Gráficos e Bi-gráficos Invariantes em Sistemas Dinâmicos do tipo Produto Torto

Daniel Reis de Oliveira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadora: Katrin Grit Gelfert

Rio de Janeiro

27 de setembro de 2016

Gráficos e Bi-gráficos Invariantes em Sistemas Dinâmicos do tipo Produto Torto

Daniel Reis de Oliveira

Orientadora: Katrin Grit Gelfert

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof^a. Katrin Grit Gelfert - IM/UFRJ

Prof. Maria José Pacífico

Prof. Manuel Stadlbauer

Prof. Isabel Lugao Rios

Prof. Ali Tahzibi

Rio de Janeiro

27 de setembro de 2016

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a meus pais, Jacintho e Maria Madalena, que nunca mediram esforços para que eu pudesse estudar. Certamente este trabalho representa a realização de um sonho para eles. Agradeço à Cristiane, que sempre esteve a meu lado e me ouviu bastante nos momentos de desabafo. À tia Conceição, que certamente estaria muito orgulhosa hoje. Ao Tio Aloízio, Madrinha Tânia, Padrinho Ananias e Tia Maria, que me ajudaram bastante, especialmente durante a graduação. À minha irmã, Maria Tereza, a meu cunhado, Rafael, e a todos os amigos, especialmente os da salinha, com os quais compartilhei bons momentos durante essa jornada. Agradeço à minha orientadora, Katrin, por toda a ajuda. Por fim, agradeço ao CNPq e à Faperj pelo suporte financeiro.

Resumo

Estudamos sistemas dinâmicos do tipo produto torto para os quais a dependência em relação à coordenada na base é localmente constante e as transformações na fibra são difeomorfismos de classe C^1 de um intervalo fechado sobre a sua imagem. Mostramos que para tais sistemas, alguns conjuntos relevantes do ponto de vista da dinâmica podem ser descritos como a união de gráficos de uma, duas ou mais funções definidas da base na fibra. Mostramos que cada conjunto hiperbólico é a união de gráficos de um número finito de funções. Mostramos que cada medida hiperbólica está concentrada na união de gráficos de uma ou duas funções. No caso em que o intervalo é “absorvente”, no sentido que as transformações na fibra o enviam em seu interior, nós obtemos, para um conjunto aberto e denso de sistemas, uma decomposição do espaço de fase em duplas faixas atratoras e duplas faixas repulsoras tais que seus atratores e repulsores são gráficos de uma ou duas funções contínuas em quase todo ponto.

Palavras chaves: Sistemas Dinâmicos Parcialmente Hiperbólicos, Produtos Tortos, Gráficos Invariantes.

Abstract

We study dynamical systems of skew product type whose dependence on the base dynamics is piecewise constant and whose fiber maps are C^1 diffeomorphisms of an interval to its image. We show that such systems, certain dynamically relevant sets can be written as graphs of one, two or more functions defined on the base space. We show that any hyperbolic set is indeed the union of graphs of finitely many functions. We show that any ergodic hyperbolic measure is concentrated in the union of graphs of one or two functions. In the case that the interval is “absorbing” in the sense that each fiber map sends it into its interior we show that for an open and dense set of systems there exists a decomposition of the phase space into attracting double-strips and repelling double-strips such that their attractors and repellers are graphs of one single-valued or bi-valued continuous function in almost every point.

Key words: Partially Hyperbolic Dynamical Systems, Skew Products, Invariant Graphs.

Sumário

1	Preliminares	7
2	Multi-gráficos em Step Skew Products	10
2.1	Conjuntos hiperbólicos vistos como multi-gráficos	10
2.2	Medidas hiperbólicas “suportadas” em gráficos ou bi-gráficos	13
2.3	Exemplos	21
3	Descrição dos atratores topológicos de um step skew product genérico	23
3.1	Definição do step skew product estendido	24
3.2	Faixas, atratores e repulsores	29
3.3	Medidas estendidas	32
3.4	Condições de genericidade	42
3.4.1	Demonstração da Proposição 3.26	44
3.4.2	Condições i), ii) e iii) no sistema estendido	53
3.5	Estrutura geral das faixas	57
3.5.1	Estrutura topológica	57
3.5.2	Estrutura nas medidas	61
3.6	Conclusão da demonstração do Teorema 3.1	64
3.7	Discussão e questões em aberto	65

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos uniformemente hiperbólicos tem sido bem estudada desde a década de 60, e tem como base os trabalhos fundamentais de Smale. Entretanto, tais sistemas deixam de contemplar um grande número de exemplos interessantes, de modo que é necessário estender seus fundamentos para sistemas que não apresentam hiperbolicidade uniforme. Assim, surge de maneira natural o interesse em estudar sistemas dinâmicos que generalizam os uniformemente hiperbólicos, tais como os não uniformemente hiperbólicos ou os parcialmente hiperbólicos (PH). Estes últimos apresentam ainda uniformidade, mas a hiperbolicidade completa é substituída por “alguma hiperbolicidade”. Entender o seu comportamento tanto do ponto de vista topológico (estrutura dos “atratores”) quanto do ponto de vista ergódico é, portanto, de fundamental interesse e tem norteados diversos trabalhos.

Ainda no que diz respeito aos sistemas dinâmicos parcialmente hiperbólicos, um exemplo importante e que tem sido um relevante objeto de estudo são os skew products sobre conjuntos hiperbólicos. De fato, além de admitir uma formulação simples, oferecendo uma boa estrutura para estudar problemas concepcionalmente difíceis, a teoria de [17] garante que os sistemas conjugados a skew products parcialmente hiperbólicos formam um conjunto aberto em PH. Skew products estão ainda naturalmente associados a sistemas iterados de funções, os quais possuem interesse intrínseco. Dentro do conjunto dos skew products, aqueles que apresentam fibrado unidimensional seriam os mais simples de serem estudados e nosso ponto de partida para entender sistemas mais gerais.

Dada a representação simbólica de conjuntos uniformemente hiperbólicos localmente maximais (ver por exemplo [14]), nos interessa considerar skew products sobre um subshift transitivo do tipo finito, ou mesmo sobre o shift completo em um espaço de seqüências. Uma classe importante dentro desse tipo de skew products é a formada pelos chamados step skew products, que são aqueles cuja dependência em relação à coordenada na base é localmente constante. Tal classe é o principal objeto de estudo deste trabalho. Mais precisamente, vamos tratar da transformação

$$F : \Sigma_N \times I \rightarrow \Sigma_N \times I \quad : \quad (\xi, p) \mapsto (\sigma(\xi), f_{\xi_0}(p)), \quad (1)$$

onde $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ é aplicação deslocamento no espaço $\Sigma_N := \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$ e $I = [0, 1]$ é o intervalo unitário. Nós vamos sempre assumir que $f_i : I \rightarrow f_i(I) \subset I$ é um difeomorfismo de classe C^1 para cada $i = 1, \dots, N$. A diferenciabilidade das transformações na fibra é aqui colocada devido à associação com sistemas dinâmicos

parcialmente hiperbólicos, mas apenas as hipóteses de injetividade e continuidade sobre tais transformações já nos conduz a uma série de resultados interessantes, que serão vistos ao longo do texto.

Nosso objetivo neste trabalho é, portanto, dar uma boa descrição, seja do ponto de vista topológico ou seja do ponto de vista ergódico, do sistema definido em (1). Uma tal descrição pode ser feita mostrando, por exemplo, que atratores, repulsores ou outros conjuntos relevantes para o sistema são gráficos (ou conjuntos similares a gráficos) invariantes e com certa regularidade. De fato, nesse caso, resultados válidos para a dinâmica na base, cujo comportamento é razoavelmente bem entendido, podem ser transportados para a dinâmica do sistema. Mais ainda, quanto “maior” a regularidade dos gráficos, mais resultados podem ser transportados. Por [2, Section 1.8], nós temos também que em skew products com transformações monótonas na fibra, gráficos invariantes estão intimamente relacionados com medidas invariantes ergódicas. O estudo de gráficos invariantes e da sua regularidade já foi, de fato, feito em outros contextos (ver, por exemplo, [15, 29, 30]).

Dentre alguns resultados que buscam dar uma boa descrição de skew products do ponto de vista ergódico, podemos citar o trabalho de Ruelle e Wilkinson em [27], no qual eles consideram um skew product mensurável tendo na base uma transformação invertível e ergódica em um espaço de probabilidade, e na fibra difeomorfismos de classe $C^{1+\alpha}$ sobre uma variedade Riemanniana compacta. Eles provam que uma medida ergódica para o skew product que projeta para a medida ergódica na base e tem todos os expoentes de Lyapunov nas fibras negativos possui uma decomposição atômica nas fibras, isto é, existe um conjunto de medida total H' satisfazendo a seguinte propriedade: dada uma fibra no espaço de fase, ou H' não a intersecta ou ele a intersecta em exatamente k pontos. Resultados sobre atomicidade de medidas condicionais de fato foram obtidos também em outros contextos (ver [16] ou [2, Section 1.8], por exemplo).

Analisando especificamente o sistema introduzido em (1), uma boa descrição dos atratores e repulsores topológicos para um tal sistema genérico no caso em que todas as transformações na fibra preservam orientação e que o intervalo é “absorvente” (no sentido que as transformações na fibra o enviam em seu interior) pode ser encontrada no trabalho de Klepstyn e Volk em [22]. De fato, os autores mostram a existência de uma coleção finita de faixas atratoras e repulsoras que preenchem todo o espaço de fase. Cada faixa atratora possui um único atrator maximal e cada faixa repulsora possui um único repulsor maximal. Esses atratores e repulsores são *gráficos ossudos* (seguindo a notação dos autores), isto é, cada um deles intersecta quase toda fibra (com respeito a uma medida de Markov fixada *a priori*) em um único ponto e as demais fibras em um intervalo. Esses conjuntos são, de certa forma, similares às ferraduras do tipo porco-espinho estudadas em [5], que constituem um exemplo paradigmático de sistemas dinâmicos parcialmente hiperbólicos. O caso em que todas as transformações na fibra fixam os extremos do intervalo é tratado em um trabalho recente (ainda na forma de preprint) de Gharaei e Homburg ([13]). Nesse caso, os autores colocam condições sobre os expoentes de Lyapunov nas fibras dos pontos extremos do intervalo e obtêm um resultado similar ao de Klepstyn e Volk, com uma decomposição do espaço de fase similar à de [22]. Porém, no caso das faixas extremas (*border strips*, seguindo a notação de [13]), o atrator maximal é um *thick graph* (similar ao que aparece em [18]), ou seja, é um gráfico cujo fecho tem medida positiva (onde a medida considerada é o produto da medida de Markov na

base com a medida de Lebesgue na fibra).

Neste trabalho, nós vamos provar alguns resultados para o sistema introduzido em (1) que estão relacionados com as descrições dadas em [27] e [22]. No que se refere à relação com o trabalho de Ruelle e Wilkinson, nós estamos considerando um sistema que por um lado é menos geral (a fibra em [27] é uma variedade Riemanniana compacta e o sistema é um (não *step*) *skew product*), mas por outro lado não exigimos que as transformações na fibra sejam de classe $C^{1+\alpha}$. O fato de ser um intervalo a fibra do *step skew product* tratado permite uma melhora no resultado obtido por eles: a redução de k pontos na possível intersecção de H com cada fibra para somente 1 ou 2 pontos em tal possível intersecção (em [27] os autores mostram que é possível ter $k > 2$). Já no que diz respeito à relação com o trabalho de Kleptsyn e Volk, nós obtivemos um resultado similar ao provado por eles, mas para o caso mais geral onde é permitido que as transformações na fibra revertam orientação. A hipótese que cada transformação na fibra preserva orientação é até usual na literatura (ver, por exemplo, [13, 18]), porém restringe bastante a classe de exemplos abrangidos.

No Capítulo 2, nós fazemos uma descrição menos fina do sistema introduzido em (1). Nós provamos que cada conjunto hiperbólico com respeito a tal sistema pode ser visto como o gráfico de uma multi-função uniformemente finita definida da base para a fibra e mostramos também que o “suporte” de cada medida hiperbólica com respeito ao mesmo sistema pode ser visto como o gráfico de uma função ou uma bi-função definida da base para a fibra (os conceitos de multi-função e bi-função são introduzidos ainda no Capítulo 1). Nós utilizamos a expressão “menos fina” porque não é dada uma descrição global do sistema e no caso do resultado para medidas hiperbólicas, a conclusão diz respeito a quase todo ponto (com respeito à medida considerada). Os dois principais resultados do Capítulo 2 são os Teorema A e B enunciados abaixo. As hipóteses sobre cada um deles serão melhores explicadas ao longo do texto.

Teorema A. *Seja H um conjunto compacto F -invariante e hiperbólico com respeito ao sistema introduzido em (1). Então existe $M \geq 1$ tal que $\#\left(\left(\{\xi\} \times I\right) \cap H\right) \leq M$ para todo $\xi \in \Sigma_N$.*

Teorema B. *Sejam μ uma medida hiperbólica com respeito ao sistema introduzido em (1) (ver Definição 2.4) e H um conjunto F -invariante satisfazendo $\mu(H) = 1$ e tal que todos os pontos em H possuem expoente de Lyapunov igual ao expoente de μ . Então existe $M \geq 1$ tal que $\#\left(\left(\{\xi\} \times I\right) \cap H\right) \leq M$ para todo $\xi \in \Sigma_N$. Mais ainda, é possível escolher H de modo que ou $\#\left(\left(\{\xi\} \times I\right) \cap H\right) = 1$ para todo $\xi \in \Pi_1(H)$ ou $\#\left(\left(\{\xi\} \times I\right) \cap H\right) = 2$ para todo $\xi \in \Pi_1(H)$ (onde Π_1 denota a projeção de $\Sigma_N \times I$ sobre Σ_N).*

Conforme já comentamos, o Teorema A nos diz essencialmente que o conjunto H é o gráfico de uma multi-função uniformemente finita definida da base para a fibra. A ocorrência de tais gráficos invariantes em *skew products* também é de considerável interesse, porque ainda nesse caso alguns resultados válidos para a dinâmica na base podem ser transportados para a dinâmica do sistema (veja, por exemplo, [26, Chapter IX, Theorem 1.8], resultado enunciado na Proposição 2.2 neste trabalho). Já o Teorema B está relacionado com o resultado de Ruelle e Wilkinson em [27]. Observe novamente que o sistema introduzido em (1) apresenta algumas diferenças em relação ao sistema estudado por eles e que nós melhoramos a conclusão de haver k pontos na possível intersecção de H com cada fibra para somente 1 ou 2 pontos em tal possível intersecção.

A prova do Teorema B de fato passa pela existência de um conjunto de medida total que tem na possível intersecção com cada fibra exatamente k pontos (mas utilizando técnicas diferentes das usadas em [27]). Para obter a redução na quantidade de pontos é usada fortemente a relação de ordem na fibra. Vale ressaltar aqui um outro fato importante. Em [27], os autores descrevem um exemplo devido a Kifer [21] para mostrar que a condição que a transformação na base é invertível é de fato essencial. Porém, a demonstração do Teorema B mostra que para um step skew product como o introduzido em (1.1), essa hipótese só é necessária quando o expoente da medida é negativo. Isso será discutido de maneira mais detalhada ao longo do texto.

No Capítulo 3 nós fazemos uma análise mais fina para o sistema introduzido em (1), porém em um conjunto genérico de tais sistemas. De fato, o Teorema C, principal resultado deste capítulo e que está enunciado abaixo, está relacionado com o trabalho de Kleptsyn e Volk em [22]. Em comparação com tal trabalho, ao considerarmos sistemas como o introduzido em (1), nós não exigimos que as transformações na fibra preservam orientação. Nós daremos uma descrição topológica para um sistema genérico (a topologia usada será detalhada na Seção 3.4).

Teorema C. *Dado $N \geq 1$, seja $\mathcal{S}(N)$ o conjunto de todos os step skew products como em (1) com a condição adicional que $f_i(I) \subset \text{int}(I)$ para todo $i = 1, \dots, N$. Seja ainda λ_0 uma medida de Markov em Σ_N . Então existe um conjunto aberto e denso em $\mathcal{S}(N)$ tal que para todo F nesse conjunto existe uma coleção finita de duplas faixas atratoras e duplas faixas inversamente atratoras satisfazendo as seguintes propriedades.*

1. *Sua união é todo o espaço de fase;*
2. *O atrator maximal de cada dupla faixa atratora é um bi-gráfico ossudo contínuo; o repulsor maximal (isto é, o atrator maximal para a transformação inversa F^{-1}) de cada dupla faixa inversamente atratora é também um bi-gráfico ossudo contínuo;*
3. *Cada dupla faixa atratora e cada dupla faixa inversamente atratora tem uma única medida invariante ergódica tal que sua projeção na base é a medida de Markov λ_0 . Tal medida é o levantamento de λ_0 sobre o atrator (ou repulsor) considerado como a união dos gráficos de duas funções definidas em λ_0 -quase todo ponto $\xi \in \Sigma_N$. Essa medida é física e hiperbólica. Sua bacia contém um subconjunto de medida total na dupla faixa;*
4. *Para cada dupla faixa atratora, existem um subconjunto Υ de medida total (com respeito à medida do item anterior) de seu atrator maximal e um subconjunto $\Pi_1(\Upsilon) \subset \Sigma_N$ de medida λ_0 total tais que $\Pi_1 : \Upsilon \rightarrow \Pi_1(\Upsilon)$ é uma semiconjugação dois para um entre $F|_{\Upsilon}$ e $\sigma|_{\Pi_1(\Upsilon)}$, onde σ denota a aplicação deslocamento em Σ_N .*

O Teorema C fornece, portanto, uma descrição topológica para sistemas mais gerais que os considerados em [22], uma vez que não foi exigida a hipótese que as transformações na fibra preservam orientação. É verdade que essa descrição ainda depende da medida de Markov na base, uma vez que a associação dos atratores e repulsores com os bi-gráficos ossudos depende desta. Vale ressaltar, porém, que as medidas de Markov são “típicas” dentro do conjunto das medidas invariantes pela dinâmica na base, sendo em particular densas dentro

desse conjunto. Assim, as considerações feitas a seu respeito constituem um ponto de partida natural para uma descrição ainda mais geral. Uma descrição mais detalhada sobre as duplas faixas e os bi-gráficos ossudos será feito na Seção 3.5 e as condições precisas que um sistema deve satisfazer para que o teorema se aplique a ele serão dadas na Seção 3.4.

Além das referências já citadas acima, outros autores tem trabalhado na tentativa dar uma boa descrição do comportamento de transformações que modelam sistemas dinâmicos parcialmente hiperbólicos, em particular, de sistemas similares ao que introduzimos em (1). Nós comentaremos agora alguns desses trabalhos.

Em [12], Fan, Simon e Tóth estudam um sistema similar ao introduzido em (1). Similar porque eles consideram o caso em que a fibra é um intervalo compacto, mas também o caso em que a fibra é um intervalo não limitado. Eles permitem a existência de pontos fixos não-hiperbólicos, situação para a qual a demonstração do Teorema C não é válida (veja Seção 3.4 para maiores detalhes a respeito das condições sobre as quais o teorema se aplica), porém supõem que as transformações na fibra são de classe C^2 , preservam orientação e são convexas. Com mais algumas hipóteses, os autores obtém uma relação entre a dimensão de Hausdorff, a entropia (métrica) e o expoente de Lyapunov (na direção da fibra) de “muitas” medidas invariantes.

Em [9], os autores apresentam um modelo que “destrói” ferraduras tridimensionais via ciclos heteroclínicos. Do ponto de vista de um step skew product, esse modelo pode ser visto como uma família de skew products a 1-parâmetro tal que para cada t há duas transformações na fibra (uma delas preserva orientação e a outra reverte). Para $t = 0$, o sistema apresenta a chamada condição do $(0, 1)$ -ciclo (segundo aqui a notação de [5]), isto é, a transformação que preserva orientação tem o ponto 0 como ponto fixo repulsor e o ponto 1 como ponto fixo atrator, e a transformação que reverte orientação envia o ponto 1 no ponto 0. Para sistemas que apresentam essa propriedade, a demonstração do Teorema C não se aplica (novamente, veja a Seção 3.4). No caso $t \neq 0$, a condição do $(0, 1)$ -ciclo não ocorre, porém a transformação que preserva orientação ainda fixa os extremos do intervalo, e no caso $t < 0$, o intervalo I não é invariante pela transformação que reverte orientação. Assim, também não é possível aplicar o Teorema C no caso $t \neq 0$.

De maneira similar ao trabalho acima, em [5], Díaz e Gelfert consideram um step skew product como o definido em (1), tendo na base o espaço Σ_2 e na fibra uma transformação que preserva orientação e outra que reverte. Porém, mais uma vez, essas transformações não enviam o intervalo em seu interior. Além disso, o sistema admite a condição do $(0, 1)$ -ciclo. Vale ressaltar, no entanto, que uma boa descrição do atrator maximal desse tipo de sistema já foi dada em [5]. De fato, os autores mostraram que o sistema possui uma rica estrutura nas fibras, com um conjunto não enumerável de fibras triviais (pontos) e um conjunto não enumerável de fibras não triviais (“intervalos” ou ossos). Os autores mostraram ainda que existe um salto no espectro de todos os possíveis expoentes de Lyapunov (veja também [7] para uma descrição mais completa do espectro, e [6] e [8] para um estudo similar com a presença de uma terceira transformação na fibra).

Em [10], Díaz e Marcarini consideram uma família a 1-parâmetro de step skew products como os que são tratados em [5]. Eles estudam a dimensão de Hausdorff do conjunto de seqüências em Σ_2 com fibras não triviais. Em particular, eles investigam como a dimensão varia quando o parâmetro que define a família é

alterado.

Em [18], Ilyashenko também considera um sistema como o definido em (1) no caso particular em que $N = 2$ e ambas as transformações na fibra são difeomorfismos de classe C^2 preservando orientação. No entanto, uma das hipóteses consideradas é que ambas as transformações fixam os extremos do intervalo e que uma delas tem um extremo como ponto fixo atrator e a outra tem o mesmo extremo como ponto fixo repulsor. Como todas as transições são permitidas, esse sistema também não se encaixa nas condições do Teorema C. Com mais algumas condições sobre as transformações na fibra, Ilyashenko mostra que sua família de sistemas forma um conjunto aberto dentro do conjunto dos step skew products e que toda transformação nesse aberto possui um *thick attractor* (isto é, seu atrator de Milnor tem medida positiva, mas não total, onde a medida considerada é o produto da medida $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Bernoulli na base com a medida de Lebesgue na fibra - veja [18] para mais detalhes).

Podemos destacar que os trabalhos acima se diferenciam do trabalho nesta tese pelo fato que eles se aplicam para sistemas que “preservam fronteiras”, no sentido que eles não satisfazem a condição $f_i(I) \subset \text{int}(I)$ para todo i . Utilizando o resultado recente de [13] já citado, é possível que o Teorema C se estenda para tais tipos de sistemas. Mas além da condição que as fronteiras podem ser preservadas, os sistemas acima apresentam, em geral, ciclos heterodimensionais e assim também não se enquadram nas hipóteses do Teorema C. Mesmo assim, o Teorema C apresenta um passo adicional para entender melhor sistemas fibrados e a estrutura topológica dos seus atratores. Ressaltamos ainda que a descrição obtida no Teorema C vale para “muitos” sistemas, visto que o resultado se aplica a um conjunto aberto e denso de step skew products.

Capítulo 1

Preliminares

Neste trabalho nós vamos estudar propriedades de transformações usualmente conhecidas como *step skew products*. Essa classe de transformações é composta pelos skew products cuja dependência em relação à coordenada na base é localmente constante. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 1.1. *Sejam $N \in \mathbb{N}$, $\Sigma_N = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$ o espaço das sequências bilaterais em N símbolos e $I = [0, 1]$ o intervalo unitário. Um step skew product é uma transformação da forma*

$$F : \Sigma_N \times I \rightarrow \Sigma_N \times I \quad : \quad (\xi, p) \mapsto (\sigma(\xi), f_{\xi_0}(p)), \quad (1.1)$$

onde $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ é a aplicação deslocamento. Vamos sempre supor que $f_i : I \rightarrow f_i(I) \subset I$ é um difeomorfismo de classe C^1 para cada $i = 1, \dots, N$.

O espaço Σ_N é usualmente chamado de *base* do step skew product F , enquanto o intervalo I é usualmente chamado de *fibra*. A palavra “fibra” pode ainda ser usada para designar um subconjunto da forma $\{\xi\} \times I \subset \Sigma_N \times I$, onde $\xi \in \Sigma_N$. Cada subconjunto dessa forma pode ser naturalmente identificado com o intervalo I . Nesse caso, temos um conjunto de fibras, a saber, $\{\{\xi\} \times I : \xi \in \Sigma_N\}$.

Observe que o step skew product F introduzido na Definição 1.1 não é necessariamente bijetor. Como em muitos casos será útil considerar a dinâmica inversa de F , nós vamos considerar também

$$\Lambda := \bigcap_{n \geq 0} F^n(\Sigma_N \times I) \quad (1.2)$$

o conjunto invariante maximal por F . Note que nós podemos escrever

$$\Lambda = \bigcup_{\xi \in \Sigma_N} \{\xi\} \times I_\xi, \quad (1.3)$$

onde, para cada $\xi \in \Sigma_N$,

$$I_\xi := \bigcap_{n \geq 1} f_{\xi_{-1}} \circ \dots \circ f_{\xi_{-n}}(I). \quad (1.4)$$

Note ainda que I_ξ é sempre um ponto ou um intervalo fechado. Como F é injetora, nós temos que $F|_\Lambda$ é uma bijeção. De agora em diante, para não complicar a notação, nós vamos denotar também por F a restrição $F|_\Lambda$, mas sempre deixando claro, quando for preciso, se estamos considerando a transformação F em $\Sigma_N \times I$ ou a sua restrição.

A definição de I_ξ em (1.4) nos sugere que seria útil adotar uma notação específica para indicar a composição das transformações na fibra. Para cada $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$, vamos então escrever

$$f_{\xi_m \dots \xi_n} := f_{\xi_n} \circ \dots \circ f_{\xi_m}.$$

Dessa forma, (1.4) pode ser reescrita como

$$I_\xi = \bigcap_{n \geq 1} f_{\xi_{-n} \dots \xi_{-1}}(I).$$

Uma vez que estamos considerando um espaço produto, convém estabelecer também as notações para as projeções em cada espaço. Nós vamos indicar por Π_1 e Π_2 as projeções de $\Sigma_N \times I$ sobre Σ_N e sobre I , respectivamente, isto é,

$$\Pi_1 : \Sigma_N \times I \rightarrow \Sigma_N \quad : \quad (\xi, x) \mapsto \xi \quad \text{e} \quad \Pi_2 : \Sigma_N \times I \rightarrow I \quad : \quad (\xi, x) \mapsto x. \quad (1.5)$$

Dado um subconjunto $H \subset \Lambda$, nós vamos escrever, em conformidade com a definição em (1.4),

$$H_\xi := \Pi_2(H \cap (\{\xi\} \times I_\xi)) \quad (1.6)$$

para indicar a projeção sobre I da intersecção de H com uma dada fibra.

Vamos agora introduzir o conceito de hiperbolicidade para o step skew product F .

Definição 1.2. *Nós dizemos que um subconjunto $H \subset \Lambda$ é hiperbólico com contração nas fibras se existem constantes $c > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que*

$$|(f_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}})'(p)| \leq c\lambda^n \quad \text{para todo } n \geq 1 \text{ e para todo } (\xi, p) \in H. \quad (1.7)$$

Nós dizemos que H é hiperbólico com expansão nas fibras se

$$|((f_{\xi_{-n} \dots \xi_{-1}})^{-1})'(p)| \leq c\lambda^n \quad \text{para todo } n \geq 1 \text{ e para todo } (\xi, p) \in H.$$

Nós dizemos que H é hiperbólico se ele é hiperbólico com contração nas fibras ou se ele é hiperbólico com expansão nas fibras.

Observe que nossa definição de conjunto hiperbólico para o step skew product F é natural, visto que o deslocamento na base Σ_N pode ser identificado com um difeomorfismo restrito a um conjunto hiperbólico (no sentido usual) contido em uma variedade compacta. Dessa forma, se H é hiperbólico com respeito a F no sentido da Definição 1.2, então a dinâmica de F em H também pode ser “identificada” com a dinâmica de um difeomorfismo em um conjunto hiperbólico (no sentido usual) contido em uma variedade compacta.

Parte dos resultados obtidos neste trabalho dizem respeito à existência de certos gráficos, bi-gráficos ou multi-gráficos invariantes por F . Para finalizar este breve capítulo, nós vamos formalizar a definição desses conjuntos.

Definição 1.3. *Uma multi-função $\psi : D \subset \Sigma_N \rightarrow I$ é uma transformação que associa a cada $\xi \in D$ um subconjunto não-vazio $\psi(\xi) \subset I$. Uma multi-função $\psi : D \rightarrow I$ é dita ser compact-valued quando $\psi(D)$ é um subconjunto compacto de I para todo $\xi \in D$ e é dita ser uniformemente finita quando existe $M \geq 1$ tal que $\#\psi(\xi) \leq M$ para todo $\xi \in D$. Se para cada $\xi \in D$ nós tivermos que $\psi(\xi)$ é um subconjunto com dois elementos então nós diremos que ψ é uma bi-função.*

As definições de multi-gráfico e bi-gráfico são naturais dados os conceitos introduzidos na Definição 1.3.

Definição 1.4. *Um multi-gráfico em $\Sigma_N \times I$ é um conjunto da forma $\{(\xi, \psi(\xi)) : \xi \in D\}$ para alguma multi-função $\psi : D \subset \Sigma_N \rightarrow I$. Um bi-gráfico em $\Sigma_N \times I$ é um conjunto da forma $\{(\xi, \psi(\xi)) : \xi \in D\}$ para alguma bi-função $\psi : D \subset \Sigma_N \rightarrow I$.*

Capítulo 2

Multi-gráficos em Step Skew Products

Neste capítulo nós vamos mostrar que cada conjunto hiperbólico contido no atrator maximal do step skew product introduzido na Definição 1.1 é o gráfico de uma multi-função uniformemente finita definida da projeção desse conjunto na base para a fibra. Mostraremos ainda um resultado análogo no caso de medidas hiperbólicas, o qual será melhor explicado na Seção 2.2.

2.1 Conjuntos hiperbólicos vistos como multi-gráficos

Nesta seção nós vamos mostrar que cada conjunto hiperbólico contido no atrator maximal do step skew product introduzido na Definição 1.1 é o gráfico de uma multi-função uniformemente finita definida da projeção desse conjunto na base para a fibra. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Seja $H \subset \Lambda$ um conjunto F -invariante e hiperbólico. Então existe $M \geq 1$ tal que $\#H_\xi \leq M$ para todo $\xi \in \Sigma_N$.*

A ocorrência de multi-gráficos invariantes em skew products é de considerável interesse, visto que através destes, resultados válidos para a dinâmica na base (que possui dimensão menor) podem ser transportados para a dinâmica do sistema. Por exemplo, em [26, Chapter IX, Theorem 1.8], podemos encontrar o seguinte resultado.

