

Universidade Federal do Rio de Janeiro

SOBRE ALGUNS MODELOS DE EVOLUÇÃO NÃO LINEARES,
DEFINIDOS NA SEMIRRETA,
COM DISPERSÕES DO TIPO AIRY E SCHRÖDINGER

Márcio Cavalcante de Melo

2016



SOBRE ALGUNS MODELOS DE EVOLUÇÃO NÃO LINEARES,
DEFINIDOS NA SEMIRRETA, COM DISPERSÕES DO TIPO AIRY E
SCHRÖDINGER

Márcio Cavalcante de Melo

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Orientador: Adán José Corcho Fernández

Rio de Janeiro

Janeiro de 2016

CIP - Catalogação na Publicação

M528s Melo, Márcio Cavalcante de
Sobre alguns modelos de evolução não lineares,
definidos na semirreta, com dispersões do tipo
Airy e Schrödinger / Márcio Cavalcante de Melo. -
Rio de Janeiro, 2016.
148 f.

Orientador: Adán José Corcho Fernández.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, 2016.

1. Problema de valor inicial e de fronteira. 2. Sistema de Schrödinger-Korteweg-de Vries. 3. Equações de Schrödinger. 4. Semirreta. I. Fernández, Adán José Corcho, orient. II. Título.

SOBRE ALGUNS MODELOS DE EVOLUÇÃO NÃO LINEARES,
DEFINIDOS NA SEMIRRETA, COM DISPERSÕES DO TIPO AIRY
E SCHRÖDINGER

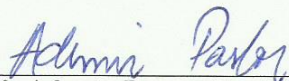
Márcio Cavalcante de Melo
Orientador: Adán José Corcho Fernández

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Aprovada por:



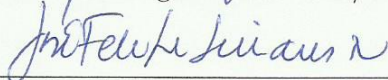
Presidente, Prof. Adán José Corcho Fernández - IM/UFRJ



Prof. Ademir Pastor Ferreira - IMECC/Unicamp



Prof. Jaime Angulo Pava - IME/USP



Prof. Jose Felipe Linares Ramirez - IMPA



Prof. Prof. Xavier Carvajal Paredes - IM/UFRJ

Rio de Janeiro
Janeiro de 2016

Resumo

A proposta deste trabalho é o estudo do problema de valor inicial e de fronteira para o sistema de Schrödinger-Korteweg-de Vries e para uma certa classe de equações de Schrödinger com termos não lineares de ordem quadrática, ambos definidos na semirreta real. Em cada um dos casos obtemos resultados de boa colocação local em espaços de Sobolev com baixa regularidade. Os argumentos utilizadas para provar os resultados obtidos baseiam-se em técnicas recentes desenvolvidas por Kenig, Colliander e Holmer no estudo de problemas similares relacionados às equações de Korteweg-de Vries e de Schrödinger, com não linearidade do tipo $|u|^{\alpha-1}u$.

Palavras-chave: Problema de valor inicial e de fronteira, sistema de Schrödinger-Korteweg-de Vries, equações de Schrödinger, semirreta.

Abstract

The purpose of this work is the study of the initial-boundary value problem for the Schrödinger-Korteweg-de Vries system and for a class of quadratic nonlinear Schrödinger equations, both defined in the half-line. In each case, we obtain local well-posedness results in Sobolev spaces with low regularity. The arguments used to prove our results are based on the techniques developed by Kenig, Colliander and Holmer to study the related problems for Korteweg-de Vries and nonlinear Schrödinger equation with non-linearity $|u|^{\alpha-1}u$.

Key-words: Initial-boundary value problem, Schrödinger-Korteweg-de Vries system, Schrödinger equation, half-line.

Sumário

Introdução	1
Notações	10
1 Preliminares	12
1.1 Espaços de Sobolev	12
1.2 Espaços de Bourgain	13
1.3 Integração fracionária de Riemann-Liouville	14
1.4 Desigualdades Auxiliares	16
2 O PVIF para o sistema NLS-KdV na semirreta	19
2.1 Introdução e histórico do modelo	19
2.2 Principais resultados	21
2.3 Versões lineares	27
2.3.1 Equação Linear de Schrödinger	28
2.3.2 Uma família analítica de operadores forçantes associada ao grupo de Schrödinger	35
2.3.3 Equação Linear de KdV	45
2.3.4 Uma família analítica de operadores forçantes associada ao grupo de Airy	49
2.4 Estimativas para o operador Duhamel	53
2.4.1 Estimativas para o operador Duhamel associado ao grupo de Schrödinger	54
2.4.2 Estimativas para o operador Duhamel associado ao grupo de Airy . .	58
2.5 Estimativas não lineares	59

2.5.1	Estimativas conhecidas	59
2.5.2	Estimativas dos termos acoplados	60
2.6	Boa Colocação local para o Sistema SK em $\mathbb{R}^+$	75
2.6.1	Prova do Teorema 2.1 na região $\mathcal{D}_1$	75
2.6.2	Prova do Teorema 2.1 na região $\mathcal{D}_2$	80
2.6.3	Prova do Teorema 2.2 na região $\mathcal{D}_3$	85
2.6.4	Prova do Teorema 2.2 na região $\mathcal{D}_4$	90
2.7	Boa Colocação local para o Sistema SK em $\mathbb{R}^-$	90
2.7.1	Prova do Teorema 2.3 na região $\mathcal{E}_1$	91
2.7.2	Prova do Teorema 2.3 na região $\mathcal{E}_2$	95
2.7.3	Prova do Teorema 2.4 na região $\mathcal{E}_3$	96
2.7.4	Prova do Teorema 2.4 na região $\mathcal{E}_4$	99
3	O PVIF para equações de Schrödinger com não linearidade quadrática na semirreta	100
3.1	Introdução e principais resultados	100
3.2	Versão Linear	103
3.2.1	Equação linear de Schrödinger em $\mathbb{R}$	104
3.2.2	Operador forçante de fronteira	105
3.2.3	Uma família analítica de operadores forçantes de Duhamel	106
3.3	Versão não linear	114
3.4	Estimativas bilineares	115
3.4.1	Prova do Lema 3.6	116
3.4.2	Prova do Lema 3.7	123
3.4.3	Prova do Lema 3.8	127
3.5	Prova do Teorema 3.1	132
	Conclusão	135
	Referências Bibliográficas	136

Lista de Figuras

2.1	Regiões descritas nos Teoremas 2.1 e 2.2	25
2.2	Regiões descritas nos Teoremas 2.3 e 2.4	26

Agradecimentos

Ao meu orientador Adán Corcho, um amigo, por sua orientação e confiança depositada em mim.

Aos membros da banca, por terem aceitado participar da minha defesa, pelas sugestões no trabalho, por terem me incentivado e apoiado nesta jornada.

A todos os professores do programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da UFRJ, em especial ao Didier Pilod, Xavier Carvajal e Nílson Bernardes pela formação que me deram.

Aos professores do Instituto de Matemática da UFAL, por sempre me incentivar e apoiar, em especial o professor Krerley Oliveira.

A Capes pelo apoio financeiro.

Ao Rafael Nóbrega por ter me recebido bem em seu apartamento.

Aos amigos Aílton, Davi, Daniel, Edileno, Isnaldo, Ítalo, Gleydon, Jamerson, Rafael e Rizwuan pela grande convivência.

Aos amigos do grupo de estudos de equações dispersivas Adán, Didier, Gastão, Leandro, Raphael e Xavier pelos momentos de aprendizagem.

Aos amigos do IM-UFRJ Abraham, Andres, Andrés, Armando, Bernardo, Davi, Daniel, Dennis, Diego, Dionicio, Freddy, Galindo, Gastão, Gladston, Gerardo, Gian, Jennyffer, Jonny, Jorge, José, Leonardo, Liliana, Oscar, Rafael, Raphael, Renan, Roberto, Rômulo, Rodrigo, Rizwuan, Sara, Vinícius e Walter por terem tornado esta jornada agradável.

A toda minha família, que mesmo com uma certa distância me deu todo o suporte e carinho durante esta jornada.

A minha esposa Jisleyane por seu apoio e amor incondicional.

Introdução

Modelos dispersivos não lineares aparecem em vários ramos da Física-Matemática, como por exemplo, em mecânica dos fluidos e mecânica quântica. Seus representantes mais famosos são dados pela equação de Korteweg-de Vries (KdV):

$$\partial_t v(x, t) + \partial_x^2 v(x, t) + v \partial_x v(x, t) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

e pela equação não linear de Schrödinger (NLS):

$$i \partial_x u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) = \beta |u(x, t)|^{\alpha-1} u(x, t), \quad \alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

O estudo matemático da dinâmica desses modelos tem atraído o interesse da comunidade matemática nas últimas décadas. Em particular, o problema de entender a boa colocação local (BCL) para o problema de valor inicial (PVI) em $\mathbb{R}$, relativo a esses dois modelos clássicos, têm sido estudado de forma bastante ampla e com um nível significativo de avanço no momento atual. De forma mais precisa, os PVI associados às equações KdV e NLS são definidos, respectivamente, do modo seguinte:

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e

$$(2) \quad \begin{cases} i \partial_t u + \partial_x^2 u = \beta |u|^{\alpha-1} u, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde os dados iniciais u_0, v_0 são considerados num espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ com $s \in \mathbb{R}$. A escolha desse ambiente funcional para colocar os dados iniciais é natural já que existem quantidades físicas conservadas pelo fluxo de ambos modelos, bem definidas nos espaços de

Sobolev, para alguns valores de $s \in \mathbb{R}$. Além disso, as correspondentes partes lineares de ambos modelos possuem estrutura de grupo unitário contínuo nesses espaços. Para uma leitura bastante detalhada sobre o histórico e estado atual do avanço das pesquisas sobre esses problemas o leitor pode consultar os textos [33] ou [39].

Por outro lado, desde ponto de vista prático, as equações que regem os modelos (1) e (2) nem sempre estão associados a modelos físicos que obedecem a problemas de valores iniciais definidos em $\mathbb{R}$. De fato, problemas de valor inicial e de fronteira (PVIFs), definidos na semirreta, aparecem naturalmente em situações da Física-Matemática. Por exemplo, quando uma sequência de ondas é gerada por um aparelho, o qual é colocado na extremidade de um canal (veja [47]), a configuração física de tal situação é modelada pelo seguinte problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) associado à equação KdV:

$$(3) \quad \begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0, & (x, t) \in (0, \infty) \times (0, T), \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in (0, +\infty), \\ v(0, t) = g(t), & t \in (0, T), \end{cases}$$

onde a variável x é proporcional à distância ao longo do canal, o ponto $x = 0$ é um ponto próximo de onde o gerador de ondas está situado, a variável t é proporcional ao tempo decorrido, sendo o tempo inicial considerado no momento que a superfície da água está em repouso e o gerador de ondas é ativado e a solução $v(x, t)$ é proporcional ao desvio da superfície livre no ponto x no instante de tempo t . Para cada tempo t , o valor $g(t)$ é a medida do desvio da superfície livre com respeito a sua posição inicial em $x = 0$, no tempo t . Em [3] pode ser encontrado maiores detalhes sobre este modelo.

Outro problema clássico é o PVIF associado à NLS:

$$(4) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \beta u|u|^{\alpha-1}, & (x, t) \in (0, \infty) \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, +\infty), \\ u(0, t) = f(t), & t \in (0, T). \end{cases}$$

As técnicas matemáticas usadas para tratar o PVI em $\mathbb{R}$ não podem ser aplicadas diretamente na semirreta para obter resultados análogos de boa colocação. Por tal motivo, a teoria para os PVIFs (3) e (4) tem avançado de maneira mais lenta, quando comparado com a teoria de problemas de valor inicial dos respectivos modelos em $\mathbb{R}$.

A seguir comentamos os principais resultados conhecidos referente aos PVIFs (PVIFs) (3) e (4). Na maior parte da literatura, estes problemas aparecem com as seguintes hipóteses:

$$(u_0, f) \in H^s(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+),$$

$$(v_0, g) \in H^k(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+),$$

onde a escolha dessas configurações iniciais em tempo e espaço vem do comportamento das equações lineares de Schrödinger e Korteweg-de Vries em $\mathbb{R}$. De maneira mais precisa, sejam

$$e^{it\partial_x^2} \quad \text{e} \quad e^{-t\partial_x^3},$$

respectivamente, os grupos de operadores que resolvem as equações lineares de Schrödinger e Korteweg-de Vries em $\mathbb{R}$, então o efeito suavizante do tipo Kato para cada um destes grupos é dado pelas desigualdades:

$$\|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\phi\|_{L_x^\infty H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t)} \leq c\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^+)},$$

e

$$\|\psi(t)e^{t\partial_x^3}\phi\|_{L_x^\infty H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t)} \leq c\|\phi\|_{H^k(\mathbb{R}^+)}.$$

Devido à existência de traços há necessidade de assumir as seguintes condições de compatibilidade:

$$u(0) = f(0), \quad \text{se } s > 1/2,$$

$$v(0) = g(0), \quad \text{se } k > 1/2.$$

I.1 Resultados para o PVIF (3)

O estudo matemático do PVIF (3) começou com Ton em [37], que obteve resultado de existência e unicidade no caso em que u_0 é suave e $g(t) \equiv 0$. Em [4] e [5] Bona e Winther mostraram existência e unicidade global nos espaços $H^k(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$ para $k \in \mathbb{Z}^+$. Mais tarde, fazendo uso do operador transformada de Laplace, Bona, Sun e Zhang (ver [6]) obtiveram resultados de boa colocação local em $H^k(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$ para $k > \frac{3}{4}$. Por outro lado, em [11], Colliander e Kenig, introduziram uma técnica baseada na Integral

Fracionária de Riemann-Liouville e trataram do PVIF para equação de KdV modificada e, em particular, obtiveram resultados de boa colocação local para (3) em $L^2(\mathbb{R}^+) \times H^{1/3}(\mathbb{R}^+)$, mais precisamente eles provaram o seguinte resultado:

Teorema A (Colliander-Kenig, 2002). *Sejam $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e $g \in H^{1/3}(\mathbb{R}^+)$, então existem um tempo positivo T , dependendo da soma $\|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|g\|_{H^{1/3}(\mathbb{R}^+)}$, e uma solução v do PVIF (3), no sentido das distribuições, tal que $v \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^+))$. Além disso, a aplicação*

$$(v_0, g) \longmapsto v(\cdot, t),$$

que leva dados iniciais e de fronteira na solução do problema é localmente Lipschitz contínua de $L^2(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{1}{3}}(\mathbb{R}^+)$ em $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^+))$.

O artigo [11] pode ser visto como o primeiro trabalho que apresentou uma técnica de caráter bastante geral para obter soluções de problemas de valores iniciais e de fronteira para equações dispersivas não lineares. A técnica consiste em substituir o PVIF (3) por um PVI, definido em $\mathbb{R}$, acrescido de um termo forçante, isto é,

$$(5) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{v} + \partial_x^3 \tilde{v} + \tilde{v} \partial_x \tilde{v} + \delta_0(x) h(t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ \tilde{v}(x, 0) = \tilde{v}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $\tilde{v}_0$ é uma boa extensão de v_0 a toda sobre $\mathbb{R}$ e δ_0 é a distribuição delta de Dirac concentrada em zero. A função h é escolhida de modo a se ter $\tilde{v}(0, t) = g(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Após a construção da solução $\tilde{v}(x, t)$ de (5), a solução v do PVIF (3) é obtida por restrição, ou seja, $v(x, t) = \tilde{v}(x, t)|_{(0, +\infty) \times (0, T)}$.

Também ressaltamos que em 2004, no trabalho [14], Faminski obteve boa colocação global para $k \geq 0$ no espaço $H^k(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Recentemente, em 2006, Holmer (ver [23]) melhorou a técnica de Colliander e Kenig, ao estudar o PVIF (3), abordando também o caso da semirreta à esquerda, isto é, considerou o seguinte PVIF:

$$(6) \quad \begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0, & (x, t) \in (-\infty, 0) \times (0, T), \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in (-\infty, 0), \\ v(0, t) = g(t), \quad \partial_x v(0, t) = h(t), & t \in (0, T). \end{cases}$$

Neste ponto, é importante justificar o porquê para o PVIF (6) é necessário usar duas condições de fronteira ao invés de somente uma, como usado no problema na semirreta $\mathbb{R}^+$. Para

entender isso, consideramos $v(x, t)$ uma solução suave para a equação linear de KdV em $\mathbb{R}$, isto é,

$$(\partial_t + \partial_x^3)v(x, t) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando a equação por $v(x, t)$ e integrando por partes obtemos para todo $T > 0$ as igualdades

$$(7) \quad \int_0^{+\infty} v^2(x, T)dx = \int_0^{+\infty} v^2(x, 0)dx + \int_0^T \left[2v(0, t)\partial_x^2 v(0, t) - (\partial_x v(0, t))^2 \right] dt$$

e

$$(8) \quad \int_{-\infty}^0 v^2(x, T)dx = \int_{-\infty}^0 v^2(x, 0)dx - \int_0^T \left[2v(0, t)\partial_x^2 v(0, t) - (\partial_x v(0, t))^2 \right] dt.$$

Agora notamos os seguintes fatos importantes: se assumimos que $v(x, 0) = v(0, t) = 0$ para quaisquer $x > 0$ e $0 < t < T$, podemos concluir de (7) que $v(x, T) = 0$ para todo $x > 0$, i.e., teríamos a unicidade das soluções. Por outro lado, assumindo que $v(x, 0) = v(0, t) = 0$ para quaisquer $x < 0$ e $0 < t < T$, a igualdade (8) não é suficiente para concluir que $v(x, T) = 0$, daí acrescentando a hipótese adicional $\partial_x v(0, t) = 0$, podemos garantir que $v(x, T) = 0$, consequentemente obtemos a unicidade.

A seguir resumimos os resultados obtidos por Holmer em [23] para os problemas (3) e (6):

Teorema B (Holmer, 2006). *Considerar $k \in (-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.*

(a) *Sejam $v_0 \in H^k(\mathbb{R}^+)$ e $g \in H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$ e suponha, além disso, que temos a condição de compatibilidade $v(0) = f(0)$ quando $k > 1/2$. Então, existem um tempo positivo T , dependendo de $\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)}$, e uma solução v de (3) no sentido das distribuições tal que $v \in C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+))$. Além disso, a aplicação $(v_0, g) \mapsto v$ que leva dados iniciais e de fronteira na solução é analítica de $H^k(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$ em $C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+))$.*

(b) *Sejam $v_0 \in H^k(\mathbb{R}^-)$, $g \in H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$ e $h \in H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)$ e suponha, além disso, que temos a condição de compatibilidade $v(0) = f(0)$ quando $k > \frac{1}{2}$. Então, existem um tempo positivo T , dependendo de $\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)}$, e uma solução v*

de (6) no sentido das distribuições tal que $v \in C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+))$. Além disso, a aplicação $(v_0, g, h) \mapsto v$ que leva dados iniciais e de fronteira na solução é analítica $H^k(\mathbb{R}^-) \times H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)$ em $C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+))$.

Para provar o Teorema B o principal ingrediente usado por Holmer foi a definição de uma família de operadores forçantes de fronteira que generaliza o operador forçante e de fronteira que foi introduzido no trabalho de Colliander e Kenig.

I.2 Resultados para o PVIF (4)

No caso do PVIF associado à NLS existem resultados similares, alguns dos quais apresentamos a continuação.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado ou ilimitado, com fronteira $\partial\Omega$ suave. Consideramos o PVIF:

$$(9) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \beta u|u|^{\alpha-1}, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = f(x, t), & x \in \partial\Omega, t \in (0, T). \end{cases}$$

No caso em que $f = 0$ o PVIF (9) foi considerado nos trabalhos [8], [40], [41], [42] e [45]. Em [36] foi obtido um resultado de existência global para $f \in C_c^3(\partial\Omega)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$ e no caso em que $\beta > 0$. As soluções globais foram obtidas como limite de soluções de problemas aproximados, após várias estimativas a priori terem sido obtidas.

Com relação à semirreta ($\Omega = \mathbb{R}^+$), Bu e Carolle, utilizando técnicas de semigrupo e estimativas a priori, provaram em [9] que quando $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^+)$ e $f \in C^2(\mathbb{R}^+)$ com $u(0) = f(0)$ o PVIF (4) tem uma solução global $u \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^+)) \cap C(\mathbb{R}^+; H^2(\mathbb{R}^+))$, nas seguintes situações dos parâmetros: $(\alpha, \beta) \in (3, +\infty) \times \mathbb{R}^+$ e $\alpha = 3$ com qualquer $\beta \in \mathbb{R}$. Nesse trabalho, a continuidade com respeito às condições iniciais não foi discutida. Posteriormente, em [22], Holmer aplicou as técnicas de Colliander e Kenig para obter o seguinte resultado:

Teorema C (Holmer, 2005). *Dado $0 \leq s < \frac{1}{2}$, definimos $\alpha_s^* = \frac{5-2s}{1-2s}$.*

- (a) **Caso subcrítico:** Sejam $0 \leq s < \frac{1}{2}$ e $2 \leq \alpha < \alpha_s^*$ ou $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$ e $2 \leq \alpha < \infty$. Suponha que $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^+)$ e $f \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$, com $u(0) = f(0)$ quando $s > \frac{1}{2}$. Então, existe um tempo positivo $T > 0$, dependendo de $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(0,T)}$, e uma solução distribucional $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+))$ para o problema (4) tal que, a aplicação $(u_0, f) \mapsto u$, de $H^s(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$ em $([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+))$, que leva dados iniciais e de fronteira na solução $u(\cdot, t)$, é localmente Lipschitz contínua. Além disso, para $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$ a solução é única.
- (b) **Caso crítico:** Seja $0 \leq s < \frac{1}{2}$ e $\alpha = \alpha_s^*$. Suponha que $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^+)$ e $f \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Então, existem um tempo positivo $T > 0$, dependendo de u_0 e f , e uma solução distribucional $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+))$ de (4) tal que, a aplicação $(u_0, f) \mapsto u$, de $H^s(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$ em $([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+))$, que leva dados iniciais e de fronteira na solução é localmente Lipschitz contínua.

A prova do Teorema C envolve a introdução de um operador forçante análogo ao de Colliander e Kenig, combinando as propriedades do mesmo com as técnicas da prova clássica da boa colocação local do correspondente PVI (2), baseado em estimativas de tipo Strichartz e esquema de ponto fixo (veja [10]).

I.3 Objetivos de Pesquisa

Neste trabalho, temos como principal objetivo aplicar o método introduzido por Colliander e Kenig em [11] para resolver alguns PVIFs associados a certos modelos dispersivos definidos na semirreta, que até o atual momento somente tem sido estudados no contexto de PVI em $\mathbb{R}$.

O primeiro modelo a ser considerado é o sistema Schrödinger-Korteweg-de Vries (NLS-KdV), dado pelo acoplamento não linear da equação de Schrödinger com a KdV:

$$(10) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv + \beta u|u|^2, \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \frac{1}{2}\partial_x v^2 = \gamma \partial_x (|u|^2), \end{cases}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$ toma valores complexos e $v = v(x, t)$ toma valores reais. O PVI de

(10) em espaços de Sobolev, dado pelas equações (10) com as condições iniciais verificando

$$(11) \quad (u(x, 0), v(x, 0)) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R})$$

tem sido estudado nas últimas décadas. Aplicações físicas e resultados para o PVI (10)-(11) podem se encontrados em [2], [12] [16], [20], [24], [25], [35], [43] e [46].

O primeiro de nossos objetivos será estudar o PVIF vinculado ao sistema de Schrödinger-Korteweg-de Vries (NLS-KdV) tanto no caso da semirreta positiva ($\mathbb{R}^+$) como negativa ($\mathbb{R}^-$), em outras palavras, estudaremos os problemas:

$$(12) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv + \beta |u|^2, & (x, t) \in (0, +\infty) \times (0, T), \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \frac{1}{2} \partial_x v^2 = \gamma \partial_x (|u|^2), & (x, t) \in (0, \infty) \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in (0, \infty), \\ u(0, t) = f(t), \quad v(0, t) = g(t), & t \in (0, T), \end{cases}$$

e seu análogo na semirreta negativa:

$$(13) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv + \beta |u|^2, & (x, t) \in (-\infty, 0) \times (0, T), \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \frac{1}{2} \partial_x v^2 = \gamma \partial_x (|u|^2), & (x, t) \in (-\infty, 0) \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in (-\infty, 0), \\ u(0, t) = f(t), \quad v(0, t) = g(t), \quad \partial_x v(0, t) = h(t), & t \in (0, T). \end{cases}$$

Denotaremos por NLS-KDV+ e NLS-KdV-, respectivamente, os problemas (12) e (13).

A dificuldade de aplicação das técnicas desenvolvidas por Kenig, Colliander e Holmer radica em que teremos que fazer uma adaptação adequada do método no sentido de introduzir operadores forçantes adequados para obtermos a melhor regularidade possível. Além disso, no caso dos sistemas NLS-KdV+ e NLS-KdV- aparece uma complicação técnica a mais, que é o fato de termos a necessidade de obter novas estimativas que permitam controlar adequadamente os termos de acoplamentos não lineares, cujas iterações são oriundas de grupos dispersivos com características diferentes.

Também será nosso objetivo, estudar o PVIF para uma família de equações não lineares de Schrödinger com termos não lineares de tipo quadrático, isto é,

$$(14) \quad \begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = N_j(u, \bar{u}), & (x, t) \in (0, +\infty) \times (0, T), \quad j = 1, 2, 3, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, +\infty), \\ u(0, t) = f(t), & t \in (0, T), \end{cases}$$

onde $N_1(u, \bar{u}) = u^2$, $N_2(u, \bar{u}) = u\bar{u}$ or $N_3(u, \bar{u}) = \bar{u}^2$.

Em particular, para este modelo teremos que deduzir estimativas análogas às realizadas em [23], no contexto da KdV, para poder obter as regularidades esperadas em cada caso. Para informações sobre o PVI correspondente em espaços de Sobolev, i.e.,

$$(15) \quad \begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = N_j(u, \bar{u}), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \ j = 1, 2, 3, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases}$$

o leitor pode consultar os trabalhos [1], [30], [32] e [43]

Este trabalho é organizado do seguinte modo: no Capítulo 1 estabelecemos alguns pré-requisitos necessários que servirão de base para obter nossos resultados. O capítulo 2 é dedicado ao estudo dos PVIFs (12) e (13), onde faremos uma introdução mais detalhada do modelo original, descrevendo historicamente como foram aparecendo os principais resultados e apresentando de forma precisa os novos resultados obtidos na semirreta. No capítulo 3 estudamos o PVIF (14), também fazendo uma introdução mais precisa sobre o modelo e apresentando os novos resultados. Por fim, listamos alguns trabalhos relacionados com a pesquisa desenvolvida que encontram-se em andamento.

Notações

- $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$
- $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$
- Para todo o texto vamos fixar uma função corte $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi(t) = 1$ se $t \in [-1, 1]$ e $\text{supp } \psi \subset [-2, 2]$.
- $(\tau - i0)^\alpha$ é o limite no sentido das distribuições, $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} (\tau - i\gamma)^\alpha$.
- Para números positivos a e b , a notação $a \lesssim b$ significa que existe uma constante positiva c tal que $a \leq cb$ e a notação $a \sim b$ significa que $a \lesssim b$ e $b \lesssim a$. Já a notação $a \ll b$ significa que existe uma constante grande C de modo que $Ca < b$.
- $\langle a \rangle = 1 + |a|$.
- $S(\mathbb{R}^n)$, denota os espaço de Schwarz em $\mathbb{R}^n$.
- $S'(\mathbb{R}^n)$, denota o dual topológico de $S(\mathbb{R}^n)$.
- v.p. $\frac{1}{x}$ denota a distribuição temperada valor principal de $\frac{1}{x}$, isto é,
$$\text{v.p. } \frac{1}{x}(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx, \quad \phi \in S(\mathbb{R}).$$
- $C([0, T]; X)$ denota o espaço das funções contínuas em $[0, T]$ com valores em um espaço de Banach X , munido da norma $\|u\|_{C([0, T]; X)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_X$.
- $\|u\|_{X_1 \times X_2} := \|u\|_{X_1} + \|u\|_{X_2}$, onde X_1 e X_2 são espaços de Banach.

- Para $u = u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de u por $\hat{u} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$ e a transformada de Fourier inversa por $\check{u}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi$.
- Para $u = u(x, t) \in S'(\mathbb{R}^2)$, $\hat{u}(\xi, \tau)$ denota sua transformada de Fourier no espaço-tempo. $\mathcal{F}_x u(\xi, t)$ e $\mathcal{F}_t u(x, \tau)$ denotam as transformadas de Fourier de u na variável do espaço e tempo, respectivamente.
- $\partial_x^k u$ denota a derivada parcial de u , na variável x de ordem k .
- $\langle \xi \rangle := 1 + |\xi|$, se $\xi \in \mathbb{R}$.
- $\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} := \|\langle \xi \rangle^s \hat{u}(\xi)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}$.
- $\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R})} := \| |\xi|^s \hat{u}(\xi) \|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste texto, presume-se o conhecimento sobre alguns conceitos e resultados elementares de Teoria de Distribuições, Teoria da Medida, Análise Funcional, Espaços de Sobolev e Análise Harmônica.

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados preliminares que serão utilizados com certa frequência no decorrer do trabalho. Na Seção 1.1 apresentamos resultados básicos sobre espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^+$. Na Seção 1.2 definimos os Espaços de Bourgain introduzidos em [7]. Na Seção 1.3 apresentamos as principais propriedades do operador Integração Fracionária de Riemann-Liouville. Na seção 1.4 apresentamos algumas estimativas elementares que serão utilizadas na demonstração das estimativas não lineares em espaços de Bourgain.

1.1 Espaços de Sobolev

Definição 1.1. Para $s \geq 0$, definimos o espaço de Sobolev em $\mathbb{R}^+$ por

$$H^s(\mathbb{R}^+) = \{f = F|_{\mathbb{R}^+} : F \in H^s(\mathbb{R})\}$$

$$\text{e } \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} = \inf \|F\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Definição 1.2. Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço $H_0^s(\mathbb{R}^+)$ como o completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ sobre $H^s(\mathbb{R}^+)$.

Definição 1.3. Para $s < 0$ definimos $H^s(\mathbb{R}^+)$ como o espaço dual de $H_0^{-s}(\mathbb{R}^+)$.

O seguinte Lema trata de uma importante propriedade de $H^s(\mathbb{R}^+)$, quando $-\frac{1}{2} \leq s < \frac{1}{2}$.

Lema 1.1. Se $0 \leq s < \frac{1}{2}$, então $\|\psi f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R})}$ e $\|\psi f\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{\dot{H}^{-s}}$, onde c depende somente de s e ψ .

Demonstração. Consultar o Lema 2.8 em [11]. □

Lema 1.2. Se $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$, então $\|\chi_{[0,\infty)} f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{H^s(\mathbb{R})}$.

Demonstração. Veja o Lema 3.5 em [11]. □

Lema 1.3. Seja $\mu \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\partial_x^j \mu$ é limitada. Então, para $f \in H_0^s(\mathbb{R}^+)$, com $-\infty < s < +\infty$,

$$\|\mu f\|_{H_0^s(\mathbb{R}^+)} \leq \|f\|_{H_0^s(\mathbb{R}^+)}.$$

Demonstração. Consulte a Proposição 2.5 em [11]. □

Lema 1.4. Para $s \in (-\infty, \frac{1}{2}]$ o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^+)$.

Demonstração. Consulte [38]. □

Lema 1.5. Seja $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$. Se $f \in H_0^s(\mathbb{R}^+)$, então

$$\|f\|_{H_0^s(\mathbb{R}^+)} \sim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}.$$

Demonstração. Consulte as Proposições 2.6 e 2.7 em [11]. □

Lema 1.6. Se $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$, então

$$H_0^s(\mathbb{R}^+) = \{f \in H^s(\mathbb{R}^+); f(0) = 0\}.$$

Demonstração. Veja a Proposição 2.4 em [11]. □

1.2 Espaços de Bourgain

Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Considere o seguinte PVI abstrato:

$$(1.1) \quad \begin{cases} i\partial_t w - \phi(i\partial_x)w = F(w); & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Este problema pode ser reescrito na forma integral

$$w(t) = W_\phi(t)w_0 + \int_0^t W_\phi(t-t')F(w(t'))dt',$$

onde $W_\phi(t) = e^{-it\phi(i\partial_x)}$ é o grupo unitário que resolve a equação linear associado à (1.1).

Defina $X^{s,b}(\phi)$ como o completado do espaço de Schwarz $S(\mathbb{R}^2)$ com respeito à norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{X^{s,b}(\phi)} &= \|W_\phi(-t)u\|_{H_t^b(\mathbb{R}; H_x^s(\mathbb{R}))} \\ &= \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau \rangle^b \mathcal{F}(e^{it\phi(-i\partial_x)}u)(\xi, \tau)\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \\ &= \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau + \phi(\xi) \rangle^b \hat{u}(\xi, \tau)\|_{L_\tau^2 L_\xi^2}. \end{aligned}$$

Lema 1.7. Se $-\frac{1}{2} < d \leq 0 \leq b \leq d+1$, então para $w \in X^{s,d}(\phi)$ vale

$$\begin{aligned} \|\psi(t)W_\phi(t)w_0\|_{X^{s,b}(\phi)} &\leq c\|w_0\|_{H^s(\mathbb{R})}, \\ \left\| \psi(t) \int_0^t W_\phi(t-t')F(w(t'))dt' \right\|_{X^{s,b}(\phi)} &\leq c\|w\|_{X^{s,d}}. \end{aligned}$$

Demonstração. Consultar [18]. □

Lema 1.8. Sejam $-\frac{1}{2} < b' < b \leq 0$ ou $0 \leq b' < b < \frac{1}{2}$, $u \in X^{s,b}(\phi)$ e $s \in \mathbb{R}$. Vale a seguinte estimativa

$$\|\psi_T u\|_{X^{s,b'}(\phi)} \leq cT^{b-b'}\|u\|_{X^{s,b}(\phi)}.$$

Demonstração. Consultar [19]. □

Neste trabalho vamos adotar as seguintes notações: No Capítulo 2 usamos $X^{s,b}(\xi^2) = X^{s,b}$ e $X^{s,b}(-\xi^3) = Y^{s,b}$ e no Capítulo 3 usamos $X^{s,b}(-\xi^2) = X^{s,b}$.

Para o leitor interessado no método de Bourgain, fazemos referência ao trabalho [19].

1.3 Integração fracionária de Riemann-Liouville

Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} \alpha > 0$. A distribuição temperada $\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ é dada por:

$$\left\langle \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, f \right\rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Integrando por partes, se $\text{Re } \alpha > 0$, temos que

$$(1.2) \quad \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \partial_t^k \left[\frac{t_+^{\alpha+k-1}}{\Gamma(\alpha+k)} \right],$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Esta expressão é usada, para estender $\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

Analogamente, para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re } \alpha > 0$ definimos a distribuição temperada $\frac{t_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ por

$$(1.3) \quad \left\langle \frac{t_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, f \right\rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^0 (-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Uma mudança de contorno, prova que

$$(1.4) \quad \left[\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^\wedge (\tau) = e^{-\frac{1}{2}\pi\alpha i} (\tau - i0)^{-\alpha},$$

onde $(\tau - i0)^{-\alpha}$ é o limite no sentido das distribuições.

Além disso, se $\alpha \notin \mathbb{Z}$, temos

$$(1.5) \quad \left[\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^\wedge (\tau) = e^{-1/2\pi\alpha} \tau_+^{-\alpha} + e^{1/2\pi\alpha} \tau_-^{-\alpha},$$

onde τ_+ e τ_- são as distribuições dadas em (1.2) e (1.3).

Definição 1.4. Se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, definimos

$$\mathcal{I}_\alpha f = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f.$$

Portanto, se $\text{Re } \alpha > 0$,

$$\mathcal{I}_\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

$$\mathcal{I}_0 f = f, \mathcal{I}_1 f(t) = \int_0^t f(s) ds, \mathcal{I}_{-1} f = f' \text{ e } \mathcal{I}_\alpha \mathcal{I}_\beta = \mathcal{I}_{\alpha+\beta}.$$

A seguir enunciamos alguns Lemas que descrevem certas propriedades do operador integração fracionária de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_\alpha$, para a prova destes resultados o leitor deve consultar [23].

Lema 1.9. Se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, então $\mathcal{I}_\alpha f \in C_0^\infty$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

Lema 1.10. *Se $0 \leq \alpha < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$, então*

$$(1.6) \quad \|\mathcal{I}_{-\alpha} h\|_{H_0^s(\mathbb{R}^+)} \leq c \|h\|_{H_0^{s+\alpha}(\mathbb{R}^+)}.$$

Lema 1.11. *Se $0 \leq \alpha < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$, $\mu \in C_0^\infty$ então*

$$\|\mu \mathcal{I}_\alpha h\|_{H_0^s(\mathbb{R}^+)} \leq c \|h\|_{H_0^{s-\alpha}(\mathbb{R}^+)},$$

onde $c = c(\mu)$.

Para mais detalhes sobre a distribuição $\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ veja [15].

1.4 Desigualdades Auxiliares

A seguir vamos obter uma série de estimativas elementares que serão fundamentais para provarmos as estimativas não lineares em espaços de Bourgain.

Observação 1.1. *Um ponto importante é que neste trabalho não podemos utilizar os cálculos técnicos usados em [30], [12] e [46]. Com efeito, nestes trabalhos os autores utilizaram os espaços de Bourgain com $b > \frac{1}{2}$. Como em nossa abordagem utilizaremos os operadores forçantes de fronteira introduzidos em [11], somos forçados a trabalhar com os espaços de Bourgain $X^{s,b}(\phi)$ com $b < \frac{1}{2}$.*

Lema 1.12. *Se $b > \frac{1}{3}$, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3 \rangle^b} \leq c.$$

Demonstração. Consultar [2]. □

Lema 1.13. *Se $b > \frac{1}{2}$, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle \alpha_0 + \alpha_1 x + x^2 \rangle^b} \leq c.$$

Demonstração. Consultar [13]. □

Lema 1.14. *Sejam $0 \leq a_- \leq a_+$, tal que $a_- + a_+ > \frac{1}{2}$, então existe uma constante $c = c(a_-, a_+)$, independente de s , tal que*

$$J(s) = \int \frac{dy}{\langle y-s \rangle^{2a_+} \langle y+s \rangle^{2a_-}} \leq c \langle s \rangle^{-\alpha};$$

onde $\alpha = 2a_- - [1 - 2a_+]_+$ e

$$(1.7) \quad [\lambda]_+ = \begin{cases} \lambda, & \text{se } \lambda > 0, \\ 0, & \text{se } \lambda < 0, \\ \epsilon, & \text{se } \lambda = 0, \end{cases}$$

com $\epsilon > 0$ podendo ser tomado arbitrariamente.

Demonstração. Consultar [13] ou [18]. □

Lema 1.15. *Se $\frac{1}{4} < b < \frac{1}{2}$, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x-\alpha \rangle^{2b} \langle x-\beta \rangle^{2b}} \leq \frac{c}{\langle \alpha-\beta \rangle^{4b-1}}.$$

Demonstração. Decorre do Lema 1.14, com $s = \frac{\alpha-\beta}{2}$, $a_- = a_+ = 4b$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x-\alpha \rangle^{2b} \langle x-\beta \rangle^{2b}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x + \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha \rangle^{2b} \langle x + \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta \rangle^{2b}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x + \frac{-\alpha+\beta}{2} \rangle^{2b} \langle x + \frac{\alpha-\beta}{2} \rangle^{2b}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \alpha-\beta \rangle^{4b-1}}. \end{aligned}$$

□

Lema 1.16. *Se $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x-\alpha \rangle^{4b-1} \langle x-\beta \rangle^{2b}} \leq \frac{c}{\langle \alpha-\beta \rangle^{6b-2}}.$$

Demonstração. Decorre do Lema 1.14, com $s = \frac{\alpha-\beta}{2}$, $a_- = 4b-1$ e $a_+ = 2b$ pois

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x-\alpha \rangle^{4b-1} \langle x-\beta \rangle^{2b}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x + \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha \rangle^{4b-1} \langle x + \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta \rangle^{2b}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x + \frac{-\alpha+\beta}{2} \rangle^{4b-1} \langle x + \frac{\alpha-\beta}{2} \rangle^{2b}}. \end{aligned}$$

□

Lema 1.17. Se $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\mu + |x - \alpha|)^{4b-1}(\mu + |x - \beta|)^{2b}} \leq \frac{c}{(\mu + |\alpha - \beta|)^{6b-2}}.$$

Demonstração. Decorre do Lema 1.16 através da mudança de variável $x' = \frac{x}{m}$. □

Lema 1.18. Se $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\mu + |x - \alpha|)^{4b-1}(\mu + |x - \beta|)^{2b}} \leq \frac{1}{|\mu|^{6b-2}} \frac{c}{(1 + \frac{|\alpha - \beta|}{\mu})^{6b-2}}.$$

Lema 1.19. Se $b < \frac{1}{2}$, então

$$\int_{|x| < \beta} \frac{dx}{\langle x \rangle^{4b-1} |\alpha - x|^{\frac{1}{2}}} \leq c \frac{(1 + \beta)^{2-4b}}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}.$$

Demonstração. Consulte o Lema 5.13 em [23]. □

Capítulo 2

O PVIF para o sistema NLS-KdV na semirreta

2.1 Introdução e histórico do modelo

O sistema de Schrödinger-Korteweg-de Vries (NLS-KdV) é dado por

$$(2.1) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv + \beta u|u|^2, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \frac{1}{2}\partial_x v^2 = \gamma \partial_x(|u|^2), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $u = u(x, t)$ toma valores complexos e $v = v(x, t)$ toma valores reais e α , β e γ são constantes reais.

No contexto físico, o sistema modela a interação entre ondas curtas, $u = u(x, t)$, e longas, $v = v(x, t)$, e aparece em mecânica dos fluidos e na física de plasmas. O caso $\beta = 0$ surge nas interações ressonantes em vários meios; como por exemplo, na modelagem de ondas de tipo gravidade-capilaridade, na física do plasma e em sistemas de redes diatômicas. Para tais aplicações indicamos as referências [16], [20], [24] e [35].

No contexto matemático o problema vem sendo bastante estudado nas últimas três décadas. A seguir comentaremos alguns resultados significativos para o PVI (2.1).

Em [43] Tsutsumi provou que para condições iniciais $(u_0, v_0) \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, com $s \in \mathbb{Z}^+$, o problema é globalmente bem posto nesse espaço. Em seguida Guo e Miao [25] provaram no caso ressonante ($\beta = 0$) que o problema é globalmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para $s \in \mathbb{Z}^+$. Mais tarde, Bekiranov, Ogawa e Ponce [2], no contexto dos espaços de Bourgain, obtiveram boa colocação local em $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ para $s \geq 0$. Fazendo um estudo do

sistema em 2007, Corcho e Linares em [12], obtiveram o resultado a seguir, bastante geral em termos de regularidade.

Teorema D (Corcho-Linares, 2007). *Sejam $s \geq 0$ e $k > -3/4$. Para todo $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R})$ tal que*

$$(i) \quad s - 1 \leq k \leq 2s - 1/2 \quad \text{se} \quad 0 \leq s \leq 1/2,$$

$$(ii) \quad s - 1 \leq k < s + 1/2 \quad \text{se} \quad s > 1/2,$$

o problema (2.1) é localmente bem posto.

Para provar o Teorema D, os autores utilizaram o clássico método de Bourgain (espaços da restrição de Fourier), adaptando as idéias desenvolvidas por Ginibre, Tsutsumi e Velo em [18], no contexto do sistema de Zakharov. O ponto chave da prova do resultado foi a obtenção de estimativas bilineares em espaços de Bourgain, referentes aos termos de acoplamento uv e $\partial_x(|u|^2)$. Posteriormente Wu em [46] refinou as estimativas de Corcho-Linares e obteve o seguinte resultado:

Teorema E (Wu, 2010). *Para todo $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R})$ tal que*

$$(i) \quad k > -\frac{3}{4}, \quad k < 4s \quad \text{e} \quad s - 2 \leq k < s + 1, \quad \text{para} \quad \beta = 0,$$

$$(ii) \quad k > -\frac{3}{4}, \quad s \geq 0, \quad k < 4s \quad \text{e} \quad s - 2 \leq k < s + 1, \quad \text{para} \quad \beta \neq 0,$$

o problema (2.1) é localmente bem posto.

Posteriormente Guo e Wang [26], em 2010, obtiveram boa colocação local na regularidade $L^2(\mathbb{R}) \times H^{-3/4}(\mathbb{R})$, fazendo uso de uma adaptação do espaço de Bourgain.

