|_{H^2}^2 \|u\|_{H^3} \|u\|_{H^1}, \quad (2.88)$$

$${}^1/\mu (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} uv)_{L_x^2} \lesssim_{c_0, \mu} \|u\|_{H^3} \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^1}. \quad (2.89)$$

Integrando (2.77) de 0 a t e usando os itens (2.78)-(2.89), além da desigualdade elementar $ab \lesssim a^2 + b^2$, temos que

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_j} \Delta u\|_{L_x^2}^2 &\lesssim_{c_0, \mu} \|\partial_{x_j} \Delta u_0\|_{L_x^2}^2 + 4\Re \sum_{j=1}^2 (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} (uv))_{L_x^2} \Big|_0^t + \int_0^t \left\{ \|v\|_{H^2} + \right. \\ &\quad \left. + \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2} \|v\|_{H^1} + \|u\|_{H^2}^2 \|u\|_{H^1} + \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^1} + \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2}^2 \right\} dt' + \int_0^t \|u\|_{H^3}^2 dt'. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Portanto, de (2.76) e usando a desigualdade (2.4), da Proposição 2.3, para $k = 2$ segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^3}^2 &\lesssim_{c_0, \mu} \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \|u_0\|_{H^3}^2 + 4\Re \sum_{j=1}^2 (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} (uv))_{L_x^2} \Big|_0^t + \\ &\quad + \mathbf{c}_{2,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} \right)^6 \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1}^6 t + \int_0^t \|u\|_{H^3}^2 dt'. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Ainda com a desigualdade (2.4) com $k = 2$ e lembrando que $H^2(\mathbb{R}^2)$ é uma álgebra de Banach,

$$\sum_{j=1}^2 (\partial_{x_j} \Delta u, \partial_{x_j} (uv))_{L_x^2} = -(\Delta u, \Delta(uv))_{L_x^2} \lesssim \|\Delta u\|_{L_x^2} \|\Delta(uv)\|_{L_x^2} \lesssim \|u\|_{H^2}^2 \|v\|_{H^2}. \quad (2.92)$$

Portanto, combinando a desigualdade (2.92) com (2.91) e usando o Lema 1.1 (Lema de Gronwall) segue a desigualdade desejada para $k = 2$. Assim sendo, suponhamos que a desigualdade (2.3) seja verdadeira para todo $2 \leq j \leq k$. Raciocinando de maneira análoga ao que fizemos no caso em que $k = 3$, devemos estudar $\|u\|_{H^{k+2}}^2$, ou seja, $\|\partial_{x_j}^k \Delta u\|_{L_x^2}^2$. Temos que

$$\partial_t \|\partial_{x_j}^k \Delta u\|_{L_x^2}^2 = 4 \{ \partial_t \Re (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^k (uv))_{L_x^2} - \Re (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^k \partial_t (uv))_{L_x^2} \}, \quad (2.93)$$

onde

$$\begin{aligned} \Re (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^k \partial_t (uv))_{L_x^2} &= \Re \sum_{l=0}^k \left\{ -i/2 (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^l \Delta u \partial_{x_j}^{k-l} v)_{L_x^2} + i (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^l u \partial_{x_j}^{k-l} v^2)_{L_x^2} \right. \\ &\quad \left. + \lambda/\mu (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^l u^2 \partial_{x_j}^{k-l} \bar{u})_{L_x^2} - 1/\mu (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^l u \partial_{x_j}^{k-l} v)_{L_x^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Vamos estimar os termos desta soma para os valores $l = 0$ e $l = k$. Com efeito, seguindo um raciocínio inteiramente análogo ao que fizemos no caso $k = 2$,

$$\Re \{ i/2 (\partial_{x_j}^k \Delta u, \Delta u \partial_{x_j}^k v)_{L_x^2} \} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^{k+1}} \|u\|_{H^{k+2}}, \quad (2.95)$$

$$\Re \{ i (\partial_{x_j}^k \Delta u, u \partial_{x_j}^k v^2)_{L_x^2} \} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^k}^2 \|u\|_{H^{k+2}}, \quad (2.96)$$

$$\Re \{ (\partial_{x_j}^k \Delta u, u^2 \partial_{x_j}^k \bar{u})_{L_x^2} \} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^2}^2 \|u\|_{H^k} \|u\|_{H^{k+2}}, \quad (2.97)$$

$$\Re \{ (\partial_{x_j}^k \Delta u, u \partial_{x_j}^k v)_{L_x^2} \} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^k} \|u\|_{H^{k+2}}. \quad (2.98)$$

Também,

$$\Re \{ i/2 (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^k \Delta u v)_{L_x^2} \} = 0, \quad (2.99)$$

$$\Re\{i(\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^k u v^2)\}_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^k} \|v\|_{H^2}^2 \|u\|_{H^{k+2}}, \quad (2.100)$$

$$\Re\{(\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^k u^2 \bar{u})\}_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^2} \|u\|_{H^k}^2 \|u\|_{H^{k+2}}, \quad (2.101)$$

$$\Re\{(\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^k u v)\}_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|v\|_{H^2} \|u\|_{H^k} \|u\|_{H^{k+2}}. \quad (2.102)$$

Agora, para $1 \leq l \leq k-1$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, Hölder e imersão de Sobolev

$$\begin{aligned} i/2 (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^l \Delta u \partial_{x_j}^{k-l} v)_{L_x^2} &\lesssim_{c_0} \|\partial_{x_j}^l \Delta u\|_{H^1} \|\partial_{x_j}^{k-l} v\|_{H^1} \|\partial_{x_j}^k \Delta u\|_{L_x^2} \\ &\lesssim \|v\|_{H^k} \|u\|_{H^k}^2, \end{aligned} \quad (2.103)$$

usando também o fato de $H^k(\mathbb{R}^2)$ ser uma álgebra

$$\begin{aligned} i(\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^l u \partial_{x_j}^{k-l} v^2)_{L_x^2} &\lesssim_{c_0} \|\partial_{x_j}^l u\|_{H^1} \|\partial_{x_j}^{k-l} v^2\|_{H^1} \|u\|_{H^{k+2}} \\ &\lesssim \|u\|_{H^k} \|v\|_{H^k}^2 \|u\|_{H^{k+2}}, \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\lambda/\mu (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^l u^2 \partial_{x_j}^{k-l} \bar{u})_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^k}^3 \|u\|_{H^{k+2}} \quad (2.105)$$

e também,

$$\lambda/\mu (\partial_{x_j}^k \Delta u, \partial_{x_j}^l u \partial_{x_j}^{k-l} v)_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|u\|_{H^k} \|v\|_{H^k} \|u\|_{H^{k+2}}. \quad (2.106)$$

Daqui em diante os argumentos são análogos aos utilizados para provar o caso base $k = 2$. Portanto provamos o desejado. $\square$

2.2 Estimativas à priori no caso 1D

Agora, seguindo o raciocínio da seção anterior, provamos um resultado de boa colocação global para o sistema (S D) em dimensão $n = 1$.

Teorema 2.7. *O sistema (S D) é globalmente bem posto em $H^k(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R})$, onde $k \geq 1$ é um inteiro.*

Lembramos que o caso $k = 1$ já foi provado em [14]. Para provarmos o Teorema 2.7, lembrando da região onde se tem a boa colocação local, de acordo com a Proposição 1.24 e o Teorema 1.25 é suficiente estabelecer a seguinte estimativa:

Proposição 2.8. *Seja $T > 0$. Para todo $k \geq 2$, se $(u(t), v(t))$ é solução, suficientemente regular, do sistema (S D) em $[0, T]$, então existe uma função $C_{k,t}(\rho)$, contínua e crescente em ρ e em t , tal que*

$$\|(u(t), v(t))\|_{H^k \times H^k} \leq C_{k,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} \right) \|(u_0, v_0)\|_{H^k \times H^k}, \quad (2.107)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Fixemos $T > 0$. Usaremos indução em k . Primeiramente, provemos a desigualdade para o caso $k = 2$. Consideremos,

$$f(t) := \|v\|_{L_x^2}^2 + \|\partial_x v\|_{L_x^2}^2 + \|u\|_{L_x^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L_x^2}^2. \quad (2.108)$$

Usando a forma integral (2) de v , a desigualdade de Cauchy-Schwarz no tempo e imersão de Sobolev

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_x^2}^2 &\lesssim_{\mu} \|v_0\|_{L^2}^2 + \left\{ \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \|u\|_{L_x^\infty} \|u\|_{L_x^2} dt' \right\}^2 \\ &\lesssim_{c_0, \mu} \|v_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 \left\{ \|e^{t'/\mu}\|_{L_t^2} \left(\int_0^t \|u\|_{H^1}^2 dt' \right)^{1/2} \right\}^2 \\ &\lesssim_{c_0, \mu} \|v_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 \int_0^t (\|u\|_{L_x^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L_x^2}^2) dt', \end{aligned} \quad (2.109)$$

onde c_0 é a constante de imersão. Por outro lado,

$$\|\partial_x u\|_{L_x^2}^2 = E(t) - 2 \int_{\mathbb{R}} v|u|^2 dx + \lambda \|v\|_{L_x^2}^2 \leq |E(t)| + 2 \int_{\mathbb{R}} |v||u|^2 dx + \|v\|_{L_x^2}^2. \quad (2.110)$$