Proposição 2.2. *Sejam X e Y dois espaços métricos compactos e $\varphi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ duas transformações contínuas. Assuma que $h : X \rightarrow Y$ é uma semi-conjugação uniformemente finita entre essas duas transformações (isto é, existe $c \geq 1$ tal que $\#h^{-1}(y) \leq c$ para todo $y \in Y$). Então $h_{\text{top}}(\varphi) = h_{\text{top}}(\psi)$.*

A Proposição 2.2 nos diz então que no caso do step skew product introduzido na Definição 1.1, para cada conjunto hiperbólico H contido no atrator maximal Λ , a entropia topológica da aplicação deslocamento restrita a $\Pi_1(H)$ coincide com a entropia topológica de F restrita a H (basta notar que a projeção Π_1 satisfaz as condições da Proposição 2.2, uma vez que também vale o Teorema 2.1).

A existência de gráficos invariantes e a análise da regularidade destes já foram também estudadas em outros contextos (ver, por exemplo, [15, 29, 30]).

Ideia da demonstração do Teorema 2.1. Para provar o Teorema 2.1, nós usaremos que o intervalo I é compacto e que cada transformação na fibra é de classe C^1 e monótona (logo, estaremos usando também a relação de ordem em I). Nós faremos a demonstração no caso em que H é hiperbólico com contração nas fibras (a prova quando H é hiperbólico com expansão nas fibras é análoga). Nesse caso, a demonstração consiste essencialmente em mostrar que existe uma vizinhança uniforme (na fibra) de cada ponto de H que é contraída uniformemente por algum iterado de F . Assim, existem subconjuntos de cada uma dessas vizinhanças que são expandidos uniformemente pelo mesmo iterado mas com respeito à inversa de F . Se houverem muitos pontos na intersecção de H com uma certa fibra, será possível obter ao menos dois deles dentro de um tal subconjunto e de modo que após iterá-los pela inversa de F sucessivas vezes, a distância entre seus iterados fica maior do que o comprimento do intervalo I (o que nos dará uma contradição). Essas ideias serão formalizadas na demonstração a seguir. $\square$

Demonstração do Teorema 2.1. Suponha que H é hiperbólico com contração nas fibras e sejam c e λ como em (1.7). Fixe $n_0 \geq 1$ o menor natural tal que $c\lambda^{n_0} =: \lambda_1 < 1$. Então

$$|(f_{\xi_0 \dots \xi_{n_0-1}})'(p)| \leq \lambda_1^n \quad \text{para todo } n \geq 1 \text{ e para todo } (\xi, p) \in H.$$

Fixe agora $\lambda_2 \in (\lambda_1, 1)$. Como o intervalo I é compacto, cada transformação na fibra é de classe C^1 e temos somente uma quantidade finita dessas transformações, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|(f_{\xi_0 \dots \xi_{n_0-1}})'(x)| \leq \lambda_2 \quad \text{para todo } x \in (p - \epsilon, p + \epsilon) \cap I \text{ e para todo } (\xi, p) \in H. \quad (2.1)$$

Seja $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N_1 \epsilon > 1. \quad (2.2)$$

Queremos mostrar que existe $M \geq 1$ tal que $\#H_\xi \leq M$ para todo $\xi \in \Sigma_N$. Suponha por absurdo que isto não ocorra, isto é, para cada $M \geq 1$ existe $\xi \in \Sigma_N$ tal que $\#H_\xi > M$. Fixe então $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que ¹

$$\left\lceil \frac{M_0}{N_1^{N_1}} \right\rceil > 1 \quad (2.3)$$

e seja $\xi \in \Sigma_N$ tal que $\#H_\xi > M_0$. Pela F -invariância de H , nós temos que $\#H_{\sigma^k(\xi)} > M_0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Seja $q_1 < \dots < q_{M_0}$ uma enumeração de M_0 pontos quaisquer em H_ξ . Pela monotonicidade das transformações na fibra, nós temos que $(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_i)$ está entre $(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_1)$ e $(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_{M_0})$ para todo $i = 2, \dots, M_0 - 1$. Temos dois casos a considerar.

1. Entre $(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_1)$ e $(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_{M_0})$ não existem intervalos de tamanho maior ou igual que ϵ cuja intersecção com $H_{\sigma^{-n_0}(\xi)}$ é vazia. Nesse caso, (2.1) nos garante que

$$|(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})'(x)| \leq \lambda_2 \quad \text{para todo } x \text{ entre } (f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_1) \text{ e } (f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_{M_0}),$$

¹ $[a] := \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$

e assim, pelo Teorema do Valor Médio, nós temos que

$$|q_1 - q_{M_0}| \leq \lambda_2 |(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_1) - (f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_{M_0})|,$$

o que implica

$$|(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_1) - (f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_{M_0})| \geq \frac{1}{\lambda_2} |q_1 - q_{M_0}|. \quad (2.4)$$

2. Entre $(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_1)$ e $(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_{M_0})$ existe ao menos um intervalo de tamanho maior ou igual que ϵ cuja intersecção com $H_{\sigma^{-n_0}(\xi)}$ é vazia. Nesse caso, denote por $J_1, \dots, J_l$, $l \geq 1$, os intervalos maximais (disjuntos) de tamanho maior ou igual que ϵ cuja intersecção com $H_{\sigma^{-n_0}(\xi)}$ é vazia (note que cada um desses intervalos pode ser aberto, semi-aberto ou fechado). Por (2.2), nós temos que

$$l < N_1. \quad (2.5)$$

Vamos supor que os intervalos J_i estão ordenados de modo que se a_i e b_i , com $a_i < b_i$, são os extremos de J_i para todo $i = 1, \dots, l$, então $b_i \leq a_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, l-1$. Como as transformações na fibra são injetivos, nós temos que $(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_i)$, $i = 1, \dots, M_0$, são pontos distintos em $H_{\sigma^{-n_0}(\xi)}$. Pelo Princípio da Casa dos Pombos e por (2.5), ao menos $M_1 := \left\lceil \frac{M_0}{N_1} \right\rceil$ desses pontos, digamos $q_1^1 < \dots < q_{M_1}^1$, estão entre 0 e J_1 ou estão entre J_{i_0} e J_{i_0+1} para algum $i_0 = 1, \dots, l-1$ ou estão entre J_l e 1 (observe que pela escolha de M_0 em (2.3), nós temos $M_1 \geq 2$). Suponha, sem perda de generalidade, que $q_1^1, \dots, q_{M_1}^1$ estão entre J_{i_0} e J_{i_0+1} para algum $i_0 = 1, \dots, l-1$. Note que pela escolha dos intervalos J_i , não existem intervalos de tamanho maior ou igual que ϵ entre q_1^1 e $q_{M_1}^1$ cuja intersecção com $H_{\sigma^{-n_0}(\xi)}$ é vazia. Além disso, para cada $q' \leq a_{i_0}$ tal que $q' \in H_{\sigma^{-n_0}(\xi)}$ nós temos, por (2.1) e pelo Teorema do Valor Médio, que

$$\left| (f_{\xi_{-2n_0} \dots \xi_{-n_0-1}})^{-1}(q') - (f_{\xi_{-2n_0} \dots \xi_{-n_0-1}})^{-1}\left(q' + \frac{\epsilon}{2}\right) \right| \geq \frac{1}{\lambda_2} \frac{\epsilon}{2} > \frac{\epsilon}{2},$$

do mesmo modo que

$$\left| (f_{\xi_{-2n_0} \dots \xi_{-n_0-1}})^{-1}(q_1^1) - (f_{\xi_{-2n_0} \dots \xi_{-n_0-1}})^{-1}\left(q_1^1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \right| \geq \frac{1}{\lambda_2} \frac{\epsilon}{2} > \frac{\epsilon}{2}.$$

Como nós também temos que $|q' - q_1^1| \geq \epsilon$ (uma vez que $q' \leq a_{i_0}$), a monotonicidade das transformações na fibra nos dá que

$$\left| (f_{\xi_{-2n_0} \dots \xi_{-n_0-1}})^{-1}(q_1^1) - (f_{\xi_{-2n_0} \dots \xi_{-n_0-1}})^{-1}(q') \right| > \epsilon.$$

Como o ponto $q' \leq a_{i_0}$ tal que $q' \in H_{\sigma^{-n_0}(\xi)}$ foi arbitrário, a última desigualdade nos garante que $(f_{\xi_{-2n_0} \dots \xi_{-n_0-1}})^{-1}(J_{i_0})$ é um intervalo de tamanho maior ou igual que ϵ cuja intersecção com $H_{\sigma^{-2n_0}(\xi)}$ é vazia. A grosso modo, podemos dizer que intervalos de tamanho ϵ cuja intersecção com $H_{\sigma^{-n_0}(\xi)}$ é vazia são levados pela dinâmica de F^{-n_0} em intervalos de tamanho maior ou igual que ϵ cuja intersecção com $H_{\sigma^{-2n_0}(\xi)}$ é também vazia (no caso em que $q_1^1, \dots, q_{M_1}^1$ estão entre 0 e J_1 , nós podemos fazer a mesma análise considerando $q_{M_1}^1$ ao invés de q_1^1 , e $q' \geq b_1$ tal que $q' \in H_{\sigma^{-n_0}(\xi)}$).

Se ocorrer o primeiro caso, nós repetimos o processo anterior para os pontos $(f_{\xi_{-n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_i)$, $i = 1, \dots, M_0$. Já se ocorrer o segundo caso, nós repetimos o processo anterior para os pontos q_i^1 , $i = 1, \dots, M_1$. Em qualquer

situação, nós teremos dois casos análogos aos anteriores a analisar. Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{n_1} |q_{M_0} - q_1| > 1. \quad (2.6)$$

Se for possível repetir o processo anterior por n_1 etapas de modo que em cada etapa nós estamos no primeiro caso, nós obteremos, com uma estimativa análoga à de (2.4), que

$$|(f_{\xi_{-n_1 n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_1) - (f_{\xi_{-n_1 n_0} \dots \xi_{-1}})^{-1}(q_{M_0})| \geq \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{n_1} |q_1 - q_{M_0}|. \quad (2.7)$$

Mas isto não pode ocorrer por causa da escolha de n_1 em (2.6). Assim, em ao menos uma etapa entre a primeira e a n_1 -ésima, o segundo caso terá que ocorrer. Seja n'_1 o menor natural entre 1 e n_1 tal que na n'_1 -ésima etapa o segundo caso ocorre. Seja ainda $q_1^{n'_1} < \dots < q_{M_1}^{n'_1}$, com $M_1 = \left\lceil \frac{M_0}{N_1} \right\rceil$, uma enumeração dos M_1 pontos em $H_{\sigma^{-n'_1 n_0}(\xi)}$ gerados como no caso 2 acima e considere agora $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{n_2} |q_{M_1}^{n'_1} - q_1^{n'_1}| > 1. \quad (2.8)$$

(observe novamente que $M_1 \geq 2$ pela escolha de M_0 em (2.3)). Assim como antes, não é possível repetir o processo anterior por n_2 etapas a partir da n_1 -ésima de modo que em cada etapa ocorre o primeiro caso, e portanto, em alguma etapa nós teremos que voltar ao segundo caso. Observe porém que como para todo $n \geq 1$, os intervalos de tamanho maior ou igual que ϵ cuja intersecção com $H_{\sigma^{-n n_0}(\xi)}$ é vazia são levados pela dinâmica de F^{-n_0} em intervalos de tamanho maior ou igual que ϵ cuja intersecção com $H_{\sigma^{-(n+1)n_0}(\xi)}$ é vazia, (2.2) nos garante que tais intervalos podem aparecer em no máximo N_1 etapas. Ou seja, existem $n' \in \mathbb{N}$ e ao menos $M_{N_1} := \left\lceil \frac{M_0}{N_1^{N_1}} \right\rceil$ pontos em $H_{\sigma^{-n' n_0}(\xi)}$, digamos $q_1^{n'} < \dots < q_{M_{N_1}}^{n'}$, tais que para todo $n \geq n'$, não existem intervalos de tamanho ϵ cuja intersecção com $\left\{ (f_{\xi_{-n n_0} \dots \xi_{-n' n_0 - 1}})^{-1}(q_1^{n'}), \dots, (f_{\xi_{-n n_0} \dots \xi_{-n' n_0 - 1}})^{-1}(q_{M_{N_1}}^{n'}) \right\}$ é vazia (note que nós também temos $M_{N_1} \geq 1$ pela escolha de M_0 em (2.3)). Isso significa que a partir da n' -ésima etapa no processo, o único caso permitido na nossa análise é o primeiro. Fazendo uma estimativa análoga à de (2.4), nós obtemos então que

$$\left| (f_{\xi_{-n n_0} \dots \xi_{-n' n_0 - 1}})^{-1}(q_1^{n'}) - (f_{\xi_{-n n_0} \dots \xi_{-n' n_0 - 1}})^{-1}(q_{M_{N_1}}^{n'}) \right| \geq \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{n-n'} |q_1^{n'} - q_{M_{N_1}}^{n'}| \quad \text{para todo } n \geq n'.$$

Como $\frac{1}{\lambda_2} > 1$ e o intervalo I é compacto, a última desigualdade nos dá uma contradição. Isso conclui a prova do teorema. $\square$

2.2 Medidas hiperbólicas “suportadas” em gráficos ou bi-gráficos

Nesta seção nós vamos mostrar que dada uma medida ergódica hiperbólica com respeito a F , então existe um subconjunto H de medida total tal que ou H é o gráfico de uma função definida da sua projeção na base para a fibra ou H é o gráfico de uma bi-função definida da sua projeção na base para a fibra.

Vamos inicialmente definir o conceito de medida hiperbólica para o step skew product F introduzido na Definição 1.1. Tal conceito está relacionado com a seguinte definição clássica.

Definição 2.3. Dado um ponto $(\xi, p) \in \Sigma_N \times I$, nós definimos o expoente de Lyapunov para frente de (ξ, p) (com respeito a F) por

$$\chi_+(\xi, p) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |(f_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}})'(p)|.$$

sempre que o limite existir. Se $(f_{\xi_{-n} \dots \xi_{-1}})^{-1}(p)$ está bem definida para todo $n \geq 1$, o expoente de Lyapunov para trás de (ξ, p) (com respeito a F) é definido por

$$\chi_-(\xi, p) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{-n} \log |((f_{\xi_{-n} \dots \xi_{-1}})^{-1})'(p)|,$$

sempre que o limite existir.

Considere agora μ uma medida F -invariante e ergódica. O Teorema de Birkhoff nos garante que $\chi_+(\xi, p)$ existe para μ -quase todo ponto $(\xi, p) \in \Lambda$. Como, além disso, a função $(\xi, p) \mapsto \chi_+(\xi, p)$ é mensurável e F -invariante (e μ é ergódica), nós temos que $\chi_+(\xi, p)$ é constante para μ -quase todo ponto $(\xi, p) \in \Lambda$. Vamos escrever $\chi_+(\xi, p) =: \chi(\mu)$. Também é possível mostrar que $\chi_-(\xi, p) = \chi(\mu)$ para μ -quase todo ponto $(\xi, p) \in \Lambda$.

Definição 2.4. Uma medida F -invariante e ergódica μ será dita hiperbólica quando $\chi(\mu) \neq 0$.

É comum encontrar na literatura (ver por exemplo [24]) a definição de medida hiperbólica como uma medida invariante e ergódica com respeito a um difeomorfismo em uma variedade compacta e tal que todos os seus expoentes de Lyapunov são não nulos. Nossa definição é portanto natural, visto que podemos “identificar” o deslocamento na base com um difeomorfismo em um conjunto hiperbólico contido em uma variedade compacta. O teorema a seguir é o principal resultado desta seção.

Teorema 2.5. Sejam μ uma medida hiperbólica e H um conjunto F -invariante tal que $\mu(H) = 1$ e $\chi_+(\xi, p) = \chi(\mu)$ para todo $(\xi, p) \in H$. Então existe $M \geq 1$ tal que $\#H_\xi \leq M$ para todo $\xi \in \Sigma_N$. Mais ainda, existem funções $\varphi^-, \varphi^+ : \Pi_1(H) \rightarrow I$ tais que

$$\Gamma(\mu) := \Gamma^- \cup \Gamma^+$$

é um conjunto F -invariante e coincide com $\text{supp } \mu$ em quase todo ponto, onde

$$\Gamma^\pm := \{(\xi, \varphi^\pm(\xi)) : \xi \in \Pi_1(H)\}.$$

Um resultado semelhante ao Teorema 2.5 havia sido mostrado por Ruelle e Wilkinson em [27], onde eles consideram um skew product mensurável tendo na base uma transformação invertível e ergódica em um espaço de probabilidade, e na fibra difeomorfismos de classe $C^{1+\alpha}$ sobre uma variedade Riemanniana compacta. Eles provam que uma medida ergódica para o skew product que projeta para a medida ergódica na base e tem todos os expoentes de Lyapunov nas fibras negativos possui uma decomposição atômica nas fibras, isto é, existe um conjunto de medida total H' satisfazendo a seguinte propriedade: dada uma fibra no espaço de fase, ou H' não a intersecta ou ele a intersecta em exatamente k pontos (para mais detalhes ver [27]). Entretanto, nesse caso mais geral, é de fato possível ter $k > 2$, conforme apontado em [27]. Na prova do Teorema 2.5 é mostrado inicialmente, com técnicas diferentes das de [27], a existência de um conjunto de medida total que é o gráfico de

uma multi-função uniformemente finita definida da sua projeção na base para a fibra. Para obter o resultado a respeito dos gráficos de funções ou bi-funções é usada fortemente a relação de ordem na fibra.

Uma outra observação importante é que em [27] os autores apresentam um exemplo devido a Kifer [21] que mostra que a invertibilidade da transformação na base é de fato necessária. Apresentaremos abaixo um outro exemplo desse fato para o caso geral de [27]. Porém, no nosso caso, a demonstração evidencia que essa hipótese não é necessária quando $\chi(\mu) > 0$. Considere

$$F^+ : \Sigma_2^+ \times S^1 \rightarrow \Sigma_2^+ \times S^1 : (\xi, x) \mapsto (\sigma^+(\xi), f_{\xi_0}(x)),$$

onde $\Sigma_2^+ = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$, σ^+ é a aplicação deslocamento em Σ_2^+ e $\{f_i\}_{i=1,2}$ é minimal em S^1 no sentido que

$$\mathcal{O}^-(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(f_{\xi_1 \dots \xi_n})^{-1}(x) : \xi_i \in \{1, 2\}\} \quad \text{é denso em } S^1 \text{ para todo } x \in S^1.$$

Fixe ν a medida $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Bernoulli em Σ_2^+ e seja μ uma medida estacionária com respeito ao processo de Markov induzido por F^+ e ν (a definição de medida estacionária neste contexto é análoga à Definição 3.16). Então $\nu \times \mu$ é uma medida F^+ -invariante que projeta para a medida ν (veja, por exemplo, [22]). Observe agora que $\nu \times \mu$ não possui decomposição atômica nas fibras. De fato, suponha por absurdo que $\mu_{i_0}(\{x\}) =: c > 0$ para algum $i_0 \in \{1, 2\}$ e para algum $x \in S^1$. Como μ é estacionária, nós temos que

$$\frac{1}{2}\mu_1(\{f_1^{-1}(x)\}) + \frac{1}{2}\mu_2(\{f_2^{-1}(x)\}) = c,$$

de modo que ou $\mu_{i_1}(\{f_{i_1}^{-1}(x)\}) =: c_1 > c$ para algum $i_1 \in \{1, 2\}$ ou $\mu_i(\{f_i^{-1}(x)\}) = c$ para $i = 1, 2$. Suponha que o primeiro caso ocorra. Então $(i_1, f_{i_1}^{-1}(x)) \neq (i_0, x)$ e usando novamente que μ é estacionária, nós temos que

$$\frac{1}{2}\mu_1(\{f_1^{-1}(f_{i_1}^{-1}(x))\}) + \frac{1}{2}\mu_2(\{f_2^{-1}(f_{i_1}^{-1}(x))\}) = c_1,$$

donde segue que $\mu_{i_2}(\{f_{i_2}^{-1}(f_{i_1}^{-1}(x))\}) =: c_2 > c_1$ para algum $i_2 \in \{1, 2\}$ ou $\mu_i(\{f_i^{-1}(f_{i_1}^{-1}(x))\}) = c_1$ para $i = 1, 2$. Mais uma vez, se o primeiro caso ocorrer, então obrigatoriamente $(i_2, f_{i_2}^{-1}(f_{i_1}^{-1}(x))) \neq (i_1, f_{i_1}^{-1}(x))$ e $(i_2, f_{i_2}^{-1}(f_{i_1}^{-1}(x))) \neq (i_0, x)$. Lembrando que nós já tínhamos $(i_1, f_{i_1}^{-1}(x)) \neq (i_0, x)$ e como nós podemos repetir esse processo, segue que em algum momento o primeiro caso não pode mais ocorrer (pela finitude de μ). Assim, nós podemos supor, sem perda de generalidade, que só o segundo caso ocorre. Então $\mu_{i_n}(\{(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n})^{-1}(x)\}) = c$ para toda sequência finita $i_1 \dots i_n$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas como $\{f_i\}_{i=1,2}$ é minimal em S^1 , $\{(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n})^{-1}(x) : i_j \in \{1, 2\}, n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto infinito, o que contradiz a finitude de μ . Portanto, realmente μ não possui decomposição atômica nas fibras. Como é possível escolher μ de modo que $\nu \times \mu$ é hiperbólica (veja propriedade de sincronização em [23]), segue que de fato a invertibilidade da transformação na base é necessária.

Resultados similares ao Teorema 2.5 também foram obtidos em outros contextos. Por exemplo, no caso em que temos um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 em uma variedade Riemanniana compacta e uma medida μ ergódica e equivalente à medida de Lebesgue, Hirayama e Pesin mostram em [16] que se a distribuição central é integrável para uma folheação central com folhas compactas suaves e μ tem expoentes

de Lyapunov ao longo da distribuição central positivos (ou negativos), então as medidas condicionais de μ nas folhas da folheação central são atômicas (veja [16] para mais detalhes). Já no contexto da dinâmica aleatória, é provado em [2, Section 1.8] que cada sistema dinâmico aleatório local e contínuo com espaço de estado $\mathbb{R}$ é crescente com respeito ao espaço de estado e cada medida ergódica invariante pelo sistema possui medidas de Dirac como suas medidas condicionais nas fibras (no contexto da dinâmica aleatória).

Ideia da Demonstração do Teorema 2.5. Nós vamos provar o Teorema 2.5 no caso em que $\chi(\mu) > 0$ (o caso $\chi(\mu) < 0$ é análogo). Para mostrar que existe uma cota uniforme para a quantidade de pontos na possível intersecção de H com cada fibra, nós vamos provar que a inversa de F restrita à fibra é contrativa em uma vizinhança (na fibra) de pontos de H . Assim, F “expande” numa vizinhança (na fibra) desses pontos, de modo que a compacidade de I não permite a existência de muitos pontos na possível intersecção de H com cada fibra. Uma vez provado isso, as demais afirmações do Teorema 2.5 são quase imediatas. De fato, a monotonicidade das transformações na fibra nos garante que os pontos extremos da possível intersecção de H com cada fibra constituem um conjunto F -invariante que, se for mensurável (essa é a parte não imediata), terá medida nula ou total pela ergodicidade de μ . Caso tenha medida total, o resultado estará provado. Caso contrário, podemos excluir os pontos extremos da possível intersecção de H com cada fibra e repetir a análise com os pontos que restam. A cota uniforme M nos garante que em algum momento esse processo tem que parar, o que concluirá a prova do teorema. $\square$

Vamos inicialmente estabelecer alguns resultados dos quais faremos uso. A seguinte definição é bastante usual na literatura (ver [1, 3], por exemplo).

Definição 2.6. *Dado um número $\varrho > 0$ e um ponto $(\xi, p) \in \Sigma_N \times I$, nós dizemos que um natural n é um tempo hiperbólico para (ξ, p) (com respeito a F) com expoente ϱ se*

$$\begin{aligned} |(f_{\xi_0 \dots \xi_n})'(p)| &\geq e^{(n+1)\varrho} \quad e \\ |(f_{\xi_m \dots \xi_n})'(f_{\xi_0 \dots \xi_{m-1}}(p))| &\geq e^{(n-m+1)\varrho} \quad \text{para todo } m = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

O lema a seguir nos garante que se um ponto possui expoente de Lyapunov para frente positivo, então ele possui muitos tempos hiperbólicos.

Lema 2.7. *Se $\chi_+(\xi, p) > \chi - \epsilon > 0$ então (ξ, p) tem infinitos tempos hiperbólicos com expoente $\chi - \epsilon$. Mais ainda, a densidade de tempos hiperbólicos é positiva, isto é, existe uma constante $d_0 = d_0(\chi - \epsilon) > 0$ tal que*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \# \{1 \leq k \leq n: k \text{ é tempo hiperbólico para } (\xi, p)\} \geq d_0.$$

Para provar o Lema 2.7, nós usaremos o seguinte resultado clássico devido a Pliss [25], cuja demonstração pode ser encontrada em [24].

Lema 2.8 (Lema de Pliss). *Dados $A \geq c_2 > c_1 > 0$, seja $d_0 = (c_2 - c_1)/(A - c_1)$. Se $a_0, \dots, a_n$ são números reais tais que $a_i \leq A$ e*

$$\sum_{i=0}^n a_i \geq c_2(n+1),$$

então existem números inteiros $l > d_0(n+1)$ e $1 \leq n_1 < \dots < n_l \leq n$ tais que, para cada $0 \leq m \leq n_j$ e $j = 1, \dots, l$, nós temos

$$\sum_{i=m}^{n_j} a_i \geq c_1(n_j - m + 1).$$

Demonstração do Lema 2.7. Basta aplicar o Lema 2.8 com as constantes adequadas, as quais definiremos a seguir. Sejam $A := \max \{\log |f'_i(x)| : x \in I, i = 1, \dots, N\}$, $c_1 := \chi - \epsilon$ e fixe $c_2 \in (\chi - \epsilon, \chi_+(\xi, p))$. Sejam ainda $a_0 := \log |f'_{\xi_0}(p)|$ e $a_i := \log |f'_{\xi_i}(f_{\xi_0 \dots \xi_{i-1}}(p))|$ para cada $i = 1, \dots, n$. Vejamos que o Lema 2.8 se aplica. Por definição, nós já temos que $a_i \leq A$ para todo $i = 0, \dots, n$. Além disso, como $\chi_+(\xi, p) > c_2$, existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \log |(f_{\xi_0 \dots \xi_n})'(p)| > c_2,$$

isto é,

$$n \geq n_0 \Rightarrow \log |f'_{\xi_0}(p)| + \sum_{i=1}^n \log |f'_{\xi_i}(f_{\xi_0 \dots \xi_{i-1}}(p))| > c_2(n+1).$$

Segue então, do Lema 2.8, que para cada $n \geq n_0$ existem inteiros $l = l(n) > d_0(n+1)$ e $1 \leq n_1 < \dots < n_l \leq n$ tais que, para cada $1 \leq m \leq n_j$ e $j = 1, \dots, l$, nós temos

$$\begin{aligned} \log |f'_{\xi_0}(p)| + \sum_{i=1}^{n_j} \log |f'_{\xi_i}(f_{\xi_0 \dots \xi_{i-1}}(p))| &\geq c_1(n_j + 1) \quad \text{e} \\ \sum_{i=m}^{n_j} \log |f'_{\xi_i}(f_{\xi_0 \dots \xi_{i-1}}(p))| &\geq c_1(n_j - m + 1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |(f_{\xi_0 \dots \xi_{n_j}})'(p)| &\geq e^{(n_j+1)(\chi-\epsilon)} \quad \text{e} \\ |(f_{\xi_m \dots \xi_{n_j}})'(f_{\xi_0 \dots \xi_{m-1}}(p))| &\geq e^{(n_j-m+1)(\chi-\epsilon)} \quad \text{para cada } m = 1, \dots, n_j. \end{aligned}$$

Como isto vale para todo $n \geq n_0$, segue que (ξ, p) tem infinitos tempos hiperbólicos com expoente $\chi - \epsilon$. Como, além disso, $l(n) > d_0(n+1)$, nós temos que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{l(n)}{n} \geq d_0,$$

provando que a densidade de tempo hiperbólicos é maior ou igual que d_0 . Isso conclui a prova do lema. $\square$

Vamos agora introduzir o conceito de distorção, que será utilizado para aproximar a derivada da restrição de F à fibra em pontos fora de H com a derivada em pontos do conjunto H .

Definição 2.9. *Seja $g : D(g) \subset I \rightarrow I$ uma função diferenciável com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in D(g)$. Para cada $Z \subset D(g)$, nós definimos*

$$\text{Dist } g|_Z := \sup_{x, y \in Z} \frac{|g'(x)|}{|g'(y)|}$$

a distorção máxima de g em Z . Para cada $\vartheta > 0$, nós definimos ainda

$$D(\vartheta) := \max_{x \in I} \max_{i=1, \dots, N} \left\{ \text{Dist } f_i|_{[x-\frac{\vartheta}{2}, x+\frac{\vartheta}{2}] \cap I}, \text{Dist } f_i^{-1}|_{[x-\frac{\vartheta}{2}, x+\frac{\vartheta}{2}] \cap I} \right\}.$$

Observação. $D(\vartheta) \rightarrow 1$ quando $\vartheta \rightarrow 0$.

O resultado a seguir nos garante que a inversa da restrição de F à fibra é contrativa numa vizinhança (na fibra) de pontos de H . Nós reproduziremos aqui a prova feita em [7]. Vamos denotar por $|J|$ o comprimento de um intervalo $J \subset I$.

