Fluxos CW-expansivos

por

Welington da Silva Cordeiro

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

2015

Fluxos CW-expansivos

Welington da Silva Cordeiro

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Profa. Maria José Pacífico

PhD - IM - UFRJ - Orientador.

Prof. Vitor Domingos Martins de Araújo

PhD - IM - UFBA.

Prof. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

PhD - IM - UFRJ

Prof. Samuel Anton Senti

PhD - IM - UFRJ

Profa. Isabel Lugão Rios

PhD - IM - UFF

Rio de Janeiro, 08 de maio de 2015.

FICHA CATALOGRÁFICA

Cordeiro, Welington da Silva.

Fluxos CW-expansivos/

Welington da Silva Cordeiro.

Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2014.

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IME. 1. Introdução.

2. CW-Expansividade para fluxos

3. Fluxos CW-expansivos e Secções tranversais

4. Fluxos CW-Expansivos e Entropia positiva

5. Expansividade fraca para fluxos

(Doutorado-UFRJ/IM) Pacifico, Maria José

II. Universidade Federal do Rio de Janeiro III. Título.

Agradecimentos

Eu gostaria de começar agradecendo a Deus por tudo que tem feito em minha vida.

Para as pessoas que eu mais amo: meus pais e meus irmãos.

A minha orientadora Maria José Pacífico, pela paciência e apoio.

Todos os professores que tive durante o Doutorado foram muito importantes nesta jornada, especialmente os professores Vitor Araújo, Alexander Arbieto e Samuel Senti.

A todos os meus colegas do IM, em particular aos meus amigos Romulo, Tatiane, Sara, Davi e Bernardo. Com eles os dias de estudo se tornaram mais alegres!

Agradecer ao professor José Vieitez e meu amigo Alfonso Artigue, pelo mês em que eu mais aprendi sobre expansividade durante meu Doutorado.

Ao professor Manfred Denker por ter me aberto o interesse em outras áreas de estudo.

À UFRJ e à CAPES pela estrutura e apoio financeiro.

Quem é John Galt?

Resumo

Expansividade é um tema que tem chamado a atenção de vários pesquisadores nas últimas décadas. A definição de CW-expansividade para homeomorfismos foi feita por Kato. Neste trabalho, nós definimos CW-expansividade para fluxos. Também consideramos uma definição e entropia em seções tranversais para fluxos sem pontos fixos. E provamos que para fluxos CW-expansivos sem pontos fixos, a entropia topológica do fluxo é positiva.

Palavras Chaves: Caos, expansividade, Entropia, Sensibilidade às condições iniciais.

Abstract

The study of expansive dynamical systems for more general dynamics attracts a lot of attention by many researchers. Indeed, the study of expansive homeomorphisms is classical in the literature. In 1972, Bowen and Walters defined expansivity for flows. In 1993, Hisao Kato defined that a homeomorphism $f : X \to X$ is continuum wise expansive if there exists $\epsilon > 0$ such that if $A \subset X$ is a non-trivial compact and connected set, then there is $n \in \mathbb{Z}$ such that $\mathrm{diam}(f^n(A)) > \epsilon$. In this work, we try to define the continuum wise expansive property for flows, and we prove that continuum wise expansive flows have positive entropy.

Key Words: chaos, entropy, expansivity, sensitivity to initial conditions.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Desde os anos 1970 a noção de caos tem chamado a atenção de muitos pesquisadores em todo o mundo. O significado exato da palavra caos costuma ser muito complexo, e pode variar conforme o tipo de sistema com que estamos trabalhando. Muitas vezes é preferível trabalhar com noções mais fortes, que implicam caos ou sensibilidade às condições iniciais. Lembramos que um sistema é sensível às condições iniciais se a evolução no tempo de dois pontos próximos se afasta, independente da proximidade inicial dos pontos. Quando trabalhamos com homeomorfismos de um espaço métrico compacto é bastante comum considerarmos a noção (já considerada clássica) de expansividade. Esta noção foi definida primeiramente por Utz em [Utz], no ano de 1950. Esta classe é relativamente grande e engloba os difeomorfismos Anosov. A literatura sobre os homeomorfismos expansivos é bastante vasta. No fim dos anos 70, Mañé mostrou, em [Ma], que um espaço métrico que admite um homeomorfismo expansivo deve ter dimensão topológica finita. Nos anos 80, em [L1] e [L2], Lewowics mostrou que S^2 não pode suportar um homeomorfismo expansivo e que no toro um homeomorfismo expansivo deve ser conjugado a um diffeomorfismo Anosov, e além disso, qualquer homeomorfismo definido em uma superfície de gênero maior ou igual a 2 deve ser conjugado a um pseudo-Anosov. Ainda hoje os homeomorfismos expansivos tem sido bastante estudados, como podemos ver em, por exemplo Groisman-Vieitez ([GV]).

A definição de expansividade também foi adaptada para fluxos por Bowen e Walters em [BW]. Sua definição é um invariante topológico, no sentido que qualquer fluxo topologicamente conjugado a um fluxo expansivo deve também ser expansivo. Uma definição mais geral de expansividade foi feita por Komuro em [Ko]. O atrator geométrico de Lorenz é um exemplo de um fluxo que é expansivo segundo Komuro, mas não é expansivo segundo a definição de Bowen e Walters. Isto se deve a existência de uma singularidade acumulada por órbitas regulares: as singularidades de um fluxo expansivo segundo Bowen e Walters devem ser isoladas.

Em [K1] Kato definiu a noção de CW-expansividade para homeomorfismos. Um homeomorfismo é CW-expansivo se existe um número positivo tal que para todo conjunto compacto conexo não-trivial (um *continuum*) tem algum iterado com diâmetro maior que este número. Claramente, um homeomorfismo expansivo é CW-expansivo. Neste mesmo artigo, Kato mostra que se um homeomorfismo CW-expansivo está definido em um espaço métrico compacto com dimensão topológica maior que zero então ele tem entropia topológica positiva. Ele também extendeu o resultado de Mañé, mostrando que se um espaço métrico compacto admite um homeomorfismo CW-expansivo, então a dimensão do espaço tem de ser finita, e se o homeomorfismo é minimal, então ele tem de ter dimensão topológica zero.

No ano de 1997 Sakai, em [S], mostrou que o C^1 interior dos difeomorfismos CW-expansivos é igual ao C^1 interior dos difeomorfismos expansivos. O estudo desta propriedade ainda tem chamado a atenção de diversos pesquisadores no mundo como em [L], de 2013, onde Lee mostra que se um conjunto transitivo não-trivial é C^1-estavelmente CW-expansivo então ele admite uma decomposição dominada.

O objetivo principal deste trabalho é propor uma definição de CW-expansividade para fluxos que englobe uma classe ampla de fluxos. Mais ainda, verificar que tais fluxos, a exemplo dos homeomorfismos CW-expansivos, também têm entropia topológica positiva.

A seguir descrevemos os resultados principais deste trabalho. Os primeiros teoremas, que demonstramos no Capítulo 2, são os seguintes:

Teorema 1.1. *CW-expansividade é invariante por conjugação, ou seja, se um fluxo X^t é conjugado a um fluxo que é CW-expansivo, então X^t também é CW-expansivo.*

Teorema 1.2. *A suspensão de um homeomorfismo $\phi : M \to M$ é CW-expansivo se, e somente se, o homeomorfismo ϕ é CW-expansivo.*

A seguir, no terceiro capítulo, utilizando secções transversais, que é uma ferramenta muito usada no estudo de fluxos sem pontos de equilibrio, mostramos a equivalência de nossa definição a uma condição de CW-expansividade nas secções transversais:

Teorema 1.3. *Um fluxo X^t é CW-expansivo se, e somente se, dado um par $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ δ-adequado, existe $\eta > 0$ tal que*

$$W^s_\eta \cap W^u_\eta = \{A \subset M; \#A = 1\}.$$

No quarto capítulo estudamos a entropia topológica para fluxos CW-expansivos, e provamos o resultado principal deste trabalho:

Teorema 1.4. *Se X^t é um fluxo CW-expansivo em um espaço métrico compacto M com dimensão topológica maior que 1, então $h(X^t) > 0$.*

Observamos que este resultado é uma extensão do resultado de Kato [K1, Teorema 4.1] (página 585).

Finalmente, no último capítulo introduzimos a noção de n-expansividade para fluxos, e também a noção de Komuro CW-expansividade para fluxos com singularidade, e colocamos algumas questões em aberto.

Capítulo 2

CW-Expansividade para fluxos

Nas primeiras duas seções deste capítulo, por completude, vamos falar rapidamente sobre as noções de expansividade para fluxos ([BW]) e CW-expansividade para homeomorfismos ([K1]). a partir da terceira seção, vamos definir a noção de CW-expansividade para fluxos e dar resultados preliminares, como a inexistência de pontos fixos em fluxos CW-expansivos definidos em espaços métricos compactos e conexos, a invariância por conjugação e o resultado que justifica nossa definição: um homeomorfismo é CW-expansivo se, e só se, seu fluxo suspensão é CW-expansivo.

2.1 Expansividade para Homeomorfismos e fluxos:

Considere M um espaço métrico compacto.

Considere a seguinte definição clássica de expansividade:

Definição: $f : M \to M$ é *expansivo* se existe $\delta > 0$ (chamado de constante de expansividade) tal que se $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$ para todo número inteiro n então $x = y$. São conhecidos resultados sobre a dimensão topológica de espaços métricos que suportam homeomorfismos expansivos, como o resultado de Mañé:

Teorema 2.1. *[Ma] Se um espaço métrico compacto admite um homeomorfismo expansivo, então a dimensão topológica de M é finita.*

Também temos um resultado sobre a entropia topológica de um homeomorfismo expansivo,

Teorema 2.2. *[B1] Se $f : M \to M$ é um homeomorfimo expansivo e a dimensão topológica de M é maior que zero, então a entropia topológica de f é positiva.*

Um *fluxo* em M é uma família de homeomorfismos $\{X^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ tal que:

1. X^t é um homeomorfismo em M, para todo $t \in \mathbb{R}$;

2. X^0 é a identidade em M;

3. $X^{t+s} = X^t o X^s$ para quaisquer números reais t e s.

Em [BW] os autores definiram uma noção de expansividade para fluxos:

Definição: Um Fluxo $\{X^t\}$ é *expansivo* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com $s(0) = 0$ e $d(X^t(x), X^{s(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ então $y \in X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x)$.

Um ponto $p \in M$ é uma singularidade se $X^t(p) = p$ for all $t \in \mathbb{R}$. Em [BW] os autores mostram que singularidades de fluxos expansivos sempre são pontos isolados do espaço métrico. Também mostram algumas equivalências sobre expansvidade:

Proposição 2.1. *[BW] São equivalentes:*

1. $\{X^t\}$ *é expansivo;*

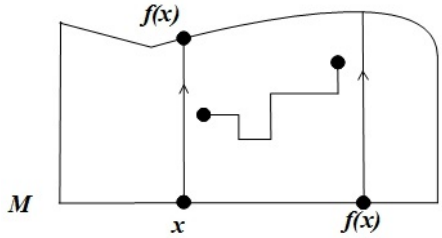
2. $\forall \epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é um homeomorfismo crescente com* $h(0) = 0$ *e* $d(X^t(x), X^{h(t)}(y)) < \delta$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *então* $y \in X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x)$.

3. $\forall \epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua com* $s(0) = 0$ *e* $d(X^t(x), X^{s(t)}(y)) < \delta$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *então* y *está na órbita de* x*, e o pedaço de órbita entre* x *e* y *estão contidos em* $B(x, \epsilon)$.

4. $\forall \epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *com a seguinte propriedade: Se* $\{t_i\}_i \in \mathbb{Z}$ *e* $\{u_i\}_{i\mathbb{Z}}$ *são sequências de números reais com* $u_0 = t_0 = 0$, $0 < t_{i+1} - t_i \leq \delta$, $|u_{i+1} - u_i| \leq \delta$, $t_i \to \infty$ *and* $t_{-i} \to -\infty$ *as* $i \to \infty$, *and* $d(X^{t_i}(x), X^{u_i}(y)) < \delta$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$ *então* $y \in X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x)$

Considere dois fluxos X^t em M e Y^t em N, nós dizemos que esses fluxos são conjugados, se existe um homeomorfismo de M em N que leva órbitas de X^t em órbitas de Y preservando a orientação das órbitas.

Proposição 2.2. *[BW] Se um fluxo* X^t *é conjugado a um fluxo expansivo, então* X^t *é expansivo.*



Sejam $\phi : M \to M$ um homeomorfismo e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Se $y \in M$ faça $y_f = \cup_{0 \leq t \leq f(y)}(y, t)$, e considere a seguinte relação de equivalência no conjunto $\bigcup_{y \in M} y_f$: $(y, t) \approx (y, t)$ e $(y, f(y)) \approx (\phi(y), 0)$, para todo $y \in M$. Definimos como M_f o espaço quociente de $\bigcup_{y \in M} y_f$ pela relação $\approx$. A suspensão de ϕ por f é o fluxo definido em M_f por: $X^t(y, s) = (\phi^{[t+s]}(y), t + s - [t + s])$, $t \in \mathbb{R}$ e $0 \leq s < f(y)$.

Seja ρ a métrica considerada em M e definimos uma métrica ρ_t em $M \times \{t\}$ por $\rho_t((y, t), (z, t)) = (1 - t)\rho(y, z) + t\rho(\phi(y), \phi(z))$, $y, z \in M$. Note que $\rho_0((y, 0), (z, 0)) = \rho(y, z)$ e $\rho_1((y, 1), (z, 1)) = \rho(\phi(y), \phi(z))$. Se dois pontos estão em uma mesma órbita definimos a distância entre eles simplesmente como a distância entre seus tempos.

Sejam x_1 e x_2 em M_1. Uma cadeia finita entre x_1 e x_2 é um conjunto de pontos $w_1 = x_1$, w_2,...,w_{n-1},$w_n = x_2$ de elementos de M_1 tais que para qualquer i entre 1 e $n - 1$ temos que para o par w_i,w_{i+1}, ou ambos estão em algum y_f, ou ambos estão em uma mesma órbita de ϕ. O comprimento de uma cadeia é dado pela soma das distâncias entre os pontos da cadeia. Definimos então a distância d entre dois pontos em M_1 como o infímo do comprimento entre todas as cadeias entre eles.

A próxima proposição justifica a definição de fluxo expansivo.

Proposição 2.3. *[BW] Um homeomorfimso $f : M \to M$ é expansivo se, e somente se, toda suspensão de f é um fluxo expansivo.*

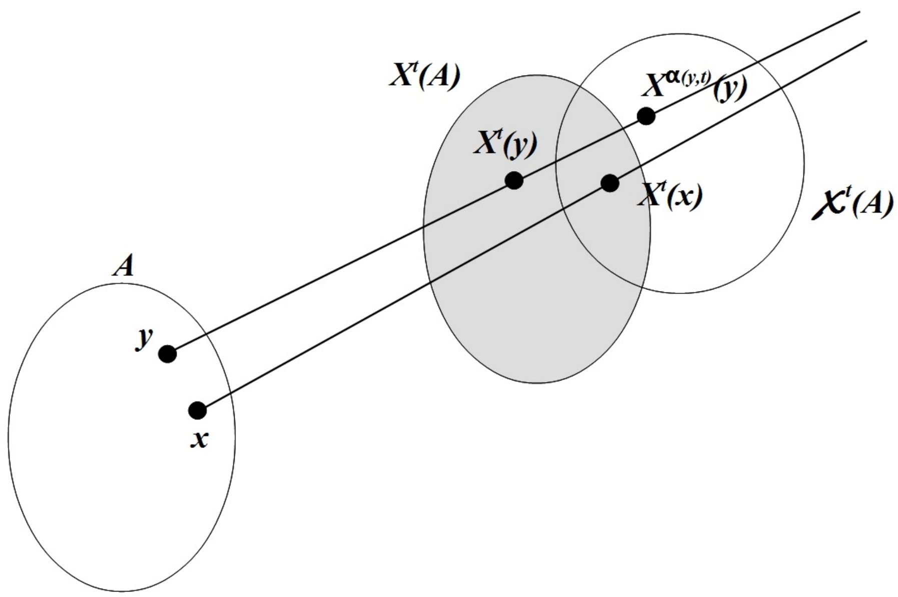
2.2 Homeomorfimos CW-expansivos:

Um *continuum* é um espaço métrico compacto e conexo. Em [K1] o autor faz a seguinte definição: **Definição:** Um homeomorfismo $f : X \to X$ é CW expansivo se existe $\delta > 0$ tal que se $A \subset X$ é um continuum então existe um inteiro $n = n(A)$ com $\text{diam}(f^n(A)) > \delta$. O autor prova o seguinte:

Teorema 2.3. *[K1] Se um homeomorfismo $f : X \to X$ é CW-expansivo e a dimensão topológica de X é positiva então a entropia topológica de f é positiva.*

2.3 Fluxos CW-expansivos

Aqui vamos definir CW-expansividade para fluxos.