Neste capítulo vamos considerar as seguintes formulações do PVIF para o sistema NLS-KdV nas semirretas à direita e à esquerda. Na semirreta à direita $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, vamos considerar o modelo

$$(2.2) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv + \beta u|u|^2; & (x, t) \in (0, +\infty) \times (0, T), \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \frac{1}{2}\partial_x v^2 = \partial_x(|u|^2); & (x, t) \in (0, +\infty) \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in (0, +\infty), \\ u(0, t) = f(t), \quad v(0, t) = g(t), & t \in (0, T), \end{cases}$$

e na semirreta à esquerda $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, vamos considerar o modelo

$$(2.3) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv + \beta |u|^2; & (x, t) \in (-\infty, 0) \times (0, T), \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \frac{1}{2}\partial_x v^2 = \partial_x(|u|^2); & (x, t) \in (-\infty, 0) \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in (-\infty, 0), \\ u(0, t) = f(t), \quad v(0, t) = g(t), \quad \partial_x v(0, t) = h(t), & t \in (0, T). \end{cases}$$

Baseado nos trabalhos de Holmer vamos tratar (2.2) na seguinte configuração:

$$(2.4) \quad \begin{cases} (u_0, v_0, f, g) \in H^s(\mathbb{R}^+) \times H^k(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+), \\ u_0(0) = f(0) \text{ quando } s > \frac{1}{2} \text{ e } v_0(0) = g(0) \text{ quando } k > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Para o problema (2.3), assumiremos que

$$(2.5) \quad \begin{cases} (u_0, v_0, f, g, h) \in H^s(\mathbb{R}^+) \times H^k(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+) \\ u_0(0) = f(0) \text{ quando } s > \frac{1}{2} \text{ e } v_0(0) = g(0), \text{ quando } k > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2.2 Principais resultados

A seguir enunciamos os principais resultados obtidos em nossa pesquisa sobre os problemas (2.2) e (2.3).

Teorema 2.1. *Consideremos os seguintes conjuntos de índices de Sobolev (ver figura 2.1):*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &:= \left\{ (s, k) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq s < 1/2 \text{ e } \max\{-3/4, s-1\} < k < \min\{4s-1/2, 1/2\} \right\}, \\ \mathcal{D}_2 &:= \left\{ (s, k) \in \mathbb{R}^2; 1/2 < s < 1 \text{ e } s-1 < k < 1/2 \right\}. \end{aligned}$$

Considere o PVIF (2.2), (2.4) com as seguintes condições:

- (i) $(s, k) \in \mathcal{D}_1$, para $\beta \neq 0$;
- (ii) $(s, k) \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, para $\beta = 0$.

Então existe uma solução local $(u(t), v(t))$, no sentido das distribuições, em

$$C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+)) \times C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+)).$$

Além disso, a aplicação $(u_0, v_0, f, g) \mapsto (u(t), v(t))$, definida nos espaços dados em (2.4), levando em $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+)) \times C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+))$ é localmente Lipschitz contínua.

Teorema 2.2. *Consideremos os seguintes conjuntos de índices de Sobolev (ver figura 2.1):*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3 &:= \left\{ (s, k) \in \mathbb{R}^2; \ 1/2 < s < 1 \text{ e } 1/2 < k < s + 1/2 \right\}, \\ \mathcal{D}_4 &:= \left\{ (s, k) \in \mathbb{R}^2; \ s < 1/2 \text{ e } 1/2 < k < \max\{4s - 1/2, s + 1/2\} \right\}.\end{aligned}$$

Considere o PVIF (2.2), (2.4) com as seguintes condições:

- (i) $(s, k) \in \mathcal{D}_4$, para $\beta \neq 0$;
- (ii) $(s, k) \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4$, para $\beta = 0$.

Assuma ainda que

$$(2.6) \quad \|v_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} \leq \delta$$

para δ suficientemente pequeno.

Então existe uma solução local $(u(t), v(t))$, no sentido das distribuições, em

$$C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+)) \times C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+)).$$

Além disso, a aplicação $(u_0, v_0, f, g) \mapsto (u(t), v(t))$, definida nos espaços dados em (2.4), levando em $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+)) \times C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+))$ é localmente Lipschitz contínua.

Para o problema na semirreta a esquerda (2.3) obtemos os seguintes resultado descritos a seguir.

Teorema 2.3. *Consideremos os seguintes conjuntos de índices de Sobolev (ver figura 2.2):*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &:= \{(s, k) \in \mathbb{R}^2; \ s < 1/2, \ 0 \leq k < \min\{4s - 1/2, 1/2\}\}, \\ \mathcal{E}_2 &:= \{(s, k) \in \mathbb{R}^2; \ 1/2 < s < 1, \ 0 \leq k < 1/2\}.\end{aligned}$$

Considere o PVIF (2.3), (2.5) com as seguintes condições:

- (i) $(s, k) \in \mathcal{E}_1$, para $\beta \neq 0$;
- (ii) $(s, k) \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, para $\beta = 0$.

Então existe uma solução local $(u(t), v(t))$, no sentido das distribuições, em

$$C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+)) \times C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+)).$$

Além disso, a aplicação $(u_0, v_0, f, g, h) \mapsto (u(t), v(t))$, definida nos espaços dados em (2.5), levando em $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+)) \times C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+))$ é localmente Lipschitz contínua.

Teorema 2.4. Consideremos os seguintes conjuntos de índices de Sobolev (ver figura 2.2):

$$\mathcal{E}_3 = \{(s, k) \in \mathbb{R}^2; 0 < s < 1/2, \max\{-3/4, s - 1\} < k < \min\{0, 4s - 1/2\},$$

$$1/2 < k < \min\{4s - 1/2, s + 1/2\}\},$$

$$\mathcal{E}_4 = \{(s, k) \in \mathbb{R}^2; 1/2 < s < 1, 1/2 < k < \min\{s - 1/2, 4s - 1/2\}, 1/2 < k \leq s + 1/2\}.$$

Considere o PVIF (2.2), (2.4) com as seguintes condições:

(i) $(s, k) \in \mathcal{E}_3$, para $\beta \neq 0$;

(ii) $(s, k) \in \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4$, para $\beta = 0$.

Assuma ainda que

$$(2.7) \quad \|v_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} \leq \delta$$

para δ suficientemente pequeno.

Então existe uma solução local $(u(t), v(t))$, no sentido das distribuições, em

$$C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+)) \times C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+)).$$

Além disso, a aplicação $(u_0, v_0, f, g, h) \mapsto (u(t), v(t))$, definida nos espaços dados em (2.5), levando em $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+)) \times C([0, T]; H^k(\mathbb{R}^+))$ é localmente Lipschitz contínua.

Na prova destes resultados vamos utilizar as técnicas utilizadas no trabalho de Colliander e Kenig em [11] e nos trabalhos de Holmer [22] e [23]. Seguindo estas ideias resolveremos os problemas acima, através de uma reformulação dos PVIF para um PVI posto em $\mathbb{R}$ com a presença termos forçantes, isto é,

$$(2.8) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv + \beta |u|^2 + \mathcal{T}_1(x)h_1(t); & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \frac{1}{2}\partial_x v^2 = \gamma \partial_x(|u|^2) + \mathcal{T}_2(x)h_2(t); & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad v(x, 0) = \tilde{v}_0(x), & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

onde: T_1 e T_2 são distribuições suportadas em $\mathbb{R}^+$; $\tilde{u}_0$, $\tilde{v}_0$ são extensões de u_0 e v_0 em $\mathbb{R}$; as funções h_1 , h_2 são funções escolhidas de modo a garantir que as condições de contorno sejam satisfeitas.

A construção da solução do PVI é construída utilizando as técnicas clássicas utilizadas por Corcho e Linares [12] no estudo do sistema SK em $\mathbb{R}$, juntamente com o operador integração fracionária de Riemann-Liouville. Após a construção da solução $\tilde{u}$ do PVI (2.8), obtemos uma solução do PVIF original por restrição, isto é, $u := \tilde{u}|_{\mathbb{R}^+ \times (0,T)}$.

Uma questão importante sobre os resultados descritos nos Teoremas 2.1 e 2.3 é sobre a noção de boa colocação local. Com a técnica utilizada, veremos que estes representam resultados de boa colocação local no sentido de Kato, para uma certa reformulação do PVIF (2.2) e (2.3) como uma equação integral em $\mathbb{R}$. Como existem outras reformulações dos problemas como equação integral em $\mathbb{R}$, isto é uma questão séria.

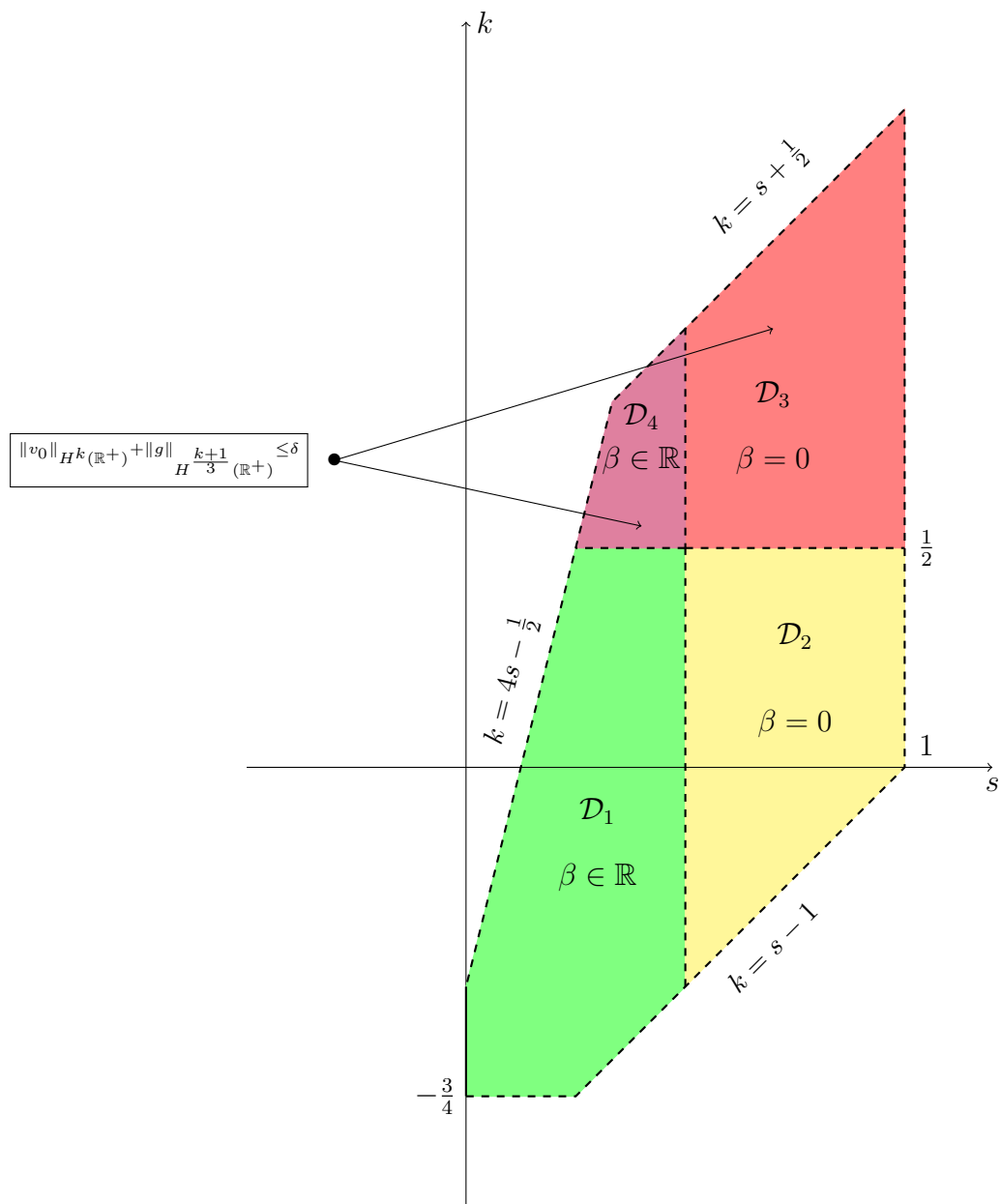


Figura 2.1: Regiões descritas nos Teoremas 2.1 e 2.2

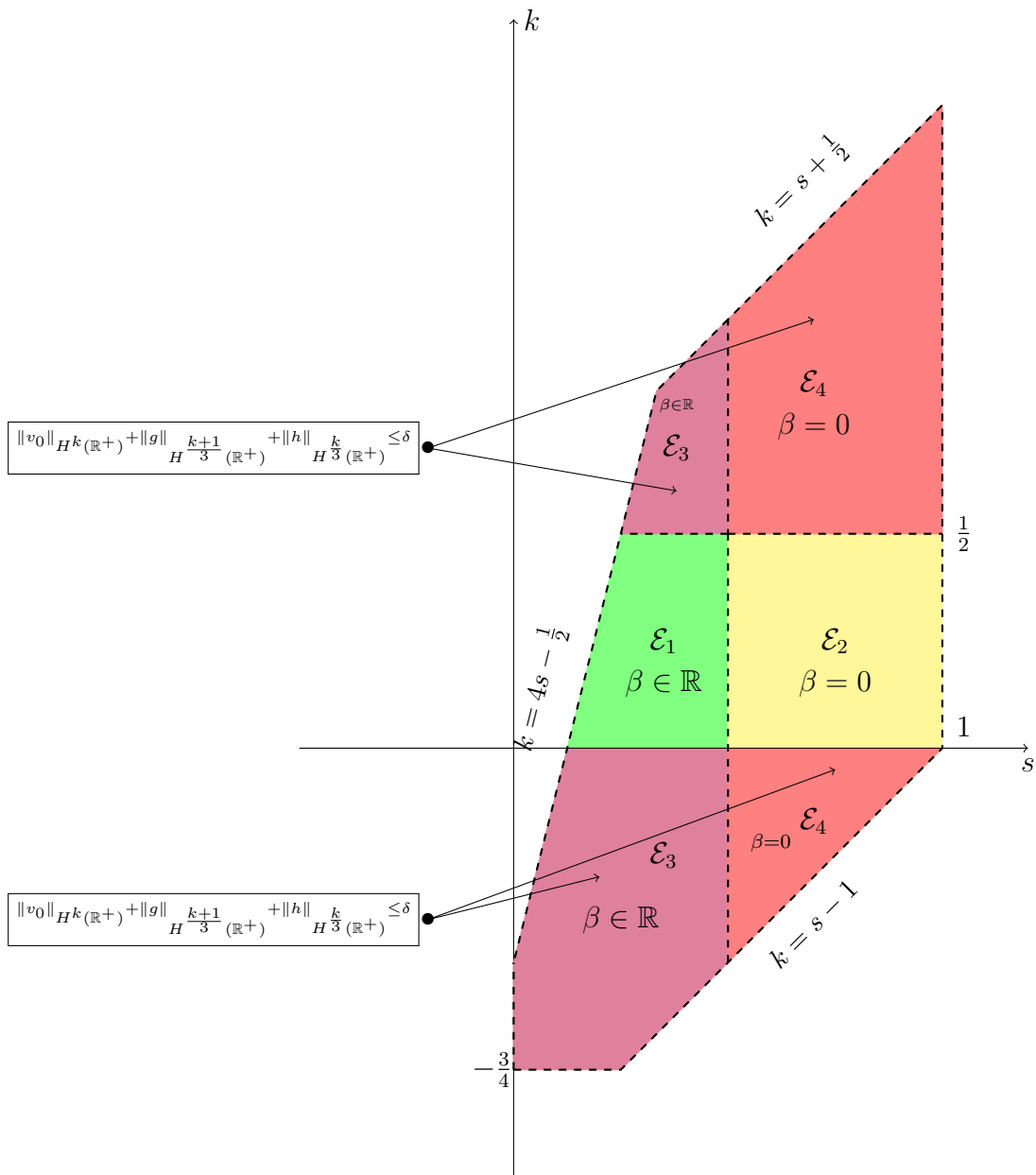


Figura 2.2: Regiões descritas nos Teoremas 2.3 e 2.4

2.3 Versões lineares

Nesta seção vamos obter soluções explícitas, no sentido das distribuições, para os PVIFs associados às equações lineares de Schrödinger e de KdV na semirreta, isto é,

$$(2.9) \quad \begin{cases} (i\partial_t + \partial_x^2)u(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in (0, +\infty), \\ u(0, t) = f(t), & t \in (0, +\infty), \end{cases}$$

$$(2.10) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x^3)v(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty), \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in (0, +\infty), \\ v(0, t) = f(t), & t \in (0, +\infty), \end{cases}$$

$$(2.11) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x^3)v(x, t) = 0, & (x, t) \in (-\infty, 0) \times (0, +\infty), \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in (-\infty, 0), \\ v(0, t) = f(t), & t \in (0, +\infty), \\ \partial_x v(0, t) = h(t), & t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Para isto, usaremos a abordagem dada em [12], [22], [23]. Esta consiste em resolver um PVI estendido (em $\mathbb{R}$) com a presença termos forçantes, isto é,

$$(2.12) \quad \begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v = \mathcal{T}(x)h_1(t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ v(x, 0) = \tilde{v}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$(2.13) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 v = \mathcal{T}(x)h_2(t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v = \mathcal{T}_1(x)h_3(t) + \mathcal{T}_2(x)h_4(t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ v(x, 0) = \tilde{v}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde: $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$ são extensões de u_0 e v_0 em $\mathbb{R}$; $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ são distribuições suportadas em $\mathbb{R}^-$; h_1 e h_2 são funções apropriadas de modo a garantir que as condições de fronteira sejam válidas.

Consequentemente, as soluções dos problemas (2.9), (2.10) e (2.11) serão obtidas por restrição das soluções dos problemas com o termo forçante.

Observação 2.1. No trabalho que introduziu a técnica, em [11], a solução do PVI (2.12) foi obtida com $T(x) = \delta_0(x)$. Em [22] o PVI (2.13) foi resolvido com $\mathcal{T} = \delta_0(x)$. Em [23], o PVI (2.13) foi resolvido com uma família de distribuições, $\mathcal{T}_\lambda = x_+^{\lambda-1}$, isto foi necessário para se obter resultados de baixa regularidade para o PVIF associado à equação de KdV na semirreta (Teorema B). Neste trabalho, para solucionarmos o problema em regularidade mais alta, será necessário estudar (2.13) com a família de operadores $\mathcal{T}_\lambda = x_-^{\lambda-1}$, para certos valores de λ em $\mathbb{C}$.

2.3.1 Equação Linear de Schrödinger

Nesta seção vamos relembrar algumas estimativas do grupo livre de Schrödinger, definir o operador forçante de Duhamel associado à equação de Schrödinger de [22] e em seguida, baseado em [23] vamos estender este operador para uma classe de operadores.

O grupo livre $e^{it\partial_x^2} : S'(\mathbb{R}) \rightarrow S'(\mathbb{R})$ associado à equação linear de Schrödinger é dado por

$$e^{it\partial_x^2}\phi(x) = \{e^{-it\xi^2}\hat{\phi}(\xi)\}^\vee(x),$$

que satisfaz

$$(2.15) \quad \begin{cases} (i\partial_t + \partial_x^2)e^{it\partial_x^2}\phi(x) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ e^{it\partial_x^2}\phi(x)|_{t=0} = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

no sentido das distribuições.

Em particular, se $\phi \in S(\mathbb{R})$, temos

$$(2.16) \quad e^{it\partial_x^2}\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} e^{-it\xi^2} \hat{\phi}(\xi) d\xi.$$

A seguir vamos obter estimativas para grupo livre de Schrödinger:

Lema 2.1. *Seja $s \in \mathbb{R}$, $0 < b < 1$. Se $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, então*

(a) *Estimativa no Espaço:*

$$\|e^{it\partial_x^2}\phi(x)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x))} \leq c\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

(b) *Estimativa no Tempo:*

$$\|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\phi(x)\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t))} \leq c\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

(c) *Estimativa nos Espaços de Bourgain:*

$$\|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\phi(x)\|_{X^{s,b}} \leq c\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Demonstração. Consultar [22]. □

Para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, defina o operador forçante de Duhamel de [22] por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s f(x, t) &= 2e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-1/2} f(t') dt' \\ (2.17) \quad &= 2e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-i(t-t')\xi^2} e^{ix\xi} d\xi \mathcal{I}_{-1/2} f(t') dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-t')^{-1/2} e^{\frac{ix^2}{4(t-t')}} \mathcal{I}_{-1/2} f(t') dt', \end{aligned}$$

onde na última igualdade acima usamos

$$\mathcal{F}_x \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t}}{2t^{1/2}\sqrt{\pi}} e^{\frac{ix^2}{4t}} \right) (\xi) = e^{-it\xi^2},$$

em $S'(\mathbb{R})$.

Lema 2.2. *Se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, então*

$$(2.18) \quad \begin{cases} (i\partial_t + \partial_x^2) \mathcal{L}_s f(x, t) = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-\frac{1}{2}} f(t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_s f(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

no sentido das distribuições.

Demonstração. Inicialmente observemos que integrando por partes e usando

$$\partial_{t'} e^{i(t-t')\partial_x^2} \delta_0(x) = -\partial_t e^{i(t-t')\partial_x^2} \delta_0(x)$$

obtemos $\partial_t \mathcal{L}_s f(x, t) = \mathcal{L}_s \partial_t f(x, t)$.

Agora, Integrando por partes e usando o fato de $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s \partial_t f(x, t) &= 2e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-1/2} \partial_{t'} f(t') dt' \\ &= -2e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^t \partial_{t'} (e^{i(t-t')\partial_x^2} \delta_0(x)) \mathcal{I}_{-1/2} f(t') dt' + 2e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i(t-t')\partial_x^2} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-1/2} f(t') \Big|_{t'=0}^{t'=t} \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^t i\partial_x^2 (e^{-i(t-t')\partial_x^2} \delta_0(x)) \mathcal{I}_{-1/2} \partial_{t'} f(t') dt' + 2e^{i\frac{\pi}{4}} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-1/2} f(t) \\ &= i\partial_x^2 \mathcal{L}_s f(x, t) + 2e^{i\frac{\pi}{4}} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-1/2} f(t). \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. □

O próximo Lema nos fornece propriedades de continuidade e decaimento da função $\mathcal{L}_s f(x, t)$.

Lema 2.3. *Seja $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$.*

- (a) *Para qualquer t fixado a função $\mathcal{L}_s f(x, t)$ é contínua em x para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $\partial_x \mathcal{L}_s f(x, t)$ é contínua em x para $x \neq 0$ e em $x = 0$ tem uma descontinuidade tipo salto, satisfazendo*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \partial_x \mathcal{L}_s f(x, t) = e^{i\frac{3}{4}\pi}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \partial_x \mathcal{L}_s f(x, t) = -e^{i\frac{3}{4}\pi}.$$

- (b) *Para todo k inteiro não negativo e fixado x , $\partial_t^k \mathcal{L}_s f(x, t)$ é contínua em t para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, em $[0, T]$ vale a seguinte estimativa pontual*

$$(2.19) \quad |\partial_t^k \mathcal{L}_s f(x, t)| + |\partial_x \mathcal{L}_s f(x, t)| \leq c \|f\|_{H^{k+1}} \langle x \rangle^{-N},$$

onde $c = c(f, N, k, T)$.

Demonstração. Consultar [22]. □

Pelo Lema anterior se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, então $\mathcal{L}_s f(x, t)$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$. Logo a segunda representação de $\mathcal{L}_s f(x, t)$ em (2.17) implica

$$(2.20) \quad \mathcal{L}_s f(0, t) = f(t).$$

Portanto se definirmos

$$(2.21) \quad u(x, t) = e^{-it\partial_x^2} \phi(x) + \mathcal{L}_s (f - e^{-i\cdot\partial_x^2} \phi|_{x=0})(x, t),$$

então resolvemos o problema linear

$$(2.22) \quad \begin{cases} (i\partial_t + \partial_x^2)u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = f(t), & t \in (0, +\infty), \end{cases}$$

no sentido das distribuições.

Agora vamos obter algumas estimativas para o operador $\mathcal{L}_s$.

Lema 2.4. *Se $s \in \mathbb{R}$, então*

(a) (Estimativa no espaço) Para $-\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$,

$$\|\mathcal{L}_s f(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t^+; H^s(\mathbb{R}_x))} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.$$

(b) (Estimativa no tempo)

$$\|\psi(t)\mathcal{L}_s f(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+))} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t^+)}.$$

(c) (Estimativa em espaços de Bourgain)

Sejam $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$, então

$$\|\psi(t)\mathcal{L}_s f(x, t)\|_{X^{s,b}} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.$$

Observação 2.2. A hipótese $b < \frac{1}{2}$ é crucial na prova do Lema 2.4 (c), isto nos força a trabalhar com os espaços de Bourgain $X^{s,b}$, com $b < \frac{1}{2}$. Além disso temos a limitação $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$, que acabaria limitando o resultado de boa colocação nesta imagem. Isto nos motiva a trabalhar com uma família de operadores (próxima seção) que generaliza o operador $\mathcal{L}_s$.

Demonstração. Para prova de (a) e (b) consultar [22]. Vamos provar (c). Seja $\theta(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que: $\theta(\tau) = 1$, se $|\tau| < \frac{1}{2}$ e $\theta(\tau) = 0$, se $|\tau| > 2/3$. Usando

$$2\chi_{(0,t)}(t') = \text{sgn}(t - t') + \text{sgn}(t'),$$

e os fatos

$$(2.23) \quad \{\text{sgn}(x)\}^\wedge(\xi) = \frac{2}{i} \text{v.p.} \frac{1}{\xi}, \quad (\mathcal{I}_{-1/2} f)^\wedge(\tau) = (\tau - i0)^{1/2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x(\psi(t)\mathcal{L}f)(\xi, t) &= 2\psi(t)e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\tau} \frac{e^{i\tau t} - e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} (\tau - i0)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau \\ &= 2\psi(t)e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\tau} \frac{e^{i\tau t} - e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} \theta(\tau + \xi^2) (\tau - i0)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau \\ &\quad + 2\psi(t)e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\tau} \frac{e^{i\tau t}}{\tau + \xi^2} (1 - \theta(\tau + \xi^2)) (\tau - i0)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau \\ &\quad - 2\psi(t)e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\tau} \frac{e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} (1 - \theta(\tau + \xi^2)) (\tau - i0)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau \\ &= \mathcal{F}_x u_1(\xi, t) + \mathcal{F}_x u_{2,1}(\xi, t) - \mathcal{F}_x u_{2,2}(\xi, t). \end{aligned}$$

Observe que por (1.5) $(\tau - i0)^{1/2}$, pode ser visto como uma soma de funções localmente integráveis.

Vamos analisar cada um dos três termos separadamente.

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$(2.24) \quad \|u_{2,1}\|_{X^{s,b}}^2 \leq \int_{\tau} |\tau| \left(\int_{\xi} \frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2-2b}} d\xi \right) |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau.$$

Afirmção 2.1. *Se $b < \frac{1}{2}$, então*

$$(2.25) \quad I(\tau) = \int_{\xi} \frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2-2b}} = \int |\eta|^{-\frac{1}{2}} \frac{\langle \eta \rangle^s}{\langle \tau + \eta \rangle^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \leq c \langle \tau \rangle^{\frac{2s-1}{2}}.$$

Vamos provar esta afirmação separando nos casos: $|\tau| \leq \frac{1}{2}$, $|\tau| \ll |\eta|$ e $|\tau| \gg |\eta|$.

Caso 1. $|\tau| \leq \frac{1}{2}$:

Neste caso temos que $1 + |\tau - \eta| \geq 1 + |\eta| - |\tau| \geq 1 + |\eta| - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \langle \eta \rangle$, então

$$I(\tau) \leq \int |\eta|^{-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^{s-2+2b} d\eta \leq 2 \int_{|\eta| \leq 1} |\eta|^{-\frac{1}{2}} + \int_{|\eta| > 1} \langle \eta \rangle^{s-\frac{5}{2}+2b} \leq c,$$

pois $s, b < \frac{1}{2}$ implicam que $-2b-s+\frac{5}{2} > 1$. Por outro lado $|\tau| < \frac{1}{2}$, implica em $\left(\frac{\langle \tau \rangle}{2}\right)^{\frac{2s-1}{2}} \leq 1$.

Caso 2. $|\tau| > \frac{1}{2}$, $|\eta| \geq \frac{|\tau|}{2}$:

Nesta situação temos $|\eta| \geq \frac{|\eta|}{2} + \frac{|\eta|}{2} \geq \frac{1}{4} \langle \eta \rangle$ e $s < \frac{1}{2}$ implica em $\langle \eta \rangle^{s-\frac{1}{2}} \leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}}$, então

$$I(\tau) \leq c \int \frac{\langle \eta \rangle^{s-\frac{1}{2}}}{\langle \tau + \eta \rangle^{2-2b}} d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}} \int \frac{1}{\langle \tau + \eta \rangle^{2-2b}} d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}},$$

pois $b < \frac{1}{2}$ implica em $2 - 2b > 1$.

Caso 3. $|\tau| > \frac{1}{2}$, $|\eta| < \frac{|\tau|}{2}$:

Neste caso temos $\langle \tau + \eta \rangle \geq 1 + |\tau| - \frac{|\eta|}{2} \geq \frac{1}{2} \langle \tau \rangle$. Logo

$$I(\tau) = \int |\eta|^{-\frac{1}{2}} \frac{\langle \eta \rangle^s}{\langle \tau + \eta \rangle^{2-2b}} d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{2b-2} \int_{|\eta| \leq \frac{|\tau|}{2}} \langle \eta \rangle^s |\eta|^{-\frac{1}{2}} d\eta.$$

Se $s \geq 0$, então

$$\langle \tau \rangle^{2b-2} \int_{|\eta| \leq \frac{|\tau|}{2}} \langle \eta \rangle^s |\eta|^{-\frac{1}{2}} d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{2b-2+s} \int_{|\eta| \leq \frac{|\tau|}{2}} |\eta|^{-\frac{1}{2}} d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{2b-2+s+\frac{1}{2}} \leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}},$$

pois $b < \frac{1}{2}$, implica em $2b - 2 + s + \frac{1}{2} < \frac{2s-1}{2}$.

Agora se $-\frac{1}{2} < s < 0$, temos

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle^{2b-2} \int_{|\eta| \leq \frac{|\tau|}{2}} \langle \eta \rangle^s |\eta|^{-\frac{1}{2}} d\eta &\leq c \langle \tau \rangle^{2b-2} \int_{|\eta| \leq \frac{|\tau|}{2}} |\eta|^{s-\frac{1}{2}} d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{2b-2} |\tau|^{s+\frac{1}{2}} \leq c \langle \tau \rangle^{s+\frac{1}{2}+2b-2} \\ &\leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Isto conclui a afirmação.

Combinando (2.103) e (2.129) obtemos a estimativa necessária para $u_{2,1}$.

Para estimarmos u_1 usamos

$$e^{it(\tau+\xi^2)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(it)^k (\tau + \xi^2)^k}{k!},$$

para escrevermos

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{k!} e^{t\partial_x^2} \phi_k(x),$$

onde $\psi_k(t) = i^k t^k \psi(t)$ e $\hat{\phi}_k(\xi) = \int_{\tau} (\tau + \xi^2)^{k-1} \theta(\tau + \xi^2) (\tau)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau$.

Pelo Lema 2.1 é suficiente mostrarmos que

$$\|\phi_k\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})}.$$

Pela propriedade do suporte e pela desigualdade de Cauchy Schwarz obtemos

$$\|\phi_k\|_{H^s}^2 \leq \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} \left(\int_{\{\tau: |\tau+\xi^2| \leq 1\}} |\tau|^{\frac{1}{2}} |\hat{f}(\tau)| d\tau \right)^2 d\xi \leq c \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} \int_{\{\tau: |\tau+\xi^2| \leq 1\}} |\tau| |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau d\xi.$$

Fazendo a mudança de variável $\eta = \xi^2$ temos

$$\int_{|\tau+\xi^2| \leq 1} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi = \int_{|\tau+\eta| \leq 1} |\eta|^{-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}}.$$

Combinando as expressões (2.3.1) e (2.3.1), chegamos em $\|\phi_k\|_{H^s} \leq c \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}}$.

Agora vamos estimar $u_{2,2}$. Podemos escrever, $u_{2,2}(x, t) = \psi(t) e^{it\partial_x^2} \phi(x)$, onde

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{\tau} \frac{1 - \psi(\tau + \xi^2)}{\tau + \xi^2} (\tau - i0)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau.$$

Afirmação 2.2. *Existe uma função $\beta \in S(\mathbb{R})$ tal que*

$$\int_{\tau} \frac{1 - \psi(\tau + \xi^2)}{\tau + \xi^2} (\tau - i0)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau = \int_{\tau} \beta(\tau + \xi^2) (\tau - i0)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau.$$

Para a prova desta afirmação vamos usar fortemente o fato de $\mathcal{I}_{-1/2}f$ ter suporte em $\mathbb{R}^+$.
Seja $\hat{g}_1(\tau) = \text{v.p. } \frac{1-\psi(-\tau)}{\tau}$, então

$$g_1(t) = \frac{i}{2}\text{sgn}(t) - \frac{i}{4\pi} \int \text{sgn}(t-s)\hat{\psi}(s)ds.$$

Seja $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, tal que $\alpha(t) = 1$ para $t > 0$ e $\alpha(t) = -1$ para $t < -1$ e defina

$$g_2(t) = \frac{1}{2}\alpha(t) - \frac{i}{4\pi} \int \text{sgn}(t-s)\hat{\psi}(s)ds.$$

Afirmamos, que $g_2 \in S(\mathbb{R})$. Com efeito, $\hat{\psi} \in S(\mathbb{R})$ implica que $g_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Se $t > 0$, então $\frac{1}{2\pi} \int \hat{\psi}(\tau)d\tau = \psi(0) = 1$, logo

$$(2.26) \quad g_2(t) = \frac{i}{2} - \frac{i}{4\pi} \int \text{sgn}(t-s)\hat{\psi}(s)ds = \frac{1}{2\pi} \int_{s>t} \hat{\psi}(s)ds.$$

Se $t < -1$, obtemos

$$(2.27) \quad g_2(t) = -\frac{i}{2} - \frac{i}{4\pi} \int \text{sgn}(t-s)\hat{\psi}(s)ds = \frac{1}{2\pi} \int_{s<t} \hat{\psi}(s)ds.$$

As expressões (2.26) e (2.27) provam o decaimento de g_2 e de suas derivadas, logo $g_2 \in S(\mathbb{R})$. Como $g_1(t) = g_2(t)$ para $t > 0$ e $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ temos

$$\begin{aligned} \int \frac{1-\psi(\tau+\xi^2)}{\tau+\xi^2} \hat{h}(\tau)d\tau &= -(\hat{h} * \hat{g}_1)(-\xi^2) = -2\pi \widehat{h\hat{g}_1}(-\xi^2) \\ &= -2\pi \widehat{h\hat{g}_2}(-\xi^2) = \int \hat{h}(\tau)\beta(\tau+\xi^2)d\tau, \end{aligned}$$

onde $\beta(\tau) := -\hat{g}_2(-\tau)$. Isto conclui a nossa afirmação.

Para concluirmos a estimativa de u_{22} , pelo Lema 2.1, é suficiente mostrarmos que

$$\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})}.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e $|\beta(\tau-\xi^2)| \leq c\langle\tau+\xi^2\rangle^{-N}$ para $N \gg 1$:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{H^s}^2 &\leq \int_{\xi} \langle\xi\rangle^{2s} \left(\int_{\tau} |\beta(\tau+\xi^2)| |\tau|^{-\frac{1}{2}} |\hat{f}(\tau)| d\tau \right)^2 d\xi \\ &\leq c \int_{\tau} \int_{\xi} \langle\xi\rangle^{2s} \langle\tau+\xi^2\rangle^{-2N+2} d\xi |\tau| |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau \\ &\leq c \int_{\tau} \int_{\eta} |\eta|^{-\frac{1}{2}} \langle\eta\rangle^{2s} \langle\tau+\eta\rangle^{-2N+2} d\eta |\tau| |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Como $0 \leq s < \frac{1}{2}$, obtemos

$$\int_{\eta} |\eta|^{-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^{2s} \langle \tau + \eta \rangle^{-2N+2} d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}}.$$

Isto completa a prova. □

2.3.2 Uma família analítica de operadores forçantes associada ao grupo de Schrödinger

Na seção anterior estudamos o operador $\mathcal{L}_s$ e no Lema 2.4 (c) obtivemos

$$\|\psi(t)\mathcal{L}_s f(x, t)\|_{X^{s,b}} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)},$$

para $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$. Nesta seção, inspirado no trabalho de Holmer [23], definiremos uma família de operadores $\mathcal{L}^\lambda$ onde a estimativa será válida para $\frac{1}{2} < s < 1$ e adequado $\lambda = \lambda(s)$.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re} \lambda > -2$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, defina

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{+s}^\lambda f(x, t) &= \left[\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(\cdot, t) \right] (x), \\ \mathcal{L}_{-s}^\lambda f(x, t) &= \left[\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(\cdot, t) \right] (x), \end{aligned}$$

onde $*$ denota a convolução de distribuições.

Desta definição segue que,

$$(i\partial_t + \partial_x^2) \mathcal{L}_{+s}^\lambda f(x, t) = \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma(\lambda)} x_-^{\lambda-1} \mathcal{I}_{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}} f(x, t)$$

e

$$(2.28) \quad (i\partial_t + \partial_x^2) \mathcal{L}_{-s}^\lambda f(x, t) = \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma(\lambda)} x_+^{\lambda-1} \mathcal{I}_{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}} f(x, t),$$

no sentido das distribuições.

Em particular se $\operatorname{Re} \lambda > 0$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ temos

$$(2.29) \quad \mathcal{L}_{+s}^\lambda f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^{+\infty} (y-x)^{\lambda-1} \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy.$$

$$(2.30) \quad \mathcal{L}_{-s}^\lambda f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^x (x-y)^{\lambda-1} \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy.$$

Se $\operatorname{Re} \lambda > -k$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{+s}^\lambda f(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)} \int_x^{+\infty} \partial_x^k (y-x)^{\lambda+k-1} \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+k)} \int_x^{+\infty} (y-x)^{\lambda+k-1} \partial_y^k \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{-s}^\lambda f(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^k (x-y)^{\lambda+k-1} \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+k)} \int_{-\infty}^x (x-y)^{\lambda+k-1} \partial_y^k \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy\end{aligned}$$

Tomando $k = 2$ nas expressões acima e usando o Lema 2.2 obtemos

(2.31)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{+s}^\lambda f(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+2)} \int_x^{+\infty} (y-x)^{\lambda+1} \partial_y^2 \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+2)} \int_x^{+\infty} (y-x)^{\lambda+1} [-i\partial_t \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) + \delta_0(y) 2e^{i\frac{3\pi i}{4}} \mathcal{I}_{-1/2-\lambda/2} f(t)] dy \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\lambda+2)} \int_x^{+\infty} (y-x)^{\lambda+1} i\partial_t \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy + 2e^{i\frac{3\pi i}{4}} \frac{x_-^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+2)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t),\end{aligned}$$

(2.32)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{-s}^\lambda f(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+2)} \int_{-\infty}^x (x-y)^{\lambda+1} \partial_y^2 \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+2)} \int_{-\infty}^x (x-y)^{\lambda+1} [-i\partial_t \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) + \delta_0(y) 2e^{i\frac{3\pi i}{4}} \mathcal{I}_{-1/2-\lambda/2} f(t)] dy \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\lambda+2)} \int_{-\infty}^x (x-y)^{\lambda+1} i\partial_t \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy + 2e^{i\frac{3\pi i}{4}} \frac{x_-^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+2)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t),\end{aligned}$$

se $\operatorname{Re} \lambda > -2$.

Usando a expressão (2.32) e o Lema 2.3 vemos que $\mathcal{L}^\lambda f(x, t)$ está bem definida, se $\operatorname{Re} \lambda > -2$, quando $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Além disso, temos que $\mathcal{L}_{\pm s}^0 f(x, t) = \mathcal{L}_s f(x, t)$, $\mathcal{L}_{\pm s}^{-1} f(x, t) = \partial_x \mathcal{L}_s \mathcal{I}_{1/2} f(x, t)$.

A seguir enunciaremos uma propriedade da função Gamma.

Lema 2.5. *Se $\lambda \in \mathbb{R}^+$, então vale a seguinte identidade:*

$$(2.33) \quad \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\lambda)} = \frac{2^{1-\lambda} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2})}.$$

Demonstração. Ver página 424 em [17]. □

Lema 2.6. *Se $\lambda \in (1, 2)$, então*

$$(2.34) \quad \int_0^{+\infty} r^{\frac{\lambda}{2}-1} e^{ir} dr = i^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Lema 2.7. *Se $\operatorname{Re} \lambda > -1$, então*

$$(2.35) \quad \mathcal{L}_{\pm s}^\lambda f(0, t) = e^{i\frac{\lambda\pi}{4}} f(t).$$

Demonstração. Por (2.31) temos

$$(2.36) \quad \mathcal{L}_{+s}^\lambda f(0, t) = \mathcal{L}_{-s}^\lambda f(0, t) = - \int_0^{+\infty} \frac{(y)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+2)} i \partial_t \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy.$$

Diferenciando sobre o sinal de integração demonstramos que $\mathcal{L}_{\pm s}^\lambda f(0, t)$ é analítica em λ se $\operatorname{Re} \lambda > -1$. Pelo princípio de continuação analítica precisamos mostrar que a fórmula é válida para λ no segmento $(0, 2)$.

Usando (2.29) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{+s}^\lambda f(0, t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} (y)^{\lambda-1} \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} (y)^{\lambda-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-t')^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{iy^2}{4(t-t')}} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt' dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-t')^{-\frac{1}{2}} \mathcal{I}_{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}} f(t') \int_0^{+\infty} (y)^{\lambda-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{iy^2}{4(t-t')}} dy dt'. \end{aligned}$$

Vamos calcular separadamente a integral $I = \int_0^{+\infty} (y)^{\lambda-1} e^{\frac{iy^2}{4(t-t')}} dy$.

Fazendo a mudança de variável $r = \frac{y^2}{4(t-t')}$ obtemos $y = r^{\frac{1}{2}} 2(t-t')^{\frac{1}{2}}$ e $dy = r^{-\frac{1}{2}}(t-t')^{\frac{1}{2}}$ obtemos:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} [r^{\frac{1}{2}} 2(t-t')^{\frac{1}{2}}]^{\lambda-1} r^{-\frac{1}{2}} e^{ir} (t-t')^{\frac{1}{2}} dr \\ &= 2^{\lambda-1} (t-t')^{\frac{\lambda}{2}} \int_0^{+\infty} r^{\frac{\lambda}{2}-1} e^{ir} dr. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de contorno obtemos

$$(2.37) \quad I = 2^{\lambda-1} (t-t')^{\frac{\lambda}{2}} i^{\frac{\lambda}{2}} \int_0^{+\infty} r^{\frac{\lambda}{2}-1} e^{-r} dr = 2^{\lambda-1} (t-t')^{\frac{\lambda}{2}} i^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

se $\lambda \in (1, 2)$.