Lema 2.10. *Sejam $(\xi, p) \in \Sigma_N \times I$, $\chi > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que $\chi - 2\epsilon > 0$. Sejam ainda $n \geq 1$ um tempo hiperbólico para (ξ, p) com expoente $\chi - \epsilon$, $\vartheta > 0$ suficientemente pequeno tal que $D(\vartheta) < e^\epsilon$ e $J_{n+1} \subset I$ um intervalo contendo $f_{\xi_0 \dots \xi_n}(p)$ tal que $|J_{n+1}| \leq \vartheta$ e com $(f_{\xi_k \dots \xi_n})^{-1}|_{J_{n+1}}$ bem definida para todo $k = 0, \dots, n$. Então*

$$|J_k| \leq \vartheta e^{-(n+1-k)(\chi-2\epsilon)} \quad \text{para todo } k = 0, \dots, n+1, \quad \text{onde } J_k := (f_{\xi_k \dots \xi_n})^{-1}(J_{n+1}).$$

Demonstração. A afirmação é claramente válida para $k = n+1$. Supondo que ela seja válida para todo $i = k+1, \dots, n+1$ (para algum $0 \leq k \leq n$), vejamos que ela é também verdadeira para k . Pelo Teorema do Valor Médio, nós temos que

$$|J_k| \leq \max_{x \in J_{n+1}} |((f_{\xi_k \dots \xi_n})^{-1})'(x)| |J_{n+1}|. \quad (2.9)$$

Já a hipótese de indução nos dá que $|J_i| \leq \vartheta e^{-(n+1-i)(\chi-2\epsilon)} \leq \vartheta$ para todo $i = k+1, \dots, n+1$. Assim, usando a regra da cadeia e o fato que $D(\vartheta) < e^\epsilon$, nós temos que para todo $x \in J_{n+1}$

$$\frac{|((f_{\xi_k \dots \xi_n})^{-1})'(x)|}{|((f_{\xi_k \dots \xi_n})^{-1})'(f_{\xi_0 \dots \xi_n}(p))|} = \frac{|(f_{\xi_n}^{-1})'(x)|}{|(f_{\xi_n}^{-1})'(f_{\xi_0 \dots \xi_n}(p))|} \prod_{i=k}^{n-1} \frac{|(f_{\xi_i}^{-1})'(f_{\xi_{i+1} \dots \xi_n})^{-1}(x)|}{|(f_{\xi_i}^{-1})'(f_{\xi_0 \dots \xi_i}(p))|} < e^{(n-k+1)\epsilon}$$

Isso junto com (2.9) nos dá que

$$|J_k| \leq e^{(n-k+1)\epsilon} |((f_{\xi_k \dots \xi_n})^{-1})'(f_{\xi_0 \dots \xi_n}(p))| |J_{n+1}|.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, nós podemos escrever

$$|J_k| \leq e^{(n-k+1)\epsilon} \frac{1}{|(f_{\xi_k \dots \xi_n})'(f_{\xi_0 \dots \xi_{k-1}}(p))|} |J_{n+1}|, \quad \text{no caso em que } 1 \leq k \leq n,$$

ou

$$|J_k| \leq e^{(n-k+1)\epsilon} \frac{1}{|(f_{\xi_0 \dots \xi_n})'(p)|} |J_{n+1}|, \quad \text{no caso em que } k = 0.$$

Qualquer que seja a situação, como n é tempo hiperbólico para (ξ, p) com expoente $\chi - \epsilon$, nós temos que

$$|J_k| \leq e^{(n-k+1)\epsilon} e^{-(n-k+1)(\chi-\epsilon)} |J_{n+1}| \leq \vartheta e^{-(n+1-k)(\chi-2\epsilon)},$$

o que conclui a prova do lema. □

Estamos agora em condições de provar o Teorema 2.5.

Demonstração do Teorema 2.5. Seja H um conjunto F -invariante tal que $\mu(H) = 1$ e $\chi_+(\xi, p) = \chi(\mu) > 0$ para todo $(\xi, p) \in H$. Escolhendo $\chi = \chi(\mu)$ e $0 < \epsilon < \frac{\chi(\mu)}{2}$ no Lema 2.7, nós obtemos a existência de uma constante uniforme $d_0 > 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \# \{1 \leq k \leq n : k \text{ é tempo hiperbólico para } (\xi, p) \text{ com expoente } \chi(\mu) - \epsilon\} \geq d_0 \quad \text{para todo } (\xi, p) \in H.$$

Queremos mostrar que existe $M \geq 1$ tal que $\#H_\xi \leq M$ para todo $\xi \in \Sigma_N$. Suponha por absurdo que isto não ocorra, ou seja, para cada $M \geq 1$, é possível obter $\xi \in \Sigma_N$ tal que $\#H_\xi > M$. Seja $\vartheta > 0$ tal que $D(\vartheta) < e^\epsilon$ e fixe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(N_1 - 1)\vartheta > 1. \quad (2.10)$$

Fixe ainda $0 < d_1 < d_0$ e seja j um número natural tal que

$$jd_1 > N_1 - 1 + d_1. \quad (2.11)$$

Pela hipótese de absurdo, existe $\xi \in \Sigma_N$ tal que $\#H_\xi > j$, e pela F -invariância de H nós temos que $\#H_{\sigma^k(\xi)} > j$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Afirmção 1. *Sejam j escolhido como em (2.11) e $\xi \in \Sigma_N$ tal que $\#H_\xi > j$. Então para qualquer escolha de pontos $x_1, \dots, x_j$ em H_ξ , é possível obter um subconjunto $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{N_1}}\} \subset \{x_1, \dots, x_j\}$ tal que para infinitos números inteiros $n \geq n_0$ nós temos que $x_{i_1}, \dots, x_{i_{N_1}}$ tem ao menos um tempo hiperbólico $t(n)$ em comum, onde $n_0 = n_0(x_1, \dots, x_j)$ é o número satisfazendo*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \#\{1 \leq k \leq n: k \text{ é tempo hiperbólico para } (\xi, x_i) \text{ com expoente } \chi(\mu) - \epsilon\} > nd_1 \quad \forall i = 1, \dots, j. \quad (2.12)$$

Mais ainda, nós podemos tomar $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{N_1}}\}$ e $t(n)$ tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t(n) = +\infty$.

Demonstração. Seja $\{x_1, \dots, x_j\} \subset H_\xi$ um subconjunto qualquer. Considere n_0 como em (2.12) e fixe $n \geq n_0$. Para cada $i = 1, \dots, j$, o ponto x_i tem ao menos $\lceil d_1 n \rceil$ tempos hiperbólicos entre 1 e n . Como $jd_1 > N_1 - 1$ por (2.11), nós temos $jd_1 n > (N_1 - 1)n$, donde segue, do Princípio da Casa dos Pombos, que existe $1 \leq t(n) \leq n$ tal que ao menos N_1 pontos em $\{x_1, \dots, x_j\}$, digamos $x_{i_1}(n), \dots, x_{i_{N_1}}(n)$, tem $t(n)$ como tempo hiperbólico comum.

Vejamos agora que é possível escolher $\{x_{i_1}(n), \dots, x_{i_{N_1}}(n)\}$ e $t(n)$ tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t(n) = +\infty$. De fato, suponha por absurdo que existe $c \geq 1$ satisfazendo que para todo $n \geq n_0$ e para quaisquer escolhas de $x_{i_1}(n), \dots, x_{i_{N_1}}(n)$ e de $t(n)$, nós temos $t(n) \leq c$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(N_1 - 1)(n - c)}{d_1 n - c} = \frac{N_1 - 1}{d_1},$$

é possível obter $n' \geq n_0$ tal que $d_1 n' - c > 0$ e

$$\frac{(N_1 - 1)(n' - c)}{d_1 n' - c} < \frac{N_1 - 1}{d_1} + 1 < j, \quad (2.13)$$

onde a última desigualdade segue da escolha de j em (2.11). Mas para cada $i = 1, \dots, j$, o ponto x_i tem ao menos $d_1 n' - c$ tempos hiperbólicos entre $c + 1$ e n' . Então, segue de (2.13) e do Princípio da Casa dos Pombos, que existe $c + 1 \leq t^*(n') \leq n'$ tal que ao menos N_1 pontos em $\{x_1(n'), \dots, x_j(n')\}$ tem $t^*(n')$ como um tempo hiperbólico comum. Como $t^*(n') > c$, nós temos uma contradição. Finalmente, como nós temos somente um número finito de escolhas dos N_1 pontos em $\{x_1, \dots, x_j\}$, existe ao menos uma escolha, digamos $x_{i_1}, \dots, x_{i_{N_1}}$, que se repete para infinitos números $n \geq n_0$ e tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t(n) = +\infty$. $\square$

Para cada $n \geq n_0$ como em (2.12), sejam $x_1, \dots, x_{N_1} \in H_\xi$ com um tempo hiperbólico em comum $t(n)$. Pela escolha de N_1 em (2.10), para cada $t(n)$ existem $x_{i_p}(n)$ e $x_{i_q}(n)$ pontos distintos em $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{N_1+1}}\}$ tais que $|f_{\xi_0 \dots \xi_{t(n)}}(x_{i_p}(n)) - f_{\xi_0 \dots \xi_{t(n)}}(x_{i_q}(n))| < \vartheta$. Aplicando o Lema 2.10, nós obtemos que

$$|x_{i_p}(n) - x_{i_q}(n)| < \vartheta e^{-(t(n)+1)(\chi(\mu)-2\epsilon)}.$$

Como temos somente uma quantidade finita de escolhas para $x_{i_p}(n)$ e $x_{i_q}(n)$, segue que existe ao menos uma escolha, digamos x_{i_p} e x_{i_q} , que se repete para infinitos números n . Como, além disso, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t(n) = +\infty$, segue que $x_{i_p} = x_{i_q}$. Essa contradição prova que existe $M \geq 1$ tal que $\#H_\xi \leq M$ para todo $\xi \in \Sigma_N$.

Para finalizar a prova do teorema, defina para cada $\xi \in \Pi_1(H)$

$$a_\xi := \min H_\xi \quad \text{e} \quad b_\xi := \max H_\xi.$$

Sejam

$$A := \{(\xi, a_\xi) : \xi \in \Pi_1(H)\} \quad \text{e} \quad B := \{(\xi, b_\xi) : \xi \in \Pi_1(H)\}. \quad (2.14)$$

Considerando $\Pi_1(H)$ munido da topologia induzida de Σ_N , é válida a seguinte afirmação.

Afirmação 2. $A, B \in \mathcal{B}_{\Sigma_N \times I}$.

Demonstração. Vamos mostrar que $B \in \mathcal{B}_{\Sigma_N \times I}$ (a demonstração para o conjunto A é análoga). Para tal, vamos provar que B é o gráfico de uma aplicação mensurável usando o Teorema 5.3.1 de [28]. Uma vez provado isto, o lema seguirá diretamente da Proposição 3.1.21 de [28]. Considere o espaço $(\Pi_1(H), \mathcal{B}_{\Pi_1(H)})$ e a multi-função

$$G : \Pi_1(H) \rightarrow I \quad : \quad \xi \mapsto \Pi_2(H_\xi).$$

Como H_ξ é finito para todo $\xi \in \Pi_1(H)$, é claro que G é *compact-valued*. Além disso, $\text{gr}(G) = H$. Defina agora a função v como a restrição

$$v := \Pi_2|_H : H \rightarrow I \quad : \quad (\xi, x) \mapsto x.$$

Como v é contínua, nós temos em particular que v é mensurável. Além disso, v é o limite pontual da sequência constante $v_n = v$ (uma sequência não decrescente de funções mensuráveis). Observe ainda que para cada $\xi \in \Pi_1(H)$, a função

$$v(\xi, \cdot) : H_\xi \rightarrow I \quad : \quad x \mapsto v(\xi, x) = x$$

é também contínua. Defina agora

$$v^* : \Pi_1(H) \rightarrow I \quad : \quad \xi \mapsto b_\xi = \max \{v(\xi, x) : x \in H_\xi\}.$$

Segue, do Teorema 5.3.1 de [28], que existe uma função mensurável $g : \Pi_1(H) \rightarrow I$ tal que $b_\xi = v^*(\xi) = v(\xi, g(\xi))$ para todo $\xi \in \Pi_1(H)$. Pela definição de v , nós temos que $g(\xi) = b_\xi$ para todo $\xi \in \Pi_1(H)$, de modo que $B = \text{gr}(g)$. Como g é mensurável, segue, da Proposição 3.1.21 de [28], que $B \in \mathcal{B}_{\Pi_1(H)} \otimes \mathcal{B}_I \subset \mathcal{B}_{\Pi_1(H) \times I}$. Seja então $B' \in \mathcal{B}_{\Sigma_N \times I}$ tal que $B = B' \cap (\Pi_1(H) \times I)$. Note que

$$B' \cap (\Pi_1(H) \times I) = B' \cap H. \quad (2.15)$$

De fato, como $H \subset (\Pi_1(H) \times I)$, já temos que $(B' \cap H) \subset (B' \cap (\Pi_1(H) \times I))$. Por outro lado, nós também temos que $B' \cap (\Pi_1(H) \times I) = B \subset H$. Logo, $(B' \cap (\Pi_1(H) \times I)) \subset (B' \cap H)$, o que mostra que realmente (2.15) é verdade. Por fim, como $B', H \in \mathcal{B}_{\Sigma_N \times I}$, segue que também $B \in \mathcal{B}_{\Sigma_N \times I}$. $\square$

Por fim, a monotonicidade de cada transformação $f_i, i = 1, \dots, N$, e a F -invariância de H nos garantem que também $A \cup B$ é um conjunto F -invariante. Como μ é ergódica, nós temos que $\mu(A \cup B) = 0$ ou $\mu(A \cup B) = 1$. Se $\mu(A \cup B) = 1$, basta definir

$$\varphi^- : \Pi_1(H) \rightarrow I \quad : \quad \xi \mapsto a_\xi$$

e

$$\varphi^+ : \Pi_1(H) \rightarrow I \quad : \quad \xi \mapsto b_\xi.$$

Agora, se $\mu(A \cup B) = 0$ basta considerar o conjunto $H \setminus (A \cup B)$, que tem medida μ total. Então nós definimos, de maneira análoga, dois conjuntos, digamos A_1 e B_1 , tais que

$$A_1 := \{(\xi, a_\xi^1) : \xi \in \Pi_1(H \setminus (A \cup B))\},$$

onde $a_\xi^1 := \min(H \setminus (A \cup B))_\xi$ para todo $\xi \in \Pi_1(H \setminus (A \cup B))$, e

$$B_1 := \{(\xi, b_\xi^1) : \xi \in \Pi_1(H \setminus (A \cup B))\},$$

onde $b_\xi^1 := \max(H \setminus (A \cup B))_\xi$ para todo $\xi \in \Pi_1(H \setminus (A \cup B))$. Nós então repetimos a análise anterior. Como $\#H_\xi \leq M$ para todo $\xi \in \Pi_1(H)$, em algum momento esse processo terá fim. Isso conclui a prova do teorema. $\square$

Observação. Note que na demonstração do Teorema 2.5, o mínimo e o máximo em cada fibra podem coincidir, de modo que é possível ter $\varphi^- = \varphi^+$. Note ainda que pela ergodicidade de μ , nós temos que $\#H_\xi$ é constante para $(\Pi_1)_*\mu$ -quase todo ponto $\xi \in \Pi_1(H)$. Assim, a injetividade de cada transformação na fibra nos garante que é possível obter φ^- e φ^+ de modo que ou $\varphi^- = \varphi^+$ para $(\Pi_1)_*\mu$ -quase todo ponto $\xi \in \Pi_1(H)$ ou $\varphi^- < \varphi^+$ para $(\Pi_1)_*\mu$ -quase todo ponto $\xi \in \Pi_1(H)$.

Definição 2.11. *Nós dizemos que μ tem um gráfico simples se $\varphi^- = \varphi^+$ em quase todo ponto. Caso contrário, nós dizemos que μ tem um gráfico não simples.*

Corolário 2.12. *Se μ tem um gráfico não simples então Γ^- e Γ^+ (ambos de medida positiva) são não-invariantes.*

2.3 Exemplos

Vamos nesta seção fornecer alguns exemplos que ilustram os Teoremas 2.1 e 2.5.

Exemplo 1. Suponha que as transformações $f_i, i = 1, \dots, N$, no step skew product introduzido na Definição 1.1 preservam orientação. Então a medida hiperbólica μ do Teorema 2.5 tem um gráfico simples, isto é, o

conjunto H é na verdade o gráfico de uma única função definida da sua projeção na base para a fibra. De fato, nesse caso o conjunto A definido como em (2.14) já é F -invariante, de modo que ele possui medida nula ou total. Caso ele possua medida total, o resultado está provado. No caso contrário, nós consideramos, de maneira análoga ao que foi feito na prova do Teorema 2.5, o conjunto A_1 consistindo nos pontos “mínimos” de cada fibra em $H \setminus A$ e repetimos o processo. Como $\#H_\xi \leq M$ para todo $\xi \in \Sigma_N$, em algum momento esse processo tem que parar, o que nos dá o resultado.

Considere agora, ainda no caso em que todas as transformações f_i preservam orientação, uma órbita periódica hiperbólica. Mais precisamente, considere a órbita $\mathcal{O}(\xi, p)$ de um ponto periódico (ξ, p) de período n e tal que $|(f_{\xi_0 \dots \xi_{n-1}})'(p)| \neq 1$. Então

$$\mathcal{O}(\xi, p) \text{ é um conjunto hiperbólico tal que } \#H_\omega = 1 \text{ para todo } \omega \in \Pi_1(\mathcal{O}(\xi, p)). \quad (2.16)$$

De fato, isso é óbvio no caso em que (ξ, p) é um ponto fixo. No caso em que $n \geq 2$, é suficiente mostrar que $\#H_\xi = 1$. Suponha por absurdo que isto não ocorra e seja $k > 0$ o menor inteiro tal que $f_{\xi_0 \dots \xi_{k-1}}(p) \in H_\xi$. Note que $k < n$, uma vez que (ξ, p) é um ponto periódico de período n . Suponha agora, sem perda de generalidade, que $f_{\xi_0 \dots \xi_{k-1}}(p) > p$. Como a transformação $f_{\xi_0 \dots \xi_{k-1}}$ é crescente, nós temos que $(f_{\xi_0 \dots \xi_{k-1}})^i(p) > p$ para todo $i \geq 1$. Em particular, $(f_{\xi_0 \dots \xi_{k-1}})^n(p) > p$, o que nos dá uma contradição. De maneira análoga, nós chegamos a um absurdo supondo que $f_{\xi_0 \dots \xi_{k-1}}(p) < p$. Portanto, realmente (2.16) é verdadeira.

Exemplo 2. Suponha $N = 2$ no step skew product introduzido na Definição 1.1 e sejam f_1, f_2 tais que f_1 preserva orientação e f_2 reverte. Suponha ainda que existem pontos $0 < p_1 < p_2 < 1$ tais que

$$f_1(p_1) = p_1, f_1(p_2) = p_2, f_2(p_1) = p_2 \text{ e } f_2(p_2) = p_1.$$

Então $f_{12}(p_1) = p_2$ e $f_{1212}(p_1) = p_1$, isto é, $((1212)^\mathbb{Z}, p_1)$ é ponto periódico de período 4. Por fim, suponha que $((1212)^\mathbb{Z}, p_1)$ é hiperbólico, isto é, que $|(f_{1212})'(p_1)| \neq 1$. Note que a órbita $\mathcal{O}((1212)^\mathbb{Z}, p_1)$ possui dois pontos na fibra $\{(1212)^\mathbb{Z}\} \times I$ e dois pontos na fibra $\{(2121)^\mathbb{Z}\} \times I$. Esse é portanto um exemplo de conjunto hiperbólico com dois pontos em cada fibra que ele intersecta. Mais ainda, se considerarmos a média das medidas de Dirac suportadas nos pontos de $\mathcal{O}((1212)^\mathbb{Z}, p_1)$, isto é, se considerarmos

$$\mu := \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 \delta_{F^i((1212)^\mathbb{Z}, p_1)},$$

nós teremos que o conjunto H do Teorema 2.5 (escolhido com respeito a μ) deve ser obrigatoriamente $\mathcal{O}((1212)^\mathbb{Z}, p_1)$, ou seja, este é também um exemplo no qual o conjunto H é um bi-gráfico e a medida tem um gráfico não simples.

Capítulo 3

Descrição dos atratores topológicos de um step skew product genérico

Neste capítulo nós vamos dar uma descrição dos atratores topológicos de um step skew product genérico. O Teorema 3.1, enunciado abaixo, fornece uma decomposição do espaço de fase em duplas faixas atratoras e duplas faixas repulsoras satisfazendo uma série de propriedades, dentre elas que seus atratores e repulsores maximais são bi-gráficos ossudos. No caso particular em que todas as transformações na fibra preservam orientação, as duplas faixas e os bi-gráficos são de fato faixas e gráficos, conforme resultado de Kleptsyn e Volk em [22]. Para obter a descrição no caso geral, nós vamos considerar uma extensão do nosso sistema na qual todas as transformações na fibra preservam orientação e então aplicar os resultados de Kleptsyn e Volk, seguindo uma estratégia indicada em [22]. Em seguida, mostraremos que tais resultados podem ser transportados para o nosso sistema original via um semi-conjugação.

O teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo. A definição da topologia considerada no espaço dos step skew products se encontra na Seção 3.4.

Teorema 3.1. *Dado $N \geq 1$, seja $\mathcal{S}(N)$ o conjunto de todos os step skew products como na Definição 1.1, supondo adicionalmente que $f_i(I) \subset \text{int}(I)$ para todo $i = 1, \dots, N$. Seja ainda λ_0 uma medida de Markov em Σ_N . Então existe um conjunto aberto e denso em $\mathcal{S}(N)$ tal que para todo F nesse conjunto existe uma coleção finita de duplas faixas atratoras e duplas faixas inversamente atratoras satisfazendo as seguintes propriedades.*

1. *Sua união é todo o espaço de fase;*
2. *O atrator maximal de cada dupla faixa atratora é um bi-gráfico ossudo contínuo; o repulsor maximal (isto é, o atrator maximal para a transformação inversa F^{-1}) de cada dupla faixa inversamente atratora é também um bi-gráfico ossudo contínuo;*
3. *Cada dupla faixa atratora e cada dupla faixa inversamente atratora tem uma única medida invariante*

ergódica tal que sua projeção na base é a medida de Markov λ_0 . Tal medida é o levantamento de λ_0 sobre o atrator (ou repulsor) considerado como a união dos gráficos de duas funções definidas em λ_0 -quase todo ponto $\xi \in \Sigma_N$. Esta medida é física e hiperbólica. Sua bacia contém um subconjunto de medida total na dupla faixa;

4. Para cada dupla faixa atratora, existem um subconjunto Υ de medida total (com respeito à medida do item anterior) de seu atrator maximal e um subconjunto $\Pi_1(\Upsilon) \subset \Sigma_N$ de medida λ_0 total tais que $\Pi_1 : \Upsilon \rightarrow \Pi_1(\Upsilon)$ é uma semiconjugação dois para um entre $F|_{\Upsilon}$ e $\sigma|_{\Pi_1(\Upsilon)}$.

As definições de duplas faixas e bi-gráficos ossudos serão dadas nas Seções 3.2 e 3.3, respectivamente, enquanto que o conjunto aberto e denso de step skew products será explicitado na Seção 3.4. A demonstração do teorema será feita na Seção 3.6.

Observação. Vale ressaltar que o Teorema 3.1 pode ser estendido para o caso mais geral em que λ_0 é uma medida quase-Bernoulli¹. De fato, como a demonstração do Teorema 3.1 é baseada nos resultados de [22], basta verificar que aqueles resultados também valem para medidas quase-Bernoulli. Para tal, basta notar que a propriedade de Markov somente é usada na demonstração em [22, página 20, 6.13 Proposition], que igualmente é válida no caso quase-Bernoulli. Porém, para facilitar a exposição dos nossos argumentos, vamos nos restringir ao caso Markov.

3.1 Definição do step skew product estendido

Nesta seção nós vamos construir, a partir de um step skew product no qual ao menos uma das transformações na fibra reverte orientação, um novo step skew product, que é semi-conjugado ao step skew-product inicial e no qual todas as transformações na fibra preservam orientação.

Considere F um step skew product conforme introduzido na Definição 1.1. Nós vamos supor que cada transformação na fibra f_i envia o intervalo I em seu interior, isto é, que $f_i(I) \subset \text{int}(I)$ para todo $i = 1, \dots, N$. Vamos supor ainda que existe ao menos um índice $i \in \{1, \dots, N\}$ para o qual a transformação f_i reverte orientação e vamos denotar por

$$\mathcal{I}_P := \{i \in \{1, \dots, N\} : f_i \text{ preserva orientação}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_R := \{i \in \{1, \dots, N\} : f_i \text{ reverte orientação}\}.$$

¹Uma medida λ_0 é dita *quase-Bernoulli* se existe $C \geq 1$ tal que para todos $l, m, n \in \mathbb{Z}$ com $l \leq m \leq n$ vale que $C^{-1}\lambda_0([l; \omega_l \dots \omega_n]) \leq \lambda_0([l; \omega_l \dots \omega_m])\lambda_0([m; \omega_m \dots \omega_n]) \leq C\lambda_0([l; \omega_l \dots \omega_n])$ (veja (3.10) para definição precisa de $[l; \omega_l \dots \omega_n]$). É fácil ver que qualquer medida Bernoulli, qualquer medida de Markov e qualquer medida de Gibbs são medidas quase-Bernoulli.

Considere a matriz de transição $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2N}$ dada por

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } i \in \mathcal{I}_P \text{ e } j \in \{1, \dots, N\}, \text{ ou} \\ & \text{se } i \in \mathcal{I}_R \text{ e } j \in \{N+1, \dots, 2N\}, \text{ ou} \\ & \text{se } i - N \in \mathcal{I}_P \text{ e } j \in \{N+1, \dots, 2N\}, \text{ ou} \\ & \text{se } i - N \in \mathcal{I}_R \text{ e } j \in \{1, \dots, N\}; \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Observe que a matriz A depende do step skew product F . Indique por $\Sigma_A \subset \Sigma_{2N}$ o conjunto das sequências admissíveis pela matriz A e por $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ a aplicação deslocamento restrita a Σ_A .

Lema 3.2. *A aplicação $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ é transitiva.*

Demonstração. Para provar que σ_A é transitiva, basta mostrar que para cada par $i, j \in \{1, \dots, 2N\}$ existem $n \geq 1$ e símbolos $i = k_0, k_1, \dots, k_n = j$ tais que $a_{k_l k_{l+1}} = 1$ para todo $l = 0, \dots, n-1$. Fixe então $i, j \in \{1, \dots, 2N\}$. Nós vamos considerar quatro casos.

- Suponha que $i \in \mathcal{I}_P$. Se $j \in \{1, \dots, N\}$ nós temos que $a_{ij} = 1$ pela definição da matriz A em (3.1). Agora, se $j \in \{N+1, \dots, 2N\}$ então para todo $k \in \mathcal{I}_R$ (lembre que $\mathcal{I}_R \neq \emptyset$) nós temos, da definição da matriz A , que $a_{ik} = a_{kj} = 1$.
- Suponha agora que $i \in \mathcal{I}_R$. Se $j \in \{N+1, \dots, 2N\}$, nós temos de imediato que $a_{ij} = 1$. Já no caso em que $j \in \{1, \dots, N\}$, nós temos que $a_{i(k+N)} = a_{(k+N)j} = 1$ para todo $k \in \mathcal{I}_R$.
- Suponha que $i - N \in \mathcal{I}_P$. Se $j \in \{N+1, \dots, 2N\}$, já temos que $a_{ij} = 1$. Agora, se $j \in \{1, \dots, N\}$, para todo $k \in \mathcal{I}_R$ nós temos que $a_{i(k+N)} = a_{(k+N)j} = 1$.
- Por fim, suponha que $i - N \in \mathcal{I}_R$. Se $j \in \{1, \dots, N\}$, já temos que $a_{ij} = 1$. Agora, se $j \in \{N+1, \dots, 2N\}$, então para todo $k \in \mathcal{I}_R$ vale que $a_{ik} = a_{kj} = 1$.

Como esgotamos todos os casos possíveis, está provado que σ_A é transitiva. $\square$

Nós vamos agora relacionar as aplicações deslocamento $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ e $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$. Para cada $i = 1, \dots, 2N$, escreva $\bar{i} := i \bmod N$. Defina então a aplicação

$$\pi : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_N \quad : \quad \omega \mapsto \bar{\omega}, \quad \text{onde } \bar{\omega}_n := \overline{\omega_n} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

O lema a seguir nos diz que as aplicações σ_A e σ podem ser relacionadas através da aplicação π .

Lema 3.3. *A aplicação π é uma semi-conjugação dois para um entre σ_A e σ , isto é, π é contínua, sobrejetiva, $\pi \circ \sigma_A = \sigma \circ \pi$ e cada ponto em Σ_N tem exatamente duas pré-imagens por π em Σ_A .*

Demonstração. Vejamos que π é contínua. Dados $\omega \in \Sigma_A$ e $\epsilon > 0$, escolha $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Se $\eta \in \Sigma_A$ é tal que $d(\eta, \omega) < \frac{1}{2^n}$ então $\eta_i = \omega_i$ para todo $|i| \leq n$. Isso junto com a definição de π , nos dá que $\bar{\eta}_i = \bar{\omega}_i$ para todo $|i| \leq n$, de modo que $d(\bar{\eta}, \bar{\omega}) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Logo, π é contínua.

Vejamos agora que π é sobrejetiva e dois para um. Dado $\xi \in \Sigma_N$, defina a sequência ω colocando $\omega_0 := \xi_0$ e para cada $n \geq 1$

$$\omega_n := \begin{cases} \xi_n, & \text{se } a_{\omega_{n-1}\xi_n} = 1 \\ \xi_n + N, & \text{se } a_{\omega_{n-1}(\xi_n+N)} = 1. \end{cases}$$

Já para cada $n \leq 1$, defina

$$\omega_n := \begin{cases} \xi_n, & \text{se } a_{\xi_n\omega_{n+1}} = 1 \\ \xi_n + N, & \text{se } a_{(\xi_n+N)\omega_{n+1}} = 1. \end{cases}$$

Note que a sequência ω está bem definida, $\omega \in \Sigma_A$ e $\pi(\omega) = \xi$. Defina ainda a sequência η colocando $\eta_0 := \xi_0 + N$ e para cada $n \geq 1$

$$\eta_n := \begin{cases} \xi_n, & \text{se } a_{\eta_{n-1}\xi_n} = 1 \\ \xi_n + N, & \text{se } a_{\eta_{n-1}(\xi_n+N)} = 1. \end{cases}$$

Já para cada $n \leq 1$, defina

$$\eta_n := \begin{cases} \xi_n, & \text{se } a_{\xi_n\eta_{n+1}} = 1 \\ \xi_n + N, & \text{se } a_{(\xi_n+N)\eta_{n+1}} = 1. \end{cases}$$

Note que a sequência η também está bem definida, $\eta \in \Sigma_A$ e $\pi(\eta) = \xi$. Isso prova que π é sobrejetiva, e como, pela definição da matriz A , essas são as únicas duas maneiras de se obter sequências em Σ_A cuja imagem por π é a sequência ξ , também podemos concluir que π é dois para um.

Resta ver que $\pi \circ \sigma_A = \sigma \circ \pi$. Dado $\omega = (\omega_n)_n \in \Sigma_A$, nós temos que

$$\pi(\sigma_A(\omega)) = \pi((\omega_{n+1})_n) = (\overline{\omega_{n+1}})_n = \sigma((\overline{\omega_n})_n) = \sigma(\pi(\omega)).$$

Isso conclui a prova do lema. □

Observação. Note que se denotarmos por

$$C := \{\omega \in \Sigma_A : \omega_0 \in \{1, \dots, N\}\}, \quad (3.3)$$

a demonstração do Lema 3.3 nos dá que $\pi|_C$ e $\pi|_{\Sigma_A \setminus C}$ são bijeções sobre Σ_N , porém não é verdade que $\sigma_A(C) \subset C$ nem que $\sigma_A(\Sigma_A \setminus C) \subset \Sigma_A \setminus C$.