Considere um fluxo X^t definido em um continuum M. Defina,

- $Hom(\mathbb{R}, 0) = \{h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; h$ é um homeomorfismo e $h(0) = 0\}$;
- Se $A \subset M$, $H(A) = \{\alpha : A \to Hom(\mathbb{R}, 0);\ \exists x_\alpha \in A$ com $\alpha(x_\alpha) = id_{\mathbb{R}}$ e para todo $t \in \mathbb{R},\ \alpha(.)(t) \in C^0(A, \mathbb{R})\}$;

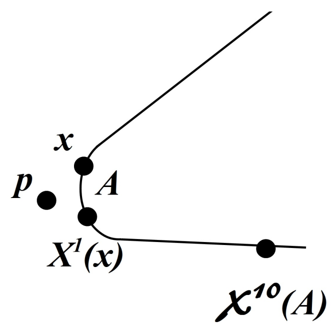
- Se $t \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in H(A)$, $\mathcal{X}^t_\alpha(A) = \{X^{\alpha(x)(t)}(x); x \in A\}$;

Definição: Um fluxo X^t é *CW-expansivo* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $A \subset M$ é um continuum e $\alpha \in H(A)$ é tal que $\mathrm{diam}(\mathcal{X}^t_\alpha(A)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ então $A \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x_\alpha)$.

Lema 2.1. *Seja X^t um fluxo CW-expansivo. Se p é um ponto fixo de X^t então existe $\delta > 0$ tal que não existem pontos com órbitas regulares de X^t em $B_\delta(p)$.*

Demonstração: Suponha que p seja uma singularidade do fluxo que é acumulada por órbitas regulares. Seja $\epsilon = \frac{1}{4}$ e $\delta > 0$ o número associado a este ϵ pela CW-expansividade. Defina,

$$h(t) = \begin{cases} t+1, \ \text{se } t \notin (-2,1) \\ 2t, \ \text{se } t \in [0,1) \\ \frac{t}{2}, \ \text{se } t \in (-2,0) \end{cases}$$



Pela continuidade do fluxo existe $x \in M - \{p\}$ tal que se $|t| < 3$ então $d(X^t(x), p) < \frac{\delta}{2}$. Seja $A = X^{[0,1]}(x)$, então A é um continuum. Definindo h_t : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por,

$$h_t = (1-t)Id + th.$$

Então, se $\alpha(X^t(x) = h_t$, temos que $\alpha \in H(A)$ e, ou $\mathcal{X}^s_\alpha(A)$ está dentro da bola de centro p e raio $\frac{\delta}{2}$, ou é um único ponto. Portanto, $\mathrm{diam}(\mathcal{X}_\alpha^s(A)) < \delta$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Então $A \subset X^{(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(x)$. Absurdo.

$\square$

Observação: Se M é um conjunto de cantor (totalmente desconexo), então o único fluxo em M é CW-expansivo e todos os pontos fixos são acumulados por outros pontos fixos.

Salvo observação em contrário, sempre que falarmos de fluxos CW-expansivos estaremos nos referindo a fluxos sem singularidades.

O seguinte lema será útil na sequência do nosso trabalho:

Lema 2.2. *[BW] Se X^t é um fluxo sem singularidades então existe $T_0 > 0$ tal que para todo $T \in (0, T_0)$ existe $\gamma > 0$ com $d(X^t(x), x) \geq \gamma$ para todo $x \in M$.*

Defina $\Sigma_{\mathbb{R}}(0)$ como o espaço das bi-sequências de números reais tais que $x_0 = 0$. Se $A \subset M$ defina

$$SQ(A) = \{\beta : A \to \Sigma_{\mathbb{R}}(0); \text{existe } x_\beta \text{ tal que } \beta(x_\beta)_i \to \infty \text{ quando } i \to \infty \text{ e}$$
$$\beta(x_\beta)_i \to -\infty \text{ quando } i \to -\infty\}.$$

E $SQ^*(A)$ o subconjunto de $SQ(A)$ tal que se $\beta \in SQ^*(A)$, então para cada $i \in \mathbb{Z}$ a função em $f_i : A \to \mathbb{R}$, definida por $f_i(a) = \beta(a)_i$, é contínua.

Se $\beta \in SQ^*(A)$ e $i \in \mathbb{Z}$ defina $\mathcal{X}_\beta^i(A) = \{X^{\beta(x)(i)}(x);\ x \in A\}$.

Teorema 2.4. *Seja X^t um fluxo sem singularidades. São equivalentes:*

1. *X^t é CW-expansivo;*

2. *Para todo* $\eta > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* A *é um continuum e existe* $\alpha \in H(A)$ *com* $\operatorname{diam}(\mathcal{X}^t_\alpha(A)) < \delta$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*, então* A *é um segmento de órbita contido em* $B_\eta(x_\alpha)$*.*

3. *Para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* A *é um continuum e existe* $\beta \in SQ^*(A)$*, com* $\beta(x_\beta)_{i+1} - \beta(x_\beta)_i \leq \eta$ *e* $\sup_{a\in A} |\beta(a)_{i+1} - \beta(a)_i| \leq \delta$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$*, tal que* $\operatorname{diam}(\mathcal{X}^i_\beta(A)) < \delta$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$*, então* $A \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x_\beta)$*.*

Demonstração: $(1) \Rightarrow (3)$: Seja $\epsilon > 0$ dado e $\delta > 0$ referente a definição de CW-expansividade. Tome $\eta > 0$ tal que

$$\eta + (2 \sup_{z\in M, |u|<\eta} d(z, X^u(z))) < \frac{\delta}{2}.$$

Suponha que A é um continuum e existe $\beta \in SQ^*(A)$, com $\beta(x_\beta)_{i+1} - \beta(x_\beta)_i \leq \eta$ e $\sup_{a\in A} |\beta(a)_{i+1} - \beta(a)_i| \leq \delta$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, tal que $\operatorname{diam}(\mathcal{X}^i_\beta(A)) < \eta$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Para cada $a \in A$ vamos definir um homeomorfismo $\alpha(a)$ por $\alpha(a)(\beta(x_\beta)_i) = \beta(a)_i$, e para todo $i \in (Z)$ e extenda linearmente para todo intervalo $(\beta(x_\beta)_i, \beta(x_\beta)_{i+1})$. Então $\alpha \in H(A)$ (note que $\alpha(x_\beta) = Id_{\mathbb{R}}$).

Portanto, usando a notação $t_i = \beta(x_\beta)_i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, se $t \in [t_i, t_{i+1})$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\mathcal{X}^t_\beta(A)) &= \sup_{a,b\in A} d(X^{\beta(a)(t)}(a), X^{\beta(b)(t)}(b)) \\
&\leq \sup_{a,b\in A} (d(X^{\beta(a)(t)}(a), X^t(x_\beta)) + d(X^t(x_\beta), X^{\beta(b)(t)}(b))) \\
&\leq \sup_{a\in A} d(X^{\beta(a)(t)}(a), X^t(x_\beta)) + \sup_{b\in A} d(X^t(x_\beta), X^{\beta(b)(t)}(b))) \\
&= 2 \sup_{a\in A} d(X^t(x_\beta), X^{\beta(a)(t)}(a))
\end{aligned}$$

Mas para cada $a \in A$ temos:

$$\begin{aligned} d(X^t(x_\beta), X^{\beta(a)(t)}(a)) &\leq d(X^t(x_\beta), X^{t_i}(x_\beta)) + d(X^{t_i}(x_\beta), X^{\beta(a)_i}(a)) \\ &+ d(X^{\beta(a)_i}(a), X^{\beta(a)(t)}(a)) \\ &\leq \sup_{z\in M, |u|\leq\eta} d(z, X^u(z)) + \eta + \sup_{z\in M, |u|\leq\eta} (z, X^u(z)) \\ &< \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{diam}(\mathcal{X}^t_\beta(A)) < 2\frac{\delta}{2} = \delta,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, e pela definição de CW-expansividade, $A \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x_\beta)$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Seja $\epsilon > 0$ dado e considere $\delta > 0$ correspondente a condição do item (3). Suponha que existe $A \subset M$ e $\alpha \in H(A)$ tal que $\mathcal{X}^t_\alpha(A)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Vamos definir $\beta \in SQ^*(A)$ por indução. Defina $\beta(x)_0 = 0$ para todo $x \in A$. Como A é compacto existe $t_1 > 0$ tal que $\alpha(x)(t_1) < \delta$ para todo $x \in A$. Defina então $\beta(x)_1 = \alpha(x)(t_1)$. Supondo que para $i \in \mathbb{N}$ temos t_i e $\beta(x)_i$ definidos. Usando novamente a compacidade de A existe $t_{i+1} > t_i$ tal que $|\alpha(x)(t_{i+1}) - \alpha(x)(t_i)| < \delta$ para todo $x \in A$, defina então $\beta(x)_{i+1} = \alpha(x)(t_{i+1}$. De maneira análoga podemos definir para $\beta(x)_i$ para $i \in \mathbb{Z}$ negativos. Como $\alpha \in H(A)$ temos que $\beta \in SQ^*(A)$, com $x_\beta = x_\alpha$. Pela condição (3) temos $A \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x_\alpha)$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Como M é compacto, para todo $\eta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x) \subset B_\eta(x)$ para todo $x \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Como o fluxo é livre de singularidades, usando o lema temos que, para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que $\operatorname{diam}(X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x)) > \eta$ para todo $x \in M$.

$\square$

2.4 Invariância por equivalência

Dois fluxos, X^t definido em M e Y^t definido em N, são *equivalentes* se existe um homeomorfismo entre M e N que leva órbitas de X^t em órbitas em Y^t preservando orientação das mesmas.

Teorema 2.5. *CW-expansividade é invariante por equivalência, ou seja, se um fluxo X^t é conjugado a um fluxo que é CW-expansivo então X^t também é CW-expansivo.*

Demonstração: Suponha que X^t é conjugado a Y^t que é CW-expansivo. Seja $h : M \to N$ um homeomorfismo como na definição de fluxos conjugados. Seja $\epsilon_M > 0$ dado e considere $\epsilon_N > 0$ tal que se $x, y \in N$ satisfazem $d(x, y) < \epsilon_N$ então $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \epsilon_M$. Seja $\delta_N > 0$ dado pela definição de CW-expansividade de Y^t para ϵ_N e tome $\delta_M > 0$ tal que se $x, y \in M$ com $d(x, y) < \delta_M$ então $d(h(x), h(y)) < \delta_N$. Então, se $A_M \subset M$ é um continuum e $\alpha_M \in H(A_M)$ é tal que $\mathrm{diam}(\mathcal{X}^t_{\alpha_M}(A_M)) < \delta_M$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $A_N = h(A_M) \subset N$ é um continuum e definindo $\alpha_N(h(x))(t)$ como o número real tal que

$$h(X^{\alpha_M(x)(t)}(x)) = Y^{\alpha_N(h(x))(t)}(h(x))$$

para todo $x \in A_M$ e para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que α_N é uma função contínua de A_N em $Hom(\mathbb{R}, 0)$. Além disso, fixando $t \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}(\mathcal{Y}^t_{\alpha_N}(A_N)) &= \max_{x,y \in A_N} d(Y^{\alpha_N(x)(t)}(x), Y^{\alpha_N(y)(t)}(y)) \\
&= \max_{x,y \in A_M} d(h(X^{\alpha_M(x)(t))}(x)), h(X^{\alpha_M(y)(t))}(y))) \\
&= \mathrm{diam}(h(\mathcal{X}^t_{\alpha_M}(A_M))) < \delta_N,
\end{aligned}$$

pois, $\operatorname{diam}(\mathcal{X}^t_{\alpha_M}(A_M)) < \delta_M$. Portanto, pela CW-expansividade A_N é um segmento de órbita contido em $B_{\epsilon_N}(x_{\alpha_N})$. E como $A_M = h^{-1}(A_N)$, $x_{\alpha_N} = h(x_{\alpha_M})$ e pela escolha de ϵ_N temos que A_M é um segmento de órbita contido em $B_{\epsilon_M}(x_{\alpha_M})$.

□

2.5 Suspensão de homeomorfismos CW-expansivos

A construção do fluxo suspensão sobre uma transformação fornece uma relação entre as noções de CW-expansividade para homeomorfismos e fluxos. Note que o fluxo suspensão não tem singularidades.

Teorema 2.6. *Uma suspensão de um homeomorfismo $\phi : M \to M$ é CW-expansiva se, e somente se, o homeomorfismo ϕ é CW-expansivo.*

Demonstração: Basta mostrar para a suspensão por $f \equiv 1$, pois todas as suspensões de um mesmo homemorfismo são conjugadas.

Suponha que a suspensão X^t é CW-expansiva. Seja $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$ dado e $\delta > 0$ dado pela CW-expansividade do fluxo. Seja $A \subset Y$ é um continuum com $\operatorname{diam}(\phi^n(A)) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Denotando por $A_M = A \times \{0\}$, e x_1 para $(x, 0)$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(X^t(A_M)) &= \max_{x_1, y_1 \in A_M} d(X^t(x_1), X^t(y_1)) \\
&\le \max_{x,y \in A} \rho_{t-[t]}((\phi^{[t]}(x), t-[t]), (\phi^{[t]}(y), t-[t])) \\
&= \max_{x,y \in A} ((1-t+[t])\rho(\phi^{[t]}(x), \phi^{[t]}(y)) + (t-[t])\rho(\phi^{[t]+1}(x), \phi^{[t]+1}(y))),
\end{aligned}$$

mas como para todo $x, y \in A$

$$\phi^{[t]}(x), \phi^{[t]}(y) \in \phi^{[t]}(A) \text{ e } \phi^{[t]+1}(x), \phi^{[t]}(y) \in \phi^{[t]+1}(A)$$

temos que:

$$\operatorname{diam}(X^t(A_M)) \leq (1 - t + [t])\delta + (t - [t])\delta = \delta.$$

Pela CW-expansividade da suspensão X^t existe $(x, 0)$ tal que $A_M \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x)$. E como $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ e $A_M \subset M \times \{0\}$ temos que $A_M = \{(x, 0)\}$. Portanto, $A = \{x\}$. Isto mostra que ϕ é CW-expansivo.

Suponha agora que o homeomorfismo ϕ é CW-expansivo. Considere em M a métrica dada por:

$$\rho'(x, y) = \min\{\rho(x, y), \rho(\phi(x), \phi(y))\}$$

e $\delta > 0$ a sua constante de CW-expansividade para ρ'. Seja $\epsilon > 0$ e $\delta' = \min\{\delta, \epsilon, \frac{1}{4}\}$. Se $A \subset M_f$ é um continuum e $\alpha \in H(A)$ é tal que $\operatorname{diam} \mathcal{X}^t_\alpha(A) < \delta'$ para todo número real t. Vamos dividir a demonstação em dois casos: Quando x_α pode ser representado como $(y_1, \frac{1}{2})$ e caso isto não ocorra.

