

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

DARLYN WALTER HUAMÁN VARGAS



SISTEMAS HÍBRIDOS DISSIPATIVOS

RIO DE JANEIRO

2016

DARLYN WALTER HUAMÁN VARGAS

SISTEMAS HÍBRIDOS DISSIPATIVOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador : JAIME EDILBERTO MUÑOZ RIVERA

RIO DE JANEIRO
2016

DARLYN WALTER HUAMÁN VARGAS

SISTEMAS HÍBRIDOS DISSIPATIVOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM-UFRJ), como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Banca Examinadora:

Jaime Muñoz Rivera, Prof. Dr. IM/UFRJ (Presidente)

Ruy Coimbra Charão, Prof. Dr. MTM/UFSC

Marcio Violante Ferreira, Prof. Dr. DEPMAT/UFSM

Xavier Carvajal Paredes, Prof. Dr. IM/UFRJ

Pedro Gamboa Romero, Prof. Dr. IM/UFRJ

RIO DE JANEIRO

2016

E não sede conformados com este mundo, mas sede transformados pela renovação do vosso entendimento, para que experimenteis qual seja a boa, agradável, e perfeita vontade de Deus. (Rm 12-2)

Agradecimentos

Agradeço ao Senhor Jesus, pois 'O SENHOR é a minha força e o meu escudo; nele confiou o meu coração, e fui socorrido; assim o meu coração salta de prazer, e com o meu canto o louvarei'.

Agradeço aos minha mãe María Esther Vargas Vasquéz por toda assistência e apoio que me deram durante a minha vida. De forma justa e com o muito prazer, divido com ela o título que esta monografia me confere.

Agradeço à Alessandra da Silva Nascimento por compartilhar sua vida comigo enquanto estive em Rio de Janeiro. Caminhamos, caímos e levantamos. E, nesta trilha, crescemos em sabedoria que vem do alto.

Agradeço ao professor e orientador Jaime Edilberto Muñoz Rivera, que, em todo o tempo, demonstrou disponibilidade para discutir minhas dúvidas.

Agradeço a todos os amigos que fiz enquanto estudei na UFRJ.

Por fim, gostaria agradecer o suporte financeiro recebido do CAPES.

Resumo

Neste trabalho, estuda-se a boa colocação e o comportamento assintótico de três modelos híbridos dissipativos, num primeiro modelo abordaremos uma corda elástica governada pela equação de onda unidimensional com um mecanismo dissipativo de tipo tip body num de seus extremos, tal mecanismo foi estudado por Andrews-Shillor em [3]. O segundo é uma corda elástica com dois mecanismos de dissipação, num extremo um mecanismo de tipo localizado de material termoelástico e no outro extremo mantendo o mecanismo tip body. O terceiro é parecido com o segundo, a diferença neste caso é a aplicação de dois mecanismos de dissipação localizada, num extremo um mecanismo de material termoelástico e no outro extremo um mecanismo de material termo-viscoso similar ao estudado por Alves-Rivera-Sepúlveda-Villagrán em [2]. Em cada caso, verificaremos inicialmente a boa colocação mediante a teoria de semigrupos e o comportamento assintótico através de técnicas multiplicativas sobre a equação evolutiva e a equação resolvente associados com nossos modelos híbridos dissipativos para produzir estimativas de observabilidade que sejam úteis na comprovação de condições presentes no Teorema de Huang-Prüss em [13] ou [22] que garantem a estabilidade uniforme do semigrupo associado aos nossos modelos; no enquanto alternativamente serve também verificar as condições presentes no Teorema de Borichev-Tomilov em [4] que determinam alguma taxa de decaimento polinomial. Finalmente a falta de estabilidade será demonstrada para o primeiro modelo híbrido elástico através do Teorema de Weil e para o modelo híbrido termo-viscoelástico através do recente resultado devido a Rivera-Racke em [25] and Rivera-Rambaud-Villagrán em [26].

Palavras chaves: sistema híbrido, sistema termoelástico, sistema termo-viscoelástico, problemas de transmissão, estabilização exponencial uniforme, decaimento polinomial, tip body, amortecimento localizado, teoria de semigrupos, raio essencial.

Abstract

In this work, we study the well-posedness and the asymptotic behavior of three dissipative hybrid models, in a first model we will discuss an elastic string governed by the one-dimensional wave equation with a dissipative tip body type mechanism at one of its extremes, such mechanism was studied by Andrews-Shillor in [3]. The second is an elastic string with two dissipation mechanisms, at one end a localized type of thermoelastic material mechanism and at the other end holding the tip body mechanism. The third is similar to the second, the difference in this case is the application of two mechanisms of localized dissipation, at one end a mechanism of thermoelastic material and the other end a mechanism of thermo-viscous material similar to that studied by Alves-Rivera-Sepúlveda-Villagrán in [2]. In each case, we will first verify the well-posedness through the semigroup theory and the asymptotic behavior through multiplicative techniques on the evolutionary equation and the resolvent equation associated with our dissipative hybrid models to produce estimates of observability that are useful in proving conditions present in the Huang-Pruss's Theorem in [13] or [22] which guarantees uniform stability of the semigroup associated with our models; while alternatively it is also useful to verify the conditions present in the Borichev-Tomilov's Theorem in [4] that determine some polynomial decay rate. Finally the lack of uniform stability will be demonstrated for the elastic hybrid model through Weil's Theorem and for the thermo-viscoelastic model through the recent result due to Rivera-Racke in [25] and Rivera-Rambaud-Villagrán in [26].

Keywords: hybrid system, thermoelastic system, thermo-viscoelastic system, problems of transmission, uniform exponential stabilization, polynomial decay, tip body, localized damping, semigroup theory, essential radius.

Sumário

1	Preliminares	18
1.1	Operadores lineares	18
1.2	Triplo de Gelfand e Formas Sesquilineares	24
1.3	Problemas de Transmissão de Segunda Ordem	27
1.4	C_0 -semigrupos gerados por operadores dissipativos	37
1.5	Estabilidade de C_0 -semigrupos	39
2	Modelos híbridos dissipativos	42
2.1	Modelo híbrido termoelástico	42
2.2	Modelo híbrido termo-viscoelástico	55
3	Observabilidade e propriedade do resolvente	69
3.1	Observabilidade	70
3.2	Propriedade do resolvente	74
3.2.1	Modelo híbrido termoelástico	74
3.2.2	Modelo híbrido elástico	75
3.2.3	Modelo híbrido termo-viscoelástico	76
4	Estabilidade do modelo híbrido termoelástico	81
4.1	Estabilidade uniforme do modelo híbrido termo-elástico	81
4.2	Falta de estabilidade uniforme e taxa de decaimento polinomial do modelo híbrido elástico	85
5	Estabilidade dos modelos híbridos termo-viscoelásticos	90
5.1	Estabilidade uniforme do modelo termo-viscoelástico	90
5.2	Falta de estabilidade uniforme e taxa de decaimento polinomial do modelo híbrido termo-viscoelástico	92
	Referências	99

Notações

Usamos as seguintes notações neste trabalho:

T.C.D. : Teorema da convergência dominada de Lebesgue.

I.P.P. : Integração por partes.

q.t.p. : Exceto num conjunto de medida de Lebesgue nula.

\mathbb{R}^m : Espaço vectorial sobre \mathbb{R} de dimensão um inteiro positivo m .

$]0, T[= \{x \in \mathbb{R} ; 0 < x < T \text{ tal que } 0 < T < \infty\}$.

$I =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b \text{ tal que } -\infty < a < b < \infty\}$.

$\bar{I} = [a, b]$: Fecho de I em \mathbb{R} .

$J \Subset I$: $\bar{J} \subset I$ e \bar{J} é compacto em \mathbb{R} .

$\phi^{(k)}$: k -ésima derivada clássica da função complexa ϕ definida sobre I .

$\tilde{\phi}$: Extensão da função ϕ ao fecho \bar{I} de I .

$\underset{\sim}{\phi}$: Extensão da função ϕ definida em $J \subset I$ por zero à $I \setminus J$.

$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)$: Derivada parcial de primeira ordem respeito ao tempo.

$\ddot{\psi} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t)$: Derivada parcial de segunda ordem respeito ao tempo.

$\text{supp } \phi = \overline{\{x \in I ; \phi(x) \neq 0\}} \cap I$.

$L^1_{loc}(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} ; f \in L^1(J) \forall J \text{ aberto tal que } J \subseteq I\}$.

$H^m(I) = \{f \in L^2(I) ; \text{ a derivada fraca } D^{(k)}f \in L^2(I), \forall k = 1, \dots, m\}$.

X, Y : Espaços vectoriais sobre o corpo dos números complexos \mathbb{C} .

$(X, \|\cdot\|_X)$: Espaço vectorial normado sobre \mathbb{C} munido com a norma $\|\cdot\|_X$.

$F(X, Y)$: Conjunto de todas as funções definida de X em Y .

$\mathcal{L}(X)$: Conjunto de todos os operadores lineares e limitados em X .

$\mathcal{K}(X)$: Conjunto de todos os operadores lineares e compactos em X .

$X \hookrightarrow Y$: X está imerso continua e densamente em Y .

$X \xhookrightarrow{c} Y$: X está imerso compactamente em Y .

$\sigma(X^*, X)$: Topologia fraca-* sobre o espaço dual X^* de X .

$B_X(0, 1) = \{f \in X ; \|f\|_X < 1\}$.

$B_{\mathbb{C}}(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < \delta\}$.

$\rho(\mathcal{A})$: Resolvente do operador \mathcal{A} .

π : Operador quociente natural.

Introdução

Um sistema vibratório amortecido dissipa energia continuamente sob a forma de calor transferida para a estrutura de suporte ou perdida por atrito do ar, essas perdas de energia são chamadas coletivamente de amortecimento do sistema onde é necessário especificar taxas de decaimento da energia para ponderar a amplitude de oscilação com o decorrer do tempo. Quando o sistema não está sujeito a uma força excitadora e não há amortecimento, o sistema oscila numa frequência chamada frequência natural, se a frequência de excitação for igual a frequência natural do sistema, ele passa a oscilar com amplitude muito maior do que a amplitude da força excitadora, este fenômeno é chamado de ressonância e pode ocasionar grandes oscilações que provocariam fissuras na estrutura.

Um fator de complexidade de um sistema vibratório é o número de graus de liberdade que o sistema possui, este número é igual ao número de coordenadas independentes necessárias para especificar completamente o deslocamento do sistema. Por exemplo, um corpo rígido obrigado a se mover no plano XY requer três coordenadas para especificar sua posição completamente, ou seja, os deslocamentos lineares nas direções X e Y e a rotação angular em torno do eixo Z (perpendicular ao plano XY), portanto este corpo tem três graus de liberdade; no entanto o deslocamento de um corpo elástico, por exemplo uma viga, tem que ser especificado em cada ponto por meio de uma equação contínua de forma que a viga alcança um número infinito de graus de liberdade. A análise de vibração de sistemas com um número finito de graus de liberdade requer a solução de EDO's, que é relativamente fácil. Embora a maioria dos sistemas de engenharia são contínuos e têm um número infinito de graus de liberdade a análise de vibração de sistemas contínuos requer a solução de EDP's, o que é bastante difícil além do mais que muitas equações diferenciais parciais, de fato, carecem de soluções analíticas.

O conceito de estabilidade de um sistema vibratório pode ser explicado em termos de sua energia, de acordo com este esquema, considera-se que um

sistema é assintoticamente estável, estável ou instável se a sua energia diminui, permanece constante ou aumenta, respectivamente, com o tempo. Entre vários tipos de estabilidade, demandaremos aquela que indica um decaimento de energia de taxa ótima, chamada de estabilidade exponencial uniforme ou simplesmente estabilidade uniforme para significar a rapidez do decaimento de energia em relação uniforme a uma função exponencial respeito ao tempo, em termos matemáticos isso se tornará evidente quando seja escolhido como espaço de fase o espaço mais natural de Hilbert, aquele que tem a energia do sistema como o produto escalar, nesta configuração abstrata o sistema será uniformemente estável se e somente se a medição da solução do sistema com a norma do espaço de fase tiver um decaimento exponencial respeito ao tempo e for uniforme sobre qualquer condição inicial imposta ao sistema.

Cada vez um número maior de trabalhos tratam sobre a estabilização uniforme de sistemas vibratórios governados por EDP's que se diferenciam pelo uso de mecanismos dissipativos; contudo qualquer mecanismo dissipativo não garante a estabilização uniforme do sistema, dentro deles estão os sistemas híbridos dissipativos constituídos de uma estrutura complexa que acopla o movimento vibratório de duas componentes de naturezas diferentes e que, hoje em dia, é muito usado nas aplicações. Do ponto de vista matemático um sistema híbrido corda-corpo é descrito através do acoplamento tanto entre EDP's como entre EDP's e EDO's, por exemplo, se um sistema for constituído de duas cordas unidas por um corpo rígido, tal como estudado por Hansen-Zuazua em [11], é possível alcançar a melhor taxa de decaimento usando mecanismos dissipativos friccionais em cada ponto do contorno; no entanto, foi mostrado que a falta de estabilização uniforme acontece quando restringimos o problema para um único mecanismo sobre contorno.

Recentemente uma viga de Timoshenko não homogênea com mecanismo dissipativo tip body foi estudada por Rivera-Avila em [23], neste modelo, o primeiro resultado demonstra a falta de estabilidade uniforme através do Teorema de Weil em [27] e em consequência foi determinado uma taxa $t^{-1/2}$ de decaimento polinomial, o segundo resultado acontece quando o mecanismo é colocado no contorno do ângulo rotacional da viga, de tal forma que consegue-se um melhoramento da taxa polinomial de $t^{-1/4}$; neste trabalho a ferramenta principal para obtenção de taxas polinomiais é baseada na aplicação do Teorema 1.5.9 dado por Borichev-Tomilov em [4].

Por outro lado as impurezas do meio (pequenos atritos, efeitos viscosos ou friccionais entre outras resistências) produzem um certo grau de amorteci-

mento no sistema de vibrações, o que não influencia na frequência natural do sistema, logo as impurezas convertem-se em ótimos mecanismos localizados para limitar a amplitude de oscilação na ressonância.

Posteriormente, o mecanismo dissipativo de tipo localizado foi usado no desenho de materiais compostos, chamados inteligentes, com o propósito de melhorar o comportamento assintótico dos sistemas dissipativos e alcançar a melhor taxa de decaimento. Este método consiste na inserção de pequenas componentes com propriedades termoelásticas num subconjunto específico do domínio de um sistema dissipativo com falta de estabilidade uniforme e assim poder revertê-lo, um trabalho que envolve a equação de onda elástica com amortecimento localizado térmico foi estudado por Rivera-Bisognin-Bisognin em [24], onde provam que a solução do sistema termoelástico decai exponencialmente uniforme.

Neste trabalho investigamos o comportamento assintótico de um primeiro modelo híbrido dissipativo sobre um domínio desconexo $\Omega = I_\tau \cup I_e$, onde $I_\tau =]0, l_0[$ representa a componente termoelástica e $I_e =]l_0, l[$ representa a componente elástica. São dois os sistemas de EDP's que governam este modelo, uma equação de onda elástica sobre o domínio I_e no qual é acoplado em seu extremo $x = l_0$ a componente I_τ que dissipa energia térmica, conhecido como mecanismo ativo de dissipação localizada que é governada pela equação de onda termoelástica sobre o domínio I_τ e encontra-se presa no contorno $x = 0$; no extremo $x = l$ da componente I_e outro mecanismo ativo é acoplado, conhecido como tip body, cuja diferença do mecanismo localizado é dissipar a energia potencial elástica através de uma caixa contendo material granular e seu movimento é governado por uma EDO

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\psi} - [\alpha \psi_x - m \theta]_x &= 0 & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \\ c \dot{\theta} - \kappa \theta_{xx} + m \dot{\psi}_x &= 0 & \text{em } I_\tau \times \mathbb{R}_0^+ \\ \rho_3 \ddot{w} + \alpha_3 w + d_1 \dot{w} + \alpha_e \psi_x &= 0 & \text{em } \{l\} \times \mathbb{R}_0^+ \end{aligned} \quad (0.0.1)$$

onde ψ denota o deslocamento transversal da onda; θ a diferença de temperatura em relação a um referencial fixo τ_0 de tal forma que $c, \kappa > 0$ denotam sempre a capacidade de aquecimento e condução térmica respectivamente; w denota o mecanismo tip body com $\rho_3, \alpha_3, d_1 > 0$ denotando a densidade, rigidez e coeficiente dissipativo do tip body respectivamente. A particularidade deste sistema é que os coeficientes ρ, α e m são funções com

valores que dependem do material de cada componente, isto é,

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_\tau & \text{se } x \in I_\tau \\ \rho_e & \text{se } x \in I_e \end{cases}, \quad \alpha(x) = \begin{cases} \alpha_\tau & \text{se } x \in I_\tau \\ \alpha_e & \text{se } x \in I_e \end{cases},$$

$$m(x) = \begin{cases} m_\tau & \text{se } x \in I_\tau \\ 0 & \text{se } x \in I_e \end{cases}$$

onde $\rho_e, \rho_\tau, \alpha_e, \alpha_\tau, m_\tau$ são constantes positivas tal que $\rho_e \neq \rho_\tau$ e $\alpha_e \neq \alpha_\tau$. Portanto nosso modelo constitui num problema de transmissão que precisa tanto condições no contorno $\{0, l\}$ como de condições de transmissão na interface $\{l_0\}$ que cobram o sistema de equações (0.0.1), na variável ψ temos

$$\psi(0, t) = 0 \quad e \quad \psi(l, t) = w(t), \quad t \geq 0$$

e na variável térmica θ podemos escolher uma da seguintes

$$\begin{aligned} \theta_x(0, t) = \theta(l_0, t) = 0, & \quad t \geq 0 \\ \theta(0, t) = \theta_x(l_0, t) = 0, & \quad t \geq 0 \\ \theta(0, t) = \theta(l_0, t) = 0, & \quad t \geq 0 \\ \theta_x(0, t) = \theta_x(l_0, t) = 0, & \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

As seguintes condições de transmissão

$$\psi(l_0^-, t) = \psi(l_0^+, t) \quad e \quad \sigma(l_0^-, t) = \sigma(l_0^+, t) \quad t \geq 0.$$

Finalmente consideramos as condições iniciais

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(x, 0) = \psi_1, \quad \theta(x, 0) = \theta_0, \\ w(0) = w_1, \quad e \quad \dot{w}(0) = w_1. \end{aligned}$$

Recentemente um trabalho importante relacionado à falta de estabilidade uniforme aparece nos sistemas dissipativos com mecanismos de amortecimento localizado de tipo Kelvin-Voigt viscoelástico estudada por Alves-Rivera-Sepúlveda-Villagrán em [2], onde estudou-se um modelo com três vigas diferentes, viscoelástica, elástica e friccional, provando que a viga elástica, mesmo com dois mecanismos dissipativos localizados fortes, a energia associada ao modelo não decai uniformemente se a viga viscoelástica esteja centralizada.

Ainda neste trabalho investigamos o comportamento assintótico de um segundo modelo híbrido dissipativo termo-viscoso sobre um domínio desconexo $\Omega = I_\tau \cup I_e \cup I_\nu$ onde $I_\tau =]0, l_0[$ representa a componente termoelástica,

$I_e =]l_0, l_1[$ representa a componente elástica e $I_\nu =]l_1, l[$ representa a componente termo-viscosa. Sendo três os sistemas de EDP's que governam este modelo, uma equação de onda elástica sobre o domínio I_e o qual é acoplada em seu extremo $x = l_0$ a componente I_τ cujo movimento é governado pela equação de onda termoelástica sobre o domínio I_τ que se mantém fixa no seu contorno $x = 0$; no outro extremo $x = l_1$ de I_e se acopla a componente I_ν cujo movimento é governado pela equação de onda termo-viscosa sobre o domínio I_ν que por sua vez se mantém fixa no seu contorno $x = l$, ambas componentes funcionam como mecanismos ativos de dissipação de energia térmica, além disso, a componente I_ν dissipa energia potencial que depende da velocidade de deformação

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\psi} - \left[\alpha \psi_x - m\theta + \beta \dot{\psi}_x \right]_x &= 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \\ c \dot{\theta} - \kappa \theta_{xx} + m \dot{\psi}_x &= 0 \quad \text{em } (\Omega \setminus I_e) \times \mathbb{R}_0^+ \end{aligned} \quad (0.0.2)$$

onde ψ , θ denotam o deslocamento transversal da onda e a diferença de temperatura em relação a um referencial fixo τ_0 respectivamente. A especificidade deste sistema é que seus coeficientes ρ , α , β e m são funções escalonadas com valores que dependem do material de cada componente

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \begin{cases} \rho_\tau & \text{se } x \in I_\tau \\ \rho_e & \text{se } x \in I_e \\ \rho_\nu & \text{se } x \in I_\nu \end{cases}, & \alpha(x) &= \begin{cases} \alpha_\tau & \text{se } x \in I_\tau \\ \alpha_e & \text{se } x \in I_e \\ \alpha_\nu & \text{se } x \in I_\nu \end{cases}, \\ \beta(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } x \in I_\tau \\ 0 & \text{se } x \in I_e \\ \beta_\nu & \text{se } x \in I_\nu \end{cases}, & m(x) &= \begin{cases} m_0 & \text{se } x \in I_\tau \\ 0 & \text{se } x \in I_e \\ m_0 & \text{se } x \in I_\nu \end{cases}. \end{aligned}$$

onde $\rho_e, \rho_\tau, \rho_\nu, \alpha_e, \alpha_\tau, \alpha_\nu, m_0, \beta_\nu > 0$ tal que $\rho_e \neq \rho_\tau \neq \rho_\nu$ e $\alpha_e \neq \alpha_\tau \neq \alpha_\nu$. Portanto nosso segundo modelo constitui num problema de transmissão que precisa tanto condições no contorno $\{0, l\}$ como de condições de transmissão na interface $\{l_0, l_1\}$ que cobram o sistema de equações (0.0.2), na variável ψ temos

$$\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0, \quad t \geq 0$$

na variável θ podemos escolher uma das seguintes

$$\begin{aligned} \theta(0, t) = \theta(l_0, t) = \theta(l_1, t) = \theta(l, t) &= 0, & t \geq 0 \\ \theta(0, t) = \theta_x(l_0, t) = \theta_x(l_1, t) = \theta(l, t) &= 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

As condições de transmissão

$$\begin{aligned} \psi(l_0^-, t) &= \psi(l_0^+, t), & \sigma(l_0^-, t) &= \sigma(l_0^+, t), \\ \psi(l_1^-, t) &= \psi(l_1^+, t), & \sigma(l_1^-, t) &= \sigma(l_1^+, t). \end{aligned} \quad t \geq 0.$$

Finalmente impondo as seguintes condições iniciais

$$\psi(x, 0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(x, 0) = \psi_1, \quad \theta(x, 0) = \theta_0.$$

Esta Tese está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1, definimos os espaços funcionais que permitam fundamentar a teoria de problemas de transmissão de segunda ordem e citamos alguns resultados importantes da Análise. No Capítulo 2, estabelecemos a formulação forte de cada sistema híbrido dissipativo que permite tratá-lo como problema de transmissão elíptico e regular, depois será estudada a boa colocação do problema através da teoria de semigrupos ressaltando a necessidade de contar com espaços de Sobolev não convencionais usados por Nicaise-Sändig em [19], que possibilitam entender e situar a regularidade da solução. No Capítulo 3 provamos algumas desigualdades de observabilidade e propriedades particulares do resolvente de geradores infinitesimais que aparecem em cada modelo híbrido dissipativo do Capítulo 2. No Capítulo 4 estudamos a estabilidade do modelo híbrido dissipativo termoelástico, nosso foco principal consiste em estudar a equação de onda elástica com um mecanismo de dissipação localizada de material termoelástico e outro mecanismo de tipo tip body, que, segundo Rivera-Bisognin-Bisognin em [24] garantem que a estabilidade uniforme da equação de onda é alcançada mediante um mecanismo localizado de material termoelástico, desta forma vamos aplicar as desigualdades de observabilidade do Capítulo 3 para provar a estabilidade uniforme deste modelo. Se a componente termoelástica é isenta, o modelo se converte no modelo dissipativo híbrido elástico que geralmente são instáveis uniformemente, assim a falta de estabilidade uniforme será analisada através do Teorema de Weil, assim sendo podemos procurar alguma taxa polinomial para o modelo dissipativo híbrido elástico. No Capítulo 5 analisamos o comportamento assintótico de três modelos termo-viscoelásticos, segundo Alves-Rivera-Sepúlveda-Villagrán em [2], a estabilidade uniforme de uma viga elástica depende da posição onde são colocados dois mecanismos dissipativos de tipo friccional e viscoelástico, os autores garantem estabilidade uniforme quando a componente viscoelástica não é centralizada; entanto caso contrário ocorra mostram falta de estabili-

dade uniforme, seguindo esta metodologia aplicada nesse trabalho, analisamos o comportamento assintótico do sistema dissipativo termo-viscoelástico em duas situações, quando a componente termo-viscosa está centralizada e não está centralizada, finalmente no modelo termo-viscoelástico de componente termo-viscosa centralizada mostraremos a falta de estabilidade uniforme mediante um recente resultado devido a Rivera-Racke em [25] and Rivera-Rambaud-Villagrán em [26].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo coletamos notações, conceitos, lemas e teoremas encontrados nas referências [1], [5], [6], [7], [8], [14], [15], [16], [20]; os quais serão necessários nos capítulos seguintes.

1.1 Operadores lineares

Definição 1.1.1 *Suponhamos que H é um espaço vectorial sobre o corpo dos números complexos \mathbb{C} . A aplicação binária*

$$\begin{aligned}(\cdot, \cdot)_H : H \times H &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto (f, g)_H\end{aligned}$$

é chamada de produto interno em H se satisfaz as seguintes propriedades

- a) $(\alpha f + g, h)_H = \alpha(f, h)_H + (g, h)_H, \quad \forall f, g, h \in H \text{ e } \alpha \in \mathbb{C},$
- b) $(f, g + \beta h)_H = (f, g)_H + \bar{\beta}(f, h)_H, \quad \forall f, g, h \in H \text{ e } \beta \in \mathbb{C},$
- c) $(f, g)_H = \overline{(g, f)_H}, \quad \forall f, g \in H,$
- d) $(f, f)_H \geq 0 \quad \forall f \in H \text{ e } (f, f)_H > 0 \quad \forall f \neq 0.$

O espaço vectorial H com estas propriedades é chamado de espaço produto interno que será denotado por $(H, (\cdot, \cdot)_H)$.

Lema 1.1.2 *Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço produto interno, logo a aplicação $\|\cdot\|_H : H \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $\|f\|_H = \sqrt{(f, f)_H}$ é uma norma em H , que é chamada de norma induzida pelo produto interno em H .*

Definição 1.1.3 *Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$, é um espaço produto interno. $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é chamado um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} se H é um espaço completo com a norma induzida pelo produto interno em H .*

Definição 1.1.4 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ são dois espaços vectoriais normados sobre \mathbb{C} . A aplicação $T : X \rightarrow Y$ que satisfaz*

- a) *Para todo $f \in X$, existe um único $g \in Y$ tal que $Tf = g$,*
- b) *$T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg$, $\forall f, g \in X$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.*

é chamado de operador linear e limitado quando $\exists C \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|Tf\|_Y \leq C\|f\|_X, \quad \forall f \in X.$$

Desta forma, se denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o conjunto de todos os operadores lineares e limitados de X em Y , então $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço vectorial sobre \mathbb{C} com as operações de soma e multiplicação por um escalar sobre o conjunto de todas as funções $F(X, Y)$. Se $X = Y$, escrevemos simplesmente $\mathcal{L}(X)$ no lugar de $\mathcal{L}(X, X)$ que representa o conjunto de todos os operadores lineares e limitados em X . Além disso, para cada $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ define-se o valor

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{f \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X}. \quad (1.1.1)$$

que representa a norma de T , logo assim $\mathcal{L}(X, Y)$ é considerado como um espaço vectorial normado.

Teorema 1.1.5 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ são dois espaços vectoriais normados sobre \mathbb{C} , então $\mathcal{L}(X, Y)$ se torna espaço de Banach respeito à norma definida em (1.1.1) se e somente se Y é espaço de Banach.*

Definição 1.1.6 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ são dois espaços vectoriais normados sobre \mathbb{C} . Um operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é chamado de unitário se T satisfaz as seguintes propriedades*

- a) *Para todo $g \in Y$ existe pelo menos $f \in X$ tal que $Tf = g$,*
- b) *$\|Tx\|_Y = \|x\|_X$, $\forall x \in X$.*

Definição 1.1.7 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ são dois espaços vectoriais normados sobre \mathbb{C} . Um operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é chamado de compacto se $T(B_X(0, 1))$ é um subconjunto relativamente compacto de Y . Por $\mathcal{K}(X, Y)$ denotamos o conjunto de todos os operadores compactos de X em Y . Se $X = Y$, escrevemos simplesmente $\mathcal{K}(X)$ no lugar de $\mathcal{K}(X, X)$.*

Definição 1.1.8 (Álgebra de Banach) Uma álgebra de Banach é um espaço de Banach \mathcal{X} sobre \mathbb{C} munido de um produto $(x, y) \mapsto xy$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$ e satisfaz $\|xy\|_{\mathcal{X}} \leq \|x\|_{\mathcal{X}}\|y\|_{\mathcal{X}}$, $\forall x, y \in \mathcal{X}$. Uma álgebra de Banach é dita com unidade se possui unidade multiplicativa, isto é, existe um elemento “e” tal que $ex = xe = x$, $\forall x \in \mathcal{X}$ e se assume que $\|e\|_{\mathcal{X}} = 1$.

Definição 1.1.9 Um subconjunto \mathcal{I} de uma álgebra de Banach \mathcal{X} é dito ideal bilateral em \mathcal{X} se \mathcal{I} é um subespaço de \mathcal{X} e dado qualquer $x \in \mathcal{X}$ e $a \in \mathcal{I}$ ambos ax e xa estão em \mathcal{I} . Um ideal \mathcal{I} é dito maximal se qualquer outro ideal bilateral \mathcal{J} em \mathcal{X} , tal que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ implica que $\mathcal{J} = \mathcal{I}$. Um ideal \mathcal{I} é dito ideal próprio se $\mathcal{I} \neq \{0\}$ e $\mathcal{I} \neq \mathcal{X}$.