Portanto, pelo Lema 2.5

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{+s}^\lambda f(0, t) &= \frac{2^{\lambda-1} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda)} i^{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (t-t')^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt' \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)} i^{\frac{\lambda}{2}} \int_0^t (t-t')^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt' \\
&= i^{\frac{\lambda}{2}} \mathcal{I}_{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t) = i^{\frac{\lambda}{2}} f(t) = e^{i\frac{\lambda\pi}{4}} f(t).
\end{aligned}$$

□

Lema 2.8. *Sejam $s, \lambda \in \mathbb{R}$ tais que $s - \frac{3}{2} < \lambda < s + \frac{1}{2}$. Se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ e $\text{supp } f \subset [0, 1]$, então*

$$\|\mathcal{L}_{\pm s}^\lambda f(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x))} \leq \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.$$

Demonstração. Provaremos a estimativa para $\mathcal{L}_{+s}^\lambda f$, pois a respectiva cota para $\mathcal{L}_{-s}^\lambda f$ pode ser obtida pelo mesmo caminho. Usando um argumento de densidade podemos assumir que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Usando $\mathcal{F}_x(\mathcal{L}_{+s}^\lambda f)(\xi, t) = c(\tau - i0)^{-\lambda} \int_0^t e^{i(t-t')\xi^2} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt'$ e a mudança de variável $\eta = \xi^2$, para t fixado obtemos

$$\begin{aligned}
\|\theta(t) \mathcal{L}_{+s}^\lambda f(x, t)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &\leq c \int_\eta |\eta|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s \left| \int_0^t e^{-i(t-t')\eta} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt' \right|^2 d\eta \\
&= \int_\eta |\eta|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s |e^{-it\eta} (\chi_{(-\infty, t)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)^\wedge(-\eta)|^2 d\eta.
\end{aligned}$$

Como $-1 < s - \lambda - \frac{1}{2} < 1$ e $\text{supp } f \subset [0, 1]$ o Lema 1.1 implica em

$$\begin{aligned}
\int_\eta |\eta|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s |(\chi_{(-\infty, t)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)^\wedge(\eta)|^2 d\eta &\leq c \int_\eta \langle \eta \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}} |(\chi_{(-\infty, t)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)^\wedge(\eta)|^2 d\eta \\
&\leq c \int_\eta \langle \eta \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}} |(\chi_{(-\infty, 0)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(\cdot - t))^\wedge(\eta)|^2 d\eta.
\end{aligned}$$

Agora usando os Lemas 1.2 e 1.10 obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\eta \langle \eta \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}} |(\chi_{(-\infty, 0)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(\cdot - t))^\wedge(\eta)|^2 d\eta &= \|\chi_{(-\infty, 0)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(\cdot - t)\|_{H^{\frac{s-\lambda}{2}-\frac{1}{4}}(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq c \|\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(\cdot - t)\|_{H^{\frac{s-\lambda}{2}-\frac{1}{4}}(\mathbb{R})}^2 \\
&= c \|\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f\|_{H^{\frac{s-\lambda}{2}-\frac{1}{4}}(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq c \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})}^2,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Lema 2.9. *Se $-1 < \lambda < 1$, então*

$$(2.38) \quad \|\psi(t)\mathcal{L}_{\pm s}^\lambda f(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t^+))} \leq c\|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t^+)}.$$

Demonstração. Pelo Lema 1.4 podemos desconsiderar a função teste.

A mudança de variável $t'' = t - t'$ implica em

$$\begin{aligned} & (I - \partial_t^2)^{\frac{2s+1}{4}} \left(\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \int_{-\infty}^t e^{i(t-t')\partial_x^2} \delta(x) h(t') \right) \\ &= (I - \partial_t^2)^{\frac{2s+1}{4}} \left(\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \int_0^{+\infty} e^{it''\partial_x^2} \delta(x) h(t - t'') \right) \\ &= \left(\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \int_0^{+\infty} e^{it''\partial_x^2} \delta(x) (I - \partial_t^2)^{\frac{2s+1}{4}} h(t - t'') \right) \\ &= \left(\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \int_{-\infty}^t e^{i(t-t')\partial_x^2} \delta(x) (I - \partial_{t'}^2)^{\frac{2s+1}{4}} h(t') \right). \end{aligned}$$

Portanto na estimativa podemos desconsiderar o multiplicador $(I - \partial_t^2)^{\frac{2s+1}{4}}$ e precisamos provar que

$$(2.39) \quad \|\psi(t)\mathcal{L}_{+s}^\lambda f(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; L^2(\mathbb{R}^+))} \leq c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)},$$

Como $-1 < \lambda < 1$ temos que

$$\left(\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \right)^\wedge(\xi) = c(\xi - i0)^{-\lambda} = e^{-2\pi i\lambda} \xi_+^{-\lambda} + e^{2\pi i\lambda} \xi_-^{-\lambda},$$

onde $\xi_+^{-\lambda}$ e $\xi_-^{-\lambda}$ são as distribuições definidas em (1.2) e (1.3). Logo a distribuição $(\xi - i0)^{-\lambda}$ é uma função localmente integrável.

Sabemos que $\mathcal{F}_x \mathcal{L}_{+s}^\lambda f(\xi, t) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^t e^{-i(t-t')\xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(t') dt'$.

Usando $\chi_{(-\infty, t)} = \frac{1}{2} \text{sgn}(t - t') + \frac{1}{2}$, fazemos a seguinte decomposição:

$$\mathcal{F}_x \mathcal{L}_{+s}^\lambda f(\xi, t) = F_1(\xi, t) + F_2(\xi, t),$$

onde

$$F_1(\xi, t) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-i(t-t')\xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(t') dt'$$

e

$$F_2(\xi, t) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t - t') e^{-i(t-t')\xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(t') dt'.$$

Pelo Lema 1.9, $\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, logo $F_1(\xi, t) = c(\xi - i0)^{-\lambda} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)^\wedge(-\xi^2) e^{-it\xi^2}$.

Usando a fórmula de inversão temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\xi^{-1} F_1(x, t) &= \int_\xi e^{ix\xi} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)^\wedge(-\xi^2) (\xi - i0)^{-\lambda} e^{-it\xi^2} d\xi \\ &= \int_\xi e^{ix\xi} (-\xi^2 - i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} \hat{f}(-\xi^2) (\xi - i0)^{-\lambda} e^{-it\xi^2} d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{ix\eta^{\frac{1}{2}}} (-\eta + i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} \hat{f}(-\eta) (\eta^{\frac{1}{2}} - i0)^{-\lambda} e^{-it\eta} \eta^{-\frac{1}{2}} d\eta \\ &\quad + \int_0^{+\infty} e^{-ix\eta^{\frac{1}{2}}} (-\eta + i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} \hat{f}(-\eta) (-\eta^{\frac{1}{2}} - i0)^{-\lambda} e^{-it\eta} \eta^{-\frac{1}{2}} d\eta \\ &= c_1 \int_0^{+\infty} e^{ix\eta^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(-\eta) e^{-it\eta} d\eta + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-ix\eta^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(-\eta) e^{-it\eta} d\eta \\ &= \mathcal{F}(c_1 \chi_{(0,+\infty)}(\cdot) \hat{f}(-\cdot) e^{ix(\cdot)^{\frac{1}{2}}} + c_2 \chi_{(0,+\infty)}(\cdot) \hat{f}(-\cdot) e^{-ix(\cdot)^{\frac{1}{2}}})(t). \end{aligned}$$

Portanto

$$(2.40) \quad \|F_1(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; L^2(\mathbb{R}^+))} \leq c \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Agora vamos analisar $F_2(\xi, t)$. Temos que

$$F_2(\xi, t) = (\xi - i0)^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} e^{-i\xi^2 \cdot} \operatorname{sgn}(\cdot) * \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f \right) (t).$$

Como $\mathcal{F}_t \left(\frac{1}{2} e^{-i\xi^2 \cdot} \operatorname{sgn}(\cdot) * \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f \right) (\tau) = \frac{(\tau - i0)^{\frac{1+\lambda}{2}} \hat{f}(\tau)}{\tau + \xi^2}$, temos

$$\int_\tau e^{it\tau} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\tau + \xi^2| > \epsilon} \frac{e^{ix\xi} (\tau - i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} (\xi - i0)^{-\lambda} d\xi}{(\tau + \xi^2)} \hat{f}(\tau) d\tau.$$

Precisamos mostrar que a função

$$g(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\tau + \xi^2| > \epsilon} \frac{e^{ix\xi} (\tau - i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} (\xi - i0)^{-\lambda} d\xi}{(\tau + \xi^2)}$$

é limitada.

Fazendo a mudança de variável $\xi \rightarrow |\tau|^{\frac{1}{2}}\xi$ e usando

$$(2.41) \quad (\xi|\tau|^{\frac{1}{2}} - i0)^{-\lambda} = |\tau|^{-\frac{\lambda}{2}}(c_1\xi_+^{-\lambda} + c_2\xi_-^{-\lambda}),$$

obtemos

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \int \frac{e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}}x\xi} |\tau|^{\frac{1-\lambda}{2}} (c_1\tau_+^{\frac{\lambda+1}{2}} + c_2\tau_-^{\frac{\lambda+1}{2}})(\xi - i0)^{-\lambda}}{\tau + |\tau|\xi^2} \\ &= c_1\chi_{\tau>0} \int_{\xi} e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}}x\xi} \frac{c_1\xi_+^{-\lambda} + c_2\xi_-^{-\lambda}}{1 + \xi^2} d\xi + c_2\chi_{\tau<0} \int_{\xi} e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}}x\xi} \frac{c_1\xi_+^{-\lambda} + c_2\xi_-^{-\lambda}}{1 - \xi^2} d\xi \\ &= I + II. \end{aligned}$$

A primeira integral é uniformemente limitada em τ se $\lambda > -1$, esta é obtida separando nas regiões $|\xi| < 1$ e $|\xi| \geq 1$. Agora vamos controlar II . Seja $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\theta(\xi) = 1$ em $[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ e $\theta(t) = 0$ no complementar de $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Assim temos

$$\begin{aligned} II &= c_1\chi_{\tau<0} \int_{\xi} e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}}x\xi} \frac{c_1\xi_+^{-\lambda}\theta(\xi)}{1 - \xi^2} d\xi \\ &\quad + c_2\chi_{\tau<0} \int_{\xi} e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}}x\xi} \frac{1 - \theta(\xi)(c_1\xi_+^{-\lambda} + c_2\xi_-^{-\lambda})}{1 - \xi^2} d\xi \\ &= II_1 + II_2. \end{aligned}$$

A segunda integral é limitada se $\lambda > -1$. Agora vamos estimar II_1 :

$$\begin{aligned} II_1 &= c_2\chi_{\tau<0} \int_{\xi} e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}}x\xi} \frac{c_1\xi_+^{-\lambda}\theta(\xi)}{(1 - \xi)(1 + \xi)} d\xi \\ &= c_1\chi_{\tau<0} \mathcal{F}_{\xi}^{-1} \left(\frac{c_1\xi_+^{-\lambda}\theta(\xi)}{(1 - \xi)(1 + \xi)} \right) (x|\tau|^{\frac{1}{2}}) \\ &= \left[(\text{sgn}(1 - \xi) * \mathcal{F}_{\xi}^{-1} \left(\frac{c_2\xi_+^{-\lambda}\theta(\xi)}{(1 + \xi)} \right)) \right] (x|\tau|^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

A função acima é claramente limitada por ser a convolução de uma função limitada com uma função em $S(\mathbb{R})$.

Assim concluímos a demonstração. □

Lema 2.10. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Suponha que $b < \frac{1}{2}$ e $s - \frac{1}{2} \leq \lambda < s + \frac{1}{2}$ e $\lambda < \frac{1}{2}$. Então*

$$(2.42) \quad \|\psi(t)(\mathcal{L}_{\pm s}^{\lambda} f)(x, t)\|_{X^{s,b}} \leq c\|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})}.$$

Observação 2.3. Observe, que devido as hipóteses do Lema 2.10, fazendo o uso da família de operadores $\mathcal{L}_{\pm s}^0$, que coincide com o operador definido em [22], esta estimativa só seria válida no conjunto de regularidade $-1/2 < s \leq 1/2$. Isto nos motivou a trabalhar com a família de operadores $\mathcal{L}_{\pm s}^\lambda$, na qual podemos trabalhar com regularidade $s \leq 1/2 + \lambda$ e como $\lambda < 1/2$, podemos atingir a regularidade $s < 1$.

Demonstração. Como $\lambda < \frac{1}{2}$, vemos que $\left(\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right)^\wedge(\xi) = c(\xi - i0)^{-\lambda}$, é uma função localmente integrável.

Sabemos que

$$\mathcal{F}_x(\mathcal{L}_{+s}^\lambda f)(\xi, t) = c(\xi - i0)^{-\lambda} \int_0^t e^{-i(t-t')\xi^2} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt'.$$

Como $\lambda > -1$ temos que $(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)^\wedge(\tau) = (\tau - i0)^{\frac{\lambda+1}{2}}$ é uma função localmente integrável.

Usando $2\chi_{(0,t)} = \text{sgn}(t') + \text{sgn}(t - t')$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x(\mathcal{L}_{+s}^\lambda f)(\xi, t) &= c(\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t-t')\xi^2} \text{sgn}(t') \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt' \\ &\quad + c(\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t-t')\xi^2} \text{sgn}(t - t') \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt' \\ &= F_1(\xi, t) + F_2(\xi, t). \end{aligned}$$

Como $\widehat{\text{sgn}}(\tau) = \frac{1}{2i} \text{v.p. } \frac{1}{\tau}$, temos

$$\begin{aligned} F_1(\xi, t) &= c(\xi - i0)^{-\lambda} e^{-it\xi^2} (\text{sgn}(\cdot) \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(\cdot))^\wedge(-\xi^2) \\ &= -c(\xi - i0)^{-\lambda} e^{-it\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\tau - i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} \hat{f}(\tau)}{\tau + \xi^2} d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\xi, t) &= c(\xi - i0)^{-\lambda} [(e^{-i(\cdot)\xi^2} \text{sgn}(\cdot)) * \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(\cdot)](t) \\ &= c(\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau} \frac{(\tau - i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} \hat{f}(\tau)}{\tau + \xi^2} d\tau, \end{aligned}$$

$$(\mathcal{L}_{+s}^\lambda f)^\wedge(\xi, \tau) = c(\xi - i0)^{-\lambda} \int \frac{e^{it\tau} - e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} (\tau - i0)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau.$$

Agora seja $\theta(\tau) \in C^\infty$ tal que $\theta(\tau) = 1$ para $|\tau| \leq 1$ e $\theta(\tau) = 0$ para $|\tau| \geq 2$.

Defina u_1, u_2, u_3 por

$$\mathcal{F}_x u_1(\xi, t) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int \frac{e^{it\tau} - e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} \theta(\tau + \xi^2) (\tau - i0)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau,$$

$$\mathcal{F}_x u_2(\xi, t) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int \frac{e^{it\tau}}{\tau + \xi^2} (1 - \theta(\tau + \xi^2)) (\tau - i0)^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau,$$

$$\mathcal{F}_x u_3(\xi, t) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int \frac{e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} (1 - \theta(\tau + \xi^2)) (\tau - i0)^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau.$$

Vamos estimar a norma de cada uma das funções acima.

Estimativa de u_2 :

Temos

$$\begin{aligned} \|u_2\|_{X^{s,b}}^2 &= c \int \int |\hat{u}_2|^2 \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau + \xi^2 \rangle^{2b} d\tau d\xi \\ &= c \int \int \langle \xi \rangle^{2s} \frac{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2b}}{|\tau + \xi^2|^2} (1 - \theta(\tau - \xi^2))^2 |\xi|^{-2\lambda} |\tau|^{\lambda+1} |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau d\xi \\ &= c \int |\tau|^{\lambda+1} \left(\int \frac{|\xi|^{-2\lambda} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2-2b}} \right) |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Para obtermos a estimativa requerida para u_2 , precisamos mostrar que

$$(2.43) \quad \int \frac{|\xi|^{-2\lambda} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2-2b}} \leq c \langle \tau \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}}.$$

Fazendo a mudança de variável $\eta = \xi^2$, obtemos

$$\int \frac{|\xi|^{-2\lambda} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2-2b}} \leq c \int \frac{|\eta|^{-\frac{1}{2}-\lambda} \langle \eta \rangle^s d\eta}{\langle \tau + \eta \rangle^{2-2b}} = I(\tau).$$

Se $|\tau| \leq \frac{1}{2}$, temos $\langle \tau + \eta \rangle \sim \langle \eta \rangle$, então

$$I(\tau) \leq c \int \frac{|\eta|^{-\frac{1}{2}-\lambda} \langle \eta \rangle^s d\eta}{\langle \tau + \eta \rangle^{2-2b}} \leq c \int_{|\eta| \leq 1} |\eta|^{-\frac{1}{2}-\lambda} + c \int \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{2-2b-s+\frac{1}{2}+\lambda}} \leq c,$$

pois $\lambda < \frac{1}{2}$, $b < \frac{1}{2}$ e $\lambda \geq -\frac{1}{2} + s$.

Agora suponha $|\tau| > \frac{1}{2}$ e $|\eta| \geq \frac{|\tau|}{2}$.

Neste caso temos

$$I(\tau) \leq c \int \frac{\langle \eta \rangle^{s-\frac{1}{2}-\lambda}}{\langle \tau + \eta \rangle^{2-2b}} \leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}-\lambda} \int \frac{d\eta}{\langle \tau + \eta \rangle^{2-2b}} \leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}-\lambda},$$

pois $\lambda \geq s - \frac{1}{2}$ e $b < \frac{1}{2}$.

Agora seja $|\tau| \geq \frac{1}{2}$ e $|\eta| \leq \frac{|\tau|}{2}$. Neste caso temos $\langle \tau + \eta \rangle \geq \frac{1}{2} \langle \tau \rangle$, que implica em

$$I(\tau) \leq c \langle \tau \rangle^{2b-2} \int_{|\eta| \leq \frac{|\tau|}{2}} \langle \eta \rangle^s |\eta|^{-\frac{1}{2}-\lambda} \leq c \langle \tau \rangle^{2b-2} \langle \tau \rangle^{s+\frac{1}{2}-\lambda} \leq \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}-\lambda}.$$

onde a integral acima foi calculada separando nos casos $s \geq 0$, $s < 0$ e usando $\frac{1}{2} + s - \lambda > 0$ e $\lambda < \frac{1}{2}$. Assim, completamos a estimativa de u_2 .

Agora vamos estimar a função u_3 .

Pela definição de u_3 temos que $u_3(x, t) = \theta(t)e^{it\partial_x^2}\phi(x)$, onde

$$\hat{\phi}(\xi) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int \frac{1 - \psi(\tau + \xi^2)}{\tau + \xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} f)(\tau) d\tau.$$

Então pelo Lema 2.1 é suficiente mostrarmos que

$$\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.$$

Pela Afirmação 2.2 existe $\beta \in S(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\tau} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}} f)(\tau) \beta(\tau + \xi^2) d\tau.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de $|\beta(\tau - \xi^2)| \leq \langle \tau - \xi^2 \rangle^{-N}$, para $N \gg 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{H^s}^2 &\leq \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} |\xi|^{-2\lambda} \left(\int_{\tau} \beta(\tau + \xi^2) |\tau|^{\frac{\lambda+1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau \right)^2 d\xi \\ &\leq \int_{\tau} \left(\int_{\xi} |\xi|^{-2\lambda} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau + \xi^2 \rangle^{-2N+2} d\xi \right) |\tau|^{\lambda+1} |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau \\ &\leq \int_{\tau} \left(\int_{\eta} |\eta|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s \langle \tau + \eta \rangle^{-2N+2} d\eta \right) |\tau|^{\lambda+1} |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Usando a estimativa (2.43), obtemos

$$\int_{\eta} |\eta|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s \langle \tau + \eta \rangle^{-2N+2} d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}}.$$

Para estimarmos u_1 usamos a expansão em série de potências para escrevermos

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{k!} e^{t\partial_x^2} \phi_k(x),$$

onde $\psi_k(t) = i^k t^k \psi(t)$ e $\hat{\phi}_k(\xi) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int_{\tau} (\tau + \xi^2)^{k-1} \theta(\tau + \xi^2) (\tau)^{\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau$.

Pelo Lema 2.1 é suficiente mostrarmos que $\|\phi_k\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})}$. Pela propriedade do suporte e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} \|\phi_k\|_{H^s}^2 &\leq \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} |\xi|^{-2\lambda} \left(\int_{|\tau+\xi^2| \leq 1} |\tau|^{\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}} |\hat{f}(\tau)| d\tau \right)^2 d\xi \\ &\leq c \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} |\xi|^{-2\lambda} \int_{|\tau+\xi^2| \leq 1} |\tau|^{\lambda+1} |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\eta = \xi^2$ temos

$$\int_{|\tau-\xi^2|\leq 1} \langle \xi \rangle^{2s} |\xi|^{-2\lambda} d\xi \leq c \int_{|\tau-\eta|\leq 1} |\eta|^{-\frac{1}{2}-\lambda} \langle \eta \rangle^s d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}}.$$

Combinando as expressões (3.28) e (3.29), chegamos em $\|\phi_k\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}} \mathbb{R}^+}$.

Assim concluímos a prova do Lema. □

2.3.3 Equação Linear de KdV

Nesta seção vamos obter as soluções explícitas para os problemas lineares para a equação de KdV nas semirretas à direita e à esquerda. Também vamos apresentar certas estimativas destas soluções que estão contidas em [23].

O grupo livre $e^{-t\partial_x^3} : S'(\mathbb{R}) \rightarrow S'(\mathbb{R})$ associado à equação linear de KdV é dado por

$$e^{-t\partial_x^3} \phi(x) = \{e^{it\xi^3} \hat{\phi}(\xi)\}^{\vee}(x),$$

então

$$(2.44) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x^3) e^{-t\partial_x^3} \phi(x, t) = 0; & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ e^{-t\partial_x^3} \phi(x, 0) = \phi(x); & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

no sentido das distribuições.

Em particular, se $\phi \in S(\mathbb{R})$ temos

$$(2.45) \quad e^{-t\partial_x^3} \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} e^{i\xi x} e^{it\xi^3} \hat{\phi}(\xi) d\xi,$$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ defina V^α como o completamento de $S'(\mathbb{R}^2)$ da norma

$$(2.46) \quad \|u\|_{V^\alpha} = \left(\int \int_{|\xi|\leq 1} \langle \tau \rangle^{2\alpha} |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\tau d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 2.4. *O espaço V^α foi definido em [23] para a estimativa bilinear, referente a equação de KdV, ser válida.*

O seguinte Lema descreve propriedades elementares do grupo $e^{t\partial_x^3}$:

Lema 2.11. *Sejam $k \in \mathbb{R}$, $0 < b < 1$. Se $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, então*

- (a) (Estimativa no Espaço) $\|e^{t\partial_x^3}\phi(x)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x))} \leq c\|\phi\|_{H^k(\mathbb{R})}.$
- (b) (Estimativa no Tempo) $\|\psi(t)e^{t\partial_x^3}\phi(x)\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t))} \leq c\|\phi\|_{H^k(\mathbb{R})}.$
- (c) (Estimativa no tempo da derivada) $\|\psi(t)\partial_x e^{t\partial_x^3}\phi(x)\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}_t))} \leq c\|\phi\|_{H^k(\mathbb{R})}.$
- (d) (Estimativa nos Espaços de Bourgain) $\|\psi(t)e^{t\partial_x^3}\phi(x)\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha} \leq c\|\phi\|_{H^k(\mathbb{R})}.$

Demonstração. Consultar [23]. □

Definição 2.1. A função de Airy é definida por

$$(2.47) \quad A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{i\xi^3} d\xi.$$

Lema 2.12. A função de Airy A é limitada e contínua em $\mathbb{R}$. O valor de $A(0)$ é dado por $\frac{1}{3\Gamma(\frac{2}{3})}.$

Demonstração. Veja a Proposição 4.1 de [11]. □

Agora vamos apresentar os operadores forçados de Duhamel introduzidos em [11]. Para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, seja

$$(2.48) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_k f(x, t) &= 3 \int_0^t e^{-(t-t')\partial_x^3} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-2/3} f(t') dt' \\ &= 3 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\xi^3} e^{ix\xi} d\xi \mathcal{I}_{-2/3} f(t') dt' \\ &= 3 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t-t')^{1/3}} e^{i\xi^3} e^{ix\xi/(t-t')^{1/3}} d\xi \mathcal{I}_{-2/3} f(t') dt' \\ &= 3 \int_0^t A\left(\frac{x}{(t-t')^{1/3}}\right) \frac{\mathcal{I}_{-2/3} f(t')}{(t-t')^{1/3}} dt'. \end{aligned}$$

Lema 2.13. Se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, então

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_x^3) \mathcal{L}_k f(x, t) = 3\delta_0(x) \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}} f(t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_k f(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

no sentido das distribuições, isto é, em $S'(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Uma integração por partes junto com o fato $\partial_{t'} e^{-(t-t')\partial_x^3} \delta_0(x) = \partial_t e^{-(t-t')\partial_x^3} \delta_0(x)$ implica em $\partial_t \mathcal{L}_k f(x, t) = \mathcal{L}_k \partial_t f(x, t).$

Agora, integrando por partes e usando o fato de $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_k \partial_t f(x, t) &= 3 \int_0^t e^{-(t-t')\partial_x^3} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-2/3} \partial_{t'} f(t') dt' \\
&= -3 \int_0^t \partial_{t'} (e^{-(t-t')\partial_x^3} \delta_0(x)) \mathcal{I}_{-2/3} f(t') dt' + 3e^{-(t-t')\partial_x^3} \delta(x) \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}} f(t') \Big|_{t'=0}^{t'=t} \\
&= -3 \int_0^t \partial_x^3 (e^{-(t-t')\partial_x^3} \delta_0(x)) \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}} \partial_{t'} f(t') dt' + \delta(x) \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}} f(t) \\
&= -\partial_x^3 \mathcal{L}_k f(x, t) + 3\delta(x) \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}} f(t).
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. □

O lema abaixo fornece propriedades de decaimento e continuidade da função $\mathcal{L}_k f(x, t)$ para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Lema 2.14. *Seja $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. Para $t \in [0, 1]$ fixado, as funções $\mathcal{L}_k f(\cdot, t)$ e $\partial_x \mathcal{L}_k f(\cdot, t)$ são contínuas em x para todo $x \in \mathbb{R}$ e satisfaz a condição de decaimento*

$$|\mathcal{L}_k f(x, t)| + |\partial_x \mathcal{L}_k f(x, t)| \leq c_k \|f\|_{H^{k+1}} \langle x \rangle^{-k}, \quad \forall k \geq 0.$$

Para $t \in [0, 1]$ fixado, $\partial_x^2 \mathcal{L}_k f(x, t)$ é contínua em x se $x \neq 0$ e tem uma descontinuidade do tipo salto de tamanho $3\mathcal{I}_{\frac{2}{3}} f(t)$ em $x = 0$. Além disso $\partial_x^2 \mathcal{L}_k f(x, t)$ satisfaz

$$|\partial_x^2 \mathcal{L}_k f(x, t)| \leq c_k \|f\|_{H^{k+2}} \langle x \rangle^{-k},$$

para todo $k \geq 0$.

Demonstração. Consultar [23]. □

Usando o Lema anterior temos que se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, então $\mathcal{L}_k f(x, t)$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$. Como $A(0) = 3\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, a segunda representação de $\mathcal{L}_k f(x, t)$ em (2.48) implica em

$$\mathcal{L}_k f(0, t) = f(t).$$

Portanto definindo

$$(2.49) \quad v(x, t) = e^{-t\partial_x^3} \phi(x) + \mathcal{L}_k(f - e^{-\partial_x^3} \phi|_{x=0})(x, t),$$

resolvemos o problema linear

$$(2.50) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x^3)v(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ v(0, t) = f(t), & t \in (0, +\infty), \end{cases}$$

no sentido das distribuições.

Agora vamos considerar a equação linear de KdV na semirreta à esquerda com duas condições de fronteira. Considere o segundo operador forçante definido por Holmer em [23],

$$(2.51) \quad \mathcal{L}_k^{-1}f(x, t) = \partial_x \mathcal{L}_k \mathcal{I}_{1/3}f(x, t) = 3 \int_0^t A' \left(\frac{x}{(t-t')^{1/3}} \right) \frac{\mathcal{I}_{-1/3}f(t')}{(t-t')^{2/3}} dt'.$$

Pelo Lema 2.14, se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, então $\mathcal{L}_k^{-1}f(x, t)$ é contínua em x para todo $x \in \mathbb{R}$, e como $A'(0) = -(3\Gamma(\frac{1}{3}))^{-1}$, a segunda representação de $\mathcal{L}_k^{-1}f(x, t)$ nos fornece

$$\mathcal{L}_k^{-1}f(0, t) = -f(t).$$

Pelo Lema 2.13 temos

$$(2.52) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x^3)\mathcal{L}_k^{-1}f(x, t) = 3\delta'_0(x)\mathcal{I}_{-\frac{1}{3}}f; & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_k f(x, 0) = 0; & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

no sentido das distribuições.

Pelo Lema 2.14 se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, então $\partial_x \mathcal{L}_k f(x, t)$ é contínua em x para todo $x \in \mathbb{R}$, e como $A'(0) = -(3\Gamma(\frac{1}{3}))^{-1}$,

$$(2.53) \quad \partial_x \mathcal{L}_k f(0, t) = -\mathcal{I}_{-\frac{1}{3}}f(t).$$

Pelo Lema 2.14 $\partial_x \mathcal{L}_k^{-1}f(x, t) = \partial_x^2 \mathcal{L}_k \mathcal{I}_{\frac{1}{3}}f(x, t)$ é contínua em x para $x \neq 0$ e tem uma descontinuidade do tipo salto de tamanho $3\mathcal{I}_{-\frac{1}{3}}f(t)$ em $x = 0$. Usando o teorema fundamental do cálculo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \partial_x^2 \mathcal{L}_k f(x, t) &= - \int_0^{+\infty} \partial_y^3 \mathcal{L}_k f(y, t) dy \\ &= \int_0^{+\infty} \partial_t \mathcal{L}_k f(y, t) dy \\ &= 3 \int_0^{+\infty} A(y) dy \int_0^t \partial_t \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}}f(t') dt' \\ &= \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}}f(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \partial_x \mathcal{L}_k^- f(x, t) = -2\mathcal{I}_{-\frac{1}{3}} f(t), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \partial_x \mathcal{L}_k^- f(x, t) = \mathcal{I}_{-\frac{1}{3}} f(t).$$

Portanto dadas $h_1(t)$ e $h_2(t)$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k h_1(0, t) + \mathcal{L}_k^- h_2(0, t) &= h_1(t) - h_2(t), \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \mathcal{I}_{\frac{1}{3}} \partial_x (\mathcal{L}_k h_1(x, \cdot) + \partial_x \mathcal{L}_k^- h_2(x, \cdot))(t) &= -h_1(t) - 2h_2(t), \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{I}_{\frac{1}{3}} \partial_x (\mathcal{L}_k h_1(x, \cdot) + \partial_x \mathcal{L}_k^+ h_2(x, \cdot))(t) &= -h_1(t) + h_2(t). \end{aligned}$$

Dados v_0 , $g(t)$ e $h(t)$, definimos

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g - e^{\cdot \partial_x^3} v_0|_{x=0} \\ \mathcal{I}_{\frac{1}{3}}(h - \partial_x e^{\cdot \partial_x^3} v_0) \end{bmatrix}.$$

Portanto, definindo $v(x, t) = e^{-t\partial_x^3} v_0(x) + \mathcal{L}_k h_1(x, t) + \mathcal{L}_k^- h_2(x, t)$, temos

$$(2.54) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x^3) v(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ v(0, t) = g(t), & t \in (-\infty, 0), \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \partial_x v(x, t) = h(t), & t \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

no sentido das distribuições.

Assim tomando restrição resolvemos o análogo PVIF em $\mathbb{R}^-$.

2.3.4 Uma família analítica de operadores forçantes associada ao grupo de Airy

Em [11] foi obtido resultado de boa colocação local para o PVIF para a equação de KdV na semirreta, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x(v^2) = 0; & (x, t) \in (0, +\infty) \times (0, T), \\ v(x, 0) = v_0(x); & x \in (0, +\infty), \\ v(0, t) = f(t), & t \in (0, T), \end{cases}$$

para $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^+)$, $f \in H^{\frac{1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Posteriormente em [22] foi obtido resultado de baixa regularidade, para $u_0 \in H^k(\mathbb{R}^+)$, $f \in H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$, com $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{2}$, $k \neq \frac{1}{2}$. Para isto foi necessário introduzir uma família analítica de operadores $\mathcal{L}_k^\lambda$, que generaliza o operador $\mathcal{L}_k$ de Colliander e Kenig. Como vamos trabalhar em espaços de baixa regularidade, também

trabalharemos com esta família de operadores. A prova dos resultados desta seção seguem as mesmas ideias dos resultados obtidos na seção 2.3.2, por isso resolvemos não fazê-las aqui. O leitor interessado na prova destes resultados, pode consultar [21] ou [23].

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re} \lambda > -3$ e $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ defina

$$\mathcal{L}_{-k}^\lambda g(x, t) = \left[\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \mathcal{L}_k(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{3}} g)(\cdot, t) \right] (x),$$

onde $*$ denota a convolução de distribuições. Para $\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = e^{i\pi\lambda} \frac{(-x)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$, defina

$$\mathcal{L}_{+k}^\lambda g(x, t) = \left[\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \mathcal{L}_k(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{3}} g)(\cdot, t) \right] (x).$$

Em particular, se $\operatorname{Re} \lambda > 0$ temos

$$\mathcal{L}_{-k}^\lambda g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^x (x-y)^{\lambda-1} \mathcal{L}_k(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{3}} g)(y, t) dy,$$

$$\mathcal{L}_{+k}^\lambda g(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^{+\infty} (y-x)^{\lambda-1} \mathcal{L}_k(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{3}} g)(y, t) dy.$$

Para $\operatorname{Re} \lambda > -3$ temos

$$(2.55) \quad \mathcal{L}_{-k}^\lambda g(x, t) = 3 \frac{x_+^{(\lambda+3)-1}}{\Gamma(\lambda+3)} \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}-\frac{\lambda}{3}} g(t) - \int_{-\infty}^x \frac{(x-y)^{(\lambda+3)-1}}{\Gamma(\lambda+3)} \mathcal{L}_k(\partial_t \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{3}} g)(y, t) dy,$$

$$(2.56) \quad \mathcal{L}_{+k}^\lambda g(x, t) = 3 \frac{x_-^{(\lambda+3)-1}}{\Gamma(\lambda+3)} \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}-\frac{\lambda}{3}} g(t) + e^{i\pi\lambda} \int_{-\infty}^x \frac{(y-x)^{(\lambda+3)-1}}{\Gamma(\lambda+3)} \mathcal{L}_k(\partial_t \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{3}} g)(y, t) dy.$$

Usando (2.55) e (2.56) obtemos

$$(\partial_t + \partial_x^3) \mathcal{L}_{-k}^\lambda g(x, t) = 3 \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}-\frac{\lambda}{3}} g(t),$$

e

$$(\partial_t + \partial_x^3) \mathcal{L}_{+k}^\lambda g(x, t) = 3 \frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \mathcal{I}_{-\frac{2}{3}-\frac{\lambda}{3}} g(t).$$

Lema 2.15. (Propriedades de decaimento e continuidade espacial para $\mathcal{L}_{\pm k}^\lambda g(x, t)$.) Seja $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ e fixe $t \geq 0$, então

$$\mathcal{L}_{\pm k}^{-2}g = \partial_x^2 \mathcal{L}_k \mathcal{I}_{\frac{2}{3}}g, \quad \mathcal{L}_{\pm k}^{-1}g = \partial_x \mathcal{L}_k \mathcal{I}_{\frac{1}{3}}g, \quad \mathcal{L}_{\pm k}^0g = \mathcal{L}_kg.$$

Além disso, $\mathcal{L}_{\pm k}^{-2}g(x, t)$ tem uma descontinuidade do tipo salto de tamanho $3g(t)$ em $x = 0$, caso $x \neq 0$, $\mathcal{L}_{\pm k}^{-2}g(x, t)$ é contínua em x . Para $\lambda > -2$, $\mathcal{L}_{\pm k}^\lambda g(x, t)$ é contínua em x para todo $x \in \mathbb{R}$. Para $-2 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, $\mathcal{L}_{-k}^\lambda g(x, t)$ satisfaz as cotas de decaimento

$$|\mathcal{L}_{-k}^\lambda g(x, t)| \leq c_{m, \lambda, g} \langle x \rangle^{-m}, \quad \forall x \leq 0, \forall m \geq 0.$$

$$|\mathcal{L}_{-k}^\lambda g(x, t)| \leq c_{\lambda, g} \langle x \rangle^{\lambda-1}, \quad \forall x \geq 0.$$

Para $-2 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, $\mathcal{L}_{+k}^\lambda g(x, t)$ satisfaz as cotas de decaimento

$$|\mathcal{L}_{+k}^\lambda g(x, t)| \leq c_{m, \lambda, g} \langle x \rangle^{-m}, \quad \forall x \geq 0, \forall m \geq 0.$$

$$|\mathcal{L}_{+k}^\lambda g(x, t)| \leq c_{\lambda, g} \langle x \rangle^{\lambda-1}, \quad \forall x \leq 0.$$

Lema 2.16. (Valores de $\mathcal{L}_{\pm k}^\lambda g(x, t)$ em $x = 0$) Para $\operatorname{Re} \lambda > -2$,

$$\mathcal{L}_{-k}^\lambda g(0, t) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \lambda + \frac{\pi}{6} \right) g(t),$$

$$\mathcal{L}_{+k}^\lambda g(0, t) = e^{i\pi\lambda} g(t).$$

Seja $f(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, utilizando os Lemas 2.15 e 2.16 temos que

$$(2.57) \quad v(x, t) = e^{-\pi\lambda i} \mathcal{L}_{+k}^\lambda f(x, t)$$

é contínua em x e em $x = 0$ vale, $v(0, t) = f(t)$. Portanto $v(x, t)$ resolve o problema linear

$$(2.58) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x^3)v(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = 0, & x \in (0, +\infty), \\ v(0, t) = f(t), & t \in (0, T). \end{cases}$$

Agora vamos resolver a seguinte versão linear do PVIF linear em $\mathbb{R}^-$,

$$(2.59) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x^3)v(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^-, \\ v(0, t) = g(t), & t \in (0, T), \\ \partial_x v(0, t) = h(t), & t \in (0, T). \end{cases}$$

fazendo uso da família analítica $\mathcal{L}_{-k}^\lambda$.

Considere $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, $h_1, h_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ e seja

$$(2.60) \quad v(x, t) = \mathcal{L}_{-k}^{\lambda_1} h_1(x, t) + \mathcal{L}_{-k}^{\lambda_2} h_2(x, t).$$

Pelo Lema 2.15, $u(x, t)$ é contínua em x . Em $x = 0$, usando o Lema 2.16, temos

$$v(0, t) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_1 + \frac{\pi}{6}\right) h_1(t) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_1 + \frac{\pi}{6}\right) h_2(t),$$

$$\partial_x v(x, t) = \mathcal{L}_{-k}^{\lambda_1-1} \mathcal{I}_{-\frac{1}{3}} h_1(t) + \mathcal{L}_{-k}^{\lambda_2-1} \mathcal{I}_{-\frac{1}{3}} h_2(t).$$

Pelo Lema 2.15, $\partial_x v(x, t)$ é contínua em $x = 0$ e usando o Lema 2.16,

$$(2.61) \quad \partial_x v(0, t) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_1 - \frac{\pi}{6}\right) h_1(t) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_1 - \frac{\pi}{6}\right) h_2(t),$$

Em termos de matrizes podemos escrever

$$\begin{bmatrix} v(0, t) \\ \mathcal{I}_{-1/3} \partial_x v(0, t) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_1 + \frac{\pi}{6}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_2 + \frac{\pi}{6}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_1 - \frac{\pi}{6}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_2 - \frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}.$$

Usando identidades trigonométricas básicas vemos que a matriz 2×2 tem determinante $\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}(\lambda_2 - \lambda_1)$ que é não nulo se $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 3n$ para $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, para quaisquer $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ definimos

$$\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} g(t) \\ \mathcal{I}_{1/3} h(t) \end{bmatrix},$$

onde

$$(2.62) \quad A = \frac{1}{2\sqrt{3}\operatorname{sen}\pi/3(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_2 - \frac{\pi}{6}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_2 + \frac{\pi}{6}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_1 - \frac{\pi}{6}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\lambda_1 + \frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix}.$$

Assim $v(x, t)$ resolve (2.59).

A seguir enunciamos as estimativas da classe $\mathcal{L}_{\pm k}^\lambda$.

Lema 2.17. *Se $k \in \mathbb{R}$, então*

(a) (Estimativa no espaço) Se $k - \frac{5}{2} < \lambda < k + \frac{1}{2}$, $\lambda < \frac{1}{2}$ e $\text{supp } f \subset [0, 1]$, então

$$\|\mathcal{L}_{\pm k}^\lambda g(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H_x^k)} \leq c \|g\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)}.$$

(b) (Estimativa no tempo) Se $-2 < \lambda < 1$, então

$$\|\psi(t)\mathcal{L}_{\pm k}^\lambda g(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t^+))} \leq c \|g\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)}.$$

(c) (Estimativas no tempo da derivada) Se $-1 < \lambda < 2$, então

$$\|\psi(t)\partial_x \mathcal{L}_{\pm k}^\lambda g(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; H_0^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}_t^+))} \leq c \|g\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)}.$$

(d) (Espaços de Bourgain) Se $k - 1 \leq \lambda < k + \frac{1}{2}$, $\lambda < \frac{1}{2}$, $\alpha \leq \frac{s-\lambda+2}{3}$ e $0 \leq b < \frac{1}{2}$, então

$$\|\psi(t)\mathcal{L}_{\pm k}^\lambda g(x, t)\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha} \leq c \|g\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)}.$$

Observação 2.5. As restrições de s e λ no Lema acima motivaram Holmer a introduzir a família analítica de operadores $\mathcal{L}_{\pm k}^\lambda$ ao invés de trabalhar somente com $\mathcal{L}_k$.

2.4 Estimativas para o operador Duhamel

O operador solução não homogênea de Duhamel associado ao grupo livre de Schrödinger é definido por

$$\mathcal{S}w(x, t) = -i \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} w(x, t') dt',$$

então, no sentido das distribuições temos

$$(2.63) \quad \begin{cases} (i\partial_t + \partial_x^2)\mathcal{S}w(x, t) = w(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{S}w(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Analogamente definimos o operador solução não homogênea de Duhamel para o grupo associado a equação linear de KdV por

$$\mathcal{K}w(x, t) = \int_0^t e^{-(t-t')\partial_x^3} w(x, t') dt',$$

então, no sentido das distribuições temos

$$(2.64) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x^3)\mathcal{K}w(x, t) = w(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{K}w(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A seguir vamos definir alguns espaços modificados do tipo Bourgain.

Definamos $W^{s,b}$ como o completamento de $S'(\mathbb{R}^2)$ cuja norma é

$$\|u\|_{W^{s,b}} = \left(\int \int_{\xi, \tau} \langle \tau \rangle^s \langle \tau + \xi^2 \rangle^{2b} |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definamos $U^{s,b}$ como o completamento de $S'(\mathbb{R}^2)$ munido da seguinte norma

$$\|u\|_{U^{k,b}} = \left(\int \int \langle \tau \rangle^{\frac{2k}{3}} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2b} |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.4.1 Estimativas para o operador Duhamel associado ao grupo de Schrödinger

O próximo Lema nos fornece as estimativas para o operador $\mathcal{S}$.

Lema 2.18. (a) *Estimativa no espaço:*

Se $-\frac{1}{2} < d < 0$ e $s \in \mathbb{R}$, então

$$\|\psi(t)\mathcal{S}w(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x))} \leq c\|w\|_{X^{s,d}}.$$

(b) *Estimativa no tempo:*

Se $-\frac{1}{2} < c < 0$, então

$$\|\psi(t)\mathcal{S}w(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t))} \leq \begin{cases} c\|w\|_{X^{s,d}}, & \text{se } -\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ c(\|w\|_{W^{s,d}} + \|w\|_{X^{s,d}}), & \forall s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(c) *Estimativa em espaços de Bourgain:*

Se $-\frac{1}{2} < c \leq 0 \leq b \leq c + 1$, então

$$\|\psi(t)\mathcal{S}w(x, t)\|_{X^{s,b}} \leq \|w\|_{X^{s,d}}.$$

Observação 2.6. No item (b) para $s > \frac{1}{2}$, precisamos trabalhar com o espaço de Bourgain modificado $W^{s,b}$. Devido a este fato, para $s > 1/2$ só tratamos o PVIF (2.2) e (2.3) no caso ressonante, isto é, quando $\beta = 0$.

Demonstração. Para provar (a) usamos $(\operatorname{sgn}(x))^\wedge = \frac{2}{i} \text{v.p.} \frac{1}{\xi}$, $(\mathcal{I}_{-1/2} f)^\wedge(\tau) = (\tau - i0)^{1/2}$, para escrevermos

$$\begin{aligned} \psi(t) \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} w(\cdot, t') dt' &= \psi(t) \int_\xi e^{ix\xi} \int_\tau \frac{e^{it\tau} - e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} \hat{w}(\xi, \tau) d\tau d\xi \\ &= \psi(t) \int_\xi e^{ix\xi} \int_{|\tau + \xi^2| \leq 1} \frac{e^{it\tau} - e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} \hat{w}(\xi, \tau) d\tau d\xi \\ &\quad + \psi(t) \int_\xi e^{ix\xi} \int_{|\tau + \xi^2| > 1} \frac{e^{it\tau} - e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} \hat{w}(\xi, \tau) d\tau d\xi \\ &= \hat{w}_1 + \hat{w}_2. \end{aligned}$$

Para estimarmos w_1 usamos

$$\left| \psi(t) \frac{e^{it\tau} - e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} \right| \leq c, \text{ se } |\tau + \xi^2| \leq 1,$$

junto com a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Para estimarmos w_2 usamos

$$\left| \psi(t) \frac{e^{it\tau} - e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} \right| \leq c \langle \tau + \xi^2 \rangle^{-1}, \text{ se } |\tau + \xi^2| > 1,$$

junto com a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Agora vamos provar (b). Seja $\theta(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\theta(\tau) = 1$ se $|\tau| < \frac{1}{2}$ e $\operatorname{supp} \theta \subset [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$.

Temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x \left(\psi(t) \int_0^t e^{-i(t-t')\partial_x^2} w(x, t') dt' \right) &= \psi(t) \int_0^t e^{i(t-t')\xi^2} \mathcal{F}_x w(\xi, t') dt' \\ &= \psi(t) \int_\tau \frac{e^{it\tau} - e^{-it\xi^2}}{\tau + \xi^2} \hat{w}(\xi, \tau) d\tau \\ &= \psi(t) e^{-it\xi^2} \int_\tau \frac{e^{it(\tau + \xi^2)} - 1}{\tau + \xi^2} \theta(\tau - \xi^2) \hat{w}(\xi, \tau) d\tau \\ &\quad + \psi(t) \int_\tau e^{it\tau} \frac{1 - \theta(\tau + \xi^2)}{\tau + \xi^2} \hat{w}(\xi, \tau) d\tau \\ &\quad - \psi(t) e^{-it\xi^2} \int_\tau \frac{1 - \theta(\tau + \xi^2)}{\tau + \xi^2} \hat{w}(\xi, \tau) d\tau \\ &= \mathcal{F}_x w_1 - \mathcal{F}_x w_2 + \mathcal{F}_x w_3. \end{aligned}$$

Por expansão em série de potência, temos

$$w_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{k!} e^{-t\partial_x^2} \phi_k(x),$$

onde

$$\psi_k(t) = i^k t^k \theta(t) \text{ e } \hat{\phi}_k(\xi) = \int_{\tau} (\tau + \xi^2)^{k-1} \theta(\tau + \xi^2) \hat{w}(\xi, \tau) d\tau.$$

Usando o Lema 2.1 (b), obtemos:

$$\begin{aligned} \|w_1(x, \cdot)\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}}^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{k!} e^{-t\partial_x^2} \phi_k(x) \right\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}}^2 \\ &\leq c \left\| \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\partial_x^2} \phi_k(x) \right\|_{H_t^{\frac{2s+1}{4}}}^2 \leq c \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \right\|_{H_x^s}^2. \end{aligned}$$

Agora pela definição de ϕ_k e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned} \|\phi_k\|_{H_x}^2 &= \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{|\tau + \xi^2| \leq \frac{2}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} (\tau + \xi^2)^{k-1} \theta(\tau + \xi^2) \hat{w}(\xi, \tau) d\tau \right]^2 d\xi \\ &\leq c \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} \int_{\tau} \langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d} |\hat{w}(\xi, \tau)|^2 d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Isto completa a estimativa de w_1 .

Agora vamos estimar w_2 . Pela fórmula de inversão temos

$$(2.65) \quad w_2(x, t) = \theta(t) \int_{\tau} e^{it\tau} \int_{\xi} e^{ix\xi} \frac{1 - \psi(\tau + \xi^2)}{\tau + \xi^2} \hat{w}(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \|w_2\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t))} &\leq c \int_{\tau} \langle \tau \rangle^{\frac{2s+1}{2}} \left[\int_{\xi} \langle \tau + \xi^2 \rangle^{-1} |\hat{w}(\xi, \tau)| d\xi \right]^2 d\tau \\ &\leq c \int_{\tau} \langle \tau \rangle^{\frac{2s+1}{2}} G(\tau) \int \langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d} |\hat{w}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau. \end{aligned}$$

onde

$$G(\tau) = \int \langle \tau + \xi^2 \rangle^{-2-2d} d\xi \leq \int_{\eta} \langle \tau + \eta \rangle^{-2-2d} |\eta|^{-\frac{1}{2}} d\eta.$$

Precisamos mostrar que $G(\tau) \leq c \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{2}}$. Vamos mostrar isto em alguns casos.

Inicialmente suponha $|\tau| \leq \frac{1}{2}$, então $\langle \tau - \eta \rangle \sim \langle \eta \rangle$. Logo

$$|G(\tau)| \leq \int_{\eta} \langle \eta \rangle^{-2-2d} |\eta|^{-\frac{1}{2}} \leq c,$$

pois $2 + 2d > 1$.

Suponha $|\eta| \ll |\tau|$, então neste caso temos $\langle \tau + \eta \rangle \sim \langle \eta \rangle$. Assim temos

$$(2.66) \quad G(\tau) \leq \langle \tau \rangle^{-2-2d} \int_{|\eta| \ll |\tau|} |\eta|^{-\frac{1}{2}} d\eta \leq \langle \tau \rangle^{-\frac{3}{2}-2d} \leq \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{2}},$$

pois $-\frac{3}{2} - 2d \leq -\frac{1}{2}$.

Agora consideremos o caso $|\eta| \sim |\tau| \geq \frac{1}{2}$ ou $|\eta| \gg |\tau| \geq 1$. Como $d > -\frac{1}{2}$ obtemos

$$(2.67) \quad G(\tau) \leq |\tau|^{-\frac{1}{2}} \int_{\eta} \langle \tau + \eta \rangle^{-2-2d} d\eta \leq \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{2}}.$$

Reunindo estas estimativas, obtemos

$$\|w_2\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t))} \leq \left(\int \int \langle \tau \rangle^s \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2d} |\hat{w}_2(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Agora vamos estimar w_2 no caso em que $s \in [-1/2, 1/2]$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\|w_2\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}} \leq \int_{\tau} \langle \tau \rangle^{\frac{2s+1}{2}} G(\tau) \int \langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{w}_2(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau,$$

onde

$$G(\tau) = \int \langle \tau - \xi^2 \rangle^{-2-2d} \langle \xi \rangle^{-2s} d\eta \leq c \int_{\eta} \langle \tau - \eta \rangle^{-2-2d} |\eta|^{-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^{-s} d\eta.$$

Afirmamos que $G(\tau) \leq c \langle \tau \rangle^{-\frac{2s+1}{2}}$. Vamos provar isto separando em alguns casos.

Se $|\tau| \leq \frac{1}{2}$, então $\langle \tau - \eta \rangle \sim \langle \eta \rangle$, logo

$$G(\tau) \leq c \int \langle \eta \rangle^{-2-2d-s} |\eta|^{-\frac{1}{2}}.$$

Esta integral é limitada se $\frac{5}{2} + s + 2d > 1$. Como $c > -\frac{1}{2}$, então a integral converge se $s > -\frac{1}{2}$.

Se $2|\eta| \leq |\tau|$, então $\langle \tau + \eta \rangle \sim \langle \tau \rangle$, então como $s < \frac{1}{2}$ e $d > -\frac{1}{2}$ temos

$$\begin{aligned} G(\tau) &\leq c \langle \tau \rangle^{-2-2d} \int_{2|\eta| \leq |\tau|} \langle \eta \rangle^{-s} |\eta|^{-\frac{1}{2}} d\eta \\ &\leq c \langle \tau \rangle^{-2-2d-s+\frac{1}{2}} \leq c. \end{aligned}$$

Se $|\eta| \sim |\tau| \geq \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leq |\tau| \leq 100|\eta|$, então como $d > -\frac{1}{2}$ e $s > -\frac{1}{2}$ obtemos

$$(2.68) \quad G(\tau) \leq c \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{2}-s} \int \langle \tau + \eta \rangle^{-2-2d} d\eta \leq c.$$

Isto conclui a estimativa de w_2 quando $-\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}$.

Como $-\frac{1}{2} \leq s < \frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2} < d < 0$, temos $G(\tau) \leq \langle \tau \rangle^{-\frac{2s+1}{2}}$. Isto completa a estimativa de w_2 .

Agora vamos estimar w_3 . Note que $w_3 = \psi(t)e^{-it\partial_x^2}\phi(x)$, onde

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{\tau} \frac{1 - \theta(\tau + \xi^2)}{\tau + \xi^2} \hat{w}(\xi, \tau) d\tau.$$

Usando o Lema 2.1(b) e a desigualdade de Cauch-Schwarz temos

$$\begin{aligned} \|w_3\|_{C(\mathbb{R}; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}))} &= \|\psi(t)e^{-it\partial_x^2}\phi(x)\|_{C(\mathbb{R}; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}))} \\ &\leq \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &= c \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{\tau} \frac{1 - \theta(\tau + \xi^2)}{\langle \tau + \xi^2 \rangle} |\hat{w}(\xi, \tau)| d\tau \right]^2 d\xi \\ &\leq c \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} \int_{\tau} |\hat{w}(\xi, \tau)|^2 \langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d} d\tau \int \frac{1}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2-2d}} d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Como $d > -\frac{1}{2}$, temos $\int \frac{1}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2-2d}} d\tau \leq c$. Finalizando a estimativa de w_3 .

A prova de (c) segue do Lema 1.7.

□

2.4.2 Estimativas para o operador Duhamel associado ao grupo de Airy

O próximo Lema nos fornece as estimativas para $\mathcal{K}$.

Lema 2.19. (a) *Estimativa no espaço:*

Seja $-\frac{1}{2} < d < 0$ e $s \in \mathbb{R}$, então

$$\|\psi(t)\mathcal{K}w(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x))} \leq c\|w\|_{Y^{k,d}},$$

(b) *Estimativa no tempo:*

Se $-\frac{1}{2} < d < 0$, então

$$\|\psi(t)\mathcal{K}w(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t))} \leq \begin{cases} c\|w\|_{Y^{k,d}}, & \text{se, } -1 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ c(\|w\|_{Y^{k,d}} + \|w\|_{U^{k,d}}), & \forall s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(c) *Estimativa da derivada no tempo:*

Se $-\frac{1}{2} < d < 0$, então

$$\|\psi(t)\partial_x \mathcal{K}w(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; H_t^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}))} \leq \begin{cases} c\|w\|_{Y^{k,d}}, & \text{se, } 0 \leq s \leq \frac{3}{2}; \\ c(\|w\|_{Y^{k,d}} + \|w\|_{U^{k,d}}), & \forall s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(d) *Estimativa em espaços de Bourgain:*

Seja $0 < b < \frac{1}{2}$ e $\alpha < \frac{1}{2} - b$, então

$$\|\psi(t)\mathcal{K}w(x, t)\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha} \leq \|w\|_{Y^{k,-b}}.$$

Demonstração. Consultar [23]. □

2.5 Estimativas não lineares

Nesta seção vamos obter as estimativas não lineares, em espaços de Bourgain, necessárias em nosso trabalho. Na Seção 2.5.1 vamos enunciar certas estimativas já conhecidas de outros trabalhos e na Seção 2.5.2 vamos obter as estimativas não lineares associadas aos termos de acoplamento do sistema SK.

2.5.1 Estimativas conhecidas

A seguir vamos enunciar algumas estimativas não lineares que foram obtidas em outros trabalhos.

Proposição 2.1. *Seja $0 \leq s < \frac{1}{2}$. Se $\frac{1-s}{3} < b < \frac{1}{2}$, então existe $c \in (-\frac{1}{2}, 0)$ tal que*

$$\|u_1 \bar{u}_2 u_3\|_{X^{s,c}} \leq c \|u_1\|_{X^{s,b}} \|u_2\|_{X^{s,b}} \|u_3\|_{X^{s,b}}.$$

Demonstração. Consultar [18]. □

Proposição 2.2. *Seja $s > -\frac{3}{4}$. Se $\max\{\frac{5}{12} - \frac{s}{9}, \frac{1}{4} - \frac{s}{3}, \frac{3}{10} - \frac{s}{15}, \frac{1}{4}\} < b < \frac{1}{2}$, então*

$$(2.69) \quad \|\partial_x(uv)\|_{Y^{k,-b}} \leq c \|u\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha} \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}.$$

Demonstração. Consultar [23]. □

Observação 2.7. *Em [23] foi introduzido o fator de correção V^α para a estimativa bilinear valer no caso $b < \frac{1}{2}$.*

2.5.2 Estimativas dos termos acoplados

A seguir vamos obter as estimativas referentes aos termos de acoplamento.

Proposição 2.3. *Sejam $s, k, a, b \in \mathbb{R}$, tais que $k - |s| > -1$ e $\frac{7}{18} < a < b < \frac{1}{2}$. Então existe uma constante $c = c(s, k, a, b) > 0$, tal que para quaisquer $u \in X^{s,b}$ e $v \in Y^{k,b}$ vale a seguinte estimativa:*

$$\|uv\|_{X^{s,-a}} \leq c\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{Y^{k,b}}.$$

Proposição 2.4. *Sejam $s, k, a, b \in \mathbb{R}$, tais que $\frac{1}{2} \leq s \leq 2a$, $\frac{1}{3} < a < b < \frac{1}{2}$, $k > s - 2a$. Então existe uma constante $c = c(s, k, a, b) > 0$, tal que para quaisquer $u \in X^{s,b}$ e $v \in Y^{k,b}$ vale a seguinte estimativa:*

$$\|uv\|_{W^{s,-a}} \leq c\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{Y^{k,b}}.$$

Observação 2.8. *Na estimativa acima restringimos nossa análise na imagem $s > 1/2$, pois quando $s < 1/2$, na estimativa do operador Duhamel, do Lema 2.18, a implementação do espaço $W^{s,-a}$ não é necessária. Além disso a restrição $s \leq 2a$ é suficiente para nossos objetivos, visto que pelo Lema 2.10, estamos limitando nossa análise no conjunto $s < 1$.*

Proposição 2.5. *Sejam $s, k, a, b \in \mathbb{R}$ tais que $s \geq 0$, $k \leq \min\{s + 3b - 1, 4s + 2a - 3/2\}$ e $3/8 < a \leq b < \frac{1}{2}$. Então para quaisquer $u_1, u_2 \in X^{s,b}$, existe uma constante positiva $c = c(a, b, s, k)$, tal que para quaisquer $u_1, u_2 \in X^{s,b}$ vale a seguinte estimativa:*

$$\|\partial_x(u_1 \overline{u_2})\|_{Y^{k,-a}} \leq c\|u_1\|_{X^{s,b}}\|u_2\|_{X^{s,b}}.$$

Proposição 2.6. *Sejam $s, k, a, b \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 \leq k \leq \min\{3a, k \leq 2s + 6b + 3a - \frac{7}{2}\}$, $s > \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4} < b < \frac{1}{2}$. Então existe uma constante $c = c(k, s, b, a)$ tal que para quaisquer $u_1, u_2 \in X^{s,b}$ vale a seguinte estimativa:*

$$\|\partial_x(u_1 \overline{u_2})\|_{U^{k,-a}} \leq c\|u_1\|_{X^{s,b}}\|u_2\|_{X^{s,b}}.$$

Proposição 2.7. *Sejam s, k, a, b satisfazendo $2b + s > 1$, $\frac{1}{4} < b < \frac{1}{2}$, $k \leq 0$, $s \leq 3a - 1/2$. Então existe uma constante $c = c(k, s, b, a)$ tal que para quaisquer $u_1, u_2 \in X^{s,b}$ vale a seguinte estimativa:*

$$\|\partial_x(u_1 \overline{u_2})\|_{U^{k,-a}} \leq c\|u_1\|_{X^{s,b}}\|u_2\|_{X^{s,b}}.$$

Observação 2.9. *Esta estimativa será necessária quando tratarmos do problema 2.3, devido ao Lema 2.19. Como $2b + s > 1$ e $b < 1/2$, esta estimativa não é aplicável quando $s = 0$. Devido a isto, no problema 2.3, nossos resultados não envolve a regularidade $s = 0$.*

Prova da Proposição 2.3:

Provaremos esta proposição seguindo as ideias da prova de uma similar estimativa obtida por Corcho e Linares em [12]. Essencialmente precisamos substituir os cálculos técnicos, por uma versão adequada para $b < \frac{1}{2}$.

Defina $f(\xi, \tau) = \langle \tau + \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^s \hat{u}(\xi, \tau)$ e $g(\xi, \tau) = \langle \tau - \xi^3 \rangle^b \langle \xi \rangle^k \hat{v}(\xi, \tau)$.

Seja $I(\phi_1, \phi_2) = \int \int \phi_1 \bar{\phi}_2 dx dy$.

Pela definição de $X^{s,-a}$ e por dualidade,

$$\begin{aligned} \|uv\|_{X^{s,-a}} &= \|\langle \tau + \xi^2 \rangle^{-a} \langle \xi \rangle^s \widehat{uv}(\xi, \tau)\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \\ &= \left\| \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^a} \hat{u} * \hat{v}(\xi, \tau) \right\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \\ &= \sup_{\|\phi\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \leq 1} \left| I \left(\frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^a} \hat{u} * \hat{v}, \phi \right) \right| \\ &= \sup_{\|\phi\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \leq 1} |W(u, v, \phi)|, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} W(u, v, \phi) &= I \left(\frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^a} \left\{ \frac{f}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^s} * \frac{g}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^b \langle \xi \rangle^k} \right\}, \phi \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{-a} \langle \xi \rangle^s g(\xi_1, \tau_1) f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \bar{\phi}(\tau, \xi)}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^k \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b \langle \xi - \xi_1 \rangle^s} d\tau_1 d\xi_1 d\tau d\xi \\ &:= \int_{\mathcal{R}_1} + \int_{\mathcal{R}_2} + \int_{\mathcal{R}_3} \\ &:= W_1 + W_2 + W_3 \end{aligned}$$

onde $\mathbb{R}^4 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$, e os $\mathcal{R}_i$ serão definidos a seguir.

Inicialmente defina os conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4 : |\xi_1| \leq 2\}, \\ \mathcal{B} &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4 : |\xi_1| > 2, |\xi_1^2 - \xi_1 + 2\xi| \leq \frac{1}{2}|\xi_1|^2 \leq |3\xi_1^2 - 2\xi_1 + 2\xi|\}, \\ \mathcal{C} &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4 : |\xi_1| > 2, |\xi_1^2 - \xi_1 + 2\xi| \geq \frac{1}{2}|\xi_1|^2\}. \end{aligned}$$

Como o conjunto

$$D = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |3\xi_1^2 - 2\xi_1 + 2\xi| < \frac{1}{2}|\xi_1|^2, |\xi_1^2 - \xi_1 + 2\xi| < \frac{1}{2}|\xi_1|^2, |\xi_1| > 2\}$$

é vazio, vemos que $\mathbb{R}^4 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

Para todo $(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)$ em $\mathcal{C}$ temos

$$(2.70) \quad |\tau + \xi^2| + |\tau_1 - \xi_1^3| + |\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2| \geq |\xi_1^3 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1| \geq \frac{1}{2}|\xi_1|^3.$$

Agora decompomos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$,

$$\mathcal{C}_1 = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathcal{C}; \max\{|\tau_1 - \xi_1^3|, |\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|, |\tau + \xi^2|\} = |\tau + \xi^2|\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathcal{C}; \max\{|\tau_1 - \xi_1^3|, |\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|, |\tau + \xi^2|\} = |\tau_1 - \xi_1^3|\},$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathcal{C}; \max\{|\tau_1 - \xi_1^3|, |\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|, |\tau + \xi^2|\} = |\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|\}.$$

Assim em $\mathcal{C}_1$ temos $|\tau + \xi^2| \geq \frac{1}{6}|\xi_1|^3$, em $\mathcal{C}_2$ temos $|\tau_1 - \xi_1^3| \geq \frac{1}{6}|\xi_1|^3$ e em $\mathcal{C}_3$ temos $|\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2| \geq \frac{1}{6}|\xi_1|^3$.

Por fim, definimos os conjuntos:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}_1, \quad \mathcal{R}_2 = \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{R}_3 = \mathcal{C}_3.$$

Para estimarmos W_1 usamos as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder para obtermos

$$\begin{aligned} |W_1|^2 &\leq \|\phi\|_{L_\tau^2 L_\xi^2}^2 \\ &\times \left\| \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^a} \int \int \frac{g(\xi_1, \tau_1) f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \chi_{\mathcal{R}_1} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^k \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b \langle \xi - \xi_1 \rangle^s} \right\|_{L_\tau^2 L_\xi^2}^2 \\ &\leq \int \int \frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a}} \left| \int \int \frac{g(\xi_1, \tau_1) f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \chi_{\mathcal{R}_1} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^k \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b \langle \xi - \xi_1 \rangle^s} \right|^2 d\tau d\xi \\ &\leq \int \int \frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a}} \left(\int \int \frac{\chi_{\mathcal{R}_1} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \xi_1 \rangle^{2k} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s}} \right) \\ &\times \left(\int \int |g(\xi_1, \tau_1)|^2 |f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)|^2 d\tau_1 d\xi_1 \right) d\tau d\xi \\ &\leq \|f\|_{L_\tau^2 L_\xi^2}^2 \|g\|_{L_{\tau_1}^2 L_{\xi_1}^2}^2 \\ &\times \left\| \frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a}} \int \int \frac{\chi_{\mathcal{R}_1} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \xi_1 \rangle^{2k} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s}} \right\|_{L_\tau^\infty L_\xi^\infty} \\ &= \|u\|_{X^{s,b}}^2 \|v\|_{Y^{k,b}}^2 \\ &\times \left\| \frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a}} \int \int \frac{\chi_{\mathcal{R}_1} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \xi_1 \rangle^{2k} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s}} \right\|_{L_\tau^\infty L_\xi^\infty}. \end{aligned}$$

Para estimarmos W_2 fazemos a mudança $\tilde{f}(\xi, \tau) = f(-\xi, -\tau)$, integrando primeiro sobre τ e ξ obtemos

$$\begin{aligned}
|W_2|^2 &\leq \|g\|_{L_{\tau_1}^2 L_{\xi_1}^2}^2 \\
&\quad \times \left\| \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^k \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b} \int \int \frac{\langle \xi \rangle^s \tilde{f}(\xi_1 - \xi, \tau_1 - \tau) \bar{\phi}(\tau, \xi) \chi_{\mathcal{R}_2} d\tau d\xi}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^a \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b \langle \xi - \xi_1 \rangle^s} \right\|_{L_{\tau_1}^2 L_{\xi_1}^2}^2 \\
&\leq \|g\|_{L_{\tau_1}^2 L_{\xi_1}^2}^2 \|\tilde{f}\|_{L_{\tau_1}^2 L_{\xi_1}^2}^2 \\
&\quad \times \left\| \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2k} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \chi_{\mathcal{R}_2} d\tau d\xi}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s}} \right\|_{L_{\tau_1}^\infty L_{\xi_1}^\infty}^2 \\
&= \|u\|_{X^{s,b}}^2 \|v\|_{Y^{k,b}}^2 \\
&\quad \times \left\| \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2k} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \chi_{\mathcal{R}_2} d\tau d\xi}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s}} \right\|_{L_{\tau_1}^\infty L_{\xi_1}^\infty}^2.
\end{aligned}$$

Note que $\tilde{f}(\xi, \tau) = \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^2 \rangle^b \hat{u}(-\xi, -\tau)$ e $\|\tilde{f}(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} = \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} = \|u\|_{X^{s,b}}$.

Agora usando a mudança de variáveis $\tau = \tau_1 - \tau_2$ e $\xi = \xi_1 - \xi_2$, a terceira região $\mathcal{R}_3$ é transformada na região $\tilde{\mathcal{R}}_3$ definida por

$$(2.71) \quad \tilde{\mathcal{R}}_3 \subset \{(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^4; \frac{1}{2}|\xi_1|^3 \leq |\xi_1^3 + \xi_2^3 - 2\xi_1\xi_2| \leq 3|\tau_2 - \xi_2^2|, \text{ e } |\xi_1| \geq 2\}.$$

Analogamente, estimamos W_3 :

$$\begin{aligned}
|W_3|^2 &\leq \|\tilde{f}\|_{L_{\tau_2}^2 L_{\xi_2}^2}^2 \\
&\quad \times \left\| \frac{1}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_2 - \xi_2^2 \rangle^b} \int \int \frac{\langle \xi_1 - \xi_2 \rangle^s g(\xi_1, \tau_1) \tilde{\phi}(\xi_2 - \xi_1, \tau_2 - \tau_1) \chi_{\tilde{\mathcal{R}}_3} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \tau_2 + (\xi_1 - \xi_2)^2 \rangle^a \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^k} \right\|_{L_{\tau_2}^2 L_{\xi_2}^2}^2 \\
&\leq \|\tilde{f}\|_{L_{\tau_2}^2 L_{\xi_2}^2}^2 \|g\|_{L_{\tau_1}^2 L_{\xi_1}^2}^2 \\
&\quad \times \left\| \frac{1}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \tau_2 - \xi_2^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\langle \xi_1 - \xi_2 \rangle^{2s} \chi_{\tilde{\mathcal{R}}_3} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \tau_2 + (\xi_1 - \xi_2)^2 \rangle^{2a} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \xi_1 \rangle^{2k}} \right\|_{L_{\tau_2}^\infty L_{\xi_2}^\infty}^2 \\
&\leq \|u\|_{X^{s,b}}^2 \|v\|_{Y^{k,b}}^2 \\
&\quad \times \left\| \frac{1}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \tau_2 - \xi_2^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\langle \xi_1 - \xi_2 \rangle^{2s} \chi_{\tilde{\mathcal{R}}_3} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \tau_2 + (\xi_1 - \xi_2)^2 \rangle^{2a} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \xi_1 \rangle^{2k}} \right\|_{L_{\tau_2}^\infty L_{\xi_2}^\infty}^2.
\end{aligned}$$

Portanto precisamos mostrar que

$$(2.72) \quad \left\| \frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a}} \int \int \frac{\chi_{\mathcal{R}_1} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \xi_1 \rangle^{2k} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi, \tau}^\infty} \leq c,$$

$$(2.73) \quad \left\| \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2k} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \chi_{R_2} d\tau d\xi}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s}} \right\|_{L_{\xi_1 \tau_1}^\infty} \leq c,$$

$$(2.74) \quad \left\| \frac{1}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \tau_2 - \xi_2^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\langle \xi_1 - \xi_2 \rangle^{2s} \chi_{\tilde{R}_3} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \tau_2 + (\xi_1 - \xi_2)^2 \rangle^{2a} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \xi_1 \rangle^{2k}} \right\|_{L_{\xi_2 \tau_2}^\infty} \leq c.$$

Agora passemos a fazer as estimativas acima.

Comecemos estimando (2.72). Precisamos controlar a seguinte função:

$$w_1(\tau, \xi) = \frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a}} \int \int \frac{\chi_{R_1} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \xi_1 \rangle^{2k} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}}.$$

Usando a desigualdade $\langle \xi \rangle^{2s} \leq \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{2|s|}$ e o Lema 1.15,

$$w_1(\tau, \xi) \leq \frac{1}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a}} \int \frac{\chi_{R_1} \langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k} d\xi_1}{\langle \tau + \xi^2 - \xi_1^3 + \xi_1^2 - 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}},$$

se $\frac{1}{4} < b < \frac{1}{2}$.

No conjunto $\mathcal{A}$, usamos que $a > 0$ e $4b - 1 > 0$ para obtermos

$$w_1(\tau, \xi) \leq c \int_{|\xi_1| \leq 2} \langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k} \leq c.$$

Em $\mathcal{C}_1$ temos $|\xi_1| > 2$ e $|\xi_1|^3 \leq c\langle \tau + \xi^2 \rangle$, então

$$w_1(\tau, \xi) \leq c \int \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k} d\xi_1}{\langle \xi_1 \rangle^{6a} \langle \tau + \xi^2 - \xi_1^3 + \xi_1^2 - 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}}.$$

Se $2|s| - 2k \leq 6a$ obtemos

$$w_1(\tau, \xi) \leq c \int \frac{d\xi_1}{\langle \tau + \xi^2 - \xi_1^3 + \xi_1^2 - 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}}.$$

Tomando b de modo que $4b - 1 > \frac{1}{3}$ usamos o Lema 1.12 e obtemos a estimativa em $\mathcal{C}_1$.

Agora vamos estimar em $\mathcal{B}$.

Vamos escolher a e b de modo que $4b - 1 \leq 2a$. Pela desigualdade triangular temos

$$\langle \tau + \xi^2 \rangle \langle \tau + \xi^2 - \xi_1^3 + \xi_1^2 - 2\xi\xi_1 \rangle \geq \langle \xi_1^3 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1 \rangle.$$

Então,

$$\begin{aligned} w_1(\tau, \xi) &\leq \frac{1}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{4b-1}} \int \frac{\chi_{\mathcal{B}} \langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k} d\xi_1}{\langle \tau + \xi^2 - \xi_1^3 + \xi_1^2 - 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}} \\ &\leq c \int \frac{\chi_{\mathcal{B}} \langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k} d\xi_1}{\langle \xi_1^3 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}} \\ &\leq c \int \frac{\chi_{\mathcal{B}} \langle \xi_1 \rangle^{4b-1} d\xi_1}{\langle \xi_1^3 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}}. \end{aligned}$$

Agora, façamos a seguinte mudança de variável:

$$\eta = \xi_1^3 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1, \quad d\eta = (3\xi_1^2 - 2\xi_1 + 2\xi)d\xi_1.$$

Pela definição de $\mathcal{B}$ e o fato $k - |s| > -1$, obtemos

$$\begin{aligned} w_1(\xi, \tau) &\leq \int \frac{\chi_{|\eta| \leq |\xi_1|^3} \langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k} d\eta}{|3\xi_1^2 - 2\xi_1 + 2\xi| \langle \eta \rangle^{4b-1}} \\ &\leq \int \frac{\chi_{|\eta| \leq |\xi_1|^3} \langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k} d\eta}{|\xi_1|^2 \langle \eta \rangle^{4b-1}} \\ &\leq \int \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{\frac{2k-2s+2}{3} + 4b-1}}. \end{aligned}$$

A expressão acima é finita quando $k - |s| \geq 2 - 6b$. Portanto como $k - |s| > -1$, podemos obter b com tal propriedade.

Agora vamos estimar (2.73). Por definição em R_2 temos

$$(2.75) \quad \frac{1}{2}|\xi_1^3| \leq 3|\tau_1 - \xi_1^3| < \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle.$$

Fazendo a mudança $\eta = \tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1$, em $\mathcal{C}_2$ temos

$$(2.76) \quad |\eta| \leq |\tau_1 - \xi_1^3| + |\xi_1^3 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1| \leq 4|\tau_1 - \xi_1^3| \leq 4\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle.$$

Usando o Lema 1.14, e as desigualdades (2.75) e (2.76) obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2k} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \chi_{R_2} d\tau d\xi}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s}} \\ &\leq c \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k}}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \int \frac{\chi_{\mathcal{R}_2} d\xi}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi\xi_1 \rangle^{2a+2b-1}} \leq \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k}}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \int_{|\eta| \leq 4\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle} \frac{(1 + |\eta|)^{1-2a-2b}}{2|\xi_1|} d\eta \\ &\leq c \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k-1}}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2a+2b-2}} \leq \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k}}{|\xi_1|} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2a+4b-2}} \\ &\leq c \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k}}{|\xi_1| \langle \xi_1^3 \rangle^{2a+4b-2}} \leq \frac{1}{|\xi_1|^{2k-2|s|+12b+6a-5}} \leq \frac{1}{|\xi_1|^{2k-2|s|+18a-5}}. \end{aligned}$$

Isto é suficiente para provar (2.73), pois por hipótese temos $k - |s| > -1$ e $\frac{5}{2} - 9a < -1$, se $a > \frac{7}{18}$.

Por fim, vamos obter (2.74). Por definição, em $\mathcal{R}_3$ temos $\frac{1}{2}|\xi_1|^3 < 3\langle \tau_2 - \xi_2^2 \rangle$, então

$$(2.77) \quad \langle \tau_2 - \xi_2^2 \rangle^{-2b} \leq c|\xi_1|^{-6b}.$$

Logo pelo Lema 1.14, por (2.77) e Lema 1.12, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \tau_2 - \xi_2^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\langle \xi_1 - \xi_2 \rangle^{2s} \chi_{R_3} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \tau_2 + (\xi_1 - \xi_2)^2 \rangle^{2a} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \xi_1 \rangle^{2k}} \\
& \leq c \int \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2|s|-2k} \chi_{R_3} d\tau_1 d\xi_1}{|\xi_1|^{6b} \langle \tau_2 - \xi_2^3 - \xi_1^3 + 2\xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2 \rangle^{2a+2b-1}} \\
& \leq c \int \frac{d\xi_1}{\langle \tau_2 - \xi_2^3 - \xi_1^3 + 2\xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2 \rangle^{2a+2b-1}} \\
& \leq c \int \frac{d\xi_1}{\langle \tau_2 - \xi_2^3 - \xi_1^3 + 2\xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2 \rangle^{4a-1}} \leq c.
\end{aligned}$$

Na última passagem usamos o fato de $a > \frac{7}{18}$ implicar em $4a - 1 > \frac{1}{3}$. Concluído assim a prova do Lema.

Prova da Proposição 2.4:

Podemos assumir que $|\tau| > 10|\xi|^2$, pois caso contrário a estimativa segue da Proposição 2.3.

Precisamos mostrar que a função

$$w(\xi, \tau) = \frac{\chi_{\{|\tau| > 10|\xi|^2\}}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2a-s}} \int \int \frac{d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \xi_1 \rangle^{2k} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s}}$$

é limitada.

Como $|\tau| > 10|\xi|^2$, então $\langle \tau + \xi^2 \rangle \sim \langle \tau \rangle$.

Primeiro suponha $k \geq 0$.

Usando $s \geq 0$, $k \geq 0$ e os Lemas 1.15 e 1.12 temos que

$$w(\xi, \tau) \leq c \langle \tau \rangle^{s-2a} \int \frac{d\xi_1}{\langle \tau + \xi^2 - \xi_1^3 + \xi_1^2 - 2\xi \xi_1 \rangle^{4b-1}} \leq c,$$

pois $s \leq 2a$ e $4b - 1 > \frac{1}{3}$.

Agora, seja $k \leq 0$. Vamos tratar este caso em duas partes.

Primeiro suponha $|\xi_1| \leq 2|\xi_2|$. Neste caso temos

$$(2.78) \quad w(\xi, \tau) \leq \int \frac{d\xi_1}{\langle \tau + \xi^2 - \xi_1^3 + \xi_1^2 - 2\xi \xi_1 \rangle^{4b-1}} \leq c$$

se $s \leq 2a$ e $k \geq -s$.

Agora seja $2|\xi_2| \leq |\xi_1|$, então $|\tau| \geq c|\xi|^2 \geq |\xi_1|^2$. Como $k \leq 0$, então $\langle \xi_1 \rangle^{-2k} \leq \langle \tau \rangle^{-k}$.

Assim obtemos

$$(2.79) \quad w(\xi, \tau) \leq c \langle \tau \rangle^{s-k-2a} \int \frac{d\xi_1}{\langle \tau + \xi^2 - \xi_1^3 + \xi^2 - 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}} \leq c,$$

se $k - s \geq -2a$.

Isto conclui a prova da Proposição 2.4.

Prova da Proposição 2.5:

Vamos novamente nos basear na prova da estimativa obtida por Corcho e Linares em [12] juntamente com a ideia de Wu em [46], onde será possível cancelar as frequências com a modulação, através de uma relação algébrica.

Defina $\tau = \tau_1 - \tau_2$, $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\sigma = \tau - \xi^3$, $\sigma_1 = \tau_1 + \xi_1^2$, $\sigma_2 = \tau_2 + \xi_2^2$.

Sejam $f(\xi_1, \tau_1) = \langle \xi_1 \rangle^s \langle \sigma_1 \rangle^b \hat{u}_1(\xi_1, \tau_1)$ e $g(\xi_2, \tau_2) = \langle \xi_2 \rangle^s \langle \sigma_2 \rangle^b \hat{u}_2(-\xi_2, -\tau_2)$, então

$$(2.80) \quad \|u_1\|_{X^{s,b}} = \|f\|_{L_{\tau_1}^2 L_{\xi_1}^2}, \quad \|u_2\|_{X^{s,b}} = \|g\|_{L_{\tau_2}^2 L_{\xi_2}^2}.$$

Por dualidade temos

$$\begin{aligned} \|\partial_x(u_1 \bar{u}_2)\|_{Y^{k,-a}} &= \|\langle \sigma \rangle^{-a} \langle \xi \rangle^k \widehat{\partial_x(u_1 \bar{u}_2)}\|_{L_{\tau}^2 L_{\xi}^2} \\ &= \|i\xi \langle \sigma \rangle^{-a} \langle \xi \rangle^k \hat{u}_1 * \hat{u}_2(\xi, \tau)\|_{L_{\tau}^2 L_{\xi}^2} \\ &= \sup_{\|\phi\|_{L_{\tau}^2 L_{\xi}^2} \leq 1} \left| I \left(\frac{|\xi| \langle \xi \rangle^k}{\langle \sigma \rangle^a} \hat{u}_1 * \hat{u}_2, \phi \right) \right| \\ &= \sup_{\|\phi\|_{L_{\tau}^2 L_{\xi}^2} \leq 1} |\mathcal{Z}(u_1, u_2, \phi)|, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(u_1, u_2, \phi) &= \int \int \int \int_{\mathbb{R}^4} \frac{|\xi| \langle \xi \rangle^k}{\langle \sigma \rangle^a} \hat{u}_1(\xi_1, \tau_1) \hat{u}_2(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \bar{\phi}(\xi, \tau) d\tau_1 d\xi_1 d\tau d\xi \\ &= \int \int \int \int_{\mathbb{R}^4} \frac{|\xi| \langle \xi \rangle^k f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) \bar{\phi}(\xi, \tau)}{\langle \sigma \rangle^a \langle \sigma_1 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^s \langle \sigma_2 \rangle^b \langle \xi_2 \rangle^s} d\tau_1 d\xi_1 d\tau d\xi \\ &:= \int \int \int \int_{\mathcal{R}_1} + \int \int \int \int_{\mathcal{R}_2} + \int \int \int \int_{\mathcal{R}_3} + \int \int \int \int_{\mathcal{R}_4} \\ &:= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, e $\mathcal{R}_4$ são definidos por

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi| \leq 10\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi| > 10, |\xi_1| > 2|\xi_2|\}, \\ \mathcal{R}_3 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi| > 10, |\xi_2| > 2|\xi_1|\}, \\ \mathcal{R}_4 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi| > 10, \frac{|\xi_2|}{2} \leq |\xi_1| \leq 2|\xi_2|\}.\end{aligned}$$

Para estimarmos Z_1 usamos a desigualdade triangular e obtemos

$$\begin{aligned}Z_1^2 &\leq \|g\|_{L_{\tau_2}^2 L_{\xi_2}^2}^2 \left\| \int \int \frac{|\xi| \langle \xi \rangle^k f(\xi_1, \tau_1) \chi_{|\xi| \leq 2} \bar{\phi}(\xi, \tau) d\tau d\xi}{\langle \sigma \rangle^a \langle \sigma_1 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^s \langle \sigma_2 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^s} \right\|_{L_{\tau_1}^2 L_{\xi_1}^2}^2 \\ &\leq c \|g\|_{L_{\tau_2}^2 L_{\xi_2}^2}^2 \int \int \frac{|f(\xi_1, \tau_1)|^2}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \left(\int \int \frac{\chi_{|\xi| < 2} |\bar{\phi}(\xi, \tau)| d\tau d\xi}{\langle \sigma \rangle^a \langle \sigma_2 \rangle^b \langle \xi_2 \rangle^s} \right)^2 d\tau_1 d\xi_1 \\ &\leq \|g\|_{L_{\tau_2}^2 L_{\xi_2}^2}^2 \|f\|_{L_{\tau_1}^2 L_{\xi_1}^2}^2 \left\| \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \left(\int \int \frac{\chi_{|\xi| < 2} |\bar{\phi}(\xi, \tau)| d\tau d\xi}{\langle \sigma \rangle^a \langle \sigma_2 \rangle^b \langle \xi_2 \rangle^s} \right)^2 \right\|_{L_{\xi_1}^\infty L_{\tau_1}^\infty} \\ &\leq c \|g\|_{L_{\tau_2}^2 L_{\xi_2}^2}^2 \|f\|_{L_{\tau_1}^2 L_{\xi_1}^2}^2 \|\phi\|_{L_{\tau}^2 L_{\xi}^2}^2 \times \\ &\quad \left\| \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{|\xi| < 2} d\tau d\xi}{\langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_2 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s}} \right\|_{L_{\xi_1}^\infty L_{\tau_1}^\infty}.\end{aligned}$$

Assim, para obtermos a estimativa necessária de Z_1 é suficiente mostrarmos que a função

$$w_1(\xi_1, \tau_1) = \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{|\xi| < 2} d\tau d\xi}{\langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_2 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s}}$$

é limitada.

Usando os fatos $s \geq 0$, $a \leq b$ e o Lema 1.15 obtemos

$$w(\xi_1, \tau_1) \leq \int \int \frac{\chi_{|\xi| < 2} d\tau d\xi}{\langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} \leq \int \frac{\chi_{|\xi| < 2} d\xi}{\langle \xi^3 - \xi^2 + 2\xi\xi_1 - \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{4a-1}} \leq c,$$

sempre que $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$. Concluimos assim a estimativa de Z_1 .

Nas outras estimativas utilizaremos a seguinte relação algébrica:

$$(2.81) \quad (\tau - \xi^3) - (\tau_1 + \xi_1^2) + (\tau_2 + \xi_2^2) = -\xi^3 - \xi_1^2 + (\xi_1 - \xi)^2 = -\xi(\xi^2 - \xi + 2\xi_1).$$

Na região $\mathcal{R}_2$ temos $1/2|\xi_1| \leq |\xi| \leq 3/2|\xi_1|$, logo

$$(2.82) \quad |\xi^2 - \xi + 2\xi_1| \geq |\xi|^2 - |\xi - 2\xi_1| \geq |\xi|^2 - 5|\xi| \geq 1/2|\xi|^2,$$

pois $|\xi| > 10$.

Combinando (2.81) e (2.82) obtemos

$$(2.83) \quad \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \geq c|\xi|^3.$$

Assim, vamos decompor $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_{21} \cup \mathcal{R}_{22} \cup \mathcal{R}_{23}$, onde

$$\mathcal{R}_{21} = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathcal{R}_2; \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma|\},$$

$$\mathcal{R}_{22} = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathcal{R}_2; \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_1|\},$$

$$\mathcal{R}_{23} = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathcal{R}_2; \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_2|\}.$$

Para estimarmos em $\mathcal{R}_{21}$, integramos primeiramente em τ_2 e ξ_2 , usamos as desigualdades de Cauchy-Schwarz. Então precisamos mostrar que a função

$$(2.84) \quad w_{21}(\xi, \tau) := \chi_{\{|\xi| > 10, |\sigma| \geq c|\xi|^3\}} \frac{|\xi|^2 \langle \xi \rangle^{2k}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int \int \frac{\chi_{\{|\xi_1| > 2|\xi_2|\}} d\tau_2 d\xi_2}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}}$$

é limitada.

Como $|\xi_1| \sim |\xi|$, podemos controlar $w_{21}(\xi, \tau)$ por

$$(2.85) \quad \chi_{\{|\xi| > 10\}} \frac{\langle \xi \rangle^{2k-2s+2}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int \int \frac{d\tau_2 d\xi_2}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}}.$$

Aplicando o Lema 1.15, podemos controlar a expressão (2.85) por

$$(2.86) \quad \chi_{\{|\xi| > 10\}} \frac{\langle \xi \rangle^{2k-2s+2}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int \frac{d\xi_2}{\langle \tau + \xi^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{4b-1}}.$$

Fazendo a mudança de variável $\eta = \tau + \xi^2 + 2\xi\xi_2$, temos $d\eta = 2\xi d\xi_2$ e $|\eta| \leq 2|\sigma|$ em $\mathcal{R}_{21}$, assim controlamos (2.86) por

$$(2.87) \quad \chi_{\{|\xi| > 10\}} \frac{\langle \xi \rangle^{2k-2s+1}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int_{|\eta| \leq 2|\sigma|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1}} \leq \frac{\langle \xi \rangle^{2k-2s+1}}{\langle \sigma \rangle^{4b-2+2a}} \leq c\langle \xi \rangle^{2k-2s-12b-6a+7},$$

que é limitada se $k - s \leq 6b + 3a - \frac{7}{2}$.

Agora vamos estimar a integral na região $\mathcal{R}_{22}$. Para isto precisamos mostrar que a função

$$w_{22}(\xi_1, \tau_1) := \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{\{|\xi^3| \leq |\sigma_1|\}} |\xi|^2 \langle \xi \rangle^{2k} d\tau d\xi}{\langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}}$$

é limitada.