Vamos agora definir o step skew product estendido, conforme anunciamos no princípio desta seção. Considere inicialmente a *função reversão*

$$R : I \rightarrow I \quad : \quad x \mapsto 1 - x.$$

Definição 3.4. *Seja F um step skew product como introduzido na Definição 1.1. Nós definimos o step skew product estendido (com respeito a F) como sendo a transformação*

$$G : \Sigma_A \times I \rightarrow \Sigma_A \times I \quad : \quad (\omega, x) \mapsto (\sigma_A(\omega), g_{\omega_0}(x)), \quad (3.4)$$

onde

$$g_i = f_i \quad e \quad g_{i+N} = R \circ f_i \circ R \quad \text{para cada } i \in \mathcal{I}_P$$

e

$$g_i = R \circ f_i \quad e \quad g_{i+N} = f_i \circ R \quad \text{para cada } i \in \mathcal{I}_R.$$

Desde agora até o final do capítulo, exceto em parte da Seção 3.4, o step skew product F estará fixado e G denotará a extensão de F dada pela Definição 3.4.

Note que no skew product G todas as transformações na fibra são difeomorfismos de classe C^1 sobre a sua imagem que enviam o intervalo I em seu interior e que preservam orientação. Note ainda que como as transformações na fibra de G foram definidas a partir das transformações na fibra de F e já temos o Lema 3.3, é natural esperar uma forte relação entre esses dois step skew products. Essa relação de fato existe e pode ser obtida através da aplicação

$$\Pi : \Sigma_A \times I \rightarrow \Sigma_N \times I \quad : \quad (\omega, x) \mapsto \begin{cases} (\bar{\omega}, x), & \text{se } \omega \in C \\ (\bar{\omega}, R(x)), & \text{se } \omega \in \Sigma_A \setminus C, \end{cases}$$

onde C é o conjunto definido em (3.3). As restrições $\Pi|_{C \times I}$ e $\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}$ são bijeções sobre $\Sigma_N \times I$. Mais ainda, nós temos o seguinte lema.

Lema 3.5. *A aplicação Π é uma semi-conjugação dois para um entre G e F .*

Demonstração. A demonstração segue do Lema 3.3. Com efeito, para ver que Π é contínua, basta notar que as aplicações π (definida em (3.2)), R e $id|_I$ são contínuas e que os conjuntos $C \times I$ e $(\Sigma_A \setminus C) \times I$ são abertos. O fato de Π ser sobrejetiva e dois para um segue diretamente do fato de π ser sobrejetiva e dois para um. Resta ver que $\Pi \circ G = F \circ \Pi$. Seja $(\omega, x) \in \Sigma_A \times I$. Nós vamos considerar quatro casos.

- Se $\omega \in C$ e $\omega_0 \in \mathcal{I}_P$ então $g_{\omega_0} = f_{\omega_0}$, de modo que

$$\Pi \circ G((\omega, x)) = \Pi(\sigma_A(\omega), f_{\omega_0}(x)).$$

Como além disso $\sigma_A(\omega) \in C$ nesse caso, nós temos, pela igualdade acima e pela definição de Π , que

$$\Pi \circ G((\omega, x)) = (\overline{\sigma_A(\omega)}, f_{\omega_0}(x)).$$

Usando o Lema 3.3 e novamente que $\omega \in C$, a última igualdade nos dá que

$$\Pi \circ G((\omega, x)) = (\sigma(\bar{\omega}), f_{\bar{\omega}_0}(x)) = F((\bar{\omega}, x)) = F \circ \Pi((\omega, x)).$$

- Se $\omega \in C$ e $\omega_0 \in \mathcal{I}_R$ então $\sigma_A(\omega) \in \Sigma_A \setminus C$. Nesse caso, de maneira análoga nós obtemos que

$$\Pi \circ G((\omega, x)) = \Pi(\sigma_A(\omega), R(f_{\omega_0}(x))) = (\overline{\sigma_A(\omega)}, f_{\omega_0}(x)) = (\sigma(\bar{\omega}), f_{\bar{\omega}_0}(x)) = F((\bar{\omega}, x)) = F \circ \Pi((\omega, x)).$$

- Se $\omega \in \Sigma_A \setminus C$ e $\omega_0 \in \mathcal{I}_P$ então $g_{\omega_0} = R \circ f_{\bar{\omega}_0} \circ R$, de modo que

$$\Pi \circ G((\omega, x)) = \Pi(\sigma_A(\omega), R(f_{\bar{\omega}_0}(R(x)))).$$

Como além disso, $\sigma_A(\omega) \in \Sigma_A \setminus C$ nesse caso, nós obtemos, da mesma forma que nos casos anteriores, que

$$\Pi \circ G((\omega, x)) = (\overline{\sigma_A(\omega)}, f_{\bar{\omega}_0}(R(x))) = (\sigma(\bar{\omega}), f_{\bar{\omega}_0}(R(x))) = F((\bar{\omega}, R(x))) = F \circ \Pi((\omega, x)).$$

- Por fim, se $\omega \in \Sigma_A \setminus C$ e $\omega_0 - N \in \mathcal{I}_R$ então $\sigma_A(\omega) \in C$. Nesse caso,

$$\Pi \circ G((\omega, x)) = \Pi(\sigma_A(\omega), f_{\overline{\omega_0}}(R(x))) = (\overline{\sigma_A(\omega)}, f_{\overline{\omega_0}}(R(x))) = (\sigma(\overline{\omega}), f_{\overline{\omega_0}}(R(x))) = F \circ \Pi((\omega, x)).$$

Como nós esgotamos todos os casos possíveis, segue que $\Pi \circ G = F \circ \Pi$. Isso conclui a prova do lema. $\square$

Observação. Observe que combinando os Lemas 3.3, 3.5 e a Proposição 2.2, nós temos que $h_{top}(G) = h_{top}(F)$ e $h_{top}(\sigma_A) = h_{top}(\sigma)$.

Para finalizar a seção, nós vamos relacionar os conjuntos invariantes maximais de F e G . Para tal, denote por Γ o conjunto invariante maximal de G , isto é,

$$\Gamma := \bigcap_{n \geq 0} G^n(\Sigma_A \times I).$$

Assim como em (1.3), nós podemos escrever

$$\Gamma = \bigcup_{\omega \in \Sigma_A} \{\omega\} \times I_\omega,$$

onde, para cada $\omega \in \Sigma_A$,

$$I_\omega := \bigcap_{n \geq 1} g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(I).$$

Seguindo as notações introduzidas em (1.5), nós vamos denotar por

$$\Pi_1^A : \Sigma_A \times I \rightarrow \Sigma_A \quad : \quad (\omega, x) \mapsto \omega \quad \text{e} \quad \Pi_2^A : \Sigma_A \times I \rightarrow I \quad : \quad (\omega, x) \mapsto x \quad (3.5)$$

as projeções de $\Sigma_A \times I$ sobre Σ_A e sobre I , respectivamente. Temos então a seguinte relação.

Lema 3.6. *Para cada $\omega \in C$ nós temos que $I_\omega = I_{\overline{\omega}}$, e para cada $\omega \in \Sigma_A \setminus C$ nós temos que $I_\omega = R(I_{\overline{\omega}})$.*

Demonstração. Fixe $\omega \in C$. Nós devemos mostrar que $g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(I) = f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(I)$ para todo $n \geq 1$. Note inicialmente que para cada $n \geq 1$,

$$g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(I) = \Pi_2^A(G^n(\{\sigma^{-n}(\omega)\} \times I)). \quad (3.6)$$

Agora, como $\omega \in C$, o Lema 3.5 nos dá que

$$\Pi_2^A(G^n(\{\sigma^{-n}(\omega)\} \times I)) = \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(F^n(\Pi(\{\sigma^{-n}(\omega)\} \times I))). \quad (3.7)$$

Juntando (3.6) e (3.7), nós obtemos que

$$g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(I) = \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(F^n(\Pi(\{\sigma^{-n}(\omega)\} \times I))).$$

Usando que $R(I) = I$ e as definições de Π , de F e de $(\Pi|_{C \times I})^{-1}$, nós obtemos ainda, pela última igualdade, que

$$\begin{aligned} g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(I) &= \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(F^n(\{\overline{\sigma^{-n}(\omega)}\} \times I))) \\ &= \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(\{\overline{\omega}\} \times (f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(I)))) \\ &= \Pi_2^A(\{\omega\} \times (f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(I))). \end{aligned}$$

Por fim, usando a definição de Π_2^A , nós obtemos da igualdade acima que

$$g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(I) = f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(I),$$

conforme queríamos. Como isso vale para todo $n \geq 1$, segue que $I_\omega = I_{\overline{\omega}}$ no caso em que $\omega \in C$. Fixe agora $\omega \in \Sigma_A \setminus C$. Para cada $n \geq 1$, da mesma forma que no caso anterior, nós temos que

$$\begin{aligned} g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(I) &= \Pi_2^A(G^n(\{\sigma^{-n}(\omega)\} \times I)) \\ &= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(F^n(\Pi(\{\sigma^{-n}(\omega)\} \times I)))) \\ &= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(F^n(\{\overline{\sigma^{-n}(\omega)}\} \times I))) \\ &= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(\{\overline{\omega}\} \times (f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(I)))) \\ &= \Pi_2^A(\{\omega\} \times (R(f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(I)))) \\ &= R(f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(I)). \end{aligned}$$

Novamente, como isso vale para todo $n \geq 1$, segue que $I_\omega = R(I_{\overline{\omega}})$ também no caso em que $\omega \in \Sigma_A \setminus C$. Isso conclui a prova do lema. $\square$

3.2 Faixas, atratores e repulsores

Nesta seção nós vamos definir os conceitos de faixa e dupla faixa atratora e faixa e dupla faixa repulsora em um step skew product. Vamos também mostrar que faixas atradoras (repulsoras) associadas ao step skew product G correspondem a duplas faixas atradoras (repulsoras) associadas ao step skew product F . De agora em diante, nós vamos escrever Σ quando quisermos nos referir a qualquer um dos espaços Σ_A ou Σ_N , e vamos denotar as projeções naturais por

$$\Pi_1 : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma \quad \text{e} \quad \Pi_2 : \Sigma \times I \rightarrow I.$$

Esta notação também vem sendo utilizada para as projeções no caso em que $\Sigma = \Sigma_N$ (veja (1.5)). Porém, não haverá risco de confusão porque sempre estará claro no contexto se estamos considerando este caso particular ou o caso geral (o espaço Σ).

Definição 3.7. *Sejam $\varphi, \psi : \Sigma \rightarrow I$ duas funções. Nós dizemos que φ é menor do que ψ e escrevemos $\varphi < \psi$ quando*

$$\varphi(\omega) < \psi(\omega) \quad \text{para todo } \omega \in \Sigma.$$

Se $\varphi < \psi$, nós definimos a faixa entre os gráficos de φ e ψ por

$$S_{\varphi, \psi} := \{(\omega, x) \in \Sigma \times I : \varphi(\omega) \leq x \leq \psi(\omega)\}.$$

Nós dizemos que uma faixa $S_{\varphi, \psi}$ é atratora com respeito a um step skew product $H : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma \times I$ quando

$$H(S_{\varphi, \psi}) \subset \text{int}(S_{\varphi, \psi}),$$

e é inversamente atratora com respeito a H quando

$$H^{-1}(S_{\varphi,\psi}) \subset \text{int}(S_{\varphi,\psi})$$

sempre que a transformação inversa de H estiver bem definida.

Definição 3.8. Um subconjunto $S \subset \Sigma \times I$ é dito uma dupla faixa se S pode ser decomposto como uma união do tipo $S = S_{\varphi_1,\psi_1} \cup S_{\varphi_2,\psi_2}$, onde S_{φ_j,ψ_j} são faixas entre os gráficos de φ_j e ψ_j para $j = 1, 2$. Uma dupla faixa S é dita atratora com respeito a um step skew product $H : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma \times I$ quando

$$H(S) \subset \text{int}(S),$$

e é dita inversamente atratora (com respeito a H) quando

$$H^{-1}(S) \subset \text{int}(S)$$

sempre que a transformação inversa de H estiver bem definida.

Observe que na definição de dupla faixa nós não exigimos a condição $\psi_1 < \varphi_2$ ou $\psi_2 < \varphi_1$. Entretanto, na prática, nós trabalharemos com duplas faixas que satisfazem uma dessas duas condições. O seguinte lema nos diz que faixas associadas ao step skew product G correspondem a duplas faixas associadas ao step skew product F .

Lema 3.9. Se S é uma faixa atratora com respeito a G então $\Pi(S)$ é uma dupla faixa atratora com respeito a F . Analogamente, se S é uma faixa inversamente atratora com respeito a G então F^{-1} está bem definida em $\Pi(S)$ e $\Pi(S)$ é uma dupla faixa inversamente atratora com respeito a F .

Demonstração. Vamos inicialmente provar duas afirmações auxiliares.

Afirmção 1. Se $(\omega, x) \in C \times I$ e $0 < \epsilon < 1$ então

$$\Pi(B_\epsilon(\omega) \times B_\epsilon(x)) = B_\epsilon(\bar{\omega}) \times B_\epsilon(x). \quad (3.8)$$

Se $(\omega, x) \in (\Sigma_A \setminus C) \times I$ e $0 < \epsilon < 1$ então

$$\Pi(B_\epsilon(\omega) \times B_\epsilon(x)) = B_\epsilon(\bar{\omega}) \times R(B_\epsilon(x)). \quad (3.9)$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $(\omega, x) \in C \times I$ e seja $(\tau, q) \in \Pi(B_\epsilon(\omega) \times B_\epsilon(x))$. Então existe $(\eta, y) \in B_\epsilon(\omega) \times B_\epsilon(x)$ tal que $\Pi((\eta, y)) = (\tau, q)$. Como $0 < \epsilon < 1$, nós temos que $\eta_0 = \omega_0$, de modo que $\eta \in C$. Assim, $(\tau, q) = \Pi((\eta, y)) = (\bar{\eta}, y)$. Como $d(\eta, \omega) < \epsilon$, é imediato que $d(\bar{\eta}, \bar{\omega}) < \epsilon$. Logo, $(\tau, q) \in B_\epsilon(\bar{\omega}) \times B_\epsilon(x)$, donde segue que $\Pi(B_\epsilon(\omega) \times B_\epsilon(x)) \subset B_\epsilon(\bar{\omega}) \times B_\epsilon(x)$. Seja agora $(\tau, q) \in B_\epsilon(\bar{\omega}) \times B_\epsilon(x)$. Pela demonstração do Lema 3.3, existe uma única sequência $\eta \in C$ tal que $\bar{\eta} = \tau$. Seja $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^{n+1}} < \epsilon \leq \frac{1}{2^n}$. Então $\tau_k = \bar{\omega}_k$ para todo $|k| \leq n$. Como $\eta, \omega \in C$ e $\bar{\eta} = \tau$, segue, da demonstração do Lema 3.3, que também $\eta_k = \omega_k$ para todo $|k| \leq n$. Logo, $d(\eta, \omega) < \epsilon$. Como $\Pi((\eta, q)) = (\tau, q)$, segue que $(\tau, q) \in \Pi(B_\epsilon(\omega) \times B_\epsilon(x))$. Logo, $B_\epsilon(\bar{\omega}) \times B_\epsilon(x) \subset \Pi(B_\epsilon(\omega) \times B_\epsilon(x))$, de modo que (3.8) é de fato verdadeira. A igualdade em (3.9) se prova de maneira análoga. $\square$

Afirmação 2. $\Pi(\text{int}(S)) \subset \text{int}(\Pi(S))$.

Demonstração. De fato, se $(\xi, z) \in \Pi(\text{int}(S))$ então existe $(\omega, x) \in \text{int}(S)$ tal que $(\xi, z) = \Pi((\omega, x))$. Como $(\omega, x) \in \text{int}(S)$, existe $0 < \epsilon < 1$ tal que $(B_\epsilon(\omega) \times B_\epsilon(x)) \subset S$, de modo que também $\Pi(B_\epsilon(\omega) \times B_\epsilon(x)) \subset \Pi(S)$. Como $\epsilon < 1$, se $\eta \in B_\epsilon(\omega)$ então $\eta_0 = \omega_0$. Dessa forma, pela Afirmação 1,

$$(\xi, z) \in \Pi((B_\epsilon(\omega) \times B_\epsilon(x))) = \begin{cases} B_\epsilon(\bar{\omega}) \times B_\epsilon(x), & \text{se } \omega \in C \\ B_\epsilon(\bar{\omega}) \times R(B_\epsilon(x)), & \text{se } \omega \in \Sigma_A \setminus C. \end{cases}$$

Assim, tanto no caso em que $\omega \in C$ quanto no caso contrário, nós temos que (ξ, z) está em um aberto contido em $\Pi(S)$. Logo, $(\xi, z) \in \text{int}(\Pi(S))$. $\square$

Suponha que S é uma faixa atratora com respeito a G . Pelo Lema 3.5 e pela Afirmção 2,

$$F(\Pi(S)) = \Pi(G(S)) \subset \Pi(\text{int}(S)) \subset \text{int}(\Pi(S)).$$

Suponha agora que S é uma faixa inversamente atratora com respeito a G e seja $(\xi, z) \in \Pi(S)$. Então existe $(\omega, x) \in S$ tal que $(\xi, z) = \Pi((\omega, x))$. Como S é inversamente atratora, nós temos em particular que $(\omega, x) \in G(\Sigma_A \times I)$. Daí, segue que

$$(\xi, z) = \Pi((\omega, x)) \in \Pi(G(\Sigma_A \times I)) = F(\Pi(\Sigma_A \times I)) = F(\Sigma_N \times I).$$

Isso mostra que F^{-1} está bem definida em $\Pi(S)$. Já para ver que $\Pi(S)$ é também inversamente atratora, basta notar que, novamente pelo Lema 3.5 e pela Afirmção 2,

$$F^{-1}(\Pi(S)) = \Pi(G^{-1}(S)) \subset \Pi(\text{int}(S)) \subset \text{int}(\Pi(S)).$$

Isso conclui a prova do lema. $\square$

Seja $S \subset \Sigma \times I$ uma faixa (ou uma dupla faixa) atratora com respeito a um step skew product H . Nós podemos definir de maneira natural o *atrator maximal de S* como o conjunto

$$A_{\max}(S) := \bigcap_{n \geq 0} H^n(\Sigma \times I).$$

De maneira análoga, se $S \subset \Sigma \times I$ é uma faixa (ou uma dupla faixa) inversamente atratora com respeito a um step skew product H , nós definimos o *repulsor maximal de S* como o atrator maximal de S com respeito à transformação H^{-1} . O lema abaixo nos garante que também é possível relacionar os atratores (ou repulsores) maximais de faixas correspondentes nos step skew products F e G .

Lema 3.10. *Se $S \subset \Sigma_A \times I$ é uma faixa atratora com respeito ao step skew product G e B é o seu atrator maximal, então $\Pi(B)$ é o atrator maximal da dupla faixa $\Pi(S)$ (atratora com respeito ao step skew product F). Da mesma forma, se $S \subset \Sigma_A \times I$ é uma faixa inversamente atratora com respeito ao step skew product G e B é o seu repulsor maximal, então $\Pi(B)$ é o repulsor maximal da dupla faixa inversamente atratora $\Pi(S)$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $S \subset \Sigma_A \times I$ é uma faixa atratora com respeito a G .

Afirmção 1. $\bigcap_{n \geq 0} \Pi(G^n(S)) = \Pi\left(\bigcap_{n \geq 0} (G^n(S))\right)$.

Demonstração. Como é sempre verdade que $\Pi(\bigcap_{n \geq 0} (G^n(S))) \subset \bigcap_{n \geq 0} \Pi(G^n(S))$, basta mostrar a outra inclusão. Seja $b \in \bigcap_{n \geq 0} \Pi(G^n(S))$. Então, para cada $n \geq 0$, existe $a_n \in G^n(S)$ tal que $b = \Pi(a_n)$. Como $\Sigma_A \times I$ é compacto, podemos escolher uma subsequência (a_{n_k}) de (a_n) tal que (a_{n_k}) converge para algum $a \in \Sigma_A \times I$. Note que $a \in \bigcap_{n \geq 0} G^n(S)$. De fato, como S é uma faixa atratora, nós temos que $G^{n+1}(S) \subset G^n(S)$ para todo $n \geq 0$. Dessa forma, a subsequência $(a_{n_k})_{k \geq k_0}$ está contida em $G^{k_0}(S)$ para todo $k_0 \in \mathbb{N}$. Como S é em particular um conjunto fechado, a continuidade de G e a compacidade de $\Sigma_A \times I$ nos dão que $G^{k_0}(S)$ é também um conjunto fechado. Logo $a \in G^{k_0}(S)$ para todo $k_0 \in \mathbb{N}$. Usando novamente que as faixas são encaixadas, nós temos que $a \in \bigcap_{n \geq 0} G^n(S)$, e usando mais uma vez que Π é contínua, nós temos que

$$\Pi(a) = \Pi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi(a_{n_k}) = b.$$

Logo, $b \in \Pi(\bigcap_{n \geq 0} (G^n(S)))$, o que prova que

$$\bigcap_{n \geq 0} \Pi(G^n(S)) \subset \Pi\left(\bigcap_{n \geq 0} (G^n(S))\right).$$

Isso conclui a prova da afirmação. $\square$

Juntando a Afirmção 1 com o Lema 3.5, nós obtemos que

$$\bigcap_{n \geq 0} F^n(\Pi(S)) = \bigcap_{n \geq 0} \Pi(G^n(S)) = \Pi\left(\bigcap_{n \geq 0} (G^n(S))\right) = \Pi(B).$$

Isso prova que $\Pi(B)$ é o atrator maximal de $\Pi(S)$. A prova no caso em que S é inversamente atratora é análoga. $\square$

3.3 Medidas estendidas

Vamos nesta seção comparar medidas no espaço Σ_A com medidas em Σ_N . Vamos também mostrar que existe uma simetria entre certas medidas estacionárias ergódicas para o processo de Markov induzido por G . Vamos ainda definir gráficos ossudos e bi-gráficos ossudos nos espaços do tipo $\Sigma \times I$ e comparar a existência deles em $\Sigma_A \times I$ e $\Sigma_N \times I$. Por fim, nós vamos mostrar que uma medida física e hiperbólica com respeito a G projeta para uma medida física e hiperbólica com respeito a F .

Fixemos inicialmente as seguintes notações. Para cada $n \geq m \in \mathbb{Z}$ e para cada $\omega_m \dots \omega_n$ sequência finita, nós denotaremos o *cilindro associado a $\omega_m \dots \omega_n$* por

$$[m; \omega_m \dots \omega_n] := \{\eta \in \Sigma : \eta_i = \omega_i \text{ para todo } i = m, \dots, n\}. \quad (3.10)$$

Além disso, dada uma medida de Markov λ em Σ_A (veja, por exemplo, [31, Chapter 1, §1.1]), nós indicaremos por $(p_1, p_2, \dots, p_{2N})$ o vetor de probabilidades associado a λ e por $(P_{ij})_{i,j=1}^{2N}$ a matriz estocástica associada a λ .

Definição 3.11. Uma medida de Markov λ em Σ_A será dita simétrica se $p_i = p_{i+N}$, $P_{ij} = P_{(i+N)(j+N)}$ e $P_{i(j+N)} = P_{(i+N)j}$ para todos $i, j = 1, \dots, N$.

Note que pela definição da matriz A (ver (3.1)), se λ é uma medida de Markov em Σ_A então $P_{ij} = 0$ ou $P_{i(j+N)} = 0$ para todos $i, j = 1, \dots, N$.

Definição 3.12. Seja λ uma medida de Markov simétrica em Σ_A . Nós definimos a projeção de λ sobre Σ_N como sendo a medida de Markov $\bar{\lambda}$ (segundo aqui a notação introduzida em (3.2)) para a qual

$$\bar{p}_i := 2p_i \quad e \quad \bar{P}_{ij} := \max \{P_{ij}, P_{i(j+N)}\} \quad \text{para cada } i, j = 1, \dots, N, \quad (3.11)$$

onde $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_N)$ denota o vetor de probabilidades associado à medida $\bar{\lambda}$ e $(\bar{P}_{ij})_{i,j=1}^{2N}$ denota a matriz estocástica associada a $\bar{\lambda}$.

O nome projeção de λ sobre Σ_N é motivado pela relação entre λ e $\bar{\lambda}$ descrita no lema abaixo.

Lema 3.13. Se λ é uma medida de Markov simétrica em Σ_A então a projeção de λ sobre Σ_N satisfaz $\bar{\lambda} = \pi_* \lambda$.

Demonstração. Basta mostrar a igualdade nos cilindros. Dado $[m; \xi_m \dots \xi_n] \subset \Sigma_N$, nós temos que

$$\begin{aligned} \pi_* \lambda([m; \xi_m \dots \xi_n]) &= \lambda(\pi^{-1}([m; \xi_m \dots \xi_n])) \\ &= \lambda((\pi|_C)^{-1}([m; \xi_m \dots \xi_n])) + \lambda((\pi|_{\Sigma_A \setminus C})^{-1}([m; \xi_m \dots \xi_n])). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note agora que pela definição da matriz A , $(\pi|_C)^{-1}([m; \xi_m \dots \xi_n])$ e $(\pi|_{\Sigma_A \setminus C})^{-1}([m; \xi_m \dots \xi_n])$ são cilindros em Σ_A da forma $[m; \omega_m \dots \omega_n]$ e $[m; \eta_m \dots \eta_n]$, respectivamente. Além disso,

$$\omega_k = \xi_k \Leftrightarrow \eta_k = \xi_{k+N} \quad \text{para todo } k = m, \dots, n,$$

do mesmo modo que

$$\omega_k = \xi_{k+N} \Leftrightarrow \eta_k = \xi_k \quad \text{para todo } k = m, \dots, n.$$

Assim, a simetria da medida λ nos dá que

$$\begin{aligned} \lambda((\pi|_C)^{-1}([m; \xi_m \dots \xi_n])) &= p_{\omega_m} P_{\omega_m \omega_{m+1}} \dots P_{\omega_{n-1} \omega_n} \\ &= p_{\eta_m} P_{\eta_m \eta_{m+1}} \dots P_{\eta_{n-1} \eta_n} \\ &= \lambda((\pi|_{\Sigma_A \setminus C})^{-1}([m; \xi_m \dots \xi_n])). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Note ainda que $\overline{P_{\xi_m \xi_{m+1}}} = P_{\omega_m \omega_{m+1}}$ pela definição de $\bar{\lambda}$, pois $\omega_m \in \{1, \dots, N\}$ e $P_{\omega_m \eta_{m+1}} = 0$. Vejamos que também

$$\overline{P_{\xi_{m+1} \xi_{m+2}}} = P_{\omega_{m+1} \omega_{m+2}}.$$

De fato, se $\omega_{m+1} \in \{1, \dots, N\}$ então isso segue diretamente da definição de $\bar{\lambda}$, visto que $P_{\omega_{m+1} \eta_{m+2}} = 0$. Agora, se $\omega_{m+1} \in \{N+1, \dots, 2N\}$ então pela definição de $\bar{\lambda}$, nós temos que $\overline{P_{\xi_{m+1} \xi_{m+2}}} = P_{\eta_{m+1} \eta_{m+2}}$, visto que $\eta_{m+1} \in \{1, \dots, N\}$ e $P_{\eta_{m+1} \omega_{m+2}} = 0$. Mas como a simetria de λ nos dá que $P_{\eta_{m+1} \eta_{m+2}} = P_{\omega_{m+1} \omega_{m+2}}$, segue que, também nesse caso, $\overline{P_{\xi_{m+1} \xi_{m+2}}} = P_{\omega_{m+1} \omega_{m+2}}$. De maneira análoga, mostra-se que

$$\overline{P_{\xi_j \xi_{j+1}}} = P_{\omega_j \omega_{j+1}} \quad \text{para todo } j = m, \dots, n-1. \quad (3.14)$$

Por fim, note que a simetria de λ também nos dá que $\overline{p_{\xi_m}} = p_{\omega_m} = p_{\eta_m}$. Juntando isso com (3.12), (3.13) e (3.14), nós temos que

$$\begin{aligned}\pi_*\lambda([m; \xi_m \dots \xi_n]) &= 2\overline{p_{\xi_m} P_{\xi_m \xi_{m+1}} \dots P_{\xi_{n-1} \xi_n}} \\ &= \overline{\lambda}([m; \xi_m \dots \xi_n]).\end{aligned}$$

Isso conclui a prova do lema. $\square$

A fim de estabelecer uma correspondência entre medidas de Markov em Σ_N e medidas de Markov simétricas em Σ_A , vamos considerar ainda a seguinte definição.

Definição 3.14. *Seja λ_0 uma medida de Markov em Σ_N com vetor de probabilidades $(q_1, \dots, q_N)$ e matriz estocástica $(Q_{ij})_{i,j=1}^N$. Nós definimos a extensão de λ_0 para Σ_A como sendo a medida de Markov simétrica λ em Σ_A para a qual*

$$p_i = p_{i+N} := \frac{q_i}{2},$$

$$P_{ij} = P_{(i+N)(j+N)} := \begin{cases} Q_{ij}, & \text{se } a_{ij} > 0; \\ 0, & \text{se } a_{ij} = 0, \end{cases}$$

e

$$P_{i(j+N)} = P_{(i+N)j} := \begin{cases} Q_{ij}, & \text{se } a_{ij} = 0; \\ 0, & \text{se } a_{ij} > 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

para cada $i, j = 1, \dots, N$.

O nome extensão de λ_0 para Σ_A é motivado pelo fato que a projeção da medida λ (extensão de λ_0) sobre Σ_N é exatamente a medida λ_0 , isto é,

$$\overline{\lambda} = \lambda_0. \quad (3.16)$$

Temos assim uma correspondência um a um entre medidas de Markov em Σ_N e medidas de Markov simétricas em Σ_A . O lema a seguir nos dá ainda outra relação entre medidas de Markov correspondentes em Σ_A e Σ_N .

Lema 3.15. *Sejam λ_0 uma medida de Markov em Σ_N e λ a extensão de λ_0 para Σ_A . Seja ainda μ uma medida invariante e ergódica para o step skew-product G tal que $\lambda = (\Pi_1^A)_*\mu$. Então $\Pi_*\mu$ é invariante e ergódica para o step skew-product F e $\lambda_0 = (\Pi_1)_*(\Pi_*\mu)$.*

Demonstração. Vejamos inicialmente que $\Pi_*\mu$ é F -invariante. De fato, se $E \in \mathcal{B}_{\Sigma_N \times I}$ então a invariância de μ por G junto com o Lema 3.5 nos dá que

$$\Pi_*\mu(F^{-1}(E)) = \mu(\Pi^{-1}(F^{-1}(E))) = \mu(G^{-1}(\Pi^{-1}(E))) = \mu(\Pi^{-1}(E)) = \Pi_*\mu(E).$$

Logo, $\Pi_*\mu$ é F -invariante. Vejamos agora que $\Pi_*\mu$ é também ergódica. De fato, se $E \in \mathcal{B}_{\Sigma_N \times I}$ é tal que $F^{-1}(E) = E$ então

$$G^{-1}(\Pi^{-1}(E)) = \Pi^{-1}(F^{-1}(E)) = \Pi^{-1}(E),$$

o que implica $\mu(\Pi^{-1}(E)) = 0$ ou $\mu(\Pi^{-1}(E)) = 1$, visto que μ é ergódica com respeito a G . Logo, $\Pi_*\mu(E) = 0$ ou $\Pi_*\mu(E) = 1$, o que prova que $\Pi_*\mu$ é ergódica.