Proposição 1.1.10 Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} , então $\mathcal{L}(X)$ se torna uma álgebra de Banach com unidade, respeito à soma, ao produto (composição) de operadores, à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ e tendo como elemento unidade é o operador identidade \mathbf{I} definido em X .

Teorema 1.1.11 Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} , então $\mathcal{K}(H)$ é um ideal bilateral fechado maximal sem elemento unidade em $\mathcal{L}(H)$. Se ainda mais H é um espaço vectorial separável, então $\mathcal{K}(H)$ é o único ideal bilateral próprio em $\mathcal{L}(H)$.

Definição 1.1.12 (Álgebra Quociente) Suponhamos que \mathcal{I} é um ideal bilateral na álgebra de Banach \mathcal{X} , o qual permite dividir \mathcal{X} em classes de equivalências denotadas por

$$[x] = \{x + m; m \in \mathcal{I}\}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

de tal forma que a coleção de todas as classes de equivalência é denotado por \mathcal{X}/\mathcal{I} . Se \mathcal{X}/\mathcal{I} é munido com as operações de adição e multiplicação

$$\begin{aligned} \alpha[x] &= [\alpha x], \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \\ [x] + [y] &= [x + y], \\ [x][y] &= [xy] \end{aligned}$$

converte-se, ainda, numa álgebra que é chamada de álgebra quociente. Se \mathcal{I} é fechado em \mathcal{X} , é possível dotar \mathcal{X}/\mathcal{I} com a norma quociente

$$\|[x]\|_{\mathcal{X}/\mathcal{I}} = \inf\{\|x + z\|_{\mathcal{X}}; z \in \mathcal{I}\}.$$

que satisfaz a propriedade de sub-multiplicidade dada por

$$\|[x][y]\|_{\mathcal{X}/\mathcal{I}} \leq \|[x]\|_{\mathcal{X}/\mathcal{I}} \|y\|_{\mathcal{X}/\mathcal{I}}.$$

convertendo \mathcal{X}/\mathcal{I} , especificamente, numa álgebra de Banach.

Se \mathcal{X} é uma álgebra de Banach com unidade “e”, o fato de que \mathcal{X}/\mathcal{I} seja não vazio, justifica que $[e]$ é seu elemento unidade e assume-se que $\|[e]\|_{\mathcal{X}/\mathcal{I}} = 1$.

Definição 1.1.13 *Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} . Entenda-se por álgebra de Calkin como a álgebra quociente*

$$\mathcal{C}(H) = \mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$$

cujos elementos são classes de equivalência da seguinte forma

$$[T] = T + \mathcal{K}(H) \quad \text{para algum } T \in \mathcal{L}(H)$$

em particular se 0 e \mathbf{I} são o operador nulo e o operador identidade em $\mathcal{L}(H)$ respectivamente, temos

$$\begin{aligned} [0] &= 0 + \mathcal{K}(H) && \text{(elemento origem),} \\ [\mathbf{I}] &= \mathbf{I} + \mathcal{K}(H) && \text{(elemento unidade).} \end{aligned}$$

e é possível, na álgebra de Calkin, dotar seus elementos de norma quociente

$$\|[T]\|_{\mathcal{C}(H)} = \inf\{\|T + K\|_{\mathcal{L}(H)}; K \in \mathcal{K}(H)\}$$

OBSERVAÇÃO.- Todo operador $T \in \mathcal{L}(H)$ pode ser projetado em $\mathcal{C}(H)$ usando o operador quociente natural

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{L}(H) &\rightarrow \mathcal{C}(H) \\ T &\mapsto \pi(T) = [T] \end{aligned}$$

o qual é um operador linear, contínuo e aberto, com $\|\pi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(H), \mathcal{C}(H))} = 1$.

Definição 1.1.14 (Resolvente e Espectro) *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço vectorial normado sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset X \rightarrow X$ é um operador linear, não necessariamente limitado, cujo domínio é $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ que é subespaço de X . Define-se o conjunto resolvente de \mathcal{A} , denotado por $\rho(\mathcal{A})$, como o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador, chamado de resolvente, $R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1} : \mathcal{R}_{\lambda - \mathcal{A}} \rightarrow X$ existe e $\overline{\mathcal{R}_{\lambda - \mathcal{A}}} = X$. Além disso define-se o espectro de \mathcal{A} , denotado por $\sigma(\mathcal{A})$, como $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.*

Definição 1.1.15 (Resolvente e Espectro numa Álgebra de Banach) *Suponhamos que \mathcal{X} é uma álgebra de Banach com unidade “e” e $x \in \mathcal{X}$. O conjunto resolvente de x , denotado por $\rho(x)$, é o conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda e - x$ é invertível em \mathcal{X} . O complemento em \mathbb{C} de $\rho(x)$ é dito espectro de x e é denotado por $\sigma(x)$.*

OBSERVAÇÃO.- Assim a definição anterior permite definir o espectro essencial para qualquer operador $T \in \mathcal{L}(H)$ como o espectro do elemento $[T]$ projetado na álgebra de Calkin $\mathcal{C}(H)$ dado por

$$\sigma_e(T) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma([T]).$$

Definição 1.1.16 *Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} e T é um operador em $\mathcal{L}(H)$, assim T é chamado de operador Fredholm em H se $[T]$ é um elemento invertível na álgebra de Calkin $\mathcal{C}(H)$. Desta forma denotamos por $\mathcal{F}(H)$ ao conjunto de todos os operadores de Fredholm em H .*

OBSERVAÇÃO.- A definição anterior gera uma caracterização de espectro essencial de qualquer operador T em $\mathcal{L}(H)$ dado por

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \mathbf{I} - T \text{ não é operador de Fredholm em } H\}.$$

Teorema 1.1.17 (Weil) *Para cada operador $T \in \mathcal{L}(H)$, tem-se*

$$\sigma_e(T) = \sigma_e(T + K), \quad \forall K \in \mathcal{K}(H).$$

Definição 1.1.18 *Suponhamos que \mathcal{X} é uma álgebra de Banach com elemento unidade “e” e $x \in \mathcal{X}$. O radio espectral de x , denotado por $r(x)$, é dado pelo valor*

$$r(x) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(x)\}.$$

OBSERVAÇÃO.- A definição anterior permite definir o raio espectral essencial de qualquer operador T em $\mathcal{L}(H)$ como o raio espectral do elemento projetado $[T]$ na álgebra de Calkin $\mathcal{C}(H)$ dado por

$$r_e(T) = r([T]) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_e(T)\}.$$

Teorema 1.1.19 (Gelfand) *O raio espectral de um elemento x numa álgebra de Banach com unidade \mathcal{X} é dado por*

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|_{\mathcal{X}}^{1/n}.$$

OBSERVAÇÃO.- De acordo com o Teorema de Gelfand, o raio espectral essencial de qualquer operador T em $\mathcal{L}(H)$ pode ser calculado pela fórmula

$$r_e(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|[T^n]\|_{\mathcal{C}(H)}^{1/n}.$$

Definição 1.1.20 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ são dois espaços vectoriais normados sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow Y$ é um operador linear, não necessariamente limitado, cujo domínio é \mathcal{D}_A que é um subespaço linear de X . Define-se o subespaço linear de Y*

$$\mathcal{R}_A = \{g \in Y ; g = \mathcal{A}f, \text{ para algum } f \in \mathcal{D}_A\}.$$

chamado de imagem do operador \mathcal{A} . O conjunto de todos os operadores lineares munido das operações de soma e multiplicação por um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$

- $(\mathcal{A} + \mathcal{B})f = \mathcal{A}f + \mathcal{B}f$ para todo $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$,
- $(\lambda\mathcal{A})f = \lambda(\mathcal{A}f)$ para todo $f \in \mathcal{D}_{\lambda\mathcal{A}} = \mathcal{D}_A$.

gera um espaço vetorial sobre \mathbb{C} .

Definição 1.1.21 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} , X^* é o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X, X^*}$ a dualidade entre X, X^* . Ponhamos, para cada $f \in X$,*

$$J(f) = \{g^* \in X^* ; \langle f, g^* \rangle_{X, X^*} = \|f\|_X^2 = \|g^*\|_{X^*}^2\}.$$

A aplicação $j : X \rightarrow X^$ é chamada de aplicação dualidade se*

$$j(f) \in J(f), \quad \forall f \in X.$$

Diz-se que o operador linear $\mathcal{A} : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ é densamente definido se

$$\overline{\mathcal{D}_A}^X = X.$$

Diz-se que \mathcal{A} é dissipativo se para alguma aplicação dualidade, j , tem-se

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}f, j(f) \rangle_{X, X^*} \leq 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}_A.$$

Diz-se que \mathcal{A} é m -dissipativo se \mathcal{A} é dissipativo e $\mathcal{R}_{\mathcal{A}-I} = X$.

Definição 1.1.22 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Diz-se que \mathcal{A} é fechado se as condições:*

i) $f_n \in \mathcal{D}_A$ e $f_n \rightarrow f$ em X quando $n \rightarrow \infty$,

ii) $\mathcal{A}f_n \rightarrow g$ em X quando $n \rightarrow \infty$,

implicam que:

$$f \in \mathcal{D}_A \quad e \quad g = \mathcal{A}f.$$

Definição 1.1.23 Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ é um operador linear densamente definido. Defina-se um operador linear $\mathcal{A}^* : \mathcal{D}_{A^*} \subset X^* \rightarrow X^*$ chamado de operador adjunto de \mathcal{A} , cujo domínio é o subespaço de X^* , dado por

$$\mathcal{D}_{A^*} = \{g^* \in X^*; \exists C < \infty / |\langle \mathcal{A}f, g^* \rangle_{X, X^*}| \leq C\|f\|_X, \forall f \in \mathcal{D}_A\}.$$

e satisfaz

$$\langle \mathcal{A}f, g^* \rangle_{X, X^*} = \langle f, \mathcal{A}^*g^* \rangle_{X, X^*}, \quad \forall f \in \mathcal{D}_A, \quad \forall g^* \in \mathcal{D}_{A^*}.$$

Definição 1.1.24 Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$ um operador linear densamente definido. Diz-se que \mathcal{A} é auto-adjunto (respectivamente anti-hermitiano) se $\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_A$ (respectivamente $\mathcal{D}_{A^*} = \mathcal{D}_{-\mathcal{A}}$).

Corolário 1.1.25 Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$ um operador linear, densamente definido e m -dissipativo, então \mathcal{A} é anti-hermitiano se e só se $-\mathcal{A}$ é m -dissipativo.

Corolário 1.1.26 Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$ é um operador linear, densamente definido e m -dissipativo, então as seguintes afirmações são equivalentes

i) $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{A^*}$ tal que $\mathcal{A}^*|_{\mathcal{D}_A} = -\mathcal{A}$.

ii) $\text{Re}(\mathcal{A}f, f)_H = 0$ para todo $f \in \mathcal{D}_A$.

1.2 Triplo de Gelfand e Formas Sesquilineares

Definição 1.2.1 Suponhamos que $(V, (\cdot, \cdot)_V), (H, (\cdot, \cdot)_H)$ são três espaços de Hilbert sobre \mathbb{C} e V^* é o dual de V , então um triplo de Gelfand consiste de um esquema de imersões dado por

$$V \hookrightarrow H \simeq H^* \hookrightarrow V^*$$

com H denominado por espaço pivot. Onde

a) $V \hookrightarrow H$: significa que à cada $v \in V$ identifique-se com um elemento de H através do operador injeção identidade i onde i é contínuo e $i(V)$ é denso em H .

b) $H \simeq H^*$: significa que existe um isomorfismo isométrico $J : H \rightarrow H^*$ que para todo $h^* \in H^*$ existe um único $u \in H$ tal que $J(u) = h^*$ definido por

$$\langle h, J(u) \rangle_{H, H^*} = (u, h)_H, \quad \forall h \in H$$

onde J é único, $\|Ju\|_{H^*} = \|u\|_H$ e $J(H) = H^*$.

c) $H \hookrightarrow V^*$: significa que à cada $h \in H$ define-se $T(h) \in V^*$ por

$$\langle v, T(h) \rangle_{V, V^*} = (h, v)_H, \quad \forall v \in V \quad (1.2.1)$$

onde $T : H \rightarrow T(H) \subset V^*$ é um operador linear, contínuo e bijetivo com $T(H)$ denso em V^* na topologia $\sigma(V^*, V)$.

OBSERVAÇÃO.- Com um triplo de Gelfand, as vezes é comum usar a dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V, V^*}$ como extensão por continuidade do produto escalar $(\cdot, \cdot)_H$ de $V \times H$ sobre $V \times V^*$, isto é, para $v^* \in V^*$ de (1.2.1) tem-se

$$\langle v, v^* \rangle_{V, V^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v, Tu_n \rangle_{V, V^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v)_H$$

onde $u_n \in H$, tal que $Tu_n \xrightarrow{\sigma(V^*, V)} v^*$.

Definição 1.2.2 Suponhamos que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ é um triplo de Gelfand. A aplicação $\mathbf{a} : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada de forma sesquilinear se satisfaz

- $\mathbf{a}(f + \lambda g, h) = \mathbf{a}(f, h) + \lambda \mathbf{a}(g, h), \quad \forall f, g, h \in V \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{C},$
- $\mathbf{a}(f, g + \beta h) = \mathbf{a}(f, g) + \bar{\beta} \mathbf{a}(f, h), \quad \forall f, g, h \in V \text{ e } \forall \beta \in \mathbb{C}.$

a) A forma sesquilinear \mathbf{a} é hermitiana se satisfaz

$$\mathbf{a}(f, g) = \overline{\mathbf{a}(g, f)}, \quad \forall f, g \in V.$$

b) A forma sesquilinear \mathbf{a} é contínua em V se existe $M > 0$ tal que

$$|\mathbf{a}(f, g)| \leq M \|f\|_V \|g\|_V, \quad \forall f, g \in V.$$

c) A forma sesquilinear \mathbf{a} é coerciva em V se existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathbf{a}(f, f)| \geq \delta \|f\|_V^2, \quad \forall f \in V.$$

OBSERVAÇÃO.- Se $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ é um triplo de Gelfand e \mathbf{a} uma forma sesquilinear contínua em V , então a terna (\mathbf{a}, V, H) está associada com um operador linear $\mathcal{A}_\mathbf{a} \in \mathcal{L}(V, V^*)$ de forma unívoca definido por

$$\langle g, \mathcal{A}_\mathbf{a} f \rangle_{V, V^*} = \mathbf{a}(f, g), \quad \forall f, g \in V. \quad (1.2.2)$$

Agora se definirmos o operador linear $\mathcal{A}_\mathbf{a} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}_\mathbf{a}} \subset V \rightarrow H$ com domínio

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}_\mathbf{a}} = \{f \in V ; g \mapsto \mathbf{a}(f, g) \text{ é contínua em } V \text{ com a norma de } H\},$$

então, em geral, ele não é limitado sobre V , mas satisfaz

$$\mathbf{a}(f, g) = (\mathcal{A}_\mathbf{a} f, g)_H, \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}_\mathbf{a}} \text{ e } \forall g \in V. \quad (1.2.3)$$

Só assim é possível definir a seguinte forma sesquilinear contínua em V

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* : V \times V &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \mathbf{a}^*(g, f) = \overline{\mathbf{a}(f, g)}, \end{aligned}$$

de tal forma que, a terna (\mathbf{a}^*, V, H) é associada ao operador linear $\mathcal{A}_{\mathbf{a}^*} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}_{\mathbf{a}^*}} \subset H \rightarrow H$, que em geral é não limitado e cujo domínio é definido por

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{\mathbf{a}^*}} = \{g \in V ; f \mapsto \mathbf{a}^*(g, f) \text{ é contínua em } V \text{ com a norma de } H\}$$

e satisfaz a seguinte propriedade

$$\mathbf{a}^*(g, f) = (\mathcal{A}_{\mathbf{a}^*} g, f)_H, \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}_{\mathbf{a}^*}} \text{ e } \forall g \in V. \quad (1.2.4)$$

Teorema 1.2.3 (Lax-Milgram) *Suponhamos que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ é um triplo de Gelfand e \mathbf{a} é uma forma sesquilinear contínua em V , e coerciva em V , então*

i) $\mathcal{A}_\mathbf{a}$ é um isomorfismo linear de V em V^* e $\mathcal{A}_\mathbf{a}^{-1} \in \mathcal{L}(V^*, V)$ com

$$\|\mathcal{A}_\mathbf{a}^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^*, V)} \leq \frac{1}{\delta}.$$

ii) $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_\mathbf{a}}$ é denso em V e, portanto, é denso em H .

iii) $\mathcal{A}_\mathbf{a} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}_\mathbf{a}} \subset V \rightarrow H$ é fechado com $\mathcal{A}_\mathbf{a}^* = \mathcal{A}_{\mathbf{a}^*}$ e satisfaz (1.2.3).

1.3 Problemas de Transmissão de Segunda Ordem

Na literatura matemática existem vários trabalhos dedicados ao estudo de problemas de transmissão de segunda ordem em domínios limitados de \mathbb{R}^m . Dentre elas, aproveitamos a metodologia feita para formular variacionalmente alguns exemplos de problemas de transmissão dados por Dautray-Lions em [7] e usamos os espaços funcionais construídos por Nicaise-Sändig em [19] para uma boa colocação de problemas de transmissão. Estes problemas se distinguem pela presença de ao menos uma interface dentro do domínio, o qual é o contorno que divide dois subdomínios. Sobre cada lado da interface, tem-se equações elípticas de segunda ordem ou sistemas o qual podem ser distintas e ter uma combinação de condições de transmissão sobre cada interface envolvendo traços sobre ambos lados da interface.

Considere uma partição do intervalo $I =]a, b[$ em n intervalos limitados $I_k =]a_k, b_k[$, $k = 1, \dots, n$ tal que seus extremos satisfazem as desigualdades

$$-\infty < a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots = a_{n-1} < b_{n-1} = a_n < b_n = b < +\infty. \quad (\dagger)$$

De acordo ao valor de n escolhemos os conjuntos Ω_+ e Ω_- de forma que

$$\begin{array}{lll} \text{Se } n = 2, & \Omega_+ = I_1 & e \quad \Omega_- = I_2, \\ \text{Se } n = 3, & \Omega_+ = I_2 & e \quad \Omega_- = I_1 \cup I_3, \\ \text{Se } n = 4, & \Omega_+ =]a_2, b_3[& e \quad \Omega_- = I_1 \cup I_4, \\ \text{Se } n = 5, & \Omega_+ =]a_2, b_4[& e \quad \Omega_- = I_1 \cup I_5, \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

OBSERVAÇÃO.- Se $n = 4$, veja que Ω_+ pode ser particionado novamente em conjuntos $\Omega'_+ = I_2$ e $\Omega'_- = I_3$ equivalente ao esquema da partição $n = 2$. Se $n = 5$, veja também que Ω_+ pode ser particionado em conjuntos $\Omega'_+ = I_3$ e $\Omega'_- = I_2 \cup I_4$ equivalente ao esquema da partição $n = 3$, logo para qualquer valor n , sempre, é possível reduzir nosso estudo aos casos $n = 2$ e $n = 3$.

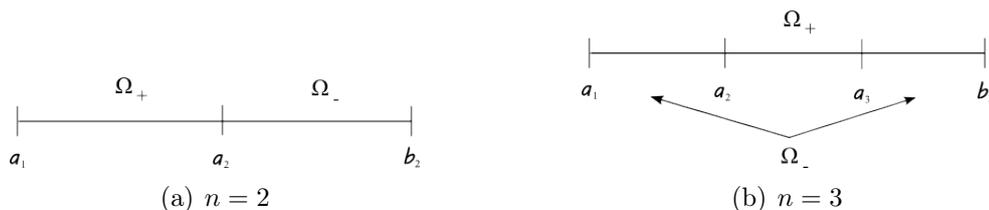


Figura 1.1: Alternativas principais para os conjuntos Ω_+ e Ω_- em \mathbb{R} .

Em geral, para \mathbb{R}^m com $m > 1$, quando Ω é, por exemplo, um domínio limitado em \mathbb{R}^2 cujo contorno é uma curva suave de classe C^∞ , então nosso estudo se concentra em dois esquemas dados na Figura 1.2

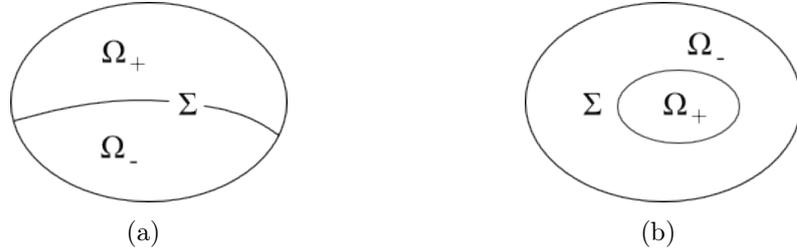


Figura 1.2: Alternativas principais para os conjuntos Ω_+ e Ω_- em \mathbb{R}^2 .

É possível ver, na Figura 1.2, que os conjuntos Ω_+ e Ω_- são subdomínios internos de Ω cuja interface entre eles é uma curva de classe C^∞ , denotada por Σ , para o caso (a) é dada por $\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$ e no caso (b) é, simplesmente, $\partial\Omega_+$, só assim tem-se

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Sigma \cup \Omega_-$$

Se o contorno de Ω é $\partial\Omega$, denotado por Γ , então é possível distinguir, na Figura 1.2, que Γ no caso (a) é dividido em duas partes Γ_+ e Γ_- , dados por $\partial\Omega_+ \setminus \Sigma$ e $\partial\Omega_- \setminus \Sigma$ respectivamente, tal que

$$\Gamma = \bar{\Gamma}_+ \cup \bar{\Gamma}_-$$

e no caso (b), $\Gamma = \partial\Omega_- \setminus \Sigma$ que é subconjunto de $\partial\Omega_-$.

Nas configurações acima, cada problema de transmissão de segunda ordem podem ser tratado como problema elíptico de valor de contorno para sistemas se as seguintes ferramentas e condições são consideradas

- i) Dois operadores diferenciais elípticos de segunda ordem, L_+ e L_- , o primeiro deles atua sobre funções $u_+ : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{C}$ e é dado por

$$L_+ u_+ = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}^+ \frac{\partial u_+}{\partial x_j}) + \sum_{j=1}^n a_j^+ \frac{\partial u_+}{\partial x_j} + a_0^+ u_+, \quad (1.3.1)$$

onde $a_{i,j}^+, a_j^+, a_0^+$ são constantes com $a_{i,j}^+ \neq 0$, por sua vez L_- está definido sobre funções $u_- : \Omega_- \rightarrow \mathbb{C}$ e é dado pela expressão (1.3.1) substituindo o símbolo “-” no lugar de “+”.

- ii) Um sistema de operadores de contorno $C_{\Gamma_+} = (T_{\Gamma_+}, D_{\Gamma_+})$ associados ao contorno Γ_+ , exibido no caso (a) da Figura (1.2) e são definidos por

$$T_{\Gamma_+} u_+ = \sum_{j=1}^m t_j^+ \frac{\partial u_+}{\partial x_j} + t_0^+ u_+, \quad (1.3.2)$$

$$D_{\Gamma_+} u_+ = d_0^+ u_+, \quad (1.3.3)$$

onde t_j^+, t_0^+, d_0^+ são constantes com t_j^+, d_0^+ não nulas. O sistema C_{Γ_+} atua sobre o traço de u_+ ao contorno Γ_+ e o vetor $\mathbf{t} = (t_1^+, t_2^+, \dots, t_m^+)$ de coeficientes da parte principal de T_{Γ_+} satisfaz

$$\mathbf{t} \cdot \nu^+ \neq 0 \quad (1.3.4)$$

onde ν^+ é o vetor unitário e normal ao contorno Γ_+ , e tanto \mathbf{t} como ν^+ estão definidos em cada ponto de Γ_+ . Neste mesmo caso (a) da Figura (1.2), se define outro sistema de operadores de contorno $C_{\Gamma_-} = (T_{\Gamma_-}, D_{\Gamma_-})$, associados ao contorno Γ_- que são dados pelas expressões (1.3.2) e (1.3.3) substituindo o símbolo “−” no lugar de “+”. Finalmente por analogia ao caso (a) é possível definir sistemas de operadores de contorno para o caso (b) da Figura (1.2).

- iii) Um sistema de operadores interface $C_{\Sigma} = (T_{\Sigma}, D_{\Sigma})$ associado à interface Σ de tal forma que T_{Σ} e D_{Σ} são definidos guardando a mesma ordem que (1.3.2) e (1.3.3) respectivamente ademais a restrição (1.3.4) é satisfeita pelos coeficientes principais de T_{Σ} , desta vez, com respeito ao vetor unitário e normal à interface, denotada por ν^{Σ} , que é definida nos pontos de Σ no lugar do contorno Γ_+ , a diferencia relevante entre C_{Σ} e os sistemas apresentados em (ii) é que C_{Σ} atua não só sobre o traço de u_+ senão também no traço de u_- à interface, Σ , seja o caso que for na Figura (1.2), portanto é lógico usar a notação de dupla entrada (u_+, u_-) para os operadores fronteira e do sistema próprio

$$C_{\Sigma}(u_+, u_-) = C_+ u_+ + C_- u_-$$

$$T_{\Sigma}(u_+, u_-) = T_+ u_+ + T_- u_-, \quad D_{\Sigma}(u_+, u_-) = D_+ u_+ + D_- u_-$$

- iv) Condições de compatibilidade sempre serão consideradas se estudamos equações diferenciais elípticas com condições de contorno. Esta condição só faz sentido se o operador associado à equação diferencial elíptica é propriamente elíptica como na Definição 1.2 no Capítulo 2 em [16]. A

propriedade de um operador ser elíptico equivale à propriedade de ser propriamente elíptico quando $m \geq 3$ foi mostrado por Lopatinsky em [18]; no enquanto para $m = 2$ exigimos que seja propriamente elíptica. Assim, no caso (a) da Figura (1.2) são duas condições, a primeira é dada entre C_{Γ_+} e L_+ , para isto, suponhamos que $x \in \Gamma_+$ e s^+ é o vetor tangente ao contorno Γ_+ no ponto x , o polinômio associado à parte principal do operador L_+ é dado por

$$P_+(z) = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}^+(x)(s_i^+ + z\nu_i^+)(s_j^+ + z\nu_j^+),$$

e sua raiz, dentre as duas raízes que P_+ possui, com parte imaginária positiva será denotada por $z_0(x, s^+, \nu^+)$, considera-se também o ideal com gerador $(z - z_0(x, s^+, \nu^+))$, que por definição, é dado por

$$\mathcal{I}_+ = \{(z - z_0(x, s^+, \nu^+))p(z); p(z) \in \mathbb{C}[z]\},$$

e dois polinômios, um associado à parte principal do operador T_{Γ_+} e outro associado à parte principal do operador D_{Γ_+} dados por

$$Q_1(z) = \sum_{j=1}^m t_j^+(x)(s_j^+ + z\nu_j^+) \quad \text{e} \quad Q_2(z) = d_0^+,$$

respectivamente. Então a condição de compatibilidade entre C_{Γ_+} e L_+ se satisfaz, se os polinômios Q_1 e Q_2 são linearmente independentes modulo \mathcal{I}_+ , isto é, se $\mathbb{C}[z]/\mathcal{I}_+$ é o espaço quociente e $\pi : \mathbb{C}[z] \rightarrow \mathbb{C}[z]/\mathcal{I}_+$ é o operador quociente natural, então $\pi(Q_1)$, $\pi(Q_2)$ são linearmente independentes. A segunda condição é dada entre C_{Γ_-} e L_- , para isto, substitui o símbolo “ $-$ ” no lugar de “ $+$ ” na condição de compatibilidade anterior. Por analogia ao caso (a) é possível determinar condições de compatibilidade para o caso (b) da Figura (1.2).

- v) Condições de compatibilidade entre C_{Σ} e o sistema $\{L_+, L_-\}$, também requerem da exigência de que L_+, L_- , sejam propriamente elípticos para $m = 2$, desta forma suponhamos que $x \in \Sigma$ e s^{Σ} é o vetor tangente à interface Σ no ponto x , o polinômio associado à parte principal do operador L_+ dado por

$$P_+(z) = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}^+(x)(s_i^{\Sigma} + z\nu_i^{\Sigma})(s_j^{\Sigma} + z\nu_j^{\Sigma})$$

e o polinômio associado à parte principal do operador L_- dado por

$$P_-(z) = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}^-(x)(s_i^\Sigma - z\nu_i^\Sigma)(s_j^\Sigma - z\nu_j^\Sigma),$$

denotemos por $z_0(x, s^\Sigma, \nu^\Sigma)$ a raiz com parte imaginária positiva de P_+ e $z_0(x, s^\Sigma, -\nu^\Sigma)$ a raiz com parte imaginária positiva de P_- , considere-se também o ideal com gerador $(z - z_0(x, s^\Sigma, \nu^\Sigma))(z - z_0(x, s^\Sigma, -\nu^\Sigma))$, que por definição, é dado por

$$\mathcal{I}_\Sigma = \{(z - z_0(x, s^\Sigma, \nu^\Sigma))(z - z_0(x, s^\Sigma, -\nu^\Sigma))p(z); p(z) \in \mathbb{C}[z]\},$$

e quatro polinômios, uma dupla associada às partes principais de T_+ e T_- que compõe o operador T_Σ dado por

$$Q_+(z) = \sum_{j=1}^m t_j^+(x)(s_j^\Sigma + z\nu_j^\Sigma) \quad \text{e} \quad Q_-(z) = \sum_{j=1}^m t_j^-(x)(s_j^\Sigma - z\nu_j^\Sigma),$$

e outra dupla associada à D_+ e D_- que compõe D_Σ dado por

$$R_+(z) = d_0^+ \quad \text{e} \quad R_-(z) = d_0^-.$$

Então a condição de compatibilidade entre C_Σ e o sistema $\{L_+, L_-\}$ se satisfaz, se as linhas da matriz

$$\begin{pmatrix} R_+(z) & R_-(z) \\ Q_+(z) & Q_-(z) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_-(z) & 0 \\ 0 & P_+(z) \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes modulo \mathcal{I}_Σ .