No primeiro caso, defina $A_M = \{a \in M; (a, s) \in A \text{ com } s \in (0, 1)\}$. Então

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(A_M) &= \max_{y,z\in A_M} \rho'(y, z) \\
&\leq \max_{(y,s),(z,r)\in A} d((y, s), (z, r)) \\
&= \operatorname{diam}(A) < \delta' < \delta.
\end{aligned}$$

Pela definição da suspensão temos que $X^1(x_\alpha)$ tem representação $(\phi(y_1), \frac{1}{2})$, e como $\operatorname{diam} \mathcal{X}^1_\alpha(A) < \delta < \frac{1}{4}$ temos que $X^{\alpha(y)(1)}(y)$ tem representação $(\phi(y), s)$, com $s \in$

$(0,1)$ para todo $y \in A$. Logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\phi(A_M)) &= \max_{y,z \in A_M} \rho'(\phi(y), \phi(z)) \\
&\leq \max_{(\phi(y),s),(\phi(z),r) \in \mathcal{X}^1_\alpha(A)} d((\phi(y), s), (\phi(z), r)) \\
&= \operatorname{diam}(\mathcal{X}^1_\alpha(A)) < \delta' < \delta.
\end{aligned}$$

(A desigualdade é válida pois para todo $y \in A_M$ pois existe um ponto $(\phi(y), s)$ em $\mathcal{X}^1_\alpha(A)$). Seguindo de forma análoga encontramos que $\operatorname{diam}(\phi^n(A_M)) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pela CW-expansividade de ϕ temos que $A_M = \{y_1\}$. Daí todo ponto de A tem a forma (y_1, t) com $t \in (0,1)$. Como $(y_1, \frac{1}{2}) = x_\alpha \in A$ e $\operatorname{diam}(A) < \delta' < \epsilon$, temos que $|t - \frac{1}{2}| < \epsilon$. Ou seja, $A \subset X^{-\epsilon,\epsilon}(x_\alpha)$.

No caso em que x_α não tem uma representação como $(y_1, \frac{1}{2})$ então existe $X^r(x_\alpha)$ com representação como $(y_1, \frac{1}{2})$ para algum $|r| < \frac{1}{2}$. Definindo $A' = \mathcal{X}^r_\alpha(A)$ e para cada $x \in A$ e $t \in \mathbb{R}$

$$\alpha'(X^r(x))(t) = \alpha(x)(t + r) - \alpha(x)(r).$$

Temos que A' é um continuum, $\alpha' \in H(A')$, e para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\mathcal{X}^t_{\alpha'}(A')) &= \max_{x,y \in A'} d(X^{\alpha'(x)(t)}(x), X^{\alpha'(y)(t)}(y)) \\
&= \max_{x,y \in A} d(X^{\alpha(x)(t+r)-\alpha(x)(r)}(X^{\alpha(x)(r)}(x)), X^{\alpha(y)(t+r)-\alpha(y)(r)}(X^{\alpha(y)(r)}(y)) \\
&= \max_{x,y \in A} d(X^{\alpha(x)(t+r)}(x), X^{\alpha(y)(t+r)}(y)) \\
&= \operatorname{diam}(\mathcal{X}^{t+r}_\alpha(A)) < \delta.
\end{aligned}$$

Pelo primeiro caso, temos que

$$A' \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x_{\alpha'}) = X^{(-\epsilon,\epsilon)}(X^r(x_\alpha)),$$

e portanto,

$$A = X^{-r}(A') \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x_\alpha).$$

$\square$

Corolário 2.1. *Todo fluxo suspensão de um homeomorfismo $\phi : M \to M$ é CW-expansivo se, e somente se, o homeomorfismo ϕ é CW-expansivo.*

Este teorema justifica nossa definição de fluxos CW-expansivos.

No capítulo 5, vamos exibir explicitamente um homeomorfismo CW-expansivo que não é expansivo. Portanto, pelo teorema anterior qualquer suspensão deste homeomorfismo é um fluxo CW-expansivo. Por outro lado, pela proposição 2.3 nenhuma das suspensões deste homeomorfismo pode ser um fluxo expansivo.

Em [K1], Kato nos dá outros exemplos de homeomorfismo CW-expansivos que não são expansivos. Utilizando os mesmos argumentos do parágrafo anterior, a partir de cada um destes exemplos podemos encontrar mais exemplos de fluxos CW-expansivos que não são fluxos expansivos.

Capítulo 3

Fluxos CW-expansivos e secções transversais

Neste capítulo utilizaremos as construções de [KS] para fixar pares de seções transversais em fluxos sem pontos fixos. Estes pares de secções transversais serão chamados de *adequados*, e vamos definir conjuntos estáveis e instáveis neles. No fim do capítulo vamos mostrar uma condição na intersecção destes conjuntos estáveis e instáveis que é equivalente a CW-expansividade do fluxo.

3.1 Secções transversais:

Um conjunto $S \subset M$ é uma *secção transversal local* de tempo $\epsilon > 0$ se é fechado e para cada $x \in S$ temos $S \cap X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x) = \{x\}$. O *interior* de S é o conjunto $S^* = int(X^{(-\epsilon,\epsilon)}(S)) \cap S$. O seguinte lema será muito importante no restante de nosso trabalho.

Lema 3.1. *[KS][BW] Existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ nós podemos encontrar* *um par* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ *de famílias finitas* $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_n\}$ *e* $\mathcal{T} = \{T_1, ..., T_n\}$*, de secções transversais locais de tempo* $\epsilon > 0$ *e diâmetro no máximo* δ*, com* $T_i \subset S_i^*$ *(*$i \in \{1, ..., k\}$*) tais que,*

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} X^{[0,\epsilon]}(T_i) = \bigcup_{i=1}^{k} X^{[-\epsilon,0]}(T_i) = \bigcup_{i=1}^{k} X^{[0,\epsilon]}(S_i) = \bigcup_{i=1}^{k} X^{[-\epsilon,0]}(S_i).$$

Dado $\delta > 0$, um par $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ como no lema anterior é dito ser δ-adequado.

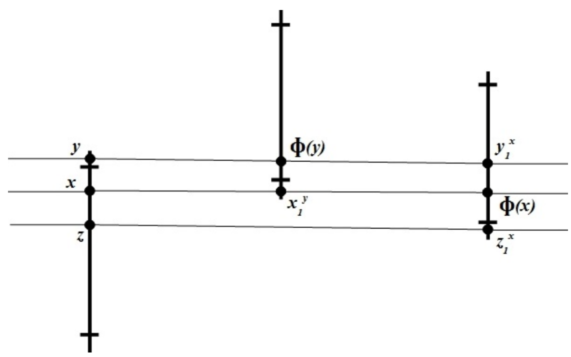
Em [KS] os autores definiram conjuntos estáveis e instáveis em relação as famílias de secções transversais obtidas no lema anterior. Por completude, também faremos estas definições aqui: Seja

$\theta = \sup\{\delta > 0; \forall x \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ temos $X^{(0,\delta)}(x) \cap \bigcup_{i=1}^{k} S_i = \emptyset\}$

Se $x \in \bigcup_{i=1}^{k} T_i$ defina $\phi(x) = X^t(x)$ onde $t > 0$ é o menor número real positivo tal que $X^t(x) \in \bigcup_{i=1}^{k} T_i$. Observe que $t \in [\theta, \epsilon]$. Seja $\rho > 0$ tal que $5\rho < \epsilon$ e $2\rho < \theta$. E para cada S_i considere $D_\rho^i = X^{(-\rho,\rho)}(S_i)$ e defina a projeção

$$P_\rho^i : D_\rho^i \to S_i$$

por $P_\rho^i(x) = X^t(x)$, onde $X^t(x) \in S_i$ com $|t| < \rho$. Seja $\frac{1}{2}\theta > \epsilon_0 > 0$ tal que se $x, y \in S_i$, $d(x, y) < \epsilon_0$ e t é um número real com $|t| < 3\delta$ e $X^t(x) \in T_j$, então $X^t(y) \in D_\rho^j$.



Considere a seguinte construção. Se $x \in T_i$ e $y \in S_i$ com $d(x, y) < \epsilon_0$ defina um conjunto de pontos $\{y_0^x, ..., y_n^x\} \subset X^{\mathbb{R}}(y)$ com $y_0^x = y$ e $y_j^x = P_\rho^l(X^t(y_{j-1}^x))$, onde $t > 0$ é o menor tempo tal que $\phi^j(x) = X^t(\phi^{j-1}(x))$, e l é tal que $\phi^j(x) \in T_l$. Podemos continuar esta construção enquanto $d(\phi^j(x), y_j) < \epsilon_0$. E de forma análoga podemos fazer uma construção semelhante para $j < 0$.

Se $x \in T_i$ e $\eta < \epsilon_0$, o *conjunto η-estável* de x é definido por:

$$W_\eta^s(x) = \{y \in S_i; d(\phi^i(x), y_i) < \eta \ \forall i \geq 0\}$$

e o *conjunto η-instável* de x é definido por:

$$W_\eta^u(x) = \{y \in S_i; d(\phi^i(x), y_i) < \eta \ \forall i \leq 0\}$$

Teorema 3.1. *[KS] Um fluxo X^t é expansivo se, e somente se, dado um par $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ δ-adequado, existe $\eta > 0$ tal que para todo $x \in \bigcup_{i=1}^k T_i$ temos $W_\eta^s(x) \cap W_\eta^u(x) = \{x\}$.*

Vamos utilizar estas idéias para provar um resultado similar para fluxos CW-expansivos.

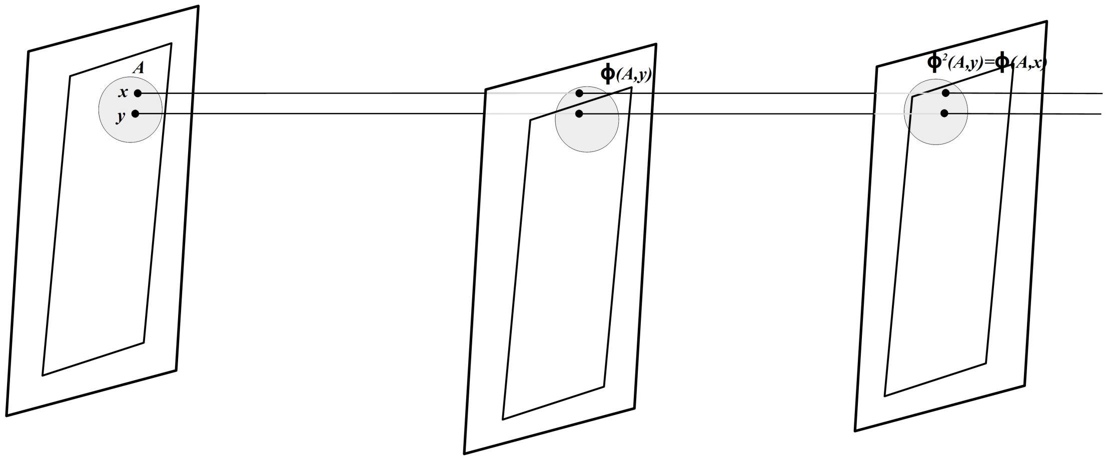
Seja $A \subset S_j$ um conjunto e $x \in A \cap T_j$. Se $\operatorname{diam} A < \frac{1}{2}\epsilon_0$ então $X^t(A) \subset D_\rho^i$, onde t e i são tais que $X^t(x) = \phi(x) \in T^i$. Defina

$$\phi(A, x) = \{P_\rho^i(X^t(y)); y \in A\} \subset S_i.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $\phi^n(A, x)$ está definido com $\operatorname{diam}(\phi^n(A, x)) < \frac{\epsilon_0}{2}$ e $\phi^n(x) \in T^i$, então $X^t(\phi^n(A)) \in D_\rho^l$, onde t e l são tais que $X^t(\phi^n(x)) = \phi^{n+1}(x) \in T^l$. Defina

$$\phi^{n+1}(A, x) = P_\rho^l(X^t(\phi^n(A)).$$

Podemos continuar esta construção enquanto $\operatorname{diam}(\phi^n(A, x)) < \frac{\epsilon_0}{2}$.



3.2 Conjuntos estáveis e instáveis de fluxos CW-expansivos:

Para $\frac{\epsilon_0}{2} > \eta > 0$ defina os *conjutos estáveis e instáveis* com respeito as famílias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ por

$$W_\eta^s = \{A \in C(\bigcup_{i=1}^{k} S_i) \text{ continuum; existe } x \in A \text{ tal que } \operatorname{diam}(\phi^n(A,x)) < \eta,\ \forall n \geq 0\}$$

$$W_\eta^u = \{A \in C(\bigcup_{i=1}^{k} S_i) \text{ continuum; existe } x \in A \text{ tal que } \operatorname{diam}(\phi^n(A,x)) < \eta,\ \forall n \leq 0\}$$

Onde $C(X)$ é a coleção dos subconjuntos compactos e conexos de X.

Teorema 3.2. *Um fluxo X^t é CW-expansivo se, e somente se, dado um par $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ δ-adequado, existe $\eta > 0$ tal que*

$$W_\eta^s \cap W_\eta^u = \{A \subset M; \#A = 1\}.$$

Demonstração: Esta demonstração utiliza muitas das idéias usadas em [KS], no caso de fluxos expansivos.

Suponha que X^t é CW-expansivo. Seja $a \in (0, \epsilon)$ e $a_1 > 0$ da definição de CW-expansivo relativo a a. Seja $\eta \in (0, \epsilon_0)$ tal que se $p \in T_i$ e $q \in S_i$, com $i \in \{1, ..., k\}$, tem $d(p,q) < \eta$, então $d(X^t(p), X^s(q)) < \frac{a_1}{2}$ onde, se $X^{t_1}(p) = \phi(p)$ e $X^{s_1}(q) = q_1$, então $t \in [0, t_1]$ e $s \in [0, s_1]$ e $|s - t| \leq |s_1 - t_1|$. Suponha que $A \in W^s_\eta \cap W^u_\eta$, e sejam $x_s \in A$ dado pela definição de W^s_η e x_u dado pela definição de W^u_η e fixe $x \in A$. Defina $t_0 = 0$, e $t_1 > 0$ como o número real positivo tal que $X^{t_1}(x) \in \phi(A, x_s)$ e $t_1 \in (r_1 - \rho, r_1 + \rho)$ com r_1 sendo o menor número real positivo tal que $\phi(x_s) = X^{r_1}(x_s)$. Se t_n e r_n estão bem definidos, vamos definir t_{n+1} como o número real positivo tal que $X^{t_{n+1}}(x) \in \phi_{n+1}(A, x_s)$ e $t_{n+1} \in (\sum_{i=1}^n r_i - \rho, \sum_{i=1}^n r_i + \rho)$ com r_{n+1} sendo o menor número real positivo tal que $\phi^{n+1}(x^s) = X^{r_{n+1}}(\phi^n(x^s))$. Defina de forma análoga, utilizando x_u, podemos definir números reais negativos t_n para $n < 0$. Para cada $y \in A$ podemos, utilizando o mesmo processo, encontrar sequências de números reais s^y_n. Defina então $\alpha(y)$ por $\alpha(y)(t_n) = s_n$ e linearmente em (t_n, t_{n+1}).

Então para cada $t \in \mathbb{R}$ e $y \in A$ temos $t = t_n + \sigma = s^y_n + \sigma_y$, onde $\sigma \in [0, t_{n+1} - t_n]$, $\sigma_y \in [0, s^y_{n+1} - s^y_n]$ e

$$|\sigma - \sigma_y| \leq |(t_{n+1} - t_n) - (s^y_{n+1} - s^y_n)|,$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\mathcal{X}^t_\alpha(A)) &= \max_{y,z \in A} d(X^{\alpha(y)(t)}(y), X^{\alpha(z)(t)}(z)) \\
&\leq \max_{y,z \in A} (d(X^{\alpha(y)(t)}(y), X^t(x)) + d(X^t(x), X^{\alpha(y)(t)}(y))) \\
&\leq 2 \max_{y \in A} d(X^{\alpha(y)(t)}(y), X^t(x)) \\
&< 2\frac{a_1}{2} = a_1.
\end{aligned}$$

E pela escolha de a_1 temos que $A \subset X^{(-a,a)}(x)$, e como $a < \rho$ e A está contido em uma seção transversal, obtemos que $A = \{x\}$.