Por fim, vejamos que $(\Pi_1)_*(\Pi_*\mu) = \lambda_0$. Com efeito, note inicialmente que

$$\pi \circ \Pi_1^A = \Pi_1 \circ \Pi. \quad (3.17)$$

De fato, dado $(\omega, x) \in \Sigma_A \times I$ nós temos que

$$\pi(\Pi_1^A((\omega, x))) = \pi(\omega) = \bar{\omega} = \pi_1(\Pi((\omega, x))).$$

Agora se $D \in \mathcal{B}_{\Sigma_N}$ então (3.16), (3.17), o Lema 3.13 e o fato de $(\Pi_1^A)_*\mu$ ser igual a λ nos dão que

$$(\Pi_1)_*(\Pi_*\mu)(D) = \mu(\Pi^{-1}(\Pi_1^{-1}(D))) = \mu((\Pi_1^A)^{-1}(\pi^{-1}(D))) = \lambda(\pi^{-1}(D)) = \lambda_0(D).$$

Isso conclui a prova do lema. $\square$

Nós vamos agora fazer algumas considerações sobre medidas estacionárias para o processo de Markov induzido por G . Vamos mostrar uma simetria entre algumas dessas medidas, o que é natural visto que as transformações na fibra do step skew product G apresentam também uma certa simetria. Considerar medidas estacionárias aqui é importante porque as duplas faixas obtidas no Teorema 3.1, principal resultado deste capítulo, estão intimamente relacionadas com o suporte de medidas estacionárias ergódicas para o processo induzido por G .

Fixe λ uma medida de Markov simétrica em Σ_A e considere o processo de Markov em $\{1, \dots, 2N\} \times I$ induzido pelo step skew product G e pela medida λ .

Definição 3.16. *Uma probabilidade de Borel μ em $\{1, \dots, 2N\} \times I$ é dita estacionária para o processo de Markov induzido por G se*

$$\mu_i(E) = (g_*\mu)_i(E) := \sum_{j=1}^{2N} P_{ji}\mu_j(g_j^{-1}(E)) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}_I \text{ e para todo } i = 1, \dots, 2N,$$

onde μ_i denota a restrição $\mu|_{\{i\} \times I}$ (a fibra $\{i\} \times I$ é aqui naturalmente identificada com o intervalo I) e $(P_{ji})_{j,i=1}^{2N}$ denota a matriz estocástica associada à medida λ .

Seja $s : \{1, \dots, 2N\} \rightarrow \{1, \dots, 2N\}$ dada por

$$s(i) := \begin{cases} i + N & \text{se } i \in \{1, \dots, N\} \\ i - N & \text{se } i \in \{N + 1, \dots, 2N\}. \end{cases}$$

Definição 3.17. *Dada uma probabilidade de Borel μ no espaço produto $\{1, \dots, 2N\} \times I$, nós definimos a medida simétrica de μ como sendo a medida μ' em $\{1, \dots, 2N\} \times I$ dada por*

$$\mu'(D \times E) := \mu(s(D) \times R(E)) \quad \text{para todos } D \in \mathcal{B}_{\{1, \dots, 2N\}} \text{ e } E \in \mathcal{B}_I \quad (3.18)$$

e que pode ser estendida a $\mathcal{B}_{\{1, \dots, 2N\} \times I}$ pelo Teorema de Extensão de Carathéodory (ver [11, 1.14 Theorem]).

A fim de evitar uma possível confusão, vale ressaltar que na Definição 3.11 nós introduzimos o conceito de medida simétrica em Σ_A , enquanto aqui estamos definindo a medida simétrica em relação a uma probabilidade de Borel μ fixada em $\{1, \dots, 2N\} \times I$.

Lema 3.18. *Seja μ uma medida estacionária para o processo de Markov induzido por G . Então a medida simétrica de μ é uma medida estacionária para o mesmo processo. Mais ainda, se μ é ergódica então sua medida simétrica também o é.*

Demonstração. Assim como na Definição (3.17), nós vamos denotar por μ' a medida simétrica de μ . Vejamos inicialmente que se μ é estacionária então μ' também o é. Note que pela definição das funções g_j e pelo fato de ser $R = R^{-1}$, nós temos que

$$g_j^{-1}(E) = R(g_{j+N}^{-1}(R(E))) \quad \text{e} \quad g_{j+N}^{-1}(E) = R(g_j^{-1}(R(E))) \quad \text{para todos } j = 1, \dots, N \text{ e } E \in \mathcal{B}_I. \quad (3.19)$$

Vamos dividir nossa análise em dois casos.

- Suponha inicialmente que $i \in \{1, \dots, N\}$ e seja $E \in \mathcal{B}_I$. A definição de μ' nos dá que $\mu'_i(E) = \mu_{i+N}(R(E))$. Como além disso μ é estacionária, pela definição da matriz A em (3.1) nós temos que

$$\mu_{i+N}(R(E)) = \sum_{j \in \mathcal{I}_R} P_{j(i+N)} \mu_j(g_j^{-1}(R(E))) + \sum_{j \in \mathcal{I}_P} P_{(j+N)(i+N)} \mu_{j+N}(g_{j+N}^{-1}(R(E))).$$

Logo,

$$\mu'_i(E) = \sum_{j \in \mathcal{I}_R} P_{j(i+N)} \mu_j(g_j^{-1}(R(E))) + \sum_{j \in \mathcal{I}_P} P_{(j+N)(i+N)} \mu_{j+N}(g_{j+N}^{-1}(R(E))).$$

Usando novamente a definição de μ' e também a simetria de λ no lado direito da igualdade acima, nós obtemos que

$$\mu'_i(E) = \sum_{j \in \mathcal{I}_R} P_{(j+N)i} \mu'_{j+N}(R(g_j^{-1}(R(E)))) + \sum_{j \in \mathcal{I}_P} P_{ji} \mu'_j(R(g_{j+N}^{-1}(R(E)))).$$

Aplicando agora as igualdades em (3.19) no membro à direita da última igualdade, nós temos que

$$\mu'_i(E) = \sum_{j \in \mathcal{I}_R} P_{(j+N)i} \mu'_{j+N}(g_{j+N}^{-1}(E)) + \sum_{j \in \mathcal{I}_P} P_{ji} \mu'_j(g_j^{-1}(E)).$$

Por fim, usando mais uma vez a definição da matriz A no membro à direita da última equação, nós obtemos que

$$\mu'_i(E) = \sum_{j=1}^{2N} P_{ji} \mu'_j(g_j^{-1}(E)).$$

- Agora, se $i \in \{N+1, \dots, 2N\}$ então para todo $E \in \mathcal{B}_I$ nós temos, de maneira análoga ao item anterior,

que

$$\begin{aligned}
\mu'_i(E) &= \mu_{i-N}(R(E)) \\
&= \sum_{j \in \mathcal{I}_P} P_{j(i-N)} \mu_j(g_j^{-1}(R(E))) + \sum_{j \in \mathcal{I}_R} P_{(j+N)(i-N)} \mu_{j+N}(g_{j+N}^{-1}(R(E))) \\
&= \sum_{j \in \mathcal{I}_P} P_{(j+N)i} \mu'_{j+N}(R(g_j^{-1}(R(E)))) + \sum_{j \in \mathcal{I}_R} P_{ji} \mu'_j(R(g_{j+N}^{-1}(R(E)))) \\
&= \sum_{j \in \mathcal{I}_P} P_{(j+N)i} \mu'_{j+N}(g_{j+N}^{-1}(E)) + \sum_{j \in \mathcal{I}_R} P_{ji} \mu'_j(g_j^{-1}(E)) \\
&= \sum_{j=1}^{2N} P_{ji} \mu'_j(g_j^{-1}(E)).
\end{aligned}$$

Logo, $\mu'_i(E) = \sum_{j=1}^{2N} P_{ji} \mu'_j(g_j^{-1}(E))$ para todo $E \in \mathcal{B}_I$ e para todo $i = 1, \dots, 2N$. Isso prova que μ' é estacionária.

Vejam agora que μ ergódica implica μ' também ergódica. Seja $A \subset (\{1, \dots, 2N\} \times I)$ um conjunto invariante pelo processo de Markov induzido por G . Para cada $i = 1, \dots, 2N$ nós vamos denotar $A_i := P_2(A \cap (\{i\} \times I))$, onde $P_2 : \{1, \dots, 2N\} \times I \rightarrow I$ é a projeção natural. Observe que

$$A' := \bigcup_{i=1}^N \{i\} \times (R(A_{i+N})) \cup \bigcup_{i=N+1}^{2N} \{i\} \times (R(A_{i-N}))$$

é também um conjunto invariante pelo processo de Markov induzido por G . De fato, fixemos $i, j \in \{1, \dots, 2N\}$ tais que $P_{ji} > 0$. Vamos novamente dividir nossa análise em diferentes casos.

- Se $i, j \in \{1, \dots, N\}$ então a definição de A' e as igualdades em (3.19) nos dão que

$$g_j^{-1}(A'_i) = g_j^{-1}(R(A_{i+N})) = R(g_{j+N}^{-1}(A_{i+N})). \quad (3.20)$$

Como além disso, A é invariante pelo processo de Markov induzido por G e $P_{(j+N)(i+N)} = P_{ji} > 0$, nós temos que

$$R(g_{j+N}^{-1}(A_{i+N})) = R(A_{i+N}) \quad (3.21)$$

Juntando (3.20) e (3.21), nós obtemos que

$$g_j^{-1}(A'_i) = R(A_{i+N}) = A'_i,$$

sendo que a última igualdade vem da definição de A' .

- Se $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in \{N+1, \dots, 2N\}$ então da mesma maneira nós temos que

$$g_j^{-1}(A'_i) = g_j^{-1}(R(A_{i+N})) = R(g_{j-N}^{-1}(A_{i+N})) = R(A_{i+N}) = A'_i.$$

- Analogamente, se $i \in \{N+1, \dots, 2N\}$ e $j \in \{1, \dots, N\}$ então

$$g_j^{-1}(A'_i) = g_j^{-1}(R(A_{i-N})) = R(g_{j+N}^{-1}(A_{i-N})) = R(A_{i-N}) = A'_i.$$

- Por fim, se $i, j \in \{N + 1, \dots, 2N\}$ então

$$g_j^{-1}(A'_i) = g_j^{-1}(R(A_{i-N})) = R(g_{j-N}^{-1}(A_{i-N})) = R(A_{i-N}) = A'_i.$$

Como esgotamos todos os casos possíveis, segue que $g_j^{-1}(A'_i) = A'_i$ para todos $i, j = 1, \dots, 2N$ tais que $P_{ji} > 0$. Isso prova que A' de fato um conjunto invariante pelo processo de Markov induzido por G .

Vejamos finalmente que $\mu'_i(A_i) = 1$ para todo $i = 1, \dots, 2N$. Vamos também aqui considerar dois casos.

- Se $i \in \{1, \dots, N\}$ então pela definição de μ' nós temos que

$$\mu'_i(A_i) = \mu_{i+N}(R(A_i)).$$

Por outro lado, pela definição de A' nós temos que

$$\mu_{i+N}(R(A_i)) = \mu_{i+N}(A'_{i+N}).$$

Como além disso A' é invariante pelo processo de Markov induzido por G , a ergodicidade de μ nos dá que

$$\mu_{i+N}(A'_{i+N}) = 1.$$

Juntando as três igualdade acima, nós obtemos que

$$\mu'_i(A_i) = 1.$$

- Analogamente, se $i \in \{N + 1, \dots, 2N\}$ então

$$\mu'_i(A_i) = \mu_{i-N}(R(A_i)) = \mu_{i-N}(A'_{i-N}) = 1.$$

Logo, $\mu'_i(A_i) = 1$ para todo $i = 1, \dots, 2N$. Como o conjunto A invariante pelo processo de Markov induzido por G foi arbitrário, segue que μ' também é ergódica. Isso conclui a prova do lema. $\square$

Nós vamos agora definir gráficos ossudos (*bony graphs*, seguindo a notação de [22]) e bi-gráficos ossudos em espaços do tipo $\Sigma \times I$. Vamos ainda definir a continuidade destes e comparar sua existência nos espaços $\Sigma_A \times I$ e $\Sigma_N \times I$.

Definição 3.19. *Sejam λ uma medida de Markov em Σ e $B \subset \Sigma \times I$ um conjunto fechado. Nós dizemos que B é um gráfico ossudo (com respeito a λ) se B_ω consiste em um único ponto para λ -quase todo $\omega \in \Sigma$, e em um intervalo para os demais pontos $\omega \in \Pi_1(B)$. Nós dizemos que B é um bi-gráfico ossudo (com respeito a λ) se ele é a união de dois gráficos ossudos (também com respeito a λ).*

Dado um intervalo $[a, b] \subset I$, definimos a ϵ -vizinhança de $[a, b]$ como o conjunto $U_\epsilon([a, b]) := (a - \epsilon, b + \epsilon) \cap I$.

Definição 3.20. *Nós dizemos que um gráfico ossudo B é contínuo se para todo $\omega \in \Pi_1(B)$ e para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\eta \in \Pi_1(B)$ e $d(\eta, \omega) < \delta$ então $B_\eta \subset U_\epsilon(B_\omega)$. Nós dizemos que um bi-gráfico ossudo é contínuo se ele pode ser decomposto em dois gráficos ossudos contínuos.*

Observe que nas definições de gráfico ossudo e de bi-gráfico ossudo nós não exigimos $\Pi_1(B) = \Sigma$. Entretanto, na prática, nós trabalharemos com gráficos ossudos e bi-gráficos ossudos satisfazendo tal condição. O lema a seguir nos garante que assim como no caso de faixas (ver Seção 3.2), gráficos ossudos (contínuos) em $\Sigma_A \times I$ correspondem a bi-gráficos ossudos (contínuos) em $\Sigma_N \times I$.

Lema 3.21. *Seja λ uma medida de Markov simétrica em Σ_A . Se $B \subset (\Sigma_A \times I)$ é um gráfico ossudo com respeito a λ então $\Pi(B)$ é um bi-gráfico ossudo com respeito à projeção de λ sobre Σ_N . Mais ainda, se B é contínuo então $\Pi(B)$ também o é.*

Demonstração. Note inicialmente que

$$\Pi(B) = \Pi|_{C \times I}(B) \cup \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(B).$$

Assim, para provar que $\Pi(B)$ é um bi-gráfico ossudo, basta mostrar que $\Pi|_{C \times I}(B)$ e $\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(B)$ são gráficos ossudos. Como B é um gráfico ossudo, nós temos que B é um conjunto fechado no compacto $\Sigma_A \times I$. Logo, B é um conjunto compacto. Como Π é contínua, nós temos que $\Pi|_{C \times I}(B)$ é também compacto, sendo, em particular, um conjunto fechado. Além disso, usando novamente que B é um gráfico ossudo, a definição de Π nos dá que $(\Pi|_{C \times I}(B))_\xi$ é um ponto ou intervalo para toda sequência $\xi \in \Sigma_N$. Pelo Lema 3.13,

$$\bar{\lambda}(\{\xi \in \Sigma_N : (\Pi|_{C \times I}(B))_\xi \text{ é um intervalo}\}) = \lambda(\pi^{-1}(\{\xi \in \Sigma_N : (\Pi|_{C \times I}(B))_\xi \text{ é um intervalo}\})).$$

Por outro lado, a definição de Π nos dá que

$$\pi^{-1}(\{\xi \in \Sigma_N : (\Pi|_{C \times I}(B))_\xi \text{ é um intervalo}\}) = \{\omega \in C : B_\omega \text{ é um intervalo}\},$$

e como B é um gráfico ossudo,

$$\lambda(\{\omega \in C : B_\omega \text{ é um intervalo}\}) = 0.$$

Juntando as três igualdades anteriores, nós obtemos então que

$$\bar{\lambda}(\{\xi \in \Sigma_N : (\Pi|_{C \times I}(B))_\xi \text{ é um intervalo}\}) = 0.$$

Isso mostra que $\Pi|_{C \times I}(B)$ é um gráfico ossudo. De maneira análoga se mostra que $\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(B)$ é também um gráfico ossudo.

Suponha agora que B é um gráfico ossudo contínuo. Vamos mostrar que $\Pi|_{C \times I}(B)$ e $\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(B)$ também o são. Sejam $\xi \in \Sigma_N$ e $0 < \epsilon < 1$. Então $\xi = \pi(\omega)$ para algum $\omega \in C$. Como B é um gráfico ossudo contínuo, existe $\delta > 0$ tal que se $\eta \in \Sigma_A$ com $d(\eta, \omega) < \delta$ então

$$B_\eta \subset U_\epsilon(B_\omega). \tag{3.22}$$

Agora, se $\tau \in \Sigma_N$ é tal que $d(\tau, \xi) < \delta$ e $\eta := (\pi|_C)^{-1}(\tau)$ então $d(\eta, \omega) < \delta$, e segue, da definição de Π e do fato de ϵ ser menor do que 1, que

$$B_\tau = B_{\pi|_C(\eta)} = \Pi(B_\eta).$$

Isso junto com (3.22) nos dá que

$$B_\tau \subset \Pi(U_\epsilon(B_\omega)).$$

A última inclusão junto com a definição de Π e o fato de ϵ ser menor do que 1 nos dão finalmente que

$$B_\tau \subset U_\epsilon(\xi).$$

Isso prova que $\Pi|_{C \times I}(B)$ é um gráfico ossudo contínuo. De maneira análoga se mostra que $\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(B)$ é também um gráfico ossudo contínuo. Com isso, concluímos a prova do lema. $\square$

Para finalizar a seção, nós vamos mostrar que uma medida física e hiperbólica com respeito ao step skew product G projeta para uma medida física e hiperbólica com respeito ao step skew product F . O conceito de medida hiperbólica já foi apresentado na Definição 2.4. Vamos agora definir o que é uma medida física.

Definição 3.22. *Sejam $H : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma \times I$ um step skew product, λ uma medida de Markov em Σ e μ uma medida H -invariante. Seja ainda V o conjunto de todos os pontos $(\xi, p) \in \Sigma \times I$ tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(H^i(\xi, p)) = \int \varphi d\mu \quad \text{para toda } \varphi \in C^0(\Sigma \times I).$$

A medida μ é dita ser uma medida física com respeito a H e λ se $(\lambda \times \text{Leb})(V) > 0$, onde Leb denota, como de costume, a medida de Lebesgue.

O conjunto V na Definição 3.22 é usualmente chamado a *bacia da medida μ* . O lema a seguir nos diz que se uma medida é física com respeito a G então a sua projeção é física com respeito a F .

Lema 3.23. *Sejam λ uma medida de Markov simétrica em Σ_A e λ_0 a sua projeção em Σ_N . Se μ é uma medida física com respeito a G e λ então $\Pi_*\mu$ é uma medida física com respeito a F e λ_0 . Mais ainda, se V é a bacia da medida μ então $\Pi(V)$ está contido na bacia da medida $\Pi_*\mu$.*

Demonstração. Sejam V a bacia da medida μ e $(\xi, p) \in \Pi(V)$. Seja ainda $\varphi \in C^0(\Sigma_N \times I)$. Como existe $(\omega, x) \in V$ tal que $\Pi(\omega, x) = (\xi, p)$ e como $\varphi \circ \Pi \in C^0(\Sigma_A \times I)$, segue, do Lema 3.5, que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(F^i(\xi, p)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(F^i \circ \Pi(\omega, x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi \circ \Pi)(G^i(\omega, x)) \\ &= \int \varphi \circ \Pi d\mu \\ &= \int \varphi d(\Pi_*\mu). \end{aligned}$$

Como $\varphi \in C^0(\Sigma_N \times I)$ e $(\xi, p) \in \Pi(V)$ foram arbitrários, segue que $\Pi(V)$ está contido na bacia de $\Pi_*\mu$. Resta ver que $(\lambda_0 \times \text{Leb})(\Pi(V)) > 0$. Para tal, vamos precisar da seguinte afirmação.

Afirmação 1. $\Pi_*(\lambda \times \text{Leb}) = \lambda_0 \times \text{Leb}$.

Demonstração. É suficiente provar a afirmação para os conjuntos da forma $A \times B$, onde $A \in \mathcal{B}_{\Sigma_N}$ e $B \in \mathcal{B}_I$. Lembrando da definição de C em (3.3) e utilizando o Lema 3.13, nós temos que

$$\begin{aligned}
(\lambda \times \text{Leb})(\Pi^{-1}(A \times B)) &= (\lambda \times \text{Leb})\left(\left((\pi|_C)^{-1}(A) \times B\right) \dot{\cup} \left((\pi|_{\Sigma_A \setminus C})^{-1}(A) \times (1 - B)\right)\right) \\
&= (\lambda \times \text{Leb})\left(\left((\pi|_C)^{-1}(A) \times B\right) + \left((\pi|_{\Sigma_A \setminus C})^{-1}(A) \times (1 - B)\right)\right) \\
&= \lambda\left((\pi|_C)^{-1}(A)\right) \text{Leb}(B) + \lambda\left((\pi|_{\Sigma_A \setminus C})^{-1}(A)\right) \text{Leb}(1 - B) \\
&= \left(\lambda\left((\pi|_C)^{-1}(A)\right) + \lambda\left((\pi|_{\Sigma_A \setminus C})^{-1}(A)\right)\right) \text{Leb}(B) \\
&= \lambda\left((\pi|_C)^{-1}(A) \dot{\cup} (\pi|_{\Sigma_A \setminus C})^{-1}(A)\right) \text{Leb}(B) \\
&= \lambda(\pi^{-1}(A)) \text{Leb}(B) \\
&= \lambda_0(A) \text{Leb}(B) \\
&= (\lambda_0 \times \text{Leb})(A \times B).
\end{aligned}$$

□

Agora, como $V \subset \Pi^{-1}(\Pi(V))$ e V é a bacia da medida física μ , a Afirmação 1 nos dá que

$$(\lambda_0 \times \text{Leb})(\Pi(V)) = \Pi_*(\lambda \times \text{Leb})(\Pi(V)) = (\lambda \times \text{Leb})(\Pi^{-1}(\Pi(V))) \geq (\lambda \times \text{Leb})(V) > 0.$$

Isso conclui a prova do lema. □

Para mostrar que uma medida hiperbólica com respeito a G projeta para uma medida hiperbólica com respeito a F , nós precisaremos comparar o expoente de Lyapunov de pontos correspondetes em $\Sigma_A \times I$ e $\Sigma_N \times I$. Vamos mostrar que o expoente de Lyapunov (com respeito a G) de um ponto $(\omega, x) \in \Sigma_A \times I$ coincide com o expoente de Lyapunov (com respeito a F) de $\Pi(\omega, x)$.

Lema 3.24. *Seja $(\omega, x) \in \Sigma_A \times I$. Então $\chi_+(\omega, x) = \chi_+(\Pi(\omega, x))$, onde $\chi_+(\omega, x)$ é tomado com respeito à dinâmica de G e $\chi_+(\Pi(\omega, x))$ é tomado com respeito à dinâmica de F .*

Demonstração. Vamos considerar dois casos.

1º caso: $\omega \in C$ (relembre a definição de C em (3.3)).

Nesse caso, $\Pi(\omega, x) = (\bar{\omega}, x)$. Raciocinando como na Afirmação 1 do Lema 3.34 e lembrando que $R^{-1} = R$, nós obtemos, para cada $n \geq 1$, que

$$f_{\bar{\omega}_0 \dots \bar{\omega}_{n-1}} = g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}} \quad \text{ou} \quad f_{\bar{\omega}_0 \dots \bar{\omega}_{n-1}} = R \circ g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}.$$

Se ocorrer a primeira opção, nós teremos

$$\frac{1}{n} \log |(f_{\bar{\omega}_0 \dots \bar{\omega}_{n-1}})'(x)| = \frac{1}{n} \log |(g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}})'(x)|.$$

Caso ocorra a segunda opção, como $|R'(y)| = 1$ para todo $y \in I$, nós teremos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log |(f_{\overline{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}})'(x)| &= \frac{1}{n} \log |(R \circ g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}})'(x)| \\ &= \frac{1}{n} \log (|R'(g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}(x))| |(g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}})'(x)|) \\ &= \frac{1}{n} \log |R'(g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}(x))| + \frac{1}{n} \log |(g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}})'(x)| \\ &= \frac{1}{n} \log |(g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}})'(x)| \end{aligned}$$

Como isso vale para todo $n \geq 1$, segue que $\chi_+(\omega, x) = \chi_+(\Pi(\omega, x))$ para $\omega \in C$.

2º caso: $\omega \notin C$.

Nesse caso, $\Pi(\omega, x) = (\overline{\omega}, R(x))$ e

$$f_{\overline{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}} \circ R = g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}} \quad \text{ou} \quad f_{\overline{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}} \circ R = R \circ g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}} \circ R.$$

Usando novamente que $|R'(y)| = 1$ para todo $y \in I$, nós temos que

$$\frac{1}{n} \log |(f_{\overline{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}})'(R(x))| = \frac{1}{n} \log |(g_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}})'(x)| \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Como isso vale para todo $n \geq 1$, segue que, também nesse caso, $\chi_+(\omega, x) = \chi_+(\Pi(\omega, x))$.

Isso conclui a prova do lema. □

O lema a seguir é uma consequência imediata do Lema 3.24.

Lema 3.25. *Seja μ uma medida G -invariante e ergódica. Então $\chi(\mu) = \chi(\Pi_*\mu)$. Em particular, se μ é hiperbólica (com respeito a G) então $\Pi_*\mu$ é hiperbólica (com respeito a F).*

Demonstração. Suponha que μ é uma medida hiperbólica com respeito a G . Então existe um subconjunto mensurável $H \subset \Sigma_A \times I$ tal que $\mu(H) = 1$ e $\chi_+(\omega, x) = \chi(\mu)$ para todo ponto $(\omega, x) \in H$. Pelo Lema 3.24, $\chi_+(\xi, p) = \chi(\mu)$ para todo $(\xi, p) \in \Pi(H)$. Como, além disso, $H \subset \Pi^{-1}(\Pi(H))$, segue que

$$(\Pi_*\mu)(\Pi(H)) = \mu(\Pi^{-1}(\Pi(H))) \geq \mu(H) = 1.$$

Isso mostra que $\chi(\mu) = \chi(\Pi_*\mu)$ e conclui a prova do lema. □

3.4 Condições de genericidade

Nesta seção nós vamos estabelecer as condições sobre as quais o Teorema 3.1 será válido, isto é, nós vamos explicitar os sistemas para os quais será possível dar uma descrição topológica dos seus atratores e repulsores. Nós mostraremos que as condições impostas são de fato genéricas e que elas também implicam as condições correspondentes de [22, 2.15 Theorem]. Mais do que isso, nós mostraremos que tais condições são satisfeitas em um conjunto aberto e denso de step skew products. A grosso modo, tais condições dizem respeito à

hiperbolicidade de pontos periódicos de período pequeno, ao fato de pontos atratores (repulsores) de período pequeno não poderem ser levados pela dinâmica em pontos repulsores (atratores) de período pequeno em um número também pequeno de etapas e, por fim, à não existência de ciclos invariantes pela dinâmica.

Fixe $N \geq 1$. No enunciado do Teorema 3.1, nós denotamos por $\mathcal{S}(N)$ o conjunto de todos os step skew products como na Definição 1.1. Seja $\mathcal{P}(N) \subset \mathcal{S}(N)$ o subconjunto de todos os step skew products tais que cada uma das N transformações na fibra preserva orientação. Seja ainda $\mathcal{R}(N) \subset \mathcal{S}(N)$ o subconjunto de todos os step skew products tais que ao menos uma das transformações na fibra reverte orientação. Como N está fixo, nós vamos simplesmente escrever $\mathcal{S} = \mathcal{S}(N)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(N)$ e $\mathcal{R} = \mathcal{R}(N)$. Os conjuntos $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ são espaços métricos se munidos da distância d definida por

$$d(F, H) := \max \{d_{C^1}(f_i, h_i) : i = 1, \dots, N\}. \quad (3.23)$$

Abaixo nós enunciamos as três condições em $\mathcal{R}$ sobre as quais o Teorema 3.1 será válido ([22, 2.15 Theorem] já garante que o Teorema 3.1 é verdadeiro para o espaço $\mathcal{P}$).

- i) **(Órbitas periódicas curtas são hiperbólicas.)** Todos os pontos fixos de todas as composições da forma $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$, com $a_{\xi_n \xi_1} = 1$ e $1 \leq n \leq 2N$, são hiperbólicos.
- ii) **(Não existência de órbitas heteroclínicas.)** Nenhum ponto fixo atrator de uma transformação da forma $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$, com $a_{\xi_n \xi_1} = 1$ e $1 \leq n \leq 2N$, é levado em um ponto fixo repulsor de uma transformação da forma $f_{\eta_1 \dots \eta_m}$, com $a_{\eta_m \eta_1} = 1$ e $1 \leq m \leq 2N$, por uma composição da forma $f_{\rho_1 \dots \rho_l}$, com $1 \leq l \leq 2N - 1$. Analogamente, nenhum ponto fixo repulsor de uma transformação da forma $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$, com $a_{\xi_n \xi_1} = 1$ e $1 \leq n \leq 2N$, é levado em um ponto fixo atrator de uma transformação da forma $f_{\eta_1 \dots \eta_m}$, com $a_{\eta_m \eta_1} = 1$ e $1 \leq m \leq 2N$, por uma composição da forma $f_{\rho_1 \dots \rho_l}$, com $1 \leq l \leq 2N - 1$.
- iii) **(Não existência de ciclos.)** Não é possível escolher dois pontos $a, b \in I$ tais que

$$\begin{cases} f_i(a) = a & \text{e} & R(f_i(R(b))) = b & \text{para todo } i \in \mathcal{I}_P \\ R(f_i(a)) = b & \text{e} & f_i(R(b)) = a & \text{para todo } i \in \mathcal{I}_R. \end{cases}$$

Observe que a condição iii) é a que apresenta relação com a não existência de ciclos invariantes pela dinâmica comentada anteriormente. Observe ainda que as três condições acima são similares às condições impostas por Kleptsyn e Volk em [22, 2.15 Theorem]. De fato, nós mostraremos na Subseção 3.4.2 que se um step skew product $F \in \mathcal{R}$ satisfaz uma dessas condições então o step skew product G introduzido como na Definição 3.4 satisfaz a condição análoga considerada em [22]. Antes disso, nós mostraremos o seguinte resultado.

Proposição 3.26. *O conjunto $\widehat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$ dos step skew products que satisfazem todas as condições i), ii) e iii) é aberto e denso relativamente à distância d definida em (3.23).*

3.4.1 Demonstração da Proposição 3.26

Esta seção é toda dedicada à demonstração da Proposição 3.26, isto é, nós mostraremos que as condições i), ii) e iii) enunciadas acima são satisfeitas em um subconjunto aberto e denso de $\mathcal{R}$.