Vamos estimar cada uma das três parcelas acima. Usando imersão de Sobolev,

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}} |v||u|^2 dx &\leq 2 \|v\|_{L_x^\infty} \|u\|^2 \leq 2c_0 \|v\|_{H^1} \|u_0\|_{L_x^2}^2 \\ &\lesssim_{c_0} \|u_0\|_{L_x^2}^2 (\|v\|_{L_x^2} + \|\partial_x v\|_{L_x^2}) \\ &\leq \|u_0\|_{L_x^2}^4 + \|v\|_{L_x^2}^2 + \|u_0\|_{L_x^2}^2 \|\partial_x v\|_{L_x^2}^2 \end{aligned} \quad (2.111)$$

e também, lembrando da expressão de $E(t)$ em (4) e da equação em v do sistema (S D),

$$\begin{aligned} |E(t)| &\leq |E_0| + \frac{2}{\mu} \int_0^t \|\lambda|u|^2 - v\|_{L_x^2}^2 dt' \\ &\lesssim_{\mu} |E_0| + \int_0^t \left\{ \|u^2\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2 \right\} dt' \\ &\leq |E_0| + \int_0^t \left\{ \|u\|_{L_x^\infty}^2 \|u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2 \right\} dt' \\ &\lesssim_{c_0, \mu} |E_0| + (\|u_0\|_{L^2}^2 + 1) \int_0^t (\|u\|_{L_x^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2) dt' \end{aligned} \quad (2.112)$$

e analogamente

$$|E_0| \lesssim_{c_0} \|\partial_x u_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{H^1} \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (2.113)$$

Combinando as desigualdades (2.110), (2.111), (2.112 e (2.113)), obtemos

$$\begin{aligned} \|\partial_x u\|_2^2 &\lesssim_{c_0, \mu} \|\partial_x u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{H^1} \|u_0\|_{L^2}^2 + \\ &\quad + (\|u_0\|_{L^2}^2 + 1) \int_0^t (\|u\|_{L_x^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2) dt' \\ &\quad + \|u_0\|_{L^2}^4 + \|v\|_{L_x^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 \|\partial_x v\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Também, usando a equação integral (2) e lembrando que $H^1(\mathbb{R})$ é uma álgebra, temos que

$$\begin{aligned} \|\partial_x v\|_{L_x^2} &\leq \|\partial_x v_0\|_{L^2} + \frac{1}{\mu} \int_0^t \|\partial_x(u\bar{u})\|_{L_x^2} dt' \leq \|\partial_x v_0\|_{L^2} + \frac{1}{\mu} \int_0^t \|u\|_{H^1}^2 dt' \\ &\lesssim_\mu \|\partial_x v_0\|_{L^2} + \int_0^t \{\|u\|_{L_x^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L_x^2}^2\} dt' \end{aligned} \quad (2.115)$$

Usando as desigualdades (2.115), (2.114) e (2.109) vemos que

$$\begin{aligned} f(t) &\lesssim_{c_0, \mu} \|v\|_{L_x^2}^2 + (1 + \|u_0\|_{L^2}^2) \left\{ \|\partial_x v_0\|_{L^2} + \int_0^t (\|u\|_{L_x^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L_x^2}^2) dt' \right\} + \\ &\quad + \|u\|_{L_x^2}^2 + \|\partial_x u_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{H^1} \|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^4 + \\ &\quad + (\|u_0\|_{L^2}^2 + 1) \int_0^t (\|u\|_{L_x^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L_x^2}^2 + \|v\|_{L_x^2}^2) dt'. \end{aligned}$$

Mas, novamente por (2.109), segue que

$$f(t) \lesssim_{c_0, \mu} \alpha_0 + \beta_0(t) \int_0^t f(t') dt', \quad (2.116)$$

onde

$$\alpha_0 = \|v_0\|_{L^2}^2 + (1 + \|u_0\|_{L^2}^2) \|\partial_x v_0\|_{L^2} + \|\partial_x u_0\|_{L^2}^2 + (\|v_0\|_{H^1} + 1) \|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^4 \quad (2.117)$$

e

$$\beta_0(t) = \|u_0\|_{L^2}^2 + (1 + \|u_0\|_{L^2}^2) + \|u_0\|_{L^2}^2 + 1. \quad (2.118)$$

Portanto, pelo Lema 1.1 (Lema de Gronwall), segue que

$$f(t) \lesssim_{c_0, \mu} \alpha_0 e^{t\beta_0(t)}, \text{ para todo } t \in [0, T]. \quad (2.119)$$

Deste modo, usando a desigualdade elementar $ab \lesssim a^2 + b^2$, temos que

$$\begin{aligned} \|(u(t), v(t))\|_{H^1 \times H^1} &\lesssim_{c_0, \mu} (\sqrt{\alpha_0} + \alpha_0) (e^{t\beta_0(t)} + e^{t\beta_0(t)/2}) \\ &\leq (\sqrt{\alpha_0} + \alpha_0) e^{t\beta_0(t)}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Com esta desigualdade em mãos vamos provar a base da indução $k = 2$. Com efeito, usando a equação integral (1),

$$\|u\|_{H^2} \leq \|u_0\|_{H^2} + \int_0^t \{\|uv\|_{L_x^2} + \|\partial_x^2(uv)\|_{L_x^2}\} dt',$$

e como

$$\begin{aligned} \|uv\|_{L_x^2} &\leq c_0 \|v\|_{H^1} \|u\|_{L_x^2}, \\ \|u\partial_x^2 v\|_{L_x^2} &\leq c_0 \|u\|_{H^1} \|\partial_x^2 v\|_{L_x^2}, \\ \|v\partial_x^2 u\|_{L_x^2} &\leq c_0 \|v\|_{H^1} \|\partial_x^2 u\|_{L_x^2} \end{aligned}$$

e

$$\|\partial_x u \partial_x v\|_{L_x^2} \leq c_0 \|\partial_x u\|_{H^1} \|\partial_x v\|_{L_x^2},$$

então

$$\|u\|_{H^2} \lesssim_{c_0} \|u_0\|_{H^2} + \int_0^t \{\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1}\} \{\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2}\} dt' \quad (2.121)$$

e analogamente

$$\|v\|_{H^2} \lesssim_{c_0, \mu} \|v_0\|_{H^2} + \int_0^t \|u\|_{H^1} \|u\|_{H^2} dt'. \quad (2.122)$$

Usando (2.120) nas duas desigualdades anteriores,

$$\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2} \lesssim_{c_0} \|u_0\|_{H^2} + \|v_0\|_{H^2} + \gamma_0(t) \int_0^t \{\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2}\} dt', \quad (2.123)$$

onde

$$\gamma_0(t) \sim_{c_0, \mu} (\sqrt{\alpha_0} + \alpha_0) e^{t\beta_0(t)}. \quad (2.124)$$

Mais uma vez, pelo Lema 1.1 (Lema de Gronwall), temos que

$$\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^2} \leq C_{2,t} (\|u_0\|_{H^1} + \|v_0\|_{H^1}) \{\|u_0\|_{H^2} + \|v_0\|_{H^2}\}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.125)$$

onde

$$C_{2,t}(\rho) \sim_{c_0, \mu} \exp\{(1 + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4) e^{t(\rho^2+2)} \mu^{-1}\}. \quad (2.126)$$

Finalmente, suponhamos que a desigualdade (2.107) seja verdadeira para $j \leq k$. Pela regra de Leibniz, temos que

$$\begin{aligned} \|\partial_x^{k+1} u\|_{L_x^2} &\leq \|\partial_x^{k+1} u_0\|_{L^2} + \int_0^t \|\partial_x^{k+1} (uv)\|_{L_x^2} dt' \\ &\leq \|\partial_x^{k+1} u_0\|_{L^2} + \int_0^t \{\|u \partial_x^{k+1} v\|_{L_x^2} + \|v \partial_x^{k+1} u\|_{L_x^2}\} dt' + \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \int_0^t \|\partial_x^j u \partial_x^{k+1-j} v\|_{L_x^2} dt'. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Mas, usando imersão de Sobolev

$$\|u \partial_x^{k+1} v\|_{L_x^2} \leq c_0 \|u\|_{H^1} \|\partial_x^{k+1} v\|_{L_x^2},$$

$$\|v \partial_x^{k+1} u\|_{L_x^2} \leq c_0 \|v\|_{H^1} \|\partial_x^{k+1} u\|_{L_x^2}$$

e

$$\|\partial_x^j u \partial_x^{k+1-j} v\|_{L_x^2} \leq c_0 \|\partial_x^j u\|_{H^1} \|\partial_x^{k+1-j} v\|_{L_x^2} \leq c_0 \|u\|_{H^{k+1}} \|v\|_{H^{k+1-j}}.$$

Combinando estas desigualdades com (2.127)

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{k+1}} &\lesssim \|u\|_{H^k} + \|\partial_x^{k+1} u\|_{L_x^2} \leq \|u\|_{H^k} + \|\partial_x^{k+1} u_0\|_{L^2} + \\ &+ 2c_0 \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \int_0^t \{\|u\|_{H^j} + \|v\|_{H^j}\} \{\|u\|_{H^{k+1}} + \|v\|_{H^{k+1-j}}\} dt'. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Analogamente,

$$\|v\|_{H^{k+1}} \lesssim \|v\|_{H^k} + \|\partial_x^{k+1} v\|_{L_x^2} \leq \|v\|_{H^k} + \|\partial_x^{k+1} v_0\|_{L^2} + \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \int_0^t \|u\|_{H^j} \|u\|_{H^{k+1}} dt'. \quad (2.129)$$

De acordo com a hipótese de indução e usando a desigualdade (2.120),

$$\|u\|_{H^{k+1}} + \|v\|_{H^{k+1}} \lesssim_{c_0, \mu} \|\partial_x^{k+1} u_0\|_{L^2} + \|\partial_x^{k+1} v_0\|_{L^2} + \beta_{0,k}(t) + \gamma_{0,k}(t) \int_0^t \{\|u\|_{H^{k+1}} + \|v\|_{H^{k+1}}\} dt', \quad (2.130)$$

onde

$$\beta_{0,k}(t) = C_{k,t}(\|u_0\|_{H^{k-1}} + \|v_0\|_{H^{k-1}}) \{\|u_0\|_{H^k} + \|v_0\|_{H^k}\}$$

e

$$\gamma_{0,k}(t) = \sum_{j=2}^k \binom{k+1}{j} C_{j,t}(\|u_0\|_{H^{j-1}} + \|v_0\|_{H^{j-1}}) \{\|u_0\|_{H^j} + \|v_0\|_{H^j}\} + \gamma_0(t).$$

Pelo Lema 1.1 (Lema de Gronwall),

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{k+1}} + \|v\|_{H^{k+1}} &\lesssim_{c_0, \mu} \{\|\partial_x^{k+1} u_0\|_{L^2} + \|\partial_x^{k+1} v_0\|_{L^2} + \beta_{0,k}(t)\} e^{t\gamma_{0,k}(t)} \\ &\leq [1 + C_{k,t}(\|u_0\|_{H^{k-1}} + \|v_0\|_{H^{k-1}})] e^{t\gamma_{0,k}(t)} \{\|u_0\|_{H^{k+1}} + \|v_0\|_{H^{k+1}}\}. \end{aligned}$$

Escolhendo $C_{k+1,t}(\rho)$ adequadamente, mostramos a validade da Proposição para o inteiro $k + 1$. □

3 INTERPOLAÇÃO NÃO-LINEAR E SOLUÇÕES GLOBAIS

Neste Capítulo provamos os resultados de boa colocação global enunciados na Introdução.