Utilizando o fato $|\xi| \sim |\xi_1|$ e os Lemas 1.15 e 1.12 podemos controlar a função $w_{2,2}$ por

$$\begin{aligned} \int \int \frac{\langle \xi \rangle^{2k-2s+2-6b} d\tau d\xi}{\langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} &\leq c \int \int \frac{d\tau d\xi}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} \\ &\leq c \int \frac{d\xi}{\langle \xi^3 - \xi^2 + 2\xi\xi_1 - \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{4a-1}} \leq c \end{aligned}$$

sempre que $k - s \leq 3b - 1$ e $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$.

A estimativa na região $\mathcal{R}_{33}$ é obtida em um caminho similar à estimativa da região $\mathcal{R}_{32}$.

De fato, nesta região precisamos mostrar que a função

$$(2.88) \quad w_{23}(\xi_2, \tau_2) := \frac{1}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{\{|\xi^3| \leq |\sigma_2|\}} |\xi|^2 \langle \xi \rangle^{2k} d\tau d\xi}{\langle \xi_1 \rangle^{2b} \langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}}$$

é limitada. Utilizando o fato $|\xi| \sim |\xi_1|$ e os Lemas 1.15 e 1.12 podemos controlar a função $w_{2,3}$ por

$$\begin{aligned} \int \int \frac{\langle \xi \rangle^{2k-2s+2-6b} d\tau d\xi}{\langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} &\leq c \int \int \frac{d\tau d\xi}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \\ &\leq c \int \frac{d\xi}{\langle \xi^3 + \xi^2 + 2\xi\xi_2 + \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^{4a-1}} \leq c \end{aligned}$$

sempre que $k - s \leq 3b - 1$ e $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$.

A estimativa em Z_3 segue o mesmo caminho da estimativa Z_2 . De fato, em $\mathcal{R}_3$ temos $\frac{|\xi_2|}{2} \leq |\xi| \leq 2|\xi_2|$. Logo

$$|\xi^2 - \xi + 2\xi_1| \geq |\xi|^2 - |\xi + 2\xi_1| \geq |\xi|^2 - 3|\xi| \geq \frac{|\xi|^2}{2},$$

pois $|\xi| > 10$. Daí a estimativa pode ser feita separando em três casos, como na estimativa de Z_2 .

Por fim vamos estimar Z_4 . Para isto, vamos decompor $\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_{41} \cup \mathcal{R}_{42}$, onde

$$\mathcal{R}_{41} = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathcal{R}_4; |\xi_1| \geq 2|\xi^2 - \xi + 2\xi_1|\} \text{ e } \mathcal{R}_{42} = \mathcal{R}_4 \setminus \mathcal{R}_{41}.$$

Em $\mathcal{R}_{41}$ temos $|\xi^2| \leq |\xi^2 - \xi + 2\xi_1| + |2\xi_1 - \xi| \leq 6|\xi_1|$. Assim, neste caso precisamos mostrar que a função

$$w_{41}(\xi_1, \tau_1) := \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{|\xi|^2 \leq |\xi_1|} |\xi|^2 \langle \xi \rangle^{2k} d\tau d\xi}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}}$$

é limitada.

Usando que $a < b$, $|\xi_1| \sim |\xi_2|$ e o Lema 1.15 obtemos

$$(2.89) \quad w_{41}(\xi_1, \tau_1) \leq \frac{c}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \int \frac{\chi_{|\xi|^2 \leq |\xi_1|} \langle \xi \rangle^{2k+2-8s} d\xi}{\langle -\xi^3 + \tau_1 + (\xi - \xi)^2 \rangle^{4a-1}}.$$

Usando $4a - 1 < 2b$ e a desigualdade triangular, obtemos

$$\langle \sigma_1 \rangle^{4a-1} \langle -\xi^3 + \tau_1 + (\xi - \xi)^2 \rangle^{4a-1} \geq \langle -\xi^3 - 2\xi\xi_1 + \xi^2 \rangle^{4a-1}.$$

Portanto

$$(2.90) \quad w_{41}(\xi_1, \tau_1) \leq \int \frac{\chi_{|\xi|^2 \leq |\xi_1|} \langle \xi \rangle^{2k-8s+2} d\xi}{\langle \xi^3 - \xi^2 + 2\xi_1\xi \rangle^{4a-1}}.$$

Se $|\xi^2 - \xi + 2\xi_1| > 1$, temos $\langle \xi^3 - \xi^2 + 2\xi\xi_1 \rangle \sim \langle \xi^2 - \xi + 2\xi_1 \rangle \langle \xi \rangle$, pois $|\xi| > 10$. Então (2.90) é controlada por

$$\int \frac{\chi_{|\xi|^2 \leq |\xi_1|} \langle \xi \rangle^{2k-8s+3-4a} d\xi}{\langle \xi^2 - \xi + 2\xi_1 \rangle^{4a-1}} \leq \langle \xi_1 \rangle^{k-4s+3/2-2a} \int \frac{d\xi}{\langle \xi^2 - \xi + 2\xi_1 \rangle^{4a-1}} \leq c,$$

desde que $k \leq 4s + 2a - 3/2$.

Caso $|\xi^2 - \xi + 2\xi_1| \leq 1$, controlamos (2.90) através da mudança de variável

$$\eta = \xi^3 - \xi^2 + 2\xi\xi_1.$$

Logo, $|\eta| \leq |\xi| \leq c|\xi_1|^{1/2}$ e

$$\frac{d\eta}{d\xi} = |3\xi^2 - 2\xi + 2\xi_1| \geq |2\xi^2 - \xi| - |\xi^2 - \xi + 2\xi_1| \geq 2|\xi|^2 - |\xi| - 1 \geq 2|\xi|^2 - 2|\xi| \geq 1/2|\xi|^2,$$

pois $|\xi| > 10$.

Portanto (2.90) pode ser controlado por

$$\int_{|\eta| < c|\xi_1|^{1/2}} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{k-4s} d\eta}{\langle \eta \rangle^{4a-1}} \leq \langle \xi_1 \rangle^{k-4s+1-2a},$$

que é limitado sempre que $k \leq 4s + 2a - 1$.

Agora passemos a controlar Z_4 na região $\mathcal{R}_{42}$.

Neste caso, por (2.81) temos uma das três situações:

$$(2.91) \quad |\sigma| \gtrsim |\xi||\xi_1|, \quad |\sigma_1| \gtrsim |\xi||\xi_1|, \quad \text{ou} \quad |\sigma_2| \gtrsim |\xi||\xi_1|.$$

Além disso, em cada caso acima vamos separar nossa análise em cada uma das situações:

$$|\xi|^2 \leq 10|\xi_1| \text{ e } 10|\xi_1| \leq |\xi|^2.$$

Vamos estimar primeiramente o pior caso para o cancelamento das frequências:

$$\max \{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma| \text{ e } |\xi|^2 \leq 10|\xi_1|.$$

Neste caso usamos o Lema 1.15 e estimamos Z_4 por

$$(2.92) \quad \frac{\langle \xi \rangle^{2k+2-8s}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int \int \frac{d\tau_2 d\xi_2}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} \leq \frac{\langle \xi \rangle^{2k+2-8s}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int \frac{d\xi_2}{\langle 2\xi\xi_2 - \xi^3 - \tau - 2\xi^2 \rangle^{4b-1}}.$$

Agora, fazendo a mudança de variável $\eta = 2\xi\xi_2 - \xi^3 - \tau - 2\xi^2$, temos $d\eta = 2\xi d\xi_2$, e na situação considerada $|\eta| \leq c|\sigma|$. Logo, o lado direito de (2.92) pode ser controlado por

$$\frac{\langle \xi \rangle^{2k+1-8s}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int_{|\eta| \leq c|\sigma|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1}} \leq \frac{\langle \xi \rangle^{2k+1-8s}}{\langle \sigma \rangle^{2a+4b-2}} \leq \frac{\langle \xi \rangle^{2k+1-8s}}{\langle \xi \rangle^{2a+4b-2} \langle \xi \rangle^{4a+8b-4}} \leq c,$$

sempre que $k \leq 4s + 3a + 6b - 7/2$.

Agora vamos tratar o seguinte caso $\max \{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_1|$ e $|\xi|^2 \ll |\xi_1|$.

Neste caso vamos mostrar que a função abaixo é limitada:

$$w(\xi_1, \tau_1) = \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{\{|\xi|^2 < 10|\xi_1|\}} |\xi|^2 \langle \xi \rangle^{2k} d\tau d\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{2a} \langle \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s}}.$$

Pelos Lemas 1.15 e 1.12 obtemos

$$\begin{aligned} w(\xi_1, \tau_1) &\leq c \frac{\langle \xi_1 \rangle^{k+1}}{\langle \xi_1 \rangle^{4s} \langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \frac{d\xi}{\langle \xi^3 + \tau_1 + (\xi_1 - \xi)^2 \rangle^{4a-1}} \\ &\leq c \frac{\langle \xi_1 \rangle^{k+1}}{\langle \xi_1 \rangle^{4s+2b}}, \end{aligned}$$

que é limitada quando $k \leq 4s + 2b - 1$.

O Caso $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_2|$ e $|\xi|^2 < 10|\xi_1|$ é tratado de maneira análoga.

Por fim, vamos tratar o caso $10|\xi_1| \leq |\xi|^2$. Neste caso usamos que $|\xi^2 - \xi + 2\xi_1| \sim |\xi|^2$, daí a relação algébrica implica em

$$3 \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \geq |\xi||\xi^2 - \xi + 2\xi_1| \geq |\xi|^3.$$

No caso em que $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma|$ podemos controlar Z_4 por

$$\begin{aligned} & \frac{|\xi|^2 \langle \xi \rangle^{2k}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int \int \frac{d\tau_2 d\xi_2}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} \leq c \frac{\langle \xi \rangle^{2k+2-4s}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int \int \frac{\chi_{\{|\xi_1| \leq 10|\xi|^2\}} d\tau_2 d\xi_2}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} \\ & \leq c \frac{\langle \xi \rangle^{2k+2-4s}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int \frac{d\xi_2}{\langle 2\xi\xi_2 - \xi^3 - \tau - 2\xi^2 \rangle^{4b-1}} \leq c \frac{\langle \xi \rangle^{2k+1-4s}}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int_{|\eta| \leq |\sigma|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1}} \\ & \leq c \frac{\langle \xi \rangle^{2k+1-4s}}{\langle \sigma \rangle^{2a+4b-2}} \leq c \frac{\langle \xi \rangle^{2k+1-4s}}{\langle \xi \rangle^{6a+12b-6}} \leq c, \end{aligned}$$

que é limitado quando $k \leq 2s + 3a + 6b - \frac{7}{2}$.

Agora consideramos o caso em que $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_1|$. Nesta situação temos $|\sigma_1| \leq |\xi|^3$. Neste caso precisamos limitar a seguinte função:

$$(2.93) \quad w(\xi_1, \tau_1) = \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{|\xi|^2 \langle \xi \rangle^{2k} d\tau d\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{2a} \langle \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s}}.$$

Usando as hipóteses sobre as frequências e os Lemas 1.15 e 1.13 podemos controlar a integral acima por

$$c \langle \xi \rangle^{2k-4s+2-6b} \int \frac{d\xi}{\langle \xi^3 - \xi^2 + 2\xi\xi_1 + \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{4a-1}},$$

que é limitado se $a > \frac{3}{8}$ e $k \leq 2s - 1 + 3b$.

Isto conclui a demonstração da proposição 2.5.

Prova da Proposição 2.6:

Podemos assumir que $|\tau| > 10|\xi|^3$, pois caso contrário a Proposição 2.5 fornece o resultado.

Analogamente à prova da Proposição 2.5 é suficiente provarmos que a função

$$(2.94) \quad w(\tau, \xi) = \chi_{\{|\tau| > |\xi|^3\}} \frac{|\xi|^2 \langle \tau \rangle^{\frac{2k}{3}}}{\langle \tau + \xi^3 \rangle^{2a}} \int \int \frac{d\tau_2 d\xi_2}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s}},$$

é limitada.

Caso 1. $|\xi| \leq 1$. Como $|\tau| \gg |\xi|^3$, temos que $\langle \tau - \xi^3 \rangle \sim \langle \tau \rangle$, logo

$$(2.95) \quad \frac{|\xi|^2 \langle \tau \rangle^{\frac{2k}{3}}}{\langle \tau + \xi^3 \rangle^{2a}} \leq c \langle \tau \rangle^{\frac{2k}{3} - 2a} \leq c,$$

sempre que $k \leq 6a$.

Pelo Lema 1.15, se $\frac{1}{4} < b < \frac{1}{2}$, obtemos

$$(2.96) \quad \begin{aligned} \int \int \frac{d\tau_2 d\xi_2}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau_1 + \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s}} &\leq \int \frac{d\xi_2}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau + \xi^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{4b-1}} \\ &\leq \int \frac{d\xi_2}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{2s}}. \end{aligned}$$

Se $\frac{1}{4} < s < \frac{1}{2}$, a integral (2.96) é controlado por $\langle \xi \rangle^{1-4b}$ e se $s \geq \frac{1}{2}$ por $\langle \xi \rangle^{-2b}$, isto conclui a prova deste caso.

Caso 2. $|\xi| \geq 2$.

Neste caso temos

$$(2.97) \quad \frac{|\xi|^2 \langle \tau \rangle^{\frac{2k}{3}}}{\langle \tau + \xi^3 \rangle^{2a}} \leq c \langle \tau \rangle^{\frac{2k}{3} - 2a} |\xi|^2.$$

Como $\frac{1}{4} < b < \frac{1}{2}$ e $4b - 1 + 2s > 1$, aplicamos o Lema 1.15 e o Lema 1.14 com $a_- = 2s$, $a_+ = 4b - 1$ para obtermos

$$(2.98) \quad \begin{aligned} \int \int \frac{d\tau_2 d\xi_2}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau_1 + \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s}} &\leq c \int \frac{d\xi_2}{\langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \tau + \xi^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{4b-1}} \\ &\leq c |\xi|^{1-4b} \int \frac{d\xi_2}{(\frac{1}{|\xi|} + |\xi_2|)^{2s} (\frac{1}{|\xi|} + |\frac{\tau + \xi^2}{2\xi} + \xi_2|)^{4b-1}} \\ &\leq c \frac{|\xi|^{2s-1}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{4b+2s-2}} \leq c \frac{|\xi|^{2s-1}}{\langle \tau \rangle^{4b+2s-2}}. \end{aligned}$$

Combinando (2.97) com (2.98) e usando $|\tau - \xi^3| \sim |\xi|^3$ obtemos

$$w(\tau, \xi) \leq \langle \tau \rangle^{\frac{2k}{3} - 2a - 4b - 2s + 2} |\xi|^{2s+1} \leq \langle \tau \rangle^{\frac{2k}{3} - 2a - 4b - 2s + 2 + \frac{2s}{3} + \frac{1}{3}}.$$

A expressão acima é controlada por uma constante se $k \leq 2s + 6b + 3a - \frac{7}{2}$.

Prova da Proposição 2.7:

Podemos assumir que $10|\tau| \leq |\xi|^3$, pois caso contrário o resultado seguiria da Proposição 2.5.

Argumentando como na prova da Proposição 2.5 e usando o fato $k \leq 0$, precisamos mostrar que as funções

$$w_1(\xi_1, \tau_1) = \frac{\langle \tau \rangle^{\frac{2k}{3}}}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{|\xi| < 2} d\tau d\xi}{\langle \sigma \rangle^{2a} \langle \sigma_2 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s}}$$

e

$$w_2(\tau, \xi) = \chi_{\{|\xi| > 2, 10|\tau| \leq |\xi|^3\}} \frac{|\xi|^2}{\langle \sigma \rangle^{2a}} \int \int \frac{d\tau_2 d\xi_2}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}}$$

são limitadas.

A limitação da função w_1 é feita igual à prova da Proposição 2.5.

Para estimarmos w_2 usamos o fato de $10|\tau| \leq |\xi|^3$ implicar em $|\sigma| \sim |\xi|^3$. Assim temos

$$w_2(\tau, \xi) \leq \chi_{\{|\xi| > 2, 10|\tau| \leq |\xi|^3\}} \frac{|\xi|^2}{\langle \xi \rangle^{6a}} \int \int \frac{d\tau_2 d\xi_2}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \xi_2 \rangle^{2s} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}}.$$

Argumentando como na prova da Proposição anterior podemos controlar w_2 por $|\xi|^{2s+1-6a}$, que é limitado se $s \leq 3a - \frac{1}{2}$.

A demonstração segue os mesmos passos da prova da Proposição 2.5.

2.6 Boa Colocação local para o Sistema SK em $\mathbb{R}^+$

Neste capítulo vamos provar o Teorema 2.1. Por questões técnicas a prova será separada em alguns casos, isto porque dependendo da região referente aos valores s e k , correspondentes a regularidade do sistema SK, é necessário trabalhar com a família analítica de operadores forçantes ou espaços de Bourgain modificado. É importante frisarmos mais uma vez que a boa colocação local tratada aqui é uma boa colocação local no sentido de Kato para uma reformulação dos PVIF (2.2) e (2.3) como equações integrais em $\mathbb{R}$.

2.6.1 Prova do Teorema 2.1 na região $\mathcal{D}_1$

Sejam $(s, k) \in \mathcal{D}_1$. Escolha $a = a(s, k) < b = b(s, k) < \frac{1}{2}$ e $a = a(s, k)$ de modo que as estimativas não lineares dos Lemas 2.1, 2.2, 2.3, 2.5 e 2.6 sejam válidas. Defina $d = -a$. Tome $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$, extensões de u_0 e v_0 , tais que $\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}$ e $\|\tilde{v}_0\|_{H^k(\mathbb{R})} \leq 2\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)}$.

Usando (2.22), (2.58), (2.63) e (2.64) é preciso obter um ponto fixo para o operador $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, onde

$$(2.99) \quad \Lambda_1(u, v) = \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x) - \psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv + \beta\psi_T|u|^2u)(x, t) + \psi(t)\mathcal{L}_s h_1(x, t),$$

com h_1 definida por

$$(2.100) \quad h_1(t) = \chi_{(0,+\infty)} \left[f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0} + \psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv + \beta\psi_T|u|^2u)(0, t) \right],$$

e

$$(2.101) \quad \Lambda_2(u, v) = \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x) + \psi(t)\mathcal{K}(\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2))(x, t) + \psi(t)e^{-i\pi\lambda}\mathcal{L}_{+k}^\lambda h_2(x, t),$$

com h_2 definida por

$$(2.102) \quad h_2(t) = \chi_{(0,+\infty)} \left[g(t) - \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \psi(t)\mathcal{K}(\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2))(0, t) \right],$$

onde $\lambda = \lambda(k)$ será escolhido depois.

Lembremos que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$ são os operadores de Duhamel dados por

$$\mathcal{S}w(x, t) = -i \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} w(x, t') dt'$$

e

$$\mathcal{K}w(x, t) = \int_0^t e^{-(t-t')\partial_x^3} w(x, t') dt'.$$

Baseado em nossas estimativas, estamos motivados a obter o ponto fixo em uma bola do seguinte espaço de Banach:

$$Z = Z(s, k) = Z_1 \times Z_2; \quad Z_1 = C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t)) \cap X^{s,b},$$

$$Z_2 = C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t)) \cap Y^{k,b} \cap V^\alpha.$$

Para que a função $\mathcal{L}_s h_1$ esteja bem definida, vamos mostrar que $h_1 \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$.

Como $0 \leq s < \frac{1}{2}$, então $\frac{1}{4} \leq \frac{2s+1}{4} < \frac{1}{2}$. Logo o Lema 1.5 garante que $H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+) = H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Pelo Lema 2.1 (b) temos

$$(2.103) \quad \left\| \chi_{(0,+\infty)} \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0} \right\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \leq c \|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Daí $\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0} \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Além disso, como $f(t) \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$ temos que $f(t) \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$.

Agora, pelo Lema 2.18 (b) e Proposição 2.1, temos

$$\begin{aligned}
(2.104) \quad & \left\| \chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{S}(\psi_T\alpha uv + \psi_T\beta|u|^2u)(0,t) \right\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \leq c\|\psi_T(\alpha uv + \beta|u|^2u)\|_{X^{s,d}} \\
& \leq cT^\epsilon\|\alpha uv + \beta|u|^2u\|_{X^{s,d+\epsilon}} \\
& \leq cT^\epsilon(\|u\|_{X^{s,b}}^3 + \|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{Y^{k,b}}).
\end{aligned}$$

Logo, se $u \in X^{s,b}$ e $v \in Y^{k,b}$, então $\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{S}(\psi_T(\alpha uv + \beta|u|^2u)(0,t)) \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Assim, com estas condições sobre u e v temos que $h_1 \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$ e então $\mathcal{L}_s h_1$ está bem definida.

Analogamente, para que a função $\mathcal{L}_{+k}^\lambda h_2(x,t)$ esteja bem definida, precisamos mostrar que $h_2 \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Como $-\frac{3}{4} < k < \frac{1}{2}$, então $\frac{1}{12} < \frac{k+1}{3} < \frac{1}{2}$. Logo pelo Lema 1.5 temos que $H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+) = H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Pelo Lema 2.11 (b) temos que

$$(2.105) \quad \left\| \chi_{(0,+\infty)}\psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} \right\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} \leq c\|\tilde{v}_0\|_{H^k(\mathbb{R})}.$$

Portanto $\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$.

Por hipótese temos que $g(t) \in H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$, logo $\psi(t)g(t) \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R})$. Agora pelo Lema 2.19 (b) e Proposição 2.2 temos que

$$\begin{aligned}
(2.106) \quad & \left\| \chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{K}[\psi_T(\gamma\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2))](0,t) \right\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} \leq c\|\psi_T(\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2))\|_{Y^{s,d}} \\
& \leq cT^\epsilon\|\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)\|_{Y^{s,d+\epsilon}} \\
& \leq cT^\epsilon(\|u\|_{X^{s,b}}^2 + \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2),
\end{aligned}$$

onde $\epsilon > 0$ é escolhido adequadamente pequeno de modo que as estimativas não lineares sejam válidas.

Logo se $u \in X^{s,b}$ e $v \in Y^{k,b}$, então $\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{K}[\psi_T(\gamma\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2))](0,t) \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Portanto, com estas condições sobre u e v temos que $h_2 \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$, logo $\mathcal{L}_{+k}^\lambda h_2$ está bem definida.

Agora vamos mostrar que Λ é uma contração em Z .

Pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned}\|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} &\leq \|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x)\|_{Z_1} + \|\psi(t)\mathcal{S}[\psi_T(\alpha uv + \beta|u|^2u)](x, t)\|_{Z_1} \\ &\quad + \|\psi(t)\mathcal{L}_s h_1(x, t)\|_{Z_1},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} &\leq c\|\psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x)\|_{Z_2} + c\|\psi(t)\mathcal{K}[\psi_T(\gamma\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2))](x, t)\|_{Z_2} \\ &\quad + \|\psi(t)\mathcal{L}_{+k}^\lambda h_2(x, t)\|_{Z_2},\end{aligned}$$

A seguir vamos estimar cada um dos termos acima.

Comecemos estimando os termos correspondente à Λ_1 .

Pelo Lema 2.1 temos

$$\begin{aligned}\|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x)\|_{Z_1} &= \|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})) \cap X^{s,b}} \\ &\leq c\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R}_t)}.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.18, as Proposições 2.1 e 2.3 obtemos

$$\begin{aligned}\|\psi(t)\mathcal{S}[\psi_T(\alpha uv + \beta|u|^2u)](x, t)\|_{Z_1} &= \|\psi(t)\mathcal{S}[\psi_T(\alpha uv + \beta|u|^2u)](x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})) \cap X^{s,b}} \\ &\leq cT^\epsilon \|\alpha uv + \beta|u|^2u\|_{X^{s,d+\epsilon}} \\ &\leq cT^\epsilon (\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{Y^{k,b}} + \|u\|_{X^{s,b}}^3).\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.4 e as desigualdades (2.103) e 2.104 temos

$$\begin{aligned}\|\psi(t)\mathcal{L}_s h_1(x, t)\|_{Z_1} &= \|\psi(t)\mathcal{L}_s h_1(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})) \cap X^{s,b}} \\ &\leq c\|h_1\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq cT^\epsilon (\|u\|_{X^{s,b}}^3 + \|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{Y^{k,b}}) + c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + c\|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.\end{aligned}$$

Agora vamos estimar os termos correspondentes a Λ_2 . Pelo Lema 2.11 temos

$$\begin{aligned}\|\psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x)\|_{Z_2} &= \|\psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R})) \cap Y^{s,b} \cap V^\alpha} \\ &\leq c\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)}.\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.19, Proposições 2.2 e 2.5 temos

$$\begin{aligned}
& \left\| \psi(t) \mathcal{K}[\psi_T(\gamma \partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2} \partial_x(v^2))](x, t) \right\|_{Z_2} \\
&= \left\| \psi(t) \mathcal{K}[\psi_T(\gamma \partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2} \partial_x(v^2))](x, t) \right\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R})) \cap Y^{s,b} \cap V^\alpha} \\
&\leq cT^\epsilon \left\| \gamma \partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2} \partial_x(v^2) \right\|_{Y^{s,d+\epsilon}} \\
&\leq cT^\epsilon (\|u\|_{X^{s,b}}^2 + \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2).
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.17 e as desigualdades (2.105) e (2.106) obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \psi(t) \mathcal{L}_{+k}^\lambda h_2(x, t) \right\|_{Z_2} &= \left\| \psi(t) \mathcal{L}_{+k}^\lambda h_2(x, t) \right\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R})) \cap Y^{k,b} \cap V^\alpha} \\
&\leq T^\epsilon (\|v\|_{Y^{k,b}}^2 + \|u\|_{X^{s,b}}^2) + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)},
\end{aligned}$$

desde que λ e α satisfaçam as seguintes propriedades:

$$(2.107) \quad k-1 \leq \lambda < k + \frac{1}{2}, \quad \lambda < \frac{1}{2}, \quad \alpha \leq \frac{k-\lambda+2}{3}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1-b.$$

Como $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{2}$, então $k-1 < \frac{1}{2}$ e $k + \frac{1}{2} > -\frac{1}{4}$. Assim podemos encontrar $\lambda = \lambda(k)$ que satisfaça (2.107).

Reunindo as estimativas obtemos

$$(2.108) \quad \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq c(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}) + T^\epsilon (\|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha} + \|u\|_{X^{s,b}}^3),$$

$$(2.109) \quad \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq c(\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)}) + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}}^2 + T^\epsilon \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2.$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_Z &\leq cT^\epsilon \{ \|v_1\|_{Y^{k,b}} \|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} + \|u_2\|_{X^{s,b}} \|v_1 - v_2\|_{Y^{s,b}} + \\
(2.110) \quad &+ (\|u_1\|_{X^{s,b}} + \|u_2\|_{X^{s,b}}) \|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} + \\
&+ \|v_1 - v_2\|_{Y^{s,b} \cap V^\alpha} (\|v_1\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha} + \|v_2\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}) \\
&+ (\|u_1\|_{X^{s,b}}^2 + \|u_2\|_{X^{s,b}}^2) \|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} \}.
\end{aligned}$$

Defina a seguinte bola de Z :

$$B = \{(u, v) \in Z; \|u\|_{Z_1} \leq M_1, \|v\|_{Z_2} \leq M_2\},$$

onde $M_1 = 2c \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \right)$ e $M_2 = 2c \left(\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} \right)$.

Restringindo (u, v) na bola B , por (2.108), (2.109) e (2.110) obtemos

$$\|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq \frac{M_1}{2} + cT^\epsilon M_1 M_2,$$

$$\|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq \frac{M_2}{2} + cT^\epsilon (M_1^2 + M_2^2),$$

$$\|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z_1} \leq cT^\epsilon (M_1^2 + M_1 + M_2) [\|u_1 - u_2\|_{Z_1} + \|v_1 - v_2\|_{Z_2}],$$

$$\|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z_2} \leq cT^\epsilon [M_1 \|u_1 - u_2\|_{Z_1} + M_2 \|v_1 - v_2\|_{Z_2}].$$

Desta forma podemos escolher $T = T(M_1, M_2)$ suficientemente pequeno, de modo que

$$\|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq M_1,$$

$$\|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq M_2.$$

Portanto, Λ define uma contração em $Z \cap B$. Assim obtemos um ponto fixo (u, v) nesta bola. Portanto a restrição

$$(u, v) := (u|_{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,T)}, v|_{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,T)})$$

é a solução que procuramos. Como queríamos mostrar.

2.6.2 Prova do Teorema 2.1 na região $\mathcal{D}_2$

Sejam $(s, k) \in \mathcal{D}_2$. Escolha $a = a(s, k) < b < b(s, k) < \frac{1}{2}$ de modo que as estimativas não lineares dos Lemas 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6 sejam válidas. Defina $d = -a$. Tome $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$, extensões de u_0 e v_0 , tais que $\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}$ e $\|\tilde{v}_0\|_{H^k(\mathbb{R})} \leq 2\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)}$.

Como na prova do Teorema anterior, precisamos obter um ponto fixo para o operador $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, definido por

$$(2.111) \quad \Lambda_1(u, v) = \psi(t) e^{it\partial_x^2} \tilde{u}_0(x) - \psi(t) \mathcal{S}(\alpha \psi_T uv)(x, t) + \psi(t) e^{-\frac{\pi \lambda_1}{4}} \mathcal{L}_s^{\lambda_1} h_1(x, t),$$

com h_1 definida por

$$(2.112) \quad h_1(t) = \chi_{(0,+\infty)} e^{-\frac{\lambda \pi}{4}} (f(t) - \psi(t) e^{it\partial_x^2} \tilde{u}_0|_{x=0} \psi(t) \mathcal{S}[\alpha \psi_T uv](0, t)),$$

e

(2.113)

$$\Lambda_2(u, v) = \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x) + \psi(t)\mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T(t)\partial_x(v)^2](x, t) + \psi(t)e^{-\pi\lambda_2}\mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2}h_2(x, t),$$

com h_2 definida por

$$(2.114) \quad h_2(t) = \chi_{(0,+\infty)}(g(t) - \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \psi(t)\mathcal{K}[(\gamma\partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T(t)\partial_x(v)^2)](0, t)).$$

Onde $\lambda_1 = \lambda_1(s)$ e $\lambda_2 = \lambda_2(k)$ serão escolhidos depois.

Baseado em nossas estimativas, estamos motivados a obter o ponto fixo em uma bola do seguinte espaço de Banach:

$$Z = Z_1 \times Z_2; \quad Z_1 = C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t)) \cap X^{s,b},$$

$$Z_2 = C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t)) \cap Y^{k,b} \cap V^\alpha.$$

Para que a função $\mathcal{L}_s^{\lambda_1}h_1$ esteja bem definida, precisamos mostrar que $h_1 \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$.

Pelo Lema 2.1 (b) temos que

$$(2.115) \quad \|\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0}\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})} \leq c\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

então $\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0} \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$.

Por hipótese $f(t) \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$, então $f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}u_0 \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Usando a condição de compatibilidade,

$$f(0) - \psi(0)e^{i0\partial_x^2}u_0 = f(0) - u_0(0) = 0.$$

Assim o Lema 1.6 implica que $\chi_{(0,+\infty)}[f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}u_0] \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$, pois $\frac{1}{2} < s < 1$.

Usando o Lema 2.18 (b), Proposições 2.1 e 2.4 e o Lema 1.8, obtemos

$$(2.116) \quad \begin{aligned} \|\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv)(0, t)\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})} &\leq c(\|\alpha\psi_T uv\|_{X^{s,d}} + \|\alpha\psi_T uv\|_{W^{s,d}}) \\ &\leq c\|\psi_T u\|_{X^{s,b-\epsilon}}\|v\|_{Y^{k,b}} \\ &\leq cT^\epsilon\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{Y^{k,b}}. \end{aligned}$$

Portanto se $u \in X^{s,b}$ e $v \in Y^{k,b}$, então $\psi(t)\mathcal{S}(\alpha uv)(0, t) \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Como $\frac{1}{2} < \frac{2s+1}{4} < \frac{3}{4}$ e $\psi(0)\mathcal{S}(\alpha uv)(0, 0) = 0$ o Lema 1.6 implica que $\psi(t)\mathcal{S}(\alpha uv)(0, t) \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Assim com estas condições sobre u e v temos que $h_1 \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$, portanto $\mathcal{L}_s^{\lambda_1}h_1$ está bem definida.

Analogamente, para que a função $\mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2} h_2(x, t)$ esteja bem definida, precisamos mostrar que $h_2 \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Pelo Lema 2.11 (b) temos que

$$(2.117) \quad \left\| \psi(t) e^{t\partial_x^3} \tilde{v}_0|_{x=0} \right\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R})} \leq c \|\tilde{v}_0\|_{H^k(\mathbb{R})}.$$

Portanto $\chi_{(0,+\infty)} \psi(t) e^{t\partial_x^3} v_0|_{x=0} \in H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$.

Por hipótese temos que $g(t) \in H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Se $-\frac{3}{4} < k < \frac{1}{2}$, então $\frac{1}{12} < \frac{k+1}{3} < \frac{1}{2}$, logo o Lema 1.4 garante que $\chi_{(0,+\infty)}[g(t) - \psi(t) e^{t\partial_x^3} v_0|_{x=0}] \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Agora, se $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$, então $\frac{1}{2} < \frac{k+1}{3} < \frac{5}{6}$, então o Lema 1.6 junto com a condição de compatibilidade $v(0) = g(0)$ garante que $\chi_{(0,+\infty)}[g(t) - \psi(t) e^{t\partial_x^3} v_0|_{x=0}] \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$.

Via Lema 2.19 (b) e Proposições 2.2 e 2.6 temos, se $k > \frac{1}{2}$,

$$(2.118) \quad \begin{aligned} & \left\| \psi(t) \mathcal{K}[\gamma \psi_T \partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2} \psi_T(t) \partial_x((v)^2)](0, t) \right\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R})} \\ & \leq c \left\| \psi_T \partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2} \psi_T(t) \partial_x(v)^2 \right\|_{Y^{s,d}} \\ & \leq c T^\epsilon \left\| \partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2} \partial_x(v)^2 \right\|_{Y^{s,d+\epsilon}} \\ & \leq c T^\epsilon (\|u\|_{X^{s,b}}^2 + \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2). \end{aligned}$$

Se $k < \frac{1}{2}$ temos a estimativa acima sem a norma do espaço modificado $U^{s,d}$.

Portanto, se $u \in X^{s,b}$ e $v \in Y^{k,b}$, então $\chi_{(0,+\infty)} \psi(t) \mathcal{K}[\gamma \partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2} \partial_x(v^2)](0, t) \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Assim com estas condições sobre u e v temos que $h_2 \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$, logo $\mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2} h_2$ está bem definida.

Agora vamos mostrar que Λ é uma contração em Z .

Pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} & \leq \left\| \psi(t) e^{it\partial_x^2} \tilde{u}_0(x) \right\|_{Z_1} + \left\| \psi(t) \mathcal{S}(\alpha \psi_T uv)(x, t) \right\|_{Z_1} \\ & \quad + \left\| \psi(t) \mathcal{L}_s^{\lambda_1} h_1(x, t) \right\|_{Z_1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} & \leq c \left\| \psi(t) e^{t\partial_x^3} \tilde{v}_0(x) \right\|_{Z_2} + c \left\| \psi(t) \mathcal{K}[\gamma \partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2} \partial_x(v^2)](x, t) \right\|_{Z_2} \\ & \quad + c \left\| \psi(t) \mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2} h_2(x, t) \right\|_{Z_2}. \end{aligned}$$

A seguir vamos estimar cada um dos termos acima.

Comecemos estimando os termos correspondente a Λ_1 .

Pelo Lema 2.1 temos

$$\begin{aligned} \|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x)\|_{Z_1} &= \|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}})} \cap X^{s,b} \\ &\leq c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.18, as Proposições 2.3 e 2.4 obtemos

$$\begin{aligned} &\|\psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv)(x, t)\|_{Z_1} \\ &= \|\psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv)(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t)) \cap X^{s,b}} \\ &\leq c\|\alpha\psi_T uv\|_{X^{s,d} \cap U^{s,d}} \leq c\|\psi_T u\|_{X^{s,b-\epsilon}} \|v\|_{Y^{k,b}} \leq cT^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b}}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} < s < 1$, podemos escolher $-1 < \lambda_1 < \frac{1}{2}$ tal que $s - \frac{1}{2} < \lambda_1 < s + \frac{1}{2}$, deste modo podemos aplicar os Lemas 2.8, 2.9, 2.10.

Pelos Lemas 2.8, 2.9, 2.10 e pelas estimativas (2.115) e (2.116) obtemos

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\mathcal{L}_s^{\lambda_1} h_1(x, t)\|_{Z_1} &= \|\psi(t)\mathcal{L}_s^{\lambda_1} h_1(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t)) \cap X^{s,b}} \\ &\leq c\|h_1\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t)} \\ &\leq cT^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b}} + c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + c\|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Agora vamos estimar os termos correspondentes a Λ_2 . Pelo Lema 2.11 temos

$$\begin{aligned} \|\psi(t)e^{t\partial_x^3}v_0(x)\|_{Z_2} &= \|\psi(t)e^{t\partial_x^3}v_0(x)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t)) \cap Y^{s,b} \cap V^\alpha} \\ &\leq c\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.19, Proposições 2.2 e 2.5 temos

$$\begin{aligned} &\|\psi(t)\mathcal{K}\psi_T[\gamma\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](x, t)\|_{Z_2} \\ &= \|\psi(t)\mathcal{K}\psi_T[\gamma\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t)) \cap Y^{s,b} \cap V^\alpha} \\ &\leq \|\psi_T(\gamma\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2))\|_{Y^{s,d}} \\ &\leq cT^\epsilon (\|u\|_{X^{s,b}}^2 + \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.17, pelas estimativas (2.117) e (2.118) temos

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)\mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2}h_2(x,t)\|_{Z_2} &= \|\psi(t)\mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2}h_2(x,t)\|_{C(\mathbb{R}_t;H^k(\mathbb{R}_x))\cap C(\mathbb{R}_x;H^{\frac{k+1}{3}})\cap Y^{k,b}\cap V^\alpha} \\
&\leq c\|h_2\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})} \\
&\leq cT^\epsilon(\|v\|_{Y^{k,b}}^2 + \|u\|_{X^{s,b}}^2) + \|g\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)},
\end{aligned}$$

desde que λ_2 e α satisfaçam as seguintes propriedades:

$$k-1 \leq \lambda_2 < k + \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 < \frac{1}{2}, \quad \alpha \leq \frac{k-\lambda_2+2}{3}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1-b.$$

Como $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{2}$, então $k-1 < \frac{1}{2}$ e $k + \frac{1}{2} > -\frac{1}{4}$. Assim podemos encontrar $\lambda_2 = \lambda_2(k)$ que satisfaz as condições acima.

Reunindo as estimativas acima obtemos

$$(2.119) \quad \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq c(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}) + T^\epsilon\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{Y^{k,b}},$$

$$(2.120) \quad \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq c(\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)}) + T^\epsilon\|u\|_{X^{s,b}}^2 + T^\epsilon\|v\|_{Y^{k,b}\cap V^\alpha}^2.$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_Z &\leq cT^\epsilon\{\|v_1\|_{Y^{k,b}}\|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} + \|u_2\|_{X^{s,b}}\|v_1 - v_2\|_{Y^{s,b}} + \\
(2.121) \quad &+ (\|u_1\|_{X^{s,b}} + \|u_2\|_{X^{s,b}})\|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} \\
&+ \|v_1 - v_2\|_{Y^{s,b}\cap V^\alpha}(\|v_1\|_{Y^{k,b}\cap V^\alpha} + \|v_2\|_{Y^{k,b}\cap V^\alpha})\}.
\end{aligned}$$

Defina a seguinte bola de Z :

$$B = \{(u, v) \in Z; \|u\|_{Z_1} \leq M_1, \|v\|_{Z_2} \leq M_2\},$$

onde $M_1 = 2c(\|u_0\|_{H^s} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}})$ e $M_2 = 2c(\|v_0\|_{H^k} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}})$.

Restringindo (u, v) na bola B , por (2.119), (2.120) e (2.121) obtemos

$$(2.122) \quad \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq \frac{M_1}{2} + cT^\epsilon M_1 M_2,$$

$$(2.123) \quad \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq \frac{M_2}{2} + cT^\epsilon(M_1^2 + M_2^2),$$

$$\|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z_1} \leq cT^\epsilon(M_1^2 + M_1 + M_2)[\|u_1 - u_2\|_{Z_1} + \|v_1 - v_2\|_{Z_2}],$$

$$\|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z_2} \leq cT^\epsilon[M_1\|u_1 - u_2\|_{Z_1} + M_2\|v_1 - v_2\|_{Z_2}].$$

Desta forma podemos escolher $T = T(M_1, M_2)$ suficientemente pequeno, de modo que

$$\|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq M_1,$$

$$\|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq M_2.$$

Portanto, Λ define uma contração em $Z \cap B$. Assim obtemos um ponto fixo (u, v) nesta bola. Portanto, a restrição

$$(u, v) := (u|_{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,T)}, v|_{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,T)})$$

é a solução que procuramos. Como queríamos mostrar.

2.6.3 Prova do Teorema 2.2 na região $\mathcal{D}_3$

Sejam $(s, k) \in \mathcal{D}_3$. Escolha $a = a(s, k) < b = b(s, k) < \frac{1}{2}$ e $a = a(s, k)$ de modo que as estimativas não lineares dos Lemas 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6 sejam válidas. Defina $d = -a$. Tome $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$, extensões de u_0 e v_0 , tais que $\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}$ e $\|\tilde{v}_0\|_{H^k(\mathbb{R})} \leq 2\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)}$.

Como na prova do Teorema anterior, precisamos obter um ponto fixo para o operador $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, definido por

$$(2.124) \quad \Lambda_1(u, v) = \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x) - \psi(t)\mathcal{S}[\alpha\psi_T uv](x, t) + \psi(t)e^{-\frac{\lambda\pi i}{4}}\mathcal{L}_s^{\lambda_1}h_1(x, t),$$

com h_1 definida por

$$(2.125) \quad h_1(t) = \chi_{(0,+\infty)}(f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0}\psi(t)\mathcal{S}[\alpha\psi_T uv](0, t)),$$

e

$$(2.126) \quad \Lambda_2(u, v) = \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x) + \psi(t)\mathcal{K}[\gamma\partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v)^2](x, t) + \psi(t)e^{-\lambda_2\pi}\mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2}h_2(x, t),$$

com h_2 definida por

$$(2.127) \quad h_2(t) = \chi_{(0,+\infty)}(g(t) - \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \psi(t)\mathcal{K}[(\gamma\partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v)^2)](0, t)).$$

Onde $\lambda_1 = \lambda_1(s)$ e $\lambda_2 = \lambda_2(k)$ serão escolhidos depois.

Baseado em nossas estimativas, estamos motivados a obter o ponto fixo em uma bola do seguinte espaço de Banach:

$$Z = Z_1 \times Z_2; \quad Z_1 = C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}) \cap X^{s,b},$$

$$Z_2 = C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t)) \cap Y^{k,b} \cap V^\alpha.$$

Para que a função $\mathcal{L}_s^{\lambda_1} h_1$ esteja bem definida, vamos mostrar que $h_1 \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$.

Pelo Lema 2.1 (b) temos que

$$(2.128) \quad \|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0}\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})} \leq c\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

então $\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0} \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$.

Por hipótese $f(t) \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$, então $\chi_{(0,+\infty)}(f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}u_0) \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Usando a condição de compatibilidade,

$$f(0) - \psi(0)e^{i0\partial_x^2}u_0 = f(0) - \tilde{u}_0(0) = 0.$$

Assim o Lema 1.6 implica que $f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0 \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$, pois $\frac{1}{2} < s < 1$.

Usando o Lema 2.18 (b), Proposições 2.1 e 2.4 e o Lema 1.8, obtemos

$$(2.129) \quad \begin{aligned} \|\psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv)(0, t)\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})} &\leq c(\|\alpha\psi_T uv\|_{X^{s,d}} + \|\alpha\psi_T uv\|_{W^{s,d}}) \\ &\leq c\|\psi_T u\|_{X^{s,b-\epsilon}}\|v\|_{Y^{k,b}} \\ &\leq cT^\epsilon\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{Y^{k,b}}. \end{aligned}$$

Portanto, se $u \in X^{s,b}$ e $v \in Y^{k,b}$, então $\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{S}(\alpha uv)(0, t) \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Usando os fatos $\frac{1}{2} < \frac{2s+1}{4} < \frac{3}{4}$ e $\psi(0)\mathcal{S}(\alpha uv)(0, 0) = 0$, o Lema 1.6 implica que $\psi(t)\mathcal{S}(\alpha uv)(0, t) \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Logo, com estas condições sobre u e v temos que $h_1 \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$, portanto $\mathcal{L}_s^{\lambda_1} h_1$ está bem definida.