Definição 1.3.1 *Diz-se que o problema de transmissão de segunda ordem com coeficientes constantes seguinte*

$$\begin{aligned} L_+u_+ &= f_+ & \text{em } \Omega_+ \\ L_-u_- &= f_- & \text{em } \Omega_- \\ C_\Gamma u_- &= g & \text{em } \Gamma \\ T_\Sigma(u_+, u_-) &= T_+u_+ + T_-u_- = p & \text{em } \Sigma \\ D_\Sigma(u_+, u_-) &= D_+u_+ + D_-u_- = q & \text{em } \Sigma \end{aligned}$$

é um problema de transmissão elíptico e regular sempre que as condições (i)-(iii) se verificam, a condição (iv) se verifica em cada ponto de Γ_+ e Γ_- e a condição (v) se verifica em cada ponto de Σ .

OBSERVAÇÃO.- O problema de transmissão elíptico e regular em intervalos da reta, como é mostrado na Figura (1.1), é simplesmente um problema de transmissão de segunda ordem que envolve equações diferenciais ordinárias e certas condições de contorno. Tendo em conta as condições (i)-(v) para $m \geq 2$, no seguinte exemplo, vemos que, para o caso unidimensional algumas destas condições são triviais e outras não podem ser aplicáveis.

EXEMPLO.- Considere o problema de transmissão de segunda ordem

$$L_+u^+ = a^+u_{xx}^+ = f_+ \quad \text{em } \Omega_+ =]a, c[\quad (1.3.5)$$

$$L_-u^- = a^-u_{xx}^- = f_- \quad \text{em } \Omega_- =]c, b[\quad (1.3.6)$$

com $a^+ \neq 0$, $a^- \neq 0$ e as condições de contorno e transmissão

$$D_a(u^+) = u^+(a) = 0 \quad \text{em } \mathbb{C},$$

$$D_b(u^-) = u^-(b) = 0 \quad \text{em } \mathbb{C},$$

$$D_c(u^+, u^-) = u^+(c) - u^-(c) = 0 \quad \text{em } \mathbb{C},$$

$$T_c(u^+, u^-) = a^+u_x^+(c) - a^-u_x^-(c) = 0 \quad \text{em } \mathbb{C}.$$

Este problema se caracteriza por ter dois operadores elípticos L_+ , L_- que não são propriamente elípticos logo as condições de compatibilidade (iv) e (v) não podem ser aplicáveis. Conforme à teoria sobre problemas de valor de contorno para equações diferenciais ordinárias, a condição (ii) se verifica, pois temos um operador de contorno D_a de ordem 0 o qual serve para fixar a condição essencial do problema (1.3.5) no extremo $x = a$ e o operador de contorno D_b de ordem 0 que serve para derivar a condição essencial do problema (1.3.6) no extremo $x = b$, assim a condição (1.3.4) se verifica desde que nos extremos $x = a$ e $x = b$ os vetores normais são $\nu^+ = -1$ e $\nu^- = 1$ respectivamente. Finalmente podemos ver que a condição (iii) se verifica pois temos definido, sobre a interface $x = c$, o operador interface D_c de ordem 0 que serve para fixar a condição essencial de transmissão e o operador T_c de ordem 1 que serve para derivar a condição natural de transmissão, assim mesmo se corrobora a condição (1.3.4) desde que $\nu^\Sigma = 1$. Portanto o este problema de transmissão de segunda ordem é um problema de transmissão elíptico e regular.

A boa colocação de um problema de transmissão elíptico e regular precisa de sua formulação variacional fraca, o qual requiere classes de funções definidas

em conjuntos desconexos da reta \mathbb{R} , do tipo $\Omega = \cup_{k=1}^n I_k$, com $I_k =]a_k, b_k[$ cujos extremos a_k, b_k seguem as desigualdades descritas em (†).

Nem toda função $f \in C^\infty(\Omega)$ junto com suas derivadas $\{f', f'', f''', \dots\}$ podem ser estendidas continuamente ao fecho $\bar{\Omega}$, por exemplo a função $f(x) = 1/x$ definida em $\Omega =]-1, 0[\cup]0, 1[$; em contraparte define-se

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \{\phi \in C^\infty(\Omega); \widetilde{\phi^{(k)}} \in C(\bar{\Omega}), \forall k \in \mathbb{Z}_0^+\}.$$

A classe de funções em $C^\infty(\bar{\Omega})$ com suporte compacto em Ω é definida por

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\bar{\Omega}); \text{supp } \phi \subset \Omega\}.$$

O aspecto relevante nas funções $f \in C_0^\infty(\Omega)$ é que $f \equiv 0$ na proximidade de cada ponto $x = a_k$ para todo $k = 1, \dots, n$ como na Figura 1.3.

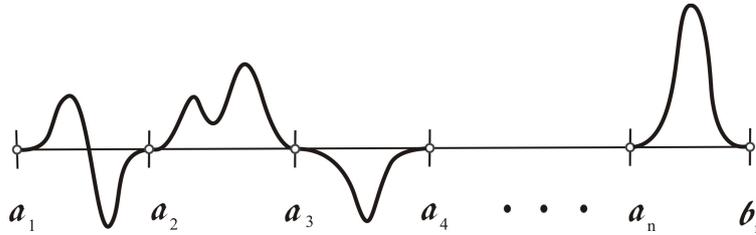


Figura 1.3: Elementos da classe $C_0^\infty(\Omega)$ são nulos na vizinhança de todo ponto $x = a_k$ na topologia usual de \mathbb{R} induzida sobre Ω .

Em geral, a classe de funções em $C^\infty(\bar{\Omega})$ que se anulam unicamente nas proximidades do ponto $x = a_k$ como na Figura 1.4 é definido por

$$C_{a_k}^\infty(\Omega) = \{\psi \in C^\infty(\bar{\Omega}); \psi = 0 \text{ na vizinhança de } x = a_k\}.$$

Para evitar ambiguidade, no caso que $a_k = 0$, usaremos “*” no lugar de a_k .

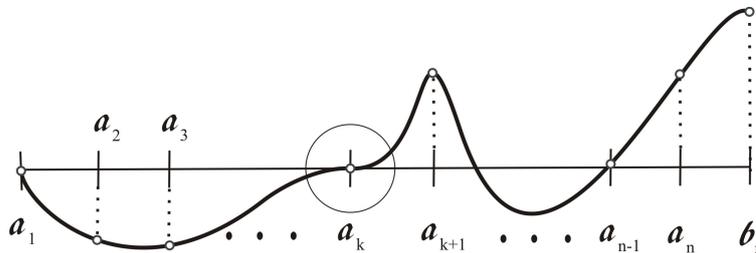


Figura 1.4: Elementos da classe $C_{a_k}^\infty(\Omega)$ são nulos unicamente na vizinhança do ponto $x = a_k$ na topologia usual de \mathbb{R} induzida sobre Ω .

Finalmente, segundo a Figura 1.4, a curva que representa o elemento em $C_{a_k}^\infty(\Omega)$ é nula nos pontos $x = a_1$ e $x = a_{n-1}$ mas não em suas proximidades.

É importante observar que para qualquer função f no espaço de Sobolev $H^1(I)$ com $I =]a, b[$ implica que a restrição de f a qualquer subintervalo $I_k =]a_k, b_k[$, $\forall k = 1, \dots, n$ com a_k, b_k cumprindo as desigualdades em (†), denotado por $f|_{I_k}$, pertence ao espaço de Sobolev $H^1(I_k)$; sem embargo o recíproco não é verdade, assim precisamos introduzir espaços de Sobolev não convencionais definidos sobre $\Omega = \cup_{k=1}^n I_k$ para fechar a relação recíproca.

Definição 1.3.2 *Suponhamos que $m \in \mathbb{Z}_0^+$ e $H^m(I_k)$ para $k = 1, \dots, n$ são os espaços de Sobolev sobre o intervalo I_k , então definimos*

$$\mathcal{H}^m(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; f|_{I_k} \in H^m(I_k), \forall k = 1, \dots, n\}.$$

Se $(\cdot, \cdot)_{m,2,I_k}$ representa o produto interno do espaço de Sobolev $H^m(I_k)$, então o espaço $\mathcal{H}^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} com o produto interno

$$(f, g)_{m,2,\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n (f|_{I_k}, g|_{I_k})_{m,2,I_k}$$

e que está dotado com a norma induzida

$$\|f\|_{m,2,\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^n \|f|_{I_k}\|_{m,2,I_k}^2 \right)^{1/2}.$$

Define-se também os seguintes espaços

$$H_0^m(I) = \overline{C_0^\infty(I)}^{\|\cdot\|_{m,2,I}} \quad e \quad H_{a_k}^m(I_k) = \overline{C_{a_k}^\infty(I_k)}^{\|\cdot\|_{m,2,I}}.$$

O lema que estabelece em que toda função em $H^1(I)$ pertença a $C(\bar{I})$ salvo modificações, possivelmente num conjunto de medida nula, é o seguinte

Lema 1.3.3 *Toda função f pertencente a $H^1(I)$ é contínua em \bar{I} e existe $c > 0$ (independente da seleção da função f) tal que*

$$\sup_{x \in \bar{I}} |f(x)| \leq c \|f\|_{1,2,I}.$$

Assim, cada função $f \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ tem restrição $f|_{I_k} \in C(\bar{I}_k)$, $\forall k = 1, \dots, n$ tornando a função f contínua por partes no intervalo $I =]a, b[$, isto é, f pode revelar um salto em algum ponto $x = a_k$; enquanto funções em $H^1(\Omega)$ sempre são contínuas em $\bar{\Omega} = \bar{I} = [a, b]$.

O Lema 1.3.3 também permite que os valores de contorno da função f em $H^1(I)$ coincida com $f(a)$ e $f(b)$. Em particular segue a caracterização

$$\begin{aligned} f \in H_0^1(I) &\iff f \in H^1(I) \quad \text{tal que} \quad f(a) = f(b) = 0, \\ f \in H_a^1(I) &\iff f \in H^1(I) \quad \text{tal que} \quad f(a) = 0. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Teorema 1.3.4 (Poincaré) *Existe $C_p > 0$ (depende de $\text{med}(I)$) tal que*

$$\|f\|_{2,I} \leq C_p \|f_x\|_{2,I}, \quad \forall f \in H_a^1(I).$$

Em outras palavras, sobre $H_a^1(I)$, a quantidade $\|f_x\|_2$ é uma norma equivalente à norma $\|\cdot\|_{1,2,I}$. Mais geralmente, existe um $C_p > 0$ tal que

$$\|f\|_{2,I}^2 - \frac{1}{\text{med}(I)} \left| \int_a^b f(x) dx \right|^2 \leq C_p \|f_x\|_{2,I}^2, \quad \forall f \in H^1(I).$$

Em geral, também podemos definir, para cada $m \in \mathbb{Z}_0^+$, uma subclasse de funções em $\mathcal{H}^m(\Omega)$ com condição nula em algum ponto $x = a_k$ dado por

$$\mathcal{H}_{a_k}^m(\Omega) = \{f \in \mathcal{H}^m(\Omega); f|_{I_k} \in H_{a_k}^m(I_k)\}$$

que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(f, g)_{m,2,\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{k-1} (f|_{I_j}, g|_{I_j})_{m,2,I_j} + (f_x^{(m-1)}|_{I_k}, g_x^{(m-1)}|_{I_k})_{2,I_k} + \sum_{j=k+1}^n (f|_{I_j}, g|_{I_j})_{1,2,I_j}$$

e que esta dotado da norma induzida

$$\|f\|_{m,2,\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \|f|_{I_j}\|_{m,2,I_j}^2 + \|f_x^{(m-1)}|_{I_k}\|_{2,I_k}^2 + \sum_{j=k+1}^n \|f|_{I_j}\|_{m,2,I_j}^2 \right)^{1/2}.$$

Teorema 1.3.5 $C^\infty(\bar{I})$ é denso em $H^m(I)$ na norma $\|\cdot\|_{m,2,I}$.

Lema 1.3.6 Para cada $m \in \mathbb{Z}_0^+$, a seguinte igualdade se satisfaz

$$H^{m+1}(I) = \{f \in \mathcal{H}^{m+1}(\Omega); f^{(m)}(a_k^-) = f^{(m)}(a_k^+), \forall k = 2, \dots, n\}.$$

Definição 1.3.7 Suponhamos que $m \in \mathbb{Z}^+$, então $H^{-m}(I)$ é definido como o espaço dual do espaço $H_0^m(I)$. $H^{-m}(I)$ é um espaço de Banach com norma

$$\|T\|_{-m,2,I} = \sup_{\substack{f \in H_0^m(I) \\ \|f\|_{m,2,I}=1}} |Tf|, \quad \forall T \in H^{-m}(I).$$

Teorema 1.3.8 *Suponhamos que $m \in \mathbb{Z}^+$ e T é uma distribuição em $\mathcal{D}'(I)$, então $T \in H^{-m}(I)$ se e só se existem $g_0, \dots, g_m \in L^2(I)$ tal que*

$$T = \sum_{k=0}^m (-1)^k D^k T_{g_k}.$$

onde D^k representa a k -ésima derivada no sentido das distribuições.

Teorema 1.3.9 (Rellich-Kondrachov) *Para todo intervalo limitado I ,*

$$H^1(I) \xrightarrow{c} C(\bar{I}) \quad e \quad W^{1,1}(I) \xrightarrow{c} L^q(I) \quad \text{para } 1 \leq q < \infty.$$

onde $W^{1,1}(I) = \{f \in L^1(I); \exists g \in L^1(I) \text{ tal que,}$

$$\int_I f(x) \phi_x(x) dx = - \int_I g(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(I)\}$$

Teorema 1.3.10 (Gagliardo - Nirenberg) *Dado $f \in W^{m,r}(I) \cap L^q(I)$ e $1 \leq r, q \leq \infty$. Para qualquer inteiro j , $0 \leq j < m$ e para qualquer número α no intervalo $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$, onde $\frac{1}{p} = j + \alpha(\frac{1}{r} - m) + (1 - \alpha)\frac{1}{q}$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$\|D^j f\|_{p,I} \leq C \|f\|_{m,r,I}^\alpha \|f\|_{q,I}^{1-\alpha}.$$

Definição 1.3.11 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e a aplicação*

$$f :]0, T[\rightarrow X$$

então

a) f é contínua em $s_0 \in]0, T[$ se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \|f(s) - f(s_0)\|_X = 0.$$

O conjunto de todas as funções que são contínuas em cada ponto de $]0, T[$, é denotado por $C(0, T; X)$.

b) f é derivável em $t_0 \in]0, T[$ se existe $\xi \in X$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - \xi \right\|_X = 0. \quad \left(\dot{f}(t_0) \stackrel{\text{not}}{=} \xi \right)$$

O conjunto de todas as funções $f \in C(0, T; X)$ que são deriváveis em cada ponto de $]0, T[$, é denotado por $C^1(0, T; X)$.

Definição 1.3.12 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} , $p \in [1, \infty]$ e $]0, T[$ é o intervalo finito e equipado com a medida de Lebesgue dt , então $L^p(0, T; X)$ é o espaço das (classes de) funções vectoriais $f :]0, T[\rightarrow X$ mensuráveis no sentido de Lebesgue e tais que*

$$\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_X < \infty, \quad \text{se } p = \infty.$$

O espaço $L^p(0, T; X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} com norma

$$\|f\|_{L^p(0, T, X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(0, T, X)} = \inf \{ C ; \|f(t)\|_X < C \text{ q.t.p. em }]0, T[\} \quad \text{se } p = \infty.$$

Teorema 1.3.13 *Suponhamos que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ é um triplo de Gelfand. Se $f \in L^2(0, T; V)$ e $\dot{f} \in L^2(0, T; V^*)$, então $f \in C(0, T; H)$. Além disso*

i) *Para cada $v \in V$, a função $t \mapsto (f(t), v)$ é fracamente derivável em $]0, T[$ e*

$$\frac{d}{dt} [(f(t), v)_H] = \langle v, \dot{f}(t) \rangle_{V, V^*}.$$

ii) *A função $t \mapsto \|f(t)\|_H^2$ é absolutamente contínua em $]0, T[$ e*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|f(t)\|_H^2] = \text{Re}(\dot{f}(t), f(t))_H.$$

1.4 C_0 -semigrupos gerados por operadores dissipativos

Definição 1.4.1 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é uma família de operadores em $\mathcal{L}(X)$ que será dito de semigrupo em X se a aplicação $S : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ satisfaz*

a) $S(0) = I$

b) $S(t + s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_0^+.$

O semigrupo $S(t)$ é dito de classe C_0 ou C_0 -semigrupo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

1. Todo C_0 -semigrupo é dito de contrações se

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0$$

2. Todo C_0 -semigrupo é dito de unitário se para todo $x \in X$ tem-se

$$S(t)^* = S(t)^{-1}, \quad \forall t \geq 0$$

Definição 1.4.2 Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $S(t)$ é um C_0 -semigrupo. O gerador infinitesimal associado com $S(t)$ é representado pelo operador linear $\mathcal{A} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset X \rightarrow X$ definido por

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \dot{S}_+(t)x \Big|_{t=0}, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}},$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \left\{ x \in X ; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Teorema 1.4.3 (Hille-Yosida) Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} , $\omega \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$. Um operador linear $\mathcal{A} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset X \rightarrow X$ satisfaz as seguintes condições se satisfazer ao menos uma delas:

a) \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 , $S(t)$, satisfazendo

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

b) \mathcal{A} é um operador fechado e densamente definido em X tal que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\omega < \operatorname{Re} \lambda$, tem-se $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e

$$\|(\lambda \mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}$$

Teorema 1.4.4 (Lumer-Phillips) Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset H \rightarrow H$ é um operador linear densamente definido em H . Se \mathcal{A} é dissipativo tal que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre H .

Teorema 1.4.5 (Stone) Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset H \rightarrow H$ é um operador linear densamente definido em H , então \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -grupo unitário se e somente se $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

1.5 Estabilidade de C_0 -semigrupos

Definição 1.5.1 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $S(t)$ é um C_0 -semigrupo em X , então $S(t)$ é dito*

1. *Uniformemente estável ou simplesmente **U.E.** se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0, \quad (1.5.1)$$

2. *Fortemente estável ou simplesmente **F.E.** se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)x\|_X = 0 \quad \text{para cada } x \in X \quad (1.5.2)$$

OBSERVAÇÃO.- Na literatura é comum que estabilidade uniforme também seja dita de estabilidade exponencial, é dizer, um C_0 -semigrupo $S(t)$ é exponencialmente estável se existem constantes positivas γ e $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_X \leq Me^{\gamma t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Proposição 1.5.2 *O seguinte esquema lógico é verdadeiro*

$$(U.E.) \Rightarrow (F.E.) \quad \text{mas} \quad (U.E.) \not\Leftarrow (F.E.)$$

Definição 1.5.3 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $S(t)$ é um C_0 -semigrupo, então o seguinte número*

$$\omega_0(S) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R}; \exists M_\omega \geq 1 \quad \text{tal que} \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\omega e^{\omega t}, \forall t \geq 0 \right\}$$

representa o tipo do semigrupo $S(t)$ e pode ser calculado mediante o limite

$$\omega_0(S) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} \quad (1.5.3)$$

Proposição 1.5.4 *Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $S(t)$ um C_0 -semigrupo, então $S(t)$ é **U.E.** se e só se $\omega_0(S) < 0$.*

OBSERVAÇÃO.- A Proposição 1.5.4 é um critério que caracteriza a estabilidade uniforme através do tipo do semigrupo, as desvantagens deste critério é o conhecimento explícito do semigrupo além do mais tentar calcular o tipo de semigrupo seria uma tarefa formidável. Geralmente em muitos problemas o gerador infinitesimal e a resolvente são conhecidos mas não o semigrupo. Por isso, muitos resultados sobre estabilidade envolvem o espectro do gerador infinitesimal e a resolvente.

Definição 1.5.5 Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset X \rightarrow X$ é um operador linear fechado. O conjunto resolvente de \mathcal{A} é o subconjunto $\rho(\mathcal{A})$ de todos os λ em \mathbb{C} tais que $\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A}$ é bijetor. O espectro $\sigma(\mathcal{A})$ do operador fechado \mathcal{A} pode ser descomposto em três partes disjuntas

i) O conjunto dos auto-valores de \mathcal{A} chamado de espectro pontual e é definido por

$$\sigma_p(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}); \lambda\mathbf{I} - \mathcal{A} \text{ não é injetor}\}.$$

ii) O espectro residual $\sigma_r(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} , definido por

$$\sigma_r(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \sigma(\mathcal{A}); \lambda\mathbf{I} - \mathcal{A} \text{ é injetor e } \overline{\mathcal{R}_{\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A}}}^X \subsetneq X \right\}.$$

iii) O espectro contínuo $\sigma_c(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} , definido por

$$\sigma_c(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \sigma(\mathcal{A}); \lambda\mathbf{I} - \mathcal{A} \text{ é injetor, } \mathcal{R}_{\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A}} \subsetneq X \text{ e } \overline{\mathcal{R}_{\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A}}}^X = X \right\}.$$

Claramente $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A}) \cup \sigma_c(\mathcal{A})$ com união disjunta.

Definição 1.5.6 Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} e $S_{\mathcal{A}}(t)$ um C_0 -semigrupo em X com gerador infinitesimal \mathcal{A} . O seguinte número real

$$s(\mathcal{A}) = \sup\{\operatorname{Re} \lambda; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$$

é dita a cota superior do espectro de \mathcal{A} e ele satisfaz

$$-\infty < s(\mathcal{A}) \leq \omega_0(S_{\mathcal{A}}).$$

Teorema 1.5.7 Suponhamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} , tal que X é um espaço reflexivo e $S_{\mathcal{A}}(t)$ um C_0 -semigrupo em X com gerador infinitesimal \mathcal{A} . Se $S_{\mathcal{A}}(t)$ e \mathcal{A} satisfazem as seguintes condições

$$i) \exists M \geq 1 \text{ tal que } \|S_{\mathcal{A}}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \forall t \geq 0,$$

$$ii) \sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset,$$

iii) $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ é contável.

Então $S_{\mathcal{A}}(t)$ é **F.E.**.

Teorema 1.5.8 (Prüss) *Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} e $\{e^{A_t}\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações em H com gerador infinitesimal \mathcal{A} . Então $\{e^{A_t}\}_{t \geq 0}$ é **U.E.** se e somente se*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad (1.5.4)$$

e satisfaz a seguinte condição

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty \quad (1.5.5)$$

Teorema 1.5.9 (Borichev-Tomilov) *Suponhamos que $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ é um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} e $\{e^{B_t}\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de contrações em H com gerador infinitesimal \mathcal{B} tal que*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{B}). \quad (1.5.6)$$

Então a seguinte estimativa

$$\|e^{B_t} \mathcal{B}^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{C}{t^{1/\gamma}},$$

para algum $C > 0$ e $\gamma > 0$ se satisfaz se e somente se

$$\frac{1}{|\lambda|^\gamma} \|(i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{B})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.5.7)$$

Capítulo 2

Modelos híbridos dissipativos

Neste capítulo descreveremos a formulação forte de três modelos híbridos dissipativos correspondentes à corda elástica com dois pares de mecanismos dissipativos, logo em cada um destes modelos estudaremos a boa colocação mediante a teoria de semigrupos.

2.1 Modelo híbrido termoelástico

Suponhamos que o intervalo aberto $I_e =]l_0, l[$ representa uma corda elástica, colocaremos um mecanismo dissipativo em cada extremo de I_e , no extremo $x = l$ da corda fixamos uma caixa contendo material granular, este objeto é um mecanismo com precedentes dissipativos de tipo tip body, no extremo $x = l_0$ conectamos um intervalo aberto $I_\tau =]0, l_0[$ representando uma componente termoelástica que ficará presa em $x = 0$, esta componente termoelástica é considerada um mecanismo dissipativo localizado, ver Figura 2.1.



Figura 2.1: Corda híbrida composta de peça termoelástica e tip load.

A seguir descrevemos a formulação forte do modelo híbrido termoelástico.

Suponhamos que $\Omega = I_\tau \cup I_e$ represente a corda híbrida na Figura 2.1 cujo movimento é regido pelo sistema híbrido de ondas descrita por

$$\rho(x)\ddot{\psi}(x,t) = \sigma_x(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0. \quad (2.1.1)$$

Onde $\rho(x)$ representa a densidade da corda composta, sendo assim um coeficiente de valores positivos que dependem de cada componente, isto é

$$\rho(x) = \rho_\tau \quad \text{se } x \in I_\tau \quad \text{e} \quad \rho(x) = \rho_e \quad \text{se } x \in I_e \quad (2.1.2)$$

e $\sigma(x,t)$ é o estado tensional da corda composta regido pela Lei de Hooke

$$\sigma(x,t) = \alpha(x)\psi_x(x,t) - m(x)\theta(x,t) \quad (2.1.3)$$

onde $\alpha(x)$ é o coeficiente de rigidez elástica da corda composta, sendo assim uma função de valores positivos que dependem de cada componente, isto é

$$\alpha(x) = \alpha_\tau \quad \text{se } x \in I_\tau \quad \text{e} \quad \alpha(x) = \alpha_e \quad \text{se } x \in I_e \quad (2.1.4)$$

e $m(x)$ é o coeficiente de expansão térmica, por isso é uma função de valor positivo quando é restrita à componente I_τ e nula em outro caso, isto é

$$m(x) = m_\tau \quad \text{se } x \in I_\tau \quad \text{e} \quad m(x) = 0 \quad \text{se } x \in I_e. \quad (2.1.5)$$

De acordo ao balanço de energia na Figura 2.1 tem-se

$$c\dot{\theta}(x,t) - \kappa\theta_{xx}(x,t) + m_\tau\dot{\psi}_x(x,t) = 0, \quad x \in I_\tau, \quad t \geq 0 \quad (2.1.6)$$

onde c e κ são constantes positivas representando o coeficiente da capacidade de aquecimento e o coeficiente de condução térmica respectivamente.

Impomos as seguintes condições de contorno

$$\psi(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad \psi(l,t) = w(t), \quad t \geq 0. \quad (2.1.7)$$

Neste caso analisaremos todas as condições de contorno na variável térmica

$$\begin{aligned} \text{Tipo 1 : } & \theta_x(0,t) = \theta(l_0,t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 2 : } & \theta(0,t) = \theta_x(l_0,t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 3 : } & \theta(0,t) = \theta(l_0,t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 4 : } & \theta_x(0,t) = \theta_x(l_0,t) = 0, & t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Se w representa o tip body, então seu comportamento dinâmico é dado por

$$\rho_3 \ddot{w}(t) + \alpha_3 w(t) + d_1 \dot{w}(t) + \alpha_e \psi_x(l,t) = 0 \quad t \geq 0. \quad (2.1.9)$$

Na conexão $x = l_0$ é importante manter a continuidade estrutural e o fluxo tensional que corresponde às seguintes condições de transmissão

$$\psi(l_0^-, t) = \psi(l_0^+, t) \quad \text{e} \quad \sigma(l_0^-, t) = \sigma(l_0^+, t) \quad t \geq 0. \quad (2.1.10)$$

Finalmente consideramos as condições iniciais

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(x, 0) = \psi_1, \quad \theta(x, 0) = \theta_0, \\ w(0) = w_1, \quad \text{e} \quad \dot{w}(0) = w_1. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Se excluimos a componente termoelástica I_τ no modelo anterior, $\Omega = I_e$, depois de uma reparametrização transformamos $I_e =]0, l[$ veja a Figura 2.2.



Figura 2.2: Corda híbrida elástica com tip load.

Para descrever a formulação forte deste modelo híbrido começamos com a equação de onda que descreve o movimento de uma corda elástica dada por

$$\rho_e \ddot{\psi}(x, t) - \alpha_e \psi_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t \geq 0. \quad (2.1.12)$$

Satisfazendo as seguintes condições de contorno

$$\psi(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \psi(l, t) = w(t), \quad t \geq 0 \quad (2.1.13)$$

onde w é o tip body atuando com a mesma equação de movimento

$$\rho_3 \ddot{w}(t) + \alpha_3 w(t) + d_1 \dot{w}(t) + \alpha_e \psi_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.1.14)$$

Usa-se também as condições iniciais

$$\psi(x, 0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(x, 0) = \psi_1, \quad w(0) = w_0 \quad \text{e} \quad \dot{w}(0) = w_1 \quad (2.1.15)$$

Em seguida se prova a existência e unicidade de solução só para o modelo híbrido dissipativo (2.1.1)-(2.1.11) com cada condição em (2.1.8), pois este

tem como caso particular o modelo híbrido dissipativo (2.1.12)-(2.1.15).

Multiplique a equação (2.1.1) por $\bar{\psi}$ integre em $\Omega = I_\tau \cup I_e$ resulta

$$\int_{\Omega} \rho(x) \ddot{\psi} \bar{\psi} dx - \int_{\Omega} \sigma_x \bar{\psi} dx = 0$$

use-se I.P.P., a fórmula (2.1.3) e a condição (2.1.10) para obter

$$\int_{\Omega} \rho(x) \ddot{\psi} \bar{\psi} dx - \alpha_e \psi_x(l) \bar{w} + \int_{\Omega} \alpha(x) \psi_x \bar{\psi}_x dx - \int_{I_\tau} m_\tau \theta \bar{\psi}_x dx = 0$$

use-se (2.1.14), (2.1.6), as condições (2.1.7) e (2.1.8) para obter

$$\int_{\Omega} \left(\alpha(x) \psi_x \bar{\psi}_x + \rho(x) \ddot{\psi} \bar{\psi} \right) dx + \int_{I_\tau} c \theta \bar{\theta} dx + \alpha_3 w \bar{w} + \rho_3 \dot{w} \bar{w} = - \int_{I_\tau} \kappa |\theta_x|^2 dx - d_1 |\dot{w}|^2$$

tome-se a parte real e depois de usar Teorema 1.3.13 resulta

$$\dot{\mathcal{E}}_1(t) = -\kappa \int_{I_\tau} |\theta_x|^2 dx - d_1 |\dot{w}|^2$$

onde $\mathcal{E}_1(t)$ significa a energia do estado no instante $t \geq 0$ definido por

$$\mathcal{E}_1(t) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \left(\alpha(x) |\psi_x|^2 + \rho(x) |\dot{\psi}|^2 \right) dx + \int_{I_\tau} c |\theta|^2 dx + \alpha_3 |w|^2 + \rho_3 |\dot{w}|^2 \right].$$

Considere o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_*^1(0, l) \times L^2(0, l) \times L^2(I_\tau) \times \mathbb{C}^2$$

cujos elementos serão denotados por $U = (\psi, \Psi, \theta, w, W)$ e define-se

$$(U_1, U_2)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \left(\alpha(x) u_{1x} \overline{u_{2x}} + \rho(x) v_1 \overline{v_2} \right) dx + c \int_{I_\tau} \theta_1 \overline{\theta_2} dx + \alpha_3 p_1 \overline{p_2} + \rho_3 q_1 \overline{q_2}$$

o produto interno dos elementos $U_i = (u_i, v_i, \theta_i, p_i, q_i) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$.