Na Seção 3.1 estabelecemos uma estimativa para a aplicação dado-solução e provamos o Teorema 3 utilizando os resultados de interpolação, vistos na Seção 1.2.

Na Seção 3.2 provamos o Teorema 4, garantindo um resultado de boa colocação global também em dimensão $n = 1$, usando as mesmas ideias de interpolação.

3.1 Boa colocação global para o sistema (S D) em dimensão $n = 2$

Teorema 3.1. *Seja $T > 0$. Se (u, v) e $(\tilde{u}, \tilde{v})$ são soluções do sistema (S D) em dimensão 2, associadas aos valores iniciais (u_0, v_0) e $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$, respectivamente, no intervalo de tempo $[0, T]$, então para todo $k = 1, 2, \dots$ existe uma função $C_{k,t}(\rho)$, contínua e crescente em ρ e em t , tal que*

$$\|(\omega(t), \eta(t))\|_{H^k \times H^k} \leq C_{k,t} \left(\| (u_0, v_0) \|_{H^k \times H^k} + \| (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \|_{H^k \times H^k} \right) \|(\omega_0, \eta_0)\|_{H^k \times H^k}, \quad (3.1)$$

para todo $t \in [0, T]$, onde $\omega(t) = u(t) - \tilde{u}(t)$, $\eta(t) = v(t) - \tilde{v}(t)$, $\omega_0 = \omega(0)$ e $\eta_0 = \eta(0)$.

Demonstração. Com efeito, temos que ω e η satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} i\partial_t \omega + \frac{1}{2} \Delta \omega = \omega v + \eta \tilde{u}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t \eta + \eta = \lambda [\omega \bar{u} + \bar{\omega} \tilde{u}], & \mu > 0, \quad \lambda = \pm 1, \\ \omega(0) = \omega_0, \quad \eta(0) = \eta_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

lembrando das identidades

$$\omega v + \eta \tilde{u} = uv - \tilde{u} \tilde{v} \quad (3.3)$$

$$\omega \bar{u} + \bar{\omega} \tilde{u} = |u|^2 - |\tilde{u}|^2 = (|u| + |\tilde{u}|)(|u| - |\tilde{u}|). \quad (3.4)$$

Temos, pela fórmula de Duhamel, as seguintes expressões integrais para ω e para η :

$$\omega(t) = e^{it\Delta/2} \omega_0 + i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \{\omega v + \eta \tilde{u}\} dt' \quad (3.5)$$

e

$$\eta(t) = e^{-t/\mu} \eta_0 + \frac{\lambda}{\mu} \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \{\omega \bar{u} + \bar{\omega} \tilde{u}\} dt'. \quad (3.6)$$

Primeiro, provaremos a desigualdade (3.1) para $k = 1$. Com efeito,

$$\|\eta(t)\|_{H^1} \lesssim_\mu \|\eta_0\|_{H^1} + \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \{ \|\omega \bar{u} + \bar{\omega} \tilde{u}\|_{L_x^2} + \|\nabla \{\omega \bar{u} + \bar{\omega} \tilde{u}\}\|_{L_x^2} \} dt', \quad (3.7)$$

e usando a desigualdade de Hölder, imersão de Sobolev e a desigualdade (2.5) do Lema 2.6, temos que

$$\begin{aligned} \|\omega\bar{u} + \bar{\omega}\tilde{u}\|_{L_x^2} &\leq \|\omega\|_{L_x^4} \{\|u\|_{L_x^4} + \|\tilde{u}\|_{L_x^4}\} \\ &\lesssim_{c_0} \|\omega\|_{H^1} \{\|u\|_{H^1} + \|\tilde{u}\|_{H^1}\} \\ &\lesssim_{c_0} G_{1,t'} \|\omega\|_{H^1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

com

$$\begin{aligned} G_{1,t'} &= G_{1,t'} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1}, \|(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\|_{H^1 \times H^1} \right) \\ &= \mathbf{c}_{1,t'} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2} + \|(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\|_{H^1 \times L^2} \right) \{ \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} + \|(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\|_{H^1 \times H^1} \}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Também,

$$\nabla\{\omega\bar{u} + \bar{\omega}\tilde{u}\} = 2\Re\{\omega\bar{\nabla u} + \bar{\nabla\omega}\tilde{u}\}, \quad (3.10)$$

e então, novamente por Hölder, temos que

$$\|\nabla\{\omega\bar{u} + \bar{\omega}\tilde{u}\}\|_{L_x^2} \lesssim_{c_0} \|\omega\|_{H^1} \|\bar{\nabla u}\|_{L_x^4} + \|\nabla\omega\|_{L_x^4} \|\tilde{u}\|_{L_x^4}. \quad (3.11)$$

Combinando as desigualdades (3.8) e (3.10) com (3.7) e usando Cauchy-Schwarz e Hölder na variável t'

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{H^1} &\lesssim_{c_0,\mu} \|\eta_0\|_{H^1} + X_{1,t} \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \|\omega\|_{H^1} dt' + \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \|\omega\|_{H^1} \|\nabla u\|_{L_x^4} dt' \\ &\quad + \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \|\nabla\omega\|_{L_x^4} \|\tilde{u}\|_{L_x^4} dt' \\ &\lesssim \|\eta_0\|_{H^1} + X_{1,t} \|e^{-(t-t')/\mu}\|_{L_t^2} \|\omega\|_{L_t^2 H^1} + \|e^{-(t-t')/\mu}\|_{L_t^4} \|\nabla u\|_{L_t^4 L_x^4} \|\omega\|_{L_t^2 H^1} \\ &\quad + \|e^{-(t-t')/\mu}\|_{L_t^2} \|\tilde{u}\|_{L_t^4 L_x^4} \|\nabla\omega\|_{L_t^4 L_x^4}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para limitarmos as normas $\|\tilde{u}\|_{L_t^4 L_x^4}$ e $\|\nabla u\|_{L_t^4 L_x^4}$ lembramos de (2.7) e (2.42), respectivamente, e também notamos que as normas de u e v que figuram nestas desigualdades podem ser estimadas por cima usando a desigualdade (2.5) do Lema 2.6. Logo existe uma função $g(t', \rho)$ contínua e crescente em t' e em ρ tal que

$$\|\tilde{u}\|_{L_t^4 L_x^4}, \|\nabla u\|_{L_t^4 L_x^4} \lesssim_{c_0} \underbrace{g\left(t, \|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times H^1} + \|(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\|_{H^1 \times H^1}\right)}_{:=g_{1,t}}. \quad (3.13)$$

Agora vamos estimar $\|\nabla\omega\|_{L_t^4 L_x^4}$. Com efeito, usando a forma integral (3.5)

$$\begin{aligned} \nabla\omega &= e^{it\Delta/2} \nabla\omega_0 + i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \nabla\{\omega v + \eta\tilde{u}\} dt' \\ &= e^{it\Delta/2} \nabla\omega_0 + i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \{\omega \nabla v + v \nabla\omega + \eta \nabla\tilde{u} + \tilde{u} \nabla\eta\} dt' \\ &= e^{it\Delta/2} \nabla\omega_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Logo, pelas estimativas de Strichartz, a desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, temos

$$\|e^{it\Delta/2}\nabla\omega_0\|_{L_t^4L_x^4} \lesssim \|\nabla\omega_0\|_{L^2}, \quad (3.15)$$

$$\|I_1\|_{L_t^4L_x^4} \lesssim \|\omega\nabla v\|_{L_t^{4/3}L_x^{4/3}} \lesssim_{c_0} \|\nabla v\|_{L_t^4L_x^2} \|\omega\|_{L_t^2H^1}, \quad (3.16)$$

$$\|I_2\|_{L_t^4L_x^4} \lesssim \|v\nabla\omega\|_{L_t^{4/3}L_x^{4/3}} \lesssim_{c_0} \|v\|_{L_t^4H^1} \|\omega\|_{L_t^2H^1}, \quad (3.17)$$

$$\|I_3\|_{L_t^4L_x^4} \lesssim \|\eta\nabla\tilde{u}\|_{L_t^{4/3}L_x^{4/3}} \lesssim_{c_0} \|\nabla\tilde{u}\|_{L_t^4L_x^2} \|\eta\|_{L_t^2H^1}, \quad (3.18)$$

$$\|I_4\|_{L_t^4L_x^4} \lesssim \|\tilde{u}\nabla\eta\|_{L_t^{4/3}L_x^{4/3}} \lesssim_{c_0} \|\tilde{u}\|_{L_t^4H^1} \|\nabla\eta\|_{L_t^2L_x^2} \quad (3.19)$$

e portanto

$$\|\nabla\omega\|_{L_t^4L_x^4} \lesssim_{c_0} \|\nabla\omega_0\|_{L_x^2} + \{\|v\|_{L_t^4H^1} + \|\tilde{u}\|_{L_t^4H^1}\} \{\|\omega\|_{L_t^2H^1} + \|\eta\|_{L_t^2H^1}\}. \quad (3.20)$$