Analogamente, para que a função $\mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2} h_2(x, t)$ esteja bem definida, precisamos mostrar que $h_2 \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Pelo Lema 2.11 (b) temos que

$$(2.130) \quad \|\psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0}\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R})} \leq c\|\tilde{v}_0\|_{H^k(\mathbb{R})}.$$

Portanto $\psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} \in H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R})$.

Por hipótese temos que $g(t) \in H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Se $-\frac{3}{4} < k < \frac{1}{2}$, então $\frac{1}{12} < \frac{k+1}{3} < \frac{1}{2}$, logo o Lema 1.4 garante que $g(t) - \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Agora, como $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$, então $\frac{1}{2} < \frac{k+1}{3} < \frac{5}{6}$, logo o Lema 1.6 junto com a condição de compatibilidade $v(0) = g(0)$ garante que $\chi_{(0,+\infty)}(g(t) - \psi(t)e^{t\partial_x^3}v_0|_{x=0}) \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$.

Via Lema 2.19 (b) e Proposições 2.2 e 2.6 temos

$$\begin{aligned} & \left\| \psi(t)\mathcal{K}[\gamma\partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x((v)^2)](0, t) \right\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}} \\ & \leq c \left(\left\| \partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x((\psi_T v)^2) \right\|_{Y^{s,d}} + \left\| \partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x((v)^2) \right\|_{U^{s,d}} \right) \\ & \leq c(\|\psi_T u\|_{X^{s,b-\epsilon}}^2 + \|v\|_{Y^{k,b-\epsilon} \cap V^\alpha}^2) \leq c(T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}}^2 + \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2). \end{aligned}$$

Portanto, se $u \in X^{s,b}$ e $v \in Y^{k,b}$, então $\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{K}[\gamma\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](0, t) \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Assim, com estas condições sobre u e v temos que $h_2 \in H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$, logo $\mathcal{L}_{+k}^\lambda h_2$ está bem definida.

Agora vamos mostrar que Λ é uma contração em Z .

Pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} & \leq \|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x)\|_{Z_1} + \|\psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv)(x, t)\|_{Z_1} \\ & \quad + \|\psi(t)\mathcal{L}_s^{\lambda_1} h_1(x, t)\|_{Z_1}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} & \leq \|\psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x)\|_{Z_2} + \|\psi(t)\mathcal{K}[\gamma\partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](x, t)\|_{Z_2} \\ & \quad + \|\psi(t)\mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2} h_2(x, t)\|_{Z_2}. \end{aligned}$$

A seguir vamos estimar cada um dos termos acima.

Começamos estimando os termos correspondente a Λ_1 .

Pelo Lema 2.1 temos

$$\begin{aligned} \|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x)\|_{Z_1} & = \|\psi(t)e^{it\partial_x^2}u_0(x)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}})} \cap X^{s,b} \\ & \leq c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.18, as Proposições 2.3 e 2.4 obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv)(x, t)\|_{Z_1} \\
&= \|\psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv)(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}})} \cap X^{s,b} \\
&\leq c\|\alpha\psi_T uv\|_{X^{s,d} \cap U^{s,d}} \\
&\leq c\|\psi_T u\|_{X^{s,b-\epsilon}} \|v\|_{Y^{k,b}} \\
&\leq cT^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b}}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} < s < 1$, podemos escolher $-1 < \lambda_1 < \frac{1}{2}$, tal que, $s - \frac{1}{2} < \lambda_1 < s + \frac{1}{2}$, deste modo podemos aplicar os Lemas 2.8, 2.9, 2.10. Pelos Lemas 2.8, 2.9, 2.10 e por (2.128) temos

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)\mathcal{L}_s^{\lambda_1} h_1(x, t)\|_{Z_1} &= \|\psi(t)\mathcal{L}_s^{\lambda_1} h_1(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}})} \cap X^{s,b} \\
&\leq c\|h_1\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R})} \\
&\leq cT^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b}} + c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + c\|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.
\end{aligned}$$

Agora vamos estimar os termos correspondentes a Λ_2 . Pelo Lema 2.11 temos

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)e^{t\partial_x^3} \tilde{v}_0(x)\|_{Z_2} &= \|\psi(t)e^{t\partial_x^3} v_0(x)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}})} \cap Y^{s,b} \cap V^\alpha \\
&\leq c\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.19, Proposições 2.2 e 2.5 temos

$$\begin{aligned}
& \|\psi(t)\mathcal{K}[\gamma\partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](x, t)\|_{Z_2} \\
&= \|\psi(t)\mathcal{K}[\gamma\partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t))} \cap Y^{s,b} \cap V^\alpha \\
&\leq c\|\gamma\partial_x(|\psi_T u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)\|_{Y^{s,d}} \\
&\leq cT^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}}^2 + c\|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.17, por (2.131) e (2.130) temos

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)\mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2} h_2(x, t)\|_{Z_2} &= \|\psi(t)\mathcal{L}_{+k}^{\lambda_2} h_2(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}})} \cap Y^{k,b} \cap V^\alpha \\
&\leq c\|h_2\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq c(\|v\|_{Y^{k,b}}^2 + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}}^2 + \|g\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)}),
\end{aligned}$$

desde que λ_2 e α satisfaçam as seguintes propriedades:

$$(2.131) \quad k-1 \leq \lambda_2 < k + \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 < \frac{1}{2}, \quad \alpha \leq \frac{k - \lambda_2 + 2}{3}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 - b.$$

Como $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{2}$, então $k-1 < \frac{1}{2}$ e $k + \frac{1}{2} > -\frac{1}{4}$. Assim podemos encontrar $\lambda_2 = \lambda_2(k)$ que satisfaça (2.131).

Reunindo as estimativas obtemos

$$(2.132) \quad \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq c(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}) + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b}},$$

$$(2.133) \quad \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq c(\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)}) + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}}^2 + \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2.$$

Analogamente, obtemos

$$(2.134) \quad \begin{aligned} \|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_Z &\leq c\{T^\epsilon \|v_1\|_{Y^{k,b}} \|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} + T^\epsilon \|u_2\|_{X^{s,b}} \|v_1 - v_2\|_{Y^{s,b}} + \\ &+ (\|u_1\|_{X^{s,b}} + \|u_2\|_{X^{s,b}}) \|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} \\ &+ \|v_1 - v_2\|_{Y^{s,b} \cap V^\alpha} (\|v_1\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha} + \|v_2\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha})\}. \end{aligned}$$

Defina a seguinte bola de Z :

$$B = \{(u, v) \in Z; \|u\|_{Z_1} \leq M_1, \|v\|_{Z_2} \leq M_2\},$$

onde $M_1 = 2c \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \right)$ e $M_2 = 2c \left(\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^+)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} \right)$.

Restringindo (u, v) na bola B , por (2.132), (2.133) e (2.134) obtemos

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} &\leq \frac{M_1}{2} + cT^\epsilon M_1 M_2, \\ \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} &\leq \frac{M_2}{2} + c(T^\epsilon M_1^2 + M_2^2), \\ \|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z_1} &\leq cT^\epsilon (M_1^2 + M_1 + M_2) [\|u_1 - u_2\|_{Z_1} + \|v_1 - v_2\|_{Z_2}], \\ \|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z_2} &\leq c[M_1 T^\epsilon \|u_1 - u_2\|_{Z_1} + M_2 \|v_1 - v_2\|_{Z_2}]. \end{aligned}$$

Usando a hipótese referente a dados pequenos dada em (2.7) podemos escolher $T = T(M_1, M_2)$ suficientemente pequeno de modo a termos

$$\|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq M_1,$$

$$\|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq M_2,$$

$$\|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z \cap B} \leq \frac{1}{2} \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_Z.$$

Portanto, Λ define uma contração em $Z \cap B$. Assim obtemos um ponto fixo (u, v) nesta bola. Portanto a restrição

$$(u, v) := (u|_{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,T)}, v|_{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,T)})$$

é a solução que procuramos. Como queríamos mostrar.

2.6.4 Prova do Teorema 2.2 na região $\mathcal{D}_4$.

A prova segue os mesmos passos da região $\mathcal{D}_3$. Vamos comentar as leves diferenças na prova deste caso. Uma diferença é que neste caso consideramos o sistema geral com qualquer $\beta \in \mathbb{R}$, visto que para $0 \leq s < 1/2$ na estimativa do operador Duhamel $\mathcal{S}$ não aparece o espaço de Bourgain modificado $W^{s,b}$, logo o termo cúbico pode ser estimado. Outra diferença é que não precisamos usar a família de operadores $\mathcal{L}_{+s}^\lambda$, basta usar o operador $\mathcal{L}_{+s}$. Os detalhes serão omitidos.

2.7 Boa Colocação local para o Sistema SK em $\mathbb{R}^-$

Nas subseções 2.3.3 e 2.3.4 estudamos o PVIF em $\mathbb{R}^-$ para a equação linear de KdV com duas condições de fronteira, sendo assim obtivemos a solução deste problema resolvendo um PVI posto em todo $\mathbb{R}$ com a introdução de dois termos forçantes. Seguindo esta direção, para resolvermos o PVIF (2.3)-(2.5), reformularemos este problema como uma equação integral em todo $\mathbb{R}$, com a introdução de um termo forçante na primeira equação e dois termos forçantes na segunda equação.

Para o problema de SK em $\mathbb{R}^-$, levaremos em conta este fato para reescrevermos o PVIF (2.3)-(2.5) na forma integral. Além disso, neste problema obteremos o ponto fixo em um espaço mais restrito, se compararmos com o PVIF em $\mathbb{R}^+$.

2.7.1 Prova do Teorema 2.3 na região $\mathcal{E}_1$

Primeiramente, notemos que nesta região é suficiente usarmos os operadores simples, $\mathcal{L}_s$, $\mathcal{L}_k$ e $\mathcal{L}_k^{-1}$ sem precisar usar a família de operadores. Com efeito todas as estimativas referentes a estes operadores são válidas nas regularidades determinada nesta região. Sejam $(s, k) \in \mathcal{E}_1$. Escolha $a = a(s, k) < b = b(s, k) < \frac{1}{2}$ de modo que as estimativas não lineares obtidas nos Lemas 2.1, 2.2, 2.3, 2.5 e 2.6 sejam válidas. Defina $d = -a$. Tome $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$, extensões de u_0 e v_0 , tais que $\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)}$ e $\|\tilde{v}_0\|_{H^k(\mathbb{R})} \leq 2\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)}$.

Por (2.22), (2.60), (2.63) e (2.64) precisamos obter um ponto fixo para o operador $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, onde

$$(2.135) \quad \Lambda_1(u, v) = \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x) - \psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv + \beta\psi_T|u|^2u)(x, t) + \psi(t)\mathcal{L}_s h_1(x, t),$$

com h_1 definida por

$$(2.136) \quad h_1(t) = \chi_{(0, +\infty)}(f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0} + \psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv + \beta\psi_T|u|^2u)(0, t)),$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_2(u, v) &= \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x) + \psi(t)\mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](x, t) \\ &\quad + \psi(t)\mathcal{L}_{-k}h_2(x, t) + \psi(t)\mathcal{L}_{-k}^{-1}h_3(x, t), \end{aligned}$$

com h_2, h_3 definidos por

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} A,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \chi_{(0, +\infty)}\psi(t)(g - e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](0, t)) \\ \chi_{(0, +\infty)}\psi(t)\mathcal{I}_{\frac{1}{3}}(h - \partial_x e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0 - \partial_x \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](0, t)) \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar Λ definido no espaço $Z = Z(s, k) = Z_1 \times Z_2$, onde

$$Z_1 = C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t)) \cap X^{s, b},$$

$$Z_2 = \{w \in C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t)) \cap Y^{s, b} \cap V^\alpha; \partial_x w \in C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}_t))\},$$

cujá norma é dada por

$$\begin{aligned}
\|(u, v)\|_Z &= \|u\|_{Z_1} + \|v\|_{Z_2} \\
&:= \|u\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x))} + \|u\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t))} + \|u\|_{X^{s,b}} \\
&\quad + \|v\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x))} + \|v\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t))} + \|v\|_{\cap Y^{s,b}} + \|v\|_{V^\alpha} \\
&\quad + \|\partial_x v\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}_t))}.
\end{aligned}$$

Argumentando como na demonstração do Teorema 2.1 vemos que $\mathcal{L}_s h_1(x, t)$ está bem definida. Agora vamos mostrar que as funções $\mathcal{L}_{-k} h_2(x, t)$ e $\mathcal{L}_{-k}^{-1} h_3(x, t)$ estão bem definidas. Pela prova do Teorema 2.1 vemos que a função

$$\mathcal{L}_{-k} \chi_{(0,+\infty)} \psi(t) \left(g - e^{\partial_x^3} v_0|_{x=0} - \mathcal{K} \left[\gamma \psi_T \partial_x (|u|^2) - \frac{1}{2} \psi_T \partial_x (v^2) \right] (0, t) \right) (x, t)$$

está bem definida. Como $0 \leq k < \frac{1}{2}$ temos que $\frac{1}{3} \leq \frac{k+1}{3} < \frac{1}{2}$, pelo Lema 1.5 obtemos $H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+) = H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$. Pelos Lemas 1.2, 1.11, 2.11, 2.19, 2.5 e 2.2 obtemos

$$\begin{aligned}
(2.137) \quad & \left\| \chi_{(0,+\infty)} \mathcal{I}_{\frac{1}{3}} \psi(t) \left(h - \partial_x e^{\partial_x^3} v_0 - \partial_x \mathcal{K} \left[\gamma \psi_T \partial_x (|u|^2) - \frac{1}{2} \psi_T \partial_x (v^2) \right] (0, t) \right) \right\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} \\
& \leq \left\| \mathcal{I}_{\frac{1}{3}} \psi(t) \left(h - \partial_x e^{\partial_x^3} v_0 - \partial_x \mathcal{K} \left[\gamma \psi_T \partial_x (|u|^2) - \frac{1}{2} \psi_T \partial_x (v^2) \right] (0, t) \right) \right\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R})} \\
& \leq \left\| \psi(t) \left(h - \partial_x e^{\partial_x^3} v_0 - \partial_x \mathcal{K} \left[\gamma \psi_T \partial_x (|u|^2) - \frac{1}{2} \psi_T \partial_x (v^2) \right] (0, t) \right) \right\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R})} \\
& \leq c \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + \|\psi_T \partial_x (v^2)\|_{Y^{k,-a}} + \|\psi_T \partial_x (|u|^2)\|_{Y^{k,-a}} \\
& \leq c \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + T^\epsilon \|\partial_x (v^2)\|_{Y^{k,-a+\epsilon}} + T^\epsilon \|\partial_x (|u|^2)\|_{Y^{k,-a+\epsilon}} \\
& \leq c \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + T^\epsilon \|v\|_{Y^{k,b}}^2 + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}}^2.
\end{aligned}$$

Isto mostra que as funções $\mathcal{L}_{-k} h_2(x, t)$ e $\mathcal{L}_{-k}^{-1} h_3(x, t)$ estão bem definidas.

O passo seguinte é mostrar que Λ define um ponto fixo em Z . Como na prova do Teorema 2.1 obtemos

$$(2.138) \quad \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq c \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}}^3 + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}.$$

Argumentando como na demonstração do Teorema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
(2.139) \quad & \left\| \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x) + \psi(t)\mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](x, t) \right\|_{C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t)) \cap Y^{s,b} \cap V^\alpha} \\
& \leq c\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + T^\epsilon\|u\|_{X^{s,b}}^2 + T^\epsilon\|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2.
\end{aligned}$$

Além disso, utilizando as estimativas da derivada nos Lemas 2.11, 2.19, obtemos de maneira análoga

$$\begin{aligned}
(2.140) \quad & \left\| \partial_x(\psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x) + \psi(t)\mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](x, t)) \right\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}_t))} \\
& \leq c\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + T^\epsilon\|u\|_{X^{s,b}}^2 + T^\epsilon\|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2.
\end{aligned}$$

Note que aqui usamos o fato de $k \geq 0$ na região $\mathcal{E}_1$, pois quando $k < 0$ a estimativa do operador Duhamel de KdV só funciona com uma mudança no espaço de Bourgain.

Seja $W_2 = C(\mathbb{R}_t; H^k(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}_t)) \cap Y^{s,b} \cap V^\alpha$. Como na prova do Teorema 2.1 obtemos

$$\begin{aligned}
(2.141) \quad & \left\| \mathcal{L}_{-k} \left(\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)(g - e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](0, t)) \right) \right\|_{W_2} \\
& \leq c\|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + T^\epsilon\|v\|_{H^k(\mathbb{R})}^2 + T^\epsilon\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

Usando a estimativa da derivada no Lema 2.17 e argumentando como anteriormente obtemos

$$\begin{aligned}
(2.142) \quad & \left\| \partial_x \mathcal{L}_{-k} \left(\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)(g - e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](0, t)) \right) \right\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}_t))} \\
& \leq c\|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + T^\epsilon\|v\|_{H^k(\mathbb{R})}^2 + T^\epsilon\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

Pelos Lema 2.17 e por (2.137) temos

$$\begin{aligned}
(2.143) \quad & \left\| \mathcal{L}_{-k}\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{I}_{\frac{1}{3}}\left(h - \partial_x e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0 - \partial_x \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](0, t)\right) \right\|_{W_2} \\
& \leq c\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + T^\epsilon\|u\|_{X^{s,b}}^2 + T^\epsilon\|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2.
\end{aligned}$$

Reunindo as estimativas (2.139), (2.140), (2.141), (2.142) e (2.143) obtemos

(2.144)

$$\|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq c\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} + T^\epsilon \|v\|_{Y^{k,b}}^2 + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}.$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned} \|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_Z &\leq cT^\epsilon \{ \|v_1\|_{Y^{k,b}} \|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} + \|u_2\|_{X^{s,b}} \|v_1 - v_2\|_{Y^{s,b}} + \\ (2.145) \quad &+ (\|u_1\|_{X^{s,b}} + \|u_2\|_{X^{s,b}}) \|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} + \\ &+ \|v_1 - v_2\|_{Y^{s,b} \cap V^\alpha} (\|v_1\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha} + \|v_2\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}) \\ &+ (\|u_1\|_{X^{s,b}}^2 + \|u_2\|_{X^{s,b}}^2) \|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} \}. \end{aligned}$$

Defina a seguinte bola de Z :

$$B = \{(u, v) \in Z; \|u\|_{Z_1} \leq M_1, \|v\|_{Z_2} \leq M_2\},$$

onde

$$M_1 = 2c \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \right)$$

e

$$M_2 = 2c \left(\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} \right).$$

Restringindo (u, v) na bola B , por (2.138), (2.144) e (2.145) obtemos

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} &\leq \frac{M_1}{2} + cT^\epsilon M_1 M_2, \\ \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} &\leq \frac{M_2}{2} + cT^\epsilon (M_1^2 + M_2^2), \\ \|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z_1} &\leq cT^\epsilon (M_1^2 + M_1 + M_2) [\|u_1 - u_2\|_{Z_1} + \|v_1 - v_2\|_{Z_2}], \\ \|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z_2} &\leq cT^\epsilon [M_1 \|u_1 - u_2\|_{Z_1} + M_2 \|v_1 - v_2\|_{Z_2}]. \end{aligned}$$

Desta forma podemos escolher $T = T(M_1, M_2)$ suficientemente pequeno, de modo que

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} &\leq M_1, \\ \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} &\leq M_2, \\ \|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z \cap B} &\leq \frac{1}{2} \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_Z. \end{aligned}$$

Logo, Λ define uma contração em $Z \cap B$. Assim obtemos um ponto fixo (u, v) nesta bola. Portanto, a restrição

$$(u, v) := (u|_{(x,t) \in \mathbb{R}^- \times (0,T)}, v|_{(x,t) \in \mathbb{R}^- \times (0,T)})$$

é a solução que procuramos. Como queríamos mostrar.

2.7.2 Prova do Teorema 2.3 na região $\mathcal{E}_2$

Neste caso, como $s > \frac{1}{2}$ precisaremos utilizar a família de operadores $\mathcal{L}_{-s}^{\lambda_1}$ e os espaços de Bourgain modificado, devido a isto trabalhamos com o problema no caso ressonante $\beta = 0$. A formulação do problema na forma integral, será bem parecida ao caso anterior.

Sejam $(s, k) \in \mathcal{E}_2$. Escolha $a = a(s, k) < b = b(s, k) < \frac{1}{2}$ de modo que as estimativas não lineares obtidas nos Lemas 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 sejam válidas. Defina $d = -a$. Tome $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$, extensões de u_0 e v_0 , tais que $\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)}$ e $\|\tilde{v}_0\|_{H^k(\mathbb{R})} \leq 2\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)}$. Seja $\lambda = \lambda(s)$, tal que $s - \frac{1}{2} < \lambda < \min\{\frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}\}$.

Por (2.28), (2.60), (2.63) e (2.64) é preciso obter um ponto fixo para o operador $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, onde

$$(2.146) \quad \Lambda_1(u, v) = \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x) - \psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv)(x, t) + \psi(t)\mathcal{L}_{-s}^\lambda h_1(x, t),$$

com h_1 definida por

$$(2.147) \quad h_1(t) = \chi_{(0,+\infty)} e^{-i\frac{\lambda\pi}{4}} \left(f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0} + \psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv)(0, t) \right),$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda_2(u, v) &= \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x) + \psi(t)\mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](x, t) \\ &\quad + \psi(t)\mathcal{L}_{-k}h_2(x, t) + \psi(t)\mathcal{L}_{-k}^{-1}h_3(x, t), \end{aligned}$$

com h_2, h_3 definidos por

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} A,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \chi_{(0,+\infty)}\psi(t)(g - e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](0,t)) \\ \chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{I}_{\frac{1}{3}}(h - \partial_x e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0 - \partial_x \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\psi_T\partial_x(v^2)](0,t)) \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar Λ definido no espaço Z , onde $Z = Z(s, k)$ é dado na prova do caso anterior. Argumentando como na demonstração do Teorema 2.1 na região $\mathbf{S}_2$ vemos que $\mathcal{L}_{-s}^\lambda h_1(x, t)$ está bem definida quando $(u, v) \in Z$. Argumentando como na prova do Teorema 2.3 na região $\mathbf{S}_1$ vemos que $\mathcal{L}_{-k} h_2$ está bem definida.

Argumentando como na prova do Teorema 2.1 na região $\mathbf{S}_2$ obtemos

$$(2.148) \quad \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq cT^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b}} + c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)} + c\|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.$$

Argumentando como na prova do Teorema 2.3 no caso $\mathbf{S}_1$ obtemos

$$(2.149) \quad \begin{aligned} \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} &\leq c\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} + T^\epsilon \|v\|_{X^{s,b}}^2 \\ &\quad + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}. \end{aligned}$$

Usando estas estimativas obtemos que para T adequadamente pequeno Λ define uma contração em uma bola de Z e assim obtemos um ponto fixo.

2.7.3 Prova do Teorema 2.4 na região $\mathcal{E}_3$

Na região $\mathcal{E}_3$ certos valores de k são menores que $-\frac{1}{2}$, daí precisaremos utilizar a família de operadores $\mathcal{L}_{-k}^\lambda$.

Sejam $(s, k) \in \mathcal{E}_3$. Escolha $a = a(s, k) < b = b(s, k) < \frac{1}{2}$ de modo que as estimativas não lineares dadas nos Lemas 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6 e 2.7 sejam válidas. Defina $d = -a$. Tome $\tilde{u}_0$ e $\tilde{v}_0$, extensões de u_0 e v_0 , tais que $\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)}$ e $\|\tilde{v}_0\|_{H^k(\mathbb{R})} \leq 2\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)}$. Sejam $\lambda_1 = \lambda_1(k)$, $\lambda_2 = \lambda_2(k)$ tais que $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$.

Por (2.22), (2.60), (2.63) e (2.64) é preciso obter um ponto fixo para o operador $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, onde

$$(2.150) \quad \Lambda_1(u, v) = \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0(x) - \psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv + \beta\psi_T |u|^2 u)(x, t) + \psi(t)\mathcal{L}_s h_1(x, t),$$

com h_1 definida por

$$(2.151) \quad h_1(t) = \chi_{(0,+\infty)}(f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0} + \psi(t)\mathcal{S}(\alpha\psi_T uv + \beta\psi_T |u|^2 u)(0, t)),$$

e

$$\begin{aligned}\Lambda_2(u, v) &= \psi(t)e^{t\partial_x^3}\tilde{v}_0(x) + \psi(t)\mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](x, t) \\ &\quad + \psi(t)\mathcal{L}_{-k}^{\lambda_1}h_2(x, t) + \psi(t)\mathcal{L}_{-k}^{\lambda_2}h_3(x, t),\end{aligned}$$

com h_2, h_3 definidas por

$$(2.152) \quad \begin{bmatrix} h_2(t) \\ h_3(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \chi_{(0,+\infty)}\psi(t)(g - e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](0, t)) \\ \chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{I}_{\frac{1}{3}}(h - \partial_x e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0 - \partial_x\mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](0, t)) \end{bmatrix},$$

onde

$$(2.153) \quad A = \frac{1}{2\sqrt{3}\operatorname{sen} \pi/3(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3}\lambda_2 - \frac{\pi}{6} \right) & -\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3}\lambda_2 + \frac{\pi}{6} \right) \\ -\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3}\lambda_1 - \frac{\pi}{6} \right) & \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3}\lambda_1 + \frac{\pi}{6} \right) \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar Λ definido no espaço $Z = Z(s, k)$ definido como no caso anterior. Como na prova do Teorema 2.3 na região $\mathbf{S}_1$, obtemos que $\mathcal{L}_s h_1(x, t)$ está bem definida e que

$$(2.154) \quad \|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq cT^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b}} + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}}^3 + c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)} + c\|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}}.$$

Como na prova do Teorema 2.3, na região $\mathcal{E}_1$, vemos que as funções $\mathcal{L}_{-k}h_2(x, t)$ e $\mathcal{L}_{-k}h_3(x, t)$ estão bem definidas quando $(u, v) \in Z$.

Pelo Lema 2.17 temos

$$(2.155) \quad \begin{aligned} &\left\| \mathcal{L}_{-k}^{\lambda_1} \left(\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)(g - e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](0, t)) \right) \right\|_{Z_2} \\ &\leq \left\| \chi_{(0,+\infty)}\psi(t)(g - e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](0, t)) \right\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)}, \end{aligned}$$

$$(2.156) \quad \begin{aligned} &\left\| \mathcal{L}_{-k}^{\lambda_2} \left(\chi_{(0,+\infty)}\psi(t)\mathcal{I}_{\frac{1}{3}}(h - \partial_x e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0 - \partial_x\mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](0, t)) \right) \right\|_{Z_2} \\ &\leq \left\| \chi_{(0,+\infty)}\psi(t)(g - e^{\partial_x^3}\tilde{v}_0|_{x=0} - \mathcal{K}[\gamma\psi_T\partial_x(|u|^2) - \frac{1}{2}\partial_x(v^2)](0, t)) \right\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} \end{aligned}$$

se $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < \min\{\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\}$.

Pelos Lemas 1.11, 2.11, 2.19, 2.5 e 2.2 obtemos

(2.157)

$$\begin{aligned}
& \left\| \chi_{(0,+\infty)} \mathcal{I}_{\frac{1}{3}} \psi(t) \left(h - \partial_x e^{\partial_x^3} v_0 - \partial_x \mathcal{K} [\gamma \psi_T \partial_x (|u|^2) - \frac{1}{2} \partial_x (v^2)] (0, t) \right) \right\|_{H_0^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} \\
& \leq c \left\| \mathcal{I}_{\frac{1}{3}} \psi(t) \left(h - \partial_x e^{\partial_x^3} v_0 - \partial_x \mathcal{K} [\gamma \psi_T \partial_x (|u|^2) - \frac{1}{2} \partial_x (v^2)] (0, t) \right) \right\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R})} \\
& \leq c \left\| \psi(t) \left(h - \partial_x e^{\partial_x^3} v_0 - \partial_x \mathcal{K} [\gamma \psi_T \partial_x (|u|^2) - \frac{1}{2} \partial_x (v^2)] (0, t) \right) \right\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R})} \\
& \leq c (\|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + \|\partial_x (v^2)\|_{Y^{k,-a}} + \|\partial_x (v^2)\|_{U^{k,-a}} + \|\psi_T \partial_x (|u|^2)\|_{Y^{k,-a}}) \\
& \leq c (\|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + c \|\partial_x (v^2)\|_{Y^{k,-a}} + c \|\partial_x (v^2)\|_{U^{s,-a}} + T^\epsilon \|\partial_x (|u|^2)\|_{Y^{k,-a+\epsilon}}) \\
& \leq c (\|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2 + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}}^2).
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.19 e as estimativas (2.155), (2.156), (2.157) obtemos

(2.158)

$$\|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq c (\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|v\|_{Y^{k,b}}^2 + T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}).$$

Combinando (2.154) com (2.158) obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(u, v)\|_Z & \leq c (\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)} + \|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)}) \\
& \quad + c (T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y^{k,b}} + c \|v\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}^2 + c T^\epsilon \|u\|_{X^{s,b}}^2).
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_Z & \leq c \{ T^\epsilon \|v_1\|_{Y^{k,b}} \|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} + T^\epsilon \|u_2\|_{X^{s,b}} \|v_1 - v_2\|_{Y^{k,b}} \\
& \quad + T^\epsilon (\|u_1\|_{X^{s,b}} + \|u_2\|_{X^{s,b}}) \|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}} + \\
& \quad + \|v_1 - v_2\|_{Y^{s,b} \cap V^\alpha} (\|v_1\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha} + \|v_2\|_{Y^{k,b} \cap V^\alpha}) \}.
\end{aligned}
\tag{2.159}$$

Defina a seguinte bola de Z :

$$B = \{(u, v) \in Z; \|u\|_{Z_1} \leq M_1, \|v\|_{Z_2} \leq M_2\},$$

onde

$$M_1 = 2c \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^-)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \right)$$

e

$$M_2 = 2c \left(\|v_0\|_{H^k(\mathbb{R}^-)} + \|g\|_{H^{\frac{k+1}{3}}(\mathbb{R}^+)} + \|h\|_{H^{\frac{k}{3}}(\mathbb{R}^+)} \right).$$

Restringindo (u, v) na bola B , por (2.154), (2.158) e (2.159) obtemos

$$\begin{aligned}\|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} &\leq \frac{M_1}{2} + cT^\epsilon(M_1M_2 + M_1^3), \\ \|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} &\leq \frac{M_2}{2} + c(M_1^2 + T^\epsilon M_2^2), \\ \|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z_1} &\leq cT^\epsilon(M_1^2 + M_1)\|u_1 - u_2\|_{Z_1} + cM_2\|v_1 - v_2\|_{Z_2}.\end{aligned}$$

Usando 2.7, podemos escolher $T = T(M_1, M_2)$ de modo que

$$\|\Lambda_1(u, v)\|_{Z_1} \leq M_1,$$

$$\|\Lambda_2(u, v)\|_{Z_2} \leq M_2,$$

$$\|\Lambda(u_1, v_1) - \Lambda(u_2, v_2)\|_{Z \cap B} \leq \frac{1}{2}\|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_Z.$$

Logo, Λ define uma contração em $Z \cap B$. Assim obtemos um ponto fixo (u, v) nesta bola.

Portanto a restrição

$$(u, v) := (u|_{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,T)}, v|_{(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,T)})$$

é a solução que procuramos. Como queríamos mostrar.

2.7.4 Prova do Teorema 2.4 na região $\mathcal{E}_4$

A prova do Teorema neste caso seguem as mesmas ideias usadas no caso anterior.

Capítulo 3

O PVIF para equações de Schrödinger com não linearidade quadrática na semirreta

3.1 Introdução e principais resultados

Neste capítulo vamos estudar as seguintes versões de PVIF em semirreta associados as equações de Schrödinger com não linearidade quadrática,

$$(3.1) \quad \begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = N_i(u, \bar{u}), & (x, t) \in (0, +\infty) \times (0, T), \quad i = 1, 2, 3, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, +\infty), \\ u(0, t) = f(t), & t \in (0, T), \end{cases}$$

onde $N_1(u, \bar{u}) = uu$, $N_2(u, \bar{u}) = u\bar{u}$ or $N_3(\bar{u}) = \bar{u}\bar{u}$. Os espaços apropriados para as condições inicial e de fronteira são motivados pelo comportamento das soluções da equação linear de Schrödinger em $\mathbb{R}$. Seja $e^{-it\partial_x^2}$ o grupo linear associado à equação linear de Schrödinger em $\mathbb{R}$. O efeito suavizante é dado por

$$(3.2) \quad \|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\phi\|_{L_x^\infty H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t)} \leq c\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

ver por exemplo [30]. Esta desigualdade é ótima no sentido de que $\frac{2s+1}{4}$ não pode ser trocado por um número maior. Portanto estamos motivados a considerar (3.1) na seguinte configuração

$$(3.3) \quad u_0 \in H^s(\mathbb{R}^+) \text{ e } f \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+).$$

Nosso objetivo no estudo do PVIF (3.1), (3.3) é obter resultados de baixa regularidade. Assim vamos restringir s na imagem $s \leq 0$ e condições de compatibilidade entre os valores de $u(0)$ e $f(0)$ não são necessárias.

A seguir definimos o conceito de solução que iremos construir.

Definição 3.1. *Uma função $u(x, t)$ é uma solução, no sentido das distribuições, para o PVIF (3.1), (3.3) em $[0, T]$ se esta satisfaz as seguintes condições:*

- (a) *(Não linearidade bem definida) u pertence a algum espaço X tal que $u \in X$ implique em $N_i(u, \bar{u})$, $i = 1, 2, 3$ seja uma distribuição bem definida.*
- (b) *$u(x, t)$ satisfaz a equação (3.1) no sentido das distribuições em $(x, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$.*
- (c) *$u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}_x^+))$ e neste sentido $u(\cdot, 0) = u_0$.*
- (d) *$u \in C(\mathbb{R}_x^+; H^{\frac{2s+1}{4}}(0, T))$ e neste sentido $u(0, \cdot) = f$.*

Em nosso caso X será a restrição em $\mathbb{R}^+ \times (0, T)$ das funções contidas no espaço $X^{s,b} \cap C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}_x)) \cap C(\mathbb{R}; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t))$, onde $X^{s,b}$ é o espaço de Bourgain, definido pela seguinte norma:

$$\|u\|_{X^{s,b}} = \left(\int \int \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Os espaços $X^{s,b}$, com $b > \frac{1}{2}$, são usados com grande frequência no estudo de problemas de valor inicial posto em todo $\mathbb{R}$. Como no trabalho de Holmer [23], a introdução dos operadores forçantes de fronteira de Duhamel em nosso estudo nos força a tomar $b < \frac{1}{2}$. Como para $b < \frac{1}{2}$ não se tem a imersão de $X^{s,b}$ em $C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x))$, então precisamos interceptar $X^{s,b}$ com o espaço $C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x))$.

A motivação de estudar o PVIF (3.1), (3.3) vem dos estudos feitos para problemas de valor inicial análogos em todo $\mathbb{R}$, isto é,

$$(3.4) \quad \begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = N(u, \bar{u}); & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esta classe de problema tem sido bastante estudada nas últimas três décadas. Em [43] Tsutsumi obteve boa colocação local em $H^s(\mathbb{R})$ com $s \geq 0$, para todas as não linearidades quadráticas, isto é, $|N(u, \bar{u})| \leq c|u|^2$. Em [31] Kenig, Ponce e Vega obtiveram resultados

de boa colocação local em $H^s(\mathbb{R})$ para $s \in (-\frac{3}{4}, 0]$ quando $N(u, \bar{u}) = N_1(u, \bar{u}) = u u$ ou $N(u, \bar{u}) = N_3(u, \bar{u}) = \bar{u} \bar{u}$ e para $s \in (-\frac{1}{4}, 0]$ quando $N(u, \bar{u}) = N_2(u, \bar{u}) = u \bar{u}$, usando os espaços de Bourgain $X^{s,b}$. Posteriormente, Bejenaru e Tao [1] através de uma modificação dos espaços $X^{s,b}$ obtiveram resultado de boa colocação para $s \geq -1$ quando $N = N_1$, e além disso foi mostrado que para $s < -1$ o problema é mal posto. Em seguida, Kishimoto [32] obteve resultado de boa colocação para $s \geq -1$ quando $N(u, \bar{u}) = N_3(u, \bar{u}) = \bar{u} \bar{u}$.

A seguir enunciamos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1. *Sejam $s_i = -3/4$ para $i = 1, 3$ e $s_2 = -1/4$. Se $(u_0, f) \in H^s(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$, com $s \in (s_i, 0]$, então existe um $T_i = T_i(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}, \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)})$ e uma solução no sentido das distribuições $u_i(x, t)$ do PVIF (3.1), (3.3) com não linearidade N_i , definida na classe $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+)) \cap C(\mathbb{R}^+; H^{\frac{2s+1}{4}}(0, T))$. Além disso, a aplicação $(u_0, f) \mapsto u_i$ é analítica de $H^s(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$ em $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+; H^{\frac{2s+1}{4}}(0, T)))$.*

A prova deste resultado envolve a abordagem de Colliander e Kenig [11], que estudaram o PVIF para a equação generalizada de Korteweg- de Vries na semirreta. Neste trabalho os autores introduziram um método bem geral para resolver PVIF para equações dispersivas não lineares, substituindo o PVIF por um PVI com um apropriado termo forçante. Também usaremos as idéias contidas nos trabalhos de Holmer [22] e [23], que aperfeiçoou esta técnica. Seguindo estas idéias vamos estudar o seguinte problema:

$$(3.5) \quad \begin{cases} i\partial_t \tilde{u} - \partial_x^2 \tilde{u} = N(\tilde{u}, \bar{\tilde{u}}) + \mathcal{T}(x)h(t); & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $\tilde{u}_0$ é uma boa extensão de u_0 , $\mathcal{T}$ é uma distribuição suportada em $\mathbb{R}^-$. A função $h(t)$ é escolhida de modo que

$$(3.6) \quad \tilde{u}(0, t) = f(t), \quad t \in (0, T).$$

Após construir a solução $\tilde{u}$ de (3.5), obtemos uma solução no sentido das distribuições de (3.1), fazendo a seguinte restrição $u = \tilde{u}|_{\{\mathbb{R}^+ \times (0, T)\}}$.

A solução de (3.5) é construída usando as técnicas clássicas desenvolvidas por Bourgain [7], seguindo as ideias de Kenig, Ponce e Vega [31] e a inversão do operador integração fracionária de Riemann-Liouville.

O principal novo ingrediente é a introdução de uma família analítica de operadores similar à classe definida em [23] e que generaliza o operador forçante e de fronteira definido em [22]. A necessidade de se trabalhar com uma classe de operadores forçantes vem da estimativa do operador de fronteira definido em [22] por

$$\mathcal{L}_s f(x, t) = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^t e^{-i(t-t')\partial_x^2} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-\frac{1}{2}} f(t') dt',$$

em espaços de Bourgain. Mais especificamente iremos obter a seguinte estimativa,

$$(3.7) \quad \|\mathcal{L}_s f(x, t)\|_{X^{s,b}} \leq c \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)},$$

para $s > -\frac{1}{2}$. Assim para obtermos resultados para o PVIF com termo não linear N_1 ou N_3 em regularidade mais baixa que $-1/2$ iremos definir uma família analítica de operadores $\mathcal{L}_s^\lambda$, similar a família definida em [23] no estudo do PVIF associado à equação de KdV na semirreta.

Observemos que poderíamos considerar o PVIF na semirreta à esquerda, isto é,

$$(3.8) \quad \begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = N_i(u, \bar{u}), & (x, t) \in (-\infty, 0) \times (0, T), \quad i = 1, 2, 3, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (-\infty, 0), \\ u(0, t) = f(t), & t \in (0, T), \end{cases}$$

este problema se torna idêntico ao PVIF na semirreta à direita (3.1) pela transformação $u(x, t) \rightarrow u(x, -t)$.

3.2 Versão Linear

Nesta seção vamos resolver a seguinte versão do PVIF associado à equação linear de Schrödinger

$$(3.9) \quad \begin{cases} (i\partial_t - \partial_x^2)u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0, t) = f(t), & t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Para isto vamos usar a abordagem dada em [12], [22], [23]. Esta consiste em resolver um PVI estendido (em $\mathbb{R}$) com a presença de um termo forçante, isto é,

$$(3.10) \quad \begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 v = \mathcal{T}(x)h_2(t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $\tilde{u}_0$ é uma boa extensão de u_0 , $\mathcal{T}$ é uma distribuição suportada em $\mathbb{R}^-$ e h_1 é uma função escolhida de modo a garantir que $\tilde{u}(0, t) = f(t)$.

Consequentemente, a solução do problema (3.9), será obtida por restrição da solução do problema (3.10).

Inicialmente vamos solucionar (3.10) com a distribuição $\mathcal{T} = \delta_0(x)$, mas para obtermos resultados com regularidade mais baixa iremos também solucionar (3.10), com a família de distribuições $\mathcal{T}_\lambda = \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$, para certos valores de λ em $\mathbb{C}$.

3.2.1 Equação linear de Schrödinger em $\mathbb{R}$

Definimos o grupo linear O grupo livre $e^{it\partial_x^2} : S'(\mathbb{R}) \rightarrow S'(\mathbb{R})$ associado à equação linear de Schrödinger por

$$e^{-it\partial_x^2}\phi(x) = \{e^{it\xi^2}\hat{\phi}(\xi)\}^\vee(x),$$

então

$$(3.11) \quad \begin{cases} (i\partial_t - \partial_x^2)e^{-it\partial_x^2}\phi(x) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ e^{-it\partial_x^2}\phi(x)|_{t=0} = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

no sentido das distribuições.

Em particular, se $\phi \in S(\mathbb{R})$, então

$$(3.12) \quad e^{-it\partial_x^2}\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} e^{it\xi^2} \hat{\phi}(\xi) d\xi.$$

Observação 3.1. *Observe que nesta seção estamos trabalhando com um grupo associado a equação linear de Schrödinger com normalização diferindo da equação tratada na seção anterior por um sinal. Isto implicará em leves mudanças nos operadores forçantes e de fronteira. Devido a isto resolvemos refazer as estimativas dos operadores forçantes de fronteira, que seguem o mesmo caminho das estimativas obtidas nas Subseções 2.3.1 e 2.3.2.*

A seguir vamos obter as estimativas do grupo $e^{-it\partial_x^2}$.

Lema 3.1. *Suponha $s \in \mathbb{R}$, $0 < b < 1$. Se $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, então*

- (a) *Estimativa no espaço:* $\|e^{-it\partial_x^2}\phi(x)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x))} \leq c\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}.$
- (b) *Estimativa no tempo:* $\|\psi(t)e^{-it\partial_x^2}\phi(x)\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t))} \leq c\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}.$
- (c) *Espaços de Bourgain:* $\|\psi(t)e^{-it\partial_x^2}\phi(x)\|_{X^{s,b}} \leq c\|\psi(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}.$

Demonstração. A prova de (a) segue facilmente da propriedade de grupos de $e^{-it\partial_x^2}$, a parte (b) foi obtida em [22] e a prova de (c) pode ser encontrada em [18]. $\square$

3.2.2 Operador forçante de fronteira

Nesta seção vamos introduzir o operador forçante de fronteira de Holmer [22]. Para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, defina o operador forçante de fronteira associado à equação de Schrödinger

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s f(x, t) &= 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^t e^{-i(t-t')\partial_x^2} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-\frac{1}{2}} f(t') dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-t')^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{ix^2}{4(t-t')}} \mathcal{I}_{-\frac{1}{2}} f(t') dt' .\end{aligned}$$

A equivalência destas definições segue da fórmula

$$\mathcal{F}_x \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} a}}{2|a|^{1/2}\sqrt{\pi}} e^{\frac{ix^2}{4a}} \right) (\xi) = e^{-ia\xi^2}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Desta definição segue que

$$(3.13) \quad \begin{cases} (i\partial_t - \partial_x^2) \mathcal{L}_s f(x, t) = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \delta_0(x) \mathcal{I}_{-\frac{1}{2}} f(t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ \mathcal{L}_s f(x, 0) = 0 \\ \mathcal{L}_s f(0, t) = f(t), & t \in (0, T). \end{cases}$$

O Lema abaixo descreve algumas propriedades de $\mathcal{L}_s f(x, t)$.