O problema de Cauchy de primeira ordem associado é

$$\dot{U} = \mathcal{A}U, \quad U(0) = U_0.$$

onde $U_0 = (\psi_0, \Psi_0, \theta_0, w_0, W_0)$ é a condição inicial, e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador não limitado, definido por

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho(x)}[\alpha(x)(\cdot)_x]_x & 0 & -\frac{1}{\rho(x)}[m(x)(\cdot)]_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_\tau}{c}(\cdot)_x & \frac{\kappa}{c}(\cdot)_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ -\frac{\alpha_e}{\rho_3}(\cdot)_x \Big|_{x=l} & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{\rho_3}\mathbf{I} & -\frac{d_1}{\rho_3}\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \Psi \\ \theta \\ w \\ W \end{pmatrix}$$

cujos domínios serão escolhidos de acordo com cada condição em (2.1.8) por

$$\mathcal{D}_A^k = \left\{ U \in \mathcal{H}; \mathcal{A}U \in \mathcal{H} \mid \begin{array}{l} \psi(l) = w, \\ \Psi(l) = W \end{array} \text{ e } \begin{array}{l} \theta \text{ satisfazendo a condição} \\ \text{de Tipo } k \text{ em (2.1.8)} \end{array} \right\}.$$

o qual é igual ao subespaço Δ_k dado por

$$\Delta_k = \left\{ U \in H_*^1(0, l) \cap \mathcal{H}^2(\Omega) \times H_*^1(0, l) \times H^2(I_\tau) \times \mathbb{C}^2; \begin{array}{l} \psi(l) = w, \\ \Psi(l) = W, \quad \sigma(l_0^-) = \sigma(l_0^+) \end{array} \text{ e } \begin{array}{l} \theta \text{ satisfazendo a condição} \\ \text{de Tipo } k \text{ em (2.1.8)} \end{array} \right\}.$$

De fato : Seja $U \in \mathcal{D}_A^k$, então

$$\psi, \Psi \in H_*^1(0, l), \quad \sigma_x \in L^2(0, l) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\kappa}{c}\theta_x - \frac{m_1}{c}\Psi \right)_x \in L^2(I_\tau)$$

isto último implica que

$$\frac{\kappa}{c}\theta_x - \frac{m_1}{c}\Psi \quad \text{está em} \quad H^1(I_\tau)$$

e desde que a restrição $\Psi|_{I_\tau} \in H_*^1(I_\tau)$, então $\theta_x \in H^1(I_\tau)$ logo $\theta \in H^2(I_\tau)$.
Contando que $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$, se segue que

$$\sigma(x) = \begin{cases} \alpha_\tau \psi_x(x) - m_\tau \theta(x) & \text{se } x \in I_\tau \\ \alpha_e \psi_x(x) & \text{se } x \in I_e \end{cases} \quad \text{está em} \quad H^1(0, l)$$

logo pela caracterização do Lema 1.3.6 tem-se

$$\sigma(l_0^-) = \sigma(l_0^+), \quad \psi_x|_{I_\tau} \in H^1(I_\tau) \quad \text{e} \quad \psi_x|_{I_e} \in H^1(I_e)$$

So assim $\psi \in \mathcal{H}^2(\Omega)$. Consequentemente

$$U \in H_*^1(0, l) \cap \mathcal{H}^2(\Omega) \times H_*^1(0, l) \times H^2(I_\tau) \times \mathbb{C}^2$$

tal que as condições de contorno para θ de Tipo k em (2.1.8), $\psi(l) = w$ e $\Psi(l) = W$ já foram satisfeitas por hipóteses, Portanto $U \in \Delta_k$.

Reciprocamente, se consideramos que $U \in \Delta_k$ então

$$U = (\psi, \Psi, \theta, w, W) \in H_*^1(0, l) \cap \mathcal{H}^2(\Omega) \times H_*^1(0, l) \times H^2(I_\tau) \times \mathbb{C}^2$$

satisfazendo

$$\sigma(l_0^-) = \sigma(l_0^+), \quad \psi(l) = w, \quad \Psi(l) = W$$

e

$$\theta \text{ satisfaz a condição de Tipo } k \text{ em (2.1.8).}$$

Então de acordo com as inclusões

$$\mathcal{H}^2(\Omega) \cap H_*^1(0, l) \subset H_*^1(0, l) \subset L^2(0, l) \quad \text{e} \quad H^2(I_\tau) \subset L^2(I_\tau)$$

podemos concluir que $U \in \mathcal{D}_A^k$.

■

Assim denota-se por \mathcal{A}_k ao operador diferencial \mathcal{A} sobre o domínio \mathcal{D}_A^k .

Lema 2.1.1 *Cada operador \mathcal{A}_k é dissipativo com domínio imerso denso e compactamente em \mathcal{H} .*

PROVA.- Usando a Definição 1.1.21 e Teorema 1.3.13 resulta

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -\kappa \int_{I_\tau} |\theta_x|^2 dx - d_1 |W|^2 \leq 0, \quad \forall U \in \mathcal{D}_A^k \quad (2.1.16)$$

Para provar que \mathcal{D}_A^k é denso em \mathcal{H} para todo $k = 1, 2, 3, 4$ é suficiente mostrar para o caso $k = 3$, desde que a diferencia está somente nas condições de contorno da variável θ . Assim de acordo como Corolário I.8. em [5] podemos supor que existe $\widehat{U} = (\widehat{\psi}, \widehat{\Psi}, \widehat{\theta}, \widehat{w}, \widehat{W}) \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ tal que

$$(\widehat{U}, U)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall U \in \mathcal{D}_A^3. \quad (2.1.17)$$

Considere-se a sequência $U_n = (\phi_n, 0, 0, 1, 0) \in \mathcal{D}_A^3$ onde

$$\phi_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{n(x-l)+1}}, & x \in]l - 1/n, l[\\ 0, & x \in]0, l - 1/n] \end{cases} \in C_*^\infty(0, l), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \frac{1}{l - l_0}$$

e substituir em (2.1.17) resulta

$$\alpha_e \int_{I_e} \widehat{\psi}_x \overline{\phi_{nx}} dx + \frac{\alpha_3}{e} \widehat{w} = 0$$

tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ pelo T.C.D. a integral se anula e $\widehat{w} = 0$.

Substitui-se $U = (\widetilde{\phi}, 0, 0, 0, 0) \in \mathcal{D}_A^3$ onde $\phi \in C_0^\infty(I_\tau)$ em (2.1.17) resulta

$$\int_{I_\tau} \widehat{\psi}_x \overline{\phi_x} dx = 0 \quad (2.1.18)$$

o qual implica que a restrição $\widehat{\psi}|_{I_\tau} \in H^2(I_\tau)$ tal que

$$\widehat{\psi}_{xx} = 0 \quad \text{em } L^2(I_\tau).$$

De tal maneira que a seguinte equação é válida

$$\widehat{\psi}_x(l_0) \overline{\phi(l_0)} = 0, \quad \forall \phi \in C_*^\infty(I_\tau)$$

só assim $\widehat{\psi}_x(l_0) = 0$ e depois de integrar por partes (2.1.18) tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{xx} &= 0 \quad \text{em } L^2(I_\tau) \\ \widehat{\psi}(0) &= \widehat{\psi}_x(l_0) = 0 \end{aligned}$$

cuja única solução é $\widehat{\psi} = 0$ em I_τ . Por outro lado, o Lema 1.3.6 implica que $\widehat{\psi}(l_0^+) = \widehat{\psi}(l_0^-) = 0$, logo um mesmo raciocínio implica que $\widehat{\psi} = 0$ em I_e . Portanto $\widehat{\psi} \equiv 0$ em $]0, l[$. Processos similares produzem

$$\widehat{W} = 0 \quad \text{e} \quad \widehat{\Psi} \equiv 0 \quad \text{em }]0, l[.$$

Agora use $U = (0, 0, \phi, 0, 0) \in \mathcal{D}_A^3$ em (2.1.17) com $\phi \in C_0^\infty(I_\tau)$ para obter

$$\int_{I_\tau} \widehat{\theta} \overline{\phi} dx = 0 \quad \implies \quad \widehat{\theta} \equiv 0 \quad \text{q.t.p. em } I_\tau. \quad (2.1.19)$$

Assim temos $\widehat{U} = 0$ que é uma contradição. Portanto \mathcal{D}_A^3 é denso em \mathcal{H} .

OBSERVAÇÃO.- Desde que cada domínio $\{\mathcal{D}_A^k\}_{k=1}^4$ se diferencia só na condição de contorno da variável θ , a prova anterior para $k = 3$ pode ser usada para $k = 1, 2, 4$ e concluir que

$$\widehat{\psi} = \widehat{\Psi} = 0 \quad \text{em }]0, l[\quad \text{e} \quad \widehat{w} = \widehat{W} = 0;$$

no entanto para obter $\theta = 0$ em I_τ , usaremos funções ϕ diferentes em (2.1.19).

No caso \mathcal{D}_A^1 , utilize funções $\phi \in C_{l_0}^\infty(I_\tau)$ tal que $\phi_x(0) = 0$. No caso \mathcal{D}_A^2 utilize funções $\phi \in C_*^\infty(I_\tau)$ tal que $\phi_x(l_0) = 0$. No caso \mathcal{D}_A^4 utilize funções $\phi \in C^\infty(I_\tau)$ tal que $\phi_x(0) = \phi_x(l_0) = 0$. Em todos estes casos a função ϕ também pertence ao espaço $C_0^\infty(I_\tau)$, de tal forma que resulta (2.1.19). Portanto \mathcal{D}_A^k são densos em \mathcal{H} para cada $k = 1, 2, 3, 4$.

Para mostrar a compacidade de, \mathcal{D}_A^k em \mathcal{H} , para $k = 1, 2, 3, 4$ fixo, se considera uma sequência $U_n = (\psi^n, \Psi^n, \theta^n, w^n, W^n)$ limitada em \mathcal{D}_A^k , logo

$$\psi^n, \quad \Psi^n \quad \text{são limitadas em} \quad H_*^1(0, l) \quad (2.1.20)$$

$$\theta^n \quad \text{é limitada em} \quad H^2(I_\tau) \quad (2.1.21)$$

$$w^n, \quad W^n \quad \text{são limitadas em} \quad \mathbb{C} \quad (2.1.22)$$

tais que

$$\psi^n|_{I_\tau} \quad \text{é limitada em} \quad H^2(I_\tau) \cap H_*^1(I_\tau) \quad (2.1.23)$$

$$\psi^n|_{I_e} \quad \text{é limitada em} \quad H^2(I_e) \quad (2.1.24)$$

satisfazendo

$$\psi^n(l_0^-) = \psi^n(l_0^+) \quad e \quad \psi^n(l) = w^n, \quad (2.1.25)$$

$$\alpha_\tau \psi_x^n(l_0^-) - m_\tau \theta^n(l_0^-) = \alpha_e \psi_x^n(l_0^+). \quad (2.1.26)$$

Usa-se Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Cap. III, [5]) em (2.1.20)-(2.1.24) para extrair subsequências fracamente convergentes e logo aplica-se Teorema 1.3.9 e Teorema de Heine-Borel para conseguir subsequências, denotadas com o mesmo índice, tais que

$$\psi^{n_k}|_{I_\tau} \quad \text{fortemente convergente em} \quad C_*^1(\overline{I_\tau}) \quad (2.1.27)$$

$$\psi^{n_k}|_{I_e} \quad \text{fortemente convergente em} \quad C^1(\overline{I_e}) \quad (2.1.28)$$

$$\Psi^{n_k} \quad \text{fortemente convergente em} \quad C_*([0, l]) \quad (2.1.29)$$

$$\theta^{n_k} \quad \text{fortemente convergente em} \quad C^1(\overline{I_\tau}) \quad (2.1.30)$$

$$w^{n_k}, W^{n_k} \quad \text{fortemente convergentes em} \quad \mathbb{C} \quad (2.1.31)$$

Por outro lado, usa-se I.P.P., (2.1.25)-(2.1.26), desigualdade Young e Schwartz para obter

$$\begin{aligned} \|U_{n_k} - U_{n_j}\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{\alpha_e}{2} |\psi_x^{n_k}(l) - \psi_x^{n_j}(l)|^2 + m_\tau |\theta^{n_k}(l_0) - \theta^{n_j}(l_0)| |\psi^{n_k}(l_0) - \psi^{n_j}(l_0)| + \\ &+ 2 \|\alpha\|_\infty \left(\sup_k \|\psi_{xx}^{n_k}\|_{2,\Omega} \right) \|\psi^{n_j} - \psi^{n_k}\|_{2,\Omega} + \|\rho\|_\infty \|\Psi^{n_k} - \Psi^{n_j}\|_{2,\Omega}^2 + \\ &+ c \|\theta^{n_k} - \theta^{n_j}\|_{2,I_\tau}^2 + \left(\frac{\alpha_e}{2} + \alpha_3 \right) |w^{n_k} - w^{n_j}|^2 + \rho_3 |W^{n_k} - W^{n_j}|^2. \end{aligned}$$

Desde que ψ^{n_k} é limitado em $\mathcal{H}^2(\Omega)$, as convergências (2.1.27)-(2.1.31) e a desigualdade acima implicam que U_{n_k} é uma sequência de Cauchy em \mathcal{H} , logo convergente em \mathcal{H} . Portanto \mathcal{D}_A^k é compacto em \mathcal{H} . ■

Teorema 2.1.2 *Cada operador \mathcal{A}_k é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em \mathcal{H} .*

PROVA.- Nas condições do Teorema 1.4.4 é suficiente provar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Para cada $F = (f, g, h, p, q)^t \in \mathcal{H}$, procura-se $U = (\psi, \Psi, \theta, w, W) \in \mathcal{D}_A^k$ tal que $\mathcal{A}U = F$ ou equivalentemente

$$\Psi = f \quad \text{em } H_*^1(0, l) \quad (2.1.32)$$

$$\left(\alpha(x)\psi_x - m(x)\theta \right)_x = \rho(x)g \quad \text{em } L^2(0, l) \quad (2.1.33)$$

$$\kappa\theta_{xx} - m_\tau\Psi_x = ch \quad \text{em } L^2(I_\tau) \quad (2.1.34)$$

$$W = p \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (2.1.35)$$

$$-\alpha_e\psi_x(l) - \alpha_3w - d_1W = \rho_3q \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (2.1.36)$$

Substitui-se (2.1.32) em (2.1.34) e resolve-se para θ dentro das restrições do domínio \mathcal{D}_A^1 (\mathcal{D}_A^2 , \mathcal{D}_A^3 ou \mathcal{D}_A^4). Define-se a forma sesquilinear

$$\mathfrak{b}(\theta, \hat{\theta}) = \int_{I_\tau} \kappa \theta_x \overline{\hat{\theta}_x} dx$$

e o funcional linear conjugado

$$\varpi(\hat{\theta}) = - \int_{I_\tau} \left(m_\tau f_x + ch \right) \overline{\hat{\theta}} dx$$

para todo $\theta, \hat{\theta} \in V = H_{l_0}^1(I_\tau)$. Para resolver a formulação fraca do problema verifique-se as condições do Teorema 1.2.3.

a) A continuidade de \mathfrak{b} em V :

$$|\mathfrak{b}(\theta, \hat{\theta})| \leq \kappa \|\theta_x\|_{2, I_\tau} \|\hat{\theta}_x\|_{2, I_\tau} \leq \kappa \|\theta\|_V \|\hat{\theta}\|_V.$$

b) A coercividade de \mathfrak{b} em V :

$$|\mathfrak{b}(\theta, \theta)| = \kappa \|\theta_x\|_{2, I_\tau}^2 \geq \kappa \|\theta\|_V^2.$$

c) A continuidade de ϖ em V :

$$|\varpi(\widehat{\theta})| \leq \left(m_\tau \|f_x\|_{2, I_\tau} + c \|h\|_{2, I_\tau} \right) l_0 C_P \|\widehat{\theta}_x\|_{2, I_\tau} \leq C \|\widehat{\theta}\|_V.$$

Denote por θ , que está em $V = H_{l_0}^1(I_\tau)$, à solução do problema variacional

$$\mathfrak{b}(\theta, \widehat{\theta}) = \varpi(\widehat{\theta}), \quad \forall \widehat{\theta} \in V. \quad (2.1.37)$$

Por outro lado restringe-se (2.1.37) ao subespaço $\mathcal{D}(I_\tau)$ em V resulta

$$\int_{I_\tau} \theta_x \overline{\phi_x} dx = - \int_{I_\tau} \left(\frac{m_\tau}{\kappa} f_x + \frac{c}{\kappa} h \right) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(I_\tau) \quad (2.1.38)$$

logo da Definição 1.3.2, conclua-se $\theta_x \in H^1(I_\tau)$ então $\theta \in H^2(I_\tau)$.

De tal maneira que a seguinte fórmula é válida

$$\kappa \theta_x(0) \overline{\phi(0)} = \int_{I_\tau} \kappa \theta_{xx} \overline{\phi} dx + \int_{I_\tau} \kappa \theta_x \overline{\phi_x} dx, \quad \forall \phi \in C_{l_0}^\infty(I_\tau) \quad (2.1.39)$$

e logo de I.P.P. a parte esquerda de (2.1.38) resulta

$$\kappa \theta_{xx} = m_\tau f_x + c h \quad \text{em } L^2(I_\tau). \quad (2.1.40)$$

Portanto de (2.1.37), (2.1.39) e (2.1.40) tem-se

$$\kappa \theta_x(0) \overline{\phi(0)} = 0$$

desde que $\phi \in C_{l_0}^\infty(I_\tau)$ foi arbitrário, consegue-se $\theta \in H_{l_0}^1(I_\tau) \cap H^2(I_\tau)$ que satisfaz $\theta_x(0) = 0$.

OBSERVAÇÃO.- Para o caso \mathcal{D}_A^2 se considera $V = H_*^1(I_\tau)$ para obter

$$\theta \in H_*^1(I_\tau) \cap H^2(I_\tau) \quad \text{tal que } \theta_x(l_0) = 0$$

Para o caso \mathcal{D}_A^3 se considera $V = H_0^1(I_\tau)$ para obter

$$\theta \in H_0^1(I_\tau) \cap H^2(I_\tau)$$

Finalmente no caso \mathcal{D}_A^4 se considera

$$V = \left\{ f \in H^1(I_\tau); \int_{I_\tau} f(x) dx = 0 \right\}$$

para conseguir um único $\theta \in V \cap H^2(I_\tau)$ satisfazendo $\theta_x(0) = \theta_x(l_0) = 0$.

Para resolver o problema de transmissão elíptico (2.1.33), (2.1.35) e (2.1.36) com condições de contorno de tipo Dirichlet $\psi(0) = 0$ e de tipo Robin

$$-\alpha_e \psi_x(l) - \alpha_3 \psi(l) = d_1 p + \rho_3 q \quad (2.1.41)$$

Define-se as formas sesquilineares

$$\mathbf{a}_\tau(\psi, \widehat{\psi}) = \int_{I_\tau} \alpha_\tau \psi_x \overline{\widehat{\psi}_x} dx \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_e(\psi, \widehat{\psi}) = \int_{I_e} \alpha_e \psi_x \overline{\widehat{\psi}_x} dx + \alpha_3 \psi(l) \overline{\widehat{\psi}(l)}$$

dando como resultado que

$$\mathbf{a}(\psi, \widehat{\psi}) = \int_{\Omega} \alpha(x) \psi_x \overline{\widehat{\psi}_x} dx + \alpha_3 \psi(l) \overline{\widehat{\psi}(l)} = \mathbf{a}_\tau(\psi, \widehat{\psi}) + \mathbf{a}_e(\psi, \widehat{\psi}).$$

e o funcional linear conjugado

$$\Lambda(\widehat{\psi}) = - \int_{\Omega} [\rho(x)g + (m(x)\theta)_x] \overline{\widehat{\psi}} dx + m_\tau \theta(l_0) \overline{\widehat{\psi}(l_0)} - (d_1 p + \rho_3 q) \overline{\widehat{\psi}(l)}$$

para todo $\psi, \widehat{\psi} \in V = H_*^1(0, l)$.

OBSERVAÇÃO.- Note que os termos pontuais em $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ e $\Lambda(\cdot)$ são definidos no sentido do traço devido ao Lema 1.3.3.

Agora se verifica as condições do Teorema 1.2.3, assim usaremos o Lema 1.3.3 e Teorema 1.3.4 para implicar

a) A continuidade de \mathbf{a} em V :

$$|\mathbf{a}(\psi, \widehat{\psi})| \leq \left(\|\alpha\|_\infty + \alpha_3 c C_p^2 \right) \|\psi_x\|_{2,\Omega} \|\widehat{\psi}_x\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|\psi\|_V \|\widehat{\psi}\|_V.$$

b) A coercividade de \mathbf{a} em V :

$$|\mathbf{a}(\psi, \psi)| \geq \left(\min_{x \in \Omega} \alpha(x) \right) \|\psi_x\|_{2,\Omega}^2 + \alpha_3 |\psi(l)|^2 \geq C_2 \|\psi\|_V^2.$$

c) A continuidade de Λ em V :

$$\begin{aligned} |\Lambda(\widehat{\psi})| &\leq \left[\|\rho\|_\infty \|g\|_{2,\Omega} + m_\tau \|\theta_x\|_{2,I_\tau} \right] \|\widehat{\psi}\|_{2,\Omega} + \|\theta\|_\infty |\widehat{\psi}(l_0)| + |d_1 p + \rho_3 q| |\widehat{\psi}(l)| \\ &\leq C_3 \|\widehat{\psi}\|_V. \end{aligned}$$

Denote por ψ , que está em $V = H_*^1(0, l)$, à solução do problema variacional

$$\mathbf{a}(\psi, \widehat{\psi}) = \Lambda(\widehat{\psi}), \quad \forall \widehat{\psi} \in V. \quad (2.1.42)$$

Por outro lado restringe-se (2.1.42) ao subespaço $\mathcal{D}(\Omega)$ em V resulta

$$\int_{\Omega} \alpha(x) \psi_x \overline{\phi_x} dx = - \int_{\Omega} [\rho(x)g + (m(x)\theta)_x] \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.1.43)$$

A Definição 1.3.2 implica $\psi \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ portanto $\sigma \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. De tal maneira que a seguinte fórmula é válida

$$\alpha_e \psi_x(l) \overline{\phi(l)} + [\sigma(l_0^-) - \sigma(l_0^+)] \overline{\phi(l_0)} = \int_{\Omega} \sigma_x \overline{\phi} dx + \int_{\Omega} \sigma \overline{\phi_x} dx \quad (2.1.44)$$

para todo $\phi \in C_*^\infty(\Omega)$. Aplicando I.P.P. a parte esquerda de (2.1.43) resulta

$$\sigma_x = \rho(x)g \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad (2.1.45)$$

Desde que σ é solução (2.1.45) e $g \in L^2(\Omega)$ então

$$\int_{\Omega} \sigma_x \overline{\phi} dx = \int_{\Omega} \rho(x)g \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_*^\infty(\Omega). \quad (2.1.46)$$

Finalmente interprete-se as condições de transmissão em $x = l_0$. A primeira condição $\psi(l_0^+) = \psi(l_0^-)$ consegue-se do fato que $\psi \in V$ e Lema 1.3.6. Para interpretar a segunda usa-se (2.1.42), (2.1.44) e (2.1.46) para obter

$$[\sigma(l_0^-) - \sigma(l_0^+)] \overline{\phi(l_0)} + (d_1 p + \rho_3 q + \alpha_3 \psi(l) + \alpha_e \psi_x(l)) \overline{\phi(l)} = 0$$

para todo $\phi \in C_*^\infty(\Omega)$. Toma-se $\phi \in C_*^\infty(\Omega)$ tal que $\text{supp} \phi \subset I_\tau$ na equação acima para obter a condição de contorno (2.1.41); logo toma-se $\phi \in C_*^\infty(\Omega)$ tal que $\phi(l) = 0$ para obter a condição $\sigma(l_0^-) = \sigma(l_0^+)$. Portanto $0 \in \rho(\mathcal{A})$. ■

Teorema 2.1.3 *Dado $U_0 = (\psi_0, \Psi_0, \theta_0, w_0, W_0) \in \mathcal{D}_A^k$ para cada $k = 1, 2, 3, 4$, existe uma única solução para o sistema (2.1.1)-(2.1.11) dada por*

$$U(t) = e^{\mathcal{A}t} U_0 \quad \text{em} \quad \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{D}_A^k).$$

PROVA.- Segue do Lema 2.1.1, Teorema 2.1.2 e Teorema 1.3 (Cap. 4, [21]). ■

A energia associada ao sistema (2.1.12)-(2.1.15) é definida por

$$\mathcal{E}_2(t) = \frac{1}{2} \left[\alpha_e \int_0^l |\psi_x|^2 dx + \rho_e \int_0^l |\dot{\psi}|^2 dx + \alpha_3 |w|^2 + \rho_3 |\dot{w}|^2 \right]. \quad (2.1.47)$$

o qual verifica a seguinte relação

$$\dot{\mathcal{E}}_2(t) = -d_1 |\dot{w}|^2 \quad (2.1.48)$$

Neste caso é considerado o seguinte espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_*^1(0, l) \times L^2(0, l) \times \mathbb{C}^2$$

cujos elementos serão denotados por $U = (\psi, \Psi, w, W)$ e define-se como produto interno em \mathcal{H} por

$$(U_1, U_2)_{\mathcal{H}} = \alpha_e \int_0^l u_{1x} \overline{u_{2x}} dx + \rho_e \int_0^l v_1 \overline{v_2} dx + \alpha_3 p_1 \overline{p_2} + \rho_3 q_1 \overline{q_2}$$

para dois elementos $U_i = (u_i, v_i, p_i, q_i) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$.

O problema de Cauchy de primeira ordem associado é o seguinte

$$\dot{U} = \mathcal{B}U, \quad U(0) = U_0. \quad (2.1.49)$$

onde $U_0 = (\psi_0, \Psi_0, w_0, W_0)$ é a condição inicial e $\mathcal{B} : \mathcal{D}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador não limitado, dado por

$$\mathcal{B}U = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_e}{\rho_e} (\cdot)_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ -\frac{\alpha_e}{\rho_3} (\cdot)_x \Big|_{x=l} & 0 & -\frac{\alpha_3}{\rho_3} \mathbf{I} & -\frac{d_1}{\rho_3} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \Psi \\ w \\ W \end{pmatrix} \quad (2.1.50)$$

cujos domínio $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ deve ser caracterizado por

$$\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \{U \in H_*^1(0, l) \cap H^2(0, l) \times H_*^1(0, l) \times \mathbb{C}^2; \psi(l) = w, \Psi(l) = W\}.$$

Lema 2.1.4 *O operador \mathcal{B} é dissipativo com domínio $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ imerso densa e compactamente em \mathcal{H} .*

PROVA.- Usando a Definição 1.1.21 e Teorema 1.3.13 resulta

$$\operatorname{Re}(\mathcal{B}U, U)_{\mathcal{H}} = \dot{\mathcal{E}}_2(t) = -d_1 |W|^2 \leq 0, \quad \forall U \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}. \quad (2.1.51)$$

Para provar que $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ está imersa densa e compactamente em \mathcal{H} se usa argumentos similares aos utilizados no Lema 2.1.1.

■

Teorema 2.1.5 *O operador \mathcal{B} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em \mathcal{H} .*

PROVA.- Usa-se argumentos similares utilizados no Teorema 2.1.2.

■

Teorema 2.1.6 *Dado $U_0 = (\psi_0, \Psi_0, w_0, W_0)$ em $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$, existe uma única solução para o sistema (2.1.12)-(2.1.15) dada por*

$$U(t) = e^{\mathcal{B}t}U_0 \quad \text{em} \quad \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}).$$

PROVA.- Segue do Lema 2.1.4, Teorema 2.1.5 e Teorema 1.3 (Cap. 4, [21]).

■

2.2 Modelo híbrido termo-viscoelástico

Suponhamos que o intervalo aberto $I_e =]l_0, l_1[$ representa uma corda elástica, colocaremos um mecanismo dissipativo localizado em cada extremo de I_e , no extremo $x = l_0$ da corda conectamos um intervalo aberto $I_\tau =]0, l_0[$ representando um mecanismo dissipativo localizado de material termoelástico o qual é fixado em $x = 0$, logo no extremo $x = l_1$ da corda elástica conectamos um intervalo aberto $I_\nu =]l_1, l[$ representando um outro mecanismo dissipativo localizado de material termo-viscoelástico e que ficará fixado em $x = l$ com se mostra na Figura 2.3.

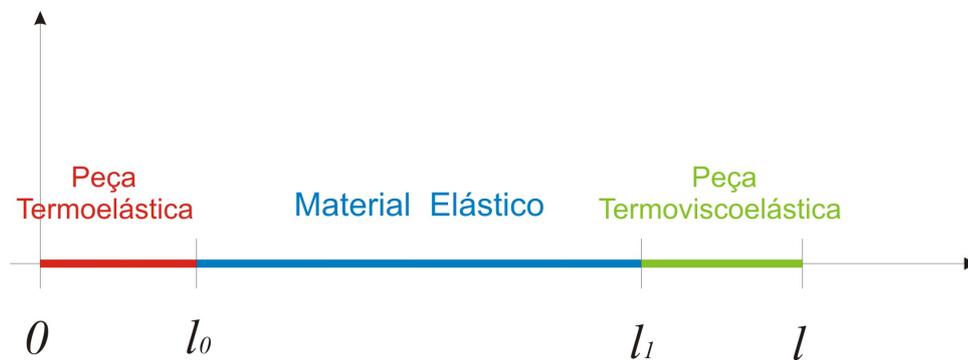


Figura 2.3: Corda híbrida de componente elástica centralizada.