Para cada sequência finita da forma $\xi_1 \dots \xi_n$ com $1 \leq n \leq 2N$, seja $\mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n) \subset \mathcal{R}$ o subconjunto dos step skew products tais que todos os pontos fixos de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ são hiperbólicos. Seja ainda $\mathcal{R}^i \subset \mathcal{R}$ o subconjunto de todos os step skew products que satisfazem a condição i). Então

$$\mathcal{R}^i = \bigcap \{ \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n) : \xi_j \in \{1, \dots, N\}, a_{\xi_n \xi_1} = 1, 1 \leq n \leq 2N \}. \quad (3.24)$$

Assim, para provar que $\mathcal{R}^i$ é aberto e denso em $\mathcal{R}$, basta mostrar que $\mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$ é aberto e denso em $\mathcal{R}$ para cada sequência finita $\xi_1 \dots \xi_n$ com $a_{\xi_n \xi_1} = 1$ e $1 \leq n \leq 2N$. Esse fato é uma consequência dos dois seguintes lemas.

Lema 3.27. *O conjunto $\mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$ é aberto em $\mathcal{R}$ para cada sequência finita $\xi_1 \dots \xi_n$.*

Demonstração. Fixe uma sequência finita $\xi_1 \dots \xi_n$ com $1 \leq n \leq 2N$ e suponha, por absurdo, que $\mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$ não é aberto. Então existem $F \in \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$ e uma sequência $(F_k) \subset \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$ tais que $F_k \rightarrow F$. Para cada $k \geq 1$, nós vamos escrever $f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k := f_{\xi_n}^k \circ \dots \circ f_{\xi_1}^k$, onde $f_{\xi_j}^k$ é a transformação associado ao símbolo ξ_j no step skew product F_k . Como $(F_k) \subset \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$, para cada $k \geq 1$, $f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$ tem ao menos um ponto fixo não hiperbólico, digamos p_k . Podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $p \in [0, 1]$ tal que $p_k \rightarrow p$ (caso isto não ocorra para a sequência (F_k) , poderíamos escolher uma subsequência satisfazendo tal condição).

Afirmção 1. $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\xi_1 \dots \xi_n}(p_k) = p$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como $F_k \rightarrow F$ existe $k_1 \geq 1$ tal que se $k \geq k_1$ então

$$|f_{\xi_1 \dots \xi_n}(p_k) - f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k(p_k)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.25)$$

De fato, isso é claro no caso $n = 1$. No caso em que $n \geq 2$, como f_{ξ_j} é uniformemente contínua para todo $j = 2, \dots, n$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica que

$$|f_{\xi_j \dots \xi_n}(x) - f_{\xi_j \dots \xi_n}(y)| < \frac{\epsilon}{2n} \quad \text{para todo } j = 2, \dots, n.$$

Assim, escolhendo k_1 tal que $d(F_k, F) < \min\{\delta, \frac{\epsilon}{2n}\}$ para todo $k \geq k_1$, nós teremos que

$$\begin{aligned} |f_{\xi_1 \dots \xi_n}(p_k) - f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k(p_k)| &\leq |f_{\xi_2 \dots \xi_n}(f_{\xi_1}(p_k)) - f_{\xi_2 \dots \xi_n}(f_{\xi_1}^k(p_k))| \\ &\quad + \sum_{j=3}^n |f_{\xi_j \dots \xi_n}(f_{\xi_{j-1}} \circ f_{\xi_{j-2}}^k \circ \dots \circ f_{\xi_1}^k(p_k)) - f_{\xi_j \dots \xi_n}(f_{\xi_{j-1}}^k \circ f_{\xi_{j-2}}^k \circ \dots \circ f_{\xi_1}^k(p_k))| \\ &\quad + |f_{\xi_n}(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}^k(p_k)) - f_{\xi_n}^k(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}^k(p_k))| \\ &< n \frac{\epsilon}{2n}, \end{aligned}$$

o que mostra que (3.25) realmente é verdade. Por outro lado, como $p_k \rightarrow p$ existe $k_2 \geq 1$ tal que se $k \geq k_2$ então

$$|f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k(p_k) - p| = |p_k - p| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.26)$$

Juntando (3.25) e (3.26), nós obtemos que se $k \geq \max\{k_1, k_2\}$ então

$$|f_{\xi_1 \dots \xi_n}(p_k) - p| < \epsilon,$$

o que conclui a prova da afirmação. $\square$

Agora, pela continuidade de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$, a Afirmação 1 nos dá que

$$f_{\xi_1 \dots \xi_n}(p) = f_{\xi_1 \dots \xi_n}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} p_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\xi_1 \dots \xi_n}(p_k) = p, \quad (3.27)$$

ou seja, p é ponto fixo de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$. De maneira análoga à prova da Afirmação 1, nós podemos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p_k)| = 1 \quad (3.28)$$

usando que f'_{ξ_j} é uniformemente contínua para todo $j = 2, \dots, n$. Isso junto com o fato de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ ser de classe C^1 nos dá que

$$|(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p)| = \left| (f_{\xi_1 \dots \xi_n})'\left(\lim_{k \rightarrow \infty} p_k\right) \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p_k)| = 1,$$

ou seja, p é ponto fixo não hiperbólico de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$. Isso contradiz o fato que $F \in \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$, e conclui, portanto, a prova do lema. $\square$

Lema 3.28. *O conjunto $\mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$ é denso em $\mathcal{R}$ para cada seqüência finita $\xi_1 \dots \xi_n$.*

Demonstração. Fixe uma seqüência finita $\xi_1 \dots \xi_n$ e seja $F \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$. Então $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ tem ao menos um ponto fixo não hiperbólico, digamos p . Para cada $0 < \epsilon < 1$, defina as transformações

$$s_\epsilon : I \rightarrow I \quad : \quad y \mapsto y - \epsilon(y - f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p))$$

e

$$h_{\xi_n}^\epsilon : I \rightarrow h_{\xi_n}^\epsilon(I) \subset I \quad : \quad y \mapsto f_{\xi_n}(s_\epsilon(y)).$$

Note que como $0 < \epsilon < 1$, a função s_ϵ é crescente, e assim, para cada $0 \leq y \leq 1$ vale que

$$0 \leq \epsilon f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p) = s_\epsilon(0) \leq s_\epsilon(y) \leq s_\epsilon(1) \leq 1 - \epsilon(1 - f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p)) \leq 1.$$

Isso mostra que ambas, s_ϵ e $h_{\xi_n}^\epsilon$, estão bem definidas. Note ainda que como f_{ξ_n} e s_ϵ são injetivas então a transformação $h_{\xi_n}^\epsilon$ também o é. Além disso, para cada $y \in I$, nós temos que

$$(h_{\xi_n}^\epsilon)'(y) = f'_{\xi_n}(s_\epsilon(y))s'_\epsilon(y) = f'_{\xi_n}(s_\epsilon(y))(1 - \epsilon) \neq 0,$$

visto que f_{ξ_n} é um difeomorfismo sobre sua imagem. Segue então, do Teorema da Função Inversa, que $h_{\xi_n}^\epsilon$ também é um difeomorfismo de classe C^1 sobre a sua imagem.

Afirmação 1. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_{\xi_n}^\epsilon = f_{\xi_n}$ na topologia C^1 .

Demonstração. Seja $\eta > 0$. Escolhendo $0 < \epsilon_1 < 1$ tal que

$$\epsilon_1 \cdot \max_{z \in I} |f'_{\xi_n}(z)| < \frac{\eta}{2}, \quad (3.29)$$

nós temos, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$ e para todo $y \in I$, que

$$\begin{aligned} |h_{\xi_n}^\epsilon(y) - f_{\xi_n}(y)| &= |f_{\xi_n}(s_\epsilon(y)) - f_{\xi_n}(y)| \\ &\leq \max_{z \in I} |f'_{\xi_n}(z)| |s_\epsilon(y) - y| \\ &\leq \epsilon \cdot \max_{z \in I} |f'_{\xi_n}(z)| \\ &< \eta. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Além disso, para cada $0 < \epsilon < 1$ e para cada $y \in I$, nós temos que

$$\begin{aligned} |(h_{\xi_n}^\epsilon)'(y) - f'_{\xi_n}(y)| &= |f'_{\xi_n}(s_\epsilon(y))(1 - \epsilon) - f'_{\xi_n}(y)| \\ &\leq (1 - \epsilon) |f'_{\xi_n}(s_\epsilon(y)) - f'_{\xi_n}(y)| + |(1 - \epsilon)f'_{\xi_n}(y) - f'_{\xi_n}(y)|. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como f'_{ξ_n} é contínua em I (compacto), nós temos f'_{ξ_n} é uniformemente contínua, de modo que existe $0 < \epsilon_2 < 1$ tal que $|x - y| < \epsilon_2$ implica $|f'_{\xi_n}(x) - f'_{\xi_n}(y)| < \frac{\eta}{2}$. Então, para todo $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ e para todo $y \in I$, nós temos que $|s_\epsilon(y) - y| \leq \epsilon < \epsilon_2$ e assim, a desigualdade em (3.31) junto com (3.29) nos dão que

$$\begin{aligned} |(h_{\xi_n}^\epsilon)'(y) - f'_{\xi_n}(y)| &\leq (1 - \epsilon) \frac{\eta}{2} + \epsilon \cdot \max_{z \in I} |f'_{\xi_n}(z)| \\ &< \eta. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por (3.30) e (3.32), nós temos que $d_{C^1}(h_{\xi_n}^\epsilon, f_{\xi_n}) < \eta$ para todo $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Como $\eta > 0$ foi arbitrário, a afirmação está provada. $\square$

Temos agora dois casos a considerar.

1º caso: A transformação $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ reverte orientação.

Observe inicialmente que p é ponto fixo de $h_{\xi_n}^\epsilon \circ f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}$ para todo $\epsilon > 0$, e como p é ponto fixo não hiperbólico de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$, nós temos que

$$\begin{aligned} |(h_{\xi_n}^\epsilon \circ f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}})'(p)| &= |(h_{\xi_n}^\epsilon)'(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p))(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}})'(p)| \\ &= |f'_{\xi_n}(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p))(1 - \epsilon)(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}})'(p)| \\ &= |(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p)(1 - \epsilon)| \\ &= 1 - \epsilon, \end{aligned} \quad (3.33)$$

ou seja, p é hiperbólico com respeito a cada transformação da forma $h_{\xi_n}^\epsilon \circ f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}$. Observe ainda que como s_ϵ é crescente, então $h_{\xi_n}^\epsilon$ preserva orientação se f_{ξ_n} preserva, e $h_{\xi_n}^\epsilon$ reverte orientação se f_{ξ_n} reverte. Logo, para cada $0 < \epsilon < 1$, a transformação $h_{\xi_n}^\epsilon \circ f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}$ também reverte orientação e tem, portanto, p como único

ponto fixo. Isso junto com (3.33) nos garante que o step skew product F_ϵ que tem como transformações na fibra

$$f_i^\epsilon := \begin{cases} f_i, & \text{se } i \neq \xi_n \\ h_{\xi_n}^\epsilon & \text{se } i = \xi_n \end{cases} \quad (3.34)$$

é tal que $F_\epsilon \in \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$. Pela Afirmação 1, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} d(F_\epsilon, F) = 0$.

2º caso: A transformação $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ preserva orientação.

Esse caso é mais complicado e para obter a sequência de step skew products que converge para F , nós usaremos o Teorema da Transversalidade Paramétrica ([26, Chapter XI, Theorem 2.3]). Observe inicialmente que, de maneira análoga ao raciocínio utilizado no 1º caso, o fato de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ preservar orientação nos garante que $h_{\xi_n}^\epsilon \circ f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}$ também preserva para cada $0 < \epsilon < 1$. Considere a aplicação

$$\rho : (0, 1) \rightarrow C^1(I, I \times I) \quad : \quad \epsilon \mapsto \rho(\epsilon), \quad \text{onde } \rho(\epsilon)(y) := (y, (h_{\xi_n}^\epsilon \circ f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}})(y)).$$

A aplicação ρ é claramente contínua. Além disso, a *avaliação de ρ* definida por

$$\rho^{ev} : (0, 1) \times I \rightarrow I \times I \quad : \quad (\epsilon, y) \mapsto \rho^{ev}(\epsilon, y) := \rho(\epsilon)(y)$$

é de classe C^1 . Seja $\Delta := \{(y, y) : y \in I\}$ a diagonal em $I \times I$.

Afirmção 2. ρ^{ev} é transversal a Δ ao longo de $(0, 1) \times I$.

Demonstração. Escrevendo

$$s : (0, 1) \times I \rightarrow I \quad : \quad (\epsilon, y) \mapsto s(\epsilon, y) := s_\epsilon(y)$$

e

$$h_{\xi_n} : (0, 1) \times I \rightarrow I \quad : \quad (\epsilon, y) \mapsto h_{\xi_n}(\epsilon, y) := h_{\xi_n}^\epsilon(y),$$

nós temos que

$$h_{\xi_n}(\epsilon, y) = f_{\xi_n}(s(\epsilon, y))$$

e assim, para todos $(\epsilon, y) \in (0, 1) \times I$ e $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, nós temos que

$$\begin{aligned} d(\rho^{ev})_{(\epsilon, y)}(v_1, v_2) &= \left(v_2, \frac{\partial h_{\xi_n}}{\partial \epsilon}(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(y))v_1 + \frac{\partial h_{\xi_n}}{\partial y}(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(y))(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}})'(y)v_2 \right) \\ &= \left(v_2, f'_{\xi_n}(s(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p))) \left(\frac{\partial s}{\partial \epsilon}(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(y))v_1 + \frac{\partial s}{\partial y}(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(y))(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}})'(y)v_2 \right) \right). \end{aligned}$$

Como o plano tangente à diagonal Δ em cada ponto é dado por $\{(v, v) : v \in \mathbb{R}\}$, para provar a Afirmação 2, basta mostrar que para cada $(\epsilon, y) \in (0, 1) \times I$, existem $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$f'_{\xi_n}(s(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p))) \left(\frac{\partial s}{\partial \epsilon}(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(y))v_1 + \frac{\partial s}{\partial y}(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(y))(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}})'(y)v_2 \right) \neq v_2. \quad (3.35)$$

Se $y \neq p$ então para $v_2 = 0$, o primeiro membro de (3.35) é dado por

$$f'_{\xi_n}(s(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p))) \frac{\partial s}{\partial \epsilon}(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(y))v_1 = f'_{\xi_n}(s(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p)))((f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p) - f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(y))v_1).$$

Assim, para todo $(\epsilon, y) \in (0, 1) \times I$ com $y \neq p$, a desigualdade em (3.35) é válida para $v_1 \neq 0$ e $v_2 = 0$. Agora, se $y = p$, o primeiro membro de (3.35) é dado por

$$f'_{\xi_n}(s(\epsilon, f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p)))(1 - \epsilon)(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}})'(p)v_2 = f'_{\xi_n}(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(p))(1 - \epsilon)(f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}})'(p)v_2 = (f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p)(1 - \epsilon)v_2.$$

Como $(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p) = 1$ (pois $(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p)$ preserva orientação), segue, da igualdade acima, que para todo $\epsilon \in (0, 1)$ a desigualdade em (3.35) é satisfeita para para (ϵ, p) se $v_2 \neq 0$. Isso conclui a prova da afirmação. $\square$

Aplicando então [26, Chapter XI, Theorem 2.3], nós obtemos que o conjunto $\{\epsilon \in (0, 1) : \rho(\epsilon) \pitchfork_I \Delta\}$ é aberto e denso em $(0, 1)$. Em particular, existe uma sequência (ϵ_k) tal que $\epsilon_k \rightarrow 0$ e $\rho(\epsilon_k) \pitchfork_I \Delta$ para todo $k \geq 1$. Mas por [26, Chapter XI, Lemma 3.1], os fatos que $\rho(\epsilon_k) \pitchfork_I \Delta$ e que $h_{\xi_n}^{\epsilon_k} \circ f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}$ preserva orientação implicam que todos os pontos fixos de $h_{\xi_n}^{\epsilon_k} \circ f_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}}$ são hiperbólicos. Assim, considerando a sequência de step skew products (F_{ϵ_k}) com transformações na fibra definidas como em (3.34), nós temos que $F_{\epsilon_k} \in \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$ para todo $k \geq 1$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} d(F_{\epsilon_k}, F) = 0$.

Logo, qualquer que seja o caso considerado, nós conseguimos obter uma sequência de step skew products em $\mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n)$ que converge para F . Isso conclui a prova do lema. $\square$

A fim de provar que a condição *ii*) também é satisfeita em um subconjunto aberto e denso de $\mathcal{R}$, considere agora, para cada trio de sequências finitas $\xi_1 \dots \xi_n$, $\eta_1 \dots \eta_m$ e $\rho_1 \dots \rho_l$ com $1 \leq n, m \leq 2N$ e $1 \leq l \leq 2N - 1$, o conjunto $\mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l) \subset \mathcal{R}$ de todos os step skew products tais que nenhum ponto fixo atrator de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ é levado em um ponto fixo repulsor de $f_{\eta_1 \dots \eta_m}$ por $f_{\rho_1 \dots \rho_l}$. Seja ainda $\widehat{\mathcal{R}}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l) \subset \mathcal{R}$ o conjunto de todos os step skew products tais que nenhum ponto fixo repulsor de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ é levado em um ponto fixo atrator de $f_{\eta_1 \dots \eta_m}$ por $f_{\rho_1 \dots \rho_l}$. Por fim, seja

$$\mathcal{R}^{ii} = \bigcap_{1 \leq n, m \leq 2N} \bigcap_{1 \leq l \leq 2N-1} \bigcap_{\xi_1 \dots \xi_n} \bigcap_{\eta_1 \dots \eta_m} \bigcap_{\rho_1 \dots \rho_l} \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l) \cap \widehat{\mathcal{R}}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l),$$

onde consideramos as sequências tais que $a_{\xi_n \xi_1} = 1 = a_{\eta_m \eta_1}$, o conjunto de todos os step skew products que satisfazem a condição *ii*). Então, para provar que $\mathcal{R}^{ii}$ é aberto e denso em $\mathcal{R}$, basta mostrar que os conjuntos à direita na igualdade acima são abertos e densos em $\mathcal{R}$ para cada trio de sequências consideradas. No caso dos conjuntos $\mathcal{R}(\cdot)$, isso segue dos dois seguintes lemas combinados com o Lema 3.27. No caso dos conjuntos $\widehat{\mathcal{R}}(\cdot)$, a prova é análoga e por isso será omitida.

Lema 3.29. *O conjunto $\mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l) \cap \mathcal{R}^i$ é aberto em $\mathcal{R}^i$ para cada trio de sequências finitas $\xi_1 \dots \xi_n$, $\eta_1 \dots \eta_m$ e $\rho_1 \dots \rho_l$.*

Demonstração. A demonstração é análoga à do Lema 3.27 e por isso será feita com menos detalhes. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l) \cap \mathcal{R}^i$ não é aberto em $\mathcal{R}^i$. Então existem $F \in \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l) \cap \mathcal{R}^i$ e uma sequência $(F_k) \subset \mathcal{R}^i \setminus \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l)$ tais que $F_k \rightarrow F$. Assim como no Lema 3.27, nós vamos escrever $f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k := f_{\xi_n}^k \circ \dots \circ f_{\xi_1}^k$, onde $f_{\xi_j}^k$ é a transformação associada ao símbolo ξ_j no step skew product F_k . Como $(F_k) \subset \mathcal{R}^i \setminus \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l)$, para cada $k \geq 1$ existe um ponto fixo atrator de

$f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k$, digamos p_k , que é levado por $f_{\rho_1 \dots \rho_l}^k$ em um ponto fixo repulsor de $f_{\eta_1 \dots \eta_m}^k$, digamos q_k . Nós podemos supor, sem perda de generalidade, que existem $p, q \in [0, 1]$ tais que $p_k \rightarrow p$ e $q_k \rightarrow q$. De maneira análoga à Afirmação 1 do Lema 3.27, nós temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\xi_1 \dots \xi_n}(p_k) = p \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\eta_1 \dots \eta_m}(q_k) = q.$$

Isso junto com a continuidade de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ e $f_{\eta_1 \dots \eta_m}$ nos dá, assim como em (3.27), que

$$f_{\xi_1 \dots \xi_n}(p) = p \quad \text{e} \quad f_{\eta_1 \dots \eta_m}(q) = q.$$

Afirmação 1. *O ponto p é ponto fixo atrator de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$.*

Demonstração. Como $F \in \mathcal{R}^i$, nós já temos que p é ponto fixo hiperbólico de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$. Suponha, por absurdo, que $|(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p)| > 1$ e seja $0 < \epsilon < ||(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p)| - 1|$. Assim como em (3.25), nós podemos mostrar que existe $k_1 \geq 1$ tal que para $k \geq k_1$ vale que

$$|(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p_k) - (f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k)'(p_k)| < \frac{\epsilon}{2},$$

de modo que nós também temos

$$|| (f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p_k) | - |(f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k)'(p_k) || < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo } k \geq k_1. \quad (3.36)$$

Como além disso a continuidade das transformações f_{ξ_j} nos dá que

$$|(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p_k)|,$$

segue que existe $k_2 \geq 1$ tal que para $k \geq k_2$ nós temos

$$|| (f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p_k) | - |(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p) || < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.37)$$

Juntando (3.36) e (3.37), nós obtemos que para $k \geq \max\{k_1, k_2\}$,

$$|| (f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k)'(p_k) | - |(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p) || < \epsilon. \quad (3.38)$$

Como estamos supondo $|(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p)| > 1$ (hipótese de absurdo) e $\epsilon < ||(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p)| - 1|$, a desigualdade em (3.38) nos diz que $|(f_{\xi_1 \dots \xi_n}^k)'(p_k)| > 1$ para todo $k \geq \max\{k_1, k_2\}$ (contradição). Isso conclui a prova da afirmação. $\square$

Analogamente, nós podemos mostrar que q é ponto fixo repulsor de $f_{\eta_1 \dots \eta_m}$. Por fim, como $f_{\rho_1 \dots \rho_l}^k(p_k) = q_k$ para todo $k \geq 1$, nós temos que

$$|f_{\rho_1 \dots \rho_l}(p) - q| \leq |f_{\rho_1 \dots \rho_l}(p) - f_{\rho_1 \dots \rho_l}(p_k)| + |f_{\rho_1 \dots \rho_l}(p_k) - f_{\rho_1 \dots \rho_l}^k(p_k)| + |q_k - q|,$$

e como $p_k \rightarrow p$, $q_k \rightarrow q$ e $F_k \rightarrow F$, nós podemos concluir que $f_{\rho_1 \dots \rho_l}(p) = q$. Com isso obtemos uma contradição e, portanto, concluímos a prova do lema. $\square$

Lema 3.30. *O conjunto $\mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l)$ é denso em $\mathcal{R}$ para cada trio de seqüências finitas $\xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_m$ e $\rho_1 \dots \rho_l$.*

Demonstração. Fixe um trio de seqüências finitas $\xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_m$ e $\rho_1 \dots \rho_l$ nas condições do enunciado e seja $F \in \mathcal{R}^i \setminus \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l)$. Observe que pelas condições impostas sobre a seqüência $\rho_1 \dots \rho_l$, existe um símbolo que aparece somente uma vez na mesma. Para simplificar a notação, nós vamos supor que este símbolo é ρ_l (e demonstração no caso geral é análoga). A ideia da demonstração é fazer uma pequena perturbação na transformação f_{ρ_l} (com respeito à distância C^1), substituindo-a por uma transformação h , e manter todas as demais transformações, de modo que o step skew product F_h obtido desta forma esteja próximo de F (com respeito à distância C^1) e seja tal que $F_h \in \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l)$.

Note que se o símbolo ρ_l (ou algum outro símbolo da seqüência $\rho_1 \dots \rho_l$) não estiver em $\xi_1 \dots \xi_n$ nem em $\eta_1 \dots \eta_m$, não há grande dificuldade em fazer tal perturbação, visto que, nesse caso, os pontos fixos atratores de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ e os pontos fixos repulsores de $f_{\eta_1 \dots \eta_m}$ não são afetados pela perturbação. O caso geral (e que engloba esse caso particular) não é tão simples e será tratado abaixo.

Sejam $\{p_1, \dots, p_r\}$ o conjunto dos pontos fixos atratores de $f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ e $\{q_1, \dots, q_r\}$ o conjunto dos pontos fixos repulsores de $f_{\eta_1 \dots \eta_m}$ tais que para cada $i = 1, \dots, r$, existe $q_j, j \in \{1, \dots, r\}$, com $f_{\rho_1 \dots \rho_l}(p_i) = q_j$ (a escolha de F nos dá a existência de pelo menos um tal ponto). Reordenando os índices, nós podemos assumir que $j = i$. Seja ainda $\epsilon > 0$ tal que se $d_{C^1}(h, f_{\rho_l}) < \epsilon$, então as transformações $\widehat{f}_{\xi_n} \circ \dots \circ \widehat{f}_{\xi_1}$ e $\widehat{f}_{\eta_m} \circ \dots \circ \widehat{f}_{\eta_1}$, onde $\widehat{f}_j = f_j$ se $j \neq \rho_l$ e $\widehat{f}_j = h$ no caso contrário, satisfazem que

- $\widehat{f}_{\xi_n} \circ \dots \circ \widehat{f}_{\xi_1}$ tem somente um ponto fixo atrator $p_i^h \in (p_i - \epsilon, p_i + \epsilon)$ para todo $i = 1, \dots, r$;
- $\widehat{f}_{\eta_m} \circ \dots \circ \widehat{f}_{\eta_1}$ tem somente um ponto fixo repulsor $q_i^h \in (q_i - \epsilon, q_i + \epsilon)$ para todo $i = 1, \dots, r$;
- ambas coincidem com as respectivas transformações originais ($f_{\xi_1 \dots \xi_n}$ e $f_{\eta_1 \dots \eta_m}$) fora destes intervalos .

Para cada $i = 1, \dots, r$, considere

$$\psi_i : B_{C^1(I, \mathbb{R})}(f_{\rho_l}, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad h \mapsto p_i^h,$$

$$\theta_i : B_{C^1(I, \mathbb{R})}(f_{\rho_l}, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad h \mapsto q_i^h$$

e defina a aplicação

$$\phi_i : B_{C^1(I, \mathbb{R})}(f_{\rho_l}, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad h \mapsto h \circ f_{\rho_1 \dots \rho_{l-1}}(\psi_i(h)) - \theta_i(h).$$

Considere ainda o step skew product $\widehat{F} = \widehat{F}(h)$ definido com as novas transformações $\widehat{f}_j$ escolhidas como acima. Dada $h \in B_{C^1(I, \mathbb{R})}(f_{\rho_l}, \epsilon)$, nós temos que $\widehat{F} \in \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l)$ se, e somente se, a transformação $h \in B_{C^1(I, \mathbb{R})}(f_{\rho_l}, \epsilon) \setminus \bigcup_{i=1}^r \phi_i^{-1}(0)$, supondo que ϵ foi escolhido suficientemente pequeno.

Dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno, vamos então considerar uma família a 1-parâmetro (que será especificada ao final da demonstração)

$$\kappa : B_\delta(0) \rightarrow B_{C^1(I, \mathbb{R})}(f_{\rho_l}, \epsilon) \quad : \quad t \mapsto h_t,$$

de modo que $\kappa(0) = f_{\rho_l}$. Escreva

$$f_{\xi_1 \dots \xi_n}^t = \widehat{f}_{\xi_n} \circ \dots \circ \widehat{f}_{\xi_1} \quad \text{e} \quad f_{\eta_1 \dots \eta_m}^t = \widehat{f}_{\eta_m} \circ \dots \circ \widehat{f}_{\eta_1},$$

onde as transformações $\widehat{f}_j$ são definidas como acima considerando a perturbação específica $h = h_t$, e denote por F^t o novo skew product obtido. Dessa maneira, podemos considerar, para cada $i = 1, \dots, r$, as funções reais

$$\Psi_i = \psi_i \circ \kappa, \quad \Theta_i = \theta_i \circ \kappa \quad \text{e} \quad \Phi_i = \phi_i \circ \kappa.$$

Se a família a 1-parâmetro escolhida for tal que $\Phi'_i(0)$ não se anula para todo $i = 1, \dots, r$, então nós teremos que $\Phi_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$ é denso em $B_\delta(0)$. Em particular, será possível aproximar h por uma sequência de funções h_t de modo que o step skew product $F^t \in \mathcal{R}(\xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_m; \rho_1 \dots \rho_l)$, o que concluirá a prova do lema. Agora, se a família a 1-parâmetro escolhida for tal que $\Phi'_i(0)$ se anula para algum $i = 1, \dots, r$, precisaremos modificá-la. Vamos então calcular $\Phi'_i(0)$. Nós temos que

$$\begin{aligned} \Phi'_i(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_i(t) - \Phi_i(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_i(\kappa(t)) - \phi_i(\kappa(0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_t(f_{\rho_1 \dots \rho_{l-1}})(\psi_i(h_t)) - \theta_i(h_t) - (f_{\rho_1 \dots \rho_l}(\psi_i(f_{\rho_l})) - \theta_i(f_{\rho_l}))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_t(f_{\rho_1 \dots \rho_{l-1}})(\Psi_i(t)) - \Theta_i(t) - (f_{\rho_1 \dots \rho_l}(\Psi_i(0)) - \Theta_i(0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_t(f_{\rho_1 \dots \rho_{l-1}})(\Psi_i(t)) - f_{\rho_1 \dots \rho_l}(\Psi_i(t)) + (f_{\rho_1 \dots \rho_l}(\Psi_i(t)) - f_{\rho_1 \dots \rho_l}(\Psi_i(0)) - (\Theta_i(t) - \Theta_i(0)))}{t} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para controlar a expressão em (3.39), vamos analisar separadamente

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(h_t - f_{\rho_l})(f_{\rho_1 \dots \rho_{l-1}})(\Psi_i(t))}{t} \quad (3.40)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f_{\rho_1 \dots \rho_l})(\Psi_i(t)) - f_{\rho_1 \dots \rho_l}(\Psi_i(0))}{t} \quad (3.41)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Theta_i(t) - \Theta_i(0)}{t}. \quad (3.42)$$

Observe agora que os limites em (3.41) e (3.42) são conhecidos, visto que se tratam das derivadas das continuações hiperbólicas (suas derivadas são dadas pelo Teorema da Função Implícita). De fato, escrevendo $p := p_i$, $q := q_i$ e usando o Teorema da Função Implícita, nós podemos mostrar que o limite em (3.41) coincide com

$$(f_{\rho_1 \dots \rho_l})'(p) \left(\frac{-1}{(f_{\xi_1 \dots \xi_n})'(p) - 1} \right) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f_{\xi_1 \dots \xi_n}^t)(p) - f_{\xi_1 \dots \xi_n}(p)}{t}, \quad (3.43)$$

e de maneira similar o limite em (3.42) coincide com

$$\left(\frac{-1}{(f_{\eta_1 \dots \eta_m})'(q) - 1} \right) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f_{\eta_1 \dots \eta_m}^t)(q) - f_{\eta_1 \dots \eta_m}(q)}{t}. \quad (3.44)$$

Note agora que, exceto pelas constantes, os limites em (3.40), (3.43) e (3.44) são essencialmente os mesmos (cada um com a respectiva composição), mas os limites em (3.43) e (3.44) só dependem do valor da perturbação em p e q , enquanto que o limite (3.40) é calculado na continuação hiperbólica de p . Escolhendo agora h_t de modo a

- mudar a continuação hiperbólica de p para todo t ;
- fazer com que os limites em (3.43) e (3.44) sejam 0 (uma vez que só dependem do valor da perturbação em p e q);
- fazer com que o limite em (3.40) não seja 0 (já que nesse caso ele é calculado na continuação hiperbólica, que também varia e é sempre diferente de p e q).

nós concluímos a demonstração. $\square$

Por fim, denote por $\mathcal{R}^{iii} \subset \mathcal{R}$ o subconjunto de todos os step skew products que satisfazem a condição *iii*). Vejamos que $\mathcal{R}^{iii}$ é também aberto e denso em $\mathcal{R}$.

