Universidade Federal do Rio de Janeiro

Guilherme Vasconcelos da Silva Mauro

Espectros de Álgebras de Aplicações Analíticas no Sentido de Lorch

Rio de Janeiro

2016

Guilherme Vasconcelos da Silva Mauro

Espectros de Álgebras de Aplicações Analíticas no Sentido de Lorch

1 Volume

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (Matemática Pura), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Orientadora: Luiza Amália de Moraes

Rio de Janeiro
2016

CIP - Catalogação na Publicação

M457e

Mauro, Guilherme Vasconcelos da Silva
Espectros de Álgebras de Aplicações Analíticas no Sentido de Lorch / Guilherme Vasconcelos da Silva Mauro. -- Rio de Janeiro, 2016.
51 f.

Orientadora: Luiza Amália de Moraes.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

1. Aplicações Lorch-analíticas. 2. Espectro de álgebras de Fréchet. 3. Álgebras de Banach e de Fréchet. 4. Cálculo funcional. I. Moraes, Luiza Amália de, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Folha de Aprovação

Guilherme Vasconcelos da Silva Mauro

Espectros de Álgebras de Aplicações Analíticas no Sentido de Lorch

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (Matemática Pura), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Rio de Janeiro, ____ de ____________________ de 2016.

____

Prof.ª Luiza Amália de Moraes (UFRJ)
Presidente

____

Prof. Antonio Roberto da Silva (UFRJ)

____

Prof. Dinamérico Pereira Pombo Junior (UFF)

____

Prof. Mary Lilian Lourenço (USP)

____

Prof.Alex Farah Pereira (UFF)

____

Prof. Willian Versolati França (UFJF)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado forças para acabar o doutorado. Agradeço a minha esposa Patricia por todo apoio e não ter me deixado desistir nunca. Agradeço a minha família que mesmo de longe nunca deixou de me apoiar. Agradeço a minha orientadora professora Luiza Amália pela sua compreensão e paciência, além dos ensinamentos. Agradeço aos professores que fizeram parte da banca por sua sugestões e correções que melhoraram consideravelmente a qualidade deste trabalho, em particular agradeço o professor Dinamerico por corrigir os inúmeros erros gramaticais da tese. Agradeço a todos os professores do Instituto de Matemática/UFRJ que contribuíram para minha formação e agradeço também meus amigos da UNILA.

Resumo

Neste trabalho consideramos o problema de determinar o espectro de certas álgebras de aplicações analíticas no sentido de Lorch. Entre os principais tópicos discutidos no presente trabalho podemos citar as caracterizações para o espectro de alguns tipos de álgebras utilizando a teoria básica de aplicações L-analíticas, certos resultados da teoria da representação de Gelfand para álgebras de Banach comutativas e ferramentas do cálculo funcional em álgebras de Banach. Também obtivemos alguns resultados sobre aplicações L-analíticas não relacionados diretamente com o cálculo do espectro.

Palavras-chave: Álgebras de Banach e de Fréchet. Espectro de álgebras de Fréchet. Aplicações Lorch-analíticas. Cálculo funcional.

Abstract

In this work we consider the problem of finding the spectrum of certain types of algebras of analytic mappings in the sense of Lorch. Among the main topics discussed in the present work we may mention characterizations of the spectrum of certain types of algebra using some basic results of L-analytic mappings, some results of the Gelfand representation theory on commutative Banach algebras and some functional calculus tools for Banach algebras. We also obtain a couple of results on L-analytic mappings that are not directly related to the problem of finding the spectrum.

Key words: Banach and Fréchet algebras. Spectrum of Fréchet algebras. Lorch-analytic mappings. Functional calculus.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Álgebras de Banach e Fréchet: definições e resultados básicos 5

1.2 Cálculo funcional 9

1.3 Aplicações Lorch analíticas 12

2 Espectros de Álgebras de Aplicações L-analíticas **17**

2.1 O espectro de $(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)), \tau_b)$ 17

2.2 O espectro de $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_d)$ 23

2.3 O espectro de $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_0)$ 32

3 Aplicações L-analíticas: resultados adicionais **35**

3.1 Lemas de Schwarz e Schwarz-Pick para aplicações L-analíticas 35

3.2 Ideais maximais em álgebras de aplicações L-analíticas 39

3.3 L-homeomorfismos em álgebras semi-simples 48

Introdução

O objetivo principal desta tese é obter caracterizações para espectros de determinadas álgebras de aplicações analíticas no sentido de Lorch. O espectro de uma álgebra topológica comutativa E é definido como sendo o conjunto dos homomorfismos contínuos não nulos de E em $\mathbb{C}$. Denotaremos este conjunto por $\mathcal{M}(E)$. Se U é um subconjunto de E, um conjunto $B \subset U$ é dito U-limitado se B é limitado e $\mathrm{dist(B, \partial U)} > 0$.

Em [1], Aron, Cole e Gamelin estudaram a álgebra $\mathcal{H}_b(E)$ das funções holomorfas em um espaço de Banach E que são limitadas nos limitados de E, munida da topologia τ_b da convergência uniforme sobre os limitados de E (lembramos aqui que uma aplicação f é dita holomorfa no sentido clássico se é uma aplicação diferenciável no sentido de Fréchet). Eles mostraram que se o dual E^* tem a propriedade da aproximação e a álgebra dos polinômios fracamente contínuos $\mathcal{P}_f(E)$ é densa em $\mathcal{H}_b(E)$, então $\mathcal{M}(\mathcal{H}_b(E))$ pode ser identificado ao bidual E^{**}.

Garcia, Lourenço, Moraes e Paques estudaram em [8] a álgebra $\mathcal{H}_b(E, F)$ das aplicações holomorfas de um espaço de Banach E em um espaço de Banach F que são limitadas nos limitados de E. Neste trabalho foi mostrada a existência, sob certas condições, de uma bijeção entre $\mathcal{M}(\mathcal{H}_b(E, F))$ e $E^{**} \times \mathcal{M}(F)$.

Burlandy e Moraes estudaram em [3] o espectro de $\mathcal{H}_b(U, F)$, a álgebra das aplicações holomorfas de um subconjunto U aberto absolutamente convexo de um espaço de Banach E em um espaço de Banach F que são limitadas nos U-limitados de E, com a topologia da convergência uniforme nos conjuntos U-limitados. Foi mostrado que a densidade de $\mathcal{P}_f(E; F)$ em $\mathcal{H}_b(U, F)$ equivale à existência de uma bijeção entre $\mathcal{M}(\mathcal{H}_b(U, F))$ e $int\ \overline{U}^{w^*} \times \mathcal{M}(F)$, onde $int\ \overline{U}^{w^*}$ é o interior do fecho de U na topologia fraca estrela.

A abordagem usualmente utilizada nas soluções publicadas para o problema de determinar o espectro de subálgebras de $\mathcal{H}_b(U, F)$ depende de que o dual de E tenha a propriedade da aproximação, e de que a álgebra $\mathcal{P}_f(E; F)$ dos polinômios fracamente contínuos seja densa na álgebra considerada. Neste trabalho iremos estudar álgebras especiais de aplicações holomorfas de um domínio U de E que tomam valores em E. Estas álgebras sempre contêm a aplicação identidade de E. A densidade de $\mathcal{P}_f(E; E)$ implicaria em todo elemento da álgebra ser compacto, e em particular em que a aplicação identidade seja compacta, o que só ocorre quando E tem dimensão finita. Por esta razão iremos adotar uma abordagem diferente da utilizada nos casos acima.

Mais explicitamente, nesta tese iremos estudar a álgebra $\mathcal{H}_L(U)$ das aplicações $f : U \to E$ que são analíticas no sentido de Lorch, ou simplesmente L-analíticas, quando U é um aberto conexo de uma álgebra de Banach comutativa com unidade E (ver Definição 1.28). As aplicações L-analíticas foram estudas pela primeira vez por Lorch em [16], que buscava uma forma de estender a teoria de funções analíticas complexas para álgebras de Banach. A definição de aplicações L-analíticas depende intrinsecamente da multiplicação em E, pois a L-derivada de uma aplicação é um elemento de E e não uma transformação linear. Como, para cada $a \in E$ fixado, a aplicação que associa x a ax é linear, é fácil ver que toda aplicação L-analítica também será diferenciável no sentido de Fréchet. Mas a recíproca em geral não é verdadeira. Por exemplo, a aplicação $f(x, y) = (y, x)$ definida em $\mathbb{C}^2$ é linear, portanto diferenciável no sentido de Fréchet, mas não possui derivadas no sentido de Lorch em nenhum ponto de $\mathbb{C}^2$ (ver detalhes no Exemplo 1.29).

Embora a definição de aplicações L-analíticas seja mais restritiva do que a definição clássica de aplicações holomorfas, é possível provar alguns resultados da teoria clássica das funções analíticas para as aplicações L-analíticas, e ao restringir o domínio e imagem das aplicações à álgebras de Banach comutativas com unidade, é possível utilizar ferramentas como o cálculo funcional para álgebras de Banach e a teoria da representação de Gelfand. Em [16] foram obtidas versões da fórmula integral de Cauchy e a expansão de Taylor para funções L-analíticas, além de ter sido feita uma discussão sobre as funções exponenciais e logarítmicas. Neste trabalho Lorch chamou a atenção para a importância da teoria de Gelfand no estudo das aplicações L-analíticas

Em [12] Glickfeld utilizou a teoria das aplicações L-analíticas para obter uma generalização do conceito de esfera de Riemann para álgebras de Banach comutativas com unidade. Também foi introduzida a ideia de funções quocientes de aplicações L-analíticas (ver Definição 1.32), que estabelecem uma ligação direta entre as aplicações L-analíticas e a teoria clássica de funções analíticas, e são uma ferramente fundamental nesta tese. Em [10] Glickfeld deu continuidade a este trabalho, obtendo uma generalização do teorema de Mittag-Leffler.

Glickfeld também utilizou a ideia de funções quociente para obter versões do teorema da função inversa para aplicações L-analíticas em [11], problema que foi considerado pela primeira vez por Mibu em [19]. Ele também considerou as aplicações L-analíticas no contexto de C^*-álgebras comutativas com unidade em [13]. Usando os fatos de que o conjunto dos elementos auto-adjuntos H de uma C^*-álgebra E é uma álgebra de Banach sobre os *números reais* e de que E pode ser escrito como uma soma direta de H com iH, Glickfeld obteve uma versão das equações de Cauchy-Riemann para aplicações L-analíticas.

Em [2], Blum desenvolveu a ideia de expansões de Laurent no contexto das aplicações

L-analíticas, estudando singularidades de aplicações L-analíticas. Neste trabalho foi considerado o problema de continuações L-analíticas de aplicações $L-$analíticas.

O problema de determinar quando dois domínios em uma álgebra de Banach comutativa com unidade são L-homeomorfos (ver Definição 2.13) foi considerado por Warren em [26]. Neste trabalho Warren obteve uma generalização do Teorema da aplicação de Riemann, determinando uma classe de domínios em uma C^*-álgebra comutativa com unidade que são L-homeomorfos à bola unitária B_E, e em [27] ele determinou condições necessárias e suficientes para a existência de L-homeomorfismos entre dois domínios de uma C^*-álgebra comutativa com unidade. Os métodos utilizados por Warren fogem do escopo desta tese, mas usaremos um de seus resultados junto com o cálculo funcional para obter outra generalização do Teorema da aplicação de Riemann, que também é válida para álgebras semi-simples.

O estudo das propriedades topológicas do espaço $H_L(U)$ foi feito pela primeira vez por Moraes e Pereira em [21]. Neste artigo foi estudada a álgebra $\mathcal{H}_L(E)$ munida da topologia τ_b. Foi mostrado que o espectro $\mathcal{M}(\mathcal{H}_L(E))$ é homeomorfo ao espaço $\mathcal{M}(E) \times \mathbb{C}$ munido da topologia produto ($\mathcal{M}(E)$ está munido da topologia de Gelfand e $\mathbb{C}$ da topologia usual), e também foi encontrada uma caracterização do espectro da álgebra $\mathcal{A}_L(B_E)$ das aplicações L-analíticas em B_E e continuas em $\overline{B_E}$. Além disso, foram obtidos alguns resultados parciais sobre o espectro da álgebra $\mathcal{H}_L^\infty(B_E)$ das aplicações L-analíticas em B_E que são limitadas. Nesta tese damos continuidade a este estudo. Iremos determinar o espectro da álgebra $\mathcal{H}_L(U)$, para determinados tipos de domínio U. Primeiro mostraremos que o espectro de $\mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ pode ser identificado ao conjunto das evaluações das funções quocientes das aplicações de $\mathcal{H}_L(B_r(z_0))$, e como corolário obteremos que $(\mathcal{H}_L(B_E), \tau_b)$ é homeomorfo a $\mathcal{M}(E) \times \Delta$, onde Δ é o disco de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{C}$, τ_b é a topologia de convergência uniforme sobre os B_E-limitados e $\mathcal{M}(E) \times \Delta$ está munido da topologia produto. Em seguida consideraremos o caso onde E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade e mostraremos que os espectros de $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ munido de uma topologia τ_d conveniente e $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_0)$ são ambos homeomorfos a $\mathcal{M}(E) \times \Omega$ munido da topologia produto, onde Ω é um domínio contido em $\mathbb{C}$. Além disso, obteremos outros resultados gerais sobre estes espaços e sobre aplicações L-analíticas. Em particular, vamos estudar os ideais maximais de $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ motivados pela relação existente entre os ideais maximais fechados e o espectro de uma álgebra de Fréchet.

Esta tese está organizada da seguinte forma:

No primeiro capítulo apresentaremos as definições básicas para a compreensão do texto, incluindo definições e resultados básicos sobre álgebras de Fréchet e Banach, além de um resumo da teoria da representação de Gelfand. Também faremos um resumo da teoria do cálculo funcional em álgebras de Banach comutativas com unidade e um resumo dos principais resultados utilizados sobre funções L-analíticas.

No segundo capítulo determinaremos o espectro de $(\mathcal{H}_L(U), \tau)$, para diferentes abertos U e para topologias τ convenientes. Na primeira seção iremos considerar $U = B_r(z_0)$ e $\mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ munido da topologia τ_b. Mostraremos que é possível identificar $\mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$ às evaluações das funções quocientes, e esta identificação será utilizada para determinar $\mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_E))$. Na segunda e terceira seções iremos utilizar as ferramentas do cálculo funcional para determinar o espectro de $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$, munido das topologias τ_d e τ_0, onde E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade e Ω é um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{C}$. Iremos adotar abordagens distintas para os dois problemas. Para determinar o espectro de $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_d)$ utilizaremos primeiramente uma generalização do teorema da aplicação de Riemann obtida diretamente do cálculo funcional, além da caracterização do espectro de $\mathcal{H}_L(B_E)$ obtida na seção anterior. Para determinar o espectro de $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_0)$ iremos utilizar além de propriedades do cálculo funcional e funções quocientes, a existência de aproximações da identidade em toda C^*-álgebra. Também obteremos na segunda seção resultados que relacionam a teoria do cálculo funcional à teoria das aplicações L-analíticas.

No terceiro capítulo estão incluídos alguns resultados que não estão relacionados diretamente com o cálculo do espectro. Como destaque temos versões dos Lemas de Schwarz e Schwarz-Pick para aplicações L-analíticas em C^*-álgebras e resultados sobre os ideais maximais fechados dos espaços $\mathcal{H}_L(U)$. Em particular vamos mostrar que, ao contrário do que ocorre para as funções analíticas em $\mathbb{C}$, existem ideais fechados de aplicações L-analíticas que não são principais, e que se a dimensão de E for infinita, então sempre existirão ideais maximais fechados cujo número de geradores é não enumerável.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Álgebras de Banach e Fréchet: definições e resultados básicos

Apresentaremos nesta seção definições e resultados essenciais para a compreensão deste texto. Omitiremos as demonstrações mas daremos sempre referências precisas para as demonstrações dos resultados. Assumiremos alguma familiaridade com a teoria dos espaços vetoriais topológicos e espaços de Banach. Mais detalhes sobre estes assuntos podem ser encontrados em [5] e [25]. Todas as álgebras consideradas neste trabalho serão supostas complexas.

Definição 1.1. *Uma álgebra topológica E é um espaço vetorial topológico que possui uma operação de multiplicação contínua.*

Definição 1.2. *Uma álgebra de Fréchet E é um espaço de Fréchet que também é uma álgebra topológica, cuja topologia é gerada por uma família de seminormas ρ em E tais que*

$$\rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y)$$

para todos $x, y \in E$.

Definição 1.3. *Uma álgebra de Banach é um espaço de Banach E que também é uma álgebra topológica e cuja norma em E satisfaz :*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

para todos $x, y \in E$.

Observação 1.4. *Toda álgebra de Banach é uma álgebra de Fréchet, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a álgebra $C(\mathbb{C})$ das funções continuas de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ munida da topologia gerada pelas semi-normas $\rho_n(f) = \sup_{\lambda \in \Delta_n(0)} |f(\lambda)|$ é uma álgebra de Fréchet, mas não é uma álgebra de Banach.*

Definição 1.5. *Dizemos que uma álgebra E tem unidade se existe um elemento $\boldsymbol{e} \in E$ tal que $\boldsymbol{e}x = x\boldsymbol{e} = x$, para todo $x \in E$; neste caso dizemos que $\boldsymbol{e}$ é a unidade de E (pode-se mostrar facilmente que uma álgebra tem no máximo uma unidade). Dizemos que E é uma álgebra comutativa quando $xy = yx$, para todos $x, y \in E$*

Exemplo 1.6. *:*
(1) O espaço vetorial $\mathbb{C}$ dos complexos com produto usual é uma álgebra de Banach comutativa com unidade.
(2) Para $p \geq 1$ o espaço $l_p = \{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}; \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p < \infty\}$ de sequências com as operações usuais de espaço vetorial, produto pontual e norma

$$\|(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p},$$

é uma álgebra de Banach comutativa sem unidade.
(3) O espaço $l_\infty = \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \ ; \ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| < \infty\}$ com as operações usuais de espaço vetorial, produto pontual e norma

$$\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| \,,$$

é uma álgebra de Banach comutativa com elemento unidade $\boldsymbol{e} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.
(4) É fácil verificar que conjunto $c = \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}; \exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n\}$ é uma subálgebra fechada de l_∞; portanto, c é uma álgebra de Banach comutativa com unidade.
(5) O espaço $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{C}; f$ é contínua$\}$, onde X um espaço de Hausdorff compacto, com as operações de espaço vetorial e produto definidas ponto a ponto e norma dada por $\|f\| = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$ para todo $f \in C(X)$, é uma álgebra de Banach com unidade $\boldsymbol{1}(x) = 1$.

Observação 1.7. *Quando E é uma álgebra de Banach com unidade $\boldsymbol{e}$, podemos assumir sem perda de generalidade que $\|\boldsymbol{e}\| = 1$.*

Vamos agora definir algumas notações que serão utilizadas no restante do texto.

Iremos utilizar E^* para representar o dual topológico de uma álgebra E, isto é, o espaço de todos os funcionais lineares contínuos em E. Se E é normado, dados $z_0 \in E$ e $r > 0$, escreveremos

$$B_r(z_0) = \{z \in E; \|z - z_0\| < r\}.$$

Além disso, dados $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ escreveremos

$$\Delta_r(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - \lambda_0| < r\}.$$

Quando $z_0 = 0$ escreveremos simplesmente B_r no lugar de $B_r(0)$ e quando $\lambda_0 = 0$ escrevemos Δ_r no lugar de $\Delta_r(0)$. Quando $r = 1$ e $z_0 = 0$ (resp. $\lambda_0 = 0$) usamos B_E (resp. Δ).

Se E é uma álgebra com unidade, iremos denotar o conjunto dos elementos invertíveis de E por $G(E)$.

A partir deste ponto todas as álgebras de Fréchet, a menos de menção explícita em contrário, serão álgebras comutativas com unidade.

Definição 1.8. *Seja E uma álgebra complexa. Um homomorfismo complexo é uma aplicação linear $\phi : E \to \mathbb{C}$ tal que $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, para todos $x, y \in E$. Se E é uma álgebra de Fréchet (em particular se E é uma álgebra de Banach), dizemos que o conjunto de todos os homomorfismos complexos contínuos não nulos de E em $\mathbb{C}$ é o espectro de E e denotaremos este conjunto por $\mathcal{M}(E)$.*

Observação 1.9. *:*
(1) É fácil ver que se E é uma álgebra complexa com unidade $\boldsymbol{e}$ e ϕ é um homomorfismo complexo não nulo em E, então valem as seguintes propriedades: $\phi(\boldsymbol{e}) = 1$ e $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$, para todo $x \in G(E)$.
(2) A palavra "espectro" possui outros significados. Por exemplo, o espectro de uma álgebra topológica pode se referir ao conjunto dos ideais maximais fechados desta álgebra. Temos também a noção de espectro de um elemento z de uma álgebra E, como sendo o conjunto $\sigma(z) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda \boldsymbol{e} - z) \notin G(E)\}$. O próximo resultado mostra como estas definições estão relacionadas nas álgebras de Banach.