A seguir descrevemos a formulação forte do modelo híbrido termo-viscoelástico.

Suponhamos que $\Omega = I_\tau \cup I_e \cup I_\nu$ represente a corda híbrida na Figura 2.3 cujo movimento é regido pelo sistema híbrido de ondas descrita por

$$\rho(x)\ddot{\psi}(x, t) = \sigma_x(x, t) \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0. \quad (2.2.1)$$

e a lei constitutiva é definida por

$$\sigma(x, t) = \alpha(x)\psi_x(x, t) - m(x)\theta(x, t) + \beta(x)\dot{\psi}_x(x, t) \quad (2.2.2)$$

Os coeficientes de densidade $\rho(x)$ e expansão térmica $m(x)$ são dados por

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_\tau & \text{se } x \in I_\tau \\ \rho_e & \text{se } x \in I_e \\ \rho_\nu & \text{se } x \in I_\nu \end{cases}, \quad m(x) = \begin{cases} m_0 & \text{se } x \in I_\tau \\ 0 & \text{se } x \in I_e \\ m_0 & \text{se } x \in I_\nu \end{cases}. \quad (2.2.3)$$

Os coeficientes de rigidez elástica $\alpha(x)$, $\beta(x)$ são dados por

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_\tau & \text{se } x \in I_\tau \\ \alpha_e & \text{se } x \in I_e \\ \alpha_\nu & \text{se } x \in I_\nu \end{cases}, \quad \beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in I_\tau \\ 0 & \text{se } x \in I_e \\ \beta_\nu & \text{se } x \in I_\nu \end{cases} \quad (2.2.4)$$

onde $\rho_e, \rho_\tau, \rho_\nu, \alpha_e, \alpha_\tau, \alpha_\nu, m_0, \beta_\nu$ são constantes positivas.

O balanço de energia para este sistema é constituído por

$$c\dot{\theta}(x, t) - \kappa\theta_{xx}(x, t) + m_0\dot{\psi}_x(x, t) = 0, \quad x \in \Omega \setminus I_e, \quad t \geq 0 \quad (2.2.5)$$

onde c e κ são os constantes positivas de capacidade de aquecimento e condução térmica respectivamente.

Impondo as condições de contorno nos extremos $x = 0$ e $x = l$ dado por

$$\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.2.6)$$

e as seguintes condições na variável térmica

$$\text{Tipo 1 : } \theta(0, t) = \theta(l_0, t) = \theta(l_1, t) = \theta(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.2.7)$$

$$\text{Tipo 2 : } \theta(0, t) = \theta_x(l_0, t) = \theta_x(l_1, t) = \theta(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

As condições de transmissão nas interfaces $x = l_0$ e $x = l_1$ são dadas por

$$\begin{aligned} \psi(l_0^-, t) &= \psi(l_0^+, t), & \sigma(l_0^-, t) &= \sigma(l_0^+, t), \\ \psi(l_1^-, t) &= \psi(l_1^+, t), & \sigma(l_1^-, t) &= \sigma(l_1^+, t). \end{aligned} \quad t \geq 0. \quad (2.2.8)$$

Finalmente impondo as seguintes condições iniciais

$$\psi(x, 0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(x, 0) = \psi_1, \quad \theta(x, 0) = \theta_0. \quad (2.2.9)$$

Por outro lado é interessante analisar o modelo híbrido termo-viscoelástico anterior com certos intercâmbios de posição entre os mecanismos dissipativos localizados I_τ e I_ν . Assim, uma primeira alteração consiste em considerar $I_e =]0, l_0[$ representando a corda elástica presa em $x = 0$ e que mantém no seu extremo $x = l_0$ os mecanismos dissipativos $I_\tau =]l_0, l_1[$ e $I_\nu =]l_1, l[$ conectados em serie, como na Figura 2.4.

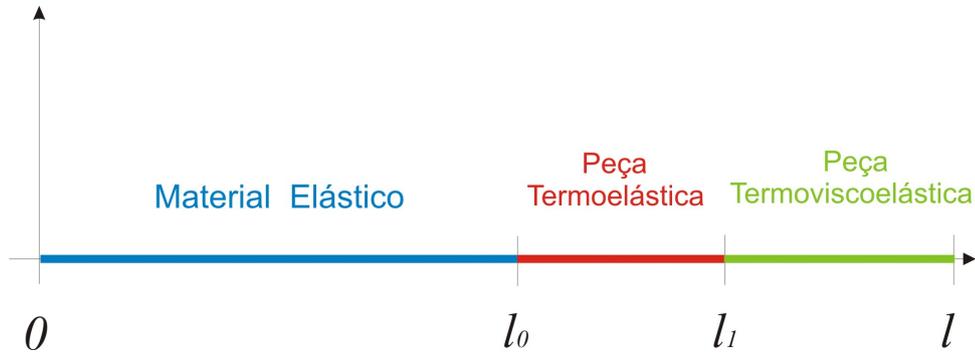


Figura 2.4: Corda híbrida de componente termoelástica centralizada.

Para descrever a formulação forte deste modelo vamos supor que

$$\Omega = I_e \cup I_\tau \cup I_\nu,$$

guardando essa ordem, representa a corda híbrida da Figura 2.4 e que as equações (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.5) servem para este caso; mas levando em consideração as alterações respectivas no domínio dos coeficientes (2.2.3) e (2.2.4) de acordo com a modificação na posição de I_e , I_τ e I_ν , ainda neste caso as condições de contorno (2.2.6) prevalecem e impomos quatro condições de contorno na variável θ correspondentes a I_τ e I_ν dados por

$$\begin{aligned} \text{Tipo 1 : } & \theta(l_0, t) = \theta_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 2 : } & \theta_x(l_0, t) = \theta(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 3 : } & \theta(l_0, t) = \theta(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 4 : } & \theta_x(l_0, t) = \theta_x(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

As condições de transmissão (2.2.8) e as condições iniciais (2.2.9) prevalecem.

Finalmente, a segunda alteração consiste de fazer uma permuta entre os mecanismos dissipativos I_τ e I_ν de forma que I_ν fique centralizada. Assim, seguimos considerando $I_e =]0, l_0[$ preso no extremo $x = 0$ e no extremo $x = l_0$ é conectado $I_\nu =]l_0, l_1[$ e $I_\tau =]l_1, l[$ em serie, como na Figura 2.5.

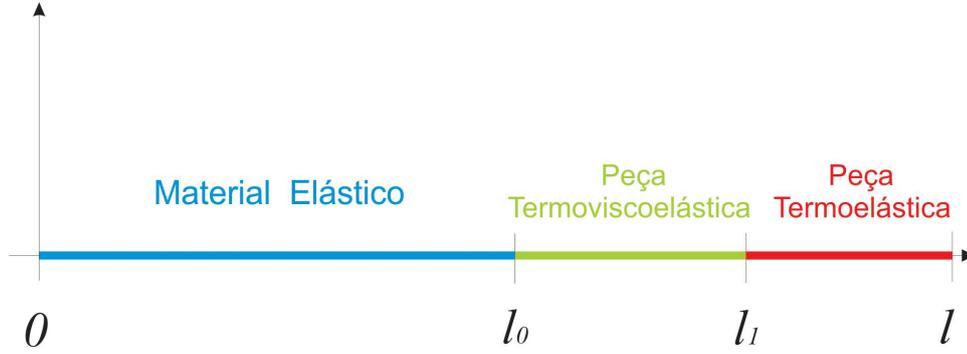


Figura 2.5: Material com componente termo-viscosa centralizada.

A formulação forte para este modelo com domínio

$$\Omega = I_e \cup I_\nu \cup I_\tau,$$

guardando essa mesma ordem, é dada pelas equações (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.5) que prevalecem; no entanto, consideramos as alterações respectivas no domínio dos coeficientes (2.2.3) e (2.2.4) de acordo com a modificação na posição de I_e , I_ν e I_τ , ainda neste caso as condições de contorno (2.2.6) prevalecem e impomos quatro condições de contorno na variável θ correspondentes a I_ν e I_τ dados por

$$\begin{aligned} \text{Tipo 1 : } & \theta(l_0, t) = \theta_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 2 : } & \theta_x(l_0, t) = \theta(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 3 : } & \theta(l_0, t) = \theta(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 4 : } & \theta_x(l_0, t) = \theta_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

As condições de transmissão (2.2.8) e as condições iniciais (2.2.9) prevalecem.

A existência e unicidade de soluções será justificada somente para o modelo (2.2.1)-(2.2.9) pois a prova para os outros dois modelos é similar.

Multiplique a equação (2.2.1) por $\bar{\psi}$ e integre em $\Omega = I_\tau \cup I_e \cup I_\nu$ resulta

$$\int_{\Omega} \rho(x) \ddot{\bar{\psi}} \bar{\psi} dx - \int_{\Omega} \sigma_x \bar{\psi} dx = 0.$$

Usa-se I.P.P., a fórmula (2.2.2), as condições (2.2.6) e (2.2.8) para obter

$$\int_{\Omega} \rho(x) \ddot{\psi} \bar{\psi} dx + \int_{\Omega} \alpha(x) \psi_x \bar{\psi}_x dx + \int_{I_{\tau}} m_0 \theta \bar{\psi}_x dx + \int_{I_{\nu}} (m_0 \theta - \beta_{\nu} \dot{\psi}_x) \bar{\psi}_x dx = 0.$$

Aplique a fórmula (2.2.5), logo I.P.P. levando em consideração a condição (2.2.6) e qualquer tipo de condição em (2.2.7) para obter

$$\int_{\Omega} \left(\alpha(x) \psi_x \bar{\psi}_x + \rho(x) \ddot{\psi} \bar{\psi} \right) dx + \int_{I_{\tau} \cup I_{\nu}} c \theta \bar{\theta} dx = -\kappa \int_{I_{\tau} \cup I_{\nu}} |\theta_x|^2 dx - \beta_{\nu} \int_{I_{\nu}} |\dot{\psi}_x|^2 dx$$

tome-se a parte real e após usar Teorema 1.3.13 resulta

$$\dot{\mathcal{E}}_3(t) = -\kappa \int_{I_{\tau} \cup I_{\nu}} |\theta_x|^2 dx - \beta_{\nu} \int_{I_{\nu}} |\dot{\psi}_x|^2 dx$$

onde $\mathcal{E}_3(t)$ significa a energia do estado no instante $t \geq 0$ definido por

$$\mathcal{E}_3(t) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \left(\alpha(x) |\psi_x|^2 + \rho(x) |\dot{\psi}|^2 \right) dx + c \int_{I_{\tau} \cup I_{\nu}} |\theta|^2 dx \right].$$

Considere o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l) \times L^2(I_{\tau} \cup I_{\nu})$$

cujos elementos serão denotados por $U = (\psi, \Psi, \theta)$ e define-se

$$(U_1, U_2)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \left(\alpha(x) u_{1x} \bar{u}_{2x} + \rho(x) v_1 \bar{v}_2 \right) dx + c \int_{I_{\tau} \cup I_{\nu}} \theta_1 \bar{\theta}_2 dx$$

o produto interno dos elementos $U_i = (u_i, v_i, \theta_i) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$.

O problema de Cauchy de primeira ordem associado é

$$\dot{U} = \mathcal{A}U, \quad U(0) = U_0$$

onde $U_0 = (\psi_0, \Psi_0, \theta_0)$ é a condição inicial e $\mathcal{A} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador não limitado, dado por

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \frac{1}{\rho(x)} [\alpha(x)(\cdot)_x]_x & \frac{1}{\rho(x)} [\beta(x)(\cdot)_x]_x & -\frac{1}{\rho(x)} [m(x)(\cdot)]_x \\ 0 & -\frac{m(x)}{c} (\cdot)_x & \frac{\kappa}{c} \chi_{I_{\tau} \cup I_{\nu}}(x) (\cdot)_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \Psi \\ \theta \end{pmatrix}$$

cujos domínios serão escolhidos de acordo com cada condição em (2.2.7) por

$$\mathcal{D}_A^k = \left\{ U \in \mathcal{H}; \mathcal{A}U \in \mathcal{H} \mid \begin{array}{l} \theta \text{ satisfazendo a condição} \\ \text{de Tipo } k \text{ em 2.2.7} \end{array} \right\}$$

o qual é igual ao conjunto Δ'_k dado por

$$\Delta'_k = \left\{ U \in [H_0^1(0, l)]^2 \times H^2(I_\tau \cup I_\nu) \mid \begin{array}{l} \psi|_{I_\tau \cup I_e} \in \mathcal{H}^2(I_\tau \cup I_e), \\ (\alpha_\nu \psi + \beta_\nu \Psi)|_{I_\nu} \in H^2(I_\nu), \quad \sigma(l_0^-) = \sigma(l_0^+), \quad \sigma(l_1^-) = \sigma(l_1^+) \quad e \\ \theta \text{ satisfazendo a condição de Tipo } k \text{ em 2.2.7} \end{array} \right\}.$$

De fato : Se $U \in \mathcal{D}_A^k$, então

$$\psi, \Psi \in H_0^1(0, l), \quad \sigma_x \in L^2(0, l) \quad e \quad \left(\frac{\kappa}{c} \theta_x - \frac{m_0}{c} \Psi \right)_x \in L^2(I_\tau \cup I_\nu)$$

isto último implica que

$$\frac{\kappa}{c} \theta_x - \frac{m_0}{c} \Psi \quad \text{está em} \quad H^1(I_\tau \cup I_\nu)$$

e desde que a restrição $\Psi|_{I_\tau \cup I_\nu} \in H^1(I_\tau \cup I_\nu)$, então $\theta_x \in H^1(I_\tau \cup I_\nu)$ logo $\theta \in H^2(I_\tau \cup I_\nu)$. Contando que $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$, então

$$\sigma(x) = \begin{cases} \alpha_\tau \psi_x(x) - m_0 \theta(x) & \text{se } x \in I_\tau \\ \alpha_e \psi_x(x) & \text{se } x \in I_e \\ \alpha_\nu \psi_x(x) - m_0 \theta(x) + \beta_\nu \Psi_x(x) & \text{se } x \in I_\nu \end{cases} \quad \text{está em} \quad H^1(0, l),$$

logo pela caracterização do Lema 1.3.6 tem-se

$$\sigma(l_0^-) = \sigma(l_0^+) \quad e \quad \sigma(l_1^-) = \sigma(l_1^+)$$

e as seguintes restrições

$$\psi_x|_{I_\tau} \in H_*^1(I_\tau), \quad \psi_x|_{I_e} \in H^1(I_e) \quad e \quad (\alpha_\nu \psi + \beta_\nu \Psi)_x|_{I_\nu} \in H_l^1(I_\nu).$$

Assim resulta que

$$\psi|_{I_\tau \cup I_e} \in \mathcal{H}^2(I_\tau \cup I_e) \quad e \quad (\alpha_\nu \psi + \beta_\nu \Psi)|_{I_\nu} \in H^2(I_\nu),$$

Consequentemente

$$U \in [H_0^1(0, l)]^2 \times H^2(I_\tau \cup I_\nu)$$

tal que as condições de contorno para θ de Tipo k em (2.2.7) que já foram satisfeitas por hipóteses, portanto $U \in \Delta'_k$.

Reciprocamente, se $U \in \Delta'_k$, então

$$U = (\psi, \Psi, \theta) \in [H_0^1(0, l)]^2 \times H^2(I_\tau \cup I_\nu)$$

com as seguintes restrições

$$\psi|_{I_\tau \cup I_e} \in \mathcal{H}^2(I_\tau \cup I_e) \quad \text{e} \quad (\alpha_\nu \psi + \beta_\nu \Psi)|_{I_\nu} \in H^2(I_\nu)$$

e satisfazendo as condições de transmissão

$$\sigma(l_0^-) = \sigma(l_0^+) \quad \text{e} \quad \sigma(l_1^-) = \sigma(l_1^+)$$

e

$$\theta \quad \text{satisfazendo a condição de Tipo } k \text{ em 2.2.7.}$$

Então de acordo com as inclusões

$$H_0^1(0, l) \subset L^2(0, l) \quad \text{e} \quad H^2(I_\tau \cup I_\nu) \subset L^2(I_\tau \cup I_\nu)$$

podemos concluir que $U \in \mathcal{D}_A^k$.

■

Assim denota-se por \mathcal{A}_k ao operador diferencial \mathcal{A} sobre o domínio \mathcal{D}_A^k .

Lema 2.2.1 *Cada operador \mathcal{A}_k é dissipativo com domínio denso em \mathcal{H} .*

PROVA.- Usando a Definição 1.1.21 e Teorema 1.3.13 resulta

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -\kappa \int_{I_\tau \cup I_\nu} |\theta_x|^2 dx - \beta_\nu \int_{I_\nu} |\Psi_x|^2 dx \leq 0, \quad \forall U \in \mathcal{D}_A^k. \quad (2.2.12)$$

Para provar que \mathcal{D}_A^k é denso em \mathcal{H} para todo $k = 1, 2, 3, 4$ é suficiente mostrar para o caso $k = 1$, desde que a diferencia está somente nas condições de contorno da variável θ . Assim de acordo como Corolário I.8. em [5] podemos supor que existe $\widehat{U} = (\widehat{\psi}, \widehat{\Psi}, \widehat{\theta}) \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ tal que

$$(\widehat{U}, U)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall U \in \mathcal{D}_A^1. \quad (2.2.13)$$

Substitui-se $U = (\widetilde{\phi}, 0, 0) \in \mathcal{D}_A^1$ onde $\phi \in C_0^\infty(I_\tau)$ em (2.2.13) resulta

$$\int_{I_\tau} \widehat{\psi}_x \overline{\phi_x} dx = 0 \quad (2.2.14)$$

o qual implica que a restrição $\widehat{\psi}|_{I_\tau} \in H^2(I_\tau)$ tal que

$$\widehat{\psi}_{xx} = 0 \quad \text{em } L^2(I_\tau).$$

De tal maneira que a seguinte equação é válida

$$\widehat{\psi}_x(l_0)\overline{\phi(l_0)} = 0, \quad \forall \phi \in C_*^\infty(I_\tau)$$

o que implica $\widehat{\psi}_x(l_0) = 0$ e depois de I.P.P. (2.2.14) tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{xx} &= 0 \quad \text{em } L^2(I_\tau) \\ \widehat{\psi}(0) &= \widehat{\psi}_x(l_0) = 0 \end{aligned}$$

cuja única solução é $\widehat{\psi} = 0$ em I_τ , logo do Lema 1.3.6 tem-se

$$\widehat{\psi}(l_0^+) = \widehat{\psi}(l_0^-) = 0 \quad (2.2.15)$$

Substitui-se $U = (\check{\phi}, 0, 0) \in \mathcal{D}_A^1$ com $\phi \in C_0^\infty(I_e)$ em (2.2.13) para obter

$$\int_{I_e} \widehat{\psi}_x \overline{\phi_x} dx = 0 \quad (2.2.16)$$

o qual implica que a restrição $\widehat{\psi}|_{I_e} \in H^2(I_e)$ tal que

$$\widehat{\psi}_{xx} = 0 \quad \text{em } L^2(I_e).$$

De tal maneira que a seguinte equação é válida

$$\widehat{\psi}_x(l_1)\overline{\phi(l_1)} = 0, \quad \forall \phi \in C_{l_0}^\infty(I_e)$$

e implica $\widehat{\psi}_x(l_1) = 0$, logo após de I.P.P. (2.2.16) e considerar (2.2.15) tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{xx} &= 0 \quad \text{em } L^2(I_e) \\ \widehat{\psi}(l_0) &= \widehat{\psi}_x(l_1) = 0 \end{aligned}$$

cuja única solução é $\widehat{\psi} = 0$ em I_e . Assim um mesmo procedimento estabelece que $\widehat{\psi} = 0$ em I_ν e portanto obtemos que

$$\widehat{\psi} \equiv 0 \quad \text{em }]0, l[.$$

Processo similar produz

$$\widehat{\Psi} \equiv 0 \quad \text{em }]0, l[.$$

Agora usamos $U = (0, 0, \phi) \in \mathcal{D}_A^1$ com $\phi \in C_0^\infty(I_\tau)$ em (2.1.17) para obter

$$\int_{I_\tau} \widehat{\theta} \overline{\phi} dx = 0 \implies \widehat{\theta} \equiv 0 \text{ q.t.p. em } I_\tau. \quad (2.2.17)$$

e usamos $U = (0, 0, \phi) \in \mathcal{D}_A^1$ com $\phi \in C_0^\infty(I_\nu)$ em (2.1.17) para obter (2.2.17) e assim obter $\widehat{\theta} = 0$ q.t.p. em I_ν e como resultado temos que

$$\widehat{\theta} \equiv 0 \text{ em } I_\tau \cup I_\nu.$$

Desta forma $\widehat{U} = 0$ que é uma contradição. Portanto \mathcal{D}_A^1 é denso em \mathcal{H} .

OBSERVAÇÃO.- A prova para $k = 1$ pode ser usada para $k = 2$ e concluir

$$\psi = \Psi = 0 \text{ em }]0, l[;$$

no entanto para obter $\theta = 0$ em $I_\tau \cup I_\nu$, usaremos funções ϕ diferentes em (2.2.17), inicialmente vamos substituir $U = (0, 0, \phi) \in \mathcal{D}_A^2$ em (2.1.17) com $\phi \in W_\tau = \{f \in C_*^\infty(I_\tau); f_x(l_0) = 0\}$, para obter

$$\int_{I_\tau} \widehat{\theta} \overline{\phi} dx = 0. \quad (2.2.18)$$

Finalmente vamos substituir $U = (0, 0, \phi) \in \mathcal{D}_A^2$ em (2.1.17) com $\phi \in W_\nu = \{f \in C_l^\infty(I_\nu); f_x(l_1) = 0\}$, para obter

$$\int_{I_\nu} \widehat{\theta} \overline{\phi} dx = 0. \quad (2.2.19)$$

Devido as inclusões

$$C_0^\infty(I_\tau) \subset W_\tau \text{ e } C_0^\infty(I_\nu) \subset W_\nu,$$

e as igualdades (2.2.18) e (2.2.19) temos que $\widehat{\theta} = 0$ é q.t.p. em $I_\tau \cup I_\nu$, portanto \mathcal{D}_A^2 também é denso em \mathcal{H} . ■

Teorema 2.2.2 *O operador \mathcal{A}_k é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em \mathcal{H} .*

PROVA.- Nas condições do Teorema 1.4.4 é suficiente provar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Para cada $F = (f, g, h)^t \in \mathcal{H}$, procura-se $U = (\psi, \Psi, \theta) \in \mathcal{D}_A^k$ tal que

$$\Psi = f \quad \text{em } H_0^1(0, l) \quad (2.2.20)$$

$$\sigma_x = \rho(x)g \quad \text{em } L^2(0, l) \quad (2.2.21)$$

$$\kappa\theta_{xx} - m_0\Psi_x = ch \quad \text{em } L^2(I_\tau) \quad (2.2.22a)$$

$$\kappa\theta_{xx} - m_0\Psi_x = ch \quad \text{em } L^2(I_\nu) \quad (2.2.22b)$$

onde a expressão para σ é dada por

$$\sigma(x) = \alpha(x)\psi_x(x, t) - m(x)\theta(x, t) + \beta(x)\Psi_x(x, t). \quad (2.2.23)$$

Substitui-se (2.2.20) em (2.2.22a) e resolve-se para θ dentro das restrições do domínio \mathcal{D}_A^2 (ou domínio \mathcal{D}_A^1). Define-se a forma sesquilinear

$$\mathfrak{b}(\theta, \widehat{\theta}) = \int_{I_\tau} \kappa \theta_x \overline{\widehat{\theta}_x} dx$$

e a funcional linear conjugada

$$\varpi(\widehat{\theta}) = - \int_{I_\tau} \left(m_0 f_x + ch \right) \overline{\widehat{\theta}} dx$$

para todo $\theta, \widehat{\theta} \in V = H_*^1(I_\tau)$. Para resolver a formulação fraca do problema verifique-se as condições do Teorema 1.2.3.

a) A continuidade de \mathfrak{b} em V :

$$|\mathfrak{b}(\theta, \widehat{\theta})| \leq \kappa \|\theta_x\|_{2, I_\tau} \|\widehat{\theta}_x\|_{2, I_\tau} \leq \kappa \|\theta\|_V \|\widehat{\theta}\|_V.$$

b) A coercividade de \mathfrak{b} em V :

$$|\mathfrak{b}(\theta, \theta)| = \kappa \|\theta_x\|_{2, I_\tau}^2 \geq \kappa \|\theta\|_V^2.$$

c) A continuidade de ϖ em V :

$$|\varpi(\widehat{\theta})| \leq \left(m_0 \|f_x\|_{2, I_\tau} + c \|h\|_{2, I_\tau} \right) l_0 C_P \|\widehat{\theta}_x\|_{2, I_\tau} \leq C \|\widehat{\theta}\|_V.$$

Denote-se por θ , que está em $V = H_*^1(I_\tau)$, a solução do problema variacional

$$\mathfrak{b}(\theta, \widehat{\theta}) = \varpi(\widehat{\theta}), \quad \forall \widehat{\theta} \in V. \quad (2.2.24)$$

Por outro lado, restringe-se (2.2.24) ao subespaço $\mathcal{D}(I_\tau)$ para obter

$$\int_{I_\tau} \theta_x \overline{\phi_x} dx = - \int_{I_\tau} \left(\frac{m_0}{\kappa} f_x + \frac{c}{\kappa} h \right) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(I_\tau) \quad (2.2.25)$$

então a restrição $\theta \in H^2(I_\tau)$ tal que

$$\theta_{xx} = \frac{m_0}{\kappa} f_x + \frac{c}{\kappa} h \quad \text{em } L^2(I_\tau).$$

De tal maneira que a seguinte fórmula é válida

$$\kappa \theta_x(l_0) \overline{\phi(l_0)} = \int_{I_\tau} \kappa \theta_{xx} \bar{\phi} dx + \int_{I_\tau} \kappa \theta_x \bar{\phi}_x dx, \quad \forall \phi \in C_*^\infty(I_\tau) \quad (2.2.26)$$

e logo depois de I.P.P. a parte esquerda de (2.2.24) resulta

$$\kappa \theta_{xx} = m_0 f_x + c h \quad \text{em} \quad L^2(I_\tau). \quad (2.2.27)$$

Portanto de (2.2.24), (2.2.26) e (2.2.27) tem-se

$$\kappa \theta_x(l_0) \overline{\phi(l_0)} = 0.$$

Desde que $\phi \in C_*^\infty(I_\tau)$ foi arbitrário, consegue-se $\theta \in H_*^1(I_\tau) \cap H^2(I_\tau)$ satisfazendo $\theta_x(l_0) = 0$. Agora substitui-se (2.2.20) em (2.2.22b) e resolve-se para θ dentro das restrições do domínio \mathcal{D}_A^2 (ou domínio \mathcal{D}_A^1). Define-se a forma sesquilinear

$$\mathfrak{b}(\theta, \hat{\theta}) = \kappa \int_{I_\nu} \theta_x \bar{\hat{\theta}}_x dx$$

e a funcional linear conjugada

$$\varpi(\hat{\theta}) = - \int_{I_\nu} (m_0 f_x + c h) \bar{\hat{\theta}} dx$$

para todo $\theta, \hat{\theta} \in V = H_l^1(I_\nu)$. Para resolver a formulação fraca do problema é fácil verificar, como no caso sobre I_ν , as condições do Teorema 1.2.3. Denote-se por $\theta \in V$ à solução do problema variacional

$$\mathfrak{b}(\theta, \hat{\theta}) = \varpi(\hat{\theta}), \quad \forall \hat{\theta} \in V. \quad (2.2.28)$$

Por outro lado, restringe-se (2.2.28) ao subespaço $\mathcal{D}(I_\nu)$ para obter

$$\int_{I_\nu} \theta_x \bar{\phi}_x dx = - \int_{I_\nu} \left(\frac{m_0}{\kappa} f_x + \frac{c}{\kappa} h \right) \bar{\phi} dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(I_\nu) \quad (2.2.29)$$

então a restrição $\theta \in H^2(I_\nu)$ tal que

$$\theta_{xx} = \frac{m_0}{\kappa} f_x + \frac{c}{\kappa} h \quad \text{em} \quad L^2(I_\nu).$$

De tal maneira que a seguinte fórmula é válida

$$\kappa \theta_x(l_1) \overline{\phi(l_1)} = \int_{I_\nu} \kappa \theta_{xx} \bar{\phi} dx + \int_{I_\nu} \kappa \theta_x \bar{\phi}_x dx, \quad \forall \phi \in C_l^\infty(I_\nu) \quad (2.2.30)$$

e logo depois de I.P.P. a parte esquerda de (2.2.28) resulta

$$\kappa \theta_{xx} = m_0 f_x + ch \quad \text{em } L^2(I_\nu). \quad (2.2.31)$$

Portanto de (2.2.28), (2.2.30) e (2.2.31) tem-se

$$\kappa \theta_x(l_1) \overline{\phi(l_1)} = 0.$$

Desde que $\phi \in C_l^\infty(I_\nu)$ foi arbitrário, consegue-se $\theta \in H_l^1(I_\nu) \cap H^2(I_\nu)$ satisfazendo $\theta_x(l_1) = 0$. Portanto as condições de contorno no domínio \mathcal{D}_A^2 se verificam (no domínio \mathcal{D}_A^1 usa-se $V = H_0^1(I_\tau)$ para conseguir que $\theta \in H_0^1(I_\tau) \cap H^2(I_\tau)$ e usa-se $V = H_0^1(I_\nu)$ para obter $\theta \in H_0^1(I_\nu) \cap H^2(I_\nu)$).