Agora vamos supor que dadas famílias de secções transversais $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$, e $\rho > 0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$W^s_\eta \cap W^u_\eta = \{A \subset M; \#A = 1\}.$$

Seja $0 < a_1 < \frac{\eta}{2}$ e considere um continuum $A \subset M$ e $\alpha \in H(A)$ com $A \not\subset X^{(-a_1,a_1)}(x_\alpha)$.

Caso 1: $A \subset S \in \mathcal{S}$, com $x_\alpha \in T$.

Considere os tempos t_i e s^y_i, como na construção utilizada na definição de conjuntos estáveis e instáveis de um ponto, relativos a x_α e para os pontos $y \in A$ em que seja possível definir estes tempos.

Escolha $\delta_0 \in (0, \epsilon - \delta - \rho)$ e números positivos, $a_2 < a_1$ e $a_3, a_4 > 0$ tais que, se $u \in T_i$ e $v \in S_i$, então:

1. $d(u, v) < a_1$ implica que $d(u, X^t(v)) > a_1$ para todo $|t| \in [\delta_0, \epsilon]$;
2. $d(u, v) < a_2$ implica que $d(\phi(u), v_1) < a_1$;
3. $d(u, v) \geq a_2$ implica que $d(u, X^t(v)) > a_3$ para todo $|t| < \delta$;
4. Se $x, y \in M$ e $d(x, y) < a_4$ então $d(X^t(x), X^t(y)) < a_1$ para $|t| < \delta$.

Seja $a' = \min\{a_2, a_3, a_4\}$.

(a) Suponha que para todo $i \in \mathbb{Z}$ temos

$$\sup_{y\in A} |\alpha(y)(t_i) - s_i| < \delta.$$

Pela hipotese, temos que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{diam} \phi^n(A) > \eta$. Tome então $y \in A$ tal que $d(\phi^n(x_\alpha), y_n) > \frac{\eta}{2}$. Portanto,

$$d(X^{t_n}(x_\alpha), X^{s_n}(y)) > \frac{\eta}{2} > a_1 > a_2$$

e pelo item (3) temos:

$$\operatorname{diam} \mathcal{X}_\alpha^{t_n}(A) > d(X^{t_n}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t_n)}(y)) > a_3 \geq a';$$

(b) Suponha que $j \in \mathbb{Z}$ é o inteiro mais próximo de 0 (digamos positivo) tal que

$$\sup_{y\in A} |\alpha(y)(t_j) - s_j| \geq \frac{\delta}{2}.$$

Seja $y \in A$ tal que $|\alpha(y)(t_j) - s_j| \geq \delta$.

(b.1) Suponha que existe $i \in [0, j)$ tal que

$$d(\phi^i(x), y_i) > a_2.$$

Argumentando como na parte (a) temos,

$$\operatorname{diam} \mathcal{X}_\alpha^{t_n}(A) > d(X^{t_n}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t_n)}(y) > a_3 \geq a';$$

(b.2) Suponha que para todo $i \in [0, j)$ temos

$$d(\phi^i(x), y_i) \leq a_2 < a_1.$$

(b.2.1) Suponha que $t = s_j^y - \alpha(y)(t_j) \geq \frac{\delta}{2}$. Se $\alpha(y)(t_j) \geq s_{j-1}^y - \delta_0$, então

$$\delta_0 \leq t \leq s_j^y - s_{j-1} + \delta_0 < \delta + \rho + \delta_0 < \epsilon$$

e pelo tem 1,

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} \mathcal{X}_\alpha^{t_j}(A) &\geq d(X^{t_j}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t_j)}(y)) \\ &= d(X^{t_j}(x_\alpha), X^{(s_j^y - t)}(y)) > a_1. \end{aligned}$$

Mas se $\alpha(t_j) < s_{j-1}^y - \delta$ podemos encontrar $t' \in (t_{j-1}, t_j)$ tal que $\alpha(y)(t') = s_{j-1}^y - \delta_0$. Se $\zeta = t' - t_{j-1}$, como pelo item anterior temos $d(X^{t_{j-1}}(x_\alpha), X^{s_{j-1}^y}(y)) <$

$a_2 < a_1$ então, utilizando o item 1 temos,

$$d(X^{t_{j-1}}(x_\alpha), X^{s^y_{j-1}-\delta_0-\zeta}(y) > a_1.$$

Portanto, pelo item 4 temos

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(X^{t'}_\alpha(A) &\geq d(X^{t'}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t')}(y)) \\ &= d(X^{t_{j-1}+\zeta}(x_\alpha), X^{s^y_{j-1}-\delta_0}(y))) > a_4.\end{aligned}$$

(b.2.2) Suponha $t = \alpha(y)(t_j) - s^y_j \geq \delta_0$. Como

$$s^y_{j-1} + \delta \in [\alpha(y)(t_{j-1}), s^y_j + \delta_0),$$

existe $t' \in (t_{j-1}, t_j]$ com $\alpha(y)(t') = s^y_j + \delta_0$. Defina $\zeta = t_j - t'$. Aplicando o item 1 em $d(X^{t_j}(x_\alpha), X^{s_j}(y)) < a_1$ temos,

$$d(X^{t_j}(x_\alpha), X^{\zeta+\delta_0}(X^{s^y_j}(y))) > a_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}\mathcal{X}^{t'}_\alpha(A) &\geq d(X^{t'}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t')}(y)) \\ &= d(X^{t_j+\zeta}(x_\alpha), X^{s_j+\delta_0}(y)) > a_4.\end{aligned}$$

Caso 2: Agora suponha que A não necessariamente está contido em uma secção transversal. Tome $\delta_1 > 0$ e $a_5 > 0$ tais que se $d(x,y) < a_5$ então:

1. $d(X^t(x), X^s(y)) < \frac{a'}{2}$, onde $t > 0$ é o menor inteiro positivo tal que $X^t(x) \in \bigcup_{i=1}^k T_i$, $X^s(y) = D^i_\rho(X^t(y))$ e $|t-s| < \frac{\delta_1}{16}$;

2. $d(X^w(x), X^v(y)) < \frac{a'}{2}$, para todo $|w|, |v| \leq \delta_1 + \delta$ e $|v-w| \leq \delta_1$.

E seja $a_6 > 0$ tal que se $d(x,y) \leq a_6$ então $d(X^{t'}(x), X^{t'+t}(y) > a_6$ para $|t| \in (\frac{\delta_1}{16}, \epsilon)$ e $|t'| < \delta$. Tome também $0 < a_7 < a_5$ tal que o conjunto dos pontos da bola $B_{a_7}(x)$ que se projetam sobre $X^t(x)$ esteja contido em $X^{(-a_5,a_5)}(x)$.

Agora suponha que A não está contido em $X^{(-a_5,a_5)}(x_\alpha)$, e que t é o menor tempo positivo tal que $X^t(x_\alpha) \in \bigcup_{i=1}^k T_i$.

(a) Suponha que para todo $y \in A$ nós temos $|\alpha(y)(t) - s| < \frac{\delta_1}{8}$. Como A é compacto existe $\delta' \in \frac{\delta_1}{4}$ tal que

$$\sup_{y \in A} |\alpha(y)(t+t') - s| < \frac{\delta_1}{4}$$

para todo $|t'| \leq \delta'$. Defina então para cada $y \in A$ um homeomorfismo $\beta(y)(t) = \alpha(y)(t'+t) - s$ para $|t'| \geq \delta'$, $\beta(y)(0) = 0$ e linearmente em $t \in (0, \delta')$. Portanto, para todo $y \in A$ temos,

$$\beta(y)(t') - t'| \leq \frac{\delta_1}{4} + \delta' < \frac{\delta_1}{2}.$$

para todo $|t'| < \delta'$. Por (1) e (2) temos, para todo $y \in A$, que

$$d(X^{t+t'}(x_\alpha), X^{s+\beta(y)(t')}) < \frac{a'}{2}$$

para $|t'| < \delta'$. Pelo primeiro caso da prova, podemos encontrar $y \in A$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$d(X^{t_0}(X^t(x_\alpha)), X^{\beta(y)(t_0)}(X^s(y))) > a'.$$

Pela nossa construção, $|t_0|$ deve ser maior que δ', ou seja,

$$d(X^{t+t_0}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t+t_0)}(y)) > a'.$$

(b) Suponha que exista $y_0 \in A$ tal que $|\alpha(y_0)(t)-s| \geq \frac{\delta_1}{8}$. Então $|\alpha(y_0)(t)-t| \geq \frac{\delta_1}{16}$ e portanto, existe $t' \leq t$ tal que $|\alpha(y_0)(t') - t'| = \frac{\delta_1}{16}$. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(\mathcal{X}_\alpha^{t'}(A)) &\leq d(X^{t'}(x_\alpha), X^{\alpha(y_0)(t')}(y_0)) \\ &= d(X^{t'}(x_\alpha), X^{t'\pm\frac{\delta_1}{16}}(y_0)) > a_6, \end{aligned}$$

a menos que $d(x_\alpha, y_0) > a_6$. ou seja, teríamos $\operatorname{diam}(A) > a_6$.

Portanto, temos que $\min(a', a_6, a_7)$ é uma constante de expansividade correspondente a a_5.

□

Nós chamamos η a constante de CW-expansividade para X^t (esta constante depende das secções transversais).

Lema 3.2. *[KS] Suponha que $\{x^n\}$ e $\{y^n\}$ são sequências de pontos em $\bigcup_{i=1}^k T_i$ e $\bigcup_{i=1}^k S_i$, respectivamente, $x^n \to x$ e $y^n \to y$ e que cada y_k^n está bem definido relativo a x^n para cada k. Suponha que para algum k inteiro nós temos $\phi^k(x^n) \to \phi^{l_k}(x)$ para algum l_k. Então, $y_k^n \to y_{l_k}^x$.*

Proposição 3.1. *Seja X^t um fluxo CW-expansivo. Se η é a constante de CW-expansividade de X^t então:*

- *Se $A \in W_\eta^s$ então $\forall x \in A$ temos $\operatorname{diam}(\phi^n(A,x)) \to 0$ quando $n \to +\infty$;*
- *Se $A \in W_\eta^u$ então $\forall x \in A$ temos $\operatorname{diam}(\phi^n(A,x)) \to 0$ quando $n \to -\infty$.*

Demonstração: Se a primeira afirmação não é verdade, então existe $A \subset W_\eta^s$, $x \in A$ e $\delta_0 > 0$ tal que $\operatorname{diam}(\phi^{n_i}(A,x)) \geq \delta_0$ para uma sequência crescente de inteiros $\{n_i\}$. Portanto para cada i existe $y(i) \in A$ tal que $d(\phi^{n_i}(x), y(i)_{n_i}) \geq \frac{\delta_0}{2}$. A menos de tomarmos subsequências (que continuaremos a chamar de $\{n_i\}$, podemos supor que $\phi^{n_i}(x) \to a \in T_j$ e $y(i)_{n_i} \to b \in S_j$, e $a \neq b$. E como $C(\bigcup_{i=1}^k S_i)$ é compacto, podemos supor que $lim_{n\to\infty}\phi^{n_i}(A,x) \to B \subset S_i$. Como, a e b estão em B, temos que B não é unitário. Fixe então $k \in \mathbb{Z}$, então

$$\operatorname{diam}(\phi^k(B,a)) = \max_{c,d\in B} d(c_k^a, d_k^a))$$

Fixe c_k^a e d_k^a em $\phi^k(B,a)$. Portanto, existem sequências de pontos $\{c(i)\}$ e $\{d(i)\}$ em A tais que $c(i)_{n_i} \to c$ e $d(i)_{n_i} \to d$. Então como $\phi^{n_i+k}(x) \to \phi^k(a)$, pelo lema anterior, $c(i)^x_{n_i+k} \to c^a_k$ e $d(i)^x_{n_i+k} \to d^a_k$. Além disso, como para todo i temos

$$d(c(i)^x_{n_i+k}, d(i)^x_{n_i+k}) \leq \operatorname{diam}(\phi^{n_i+k}(A,x)) \leq \eta$$

então $d(c_k^a, d_k^a) \leq \eta$. Como tomamos c e d arbitrários, obtemos

$$\operatorname{diam}(\phi^k(B,a)) < \eta.$$

E como isto vale para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos que $B \in W^s_\eta \cap W^u_\eta$, mas B não é unitário, pois $a, b \in B$ e $a \neq b$, o que contradiz X^t ser CW-expansivo.

$\square$

O teorema anterior permite definir os seguintes conjuntos:

$$W^s = \{A \in C(\bigcup_{i=1}^k S_i); \text{existe } x \in A \cap \bigcup_{i=1}^k T_i \text{ e } \operatorname{diam}(\phi^n(A,y) \to 0,\ \forall y \in A\}$$

$$W^u = \{A \in C(\bigcup_{i=1}^k S_i); \text{existe } x \in A \cap \bigcup_{i=1}^k T_i \text{ e } \operatorname{diam}(\phi^n(A,y) \to 0,\ \forall y \in A\}.$$

Estes conjuntos são similares aos encontrados por Kato para homeomorfismos em [K1].

Capítulo 4

Fluxos CW-expansivos e entropia positiva

Neste capítulo, vamos falar de algumas equivalências para a definição de entropia de fluxos (ver [T]). Vamos definir entropia para pares de seções transversais (como as fixadas no capítulo anterior), e mostrar que se a entropia para um dado par de seções tranversais é positiva, então a entropia topológica do fluxo também tem de ser positiva. Por fim, vamos mostrar o teorema principal desta tese: Se um fluxo definido em um espaço métrico compacto e conexo com dimensão topológica maior que 1 é CW-expansivo então a entropia topológica deste fluxo é positiva.

4.1 Entropia para fluxos

Para E, F subconjuntos de M, nós dizemos que E (t,δ)-*gera* F se para todo $x \in F$ existe $e \in E$ tal que

$$d(X^s(e), X^s(x)) \leq \delta, \ \forall s \in [0,t].$$

Seja $r_t(F,\delta)$ a cardinalidade mínima de um conjunto que (t,δ)-gera F. Se F é compacto, então a continuidade do fluxo garante que $r_t(F,\delta)$ é finita. Defina,

$$h(X^t|F,\delta) = \limsup_{s\to\infty} \frac{1}{t} \log r_s(F,\delta).$$

E agora defina a *entropia topológia* do fluxo X^t em F por

$$h(X^t|F) = \lim_{\delta\to 0} h(X^t|F,\delta).$$

Com esta definição temos que a entropia topológica de um fluxo é igual a entropia topológica de X^1, mais geralmente, temos para cada $T \in \mathbb{R}$:

$$h(X^T) = |T| h(X^1).$$

Veja [B1], [B2], [B3] e [T].

Sejam $E, F \subset M$. Nós dizemos que E (t,γ)-*gera fracamente* F, se para todo $x \in F$, existe $e \in E$ e $h \in Hom(\mathbb{R}, 0)$ tais que

$$d(X^{h(s)}(x), X^s(e)) \leq \delta$$

para todo, $s \in [0,t]$. Seja $R_t(F,\gamma)$ a menor cardinalidade de um conjunto (t,γ)-gerador fraco de F e defina

$$H(X^t|F,\gamma) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log R_t(F,\gamma).$$

Então para $H(X^t|F) = \lim_{\delta\to 0} H(X^t|F,\gamma)$ temos:

Teorema 4.1. *[T] Se X^t é um fluxo sem pontos fixos, então $h(X^t) = H(X^t)$.*

Fixe um par $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ δ-adequado. Dizemos que um conjunto $E \subset \bigcup_{i=1}^k T_i$ é um (n,γ)-*gerador* se para todo $x \in \bigcup_{i=1}^k T_i$ existe $e \in E$ tal que

$$d(\phi^i(x), e_i^x) < \gamma$$

para todo $i \in \{0,...,n\}$. Defina $R'(n,\gamma)$ a mínima cardinalidade de um (n,γ)-gerador. Então seja,

$$H'(\{\mathcal{T},\mathcal{S}\},\gamma) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log R'(n,\gamma).$$

E finalmente, $H'(\{\mathcal{T},\mathcal{S}\}) = \lim_{\gamma\to 0} H'(\phi,\gamma)$.