Mais uma vez, as normas de $\tilde{u}$ e v que aparecem na desigualdade (3.20) podem ser estimadas por cima como fizemos em (3.13), ou seja,

$$\|\nabla\omega\|_{L_t^4L_x^4} \lesssim_{c_0} \|\nabla\omega_0\|_{L_x^2} + g_{1,t} \{\|\omega\|_{L_t^2L_x^2} + \|\eta\|_{L_t^2H^1}\}. \quad (3.21)$$

Portanto, combinando as desigualdades (3.12), (3.13) e (3.21) e notando que $\|e^{-(t-t')/\mu}\|_{L_x^p} \leq (\mu/p)^{1/p}$, $p \geq 1$,

$$\|\eta(t)\|_{H^1} \lesssim_{c_0,\mu} \|\eta_0\|_{H^1} + g_{1,t} \|\nabla\omega_0\|_{L_x^2} + \left\{G_{1,t} + g_{1,t} + g_{1,t}^2\right\} \{\|\omega\|_{L_t^2H^1} + \|\eta\|_{L_t^2H^1}\}. \quad (3.22)$$

Usando (3.5) e raciocinando de maneira inteiramente análoga obtemos

$$\|\omega(t)\|_{H^1} \lesssim_{c_0,\mu} \|\omega_0\|_{H^1} + g_{1,t} \|\nabla\omega_0\|_{L_x^2} + \left\{G_{1,t} + g_{1,t} + g_{1,t}^2\right\} \{\|\omega\|_{L_t^2H^1} + \|\eta\|_{L_t^2H^1}\}, \quad (3.23)$$

e portanto, usando a desigualdade elementar $(a+b)^2 \lesssim a^2 + b^2$

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{H^1}^2 + \|\eta\|_{H^1}^2 &\lesssim_{c_0,\mu} \|\omega_0\|_{H^1}^2 + \|\eta_0\|_{H^1}^2 + g_{1,t}^2 \|\nabla\omega_0\|_{L_x^2}^2 \\ &\quad + \left\{G_{1,t} + g_{1,t} + g_{1,t}^2\right\}^2 \int_0^t \{\|\omega\|_{H^1}^2 + \|\eta\|_{H^1}^2\} dt'. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Usando o Lema 1.1 (Lema de Gronwall) segue então a desigualdade (3.1) para $k = 1$. Vejamos agora a mesma desigualdade para valores de $k \geq 2$. Com efeito, usando a desigualdade integral de Minkowski, lembrando que neste caso $H^k(\mathbb{R}^2)$ é uma álgebra de Banach e usando a desigualdade (2.4) da Proposição 2.3

$$\begin{aligned} \|\eta(t)\|_{H^k} &\lesssim_\mu \|\eta_0\|_{H^k} + \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \{\|u\|_{H^k} + \|\tilde{u}\|_{H^k}\} \|\omega\|_{H^k} dt' \\ &\lesssim \|\eta_0\|_{H^k} + h_{k,t} \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \|\omega\|_{H^k} dt' \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde

$$h_{k,t} = \mathbf{c}_{k,t} \left(\|(u_0, v_0)\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} + \|(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} \right) \{ \|(u_0, v_0)\|_{H^k \times H^k} + \|(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)\|_{H^k \times H^k} \}. \quad (3.26)$$

Analogamente,

$$\|\omega(t)\|_{H^k} \lesssim_{\mu} \|\omega_0\|_{H^k} + h_{k,t} \int_0^t \{ \|\eta\|_{H^k} + \|\omega\|_{H^k} \} dt'. \quad (3.27)$$

Portanto, aplicando o Lema 1.1 (Lema de Gronwall) segue o desejado. $\square$

Agora estamos em condições de provar os resultados de boa colocação global, utilizando as ideias de interpolação de operadores não-lineares.

Demonstração. (do Teorema 3) Fixemos $T > 0$. Pelo Teorema 2.1 a aplicação dado solução

$$\begin{aligned} A : H^{s(k)}(\mathbb{R}^2) \times H^k(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow C^0([0, T]; H^{s(k)}(\mathbb{R}^2) \times H^k(\mathbb{R}^2)) \\ (\phi, \psi) &\mapsto (u|_{[0, T]}, v|_{[0, T]}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

é contínua, onde $s(k)$ é dado por (2.1) ou (2.2). Pelas Proposições 2.3 e 2.2, temos respectivamente

$$\|A(\phi, \psi)\|_{C_T^0 H^{k+1} \times H^{k+1}} \leq \mathbf{c}_{k,T} \left(\|(\phi, \psi)\|_{H^k \times H^k} \right) \|(\phi, \psi)\|_{H^{k+1} \times H^{k+1}}, \quad k \geq 1 \quad (3.29)$$

e

$$\|A(\phi, \psi)\|_{C_T^0 H^{k+1} \times H^k} \leq c_{k,T} \left(\|(\phi, \psi)\|_{H^k \times H^k} \right) \|(\phi, \psi)\|_{H^{k+1} \times H^k}, \quad k \geq 0. \quad (3.30)$$

Também, pelo Teorema 3.1 temos que

$$\|A(\phi, \psi) - A(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{C_T H^k \times H^k} \leq C_{k,T} \left(\|(\phi, \psi)\|_{H^k \times H^k} + \|(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{H^k \times H^k} \right) \|(\phi, \psi) - (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{H^k \times H^k} \quad (3.31)$$

para todo $k \geq 1$. Assim sendo, consideremos

$$\begin{aligned} B_0^1 &= H^k \times H^k & B_1^1 &= H^{k+1} \times H^{k+1} \\ & & \text{e} & \\ B_0^2 &= C^0([0, T] : H^k \times H^k) & B_1^2 &= C^0([0, T] : H^{k+1} \times H^{k+1}), \end{aligned}$$

para $k \geq 1$ fixado. Fixemos s tal que $k < s < k+1$ e tomemos $\theta = s - k \in (0, 1)$. Lembrando que $A : B_i^1 \rightarrow B_i^2$, $i = 0, 1$, é contínua e usando o Teorema 1.8 (Observação 1.9), a Proposição 1.10 e o Teorema 1.11, das desigualdades (3.29) e (3.31) concluímos

$$\|A(\phi, \psi)\|_{B_{\theta,2}^2} \leq c_T \left(\|(\phi, \psi)\|_{B_0^1} \right) \|(\phi, \psi)\|_{B_{\theta,2}^1}, \quad (3.32)$$

onde $B_{\theta,2}^1 = H^s \times H^s$ e $B_{\theta,2}^2 \hookrightarrow C([0, T] : H^s \times H^s)$, $k < s < k+1$, para $k \geq 1$ fixado. Obtemos portanto uma estimativa *à priori* na norma de $H^s \times H^s$, com $k < s < k+1$, com $k \geq 1$, para soluções de (S D). Analogamente, pondo

$$\begin{aligned} B_0^1 &= H^k \times H^k & B_1^1 &= H^{k+1} \times H^k \\ & & \text{e} & \\ B_0^2 &= C^0([0, T] : H^k \times H^k) & B_1^2 &= C^0([0, T] : H^{k+1} \times H^k), \end{aligned}$$

para $k \geq 1$, por (3.30) e (3.31), obtemos uma estimativa *à priori* em $H^s \times H^k$, para $k < s < k+1$. Deste modo, aplicamos o Teorema 1.25 e estabelecemos o Teorema 3. $\square$

3.2 Boa colocação global para o sistema (S D) em dimensão $n = 1$

Como antes, precisamos de um resultado preliminar sobre a aplicação dado-solução do sistema (S D) em dimensão $n = 1$, antes de aplicarmos interpolação.

Teorema 3.2. *Seja $T > 0$. Se (u, v) e $(\tilde{u}, \tilde{v})$ são soluções do sistema (S D) em dimensão 1, associadas aos valores iniciais (u_0, v_0) e $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$, respectivamente, no intervalo de tempo $[0, T]$, então para todo $k = 2, 3, \dots$ existe uma função $C_{0,t}(\rho)$, contínua e crescente em ρ e em t , tal que*

$$\|(\omega(t), \eta(t))\|_{L^2 \times L^2} \leq C_{0,t} \left(\| (u_0, v_0) \|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} + \| (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} \right) \|(\omega_0, \eta_0)\|_{L^2 \times L^2}, \quad (3.33)$$

para todo $t \in [0, T]$, onde $\omega(t) = u(t) - \tilde{u}(t)$, $\eta(t) = v(t) - \tilde{v}(t)$, $\omega_0 = \omega(0)$ e $\eta_0 = \eta(0)$.