So agora resolva-se o problema de transmissão elíptico (2.2.20)-(2.2.21) com condição de contorno Dirichlet em (2.2.6). Define-se as formas sesquilineares

$$\mathbf{a}(\psi, \widehat{\psi}) = \int_{\Omega} \alpha(x) \psi_x \overline{\widehat{\psi}_x} dx.$$

e use o Teorema 1.3.8 para definir a funcional linear conjugada em $H^{-1}(0, l)$

$$\Lambda(\widehat{\psi}) = - \int_{\Omega} \left[\rho(x)g + (m(x)\theta)_x \right] \overline{\widehat{\psi}} dx + m_0 \left[\theta(l_0) \overline{\widehat{\psi}(l_0)} + \theta(l_1) \overline{\widehat{\psi}(l_1)} \right] - DT_{\beta(x)f_x}(\overline{\widehat{\psi}})$$

para todo $\psi, \widehat{\psi} \in V = H_0^1(0, l)$. Para resolver a formulação fraca do problema verifique-se as condições do Teorema 1.2.3. De acordo com Teorema 1.3.4 e Lema 1.3.3 tem-se

a) A continuidade de \mathbf{a} em V :

$$|\mathbf{a}(\psi, \widehat{\psi})| \leq \|\alpha\|_{\infty} \|\psi_x\|_{2,\Omega} \|\widehat{\psi}_x\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|\psi\|_V \|\widehat{\psi}\|_V.$$

b) A coercividade de \mathbf{a} em V :

$$|\mathbf{a}(\psi, \psi)| \geq \left(\min_{x \in \Omega} \alpha(x) \right) \|\psi_x\|_{2,\Omega}^2 \geq C_2 \|\psi\|_V^2.$$

c) A continuidade de Λ em V :

$$\begin{aligned} |\Lambda(\widehat{\psi})| &\leq \left[\|\rho\|_{\infty} \|g\|_{2,\Omega} + m_0 \|\theta_x\|_{2,I_\tau \cup I_\nu} + \beta_\nu \|f_x\|_{2,I_\nu} \right] \|\widehat{\psi}_x\|_{2,\Omega} + \\ &+ m_0 \|\theta\|_{\infty} \left[|\widehat{\psi}(l_0)| + |\widehat{\psi}(l_1)| \right] \leq C_3 \|\widehat{\psi}\|_V. \end{aligned}$$

Denote-se por ψ que está em $V = H_0^1(0, l)$ a solução do problema variacional

$$\mathbf{a}(\psi, \widehat{\psi}) = \Lambda(\widehat{\psi}), \quad \forall \widehat{\psi} \in V. \quad (2.2.32)$$

Por outro lado restringe-se (2.2.32) ao subespaço $\mathcal{D}(\Omega)$ em V resulta

$$\int_{\Omega} \alpha(x) \psi_x \overline{\phi_x} dx = - \int_{\Omega} \left[\rho(x)g + (m(x)\theta)_x \right] \overline{\phi} dx - DT_{\beta(x)f_x}(\overline{\phi}) \quad (2.2.33)$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Escolhe-se $\phi_0 \in \mathcal{D}(I_{\tau})$, $\phi_1 \in \mathcal{D}(I_e)$ e $\phi_2 \in \mathcal{D}(I_{\nu})$ logo assim $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{I_{\tau}} \alpha_{\tau} \psi_x \overline{\phi_{0x}} dx &= - \int_{I_{\tau}} (\rho_{\tau}g + m_0\theta_x) \overline{\phi_0} dx, \\ \int_{I_e} \alpha_e \psi_x \overline{\phi_{1x}} dx &= - \int_{I_e} \rho_e g \overline{\phi_1} dx, \\ \int_{I_{\nu}} (\alpha_{\nu} \psi_x + \beta_{\nu} \Psi_x) \overline{\phi_{2x}} dx &= - \int_{I_{\nu}} (\rho_{\nu}g + m_0\theta_x) \overline{\phi_2} dx, \end{aligned}$$

logo de acordo com a Definição 1.3.2 temos que as restrições

$$\psi_x|_{I_{\tau} \cup I_e} \in \mathcal{H}^1(I_{\tau} \cup I_e) \quad \text{e} \quad (\alpha_{\nu} \psi_x + \beta_{\nu} \Psi_x)|_{I_{\nu}} \in H^1(I_{\nu}),$$

portanto

$$\psi|_{I_{\tau} \cup I_e} \in \mathcal{H}^2(I_{\tau} \cup I_e) \quad \text{e} \quad (\alpha_{\nu} \psi + \beta_{\nu} \Psi)|_{I_{\nu}} \in H^2(I_{\nu}).$$

De tal maneira que a seguinte fórmula é válida

$$\left[\sigma(l_0^+) - \sigma(l_0^-) \right] \overline{\phi(l_0)} + \left[\sigma(l_1^+) - \sigma(l_1^-) \right] \overline{\phi(l_1)} = \int_{\Omega} \sigma_x \overline{\phi} dx + \int_{\Omega} \sigma \overline{\phi_x} dx \quad (2.2.34)$$

para todo $\phi \in C_0^{\infty}(0, l)$. Por outro lado, depois de I.P.P. (2.2.33) tem-se

$$\left(\alpha(x) \psi_x - m(x)\theta + \beta(x)\Psi_x \right)_x = \rho(x)g \quad \text{em} \quad L^2(0, l). \quad (2.2.35)$$

Finalmente, para interpretar condições de transmissão em $x = l_0$ e $x = l_1$. As duas primeiras condições $\psi(l_0^+) = \psi(l_0^-)$ e $\psi(l_1^+) = \psi(l_1^-)$ se conseguem aplicando o Lema 1.3.3 na função $\psi \in V = H_0^1(0, l)$. Para o segundo par de condições veja primeiro que de (2.2.32), (2.2.34) e (2.2.35) resulta

$$\left[\sigma(l_0^+) - \sigma(l_0^-) \right] \overline{\phi(l_0)} + \left[\sigma(l_1^+) - \sigma(l_1^-) \right] \overline{\phi(l_1)} = 0$$

para qualquer $\phi \in C_0^{\infty}(0, l)$. Escolhe-se $\phi \in C_0^{\infty}(0, l)$ com $\text{supp} \phi \subset (0, l_1)$ para obter $\sigma(l_0^-) = \sigma(l_0^+)$ e escolhe-se $\phi \in C_0^{\infty}(0, l)$ com $\text{supp} \phi \subset (l_0, l)$ para obter $\sigma(l_1^-) = \sigma(l_1^+)$. Portanto $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

■

Teorema 2.2.3 *Dado $U_0 = (\psi_0, \Psi_0, \theta_0)$ em \mathcal{D}_A^k para algum $k = 1, 2$, existe uma única solução para o sistema (2.2.1)-(2.2.9) dado por*

$$U(t) = e^{A_k t} U_0 \quad \text{em} \quad \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{D}_A^k).$$

PROVA.- Segue do Lema 2.2.1, Teorema 2.2.2 e Teorema 1.3 (Cap. 4, [21]).

■

Capítulo 3

Observabilidade e propriedade do resolvente

Neste capítulo estabelecemos algumas desigualdades de observabilidade e a propriedade do resolvente de conter $i\mathbb{R}$ para os operadores associados com cada um dos modelos híbridos dissipativos estudados no capítulo anterior.

Tendo em consideração a notação usada no capítulo anterior um sistema dissipativo, na sua forma geral, é escrito como

$$\rho \ddot{\psi} - \sigma_x = 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \quad (3.0.1)$$

$$c \dot{\theta} - \kappa \theta_{xx} + m \dot{\psi}_x = 0, \quad \text{em } (\Omega \setminus I_e) \times \mathbb{R}_0^+ \quad (3.0.2)$$

onde Ω poderá representar I_e , $I_e \cup I_\tau$ ou $I_e \cup I_\tau \cup I_\nu$ e σ é dado por

$$\sigma(x, t) = \alpha(x) \psi_x(x, t) - m(x) \theta(x, t) + \beta(x) \dot{\psi}_x(x, t). \quad (3.0.3)$$

Ressaltamos que os valores dos coeficientes ρ , α , m e β dependem de cada componente I_e , I_τ ou I_ν e que cada modelo híbrido dissipativo estudado no capítulo anterior pode ser deduzido do sistema (3.0.1)-(3.0.3) somente quando sejam especificadas as condições de contorno:

1. No sistema (2.1.1)-(2.1.11) que modela uma corda híbrida de materiais termoelástico e elástico, o qual possui um estado tensional

$$\sigma = \alpha(x) \psi_x(x, t) - m(x) \theta(x, t),$$

foram especificados duas condições de contorno, uma de tipo Dirichlet e outra de tipo dinâmica chamado de tip body.

2. No sistema (2.1.12)-(2.1.15) que modela apenas uma corda de material elástico, o qual possui um estado tensional

$$\sigma = \alpha(x)\psi_x(x, t),$$

foram especificadas as mesmas condições de contorno do item 1.

3. Finalmente, no sistema (2.2.1)-(2.2.9) que modela uma corda híbrida de materiais elástico, termoelástico e termo-viscoelástico, o qual tem estado tensional

$$\sigma = \alpha(x)\psi_x(x, t) - m(x)\theta(x, t) + \beta(x)\dot{\psi}_x(x, t),$$

foram especificadas duas condições de contorno de tipo Dirichlet.

Quando tratamos com dissipação localizada a ferramenta fundamental é a chamada propriedade de observabilidade. Assim vamos considerar dois tipos de observabilidade: Uma para o problema de evolução (3.0.1)-(3.0.3) e outra para o sistema resolvente associado com o sistema (3.0.1)-(3.0.3) dado por

$$i\lambda\psi - \Psi = f \quad \text{em } \Omega \quad (3.0.4)$$

$$i\lambda\rho\Psi - \sigma_x = \rho g \quad \text{em } \Omega \quad (3.0.5)$$

$$ci\lambda\theta - \kappa\theta_{xx} + m\Psi_x = ch \quad \text{em } \Omega \setminus I_e \quad (3.0.6)$$

É importante ressaltar que todas as funções presentes no sistema resolvente (3.0.4)-(3.0.6) dependem apenas da variável $x \in \Omega$ e a variável $\lambda \in \mathbb{R}$. Na prática, isto corresponde ao sistema resultante depois de haver aplicado a transformada de Laplace do correspondente problema de evolução.

3.1 Observabilidade

A observabilidade consiste em determinar se a energia total das soluções do sistema (3.0.1)-(3.0.3) pode ser estimada em termos da energia concentrada em algum subconjunto do domínio espacial Ω no qual as ondas se propagam, a chamada região de observação.

Para o problema de evolução usaremos a seguinte notação

$$I(x, t) = |\alpha\psi_x(x, t) + \beta\dot{\psi}_x(x, t)|^2 + \alpha\rho|\dot{\psi}(x, t)|^2 \quad (3.1.1)$$

$$\mathcal{E}(a, b; t) = \int_a^b I(x, t) dx \quad (3.1.2)$$

e para o sistema resolvente usaremos a seguinte notação

$$\widehat{I}(x) = |\alpha\psi_x(x) + \beta\Psi_x(x)|^2 + \alpha\rho|\Psi(x)|^2 \quad (3.1.3)$$

$$\widehat{\mathcal{E}}(a, b) = \int_a^b \widehat{I}(x) dx \quad (3.1.4)$$

onde α, β, ρ são constantes positivas e o intervalo $]a, b[$ deve coincidir com algum dos intervalos I_e, I_τ ou I_ν .

Embora todos os sistemas estudados no Capítulo 2 são dissipativos então

$$\mathcal{E}(a, b; t) \leq C, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.1.5)$$

Portanto a observabilidade para os problemas de evolução (3.0.1)-(3.0.3)

Lema 3.1.1 *Suponhamos que o sistema (3.0.1)-(3.0.2) esteja bem colocado e a energia de sua solução seja limitada sobre $]a, b[$. Então temos que*

$$\left| \int_0^T \left[q I(x, t) \right]_a^b dt - \int_0^T q_1 \mathcal{E}(a, b, t) dt \right| \leq C + Q \quad (3.1.6)$$

onde $C > 0$ é uma constante, $q(x) = q_1 x + q_2$ e

$$Q = \left| \int_0^T \int_a^b 2q \left[\beta \rho \dot{\psi} \ddot{\psi}_x - (m\theta)_x (\alpha \dot{\psi}_x + \beta \dot{\psi}_x) \right] dt dx \right|$$

PROVA.- Multiplica-se (3.0.1) por $q[\alpha\dot{\psi}_x + \beta\dot{\psi}_x]$, integre em $]a, b[$, use (3.0.3), tome a parte real, use I.P.P. na variável x e integre em $]0, T[$ resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^T \int_a^b \rho q \ddot{\psi} \overline{(\alpha\dot{\psi}_x + \beta\dot{\psi}_x)} dx - \frac{1}{2} \int_0^T \left[q |\alpha\dot{\psi}_x + \beta\dot{\psi}_x|^2 \right]_a^b dt + \\ + \frac{q_1}{2} \int_0^T \int_a^b |\alpha\dot{\psi}_x + \beta\dot{\psi}_x|^2 dx dt + \int_0^T \int_a^b (m\theta)_x q \overline{(\alpha\dot{\psi}_x + \beta\dot{\psi}_x)} dx dt = 0. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini, a I.P.P. nas variáveis t e x e tome o valor absoluto resulta

$$\left| \int_0^T q_1 \mathcal{E}(a, b, t) dt - \int_0^T \left[q I(x, t) \right]_a^b dt \right| \leq \left| \int_a^b 2\rho q \left[\dot{\psi} \overline{(\alpha\dot{\psi}_x + \beta\dot{\psi}_x)} \right]_0^T dx \right| + Q.$$

Finalmente, da desigualdade Schwartz, Young e (3.1.5) obtemos (3.1.6). ■

Corolário 3.1.2 Dado $\beta = m = 0$, $q_1 = 2/(b - a)$ e $q_2 = (a + b)/(a - b)$ tem-se

$$\left| \int_0^T \left(I(a, t) + I(b, t) \right) dt - \frac{2}{b - a} \int_0^T \mathcal{E}(a, b, t) dt \right| \leq C.$$

Em particular

$$\int_0^T \left(I(a, t) + I(b, t) \right) dt \leq \frac{2}{b - a} \int_0^T \mathcal{E}(a, b, t) dt + C.$$

Em seguida a observabilidade para o sistema resolvente (3.0.4)-(3.0.6).

Lema 3.1.3 Suponhamos que o sistema (3.0.4)-(3.0.6) este bem colocado e com energia limitada sobre o intervalo $]a, b[$. Então $\exists N_1, N_2 > 0$ tal que

$$\left| \left[q\widehat{I}(x) \right]_a^b - q_1 \widehat{\mathcal{E}}(a, b) \right| \leq \widehat{\mathcal{E}}(a, b) + |\lambda|^2 \beta^2 N_1 \int_a^b |\Psi_x|^2 dx + N_2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + |R|$$

onde $q(x) = q_1 x + q_2$, $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$ e R é dado pela expressão

$$R = \int_a^b q \left[(m\theta)_x \overline{(\alpha\psi_x + \beta\Psi_x)} + \alpha\rho\Psi \overline{f_x} \right] dx$$

e para $U = (\psi, \Psi, \theta) \in \mathcal{H}$, $\exists K_1, K_2 > 0$ tal que

$$|R| \leq \widehat{\mathcal{E}}(a, b) + m^2 K_1 \int_a^b |\theta_x|^2 dx + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.1.7)$$

PROVA.- Multiplique (3.0.5) por $q \overline{(\alpha\psi_x + \beta\Psi_x)}$, integre em $]a, b[$ e use (3.0.3) para obter

$$\begin{aligned} & \int_a^b \alpha\rho q \Psi (-\overline{\Psi_x} - \overline{f_x}) dx + \int_a^b i\lambda\rho\beta q \Psi \overline{\Psi_x} dx + \\ & - \int_a^b q (\alpha\psi_x + \beta\Psi_x)_x \overline{(\alpha\psi_x + \beta\Psi_x)} dx = \int_a^b q \left[\rho g - (m\theta)_x \right] \overline{(\alpha\psi_x + \beta\Psi_x)} dx. \end{aligned}$$

Tome a parte real, aplique I.I.P. e tome o valor absoluto para obter

$$\begin{aligned} \left| q_1 \widehat{\mathcal{E}}(a, b) - \left[q\widehat{I}(x) \right]_a^b \right| & \leq \left| \int_a^b q \rho i \lambda \beta \Psi \overline{\Psi_x} dx \right| + \left| \int_a^b q g \overline{(\alpha\psi_x + \beta\Psi_x)} dx \right| + |R| \\ & \leq \widehat{\mathcal{E}}(a, b) + |\lambda|^2 |\beta|^2 \frac{\rho}{\alpha} \|q\|_{\infty} \int_a^b |\Psi_x|^2 dx + \\ & + \frac{1}{\rho} \|q\|_{\infty} \int_a^b \rho |g|^2 dx + |R|. \end{aligned}$$

Finalmente, usando das desigualdades de Schwartz e Young resulta (3.1.7).

■

Corolário 3.1.4 Dado $\beta = m = 0$, $q_1 = 2/(b - a)$ e $q_2 = (a + b)/(a - b)$ tem-se

$$\left| \widehat{I}(a) + \widehat{I}(b) - \frac{2}{b-a} \widehat{\mathcal{E}}(a, b) \right| \leq 2\widehat{\mathcal{E}}(a, b) + N_2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Em particular

$$\widehat{I}(a) + \widehat{I}(b) \leq \left(\frac{2}{b-a} + 2 \right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + N_2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Corolário 3.1.5 Dado $\beta = m = 0$, $]a, b[=]I_e =]l_0, l[$ e $q(x) = 3(x - l_0)$ tem-se

$$\widehat{\mathcal{E}}(I_e) \leq \widehat{I}(l) + N_2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

ou escolhendo $q(x) = 3(l - x)$ tem-se

$$\widehat{\mathcal{E}}(I_e) \leq \widehat{I}(l_0) + N_2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Corolário 3.1.6 Dado $\beta = 0$, $]a, b[=]I_\tau =]0, l_0[$ e $q(x) = -x + l_0$ tem-se

$$\widehat{I}(0) \leq \frac{1}{l_0} \left[3\widehat{\mathcal{E}}(I_\tau) + m^2 K_1 \int_0^{l_0} |\theta_x|^2 dx + N_2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \right]$$

ou escolhendo $q(x) = x - l_0$ tem-se

$$\widehat{I}(l_0) \leq \frac{1}{l_0} \left[3\widehat{\mathcal{E}}(I_\tau) + m^2 K_1 \int_0^{l_0} |\theta_x|^2 dx + N_2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \right].$$

Corolário 3.1.7 Dado $]a, b[=]l_0, l_1[= I_\nu$ e $q(x) = x - l_0$ tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{I}(l_1) \leq \frac{1}{l_1 - l_0} & \left[3\widehat{\mathcal{E}}(I_\nu) + |\lambda|^2 \beta^2 N_1 \int_{l_0}^{l_1} |\Psi_x|^2 dx + \right. \\ & \left. + m^2 K_1 \int_{l_0}^{l_1} |\theta_x|^2 dx + N_2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \right] \end{aligned}$$

ou escolhendo $q(x) = -x + l_1$ tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{I}(l_0) \leq \frac{1}{l_1 - l_0} & \left[3\widehat{\mathcal{E}}(I_\nu) + |\lambda|^2 \beta^2 N_1 \int_{l_0}^{l_1} |\Psi_x|^2 dx + \right. \\ & \left. + m^2 K_1 \int_{l_0}^{l_1} |\theta_x|^2 dx + N_2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \right]. \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO.- As desigualdades de observabilidade independem das condições de contorno; no entanto, dependem apenas da boa colocação do sistema.

3.2 Propriedade do resolvente

Uma condição suficiente no Teorema 1.5.7 para garantir que um C_0 -semigrupo em \mathcal{H} com gerador infinitesimal \mathcal{A} seja fortemente estável é que

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad (3.2.1)$$

Por sua vez, esta condição é necessária para analisar a estabilidade uniforme e polinomial que faz parte das hipóteses propostas por Prüss no Teorema 1.5.8 e por Borichev-Tomilov no Teorema 1.5.9 respectivamente.

Para provar que os geradores infinitesimais $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^4$ no Teorema 2.1.2 e do gerador infinitesimal \mathcal{B} no Teorema 2.1.5 satisfaçam a condição (3.2.1), aproveitaremos a compacidade dos operadores resolventes; no entanto, para provar que os geradores infinitesimais $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^2$ no Teorema 2.2.2 satisfaçam a condição (3.2.1), usaremos argumentos

3.2.1 Modelo híbrido termoelástico

Lema 3.2.1 *Os operadores \mathcal{A}_k no sistema (2.1.1)-(2.1.11) satisfazem*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_k), \quad \text{para cada } k = 1, 2, 3, 4.$$

PROVA.- Usa-se Teorema 2.1.3 para ver que $\exists \mathcal{A}_k^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. O Lema 2.1.4 garante que \mathcal{D}_A^k está imerso compactamente em \mathcal{H} então \mathcal{A}_k^{-1} é um operador compacto sobre \mathcal{H} . Portanto do Teorema 6.29 (Cap. 6, [15]) temos que $\sigma(\mathcal{A}_k) = \sigma_p(\mathcal{A}_k)$. Portanto é suficiente mostrar que não existem autovalores imaginários puros.

De fato: Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, suponhamos que $i\lambda$ é um autovalor não nulo do operador \mathcal{A}_k com autovetor associado

$$U = (\psi, \Psi, \theta, w, W) \in \mathcal{D}_A^k \setminus \{0\} \quad (3.2.2)$$

verificando a equação resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = 0$, o qual equivale a

$$i\lambda\psi - \Psi = 0 \quad \text{em } H_*^1(0, l) \quad (3.2.3)$$

$$i\lambda\rho\Psi - \sigma_x = 0 \quad \text{em } L^2(0, l) \quad (3.2.4)$$

$$i\lambda c\theta - \kappa\theta_{xx} + m_\tau\Psi_x = 0 \quad \text{em } L^2(I_\tau) \quad (3.2.5)$$

$$i\lambda w - W = 0 \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (3.2.6)$$

$$i\lambda\rho_3 W + d_1 W + \alpha_3 w + \alpha_e \psi_x(l) = 0 \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (3.2.7)$$

logo para cada $U \in \mathcal{D}_A^k$, a relação (2.1.16) implica

$$0 = \operatorname{Re}(i\lambda U - \mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = \kappa \int_{I_\tau} |\theta_x|^2 dx + d_1 |W|^2,$$

logo usando o Teorema 1.3.4 tem-se

$$\theta = 0 \quad \text{em} \quad I_\tau =]0, l_0[, \quad (3.2.8)$$

o qual em combinação com a equação (3.2.5) e Teorema 1.3.4 resulta

$$\Psi = 0 \quad \text{em} \quad I_\tau =]0, l_0[$$

e posteriormente da equação (3.2.3) tem-se

$$\psi = 0 \quad \text{em} \quad I_\tau =]0, l_0[, \quad (3.2.9)$$

logo de (3.2.8), (3.2.9) e as condições de transmissão (2.1.10) temos

$$0 = \psi(l_0^-) = \psi(l_0^+) \quad \text{e} \quad 0 = \alpha_\tau \psi_x(l_0^-) - m_0 \theta(l_0^-) = \alpha_e \psi_x(l_0^+).$$

Usando a equação (3.2.6) tem-se

$$w = W = 0,$$

Portanto substituindo (3.2.3) em (3.2.4) temos o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \lambda^2 \rho_e \psi + \alpha_e \psi_{xx} &= 0 & \text{em} \quad L^2(I_e) \\ \psi(l_0) = \psi_x(l_0) &= 0 \end{aligned}$$

o qual possui sua única solução é $\psi = 0$ em $I_e =]l_0, l[$, o que implica que $\psi = 0$ em $]0, l[$, logo da equação (3.2.3) obter $\Psi = 0$ em $]0, l[$. Desta forma temos $U = 0$ que contradiz (3.2.2), portanto não há autovalores imaginários. ■

3.2.2 Modelo híbrido elástico

Lema 3.2.2 *O operador \mathcal{B} no sistema (2.1.12)-(2.1.15) satisfaz $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{B})$.*

PROVA.- Desde que $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ está imerso compactamente em \mathcal{H} , argumentos similares usados no Lema 3.2.1 implicam que $\sigma(\mathcal{B}) = \sigma_p(\mathcal{B})$, logo é suficiente mostrar que não existem autovalores imaginários puros.

De fato, Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, suponha que $i\lambda$ é um autovalor não nulo do operador \mathcal{B} tal que

$$U = (\psi, \Psi, w, W) \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}} \setminus \{0\} \quad (3.2.10)$$

é seu autovetor associado o qual verifica $i\lambda U - \mathcal{B}U = 0$ e que equivale a

$$i\lambda\psi - \Psi = 0 \quad \text{em } H_*^1(0, l) \quad (3.2.11)$$

$$i\lambda\rho_e\Psi - \alpha_e\psi_{xx} = 0 \quad \text{em } L^2(0, l) \quad (3.2.12)$$

$$i\lambda w - W = 0 \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (3.2.13)$$

$$i\lambda\rho_3 W + d_1 W + \alpha_3 w + \alpha_e\psi_x(l) = 0 \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (3.2.14)$$

Nesta caso vemos que a relação (2.1.51) implica

$$0 = \operatorname{Re}(i\lambda U - \mathcal{B}U, U)_{\mathcal{H}} = -\operatorname{Re}(\mathcal{B}U, U)_{\mathcal{H}} = d_1|W|^2,$$

logo $W = 0$ e pela equação (3.2.13) temos $w = 0$, assim usando (2.1.13) obtemos $\psi(l) = 0$, ademais substituindo estes valores em (3.2.14) temos $\psi_x(l) = 0$. Das equações (3.2.11) e (3.2.12) resulta o problema de valor final

$$\begin{aligned} \lambda^2\rho_e\psi + \alpha_e\psi_{xx} &= 0, \quad \text{em } L^2(0, l) \\ \psi(0) = \psi(l) = \psi_x(l) &= 0. \end{aligned}$$

o qual possui uma única solução ψ identicamente nula em $]0, l[$, logo $U = 0$ contradizendo (3.2.10), portanto não há autovalores imaginários. ■

3.2.3 Modelo híbrido termo-viscoelástico

A grande diferença no modelo termo-viscoelástico com os anteriores é a falta de compacidade de \mathcal{A}_k^{-1} . Portanto $\sigma(\mathcal{A}_k)$ não está formado apenas por autovalores.

Lema 3.2.3 *Os operadores \mathcal{A}_k no sistema (2.2.1)-(2.2.9) satisfazem*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_k), \quad \text{para cada } k = 1, 2.$$

PROVA.- Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ suponhamos que $i\lambda$ é um autovalor não nulo de \mathcal{A}_k e que $U \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^k \setminus \{0\}$ é seu autovetor satisfazendo $\mathcal{A}U = i\lambda U$ isto é

$$i\lambda\psi - \Psi = 0 \quad \text{em } H_0^1(0, l) \quad (3.2.15)$$

$$i\lambda\rho\Psi - \sigma_x = 0 \quad \text{em } L^2(0, l) \quad (3.2.16)$$

$$i\lambda c\theta - \kappa\theta_{xx} + m_0\Psi_x = 0 \quad \text{em } L^2(I_\tau \cup I_\nu). \quad (3.2.17)$$

Assim usando a relação (2.2.12) tem-se

$$\kappa \int_{I_\tau \cup I_\nu} |\theta_x|^2 dx + \beta_\nu \int_{I_\nu} |\Psi_x|^2 dx = -\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = 0,$$

logo usando o Teorema 1.3.4 e as equações (3.2.15) e (3.2.17) concluímos que

$$\psi = \Psi = \theta = 0 \quad \text{em} \quad I_\tau \cup I_\nu \quad (3.2.18)$$

logo substituindo estes valores nas equações (3.2.15) e (3.2.16) segue que

$$-\lambda^2 \rho \psi - \alpha_e \psi_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad I_e =]l_0, l_1[. \quad (3.2.19)$$

Devido a (3.2.18) e usando as condições (2.2.8) temos que

$$0 = \psi(l_0^-) = \psi(l_0^+) \quad \text{e} \quad 0 = \alpha_\tau \psi_x(l_0^-) - m_0 \theta(l_0^-) = \alpha_e \psi_x(l_0^+)$$

Portanto (3.2.19) pode ser considerado um problema de valor inicial o qual tem solução única $\psi = 0$ em I_e , logo a equação (3.2.15) implica que $\Psi = 0$ em I_e , portanto $U = 0$ o que é uma contradição.

De modo geral, não pode existir elementos espectrais sem serem autovalores, pertencentes a $i\mathbb{R}$.