Teorema 1.10. *Seja E é uma álgebra de Banach comutativa com unidade. As seguintes afirmações são verdadeiras:*
(a) Todo homomorfismo complexo em E é contínuo.
(b) Todo ideal maximal de E é o núcleo de algum $\phi \in \mathcal{M}(E)$. Consequentemente todo ideal maximal de E é fechado.
(c) Se $\phi \in \mathcal{M}(E)$, $\ker(\phi)$ é um ideal maximal de E.
(d) Se $\phi \in \mathcal{M}(E)$, $\|\phi\| = 1$.
(e) $z \in G(E)$ se, e somente se, $\phi(z) \neq 0$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$.
(f) Para cada $z \in E$ temos que $\lambda \in \sigma(z)$ se, e somente se, $\lambda = \phi(z)$ para algum $\phi \in \mathcal{M}(E)$, ou, de forma equivalente, $\sigma(z) = \{\phi(z); \phi \in \mathcal{M}(E)\}$.

Demonstração. Ver Teoremas 10.7 e 11.5 em [25], páginas 249 e 277, respectivamente. □

Observação 1.11. *Em álgebras de Fréchet todo ideal maximal fechado é o núcleo de algum $\phi \in \mathcal{M}(E)$ (Ver 3.2.11 em [14], p. 82), e reciprocamente se $\phi \in \mathcal{M}(E)$, então $\ker(\phi)$ é um ideal maximal fechado. Em álgebras de Fréchet não se sabe se todo homomorfismo complexo é contínuo e nem se todo ideal maximal é fechado. Estes dois problemas estão interligados. O problema de decidir se os homomorfismos complexos numa álgebra de Fréchet são sempre contínuos é conhecido como problema de Michael.*

Vamos ver agora alguns exemplos de espectros para álgebras particulares:

Exemplo 1.12. *:*
(1) Todo homomorfismo complexo em $C(X)$ é da forma $\delta_x(f) = f(x)$ para algum $x \in X$. (Ver Exemplo 11.13 (a) em [25], p. 283.)

(2) Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo. A álgebra $\mathcal{H}(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{C}; f$ é analítica$\}$, onde as operações de espaço vetorial e o produto são definidas ponto a ponto e a topologia considerada é a topologia da convergência uniforme sobre os compactos de Ω, denotada por τ_0, é uma álgebra de Fréchet. Os homomorfismos complexos contínuos em $\mathcal{H}(\Omega)$ são os funcionais do tipo $\delta_\lambda(f) = f(\lambda)$ para algum $\lambda \in \Omega$. (Ver Teorema 5.3 em [17], p. 38.)

Concluímos esta seção com um resultado que usaremos futuramente e a definição de C^*-álgebras.

Teorema 1.13. *Sejam E uma álgebra de Banach e $z \in E$ tais que $\|z\| < 1$. Então $(\boldsymbol{e} - z) \in G(E)$.*

Demonstração. Ver Teorema 10.7 em [25]. □

Definição 1.14. *Seja E uma álgebra de Banach. Uma aplicação $x \to x^*$ de E em E é chamada de involução se para todos $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que:*

$$(x + y)^* = x^* + y^*$$

$$(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$$

$$(xy)^* = y^* x^*$$

$$(x^*)^* = x$$

Além disso, se vale $\|xx^*\| = \|x\|^2$ para todo $x \in E$, dizemos que E é uma C^*-álgebra.

Observação 1.15. *No teorema seguinte a hipótese de E ser comutativa com unidade é essencial, por isso explicitamos isto no enunciado.*

Teorema 1.16. *(Gelfand-Naimark) Se E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade, então para cada $z \in E$, a transformada de Gelfand $\hat{z}$ é uma isometria de E sobre $C(\mathcal{M}(E))$, isto é:*

$$\|\hat{z}\|_\infty = \sup_{\phi \in \mathcal{M}(E)} \|\hat{z}(\phi)\| = \sup_{\phi \in \mathcal{M}(E)} \|\phi(z)\| = \|z\|.$$

Além disso temos que $\phi(z^*) = \overline{\phi(z)}$, para todos $z \in E$ e $\phi \in \mathcal{M}(E)$

Demonstração. Ver Teorema 11.18 em [25]. □

1.2 Cálculo funcional

Nesta seção iremos fazer um resumo da teoria do cálculo funcional, que propicia uma forma de definir aplicações em álgebras de Banach a partir de funções analíticas em $\mathbb{C}$. Mais detalhes e demonstrações podem ser encontradas em [5] e [25].
Vamos começar relembrando alguns fatos de análise complexa.

Sejam $\Gamma \subset \mathbb{C}$ curva fechada retificável e $\alpha \in \mathbb{C}/\Gamma$. Definimos o índice de rotação de Γ com respeito ao ponto α como sendo o valor:

$$Ind_\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \alpha} d\lambda.$$

É um resultado conhecido que a função $Ind_\Gamma : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}$ é uma função com valores inteiros, sendo constante para cada componente conexa de $\mathbb{C}/\Gamma$ e valendo 0 para todo α na componente não limitada de $\mathbb{C}/\Gamma$.

Se Ω é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ e K é um subconjunto compacto de Ω, dizemos que uma curva Γ é um contorno de K em Ω se:

$$Ind_\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \alpha} d\lambda = \begin{cases} 1, \text{ se } \alpha \in K \\ 0, \text{ se } \alpha \notin \Omega \end{cases}$$

É um fato conhecido que dados Ω e K como descritos acima, sempre podemos encontrar um contorno Γ de K em Ω.

Vamos a seguir definir as noções de integral e derivada para funções com valores em uma álgebra de Banach E, que são utilizadas no cálculo funcional.

Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to E$ é dita analítica em Ω, ou simplesmente analítica, se existe $lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$ para todo $\lambda_0 \in \Omega$. Observe que uma função f de Ω em E é analítica se, e somente se $T \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica para todo $T \in E^*$.

O próximo passo é definir integrais de linha $\int_\Gamma f(\lambda) d\lambda$. Vamos começar definindo integrais do tipo $\int_a^b f(t)dt$, onde $f : [a, b] \to E$ é uma aplicação seccionalmente contínua.

A construção desta integral é feita de forma análoga à construção da integral de Riemann escalar. As noções de partições, refinamentos e tamanho de uma partição de um intervalo são definidas da maneira usual. A definição de somas de Riemann no contexto das aplicações com valores vetoriais é feita de maneira análoga à definição para funções com valores complexos.

Definição 1.17. *Sejam $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e $\zeta = \{r_0, \ldots, r_{n-1}\}$, onde $r_i \in [t_i, t_{i+1}]$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Definimos a soma de Riemann de f com respeito a P como*

$$R(f, P, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} f(r_i)\Delta t_i,$$

onde $\Delta t_i = (t_{i+1} - t_i)$.

Os resultados associados à construção da integral de Riemann clássica são válidos aqui. Mais explicitamente, se $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um conjunto de partições de $[a,b]$ satisfazendo $P_n \subset P_{n+1}$, o limite $lim_{n\to\infty}R(f,P_n,\zeta)$ existe e o seu valor independe da escolha das partições. Portanto $\int_a^b f(t)dt = lim_{n\to\infty}R(f,P_n,\zeta)$ está bem definida. Além das propriedades usuais de integrais, temos duas adicionais:
Para todo $x \in E$ temos

$$x\int_a^b f(t)dt = \int_a^b xf(t)dt,$$

e para todo $T \in E^*$

$$T(\int_a^b f(t)dt) = \int_a^b T(f(t))dt = \int_a^b T\circ f(t)dt. \tag{1.1}$$

Essas duas propriedades seguem diretamente da linearidade e continuidade de $T \in E^*$ e do fato de que a multiplicação é contínua em uma álgebra de Banach. Podemos agora definir integrais de linha.

Definição 1.18. *Sejam* Γ *uma curva em* $\mathbb{C}$ *continuamente diferenciável por partes e* $f : \Gamma \to E$ *contínua. Definimos a integral de linha de* f *na curva* Γ *por*

$$\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda = \int_0^1 f(\lambda(t))\lambda'(t)dt,$$

onde $\lambda : [0,1] \to \Gamma$ *é uma parametrização da curva* Γ.

Da mesma forma que ocorre com o caso escalar, a integral independe da escolha da parametrização.

Vamos enunciar uma versão do teorema de Cauchy para funções com valores em E.

Teorema 1.19. *Sejam* Ω *um domínio (isto é um subconjunto aberto conexo) em* $\mathbb{C}$, E *uma álgebra de Banach e* $f : \Omega \to E$ *uma aplicação analítica. Se* Γ *é uma curva fechada em* Ω *e* $Ind_\Gamma(u) = 0$ *para todo* $u \notin \Omega$, *então*

$$\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda = 0.$$

Além disso, se $\omega \in \Omega$ *e* $Ind_\Gamma(\omega) = 1$, *temos que*

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - \omega}d\lambda.$$

Temos também que dadas duas curvas fechadas Γ_1 *e* Γ_2 *em* Ω *tais que* $Ind_{\Gamma_1}(u) = Ind_{\Gamma_2}(u)$ *para todo* $u \notin \Omega$, *vale:*

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)d\lambda = \int_{\Gamma_2} f(\lambda)d\lambda.$$

Teorema 1.20. *Sejam P um polinômio complexo de variável complexa e $R(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m,k} c_{m,k}(\lambda - \alpha_m)^{-k}$ uma função racional com pólos nos pontos α_m. Se $z \in E$ e $\{\alpha_m\} \cap \sigma(z) = \emptyset$ então $(z - \boldsymbol{e}\alpha_m) \in G(E)$, e podemos definir $R(z) = P(z) + \sum_{m,k} c_{m,k}(z - \boldsymbol{e}\alpha_m)^{-k}$.*

Consideremos agora um subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(z) \subset \Omega$. Se Γ é um contorno de $\sigma(z)$ em Ω temos:

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda)(\lambda \boldsymbol{e} - z)^{-1} d\lambda.$$

Demonstração. Ver Teorema 10.25, página 261, em [25].

□

Dado um subconjunto Ω de $\mathbb{C}$, podemos associar a Ω o conjunto $E_\Omega = \{z \in E \ ; \ \sigma(z) \subset \Omega\}$. Algumas propriedades de Ω são preservadas por E_Ω. Por exemplo, E_Ω é aberto se Ω é aberto.

Teorema 1.21. *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e $z \in E$ é tal que $\sigma(z) \subset \Omega$, então existe $\delta > 0$ tal que para todo $h \in E$ satisfazendo $\|h\| < \delta$ temos $\sigma(z + h) \subset \Omega$.*

Demonstração. Ver Teorema 10.20 em [25], p. 257. □

A partir de agora, a menos de menção explicita em contrário, $\mathcal{H}(\Omega)$ denotará o espaço das funções complexas analíticas em Ω, munido da topologia τ_0 da convergência uniforme sobre os compactos de Ω.

Dada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vamos associar a f uma aplicação $\widetilde{f} : E_\Omega \to E$ da maneira descrita a seguir.

Definição 1.22. *Sejam E uma álgebra de Banach, Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $z \in E_\Omega$. Definimos:*

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - z)^{-1} d\lambda,$$

onde Γ é um contorno qualquer de $\sigma(z)$ em Ω.

Observação 1.23. *Como $\Gamma \cap \sigma(z) = \emptyset$, temos que $\lambda \boldsymbol{e} - z \in G(E)$ para todo $\lambda \in \Gamma$, de forma que o integrando é uma função contínua em Γ, e consequentemente $\widetilde{f}$ está bem definida para todo $z \in E_\Omega$. Denotamos o conjunto de todas as funções $\widetilde{f}$ por $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$.*

Vamos terminar esta seção enunciando alguns resultados que serão utilizados no próximo capítulo.

Proposição 1.24. *Se $\alpha \in \Omega$ e f analítica em Ω, então $\widetilde{f}(\alpha \boldsymbol{e}) = f(\alpha)\boldsymbol{e}$.*

Demonstração. Segue diretamente da definição:

$$\widetilde{f}(\alpha e) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda \mathbf{e} - \alpha \mathbf{e})^{-1} d\lambda = \mathbf{e} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - \alpha} d\lambda = f(\alpha)\mathbf{e}.$$

□

Teorema 1.25. *Sejam E uma álgebra de Banach , $x \in G(E)$ e $h \in E$ tais que $\|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Então $x+h \in G(E)$ e temos a seguinte desigualdade:*

$$\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| \leq 2\left\|x^{-1}\right\|^3 \|h\|^2 .$$

Demonstração. Ver Teorema 10.11 em [25], página 253. □

Teorema 1.26. *Sejam $\mathbf{1}(\lambda) = 1$ e $Id(\lambda) = \lambda$ para todo λ em Ω. Então $\widetilde{\mathbf{1}}(z) = \boldsymbol{e}$ e $\widetilde{Id}(z) = z$ para todo $z \in E_\Omega$. Além disso, a aplicação $f \mapsto \widetilde{f}$ é um isomorfismo de álgebras multiplicativo entre $\mathcal{H}(\Omega)$ e $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ que é contínuo quando consideramos em $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ a topologia da convergência pontual, isto é, se $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é uma rede em $\mathcal{H}(\Omega)$ convergindo para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ na topologia τ_0, temos que $\widetilde{f}(z) = \lim\limits_{\alpha} \widetilde{f}_\alpha(z)$ para todo $z \in E_\Omega$.*

Demonstração. Ver Teorema 10.27 em [25], página 262. No lugar de redes o teorema mencionado prova a continuidade pontual para sequências, mas a demonstração feita é idêntica, substituindo sequências por redes. □

Como consequência direta deste resultado temos que $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ é uma álgebra comutativa com unidade.

Terminamos com um resultado sobre a composição com respeito ao cálculo funcional.

Teorema 1.27. *Sejam Ω_1 e Ω_2 dois domínios em $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ tais que $Im(f) \subset \Omega_2$. Então para todo $z \in E_{\Omega_1}$ temos que $\widetilde{f}(z) \in E_{\Omega_2}$ e $\widetilde{h}(z) = \widetilde{g}(\widetilde{f}(z))$, isto é, se $h = g \circ f$, então $\widetilde{h} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$.*

Demonstração. Ver Teorema 10.29 em [25]. □

1.3 Aplicações Lorch analíticas

No que segue U será sempre um domínio (um subconjunto aberto conexo) de uma álgebra de Banach E. As aplicações Lorch analíticas foram introduzidas por Lorch em [16]. Nesta seção vamos apresentar definições e resultados da teoria das aplicações Lorch analíticas que serão utilizados nos capítulos que seguem. Uma exposição mais detalhada da teoria básica pode ser encontrada em [15].

Definição 1.28. *Dizemos que uma aplicação $f : U \to E$ possui uma derivada no sentido de Lorch (ou L-derivada) em $z_0 \in U$ se existe um $f'(z_0) \in E$ tal que dado $\epsilon > 0$ arbitrário, é possível encontrar um $\delta > 0$ tal que para todo $h \in E$ satisfazendo $\|h\| < \delta$ temos que $z + h \in U$ e*

$$s\,\|f(z_0+h) - f(z_0) - hf'(z_0)\| < \epsilon\,\|h\| .$$

Se f possui uma $L-$derivada em todo ponto de uma vizinhança $V \subset U$ de z_0 dizemos que f é $L-$analítica em z_0, . Caso f seja L-analítica em todo ponto de U, dizemos que f é Lorch analítica em U (ou L-analítica em U). Denotamos o conjunto de todas as funções L-analíticas em U por $\mathcal{H}_L(U)$.

Exemplo 1.29. *É fácil notar, pela definição, que toda aplicação analítica no sentido de Lorch é holomorfa no sentido usual, mas a recíproca não é verdadeira. De fato, consideramos a álgebra $E = \mathbb{C}^2$ com as operações de álgebra definidas coordenada a coordenada e norma do máximo. Consideramos a aplicação $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $f(x,y) = (y,x)$. Como f é linear, claramente ela é diferenciável no sentido de Fréchet, mas não é $L-$analítica em nenhum ponto de $\mathbb{C}^2$. Tome $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ diferente de (0,0). Suponha, por absurdo, que $f'(x,y)$ exista e $f'(x,y) = (a,b)$. É fácil ver que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Sem perda de generalidade vamos assumir que $a \neq 0$. Tome $\epsilon < \frac{|a|}{2}$. Então é possível encontrar um $\delta > 0$ tal que para todo $h = (h_1, h_2)$ satisfazendo $\max\{|h_1|, |h_2|\} < \delta$ vamos ter*

$$\begin{aligned}\|f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - (h_1,h_2)(a,b)\| &= \|(y+h_2, x+h_1) - (y,x) - (ah_1, bh_2)\| \\ &= \|(h_2 - ah_1, h_1 - bh_2)\| < \epsilon \max\{|h_1|, |h_2|\}.\end{aligned}$$

Tomando $h_1 = \frac{\delta}{2}$ e $h_2 = 0$ temos que $\left\|(a\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})\right\| = \max\left\{\frac{|a|\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right\} < \epsilon\frac{\delta}{2} < \frac{|a|\delta}{4}$, o que é um absurdo. Portanto f não é analítica no sentido de Lorch em nenhum ponto de $\mathbb{C}^2$, apesar de ser holomorfa no sentido usual.

Teorema 1.30. *Uma aplicação $f : U \to E$ é Lorch analítica em $z_0 \in U$ se, e somente se, existem $\rho > 0$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tais que $B_\rho(z_0) \subset U$ e*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{para todo } z \in B_\rho(z_0).$$

Demonstração. Ver Teoremas 3.19.1 e 26.4.1 em [15] . □

Na verdade, no teorema acima, podemos tomar ρ como sendo $\sup\{r; B_r(z_0) \subset U\}$. Aproveitamos aqui para introduzir mais uma notação. Dados $a \in E$ qualquer e $n \in \mathbb{N}$, definimos as aplicações $P_{a,0}(z) = a$ e $P_{a,n}(z) = az^n$, para todo $z \in E$.

Agora vamos apresentar a ideia de funções quocientes. Estudadas por Glickfeld em [11], elas serão uma ferramenta fundamental para o estudo de propriedades das aplicações L-analíticas em determinados domínios. Começamos com este resultado usado ao definir o domínio destas funções.

Lema 1.31. *Se U é um domínio em E e $\phi \in \mathcal{M}(E)$, temos que $\phi(U)$ é um domínio em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Segue diretamente do fato de ϕ ser uma aplicação aberta e contínua. □

Definição 1.32. *Sejam $f \in \mathcal{H}_L(U)$ e $\phi \in \mathcal{M}(E)$. Se existe uma função $g \in \mathcal{H}(\phi(U))$ tal que $g(\phi(z)) = \phi(f(z))$ para todo $z \in U$, dizemos que g é a função quociente de f com respeito a ϕ.*

Observação 1.33. *Caso exista uma função quociente de f em relação a ϕ, ela é necessariamente única. De fato, suponha g_1, g_2 duas funções quocientes de f com respeito a ϕ. Para todo $z \in U$ temos:*

$$g_1(\phi(z)) = \phi(f(z)) = g_2(\phi(z));$$

portanto $g_1(\lambda) = g_2(\lambda)$ para todo $\lambda \in \phi(U)$ e assim $g_1 = g_2$. Como a função quociente é única, utilizaremos a notação f_ϕ para a função quociente de f com respeito a ϕ.

Observação 1.34. *A existência de uma função quociente não é sempre garantida para todo domínio U de E. Um exemplo onde não é possível definir uma função quociente pode ser encontrado em [11].*

Os dois próximos resultados são conhecidos, mas como serão utilizados frequentemente no decorrer desta tese e não encontramos sua demonstração na literatura, decidimos incluir a demonstração aqui.

Lema 1.35. *Para todos $\phi \in \mathcal{M}(E)$, $z_0 \in E$ e $r > 0$, temos $\phi(B_r(z_0)) = \Delta_r(\phi(z_0))$.*

Demonstração. Fixe $\phi \in \mathcal{M}(E)$, $z_0 \in E$ e $r > 0$ arbitrários e $z \in B_r(z_0)$. Sabemos que $\|\phi\| = 1$ e portanto:

$$|\phi(z) - \phi(z_0)| = |\phi(z - z_0)| \leq \|z - z_0\| < r.$$

Assim $\phi(z) \in \Delta_r(\phi(z_0))$ e, como tomamos $z \in B_r(z_0)$ arbitrário, segue que $\phi(B_r(z_0)) \subset \Delta_r(\phi(z_0))$.