Dizemos que um conjunto $E \subset \bigcup_{i=1}^{k} T_i$ é (n,γ)-*separado* se para todo $x, y \in E$, então y_i^x não está definido para algum $i \in \{0,...,n\}$ ou existe $i \in \{0,...,n\}$ tal que

$$d(\phi^i(x), y_i^x) \geq \gamma.$$

Defina $s'(n,\gamma)$ a máxima cardinalidade de um (n,γ)-separado. Então seja,

$$s'(\{\mathcal{T},\mathcal{S}\},\gamma) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s'(n,\gamma).$$

E finalmente, $s'(\{\mathcal{T},\mathcal{S}\}) = \lim_{\gamma\to 0} s'(\phi,\gamma)$.

Lema 4.1. *Seja X^t um fluxo sem pontos fixos. Se $\gamma < \frac{\epsilon'}{2}$ então $H'(n,\gamma) \leq s'(n,\gamma) \leq H'(n,\frac{\gamma}{2})$;*

Demonstração: Seja E um maximal (n,γ)-separado e suponha que ele não é um (n,γ)-gerador. Portanto existe $x \in \bigcup_{i=1}^{k} T_i$ tal que se $e \in E$ então existe $i \in \{0,...,n\}$

$$d(\phi^i(x), e_i^x) \geq \gamma.$$

Logo, $E \cup \{x\}$ é um (n,γ)-separado. Contradição! Isto prova, que

$$R'(n,\gamma) \leq s'(n,\gamma).$$

Seja E um conjunto (n,γ)-separado e F um conjunto $(n,\frac{\gamma}{2})$-gerador. Então para cada $x \in \bigcup_{i=1}^{k}$ podemos tomar $g(x) \in F$ tal que

$$d(\phi^i(x), g(x)_i^x) < \frac{\eta}{2}$$

para todo $i \in \{0,...,n\}$. Se $g(x) = g(y)$ teríamos $x, y, g(x) \in T_j$ para algum $j \in \{1,...,k\}$, e $g(x)_i^x = g(y)_i^y$ para todo $i \in \{0,...,n\}$. É fácil verificar a última afirmação, utilizando indução: Se para $i_0 < n$ vale que para todo $i \in \{0,...,i_0\}$ temos $g(x)_i^x = g(y)_i^y$ então, se $g(x)_{i_0+1}^x \neq g(y)_{i_0+1}^y$, vale que ou $x_{i_0+1}^y$ não está definido ou $y_{i_0+1}^x$ não está definido, uma contradição, pois

$$d(\phi^{i_0}(x), \phi^{i_0}(y)) \leq d(\phi^{i_0}(x), g(x)_x^{i_0}) + d(\phi^{i_0}(y), g(y)_y^{i_0}) < 2\frac{\eta}{2} < \epsilon'.$$

Portanto temos que:

$$d(\phi^i(x), \phi^i(y)) \leq d(\phi^i(x), g(x)_i^x) + d(\phi^i(y), g(x)_i^y) < \eta,$$

para todo $i \in \{0,...,n\}$. Como E é (n,η)-separado temos que g é injetiva em E, logo, $\#E \leq \#F$ e $s'(n,\gamma) \leq R'(n, \frac{\gamma}{2})$.

$\square$

Corolário 4.1. $H'(\{\mathcal{T}, \mathcal{S}\}) = s'(\{\mathcal{T}, \mathcal{S}\})$.

O seguinte resultado relaciona a entropia nas secções transversais com a entropia do fluxo.

Proposição 4.1. *Seja X^t é um fluxo sem pontos fixos e $(\{\mathcal{T}, \mathcal{S}\})$ δ-adequado. Se $H'(\{\mathcal{T}, \mathcal{S}\}) > 0$ então $h(X^t) > 0$.*

Demonstração: *Fixe $\delta > 0$ tal que $s'(\delta, \phi) > \frac{H'(\phi)}{2} > 0$. Fixe $n \in \mathbb{N}$, considere um conjunto $E \subset \bigcup_{i=1}^k T_i$ maximal (n,γ)-separado para ϕ. Como $X^{[0,n\epsilon]}(x)$ corta pelo menos n secções tranversais $T_i's$ para todo x, temos que existe $\gamma > \gamma' > 0$ tal que E é um conjunto $(n\epsilon, \gamma')$-separado para o fluxo X^t. Portanto, $s(n\epsilon, \gamma', (S,\tau)) \geq$*

$s'(n\epsilon, \gamma, X^t)$. *Portanto,*

$$
\begin{aligned}
s(\gamma, X^t) &= \limsup_{u\to\infty} s(u, \gamma, X^t) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} s(n\epsilon, \gamma, X^t) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} s'(n\epsilon, \gamma, \phi) \\
&= s'(\gamma, \phi) \\
&> \frac{H'(\{\mathcal{T}, \mathcal{S}\})}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $h(X^t) = \lim_{\gamma\to 0} s(\gamma, X^t) > 0$.

□

4.2 Entropia de fluxos CW-expansivos:

Vamos mostrar agora que fluxos CW-expansivos definidos em espaços métricos compactos com dimensão topológica maior que 1 *tem entropia maior que zero. Antes vamos precisar de alguns lemas, o primeiro lema é uma versão de expansividade uniforme para fluxos CW-expansivos.*

Lema 4.2. *Seja* X^t *um fluxo CW-expansivo. Para todo* $\epsilon_0 \in (0, \frac{\eta}{2}]$*, existe* $\delta_0 > 0$ *tal que se* $A \subset \bigcup_{i=1}^k S_i$ *é um continuum com* $x \in A \cap \bigcup_{i=1}^k T_i$, $\mathrm{diam}(A) \leq \delta_0$*, e para algum* $n > 0$*, vale que,*

$$\sup\{\mathrm{diam}\, \phi^i(A, x); i = 1, ..., n\} \in [\epsilon_0, 2\epsilon_0],$$

então $\mathrm{diam}(\phi^n(A, x)) \geq \delta_0$.

Demonstração: *Caso contrário, existiriam uma sequência* $\{A_i\}$ *de compactos* *conexos em* $\bigcup_{i=1}^{k} S_i$, $\{x_i\}$ *uma sequência de pontos em* $A_j \cup \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *e uma sequência crescente* $\{n_i\}$ *de números naturais tais que:*

1. $\operatorname{diam} A_i < \frac{1}{i}$, *para todo número natural* i;

2. $\sup\{\operatorname{diam} \phi^i(A_i, x_i); i = 1, ..., n(i)\} \in [\epsilon_0, 2\epsilon_0]$;

3. $\operatorname{diam}(\phi^{n(i)}(A_i, x_i)) < \frac{1}{i}$

Por (2), *para cada* i *podemos escolher* $0 < m(i) < n(i)$ *tais que* $diam(\phi^{m(i)}(A, x_i)) \in [\epsilon_0, 2\epsilon_0]$. *Vamos provar que podemos tomar a sequência* $m(i)$ *tal que*

$$\lim m(i) = \lim(n(i) - m(i)) = \infty. \tag{4.1}$$

Fixe $N > 0$. *Por continuidade do fluxo, existe* $\delta_1 > 0$ *tal que se* $x \in \bigcup_{i=1}^{k} T_i$ *e* $y \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *satisfazem* $d(x, y) < \delta_1$, *então* $d(\phi^n(x), y_n^x) < \epsilon_0$ *para todo* $n \in \{-N, ..., -1, 0, 1, ..., N\}$. *Tome* i_0 *natural suficientemente grande para que* $\frac{1}{i_0} < \delta_1$. *Então para todo* $i > i_0$ *temos* $\operatorname{diam}(A_i) < \delta_1$ *e* $\operatorname{diam}(\phi^{n(i)}(A_i, x_i)) < \delta_1$, *portanto,*

$$\operatorname{diam}(\phi^j(A_i, x_i)) < \epsilon_0 \ e \ \operatorname{diam}(\phi^{n(i)-j}(A_i, x_i)) < \epsilon_0, \ \forall j \in \{1, ..., N\}.$$

E daí, $m(i) > N$ *e* $n(i) - m(i) > N$, *e como tomamos* N *arbitrário nós provamos (4.1).*

Podemos supor que $\lim \phi^{m(i)}(A_i, x_i) \to B$ *e* $\phi^{m(i)}(x_i) \to x \in B$. B *tem diâmetro maior que* ϵ_0, *logo é não-degenerado. Fixe um número inteiro* n. *Então para* i *suficientemente grande temos que* $m(i) + n \in \{0, ..., n(i)\}$. *Daí para* i *grande temos,* $\operatorname{diam}(\phi^{m(i)+n}(A_i, x_i)) < 2\epsilon_0$. *E pelo lema 3.2*

$$\phi^{m(i)+n}(A_i, x_i) \to \phi^n(B, x).$$

Como tomamos n *um inteiro arbitrário, temos que* $\operatorname{diam}(\phi^n(B,x)) < 2\epsilon_0 < \eta$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *o que contradiz o fato de* X^t *ser CW-expansivo.* □

O próximo lema embora técnico, é importante para a demonstração do teorema principal. Ele nos permite conseguir encontrar subconjuntos compactos conexos com tamanho específico.

Lema 4.3. *Seja* X^t *um fluxo CW-expansivo e* ϵ_0 *e* δ_0 *como no lema anterior. Se* $A \in \bigcup_{i=1}^k S_i$ *é um continuum com* $A \cap \bigcup_{i=1}^k T_i \neq \emptyset$ *tal que* $\operatorname{diam} A < \delta_0$ *e para algum* m *inteiro e* $x \in A$ *vale* $\operatorname{diam} \phi^m(A) \geq \epsilon_0$*. Então vale uma das seguintes conclusões:*

1. *Se* $m \geq 0$*, então* $\operatorname{diam} \phi^n(A,x) \geq \delta_0$ *para qualquer* $n \geq m$*. Mais precisamente, existe um continuum* $B \subset A$*, com* $x \in B$ *tal que*

$$\sup\{\operatorname{diam}(\phi^j(B,x)); j = 1, ..., n\} \leq \epsilon_0$$

   e $\operatorname{diam}(\phi^n(B)) = \delta_0$*;*

2. *Se* $m < 0$*, então* $\operatorname{diam} \phi^{-n}(A,x) \geq \delta_0$ *para qualquer* $n \geq -m$*. Mais precisamente, existe um continuum* $B \subset A$*, com* $x \in B$ *tal que*

$$\sup\{\operatorname{diam} \phi^{-j}(B,x); j = 1, ..., n\} \leq \epsilon_0$$

   e $\operatorname{diam} \phi^{-n}(B) = \delta_0$.

Demonstração: *Vamos fazer o caso em que* $m \geq 0$*, o outro caso é similar. Por [N], existe um caminho* $c : [0,1] \to C(\bigcup_{i=1}^k S^i)$ *de* $\{x\}$ *até* A *tal que se* $r \leq s$ *então* $c(r) \subset c(s)$*. Seja* $n \geq m$*. Defina um mapa* $F : [0,1] \to [0,\infty]$ *por*

$$F(r) = \sup\{\operatorname{diam} \phi^j(c(r),x); j = 0, 1, ..., n\}.$$

Tome $r_0 \in [0,1]$ *tal que* $r_0 \in F^{-1}(\epsilon_0)$. *Pelo lema anterior temos que*

$$\operatorname{diam} \phi^n(A, x) \geq \operatorname{diam} \phi^n(c(r_0)) \geq \delta_0.$$

Defina, $D : C(c(r_0)) \to [0, \infty]$ *por* $D(C) = \operatorname{diam} \phi^n(C)$. *Como* $C(r(a_0))$ *é conexo,* $D^{-1}(\delta_0)$ *é não vazio, e portanto, todo elemento de* $B \in D^{-1}(\delta_0)$ *satisfaz* $\operatorname{diam} \phi^n(B, x) = \delta_0$ *e*

$$\sup\{\operatorname{diam} \phi^j(B, x); j = 1, ..., n\} \leq \epsilon_0.$$

□

Corolário 4.2. *Seja* X^t *um fluxo CW-expansivo,* δ_0 *e* ϵ_0 *como no lema 4.2. Para cada* $\gamma > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que se* $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ *é um continuum com* $A \cap \bigcup_{i=1}^{k} T_i \neq \emptyset$ *e* $\operatorname{diam} A \geq \gamma$, *então para todo* $x \in A \cap \bigcup_{i=1}^{k} T_i \neq \emptyset$ *temos* $\operatorname{diam} \phi^n(A, x) \geq \delta_0$ *para todo* $n \geq N$ *ou* $\operatorname{diam} \phi^{-n}(A, x) \geq \delta_0$ *para todo* $n \geq N$.

Agora o lema que permite encontrar compactos conexos não-triviais dentro do conjunto estável ou no conjunto instável do fluxo, quando temos dimensão topológica maior que 1.

Lema 4.4. *Seja* X^t *um fluxo CW-expansivo e* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ *um par* δ*-adequado de famílias de secções transversais. Se existe uma seção transvesal* T_i *com dimensão topológica maior que zero, então existe um continuum* $A \subset S_i$ *não degenerado tal que* $A \in W^s$ *ou* $A \in W^u$.

Demonstração: *Seja* $C \subset T_{i_0}$ *um continuum não-degenerado, com* $\operatorname{diam} C \leq \delta_0$. *Suponha que qualquer* $C' \subset C$ *continuum em* C *não pertence a* W^s_ϵ. *Escolha* *uma sequência de compactos conexos*

$$C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_n \subset ...,$$

e uma sequência de números naturais $n(1) < n(2) < ...$*, tais que* $\operatorname{diam} C_i 0$, $C_i \to x$, $x \in C_i$ *para todo* i,

$$\sup\{\operatorname{diam} \phi^j(C_i); j = 0, 1, ..., n(i)\} \leq \epsilon_0$$

e $\operatorname{diam} \phi^{n(i)}(C_i) \geq \delta_0$ *para todo* i*. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que* $\phi^{n(i)}(x) \to x_0 \in T_{j_0}$ *e* $\phi^{n(i)}(C_i) \to A \in S_{j_0}$ *para algum* $j_0 \in \{1, ..., k\}$*. Então* $\operatorname{diam} A \geq \delta_0$ *(e daí* A *é não-degenerado). Fixando* $n \in \mathbb{N}$ *podemos usar o lema 3.2 para mostrar que* $\phi^{n(i)-n}(C_i, x) \to \phi^{-n}(A_i, x_0)$*, e como* $\operatorname{diam} \phi^{n(i)-n}(C_i, x) < \epsilon_0$ *para todo* i *temos* $\operatorname{diam} \phi^{-n}(A, x_0) < \epsilon_0$*. Como* n *é um natural qualquer, temos que* $A \in W^u_\epsilon$*.*

□

Observe que se M *tem dimensão topológica maior que* 1*, então como*

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} X^{[0,\alpha]}(T_i) = \bigcup_{i=1}^{k} X^{[-\alpha,0]}(T_i),$$

temos que existe T_i *tal que* $\dim T_i > 0$*.*

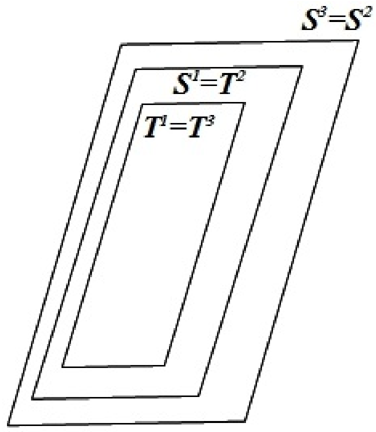
Finalmente, vamos mostrar o teorema principal.