De fato: Suponhamos que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A}_k)$, então $0 \in \rho(\mathcal{A}_k)$ implica que

$$B_{\mathbb{C}}(0, \delta) \subset \rho(\mathcal{A}_k) \quad \text{para} \quad \delta = \operatorname{dist}(0, \sigma(\mathcal{A}_k)) > 0.$$

Dado $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda^*| = \delta$ implica que $i\lambda^* \in \sigma(\mathcal{A}_k)$. De acordo com a Proposição 1.3 (Cap. IV, [9]), existe uma sequência $\lambda_n \in (-\delta, \delta)$ tal que

$$\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda^* \neq 0 \quad \text{e} \quad \|(i\lambda_n \mathbf{I} - \mathcal{A}_k)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Assim existe uma sequência \tilde{F}_n tal que

$$\|\tilde{F}_n\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad \|(i\lambda_n \mathbf{I} - \mathcal{A}_k)^{-1} \tilde{F}_n\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Fazendo $\tilde{U}_n = (i\lambda_n \mathbf{I} - \mathcal{A}_k)^{-1} \tilde{F}_n$, temos que

$$i\lambda_n \tilde{U}_n - \mathcal{A}_k \tilde{U}_n = \tilde{F}_n.$$

Só assim define-se

$$U_n = \frac{\tilde{U}_n}{\|(i\lambda_n \mathbf{I} - \mathcal{A}_k)^{-1} \tilde{F}_n\|_{\mathcal{H}}}, \quad F_n = \frac{\tilde{F}_n}{\|(i\lambda_n \mathbf{I} - \mathcal{A}_k)^{-1} \tilde{F}_n\|_{\mathcal{H}}}$$

consequentemente temos que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ e

$$i\lambda_n U_n - \mathcal{A}_k U_n = F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.2.20)$$

Desde que $U_n \in \mathcal{D}_A^k$ para $k = 1, 2$ e $F_n \in \mathcal{H}$. Podemos denotar

$$U_n = (\psi^n, \Psi^n, \theta^n) \quad \text{e} \quad F_n = (f^n, g^n, h^n).$$

Então pela relação (2.2.12) tem-se

$$\kappa \int_{I_\tau \cup I_\nu} |\theta_x^n|^2 dx + \beta_\nu \int_{I_\nu} |\Psi_x^n|^2 dx = \operatorname{Re}(F_n, U_n)_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.2.21)$$

Usando (3.0.4) e (3.0.6) temos que

$$i\lambda_n c \theta^n - \kappa \theta_{xx}^n + m_0 i\lambda_n \psi_x^n = c h^n + m_0 f_x^n \quad (3.2.22)$$

Multiplique (3.2.22) por $\overline{\psi_x^n}$, integre em I_τ e aplique I.P.P. resulta

$$\begin{aligned} \int_{I_\tau} |\psi_x^n|^2 dx &= \frac{c}{m_0} \int_{I_\tau} \theta^n \overline{\psi_x^n} dx + \frac{\kappa}{i\lambda_n m_0} \int_{I_\tau} \theta_x^n \overline{\psi_{xx}^n} dx \\ &+ \frac{\kappa}{i\lambda_n m_0} \left[\theta_x^n(0) \overline{\psi_x^n}(0) - \theta_x^n(l_0) \overline{\psi_x^n}(l_0) \right] + R_n \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

em seguida estimamos cada termo em (3.2.23) tendo em conta o seguinte fato

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \delta - \varepsilon < |\lambda_n| < \delta + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0. \quad (3.2.24)$$

Desta forma, usando as desigualdades Schwartz, Young e (3.2.24) temos que

$$|R_n| = \left| \frac{1}{m_0 i\lambda_n} \int_{I_\tau} (c h^n + m_0 f_x^n) \overline{\psi_x^n} dx \right| \leq C_\varepsilon \|F_n\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \int_{I_\tau} |\psi_x^n|^2 dx. \quad (3.2.25)$$

Como a equação em (3.2.20) equivale ao sistema (3.0.4)-(3.0.6), temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\kappa}{i\lambda_n m_0} \int_{I_\tau} \theta_x^n \overline{\psi_{xx}^n} dx \right| &= \frac{\kappa}{\alpha_\tau} \int_{I_\tau} \overline{\theta_x^n \left(\frac{\rho_\tau}{m_0} \Psi^n + \frac{1}{i\lambda_n} \theta_x^n - \frac{\rho_\tau}{i\lambda_n m_0} g^n \right)} dx \\ &\leq \varepsilon \int_{I_\tau} |\psi_x^n|^2 dx + C_\varepsilon \int_{I_\tau} |\theta_x^n|^2 dx + K_\varepsilon \|F_n\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Usando as desigualdades de Schwartz, Young, Poincaré, o Corolário 3.1.6, a equação (3.0.4) e a relação (3.2.24) conseguimos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\kappa}{i\lambda_n m_0} \theta_x^n(s) \overline{\psi_x^n(s)} \right| &\leq C_\varepsilon |\theta_x^n(s)|^2 + \varepsilon (1 + \delta + \varepsilon) \int_{I_\tau} |\psi_x^n|^2 dx + \\ &+ K_\varepsilon \int_{I_\tau} |\theta_x^n|^2 dx + N_\varepsilon \|F_n\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|F_n\|_{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

onde $s = 0$ ou $s = l_0$. Finalmente, usando o Teorema 1.3.10 tem-se

$$|\theta_x^n(s)| \leq \|\theta^n\|_{2,2,I_\tau}^{3/4} \|\theta^n\|_{2,I_\tau}^{1/4}.$$

Desde que $\theta^n \in H_0^1(I_\tau) \cap H^2(I_\tau)$, então a norma $\|(\cdot)_{xx}\|_{2,I_\tau}$ é equivalente a norma em $H^2(I_\tau)$ então temos que

$$|\theta_x^n(s)| \leq \|\theta_{xx}^n\|_{2,I_\tau}^{3/4} \|\theta^n\|_{2,I_\tau}^{1/4}. \quad (3.2.28)$$

Usando a equação (3.2.22) e as potencias necessárias para conseguir

$$\|\theta_{xx}^n\|_{2,I_\tau}^{3/4} \leq \frac{2^{3/2}|\lambda_n|^{3/4}}{\kappa^{3/4}} \left(c^{3/4} \|\theta^n\|_{2,I_1}^{3/4} + m_0^{3/4} \|\psi_x^n\|_{2,I_1}^{3/4} \right) + K \|F_n\|_{\mathcal{H}}^{3/4}. \quad (3.2.29)$$

De acordo com (3.2.28), (3.2.29), (3.2.24) e a desigualdade de Young resulta

$$|\theta_x^n(s)| \leq C_\varepsilon \|\theta^n\|_{2,I_\tau} + \sqrt{\varepsilon} \|\psi_x^n\|_{2,I_\tau} + K \|F_n\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.2.30)$$

Substituindo (3.2.30) em (3.2.27) tem-se

$$\left| \frac{\kappa}{i\lambda_n m_0} \theta_x^n(s) \psi_x^n(s) \right| \leq 2\varepsilon \int_{I_\tau} |\psi_x^n|^2 dx + K_\varepsilon \int_{I_\tau} |\theta^n|^2 dx + N_\varepsilon \|F_n\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.2.31)$$

De (3.2.20), (3.2.21), (3.2.23), (3.2.25), (3.2.26) e (3.2.31) concluimos que

$$\psi_x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{em } L^2(I_\tau). \quad (3.2.32)$$

Agora usamos a equação (3.0.4) em $I_\nu =]l_1, l[$ e (3.2.21) para obter

$$\alpha_\nu \int_{I_\nu} |\psi_x^n|^2 dx \leq \frac{2\alpha_\nu}{|\lambda_n|^2} \int_{I_\nu} |\Psi_x^n|^2 dx + C \|F_n\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.2.33)$$

Portanto de (3.2.21) e (3.2.32) tem-se

$$\psi_x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{em } L^2(I_\tau \cup I_\nu).$$

Da equação (3.0.4) em $I_\tau =]0, l_0[$, a desigualdade Poincaré, (3.2.32) resulta

$$\Psi^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{em } L^2(I_\tau \cup I_\nu).$$

Por outro lado, no intervalo $I_e =]l_0, l_1[$ temos que

$$i\lambda_n \rho \Psi^n - \alpha_e \psi_{xx}^n = f^n \quad \text{em } I_e. \quad (3.2.34)$$

Dado que U_n, F_n são seqüências limitadas, a equação (3.2.32) implica que ψ_{xx}^n é limitada em $L^2(I_e)$, logo ψ_x^n é limitada em $H^1(I_e)$, portanto aplicando o Teorema 1.3.9, existe uma subsequencia que converge forte, isto é

$$\psi_x^{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \psi \quad \text{em} \quad L^2(I_e). \quad (3.2.35)$$

Usando a equação (3.0.4) temos que

$$i\lambda_{n_k} \psi_x^{n_k} - \Psi_x^{n_k} = f_x^{n_k} \quad \text{em} \quad L^2(I_e).$$

Então $\Psi_x^{n_k}$ é limitada em $L^2(I_e)$, logo Ψ^{n_k} é limitada em $H^1(I_e)$, portanto aplicando o Teorema 1.3.9, existe uma subsequencia, denotada pelo mesmo índice n_k , que converge forte, isto é

$$\Psi^{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Psi \quad \text{em} \quad L^2(I_e). \quad (3.2.36)$$

Portanto as convergências em (3.2.21), (3.2.35) e (3.2.36) implicam que a sequencia U_{n_k} converge forte em \mathcal{H} isto é

$$U_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} U \quad \text{em} \quad \mathcal{H}. \quad (3.2.37)$$

Em seguida, dados $k, l \in \mathbb{N}$ com $k \neq l$ a seguinte desigualdade

$$\|\mathcal{A}U_{n_k} - \mathcal{A}U_{n_l}\|_{\mathcal{H}} \leq \|F_{n_k}\|_{\mathcal{H}} + 2\delta\|U_{n_k} - U_{n_l}\|_{\mathcal{H}} + \|F_{n_l}\|_{\mathcal{H}}$$

satisfaz-se e pelas convergências em (3.2.20) e (3.2.37) resulta que

$$\mathcal{A}U_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \chi \quad \text{em} \quad \mathcal{H}.$$

Como \mathcal{A}_k é fechado, segue que $U \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^k$ e verifica

$$i\lambda^*U - \mathcal{A}_kU = 0.$$

Logo U é um autovetor com autovalor em $i\mathbb{R}$. Pelo visto na primeira parte segue que $U = 0$ mais isto é uma contradição ao fato que $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$. ■

Capítulo 4

Estabilidade do modelo híbrido termoelástico

4.1 Estabilidade uniforme do modelo híbrido termoelástico

Nesta seção estudaremos o comportamento assintótico do modelo híbrido termoelástico (2.1.1)-(2.1.11). O principal resultado aqui é a estabilidade uniforme da onda elástica com mecanismo tip body só se este apresenta uma componente termoelástica na sua composição.

Lema 4.1.1 *Suponhamos que o sistema (3.0.4)-(3.0.6) esteja bem colocado e*

$$\int_{I_\tau} |\theta_x|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.1.1)$$

Então temos que

$$\int_{I_\tau} \left(\rho_\tau |\Psi|^2 + \alpha_\tau |\psi_x|^2 \right) dx \leq \epsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

PROVA.- Substitua (3.0.4) em (3.0.6) e logo multiplique esta por $\overline{\psi_x}$, integre em I_τ e aplique I.P.P. para obter

$$\int_{I_\tau} |\psi_x|^2 dx = \frac{c}{m_\tau} \int_{I_\tau} \theta \overline{\psi_x} dx + \frac{\kappa}{i\lambda m_\tau} \int_{I_\tau} \theta_x \overline{\psi_{xx}} dx + \frac{\kappa}{i\lambda m_\tau} \left[\theta_x \overline{\psi_x} \right]_0^{l_0} + R. \quad (4.1.2)$$

Agora vamos estimar cada termo (4.1.2), considerando λ suficientemente grande, assim tem-se

$$|R| = \left| \frac{1}{m_\tau i \lambda} \int_{I_\tau} (c h + m_\tau f_x) \overline{\psi_x} dx \right| \leq \frac{C}{|\lambda|^2 \epsilon} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon \int_{I_\tau} |\psi_x|^2 dx. \quad (4.1.3)$$

Usando (3.0.5), desigualdade Schwartz e Young resulta que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\kappa}{i\lambda m_\tau} \int_{I_\tau} \theta_x \overline{\psi_{xx}} dx \right| &= \frac{\kappa}{\alpha_\tau} \int_{I_\tau} \theta_x \overline{\left(\frac{\rho_\tau}{m_\tau} \Psi - \frac{1}{i\lambda} \theta_x + \frac{\rho_\tau}{i\lambda m_\tau} g \right)} dx \\ &\leq \varepsilon \int_{I_\tau} |\Psi|^2 dx + C_{\varepsilon, \lambda} \int_{I_\tau} |\theta_x|^2 dx + K_\lambda \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Usando as desigualdades de Schwartz, Young, Poincaré e o Corolário 3.1.6 conseguimos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\kappa}{i\lambda m_\tau} \theta_x(s) \psi_x(s) \right| &\leq \frac{\kappa^2}{4m_\tau^2 |\lambda|^2 \varepsilon} |\theta_x(s)|^2 + \varepsilon \int_{I_\tau} |\psi_x|^2 dx + \varepsilon \int_{I_\tau} |\Psi|^2 dx \\ &\quad + K_\varepsilon \int_{I_\tau} |\theta_x|^2 dx + N_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

onde $s = 0$ ou $s = l_0$. Finalmente, usando o Teorema 1.3.10 tem-se

$$|\theta_x(s)| \leq \|\theta_{xx}\|_{2, I_\tau}^{3/4} \|\theta\|_{2, I_\tau}^{1/4} \quad (4.1.6)$$

Usando a equação (3.2.22) e as potencias necessárias para conseguir

$$\|\theta_{xx}\|_{2, I_\tau}^{3/4} \leq \frac{2^{3/2} |\lambda|^{3/4}}{\kappa^{3/4}} \left(c^{3/4} \|\theta\|_{2, I_1}^{3/4} + m_\tau^{3/4} \|\psi_x\|_{2, I_1}^{3/4} \right) + K \|F\|_{\mathcal{H}}^{3/4}. \quad (4.1.7)$$

De acordo com (4.1.6), (4.1.7) e a desigualdade de Young resulta

$$\frac{1}{|\lambda|} |\theta_x(s)| \leq \frac{K_1}{|\lambda|^{1/4}} \left(\|\theta\|_{2, I_\tau} + \|\psi_x\|_{2, I_\tau} \right) + K_\lambda \|F\|_{\mathcal{H}} \quad (4.1.8)$$

Substituindo (4.1.8) em (4.1.5) tem-se

$$\begin{aligned} \left| \frac{\kappa}{i\lambda m_\tau} \theta_x(s) \psi_x(s) \right| &\leq \left(\frac{K_1}{|\lambda|^{1/2} \varepsilon} + \varepsilon \right) \int_{I_\tau} |\psi_x|^2 dx + \varepsilon \int_{I_\tau} |\Psi|^2 dx \\ &\quad + K_{\varepsilon, \lambda} \int_{I_\tau} |\theta_x|^2 dx + N_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Substituindo (4.1.3), (4.1.4) e (4.1.9) em (4.1.2), usa-se (4.1.1) e escolhendo ε suficientemente pequeno e $|\lambda| > 1/\varepsilon^4$ obtemos

$$\int_{I_\tau} |\psi_x|^2 dx \leq 2\varepsilon \int_{I_\tau} |\Psi|^2 dx + N_{\varepsilon, \lambda} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_3 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.1.10)$$

Multiplique (3.0.5) por $\bar{\psi}$, integre sobre I_τ , usa-se (3.0.4), aplica-se I.P.P. e a condição (2.1.7) para

$$\begin{aligned} \int_{I_\tau} |\Psi|^2 dx &= \frac{\alpha_\tau}{\rho_\tau} \psi_x(l_0) \bar{\psi}(l_0) + \frac{\alpha_\tau}{\rho_\tau} \int_{I_\tau} |\psi_x|^2 dx + \\ &+ \frac{m_\tau}{\rho_\tau} \int_{I_\tau} \theta \bar{\psi}_x dx + \int_{I_\tau} (g \bar{\psi} + \Psi \bar{f}) dx. \end{aligned}$$

Usa-se (4.1.10), a desigualdade Schwartz, Young e Poincaré resulta

$$\int_{I_\tau} |\Psi|^2 dx \leq \varepsilon \frac{\alpha_\tau}{\rho_\tau^2} |\psi_x(l_0)|^2 + \frac{\alpha_\tau}{4\varepsilon} |\psi(l_0)|^2 + K_4 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.1.11)$$

Usa-se Teorema 1.3.10, desigualdade Young, (3.0.4) e (4.1.10) para obter

$$\begin{aligned} |\psi(l_0)|^2 &\leq \left(\int_{I_\tau} |\psi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{I_\tau} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\alpha_\tau \varepsilon^2} \int_{I_\tau} |\psi|^2 dx + \frac{\alpha_\tau \varepsilon^2}{4} \int_{I_\tau} |\psi_x|^2 dx \\ &\leq \left(\frac{2}{\alpha_\tau \varepsilon^2 |\lambda|^2} + \frac{\alpha_\tau \varepsilon^3}{2} \right) \int_{I_\tau} |\Psi|^2 dx + \\ &+ N_{\varepsilon, \lambda} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Substituindo (4.1.12) em (4.1.11) e tome-se ε suficientemente pequeno e $|\lambda| > \frac{1}{\varepsilon^2}$ tem-se

$$\int_{I_\tau} |\Psi|^2 dx \leq \varepsilon \frac{\alpha_\tau}{\rho_\tau^2} |\psi_x(l_0)|^2 + N_{\varepsilon, \lambda} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_4 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} \quad (4.1.13)$$

De (4.1.10), (4.1.13) e Corolário 3.1.6 tem-se

$$\widehat{\mathcal{E}}(I_\tau) \leq \varepsilon \widehat{\mathcal{E}}(I_\tau) + K_\varepsilon \int_{I_\tau} |\theta_x|^2 dx + N_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Aplicando a desigualdade Poincaré, Young, usando (4.1.1) e tomando ε suficientemente pequeno conseguimos mostrar o resultado. ■

Teorema 4.1.2 *O semigrupo $\{e^{A_k t}\}_{t \geq 0}$ associado ao sistema termoelástico (2.1.1)-(2.1.11) é exponencial uniformemente estável.*

PROVA.- Verifica-se as hipóteses do Teorema 1.5.8. A condição (1.5.4) é justificada pelo Lema 3.2.1, logo para verificar a condição (1.5.5) usamos algum $F = (f, g, h, p, q) \in \mathcal{H}$ tal que $\exists! U \in \mathcal{D}_A^k$ e que satisfaça

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.1.14)$$

equivalentemente

$$i\lambda\psi - \Psi = f \quad \text{em } H_*^1(0, l) \quad (4.1.15)$$

$$i\lambda\rho\Psi - \sigma_x = \rho g \quad \text{em } L^2(0, l) \quad (4.1.16)$$

$$i\lambda c\theta - \kappa\theta_{xx} + m_\tau\Psi_x = ch \quad \text{em } L^2(I_\tau) \quad (4.1.17)$$

$$i\lambda w - W = p \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (4.1.18)$$

$$i\lambda\rho_3 W + d_1 W + \alpha_3 w + \alpha_e \psi_x(l) = \rho_3 q \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (4.1.19)$$

Multiplicar (4.1.14) por U e logo de tomar a parte real resulta

$$-\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq |\langle F, U \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo usa-se (2.1.16) para conseguir

$$\kappa \int_{I_\tau} |\theta_x|^2 dx + d_1 |W|^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.1.20)$$

Assim usa-se (4.1.18) para obter

$$|w|^2 = \frac{2(|W|^2 + |p|^2)}{|\lambda|^2} \leq \frac{C_1}{|\lambda|^2} \left(\|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right). \quad (4.1.21)$$

Do Corolário 3.1.5, (4.1.20), (4.1.21) e a desigualdade Young tem-se

$$\int_{I_e} \left(\rho_e |\Psi|^2 + \alpha_e |\psi_x|^2 \right) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Do Lema 4.1.1 temos que

$$\int_{I_\tau} \left(\rho_\tau |\Psi|^2 + \alpha_\tau |\psi_x|^2 \right) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Portanto de (4.1.20), (4.1.21) e a desigualdade de Poincaré tem-se

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Do Teorema 1.5.8, dado por Prüss, segue o resultado. ■

4.2 Falta de estabilidade uniforme e taxa de decaimento polinomial do modelo híbrido elástico

O mecanismo de tip body no sistema híbrido elástico (2.1.12)-(2.1.15) produz um decaimento da energia para zero quando o tempo tende para infinito; mas este não é o suficientemente forte para garantir decaimento uniforme. Nesta seção inicialmente demonstraremos a falta de decaimento uniforme e finalmente determinaremos a taxa de decaimento polinomial $t^{-1/2}$ para o sistema híbrido elástico.

Considere o sistema evolutivo hiperbólico gerado pelo sistema (2.1.12)-(2.1.15) com a restrição que $d_1 = 0$, isto é

$$\rho_e \ddot{\hat{\psi}}(x, t) - \alpha_e \hat{\psi}_{xx}(x, t) = 0, \quad \text{em }]0, l[\times \mathbb{R}_0^+ \quad (4.2.1)$$

$$\hat{\psi}(0, t) = 0, \quad \hat{\psi}(l, t) = \hat{w}(t), \quad \text{em } \mathbb{R}_0^+ \quad (4.2.2)$$

$$\rho_3 \ddot{\hat{w}} + \alpha_3 \hat{w} + \alpha_e \hat{\psi}_x(l, t) = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}_0^+ \quad (4.2.3)$$

com as seguintes condições iniciais

$$\hat{\psi}(x, 0) = \hat{\psi}_0, \quad \dot{\hat{\psi}}(x, 0) = \hat{\Psi}_0, \quad \hat{w}(0) = \hat{w}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\hat{w}}(0) = \hat{W}_0. \quad (4.2.4)$$

Define-se o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_*^1(0, l) \times L^2(0, l) \times \mathbb{C}^2$$

cujos elementos serão denotados por $U = (\hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{w}, \hat{W})$.

Assim o sistema (4.2.1)-(4.2.4) é associado com o problema de Cauchy de primeira ordem em \mathcal{H} seguinte

$$\dot{U} = \mathcal{B}_0 U, \quad U(0) = U_0 \quad (4.2.5)$$

onde o operador não limitado $\mathcal{B}_0 : \mathcal{D}_{\mathcal{B}_0} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, é dado por

$$\mathcal{B}_0 U = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_e}{\rho_e}(\cdot)_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ -\frac{\alpha_e}{\rho_3}(\cdot)_x \Big|_{x=l} & 0 & -\frac{\alpha_3}{\rho_3} \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\Psi} \\ \hat{w} \\ \hat{W} \end{pmatrix}$$

cujo domínio é o próprio $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ e condição inicial $U_0 = (\hat{\psi}_0, \hat{\Psi}_0, \hat{w}_0, \hat{W}_0)$.

A condição $d_1 = 0$ em (2.1.48) torna $\pm\mathcal{B}_0$ operadores dissipativos, isto é

$$\operatorname{Re}(\pm\mathcal{B}_0 U, U)_{\mathcal{H}} = \dot{\mathcal{E}}_2(t) = 0, \quad \forall U \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}_0}, \quad (4.2.6)$$

isto implica que a energia inicial do sistema (4.2.5) é constante no tempo

$$\mathcal{E}_2(t) = \mathcal{E}_2(0) \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (4.2.7)$$

Desde que $\pm\mathcal{B}_0$ é dissipativo, então pelo Corolário 1.1.26 tem-se que \mathcal{B}_0 é anti-hermitiano, então de acordo com o Teorema 1.4.5, $e^{\mathcal{B}_0 t}$ é um C_0 -grupo unitário, logo a formula (1.5.3) implica que

$$\omega_0(e^{\mathcal{B}_0 t}) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lema 4.2.1 *Suponhamos que X é um espaço de Banach sobre \mathbb{C} . Se $S(t)$ é um C_0 -semigrupo de operadores em $\mathcal{L}(X)$, então $\pi(S(t))$ é um C_0 -semigrupo de operadores na álgebra de Calkin $\mathcal{C}(X)$.*

PROVA.- Dado qualquer $x \in X$ tem-se

$$\|\pi(S(t))x - \pi(\mathbf{I})x\|_X = \|\pi(S(t) - \mathbf{I})x\|_X \leq \|S(t)x - \mathbf{I}x\|_X \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

■

Lema 4.2.2 *Todo C_0 -grupo unitário $\{e^{\mathcal{B}_0 t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ tem raio espectral essencial 1.*

PROVA.- De acordo com o Lema 4.2.1 e Definição 1.5.3 é possível definir o tipo do semigrupo $\pi(S(t))$, denotado por $\omega_e(S)$, chamado de tipo essencial do semigrupo $S(t)$. Usando Teorema 1.1.19 resulta

$$r_e(S(t)) = r(\pi(S(t))) = e^{\omega_e(S)t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.2.8)$$

Por outro lado, para cada $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\|\pi(e^{\mathcal{B}_0 t})U_0\|_{\mathcal{H}} = \left\| e^{\mathcal{B}_0 t} \left(\mathbf{I} + (e^{\mathcal{B}_0 t})^{-1} \mathcal{K}(\mathcal{H}) \right) U_0 \right\|_{\mathcal{H}} = \|\pi(\mathbf{I})U_0\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall U_0 \in \mathcal{H}.$$

isto implica

$$\|\pi(e^{\mathcal{B}_0 t})\|_{\mathcal{C}(\mathcal{H})} = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{logo} \quad \omega_e(e^{\mathcal{B}_0(\cdot)}) = 0. \quad (4.2.9)$$

Finalmente de (4.2.8) e (4.2.9) resulta que $r_e(e^{\mathcal{B}_0 t}) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$.

■

Lema 4.2.3 *A diferença de C_0 -semigrupos, $e^{\mathcal{B}t} - e^{\mathcal{B}_0t}$ é compacta $\forall t \geq 0$.*

PROVA.- Dada uma sequência de elementos $U_0^n = (\psi_0^n, \Psi_0^n, w_0^n, W_0^n) \in \mathcal{H}$. Mostraremos que a diferença $(e^{\mathcal{B}t} - e^{\mathcal{B}_0t})U_0^n$ possui uma subsequência que converge forte em \mathcal{H} . Por simplicidade omitiremos os super índices.

$$U(t) = (\psi(x, t), \Psi(x, t), w(t), W(t)) = e^{\mathcal{B}t}U_0 \quad \text{resolve o sistema (2.1.49)} \quad e$$

$$\widehat{U}(t) = (\widehat{\psi}(x, t), \widehat{\Psi}(x, t), \widehat{w}(t), \widehat{W}(t)) = e^{\mathcal{B}_0t}U_0 \quad \text{resolve o sistema (4.2.5)}$$

Considere o sistema de segunda ordem no tempo

$$\begin{aligned} \rho_3 \ddot{z}(t) + \alpha_3 z(t) + d_1 \dot{z}(t) &= \alpha_e y(t) \quad \text{em }]0, T[, \\ z(0) &= z_0, \quad \dot{z}(0) = z_1. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Se $y \in L^2(0, T)$, (4.2.10) possui uma única solução z tal que z, \dot{z} são absolutamente contínuas com $\ddot{z} \in L^1(0, T)$ e a seguinte relação se satisfaz

$$\rho_3 |\dot{z}|^2 + \alpha_3 |z|^2 \leq e^{\frac{(2d_1 + \alpha_e)T}{\rho_3}} \left[\rho_3 |z_1|^2 + \alpha_3 |z_0|^2 + \alpha_e \int_0^T |y(s)|^2 ds \right]. \quad (4.2.11)$$

Desde que $y, z, \dot{z} \in L^2(0, T)$, a equação em (4.2.10) implica que $\ddot{z} \in L^2(0, T)$, portanto $\dot{z} \in H^1(0, T)$.

Por outro lado, do Corolário 3.1.2, temos que

$$\psi_x(l, t) \quad e \quad \widehat{\psi}_x(l, t) \quad \text{são limitadas em } L^2(0, T), \quad (4.2.12)$$

então se usamos $y = -\psi_x(l, t)$ em (4.2.10), temos que $\exists! w$ tal que w, \dot{w} são absolutamente contínuas com $\dot{w} \in H^1(0, T)$.

Da mesma forma se usamos $y = -\widehat{\psi}_x(l, t)$ e $d_1 = 0$ no sistema (4.2.10), temos que $\exists! \widehat{w}$ tal que $\widehat{w}, \dot{\widehat{w}}$ são absolutamente contínuas com $\dot{\widehat{w}} \in H^1(0, T)$.

Agora define-se as funções

$$\check{\psi}(x, t) \stackrel{\text{not}}{=} \psi(x, t) - \widehat{\psi}(x, t) \quad e \quad \check{w}(t) \stackrel{\text{not}}{=} w(t) - \widehat{w}(t)$$

tal que verifica o seguinte sistema

$$\rho_e \check{\psi} - \alpha_e \check{\psi}_{xx} = 0 \quad \text{em }]0, l[\times \mathbb{R}_0^+ \quad (4.2.13)$$

$$\check{\psi}(0, t) = 0, \quad \check{\psi}(l, t) = \check{w}(t) \quad \text{em } \mathbb{R}_0^+ \quad (4.2.14)$$

$$\rho_3 \check{\ddot{w}} + \alpha_3 \check{w} + d_1 \dot{\check{w}} + \alpha_e \check{\psi}_x(l, t) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}_0^+. \quad (4.2.15)$$

$$\check{\psi}(x, 0) = \dot{\check{\psi}}(x, 0) = 0 \quad \text{em }]0, l[. \quad (4.2.16)$$

Multiplica-se (4.2.13) por $\overline{\dot{\psi}}$, integre sobre $]0, l[$, aplique I.P.P., use (4.2.14) e toma-se a parte real para obter

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l (\alpha_e |\check{\psi}_x|^2 + \rho_e |\dot{\check{\psi}}|^2) dx = -\alpha_e \operatorname{Re} \check{\psi}_x(l, t) \overline{\dot{w}}(t). \quad (4.2.17)$$

Integra-se (4.2.17) sobre $]0, T[$ e use (4.2.16) para conseguir

$$\mathcal{E}(I_e, t) = -2\alpha_e \operatorname{Re} \int_0^T \check{\psi}_x(l, s) \overline{\dot{w}}(s) ds. \quad (4.2.18)$$

Usando (4.2.15) em (4.2.17) encontramos

$$\int_0^l (\alpha_e |\check{\psi}_x|^2 + \rho_e |\dot{\check{\psi}}|^2) dx + \rho_3 |\dot{w}|^2 + \alpha_3 |\check{w}|^2 = -2d_1 \operatorname{Re} \int_0^t \dot{w}(s) \overline{\check{w}}(s) ds. \quad (4.2.19)$$

Do Teorema 1.3.9 temos que existe uma subsequencia de \dot{w} e \check{w} que convergem forte em $L^2(0, T)$. Portanto a identidade (4.2.19) implica que existe uma subsequencia de $(e^{\mathcal{B}t} - e^{\mathcal{B}_0 t})U_0^n$ converge em norma, isto é, a diferenças do semigrupos $(e^{\mathcal{B}t} - e^{\mathcal{B}_0 t})$ é compacta. ■

Teorema 4.2.4 *O C_0 -semigrupo $\{e^{\mathcal{B}t}\}_{t \geq 0}$ é fortemente estável mas não é uniformemente estável.*

PROVA.- O Lema 3.2.2 e o Teorema 1.5.7 implicam que (2.1.12)-(2.1.15) é (F.E.). Por outro lado, usa-se o Teorema 1.1.17, Lema 4.2.3 e Lema 4.2.2 para implicar que o raio espectral essencial de $e^{\mathcal{B}t}$ é 1, logo $\omega_{ess}(\mathcal{B}) = 0$. Desde que \mathcal{B} é dissipativo a Definição 1.5.6 implica que $s(\mathcal{B}) \leq 0$, logo pelo Corolário 2.11 (Cap. 4, [9]) tem-se $\omega_0(\mathcal{B}) = 0$. Assim a Proposição 1.5.4 implica que o semigrupo C_0 de contrações $\{e^{\mathcal{B}t}\}_{t \geq 0}$ não é (U.E.). ■

Teorema 4.2.5 *De acordo com as condições acima o C_0 -semigrupo $\{e^{\mathcal{B}t}\}_{t \geq 0}$ associado com o sistema elástico híbrido (2.1.12)-(2.1.15) decai polinomialmente na seguinte taxa*

$$\|e^{\mathcal{B}t}U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}}, \quad \forall U_0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}.$$

PROVA.- Verifica-se as hipóteses do Teorema 1.5.9. A condição (1.5.6) é justificada pelo Lema 3.2.2, logo para verificar a condição (1.5.7) usamos algum $F = (f, g, p, q) \in \mathcal{H}$ tal que $\exists! U \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ e que satisfaça

$$i\lambda U - \mathcal{B}U = G, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.2.20)$$

equivalentemente

$$i\lambda\psi - \Psi = f \quad \text{em } H_*^1(0, l) \quad (4.2.21)$$

$$i\lambda\rho_e\Psi - \alpha_e\psi_{xx} = \rho_e g \quad \text{em } L^2(0, l) \quad (4.2.22)$$

$$i\lambda w - W = p \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (4.2.23)$$

$$i\lambda\rho_3 W + d_1 W + \alpha_3 w + \alpha_e\psi_x(l) = \rho_3 q \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (4.2.24)$$

Das propriedades dissipativas do sistema temos

$$d_1|W|^2 = -\text{Re}\langle \mathcal{B}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq |\langle G, U \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|G\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo use-se (2.1.51) para conseguir

$$|\Psi(l)|^2 = |W|^2 \leq \|G\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.2.25)$$

Assim usa-se (4.2.23) e (4.2.25) para conseguir

$$|\psi(l)|^2 = |w|^2 \leq \frac{C_1}{|\lambda|^2} \left(\|G\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|G\|_{\mathcal{H}}^2 \right). \quad (4.2.26)$$

Assim estimamos $\psi_x(l)$ em (4.2.24) através de (4.2.25) e (4.2.26) como segue

$$\begin{aligned} \alpha_e|\psi_x(l)|^2 &= |(i\lambda\rho_3 + d_1)W + \alpha_3 w - \rho_3 q|^2 \\ &\leq \left(\frac{18\rho_e^2}{d_1} + \frac{18d_1}{|\lambda|^2} + \frac{18\alpha_3^2}{d_1|\lambda|^4} \right) |\lambda|^2 \|G\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \left(\frac{18\alpha_3^2}{|\lambda|^2} + 9\rho_3^2 \right) \|G\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= C_2|\lambda|^2 \|G\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + C_3 \|G\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Do Corolário 3.1.5 com $]a, b[=]0, l[$, (4.2.25) e (4.2.27) encontramos que

$$\rho_e \int_0^l |\Psi|^2 dx + \alpha_e \int_0^l |\psi_x|^2 dx \leq C_2|\lambda|^2 \|G\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + C_4 \|G\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.2.28)$$

Finalmente de (4.2.25)-(4.2.28) e a desigualdade de Young tem-se

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_5|\lambda|^4 \|G\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (4.2.29)$$

Tomando ε arbitrariamente pequeno e extraindo a raiz quadrada consegue-se

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_6|\lambda|^2 \|G\|_{\mathcal{H}}.$$

Do Teorema 1.5.9 dado por Borichev e Tomilov, segue o resultado. ■

Capítulo 5

Estabilidade dos modelos híbridos termo-viscoelásticos

Neste capítulo estudamos o comportamento assintótico dos modelos híbridos dissipativos termo-viscoelásticos. Inicialmente provaremos que o modelo da Figura 2.3 e da Figura 2.4 possuem solução que decai uniformemente desde que a componente termo-viscosa não esteja centralizado; no entanto provaremos que modelo da Figura 2.5 possui falta de estabilidade uniforme através do recente resultado devido a Rivera-Rambaud-Villagrán em [26] e finalmente determinaremos uma taxa polinomial $t^{-1/2}$.