Demonstração. Fixemos $T > 0$. Sendo $k > 1$ e $C_{0,t}(\rho)$ crescente em t e em ρ , é suficiente provarmos a seguinte desigualdade

$$\|(\omega(t), \eta(t))\|_{L^2 \times L^2} \leq C_{0,t} (\| (u_0, v_0) \|_{H^1 \times H^1} + \| (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \|_{H^1 \times H^1}) \|(\omega_0, \eta_0)\|_{L^2 \times L^2}, \quad (3.34)$$

para todo $t \in [0, T]$. Lembrando que ω e η satisfazem as mesmas equações integrais (3.5) e (3.6), temos que

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|_{L^2} &\lesssim_{c_0} \|\omega_0\|_{L^2} + \int_0^t \{ \|\omega\|_{L_x^2} \|v\|_{H^1} + \|\tilde{u}\|_{H^1} \|\eta\|_{L_x^2} \} dt' \\ &\leq \|\omega_0\|_{L^2} + \int_0^t (\|v\|_{H^1} + \|\tilde{u}\|_{H^1}) \{ \|\omega\|_{L_x^2} + \|\eta\|_{L_x^2} \} dt' \end{aligned} \quad (3.35)$$

e analogamente,

$$\|\eta\|_{L^2} \lesssim_{c_0, \mu} \|\eta_0\|_{L^2} + \int_0^t (\|u\|_{H^1} + \|\tilde{u}\|_{H^1}) \|\omega\|_{L_x^2} dt'. \quad (3.36)$$

Portanto, usando a estimativa (2.120), temos que

$$\|(\omega(t), \eta(t))\|_{L^2 \times L^2} \lesssim_{c_0, \mu} \|(\omega_0, \eta_0)\|_{L^2 \times L^2} + G_0(t) \int_0^t \|(\omega(t'), \eta(t'))\|_{L^2 \times L^2} dt', \quad (3.37)$$

com

$$G_0(t) \sim_{c_0, \mu} (\sqrt{\alpha_0} + \alpha_0) e^{t\beta_0(t)} + (\sqrt{\tilde{\alpha}_0} + \tilde{\alpha}_0) e^{t\tilde{\beta}_0(t)},$$

onde $\tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\beta}_0$ dependem das normas de $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$. Aplicando o Lema 1.1 (Lema de Gronwall) em (3.37) obtemos o desejado, lembrando que $X_0(t)$ é um polinômio em $\|u_0\|_{H^1}$, $\|\tilde{u}_0\|$, $\|v_0\|_{H^1}$ e $\|\tilde{v}_0\|_{H^1}$. $\square$

Agora estamos em condições de provar a boa colocação global.

Demonstração. (do Teorema 4) Fixemos $T > 0$. Pelo Teorema 2.7 a aplicação dado solução

$$\begin{aligned} A : H^k(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R}) &\longrightarrow C^0([0, T]; H^k(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R})) \\ (\phi, \psi) &\mapsto (u|_{[0, T]}, v|_{[0, T]}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

é contínua, onde $k \geq 2$. Pela Proposição 2.8 temos que

$$\|A(\phi, \psi)\|_{C_T^0 H^k \times H^k} \leq C_{k,T} \left(\|(\phi, \psi)\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} \right) \|(\phi, \psi)\|_{H^k \times H^k}, \quad k \geq 2. \quad (3.39)$$

Também, pelo Teorema 3.2 temos que

$$\|A(\phi, \psi) - A(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{C_T L^2 \times L^2} \leq C_{0,T} \left(\|(\phi, \psi)\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} + \|(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{H^{k-1} \times H^{k-1}} \right) \|(\psi, \phi) - (\tilde{\psi}, \tilde{\phi})\|_{L^2 \times L^2} \quad (3.40)$$

para todo $k \geq 2$. Assim sendo, fixemos $k \geq 2$ e consideremos

$$\begin{aligned} B_0^1 &= L^2 \times L^2 & B_1^1 &= H^k \times H^k \\ & & \text{e} & \\ B_0^2 &= C^0([0, T] : L^2 \times L^2) & B_1^2 &= C^0([0, T] : H^k \times H^k), \end{aligned}$$

Escolhendo $\lambda = (k-1)/k$ e $\theta = s/k$, com $k-1 < s < k$, nas notações do Teorema 1.8 (e lembrando do Teorema 1.11 e a Proposição 1.10), temos que

$$B_{\lambda,2}^j = [B_0^j, B_1^j]_{\lambda,2} = H^{k-1}(\mathbb{R}) \times H^{k-1}(\mathbb{R})$$

e

$$B_{\theta,2}^j = [B_0^j, B_1^j]_{\theta,2} = H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}).$$

Lembrando que A é contínua de B_1^1 em B_1^2 e de $B_{\lambda,2}^1$ em B_0^2 , usando a Proposição 1.10 e o Teorema 1.11, das desigualdades (3.39) e (3.40) concluímos que

$$\|A(\phi, \psi)\|_{B_{\theta,2}^2} \leq c_T \left(\|(\phi, \psi)\|_{B_{\lambda,2}^1} \right) \|(\phi, \psi)\|_{B_{\theta,2}^1}, \quad (3.41)$$

onde $B_{\theta,2}^1 = H^s \times H^s$ e $B_{\theta,2}^2 \hookrightarrow C([0, T] : H^s \times H^s)$, $k-1 < s < k$, para $k \geq 2$. Obtemos portanto uma estimativa *à priori* na norma de $H^s \times H^s$, com $k-1 < s < k$, para todo $k \geq 2$. O que mostra o desejado. $\square$

4 MÁ COLOCAÇÃO DO SISTEMA (S D) NO CASO 1D

Neste capítulo provaremos os resultados de Má Colocação. Seguiremos a abordagem desenvolvida em [15] (ver também [32]). Em linhas gerais, mostramos que a aplicação dado-solução não pode ser C^2 se as regularidades s e l forem muito afastadas.

4.1 C^2 -má colocação

O Teorema 1 estabelece a boa colocação local para o sistema (S D) em dimensão 1. Como consequência do método utilizado na prova deste Teorema, temos que a aplicação dado-solução

$$\begin{aligned} A : B_r &\longrightarrow C^0([0, T]; H^s \times H^l) \\ (\phi, \psi) &\mapsto A(\phi, \psi) = (u|_{[0, T]}, v|_{[0, T]}) = (A_1(\phi, \psi), A_2(\phi, \psi)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

é analítica (ver [1], Thm. 3), onde $B_r = \{(\phi, \psi) \in H^s \times H^l : \|(\phi, \psi)\|_{H^s \times H^l} < r\}$, desde que (s, l) pertença a região dada por (7). Sendo assim, vamos mostrar que o método utilizado não se aplica em algumas regiões que não satisfazem (7), verificando que em tais regiões a aplicação dado-solução A não é duas vezes Fréchet derivável na origem. Neste caso, dizemos que o P.V.I. é mal posto pelo método, ou mais simplesmente que o sistema (S D) é C^2 - mal posto. Para cada $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} A^t : B_r &\longrightarrow H^s \times H^l \\ (\phi, \psi) &\mapsto (A_1^t(\phi, \psi), A_2^t(\phi, \psi)) := (A_1(\phi, \psi)(t), A_2(\phi, \psi)(t)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

é dito o *fluxo* do sistema (S D), lembrando que $A_1(\phi, \psi)$ e $A_2(\phi, \psi)$ satisfazem as equações

$$A_1(\phi, \psi)(t) = e^{it\Delta/2}\phi + i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} A_1(\phi, \psi)(t') A_2(\phi, \psi)(t') dt' \quad (4.3)$$

e

$$A_2(\phi, \psi)(t) = e^{-t/\mu}\psi + \frac{\lambda}{\mu} \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} A_1(\phi, \psi)(t') \overline{A_1(\phi, \psi)(t')} dt', \quad (4.4)$$

$t \in [0, T]$. Note que $A^0 \equiv Id$. Neste ponto chamamos a atenção para o Lema 1.2 que é um resultado elementar mas eficaz para obtermos contraexemplos nesta situação e em outras situações similares, conforme podemos ver em [15]. A seguir provaremos os resultados de C^2 - Má Colocação para o sistema (S D) em dimensão 1.

Teorema 4.1. *Suponhamos que o P.V.I. (S D) é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}) \times H^l(\mathbb{R})$. Se (s, l) são tais que*

$$l < -1/2 \quad \text{ou} \quad s < -1/4 \quad \text{ou} \quad l - 2s > 1/2, \quad (4.5)$$

então o fluxo A^t , para qualquer $t \in (0, T]$, não é C^2 na origem. Consequentemente a aplicação dado-solução A não é C^2 na origem. (ver Gráfico 3)

Demonstração. Vamos provar algo um pouco mais forte: A^t não é duas vezes Fréchet diferenciável na origem, para todo $t \in (0, T]$. Suponhamos, por contradição, que existe $t \in (0, T]$ tal que $D^2 A^t(0, 0) \in \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(H^s \times H^l; \mathbb{C})$, i.e., $D^2 A^t(0, 0)$ é uma aplicação bilinear limitada. Então,

$$\left\| \frac{\partial^2 A^t}{\partial(\phi, \psi)^2}(0, 0) \right\|_{H^s \times H^l} \leq \|D^2 A^t(0, 0)\|_{\mathcal{L}_2} \|(\phi, \psi)\|_{H^s \times H^l}^2, \quad \forall (\phi, \psi) \in H^s \times H^l, \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A^t}{\partial(\phi, \psi)^2}(0, 0) &= D^2 A^t(0, 0) \cdot (\phi, \psi)^2 \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_1^t}{\partial(\phi, \psi)^2}(0, 0), \frac{\partial^2 A_2^t}{\partial(\phi, \psi)^2}(0, 0) \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

é a segunda derivada de Gateaux de A^t na origem. Para calcularmos a derivada em cada componente de (4.7), lembrando das igualdades (4.3) e (4.4), devemos derivar os produtos $A_1(\phi, \psi)A_2(\phi, \psi)$ e $A_1(\phi, \psi)\overline{A_1(\phi, \psi)}$. Se $(A_1(\phi, \psi), A_2(\phi, \psi)) \in H^s \times H^l$, com $s, l > 1/2$, então estes produtos estão em H^s e em H^l , respectivamente e vale, por exemplo

$$\frac{\partial\{A_1 A_2\}}{\partial(\phi, \psi)} = \frac{\partial A_1}{\partial(\phi, \psi)} A_2 + A_1 \frac{\partial A_2}{\partial(\phi, \psi)} \quad (4.8)$$

na topologia de $H^s \times H^l$. No entanto, esta regra não vale, em geral, para qualquer (s, l) nas condições (4.5). Para contornarmos esta dificuldade, tomamos dados suaves, digamos $(\phi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e pelo Corolário 1.23, $(A_1(\phi, \psi), A_2(\phi, \psi)) \in C^0([0, T] : H^{r_1} \times H^{r_2})$, para $r_1, r_2 > 1/2$ suficientemente grandes. Deste modo, mostramos (4.8) em $H^{r_1} \times H^{r_2}$ (álgebra de Banach), e lembrando que $\|\cdot\|_{H^s \times H^l} \leq \|\cdot\|_{H^{r_1} \times H^{r_2}}$, podemos justificar a igualdade acima na topologia de $H^s \times H^l$. Assim sendo, vamos mostrar que a desigualdade (4.6), para todo $(\phi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$, nos conduzirá a uma contradição. Obteremos então cada componente em (4.7). Com efeito, fixemos uma direção $(\phi_0, \psi_0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\frac{\partial e^{it\Delta/2}}{\partial(\phi_0, \psi_0)}(\phi, \psi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{it\Delta/2}(\phi + t\phi_0) - e^{it\Delta/2}\phi}{t} = e^{it\Delta/2}\phi_0, \quad (4.9)$$

lembrando da linearidade do grupo. Portanto, pela regra do produto

$$\frac{\partial A_1^t}{\partial(\phi_0, \psi_0)} = e^{it\Delta/2}\phi_0 + i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \left[\frac{\partial A_1^{t'}}{\partial(\phi_0, \psi_0)} A_2^{t'} + A_1^{t'} \frac{\partial A_2^{t'}}{\partial(\phi_0, \psi_0)} \right] dt'.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial A_2^t}{\partial(\phi_0, \psi_0)} = e^{-t/\mu}\psi_0 + 2\frac{\lambda}{\mu} \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \Re \left[\frac{\partial A_1^{t'}}{\partial(\phi_0, \psi_0)} \overline{A_1^{t'}} \right] dt'. \quad (4.10)$$

Portanto, lembrando que $A_1^{t'}(0, 0) = A_2^{t'}(0, 0) = 0$, segue que

$$\frac{\partial A^t}{\partial(\phi_0, \psi_0)}(0, 0) = \left(e^{it\Delta/2}\phi_0, e^{-t/\mu}\psi_0 \right). \quad (4.11)$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 A_1^t}{\partial(\phi_0, \psi_0)^2}(0,0) = -2i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \left\{ e^{it'\Delta/2} \phi_0 \cdot e^{-t'/\mu} \psi_0 \right\} dt' \quad (4.12)$$

e

$$\frac{\partial^2 A_2^t}{\partial(\phi_0, 0)^2}(0,0) = 2\frac{\lambda}{\mu} \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \left\{ e^{it'\Delta/2} \phi_0 \cdot \overline{e^{it'\Delta/2} \phi_0} \right\} dt'. \quad (4.13)$$

Então de (4.6) segue que

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-t')\Delta/2} \left\{ e^{it'\Delta/2} \phi_0 \cdot e^{-t'/\mu} \psi_0 \right\} dt' \right\|_{H^s} \lesssim \|D^2 A^t(0,0)\|_{L_2} \{ \|\phi_0\|_{H^s} + \|\psi_0\|_{H^l} \}^2 \quad (4.14)$$

e

$$\left\| \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \left\{ e^{it'\Delta/2} \phi_0 \cdot \overline{e^{it'\Delta/2} \phi_0} \right\} dt' \right\|_{H^l} \lesssim \|D^2 A^t(0,0)\|_{L_2} \|\phi_0\|_{H^s}^2, \quad (4.15)$$

para todo $\phi_0, \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Seguiremos agora com (4.14). Tendo em vista o Lema 1.2, consideremos $A, B, R \subset \mathbb{R}$, a serem escolhidos mais tarde, ϕ_0, ψ_0 tais que $|\widehat{\phi}_0| \geq \langle \cdot \rangle^{-s} \chi_A$, $|\widehat{\psi}_0| \geq \langle \cdot \rangle^{-l} \chi_B$ com $R - B \subset A$, $\|\phi_0\|_{H^s} \lesssim \|\chi_A\|_{L^2}$ e $\|\psi_0\|_{H^l} \lesssim \|\chi_B\|_{L^2}$. Escrevendo $\xi_2 = \xi - \xi_1$, a norma no lado esquerdo de (4.14) é igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \langle \xi \rangle^s \int_0^t e^{i(t-t')\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{it'\xi_1^2/2} \widehat{\phi}_0(\xi_1) e^{-t'/\mu} \widehat{\psi}_0(\xi_2) d\xi_1 dt' \right\|_{L^2} \\ & \sim \left\| \int_0^t e^{-t'/\mu} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^s e^{it'(\xi_1^2 - \xi_2^2)/2} \widehat{\phi}_0(\xi_1) \widehat{\psi}_0(\xi_2) d\xi_1 dt' \right\|_{L^2} \\ & \gtrsim \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} e^{-2t'/\mu} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^l} \cos\{(2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)t'\} \chi_A(\xi_1) \chi_B(\xi_2) d\xi_1 dt' \right\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Escolheremos os conjuntos A e B tais que para $\xi_1 \in A$ e $\xi_2 \in B$ tenhamos as seguintes estimativas

$$|t'(2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)| < 1, \text{ i.e. } |\cos\{t'(2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)\}| > 1/2$$

e

$$\frac{\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^l} \sim c = c(s, l, A, B). \quad (4.17)$$

Deste modo, o lado direito de (4.16) é

$$\begin{aligned} & \gtrsim c(s, l, A, B) \left\| \chi_A * \chi_B \int_0^t e^{-t'/\mu} dt' \right\|_{L^2} \\ & = c(s, l, A, B) \left\{ \int_0^t e^{-t'/\mu} dt' \right\} \|\chi_A * \chi_B\|_{L^2} \\ & \geq c(s, l, A, B) \mu(1 - e^{-t/\mu}) |R|^{1/2} |B|. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sendo o lado direito de (4.14) $\lesssim (|A|^{1/2} + |B|^{1/2})^2$, segue que

$$c(s, l, A, B) \mu(1 - e^{-t/\mu}) |R|^{1/2} |B| \lesssim (|A|^{1/2} + |B|^{1/2})^2. \quad (4.19)$$

Vamos então escolher A , B e R adequadamente. Fixemos $N > 0$ suficientemente grande. Consideremos

$$\begin{aligned} A = A_N &:= \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |2\xi_1 + N| < (100N\langle t \rangle)^{-1}\}, \\ B = B_N &:= \{\xi_2 \in \mathbb{R} : |\xi_2 - N| < (400N\langle t \rangle)^{-1}\}, \\ R = R_N &:= \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - N/2| < (400N\langle t \rangle)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Logo $R - B \subset A$, $|A| = (100N\langle t \rangle)^{-1}$, $|R| = |B| = (200N\langle t \rangle)^{-1}$. Também, se $\xi_1 \in A$ e $\xi_2 \in B$ pondo $a = -N/2$, $b = d = (200N\langle t \rangle)^{-1}$, $c = N$ no Lema 1.3 temos que

$$\langle \xi_1 \rangle \sim \langle \xi_2 \rangle \sim \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim N.$$

Portanto,

$$c(s, l, A, B) \sim \frac{\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^l} \sim N^{-l}.$$

Também,

$$|t'| |2\xi_1 \xi_2 + \xi_2^2| \leq |t'| \left| \frac{5}{400N\langle t' \rangle} \right| \cdot \left| \frac{1}{400N\langle t' \rangle} + N \right| \leq 5/400.$$

Deste modo, da desigualdade (4.19) obtemos

$$c(t)N^{-l}N^{-1/2}N^{-1}\langle t \rangle^{-3/2} \lesssim N^{-1},$$

e como N é arbitrariamente grande, devemos ter $l > -1/2$.

Utilizaremos as mesmas ideias para trabalhar agora com a desigualdade (4.15). Consideremos $\phi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{\phi}_0 \gtrsim \langle \cdot \rangle^{-s} \chi_{A \cup B}$ com $\|\phi_0\|_{H^s} \lesssim \|\chi_{A \cup B}\|_{L^2}$, onde $A, B, R \subset \mathbb{R}$ serão escolhidos mais tarde. Escrevendo $\xi_2 = \xi - \xi_1$ o lado esquerdo de (4.15) é igual a

$$\begin{aligned} & \frac{2\lambda}{\mu\sqrt{2\pi}} \left\| \langle \xi \rangle^l \Re \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \int_{\mathbb{R}} e^{-it'\xi_1^2/2} \widehat{\phi}_0(\xi_1) e^{it'\xi_2^2/2} \overline{\widehat{\phi}_0(-\xi_2)} d\xi_1 dt' \right\|_{L^2} \\ & \gtrsim \left\| \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} \Re \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^l}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} e^{-it'(\xi_1^2 - \xi_2^2)/2} \chi_{A \cup B}(\xi_1) \chi_{-A \cup B}(\xi_2) d\xi_1 dt' \right\|_{L^2} \\ & \gtrsim \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} e^{(t-2t')/\mu} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle^l}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} \cos\{t'(\xi_1^2 - \xi_2^2)\} \chi_A(\xi_1) \chi_B(\xi_2) d\xi_1 dt' \right\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como antes, obteremos uma estimativa por cima para o fator

$$\frac{\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle^l}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} \cos\{t'(\xi_1^2 - \xi_2^2)\}$$

de duas maneiras. Fixando $N > 0$. Na primeira maneira escolhemos

$$\begin{aligned} A = A_N &:= \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |\xi_1 - N| < (100N\langle t \rangle)^{-1}\}, \\ B = B_N &:= \{\xi_2 \in \mathbb{R} : |\xi_2 + N| < (400N\langle t \rangle)^{-1}\}, \\ R = R_N &:= \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| < (400N\langle t \rangle)^{-1}\}, \end{aligned}$$

temos que $R - B \subset A$ e $|A| = (50N\langle t \rangle)^{-1}$, $|B| = |R| = (200N\langle t \rangle)^{-1}$. Também, se $\xi_1 \in A$ e $\xi_2 \in B$, temos que

$$\langle \xi_1 \rangle \sim \langle \xi_2 \rangle \sim N \quad \text{e} \quad \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim \langle N^{-1} \rangle \sim 1,$$

e

$$|\xi_1^2 - \xi_2^2| = |\xi_1 + \xi_2| |\xi_1 - \xi_2| \leq \frac{5}{400N\langle t \rangle} 4N \leq \frac{1}{20\langle t \rangle} \leq \frac{1}{20\langle 2t' \rangle}, \quad t' < t/2.$$