Teorema 4.2. *Se* X^t *é um fluxo CW-expansivo em um espaço métrico compacto* M *com dimensão topológica maior que* 1*, então* $h(X^t) > 0$*.*

Demonstração: *Considere três pares* δ*-adequados de famílias de secções transversais:*

$$(\{T_i^1\}, \{S_i^1\}), (\{T_i^2\}, \{S_i^2\}), (\{T_i^3\}, \{S_i^3\})$$

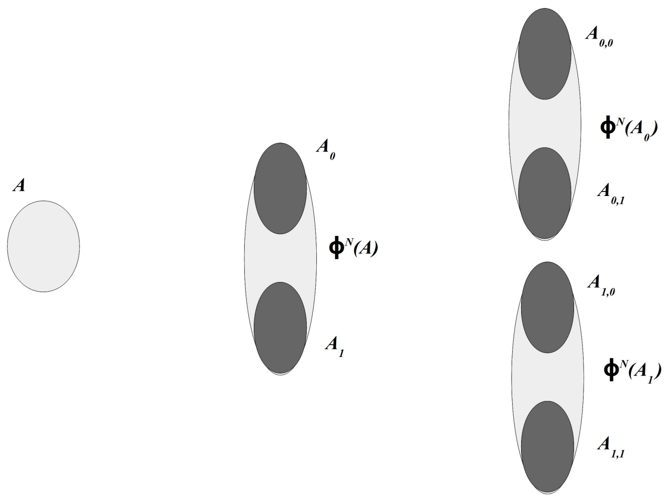
como no lema 3.1, tais que para todo $i \in \{0, ..., k\}$ *temos* $T_i^1 = T_i^2$, $T_i^3 = S_i^2$, $S_i^1 = S_i^3$, *ou seja, temos apenas três famílias de secções transversais se combinando de todas as formas possíveis para formarem pares como do lema 3.1 (note que* $T_i^1 \subset S_i^2 \subset S_i^1$*).*



Para $x \in \bigcup_{i=1}^k S_i^2$ *defina* $\varphi(x) = X^t(x)$ *onde* $t > 0$ *é o menor número real positivo tal que* $X^t(x) \in \bigcup_{i=1}^k T_i^1$. *Observe que* $t \in [\theta_3, \epsilon]$ *(onde* θ_3 *é a constante* θ *relativa ao terceiro par de secções transversais). Seja* θ' *o menor tempo positivo t tal que para qualquer ponto de* $a \in \bigcup_{i=1}^k S_i^2$ *tenhamos* $X^{(0,t)}(a) \cap \bigcup_{i=1}^k T_i^1 \neq \emptyset$. *Como* $[\frac{\epsilon}{\theta'}]$ *é o número máximo de vezes que um pedaço de órbita* $X^{[0,\theta_3]}(x)$ *corta secções transversais* T_i^3, *temos que* $\varphi(x) = \phi_1^i(x)$ *para algum* $i \in \{1, ..., [\frac{\epsilon}{\delta'}]\}$ *(onde* ϕ_1 *é o mapa* ϕ *relativo ao primeiro par de secções transversais). Seja* $\epsilon_1 \in (0, \epsilon_0)$ *tal que se* $x, y \in S_i^2$ *e* $d(x, y) < \epsilon_1$ *e* t *é um número real com* $|t| \leq [\frac{\epsilon}{\delta'}]$ *e* $X^t(x) \in T_j^1$ *então* $X^t(y) \in D_\rho^j$. *Se* $x \in T_i^1$ *e* $y \in S_i^2$ *com* $d(x, y) < \epsilon_1$ *defina um conjunto de pontos* $\{y_{\varphi,0}^x, ..., y_{\varphi,n}^x\} \subset X^{\mathbb{R}}(y)$ *com* $y_{\varphi,0}^x = y$ *e* $y_{\varphi,l}^x = P_\rho^l(X^t(y_{\varphi,l-1}^x))$, *onde* $t > 0$ *é o menor tempo tal que* $\varphi^l(x) = X^t(\varphi^{l-1}(x))$, *e* l *é tal que* $\varphi^j(x) \in T_l$. *Podemos continuar esta construção sempre que* $d(\varphi^j(x), y_j) < \epsilon_1$. *E de forma análoga podemos fazer esta construção para* $j < 0$. *Tome* $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ *tal que se* $x \in \bigcup_{i=1}^k T_i^3$ *e* $y \in \bigcup_{i=1}^k S_i^3$*então*

$d(\phi_3^i(x), y_i^x) < \epsilon_1$ *para todo* $i \in \{1, ..., [\frac{\epsilon}{\delta'}]\}$.

Pelo lema anterior podemos supor que existe um compacto conexo não-degenerado $A \in W_\eta^u$ *em alguma seção transversal* T_i^1*, e pelo lema 4.3 podemos considerar que* $\operatorname{diam} A = \frac{\delta_1}{3}$*. Utilizando o corolário 4.2 tome um número natural* N *tal que se* $D \in \bigcup_{i=1}^k S_i^1$ *é um compacto conexo com* $D \cap \bigcup_{i=1}^k T_i^1 \neq \emptyset$*, e* $\operatorname{diam} D \geq \frac{\delta_1}{3}$*, então para todo* $x \in D$ *temos* $\max\{\operatorname{diam} \phi_1^j(D, x); |j| \leq N\} > \eta$*. Portanto, pelo lema 4.3 e definição de* φ*, se* $D \in W_\eta^u$ *e* $\operatorname{diam} D = \frac{\delta_1}{3}$*, então para todo* $x \in D$ *temos* $\operatorname{diam} \varphi^N(D, x) \geq \delta_1$*. Fixe um número natural* m *e* $x \in A$.



Utilizando o lema 4.3 podemos encontrar dois compactos conexos A_1 *e* A_0 *contidos em* $\varphi^N(A, x)$ *tais que* $d(A_1, A_0) \geq \frac{\delta_1}{3}$*, e* $\operatorname{diam}(A_{i_1}) = \frac{\delta_1}{3}$*, para* $i_1 = 0, 1$ *(observe que pode ocorrer de um destes conjuntos não ter intersecção com nenhum* T_j^1*). Escolhendo* $a_{i_1} \in A_{i_1}$ *temos que* $\operatorname{diam} \varphi^N(A_{i_1}, a_{i_1}) \geq \delta_1$*. Tome então conjuntos* $A_{i_1,0}$ *e* $A_{i_1,1}$ *tais que* $\operatorname{diam}(A_{i_1,i_2}) = \frac{\delta_1}{3}$ *e* $d(A_{i_1,0}, A_{i_1,2}) \geq \frac{\delta_1}{3}$*, com* $i_1, i_2 \in \{0, 1\}$*. Continuando assim, encontramos uma coleção finita* $\{(A_{i_1,i_2,...,i_j}, a_{i_1,i_2,...,i_j})\}$ *com* $i_k = 0$ *ou* 1*, e* $j \leq m$*, tais que:*

- $A_{i_1,...,i_k}$*, são compactos conexos contidos em* $\varphi^N(A_{i_1,...,i_{k-1}}, a_{i_1,...,i_{k-1}})$ *com* $\operatorname{diam}(A_{i_1,...,i_k}) =$

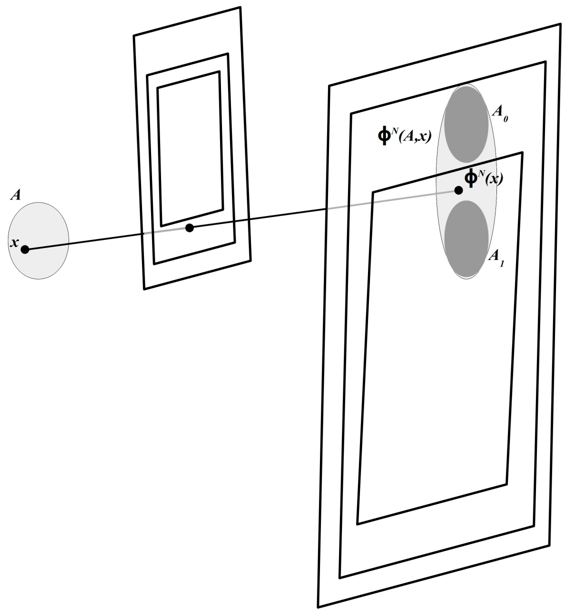
$\frac{\delta_1}{3}$ *e* $d(A_{i_1,\ldots,i_{k-1},0}, A_{i_1,\ldots,i_{k-1},1}) \geq \frac{\delta_1}{3}$;

- $A_{i_1,\ldots,i_j} \in W^u_\eta$.

Para cada $A_{i_1,\ldots,i_m}$ *escolha um ponto* $b(i_1, \ldots, i_m) \in A_{i_1}$ *tal que*

- $c_i(1) = b(i_1, \ldots, i_m)^{a_{i_1}}_{\varphi,N} \in A_{i_1,i_2}$;

- $c_i(j) = c(j-1)^{a_{i_1,\ldots,i_j}}_{\varphi,N} \in A_{i_1,\ldots,i_{j+1}}$ *para* $j \leq m-1$.



Afirmamos que o conjunto E formado pelos pontos $b_{i_1,\ldots,i_m}$ *é* $(m[\frac{\epsilon}{\theta'}]N, \frac{\delta_1}{3})$*-separado para o par de secções transversais* $(\{T_i^3\}, \{S_i^3\})$.

Sejam $b_{i_1,\ldots,i_m} \neq b_{l_1,\ldots,l_m}$. *Considere k o menor natural tal que* $i_k \neq l_k$. *Então* $c_l(k-1) \in A_{i_1,\ldots,i_{k-1},l_k}$ *e* $c_i(k-1) \in A_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}$. *Portanto,*

$$d(c_i(k-1), c_l(k-1)) \geq \frac{\delta_1}{3}.$$

E como $c_l(k-1) = \phi_3^M(b_{l_1,\ldots,l_m})$ *e* $c_i(k-1) = \phi_3^M(b_{i_1,\ldots,i_m})$, *para algum* $M \in \{1, \ldots, [\frac{\epsilon}{\theta'}]Nk\} \subset \{1, \ldots, [\frac{\epsilon}{\theta'}]Nm\}$, *e tomamos estes dois pontos arbitrários em E, temos a afirmação provada.*

Pela afirmação temos que $s'(mN\frac{\epsilon}{\theta'}) \geq 2^m$, *portanto,*

$$\begin{aligned} s'(\{\mathcal{T}_3, \mathcal{S}_3\}, \frac{\delta_1}{3}) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} log(s'(n, \frac{\delta_1}{3})) \\ &\geq \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{mN[\frac{\epsilon}{\theta'}]+1} log(s'(mN[\frac{\epsilon}{\theta'}]+1, \frac{\delta_1}{3})) \\ &\geq \limsup_{m\to\infty} \frac{m}{mN[\frac{\epsilon}{\theta'}]+1} log(2) = \frac{1}{N[\frac{\epsilon}{\theta'}]} log(2) > 0. \end{aligned}$$

Daí, $H'(\{\mathcal{T}_3, \mathcal{S}_3\}) = s'(\{\mathcal{T}_3, \mathcal{S}_3\}) > 0$ *e então,* $h(X^t) > 0$ *pela proposição 4.1.*

$\square$

Capítulo 5

Expansividade fraca para fluxos e problemas em aberto

Neste capítulo, vamos utilizar a notação utilizada para definir CW-expansividade para fluxos, para introduzir outras definições de expansividade fraca para fluxos.

5.1 n-expansividade para fluxos

Em [Mo] Morales define a noção de n-expansividade para homeomorfismos (n é um número natural positivo): Um homeomorfismo $f : M \to M$ é n-expansivo *se existe $\delta > 0$ tal que*

$$\Gamma_\delta(x, f) = \{y \in M; d(f^i(x), f^i(y)) < \delta,\ \forall i \in (Z)\}$$

tem no máximo n elementos para todo $x \in M$.

Um homeomorfismo n-expansivo, sempre é $n+1$-expansivo, e se um homeomorfismo é n-expansivo para algum n então este homeomorfismo é CW-expansivo.

Exemplo: *Vamos construir por indução um homeomorfismo que é CW-expansivo mas não é n-expansivo para nenhum n.*

Considere $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *o Anosov linear do toro.*

Passo 1:*Seja* $p \in \mathbb{T}^2$ *um ponto fixo de* A*. Vamos adicionar um ponto* q *em* $\mathbb{T}^2$ *tal que* $d(x, q) = d(x, p) + 1$*, se* $x \in \mathbb{T}^2$*. Defina* $A(q) = q$*.*

Passo $(n+1)$***:*** *Considere uma órbita de período* $n+1$ *para* A $\{p_1, ..., p_{n+1}\}$ *tal que* $A(p_i) = p_{i+1}$*,* $i \in \{1, ..., n\}$ *e* $A(p_{n+1}) = p_1$*. Adicione pontos* $\{q_{(ij}\}$*,* $i, j \in \{1, ..., n+1\}$*, tais que*

- $d(q_i j, q_i k) = d(p_j, p_k)$*,* $i, j, k \in \{1, ..., n+1\}$*;*
- $d(q_j i, q_k i) = \frac{1}{2^n}$*,* $i, j, k \in \{1, ..., n+1\}$*;*
- $d(q_i j, q_l k) = d(q_i j, q_i k) + d(q_i k, q_l k)$ $i, j, k, l \in \{1, ..., n+1\}$*;*
- $d(x, q_i) = d(q_i, x) = d(x, p_i) + \frac{1}{2^n}$*,* $i \in \{1, ..., n+1\}$*, se* x *está em* $\mathbb{T}^2$ *ou já está definido por hipótese de indução. E defina* $A(q_i j) = q_{i(j+1)}$*,* $i \in \{1, ..., n\}$*, e* $A(q_{i(n+1)}) = q_{i1}$*. Isto define um homeomorfismo* A *que não é n-expansivo para nenhum* $n \in \mathbb{N}$*. Caso existisse* n_0 *tal que* A *é* n_0*-expansivo com constante de expansividade* δ*, considere* $n > n_0$ *tal que* $\delta > \frac{1}{2^n}$*. Então se* q_{ij} *são os pontos de período* n *de nossa construção de* A *teríamos:*

  $$d(A^k(q_{11}), A^k(q_{i1})) = d(q_{1l}), q_{1l})) = \frac{1}{2^n} < \delta$$

  para todo k*. Teríamos então que* $\Gamma_\delta(q_{11}) = n > n_0$*.*

  Mas, A *é CW-expansivo pois não adicionamos nenhum novo continuum em nossa extensão.*

Vamos definir n-expansividade para fluxos, utilizando nosssa notação:

Definição: *Fixe* $n \in \mathbb{N}$. *Um fluxo* X^t *é* n-expansivo *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $A \subset M$ *é compacto e* $\alpha \in H(A)$ *são tais que* $\mathrm{diam}((X)^t_\alpha(A)) < \delta$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *então existe um conjunto* $\Gamma \subset A$ *com no máximo* n *elementos tal que* $A \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(\Gamma)$.

Pela definição temos que 1*-expansividade é o mesmo que expansividade. Para todo* $n \geq 1$, *todo fluxo n-expansivo é* $(n+1)$*-expansivo, e que todo fluxo n-expansivo é CW-expansivo. Portanto, a entropia de todo fluxo n-expansivo é positiva.*

Lema 5.1. *Um ponto fixo de um fluxo n-expansivo não pode ser acumulado por outros pontos fixos do fluxo.*

Demonstração: *Seja* p *um ponto fixo do fluxo* X^t *n-expansivo acumulado por pontos fixos. Seja* $\delta > 0$ *da definição de n-expansividade para* $\epsilon = 1$. *Como* p *é acumulado por pontos fixos, na bola de raio* $\frac{\delta}{2}$ *e centro* p *temos infinitos pontos fixos. Considere* A *um conjunto com* $n+1$ *desses pontos fixos contendo* p. *Defina* $\alpha(x)$ *como a identidade de* $\mathbb{R}$ *para todo* $x \in A$. *Então* $\alpha \in H(A)$ *e para todo* $t \in \mathbb{R}$ *temos*

$$\mathrm{diam}(\mathcal{X}^t_\alpha(A)) = \mathrm{diam}(X^t(A)) = \mathrm{diam}(A) < \delta.$$

Contradição com a escolha de δ.

$\square$

Teorema 5.1. *Todo ponto fixo de um fluxo n-expansivo definido em* M *é um ponto isolado de* M.

Demonstração: *Segue diretamente do lema anterior em conjunto com o lema 2.1.*

□

5.1.1 Invariância por equivalência de um fluxo n-expansivo

Aqui vamos mostrar que fluxos n-expansivos são invariantes por equivalência. O próximo resultado tem demonstração similar ao teorema 2.4, com algumas modificações. Vamos fazer a demonstação aqui por completude.