Lema 3.31. *O conjunto $\mathcal{R}^{iii}$ é aberto em $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Como no caso dos Lemas 3.27 e 3.29, nós vamos fazer a prova por contradição. Suponha, por absurdo, que o conjunto $\mathcal{R}^{iii}$ não é aberto em $\mathcal{R}$. Então existem $F \in \mathcal{R}^{iii}$ e uma sequência $(F_k) \subset \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}^{iii}$ tais que $F_k \rightarrow F$. Como $(F_k) \subset \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}^{iii}$, para cada $k \geq 1$ existem $a_k, b_k \in I$ tais que

$$\begin{cases} f_j^k(a_k) = a_k & \text{e} & R(f_j^k(R(b_k))) = b_k & \text{para todo } j \in \mathcal{I}_P^k \\ R(f_j^k(a_k)) = b_k & \text{e} & f_j^k(R(b_k)) = a_k & \text{para todo } j \in \mathcal{I}_R^k, \end{cases} \quad (3.45)$$

onde f_j^k indica, como de costume, a transformação associada ao símbolo j no step skew product F_k , $\mathcal{I}_P^k$ indica o conjunto dos índices $j \in \{1, \dots, N\}$ tais que f_j^k preserva orientação e $\mathcal{I}_R^k$ indica o conjunto dos índices $j \in \{1, \dots, N\}$ tais que f_j^k reverte orientação. Novamente nós podemos supor, sem perda de generalidade, que existem $a, b \in I$ tais que $a_k \rightarrow a$ e $b_k \rightarrow b$, quando $k \rightarrow \infty$.

Afirmção 1. $\mathcal{I}_P^k = \mathcal{I}_P$ e $\mathcal{I}_R^k = \mathcal{I}_R$ para todo k suficientemente grande.

Demonstração. Note inicialmente que $\mathcal{I}_P \subset \mathcal{I}_P^k$ para todo k suficientemente grande. De fato, raciocinando por absurdo, suponha que existe uma subsequência F_{k_l} de (F_k) tal que $j \notin \mathcal{I}_P^{k_l}$ para todo $l \geq 1$. Então $j \in \mathcal{I}_R^{k_l}$ para todo $l \geq 1$, de modo que

$$f_j^{k_l}(1) < f_j^{k_l}(0) \quad \text{para todo } l \geq 1. \quad (3.46)$$

Como $F_{k_l} \rightarrow F$, nós temos que $f_j^{k_l}(1) \rightarrow f_j(1)$ e $f_j^{k_l}(0) \rightarrow f_j(0)$. Isso junto com (3.46) nos dá que $f_j(1) \leq f_j(0)$, o que contradiz o fato de j pertencer a $\mathcal{I}_P$. Portanto, realmente $\mathcal{I}_P \subset \mathcal{I}_P^k$ para todo k suficientemente grande.

Analogamente, $\mathcal{I}_R \subset \mathcal{I}_R^k$ para todo k suficientemente grande. Como $\mathcal{I}_P \cup \mathcal{I}_R = \{1, \dots, N\} = \mathcal{I}_P^k \cup \mathcal{I}_R^k$ para todo $k \geq 1$, segue que

$$\mathcal{I}_P = \mathcal{I}_P^k \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_R = \mathcal{I}_R^k \quad \text{para todo } k \text{ suficientemente grande,}$$

o que prova a afirmação. $\square$

Agora, como $F_k \rightarrow F$, $a_k \rightarrow a$ e $b_k \rightarrow b$, segue, de (3.45) e da Afirmação 1, que

$$\begin{cases} f_j(a) = a & \text{e} & R(f_j(R(b))) = b & \text{para todo } j \in \mathcal{I}_P \\ R(f_j(a)) = b & \text{e} & f_j(R(b)) = a & \text{para todo } j \in \mathcal{I}_R, \end{cases}$$

Isso contradiz o fato de F pertencer a $\mathcal{R}^{iii}$, provando o lema. $\square$

Lema 3.32. *O conjunto $\mathcal{R}^{iii}$ é denso em $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.28, basta mostrar que dados $F \in \mathcal{R}^i \setminus \mathcal{R}^{iii}$ e $\epsilon > 0$, existe $F_\epsilon \in \mathcal{R}^{iii}$ tal que $d(F, F_\epsilon) < \epsilon$. Para tal, fixe $F \in \mathcal{R}^i \setminus \mathcal{R}^{iii}$. Então existem $a, b \in I$ tais que

$$\begin{cases} f_j(a) = a & \text{e} & R(f_j(R(b))) = b & \text{para todo } j \in \mathcal{I}_P \\ R(f_j(a)) = b & \text{e} & f_j(R(b)) = a & \text{para todo } j \in \mathcal{I}_R, \end{cases} \quad (3.47)$$

Como nós estamos supondo $\mathcal{I}_R \neq \emptyset$, é possível escolher $j_0 \in \mathcal{I}_R$, de modo que $R(f_{j_0}(f_{j_0}(R(b)))) = b$, ou ainda, $f_{j_0}^2(R(b)) = R(b)$. Assim, $R(b)$ é ponto fixo de $f_{j_0}^2$ e como $F \in \mathcal{R}^i$, nós temos que $R(b)$ é hiperbólico. Em particular, existe uma quantidade finita de possibilidades para b , digamos $\{b_1, \dots, b_L\}$. Como nós também temos $f_{j_0}(R(b)) = a$, e f_{j_0} e R são injetivas, segue que também só existem L de possibilidades para a , digamos $\{a_1 := f_{j_0}(R(b_1)), \dots, a_L := f_{j_0}(R(b_L))\}$. Fixe agora um índice $j' \neq j_0$. Temos dois casos a considerar:

1º caso: $f_{j'}$ preserva orientação.

Nesse caso, defina, para cada $\epsilon > 0$, uma transformação $f_{j'}^\epsilon$, de modo que

$$d_{C^1}(f_{j'}^\epsilon, f_{j'}) < \epsilon \quad (3.48)$$

e $f_{j'}^\epsilon(a_k) \neq a_k$ para todo $k = 1, \dots, L$. Considere então o step skew product F_ϵ que tem como transformações na fibra

$$f_j^\epsilon := \begin{cases} f_j, & \text{se } j \neq j' \\ f_{j'}^\epsilon, & \text{se } j = j' \end{cases}$$

Nós queremos mostrar que $F_\epsilon \in \mathcal{R}^{iii}$. Como $f_{j_0}^\epsilon = f_{j_0}$, para que um par (a, b) satisfaça a condição análoga a (3.47) para o step skew product F_ϵ , obrigatoriamente nós devemos ter $b = b_k$ e $a = a_k$ para algum $k \in \{1, \dots, L\}$. Porém pela definição de $f_{j'}^\epsilon$, nós não podemos ter $f_{j'}^\epsilon(a_k) = a_k$. Logo, $F_\epsilon \in \mathcal{R}^{iii}$ para todo $\epsilon > 0$. Isso junto com (3.48) e a definição de F_ϵ encerram a prova nesse caso.

2º caso $f_{j'}$ reverte orientação.

Esse caso é análogo ao anterior. Basta definir para cada $\epsilon > 0$, uma transformação $f_{j'}^\epsilon$, de modo que $d_{C^1}(f_{j'}^\epsilon, f_{j'}) < \epsilon$ e $f_{j'}^\epsilon(a_k) \neq R(b_k)$. A prova é finalizada de maneira similar ao caso anterior. $\square$

3.4.2 Condições i), ii) e iii) no sistema estendido

Nesta subseção, nós vamos relacionar as condições *i)*, *ii)* e *iii)* com as condições apresentadas em [22]. Para entender melhor estas últimas, nós vamos precisar da seguinte definição.

Definição 3.33. Uma composição da forma $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$ é dita uma transição simples se $\omega_i \neq \omega_j$ para todos $i, j = 1, \dots, n$ com $i \neq j$. Uma transição simples é dita um retorno simples se $a_{\omega_n \omega_1} = 1$.

Voltamos agora para a notação $\mathcal{R} = \mathcal{R}(N)$ e $\mathcal{P} = \mathcal{P}(N)$. Os três lemas a seguir, que serão apresentados em sequência, mostram que se $F \in \mathcal{R}(N)$ é um step skew product que satisfaz as condições i), ii) e iii), então o step skew product $G \in \mathcal{P}(2N)$ introduzido como na Definição 3.4 satisfaz as condições de [22, 2.15 Theorem].

Lema 3.34. Suponha que F satisfaz a condição i). Então todos os pontos fixos de todos retornos simples de G são hiperbólicos.

Demonstração. Suponha que $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$ é um retorno simples de G . Então $1 \leq n \leq 2N$ e $a_{\omega_n \omega_1} = 1$.

Afirmção 1.

$$g_{\omega_1 \dots \omega_n} = \begin{cases} f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}, & \text{se } \omega_1 \in \{1, \dots, N\} \\ R \circ f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}} \circ R, & \text{se } \omega_1 \in \{N+1, \dots, 2N\}. \end{cases}$$

Demonstração. Note inicialmente que se $a_{ij} = 1$ então

$$g_{ij} = \begin{cases} f_{\overline{j}} \circ f_{\overline{i}}, & \text{se } i, j \in \mathcal{I}_P \\ R \circ f_{\overline{j}} \circ f_{\overline{i}}, & \text{se } i \in \mathcal{I}_P \text{ e } j \in \mathcal{I}_R \\ R \circ f_{\overline{j}} \circ R \circ R \circ f_{\overline{i}} = R \circ f_{\overline{j}} \circ f_{\overline{i}}, & \text{se } i \in \mathcal{I}_R \text{ e } j - N \in \mathcal{I}_P \\ f_{\overline{j}} \circ R \circ R \circ f_{\overline{i}} = f_{\overline{j}} \circ f_{\overline{i}}, & \text{se } i, j - N \in \mathcal{I}_R \\ R \circ f_{\overline{j}} \circ R \circ R \circ f_{\overline{i}} \circ R = R \circ f_{\overline{j}} \circ f_{\overline{i}} \circ R, & \text{se } i - N, j - N \in \mathcal{I}_P \\ f_{\overline{j}} \circ R \circ R \circ f_{\overline{i}} \circ R = f_{\overline{j}} \circ f_{\overline{i}} \circ R, & \text{se } i - N \in \mathcal{I}_P \text{ e } j - N \in \mathcal{I}_R \\ f_{\overline{j}} \circ f_{\overline{i}} \circ R, & \text{se } i - N \in \mathcal{I}_R \text{ e } j \in \mathcal{I}_P \\ R \circ f_{\overline{j}} \circ f_{\overline{i}} \circ R, & \text{se } i - N, j \in \mathcal{I}_R. \end{cases} \quad (3.49)$$

As expressões em (3.49) nos garantem que é possível escrever $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$ de modo que se R aparece nessa composição, então ela é a primeira ou a última aplicação. Para provar a afirmação, vamos analisar separadamente diferentes casos.

- Se $\omega_1 \in \mathcal{I}_P$ então $g_{\omega_1} = f_{\overline{\omega_1}}$, de modo que a aplicação R não aparece no início da composição $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Além disso, como $a_{\omega_n \omega_1} = 1$, então ou $\omega_n \in \mathcal{I}_P$ ou $\omega_n - N \in \mathcal{I}_R$. No primeiro caso, $g_{\omega_n} = f_{\overline{\omega_n}}$, enquanto no segundo, $g_{\omega_n} = f_{\overline{\omega_n}} \circ R$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R não aparece no final da composição $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Logo, $g_{\omega_1 \dots \omega_n} = f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}$.
- Se $\omega_1 \in \mathcal{I}_R$ então $g_{\omega_1} = R \circ f_{\overline{\omega_1}}$, de modo que a aplicação R também não aparece no início da composição $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Além disso, novamente usando que $a_{\omega_n \omega_1} = 1$, então ou $\omega_n \in \mathcal{I}_P$ ou $\omega_n - N \in \mathcal{I}_R$. Assim como antes, no primeiro caso, $g_{\omega_n} = f_{\overline{\omega_n}}$, enquanto no segundo, $g_{\omega_n} = f_{\overline{\omega_n}} \circ R$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R não aparece no final da composição $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Logo, $g_{\omega_1 \dots \omega_n} = f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}$.
- Se $\omega_1 - N \in \mathcal{I}_P$ então $g_{\omega_1} = R \circ f_{\overline{\omega_1}} \circ R$, de modo que a aplicação R aparece no início da composição $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Além disso, como $a_{\omega_n \omega_1} = 1$, então ou $\omega_n \in \mathcal{I}_R$ ou $\omega_n - N \in \mathcal{I}_P$. No primeiro caso, $g_{\omega_n} = R \circ f_{\overline{\omega_n}}$,

enquanto no segundo, $g_{\omega_n} = R \circ f_{\overline{\omega_n}} \circ R$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R aparece no final da composição $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Logo, $g_{\omega_1 \dots \omega_n} = R \circ f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}} \circ R$.

- Por fim, se $\omega_1 - N \in \mathcal{I}_R$ então $g_{\omega_1} = f_{\overline{\omega_1}} \circ R$, de modo que a aplicação R novamente aparece no início da composição $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Mais uma vez usando que $a_{\omega_n \omega_1} = 1'''$, então ou $\omega_n \in \mathcal{I}_R$ decrescente ou $\omega_n - N \in \mathcal{I}_P$. No primeiro caso, $g_{\omega_n} = R \circ f_{\overline{\omega_n}}$, enquanto no segundo, $g_{\omega_n} = R \circ f_{\overline{\omega_n}} \circ R$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R aparece no final da composição $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Logo, $g_{\omega_1 \dots \omega_n} = R \circ f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}} \circ R$.

Como esgotamos todos os casos possíveis, a afirmação está provada. $\square$

Suponha agora que p é ponto fixo de $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Vamos novamente dividir nossa análise em diferentes casos.

- Se $\omega_1 \in \{1, \dots, N\}$ então combinando a Afirmação 1 com a hipótese do lema nós temos que p é ponto fixo hiperbólico de $f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}$. Novamente usando a Afirmação 1, nós podemos concluir que p é ponto fixo hiperbólico de $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$.
- Se $\omega_1 \in \{N + 1, \dots, 2N\}$ então a Afirmação 1 e o fato que $R = R^{-1}$ nos dão que

$$f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}(R(p)) = R(g_{\omega_1 \dots \omega_n}(p)) = R(p),$$

isto é, $R(p)$ é ponto fixo de $f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}$. Além disso, $R(p)$ é hiperbólico pela hipótese do lema. Por fim, como

$$\begin{aligned} (g_{\omega_1 \dots \omega_n})'(p) &= (R \circ f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}} \circ R)'(p) \\ &= R'(f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}(R(p)))(f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}})'(R(p))R'(p) \\ &= (-1)(f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}})'(R(p))(-1) \\ &= (f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}})'(R(p)), \end{aligned}$$

segue que p é ponto fixo hiperbólico de $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$.

Novamente, como esgotamos todos os casos possíveis, segue que p é ponto fixo hiperbólico de $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Como além disso, o retorno simples $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$ e o ponto fixo p foram arbitrários, o lema está provado. $\square$

Lema 3.35. *Suponha que F satisfaz a condição ii). Então, na dinâmica de G , nenhum ponto fixo atrator de um retorno simples é levado em ponto fixo repulsor de um retorno simples por uma transição simples. Da mesma forma, nenhum ponto fixo repulsor de um retorno simples é levado em ponto fixo atrator de um retorno simples de por uma transição simples.*

Demonstração. Sejam $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$ e $g_{\zeta_1 \dots \zeta_m}$ dois retornos simples de G e $g_{\iota_1 \dots \iota_k}$ uma transição simples de G . Então $1 \leq n, m \leq 2N$ e $1 \leq k \leq 2N - 1$. Além disso, por (3.49) nós temos que

$$g_{\iota_1 \dots \iota_k} = \begin{cases} f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}} & \text{ou} \\ R \circ f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}} & \text{ou} \\ R \circ f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}} \circ R & \text{ou} \\ f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}} \circ R. \end{cases}$$

Suponha agora que p é um ponto fixo atrator de $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$ e que q é um ponto fixo repulsor de $g_{\zeta_1 \dots \zeta_m}$. Suponha, por absurdo, que $g_{\iota_1 \dots \iota_k}(p) = q$. Novamente, vamos separar nossa análise em diferentes casos.

- Se $\omega_1, \zeta_1 \in \{1, \dots, N\}$ então $g_{\omega_1 \dots \omega_n} = f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}$ e $g_{\zeta_1 \dots \zeta_m} = f_{\overline{\zeta_1 \dots \zeta_m}}$ pela Afirmação 1 do Lema 3.34. Como estamos supondo que $g_{\iota_1 \dots \iota_k}(p) = q$, nós temos também que $\iota_1 = \omega_1 \in \{1, \dots, N\}$, de modo que ou $g_{\iota_1} = f_{\overline{\iota_1}}$ ou $g_{\iota_1} = R \circ f_{\overline{\iota_1}}$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R não aparece no início da composição $f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}}$. Além disso, ι_k satisfaz $a_{\iota_k \zeta_1} = 1$ (novamente porque estamos supondo $g_{\iota_1 \dots \iota_k}(p) = q$), de modo que ou $\iota_k \in \mathcal{I}_P$ ou $\iota_k - N \in \mathcal{I}_R$. No primeiro caso nós temos que $g_{\iota_k} = f_{\overline{\iota_k}}$, enquanto no segundo nós temos que $g_{\iota_k} = f_{\overline{\iota_k}} \circ R$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R não aparece no final da composição $g_{\iota_1 \dots \iota_k}$. Logo, $g_{\iota_1 \dots \iota_k} = f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}}$. Dessa forma, a hipótese $g_{\iota_1 \dots \iota_k}(p) = q$ nos dá que $f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}}(p) = q$, e como p é ponto fixo atrator de $f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}$ e q é ponto fixo repulsor de $f_{\overline{\zeta_1 \dots \zeta_m}}$, nós temos, nesse caso, uma contradição com a hipótese do lema.
- Se $\omega_1 \in \{1, \dots, N\}$ e $\zeta_1 \in \{N+1, \dots, 2N\}$ então $g_{\omega_1 \dots \omega_n} = f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}$ e $g_{\zeta_1 \dots \zeta_m} = R \circ f_{\overline{\zeta_1 \dots \zeta_m}} \circ R$ novamente pela Afirmação 1 do Lema 3.34. Além disso, $\iota_1 = \omega_1 \in \{1, \dots, N\}$, de modo que ou $g_{\iota_1} = f_{\overline{\iota_1}}$ ou $g_{\iota_1} = R \circ f_{\overline{\iota_1}}$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R não aparece no início da composição $f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}}$. Como além disso ι_k satisfaz $a_{\iota_k \zeta_1} = 1$, nós temos que ou $\iota_k \in \mathcal{I}_R$ ou $\iota_k - N \in \mathcal{I}_P$. No primeiro caso nós temos que $g_{\iota_k} = R \circ f_{\overline{\iota_k}}$, enquanto no segundo nós temos que $g_{\iota_k} = R \circ f_{\overline{\iota_k}} \circ R$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R aparece no final da composição $g_{\iota_1 \dots \iota_k}$. Logo, $g_{\iota_1 \dots \iota_k} = R \circ f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}}$. Dessa forma, a hipótese $g_{\iota_1 \dots \iota_k}(p) = q$ nos dá que $f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}}(p) = R(q)$, e como p é ponto fixo atrator de $f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}$ e $R(q)$ é ponto fixo repulsor de $f_{\overline{\zeta_1 \dots \zeta_m}}$ (uma vez que q é ponto fixo repulsor de $g_{\zeta_1 \dots \zeta_m}$), nós chegamos, também nesse caso, a uma contradição com a hipótese do lema.
- Se $\omega_1 \in \{N+1, \dots, 2N\}$ e $\zeta_1 \in \{1, \dots, N\}$ então $g_{\omega_1 \dots \omega_n} = R \circ f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}} \circ R$ e $g_{\zeta_1 \dots \zeta_m} = f_{\overline{\zeta_1 \dots \zeta_m}}$ mais uma vez pela Afirmação 1 do Lema 3.34. Além disso, $\iota_1 = \omega_1 \in \{N+1, \dots, 2N\}$, de modo que ou $g_{\iota_1} = R \circ f_{\overline{\iota_1}} \circ R$ ou $g_{\iota_1} = f_{\overline{\iota_1}} \circ R$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R aparece no início da composição $f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}}$. Novamente, como ι_k satisfaz $a_{\iota_k \zeta_1} = 1$, nós temos que ou $\iota_k \in \mathcal{I}_P$ ou $\iota_k - N \in \mathcal{I}_R$. No primeiro caso nós temos que $g_{\iota_k} = f_{\overline{\iota_k}}$, enquanto no segundo nós temos que $g_{\iota_k} = f_{\overline{\iota_k}} \circ R$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R não aparece no final da composição $g_{\iota_1 \dots \iota_k}$. Logo, $g_{\iota_1 \dots \iota_k} = f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}} \circ R$. Dessa forma, a hipótese $g_{\iota_1 \dots \iota_k}(p) = q$ nos dá que $f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}}(R(p)) = q$, e como $R(p)$ é ponto fixo atrator de $f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}$ (uma vez que p é ponto fixo atrator de $g_{\omega_1 \dots \omega_n}$) e q é ponto fixo repulsor de $f_{\overline{\zeta_1 \dots \zeta_m}}$, nós chegamos mais uma vez a uma contradição com a hipótese do lema.
- Por fim, se $\omega_1, \zeta_1 \in \{N+1, \dots, 2N\}$ então $g_{\omega_1 \dots \omega_n} = R \circ f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}} \circ R$ e $g_{\zeta_1 \dots \zeta_m} = R \circ f_{\overline{\zeta_1 \dots \zeta_m}} \circ R$ pela Afirmação 1 do Lema 3.34. Além disso, $\iota_1 = \omega_1 \in \{N+1, \dots, 2N\}$, de modo que ou $g_{\iota_1} = R \circ f_{\overline{\iota_1}} \circ R$ ou $g_{\iota_1} = f_{\overline{\iota_1}} \circ R$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R aparece no início da composição $f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}}$. Como ι_k satisfaz $a_{\iota_k \zeta_1} = 1$, nós temos que ou $\iota_k \in \mathcal{I}_R$ ou $\iota_k - N \in \mathcal{I}_P$. No primeiro caso nós temos que $g_{\iota_k} = R \circ f_{\overline{\iota_k}}$, enquanto no segundo nós temos que $g_{\iota_k} = R \circ f_{\overline{\iota_k}} \circ R$. Em qualquer uma das duas situações, a aplicação R aparece no final da composição $g_{\iota_1 \dots \iota_k}$. Logo, $g_{\iota_1 \dots \iota_k} = R \circ f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}} \circ R$. Dessa forma, a hipótese $g_{\iota_1 \dots \iota_k}(p) = q$ nos dá que $f_{\overline{\iota_1 \dots \iota_k}}(R(p)) = R(q)$, e como $R(p)$ é ponto fixo atrator de

$f_{\overline{\omega_1 \dots \omega_n}}$ (uma vez que p é ponto fixo atrator de $g_{\omega_1 \dots \omega_m}$) e $R(q)$ é ponto fixo repulsor de $f_{\overline{\zeta_1 \dots \zeta_m}}$ (uma vez que q é ponto fixo repulsor de $g_{\zeta_1 \dots \zeta_m}$), nós temos uma contradição com a hipótese do lema.

Assim, qualquer que seja o caso considerado, nós chegamos a uma contradição. Como esgotamos todos os casos possíveis, a primeira parte do lema está provada. A segunda parte pode ser provada de maneira análoga. $\square$

Lema 3.36. *Suponha que F satisfaz a condição iii). Então não é possível escolher pontos $a_1, \dots, a_{2N} \in I$ de modo que para cada $j, k = 1, \dots, 2N$ tais que $a_{jk} = 1$ nós tenhamos $g_j(a_j) = a_k$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que é possível escolher pontos $a_1, \dots, a_{2N} \in I$ de modo que para cada $j, k = 1, \dots, 2N$ tais que $a_{jk} > 0$ nós tenhamos $g_j(a_j) = a_k$. Como existe ao menos um índice $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ tal que f_{j_0} reverte orientação, nós temos que $a_{(j_0+N)k} > 0$ para todo $k = 1, \dots, N$, e assim, a condição $g_{j_0+N}(a_{j_0+N}) = a_k$ para todo $k = 1, \dots, N$ nos dá que a_k é constante, digamos a , para todo $k = 1, \dots, N$. Novamente usando a existência de ao menos um índice $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ tal que f_{j_0} reverte orientação, nós temos que $a_{j_0k} > 0$ para todo $k = N+1, \dots, 2N$, e assim, a condição $g_{j_0}(a_{j_0}) = a_k$ para todo $k = N+1, \dots, 2N$ nos dá que a_k é constante, digamos b , para todo $k = N+1, \dots, 2N$. Nossa hipótese de absurdo nos dá então que

$$\begin{cases} g_j(a) = a & \text{para todo } j \in \mathcal{I}_P \\ g_j(a) = b & \text{para todo } j \in \mathcal{I}_R \\ g_j(b) = b & \text{para todo } j \text{ tal que } j - N \in \mathcal{I}_P \\ g_j(b) = a & \text{para todo } j \text{ tal que } j - N \in \mathcal{I}_R. \end{cases} \quad (3.50)$$

Usando a definição das transformações g_j , nós podemos reescrever (3.50) como

$$\begin{cases} f_j(a) = a & \text{e } R(f_j(R(b))) = b & \text{para todo } j \in \mathcal{I}_P \\ R(f_j(a)) = b & \text{e } f_j(R(b)) = a & \text{para todo } j \in \mathcal{I}_R. \end{cases}$$

Mas isso claramente contradiz a hipótese do lema. Isso conclui nossa prova. $\square$

3.5 Estrutura geral das faixas

Nesta seção nós vamos analisar mais detalhadamente a estrutura das duplas faixas atradoras e inversamente atradoras enunciadas no Teorema 3.1.

3.5.1 Estrutura topológica

Nesta subseção nós mostraremos que faixas atradoras (inversamente atradoras) simétricas com respeito ao step skew product G correspondem a uma mesma dupla faixa atradora (inversamente atradora) com respeito ao step skew product F . Nós vamos mostrar ainda que existe uma certa ordem entre as duplas faixas associadas a F .

Seja $F \in \widehat{\mathcal{R}}(N)$ um step skew product afirmado pelo Teorema 3.1 (de fato, nós veremos na Seção 3.6 que o Teorema 3.1 se aplica a qualquer step skew product F nesse conjunto) e considere G sua extensão para $\Sigma_A \times I$ (introduzida na Definição 3.4). Conforme veremos na Seção 3.6, G está nas condições de [22, 2.15 Theorem], de modo que existe uma coleção finita de faixas atratoras e faixas inversamente atratoras (com respeito a G) tais que sua união é todo o espaço $\Sigma_A \times I$. Veremos também que as duplas faixas enunciadas no Teorema 3.1 são dadas pela projeção sobre $\Sigma_N \times I$ das faixas de [22] associadas a G . Para provar que essa coleção de faixas atratoras e inversamente atratoras com respeito a G cobre todo o espaço de fase, Kleptsyn e Volk consideram em [22] uma extensão das transformações na fibra (de G). De fato, o intervalo I é substituído pelo círculo $S^1 \supset I$ e as transformações g_i são estendidas de modo que $S^1 \setminus I$ é uma faixa inversamente atratora (com respeito ao sistema definido com as transformações estendidas) e seu atrator maximal é o gráfico de uma função definida na base Σ_A e cuja imagem está em $S^1 \setminus I$. Dessa forma, se denotarmos por $S_1, \dots, S_n$ as faixas atratoras em $\Sigma_A \times I$ e por $R_1, \dots, R_m$ as faixas inversamente atratoras em $\Sigma_A \times I$, nós temos que $n = m + 1$ e, além disso, é possível ordená-las de modo que

$$S_1 < R_1 < S_2 < \dots < S_{n-1} < R_{n-1} < S_n, \quad (3.51)$$

onde a notação $S < R$ indica que $x < y$ sempre que $(\omega, x) \in S$ e $(\omega, y) \in R$. Mais ainda, os autores mostram que cada faixa atratora S é da forma

$$S = \bigsqcup_{i=1}^{2N} [0; i] \times I_{\mu_i},$$

onde I_{μ_i} é uma vizinhança suficientemente pequena do intervalo fechado cujos extremos são $a_{\mu_i} := \min \text{supp } \mu_i$ e $b_{\mu_i} := \max \text{supp } \mu_i$, μ é uma medida estacionária ergódica com respeito ao processo de Markov induzido por G e μ_i denota a restrição $\mu|_{\{i\} \times I}$.

Observe agora que pelo Lema 3.9, para cada faixa atratora S , a imagem $\Pi(S)$ é uma dupla faixa atratora (com respeito a F). Nós podemos escrever

$$\Pi(S) = \Pi|_{C \times I}(S) \cup \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(S).$$

Observe ainda que se μ é uma medida estacionária e ergódica com respeito ao processo de Markov induzido por G , o Lema 3.18 nos garante que a medida simétrica de μ , a qual denotamos por μ' , também o é. Denotando por S a faixa atratora obtida a partir de μ e por S' a faixa atratora obtida a partir de μ' , então a definição de I_{μ_i} nos dá que

$$\Pi|_{C \times I}(S) = \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(S') \quad \text{e} \quad \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(S) = \Pi|_{C \times I}(S').$$

Dessa forma, $\Pi(S) = \Pi(S')$. Em [22], também se encontra a demonstração do seguinte resultado.

Lema 3.37. *Se $\mu \neq \mu'$ então $I_{\mu_i} \cap I_{\mu'_i} = \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, 2N$.*

Note que se temos a ordenação dada por (3.51), o Lema 3.37 é imediato. Porém, em [22], a demonstração de (3.51) segue exatamente do Lema 3.37. Vejamos agora que para o step skew product G , o seguinte resultado é válido.