Portanto, analogamente ao que foi feito para obtermos a desigualdade (4.19), obtemos

$$\tilde{c}(t)N^{-2s}N^{-1/2}N^{-1}\langle t \rangle^{-1/2} \lesssim N^{-1},$$

e como $N > 0$ é arbitrário, segue que $s > -1/4$. Agora, na segunda maneira, considerando

$$A = A_N := \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |\xi_1 + N| < (100N\langle t \rangle)^{-1}\},$$

$$B = B_N := \{\xi_2 \in \mathbb{R} : |\xi_2 + N| < (400N\langle t \rangle)^{-1}\},$$

$$R = R_N := \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi + 2N| < (400N\langle t \rangle)^{-1}\},$$

temos que $R - B \subset A$ e $|A| = (50N\langle t \rangle)^{-1}$, $|B| = |R| = (200N\langle t \rangle)^{-1}$. Também, se $\xi_1 \in A$ e $\xi_2 \in B$, temos que

$$\langle \xi_1 \rangle \sim \langle \xi_2 \rangle \sim \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim N$$

e

$$|\xi_1^2 - \xi_2^2| = |\xi_1 + \xi_2| |\xi_1 - \xi_2| \leq 4N \frac{5}{400N\langle t \rangle} \leq \frac{1}{20\langle t \rangle} \leq \frac{1}{20\langle 2t' \rangle}, \quad t' < t/2.$$

Portanto, analogamente ao que foi feito para obtermos a desigualdade (4.19), obtemos

$$\tilde{c}(t)N^l N^{-2s} N^{-1/2} N^{-1} \langle t \rangle^{-1/2} \lesssim N^{-1},$$

e como $N > 0$ é arbitrário, segue que $l - 2s < 1/2$.

□

No próximo resultado, seguiremos as mesmas linhas da demonstração anterior. Será importante termos liberdade de escolha para $t \in [0, T]$: faremos $t \rightarrow 0$ nas constantes $c(t)$ e $\tilde{c}(t)$ que figuram nas estimativas anteriores.

Teorema 4.2. *Suponhamos que o P.V.I. (S D) seja localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}) \times H^l(\mathbb{R})$. Se (s, l) são tais que*

$$|l - s| > 2,$$

então a aplicação dado-solução A , dada em (4.1), não é C^2 na origem. (ver Gráfico 4)

Demonstração. Se A for duas vezes Fréchet derivável na origem, então $D^2A(0, 0) \in \mathcal{L}_2(C([0, T] : H^s \times H^l) : \mathbb{C})$ e para todo $t \in [0, T]$ vale

$$\left\| \frac{\partial^2 A^t}{\partial(\phi, \psi)^2}(0, 0) \right\|_{H^s \times H^l} \leq \sup_{t \in [0, T]} \|D^2A^t(0, 0)\|_{\mathcal{L}_2} \|\phi, \psi\|_{H^s \times H^l}^2, \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (4.21)$$

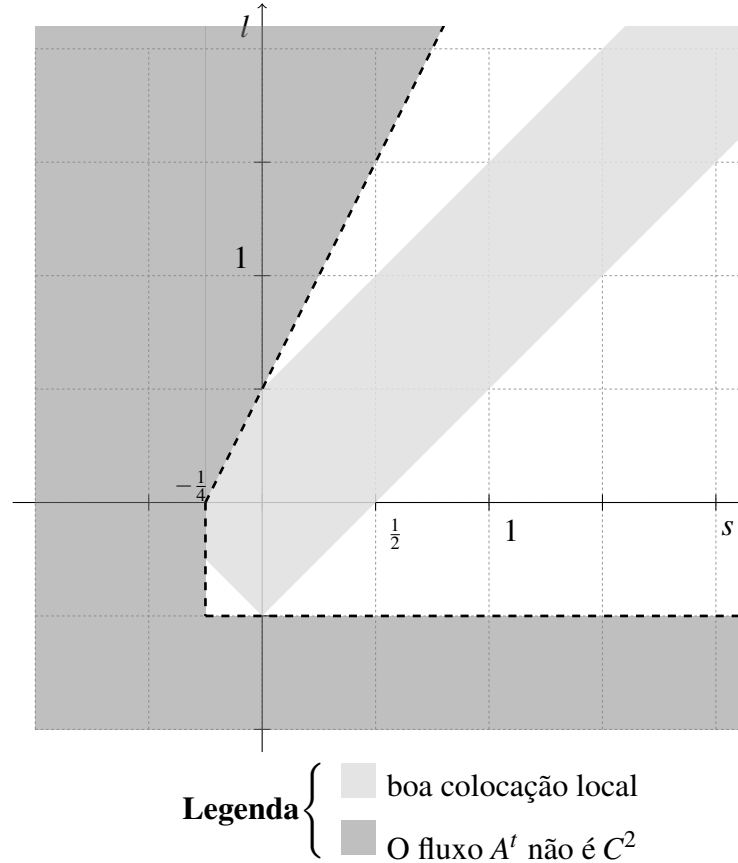


Gráfico 3: Teorema 4.1

Lembrando das desigualdades (4.14), (4.15) e todas as reduções feitas a partir delas, devemos controlar as quantidades

$$\frac{\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^l} \cos\{t'(2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)\} \quad (4.22)$$

e

$$\frac{\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle^l}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} \cos\{t'(\xi_1^2 - \xi_2^2)\}, \quad (4.23)$$

respectivamente. Inicialmente, observamos que

$$c(t) = \int_0^t e^{-t'/\mu} dt' \geq \int_0^t 1/2 dt' = t/2, \quad \text{se } t \leq \mu \ln 2 \quad (4.24)$$

e também

$$\tilde{c}(t) = \int_0^t e^{-(t-t')/\mu} dt' = \int_0^t e^{-\tau/\mu} d\tau \geq t/2, \quad \text{se } t \leq \mu \ln 2. \quad (4.25)$$

Com isto em mãos, vamos estimar as quantidades (4.22) e (4.23). Fixemos $N > 0$ suficientemente grande e consideremos

$$t := t_N := 1/40N^2$$

$$A := \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |\xi_1| < 1/2\},$$

$$B := \{\xi_2 \in \mathbb{R} : |\xi_2 - N| < 1/4\},$$

$$R := \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - N| < 1/4\}.$$

Temos que $R - B \subset A$, $|A| \sim |B| \sim |R| = 1/2$,

$$c(t) = c(t_N) \gtrsim 1/N^2 \quad \text{e} \quad \tilde{c}(t) = \tilde{c}(t_N) \gtrsim 1/N^2$$

$$\langle \xi_1 \rangle \sim 1, \quad \langle \xi_2 \rangle \sim \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim N$$

e

$$|t'(2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)| < 1 \quad \text{e} \quad |t'(\xi_1^2 - \xi_2^2)| < 1, \quad \text{se } t' < t/2.$$

Portanto,

$$(4.22) \gtrsim N^{s-l} \quad \text{e} \quad (4.23) \gtrsim N^{l-s}$$

e argumentando como na desigualdade (4.19) temos que

$$\frac{1}{N^2} N^{s-l} \lesssim 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{N^2} N^{l-s},$$

ou seja, $s - l < 2$ e $l - s < 2$, i.e., $|s - l| < 2$. □

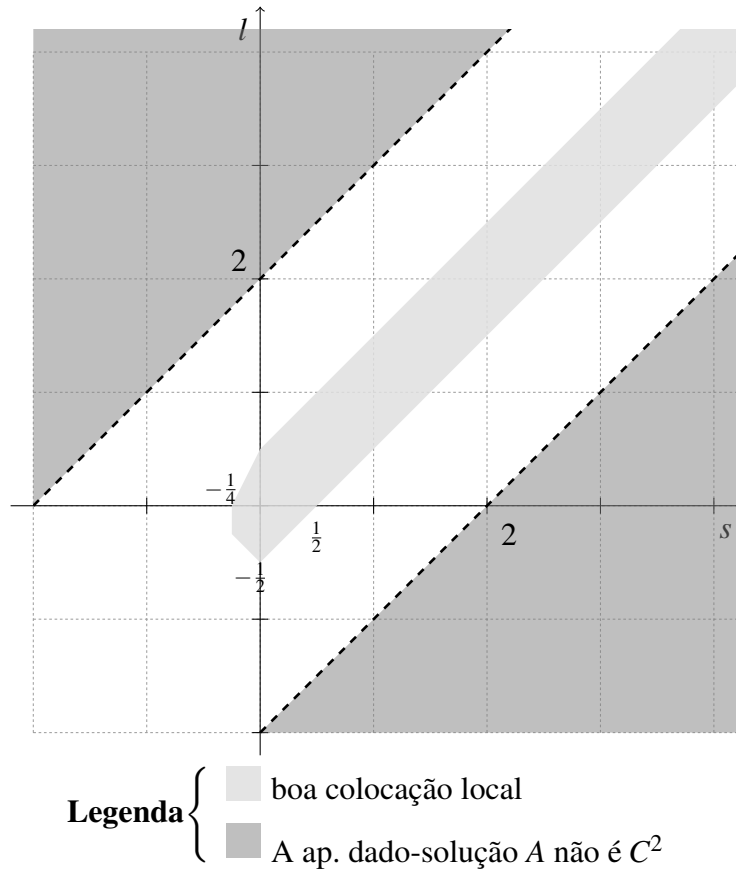


Gráfico 4: Teorema 4.2

Observação 4.3. O sucesso destes dois Teoremas se deve ao controle das quantidades

$$\frac{\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^l} \cos\{t'(2\xi_1 + \xi_2)\xi_2\} \quad (4.26)$$

e

$$\frac{\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle^l}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} \cos \left\{ t' \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 - \xi_2)} \right\}. \quad (4.27)$$