Teorema 5.2. *Seja X^t um fluxo sem singularidades e fixe um número natural n. São equivalentes:*

1. *X^t é n-expansivo;*
2. *Para todo $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $A \subset M$ e existe $\alpha \in H(A)$ com $\mathrm{diam}(\mathcal{X}^t_\alpha(A)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ então existe um conjunto $\Gamma \subset A$ com no máximo n elementos tal que A é composto por no máximo n segmentos de órbita contidos em $B_\eta(\Gamma)$.*
3. *Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $A \subset M$ e existe $\beta \in SQ^*(A)$, com $\beta(x_\beta)_{i+1} - \beta(x_\beta)_i \leq \eta$ e $\sup_{a\in A} |\beta(a)_{i+1} - \beta(a)_i| \leq \delta$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, tal que $\mathrm{diam}(\mathcal{X}^i_\beta(A)) < \delta$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ então existe um conjunto $\Gamma \subset A$ com no máximo n elementos tal que $A \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(\Gamma)$.*

Demonstração: $(1) \Rightarrow (3)$: *Seja $\epsilon > 0$ dado e $\delta > 0$ referente a definição de n-expansividade. Tome $\eta > 0$ tal que*

$$\eta + (2 \sup_{z\in M, |u|<\eta} d(z, X^u(z))) < \frac{\delta}{2}.$$

Suponha que $A \subset M$ *e existe* $\beta \in SQ^*(A)$, *com* $\beta(x_\beta)_{i+1} - \beta(x_\beta)_i \leq \eta$ *e* $\sup_{a\in A}|\beta(a)_{i+1} - \beta(a)_i| \leq \delta$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$, *tal que* $\mathrm{diam}(\mathcal{X}^i_\beta(A)) < \eta$, *para todo* $i \in \mathbb{Z}$. *Para cada* $a \in A$ *vamos definir um homeomorfismo* $\alpha(a)$ *por* $\alpha(a)(\beta(x_\beta)_i) = \beta(a)_i$, *e para todo* $i \in (Z)$ *e extenda linearmente para todo intervalo* $(\beta(x_\beta)_i, \beta(x_\beta)_{i+1})$. *Então* $\alpha \in H(A)$ *(note que* $\alpha(x_\beta) = Id_{\mathbb{R}}$*).*

Portanto, usando a notação $t_i = \beta(x_\beta)_i$ *para cada* $i \in \mathbb{Z}$, *se* $t \in [t_i, t_{i+1})$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}(\mathcal{X}^t_\beta(A)) &= \sup_{a,b\in A} d(X^{\beta(a)(t)}(a), X^{\beta(b)(t)}(b)) \\
&\leq \sup_{a,b\in A} (d(X^{\beta(a)(t)}(a), X^t(x_\beta)) + d(X^t(x_\beta), X^{\beta(b)(t)}(b))) \\
&\leq \sup_{a\in A} d(X^{\beta(a)(t)}(a), X^t(x_\beta)) + \sup_{b\in A} d(X^t(x_\beta), X^{\beta(b)(t)}(b))) \\
&= 2\sup_{a\in A} d(X^t(x_\beta), X^{\beta(a)(t)}(a))
\end{aligned}$$

Mas para cada $a \in A$ *temos:*

$$\begin{aligned}
d(X^t(x_\beta), X^{\beta(a)(t)}(a)) &\leq d(X^t(x_\beta), X^{t_i}(x_\beta)) + d(X^{t_i}(x_\beta), X^{\beta(a)_i}(a)) \\
&+ d(X^{\beta(a)_i}(a), X^{\beta(a)(t)}(a)) \\
&\leq \sup_{z\in M, |u|\leq\eta} d(z, X^u(z)) + \eta + \sup_{z\in M, |u|\leq\eta} (z, X^u(z)) \\
&< \frac{\delta}{2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{diam}(\mathcal{X}^t_\beta(A)) < 2\frac{\delta}{2} = \delta,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, *e pela definição de* n*-expansividade, existe* $\Gamma \subset A$ *com no máximo* n *elementos tal que* $A \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(\Gamma)$.

(3) $\Rightarrow$ (1)*: Seja $\epsilon > 0$ dado e considere $\delta > 0$ correspondente a condição do item* (3)*. Suponha que existe $A \subset M$ compacto e $\alpha \in H(A)$ tal que* $\operatorname{diam}(\mathcal{X}^t_\alpha(A)) < \delta$ *para todo $t \in \mathbb{R}$. Vamos definir $\beta \in SQ^*(A)$ por indução. Defina $\beta(x)_0 = 0$ para todo $x \in A$. Como $A \subset M$ é compacto existe $t_1 > 0$ tal que $\alpha(x)(t_1) < \delta$ para todo $x \in A$. Defina então $\beta(x)_1 = \alpha(x)(t_1)$. Supondo que para $i \in \mathbb{N}$ temos t_i e $\beta(x)_i$ definidos. Usando novamente a compacidade de A existe $t_{i+1} > t_i$ tal que $|\alpha(x)(t_{i+1}) - \alpha(x)(t_i)| < \delta$ para todo $x \in A$, defina então $\beta(x)_{i+1} = \alpha(x)(t_{i+1}$. De maneira análoga podemos definir para $\beta(x)_i$ para $i \in \mathbb{Z}$ negativos. Como $\alpha \in H(A)$ temos que $\beta \in H(A)$, com $x_\beta = x_\alpha$. Pela condição* (3) *temos que existe $\Gamma \subset A$ com no máximo n elementos tal que $A \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(\Gamma)$.*

(1) $\Rightarrow$ (2)*: Como M é compacto, para todo $\eta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x) \subset B_\eta(x)$ para todo $x \in M$.*

(2) $\Rightarrow$ (1)*: Como o fluxo é livre de singularidades, usando o lema temos que, para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que* $\operatorname{diam}(X^{(-\epsilon,\epsilon)}(x)) > \eta$ *para todo $x \in M$.*

$\square$

Dois fluxos, X^t definido em M e Y^t definido em N, são conjugados *se existe um homeomorfismo entre M e N que leva órbitas de X^t em órbitas em Y^t preservando orientação das mesmas.*

Teorema 5.3. *n-expansividade é invariante por conjugação, ou seja, se um fluxo X^t é conjugado a um fluxo que é n-expansivo então X^t também é n-expansivo.*

Demonstração: *Suponha que X^t é conjugado a Y^t que é n-expansivo. Seja $h : M \to N$ um homeomorfismo como na definição de fluxos conjugados. Seja $\epsilon_M > 0$ dado e considere $\epsilon_N > 0$ tal que se $x, y \in N$ satisfazem $d(x,y) < \epsilon_N$ então $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \epsilon_M$. Seja $\delta_N > 0$ dado pela definição de n-expansividade de Y^t para ϵ_N e tome $\delta_M > 0$ tal que se $x, y \in M$ com $d(x,y) < \delta_M$ então $d(h(x), h(y)) < \delta_N$. Então, se $A_M \subset M$ e $\alpha_M \in H(A_M)$ é tal que* $\mathrm{diam}(\mathcal{X}^t_{\alpha_M}(A_M)) < \delta_M$ *para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que se $A_N = h(A_M) \subset N$ e definindo $\alpha_N(h(x))(t)$ como o número real tal que*

$$h(X^{\alpha_M(x)(t)}(x)) = Y^{\alpha_N(h(x))(t)}(h(x))$$

para todo $x \in A_M$ e para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que α_N é uma função contínua de A_N em $Hom(\mathbb{R}, 0)$. Além disso, fixando $t \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{diam}(\mathcal{Y}^t_{\alpha_N}(A_N)) &= \max_{x,y \in A_N} d(Y^{\alpha_N(x)(t)}(x), Y^{\alpha_N(y)(t)}(y)) \\ &= \max_{x,y \in A_M} d(h(X^{\alpha_M(x)(t))}(x)), h(X^{\alpha_M(y)(t))}(y))) \\ &= \mathrm{diam}(h(\mathcal{X}^t_{\alpha_M}(A_M))) < \delta_N, \end{aligned}$$

pois, $\mathrm{diam}(\mathcal{X}^t_{\alpha_M}(A_M)) < \delta_M$*. Portanto, pela n-expansividade existe um conjunto $\Gamma_N \in A_N$ com no máximo n elementos tal que A_N está contido em $B_{\epsilon_N}(\Gamma_N)$. E como $A_M = h^{-1}(A_N)$, $x_{\alpha_N} = h(x_{\alpha_M})$ e pela escolha de ϵ_N temos que A_M está contido em $B_{\epsilon_M}(\Gamma_N)$.*

$\square$

5.1.2 Suspensão de fluxos n-expansivos

O próximo teorema nos dá uma razão para considerarmos nossa definição de fluxo n-expansivo ser adequada.

Teorema 5.4. *A suspensão de um homeomorfismo $\phi : M \to M$ é n-expansivo se, e somente se, o homeomorfismo ϕ é n-expansivo.*

Demonstração: *Basta mostrar para suspensões por $f \equiv 1$, pois todas as suspensões de um mesmo homemorfismo são conjugadas.*

Suponha que a suspensão X^t é n-expansiva. Seja $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$ dado e $\delta > 0$ dado pela n-expansividade do fluxo. Fixe $z \in M$ e considere $\Gamma_\delta(z)$. Denotando por $A = \Gamma_\delta(z) \times \{0\}$, e x_1 para $(x, 0)$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(X^t(A)) &= \max_{x_1, y_1 \in A} d(X^t(x_1), X^t(y_1)) \\
&\leq \frac{1}{2} \max_{x_1 \in A} d(X^t(z_1), X^t(x_1)) \\
&\leq \frac{1}{2} \max_{x \in \Gamma_\delta(z)} \rho_{t-[t]}((\phi^{[t]}(z), t-[t]), (\phi^{[t]}(x), t-[t])) \\
&= \max_{x \in \Gamma_\delta(z)} ((1-t+[t])\rho(\phi^{[t]}(z), \phi^{[t]}(x)) + (t-[t])\rho(\phi^{[t]+1}(z), \phi^{[t]+1}(x))),
\end{aligned}$$

mas como para todo $x \in \Gamma_\delta(z)$

$$\phi^{[t]}(x) \in \phi^{[t]}(\Gamma_\delta(z)) \text{ e } \phi^{[t]+1}(x) \in \phi^{[t]+1}(\Gamma_\delta(z))$$

temos que:

$$\operatorname{diam}(X^t(A)) \leq (1-t+[t])\delta + (t-[t])\delta = \delta.$$

Pela n-expansividade da suspensão X^t existe um conjunto $\Gamma \subset A$ com no máximo n elementos tal que $A \subset X^{(-\epsilon, \epsilon)}(\Gamma)$, e como $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ e $A \subset M \times \{0\}$

temos que $A = \Gamma$ *e portanto,* $\Gamma_\delta(z)$ *tem no máximo* n *elementos. Portanto,* ϕ *é n-expansivo.*

Suponha agora que o homeomorfismo ϕ *é n-expansivo. Considere em* M *a métrica dada por:*

$$\rho'(x, y) = \min\{\rho(x, y), \rho(\phi(x), \phi(y))\}$$

e $\delta > 0$ *a sua constante de n-expansividade para* ρ'*. Seja* $\epsilon > 0$ *e* $\delta' = \min\{\delta, \epsilon, \frac{1}{4}\}$*. Suponha que* $A \subset M_f$ *é um compacto e* $\alpha \in H(A)$ *é tal que* $\operatorname{diam} \mathcal{X}^t_\alpha(A) < \delta'$ *para todo número real* t*. Vamos dividir a demonstação em dois casos: Quando* x_α *pode ser representado como* $(y_1, \frac{1}{2})$ *e caso isto não ocorra.*

No primeiro caso, defina $A_M = \{a \in M; (a, s) \in A$ *com* $s \in (0, 1)\}$*. Então*

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(A_M) &= \max_{y,z \in A_M} \rho'(y, z) \\ &\leq \max_{(y,s),(z,r) \in A} d((y, s), (z, r)) \\ &= \operatorname{diam}(A) < \delta' < \delta. \end{aligned}$$

Pela definição da suspensão temos que $X^1(x_\alpha)$ *tem representação* $(\phi(y_1), \frac{1}{2})$*, e como* $\operatorname{diam} \mathcal{X}^1_\alpha(A) < \delta < \frac{1}{4}$ *temos que* $X^{\alpha(y)(1)}(y)$ *tem representação* $(\phi(y), s)$ *com* $s \in (0, 1)$ *para todo* $y \in A$*. Logo,*

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(\phi(A_M)) &= \max_{y,z \in A_M} \rho'(\phi(y), \phi(z)) \\ &\leq \max_{(\phi(y),s),(\phi(z),r) \in \mathcal{X}^1_\alpha(A)} d((\phi(y), s), (\phi(z), r)) \\ &= \operatorname{diam}(\mathcal{X}^1_\alpha(A)) < \delta' < \delta. \end{aligned}$$

(A desigualdade é válida pois para todo $y \in A_M$ *existe um ponto* $(\phi(y), s)$ *em* $\mathcal{X}^1_\alpha(A)$*). Seguindo de forma análoga encontramos que* $\operatorname{diam}(\phi^i(A_M)) < \delta$ *para*

todo $i \in \mathbb{Z}$. *Portanto,* $A_M \subset \Gamma_\delta(x_\alpha)$ *e pela* n*-expansividade de* ϕ *temos que* A_M *tem no máximo* n *elementos. Para cada* $x \in A_M$ *escolha um único ponto* $(x, t_x) \in A$ *com* $t_x \in (0, 1)$ *e defina* Γ *como o conjunto desses pontos. Então* Γ *tem no máximo* n *elementos. Como* $\operatorname{diam}(A) < \delta' < \epsilon$ *temos que todo elemento de* A *tem de ser da forma* $(x, t_x + t)$*, com* $|t - \frac{1}{2}| < \epsilon$ *e* $(x, t_x) \in \Gamma$. *Ou seja,* $A \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(\Gamma)$.

No caso de x_α *não tem uma representação como* $(y_1, \frac{1}{2})$ *então existe* $X^r(x_\alpha)$ *com representação como* $(y_1, \frac{1}{2})$ *para algum* $|r| < \frac{1}{2}$. *Definindo* $A' = \mathcal{X}^r_\alpha(A)$ *e para cada* $x \in A$ *e* $t \in \mathbb{R}$

$$\alpha'(X^r(x))(t) = \alpha(x)(t + r) - \alpha(x)(r),$$

temos que A' *é um compacto,* $\alpha' \in H(A')$ *e para todo* $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\mathcal{X}^t_{\alpha'}(A')) &= \max_{x,y \in A'} d(X^{\alpha'(x)(t)}(x), X^{\alpha'(y)(t)}(y)) \\
&= \max_{x,y \in A} d(X^{\alpha(x)(t+r)-\alpha(x)(r)}(X^{\alpha(x)(r)}(x)), X^{\alpha(y)(t+r)-\alpha(y)(r)}(X^{\alpha(y)(r)}(y)) \\
&= \max_{x,y \in A} d(X^{\alpha(x)(t+r)}(x), X^{\alpha(y)(t+r)}(y)) \\
&= \operatorname{diam}(\mathcal{X}^{t+r}_\alpha(A)) < \delta.
\end{aligned}$$

Pelo primeiro caso, temos que existe $\Gamma' \subset A'$ *com no máximo* n *elementos tal que*

$$A' \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(\Gamma') = X^{(-\epsilon,\epsilon)}(X^r(\Gamma')),$$

e portanto, definindo $\Gamma = X^{-r}(\Gamma')$ *temos que* Γ *tem a mesma quantidade de elementos de* Γ' *e*

$$A = X^{-r}(A') \subset X^{(-\epsilon,\epsilon)}(\Gamma).$$

$\square$

5.1.3 Fluxos n-expansivos e secções transversais

Vamos agora mostrar um teorema do mesmo tipo que 3.2

Teorema 5.5. *[KS] Um fluxo X^t é n-expansivo se, e somente se, dado um par $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ δ-adequado, existe $\eta > 0$ tal que para todo $x \in \bigcup_{i=1}^{k} T_i$ temos que o número de elementos de $W^s_\eta(x) \cap W^u_\eta(x)$ é no máximo n.*

Demonstração: *Suponha que X^t é n-expansivo. Seja $a \in (0, \epsilon)$ e $a_1 > 0$ da definição de n-expansividade relativo a a. Seja $\eta \in (0, \epsilon_0)$ tal que se $p \in T_i$ e $q \in S_i$, com $i \in \{1, ..., k\}$, tem $d(p, q) < \eta$, então $d(X^t(p), X^s(q)) < \frac{a_1}{2}$ onde, se $X^{t_1}(p) = \phi(p)$ e $X^{s_1}(q) = q_1$, então $t \in [0, t_1]$ e $s \in [0, s_1]$ e $|s-t| \leq |s_1 - t_1|$. Suponha que $A \subset W^s_\eta(x) \cap W^u_\eta(x)$. Defina $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a bisequência crescente tal que $X^{t_n}(x) = \phi^n(x)$, e para cada $y \in A$ defina a bisequência crescente $\{s^y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $X^{s^y_n}(y) = y^x_n$. E, para cada $y \in A$ defina uma função linear por partes tal que $\alpha(y)(t_n) = s_n$. Então $\alpha \in H(A)$, $x = x_\alpha$ e para $t \in \mathbb{R}$, temos $t = t_n + \sigma$ e $\alpha(y)(t) = s_n + \sigma'$, onde $\sigma \in [0, t_{n+1} - t_n]$, $\sigma' \in [0, s_{n+1} - s_n]$, e*

$$|\sigma - \sigma'| \leq |(t_{n+1} - t_n) - (s_{n+1} - s_n)|$$

para algum n. Daí,

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(\mathcal{X}^t_\alpha(A)) &= \sup_{a,b \in A} d(X^{\alpha(a)(t)}(a), X^{\alpha(b)(t)}(b))) \\ &\leq \sup_{a \in A} d(X^t(x), X^{\alpha(a)(t)}(a))) < a_1 \end{aligned}$$

pela escolha de η. Portanto, existe $\Gamma \subset A$ com no máximo n elementos tal que $A \subset X^{(-a,a)}(\Gamma)$. Como A está em uma secção transversal, temos que A tem no máximo n elementos.