Vamos agora mostrar a inclusão reversa. Tome $\lambda \in \Delta_r(\phi(z_0))$ arbitrário. Temos que $\lambda = \phi(z_0) + \delta$, para algum $|\delta| < r$. Considerando o ponto $z_0 + \delta\mathbf{e}$, temos que $z_0 + \delta\mathbf{e} \in B_r(z_0)$ e $\phi(z_0 + \delta\mathbf{e}) = \lambda$.
Assim concluímos que $\phi(B_r(z_0)) = \Delta_r(\phi(z_0))$. □

Vamos agora mostrar como a construção das funções quocientes é feita no caso particular de $U = B_r(z_0)$.

Proposição 1.36. *Se $U = B_r(z_0)$, então a função quociente f_ϕ existe para todo $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ e $\phi \in \mathcal{M}(E)$.*

Demonstração. Fixado $f \in \mathcal{H}_L(U)$, pelo Teorema 1.30 existem $r > 0$ e uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tais que $B_r(z_0) \subset U$ e $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ para todo $z \in B_r(z_0)$. Definimos agora g em $\phi(B_r(z_0)) = \Delta_r(\phi(z_0))$ por $g(\lambda) = \sum \phi(a_n)(\lambda - \phi(z_0))^n$ para todo $\lambda \in \Delta_r(\phi(z_0))$. Claramente g é uma função analítica em $\Delta_r(\phi(z_0))$.

Para $z \in B_r(z_0)$ arbitrário, temos que

$$\phi(f(z)) = \phi(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n) = \phi(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n(z - z_0)^n).$$

Como ϕ é homomorfismo contínuo, temos que

$$\begin{aligned}
\phi(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n(z - z_0)^n) &= \lim_{m\to\infty} \phi(\sum_{n=0}^{m} a_n(z - z_0)^n) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \phi(a_n)(\phi(z) - \phi(z_0))^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \phi(a_n)(\phi(z) - \phi(z_0))^n \\
&= g(\phi(z)).
\end{aligned}$$

Como tomamos $z \in B_r(z_0)$ qualquer, concluímos que $g = f_\phi$. □

Definição 1.37. *Dizemos que um domínio $U \subset E$ é estrelado se existe ao menos um ponto $z_0 \in U$ tal que $tz_0 + (1-t)z \in U$ para todo $z \in U$ e $t \in [0,1]$. Caso tal ponto z_0 exista, dizemos que z_0 é um centro do domínio U.*

Teorema 1.38. *Se U é um domínio estrelado, então existe f_ϕ para toda aplicação $f \in H_L(U)$ e para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$.*

Demonstração. Ver Teorema 1.3 de [11]. □

Lema 1.39. *Se $f, g \in \mathcal{H}_L(U)$ e $\phi \in \mathcal{M}(E)$, então $(\lambda f + g)_\phi = \lambda f_\phi + g_\phi$ e $(fg)_\phi = f_\phi g_\phi$*

Demonstração. Dado $z \in U$ qualquer, temos que

$$(\lambda f_\phi + g_\phi)(\phi(z)) = \lambda f_\phi(\phi(z)) + g_\phi(\phi(z)) = \lambda\phi(f(z)) + \phi(g(z)) = \phi((\lambda f + g)(z)).$$

Assim, pela unicidade da função quociente, $(\lambda f + g)_\phi = \lambda f_\phi + g_\phi$.
Do mesmo modo, tomando $z \in U$ qualquer,

$$(f_\phi g_\phi)(\phi(z)) = f_\phi(\phi(z))g_\phi(\phi(z)) = \phi(f(z))\phi(g(z)) = \phi(fg(z)).$$

Portanto $(fg)_\phi = f_\phi g_\phi$. □

O resultado a seguir segue diretamente da definição da função quociente, da representação dada por 1.30 de $f'(z)$ e do fato de ϕ ser um homomorfismo contínuo.

Lema 1.40. *Seja $f \in \mathcal{H}_L(U)$. Se $f' : U \to E$ é a aplicação que a cada $z_0 \in U$ associa $f'(z_0)$, então $f' \in \mathcal{H}_L(U)$. Além disto, se a função quociente f_ϕ de f com respeito a $\phi \in \mathcal{M}(E)$ existe, a função quociente de f' com respeito a ϕ também existe e temos que $(f_\phi)' = (f')_\phi$.*

Dizemos que $B \subset U$ é **U-limitado** se B é limitado e $\mathrm{dist(B, \partial U)} > 0$. Como usual $\mathcal{H}_b(U, E)$ denota o espaço das aplicações holomorfas de U em E que são limitadas nos subconjuntos U-limitados de U munido da topologia τ_b de convergência uniforme sobre os subconjuntos U-limitados de U. É um resultado conhecido que $\mathcal{H}_b(U, E)$ munido do produto ponto a ponto é uma álgebra de Fréchet. Em particular, $\mathcal{H}_b(E, E)$ denota a álgebra de Fréchet das aplicações holomorfas de E em E que são limitadas nos subconjuntos limitados de E com produto definido ponto a ponto, munida da topologia τ_b de convergência uniforme nos subconjuntos limitados de E. Foi mostrado em [21] que o espaço $\mathcal{H}_L(E)$ é uma subálgebra fechada de $(\mathcal{H}_b(E, E), \tau_b)$ e, portanto, $(\mathcal{H}_L(E), \tau_b)$ é uma álgebra de Fréchet.

Para um domínio U arbitrário não sabemos se $H_L(U) \subset H_b(U, E)$, de modo que não podemos considerar, em geral a topologia τ_b em $H_L(U)$. Vamos então definir uma topologia τ_d em $H_L(U)$ mais adequada para nossos propósitos.

Sejam U um domínio em E e $z \in U$. Definimos $d_U(z) = \sup\{r; B_r(z) \subset U\}$. Fixados $z \in U$ e $0 < r < d_U(z)$, é fácil verificar que $\rho(f) = \sup_{w \in B_r(z)} \|f(w)\|$ é uma norma em $\mathcal{H}_L(U)$. Denotamos a topologia gerada por estas normas por τ_d.

Observe que quando $U = B_r(z_0)$ ou $U = E$ temos $H_L(U) \subset H_b(U, E)$ e em ambos os casos a topologia τ_d coincide com a topologia τ_b em $\mathcal{H}_L(U)$.

Temos os seguintes resultados:

Teorema 1.41. *Temos que $(\mathcal{H}_L(U), \tau_d)$ é um espaço de Fréchet sempre que E é separável.*

Demonstração. Ver Teorema 2.7 de [18]. □

No mesmo artigo citado é mostrado o seguinte teorema.

Teorema 1.42. *$(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)), \tau_b)$ é um espaço de Fréchet.*

Demonstração. Ver Observação 2.8 de [18]. □

Capítulo 2

Espectros de Álgebras de Aplicações L-analíticas

A menos de menção explicita em contrário, no restante desta tese todas as álgebras de Banach E consideradas serão álgebras de Banach comutativas com unidade $\mathbf{e}$ tais que $\|\mathbf{e}\| = 1$ e U será um domínio (isto é, aberto conexo) contido em E.

Neste capítulo determinaremos o espectro de $(\mathcal{H}_L(U), \tau)$, para diferentes abertos U e para topologias τ convenientes. Mais explicitamente consideraremos a topologia $\tau = \tau_b$ no caso $U = B_r(z_0)$ e as topologias τ_d e τ_0 no caso $U = E_\Omega$, onde Ω é um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{C}$. As principais ferramentas utilizadas neste capítulo serão o cálculo funcional e as funções quocientes.

2.1 O espectro de $(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)), \tau_b)$

Nesta seção estudaremos a álgebra $\mathcal{H}_L(B_r(z_0))$, onde $z_0 \in E$ e $r > 0$, munida da topologia τ_b. Nosso principal objetivo nesta seção é determinar o espectro de $\mathcal{H}_L(B_r(z_0)), \tau_b)$. É fácil ver que a topologia τ_b neste caso é gerada pela família de normas:

$$\rho_n(f) = \sup\left\{\|f(z)\|\,;z \in E,\ \|z - z_0\| < r - \frac{1}{n}\right\}.$$

Lembramos que estamos denotando a aplicação identidade de E por $P_{e,1}$ e, para todo $a \in E$, estamos denotando a aplicação constante a em E por $P_{a,0}$. Se Ω é um domínio em $\mathbb{C}$, os homomorfismos complexos em $\mathcal{H}(\Omega)$ são as evaluações nos pontos de Ω (ver Exemplo 1.12). Nesta seção vamos mostrar que os homomorfismos contínuos na topologia τ_0 em $\mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ são as evaluações das funções quocientes. Para isso vamos precisar de alguns resultados.

Proposição 2.1. *Seja $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$ qualquer. Temos então que o funcional linear*

$$\begin{aligned} \psi_0 : E &\to \mathbb{C} \\ a &\mapsto \psi_0(a) = \psi(P_{a,0}), \end{aligned}$$

é um homomorfismo complexo não nulo de E.

Demonstração. Primeiro notamos que dado $a \in E$ qualquer, $P_{a,0} \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$, de forma que $\psi_0(a) = \psi(P_{a,0})$ está bem definido.

Tome agora $a, b \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários. Como $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$, então:

$$\psi(P_{\lambda a+b,0}) = \psi(\lambda P_{a,0} + P_{b,0}) = \lambda\psi(P_{a,0}) + \psi(P_{b,0})$$

e

$$\psi(P_{ab,0}) = \psi(P_{a,0}P_{b,0}) = \psi(P_{a,0})\psi(P_{b,0}).$$

Portanto, pela definição de ψ_0, $\psi_0(\lambda a + b) = \lambda\psi_0(a) + \psi_0(b)$ e $\psi_0(ab) = \psi_0(a)\psi_0(b)$, de onde concluímos que ψ_0 é um homomorfismo. Resta mostrar que este homomorfismo é não nulo.

Sabemos que ψ é não nulo. Suponhamos por absurdo que ψ_0 seja nulo. Em particular teremos que $0 = \psi_0(e) = \psi(P_{e,0})$. Mas como $P_{\mathbf{e},0}$ é a identidade de $\mathcal{H}_L(B_r(z_0))$, e como ψ é não nulo, $0 = \psi_0(\mathbf{e}) = \psi(P_{\mathbf{e},0}) = 1$, absurdo. □

Lema 2.2. *$\psi(P_{e,1})$ é um elemento de $\Delta_r(\psi_0(z_0))$, para todo $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$.*

Demonstração. Sabemos, pela Proposição 2.1, que $\psi_0(a) = \psi(P_{a,0})$ é um homomorfismo não nulo em E. Além disso, existem $\lambda \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ tais que $\psi(P_{e,1}) - \psi_0(z_0) = \lambda \exp(i\theta)$.

Considere agora a aplicação

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{r^n \exp(in\theta)}(z - z_0)^n \quad \text{para todo } \ z \in B_r(z_0).$$

É fácil verificar que f está bem definida. Pelo Teorema 1.30, $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$. Como ψ é um homomorfismo contínuo temos

$$\begin{aligned} \psi(f) &= \psi\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{\mathbf{e}}{r^n \exp(in\theta)}(P_{\mathbf{e},1} - P_{z_0,0})^n\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \psi\left(\sum_{n=0}^{m} \frac{\mathbf{e}}{r^n \exp(in\theta)}(P_{\mathbf{e},1} - P_{z_0,0})^n\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \psi_0\left(\frac{\mathbf{e}}{r^n \exp(in\theta)}\right)(\psi(P_{\mathbf{e},1} - P_{z_0,0}))^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{r^n\exp(in\theta)}(\lambda\exp(i\theta))^n \\
&= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\exp(in\theta)}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^n\exp(ni\theta) \\
&= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^n
\end{aligned}$$

Como a série $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^n$ converge (para $\psi(f)$), temos que $\frac{\lambda}{r} < 1$ e portanto $\lambda < r$. Assim,

$$|\psi(P_{\mathbf{e},1}) - \psi_0(z_0)| < r,$$

isto é, $\psi(P_{\mathbf{e},1}) \in \Delta_r(\psi_0(z_0))$. □

Teorema 2.3. *A aplicação*

$$\delta : \bigcup_{\phi\in\mathcal{M}(E)} \{(\phi,\lambda_0)\,;\lambda_0 \in \Delta_r(\phi(z_0))\} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$$

definida por $\delta(\phi,\lambda_0)(f) = f_\phi(\lambda_0)$ para toda $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ (onde f_ϕ denota a função quociente de f com respeito a ϕ) é injetiva e sobrejetiva.

Demonstração. Nosso primeiro passo é verificar que δ está bem definida. Seja $\phi \in \mathcal{M}(E)$ e $\lambda_0 \in \Delta_r(\phi(z_0))$ Vamos mostrar que $\delta(\phi,\lambda_0)$ é linear e multiplicativa. Pelo Lema 1.39, dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$, temos

$$\delta(\phi,\lambda_0)(\alpha f + g) = (\alpha f + g)_\phi(\lambda_0) = \alpha f_\phi(\lambda_0) + g_\phi(\lambda_0) = \alpha\delta(\phi,\lambda_0)(f) + \delta(\phi,\lambda_0)(g)$$

e

$$\delta(\phi,\lambda_0)(fg) = (fg)_\phi(\lambda_0) = f_\phi(\lambda_0)g_\phi(\lambda_0) = \delta(\phi,\lambda_0)(f)\delta(\phi,\lambda_0)(g).$$

Assim, $\delta(\phi,\lambda_0)$ é um homomorfismo complexo em $H_L(B_r(z_0))$. Vamos mostrar agora que $\delta(\phi,\lambda_0)$ é não nulo.

Como ϕ é um homomorfismo complexo não nulo, existe $w_0 \in E$ tal que $\phi(w_0) \neq 0$. Além disso, existe $z \in B_r(z_0)$ tal que $\phi(z) = \lambda_0$. Agora, para $f = P_{w_0,0}$ temos que $f_\phi(\lambda_0) = f_\phi \circ \phi(z) = \phi \circ P_{w_0,0}(z) = \phi(w_0) \neq 0$ e portanto concluímos que $\delta(\phi,\lambda_0) \not\equiv 0$.

Resta mostrar a continuidade de $\delta(\phi,\lambda_0)$. Se $z \in B_r(z_0)$ é tal que $\phi(z) = \lambda_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|z - z_0\| < r - \frac{1}{n}$, de modo que para todo $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ temos

$$|\delta(\phi,\lambda_0)(f)| = |f_\phi(\phi(z))| = |\phi(f(z))| \leq \|f(z)\| \leq \rho_n(f).$$

Como a topologia τ_b é gerada pelas seminormas ρ_n, segue a continuidade de $\delta(\phi,\lambda_0)$. Concluímos, portanto, que $\delta(\phi,\lambda_0) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$.

Vamos mostrar agora que a aplicação δ é injetiva. Suponha que $\delta(\phi,\lambda_0) = \delta(\mu,\lambda_1)$, isto é, $f_\phi(\lambda_0) = f_\mu(\lambda_1)$ para todo $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$.

Agora, pelo Lema 1.35 existem $z, w \in B_r(z_0)$ tais que $\phi(z) = \lambda_0$ e $\mu(w) = \lambda_1$. Fixado $a \in E$ arbitrário, tomando $f = P_{a,0}$ temos que

$$\phi(a) = \phi(P_{a,0}(z)) = (P_{a,0})_\phi(\lambda_0) = (P_{a,0})_\mu(\lambda_1) = \mu(P_{a,0}(w)) = \mu(a).$$

Portanto $\phi = \mu$. É fácil verificar que $(P_{\mathbf{e},1})_\phi$ é a função identidade em $\Delta_r(\phi(z_0))$, portanto como $\delta(\phi, \lambda_0) = \delta(\phi, \lambda_1)$ temos

$$\lambda_0 = (P_{\mathbf{e},1})_\phi(\lambda_0) = (P_{\mathbf{e},1})_\phi(\lambda_1) = \lambda_1.$$

Daí concluímos que δ é injetiva.

Finalmente, para mostrar que δ é sobrejetiva, tome $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$ e $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$. Pelo Teorema 1.30 existe uma única sequência $(a_n) \subset E$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ para todo $z \in B_r(z_0)$. Portanto podemos escrever

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_{a_n,0}(P_{\mathbf{e},1} - P_{z_0,0})^n$$

e como ψ é um homomorfismo contínuo não nulo e $\psi_0(a) = \psi(P_{a,0})$ para todo $a \in E$, temos que

$$\psi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_0(a_n)(\psi(P_{\mathbf{e},1}) - \psi_0(z_0))^n.$$

Além disso, a definição da função quociente de f com respeito a $\psi_0 \in \mathcal{M}(E)$ nos dá

$$f_{\psi_0}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_0(a_n)(\lambda - \psi_0(z_0))^n \quad \text{para todo } \ \lambda \in \Delta_r(\psi_0(z_0)).$$

Assim, como $\psi(P_{\mathbf{e},1}) \in \Delta_r(\psi_0(z_0))$, temos

$$\delta(\psi_0, \psi(P_{\mathbf{e},1}))(f) = f_{\psi_0}(\psi(P_{\mathbf{e},1})) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_0(a_n)(\psi(P_{\mathbf{e},1}) - \psi_0(z_0))^n = \psi(f).$$

Isto mostra que existem $\psi_0 \in \mathcal{M}(E)$ e $\psi(P_{\mathbf{e},1}) \in \Delta_r(\psi_0(z_0))$ tais que $\delta(\psi_0, \psi(P_{\mathbf{e},1}))(f) = \psi(f)$ para todo $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$. □

Vamos agora mostrar a continuidade da aplicação δ definida no Teorema 2.3 quando consideramos $\mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$ e $\mathcal{M}(E)$ munidos com a topologia de Gelfand τ_G (isto é, a topologia induzida pela topologia fraca-estrela) e $\bigcup\limits_{\phi \in \mathcal{M}(E)} \{(\phi, \lambda_0)\,;\, \lambda_0 \in \Delta_r(\phi(z_0))\}$ munido da topologia τ_π induzida pela topologia produto em $\mathcal{M}(E) \times \mathbb{C}$.

Teorema 2.4. *A aplicação*

$$\delta : \bigcup_{\phi \in \mathcal{M}(E)} \{(\phi, \lambda_0)\,;\, \lambda_0 \in \Delta_r(\phi(z_0))\} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$$

definida por $\delta(\phi, \lambda_0)(f) = f_\phi(\lambda_0)$ *para toda* $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ *estabelece um homeomorfismo entre* $(\mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0))), \tau_G)$ *e* $\left(\bigcup\limits_{\phi \in \mathcal{M}(E)} \{(\phi, \lambda)\,;\, \lambda \in \Delta_r(\phi(z_0))\}, \tau_\pi \right)$.

Demonstração. Da demonstração do Teorema 2.3 temos que $\delta^{-1}(\psi) = (\psi_0, \lambda_0)$, onde $\psi_0(a) = \psi(P_{a,0})$ para todo $a \in E$ e $\lambda_0 = \psi(P_{\mathbf{e},1})$. Fixe agora $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$ e tome uma rede $(\psi_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$ tal que ψ_α converge para ψ na topologia de Gelfand τ_G. Queremos mostrar que a rede $\delta^{-1}(\psi_\alpha) = ((\psi_\alpha)_0, \lambda_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge para (ψ_0, λ_0) na topologia produto τ_π.

É imediato da definição da topologia de Gelfand que a rede $\psi_\alpha(P_{a,0}) = (\psi_\alpha)_0(a)$ converge para $\psi(P_{a,0}) = \psi_0(a)$ para todo $a \in E$, de modo que $(\psi_\alpha)_0$ converge para ψ_0 na topologia τ_G. Também é imediato que $\lambda_\alpha = \psi_\alpha(P_{\mathbf{e},1})$ converge para $\lambda_0 = \psi(P_{\mathbf{e},1})$ em $\mathbb{C}$, e portanto concluímos que $\delta^{-1}(\psi_\alpha)$ converge para $\delta^{-1}(\psi)$. Assim provamos a continuidade de δ^{-1}.

A seguir vamos mostrar a continuidade de δ. Fixe $(\phi_0, \lambda_0) \in \bigcup_{\phi\in\mathcal{M}(E)} \{(\phi, \lambda)\,;\, \lambda \in \Delta_r(\phi(z_0))\}$ e tome $((\phi_\alpha, \lambda_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ uma rede em $\bigcup_{\phi\in\mathcal{M}(E)} \{(\phi, \lambda)\,;\, \lambda \in \Delta_r(\phi(z_0))\}$ que converge para (ϕ_0, λ_0) na topologia produto τ_π.

Queremos mostrar que, fixado $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ arbitrariamente, para todo $\epsilon > 0$ existirá $\alpha_\epsilon \in \Lambda$ tal que

$$|\delta(\phi_\alpha, \lambda_\alpha)(f) - \delta(\phi_0, \lambda_0)(f)| = |f_{\phi_\alpha}(\lambda_\alpha) - f_{\phi_0}(\lambda_0)| < \epsilon$$

para todo $\alpha \geq \alpha_\epsilon$.