Lema 3.2. *Se $f \in C_{c,0}^\infty(\mathbb{R}^+)$, então*

- (a) *Para fixado t , $\mathcal{L}_s f(x, t)$ é contínua em x para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $\partial_x \mathcal{L}_s f(x, t)$ é contínua em x para $x \neq 0$ e em $x = 0$ tem uma descontinuidade tipo salto satisfazendo*

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \partial_x \mathcal{L}_s f(x, t) = -e^{i\frac{\pi}{4}} \mathcal{I}_{-1/2} f(t), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \partial_x \mathcal{L}_s f(x, t) = e^{i\frac{\pi}{4}} \mathcal{I}_{-1/2} f(t).$$

(b) Para N, k inteiros não negativos e fixado x , $\partial_t^k \mathcal{L}_s f(x, t)$ é contínua em t para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Além disso temos as seguintes estimativas pontuais, para $k = 0, 1, 2, \dots$, on $[0, T]$,

$$(3.14) \quad |\partial_t^k \mathcal{L}_s f(x, t)| + |\partial_x \mathcal{L}_s f(x, t)| \leq c \langle x \rangle^{-N},$$

onde $c = c(f, N, k, T)$.

Demonstração. Consulte o Lema 6.1 in [22]. □

Defina $u(x, t) = e^{-it\partial_x^2} \phi(x) + \mathcal{L}_s(f - e^{-it\partial_x^2} \phi|_{x=0})$, então pelo Lema 3.2 (a) $u(x, t)$ é contínua em x , logo $u(0, t) = f(t)$ e $u(x, t)$ resolve, no sentido das distribuições, o problema

$$(3.15) \quad \begin{cases} (i\partial_t - \partial_x^2)u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = f(t), & t \in (0, T). \end{cases}$$

Isto é suficiente para resolver o problema análogo em $\mathbb{R}^+$.

3.2.3 Uma família analítica de operadores forçantes de Duhamel

Na seção 3.4 obteremos estimativas bilineares associadas ao termo não linear $N_1(u, \bar{u}) = uu$ e $N_3(u, \bar{u}) = \bar{u}u$ em espaços de Bourgain $X^{s,b}$ para $-\frac{3}{4} < s \leq 0$, entretanto no Lema 3.4 encontramos uma séria restrição nos valores de s nas estimativas referentes ao operador $\mathcal{L}_s$ nos espaços de $X^{s,b}$. Para tratarmos desta limitação nesta seção, inspirado no trabalho [23], vamos introduzir uma família analítica de operadores $\mathcal{L}_s^\lambda$, para certos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{L}_s^0 = \mathcal{L}_s$ e

$$(3.16) \quad \begin{cases} (i\partial_t - \partial_x^2)\mathcal{L}_s^\lambda f(x, t) = 2e^{i\frac{\pi}{4}\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}} \mathcal{I}_{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}} f(t), & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{L}_s^\lambda f(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_s^\lambda f(0, t) = e^{\frac{3\lambda\pi}{4}} f(t). & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Devido ao fato do suporte da distribuição $x_-^{\lambda-1}$ estar contido em $\mathbb{R}^-$, pode-se concluir que $(i\partial_t - \partial_x^2)\mathcal{L}_s^\lambda f(x, t) = 0$ para $x > 0$, no sentido das distribuições. Para qualquer $-\frac{3}{4} < s \leq 0$, estaremos aptos a resolver o PVIF (2.2) substituindo $\mathcal{L}_s$ por $\mathcal{L}_s^\lambda$ para adequados valores de $\lambda = \lambda(s)$.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re} \lambda > -2$, e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, definimos

$$(3.17) \quad \mathcal{L}_s^\lambda f(x, t) = \left[\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(\cdot, t) \right](x),$$

que satisfaz

$$(3.18) \quad (i\partial_t - \partial_x^2) \mathcal{L}_s^\lambda f(x, t) = \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma(\lambda)} x_-^{\lambda-1} \mathcal{I}_{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}} f(x, t),$$

no sentido das distribuições.

Se $\operatorname{Re} \lambda > 0$, então

$$(3.19) \quad \mathcal{L}_s^\lambda f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_x^{+\infty} (y-x)^{\lambda-1} \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy.$$

Se $\operatorname{Re} \lambda > -2$, usando (3.15) obtemos

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}^\lambda f(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+2)} \int_x^{+\infty} (y-x)^{\lambda+1} \partial_y^2 \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+2)} \int_x^{+\infty} (y-x)^{\lambda+1} (i\partial_t \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy + 2e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{x_-^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+2)} \mathcal{I}_{-1/2-\lambda/2} f(y, t). \end{aligned}$$

Pela definição de $\mathcal{L}_s^\lambda$ temos $\mathcal{L}_s^0 f(x, t) = \mathcal{L}_s f(x, t)$, $\mathcal{L}_s^{-1} f(x, t) = \partial_x \mathcal{L}_s f(x, t)$. Usando o Lema 3.2 vemos que $\mathcal{L}_s^\lambda f(x, t)$ é bem definida se $\operatorname{Re} \lambda > -2$ para $t \in [0, 1]$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. Pelo Teorema da convergência dominada e Lema 3.2 obtemos que $\mathcal{L}_s^\lambda f(x, t)$ é contínua em x se $\operatorname{Re} \lambda > -1$ para fixado $t \in [0, 1]$.

Agora calculamos o valor de $\mathcal{L}_s^\lambda f(x, t)$ em $x = 0$.

Lema 3.3. (Valores de $\mathcal{L}_s^\lambda f(x, t)$ em $x = 0$). Se $\operatorname{Re} \lambda > -1$, então

$$(3.21) \quad \mathcal{L}_s^\lambda f(0, t) = e^{i\frac{3\lambda\pi}{4}} f(t).$$

Demonstração. De (3.20) temos

$$(3.22) \quad \mathcal{L}_s^\lambda f(0, t) = \int_0^{+\infty} \frac{(y)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+2)} \partial_y^2 \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy.$$

Por diferenciação complexa sob o sinal de integral (3.22) tem-se que $\mathcal{L}_s^\lambda f(0, t)$ é analítica em λ se $\operatorname{Re} \lambda > -1$. Usando um argumento de continuação analítica, precisamos somente calcular (3.21) para $0 < \lambda < 2$.

Para este cálculo em $0 < \lambda < 2$ usamos a representação (3.19), para obtermos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s^\lambda f(0, t) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} (y)^{\lambda-1} \mathcal{L}_s(\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}} f)(y, t) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} (y)^{\lambda-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-t')^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-iy^2}{4(t-t')}} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt' dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-t')^{-\frac{1}{2}} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') \int_0^{+\infty} (y)^{\lambda-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-iy^2}{4(t-t')}} dy dt'.\end{aligned}$$

Seja $I = \int_0^{+\infty} (y)^{\lambda-1} e^{\frac{-iy^2}{4(t-t')}} dy$.

Fazendo a mudança de variável $r = \frac{y^2}{4(t-t')}$, então $y = r^{\frac{1}{2}} 2(t-t')^{\frac{1}{2}}$ e $dy = r^{-\frac{1}{2}} (t-t')^{\frac{1}{2}}$, implica

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{+\infty} [r^{\frac{1}{2}} 2(t-t')^{\frac{1}{2}}]^{\lambda-1} r^{-\frac{1}{2}} e^{-ir} (t-t')^{\frac{1}{2}} dr \\ &= 2^{\lambda-1} (t-t')^{\frac{\lambda}{2}} \int_0^{+\infty} r^{\frac{\lambda}{2}-1} e^{-ir} dr\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de contorno,

$$(3.23) \quad I = 2^{\lambda-1} (t-t')^{\frac{\lambda}{2}} i^{\frac{3\lambda}{2}} \int_0^{+\infty} r^{\frac{\lambda}{2}-1} e^{-r} dr = 2^{\lambda-1} (t-t')^{\frac{\lambda}{2}} i^{\frac{3\lambda}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

se $\lambda \in (1, 2)$.

Usando a fórmula

$$(3.24) \quad \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\lambda)} = \frac{2^{1-\lambda} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2})},$$

para $\lambda \in \mathbb{R}^+$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s^\lambda f(0, t) &= \frac{2^{\lambda-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\lambda)} i^{\frac{3\lambda}{2}} \int_0^t (t-t')^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt' \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2})} i^{\frac{3\lambda}{2}} \int_0^t (t-t')^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt' \\ &= i^{\frac{3\lambda}{2}} \mathcal{I}_{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t) = i^{\frac{3\lambda}{2}} f(t) = e^{i\frac{3\lambda\pi}{4}} f(t).\end{aligned}$$

□

Agora vamos obter as estimativas para a classe de operadores forçantes $\mathcal{L}_s^\lambda$.

Lema 3.4. *Seja $s \in \mathbb{R}$, temos as seguintes estimativas*

(a) *Estimativa no espaço: Se $s - \frac{3}{2} < \lambda < s + \frac{1}{2}$ e $\text{supp } f \subset [0, 1]$, então*

$$\|\mathcal{L}_s^\lambda f(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x))} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.$$

(b) *Estimativa no Tempo: Se $-1 < \lambda < 1$, então*

$$\|\psi(t)\mathcal{L}_s^\lambda f(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+))} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.$$

(c) *Estimativa nos espaços de Bourgain: Se $b < \frac{1}{2}$, $s - \frac{1}{2} < \lambda < s + \frac{1}{2}$ e $\lambda < \frac{1}{2}$, então*

$$\|\psi(t)\mathcal{L}_s^\lambda f(x, t)\|_{X^{s,b}} \leq \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.$$

Observação 3.2. *Como no estudo feito em [23] do PVIF para a equação de KdV em $\mathbb{R}^+$, a hipótese $b < \frac{1}{2}$ é crucial na prova do Lema 3.4 (c). Isto nos força a trabalhar com os espaços de Bourgain com $b < \frac{1}{2}$.*

Demonstração. Usando um argumento de densidade podemos assumir que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. Como $\left(\frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right)^\wedge(\xi) = c(\xi - i0)^{-\lambda}$, então $\mathcal{F}_x(\mathcal{L}_s^\lambda f)(\xi, t) = c(\xi - i0)^{-\lambda} \int_0^t e^{i(t-t')\xi^2} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt'$. Fazendo a mudança de variável $\eta = \xi^2$, para t fixado, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_s^\lambda f(x, t)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &\leq c \int_\eta |\eta|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s \left| \int_0^t e^{i(t-t')\eta} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f(t') dt' \right|^2 d\eta \\ &= \int_\eta |\eta|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s \left| (\chi_{(-\infty, t)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)^\wedge(\eta) \right|^2 d\eta. \end{aligned}$$

Usando a hipótese $-1 < s - \lambda - \frac{1}{2} < 1$, o Lema 1.4 implica

$$\int_\eta |\eta|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s \left| (\chi_{(-\infty, t)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)^\wedge(\eta) \right|^2 d\eta \leq c \int_\eta \langle \eta \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}} \left| (\chi_{(-\infty, t)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)^\wedge(\eta) \right|^2 d\eta.$$

Pelos Lemas 1.5 (para removermos $\chi_{(-\infty, t)}$) e 1.10 (para estimar $\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}$) obtemos

$$\int_\eta \langle \eta \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}} \left| (\chi_{(-\infty, t)} \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)^\wedge(\eta) \right|^2 d\eta \leq \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}^2,$$

isto prova (a). Agora vamos provar (b). Via Lema 1.3 podemos ignorar a função teste.

A mudança de variável $t \rightarrow t - t'$ prova que

$$\begin{aligned} & (I - \partial_t^2)^{\frac{2s+1}{4}} \left(\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \int_{-\infty}^t e^{-i(t-t')\partial_x^2} \delta(x) h(t') dt' \right) \\ &= \left(\frac{x_-^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \int_{-\infty}^t e^{-i(t-t')\partial_x^2} \delta(x) (I - \partial_{t'}^2)^{\frac{2s+1}{4}} h(t') dt' \right), \end{aligned}$$

então é suficiente provarmos

$$(3.25) \quad \left\| \int_{\xi} e^{ix\xi} (\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^t e^{i(t-t')\xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(t') dt' d\xi \right\|_{L_t^2(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{L_t^2(\mathbb{R})}.$$

Usando $\chi_{(-\infty, t)} = \frac{1}{2} \text{sgn}(t - t') + \frac{1}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\xi} e^{ix\xi} (\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^t e^{i(t-t')\xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(t') dt' d\xi \\ &= \int_{\xi} e^{ix\xi} (\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(-\infty, t)} e^{i(t-t')\xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(t') dt' d\xi \\ &= \int_{\xi} e^{ix\xi} (\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{sgn}(t - t') e^{i(t-t')\xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(t') dt' d\xi \\ &+ \int_{\xi} e^{ix\xi} (\xi - i0)^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{i(t-t')\xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(t') dt' d\xi \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Vamos estimar I e II separadamente. A substituição $\eta = \xi^2$ implica em

$$\begin{aligned} II &= \int_{\xi} e^{ix\xi} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(\xi^2) (\xi - i0)^{-\lambda} e^{it\xi^2} d\xi \\ &= \int_{\xi} e^{ix\xi} (\xi^2 - i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} \hat{f}(\xi^2) (\xi - i0)^{-\lambda} e^{it\xi^2} d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{ix\eta^{\frac{1}{2}}} (\eta - i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} \hat{f}(\eta) (\eta^{\frac{1}{2}} - i0)^{-\lambda} e^{it\eta} \eta^{-\frac{1}{2}} d\eta \\ &\quad + \int_0^{+\infty} e^{-ix\eta^{\frac{1}{2}}} (\eta - i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} \hat{f}(\eta) (-\eta^{\frac{1}{2}} - i0)^{-\lambda} e^{it\eta} \eta^{-\frac{1}{2}} d\eta \\ &= c_1 \int_0^{+\infty} e^{ix\eta^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(\eta) e^{it\eta} d\eta + c_2 e^{-ix\eta^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(\eta) e^{it\eta} d\eta \\ &= c_1 \mathcal{F}^{-1}(\chi_{(0, +\infty)} e^{i(\cdot)^{1/2}} \hat{f}(\cdot))(t) + c_2 \mathcal{F}^{-1}(\chi_{(0, +\infty)} e^{-i(\cdot)^{1/2}} \hat{f}(\cdot))(t). \end{aligned}$$

Logo a estimativa de II segue do Teorema de Plancherel.

Agora vamos estimar I . Notemos que

$$I = \left(\frac{1}{2} e^{i\xi^2} \operatorname{sgn}(\cdot) * \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f \right) (t).$$

Usando $\mathcal{F}_t \left(\frac{1}{2} e^{i\xi^2} \operatorname{sgn}(\cdot) * \mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f \right) (\tau) = \text{v.p.} \frac{(\tau-i0)^{\frac{1+\lambda}{2}} \hat{f}(\tau)}{\tau-\xi^2}$, podemos escrever

$$I = \int_{\tau} e^{it\tau} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\tau-\xi^2| > \epsilon} \frac{e^{ix\xi} (\tau-i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} (\xi-i0)^{-\lambda} d\xi}{(\tau-\xi^2)} \hat{f}(\tau) d\tau.$$

Logo precisamos mostrar que a função

$$g(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\tau-\xi^2| > \epsilon} \frac{e^{ix\xi} (\tau-i0)^{\frac{\lambda+1}{2}} (\xi-i0)^{-\lambda} d\xi}{(\tau-\xi^2)}$$

é limitada. Pois neste caso teríamos $\int_{\tau} e^{it\tau} g(\tau) \hat{f}(\tau) = (g\hat{f})^\vee(t)$ e $\|g\hat{f}\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2}$.

Fazendo a mudança de variáveis $\xi \rightarrow |\tau|^{\frac{1}{2}} \xi$ e usando

$$(\xi|\tau|^{\frac{1}{2}} - i0)^{-\lambda} = |\tau|^{-\frac{\lambda}{2}} (c_1 \xi_+^{-\lambda} + c_2 \xi_-^{-\lambda}).$$

obtemos

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \int \frac{e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}} x \xi} |\tau|^{\frac{1-\lambda}{2}} d\xi (c_1 \tau_+^{\frac{\lambda+1}{2}} + c_2 \tau_-^{\frac{\lambda+1}{2}}) (\xi-i0)^{-\lambda}}{\tau - |\tau| \xi^2} \\ &= c_1 \chi_{\{\tau > 0\}} \int_{\xi} e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}} x \xi} \frac{c_1 \xi_+^{-\lambda} + c_2 \xi_-^{-\lambda}}{1 - \xi^2} d\xi + c_2 \chi_{\{\tau < 0\}} \int_{\xi} e^{i\tau^{\frac{1}{2}} x \xi} \frac{c_1 \xi_+^{-\lambda} + c_2 \xi_-^{-\lambda}}{1 + \xi^2} d\xi \\ &:= g_1 + g_2. \end{aligned}$$

A segunda integral é uniformemente limitada em τ se $\lambda < 1$, isto é obtido separadamente considerando os casos $|\xi| < 1$ e $|\xi| \geq 1$. Para estimarmos g_1 tome $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\theta(\xi) = 1$ em $[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ e $\theta(t) = 0$ no complementar de $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Temos

$$\begin{aligned} g_1 &= c_1 \chi_{\{\tau > 0\}} \int_{\xi} e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}} x \xi} \frac{c_1 \xi_+^{-\lambda} \theta(\xi)}{1 - \xi^2} d\xi \\ &\quad + c_1 \chi_{\{\tau > 0\}} \int_{\xi} e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}} x \xi} \frac{1 - \theta(\xi) (c_1 \xi_+^{-\lambda} + c_2 \xi_-^{-\lambda})}{1 - \xi^2} d\xi \\ &= g_{11} + g_{12}. \end{aligned}$$

A segunda integral é limitada se $\lambda > -1$. Para estimarmos g_{11} , escrevemos

$$\begin{aligned} g_{11} &= c_1 \chi_{\{\tau > 0\}} \int_{\xi} e^{i|\tau|^{\frac{1}{2}}x\xi} \frac{c_1 \xi_+^{-\lambda} \theta(\xi)}{(1-\xi)(1+\xi)} d\xi \\ &= c_1 \chi_{\{\tau > 0\}} \mathcal{F}_{\xi}^{-1} \left(\frac{c_1 \xi_+^{-\lambda} \theta(\xi)}{(1-\xi)(1+\xi)} \right) (x|\tau|^{\frac{1}{2}}) \\ &= \left[(\text{sgn}(1-\xi) * \mathcal{F}_{\xi}^{-1} \left(\frac{c_1 \xi_+^{-\lambda} \theta(\xi)}{(1+\xi)} \right)) \right] (x|\tau|^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Esta aparece como a convolução de uma função em $S(\mathbb{R})$ com a função $\text{sgn}(x)$, completando assim a prova de (b).

Para obtermos (c) inicialmente escrevemos

$$(\mathcal{L}_s^\lambda f)(\xi, \tau) = c(\xi - i0)^{-\lambda} \int \frac{e^{it\tau} - e^{it\xi^2}}{\tau - \xi^2} (\tau - i0)^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau.$$

Agora seja $\theta(\tau) \in C^\infty$ tal que $\theta(\tau) = 1$ para $|\tau| \leq 1$ e $\theta(\tau) = 0$ para $|\tau| \geq 2$.

Defina u_1, u_2, u_3 por

$$\hat{u}_1(\xi, t) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int \frac{e^{it\tau} - e^{it\xi^2}}{\tau - \xi^2} \theta(\tau - \xi^2) (\tau - i0)^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau,$$

$$\hat{u}_2(\xi, t) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int \frac{e^{it\tau}}{\tau - \xi^2} (1 - \theta(\tau - \xi^2)) (\tau - i0)^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau,$$

$$\hat{u}_3(\xi, t) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int \frac{e^{it\xi^2}}{\tau - \xi^2} (1 - \theta(\tau - \xi^2)) (\tau - i0)^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau,$$

tal que $\mathcal{L}_s^\lambda f = u_1 + u_2 + u_3$.

Estimemos primeiramente u_2 :

$$\begin{aligned} \|u_2\|_{X^{s,b}}^2 &= c \int \int |\hat{u}_2|^2 \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} d\tau d\xi \\ &\leq c \int \int \langle \xi \rangle^{2s} \frac{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}}{|\tau - \xi^2|^2} (1 - \theta(\tau - \xi^2))^2 |\xi|^{-2\lambda} |\tau|^{\lambda+1} |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau d\xi \\ &= c \int |\tau|^{\lambda+1} \left(\int \frac{|\xi|^{-2\lambda} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2-2b}} \right) |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Portanto precisamos mostrar que

$$(3.26) \quad I(\tau) := \int \frac{|\xi|^{-2\lambda} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2-2b}} \leq c \int \frac{|\eta|^{-\frac{1}{2}-\lambda} \langle \eta \rangle^s d\eta}{\langle \tau - \eta \rangle^{2-2b}} \leq c \langle \tau \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}}.$$

Isto é obtido separando em alguns casos. Se $|\tau| \leq \frac{1}{2}$, então $\langle \tau - \eta \rangle \sim \langle \eta \rangle$. Substituindo em $I(\tau)$, obtemos

$$I(\tau) \leq c \int \frac{|\eta|^{-\frac{1}{2}-\lambda} \langle \eta \rangle^s d\eta}{\langle \tau - \eta \rangle^{2-2b}} \leq c \int_{|\eta| \leq 1} |\eta|^{-\frac{1}{2}-\lambda} + c \int \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{2-2b-s+\frac{1}{2}+\lambda}} \leq c,$$

se $\lambda < \frac{1}{2}$ e $\lambda > -\frac{3}{2} + 2b + s$. Agora suponha $|\tau| > \frac{1}{2}$ e $|\eta| \geq \frac{|\tau|}{2}$. Neste caso temos $\lambda \geq s - \frac{1}{2}$ e $b < \frac{1}{2}$, então

$$I(\tau) \leq c \int \frac{\langle \eta \rangle^{s-\frac{1}{2}-\lambda}}{\langle \tau - \eta \rangle^{2-2b}} \leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}-\lambda} \int \frac{d\eta}{\langle \tau - \eta \rangle^{2-2b}} \leq c \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}-\lambda}.$$

No caso $|\tau| \geq \frac{1}{2}$ e $|\eta| \leq \frac{|\tau|}{2}$ temos $\langle \tau - \eta \rangle \geq \frac{1}{2} \langle \tau \rangle$, então

$$I(\tau) \leq c \langle \tau \rangle^{2b-2} \int_{|\eta| \leq \frac{|\tau|}{2}} \langle \eta \rangle^s |\eta|^{-\frac{1}{2}-\lambda} \leq \langle \tau \rangle^{2b-2} \langle \tau \rangle^{s+\frac{1}{2}-\lambda} \leq \langle \tau \rangle^{s-\frac{1}{2}-\lambda}.$$

Completando assim a estimativa de u_2 . Para estimarmos u_3 , escrevemos

$$u_3(x, t) = \theta(t) e^{it\partial_x^2} \phi(x),$$

onde

$$\hat{\phi}(\xi) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int \frac{1 - \psi(\tau - \xi^2)}{\tau - \xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(\tau) d\tau.$$

Então pelo Lema 3.1 precisamos provar que

$$(3.27) \quad \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.$$

Argumentando como na prova do Lema 2.10, existe uma função $\beta \in S(\mathbb{R})$ tal que

$$\frac{1 - \psi(\tau - \xi^2)}{\tau - \xi^2} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(\tau) d\tau = \int_{\tau} (\mathcal{I}_{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} f)(\tau) \beta(\tau - \xi^2) d\tau.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e $|\beta(\tau - \xi^2)| \leq \langle \tau - \xi^2 \rangle^{-N}$, para $N >> 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{H^s}^2 &\leq \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} |\xi|^{-2\lambda} \left(\int_{\tau} \beta(\tau - \xi^2) |\tau|^{\frac{\lambda+1}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau \right)^2 d\xi \\ &\leq \int_{\tau} \left(\int_{\xi} |\xi|^{-2\lambda} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{-2N+2} d\xi \right) |\tau|^{\lambda+1} |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau \\ &\leq \int_{\tau} \left(\int_{\eta} |\eta|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s \langle \tau - \eta \rangle^{-2N+2} d\eta \right) |\tau|^{\lambda+1} |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Por (3.26), temos

$$\int_{\eta} |\eta|^{-\lambda-\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^s \langle \tau - \eta \rangle^{-2N+2} d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}}.$$

Usando a expansão em série de potências para $e^{it(\tau-\xi^2)}$ escrevemos

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{k!} e^{-t\partial_x^2} \phi_k(x),$$

onde $\psi_k(t) = i^k t^k \psi(t)$ e $\hat{\phi}_k(\xi) = (\xi - i0)^{-\lambda} \int_{\tau} (\tau - \xi^2)^{k-1} \theta(\tau - \xi^2) (\tau - i0)^{\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}} \hat{f}(\tau) d\tau$.

Por (3.1) é suficiente mostrarmos que $\|\phi_k\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|\phi_k\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &\leq \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} |\xi|^{-2\lambda} \left(\int_{|\tau-\xi^2| \leq 1} |\tau|^{\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}} |\hat{f}(\tau)| d\tau \right)^2 d\xi \\ (3.28) \quad &\leq c \int_{\xi} \langle \xi \rangle^{2s} |\xi|^{-2\lambda} \int_{|\tau-\xi^2| \leq 1} |\tau|^{\lambda+1} |\hat{f}(\tau)|^2 d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\eta = \xi^2$, obtemos

$$(3.29) \quad \int_{|\tau-\xi^2| \leq 1} \langle \xi \rangle^{2s} |\xi|^{-2\lambda} d\xi = \int_{|\tau-\eta| \leq 1} |\eta|^{-\frac{1}{2}-\lambda} \langle \eta \rangle^s d\eta \leq c \langle \tau \rangle^{s-\lambda-\frac{1}{2}}.$$

Combinando (3.28) e (3.29), obtemos $\|\phi_k\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}$. □

3.3 Versão não linear

Definimos o operador solução não homogênea de Duhamel $\mathcal{D}$ por

$$(3.30) \quad \mathcal{D}w(x, t) = -i \int_0^t e^{-i(t-t')\partial_x^2} w(x, t') dt',$$

que satisfaz

$$(3.31) \quad \begin{cases} (i\partial_t - \partial_x^2) \mathcal{D}w(x, t) = w(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \mathcal{D}w(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A seguir obtemos as estimativas necessária referentes ao operador $\mathcal{D}$.

Lema 3.5. *Se $s \in \mathbb{R}$, então*

(a) (Estimativa no espaço) Se $-\frac{1}{2} < d < 0$, então

$$(3.32) \quad \|\psi(t)\mathcal{D}w(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x))} \leq c\|w\|_{X^{s,d}}.$$

(b) (Estimativa no tempo) Se $-\frac{1}{2} < d < 0$, então

$$(3.33) \quad \|\psi(t)\mathcal{D}_s w(x, t)\|_{C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t))} \leq \begin{cases} c\|w\|_{X^{s,d}}, & \text{se } -\frac{1}{2} \leq s < \frac{1}{2}, \\ c(\|w\|_{W^{s,d}} + \|w\|_{X^{s,d}}), & \text{for all } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(c) (Estimativa em Espaços de Bourgain) Se $-\frac{1}{2} < d \leq 0 \leq b \leq d+1$, então

$$(3.34) \quad \|\psi(t)\mathcal{D}w(x, t)\|_{X^{s,b}} \leq \|w\|_{X^{s,d}}.$$

Observação 3.3. A necessidade de introduzir os espaços de Bourgain modificado $W^{s,b}$ surgiu no Lema 3.5 (b) para obtermos a estimativa em um conjunto maior de s .

Demonstração. A prova é análoga à prova do Lema 2.18. □

3.4 Estimativas bilineares

Lema 3.6. (Estimativas para o termo não linear N_1)

(a) Para $-\frac{3}{4} < s \leq 0$, existe $b = b(s) < \frac{1}{2}$ tal que

$$(3.35) \quad \|uv\|_{X^{s,-b}} \leq c\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{X^{s,b}}.$$

(b) Para $-\frac{3}{4} < s \leq -\frac{1}{2}$, existe $b = b(s) < \frac{1}{2}$ tal que

$$(3.36) \quad \|uv\|_{W^{s,-b}} \leq c\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{X^{s,b}}.$$

Lema 3.7. (Estimativa para o termo não linear N_2) Se $-\frac{1}{4} < s \leq 0$, existe $b = b(s) < \frac{1}{2}$ tal que

$$(3.37) \quad \|u\bar{v}\|_{X^{s,-b}} \leq c\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{X^{s,b}}.$$

Lema 3.8. (Estimativa para o termo não linear N_3)

(a) Para $-\frac{3}{4} < s \leq 0$, existe $b = b(s) < \frac{1}{2}$ tal que

$$(3.38) \quad \|\overline{uv}\|_{X^{s,-b}} \leq c\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{X^{s,b}}.$$

(b) Para $-\frac{3}{4} < s \leq -\frac{1}{2}$, existe $b = b(s) < \frac{1}{2}$ tal que

$$(3.39) \quad \|uv\|_{W^{s,-b}} \leq c\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{X^{s,b}}.$$

Provaremos estes Lemas seguindo as ideias contidas em [31], onde precisaremos adaptar os nossos cálculos uma vez que estamos trabalhando com $b < \frac{1}{2}$.

3.4.1 Prova do Lema 3.6

Defina $\rho = -s \in [0, \frac{3}{4})$ e para $u, v \in X^{s,b} = X^{-\rho,b}$ seja

$$f(\xi, \tau) = \langle \tau - \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^{-\rho} \hat{u}(\xi, \tau), \quad g(\xi, \tau) = \langle \tau - \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^{-\rho} \hat{v}(\xi, \tau).$$

Então $\|f\|_{L^2} = \|u\|_{X^{s,b}}$ e $\|g\|_{L^2} = \|v\|_{X^{s,b}}$.

Escrevemos o lado esquerdo de (3.35) em termos de f e g :

$$\begin{aligned} \|uv\|_{X^{s,-b}} &= \left\| \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \widehat{(uv)}(\xi, \tau) \right\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \\ &= \left\| \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} (\hat{u} * \hat{v})(\xi, \tau) \right\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \\ &= \left\| \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \int \int \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^b} \frac{g(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^s \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \\ &= \sup_{\|\phi\|_{L^2} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^b} \frac{g(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \phi(\xi, \tau)}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^s \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \\ &:= \sup_{\|\phi\|_{L^2} \leq 1} W(f, g, \phi), \end{aligned}$$

onde

$$W(f, g, \phi) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^b} \frac{g(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^s \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b} \phi(\xi, \tau) d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau.$$

Inicialmente tratamos o caso $\rho = 0$. Integrando primeiro sobre ξ_1 e τ_1 , e então usamos as

desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Hölder para obter

$$\begin{aligned}
(3.40) \quad W^2 &\leq \|\phi\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \times \left\| \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \int \int \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^b} \frac{g(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)}{\langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_\tau^2 L_\xi^2}^2 \\
&\leq \|\phi\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2 \|g\|_{L^2}^2 \\
&\times \left\| \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi, \tau}^\infty}.
\end{aligned}$$

Usando os Lemas 1.15 e 1.13 obtemos

$$\frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \leq c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \xi^2 + 2\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{4b-1}} \leq c,$$

se $\frac{3}{8} < b < \frac{1}{2}$, isto prova o caso $\rho = 0$.

Para provarmos o caso $\rho \in (1/2, 3/4)$ escrevemos

$$\begin{aligned}
W(f, g, \phi) &= \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^b} \frac{g(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^s \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b} \phi(\xi, \tau) d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \\
&= \int_{\mathcal{R}_1} + \int_{\mathcal{R}_2} + \int_{\mathcal{R}_3} + \int_{\mathcal{R}_4} \\
&:= W_1 + W_2 + W_3 + W_4,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi_1| \leq 1\}, \\
\mathcal{R}_2 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi_1| \geq 1, \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau - \xi_1^2|, |\tau_2 - \xi_2|\} = |\tau - \xi^2|\}, \\
\mathcal{R}_3 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi_1| \geq 1, \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau - \xi_1^2|, |\tau_2 - \xi_2|\} = |\tau_1 - \xi^2|\}, \\
\mathcal{R}_4 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi_1| \geq 1, \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau - \xi_1^2|, |\tau_2 - \xi_2|\} = |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2|\}.
\end{aligned}$$

A estimativa de W_1 é obtida como no caso $\rho = 0$, pois suas frequências se cancelam.

Para estimarmos W_2 integramos primeiramente em ξ_1 e τ_1 , e então usamos as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder para obtermos

$$\begin{aligned}
(3.41) \quad W_2^2 &\leq \|\phi\|_{L^2}^2 \\
&\times \left\| \frac{\langle \xi \rangle^s \chi_{\{|\xi| \leq 1\}}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \int \int \frac{f(\xi_1, \tau_1) \chi_{\{|\xi_1| \leq 1\}}}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^b} \frac{g(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \chi_{\{|\xi - \xi_1| \leq 2\}}}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^s \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_\tau^2 L_\xi^2}^2 \\
&\leq \|\phi\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2 \|g\|_{L^2}^2 \\
&\times \left\| \frac{|\xi|^{2s}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{\{A(\xi, \tau)\}} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi, \tau}^\infty},
\end{aligned}$$

onde $A(\xi, \tau) = \{(\xi_1, \tau_1) \in \mathbb{R}^2; \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 - \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau - \xi^2|\}$. Para estimarmos W_3 integramos primeiro sobre ξ e τ , e então usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Hölder para obtermos

$$(3.42) \quad W_3^2 \leq \|\phi\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2 \|g\|_{L^2}^2 \times \left\| \frac{|\xi_1|^{2s}}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{\{B(\xi_1, \tau_2)\}} d\tau d\xi}{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi_1, \tau_1}^\infty},$$

onde $B(\xi_1, \tau_1) = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2; \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 - \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau_1 - \xi_1^2|\}$. Por simetria a estimativa de W_4 é similar a de W_3 .

Por (3.41) e (3.42) é suficiente provarmos que

$$(3.43) \quad \left\| \frac{|\xi|^{2s}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{\{A(\xi, \tau)\}} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi, \tau}^\infty} \leq c,$$

$$(3.44) \quad \left\| \frac{|\xi_1|^{2s}}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{\{B(\xi_1, \tau_2)\}} d\tau d\xi}{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi - \xi_1 \rangle^{2s} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi_1, \tau_1}^\infty} \leq c.$$

Para obtermos (3.43) e (3.44) vamos utilizar a seguinte relação algébrica

$$(3.45) \quad \tau - \xi^2 - (\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2) - (\tau_1 - \xi_1^2) = -2\xi_1(\xi - \xi_1).$$

Portanto em $A(\xi, \tau)$ temos

$$(3.46) \quad |\xi_1(\xi - \xi_1)| \leq \frac{3}{2}|\tau - \xi^2|$$

e

$$(3.47) \quad |\tau - \xi^2 + 2\xi(\xi - \xi_1)| \leq |\tau_1 - \xi_1^2| + |(\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2)| \leq 2|\tau - \xi^2|.$$

Podemos assumir que $|\xi - \xi_1| \geq 1$, pois caso contrário, a cota estaria reduzida ao caso $\rho = 0$.

Portanto temos $\langle \xi_1 \rangle^\rho \langle \xi - \xi_1 \rangle^\rho \leq c|\xi_1|^\rho |\xi - \xi_1|^\rho$. Usando o Lema 1.15 e (3.46) obtemos

$$(3.48) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \int \int_A \frac{(|\xi_1| |\xi_2|)^{2\rho} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq c \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \int \frac{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2\rho} d\xi_1}{\langle \tau - \xi^2 + 2\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{4b-1}}, \end{aligned}$$

se $\frac{1}{4} < b < \frac{1}{2}$.

Seja $\eta = \tau - \xi^2 + 2\xi_1(\xi - \xi_1)$, então $\xi_1 = \frac{1}{2}(\xi \pm (2\tau - \xi^2 - 2\eta)^{\frac{1}{2}})$, $|2\xi_1 - \xi| = |2\tau - \xi^2 - 2\eta|^{\frac{1}{2}}$ e $d\xi_1 = \frac{cd\eta}{|\tau - \eta - \frac{\xi^2}{2}|^{\frac{1}{2}}}$. Substituindo no lado direito de (3.48) e usando o Lema 1.19, estimamos o lado direito de (3.48) por

$$\begin{aligned} & \frac{c}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int_{|\eta| \leq 2|\tau - \xi^2|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1} |\tau - \eta - \frac{\xi^2}{2}|^{\frac{1}{2}}} \\ & \leq c \frac{\langle \sigma \rangle^{2-4b}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-2\rho} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{\frac{1}{2}}} \leq c \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2-6b+2\rho-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Esta expressão é limitada se $b \geq \frac{1}{4} + \frac{\rho}{3}$. Como $\rho < \frac{3}{4}$, podemos escolher $b < \frac{1}{2}$.

Agora vamos obter (3.44) no caso $\rho \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Usando a relação algébrica (3.45) temos que em $B(\xi_1, \tau_1)$ vale

$$|\xi_1(\xi - \xi_1)| \leq \frac{3}{2}|\tau_1 - \xi_1^2|$$

e

$$|\tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi - \xi_1)| \leq |\tau - \xi^2| + |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2| \leq 2|\tau_1 - \xi_1^2|.$$

Pelo Lema 1.15 temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_B \frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi d\tau}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq c \frac{1}{\langle \tau - \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int_D \frac{d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi) \rangle^{4b-1}}, \end{aligned}$$

onde

$$D = D(\xi_1, \tau_1) = \{\xi \in \mathbb{R}; |\tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi)| \leq 2|\tau_1 - \xi_1^2|\},$$

e $\frac{1}{4} < b < \frac{1}{2}$.

Agora dividimos D em duas partes, a saber, D_1 e D_2 , onde

$$D_1 = \{\xi \in D; |2\xi_1(\xi_1 - \xi)| \leq \frac{|\tau_1 - \xi_1^2|}{2}\},$$

$$D_2 = \{\xi \in D; \frac{3|\tau_1 - \xi_1^2|}{2} \geq |\xi_1(\xi_1 - \xi)| > \frac{|\tau_1 - \xi_1^2|}{4}\}.$$

Em D_1 temos $|\tau_1 - \xi_1^2| \leq 2|\tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi)|$, então

$$(3.49) \quad \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int_{D_1} \frac{d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi) \rangle^{4b-1}} \leq \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho+4b-1}} \int \frac{d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho}}.$$

Esta expressão é limitada, se $\rho > \frac{1}{2}$ e $b \geq \frac{1}{6} + \frac{\rho}{3}$. Notemos que como $\rho < \frac{3}{4}$, então podemos escolher $b < \frac{1}{2}$.

Agora dividimos D_2 , em três partes $D_{21} \cup D_{22} \cup D_{23}$, onde

$$D_{21} = \{\xi \in D_2; \frac{|\xi|}{4} \leq |\xi_1| \leq 100|\xi|\},$$

$$D_{22} = \{\xi \in D_2; 1 \leq |\xi_1| \leq \frac{|\xi|}{4}\},$$

$$D_{23} = \{\xi \in D_2; 100|\xi| \leq |\xi_1|\}.$$

Em D_{21} temos $|\xi|^2 \sim |\xi_1|^2 \geq c\langle\sigma_1\rangle$. Fazendo a substituição $\eta = \tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi)$, temos $d\eta = -2\xi_1 d\xi$. Usando o Lema 1.19 obtemos

$$\begin{aligned} & \sup_{|\xi_1|>1} \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{2b-2\rho}} \int_{D_{21}} \frac{d\xi}{\langle\xi\rangle^{2\rho} \langle\tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi)\rangle^{4b-1}} \\ & \leq c \sup_{|\xi_1|>1} \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{2b-\rho}} \int_{|\eta|\leq 2|\tau_1 - \xi_1^2|} \frac{d\eta}{\langle\eta\rangle^{4b-1} |\xi_1|} \leq c \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{2b-\rho}} \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{4b-2}}, \end{aligned}$$

que é limitado se $b \geq \frac{1}{3} + \frac{\rho}{6}$.

Em D_{22} , temos

$$\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle \geq \frac{2}{3}|\xi_1||\xi - \xi_1| \geq \frac{2}{3}|\xi_1|(|\xi| - |\xi_1|) \geq \frac{2}{3}|\xi_1|(4|\xi_1| - \xi_1) = 2|\xi_1|^2.$$

Então pelo Lema 1.19 obtemos

$$\begin{aligned} & \sup_{|\xi_1|>1} \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{2b}} \int_{D_{22}} \frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi}{\langle\xi\rangle^{2\rho} \langle\tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi)\rangle^{4b-1}} \\ & \leq c \sup_{|\xi_1|>1} \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{2b}} \int_{|\eta|\leq |\tau_1 - \xi_1^2|} \frac{|\xi_1|^{2\rho}}{|\xi_1| \langle\eta\rangle^{4b-1}} \\ & \leq \frac{c}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{2b-\rho+\frac{1}{2}}} \int_{|\eta|\leq |\tau_1 - \xi_1^2|} \frac{d\eta}{\langle\eta\rangle^{4b-1}} \leq c \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{6b-\frac{3}{2}-\rho}}, \end{aligned}$$

que é limitado se $b \geq \frac{1}{4} + \frac{\rho}{6}$.

Na região D_{23} usamos $|\xi_1|^2 \sim |\tau_1 - \xi_1^2|$ para obtermos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{2b-2\rho}} \int_{D_{23}} \frac{d\xi}{\langle\xi\rangle^{2\rho} \langle\tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi)\rangle^{4b-1}} \\ & \leq \frac{c}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{2b-2\rho}} \int_{|\eta|\leq 2|\sigma_1|} \frac{d\eta}{|\xi_1| \langle\eta\rangle^{4b-1}} \\ & \leq c \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{2b-2\rho}} \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{4b-2}} = \frac{c}{\langle\tau_1 - \xi_1^2\rangle^{6b-2\rho-\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

que é limitado se $b \geq \frac{\rho}{3} + \frac{1}{4}$. Como $\rho < \frac{3}{4}$, podemos escolher $b = b(\rho)$ tal que $b < \frac{1}{2}$.

A desigualdade (3.44) no caso $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ segue interpolando os casos $\rho = 0$ e $\rho \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Isto finaliza a prova da parte (a) do Lema.

Argumentando como na prova da parte (a) do Lema, para provarmos a parte (b) do Lema

3.6 precisamos obter

$$(3.50) \quad \left\| \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau \rangle^\rho} \int \int_A \frac{(|\xi_1| |\xi_2|)^{2\rho} d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi, \tau}^\infty} \leq c,$$

onde

$$A(\xi, \tau) = \{(\xi_1, \tau_1) \in \mathbb{R}^2; \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 - \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau - \xi^2|\},$$

e

$$(3.51) \quad \left\| \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_B \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi d\tau}{\langle \tau \rangle^\rho \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi_1, \tau_1}^\infty} \leq c,$$

onde

$$B = B(\xi_1, \tau_1) = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2; \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 - \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau_1 - \xi_1^2|\}.$$

A desigualdade (3.50) pode ser obtida no mesmo caminho de (3.43). Para estimarmos (3.51) podemos assumir $10|\tau| < |\xi|^2$, pois caso contrário, a estimativa se reduz a (3.43), que já foi provada. Assim temos $\langle \tau - \xi^2 \rangle \sim \langle \xi^2 \rangle$. Portanto precisamos provar que

$$(3.52) \quad \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^b} \int \int_B \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi d\tau}{\langle \tau \rangle^\rho \langle \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \leq c.$$

Usando a definição de B e a relação algébrica (3.45) temos $|\xi_1| |\xi_2| \leq \langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle$, logo

$$(3.53) \quad \frac{(|\xi_1| |\xi_2|)^{\frac{4}{3}\rho}}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b}} \leq \frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b - \frac{4\rho}{3}}} \leq c,$$

se $\rho < \frac{3}{2}b$. Usando (3.53) e o Lema 1.14 vemos que o lado esquerdo de (3.52) é controlado por

$$\begin{aligned} & c \int \int_B \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{\frac{2}{3}\rho} d\xi d\tau}{\langle \tau \rangle^\rho \langle \xi^2 \rangle^{2b} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} \\ & \leq c \int \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{\frac{2}{3}\rho} d\xi}{\langle \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{\rho + 2b - 1} \langle \xi^2 \rangle^{2b}}. \end{aligned}$$

Para estimarmos a última integral dividimos o domínio de integração em três partes. Defina

$$D_1 = \{\xi \in \mathbb{R}; |\xi_1| > 2|\xi - \xi_1|\},$$

$$D_2 = \{\xi \in \mathbb{R}; |\xi - \xi_1| > 2|\xi_1|\},$$

$$D_3 = \{\xi \in \mathbb{R}; \frac{1}{2}|\xi - \xi_1| \leq |\xi_1| \leq 2|\xi - \xi_1|\}.$$

Em $D_1 \cup D_2$ temos $\frac{(|\xi_1||\xi_2|)^{\frac{2}{3}\rho}}{\langle \xi \rangle^{4b}} \leq \frac{c}{\langle \xi_1 \rangle^{4b - \frac{4}{3}\rho}} \leq c$, se $\rho < 3b$. Portanto o Lema 1.13 implica em

$$\int_{D_1 \cup D_2} \frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^{\frac{2}{3}\rho} d\xi}{\langle \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{\rho+2b-1} \langle \xi^2 \rangle^{2b}} \leq c \int \frac{d\xi}{\langle \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{\rho+2b-1}} \leq c,$$

se $b > \frac{3}{4} - \frac{\rho}{2}$.