Temos que relacionar os índices (s, l) , de alguma maneira, através destas quantidades. Para explicarmos como isto foi feito, introduzimos a seguinte nomenclatura: uma frequência ξ é dita ser alta e escrevemos $|\xi| \simeq N$, se $|\xi - N| \lesssim N^{-1}$. Também, quando a frequência for dita baixa, escrevemos $|\xi| \simeq 1$, para exprimir que $|\xi| \lesssim N^{-1}$. Note que a frequência fica cada vez mais próxima de N (alta) ou 0 (baixa), quando N cresce. Através do Lema 1.3 transferimos esta nomenclatura também para $\langle \xi \rangle$: $|\xi| \simeq N \Leftrightarrow \langle \xi \rangle \sim N$ e $|\xi| \simeq 1 \Leftrightarrow \langle \xi \rangle \sim 1$.

Com respeito ao Teorema 4.1, dividimos em duas etapas. Analisando a 1ª quantidade, vemos que:

- (a) Se ξ_1 e ξ_2 forem baixas, controlamos o argumento que aparece no termo trigonométrico, mas $\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim \langle \xi_1 \rangle \sim \langle \xi_2 \rangle \sim 1$ e não teremos nenhuma relação entre s e l .
- (b) Se ξ_1 é alta e ξ_2 é baixa, teremos $\xi_1 + \xi_2$ também alta e portanto um cancelamento com a frequência ξ_1 e mais uma vez não teríamos relação entre s e l .
- (c) Por outro lado, se ξ_1 for baixa e ξ_2 alta, teremos $\xi_1 + \xi_2$ alta, mas neste caso não conseguiremos controlar o argumento $(2\xi_1 + \xi_2)\xi_2$, pois ξ_2 e a soma são altas.
- (d) Com isto, restou estudarmos a interação ξ_1 e ξ_2 altas, e foi o que fizemos. Para que o fator $2\xi_1 + \xi_2$ fique pequeno (da ordem de N^{-1}) basta considerarmos $|\xi_1| \simeq N/2$ e $|\xi_2| \simeq N$ com $\xi_1 = -\xi_2$ (simétricos). Controlamos $(2\xi_1 + \xi_2)\xi_2$ mas, infelizmente, perdemos o fator s , pois $\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim \langle \xi_1 \rangle \sim \langle \xi_2 \rangle \sim N$, contudo ganhamos uma relação usando o denominador da expressão.

Com relação à 2ª quantidade, analisando como antes para obtermos uma relação entre s e l , trabalhamos com:

- (a) $\xi_1 + \xi_2$ alta e $\xi_1 - \xi_2$ baixa (i.e., ambas são altas e simétricas) ou
- (b) $\xi_1 + \xi_2$ baixa e $\xi_1 - \xi_2$ alta (i.e., ambas são altas mas com mesmo sinal).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No que se refere a boa colocação global do sistema Schrödinger-Debye, em dimensão $n = 1$ e $n = 2$ estamos estudando a viabilidade de aplicarmos as mesmas ideias desenvolvidas neste trabalho em outros pontos da região onde se conhece a boa colocação local. Pretendemos estudar os métodos de interpolação no contexto dos espaços de Bourgain, afim de melhorar os resultados obtidos nos Teoremas 3 e 4.

Ainda no intuito de obtermos resultados globais, precisamos de respostas afirmativas sobre a boa colocação local em regiões que não foram cobertas em [13] e [14]. Pretendemos seguir as ideias desenvolvidas em [1] e [21], construindo espaços de Bourgain modificados, possibilitando argumentar com o Teorema do ponto fixo, como fizemos na Seção 1.4. Estas modificações foram introduzidas em tais trabalhos afim de se obter estimativas bilineares nestes novos espaços, uma vez que, no contexto dos espaços de Bourgain clássicos, não mais conseguimos tais estimativas: em [13], por exemplo, encontramos alguns contra-exemplos em dimensão $n = 1$.

Com relação ao estudo da má colocação, em nosso trabalho obtivemos resultados somente em dimensão $n = 1$. Pretendemos obter resultados análogos também em dimensão $n = 2$. Além disso, sabemos que em [1] foi desenvolvida uma teoria abstrata de boa colocação local e que permite também responder em que regularidade H^s a aplicação dado-solução deixa de ser contínua. Deste modo, estudaremos maneiras de adaptar estes resultados para o sistema (S D), afim de passarmos os resultados de C^2 - má colocação, aqui obtidos, para C^0 -má colocação.

Referências

- [1] I. Bejenaru, T. Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for quadratic non-linear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **233** (2006), p. 228-259.
- [2] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces: An introduction*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **223**: A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag (1976).
- [3] B. Bidegaray, *On the Cauchy problem for systems occuring in nonlinear optics*, Adv. Diff. Equ., **3** (1998), p. 473-496.
- [4] B. Bidegaray, *The Cauchy problem for Schrödinger-Debye equations*, Math. Models Met. Appl. Sci., **10**, N° 3 (2000), p. 1-9.
- [5] J. Bona, R. Scott, *Solutions of the Korteweg-De Vries equation in fractional order Sobolev Spaces*, Duke Math. Journal, **43**, No. **1** (1976), p. 87-99.
- [6] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to the nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations. II. KdV-equation.*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), p. 107-156, p. 209-262.
- [7] J. Bourgain, *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations*, Amer. Math. Society, Colloquium Publications, **46** (1999).
- [8] X. Carvajal, P. Gamboa, *Global well-posedness for the critical Schrödinger-Debye system*, Dynamics of PDE, **11** (2014), p. 251-268.
- [9] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, *Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative*, SIAM J. Math. Analysis, **33** (2001) p. 649-666.
- [10] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$* , J. Amer. Math. Soc., **16**, No. **3** (2003), p. 705-749.
- [11] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, *Multilinear estimates for periodic KdV equations and applications*, J. Funct. Analysis, **211** (2004) p. 173-218.
- [12] A. J. Corcho, F. Linares, *Well-Posedness for the Schrödinger-Debye Equation*, Contemporary Mathematics, **362** (2004), p. 113-131.
- [13] A. J. Corcho, C. Matheus, *Sharp Bilinear estimates and well-posedness for the 1-D Schrödinger-Debye system*, Diff. Int. Eq., **22** (2009), 357-391.

- [14] A. J. Corcho, F. Oliveira, J. D. Silva, *Local and global well-posedness for the critical Schrödinger-Debye system*, Proc. Amer. Math. Soc., **141** (2013), p. 3485-3499.
- [15] L. Domingues, *O Problema de Cauchy para um sistema Schrödinger-Benjamin-Ono*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro (2015).
- [16] G. Fonseca, F. Linares, G. Ponce, *Global well-posedness for the modified Korteweg-De Vries equation*, Comm. in Partial Dif. Equations, **24** (1999), p. 683-705.
- [17] J. Ginibre, *Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace (d'après Bourgain)*, Séminaire Bourbaki **796**, Astérisque **237** (1996), p. 163-187.
- [18] J. Ginibre, Y. Tsutsumi, G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov System*, J. Funct. Anal. **151** (1997), p. 384-436.
- [19] A. Grünrock, *New applications of the Fourier restriction norm method to wellposedness problems for nonlinear evolution equations*, PhD Thesis, Dem Fachbereich Mathematik der Bergischen Universität- Gesamthochschule Wuppertal, (2002).
- [20] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), p. 3323-3353.
- [21] N. Kishimoto, *Well-posedness of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation at the critical regularity*, Diff. Integral Eq., **22** (2009), p. 447-464.
- [22] J.-L. Lions, J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **19** (1964), p. 5-68.
- [23] F. Linares, G. Ponce, *"Introduction to Nonlinear Dispersive Equations"*, Universitext. Springer, New York, (2009). (ISBN 978-0-387-84898-3)
- [24] D.S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Inequalities for Functions and Their Integrals and Derivatives*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [25] H. Movljankulov, A. Filatov, *Ob adnom priblizennom metode postroenija resenii integral'nyh uravnenii*, Tr. In-ta Kibern, AN UzSSR, Tashkent, **12** (1972), 11-18.
- [26] A. C. Newell, J. V. Moloney, *Nonlinear Optics*, Addison-Wesley (1982).
- [27] J. Peetre, *A theory of interpolation of normed spaces*, Notas de Matemática, **39**.
- [28] R. Santos, *Boa colocação global do problema de valor inicial associado a equação modificada complexa de Korteweg-De Vries*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro (2011).

- [29] T. Tao, “*Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis*”, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **106**, the American Mathematical Society, (2006). (ISBN: 0-8218-4143-2)
- [30] L. Tartar, *Interpolation non lineaire et régularité*, J. Funct. Anal. **9**, (1972), p. 469-489.
- [31] L. Tartar, “*An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*”, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **3**, (2007).
- [32] N. Tzvetkov, *Remark on the local ill-posedness for KdV equation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **329** (1999), p. 1043-1047.