Agora vamos supor que dadas famílias de secções transversais $\mathcal{T}$ *e* $\mathcal{S}$*, e* $\rho > 0$*, existe* $\eta > 0$ *tal que* $W^s_\eta(x) \cap W^u_\eta(x)$ *tem no máximo* n *elementos para todo* $x \in \bigcup T_i$*.*

Seja $0 < a_1 < \frac{\eta}{2}$ *e considere um conjunto* $A \subset M$ *com* $n+1$ *elementos tal que para todo par* $x \neq y \in A$ *nós temos que* $x \notin X^{(-a_1,a_1)}(y)$*. Considere* $\alpha \in H(A)$*.*

Caso 1: *Se* $A \subset S \in \mathcal{S}$*, com* $x_\alpha \in T \cap A$*.*

Considere os tempos t_i *e* s_i^y*, como na construção utilizada na definição de conjuntos estáveis e instáveis de um ponto, relativos a* x_0 *e para os pontos* $y \in A$ *em que sejam possíveis definir estes tempos.*

Escolha $\delta_0 \in (0, \epsilon - \delta - \rho)$ *e números positivos,* $a_2 < a_1$ *e* $a_3, a_4 > 0$ *tais que, se* $u \in T_i$ *e* $v \in S_i$*, então:*

1. $d(u,v) < a_1$ *implica que* $d(u, X^t(v)) > a_1$ *para todo* $|t| \in [\delta_0, \epsilon]$*;*
2. $d(u,v) < a_2$ *implica que* $d(\phi(u), v_1) < a_1$*;*
3. $d(u,v) \geq a_2$ *implica que* $d(u, X^t(v)) > a_3$ *para todo* $|t| < \delta$*;*
4. *Se* $x, y \in M$ *e* $d(x,y) < a_4$ *então* $d(X^t(x), X^t(y)) < a_1$ *para* $|t| < \delta$*.*

Seja $a' = \min\{a_2, a_3, a_4\}$*.*

(a) *Suponha que para todo* $i \in \mathbb{Z}$ *temos*

$$\sup_{y \in A} |\alpha(y)(t_i) - s_i| < \delta.$$

Pela hipotese, temos que existe $n \in \mathbb{Z}$ *e* $y \in A$ *tal que* $d(\phi^n(x_\alpha), y_n^x) > \eta$*.*

Portanto,

$$d(X^{t_n}(x_\alpha), X^{s_n}(y)) > \eta > a_1 > a_2$$

e por (3) *temos:*

$$\operatorname{diam} \mathcal{X}_\alpha^{t_n}(A) > d(X^{t_n}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t_n)}(y) > a_3 \geq a';$$

(b) *Suponha que* $j \in \mathbb{Z}$ *é o inteiro mais próximo de* 0 *(digamos positivo) tal que*

$$\sup_{y \in A} |\alpha(y)(t_j) - s_j| \geq \delta.$$

Seja $y \in A$ *tal que* $|\alpha(y)(t_j) - s_j| \geq \delta$.

(b.1) *Suponha que existe* $i \in [0, j)$ *tal que*

$$d(\phi^i(x), y_i) < a_2.$$

Argumentando como na primeira parte temos,

$$\operatorname{diam} \mathcal{X}_\alpha^{t_n}(A) > d(X^{t_n}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t_n)}(y) > a_3 \geq a';$$

(b.2) *Suponha que* $t = s_j^y - \alpha(y)(t_j) \geq \delta$. *Se* $\alpha(t_j) \geq s_{j-1} - \delta_0$, *então*

$$\delta_0 \leq t \leq s_j - s_{j-1} + \delta_0 < \delta + \rho + \delta_0 < \epsilon$$

e por (i),

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} \mathcal{X}_\alpha^{t_j}(A) &\geq d(X^{t_j}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t_j)}(y)) \\ &= d(X^{t_j}(x_\alpha), X^{(s_j - t)}(y)) > a_1. \end{aligned}$$

Mas se $\alpha(t_j) < s_{j-1}^y - \delta$ *podemos encontar* $t' \in (t_{j-1}, t_j)$ *tal que* $\alpha(y)(t') = s_{j-1} - \delta_0$. *Se* $\zeta = t' - t_{j-1}$, *como pelo item anterior temos* $d(X^{t_{j-1}}(x_\alpha), X^{s_{j-1}^y}(y)) <$

$a_2 < a_1$ *então, utilizando (i) temos,*

$$d(X^{t_{j-1}}(x_\alpha), X^{s^y_{j-1}-\delta_0-\zeta}(y) > a_1.$$

Portanto, por (iv) temos

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(X^{t'}(A) &\geq d(X^{t'}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t')}(y)) \\ &= d(X^{t_{j-1}+\zeta}(x_\alpha), X^{s^y_{j-1}-\delta_0}(y))) > a_4. \end{aligned}$$

(b.3) *Suponha* $t = \alpha(y)(t_j) - s^y_j \geq \delta_0$. *Como*

$$s^y_{j-1} + \delta \in [\alpha(y)(t_{j-1}), s^y_j + \delta_0),$$

existe $t' \in (t_{j-1}, t_j]$ *com* $\alpha(y)(t') = s^y_j + \delta_0$. *Defina* $\zeta = t_j - t'$. *Aplicando (i) em* $d(X^{t_j}(x_\alpha), X^{s_j}(y)) < a_1$ *temos,*

$$d(X^{t_j}(x_\alpha), X^{\zeta+\delta_0}(X^{s^y_j}(y))) > a_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} \mathcal{X}^{t'}_\alpha(A) &\geq d(X^{t'}(x_)), X^{\alpha(y)(t')}(y)) \\ &= d(X^{t_j+\zeta}(x_\alpha), X^{s_j+\delta_0}(y)) > a_4. \end{aligned}$$

Caso 2: *Agora suponha que A não necessariamente está contido em uma secção transversal. Tome* $\delta_1 > 0$ *e* $a_5 > 0$ *tais que se* $d(x, y) < a_5$ *então:*

1. $d(X^t(x), X^s(y)) < \frac{a'}{2}$, *onde* $t > 0$ *é o menor inteiro positivo tal que* $X^t(x) \in \bigcup_{i=1}^k T_i$, $X^s(y) = D^i_\rho(X^t(y))$ *e* $|t - s| < \frac{\delta_1}{16}$;
2. $d(X^w(x), X^v(y)) < \frac{a'}{2}$, *para todo* $|w|, |v| \leq \delta_1 + \delta$ *e* $|v - w| \leq \delta_1$.

E seja $a_6 > 0$ *tal que se* $d(x,y) \leq a_6$ *então* $d(X^{t'}(x), X^{t'+t}(y) > a_6$ *para* $|t| \in (\frac{\delta_1}{16}, \epsilon)$ *e* $|t'| < \delta$. *Tome também* $0 < a_7 < a_5$ *tal que o conjunto dos pontos da bola* $B_{a_7}(x)$ *que se projetam sobre* $X^t(x)$ *esteja contido em* $X^{(-a_5,a_5)}(x)$.

Agora suponha que t *é o menor tempo positivo tal que* $X^t(x_\alpha) \in \bigcup_{i=1}^k T_i$.

(a) *Suponha que para todo* $y \in A$ *nós temos* $|\alpha(y)(t) - s| < \frac{\delta_1}{8}$. *Como* A *é compacto existe* $\delta' \in \frac{\delta_1}{4}$ *tal que*

$$\sup_{y \in A} |\alpha(y)(t+t') - s| < \frac{\delta_1}{4}$$

para todo $|t'| \leq \delta'$. *Defina então para cada* $y \in A$ *um homeomorfismo* $\beta(y)(t) = \alpha(y)(t'+t) - s$ *para* $|t'| \geq \delta'$, $\beta(y)(0) = 0$ *e linearmente em* $t \in (0, \delta')$. *Portanto, para todo* $y \in A$ *temos,*

$$\beta(y)(t') - t'| \leq \frac{\delta_1}{4} + \delta' < \frac{\delta_1}{2}.$$

para todo $|t'| < \delta'$. *Por* (1) *e* (2) *temos, para todo* $y \in A$, *que*

$$d(X^{t+t'}(x_\alpha), X^{s+\beta(y)(t')}) < \frac{a'}{2}$$

para $|t'| < \delta'$. *Pelo primeiro caso da prova, podemos encontrar* $y \in A$ *e* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$d(X^{t_0}(X^t(x_\alpha)), X^{\beta(y)(t_0)}(X^s(y))) > a'.$$

Pela nossa construção, $|t_0|$ *deve ser maior que* δ', *ou seja,*

$$d(X^{t+t_0}(x_\alpha), X^{\alpha(y)(t+t_0)}(y)) > a'.$$

(b) *Suponha que exista* $y_0 \in A$ *tal que* $|\alpha(y_0)(t) - s| \geq \frac{\delta_1}{8}$. *Então* $|\alpha(y_0)(t) - t| \geq \frac{\delta_1}{16}$ *e portanto, existe* $t' \leq t$ *tal que* $|\alpha(y_0)(t') - t'| = \frac{\delta_1}{16}$. *Então,*

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(\mathcal{X}_\alpha^{t'}(A)) &\leq d(X^{t'}(x_\alpha), X^{\alpha(y_0)(t')}(y_0)) \\ &= d(X^{t'}(x_\alpha), X^{t' \pm \frac{\delta_1}{16}}(y_0)) > a_6, \end{aligned}$$

a menos que $d(x_\alpha, y_0) > a_6$. *ou seja, teríamos* $\operatorname{diam}(A) > a_6$.

Portanto, temos que $\min(a', a_6, a_7)$ *é uma constante de expansividade correspondente a* a_5.

$\square$

Questão 1: *A entropia de um fluxo n-expansivo é finita?*

Em [K1] Kato exibe um exemplo de homeomorfismo CW-expansivo com entropia infinita. Portanto, a suspensão deste homeomorfismo tem entropia infinita, o que mostra que esta questão tem resposta negativa para fluxos CW-expansivos em geral.

5.2 Komuro CW-expansividade

Em [Ko] Komuro introduziu uma nova noção de expansividade para fluxos, aqui chamada de Komuro expansividade: Um fluxo X^t *é* Komuro expansivo *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $A \subset M$ *é compacto e* $\alpha \in H(A)$ *é tal que* $\operatorname{diam}(\mathcal{X}_\alpha^t(A)) < \delta$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *então existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathcal{X}_\alpha^t(A) \subset X^{(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)}(x_\alpha)$.

Esta definição é equivalente a definição de expansividade de Bowen e Walters quando o fluxo não tem singularidades. Porém, esta definição admite fluxos com singularidades, como por exemplo o atrator geométrico de Lorenz. Vamos adaptar esta definição para ficar mais próxima da CW-expansividade.

Definição: *Um fluxo X^t é* Komuro CW-Expansivo *se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $A \subset M$ é um continuum e $\alpha \in H(A)$ são tais que* $\mathrm{diam}(\mathcal{X}_\alpha^t(A)) < \delta$ *para todo $t \in \mathbb{R}$ então existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{X}_\alpha^t(A) \subset X^{(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)}(x_\alpha)$.*

O teorema 3.2 se aplica a fluxos Komuro CW-expansivos, pois a suspensão de homeomorfismos não tem singularidades.

Questão 2: *Existe um fluxo Komuro CW-expansivo X^t com singularidades definido em um continuum que não é Komuro expansivo?*

Capítulo 6

Bibliografia

[AKM] *Adler, R.L., Konheim, A.G., McAndrew M.H., Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. ***153*** *(1970), 401-414.*

[B1] *Bowen, R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. ***153*** *(1970), 401-414.*

[B2] *Bowen R. Periodic orbits for hyperbolic flows,* Amer. J. Math. ***94*** *(1972), 1-30.*

[B3] *Bowen, R. Entropy-expansive maps,* Trans. Amer. Math. Soc. ***164*** *(1972), 323-331.*

[BW] *Bowen, R., Walters, P. Expansive one-parameter flows,* J. Differential Equations. ***12****, (1972), 180-193.*

[GV] *Groisman, J., Vieitez, J. On transitive expansive homeomorphisms of the plane.* Topology Appl.. ***178****, (2014), 124-135.*

[K1] *Kato, H., Continuum-wise expansive homeomorphisms,* Canad. J. Math. ***45**, no.3, (1993), 576-598.*

[KS] *Keynes, H. B. and Sears, M., Real-expansive flows and topological dimension,* Ergod. Th. & Dynam. Sys., ***1** (1981), 179-195.*

[Ko] *Komuro, M., Expansive properties of Lorenz Attractors,* In the theory of dynamical systems and its applications to nonlinear problems, World Sci. Publishing, Kyoto, *1984, 4-26.*

[L] *Lee, M., Continuum-wise expansive and dominated splitting.* Int. J. Math. Anal. ***23**, (2013) 1149-1154.*

[L1] *Lewowicz J., Persistence in expansive systems,* Erg. Th. & Dyn. Sys. ***3** (1983) 567-578.*

[L2] *Lewowicz J., Expansive homeomorphisms on surfaces,* Bol. Soc. Bras. Mat., Nova Ser. ***20**, no. 1, (1989) 113-133.*

[Ma] *Mañé, R., Expansive hoemomorphisms and topological dimension,* Trans, AMS. ***252** , (1979) 313–319.*

[Mo] *Morales, C.A. A generalization of expansivity,* Discrete Contin. Dyn. Syst. ***32** , no. 1, (2012) 293–301.*

[N] *Nadler Jr., S. B., Hyperspaces of sets, Pure and Appl. Math. 49, Dekker, New York, 1978.*

[O] *M. Oka Expansiveness of real flows,* Tsukuba J. Math., ***14**, no. 1 (1990) 1-8.*

[S] *Sakai, K, Continuum-wise expansive diffeomorphisms.* Publ. Mat., ***41***, *(1997) 375-382.*

[T] *Thomas, R.F. Topological Entropy of Fixed-Point Free Flows,* Trans. Amer. Math. Soc. ***319*** *2 (1990), 601-618.*

[Utz] *Utz, W.R. Unstable homeomorphisms.* Proc. Amer. Math Soc. ***1*** *(1950), 769-774.*