Agora decompomos D_3 em duas partes, $D_{31} \cup D_{32}$, onde

$$D_{31} = \{\xi \in D; 10|\xi_1||\xi - \xi_1| \leq |\tau_1 - \xi_1^2|\},$$

$$D_{32} = \{\xi \in D; |\xi_1||\xi - \xi_1| \sim |\tau_1 - \xi_1^2|\}.$$

Em D_{31} temos $|\tau_1 - \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2| \sim |\tau_1 - \xi_1^2|$, então pelo Lema (1.15),

$$\begin{aligned} \beta(\xi_1, \tau_1) &= \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_{B \cap D_{31} \times \mathbb{R}} \frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi d\tau}{\langle \tau \rangle^\rho \langle \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \\ &\leq c \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int \int_{B \cap D_{31} \times \mathbb{R}} \frac{d\xi d\tau}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2b} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} \\ &\leq c \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int_{D_{31}} \frac{d\xi}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 \rangle^{4b-1}} \\ &\leq c \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int_{|\xi| \leq 3|\xi_1|} \frac{d\xi}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{4b-1}} \\ &\leq c \int_{|\xi| \leq 3|\xi_1|} \frac{d\xi}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{6b-1+2\rho}} \leq \frac{|\xi_1|}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{6b-1-2\rho}} \leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{6b-1-2\rho-\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

que é limitado se $\rho \leq 3b - \frac{3}{4}$. Como $\rho < \frac{3}{4}$ podemos escolher $b < \frac{1}{2}$. Em D_{32} temos $|\xi_1|^2 \sim |\tau_1 - \xi_1^2|$, então

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{D_{32}} \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi) \rangle^{4b-1}} \\
& \leq c \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{D_{32}} \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi) \rangle^{4b-1}} \\
& \leq c \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{D_{32}} \frac{|\xi_1|^{4\rho} d\xi}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi) \rangle^{4b-1}} \\
& \leq c \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int_{|\eta| \leq 2|\tau_1 - \xi_1^2|} \frac{d\eta}{|\xi_1| \langle \eta \rangle^{4b-1}} \\
& \leq c \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{4b-2}} d \leq c \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{6b-2\rho-\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

que é limitado se $\rho \leq 3b - \frac{3}{4}$.

3.4.2 Prova do Lema 3.7

Defina $\rho = -s \in [0, \frac{3}{4})$ e para $u, v \in X^{s,b} = X^{-\rho,b}$ seja

$$f(\xi, \tau) = \langle \tau - \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^{-\rho} \hat{u}(\xi, \tau), \quad g(\xi, \tau) = \langle \tau - \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^{-\rho} \hat{v}(\xi, \tau).$$

Então $\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} = \|u\|_{X^{s,b}}, \quad \|g\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} = \|v\|_{X^{s,b}}$. Usando $\hat{v}(\xi, \tau) = \frac{\langle \xi \rangle^\rho}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^b} \bar{g}(-\xi, -\tau)$ temos

$$\begin{aligned}
\|N_2(u, \bar{v})\|_{X^{s,-b}} &= \left\| \frac{\langle \xi \rangle^{-\rho}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \widehat{u\bar{v}} \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\
&= \left\| \frac{c \langle \xi \rangle^{-\rho}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \hat{u} * \hat{\bar{v}} \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\
&= \left\| \frac{c \langle \xi \rangle^{-\rho}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \int \int \frac{f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \langle \xi - \xi_1 \rangle^\rho}{\langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b} \frac{\bar{g}(-\xi_1, -\tau_1) \langle \xi_1 \rangle^\rho}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\
&= \sup_{\|\phi\|_{L^2} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \frac{\bar{g}(-\xi_1, -\tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^b} \frac{f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \phi(\xi, \tau) d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^s \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b} \\
&= \sup_{\|\phi\|_{L^2} \leq 1} W(f, g, \phi),
\end{aligned}$$

onde

$$W(f, g, \phi) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \frac{\bar{g}(-\xi_1, -\tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^b} \frac{f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^s \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b} \phi(\xi, \tau) d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau.$$

Primeiramente vamos obter o caso $\rho = 0$. Integrando primeiro em ξ, τ , fazendo a mudança de variáveis $\tau_2 = \tau - \tau_1, \xi_2 = \xi - \xi_1$ e usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder

obtemos

$$(3.54) \quad W(f, g, \phi) \leq c \|\phi\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \times \left\| \frac{1}{\langle \tau_2 - \xi_2^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{d\xi d\tau}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_2 + (\xi - \xi_2)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi_2, \tau_2}^\infty}.$$

Portanto, precisamos provar que

$$(3.55) \quad \sup_{(\xi_2, \tau_2) \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{\langle \tau_2 - \xi_2^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{d\xi d\tau}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_2 + (\xi - \xi_2)^2 \rangle^{2b}} \leq c.$$

Usando os Lemas 1.15 e 1.13 vemos que o lado esquerdo de (3.55) é controlado por

$$\begin{aligned} & \sup_{(\xi_2, \tau_2) \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{\langle \tau_2 - \xi_2^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{d\tau d\xi}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_2 + (\xi - \xi_2)^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq \int \frac{d\xi}{\langle 2\xi^2 - 2\xi\xi_2 - \tau_2\xi_2^2 \rangle^{4b-1}} \leq c, \end{aligned}$$

se $\frac{3}{8} < b < \frac{1}{2}$.

Agora vamos obter o caso $\rho \in (0, \frac{1}{4})$. Neste caso podemos assumir $|\xi_1| \geq 10$ e $|\xi - \xi_1| \geq 10$, pois caso contrário a estimativa seria equivalente ao caso $\rho = 0$.

Escrevemos

$$\begin{aligned} W(f, g, \phi) &= \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^b} \frac{\bar{g}(-\xi_1, -\tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^b} \frac{f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^s \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^b} \phi(\xi, \tau) d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau. \\ &:= \int_{\mathcal{R}_1} + \int_{\mathcal{R}_2} + \int_{\mathcal{R}_3} + \int_{\mathcal{R}_4} + \int_{\mathcal{R}_5} \\ &:= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5, \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{R}_1 = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi_1| \geq 10, |\xi| \leq 1\},$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi_1| \geq 10, |\xi| \geq 1; \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau_1 + \xi_1^2|\},$$

$$\mathcal{R}_3 = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi_1| \geq 10, 1 < |\xi| < |\xi_1|, \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau - \xi^2|\},$$

$$\mathcal{R}_4 = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi_1| \geq 10, |\xi| \geq |\xi_1|, \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau - \xi^2|\},$$

$$\mathcal{R}_5 = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4; |\xi| \geq 1, |\xi - \xi_1| \geq 10, \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 - \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau_1 - \xi_1^2|\}.$$

Portanto precisamos obter as seguintes estimativas:

$$(3.56) \quad \sup_{|\xi_1| > 10, \tau_1 \in \mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_{|\xi| < 1} \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi d\tau}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \leq c,$$

$$(3.57) \quad \sup_{|\xi_1|>10, \tau_1 \in \mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{\{A(\xi_1, \tau_1)\}} (|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi d\tau}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \leq c,$$

$$(3.58) \quad \sup_{|\xi|>1, \tau \in \mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \int \int \frac{\chi_{B(\xi, \tau)} (|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \leq c,$$

$$(3.59) \quad \sup_{|\xi|>1, \tau \in \mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \int \int \frac{\chi_{C(\xi, \tau)} (|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \leq c,$$

$$(3.60) \quad \sup_{|\xi_1|>1, \tau_1 \in \mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{D(\xi_1, \tau_1)} (|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\tau d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} < c,$$

onde

$$A(\xi_1, \tau_1) = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2; |\xi_1| > 1, |\xi| \geq |\xi_1|, \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau_1 + \xi_1^2|\},$$

$$B(\xi, \tau) = \{(\xi_1, \tau_1) \in \mathbb{R}^2; |\xi_1| > 1, |\xi| \leq |\xi_1|, \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau - \xi^2|\},$$

$$C(\xi, \tau) = \{(\xi_1, \tau_1) \in \mathbb{R}^2; |\xi_1| > 1, |\xi| \geq |\xi_1|, \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau - \xi^2|\},$$

$$D(\tau_1, \xi_1) = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2; |\xi| \geq 1, |\xi - \xi_1| \geq 10, \max\{|\tau - \xi^2|, |\tau_1 - \xi_1^2|, |\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|\} = |\tau_1 - \xi_1^2|\}.$$

Vamos primeiramente obter (3.56). Aplicando o Lema 1.15 obtemos

$$(3.61) \quad \begin{aligned} & \chi_{\{|\xi_1|>10\}} \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_{|\xi|<1} \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi d\tau}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq c \chi_{\{|\xi_1|>10\}} \frac{|\xi_1|^{4\rho}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_{|\xi|<1} \frac{d\xi d\tau}{\langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq c \chi_{\{|\xi_1|>10\}} \frac{|\xi_1|^{4\rho}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{|\xi|<1} \frac{d\xi}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 - 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\eta = \tau_1 + \xi_1^2 - 2\xi\xi_1$, então $d\eta = -2\xi_1 d\xi$ e $|\eta| \leq |\sigma_1| + 2|\xi_1|$.

Substituindo na expressão (3.61), vemos que (3.61) é controlada por

$$c \chi_{\{|\xi_1|>10\}} \frac{|\xi_1|^{4\rho}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} |\xi_1|} \int_{|\eta| \leq |\sigma_1| + 2|\xi_1|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1}} \leq c \frac{\chi_{\{|\xi_1|>10\}} |\xi_1|^{4\rho}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} |\xi_1|} (|\sigma_1|^{2-4b} + |\xi_1|^{2-4b}),$$

que é limitado se $b > \frac{1}{3}$ e $\rho \leq b - \frac{1}{4}$.

Para obter (3.57) usaremos a seguinte relação algébrica

$$(3.62) \quad \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 + (\tau_1 + \xi_1^2) - (\tau - \xi^2) = 2\xi\xi_1.$$

Pelo Lema 1.15, vemos que o lado esquerdo de (3.57) é limitado por

$$(3.63) \quad \frac{c|\xi_1|^{4\rho-1}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \frac{d\xi}{\langle \tau + \xi_1^2 - 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}}.$$

Seja $\eta = \tau + \xi_1^2 - 2\xi\xi_1$, então $d\eta = -2\xi_1 d\xi$. Por (3.62) temos $|\eta| \leq c|\tau + \xi_1^2|$ em $A(\xi_1, \tau_1)$.

Substituindo em (3.63), obtemos que (3.63) é controlado por

$$\frac{c|\xi_1|^{4\rho-1}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{6b-2}},$$

que é limitado se $b > \frac{1}{3}$ e $\rho \leq \frac{1}{4}$.

Agora vamos obter (3.58). Pelo Lema 1.15 temos

$$(3.64) \quad \begin{aligned} & \frac{\chi_{\{|\xi|>1\}}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \int \int \frac{\chi_{B(\xi, \tau)}(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq c \frac{\chi_{\{|\xi|>1\}}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \int \frac{\chi_{\{\xi_1; \exists \tau_1; (\xi_1, \tau_1) \in B(\xi, \tau)\}} \langle \xi_1 \rangle^{4\rho} d\xi_1}{\langle \tau - \xi^2 + 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}} \\ & \leq c \frac{\chi_{\{|\xi|>1\}}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-4\rho} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \int \frac{\chi_{\{\xi_1; \exists \tau_1; (\xi_1, \tau_1) \in B(\xi, \tau)\}} \langle \xi_1 \rangle^{4\rho} d\xi_1}{\langle \tau - \xi^2 + 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\eta = \tau - \xi^2 + 2\xi\xi_1$, temos $d\eta = 2\xi d\xi_1$ e $|\eta| \leq 2|\tau - \xi^2|$.

Substituindo em (3.64), limitamos (3.64) por

$$(3.65) \quad c \frac{\chi_{\{|\xi|>1\}}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-4\rho} \langle \xi \rangle^{2\rho} |\xi|} \int_{|\eta|<2|\tau-\xi^2|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1}} \leq c \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-4\rho}} \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{4b-2}},$$

que é limitada, se $\rho \leq \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}$.

Agora estimamos (3.59). Pelo 1.15,

$$(3.66) \quad \begin{aligned} & \frac{\chi_{\{|\xi|>1\}}}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \int \int \frac{\chi_{C(\xi, \tau)}(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq c \frac{\chi_{\{|\xi|>1\}}}{\langle \xi \rangle^{2b-2\rho} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \int \frac{\chi_{\{\xi_1; \exists \tau_1; (\xi_1, \tau_1) \in C(\xi, \tau)\}} d\xi_1}{\langle \tau - \xi^2 + 2\xi\xi_1 \rangle^{4b-1}}. \end{aligned}$$

Seja $\eta = \tau - \xi^2 + 2\xi\xi_1$, então $d\eta = 2\xi d\xi_1$ e

$$|\eta| = |\tau_1 + \xi_1^2 + \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2| \leq 2|\tau - \xi^2|, \text{ in } B(\xi, \tau)_{\xi_1}.$$

Substituindo em (3.66), vemos que (3.66) é controlado por

$$\begin{aligned} & c \frac{\chi_{\{|\xi|>1\}}}{\langle \xi \rangle^{2b-2\rho+1} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \int_{|\eta| \leq 2|\tau-\xi^2|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1}} \leq c \frac{\chi_{\{|\xi|>1\}}}{\langle \xi \rangle^{2b-2\rho+1} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{4b-2}} \\ & \leq c \frac{1}{\langle \xi \rangle^{2b-2\rho+1} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{6b-2}}, \end{aligned}$$

que é limitado se $b \leq \frac{1}{3}$ e $\rho \leq b - \frac{1}{3}$.

Por fim, vamos obter (3.60). Pelo Lema 1.15,

$$\begin{aligned} & \frac{\chi_{\{|\xi_1| \geq 10\}}}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{\chi_{D(\xi_1, \tau_1)} (|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\tau d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq c \frac{\chi_{\{|\xi_1| \geq 10\}}}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{D(\xi_1, \tau_1)_\xi} \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{4b-1}}, \end{aligned}$$

onde $D(\xi_1, \tau_1)_\xi = \{\xi; \exists \tau; (\xi, \tau) \in D(\xi_1, \tau_1)\}$. Agora divimos o conjunto $D(\xi_1, \tau_1)_\xi$ em duas partes, i.e.

$$D_1(\xi_1, \tau_1) = \{\xi \in (D(\xi_1, \tau_1))_\xi; |\xi_1| \leq 100|\xi|\},$$

$$D_2(\xi, \tau) = \{\xi \in (D(\xi_1, \tau_1))_\xi; |\xi_1| > 100|\xi|, |\xi_1| \leq 500|\tau_1 - \xi_1^2|\}.$$

Na região $D_1(\xi_1, \tau_1)$ usamos a relação algébrica

$$(\tau - \xi^2) - (\tau_1 - \xi_1^2) - (\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2) = -2\xi(\xi - \xi_1)$$

e o Lema 1.15 para obtermos

$$\begin{aligned} & \frac{\chi_{|\xi_1| > 10}}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \frac{\chi_{D_1} (|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \sigma_1 \tau_1 - \xi_1^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{4b-1}} \\ & \leq c \frac{\chi_{|\xi_1| > 10}}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int \frac{\chi_{D_1} d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{4b-1}} \\ & \leq c \int \frac{\chi_{D_1} d\xi}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{4b-1}}, \end{aligned}$$

que é limitado se $b > \frac{3}{8}$ e $\rho \leq b$.

Na região D_2 temos $|\xi| |\xi - \xi_1| \leq c|\xi_1|^2 \leq |\tau_1 - \xi_1^2|$, então nesta região a integral pode ser controlada por

$$(3.67) \quad \frac{|\xi_1|^{4\rho} \chi_{|\xi_1| > 10}}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \frac{\chi_{D_2} d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{4b-1}},$$

Pelo 1.13 a expressão (3.67) é limitada se $b > \frac{3}{8}$ e $\rho < \frac{b}{2}$.

3.4.3 Prova do Lema 3.8

Argumentando como na prova do Lema 3.6 para obtermos a parte (a) do Lema precisamos obter

$$(3.68) \quad \left\| \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} \int \int \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi, \tau}^\infty} < c,$$

$$(3.69) \quad \left\| \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^\rho} \int \int_{A_3} \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi, \tau}^\infty} < c,$$

$$(3.70) \quad \left\| \frac{\chi_{\{|\tau_1| > 10\}}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_{B_3} \frac{|\xi| |\xi - \xi_1|^{2\rho} d\tau d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi_1, \tau_1}^\infty} < c,$$

nos casos $\rho \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, onde

$$A_3 = A_3(\xi, \tau) = \{(\xi_1, \tau_1); \max\{|\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau - \xi^2|\} = |\tau - \xi^2|\},$$

$$B_3 = B_3(\xi_1, \tau_1) = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2; \max\{|\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau - \xi^2|\} = |\tau_1 + \xi_1^2|\}.$$

A estimativa (3.68) pode ser obtida análoga à cota 3.35 no caso $\rho = 0$. Para obtermos (3.69) e (3.70) iremos usar a seguinte relação algébrica

$$(3.71) \quad \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 + \tau_1 + \xi_1^2 - (\tau - \xi^2) = (\xi - \xi_1)^2 + \xi_1^2 + \xi^2.$$

Por (3.71) temos que $|\xi_1(\xi - \xi_1)| \leq c(|\xi|^2 + |\xi - \xi_1|^2) \leq c|\tau - \xi^2|$ em $A(\xi_1, \tau_1)$. Aplicando o Lema 1.15 obtemos

$$(3.72) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^\rho} \int \int_{A_3} \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq c \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-2\rho} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \int \frac{d\xi_1}{\langle \tau + \xi^2 - 2\xi\xi_1 + 2\xi_1^2 \rangle^{4b-1}}. \end{aligned}$$

Seja $\eta = \tau + \xi^2 - 2\xi\xi_1 + 2\xi_1^2 = \tau + \xi^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi)$, então $|d\eta| = |4\xi_1 - 2\xi| = \pm 2|2\tau + \xi^2 + 2\eta|^{\frac{1}{2}}$.

Substituindo (3.72) e aplicando o Lema 1.19, controlamos (3.72) por

$$(3.73) \quad \begin{aligned} & \frac{c}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-2\rho} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \int_{|\eta| \leq 2|\tau - \xi^2|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1} |\tau + \frac{\xi^2}{2} + \eta|^{\frac{1}{2}}} \\ & \leq c \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-2\rho} \langle \xi \rangle^{2\rho}} \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{4b-2}} \frac{1}{\langle \tau + \frac{\xi^2}{2} \rangle^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Se $\rho > \frac{1}{2}$, a desigualdade triangular implica em

$$\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau + \xi^2/2 \rangle^{\frac{1}{2}} \geq \langle \xi^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \tau + \xi^2/2 \rangle^{\frac{1}{2}} \geq \langle \tau - \xi^2/2 \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Então (3.73) é controlado por $c\langle \tau - \xi^2 \rangle^{-6b+2\rho+\frac{3}{2}}$, que por sua vez é limitado se $b \geq \frac{1}{4} + \frac{\rho}{3}$.

Como $\rho < \frac{3}{4}$, podemos escolher $b < \frac{1}{2}$. Agora vamos obter (3.70). Pelo Lema 1.15 precisamos obter

$$(3.74) \quad \sup_{|\xi_1| > 1, \tau_1} \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_D \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{4b-1}} < c,$$

onde $D = D(\xi_1, \tau_1) = \{\xi \in \mathbb{R} : |\tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2| \leq 2|\tau_1 + \xi_1^2|\}$. Na região D temos $|\xi_1(\xi - \xi_1)| \leq 3|\tau_1 + \xi_1^2|$. Vamos decompor D em $D = D_1 \cup D_2$, onde

$$D_1 = \{\xi \in D; 2|\xi^2 + (\xi - \xi_1)^2 + \xi_1^2| \leq |\tau_1 + \xi_1^2|\}$$

e

$$D_2 = \{\xi \in D; \frac{|\tau_1 + \xi_1^2|}{2} \leq \xi^2 + (\xi - \xi_1)^2 + \xi_1^2 \leq 2|\tau_1 + \xi_1^2|\}.$$

Em D_1 temos

$$\begin{aligned} |\tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2| &= |\tau_1 + \xi_1^2 - \xi_1^2 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2| \\ &\geq |\tau_1 + \xi_1^2| - |\xi_1^2 + \xi^2 + (\xi - \xi_1)^2| \geq \frac{1}{2}|\tau_1 + \xi_1^2|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int_{D_1} \frac{d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{4b-1}} \leq \frac{c}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho+4b-1}} \int \frac{d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho}},$$

que é limitado se $\rho > \frac{1}{2}$ e $b \geq \frac{1}{6} + \frac{\rho}{3}$.

Para estimarmos em D_2 subdividimos o mesmo em duas partes, $D_2 = D_{21} \cup D_{22}$, onde

$$D_{21} = \{\xi \in D_2; |\xi_1| \leq 2|\xi|\} \text{ e}$$

$$D_{22} = \{\xi \in D_2; 2|\xi| \leq |\xi_1|\}.$$

Em D_{21} fazemos a mudança de variável $\eta = \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2$, que implica

$$|2\xi - \xi_1| = \pm |2\tau_1 - \xi_1^2 - 2\eta|^{\frac{1}{2}} \text{ e } d\eta = -2(\xi_1 - 2\xi)d\xi.$$

Fazendo a substituição e usando o Lema 1.19 temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{D_{21}} \frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{4b-1}} \\ &\leq \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{D_{21}} \frac{|\xi - \xi_1|^{2\rho} d\xi}{\langle \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{4b-1}} \\ &\leq \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b-\rho}} \int_{|\eta| \leq 3|\tau_1 + \xi_1^2|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1} |\eta - \frac{2\tau_1 - \xi_1^2}{2}|^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq c \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{6b-\rho-2}} \frac{1}{\langle 2\tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Esta expressão é limitada, desde que $b \geq \frac{1}{3} + \frac{\rho}{6}$.

Em D_{22} fazemos a mudança de variáveis $\eta = \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2$, então

$$d\eta = -2(2\xi - \xi_1)d\xi \sim \xi_1 d\xi.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{D_{22}} \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{4b-1}} \\ & \leq c \frac{|\xi_1|^{4\rho}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{D_{22}} \frac{d\xi}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{4b-1}} \\ & \leq c \frac{|\xi_1|^{4\rho}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{|\eta| \leq 2|\tau_1 + \xi_1^2|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1} |\xi_1|} \\ & \leq c \frac{|\xi_1|^{4\rho-1}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b+4b-2}} \leq c \frac{|\tau_1 + \xi_1^2|^{2\rho-\frac{1}{2}}}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{6b-2}} \leq c \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{6b-2\rho-\frac{3}{2}}} \leq c \end{aligned}$$

desde que $\rho \leq 3b - \frac{3}{4}$.

Agora vamos provar a parte (b) do Lema. Podemos assumir $10|\tau| \leq |\xi|^2$, pois caso contrário a estimativa segue da parte (a) do lema. Desta forma podemos considerar $\langle \tau - \xi^2 \rangle \sim \langle \xi^2 \rangle$. Argumentando como na parte (a) é suficiente obtermos

$$(3.75) \quad \left\| \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau \rangle^\rho} \int \int_{A_3} \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi, \tau}^\infty} \leq c,$$

$$(3.76) \quad \left\| \frac{1}{\langle \tau + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_{B_3} \frac{(|\xi_1| |\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\tau d\xi}{\langle \tau \rangle^\rho \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \right\|_{L_{\xi_1, \tau_1}^\infty} \leq c,$$

onde $A_3 = A_3(\xi, \tau) = \{(\xi_1, \tau_1) \in \mathbb{R}^2; \max\{|\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau - \xi^2|\} = |\tau - \xi^2|\}$, $B_3 = B_3(\xi_1, \tau_1) = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2; \max\{|\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau - \xi^2|\} = |\tau_1 + \xi_1^2|\}$. Primeiramente vamos obter (3.75). Usando a relação algébrica (3.71) temos que $|\xi_1(\xi - \xi_1)| \leq c|\tau - \xi^2|$ em A_3 . Aplicando o Lema 1.15, o lado esquerdo de (3.75) é controlado por

$$(3.77) \quad \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-2\rho} \langle \tau \rangle^\rho} \int_{A_3^{\xi_1}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau + \xi^2 - 2\xi\xi_1 + 2\xi_1^2 \rangle^{4b-1}},$$

onde $A_3^{\xi_1} = \{\xi_1 \in \mathbb{R}; \exists \tau_1; (\xi_1, \tau_1) \in A(\xi, \tau)\}$.

Seja $\eta = \tau + \xi^2 - 2\xi\xi_1 + 2\xi_1^2 = \tau + \xi^2 + 2\xi_1(\xi_1 - \xi)$, então

$|d\eta| = |4\xi_1 - 2\xi| = \pm 2|2\tau + \xi^2 + 2\eta|^{\frac{1}{2}}$ e $|\eta| \leq |\tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2| + |\tau_1 + \xi_1^2| \leq 2|\tau - \xi^2|$ em $A_3^{\xi_1}$.

Substituindo em (3.77), aplicando o Lema 1.19 e usando $|\tau - \xi^2| \sim |\xi|^2$, podemos controlar (3.77) por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-2\rho} \langle \tau \rangle^\rho} \int_{|\eta| \leq 2|\tau - \xi^2|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1} |\tau + \frac{\xi^2}{2} + \eta|^{\frac{1}{2}}} \\ & \leq c \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b-2\rho} \langle \tau \rangle^\rho} \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 \rangle^{4b-2}} \frac{1}{\langle \tau + \frac{\xi^2}{2} \rangle^{\frac{1}{2}}} \leq c \frac{1}{\langle \xi \rangle^{12b-4\rho-3}} \leq c, \end{aligned}$$

se $\rho \leq 3b - \frac{3}{4}$.

Por fim, vamos obter (3.76).

Escrevemos $B_3 = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, onde

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in B_3; 2|\xi - \xi_1| \leq |\xi_1|\}, \\ D_2 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in B_3; 2|\xi_1| \leq |\xi - \xi_1|\}, \\ D_3 &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in B_3; \frac{1}{2}|\xi_2| < |\xi_1| < 2|\xi_2|\}. \end{aligned}$$

Em D_1 temos $|\xi| \sim |\xi_1|$, então

$$\frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^\rho}{|\xi|^{4b}} \leq \frac{c}{\langle \xi_1 \rangle^{4b-2\rho}} \leq c, \text{ se } \rho \leq 2b.$$

Em D_2 , temos

$$\frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^\rho}{|\xi|^{4b}} \leq \frac{c}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^{4b-2\rho}} \leq c, \text{ se } \rho \leq 2b.$$

Portanto, aplicando o Lema 1.14, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_{D_1 \cup D_2} \frac{\chi_{\{10|\tau| \leq |\xi|^2\}} (|\xi_1||\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\tau d\xi}{\langle \tau \rangle^\rho \langle \tau - \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq \frac{c}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_{D_1 \cup D_2} \frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\tau d\xi}{\langle \tau \rangle^\rho \langle \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \\ & \leq \frac{c}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\tau d\xi}{\langle \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b+\rho-1}} \\ & \leq \frac{c}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b-\rho}} \int \frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^\rho d\tau d\xi}{\langle \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b+\rho-1}} \\ & \leq c \int \frac{d\xi}{\langle \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b+\rho-1}} \leq c, \end{aligned}$$

se $\rho > -2b + \frac{3}{2}$ e $\rho \leq 2b$.

Agora, decompomos D_3 em $D_{31} \cup D_{32}$, onde

$$\begin{aligned} D_{31} &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in D_3; |\xi|^2 + |\xi_1|^2 + |\xi - \xi_1|^2 \leq \frac{|\tau_1 + \xi_1^2|}{2}\}, \\ D_{32} &= \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in D_3; \frac{1}{2}|\tau_1 + \xi_1^2| \leq |\xi|^2 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 \leq 3|\tau_1 + \xi_1^2|\}. \end{aligned}$$

Em D_{31} , estimamos como anteriormente, usando $|\tau_1 + \xi_1^2| \sim |\tau_1 + \xi_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2|$, então

$$\begin{aligned} &\frac{c}{\langle \tau + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int \int_{D_{31}} \frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\tau d\xi}{\langle \tau \rangle^\rho \langle \xi^2 \rangle^{2b} \langle \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{2b}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{4b-\rho-1}} \int \frac{d\xi}{\langle \xi^2 \rangle^{2b}} \leq c, \end{aligned}$$

se $\rho \leq 4b - 1$ e $b > \frac{1}{4}$.

Para estimarmos em D_{32} , fazemos a mudança de variável $\eta = \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2$, então $d\eta = -2(2\xi - \xi_1)d\xi$ e $|2\xi - \xi_1| = \pm|2\tau_1 - \xi_1^2 - 2\eta|^{\frac{1}{2}}$. Fazendo a substituição e aplicando os Lemas 1.15 e 1.19 obtemos

$$\begin{aligned} &\sup_{|\xi_1| > 1, \tau_1} \frac{1}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{D_{32}} \frac{(|\xi_1||\xi - \xi_1|)^{2\rho} d\xi}{\langle \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{4b-1}} \\ &\leq \sup_{|\xi_1| > 1, \tau_1} \frac{c}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int_{D_{32}} \frac{d\xi}{\langle \tau_1 - \xi^2 - (\xi - \xi_1)^2 \rangle^{4b-1}} \\ &\leq \sup_{|\xi_1| > 1, \tau_1} \frac{c}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{2b-2\rho}} \int_{|\eta| \leq 3|\tau_1 + \xi_1^2|} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{4b-1} |\eta - \frac{2\tau_1 - \xi_1^2}{2}|^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \sup_{|\xi_1| > 1, \tau_1} \frac{c}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{6b-2\rho-2} \langle \tau_1 - \xi_1^2/2 \rangle^{1/2}} \leq \sup_{|\xi_1| > 1, \tau_1} \frac{c}{\langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^{6b-2\rho-3/2}}, \end{aligned}$$

que é limitada se $\rho \geq 3b - \frac{3}{4}$.

3.5 Prova do Teorema 3.1

Iremos provar o Teorema 3.1 no caso N_1 , a prova com os termos não linear N_2 e N_3 seguem as mesmas ideias fazendo o uso de suas respectivas estimativas bilineares.

Usando o argumento de escala podemos assumir

$$\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} = \delta,$$

para δ suficientemente pequeno. De fato, u resolve o problema (2.2) se e somente se para $\lambda > 0$, $u_\lambda(x, t) = \lambda^2 u(\lambda x, \lambda^2 t)$ resolver o problema (2.2) com condições inicial e de fronteira $u_\lambda(x, 0) = \lambda^2 u_0(x)$ e $u_\lambda(0, t) = \lambda^2 f(\lambda^2 t)$.

Logo, para $s \leq 0$,

$$\|u_\lambda(\cdot, 0)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq \lambda^{3/2+s} \|u(\cdot, 0)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)},$$

$$\|f_\lambda(\cdot)\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \leq \lambda^{3/2+s} \|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}.$$

Selecione uma extensão $\tilde{u}_0 \in H^s(\mathbb{R})$ de u_0 tal que $\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}$. Tomemos $b = b(s) < \frac{1}{2}$ tal que sejam válidas as estimativas (3.35) e (3.36).

Seja Z o espaço de Banach dado por

$$Z = C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R})) \cap C(\mathbb{R}_x; H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}_t)) \cap X^{s,b}.$$

Defina o operador

$$(3.78) \quad \Lambda(u)(t) = \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0 + \psi(t)\mathcal{D}(u^2)(t) + \psi(t)\mathcal{L}_s^\lambda h(t),$$

onde $h(t) = \chi_{(0,+\infty)}e^{-\frac{3\lambda\pi}{4}}(f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0} - \psi(t)\mathcal{D}(u^2)(t)|_{x=0})$ e $\lambda = \lambda(s)$ satisfazendo $-1 < \lambda < \frac{1}{2}$ e $s - \frac{1}{2} < \lambda < s + \frac{1}{2}$.

Inicialmente vamos provar que $\mathcal{L}_s^\lambda h(t)$ está bem definida. Para isto precisamos mostrar que $h \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Usando os Lemas 3.1, 3.5, 3.35 e 3.36 temos

$$\begin{aligned} \|h\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} &= \|\chi_{(0,+\infty)}(f(t) - \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0|_{x=0} - \psi(t)\mathcal{D}(u^2)(t)|_{x=0})\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq c(\|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|u^2(x, t)\|_{X^{s,-b}} + c_1(s)\|u^2(x, t)\|_{W^{s,-b}}) \\ &\leq c(\|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|u\|_{X^{s,b}}^2), \end{aligned}$$

onde $c_1(s) = 0$, se $s \in (-1/2, 0]$ e $c_1(s) = 1$, se $s \in (-3/4, 1/2)$.

Se $u \in Z$ obtemos $h \in H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Se $-\frac{3}{4} < s \leq 0$, então $\frac{1}{8} \leq \frac{2s+1}{4} \leq \frac{1}{4}$, e aplicando o Lema 1.5 temos que $h \in H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)$. Portanto $\mathcal{L}_s^\lambda h(t)$ está bem definida e $\|h\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \sim \|h\|_{H_0^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)}$, desde que $u \in Z$.

Agora, mostraremos que Λ define uma contração em uma bola de Z .

O Lema 3.1 implica em

$$\|\psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0\|_Z \leq c\|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}.$$

Pelos Lemas 3.5 e 3.6 obtemos

$$(3.79) \quad \|\psi(t)\mathcal{D}(u^2)(t)\|_Z \leq c\|u\|_{X^{s,b}}^2.$$

Combinando o Lema 3.4 e a expressão (3.79) obtemos

$$\|\psi(t)\mathcal{L}_s^\lambda h(t)\|_Z \leq c\|h\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} \leq c(\|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} + \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|u\|_Z^2),$$

para $-1 < \lambda < \frac{1}{2}$ e $s - \frac{1}{2} < \lambda < s + \frac{1}{2}$. Note que se $s > -\frac{1}{2}$, podemos tomar $\lambda = 0$ e como $s > -\frac{3}{4}$ podemos escolher $\lambda = \lambda(s)$ conveniente.

Portanto, obtemos

$$(3.80) \quad \|\Lambda u\|_Z \leq c(\|f\|_{H^{\frac{2s+1}{4}}(\mathbb{R}^+)} + \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|u\|_Z^2).$$

Analogamente obtemos para u e v em Z ,

$$(3.81) \quad \|\Lambda u - \Lambda v\|_Z \leq c^2(\|u\|_Z + \|v\|_Z)\|u - v\|_Z.$$

Defina $D_{s,b}(c\delta) = \{u \in Z; \|z\|_Z \leq 2c\delta\}$. Por (3.80) Se $u \in D_{s,b}(c\delta)$, por (3.80) temos

$$(3.82) \quad \|\Lambda u\|_Z \leq c\delta + c(2c\delta)^2 \leq 2c\delta.$$

Agora escolhemos δ , tal que $4c^2\delta \leq \frac{1}{2}$.

Por (3.81), se u e v em $D_{s,b}(c\delta)$ temos

$$(3.83) \quad \|\Lambda u - \Lambda v\|_Z \leq 4c^2\delta\|u - v\|_Z \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_Z.$$

Portanto, Λ define uma contração em $D_{s,b}(c\delta)$, e consequentemente existe uma única $\tilde{u} \in D_{s,b}(c\delta)$ tal que

$$(3.84) \quad \Lambda(u)(t) = \psi(t)e^{it\partial_x^2}\tilde{u}_0 + \psi(t)\mathcal{D}(u^2)(t) + \psi(t)\mathcal{L}_s^\lambda h(t).$$

Portanto $u(x, t) := \tilde{u}(x, t)|_{\mathbb{R}^+ \times (0,1)}$ resolve (2.2) com $N = N_1$, no sentido das distribuições, no intervalo $[0, 1]$.

Conclusão

Por fim, concluimos o nosso trabalho, enumerando alguns problemas em aberto relacionados com nossos resultados.

- Nos Teoremas 2.2 e 2.4 obtemos o resultado de boa colocação assumindo que os dados iniciais e de fronteira relacionados à segunda equação são de tamanhos pequenos. É possível eliminar estas restrições?
- Outro interessante problema seria as formulações dos problemas aqui tratados em um intervalo limitado.
- No Teorema 3.1 obtivemos resultados de boa colocação condicional para certas reformulações do PVIF como PVI posto em toda reta. Será possível mostrar que as soluções encontradas são únicas?
- No Teorema 3.1 no caso $N = N_1$ e $N = N_3$ conseguimos obter o resultado de boa colocação local em $H^s \times H^{\frac{2s+1}{4}}$ para $s > -3/4$. Será possível melhorar o resultado, tentando implementar as técnicas de Bejenaru e Tao em [1]?

Referências Bibliográficas

- [1] I. Bejenaru and T. Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal., 233 (2006), 228-259.
- [2] D. Bekiranov, T. Ogawa and G. Ponce, *Weak solvability and well-posedness of a coupled Schrödinger-Korteweg-de Vries equation for capillary-gravity wave interactions*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 2907-2919.
- [3] J. L. Bona, W. G. Pritchard and L. R. Scott, *An evaluation of a model equation for water waves*, Philos. Trans. Royal Soc. London Series A, 302 (1981), 457-510.
- [4] J. L. Bona and R. Winther, *The Korteweg-de Vries equation, posed in a quarter plane*, SIAM J. Math. Anal. 14 (1983), 1056-1106.
- [5] J. L. Bona and R. Winther, *Korteweg-de Vries equation in a quarter plane, continuous dependence results*, Differential Integral Equations, 2 (1989), 228-250.
- [6] J. L. Bona, S. Sun, B. Y. Zhang, *A non-homogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation in a quarter plane*, Trans. Amer. Math. Soc., 354 2 (2002), 427-490.
- [7] J. Bourgain, *Fourier Transform Restriction Phenomena for Certain Lattice Subsets and Applications to Nonlinear Evolution Equations I, II.*, Geom. Funct. Anal., 3 (1993), 107-156, 209-262.
- [8] H. Brézis and T. Gallouet, *Nonlinear Schrödinger evolution equations*, Nonlinear Anal., 4 (1980), 677-681.

- [9] C. Bu and R. Carroll, *Solution of the forced nonlinear Schrödinger equation (NLS) using PDE techniques*, Appl. Anal., 41 (1991) 33-51.
- [10] T. Cazenave and F. B. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s* , Nonlinear Anal., 14 (1990), 807-836.
- [11] J. E. Colliander and C. E. Kenig, *The generalized Korteweg-de Vries equation on the half line*, Comm. Partial Differential Equations, 27 (2002), 2187-2266.
- [12] A. J. Corcho and F. Linares, *Well-posedness for the Schrodinger-Korteweg-de Vries system*, Trans. Amer. Math. Soc., 359 (2007), 4089-4106.
- [13] L. Domingues, *O problema de Cauchy para um sistema Schrödinger-Benjamin-Ono*, Tese de Doutorado, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro (2015).
- [14] A.V. Faminskii, *An initial boundary-value problem in a half-strip for the Korteweg-de Vries equation in fractional-order Sobolev spaces*, Comm. Partial Differential Equations, 29 (2004), 1653-1695.
- [15] F. G. Friedlander, *Introduction to the theory of distributions*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, (1998), With additional material by M. Joshi.
- [16] M. Funakoshi, and M. Oikawa, *The resonant interaction between a long internal gravity wave and a surface gravity wave packet*, J. Phys. Soc. Japan, 52 (1983), 1982-1995.
- [17] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, (Vol. 2). New York: Springer (2008).
- [18] J. Ginibre, Y. Tsutsumi, and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system*, J. Funct. Anal., 151 (1997), 384-436.
- [19] A. Grünrock, *New applications of the Fourier restriction norm method to wellposedness problems for nonlinear evolution equations*, Doctoral dissertation, Universität Duisburg-Essen, Fachbereich C-Mathematik und Naturwissenschaften» Mathematik und Informatik» Dissertationen (2002).

- [20] H. Hojo, H. Ikezi, K. Mima and K. Nishikawa, *Coupled nonlinear electron-plasma and ionacoustic waves*, Phys. Rev. Lett., 33 (1974), 148-151.
- [21] J. Holmer, *Uniform estimates for the Zakharov system and the initial-boundary value problem for the Korteweg-de Vries and nonlinear Schrödinger equations*, Doctoral dissertation, The University of Chicago (2004).
- [22] J. Holmer, *The initial-boundary value problem for the 1D cubic nonlinear Schrödinger equation on the half-line*, Differential Integral Equations, 18 (2005), 647-668.
- [23] J. Holmer, *The initial-boundary value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Comm. Partial Differential Equations, 31 (2006), 1151-1190.
- [24] T. Kakutani, T. Kawahara and N. Sugimoto, *Nonlinear interaction between short and long capillary-gravity waves*, J. Phys. Soc. Japan, 39 (1975), 1379-1386.
- [25] B. Guo and C. Miao, *Well-posedness of the Cauchy problem for the coupled system of the Schrödinger-KdV equations*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 15 (1999), 215-224.
- [26] Z. Guo, Y. Wang, *On the well-posedness of the Schrödinger-Korteweg-de Vries system*. J. Differential Equations, 249 (2010), 2500-2520.
- [27] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equations*, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Studies Appl. Math. 8 (1983), 93-128.
- [28] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation, via the contraction Principle*, Comm. Pure Appl. Math., XLVI (1993) 527-560.
- [29] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *A Bilinear Estimate with Applications to the KdV Equations*, J. Amer. Math. Soc., 9 (1996), 573-603.
- [30] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J., 40 (1991), 33-69.

- [31] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Quadratic Forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996), 3323-3353.
- [32] N. Kishimoto, *Local well-posedness for the Cauchy problem of the quadratic Schrödinger equation with nonlinearity u^2* , Comm. Pure Appl. Math., 7 (2008), 1123-1143.
- [33] F. Linares, G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Springer, 2015.
- [34] J.L. Lions and E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Vol. 1, Springer-Verlag: Heidelberg (1972).
- [35] J. Satsuma and N. Yajima, *Soliton solutions in a diatomic lattice system*, Progr. Theor. Phys., 62 (1979), 370-378.
- [36] W. Strauss and C. Bu, *An inhomogeneous boundary value problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Differential Equations, 173 (2001), 79-91.
- [37] B. A. Ton, *Initial boundary value problems for the Korteweg-de Vries equation*, J. Differential Equations, 25 (1977), 288-309.
- [38] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.
- [39] T. Tao, *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*, Amer. Math. Soc., 2006.
- [40] M. Tsutsumi, *On global solutions to the initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equations in exterior domains*, Comm. Partial Differential Equations, 16 (1991), 885-907.
- [41] M. Tsutsumi, *On smooth solutions to the initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation in two space dimensions*, Nonlinear Anal., 13 (1989), 1051-1056.
- [42] Y. Tsutsumi, *Global solutions of the nonlinear Schrödinger equation in exterior domains*, Comm. Partial Differential Equations, 8 (1983), 1337-1374.

- [43] M. Tsutsumi, *Well-posedness of the Cauchy problem for a coupled Schrödinger-KdV equation*, Math. Sci. Appl., 2 (1993), 513-528.
- [44] H. Wang, and S. Cui, *The Cauchy problem for the Schrödinger-KDV system*, J. Differential Equations, 250 (2011), 3559-3583.
- [45] B. Wang, *On the initial-boundary value problems for nonlinear Schrödinger equations*, Adv. Math. (China), 29 (2000), 421-424.
- [46] Y. Wu, *The Cauchy problem of the Schrödinger-Korteweg-De Vries system*, Vol. 23, Differential Integral Equations (2010), 569-600.
- [47] J. Zabusky and C. J. Galvin, *Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons*, J. Fluid Mech., 47 (1971), 811-824.