5.1 Estabilidade uniforme do modelo termo-viscoelástico

A seguir, provaremos a estabilidade uniforme da solução do primeiro modelo híbrido termo-viscoso que tem como componente central a corda de material elástico correspondente ao sistema (2.2.1)-(2.2.9), logo para o segundo modelo híbrido termo-viscoso cuja componente central é a corda termoelástica, como na Figura 2.4, a prova da estabilidade uniforme é muito semelhante ao primeiro assim é desnecessária a repetição dos cálculos.

Teorema 5.1.1 *Se a componente de material termo-viscoso não é centralizada, então o C_0 -semigrupo $\{e^{A_k t}\}_{t \geq 0}$ associado com o sistema termo-viscoelástico (2.2.1)-(2.2.9) é uniformemente estável.*

PROVA.- Verifica-se as hipóteses do Teorema 1.5.8. A condição (1.5.4) é justificada pelo Lema 5.2.2, logo para verificar a condição (1.5.5) usamos algum $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$ tal que $\exists! U \in \mathcal{D}_A^k$ e que satisfaça

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.1.1)$$

equivalentemente

$$i\lambda\psi - \Psi = f \quad \text{em } H_0^1(0, l) \quad (5.1.2)$$

$$i\lambda\rho\Psi - \sigma_x = \rho g \quad \text{em } L^2(0, l) \quad (5.1.3)$$

$$i\lambda c\theta - \kappa\theta_{xx} + m_0\Psi_x = ch \quad \text{em } L^2(I_\tau \cup I_\nu). \quad (5.1.4)$$

Multiplicar (5.1.1) por U e logo de tomar a parte real resulta

$$-\text{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq |\langle F, U \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo use-se (2.2.12) para conseguir

$$\kappa \int_{I_\tau \cup I_\nu} |\theta_x|^2 dx + \beta_\nu \int_{I_\nu} |\Psi_x|^2 dx \leq \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.1.5)$$

Assim usa-se o Teorema 1.3.4 e (5.1.5) para obter

$$\rho_\nu \int_{I_\nu} |\Psi|^2 dx \leq \rho_\nu C_p \int_{I_\nu} |\Psi_x|^2 dx \leq \frac{\rho_\nu C_p}{\beta_\nu} \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} \quad (5.1.6)$$

e usa-se (5.1.2) e (5.1.5) para obter

$$\begin{aligned} \alpha_\nu \int_{I_\nu} |\psi_x|^2 dx &\leq \frac{2\alpha_\nu}{|\lambda|^2} \int_{I_\nu} (|\Psi_x|^2 + |f_x|^2) dx \\ &\leq C_1 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + C_2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Portanto as estimativas (5.1.6) e (5.1.7) implicam

$$\int_{I_\nu} \left(\rho_\nu |\Psi|^2 + \alpha_\nu |\psi_x|^2 \right) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.1.8)$$

Do Lema 4.1.1 temos que sobre o intervalo $I_\tau =]0, l_0[$ a seguinte estimativa

$$\int_{I_\tau} \left(\rho_\tau |\Psi|^2 + \alpha_\tau |\psi_x|^2 \right) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (5.1.9)$$

Falta apenas mostrar a estimativa sobre $I_e =]l_0, l_1[$, para isto usaremos o resultado de observabilidade dado pelo Corolário 3.1.5 para obter

$$\int_{I_e} \left(\rho_e |\Psi|^2 + \alpha_e |\psi_x|^2 \right) dx \leq C_3 \widehat{I}(l_0) + C_4 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.1.10)$$

Logo se usa o Corolário 3.1.6 com $I_\tau =]0, l_0[$ para obter

$$\widehat{I}(l_0) \leq C_5 \int_{I_\tau} \left(\rho_\tau |\Psi|^2 + \alpha_\tau |\psi_x|^2 \right) dx + C_6 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.1.11)$$

De (5.1.9), (5.1.10) e (5.1.11) tem-se

$$\int_{I_e} \left(\rho_e |\Psi|^2 + \alpha_e |\psi_x|^2 \right) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.1.12)$$

Logo de (5.1.5), (5.1.8), (5.1.9), (5.1.12) e a desigualdade Poincaré tem-se

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Do Teorema 1.5.8 devido a Prüss segue o resultado. ■

5.2 Falta de estabilidade uniforme e taxa de decaimento polinomial do modelo híbrido termo-viscoelástico

Nesta seção, inicialmente demonstraremos a falta de estabilidade uniforme do modelo híbrido termo-viscoelástico cuja componente central é a corda de material termo-viscoelástica, como na Figura 2.5. Para isto usaremos o resultado devido a Rivera-Racke em [25] ou Rivera-Rambaud-Villagrán em [26]. Finalmente determinaremos uma taxa de decaimento polinomial de $t^{-1/2}$.

Recordamos que o modelo da Figura (2.5) está constituído de $\Omega = I_e \cup I_\nu \cup I_\tau$ e as seguintes equações

$$\rho(x)\ddot{\psi}(x, t) = \sigma_x(x, t) \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0. \quad (5.2.1)$$

e a lei constitutiva é definida por

$$\sigma(x, t) = \alpha(x)\psi_x(x, t) - m(x)\theta(x, t) + \beta(x)\dot{\psi}_x(x, t) \quad (5.2.2)$$

Os coeficientes de densidade $\rho(x)$ e expansão térmica $m(x)$ são dados por

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_e & \text{se } x \in I_e \\ \rho_\nu & \text{se } x \in I_\nu \\ \rho_\tau & \text{se } x \in I_\tau \end{cases}, \quad m(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in I_e \\ m_0 & \text{se } x \in I_\nu \\ m_0 & \text{se } x \in I_\tau \end{cases}. \quad (5.2.3)$$

Os coeficientes de rigidez elástica $\alpha(x)$, $\beta(x)$ são dados por

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_e & \text{se } x \in I_e \\ \alpha_\nu & \text{se } x \in I_\nu \\ \alpha_\tau & \text{se } x \in I_\tau \end{cases}, \quad \beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in I_e \\ \beta_\nu & \text{se } x \in I_\nu \\ 0 & \text{se } x \in I_\tau \end{cases} \quad (5.2.4)$$

onde $\rho_e, \rho_\tau, \rho_\nu, \alpha_e, \alpha_\tau, \alpha_\nu, m_0, \beta_\nu$ são constantes positivas.

O balanço de energia para este sistema é constituído por

$$c\dot{\theta}(x, t) - \kappa\theta_{xx}(x, t) + m_0\dot{\psi}_x(x, t) = 0, \quad x \in \Omega \setminus I_e, \quad t \geq 0 \quad (5.2.5)$$

onde c e κ são os constantes positivas de capacidade de aquecimento e condução térmica respectivamente.

As condições de contorno nos extremos $x = 0$ e $x = l$ dado por

$$\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.2.6)$$

e as seguintes condições na variável térmica

$$\begin{aligned} \text{Tipo 1 : } & \theta(l_0, t) = \theta_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 2 : } & \theta_x(l_0, t) = \theta(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 3 : } & \theta(l_0, t) = \theta(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \text{Tipo 4 : } & \theta_x(l_0, t) = \theta_x(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

As condições de transmissão nas interfaces $x = l_0$ e $x = l_1$ são dadas por

$$\begin{aligned} \psi(l_0^-, t) = \psi(l_0^+, t), \quad \sigma(l_0^-, t) = \sigma(l_0^+, t), \\ \psi(l_1^-, t) = \psi(l_1^+, t), \quad \sigma(l_1^-, t) = \sigma(l_1^+, t). \end{aligned} \quad t \geq 0. \quad (5.2.8)$$

Finalmente as seguintes condições iniciais

$$\psi(x, 0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(x, 0) = \psi_1, \quad \theta(x, 0) = \theta_0. \quad (5.2.9)$$

Ressaltando que o resultado sobre falta de estabilidade uniforme é válido para todas as condições de contorno em (5.2.7), como é simples de verificar nos detalhes da demonstração, só para simplificar as notações nos limitaremos à condição de contorno de Tipo 3 em (5.2.7).

Recordamos que o espaço de fase neste caso é dado por

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l) \times L^2(I_\tau \cup I_\nu)$$

A principal ferramenta para mostrar a falta de estabilidade uniforme é o resultado devido a Rivera-Racke em [25] e Rivera-Ramblaud-Villagrán em [26] que estabelece

Teorema 5.2.1 *Dado \mathcal{H}_0 um subespaço fechado do espaço de \mathcal{H} . Seja $\mathcal{T}(t)$ um C_0 -semigrupo de contrações definido no espaço \mathcal{H} e seja $\mathcal{T}_0(t)$ um C_0 -grupo unitário definido sobre \mathcal{H}_0 . Se a diferença dos semigrupos*

$$\mathcal{T}(t) - \mathcal{T}_0(t)$$

é um operador compacto de \mathcal{H}_0 em \mathcal{H} então o semigrupo $\mathcal{T}(t)$ não é exponencialmente estável.

Provaremos que existe \mathcal{H}_0 um subespaço de \mathcal{H} e $T_0(t)$ um C_0 -grupo unitário definido sobre \mathcal{H}_0 , de tal forma que a diferença com o C_0 -semigrupo $T(t) = e^{A_k t}$ definido no Teorema 2.2.3, seja compacta.

Afirmamos que \mathcal{H}_0 e $T_0(t)$ existem:

De fato: Para isto definimos em $I_e =]0, l_0[$ o seguinte sistema

$$\rho_e \ddot{\psi} - \alpha_e \psi_{xx} = 0 \quad \text{em } I_e \times \mathbb{R}_0^+ \quad (5.2.10)$$

$$\psi(0, t) = \psi(l_0, t) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}_0^+ \quad (5.2.11)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(x, 0) = \psi_1(x) \quad \text{em } I_e \quad (5.2.12)$$

este sistema corresponde a uma equação de onda com energia

$$\mathcal{E}_4(t) = \frac{1}{2} \int_{I_e} (\alpha_e |\psi_x|^2 + \rho_e |\dot{\psi}|^2) dx$$

que é conservativa desde que

$$\dot{\mathcal{E}}_4(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{implica que } \mathcal{E}_4(t) = \mathcal{E}_4(0), \quad \forall t > 0. \quad (5.2.13)$$

Assim a energia $\mathcal{E}_4(t)$ é finita se consideramos o espaço de fase

$$\mathcal{H}_1 = H_0^1(I_e) \times L^2(I_e)$$

cujos elementos serão denotados por $U = (\psi, \Psi) \in \mathcal{H}_1$.

Este espaço de fase será munido do produto interno seguinte

$$(U_1, U_2)_{\mathcal{H}_1} = \alpha_e \int_{I_e} \psi_{1x} \overline{\psi_{2x}} dx + \rho_e \int_{I_e} \Psi_1 \overline{\Psi_2} dx$$

com $U_i = (\psi_i, \Psi_i) \in \mathcal{H}_1$, $i = 1, 2$, o qual torna ao par

$$(\mathcal{H}_1, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_1})$$

um espaço de Hilbert sobre \mathbb{C} .

Formulado (5.2.10)-(5.2.12) como um problema de Cauchy de primeira ordem

$$\dot{U} = \mathcal{B}_1 U, \quad U(0) = U_0 \quad (5.2.14)$$

onde $U_0 = (\psi_0, \Psi_0) \in \mathcal{H}_1$ é a condição inicial. Logo é fácil ver que \mathcal{B}_1 é gerador infinitesimal de um C_0 -grupo unitário sobre \mathcal{H}_1 tal que a solução de (5.2.14) é expressado mediante

$$U(t) = e^{\mathcal{B}_1 t} U_0.$$

Por outro lado, define-se os seguintes espaços

$$H_P^1(0, l) = \{w \in H_0^1(0, l); w(x) = 0, \forall x \geq l_0\}$$

$$L_P^2(0, l) = \{w \in L^2(0, l); w(x) = 0, \forall x \geq l_0\}$$

logo assim podemos definir \mathcal{H}_0 por

$$\mathcal{H}_0 = H_P^1(0, l) \times L_P^2(0, l) \times \{0\}.$$

com as seguintes propriedades

- i) \mathcal{H}_0 é um subespaço fechado em \mathcal{H} .
- ii) \mathcal{H}_0 é isometricamente isomorfo ao espaço \mathcal{H}_1 .

Assim, $\forall \hat{U}_0 = (\hat{\psi}_0, \hat{\Psi}_0, 0) \in \mathcal{H}_0$, definimos $T_0(t)$ sobre \mathcal{H}_0 por

$$\hat{U}(t) = T_0(t)\hat{U}_0 = (\hat{\psi}(t), \hat{\Psi}(t), 0).$$

De acordo com isomorfismo isométrico (ii), $\exists! U_0 = (\psi_0, \Psi_0) \in \mathcal{H}_1$ tal que $U(t) = e^{\mathcal{B}_1 t} U_0 = (\psi(t), \Psi(t), 0)$ satisfaz (5.2.14) e a relação (5.2.13) implica

$$\begin{aligned} \|T_0(t)\hat{U}_0\|_{\mathcal{H}_0}^2 &= \|e^{\mathcal{B}_1 t} U_0\|_{\mathcal{H}_1}^2 \\ &= \|U_0\|_{\mathcal{H}_1}^2 \\ &= \|\hat{U}_0\|_{\mathcal{H}_0}^2. \end{aligned}$$

Portanto $T_0(t)$ é um C_0 -grupo unitário sobre \mathcal{H}_0 e satisfaz

$$\|T_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)} = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

Lema 5.2.2 *A diferença $T(t) - T_0(t)$ de C_0 -semigrupos é um operador compacto de \mathcal{H}_0 em \mathcal{H} .*

PROVA.- Suponhamos que \widehat{U}_0^n é uma sequência limitada em \mathcal{H}_0 , então provaremos que $[T(t) - T_0(t)]\widehat{U}_0^n$ possui uma subsequência que converge forte em \mathcal{H} . Suponhamos que

$$U(t) = e^{A_k t} \widehat{U}_0^n = (\psi^n(t), \dot{\psi}^n(t), \theta^n(t))$$

é deduzido como no Teorema (2.2.3) associado ao sistema (5.2.1)-(5.2.9) e

$$\widehat{U}(t) = T_0(t)\widehat{U}_0^n = (\widehat{\psi}^n(t), \widehat{\dot{\psi}}^n(t), 0)$$

Denotando por

$$V^n(x, t) \stackrel{\text{not}}{=} \psi^n(x, t) - \widehat{\psi}^n(x, t).$$

Assim V^n satisfaz

$$\rho \ddot{V}^n - (\alpha V_x^n + \beta \dot{V}_x^n - m\theta^n)_x = 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \quad (5.2.15)$$

$$c \dot{\theta}^n - \kappa \theta_{xx}^n + m \dot{V}_x^n = 0 \quad \text{em } (\Omega \setminus I_e) \times \mathbb{R}_0^+ \quad (5.2.16)$$

onde fica claro que $V^n(x, t) = \psi^n(x, t)$ em $\Omega \setminus I_e$.

Multiplicando a equação (5.2.15) por $\overline{\dot{V}^n}$, integrando em $]0, l[$, usando (5.2.16), logo de tomar a parte real e I.P.P. aplicando as condições (5.2.8) tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^l (\rho |\dot{V}^n|^2 + \alpha |V_x^n|^2) dx + \int_{l_0}^l c |\theta^n|^2 dx \right] + \\ & + \int_{l_0}^{l_1} \beta_\nu |\dot{V}_x^n|^2 dx + \int_{l_0}^l \kappa |\theta_x^n|^2 dx = -\alpha_e \text{Re} \widehat{\psi}_x^n(l_0, t) \overline{\dot{V}^n}(l_0, t). \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Integrando (5.2.17) em $]0, T[$ tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\int_0^l (\rho |\dot{V}^n|^2 + \alpha |V_x^n|^2) dx + \int_{l_0}^l c |\theta^n|^2 dx \right] + \\ & + \int_0^T \left(\int_{l_0}^{l_1} \beta_\nu |\dot{V}_x^n|^2 dx + \int_{l_0}^l \kappa |\theta_x^n|^2 dx \right) dt = -\alpha_e \text{Re} \int_0^T \widehat{\psi}_x^n(l_0, t) \overline{\dot{V}^n}(l_0, t) dt \end{aligned}$$

tomando o valor absoluto resulta

$$\|[T(t) - T_0(t)]U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \alpha_e \int_0^T |\widehat{\psi}_x^n(l_0, t)| |\dot{V}^n(l_0, t)| dt. \quad (5.2.18)$$

Aplicando o Corolário 3.1.2 com $]a, b[= I_e$ e (5.2.13) temos que

$$\widehat{\psi}_x^n(l_0, t) \text{ é limitada em } L^2(0, T). \quad (5.2.19)$$

Note que em $I_\nu =]l_0, l_1[$ temos que

$$\dot{V}^n \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^1(I_\nu))$$

e da equação evolutiva (5.2.15) temos que

$$\ddot{V}^n \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{-1}(I_\nu)),$$

Portanto, usando o Teorema de Lions-Aubin concluímos que existe uma subsequencia, denotando com o mesmo índice, que converge fortemente em $L^2(0, T; H^{1-\epsilon}(I_\nu))$, em particular para $\epsilon = 1/4$ temos que

$$\dot{V}^n \rightarrow \dot{V} \text{ fortemente em } L^2(0, T; C(I_\nu))$$

Em particular tem-se

$$\dot{V}^n(l_0, t) \rightarrow \dot{V}(l_0, t) \text{ fortemente em } L^2(0, T) \quad (5.2.20)$$

Aplicando desigualdade Schwartz, (5.2.19) e a convergência (5.2.20) ao lado direito de (5.2.18) concluímos que

$$[T(t) - T_0(t)]U_0^n \text{ converge fortemente em } \mathcal{H}.$$

Portanto a diferenca $T(t) - T_0(t)$ é compacta. ■

Teorema 5.2.3 *Se a componente de material termo-viscosa é centralizada, então o C_0 -semigrupo $\{e^{A_k t}\}_{t \geq 0}$ associado com o sistema híbrido termo-viscoelástico (5.2.1)-(5.2.9) decai fortemente mas não uniformemente.*

PROVA.- Este Teorema segue diretamente do Lema 5.2.2 e o Teorema 5.2.1. ■

Por fim o seguinte resultado mostra o decaimento polinomial com taxa $t^{-1/2}$.

Teorema 5.2.4 *Se a componente termo-viscosa esta centralizada então o semigrupo $\{e^{A_k t}\}_{t \geq 0}$ associado ao sistema termo-viscoelástico (ver Figura 2.5) decai polinomialmente, mais precisamente*

$$\|e^{At}U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{D}_A^k}, \quad \forall U_0 \in \mathcal{D}_A^k.$$

PROVA.- Verifica-se as hipóteses do Teorema 1.5.9. A condição (1.5.6) é justificada pelo Lema 5.2.2, logo para verificar a condição (1.5.5) usamos algum $F = (f, g, h) \in \mathcal{H}$, tal que $\exists! U \in \mathcal{D}_A^k$ e satisfaça

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.2.21)$$

equivalentemente a

$$i\lambda\psi - \Psi = f \quad \text{em } H_0^1(0, l) \quad (5.2.22)$$

$$i\lambda\rho\Psi - \sigma_x = \rho g \quad \text{em } L^2(0, l) \quad (5.2.23)$$

$$i\lambda c\theta - \kappa\theta_{xx} + m_0\Psi_x = ch \quad \text{em } L^2(I_\nu \cup I_\tau). \quad (5.2.24)$$

Este sistema resolvente corresponde ao modelo da Figura 2.5, com $I_e =]0, l_0[$, $I_\nu =]l_0, l_1[$ e $I_\tau =]l_1, l[$, que é parecido com o sistema resolvente (5.1.2)-(5.1.4) que corresponde ao modelo da Figura 2.3 salvo um intercambio de componentes, portanto as estimativas (5.1.5), (5.1.7) e (5.1.9) são verificadas por argumentos parecidos; no entanto a estimativa (5.1.6) precisa de outro argumento porque a desigualdade de Poincaré clássica à função Ψ sobre componente central I_ν não é válida.

Portanto devemos usar a desigualdade Poincaré generalizada dada por

$$\|\Psi\|_{2, I_\nu}^2 \leq \frac{1}{l_1 - l_0} \left| \int_{I_\nu} \Psi dx \right|^2 + C_p \|\Psi_x\|_{2, I_\nu}^2. \quad (5.2.25)$$

Para estimar a integral em (5.2.25), integramos a equação (5.2.23) em I_ν e logo toma-se o valor absoluto para obter

$$\left| \int_{I_\nu} \Psi dx \right| \leq \frac{1}{\rho_\nu |\lambda|} \left[|\sigma(l_1)| - |\sigma(l_0)| + \rho_\nu \sqrt{l_1 - l_0} \left(\int_{I_\nu} |g|^2 dx \right)^{1/2} \right] \quad (5.2.26)$$

De acordo com a expressão de σ em (5.2.2), podemos estimar

$$|\sigma(s)| \leq |\alpha_\nu \psi_x(s) + \beta_\nu \Psi_x(s)| + m_0 |\theta(x)| \quad (5.2.27)$$

nos extremos $s = l_0$ ou $s = l_1$ da componente termo-viscosa I_ν .

Tome o quadrado em ambos membros em (5.2.26), use (5.2.27), aplique o Corolário 3.1.7 para $I_\nu =]l_0, l_1[$ e a desigualdade (5.1.5) para obter

$$\left| \int_{I_\nu} \Psi dx \right|^2 \leq \frac{C_7}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_8}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.2.28)$$

Logo de (5.1.5), (5.1.7), (5.2.25) e (5.2.28) conseguimos

$$\int_{I_\nu} \left(\rho_\nu |\Psi(s)|^2 + \alpha_\nu |\psi_x(s)|^2 \right) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.2.29)$$

Falta apenas encontrar uma estimativa da energia na componente $I_e =]0, l_0[$ o qual representa a corda de material elástico.

Para fazer isto volvemos a usar o Corolário 3.1.7 com $I_\nu =]l_0, l_1[$ para obter

$$\widehat{I}(l_0) \leq C_9 \widehat{\mathcal{E}}(I_\nu) + C_{10} |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_{11} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.2.30)$$

Substituindo (5.2.29) em (5.2.30) tem-se

$$\widehat{I}(l_0) \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{10} |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.2.31)$$

Do Corolário 3.1.5 com $I_e =]0, l_0[$ e usando (5.2.31) tem-se

$$\begin{aligned} \int_{I_e} \left(\rho_e |\Psi|^2 + \alpha_e |\psi_x|^2 \right) dx &\leq \widehat{I}(l_0) + C_{12} \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + C_{13} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{14} |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Aplicando desigualdade de Young na estimativa anterior tem-se

$$\int_{I_e} \left(\rho_e |\Psi|^2 + \alpha_e |\psi_x|^2 \right) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\varepsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.2.32)$$

Tomando ε suficiente pequeno e λ arbitrariamente grande tem-se

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_\varepsilon |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Do Teorema 1.5.9 dado por Borichev e Tomilov segue o resultado. ■

Referências

- [1] R. Adams and J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, USA, 2nd edition, (2003).
- [2] M. Alves, J. Rivera, M. Sepúlveda and O. Villagrán, *The Lack of Exponential Stability in Certain Transmission Problems with Localized Kelvin-Voigt Dissipation*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 74 no. 2, pp. 345-365, (2014).
- [3] K. Andrews and M. Shillor, *Vibrations of Beam with a Damping Tip Body*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 35 no. 9-10, pp. 1033-1042, (2002).
- [4] A. Borichev and Y. Tomilov, *Optimal Polynomial Decay of Functions and Operator Semigroups*, Mathematische Annalen, Vol. 347 no. 2, pp. 455-478, (2009).
- [5] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*, Masson, Paris, France, 2e tirage, (1983).
- [6] T. Cazenave and A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Oxford University Press Inc., New York, USA, Revised edition, (1998).
- [7] R. Dautray and J. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol 2, Springer-Verlag, Berlin, Germany, (1988).
- [8] R. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Springer-Verlag New York, Inc., USA, 2nd edition, (1972).
- [9] K. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics 194, Springer-Verlag, New York, Inc., USA, (2000).

- [10] L. Fatori, J. Rivera and N. Monteiro, *Energy decay to Timoshenko's system with thermoelasticity of type III*, Asymptotic Analysis, Vol. 86, pp. 227-247, (2014).
- [11] S. Hansen and E. Zuazua, *Exact Controllability and Stabilization of a Vibrating String with an Interior Point Mass*, SIAM J. Control and Optim., Vol. 33 no. 5, pp. 1357-1391, (1995).
- [12] A. Haraux, *Systèmes Dynamiques Dissipatives et Applications*, Masson, Paris, France, (1991).
- [13] F. Huang, *Characteristic Condition for Exponential Stability of Linear Dynamical Systems in Hilbert Spaces*, Ann. of Diff. Eqs, Vol. 1 no. 1, pp. 43-56, (1985).
- [14] D. Huet, *Déscomposition spectrale et opérateurs*, Presses Universitaires de France, Vendôme, France, 1re édition, (1976).
- [15] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2nd edition, (1995).
- [16] J. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1st edition, (1972).
- [17] Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems*, CHAPMAN & HALL/CRC Research Notes in Mathematics 398, London, U.K., (1999).
- [18] Ya. Lopatinsky, *On a method of reducing boundary problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations*, Amer. Math. Soc. Transl., Vol. 89 no. 2, pp. 149-183, (1970).
- [19] S. Nicaise and A.-M. Sändig *General interface problems-I*. Math. Methods Appl. Sci. Vol. 17, pp. 395-450, (1994).
- [20] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. 13 no. 2, pp. 115-162, (1959).
- [21] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag New York Inc., USA, (1983).
- [22] J. Prüss, *On the Spectrum of C_0 -Semigroups*, Trans. AMS, Vol. 284 no. 2, pp. 847-857, (1984).

- [23] J. Rivera and A. Ávila, *Rates of Decay to Nonhomogeneous Timoshenko Model with Tip Body*, Journal of Differential Equations, Vol. 258 no. 10, pp. 3468-3490, (2015).
- [24] J. Rivera, V. Bisognin, E. Bisognin, *Exponential decay to partially thermoelastic materials*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 5-B, no. 3, pp. 605–629, (2002).
- [25] J. Rivera, R. Racke, *Transmission problems in (thermo-)viscoelasticity with Kelvin-Voigt damping: non-exponential, strong and polynomial stability*, (To appear).
- [26] J. Rivera, A. Rambaud, O. Villagrán, *Stability of an N -components Timoshenko beam, with localized Kelvin-Voigt and frictional dissipation*, (To appear).
- [27] H. Weyl, *Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen*, Mathematische Annalen Vol. 68 no. 2, pp. 220-269, (1910).