Tomamos agora um ponto $z \in B_r(z_0)$ tal que $\phi_0(z) = \lambda_0$, e para cada $\alpha \in \Lambda$ tomamos $\lambda_0^\alpha = \phi_\alpha(z)$. Da continuidade de f em z, temos que existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que $B_{\delta_\epsilon}(z) \subset B_r(z_0)$ e $\|f(z) - f(w)\| < \epsilon/2$ para todo $w \in B_{\delta_\epsilon}(z)$. Além disso, como ϕ_α converge para ϕ_0 na topologia τ_G e λ_α converge para λ_0 em $\mathbb{C}$, temos que existe um $\alpha_\epsilon \in \Lambda$ tal que para todo $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ valem as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} |(\phi_0 - \phi_\alpha)(f(z))| &< \frac{\epsilon}{2}, \\ |\lambda_0^\alpha - \lambda_0| = |\phi_\alpha(z) - \phi_0(z)| &< \frac{\delta_\epsilon}{2}, \\ |\lambda_\alpha - \lambda_0| &< \frac{\delta_\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Claramente isto implica que $\lambda_\alpha \in \Delta_{\delta_\epsilon}(\lambda_0^\alpha) = \phi_\alpha(B_{\delta_\epsilon}(z))$ para todo $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ e portanto existe $w_\alpha \in B_{\delta_\epsilon}(z)$ tal que $\phi_\alpha(w_\alpha) = \lambda_\alpha$.

Daí, usando a definição de função quociente, concluímos que

$$|f_{\phi_\alpha}(\lambda_\alpha) - f_{\phi_\alpha}(\lambda_0^\alpha)| = |\phi_\alpha(f(w_\alpha) - f(z))| \leq \|\phi_\alpha\|\,\|f(w_\alpha) - f(z)\| = \|f(w_\alpha) - f(z)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$|f_{\phi_\alpha}(\lambda_0^\alpha) - f_{\phi_0}(\lambda_0)| = |\phi_\alpha(f(z)) - \phi_0(f(z))| = |(\phi_\alpha - \phi_0)(f(z))| < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $\alpha \geq \alpha_\epsilon$.

Consequentemente, para todo $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ vale

$$|f_{\phi_\alpha}(\lambda_\alpha) - f_{\phi_0}(\lambda_0)| \leq |f_{\phi_\alpha}(\lambda_\alpha) - f_{\phi_\alpha}(\lambda_0^\alpha)| + |f_{\phi_\alpha}(\lambda_0^\alpha) - f_{\phi_0}(\lambda_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e assim concluímos a demonstração da continuidade de δ. □

Observamos aqui que a topologia considerada no espectro de qualquer álgebra de Fréchet é sempre a topologia de Gelfand, denotada por τ_G.

Como $\phi(0) = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$, o seguinte teorema segue como consequência dos Teoremas 2.3 e 2.4:

Teorema 2.5. *O espectro $\mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_E))$ é homeomorfo ao espaço $\mathcal{M}(E)\times\Delta$ (com a topologia produto) pela aplicação*

$$\delta : \mathcal{M}(E) \times \Delta \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_E))$$

definida por $\delta(\phi, \lambda_0)(f) = f_\phi(\lambda_0)$ para todo $f \in \mathcal{H}_L(B_E)$.

Observação 2.6. *Temos mais geralmente que $\mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(\lambda \boldsymbol{e})))$ é homeomorfo ao espaço $\mathcal{M}(E)\times\Delta_r(\lambda)$ (com a topologia produto). Para verificar isto basta utilizar o fato que $\phi(\lambda \boldsymbol{e}) = \lambda$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$.*

Lembramos agora que o **radical** $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ é a interseção de todos os ideais maximais de $\mathcal{A}$, e dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é **semi-simples** se $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \{0\}$. É um resultado conhecido (ver a demonstração da Proposição 8.1.2 em [14]) que o radical de uma álgebra de Fréchet $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} \ker(\varphi).$$

Como consequência do Teorema 2.3 temos o seguinte resultado:

Proposição 2.7. *E é semi-simples se, e somente se, $\mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ é semi-simples.*

Demonstração. Suponhamos que E seja semi-simples. Pelo Teorema 2.3 e pelo resultado acima temos que $f \in \mathcal{R}\left(\mathcal{H}_L(B_r(z_0))\right)$ se, e somente se, $f_\phi(\lambda) = \delta(\phi, \lambda)(f) = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$, e para todo $\lambda \in \Delta_r(\phi(z_0))$. Como $\phi(B_r(z_0)) = \Delta_r(\phi(z_0))$, isto significa que $\phi \circ f(z) = f_\phi(\phi(z)) = 0$ para todo $z \in B_r(z_0)$ e para cada $\phi \in \mathcal{M}(E)$; mas como $\mathcal{M}(E)$ separa pontos de E, temos então que $f(z) = 0$ para todo $z \in B_r(z_0)$. Concluímos daí que $\mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ é semi-simples.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ seja semi-simples e fixemos um $a \in \mathcal{R}(E)$ qualquer. Pelo Teorema 2.3, $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$ se, e somente se, existe $(\phi, \lambda) \in \mathcal{M}(E) \times$

$\Delta_r(\phi(z_0))$ tal que $\psi(f) = f_\phi(\lambda)$ para todo $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ ou, de forma equivalente, $\psi(f) = f_\phi(\phi(z))$ para algum $z \in B_r(z_0)$ e para toda $f \in \mathcal{H}_L(B_r(z_0))$. Em particular, $\psi(P_{a,0}) = \phi(a)$. Mas $a \in \mathcal{R}(E)$ implica que $\phi(a) = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$ e portanto $\psi(P_{a,0}) = 0$ para todo $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_r(z_0)))$. Como $\mathcal{H}_L(B_r(z_0))$ é semi-simples, temos daí $P_{a,0} \equiv 0$ e isso ocorre se, e somente se, $a = 0$. Concluímos então que $\mathcal{R}(E) = \{0\}$. $\square$

2.2 O espectro de $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_d)$

O resultado central desta seção descreve o espectro da álgebra $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_d)$ quando E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade e Ω é um domínio simplesmente conexo em $\mathbb{C}$. Duas ferramentas serão de fundamental importância: o cálculo funcional e o conceito de função quociente com respeito a um homomorfismo da álgebra E. Começaremos mostrando que $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ é uma subálgebra fechada de $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_d)$ e mostraremos que se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{M}(E)$, a função quociente $\widetilde{f_\phi}$ existe e $\widetilde{f_\phi} = f$. Isto feito, obteremos a caracterização do espectro de $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_d)$ e para tal usaremos a caracterização do espectro de $(\mathcal{H}_L(B_E), \tau_d)$ obtida no Teorema 2.5.

Vamos começar com um resultado sobre os conjuntos E_Ω que serão os domínios usados nesta seção.

Proposição 2.8. *É verdade que:*
(1) Se Ω é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$, então E_Ω é aberto em E.
(2) $\phi(E_\Omega) = \Omega$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$.
(3) Se Ω é um domínio estrelado (com centro λ_0) em $\mathbb{C}$, então E_Ω é um domínio estrelado em E (com centro $\lambda_0\mathbf{e}$).

Demonstração.
(1) Segue diretamente do Teorema 1.21.
(2) Lembramos que

$$E_\Omega = \{z \in E\ ;\ \sigma(z) \subset \Omega\} = \{z \in E\ ;\ \theta(z) \in \Omega, \quad \forall \theta \in \mathcal{M}(E)\}.$$

Portanto $\phi(E_\Omega) \subset \Omega$ é trivial. Tome agora $\lambda \in \Omega$. Para todo $\theta \in \mathcal{M}(E)$ temos que $\theta(\lambda\mathbf{e}) = \lambda$, logo $\lambda\mathbf{e} \in E_\Omega$. Então $\lambda = \phi(\lambda\mathbf{e}) \in \phi(E_\Omega)$. Portanto $\Omega \subset \phi(E_\Omega)$.
(3) Queremos mostrar que E_Ω é um aberto estrelado com centro $\lambda_0\mathbf{e}$, onde λ_0 é um centro de Ω.

Sabemos que, pela parte (1), E_Ω é aberto. Observamos que $\lambda_0\mathbf{e} \in E_\Omega$. De fato, sabemos que $\sigma(\lambda_0 e) = \{\phi(\lambda_0 e); \phi \in \mathcal{M}(E)\} = \{\lambda_0\} \subset \Omega$; portanto, pela definição de E_Ω, temos que $\lambda_0 e \in E_\Omega$.

Tome agora $z \in E_\Omega$ e $t \in [0,1]$ quaisquer. Queremos mostrar que $tz + (1-t)\lambda_0 e \in E_\Omega$. Dado $\phi \in \mathcal{M}(E)$ qualquer, $\phi(tz + (1-t)\lambda_0 e) = t(\phi(z)) + (1-t)\lambda_0$. Como λ_0 é centro de

Ω e $\phi(z) \in \Omega$, $\phi(tz + (1-t)\lambda_0 e) = t(\phi(z)) + (1-t)\lambda_0 \in \Omega$. Como tomamos $\phi \in \mathcal{M}(E)$ qualquer, concluímos que $\sigma(tz + (1-t)\lambda_0 e) = \{\phi(tz + (1-t)\lambda_0 e); \phi \in \mathcal{M}(E)\} \subset \Omega$; logo pela definição, $tz + (1-t)\lambda_0 e \in E_\Omega$. $\square$

Nosso próximo passo é mostrar que a aplicação $\widetilde{f}$ é L-analítica em E_Ω sempre que f é analítica em Ω.

Teorema 2.9. *Sejam E um álgebra de Banach e Ω um domínio em $\mathbb{C}$. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, então $\widetilde{f} \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$ e*

$$(\widetilde{f})'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda \boldsymbol{e} - z)^{-2} d\lambda$$

para todo $z \in E_\Omega$, onde $(\widetilde{f})'(z)$ denota a L-derivada de $\widetilde{f}$ em z.

Demonstração. Queremos mostrar que dados $z \in E_\Omega$ e $\epsilon > 0$ é sempre possível encontrar um $\delta > 0$ tal que para todo $\|h\| < \delta$,

$$\left\| \widetilde{f}(z+h) - \widetilde{f}(z) - h(\widetilde{f})'(z) \right\| < \epsilon \|h\| \tag{2.1}$$

Fixemos $z \in E_\Omega$. Sabemos que $\sigma(z)$ é um conjunto compacto e, pela definição de E_Ω, $\sigma(z)$ é um subconjunto de Ω. Para cada $\lambda \in \sigma(z)$, existe $r_\lambda > 0$ tal que $\overline{\Delta_{r_\lambda}(\lambda)} \subset \Omega$. Logo, como as bolas $\Delta_{r_\lambda}(\lambda)$ formam uma cobertura aberta de $\sigma(z)$, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \sigma(z)$ tais que $\sigma(z) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \Delta_{r_{\lambda_j}}(\lambda_j) = \Omega'$. Como Ω' é um conjunto aberto, pelo Teorema 1.21 existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $h \in E$ satisfazendo $\|h\| < \delta_1$, $\sigma(z+h) \subset \Omega'$. Agora, $\overline{\Omega'}$ é uma união finita de bolas fechadas contidas em Ω, portanto é um conjunto compacto contido em Ω; assim podemos encontrar uma curva Γ em Ω envolvendo Ω'. Em particular, Γ envolve $\sigma(z)$ e $\sigma(z+h)$ para $\|h\| < \delta_1$.

Pela definição de $\widetilde{f}$ temos as seguintes igualdades:

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda \mathbf{e} - z)^{-1} d\lambda,$$
$$\widetilde{f}(z+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda \mathbf{e} - (z+h))^{-1} d\lambda$$

Vejamos que $(\widetilde{f})'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda \mathbf{e} - z)^{-2} d\lambda \in E$ satisfaz (2.1).

Podemos reescrever o lado esquerdo de (2.1) como:

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)((\lambda \mathbf{e} - z - h)^{-1} - (\lambda \mathbf{e} - z)^{-1} - h(\lambda \mathbf{e} - z)^{-2}) d\lambda \right\|.$$

Vamos agora utilizar o Teorema 1.25 , tomando x do enunciado como sendo $x = (\lambda \mathbf{e} - z)$. Pelo referido teorema existe um $\delta_2 > 0$ tal que se $h \in E_\Omega$ satisfaz $\|h\| < \delta_2$, então vale a desigualdade

$$\left\| (\lambda \mathbf{e} - z + h)^{-1} - (\lambda \mathbf{e} - z)^{-1} + h(\lambda \mathbf{e} - z)^{-2}) \right\| \leq 2 \left\| (\lambda \mathbf{e} - z)^{-1} \right\|^3 \|h\|^2 .$$

Observe que podemos tomar $\delta_2 < \delta_1$. Trocando h por $-h$, temos que:

$$\left\|(\lambda\mathbf{e} - z - h)^{-1} - (\lambda\mathbf{e} - z)^{-1} - h(\lambda\mathbf{e} - z)^{-2}\right\| \leq 2\left\|(\lambda\mathbf{e} - z)^{-1}\right\|^3 \|h\|^2 \leq C_1 \|h\|^2,$$

onde $C_1 = 2\max\limits_{\lambda\in\Gamma} \|(\lambda\mathbf{e} - z)^{-1}\|^3$. Usando esta desigualdade, temos que:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)((\lambda\mathbf{e} - z - h)^{-1} - (\lambda\mathbf{e} - z)^{-1} - h(\lambda\mathbf{e} - z)^{-2})d\lambda\right\| \leq \\
&\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \|f(\lambda)\| \left\|((\lambda e - z - h)^{-1} - (\lambda e - z)^{-1} - h(\lambda e - z)^{-2})\right\| d|\lambda| \leq \\
&C_1 \max_{\lambda\in\Gamma} \|f(\lambda)\| \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d|\lambda| \, \|h\|^2 = C\|h\|^2
\end{aligned}$$

Tomemos agora $\delta = min\{\frac{\epsilon}{C}, \delta_2\}$. Para todo $\|h\| < \delta$,

$$\left\|\widetilde{f}(z+h) - \widetilde{f}(z) - h(\widetilde{f})'(z)\right\| \leq C\|h\|^2 < \epsilon\|h\|$$

Como queríamos mostrar.

□

Mostramos então que $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ é uma subálgebra de $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$. O próximo resultado irá mostrar que $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ é fechado em $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ com respeito à topologia τ_d. Em particular, quando E é um espaço separável, temos que $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ é um espaço de Fréchet.

Teorema 2.10. *$\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ é uma subálgebra fechada de $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ na topologia τ_d.*

Demonstração. Pelos Teoremas 2.9 e 1.26, sabemos que $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ é uma subálgebra de $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$. Precisamos agora mostrar que ela é fechada na topologia τ_d.

Tome $(\widetilde{f_\alpha})_{\alpha\in\Lambda}$ uma rede em $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ tal que $\widetilde{f_\alpha} \xrightarrow{\tau_d} F \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$. Queremos mostrar que existe uma $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\widetilde{f} = F$.

Para isso, vamos primeiro mostrar que a rede $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é de Cauchy na topologia τ_0 de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Tome K um subconjunto compacto qualquer de Ω. Como Ω é aberto, usando um argumento padrão de compacidade podemos encontrar $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ em K e $r_1, \ldots, r_n$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^n \Delta_{r_i}(\lambda_i) \subset \Omega$. É imediato verificar que $K\mathbf{e} = \{\lambda\mathbf{e}; \lambda \in K\} \subset \bigcup\limits_{i=1}^n B_{r_i}(\lambda_i\mathbf{e}) \subset E_\Omega$.

Agora, por hipótese, $(\widetilde{f_\alpha})_{\alpha\in\Lambda}$ é uniformemente convergente nas bolas de E_Ω. Em particular é uma rede de Cauchy nas bolas $B_{r_i}(\lambda_i\mathbf{e})$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\alpha, \beta > \alpha_0$,

$$\sup_{\lambda\in K} |f_\alpha(\lambda) - f_\beta(\lambda)| = \sup_{\lambda\in K\mathbf{e}} \left\|\widetilde{f_\alpha}(\lambda\mathbf{e}) - \widetilde{f_\beta}(\lambda\mathbf{e})\right\| \leq \sup_{z\in \bigcup\limits_{i=1}^n B_{r_i}(\lambda_i\mathbf{e})} \left\|\widetilde{f_\alpha}(z) - \widetilde{f_\beta}(z)\right\| < \epsilon.$$

A primeira igualdade segue da Proposição 1.24 que diz que $\widetilde{f}(\lambda\mathbf{e}) = f(\lambda)\mathbf{e}$. Como tomamos $K \subset \Omega$ arbitrário, concluímos $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é uma rede de Cauchy na topologia τ_0 em

$\mathcal{H}(\Omega)$. Como $\mathcal{H}(\Omega)$ munido da topologia τ_0 é um espaço completo, existe uma $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_\alpha \xrightarrow{\tau_0} f$. Pela última parte do Teorema 1.26, $\widetilde{f}_\alpha$ converge pontualmente para $\widetilde{f}$, isto é, dado $z \in E_\Omega$ qualquer, $\widetilde{f}(z) = \lim \widetilde{f}_\alpha(z)$. Por outro lado nossa hipótese inicial e a unicidade do limite implicam que $\lim \widetilde{f}_\alpha(z) = F(z)$. Concluímos assim que $F = \widetilde{f}$. □

Vamos agora estudar $\widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ como sendo um subálgebra de funções L-analíticas. Dado $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vamos sempre denotar por $\widetilde{f}_\phi$ a função quociente de $\widetilde{f}$ por ϕ.

Proposição 2.11. *Sejam $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{M}(E)$. Então existe a função quociente $\widetilde{f}_\phi$ de $\widetilde{f}$ e $\widetilde{f}_\phi = f$.*

Demonstração. A função quociente de $\widetilde{f}$ com respeito a ϕ é a função analítica g que satisfaz $\phi(\widetilde{f}(z)) = g(\phi(z))$ para todo $z \in E_\Omega$. Mas, fixado $z \in E_\Omega$, usando a igualdade (1.1) temos que:

$$\phi(\widetilde{f}(z)) = \phi(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - z)^{-1}d\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - \phi(z))^{-1}d\lambda = f(\phi(z))$$

O resultado segue da unicidade da função quociente e da Proposição 2.8 (2). □

Usando o resultado acima, temos uma demonstração simples do teorema da aplicação espectral (Teorema 10.28, p. 283 em [25]) no caso particular em que a álgebra de Banach é comutativa.

Teorema 2.12. *(Teorema da Aplicação Espectral)*
Se $z \in E_\Omega$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ temos:
(a) $\sigma(\widetilde{f}(z)) = f(\sigma(z))$;
(b) $\widetilde{f}(z) \in G(E)$ se, e somente se, $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(z)$.

Demonstração.
(a) Temos pela Proposição 2.11 que

$$\sigma(\widetilde{f}(z)) = \{\phi(\widetilde{f}(z)); \phi \in \mathcal{M}(E)\} = \{f(\phi(z)); \phi \in \mathcal{M}(E)\} = f(\sigma(z)).$$

(b) Note que $\widetilde{f}(z) \in G(E)$ se, e somente, se $0 \notin \sigma(\widetilde{f}(z))$. Mas por (a) temos que $\sigma(\widetilde{f}(z)) = f(\sigma(z))$; portanto temos que $0 \notin \sigma(\widetilde{f}(z))$ se, e somente, se $0 \notin f(\sigma(z)) = \{f(\lambda)\ ;\ \lambda \in \sigma(z)\}$.
□

Vamos agora obter uma caracterização para o espectro de $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_d)$ quando E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade e Ω é um domínio simplesmente conexo. Este resultado estende o Teorema 2.5 ao contexto das C^*-álgebras comutativas com unidade.

Definição 2.13. *Sejam U e U' dois domínios em E. Dizemos que $f : U \to U'$ é um L-homeomorfismo se f é um homeomorfismo tal que $f \in \mathcal{H}_L(U)$ e $f^{-1} \in \mathcal{H}_L(U')$. Dizemos que U e U' são L-homeomorfos se existe um L-homeomorfismo $f : U \to U'$.*

Em [26] Warren determinou quais são os domínios L-homeomorfos a B_E no caso $E = C(X)$, onde X é um espaço de Hausdorff compacto. Nossa abordagem aqui é mais direta, pois nosso objetivo é estudar os domínios E_Ω, e neste caso podemos utilizar o Teorema da Aplicação de Riemann diretamente para obter o L-homeomorfismo.

Além disso iremos precisar do seguinte lema sobre aplicações L-analíticas:

Lema 2.14. *Sejam f e g duas aplicações L-analíticas em U_1 e U_2 respectivamente. Se $Im(f) \subset U_2$, então $g \circ f$ é L-analítica em U_1 e para todo $z \in U_1$ temos que $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.*

Demonstração. A demonstração é análoga àquela da regra da cadeia clássica para funções analíticas. □

Observação 2.15. *No caso em que E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade, temos $E_\Delta = B_E$, pois $\|z\| = \|\hat{z}\|_\infty = \sup\limits_{\phi \in \mathcal{M}(E)} |\hat{z}(\phi)| = \sup\limits_{\phi \in \mathcal{M}(E)} |\phi(z)|$ (Ver Teorema 11.18 em [25]). No caso geral só podemos afirmar que $B_E \subset E_\Omega$, fato que segue diretamente da fórmula do raio espectral. Mostraremos, no terceiro capítulo, que quando E é uma álgebra semi-simples é possível encontrar um L-homeomorfismo entre E_Δ e B_E.*

Teorema 2.16. *Seja $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo. Então existe um L-homeomorfismo entre E_Ω e E_Δ dado por $\widetilde{h} \in \widetilde{\mathcal{H}}(\Omega)$ onde h é uma função conforme entre Ω e Δ.*

Demonstração. Pela versão clássica do Teorema da Aplicação de Riemann, existe uma função analítica $h : \Omega \to \Delta$ que é bijetiva com inversa $h^{-1} : \Delta \to \Omega$ analítica. Consideramos agora as aplicações L-analíticas $\widetilde{h} : E_\Omega \to E_\Delta$ e $\widetilde{h^{-1}} : E_\Delta \to E_\Omega$. Pelo Teorema 1.27, temos que $(\widetilde{h} \circ \widetilde{h^{-1}})(z) = z$ para todo $z \in E_\Delta$ e temos também que $(\widetilde{h^{-1}} \circ \widetilde{h})(w) = w$ para todo $w \in E_\Omega$. Portanto $\widetilde{h}$ é uma aplicação L-analítica com inversa L-analítica. □

No restante desta seção iremos reservar $\widetilde{h}$ para representar aplicações L-homeomorfas entre E_Ω e E_Δ obtidas pelo Teorema da Aplicação de Riemann.

O próximo resultado é uma consequência direta da observação acima sobre E_Ω.

Corolário 2.17. *Se E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade e $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ é um domínio simplesmente conexo, existe uma aplicação $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathcal{H}}(E_\Omega)$ L-homeomorfa entre B_E e E_Ω.*

Proposição 2.18. *Sejam E uma C^*-álgebra comutativa com unidade, $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo e $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$. Então para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$, existe uma função $f_\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_\phi(\phi(z)) = \phi(f(z))$ para todo $z \in E_\Omega$.*

Demonstração. Considere a aplicação $f \circ \widetilde{h^{-1}} : B_E \to E$. Pelo Lema 2.14 e pelo Teorema 2.16 temos que $f \circ \widetilde{h^{-1}} \in \mathcal{H}_L(B_E)$. Então existe uma sequência $(a_n) \subset E$ tal que $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|a_n\|} \leq 1$ e, para todo $w \in B_E$, temos

$$f \circ \widetilde{h^{-1}}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

Assim, para todo $z \in E_\Omega$,

$$f(z) = (f \circ \widetilde{h^{-1}})(\widetilde{h}(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\widetilde{h}(z))^n;$$

portanto

$$\phi(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(a_n)(\phi(\widetilde{h}(z)))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(a_n)(h(\phi(z)))^n,$$

onde a última igualdade segue da Proposição 2.11. Como a igualdade acima vale para todo $z \in E_\Omega$, concluímos que $f_\phi(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \phi(a_n)(h(\lambda))^n$, para todo $\lambda \in \Omega$ satisfaz $f_\phi \circ \phi = \phi \circ f$. □

Lema 2.19. *Seja E uma C^*-álgebra comutativa com unidade e $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo. Se $z_0 \in E_\Omega$ e $0 < r < d_{E_\Omega}(z_0) = \inf\limits_{w \in E_\Omega} \|z_0 - w\|$, então $\widetilde{h}(B_r(z_0))$ é um subconjunto B_E-limitado de B_E.*

Demonstração. Basta mostrar que existe $0 < k_0 < 1$ tal que $\widetilde{h}(B_r(z_0)) \subset B_{k_0}(0)$. Pela Proposição 2.11 temos que $\widetilde{h}_\phi = h$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$, e pelo Lema 1.35 temos que $\phi(B_r(z_0)) = \Delta_r(\phi(z_0))$. Assim concluímos que $\phi(\widetilde{h}(B_r(z_0))) = h(\Delta_r(\phi(z_0)))$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$. Usando argumento análogo ao usado na demonstração do Lema 1.35, temos que $\phi(\overline{B_r(z_0)}) = \overline{\Delta_r(\phi(z_0))} \subset \Omega$.

Tome $K_0 = \bigcup\limits_{\phi \in \mathcal{M}(E)} \overline{\Delta_r(\phi(z_0))} \subset \Omega$. Vamos mostrar que K_0 é um conjunto compacto. É um fato conhecido (ver [25], Teorema 11.9, p. 280) que se E é uma álgebra de Banach comutativa, então $\mathcal{M}(E)$ é um espaço de Hausdorff compacto com respeito a topologia de Gelfand τ_G. Como $\widehat{z_0} \in C(\mathcal{M}(E))$, concluímos que o conjunto $\widehat{z_0}(\mathcal{M}(E)) = \{\phi(z_0); \phi \in \mathcal{M}(E)\}$ é compacto em $\mathbb{C}$. Daí existe um $r' > 0$ tal que $\{\phi(z_0); \phi \in \mathcal{M}(E)\} \subset \Delta_{r'}$.

Afirmação 1: K_0 é um conjunto limitado.

De fato, dado $\omega \in K_0$ existe $\phi_\omega \in \mathcal{M}(E)$ tal que $\omega \in \overline{\Delta_r(\phi_\omega(z_0))}$ e portanto

$$|\omega| \leq |\omega - \phi_w(z_0)| + |\phi_\omega(z_0)| < r + r'.$$

Como w foi tomado arbitrariamente, concluímos que $K_0 \subset \Delta_{r+r'}$; em particular, K_0 é limitado.

Afirmação 2: K_0 é fechado.

De fato, se $\omega_0 \in \mathbb{C} \backslash K_0$, temos que $\omega_0 \notin \{\phi(z_0); \phi \in \mathcal{M}(E)\} = \widehat{z}(\mathcal{M}(E))$ e, por compacidade, existe $\phi_0 \in \mathcal{M}(E)$ tal que $|\omega_0 - \phi_0(z_0)| = \inf\limits_{\phi \in \mathcal{M}(E)} |\omega_0 - \phi(z_0)| = s_0$. Como $\omega_0 \notin K_0$, é claro que $s_0 > r$. Tome $r_0 = s_0 - r > 0$. Vamos mostrar que $\Delta_{r_0}(\omega_0) \cap K_0 = \emptyset$. De fato, se $t \in \Delta_{r_0}(\omega_0) \cap K_0$, existe $\phi_t \in \mathcal{M}(E)$ tal que $t \in \overline{\Delta_r(\phi_t(z_0))}$, e temos que

$$|\omega_0 - \phi_t(z_0))| \leq |\omega_0 - t| + |t - \phi_t(z_0)| < r_0 + r = s_0 = \inf_{\phi \in \mathcal{M}(E)} |\omega_0 - \phi(z_0)|,$$

o que é um absurdo. Assim, mostramos que $\mathbb{C} \backslash K_0$ é um conjunto aberto; portanto, K_0 é fechado.

Das afirmações 1 e 2 temos que K_0 é um conjunto compacto em $\mathbb{C}$. Como $h : \Omega \to \Delta$ é contínua, temos que $h(K_0)$ é um subconjunto compacto de Δ; portanto existe $0 < k_0 < 1$ tal que

$$h(K_0) \subset \Delta_{k_0} \subset \overline{\Delta_{k_0}} \subset \Delta.$$

Como, por hipótese, E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade e para todo $z \in B_r(z_0)$ temos que $\phi(z) \in \Delta_r(\phi(z_0)) \subset K_0$, obtemos

$$\left\| \widetilde{h}(z) \right\| = \sup_{\phi \in \mathcal{M}(E)} |h(\phi(z))| \leq k_0 < 1.$$

Concluímos assim que $\widetilde{h}(B_r(z_0)) \subset \overline{B_{k_0}} \subsetneq B_E$, isto é, $\widetilde{h}(B_r(z_0))$ é um conjunto B_E-limitado. $\square$

A partir daqui, τ_G denotará a topologia de Gelfand e τ_π a restrição a $\mathcal{M}(E) \times \Omega$ da topologia produto de $\mathcal{M}(E) \times \mathbb{C}$.

Teorema 2.20. *Sejam E uma C^*-álgebra comutativa com unidade e $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo. O espectro $\mathcal{M}(\mathcal{H}_L(E_\Omega))$ é homeomorfo a $\mathcal{M}(E) \times \Omega$ pela aplicação*

$$\delta : (\mathcal{M}(E) \times \Omega, \tau_\pi) \longrightarrow (\mathcal{M}(\mathcal{H}_L(E_\Omega)), \tau_G)$$

definida por $\delta(\phi, \lambda_0)(f) = f_\phi(\lambda_0)$ para toda $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$.

Demonstração. Vamos mostrar que δ está bem definida. De fato, pela Proposição 2.18 temos que dados $f \in \mathcal{H}(E_\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{M}(E)$, existe uma função $f_\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$, de modo que podemos definir $\delta(\phi, \lambda_0)(f) = f_\phi(\lambda_0)$ para todo $(\phi, \lambda_0) \in \mathcal{M}(E) \times \Omega$. Pelo Lema 1.39 é imediato que $\delta(\phi, \lambda_0)$ é um homomorfismo. Lembrando que pela Proposição 2.8 temos $\phi(E_\Omega) = \Omega$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$, o mesmo argumento usado no Teorema 2.3 mostra que $\delta(\phi, \lambda_0)$ é não nulo. Resta mostrar que $\delta(\phi, \lambda_0)$ é contínuo na topologia τ_d.

Tome uma rede $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ em $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ tal que $f_\alpha \overset{\tau_d}{\to} f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$. Como $\lambda_0 \in \Omega$, temos que $\lambda_0 \mathbf{e} \in E_\Omega$ e, como E_Ω é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(\lambda_0 \mathbf{e}) \subset E_\Omega$. Temos então que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\alpha > \alpha_0$ temos que

$$\sup_{z \in B_r(\lambda_0 \mathbf{e})} \|f_\alpha(z) - f(z)\| < \epsilon.$$

Em particular, para todo $\alpha > \alpha_0$,

$$\|f_\alpha(\lambda_0 \mathbf{e}) - f(\lambda_0 \mathbf{e})\| < \epsilon.$$

Lembrando agora que $f_\phi(\lambda) = \phi(f(z))$, onde $\phi(z) = \lambda$, temos

$$\begin{aligned}|\delta(\phi, \lambda_0)(f_\alpha) - \delta(\phi, \lambda_0)(f)| &= |(f_\alpha)_\phi(\lambda_0) - (f)_\phi(\lambda_0)| \\ &= |\phi\left(f_\alpha(\lambda_0 \mathbf{e}) - f(\lambda_0 \mathbf{e})\right)| \\ &\leq \|f_\alpha(\lambda_0 \mathbf{e}) - f(\lambda_0 \mathbf{e})\| < \epsilon.\end{aligned}$$

Concluímos então que $\delta(\phi, \lambda_0)$ é um homomorfismo contínuo em $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_d)$, e assim δ está bem definida.

A mesma demonstração usada no Teorema 2.3 mostra que δ é injetiva. Mostremos que δ é sobrejetiva.

Primeiro, observe que dado $f \in \mathcal{H}_L(B_E)$, pelo Lema 2.14 a aplicação $f \circ \widetilde{h}$ é L-analítica em E_Ω.

Agora, dado $\psi \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$, definimos

$$\begin{aligned}\psi_h : \mathcal{H}_L(B_E) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \psi(f \circ \widetilde{h}).\end{aligned}$$

Pela observação acima vemos que ψ_h está bem definida. É fácil também ver que ψ_h é um homomorfismo, pois $(f+g) \circ \widetilde{h} = f \circ \widetilde{h} + g \circ \widetilde{h}$ e $(f \cdot g) \circ \widetilde{h} = (f \circ \widetilde{h}) \cdot (g \circ \widetilde{h})$. Além disso ψ_h é não nulo, pois $\psi_h(\widetilde{h^{-1}}) = \psi(P_{\mathbf{e},1}) = 1$.

Vamos agora mostrar que ψ_h é um homomorfismo contínuo com respeito à topologia τ_d. Tome $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma rede em $\mathcal{H}_L(B_E)$ tal que $f_\alpha \xrightarrow{\tau_d} f \in \mathcal{H}_L(B_E)$. Vamos mostrar que $f_\alpha \circ \widetilde{h} \xrightarrow{\tau_d} f \circ \widetilde{h}$.

Sejam $z_0 \in E_\Omega$ e $0 < r < d_{E_\Omega}(z_0)$. Pelo Lema 2.19 , $\widetilde{h}(B_r(z_0))$ é um subconjunto limitado de B_E. Agora, por hipótese $f_\alpha \xrightarrow{\tau_d} f$ e, como $\tau_d = \tau_b$ em $\mathcal{H}_L(B_E)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que

$$\sup_{z \in B_r(z_0)} \left\| f_\alpha(\widetilde{h}(z)) - f(\widetilde{h}(z)) \right\| = \sup_{w \in \widetilde{h}(B_r(z_0))} \|f_\alpha(w) - f(w)\| < \epsilon, \text{ para todo } \alpha > \alpha_0.$$

Concluímos então que $f_\alpha \circ \widetilde{h} \xrightarrow{\tau_d} f \circ \widetilde{h}$. Agora, como ψ é contínua em $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_d)$, temos que

$$\psi_h(f_\alpha) = \psi(f_\alpha \circ \widetilde{h}) \to \psi(f \circ \widetilde{h}) = \psi(f).$$

Note agora que, para todo $a \in E$,

$$(\psi_h)_0(a) = \psi_h(P_{a,0}) = \psi(P_{a,0} \circ \widetilde{h}) = \psi(P_{a,0}) = \psi_0(a),$$

de modo que $(\psi_h)_0 = \psi_0$.

Mostramos no Teorema 2.3 que todo elemento θ de $\mathcal{M}(\mathcal{H}_L(B_E))$ é da forma $\delta(\theta_0, \mu_0)$, onde $\mu_0 \in \Delta$ e θ_0 é o homomorfismo de E em $\mathbb{C}$ induzido por θ.

Assim, dado $g \in \mathcal{H}_L(B_E)$, $\psi_h(g) = g_{\psi_0}(\mu_0)$. Seja $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$. A aplicação $f \circ \widetilde{h^{-1}} \in \mathcal{H}_L(B_E)$ e, portanto, pelo Teorema 1.30 temos que $f \circ \widetilde{h^{-1}}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ para todo $w \in B_E$. Observe agora que

$$\psi(f) = \psi(f \circ \widetilde{h^{-1}} \circ \widetilde{h}) = \psi_h(f \circ \widetilde{h^{-1}}) = (f \circ \widetilde{h^{-1}})_{\psi_0}(\mu_0),$$

onde $\mu_0 \in \Delta$.

Como h é uma bijeção entre Ω e Δ, existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que $h(\lambda_0) = \mu_0$. Assim,

$$\psi(f) = (f \circ \widetilde{h^{-1}})_{\psi_0}(\mu_0) = (f \circ \widetilde{h^{-1}})_{\psi_0}(h(\lambda_0)) = f_{\psi_0} \circ (\widetilde{h^{-1}})_{\psi_0} \circ h(\lambda_0) = f_{\psi_0} \circ h^{-1} \circ h(\lambda_0) = f_{\psi_0}(\lambda_0).$$

Portanto, $\psi(f) = f_{\psi_0}(\lambda_0)$ para toda $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$, donde concluímos que $\psi = \delta(\psi_0, \lambda_0)$.

Resta mostrar que δ e δ^{-1} são contínuas. O mesmo argumento usado no Teorema 2.4 mostra a continuidade de δ^{-1}.

Fixe agora $(\phi_0, \lambda_0) \in \mathcal{M}(E) \times \Omega$ e tome $(\phi_\alpha, \lambda_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ uma rede em $\mathcal{M}(E) \times \Omega$ convergindo para (ϕ_0, λ_0) na topologia produto. Queremos mostrar que $\delta(\phi_\alpha, \lambda_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge para $\delta(\phi_0, \lambda_0)$ na topologia de Gelfand τ_G.

Fixe $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$. Da definição de E_Ω temos que $\lambda_\alpha \mathbf{e} \in E_\Omega$ para todo $\alpha \in \Lambda$ e $\lambda_0 \mathbf{e} \in E_\Omega$. Como f é L-analítica em E_Ω (em particular contínua), temos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\alpha_1 \in \Lambda$ tal que

$$\|f(\lambda_\alpha \mathbf{e}) - f(\lambda_0 \mathbf{e})\| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } \alpha > \alpha_1.$$

Como $((\phi_\alpha, \lambda_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$ converge para (ϕ_0, λ_0) na topologia produto, existe $\alpha_2 \in \Lambda$ tal que

$$|(\phi_\alpha - \phi_0)(f(\lambda_0 \mathbf{e}))| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } \alpha > \alpha_2.$$

Assim, tomando $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $\alpha_0 > \alpha_1$ e $\alpha_0 > \alpha_2$, temos que para todo $\alpha > \alpha_0$,

$$\begin{aligned} |\delta(\phi_\alpha, \lambda_\alpha)(f) - \delta(\phi_0, \lambda_0)(f)| &= |f_{\phi_\alpha}(\lambda_\alpha) - f_{\phi_0}(\lambda_0)| \\ &= |\phi_\alpha(f(\lambda_\alpha \mathbf{e})) - \phi_0(f(\lambda_0 \mathbf{e}))| \\ &\leq |\phi_\alpha(f(\lambda_\alpha \mathbf{e}) - f(\lambda_0 \mathbf{e}))| + |\phi_\alpha(f(\lambda_0 \mathbf{e}) - \phi_0(f(\lambda_0 \mathbf{e}))| \\ &\leq \|f(\lambda_\alpha \mathbf{e}) - f(\lambda_0 \mathbf{e})\| + |(\phi_\alpha - \phi_0)(f(\lambda_0 \mathbf{e}))| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que $\delta(\phi_\alpha, \lambda_\alpha) \xrightarrow{\tau_G} \delta(\phi_0, \lambda_0)$. $\square$

Corolário 2.21. *Se E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade e $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ é um domínio simplesmente conexo em $\mathbb{C}$, então $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ é uma álgebra semi-simples.*

Demonstração. Basta observar que toda C^*-álgebra é semi-simples e o mesmo argumento usado na demonstração da Proposição 2.7 mostra que $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ é semi-simples. $\square$

2.3 O espectro de $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_0)$

Vamos considerar agora o espaço $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ munido da topologia τ_0 da convergência uniforme sobre os compactos de E_Ω. Como na seção anterior, E será uma C^*-álgebra comutativa com unidade. Sabemos que $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_0)$ é um espaço localmente convexo completo (ver Proposição 2.5, p. 34 em [24]) , embora não seja necessariamente um espaço de Fréchet.

No que segue iremos denotar o conjunto de todos os homomorfismos contínuos na topologia τ_0 não nulos de $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ por $\mathcal{M}_0(\mathcal{H}_L(E_\Omega))$ e, por abuso de linguagem, chamaremos este conjunto espectro de $(\mathcal{H}_L(E_\Omega), \tau_0)$.

Nosso objetivo é mostrar que o espectro $\mathcal{M}_0(\mathcal{H}_L(E_\Omega))$, munido da topologia de Gelfand, é homeomorfo a $\mathcal{M}(E) \times \Omega$ quando E é uma C^*-álgebra comutativa separável com unidade. Para mostrar este resultado, vamos precisar da noção de aproximação da identidade.

Definição 2.22. *Seja E uma álgebra de Banach comutativa. Chamamos de aproximação da identidade qualquer rede $(\boldsymbol{e}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ em E tal que $\|\boldsymbol{e}_\alpha z - z\| \to 0$ para todo $z \in E$.*

Observação 2.23. *É um resultado conhecido que toda C^*-álgebra possui uma aproximação da identidade, formada pelos elementos auto-adjuntos com norma menor ou igual a 1. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [23](Teorema 9.2.18, p. 873).*

Além disso, se E é separável, existe uma aproximação da identidade sequencial, isto é, existe $(\boldsymbol{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em B_E tal que $\|\boldsymbol{e}_n z - z\| \to 0$ para todo $z \in E$.

Para mostrar nosso resultado vamos precisar de alguns lemas.

Lema 2.24. *Seja E uma C^*-álgebra separável não necessariamente com unidade. Então para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$ temos que $\ker(\phi)$ é uma C^*-álgebra. Em particular existe uma sequência $\left(\boldsymbol{e}_n^\phi\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ker(\phi)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\boldsymbol{e}_n^\phi z - z\right\| = 0$ para todo $z \in \ker(\phi)$.*

Demonstração. Vemos que $\ker(\phi)$ é um ideal fechado de E e, portanto, uma subálgebra fechada de E. Como E é uma álgebra de Banach e $\phi \in \mathcal{M}(E)$, $\ker(\phi)$ é um ideal fechado de E e, portanto uma álgebra de Banach. Além disso, para todo $z \in \ker(\phi)$ temos que $z^* \in \ker(\phi)$, pois $\phi(z^*) = \overline{\phi(z)} = \overline{0} = 0$. Assim $\ker(\phi)$ é uma subálgebra fechada com respeito à involução, e com a restrição da involução, $\ker(\phi)$ é uma C^*-álgebra separável. O lema segue da Observação 2.23. $\square$

Lema 2.25. *Se ψ é um homomorfismo de $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ em $\mathbb{C}$, então $\psi(\widetilde{f}) = f(\lambda_0)$ para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, onde $\lambda_0 = \psi(P_{\boldsymbol{e},1})$.*

Demonstração. É um resultado conhecido (ver Proposição 5.3 em [17], p. 38) que todo homomorfismo de $\mathcal{H}(\Omega)$ em $\mathbb{C}$ é da forma $h_\lambda(f) = f(\lambda)$, onde $h_\lambda(Id) = \lambda \in \Omega$.

Agora, dado $\psi \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$, definimos a aplicação linear:

$$\psi_1 : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto \psi(\widetilde{f}).$$

Vamos mostrar que ψ_1 é um homomorfismo complexo em $\mathcal{H}(\Omega)$. Sejam $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sabemos, pelo Teorema 1.26, que $\widetilde{\mu f + g} = \mu\widetilde{f} + \widetilde{g}$ e $\widetilde{f \cdot g} = \widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$, portanto:

$$\psi_1(\mu f + g) = \psi(\widetilde{\mu f + g}) = \psi(\mu\widetilde{f} + \widetilde{g}) = \mu\psi(\widetilde{f}) + \psi(\widetilde{g}) = \mu\psi_1(f) + \psi_1(g)$$

e

$$\psi_1(f \cdot g) = \psi(\widetilde{f \cdot g}) = \psi(\widetilde{f} \cdot \widetilde{g}) = \psi(\widetilde{f}) \cdot \psi(\widetilde{g}) = \psi_1(f) \cdot \psi_1(g).$$

Assim concluímos que ψ_1 é um homomorfismo complexo em $\mathcal{H}(\Omega)$. Portanto $\psi(\widetilde{f}) = \psi_1(f) = f(\lambda_0)$ para todo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, onde $\lambda_0 = \psi_1(Id) = \psi(P_{e,1})$. □

Teorema 2.26. *(Teorema de Arzela-Ascoli)*
Sejam X um espaço métrico, E um espaço de Banach e $C(X, E)$ o conjunto das funções contínuas de X em E . Suponha que $\mathcal{F} \subset C(X, E)$ é uma família de funções satisfazendo as seguintes condições
(1) $\mathcal{F}$ é uma família equicontínua.
(2) Para todo $z \in X$ o conjunto $\overline{\{f(z); f \in \mathcal{F}\}}$ é compacto em Y.
Então o fecho de $\mathcal{F}$ com respeito à topologia de convergência uniforme sobre os compactos de X é um conjunto compacto de $C(X, Y)$.

Demonstração. Ver Teorema 6.4, p. 267 em [7]. □

No lema a seguir, fixado $\psi \in \mathcal{M}_0(\mathcal{H}_L(E_\Omega))$, definimos $\psi_0 \in \mathcal{M}(E)$ como na Proposição 2.1.

Lema 2.27. *Sejam $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$ e $\psi \in \mathcal{M}_0(\mathcal{H}_L(E_\Omega))$ tais que $f(z) \in \ker(\psi_0)$ para todo $z \in E_\Omega$. Então $f \in \ker(\psi)$.*

Demonstração. Seja $(\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma aproximação da identidade de $\ker(\psi_0)$ cuja existência é garantida pelo Lema 2.24. Lembramos que $P_{e_n,0}$ é a aplicação constante e_n. Vamos mostrar que a família de aplicações L-analíticas $\{P_{e_n,0} \cdot f; n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Arzela-Ascoli.
(1) A família $\{P_{e_n,0} \cdot f; n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua :

Tome $z_0 \in E_\Omega$ qualquer. Como f é uma aplicação L-analítica em E_Ω, em particular é contínua em z_0 e assim, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $z \in E_\Omega$ satisfaz $\|z - z_0\| < \delta$ então temos que $\|f(z) - f(z_0)\| < \epsilon$. Temos então que, se $z \in E_\Omega$, $\|z - z_0\| < \delta$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|(P_{e_n,0} \cdot f)(z) - (P_{e_n,0} \cdot f)(z_0)\| &= \|e_n f(z) - e_n f(z_0)\| \\ &= \|e_n(f(z) - f(z_0))\| \\ &\leq \|f(z) - f(z_0)\| < \epsilon.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\{P_{e_n,0}f; n \in \mathbb{N}\}$ é uma família equicontínua.

(2) Para todo $z \in E_\Omega$ o conjunto $\overline{\{(P_{e_n,0} \cdot f)(z); n \in \mathbb{N}\}}$ é compacto:

Fixe $z \in E_\Omega$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $(P_{e_n,0} \cdot f)(z) = e_n f(z)$ e, como $f(z) \in \ker(\psi_0)$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} e_n f(z) = f(z)$. Em particular, $((P_{e_n,0} \cdot f)(z))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente para $f(z)$ e, portanto, $\overline{\{(P_{e_n,0} \cdot f)(z); n \in \mathbb{N}\}}$ é um conjunto compacto.

Assim, passando a uma subsequência se necessário, pelo teorema de Arzela-Ascoli existe uma $g \in C(E_\Omega, E)$ tal que $P_{e_n,0}f \xrightarrow{\tau_\Omega} g$. Em particular temos que

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} e_n f(z) = f(z)$$

para todo $z \in E_\Omega$, e daí $P_{e_n,0}f \xrightarrow{\tau_\Omega} f$. Como $\psi(P_{e_n,0}) = \psi_0(e_n) = 0$, segue da continuidade de ψ que

$$\psi(f) = \psi(\lim_{n\to\infty} P_{e_n,0} \cdot f) = \lim_{n\to\infty} \psi(P_{e_n,0} \cdot f) = \lim_{n\to\infty} \psi_0(e_n)\psi(f) = 0,$$

provando que $f \in \ker(\psi)$. □

Teorema 2.28. *Sejam Ω domínio simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ e E uma C^*-álgebra comutativa com unidade $\mathbf{e}$. A aplicação*

$$\delta : (\mathcal{M}(E) \times \Omega, \tau_\pi) \longrightarrow (\mathcal{M}_0(\mathcal{H}_L(E_\Omega)), \tau_G)$$

definida por $\delta(\phi, \lambda_0)(f) = f_\phi(\lambda_0)$ para toda $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$ (onde f_ϕ denota a função quociente de f com respeito a ϕ) é um homeomorfismo.

Demonstração. A demonstração deste resultado segue as mesmas linhas da demonstração do Teorema 2.3. As demonstrações de que δ está bem definida, é injetiva e $\delta(\phi, \lambda_0)$ é um homomorfismo não nulo são completamente análogas à demonstração mencionada. Vamos mostrar a sobrejetividade de δ.

Fixado $\psi \in \mathcal{M}_0(\mathcal{H}_L(E_\Omega))$ seja ψ_0 definido como na Proposição 2.1. Tome $\lambda_0 = \psi(P_{\mathbf{e},1})$. Queremos mostrar que $\psi = \delta(\psi_0, \lambda_0)$.

Tome agora $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$ qualquer. A função f_{ψ_0} é analítica em $\Omega = \psi_0(E_\Omega)$, portanto $\widetilde{f_{\psi_0}} \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$. Considere agora a aplicação $f - \widetilde{f_{\psi_0}}$. Para todo $z \in E_\Omega$,

$$\psi_0(f(z) - \widetilde{f_{\psi_0}}(z)) = f_{\psi_0}(\psi_0(z)) - f_{\psi_0}(\psi_0(z)) = 0.$$

Concluímos então que $\left(f - \widetilde{f_{\psi_0}}\right)(z) \in \ker(\psi_0)$ para todo $z \in E_\Omega$; portanto, pelo Lema 2.27, temos que $f - \widetilde{f_{\psi_0}} \in \ker(\psi)$. Agora, pelo Lema 2.25,

$$0 = \psi(f - \widetilde{f_{\psi_0}}) = \psi(f) - \psi(\widetilde{f_{\psi_0}}) = \psi(f) - f_{\psi_0}(\lambda_0),$$

isto é, $\psi(f) = f_{\psi_0}(\lambda_0)$. Como tomamos $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$ qualquer, concluímos que $\psi = \delta(\psi_0, \lambda_0)$, e assim mostramos que δ é sobrejetiva.

A demonstração da continuidade de δ e δ^{-1} é completamente análoga a feita na demonstração do Teorema 2.20. □

Capítulo 3

Aplicações L-analíticas: resultados adicionais

Neste capítulo iremos apresentar alguns outros resultados sobre funções L-analíticas que não se relacionam diretamente com o cálculo do espectro. Na primeira seção buscamos uma forma de generalizar para o contexto de funções de L-analíticas o resultado importante de análise complexa que diz que os zeros de uma função analítica são isolados. Também incluímos generalizações dos lemas de Schwarz e Schwarz-Pick no contexto de C^*-álgebras comutativas com unidade.

Na segunda seção estudamos os ideais de $\mathcal{H}_L(U)$ para determinados domínios U. Mostramos que, diferentemente, do que ocorre para $\mathcal{H}(\Omega)$ (onde Ω é um domínio em $\mathbb{C}$), os ideais fechados de $\mathcal{H}_L(U)$ não são necessariamente todos principais. Especificamente mostramos que se a dimensão de E é infinita, então sempre existem ideais maximais fechados de $\mathcal{H}_L(U)$ que não são finitamente gerados (na verdade estes ideais possuem um número não enumerável de geradores).

Na terceira seção estendemos a noção de L-homeomorfismos descritos no capítulo anterior para espaços semi-simples.

3.1 Lemas de Schwarz e Schwarz-Pick para aplicações L-analíticas

Começamos esta seção obtendo uma caracterização das aplicações L-analíticas definidas em algumas álgebras particulares. Especificamente vamos estudar as aplicações L-analíticas nos espaços l_∞ e c. Esta caracterização será útil para os exemplos e contra-exemplos do restante do capítulo.

Considere a família de funcionais $\{e_m^*; m \in \mathbb{N}\}$ definida por $e_m^*(a) = \alpha_m$, para toda sequência $a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$. É fácil ver que estes funcionais são homomorfismos e que esta família separa pontos de l_∞.

Tome um domínio $U \subset l_\infty$ tal que f_ϕ exista para toda $f \in \mathcal{H}_L(U)$ e $\phi \in \mathcal{M}(l_\infty)$. Dada uma sequência $a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ definimos a aplicação $g : l_\infty \to l_\infty$ por $g(a) = (f_{\mathbf{e}_n^*}(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ temos que:

$$e_m^*(g(a)) = f_{\mathbf{e}_m^*}(\alpha_m) = f_{\mathbf{e}_m^*}(e_m^*(a)) = e_m^*(f(a)).$$

Como a família $\{e_m^*\}$ separa pontos de l_∞, concluímos que $f(a) = (f_{\mathbf{e}_n^*}(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ para toda sequência $a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$.

Vamos agora obter alguns resultados adicionais sobre aplicações L-analíticas. Uma das propriedades mais importantes das funções analíticas em um domínio Ω é o fato do conjunto de zeros de uma função analítica não nula não possuir pontos de acumulação, o qual não se estende para o caso das funções complexas de varias variáveis. Entretanto como alguns resultados da teoria clássica das funções analíticas se estendem ao contexto das aplicações L-analíticas, é natural investigar o que acontece em relação a este resultado específico. O exemplo a seguir mostra que o conjunto dos zeros de uma aplicação L-analítica não nula pode ter pontos de acumulação.

Exemplo 3.1. *Considere a aplicação $f : l_\infty \to l_\infty$ definida por $f(a) = (\alpha_1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ para todo $a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$. Usando a notação $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, podemos escrever $f = e_1 \cdot e_1^*$.*

Vamos mostrar que $f \in \mathcal{H}_L(l_\infty)$. De fato, fixado $a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, temos

$$f(a+h) - f(a) - he_1 = \alpha_1 + h_1 - \alpha_1 - h_1 = 0,$$

para todo $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$.

É imediato que $f = e_1 \cdot e_1^*$ se anula no ideal maximal $\ker(e_1^*) = \{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}; \lambda_1 = 0\}$, que é um subespaço de codimensão 1, mas f claramente é não nula.

No entanto é possível obter o seguinte resultado mais fraco sobre os zeros das aplicações L-analíticas:

Proposição 3.2. *Sejam $\phi \in \mathcal{M}(E)$, $f \in \mathcal{H}_L(U)$, onde U é um domínio em E, e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em U convergindo para $z \in U$ tal que $f(z_n) \in \ker(\phi)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\phi(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui um ponto de acumulação $\lambda = \phi(z)$ e a função quociente f_ϕ existe, então $f(z) \in \ker(\phi)$ para todo $z \in U$.*

Demonstração. Como existe f_ϕ analítica em $\phi(U)$ tal que $f_\phi(\phi(z)) = \phi(f(z))$ para todo $z \in U$, por hipótese

$$f_\phi(\lambda_n) = f_\phi(\phi(z_n)) = \phi(f(z_n)) = 0.$$

Como uma função analítica não nula só possui zeros isolados e por hipótese $\phi(z_n)$ tem pontos de acumulação, concluímos que $f_\phi \equiv 0$ em $\phi(U)$. Então, para todo $z \in U$,

$$\phi(f(z)) = f_\phi(\phi(z)) = 0.$$

De onde concluímos que $f(z) \in \ker(\phi)$ para todo $z \in U$.

$\square$

A hipótese de $\lambda = \phi(z)$ ser um ponto de acumulação da sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\phi(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é essencial, como verificamos no seguinte exemplo.

Exemplo 3.3. *Considere a aplicação $f \in \mathcal{H}_L(l_\infty)$ definida no exemplo anterior por $f = e_1 \cdot e_1^*$. Considere agora a sequência $z_n = \frac{1}{n}e_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É claro que $f(z_n) = (0, 0, 0, \ldots 0) \in ker(e_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a função $f_{e_1^*}$ existe. Mas a sequência $(e_1^*(z_n))_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ não possui pontos de acumulação e $e_1^*(f(e_1)) = 1 \neq 0$, logo $Im(f) \not\subset \ker(e_1^*)$.*

O Lema de Schwarz e o Lema de Schwarz-Pick (que enunciaremos abaixo), são dois resultados da teoria clássica das funções analíticas que são importantes por suas diversas aplicações.

Teorema 3.4. *(Lema de Schwarz) Seja $f \in \mathcal{H}(\Delta)$ tal que $Im(f) \subset \Delta$ e $f(0) = 0$. Então $|f(\lambda)| < |\lambda|$ para todo $\lambda \in \Delta$ e $|f'(0)| \leq 1$.*

Além disso, se $|f(\lambda)| = |\lambda|$ para algum $\lambda \neq 0$ ou $|f'(0)| = 1$, então $f(\lambda) = \alpha\lambda$ para algum $\alpha \in \partial\Delta$.

Teorema 3.5. *(Lema de Schwarz-Pick) Seja $f \in \mathcal{H}(\Delta)$ tal que $Im(f) \subset \Delta$. Então, para quaisquer $\lambda, \lambda_0 \in \Delta$ tais que $\lambda \neq \lambda_0$, temos que*

$$\left|\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{1 - \overline{f(\lambda_0)}f(\lambda)}\right| < \left|\frac{\lambda - \lambda_0}{1 - \overline{\lambda_0}\lambda}\right|.$$

No contexto das aplicações holomorfas (deriváveis no sentido de Fréchet) em espaços de Banach de dimensão infinita, a seguinte extensão do Lema de Schwarz é bem conhecida (por exemplo, ver Exercício 13D em [4], p.191).

Teorema 3.6. *Sejam U e V as bolas unitárias dos espaços de Banach E e F. Se $f : U \to V$ é uma função holomorfa e $f(0) = 0$, então:*
(a) $\|f(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in U$.
(b) Se para algum ponto $p \in U \setminus \{0\}$ temos a igualdade $\|f(p)\| = \|p\|$, então $\|f(\lambda p)\| \leq \|\lambda p\|$ para todo $|\lambda| < \|p\|^{-1}$.

A Seguir apresentaremos uma extensão do Lema de Schwarz ao caso das aplicações L-analíticas em C^*-álgebras comutativas com unidade. Lembramos que, por 1.16, se $f \in \mathcal{H}_L(U)$ e f_ϕ existe para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$ temos que:

$$\|f(z)\| = \left\|\widehat{f(z)}\right\|_\infty = \sup_{\phi \in \mathcal{M}(E)} |\phi(f(z))| = \sup_{\phi \in \mathcal{M}(E)} |f_\phi(\phi(z))|.$$

Teorema 3.7. *(Lema de Schwarz)*
Sejam E uma C^*-álgebra comutativa com unidade e $f \in \mathcal{H}_L(B_E)$ tal que $f(B_E) \subset B_E$ e $f(0) = 0$. Então, para todo $z \in B_E$,

$$\|f(z)\| \leq \|z\| \qquad e \qquad \|f'(0)\| \leq 1.$$

Demonstração. Como $f(0) = 0$, temos

$$0 = \phi(f(0)) = f_\phi(\phi(0)) = f_\phi(0),$$

para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$, e temos

$$|f_\phi(\lambda)| \leq \|f(\lambda \mathbf{e})\| < 1$$

para todo $\lambda \in \Delta = \phi(B_E)$.

Então, pelo Lema de Schwarz clássico e lembrando que pelo Lema 1.40 $(f_\phi)' = f'_\phi$, temos que

$$|f_\phi(\lambda)| \leq |\lambda| \quad \text{e} \quad \left|f'_\phi(0)\right| \leq 1$$

para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$ e $\lambda \in \Delta$.

Tome agora $z \in B_E$ qualquer. Para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$, $|f_\phi(\phi(z))| \leq |\phi(z)|$, e portanto pela versão clássica do Lema de Schwarz temos

$$\|f(z)\| = \sup_{\phi \in \mathcal{M}(E)} |f_\phi(\phi(z))| \leq \sup_{\phi \in \mathcal{M}(E)} |\phi(z)| = \|z\|.$$

Além disso, temos também que

$$\|f'(0)\| = \sup_{\phi \in \mathcal{M}(E)} \left|f'_\phi(0)\right| \leq 1.$$

□

O Lema de Schwarz-Pick não faz sentido, em geral, no contexto de aplicações holomorfas em espaços de Banach de dimensão infinita.

Teorema 3.8. *(Lema de Schwarz-Pick)*
Sejam E uma C^*-álgebra comutativa com unidade e $f \in \mathcal{H}_L(B_E)$ tal que $f(B_E) \subset B_E$. Então, para quaisquer $z, z_0 \in B_E$ tais que $z \neq z_0$, temos que

$$\left\|(f(z) - f(z_0))(\boldsymbol{e} - f(z_0)^* f(z))^{-1}\right\| < \left\|(z - z_0)(\boldsymbol{e} - z_0^* z)^{-1}\right\|.$$

Demonstração. Primeiro observamos que, pelo Teorema 1.13, tanto $(\mathbf{e}-f(z_0)^*f(z))$ quanto $(\mathbf{e}-z_0^*z)$ são elementos de $G(E)$. Agora, pelo Teorema 1.16, temos que $\phi(z_0^*)=\overline{\phi(z_0)}$ e $\phi(f(z_0)^*)=\overline{\phi(f(z_0))}=\overline{f_\phi(\phi(z_0))}$ para todo $\phi\in\mathcal{M}(E)$. Então, pela versão clássica do Lema de Schwarz-Pick, temos que :

$$\begin{aligned}\left\|(f(z)-f(z_0))(\mathbf{e}-f(z_0)^*f(z))^{-1}\right\| &= \sup_{\phi\in\mathcal{M}(E)}\left|\phi((f(z)-f(z_0))(\mathbf{e}-f(z_0)^*f(z))^{-1})\right|\\ &= \sup_{\phi\in\mathcal{M}(E)}\left|\frac{\phi(f(z))-\phi(f(z_0))}{1-\phi(f(z_0)^*)\phi((f(z)))}\right|\\ &= \sup_{\phi\in\mathcal{M}(E)}\left|\frac{f_\phi(\phi(z))-f_\phi(\phi(z_0))}{1-\overline{f_\phi(\phi(z_0))}f_\phi(\phi(z))}\right|\\ &< \sup_{\phi\in\mathcal{M}(E)}\left|\frac{\phi(z)-\phi(z_0)}{1-\overline{\phi(z_0)}\phi(z)}\right|\\ &= \left\|(z-z_0)(e-z_0^*z)^{-1}\right\|\end{aligned}$$

□

3.2 Ideais maximais em álgebras de aplicações L-analíticas

Nesta seção iremos fazer alguns comentários sobre os ideais de $\mathcal{H}_L(U)$, para certos tipos de domínios U em E.

Começamos com a seguinte definição:

Definição 3.9. *Seja $\phi\in\mathcal{M}(E)$. Se $U\subset E$ é um aberto tal que, para todo $f\in\mathcal{H}_L(U)$ existe uma f_ϕ analítica em $\phi(U)$ tal que*

$$\phi(f(z))=f_\phi(\phi(z))$$

para todo $z\in U$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}:\mathcal{H}_L(U)&\longrightarrow\mathcal{H}(\phi(U))\\ f&\longmapsto f_\phi\quad.\end{aligned}$$

Observe que $\widetilde{\phi}$ está bem definida pois, se f_ϕ existe, ela é necessariamente única.

Vamos mostrar agora que a aplicação $\widetilde{\phi}$ é um homomorfismo contínuo não nulo.

Teorema 3.10. *Nas condições acima, a aplicação*

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}:(\mathcal{H}_L(U),\tau_d)&\longrightarrow(\mathcal{H}(\phi(U)),\tau_0)\\ f&\longmapsto f_\phi\end{aligned}$$

é um homomorfismo de álgebras contínuo não nulo.

Demonstração. Tome $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathcal{H}_L(U)$. Pelo Lema 1.39, temos
$\widetilde{\phi}(\lambda f + g) = (\lambda f + g)_\phi = \lambda f_\phi + g_\phi = \lambda\widetilde{\phi}(f) + \widetilde{\phi}(g)$;
$\widetilde{\phi}(f \cdot g) = (f \cdot g)_\phi = f_\phi \cdot g_\phi = \widetilde{\phi}(f) \cdot \widetilde{\phi}(g)$.
Assim, $\widetilde{\phi}$ é um homomorfismo de álgebras. Note que $\widetilde{\phi}(P_{e,0}) = (P_{e,0})_\phi$ é a aplicação constante igual a 1, portanto $\widetilde{\phi}$ é não nula. Resta mostrar a continuidade.

Tome $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma rede em $\mathcal{H}_L(U)$ tal que $f_\alpha \xrightarrow{\tau_d} f$. Queremos mostrar que $\widetilde{\phi}(f_\alpha) \xrightarrow{\tau_0} \widetilde{\phi}(f)$. Tome K um subconjunto compacto qualquer de $\phi(U)$ e $\epsilon > 0$. Para cada $\lambda \in K$, tomamos $z_\lambda \in U$ tal que $\phi(z_\lambda) = \lambda$. Como U é um conjunto aberto, existe $r_\lambda > 0$ tal que $B_{r_\lambda}(z_\lambda) \subset U$. Pelo Lema 1.35 temos que $\Delta_{r_\lambda}(\lambda) = \phi(B_{r_\lambda}(z_\lambda)) \subset \phi(U)$. Claramente temos que $K \subset \bigcup_{\lambda\in K} \Delta_{r_\lambda}(\lambda) \subset \phi(U)$. Como o conjunto K é compacto, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_{r_{\lambda_i}}(\lambda_i) \subset \phi(U).$$

Denotemos r_{λ_i} e z_{λ_i} por r_i e z_i respectivamente. Por hipótese $f_\alpha \xrightarrow{\tau_d} f$, de modo que para cada $i = 1, \ldots, n$ existe um $\alpha_i \in \Lambda$ tal que para todo $\alpha > \alpha_i$

$$\|f_\alpha - f\|_{B_{r_i}(z_i)} < \epsilon.$$

Tome agora $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $\alpha_0 > \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Temos então que, para todo $\alpha > \alpha_0$,

$$\sup_{1\le i\le n} \|f_\alpha - f\|_{B_{r_i}(z_i)} < \epsilon.$$

Assim, para todo $\alpha > \alpha_0$,

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{\phi}(f_\alpha) - \widetilde{\phi}(f)\right\|_K &= \|(f_\alpha)_\phi - f_\phi\|_K \\
&= \sup_{\lambda\in K} |(f_\alpha)_\phi(\lambda) - f_\phi(\lambda)| \\
&\le \sup_{1\le i\le n} \sup_{\lambda\in\Delta_{r_i}(\lambda_i)} |(f_\alpha)_\phi(\lambda) - f_\phi(\lambda)| \\
&= \sup_{1\le i\le n} \sup_{z\in B_{r_i}(z_i)} |(f_\alpha)_\phi(\phi(z)) - f_\phi(\phi(z))| \\
&= \sup_{1\le i\le n} \sup_{z\in B_{r_i}(z_i)} |\phi(f_\alpha(z)) - \phi(f(z))| \\
&\le \sup_{1\le i\le n} \|f_\alpha - f\|_{B_{r_i}(z_i)} < \epsilon
\end{aligned}$$

Como tomamos K qualquer, concluímos que $\widetilde{\phi}(f_\alpha) \xrightarrow{\tau_0} \widetilde{\phi}(f)$, o que mostra a continuidade de $\widetilde{\phi}$. □

Observação 3.11. *Para todo* $\phi \in \mathcal{M}(E)$ *temos* $\ker(\widetilde{\phi}) = \{f \in \mathcal{H}_L(U); f(U) \subset \ker(\phi)\}$. *De fato, se* $f \in \ker(\widetilde{\phi})$, *temos que* $f_\phi \equiv 0$ *em* $\phi(U)$ *e, portanto,* $\phi(f(z)) = f_\phi(\phi(z)) = 0$ *para todo* $z \in U$. *Assim* $\ker(\widetilde{\phi}) \subset \{f \in \mathcal{H}_L(U); f(U) \subset \ker(\phi)\}$.

Reciprocamente suponha que $f \in \mathcal{H}_L(U)$ é tal que $f(U) \subset \ker(\phi)$. Então, para todo $z \in U$, $f_\phi(\phi(z)) = \phi(f(z)) = 0$, de modo que $f_\phi \equiv 0$ em $\phi(U)$. Concluímos assim que

$$\ker(\widetilde{\phi}) = \{f \in \mathcal{H}_L(U); f(U) \subset \ker(\phi)\}.$$

Nesta seção estamos interessados em domínios U de E nos quais $\widetilde{\phi}$ é sobrejetiva. Vamos ver alguns exemplos onde isto é verdade.

Exemplo 3.12. *Se U é estrelado, temos pelo Teorema 1.38 que f_ϕ existe para toda $f \in \mathcal{H}_L(U)$ e para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$. Portanto $\widetilde{\phi}$ é sobrejetiva para toda $\phi \in \mathcal{M}(E)$*

Exemplo 3.13. *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{C}$ e $U = E_\Omega$. Pela Proposição 2.8 temos que $\phi(E_\Omega) = \Omega$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$. Neste caso, dado $g \in \mathcal{H}(\phi(E_\Omega)) = \mathcal{H}(\Omega)$, temos pela Proposição 2.11 que $g = \widetilde{g}_\phi$, onde $\widetilde{g} \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$. Assim, $\widetilde{\phi}$ é sobrejetiva para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$.*

Ainda é um problema não resolvido decidir se $\widetilde{\phi}$ é sempre sobrejetiva ou não.

Observação 3.14. *Pela Observação 3.11, o homomorfismo $\widetilde{\phi}$ é injetivo se, e somente se, $\{f \in \mathcal{H}_L(U); f(U) \subset \ker(\phi)\} = \{0\}$.*

Vamos precisar do seguinte resultado básico da teoria de anéis, cuja demonstração é trivial.

Proposição 3.15. *Sejam R e R_1 anéis comutativos com unidade. Se $T : R \to R_1$ é um homomorfismo sobrejetivo não nulo, então $T(\mathcal{I})$ é um ideal de R_1 para todo ideal $\mathcal{I} \subset R$*

Nosso objetivo nesta seção é explorar a relação existente entre os ideais de $\mathcal{H}_L(U)$ e os ideais de E e de $\mathcal{H}(\phi(U))$. No restante da seção estaremos sempre considerando $\mathcal{H}_L(U)$ munido da topologia τ_d e $\mathcal{H}(\phi(U))$ munido da topologia τ_0.

Observação 3.16. *Usaremos as seguintes notações:*
(1) Dados $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_L(U)$ e $\phi \in \mathcal{M}(E)$, denotamos o conjunto $\widetilde{\phi}(\mathcal{A})$ por $\mathcal{A}_\phi$.
(2) Para cada $x \in U$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_L(U)$, denotamos o conjunto $\{f(x); f \in \mathcal{A}\}$ por $\mathcal{A}_x$.

Observação 3.17. *Note que $\mathcal{A}_x$ é a imagem de $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_L(U)$ pela função evaluação*

$$\begin{aligned} \delta_x : \mathcal{H}_L(U) &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

É fácil ver que δ_x é um homomorfismo de álgebras contínuo, o qual também é sobrejetivo e não nulo.

O resultado seguinte é uma consequência direta da Proposição 3.15.

Proposição 3.18. *Sejam $\phi \in \mathcal{M}(E)$, $x \in E$ e $\mathcal{I}$ um ideal em $\mathcal{H}_L(U)$.*
(1) Se a aplicação $\widetilde{\phi}$ é sobrejetora, então $\mathcal{I}_\phi$ é um ideal em $\mathcal{H}(\phi(U))$.
(2) O conjunto $\mathcal{I}_x$ é um ideal de E.

Proposição 3.19. *Sejam ϕ homomorfismo complexo não nulo em E tal que $\widetilde{\phi}$ seja sobrejetiva e seja $\mathcal{J}$ um ideal de $\mathcal{H}_L(U)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*
(1) Se $\ker(\widetilde{\phi}) \subset \mathcal{J}$, então $\mathcal{J}$ é maximal em $\mathcal{H}_L(U)$ se e só se $\mathcal{J}_\phi$ é um ideal maximal em $\mathcal{H}(\phi(U))$.
(2) Se $\mathcal{J}$ é maximal em $\mathcal{H}_L(U)$, então $\ker(\widetilde{\phi}) \not\subset \mathcal{J}$ se, e somente se, $\mathcal{J}_\phi = \mathcal{H}(\phi(U))$.
(3) $\mathcal{J} + \ker(\widetilde{\phi})$ é um ideal maximal de $\mathcal{H}_L(U)$ se, e somente se, $\mathcal{J}_\phi$ é um ideal maximal de $\mathcal{H}(\phi(U))$.

Demonstração.
(1) Ver Teorema 11, página 151 de [28].
(2) Se $\ker(\widetilde{\phi}) \not\subset \mathcal{J}$, temos que $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{J} + \ker(\widetilde{\phi})$. Como $\mathcal{J}$ é maximal, temos que $\mathcal{J} + \ker(\widetilde{\phi}) = \mathcal{H}_L(U)$ e, portanto,

$$\mathcal{J}_\phi = \widetilde{\phi}(\mathcal{J}) = \widetilde{\phi}(\mathcal{J} + \ker(\widetilde{\phi})) = \widetilde{\phi}(\mathcal{H}_L(U)) = \mathcal{H}(\phi(U)),$$

onde a última igualdade segue da sobrejetividade de $\widetilde{\phi}$.

Suponha agora $\mathcal{J}_\phi = \mathcal{H}(\phi(U))$ e, por absurdo, assumimos que $\ker(\widetilde{\phi}) \subset \mathcal{J}$. Por (1) $\mathcal{J}_\phi$ é um ideal maximal em $\mathcal{H}(\phi(U))$. Em particular, $\mathcal{J}_\phi \neq \mathcal{H}(\phi(U))$.
(3) Segue diretamente de (1) e da igualdade $\mathcal{J}_\phi = \widetilde{\phi}(\mathcal{J}) = \widetilde{\phi}(\mathcal{J} + \ker(\widetilde{\phi}))$. □

Considerando que δ_x é um homomorfismo não nulo de $\mathcal{H}_L(U)$ sobre E tal que $\ker(\delta_x) = \{f \in \mathcal{H}_L(U); f(x) = 0\}$, obtemos a seguinte proposição cuja demonstração é análoga à da proposição anterior.

Proposição 3.20. *Sejam $x \in E$ e $\mathcal{J}$ um ideal de $\mathcal{H}_L(U)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*
(1) Se $\{f \in \mathcal{H}_L(U); f(x) = 0\} \subset \mathcal{J}$, então $\mathcal{J}$ é maximal em $\mathcal{H}_L(U)$ se, e somente se, $\mathcal{J}_x$ maximal em E.
(2) Se $\mathcal{J}$ é maximal em $\mathcal{H}_L(U)$, então $\{f \in \mathcal{H}_L(U); f(x) = 0\} \not\subset \mathcal{J}$ se, e somente se, $\mathcal{J}_x = E$.
(3) $\mathcal{J} + \{f \in \mathcal{H}_L(U); f(x) = 0\}$ é um ideal maximal de $\mathcal{H}_L(U)$ se, e somente se, $\mathcal{J}_x$ é um ideal maximal de E.

Sejam E uma álgebra de Banach e $\phi \in \mathcal{M}(E)$. Sabemos que toda $f \in \mathcal{H}_L(U)$ possui uma função quociente f_ϕ se U é um domínio estrelado de E (ver Teorema 1.38). Mostramos também que quando E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade e Ω é um domínio simplesmente conexo em $\mathbb{C}$, então f_ϕ existe para toda $f \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$ (ver Corolário 2.18).

Dados $\phi \in \mathcal{M}(E)$ e $\lambda_0 \in \phi(U)$, sempre que toda $f \in \mathcal{H}_L(U)$ admite uma função quociente $f_\phi \in \mathcal{H}(\phi(U))$, temos que $\delta(\phi, \lambda_0) : \mathcal{H}_L(U) \to \mathbb{C}$, definida por $\delta(\phi, \lambda_0)(f) = f_\phi(\lambda_0)$, é um homomorfismo de $\mathcal{H}_L(U)$ em $\mathbb{C}$, e portanto $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))$ é um ideal maximal de $\mathcal{H}_L(U)$.

Antes de enunciar o próximo resultado vamos apresentar a seguinte definição:

Definição 3.21. *Seja I um ideal de uma álgebra de Banach E.*
(1) Dizemos que I é finitamente gerado se existem $x_1, \ldots x_n \in I$ tais que para todo $z \in E$, existem $z_1, \ldots z_n \in E$ tais que $z = x_1 z_1 + \ldots x_n z_n$. Se I possui somente um gerador, dizemos que I é principal.
(2) Dizemos que I é enumeravelmente gerado se existe um conjunto enumerável $\{x_1, \ldots x_n, \ldots\} \subset I$ tal que para todo $z \in E$, existe um número finito de $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in \{x_1, \ldots x_n, \ldots\}$ e elementos $z_1, \ldots z_n \in E$ tais que $z = x_{i_1} z_1 + \ldots x_{i_n} z_n$.

Observação 3.22. *Estamos assumindo aqui que todo conjunto finito é enumerável, de modo que todos os resultados enunciados para ideais enumeravelmente gerados são válidos para ideais finitamente gerados.*

Proposição 3.23.
Sejam $\phi \in \mathcal{M}(E)$ e $\lambda_0 \in \phi(U)$, onde U é um domínio (aberto e conexo) em E tal que f_ϕ existe para toda $f \in \mathcal{H}_L(U)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:
(1) Se $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))$ é um ideal principal em $\mathcal{H}_L(U)$, então $\ker(\phi)$ é um ideal principal em E.
(2) Se $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))$ é um ideal finitamente gerado em $\mathcal{H}_L(U)$, então $\ker(\phi)$ é finitamente gerado em E.
(3) Se $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))$ é um ideal enumeravelmente gerado em $\mathcal{H}_L(U)$, então $\ker(\phi)$ é enumeravelmente gerado em E.

Demonstração.
(2) Por hipótese, $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))$ é finitamente gerado por um conjunto de aplicações $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset \ker(\delta(\phi, \lambda_0))$. Tome $x_0 \in U$ tal que $\phi(x_0) = \lambda_0$.
Afirmação: $\{f \in \mathcal{H}_L(U); f(x_0) = 0\} \subset \ker(\delta(\phi, \lambda_0))$.
De fato, se $f \in \{g \in \mathcal{H}_L(U); g(x_0) = 0\}$, temos que $f_\phi(\lambda_0) = \phi(f(x_0)) = \phi(0) = 0$. Como tomamos f arbitrariamente, concluímos que $\{g \in \mathcal{H}_L(U); g(x_0) = 0\} \subset \ker(\delta(\phi, \lambda_0))$.

Segue da Afirmação que $\{f \in \mathcal{H}_L(U); f(x_0) = 0\} + \ker(\delta(\phi, \lambda_0)) = \ker(\delta(\phi, \lambda_0))$ e, pela pela Proposição 3.20, $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))_{x_0}$ é um ideal maximal em E.

Tomemos agora $f \in \ker(\delta(\phi, \lambda_0))$. Temos que $0 = f_\phi(\lambda_0) = \phi(f(x_0))$, o que implica em $f(x_0) \in \ker(\phi)$. Como f foi tomado arbitrário, segue que $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))_{x_0} \subset \ker(\phi)$.

Vamos mostrar agora que $\{f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0)\}$ é um conjunto gerador de $\ker(\phi)$. Conforme mostramos acima, $\{f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0)\} \subset \ker(\phi)$ e, portanto, $f_1(x_0)a_1 + \ldots + f_n(x_0)a_n \in$

$\ker(\phi)$ para todos $a_1, \ldots, a_n \in E$. Tomemos agora $a \in \ker(\phi)$ qualquer e consideremos a função $P_{a,0} : U \to E$ definida por $P_{a,0}(x) = a$, para todo $x \in U$. Observe que

$$0 = \phi(a) = \phi(P_{a,0}(x_0)) = (P_{a,0})_\phi(\lambda_0),$$

logo $P_{a,0} \in \ker(\delta(\phi, \lambda_0))$. Assim, existem $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{H}_L(U)$ tais que $f_1g_1+\ldots+f_ng_n = P_{a,0}$, de modo que $f_1(x_0)g_1(x_0)+\ldots+f_n(x_0)g_n(x_0) = a$. Daí, eliminando repetições, se necessário, concluímos que $\{f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0)\}$ é um conjunto de geradores de $\ker(\phi)$.
(1) Na demonstração de (2) vimos que o número de geradores de $\ker(\phi)$ é menor ou igual ao número de geradores de $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))$ e, portanto, $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))$ ser principal implica em $\ker(\phi)$ ser principal.
(3) A demonstração deste caso é totalmente análoga à demonstração de (2). Observamos aqui que não fica excluída a possibilidade de $\{f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots\}$ ser um conjunto finito devido a repetição de elementos. □

Um resultado importante sobre os ideais de funções analíticas em um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ é que todo ideal fechado em $\mathcal{H}(\Omega)$ é principal e, em particular, os ideais maximais fechados são principais (Ver Teorema 13.7 em [17], p.109). O próximo exemplo mostra que isto não é verdade no contexto das funções L-analítica.

Exemplo 3.24. *Vamos considerar o espaço*

$$E = c = \left\{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}; \exists \alpha \in \mathbb{C} \text{ tal que } \alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n\right\}.$$

Munido da soma e produto ponto a ponto e norma $\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$, *c é uma álgebra de Banach comutativa com unidade.*

É fácil verificar que a aplicação $\phi_l : c \to \mathbb{C}$, *definida por* $\phi_l((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, *é um elemento de* $\mathcal{M}(c)$. *Dado* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, *temos que* $\delta(\phi_l, \lambda_0) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(c))$ *e, portanto,* $\ker(\delta(\phi_l, \lambda_0))$ *é um ideal maximal fechado de* $\mathcal{H}_L(c)$. *Pela Proposição* 3.23, *se* $\ker(\delta(\phi_l, \lambda_0))$ *for um ideal principal, então,* $c_0 = \ker(\phi_l)$ *também será um ideal principal. Vamos mostrar que isto não é verdade.* *É fácil verificar que a aplicação* $\phi_l : c \to \mathbb{C}$ *definida por* $\phi_l((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ *é um elemento de* $\mathcal{M}(c)$. *Dado* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, *temos que* $\delta(\phi_l, \lambda_0) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(c))$ *e, portanto,* $\ker(\delta(\phi_l, \lambda_0))$ *é um ideal maximal fechado de* $\mathcal{H}_L(c)$. *Pela Proposição* 3.23, *se* $\ker(\delta(\phi_l, \lambda_0))$ *for um ideal principal, então,* $c_0 = \ker(\phi_l)$ *também será um ideal principal. Vamos mostrar que isto não é verdade.*

Suponha que exista $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ *tal que* $c_0 = \{(\mu_n\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}; (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c\}$. *Tomando* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, *temos que* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ *e então existe* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ *tal que* $\mu_n\alpha_n = \frac{1}{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *e isto implica em* $\mu_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Considere agora a sequência $(\mu_n \ln|\mu_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. *É fácil ver que* $(\mu_n \ln|\mu_n|)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. *Logo existe* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ *tal que* $\mu_n \ln|\mu_n| = \mu_n\alpha_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e, consequentemente, temos que*

$\alpha_n = \frac{\mu_n \ln|\mu_n|}{\mu_n} = \ln|\mu_n|$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln|\mu_n| = -\infty$ donde $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin c$, o que contradiz a escolha de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Assim concluímos que $c_0 = \ker(\phi_l)$ não é principal e, portanto, $\ker(\delta(\phi_l, \lambda_0))$ não é um ideal principal para todo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Vale a pena observar que estes são os únicos ideais de $\mathcal{H}_L(c)$ que não são principais. Para verificar isso basta notarmos o seguinte: $\mathcal{H}_L(c)$, munido da topologia τ_b, é uma álgebra de Fréchet, logo todo ideal maximal é o núcleo de algum homomorfismo contínuo e sabemos que os homomorfismos de $\mathcal{H}_L(c)$ são todos da forma $\delta(\phi, \lambda_0)$, onde $\phi \in \mathcal{M}(c)$ e $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (ver Teorema 2.5 em [21], p. 94). Lembramos que um resultado conhecido diz que os elementos do dual c^* de c têm a forma $T = \alpha_0\phi_l + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n^*$, onde $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots) \in l_1$. Vamos mostrar que os únicos elementos multiplicativos de c^* são $\phi_l, e_1^*, \ldots, e_n^*, \ldots$. Para isto, vamos considerar as sequências $e_j = (\delta_{nj})_{n\in\mathbb{N}}$, onde δ_{nj} é o delta de Kronecker.

É fácil ver que $e_i \cdot e_j = 0$ se $i \neq j$ e $(e_i)^2 = e_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dado $T \in \mathcal{M}(c)$, temos que $T = \alpha_0\phi_l + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n^*$, de modo que $T(e_i) = \alpha_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Além disso temos que $\alpha_i^2 = T(e_i^2) = T(e_i) = \alpha_i$ e, portanto, $\alpha_i \in \{0, 1\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $i \neq j$, a relação $0 = T(e_i \cdot e_j) = T(e_i)T(e_j) = \alpha_i.\alpha_j$ implica em $\alpha_i = 0$ ou $\alpha_j = 0$.

Considere agora a sequência $\boldsymbol{e} = (1, 1, 1, 1, \ldots)$. Como $\boldsymbol{e}$ é a identidade de c, temos que

$$1 = T(\boldsymbol{e}) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n. \tag{3.1}$$

Se $\alpha_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a equação 3.1 implica em $\alpha_0 = 1$ e, consequentemente, $T = \phi_l$.

Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{n_0} = 1$, então $\alpha_n = 0$ para todo $n \neq n_0$ e a equação 3.1 implica em $1 = \alpha_0 + \alpha_{n_0} = \alpha_0 + 1$ e, consequentemente $\alpha_0 = 0$ e $T = e_{n_0}^*$. Como tomamos $T \in \mathcal{M}(c)$ qualquer, temos que $\mathcal{M}(c) \subset \{\phi_l, e_1^*, \ldots, e_n^*, \ldots\}$, e portanto $\mathcal{M}(c) = \{\phi_l, e_1^*, \ldots, e_n^*, \ldots\}$.

Já verificamos que os ideais do tipo $\ker(\delta(\phi_l, \lambda_0))$ não são principais. Vamos agora considerar os ideais $\ker(\delta(e_m^*, \lambda_0))$. Por simplicidade usaremos a notação f_n no lugar de $f_{\boldsymbol{e}_n^*}$. Tome $f \in \ker(\delta(e_m^*, \lambda_0))$ qualquer. Pela caracterização das funções L-analíticas feita no início do capítulo, podemos escrever $f((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (f_n(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Além disso, temos que $0 = \delta(e_m^*, \lambda_0)(f) = f_m(\lambda_0)$, de modo que existe uma função $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $f_m(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)g(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Vamos considerar agora as famílias de funções $\{u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ e $\{v_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$, definidas por $u_n(\lambda) = 1$ e $v_n(\lambda) = f_n(\lambda)$ se $n \neq m$ e $u_m(\lambda) = \lambda - \lambda_0$ e $v_m(\lambda) = g(\lambda)$. É fácil verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos $f_n(\lambda) = u_n(\lambda)v_n(\lambda)$. Portanto,

$$f((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (f_n(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}} = u_n(\lambda)v_n(\lambda) = (u_n(\lambda)v_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}} = (u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}(v_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Vamos verificar que as aplicações $u((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ e $v((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ são L-analíticas em c.

Afirmação: $u((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_L(c)$:
Vamos mostrar que u é uma aplicação $L-$analítica em c e $u'((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) = e_m$. De fato, fixado $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$, temos que

$$\|u((\lambda_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}) - u((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) - e_m \cdot h\| =$$
$$\max\left\{\sup_{n\neq m}|1-1-0|, |\lambda_m + h_m - \lambda_m - h_m|\right\} = 0,$$

portanto u é L-diferenciável em $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como tomamos $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arbitrário segue a afirmação.

Aproveitamos para observar aqui que $\delta(e_m^*, \lambda_0)(u) = u + m(\lambda_0) = \lambda_0 - \lambda_0 = 0$; portanto $u \in \ker(\delta(e_m^*, \lambda_0))$.

Afirmação: $v((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_L(c)$.

Vamos mostrar que v é uma aplicação $L-$analítica em c e $v'((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\rho_n(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\rho_n(\lambda_n) = f_n'(\lambda_n)$ se $n \neq m$ e $\rho_m(\lambda_m) = g'(\lambda_m)$. Por hipótese temos que a aplicação $f((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (f_n(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é L-analítica. Fixado então $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $h = (h)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ satisfaz $\|h\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|h_n| < \delta_1$, temos

$$\|(f_n(\lambda_n + h_n))_{n\in\mathbb{N}} - (f_n(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}} - (f_n'(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}} \cdot h\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(\lambda_n + h_n) - f_n(\lambda_n) - f_n'(\lambda_n)h_n| < \epsilon\,\|h\|.$$

Sabemos também que g é analítica em $\mathbb{C}$. Logo existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $|h_m| < \delta_2$ temos

$$|g(\lambda_m + h_m) - g(\lambda_m) - g'(\lambda_m)h_m| < \epsilon\,|h_m|.$$

Então, se $\|h\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|h_n| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que

$$\|v((\lambda_n + h_n)_{n\in\mathbb{N}}) - v((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) - v'((\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}) \cdot h\| =$$
$$\max\left\{\sup_{n\neq m}|f_n(\lambda_n + h_n) - f_n(\lambda_n) - f_n'(\lambda_n)h_n|, |g(\lambda_m + h_m) - g(\lambda_m) - g'(\lambda_m)h_m|\right\} < \epsilon\,\|h\|,$$

de onde segue a afirmação.

Note que, como a aplicação u independe da escolha da f, para todo $f \in \ker(\delta(e_m^*, \lambda_0))$, existe $v \in \mathcal{H}_L(c)$ tal que $f = uv$, isto é, $\ker(\delta(e_m^*, \lambda_0))$ é um ideal principal gerado pela aplicação u.

Observamos que o fato de $\mathcal{H}_L(c)$ possuir um ideal maximal fechado que não é principal está relacionado com o fato de c não ter dimensão finita. Mostraremos a seguir que se E tem dimensão infinita então necessariamente $\mathcal{H}_L(E)$ possui um ideal maximal fechado que não é finitamente gerado. Para isso vamos utilizar o seguinte teorema já conhecido.

Teorema 3.25. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade e suponha que todo ideal maximal de A seja enumeravelmente gerado. Então a dimensão de A é finita.*

Demonstração. Teorema 3.1 de [6], página 184. □

Como consequência deste resultado, temos que:

Proposição 3.26. *Se todo ideal maximal fechado de $\mathcal{H}_L(E)$ é enumeravelmente gerado (ou finitamente gerado ou principal) então E têm dimensão finita. Em particular, se E tem dimensão infinita existe um ideal maximal fechado de $\mathcal{H}_L(E)$ que não é enumeravelmente gerado.*

Demonstração. Basta observar que, para quaisquer $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ e $\phi \in \mathcal{M}(E)$, os funcionais $\delta(\phi, \lambda_0)$ são contínuos em $(\mathcal{H}_L(E), \tau_b)$ (Ver Teorema 2.5 em [21], p.94). Logo $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))$ é um ideal maximal fechado em $(\mathcal{H}_L(E), \tau_b)$.

Por hipótese, $\ker(\delta(\phi, \lambda_0))$ é enumeravelmente gerado para quaisquer $\phi \in \mathcal{M}(E)$ e $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Portanto pela Proposição 3.23 (3) temos que $\ker(\phi)$ é enumeravelmente gerado para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$. Assim todo ideal maximal de E é enumeravelmente gerado, e pelo Teorema anterior concluímos que E tem dimensão finita. □

Observação 3.27. *No caso de uma álgebra de Banach arbitrária E e de um domínio estrelado arbitrário U em E, a afirmação da proposição anterior continua válida se substituirmos $\mathcal{H}_L(E)$ por $\mathcal{H}_L(U)$, uma vez que $\delta(\phi, \lambda_0)$ está definido e é contínuo para todo $(\phi, \lambda_0) \in \mathcal{M}(E) \times \mathbb{C}$.*

Além disso se E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade, podemos substituir também $\mathcal{H}_L(E)$ por $\mathcal{H}_L(E_\Omega)$ para todo domínio simplesmente conexo Ω de $\mathbb{C}$.

É natural nos perguntarmos o que ocorre quando E tem dimensão finita. Veremos, no exemplo a seguir, um espaço de dimensão finita E onde todo ideal maximal fechado de $\mathcal{H}_L(E)$ é principal. Não sabemos se isto é verdade para todo espaço de dimensão finita.

Exemplo 3.28. *Considere $E = \mathbb{C}^n = \{(\lambda_1, \dots \lambda_n); \lambda_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, \dots, n\}$, munido das operações de álgebra definidas ponto a ponto e norma dada por $\|(\lambda_1, \dots \lambda_n)\| = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$. Como fizemos para c e l_∞ adotamos a notação $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1 \dots, 0)$,..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Por um argumento análogo ao usado no Exemplo 3.24, é fácil mostrar que $\mathcal{M}(\mathbb{C}^n) = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, onde $e_i^*(\lambda_1, \dots \lambda_n) = \lambda_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Também é possível usar um argumento totalmente análogo ao usado para $\mathcal{H}_L(c)$ no início do capítulo para mostrar que toda aplicação $f \in \mathcal{H}_L(\mathbb{C}^n)$ tem a forma $f(\lambda_1, \dots \lambda_n) = (f_1(\lambda_1)), \dots f_n(\lambda_n))$, onde $f_i = f_{e_i^*}$. O mesmo raciocínio feito na parte final do exemplo anterior nos mostra que os ideais maximais fechados de $\mathcal{H}_L(\mathbb{C}^n)$ são da forma $\ker(\delta(e_i^*, \lambda_0))$ para $i = 1, \dots n$ e $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Adaptando o mesmo raciocínio do Exemplo 3.24 mostramos que $\ker(\delta(e_i^*, \lambda_0))$ é* *um ideal principal gerado por uma aplicação* $u(\lambda_1, \ldots \lambda_n) = (1, 1, 1, \ldots, \lambda_i - \lambda_0, 1, \ldots, 1)$, *e portanto todo ideal maximal fechado de* $\mathcal{H}_L(\mathbb{C})$ *é principal.*

3.3 L-homeomorfismos em álgebras semi-simples

Na seção 2.2 definimos L-homeomorfismos entre domínios de uma álgebra de Banach. E mostramos que se E é uma C^*-álgebra comutativa com unidade e $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um domínio simplesmente conexo diferente de $\mathbb{C}$, então B_E é L-homeomorfo a E_Ω. Nesta seção vamos estender este resultado para álgebras semi-simples.

Quando $E = \mathbb{C}$, as aplicações L-analíticas são as funções analíticas usuais, e sabemos pelo teorema da aplicação de Riemann que quaisquer dois domínios domínios simplesmente conexos contidos propriamente em $\mathbb{C}$ são L-homeomorfos (ou conformais, na terminologia usual). Em sua tese Glickfeld mostra que isto não é verdade em geral, apresentado um exemplo de um domínio simplesmente conexo D na álgebra $C([0,1])$ tal que D é homeomorfo a bola B_E mas D não é L-homeomorfo a B_E (ver [9] , pg.45 ou [26] pg.147).

A seguir vamos mostrar uma versão enfraquecida do teorema da Aplicação de Riemann.

Antes de enunciar nosso teorema vamos estabelecer algumas notações e fazer algumas observações que serão úteis mais a frente. Seja $\partial\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$. Definimos uma curva fechada simples em uma álgebra de Banach E como sendo uma aplicação contínua $\Gamma : \partial\Delta \to E$ tal que, para cada $\phi \in \mathcal{M}(E)$, $\phi \circ \Gamma$ é um homeomorfismo em $\mathbb{C}$.

Observe que a imagem de cada $\phi \circ \Gamma$ será uma curva de Jordan em $\mathbb{C}$. Definimos o interior da curva Γ como sendo o conjunto

$$int(\Gamma) = \{z \in E \ ; \ \phi(z) \in int(\phi \circ \Gamma), \ \forall \phi \in \mathcal{M}(E)\},$$

onde $int(\phi \circ \Gamma)$ é o interior da curva de Jordan $\phi \circ \Gamma$ no sentido usual.

Não é claro se $int(\Gamma)$ é não vazio em geral, mas é fácil verificar que $int(\Gamma)$ sempre é um subconjunto aberto de E.

Vamos mostrar agora o seguinte resultado, que é uma versão enfraquecida do Teorema da Aplicação de Riemann no contexto das álgebras de Banach semi-simples.

Teorema 3.29. *Sejam* $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ *um domínio simplesmente conexo e* E *uma álgebra de Banach semi-simples. Então* B_E *é* L*-homeomorfo a* E_Ω.

Demonstração. Considere a curva simples fechada simples $\Gamma_0 : \partial\Delta \longrightarrow E$ dada por $\Gamma_0(\lambda) = \lambda\mathbf{e}$, onde $\mathbf{e}$ é a unidade de E. É de verificação imediata que para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$ temos que $\phi(\Gamma_0(\lambda)) = \lambda$, de modo que $\phi \circ \Gamma_0$ é um homeomorfismo. Além disso, temos que $int(\phi \circ \Gamma_0) = \Delta$ para todo $\phi \in \mathcal{M}(E)$.

Note que:

$$\begin{aligned} int(\Gamma_0) &= \{z \in E\ ;\ \phi(z) \in int(\phi \circ \Gamma)\ , \forall \phi \in \mathcal{M}(E)\} \\ &= \{z \in E\ ;\ \sigma(z) \subset \Delta\} = E_\Delta \end{aligned}$$

Warren mostrou em [26], na p. 149, que em uma álgebra semi-simples E, B_E é L-homeomorfo a $int(\Gamma)$ por uma aplicação $g : B_E \to E_\Delta$ quando Γ satisfaz a seguinte condição: para $T \in E^*$, $T \circ \Gamma$ possui uma extensão continua em $\overline{\Delta}$ e holomorfa em Δ.

No nosso caso particular, $T \circ \Gamma_0(\lambda) = \lambda$ para todo $\lambda \in \partial\Delta$. Então a identidade em $\mathbb{C}$ é uma extensão de $T \circ \Gamma_0$. Concluímos daí que existe um L-homeomorfismo $g : B_E \to E_\Delta$.

Por outro lado, temos pelo Teorema da Aplicação de Riemann que existe uma função analítica $h : \Omega \to \Delta$ que é uma bijeção (em particular h^{-1} é analítica). Consideremos agora as aplicações obtidas via o cálculo funcional $\widetilde{h} \in \mathcal{H}_L(E_\Omega)$ e $\widetilde{h^{-1}} \in \mathcal{H}_L(E_\Delta)$. Como consequência direta de 1.27, temos que $\widetilde{h}$ é uma bijeção de E_Ω em E_Δ, L-analítica, cuja inversa é a aplicação L-analítica $\widetilde{h^{-1}}$. Assim concluímos que E_Δ é L-homeomorfo a E_Ω. Utilizando o Lema 2.14 concluímos então que $\widetilde{h^{-1}} \circ g : B_E \to E_\Omega$ é um L-homeomorfismo entre B_E e E_Ω e isto completa a demonstração. □

Para álgebras de Banach quaisquer (não necessariamente semi-simples) temos a seguinte versão enfraquecida do teorema 3.29, cuja demonstração foi feita na prova do mesmo.

Teorema 3.30. *Seja Ω um domínio simplesmente conexo em $\mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Então existe um L-homeomorfismo entre E_Ω e E_Δ dado por $\widetilde{h} \in \widetilde{H}(\Omega)$ onde h é uma função conforme entre Ω e Δ.*

Referências Bibliográficas

[1] R.M. Aron, B.J. Cole and T.W. Gamelin, *Weak-star continuous analytic functions*, Canadian J. of Math. **47** (4) (1995), 673-683.

[2] E.K. Blum, *A theory of analytic functions in Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 343-370.

[3] P.A. Burlandy and L.A. Moraes, *The spectrum of an algebra of weakly continous holomorphic mapping*, Indag. Math (N.S.) **11** (4) (2000) 525-532.

[4] S.B. Chae, *Holomorphy and Calculus in Normed Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1985.

[5] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1990.

[6] H.G. Dales and W. Zelasko, *Generators of maximal left ideals in Banach algebras*, Studia Math. 12 (2012),173-193

[7] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[8] D. Garcia, M.L. Lourenço, L.A. Moraes and O. Paques, *The spectra of some algebras of analytic mappings*, Indag. Math. (N.S.) **10** (3) (1999), 393-406.

[9] B.W. Glickfeld, *Contributions to The Theory of Holomorphic Function in Commutative Banach Algebras*, Thesis, Columbia University, New York, 1964.

[10] B.W. Glickfeld, *Meromorphic functions of elements of a commutative Banach algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **151** (1970), 293-307.

[11] B.W. Glickfeld, *On the inverse function theorem in commutative Banach algebras*, Illinois J. Math. **15** (1971), 212-221.

[12] B.W. Glickfeld, *The Riemann sphere of a commutativa Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1960), 414-425.

[13] B.W. Glickfeld, *The theory of analytic functions in commutative Banach algebras with involution*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **86** (1970) 61-77

[14] H. Goldmann, *Uniform Fréchet Algebras*, North-Holland Math. Stud., **162**, Amsterdam, 1990.

[15] E. Hille and R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-groups*, American Mathematical Society, Colloquium Publications XXXI, Baltimore, 1957.

[16] E.R. Lorch, *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), 414 - 425

[17] D.H. Luecking and L.A. Rubel, *Complex analysis. A Functional Analysis Approach*, Springer-Verlag New York, 1984.

[18] G.V.S. Mauro; L.A. Moraes and A.F. Pereira, *Topological and algebraic properties of spaces of Lorch analytic mappings*, Math. Nachr. 1-9 (2015)**DOI** 10.1002

[19] Y. Mibu, *On the theory of regular functions in Banach algebras*, College Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. **33** (1960) 323-340

[20] L.A. Moraes and A.F. Pereira, *The Hadamard product in the space of Lorch analytic mappings*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **49** (2013) 111-122.

[21] L.A. Moraes and A.F. Pereira, *The spectra of algebras of Lorch analytic mappings*, Topology **48** (2009), 91–99.

[22] J. Mujica, *Complex analysis in Banach Spaces*, North-Holland Math. Stud., **120**, Amsterdam, 1986.

[23] T. W. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras, Volume 2*. Cambridge University Press, 2001.

[24] A.F. Pereira, *Álgebras de Aplicações Lorch Analíticas*, Tese de Doutorado, UFRJ, 2010.

[25] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[26] H.E. Warren, *A Riemann mapping theorem for* $C(X)$, Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), 147-154.

[27] H.E. Warren, *Analytic equivalence among simply connected domains in C(X)*, Trans. Amer. Math. Soc. **196** (1974), 265-288.

[28] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra, Volume 1*. Springer-Verlag New York, 1975.