Lema 3.38. *Existe no máximo uma medida estacionária ergódica μ tal que $\mu' = \mu$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existam duas medidas estacionárias ergódicas, digamos μ e ν , tais que $\mu' = \mu$ e $\nu' = \nu$. Então $I_{\mu'_1} = I_{\mu_1}$ e pela ordenação das faixas atratoras observada em (3.51), nós deveríamos ter ou $I_{\nu_1} < I_{\mu_1}$ ou $I_{\nu_1} > I_{\mu_1}$. Suponha que $I_{\nu_1} < I_{\mu_1}$. Então novamente usando a ordenação das faixas atratoras e igualdades $\mu' = \mu$ e $\nu' = \nu$, nós deveríamos ter

$$I_{\nu'_{N+1}} = I_{\nu_{N+1}} < I_{\mu_{N+1}} = I_{\mu'_{N+1}}.$$

Mas pelo fato que $I_{\nu_1} < I_{\mu_1}$ e pelas definições de μ' e ν' (pela simetria) nós deveríamos ter também que $I_{\mu'_{N+1}} < I_{\nu'_{N+1}}$. Isso nos dá uma contradição. Da mesma forma, é possível chegar a uma contradição supondo que $I_{\nu_1} > I_{\mu_1}$. O lema está provado. $\square$

Todas as observações acima nos permitem concluir que se houver um número par de faixas atratoras em $\Sigma_A \times I$, suas imagens por Π coincidem duas a duas. Caso haja um número ímpar de faixas atratoras em $\Sigma_A \times I$, existe uma cuja imagem por Π não coincide com a imagem por Π das demais, e para todas as outras também é possível concluir que suas imagens por Π coincidem duas a duas. A mesma conclusão vale para as faixas inversamente atratoras em $\Sigma_A \times I$. Além disso, as imagens por Π das faixas atratoras e inversamente atratoras não se intersectam, visto que elas próprias não se intersectam. Logo, se n é par, nós temos por (3.51) que é possível escrever

$$\begin{aligned} \Pi|_{C \times I}(S_1) &< \Pi|_{C \times I}(R_1) < \Pi|_{C \times I}(S_2) < \dots \\ &< \Pi|_{C \times I}(S_{\frac{n}{2}}) < \Pi|_{C \times I}(R_{\frac{n}{2}}) = \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(R_{\frac{n}{2}}) < \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(S_{\frac{n}{2}}) < \\ &\dots < \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(R_1) < \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(S_1). \end{aligned}$$

Já se n é ímpar, é possível escrever

$$\begin{aligned} \Pi|_{C \times I}(S_1) &< \Pi|_{C \times I}(R_1) < \Pi|_{C \times I}(S_2) < \dots \\ &< \Pi|_{C \times I}(R_{\frac{n}{2}}) < \Pi|_{C \times I}(S_{\frac{n+1}{2}}) = \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(S_{\frac{n+1}{2}}) < \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(R_{\frac{n}{2}}) < \\ &\dots < \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(R_1) < \Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I}(S_1). \end{aligned}$$

Nós temos portanto uma ordenação para as duplas faixas enunciadas no Teorema 3.1. Além disso, o lema a seguir nos diz que dado um par de faixas atratoras ou inversamente atratoras (com respeito a G) simétricas, a imagem por Π de seus atratores maximais coincidem.

Lema 3.39. *Sejam S e S' duas faixas atratoras (inversamente atratoras) em $\Sigma_A \times I$ tais que $\Pi(S) = \Pi(S')$ e denote por B e B' , respectivamente, seus atratores maximais. Então $\Pi(B) = \Pi(B')$.*

Demonstração. Note inicialmente que escrevendo

$$B = \bigcup_{\omega \in \Sigma_A} \{\omega\} \times B_\omega,$$

nós temos que

$$B_\omega = \bigcap_{n \geq 1} g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)})$$

(lembre da notação introduzida em (1.6)). Suponha que $S \neq S'$ (caso contrário o resultado é imediato). Para cada $\omega \in \Sigma_A$, denote por $\omega' \in \Sigma_A$ a única sequência diferente de ω tal que $\overline{\omega'} = \overline{\omega}$. Como $\Pi(S) = \Pi(S')$, nós temos que $S_\omega = R(S'_{\omega'})$ para todo $\omega \in \Sigma_A$. Nós precisamos mostrar que também $B_\omega = R(B'_{\omega'})$. A demonstração é análoga à do Lema 3.6. Suponha inicialmente que $\omega \in C$ e fixe $n \geq 1$. Temos dois casos a considerar.

- Se $\sigma^{-n}(\omega) \in C$ então

$$g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}) = \Pi_2^A(G^n(\{\sigma^{-n}(\omega)\} \times S_{\sigma^{-n}(\omega)})).$$

Usando agora o Lema 3.5, a igualdade acima nos garante que

$$g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}) = \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(F^n(\Pi(\{\sigma^{-n}(\omega)\} \times S_{\sigma^{-n}(\omega)})))).$$

Isso junto com as definições de Π e F nos dá que

$$\begin{aligned} g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}) &= \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(F^n(\{\overline{\sigma^{-n}(\omega)}\} \times S_{\sigma^{-n}(\omega)}))) \\ &= \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(\{\overline{\omega}\} \times (f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)})))). \end{aligned}$$

Usando por fim as definições de $(\Pi|_{C \times I})^{-1}$ e Π_2^A , nós temos que

$$\begin{aligned} g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}) &= \Pi_2^A(\{\omega\} \times (f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}))) \\ &= f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}). \end{aligned}$$

Além disso, neste caso nós temos $\omega', \sigma^{-n}(\omega') \in \Sigma_A \setminus C$. Assim, de maneira análoga ao que fizemos acima, nós temos que

$$\begin{aligned} g_{\omega'_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega'_{-n}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')}) &= \Pi_2^A(G^n(\{\sigma^{-n}(\omega')\} \times S'_{\sigma^{-n}(\omega')})) \\ &= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(F^n(\Pi(\{\sigma^{-n}(\omega')\} \times S'_{\sigma^{-n}(\omega')}))))) \\ &= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(F^n(\{\overline{\sigma^{-n}(\omega')}\} \times R(S'_{\sigma^{-n}(\omega')}))))) \\ &= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(F^n(\{\overline{\sigma^{-n}(\omega)}\} \times S_{\sigma^{-n}(\omega)}))) \\ &= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(\{\overline{\omega}\} \times (f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}))))) \\ &= \Pi_2^A(\{\omega'\} \times R(f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}))) \\ &= R(f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)})). \end{aligned}$$

Logo, $g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}) = R(g_{\omega'_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega'_{-n}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')}))$.

- Agora, se $\sigma^{-n}(\omega) \in \Sigma_A \setminus C$ então

$$\begin{aligned}
g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}) &= \Pi_2^A(G^n(\{\sigma^{-n}(\omega)\} \times S_{\sigma^{-n}(\omega)})) \\
&= \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(F^n(\Pi(\{\sigma^{-n}(\omega)\} \times S_{\sigma^{-n}(\omega)})))) \\
&= \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(F^n(\{\overline{\sigma^{-n}(\omega)}\} \times R(S_{\sigma^{-n}(\omega)})))) \\
&= \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(F^n(\{\overline{\sigma^{-n}(\omega)}\} \times S'_{\sigma^{-n}(\omega')}))) \\
&= \Pi_2^A((\Pi|_{C \times I})^{-1}(\{\overline{\omega}\} \times (f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')})))) \\
&= \Pi_2^A(\{\omega\} \times (f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')}))) \\
&= f_{\overline{\omega_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega_{-n}}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')}).
\end{aligned}$$

Além disso, neste caso nós temos $\omega' \in \Sigma_A \setminus C$ e $\sigma^{-n}(\omega') \in C$, de modo que

$$\begin{aligned}
g_{\omega'_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega'_{-n}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')}) &= \Pi_2^A(G^n(\{\sigma^{-n}(\omega')\} \times S'_{\sigma^{-n}(\omega')})) \\
&= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(F^n(\Pi(\{\sigma^{-n}(\omega')\} \times S'_{\sigma^{-n}(\omega')})))) \\
&= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(F^n(\{\overline{\sigma^{-n}(\omega')}\} \times S'_{\sigma^{-n}(\omega')}))) \\
&= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(F^n(\{\overline{\sigma^{-n}(\omega')}\} \times S'_{\sigma^{-n}(\omega')}))) \\
&= \Pi_2^A((\Pi|_{(\Sigma_A \setminus C) \times I})^{-1}(\{\overline{\omega'}\} \times (f_{\overline{\omega'_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega'_{-n}}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')})))) \\
&= \Pi_2^A(\{\omega'\} \times R(f_{\overline{\omega'_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega'_{-n}}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')}))) \\
&= R(f_{\overline{\omega'_{-1}}} \circ \dots \circ f_{\overline{\omega'_{-n}}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')})).
\end{aligned}$$

Logo, $g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}) = R(g_{\omega'_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega'_{-n}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')}))$ também neste caso.

Como nós obtivemos que $g_{\omega_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega_{-n}}(S_{\sigma^{-n}(\omega)}) = R(g_{\omega'_{-1}} \circ \dots \circ g_{\omega'_{-n}}(S'_{\sigma^{-n}(\omega')}))$ em qualquer uma das duas situações, e como isso vale para todo $n \geq 1$, segue que $B_\omega = R(B'_{\omega'})$ no caso $\omega \in C$. O caso em que $\omega \in \Sigma_A \setminus C$ é análogo. Isso conclui a prova do lema. $\square$

3.5.2 Estrutura nas medidas

Nesta subseção nós vamos relacionar medidas invariantes e ergódicas com respeito a F com medidas invariantes com respeito a G .

Dado um ponto $(\xi, z) \in \Sigma_N \times I$, defina, para cada $n \geq 1$,

$$\nu_n(\xi, z) := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{F^i(\xi, z)}.$$

O seguinte resultado é uma consequência do Teorema Ergódico de Birkhoff e do fato que o espaço $C^0(\Sigma_N \times I)$ das funções contínuas em $\Sigma_N \times I$ é separável.

Lema 3.40. *Seja ν uma medida F -invariante e ergódica. Então existe um subconjunto $E \subset \Sigma_N \times I$ tal que $\nu(E) = 1$ e $\nu_n(\xi, z) \rightarrow \nu$ na topologia fraca-estrela para todo $(\xi, z) \in E$.*

Dado um ponto $(\omega, x) \in \Sigma_A \times I$, defina, para cada $n \geq 1$,

$$\mu_n(\omega, x) := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{G^i(\omega, x)}.$$

A sequência $(\mu_n(\omega, x))$ possui ao menos um ponto de acumulação, o qual é G -invariante por um argumento padrão.

Lema 3.41. *Se $(\omega, x) \in \Pi^{-1}(E)$ e μ é um ponto de acumulação da sequência $(\mu_n(\omega, x))$ então $\nu = \Pi_*\mu$.*

Demonstração. Fixe $(\omega, x) \in \Sigma_A \times I$ e seja $(\xi, z) = \Pi(\omega, x)$. Note inicialmente que

$$\delta_{(\xi, z)} = \Pi_*(\delta_{(\omega, x)}). \quad (3.52)$$

De fato, para cada $A \in \mathcal{B}_{\Sigma_N \times I}$, nós temos que

$$\Pi_*(\delta_{(\omega, x)})(A) = \delta_{(\omega, x)}(\Pi^{-1}(A)) = \begin{cases} 1, & \text{se } (\omega, x) \in \Pi^{-1}(A) \\ 0, & \text{se } (\omega, x) \notin \Pi^{-1}(A). \end{cases}$$

Mas $(\omega, x) \in \Pi^{-1}(A)$ se, e somente se, $(\xi, z) \in A$. Dessa forma, nós podemos escrever

$$\delta_{(\omega, x)}(\Pi^{-1}(A)) = \begin{cases} 1, & \text{se } (\xi, z) \in A \\ 0, & \text{se } (\xi, z) \notin A. \end{cases}$$

Logo, $\delta_{(\omega, x)}(\Pi^{-1}(A)) = \delta_{(\xi, z)}(A)$ e como isto vale para todo $A \in \mathcal{B}_{\Sigma_N \times I}$, realmente (3.52) é verdade. Agora, aplicando (3.52) para o ponto $G^n(\omega, x)$ e usando o Lema 3.5, nós obtemos que

$$\Pi_*(\delta_{G^n(\omega, x)}) = \delta_{\Pi(G^n(\omega, x))} = \delta_{F^n(\Pi(\omega, x))} = \delta_{F^n(\xi, z)} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Daí segue que

$$\nu_n(\xi, z) = \Pi_*(\mu_n(\omega, x)) \quad \text{para todo } n \geq 1. \quad (3.53)$$

Fixe agora $(\omega, x) \in \Pi^{-1}(E)$ e seja $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(\omega, x)$ um ponto de acumulação da sequência $(\mu_n(\omega, x))$.

Como $(\xi, z) = \Pi(\omega, x) \in E$, o Lema 3.40 e (3.53) nos dão que para toda $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Sigma_N \times I)$,

$$\int \varphi d\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi d\nu_{n_k}(\xi, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi \circ \Pi d\mu_{n_k}(\omega, x) = \int \varphi \circ \Pi d\mu = \int \varphi dh_*\mu.$$

Como isso vale para toda $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Sigma_N \times I)$, segue que $\nu = \Pi_*\mu$, o que conclui a prova do lema. $\square$

Pelo Lema 3.41, dada uma medida F -invariante e ergódica ν , é possível obter uma medida G -invariante μ tal que $\nu = \Pi_*\mu$. Observe, contudo, que a medida μ pode não ser única e pode também não ser ergódica, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1. *Sejam $N = 2$ e $f_1, f_2 : I \rightarrow \text{int}(I)$ tais que f_1 preserva orientação e f_2 reverte. Suponha que f_1 tem um ponto fixo p_1 . Defina $\nu := \delta_{((1)^{\mathbb{Z}}, p_1)}$, claramente uma medida F -invariante e ergódica. As imagens inversas de $((1)^{\mathbb{Z}}, p_1)$ por Π são os pontos $((1)^{\mathbb{Z}}, p_1)$ e $((3)^{\mathbb{Z}}, 1 - p_1)$. Assim, ambas as medidas $\mu := \delta_{((1)^{\mathbb{Z}}, p_1)}$ e $\hat{\mu} := \delta_{((3)^{\mathbb{Z}}, 1 - p_1)}$ são G -invariantes e satisfazem $\Pi_*\mu = \nu$ e $\Pi_*\hat{\mu} = \nu$. Além disso, para cada $t \in [0, 1]$, a medida $\mu_t := t\mu + (1 - t)\hat{\mu}$ é também G -invariante e satisfaz $\Pi_*\mu_t = \nu$. Porém, μ_t não é ergódica para $t \in (0, 1)$.*

Fixe agora $F \in \widehat{\mathcal{R}}(N)$ um step skew product afirmado pelo Teorema 3.1 e seja G o seu step skew product estendido. Conforme já comentamos, na Seção 3.6 será provado que G está nas condições de [22, 2.15 Theorem] e que cada dupla faixa atratora (inversamente atratora) com respeito a F é a imagem por Π de uma faixa atratora (inversamente atratora) com respeito a G . Além disso, também por [22, 2.15 Theorem], dada uma faixa atratora S (com respeito a G), existe uma única medida G -invariante e ergódica $\mu = \mu_S$ que projeta para a medida de Markov λ , extensão de λ_0 (a medida fixada no Teorema 3.1) para Σ_A .

Lema 3.42. *Seja $S_0 = \Pi(S) \subset \Sigma_N \times I$ uma dupla faixa atratora com respeito a F . Então a única medida F -invariante e ergódica que projeta para a medida λ_0 é a medida $\Pi_*\mu$, onde $\mu = \mu_S$.*

Demonstração. Observe inicialmente que

$$\text{supp}(\nu) \subset B_0 \quad \text{para toda medida } \nu \text{ } F\text{-invariante e ergódica com suporte em } S_0, \quad (3.54)$$

onde B_0 é o atrator maximal de S_0 . Além disso, pela estrutura geral das faixas já discutida, nós temos também que $S_0 = \Pi(S) = \Pi(S')$, onde S' é a faixa simétrica de S em $\Sigma_N \times I$. Mais ainda, ou $S = S'$ (o que ocorre para no máximo uma faixa S_0) ou $S \cap S' = \emptyset$. Vamos analisar esses dois casos separadamente.

Caso $S = S'$. Se $S = S'$ então S_0 é uma faixa (simples), de modo que existe um subconjunto $E \subset \Sigma_N$ tal que $\lambda_0(E) = 1$ e a projeção $\Pi_1 : B_0 \cap \Pi_1^{-1}(E) \rightarrow E$ é uma bijeção. Isso junto com (3.54) nos garante que, nesse caso, a única medida em S_0 que projeta para λ_0 é a própria $\Pi_*\mu$.

Caso $S \cap S' = \emptyset$. Se $S \cap S' = \emptyset$ então a dupla faixa S_0 não é uma faixa (simples), de modo que não podemos aplicar o mesmo argumento do ítem anterior. Note porém que nesse caso, $\Pi|_S : S \rightarrow S_0$ e $\Pi|_{S'} : S' \rightarrow S_0$ são bijeções, tais que $\Pi|_S \circ G = F \circ \Pi|_S$ e $\Pi|_{S'} \circ G = F \circ \Pi|_{S'}$. Suponha então que, além de $\Pi_*\mu$, ν é uma outra medida em S_0 que satisfaz as condições do lema. Como $\Pi|_S : S \rightarrow S_0$ e $\Pi|_{S'} : S' \rightarrow S_0$ são bijeções, nós podemos considerar as medidas

$$\widehat{\mu} := ((\Pi|_S)^{-1})_*\nu \quad \text{e} \quad \widehat{\mu}' := ((\Pi|_{S'})^{-1})_*\nu.$$

Como ν é invariante e ergódica com respeito a F , nós temos que $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\mu}'$ são invariantes e ergódicas com respeito a G .

Afirmção 1. *As medidas $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\mu}'$ são simétricas.*

Demonstração. Fixe $i \in \{1, \dots, N\}$. Como as faixas S e S' são simétricas, nós temos que

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}([0; i] \times I) &= \widehat{\mu}([0; i] \times I \cap S) \\ (\text{pela definição de } \widehat{\mu}) &= \nu(\Pi|_S([0; i] \times I \cap S)) \\ (\text{simetria das faixas}) &= \nu(\Pi|_{S'}([0; N+i] \times I \cap S')) \\ (\text{pela definição de } \widehat{\mu}') &= \widehat{\mu}'([0; N+i] \times I \cap S') \\ &= \widehat{\mu}'([0; N+i] \times I) \end{aligned}$$

Como o argumento pode ser mostrado de forma análoga para cilindros de tamanho arbitrário, a afirmação está provada. $\square$

Observe agora que as projeções $\widehat{\lambda}$ e $\widehat{\lambda}'$ de $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\mu}'$ em Σ_A são medidas simétricas. De fato, se B e B' são os atratores maximais de S e S' então $\text{supp}(\widehat{\mu}) \subset B$ e $\text{supp}(\widehat{\mu}') \subset B'$ por (3.54). Como além disso $\Pi_1^A|_B : B \rightarrow \Pi_1^A(B)$ e $\Pi_1^A|_{B'} : B' \rightarrow \Pi_1^A(B')$ são bijeções (módulo um conjunto de $\widehat{\mu}$ -medida zero e $\widehat{\mu}'$ -medida zero, respetivamente), segue da Afirmação 1, que realmente as projeções de $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\mu}'$ em Σ_A são medidas simétricas. Vejamos que

$$\pi_*\widehat{\lambda} = \lambda_0.$$

De fato, nós vamos mostrar este fato novamente para cilindros de comprimento 1 e o argumento geral é análogo. Fixe $i \in \{1, \dots, N\}$. Então

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}(\pi^{-1}([0; i])) &= \widehat{\lambda}([0; i] \cup [0; N + i]) = \widehat{\lambda}([0; i]) + \widehat{\lambda}([0; N + i]) \\ &= \widehat{\mu}([0; i] \times I) + \widehat{\mu}([0; N + i] \times I) = \widehat{\mu}([0; i] \times I \cup [0; N + i] \times I) \\ &= \widehat{\mu}(\Pi^{-1}([0; i] \times I)) \\ &= \nu([0; i] \times I) \\ &= \lambda_0([0; i]). \end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos mostrar que $\widehat{\lambda}'$ projeta para λ_0 e que $\widehat{\lambda}$ e $\widehat{\lambda}'$ são medidas de Markov em Σ_A . Como ambas, $\widehat{\lambda}$ e $\widehat{\lambda}'$, projetam em λ_0 e são simétricas, segue $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}'$ e portanto, $\widehat{\lambda} = \lambda$ (extensão de λ_0 para Σ_A).

Pela unicidade de μ satisfazendo [22, 2.15 Theorem], isto é, como μ é a única medida G -invariante e ergódica projetando para λ , nós temos que $\widehat{\mu} = \mu$. Logo, $\nu = (\Pi|_S)_*\mu$. $\square$

3.6 Conclusão da demonstração do Teorema 3.1

Vamos nesta seção concluir a demonstração do Teorema 3.1. A demonstração é baseada em argumentos da demonstração de [22, 2.15 Theorem] e nos lemas provados nas seções anteriores. Como [22] já nos dá o resultado para o espaço $\mathcal{P}(N)$, é suficiente considerar o espaço $\mathcal{R}(N)$.

Pela Proposição 3.26 existe um conjunto aberto e denso $\widehat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}(N)$ de step skew products que satisfazem todas as condições i), ii) e iii) enunciadas na Seção 3.4. Seja $F \in \widehat{\mathcal{R}}$. Pelos Lemas 3.2, 3.34, 3.35 e 3.36 nós temos que o step skew product G estendido de F introduzido na Definição 3.4 satisfaz as condições de [22, 2.15 Theorem]. Então existe uma coleção finita de faixas atratoras e faixas inversamente atratoras para G tais que sua união é todo o espaço $\Sigma_A \times I$. Pelo Lema 3.9, cada faixa atratora (com respeito a G) em $\Sigma_A \times I$ é levada por Π em uma dupla faixa atratora (com respeito a F) em $\Sigma_N \times I$. Da mesma maneira, cada faixa inversamente atratora (com respeito a G) em $\Sigma_A \times I$ é levada por Π em uma dupla faixa inversamente atratora (com respeito a F) em $\Sigma_N \times I$. Como Π é sobrejetora, a Afirmação 1 do Teorema 3.1 está provada.

Fixe agora $S_0 = \Pi(S)$ uma dupla faixa atratora com respeito a F , onde S é uma faixa atratora com respeito a G , e denote por B o atrator maximal de S . Por [22, 2.15 Theorem], B é um gráfico ossudo contínuo com respeito à medida de Markov λ , onde λ é a extensão simétrica de λ_0 para Σ_A . Assim, por (3.16) e pelos Lemas 3.10, 3.13 e 3.21, o atrator maximal de S é o conjunto $\Pi(B)$, que é um bi-gráfico ossudo contínuo. De maneira análoga, o atrator maximal de cada dupla faixa inversamente atratora é um bi-gráfico ossudo contínuo. Isso prova a Afirmação 2 do Teorema 3.1.

A fim de provar a Afirmação 3 do Teorema 3.1, considere novamente $S_0 = \Pi(S)$ uma dupla faixa atratora com respeito a F , onde S é uma faixa atratora com respeito a G , e denote por B_0 seu atrator maximal. Por [22, 2.15 Theorem], existe uma única medida μ em S que é invariante e ergódica (com respeito a G) e tal que $(\Pi_1^A)_*\mu = \lambda$, onde λ é a extensão simétrica de λ_0 para Σ_A . Além disso, μ é física, hiperbólica e sua bacia contém um conjunto de medida total em S . Pelo Lema 3.15, a medida $\Pi_*\mu$ é invariante, ergódica e projeta para λ_0 . Além disso, pelo Lema 3.42, ela é a única medida com esta propriedade e segue dos Lemas 3.23 e 3.25 que $\Pi_*\mu$ é física, hiperbólica e que sua bacia contém um conjunto de medida total na dupla faixa S_0 . Isso conclui a prova da Afirmação 3 do Teorema 3.1 no caso de duplas faixas atradoras. No caso de duplas faixas inversamente atradoras, a demonstração é análoga.

Por fim, para provar a Afirmação 4, fixe mais uma vez $S_0 = \Pi(S)$ uma dupla faixa atratora com respeito a F e seja ν a medida obtida na Afirmação 3. Suponha que S_0 é uma faixa. Combinando a Afirmação 2 provada acima e (3.54), nós temos que existe um subconjunto $\Upsilon \subset B_0$ tal que $\nu(\Upsilon) = 1$ e a projeção $\Pi_1|_{\Upsilon} : \Upsilon \rightarrow \Pi_1(\Upsilon)$ é uma bijeção. Como é imediato que

$$\Pi_1 \circ F = \sigma \circ \Pi_1,$$

nós temos que $\Pi_1|_{\Upsilon}$ é uma conjugação entre Υ e $\Pi_1(\Upsilon)$. No caso em que S_0 é uma dupla faixa, a prova é análoga, mas $\Pi_1|_{\Upsilon}$ deixa de ser bijeção e passa a ser uma aplicação sobrejetora dois para um. Isso prova a Afirmação 4 no caso de faixas atradoras. O caso de faixas inversamente atradoras é análogo. Portanto, o Teorema 3.1 está provado. $\square$

3.7 Discussão e questões em aberto

Os resultados obtidos nos levam a uma série de questões e problemas a serem resolvidos, alguns dos quais serão descritos abaixo.

O estudo da regularidade (por exemplo semi-continuidade, continuidade, Hölder-regularidade ou ainda diferenciabilidade) dos gráficos invariantes obtidos nos Teoremas 2.1, 2.5 e 3.1, surge como uma questão natural, visto que quanto “maior” a regularidade destes, mais propriedades da dinâmica na base podem ser transferidas para a dinâmica do sistema. Esse tipo de questão foi tratado, por exemplo, no caso em que os mapas na fibra são contrativos (ver [15] e [30]).

Obter condições sobre os conjuntos hiperbólicos para que os gráficos invariantes associados a estes sejam

de fato gráficos de funções ou gráficos de bi-funções também poderia melhorar nossos resultados. De fato, isso impediria uma “decomposição” do conjunto hiperbólico em mais de um gráfico invariante dando uma melhor relação entre a dinâmica da base e a dinâmica do sistema restrito a conjuntos relevantes tanto do ponto de vista topológico quanto ergódico.

Uma maneira natural de tentar estender nossos resultados seria considerar sistemas definidos como em (1.1) com uma fibra mais geral, por exemplo, o círculo, que apesar de ser ainda unidimensional, não apresenta a relação de ordem, essencial para “transformar” gráficos de multi-funções em gráficos de bi-funções ou gráficos de funções. Caso obtidos, esses resultados poderiam estender o trabalho de Ruelle e Wilkinson em [27].

Outro problema interessante seria determinar condições que limitem a quantidade de faixas ou duplas faixas obtidas para um step skew product genérico. Essa questão está intimamente ligada à possível não unicidade de estados de equilíbrio para certos potenciais. De fato, a existência de mais de um bony-graph invariante nos dá, por exemplo, a não unicidade de uma medida de máxima entropia, uma vez que isto implica a existência de mais de um levantamento da medida de Markov com máxima entropia na base para o sistema.

Referências

- [1] ALVES, J. F., 2000, *SRB measures for non-hyperbolic systems with multidimensional expansion*, Ann Sci. École Norm. Sup. **33**, 1-32.
- [2] ARNOLD, V., 1998, *Random Dynamical Systems*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.
- [3] ALVES, J. F., BONATTI, C., VIANA, M., 2000, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding*, Invent. Math. **140**, 351-398.
- [4] BONIFANT, A., MILNOR, J., 2008, *Schwarzian derivatives and cylinder maps*, Fields Inst. Commun. **53**, Holomorphic dynamics and renormalization, 1-21.
- [5] DÍAZ, L. J., GELFERT, K., 2012, *Porcupine-like horseshoes: Transitivity, Lyapunov spectrum, and phase transitions*, Fund. Math. **216**, 55-100.
- [6] DÍAZ, L. J., GELFERT, K., RAMS, M., 2011, *Rich phase transitions in step skew products*, Nonlinearity **24** (12), 3391-3412.
- [7] DÍAZ, L. J., GELFERT, K., RAMS, M., 2013, *Almost complete Lyapunov spectrum in step skew-products*, Dynamical Systems **28**, 76-110.
- [8] DÍAZ, L. J., GELFERT, K., RAMS, M., 2014, *Abundant phase transitions in step skew products*, Nonlinearity **27**, 2255-2280.
- [9] DÍAZ, L. J., HORITA, V., RIOS, I., SAMBARINO, M., 2009, *Destroying horseshoes via heterodimensional cycles: generating bifurcations inside homoclinic classes*, Ergodic Th. & Dynam. Sys. **29**, 433-474.
- [10] DÍAZ, L. J., MARCARINI, T., 2015, *Generation of spines in porcupine-like horseshoes*, Nonlinearity **28** (11), 4249-4279.
- [11] FOLLAND, G. B., 1999, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Wiley-Interscience.
- [12] FAN, A. H., SIMON, K. TÓTH, H. R., 2006, *Contracting on average random IFS with repelling fixed point*, J. Stat. Phys. **122** (1) 169-193.

- [13] GHARAEI, M., HOMBURG, A. J., *Skew products of interval maps over subshifts*, preprint.
- [14] HASSELBLAT, B., KATOK, A., 1995, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press.
- [15] HADJILOUCAS, D., NICOL, M. J., WALKDEN, C. P., 2002, *Regularity of invariant graphs over hyperbolic systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **22** (2), 469-482.
- [16] HIRAYAMA, M., PESIN, Y., 2007, *Non absolutely continuous foliations*, Israel J. Math. **160**, 173-187.
- [17] HIRSCH, M. W., PUGH, C. C., SHUB, M., 1977, *Invariant manifolds*, Lectures Notes in Mathematics, Springer.
- [18] ILYASHENKO, Y., 2010, *Thick attractors of step skew products*, Regul. Chaotic Dyn. **15** (2-3), 328-334.
- [19] JÄGER, T., 2003, *Quasiperiodically forced interval maps with negative Schwarzian derivative*, Nonlinearity **16** (4), 1239-1255.
- [20] KELLER, G., 2015, *Stability index, uncertainty exponent, and thermodynamic formalism for intermingled basins of chaotic attractors*, preprint.
- [21] KIFER, Y., 1986, *Ergodic theory of random transformations*, Birkhäuser Boston, 1986.
- [22] KLEPTSYN, V., VOLK, D., 2014, *Physical measures for non linear random walks on interval*, Mosc. Math. J. **14** (2), 339-365, 428.
- [23] MALICET, D., *Randon walks on $\text{Homeo}(S^1)$* , preprint.
- [24] MAÑE, R., 1987, *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer Verlag.
- [25] PLISS, V., 1972, *On a conjecture due to Smale*, Diff. Uravnenija **8**, 262-268.
- [26] ROBINSON, C., 1998, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press.
- [27] RUELLE, D., WILKINSON, A., 2001, *Absolutely singular dynamical foliations*, Comm. Math. Phys. **219** (3), 481-487.
- [28] SRIVASTAVA, S. M., 1998, *A Course on Borel Sets*, Springer.
- [29] STARK, J., 1997, *Invariant graphs for forced systems*, Phys. D **109** (1-2), 163-179.
- [30] STARK, J., 1999, *Regularity of invariant graphs for forced systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1), 155-199.
- [31] WALTERS, P., 1982, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer.