

Universidade Federal do Rio de Janeiro

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA UM SISTEMA
SCHRÖDINGER-BENJAMIN-ONO

Leandro Domingues

2015



O PROBLEMA DE CAUCHY PARA UM SISTEMA SCHRÖDINGER-BENJAMIN-ONO

Leandro Domingues

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Orientador: Didier Jacques François Pilod

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2015

CIP - Catalogação na Publicação

D671p Domingues, Leandro
O Problema de Cauchy para um Sistema
Schrödinger Benjamin-Ono / Leandro Domingues. --
Rio de Janeiro, 2015.
66 f.

Orientador: Didier Jacques François Pilod.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1. Sistema Schrödinger Benjamin-Ono. 2.
Problema de Cauchy. 3. Boa Colocação Local. 4. Má
Colocação. 5. Estimativas Bilineares. I. Pilod,
Didier Jacques François, orient. II. Título.

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA UM SISTEMA SCHRÖDINGER-BENJAMIN-ONO

Leandro Domingues

Orientador: Didier Jacques François Pilod

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Aprovada por:



Presidente, Prof. Didier Jacques François Pilod - IM/UFRJ



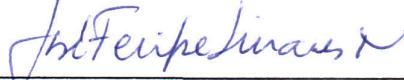
Prof. Adán José Corcho Fernández - IM/UFRJ



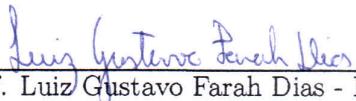
Prof. Xavier Carvajal Paredes - IM/UFRJ



Prof. Jean-Claude Saut - Université Paris-Sud



Prof. Jose Felipe Linares Ramirez - IMPA



Prof. Luiz Gustavo Farah Dias - ICEX/UFMG

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2015

*Dedico este trabalho à memória
de minha mãe Eliana.*

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Didier Pilod, mais que um Orientador, um verdadeiro Amigo, pelas palavras incentivadoras e motivantes, algumas das quais nunca me esquecerei.

Aos membros da banca, por terem aceitado participar da minha defesa.

A todos os professores do programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da UFRJ, em especial Adán Corcho e Nilson Bernardes, pela formação que me deram.

Aos funcionários do IM-UFRJ, em especial Alan e Cristiano, pela diligência.

Aos colegas no Departamento de Matemática Aplicada na Universidade Federal do Espírito Santo, pelo apoio sem o qual o doutorado não seria possível.

Ao Professor e Amigo Heudson Mirandola, por não ter desistido de me incentivar.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Aos amigos do grupo de estudos de equações dispersivas Adán, Didier, Gastão, Márcio, Raphael e Terry, pelos “goxtchosos” momentos de aprendizagem.

Aos amigos de ”bandejão” e salinha de estudos Bernardo, Daniel, Davi, Diego, Gastão, Gerardo, Gladston, Jennyffer e Freddy, Jonny, Marcão e Miriam, Márcio, Milena, Rafael, Raphael, Renan, Rizwan, Roberto, Rodrigo, Rômulo, Sara, Víctor, Vinícius, por terem tornado esta jornada agradável e inesquecível.

A Instituição Religiosa Perfect Liberty, por estar me ensinado que Vida é Arte.

Ao povo brasileiro, por ter custeado minha Graduação, meu Mestrado e meu Doutorado, e com bolsa! Tem do que reclamar? Melhor só retribuir...

A toda a minha família, por ter conseguido me aturar.

A minhas avós, tias, tios e meu pai, pela criação.

Ao Tito, pelo porto seguro em minha vida.

A minha filha Larissa, por ter colocado tantos sorrisos na minha cara emburrada.

A minha esposa Cinira, por ser tão teimosa e ainda acreditar em mim.

A minha MÃE, por TUDO!

MUITO, MUITO, MUITO, ... , MUITO OBRIGADO !!!

“Tudo vale a pena quando a alma não é pequena.”
– Fernando Pessoa
1888 - 1935

RESUMO

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA UM SISTEMA SCHRÖDINGER-BENJAMIN-ONO

Leandro Domingues

Orientador: Didier Jacques François Pilod

A proposta deste trabalho é o estudo do problema de Cauchy para um sistema acoplado Schrödinger-Benjamin-Ono

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv, & t \in [-T, T], \quad x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t v + \nu \mathcal{H} \partial_x^2 v = \beta \partial_x (|u|^2), \\ u(0, x) = \phi, \quad v(0, x) = \psi, & (\phi, \psi) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Na ausência de ressonância para o sistema ($|\nu| \neq 1$), obtivemos resultado de boa colocação local para uma ampla classe de dados iniciais, melhorando os resultados obtidos por Bekiranov, Ogawa e Ponce (1998). Além disso, provamos C^2 -*má colocação* para todo dado inicial com baixa regularidade e também para todo dado inicial cuja diferença entre suas regularidades é suficientemente grande (i.e. $|s - s'| > c$). Até onde sabemos, este último resultado de má colocação é o primeiro deste tipo a ser obtido para um sistema não linear dispersivo. Por fim, na presença de ressonância para o sistema ($|\nu| = 1$), provamos que o resultado de boa colocação local obtido por Pecher (2006) é o melhor possível, exceto pelo ponto final de regularidade.

Palavras-chave: Sistema Schrödinger-Benjamin-Ono, Problema de Cauchy, Boa Colocação Local, Má Colocação, Estimativas Bilineares.

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2015

ABSTRACT

THE CAUCHY PROBLEM FOR A SCHRÖDINGER-BENJAMIN-ONO SYSTEM

Leandro Domingues

Advisor: Didier Jacques François Pilod

This work is concerned with the Cauchy problem for a coupled Schrödinger-Benjamin-Ono system

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv, & t \in [-T, T], \quad x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t v + \nu \mathcal{H} \partial_x^2 v = \beta \partial_x (|u|^2), \\ u(0, x) = \phi, \quad v(0, x) = \psi, & (\phi, \psi) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

In the *non-resonant* case ($|\nu| \neq 1$), we prove local well-posedness for a large class of initial data. This improves the results obtained by Bekiranov, Ogawa and Ponce (1998). Moreover, we prove *C^2 -ill-posedness* at *low-regularity*, and also when the difference of regularity between the initial data is large enough (i.e. $|s - s'| > c$). As far as we know, this last ill-posedness result is the first of this kind for a nonlinear dispersive system. Finally, we also prove that the local well-posedness result obtained by Pecher (2006) in the *resonant* case ($|\nu| = 1$) is sharp except for the end-point.

Key-words: Schrödinger-Benjamin-Ono System, Cauchy Problem, Local Well-Posedness, Ill-Posedness, Bilinear Estimates.

Rio de Janeiro

February 2015

Sumário

Introdução	1
Notações	6
1 Preliminares	8
1.1 Espaços de Bourgain	9
1.2 Estimativas Lineares	11
2 Boa Colocação Local	15
2.1 Enunciado do Teorema de Boa Colocação Local	16
2.2 Desigualdades Auxiliares	19
2.3 Estimativa para o termo $\partial_x(u ^2)$	22
2.4 Estimativa para o termo uv	26
2.5 Prova da Boa Colocação Local	30
3 Resultados de Má Colocação	34
3.1 C^2 -Má Colocação	35
3.2 Onde as Estimativas Bilineares Não Valem	44
Trabalhos Futuros	47
Apêndice	49
Referências Bibliográficas	54

Lista de Figuras

I.1	(SB-O), $ \nu \neq 1$ e $(\phi, \psi) \in H^s \times H^{s'}$	3
I.2	(SB-O), $ \nu = 1$ e $(\phi, \psi) \in H^s \times H^{s'}$	4
2.1	Estimativas Bilineares	18
2.2	Estimativa Bilinear para o termo $\partial_x(u ^2)$	22
2.3	Estimativa Bilinear para o termo uv	26
3.1	Fluxo (3.9) não é C^2 em zero	37
3.2	Aplicação dado-solução (2.5) não é C^2 em zero	40

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo do Problema de Cauchy para o sistema dispersivo, modelado pelo acoplamento não linear das equações de Schrödinger e de Benjamin-Ono,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv, & t \in [-T, T], \ x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t v + \nu \mathcal{H} \partial_x^2 v = \beta \partial_x (|u|^2), & \\ u(0, x) = \phi, \ v(0, x) = \psi, & (\phi, \psi) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R}), \end{cases} \quad (\text{SB-O})$$

onde \mathcal{H} denota a transformada de Hilbert, $u = u(t, x)$ é uma função a valores complexos, $v = v(t, x)$ é uma função a valores reais e α, β, ν são constantes reais com $\alpha\beta \neq 0$.

O sistema (SB-O) foi deduzido por Funakoshi e Oikawa em [12]. Ele descreve o movimento de dois fluidos com diferentes densidades sob ondas gravidade-capilares em um fluxo de águas profundas. A onda curta de superfície é geralmente descrita por uma equação do tipo Schrödinger e a onda longa interna é descrita por algum tipo de equação da onda acompanhada por um termo dispersivo (que neste caso é uma equação do tipo Benjamin-Ono).

Por Boa Colocação Local em um espaço X do Problema de Cauchy para (SB-O) entende-se que, para todo dado inicial $(\phi, \psi) \in X$, existe um intervalo de tempo $[-T, T]$, para o qual existe uma solução para as equações integrais associadas ao sistema, que é única em algum espaço de funções (*Existência e Unicidade*). Além disso, tal solução deve descrever uma curva contínua de $[-T, T]$ em X (*Persistência*) e a aplicação dado-solução deve ser, pelo menos, contínua (*Dependência Contínua nos Dados Iniciais*).

Os espaços naturais para o estudo da Boa Colocação Local de (SB-O) são os espaços de Sobolev do tipo $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$ pois, para uma solução suave (u, v) de (SB-O), as

seguintes quantidades estão conservadas para todo $t \in [-T, T]$

$$\begin{cases} H[u(t), v(t)] \equiv \|u(t)\|_2^2, \\ M[u(t), v(t)] \equiv \operatorname{Im} \int u(t, x) \partial_x \bar{u}(t, x) dx + \frac{\alpha}{2\beta} \|v(t)\|_2^2, \\ E[u(t), v(t)] \equiv \|\partial_x u(t)\|_2^2 + \alpha \int v(t, x) |u(t, x)|^2 dx - \frac{\alpha\nu}{2\beta} \|D_x^{1/2} v(t)\|_2^2, \end{cases}$$

onde $D_x = \mathcal{H}\partial_x$.

No caso não ressonante ($|\nu| \neq 1$), Bekiranov, Ogawa e Ponce provaram em [5] a Boa Colocação Local de (SB-O) para (s, s') na semirreta

$$\ell := \{(s, s') \in \mathbb{R}^2 : s' = s - 1/2, s \geq 0\}.$$

Em [1], Angulo, Matheus e Pilod provaram a Boa Colocação Global de (SB-O) no caso não ressonante, também para $(s, s') \in \ell$, usando uma ideia de Colliander, Holmer e Tzirakis empregada em [8].

No Teorema 2.1 deste trabalho, obtivemos a Boa Colocação Local de (SB-O), no caso não ressonante, para (s, s') na região

$$\mathcal{W} := \{(s, s') \in \mathbb{R}^2 : -1/2 < s' - (s - 1/2) < 1, -1/2 \leq s' \leq 2s - 1/2\},$$

melhorando o resultado de Bekiranov, Ogawa e Ponce.

No Teorema 3.2, obtivemos a C^2 -*Má Colocação* de (SB-O), no caso não ressonante, para (s, s') na região

$$\mathcal{R}_1 := \{(s, s') \in \mathbb{R}^2 : s' < -1/2 \text{ ou } 2s - 1/2 < s'\},$$

no sentido de que a aplicação dado-solução (fluxo) $S^t : (\phi, \psi) \mapsto (u(t), v(t))$ não pode ser de classe C^2 em zero, para qualquer $t \neq 0$ no intervalo $[-T, T]$ para o qual se tenha Boa Colocação Local.

No Teorema 3.3, obtivemos a C^2 -*Má Colocação* de (SB-O), no caso não ressonante, para (s, s') na região

$$\mathcal{R}_2 := \{(s, s') \in \mathbb{R}^2 : |s' - (s - 1/2)| > 3/2\},$$

no sentido de que a aplicação dado-solução $S : (\phi, \psi) \mapsto (u, v)$ não pode ser de classe C^2 em zero, qualquer que seja o intervalo $[-T, T]$ para o qual se tenha Boa Colocação. Como se pode ver, a Má Colocação se dá em um sentido um pouco mais forte na região \mathcal{R}_1 do que na região \mathcal{R}_2 .

Observação 1. Até onde sabemos, o Teorema 3.3 é o primeiro resultado de C^2 -Má Colocação a ser obtido para um sistema não linear dispersivo, no caso específico em que a diferença entre as regularidades do dado inicial é suficientemente grande (i.e. $|s - s'| > c$). Isto é o que ocorre para todo dado inicial cuja regularidade (s, s') está na região \mathcal{R}_2 (veja as Figuras I.1 e 3.2). Tal resultado parece natural devido ao acoplamento do sistema pelos termos não lineares das equações e ao Princípio de Duhamel.

No Teorema 3.5, mostramos que as estimativas bilineares utilizadas para a demonstração do Teorema 2.1 não valem em uma parte da região restante $\mathbb{R}^2 - (\mathcal{W} \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$, e que não valem em toda a região restante quando $\nu = 0$. Todos esses resultados sobre

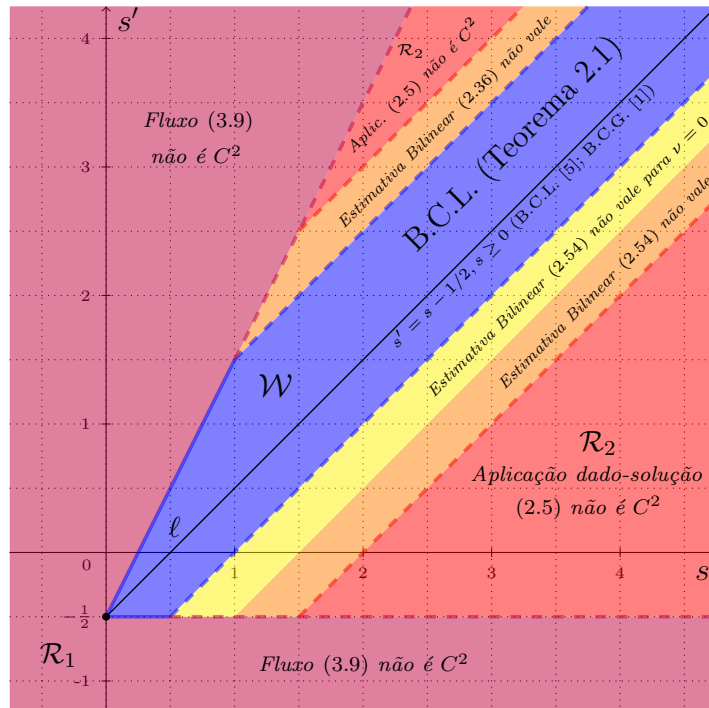


Figura I.1: (SB-O), $|\nu| \neq 1$ e $(\phi, \psi) \in H^s \times H^{s'}$

o sistema (SB-O), no caso não ressonante ($|\nu| \neq 1$), estão resumidos na Figura I.1.

No caso ressonante ($|\nu| = 1$), Pecher mostrou em [22] a Boa Colocação Local do sistema (SB-O) para $(s, s') \in \ell$, exceto pelo ponto $(0, -1/2)$. No Teorema 3.4, obtivemos C^2 -Má Colocação de (SB-O) para $(s, s') \notin \ell$. E no Teorema 3.6, mostramos que a estimativa bilinear, que é o ponto-chave da prova de Boa Colocação obtida por Pecher, não vale no ponto $(0, -1/2)$. A Figura I.2 resume os resultados para o sistema (SB-O)

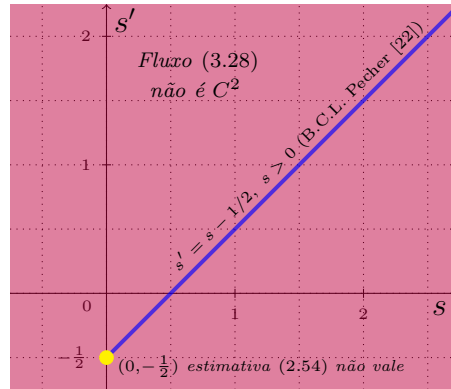


Figura I.2: (SB-O), $|\nu| = 1$ e $(\phi, \psi) \in H^s \times H^{s'}$

no caso ressonante.

Para o caso periódico do sistema (SB-O), Angulo, Matheus e Pilod provaram em [1] Boa Colocação Local, no caso não ressonante, para dados iniciais em $H^s(\mathbb{T}) \times H^{s-1/2}(\mathbb{T})$, para todo $s \geq 1/2$. E Oh provou em [21] C^2 -Má Colocação para $s < 1/2$ no caso não ressonante e para $s \in \mathbb{R}$ no caso ressonante.

Bekiranov, Ogawa e Ponce também obtiveram Boa Colocação Local para outros sistemas dispersivos não lineares: o sistema Schrödinger-Korteweg-de Vries (em [4]); e o sistema de Benney (em [5]). Em ambos, para dados iniciais em $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$ com $(s, s') \in \ell$. Para o último sistema, devido a propriedades da transformação por escalonamento (*scaling*), a Boa Colocação Local só foi investigada em $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1/2}(\mathbb{R})$ (veja Remark 2 em [5]).

No caso do sistema (SB-O), se escalonarmos uma solução (u, v) do sistema,

$$u_\lambda(t, x) = \lambda^{\frac{3}{2}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad v_\lambda(t, x) = \lambda^2 v(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0,$$

então (u_λ, v_λ) também é uma solução de (SB-O) com os dados iniciais substituídos por $\phi_\lambda(x) = \lambda^{\frac{3}{2}}\phi(\lambda x)$ e $\psi_\lambda(x) = \lambda^2\psi(\lambda x)$, que satisfazem

$$\|\phi_\lambda\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{1+s}\|\phi\|_{\dot{H}^s}, \quad \|\psi_\lambda\|_{\dot{H}^{s'}} = \lambda^{\frac{3}{2}+s'}\|\psi\|_{\dot{H}^{s'}}.$$

Logo, para $s' = s - 1/2$, tem-se $\|(\phi_\lambda, \psi_\lambda)\|_{\dot{H}^s \times \dot{H}^{s'}} = \lambda^{1+s}\|(\phi, \psi)\|_{\dot{H}^s \times \dot{H}^{s'}}$. Contudo, no Teorema 2.1, mostramos que o regime $s' = s - 1/2$ não é uma condição necessária para a Boa Colocação do sistema (SB-O). Observe também que o Teorema 3.2 estabelece C^2 -Má Colocação para todo (s, s') em uma vizinhança de $(-1, -3/2)$, que é um ponto de regularidade crítica, no sentido que a transformação por escalonamento deixa a norma $\dot{H}^s \times \dot{H}^{s'}$ invariante nesta regularidade.

Em [14], Ginibre, Tsutsumi e Velo provaram a Boa Colocação Local para o sistema de Benney e para o sistema 1D Zakharov, ambos para a região

$$\{(s, s') \in \mathbb{R}^2 : -1/2 < s - s' \leq 1, \quad 0 \leq s' + 1/2 \leq 2s \}.$$

Em [9], Corcho e Linares provaram a Boa Colocação Local para o sistema Schrödinger-Korteweg-de Vries, para uma região contendo a semirreta ℓ . Má Colocação não foi investigada em [4], [14], [5] e [9]. Em [25], Wu provou Boa Colocação Local para o sistema Schrödinger-Korteweg-de Vries para uma região mais ampla, melhorando o resultado obtido em [9], e obteve C^2 -Má Colocação para a região

$$\{(s, s') \in \mathbb{R}^2 : s' < -3/4 \text{ ou } 4s < s'\}.$$

Observe que esta região se assemelha à região \mathcal{R}_1 e fora dela há pontos com $|s - s'|$ arbitrariamente grande, onde pensamos ser natural esperar Má Colocação.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira: No Capítulo 1 estabelecemos os pré-requisitos necessários para a obtenção dos nossos resultados. O Capítulo 2 é dedicado à obtenção do Teorema de Boa Colocação Local para (SB-O) no caso não ressonante, onde o ponto-chave é a obtenção das estimativas bilineares demonstradas nas Seções 2.3 e 2.4. No Capítulo 3 provamos os resultados de Má-Colocação para (SB-O) nos casos ressonante e não ressonante. Por fim, listamos alguns trabalhos relacionados que ainda estão em andamento.

Notações

- $\mathbf{1}_\Omega(x) := \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$
- $\text{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$
- $f(X) \lesssim g(X)$ denota que existe $C > 0$, dependente de alguns parâmetros fixados, para a qual vale $f(X) \leq Cg(X)$, $\forall X$.
- $f(x) \sim g(x)$ denota $f(x) \lesssim g(x) \lesssim f(x)$.
- $\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2} = \sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço de Schwartz em \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ denota o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o espaço das distribuições temperadas.
- $C_t^0(I; X)$ denota o espaço das funções contínuas em um intervalo I a valores em um espaço normado X , munido da norma $\|f\|_{C_t^0(I; X)} := \sup_{t \in I} \|f(t)\|_X$.
- $\|(f, g)\|_{X \times Y} := \|f\|_X + \|g\|_Y$, onde X e Y são espaços normados.
- $\|f\|_{L^\infty} := \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.
- $\|f\|_{L^p} := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$.
- $\|f\|_{L_x^p(L_y^q)} := \|f\|_{L_x^p(\mathbb{R}^n; L_y^q(\mathbb{R}^m))} := \left\| \|f(x, y)\|_{L_y^q(\mathbb{R}^m)} \right\|_{L_x^p(\mathbb{R}^n)}$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

- $\widehat{f}(\xi) := \mathcal{F}f(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int f(x) e^{-i(x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n)} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$
- $\mathcal{F}_t f(\tau, x) := \mathcal{F}_t[f(\cdot, x)](\tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t, x) e^{-it\tau} dt, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\mathcal{F}_x f(t, \xi) := \mathcal{F}_x[f(t, \cdot)](\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t, x) e^{-2ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$
- $\check{f}(x) := \mathcal{F}^{-1}f(x) := \mathcal{F}[f(-\cdot)](x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int f(x) e^{i(x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n)} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$
- $\|f\|_{H^s} := \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \left\| \langle \xi \rangle^s \widehat{f}(\xi) \right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)}.$
- $\|f\|_{H^s_x(\mathbb{R}; H^b_t)} := \left\| \langle \xi \rangle^s \|\mathcal{F}_x f(t, \xi)\|_{H^b_t} \right\|_{L^2_\xi} = \left\| \langle \xi \rangle^s \langle \tau \rangle^b \widehat{f}(\tau, \xi) \right\|_{L^2_{\tau, \xi}} = \|f\|_{H^b_t(\mathbb{R}; H^s_x)}.$
- $\partial_x^k u$ denota a derivada parcial de u na variável x de ordem k .
- $\mathcal{H}f := \mathcal{F}^{-1}[-i \operatorname{sgn}(\cdot) \mathcal{F}f(\cdot)]$ é a transformada de Hilbert de f .

Capítulo 1

Preliminares

Neste texto, presume-se o conhecimento sobre alguns conceitos e resultados elementares de Teoria da Medida, Análise Funcional, Espaços de Sobolev e Análise de Fourier. Indicamos [11] para uma referência abrangente sobre esses pré-requisitos. Para uma abordagem concisa dos dois últimos tópicos, indicamos o primeiro capítulo de [19].

Na Seção 1.1, definimos os espaços $X^{s,b}$ introduzidos por Bourgain em [6], que serão os espaços onde obteremos as soluções para o nosso Problema de Boa Colocação. Mostramos também que quando $b > 1/2$ seus elementos descrevem curvas contínuas no espaço de Sobolev H^s .

Na Seção 1.2, provamos as estimativas lineares para os espaços de Bourgain. Devido a essas estimativas, os espaços de Bourgain estão bem adaptados à utilização do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Pois, para o argumento de contração, os termos lineares das equações integrais associadas podem ser controlados por essas estimativas. O trabalho resume-se, então, à obtenção de estimativas para os termos não lineares das equações.

As demonstrações neste capítulo são essencialmente as demonstrações apresentadas em [13], com um maior detalhamento das contas e das passagens.

Gostaríamos ainda de fazer referência a [15], [20], [23] e [2] pois são textos onde o autor deste trabalho aprendeu muito sobre esses tópicos preliminares.

1.1 Espaços de Bourgain

No restante deste capítulo, ω denotará uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , contínua e com crescimento assintótico no máximo polinomial.

Definição 1.1. *Sejam $s, b \in \mathbb{R}$. O espaço $X_\omega^{s,b}(\mathbb{R}^2)$, ou simplesmente $X_\omega^{s,b}$, é definido como o completamento do espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ pela norma*

$$\|f\|_{X_\omega^{s,b}} := \left\| \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \omega(\xi) \rangle^b \widehat{f}(\tau, \xi) \right\|_{L_{\tau, \xi}^2}. \quad (1.1)$$

A expressão $\tau - \omega(\xi)$ é por vezes chamada de modulação do espaço $X_\omega^{s,b}$.

Note que

$$\|f\|_{X_\omega^{s,b}} = \left\| \langle \xi \rangle^s \langle \tau \rangle^b \widehat{f}(\tau + \omega(\xi), \xi) \right\|_{L_{\tau, \xi}^2} = \left\| \langle \xi \rangle^s \langle \tau \rangle^b \mathcal{F}_t[e^{-i(\cdot)\omega(\xi)} \mathcal{F}_x f(\cdot, \xi)](\tau) \right\|_{L_{\tau, \xi}^2}.$$

Então, alternativamente a (1.1), temos

$$\|f\|_{X_\omega^{s,b}} = \|U_\omega(-t)f\|_{H_x^s(\mathbb{R}; H_t^b)}, \quad (1.2)$$

onde $\{U_\omega(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o grupo de operadores unitários em $H^s(\mathbb{R})$

$$U_\omega(t) : \phi \in H^s(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{F}_x^{-1}[e^{it\omega(\cdot)} \mathcal{F}_x \phi(\cdot)] \in H^s(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Proposição 1.1. *Sejam $s, b \in \mathbb{R}$. Se $b > 1/2$ então*

$$X_\omega^{s,b} \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R})), \quad (1.4)$$

e vale a seguinte estimativa

$$\|f\|_{C_t^0(\mathbb{R}; H_x^s)} \leq \|\langle \tau \rangle^{-b}\|_{L_\tau^2} \|f\|_{X_\omega^{s,b}}, \quad \forall f \in X_\omega^{s,b}. \quad (1.5)$$

Demonstração: Primeiramente, observamos que (veja o Lema A.1 no Apêndice)

$$\|\langle \tau \rangle^{-b}\|_{L_\tau^2} = \left(\int \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty, \quad \forall b > 1/2.$$

Suponhamos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Usando a definição do espaço de Schwartz e o Teorema do Valor Médio, mostra-se que a aplicação $t \mapsto f(t, \cdot) \in H^s(\mathbb{R})$ é contínua.

Para todo $t \in \mathbb{R}$, $U_\omega(t)$ é um operador unitário em $H^s(\mathbb{R})$, logo

$$\|f\|_{C_t^0(\mathbb{R}; H_x^s)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|U_\omega(-t)f\|_{H_x^s}.$$

Sendo assim, reescrevendo

$$U_\omega(-t)f = \int e^{it\tau} \mathcal{F}_t[U_\omega(-\cdot)f](\tau) d\tau,$$

temos, pelas desigualdades integral de Minkowski e de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|f\|_{C_t^0(\mathbb{R}; H_x^s)} &\leq \int \|\mathcal{F}_t[U_\omega(-\cdot)f](\tau)\|_{H_x^s} d\tau \\ &= \int \langle \tau \rangle^{-b} \langle \tau \rangle^b \|\mathcal{F}_t[U_\omega(-\cdot)f](\tau)\|_{H_x^s} d\tau \\ &\leq \|\langle \tau \rangle^{-b}\|_{L_\tau^2} \|U_\omega(-\cdot)f\|_{H_t^b(\mathbb{R}; H_x^s)}. \end{aligned}$$

Logo, por (1.2), vale (1.5) quando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Para o caso geral, consideremos $f \in X_\omega^{s,b}$. Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $S(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|f_n - f\|_{X_\omega^{s,b}} \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $f_n \rightarrow f$ em $S'(\mathbb{R}^2)$. Pelo que já foi provado, temos

$$\|f_n\|_{C_t^0(\mathbb{R}; H_x^s)} \leq \|\langle \tau \rangle^{-b}\|_{L_\tau^2} \|f_n\|_{X_\omega^{s,b}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Então $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $C_t^0(\mathbb{R}; H_x^s)$, logo existe $g \in C_t^0(\mathbb{R}; H_x^s)$ tal que $\|f_n - g\|_{C_t^0(\mathbb{R}; H_x^s)} \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $f_n \rightarrow g$ em $S'(\mathbb{R}^2)$. Pela unicidade do limite em $S'(\mathbb{R}^2)$ temos $f = g$. Tomando-se o limite em (1.6), concluímos que (1.5) vale no caso geral e, portanto, temos a imersão (1.4). \square

Pela Proposição 1.1, quando $b > 1/2$, está bem definido e é fechado o subespaço

$$M_T := M_T(X_\omega^{s,b}) := \{f \in X_\omega^{s,b} : f(t) = 0, \forall t \in [-T, T]\}.$$

Isto nos permite definir o espaço de Bourgain restrito ao intervalo $[-T, T]$.

Definição 1.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $b > 1/2$ e $T > 0$. Definimos o espaço $X_T^{s,b} = (X_\omega^{s,b})_T$ como sendo o espaço quociente de $X_\omega^{s,b}$ por $M_T(X_\omega^{s,b})$, munido da norma*

$$\|f\|_{X_T^{s,b}} := \|f\|_{(X_\omega^{s,b})_T} := \inf \left\{ \|\tilde{f}\|_{X_\omega^{s,b}} : \tilde{f}(t) = f(t), \forall t \in [-T, T] \right\}.$$

1.2 Estimativas Lineares

Proposição 1.2. *Sejam $s, b \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então*

$$\|\eta(t)U_\omega(t)\phi\|_{X_\omega^{s,b}} = \|\eta\|_{H^b} \|\phi\|_{H^s}, \quad \forall \phi \in H^s(\mathbb{R}). \quad (1.7)$$

Além disso, se $T \in (0, 1)$ e $b \geq 0$ então

$$\|\eta(t/T)U_\omega(t)\phi\|_{X_\omega^{s,b}} \leq T^{\frac{1}{2}-b} \|\eta\|_{H^b} \|\phi\|_{H^s}, \quad \forall \phi \in H^s(\mathbb{R}).$$

Demonstração: Para todo $T \in (0, 1]$, de (1.2), obtemos

$$\|\eta(t/T)U_\omega(t)\phi\|_{X_\omega^{s,b}} = \|U_\omega(-t)\eta(t/T)U_\omega(t)\phi\|_{H_x^s(\mathbb{R}; H_t^b)} = \|\eta(t/T)\|_{H^b} \|\phi\|_{H^s}.$$

Tomando $T = 1$, temos (1.7). Além disso, como $T \leq 1$ e $b \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \|\eta(t/T)\|_{H^b}^2 &= \int \langle \tau \rangle^{2b} |T\mathcal{F}^t \eta(T\tau)|^2 d\tau = T \int \langle \tau/T \rangle^{2b} |\mathcal{F}^t \eta(\tau)|^2 d\tau \\ &\leq T \int T^{-2b} \langle \tau \rangle^{2b} |\mathcal{F}^t \eta(\tau)|^2 d\tau = T^{1-2b} \|\eta\|_{H^b}^2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

o que conclui o resultado. \square

Proposição 1.3. *Sejam $s, b, c \in \mathbb{R}$, $T \in (0, 1)$ e $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Se $\text{supp}(\eta) \subset [-M, M]$, $1/2 < c \leq 1$ e $0 \leq b \leq c$ então vale a estimativa*

$$\left\| \eta(t/T) \int_0^t U_\omega(t-t') f(t') dt' \right\|_{X_\omega^{s,b}} \leq CT^{c-b} \|f\|_{X_\omega^{s,c-1}}, \quad \forall f \in X_\omega^{s,c-1}, \quad (1.9)$$

para uma constante $C > 0$ dependendo de M , $(2c-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\|\eta\|_{H^1}$ e $\|\langle \tau \rangle \mathcal{F}_t \eta(\tau)\|_{L_t^1}$.

A Proposição 1.3 é uma decorrência do seguinte lema.

Lema 1.4. *Com as mesmas hipóteses da Proposição 1.3, vale a seguinte estimativa*

$$\left\| \eta(t/T) \int_0^t h(t') dt' \right\|_{H^b} \leq CT^{c-b} \|h\|_{H^{c-1}}, \quad \forall h \in H^{c-1}(\mathbb{R}),$$

para $C > 0$ como na Proposição 1.3.

Demonstração da Proposição 1.3: Por um argumento de densidade, podemos supor $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Seja $g(t) := U_\omega(-t)f$. Então, por (1.2), a estimativa (1.9) se reescreve como

$$\left\| \eta(t/T) \int_0^t g(t') dt' \right\|_{H_x^s(\mathbb{R}; H_t^b)} \leq CT^{c-b} \|g\|_{H_x^s(\mathbb{R}; H_t^{c-1})}. \quad (1.10)$$

Por sua vez, a estimativa (1.10) é equivalente a

$$\left\| \langle \xi \rangle^s \left\| \eta(t/T) \int_0^t \mathcal{F}_x [g(t', \cdot)](\xi) dt' \right\|_{H_t^b} \right\|_{L_\xi^2} \leq CT^{c-b} \left\| \langle \xi \rangle^s \|\mathcal{F}_x [g(t, \cdot)](\xi)\|_{H_t^{c-1}}^2 \right\|_{L_\xi^2}.$$

Portanto, definindo-se

$$h_\xi(t) := \mathcal{F}_x [g(t, \cdot)](\xi),$$

a estimativa (1.9) segue do Lema 1.4, pois $g \in H_x^s(\mathbb{R}; H_t^{c-1})$ implica $h_\xi \in H^{c-1}(\mathbb{R})$, $\xi - q.t.p.$ \square

Demonstração do Lema 1.4: Podemos supor $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então

$$\begin{aligned} \eta(t/T) \int_0^t h(t') dt' &= \eta(t/T) \int_0^t \int e^{it'\tau} \mathcal{F}_t h(\tau) d\tau dt' \\ &= \eta(t/T) \int \mathcal{F}_t h(\tau) \frac{e^{it\tau} - 1}{i\tau} d\tau \\ &= I - II + III, \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde

$$\begin{aligned} I &:= \eta(t/T) \int_{|\tau| \leq \frac{1}{T}} \mathcal{F}_t h(\tau) \sum_{k \geq 1} \frac{t^k (i\tau)^{k-1}}{k!} d\tau, \\ II &:= \eta(t/T) \int_{|\tau| \geq \frac{1}{T}} \frac{\mathcal{F}_t h(\tau)}{i\tau} d\tau \end{aligned}$$

e

$$III := \eta(t/T) \int_{|\tau| \geq \frac{1}{T}} \mathcal{F}_t h(\tau) \frac{e^{it\tau}}{i\tau} d\tau.$$

Estimativa para $\|I\|_{H^b}$: Pelas Desigualdades Integral de Minkowski e de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\|I\|_{H^b} &\leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left\| t^k \eta(t/T) \int_{|\tau| \leq \frac{1}{T}} (i\tau)^{k-1} \mathcal{F}_t h(\tau) d\tau \right\|_{H^b} \\
&\leq \sum_{k \geq 1} \left[\frac{\|t^k \eta(t/T)\|_{H^b}}{k!} \int_{|\tau| \leq \frac{1}{T}} |\tau|^{k-1} |\mathcal{F}_t h(\tau)| d\tau \right] \\
&\leq \|h\|_{H^{c-1}} \left[\int_{|\tau| \leq \frac{1}{T}} \langle \tau \rangle^{2(1-c)} d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{k \geq 1} \frac{T^{1-k}}{k!} \|t^k \eta(t/T)\|_{H^b} \\
&\leq 2T^{c-\frac{1}{2}} \|h\|_{H^{c-1}} \sum_{k \geq 1} \frac{T^{-k}}{k!} \|t^k \eta(t/T)\|_{H^b}. \tag{1.12}
\end{aligned}$$

Entretanto, $|\mathcal{F}_t[t^k \eta(t/T)](\tau)| = T^{1+k} |(\mathcal{F}_t \eta)^{(k)}(T\tau)|$ então

$$\|t^k \eta(t/T)\|_{H^b} \leq T^{1+k} T^{-\frac{1}{2}-b} \|\langle \tau \rangle^b (\mathcal{F}_t \eta)^{(k)}(\tau)\|_{L^2_\tau} \leq T^{\frac{1}{2}+k-b} \|t^k \eta(t)\|_{H^1}. \tag{1.13}$$

E como $\text{supp}(\eta) \subset [-M, M]$, segue que

$$\|t^k \eta(t)\|_{H^1} \leq \|t^k \eta(t)\|_{L^2} + \|D_t[t^k \eta(t)]\|_{L^2} \leq 3kM^k \|\eta\|_{H^1}. \tag{1.14}$$

Portanto, de (1.12), (1.13) e (1.14) temos

$$\|I\|_{H^b} \leq 6MT^{c-b} \|\eta\|_{H^1} \|h\|_{H^{c-1}} \sum_{k \geq 1} \frac{kM^{k-1}}{k!} = C_1 T^{c-b} \|h\|_{H^{c-1}}, \tag{1.15}$$

onde $C_1 = 6Me^M \|\eta\|_{H^1}$.

Estimativa para $\|II\|_{H^b}$: Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, e por (1.8), temos

$$\begin{aligned}
\|II\|_{H^b} &\leq \|\eta(t/T)\|_{H^b} \int_{|\tau| \geq \frac{1}{T}} \langle \tau \rangle^{c-1} |\mathcal{F}_t h(\tau)| \frac{\langle \tau \rangle^{1-c}}{|\tau|} d\tau \\
&\leq T^{\frac{1}{2}-b} \|\eta\|_{H^b} \|h\|_{H^{c-1}} \left(2^{2+c} \int_{\frac{1}{T}}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{2c}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_2 T^{c-b} \|h\|_{H^{c-1}}, \tag{1.16}
\end{aligned}$$

onde $C_2 = 2\sqrt{2}(2c-1)^{-\frac{1}{2}} \|\eta\|_{H^1}$.

Estimativa para $\|III\|_{H^b}$: Seja

$$J(t) := \int_{|\tau| \geq \frac{1}{T}} \frac{e^{it\tau}}{i\tau} \mathcal{F}_t h(\tau) d\tau.$$

Então temos

$$\|J\|_{H^b} = \left\| \langle \tau \rangle^b \frac{\mathcal{F}_t h(\tau)}{|\tau|} \mathbf{1}_{\{|\tau| \geq \frac{1}{T}\}}(\tau) \right\|_{L^2} \leq \|h\|_{H^{c-1}} \sup_{|\tau| \geq \frac{1}{T}} \frac{\langle \tau \rangle^b}{|\tau| \langle \tau \rangle^{c-1}} \leq \sqrt{2} T^{c-b} \|h\|_{H^{c-1}}. \quad (1.17)$$

Logo $J \in H^b(\mathbb{R})$ e, no caso particular $b = 0$, temos

$$\|J\|_{L^2} \leq \sqrt{2} T^c \|h\|_{H^{c-1}}. \quad (1.18)$$

Faremos uso agora do seguinte lema, cuja demonstração será apresentada no Apêndice:

Lema A.4. Se $b \geq 0$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $J \in H^b(\mathbb{R})$ então $\phi J \in H^b(\mathbb{R})$. Além disso,

$$\|\phi J\|_{H^b} \leq 2^{b+\frac{1}{2}} (\|\langle \tau \rangle^b \mathcal{F}_t \phi(\tau)\|_{L^1_\tau} \|J\|_{L^2} + \|\mathcal{F}_t \phi(\tau)\|_{L^1_\tau} \|J\|_{H^b}).$$

Pelo Lema A.4 e pelas estimativas (1.18) e (1.17), temos

$$\begin{aligned} \|III\|_{H^b} &= \|\eta(t/T)J(t)\|_{H^b} \\ &\leq 2^{b+\frac{1}{2}} (\|\langle \tau \rangle^b \mathcal{F}_t[\eta(\cdot/T)]\|_{L^1_\tau} \|J\|_{L^2} + \|\mathcal{F}_t[\eta(\cdot/T)](\tau)\|_{L^1_\tau} \|J\|_{H^b}) \\ &\leq 4 (\|\langle \tau \rangle^b \mathcal{F}_t[\eta(\cdot/T)](\tau)\|_{L^1_\tau} + T^{-b} \|\mathcal{F}_t[\eta(\cdot/T)](\tau)\|_{L^1_\tau}) T^c \|h\|_{H^{c-1}} \\ &\leq 4 (\|\langle \tau \rangle^b \mathcal{F}_t \eta(\tau)\|_{L^1_\tau} + \|\mathcal{F}_t \eta(\tau)\|_{L^1_\tau}) T^{c-b} \|h\|_{H^{c-1}} \\ &\leq C_3 T^{c-b} \|h\|_{H^{c-1}}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde $C_3 = 8\|\langle \tau \rangle \mathcal{F}_t \eta(\tau)\|_{L^1_\tau}$.

Portanto, por (1.11), (1.15), (1.16) e (1.19), temos

$$\left\| \eta(t/T) \int_0^t h(t') dt' \right\|_{H^b} \leq \|I\|_{H^b} + \|II\|_{H^b} + \|III\|_{H^b} \leq CT^{c-b} \|h\|_{H^{c-1}},$$

para qualquer $C \geq C_1 + C_2 + C_3$. □

Capítulo 2

Boa Colocação Local

Este capítulo é dedicado à prova da Boa Colocação Local do Problema de Cauchy para o sistema Schrödinger Benjamin-Ono (SB-O), no caso não ressonante ($|\nu| \neq 1$), em $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$ para $(s, s') \in \mathcal{W}$ (veja Figura 2.1 ou Figura I.1).

Na Seção 2.1, definimos os espaços de Bourgain onde são obtidas as soluções, enunciamos o Teorema de Boa Colocação Local para (SB-O), no caso não ressonante, e apresentamos o roteiro da demonstração.

Na Seção 2.2, estabelecemos algumas desigualdades que são utilizadas nas Seções 2.3 e 2.4, nas demonstrações das estimativas bilineares para os termos não lineares que acoplam as equações do sistema (SB-O).

Por fim, na Seção 2.5 apresentamos detalhadamente a prova do Teorema de Boa Colocação Local para (SB-O), caso não ressonante. Na prova, as estimativas bilineares e as estimativas lineares da Seção 1.2 são o ponto-chave para o argumento de contração.

2.1 Enunciado do Teorema de Boa Colocação Local

Nesta seção, enunciamos o nosso resultado de Boa Colocação Local do Problema de Cauchy para o sistema Schrödinger Benjamin-Ono

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv, & t \in [-T, T], \quad x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t v + \nu \mathcal{H} \partial_x^2 v = \beta \partial_x (|u|^2), \\ u(0, x) = \phi, \quad v(0, x) = \psi, & (\phi, \psi) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (\text{SB-O})$$

As equações integrais associadas (Princípio de Duhamel) ao Problema (SB-O) são

$$u(t) = e^{it\partial_x^2} \phi - i\alpha \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} (u(t')v(t')) dt', \quad (2.1)$$

$$v(t) = e^{-\nu t \mathcal{H} \partial_x^2} \psi + \beta \int_0^t e^{-\nu(t-t') \mathcal{H} \partial_x^2} (\partial_x |u(t')|^2) dt', \quad (2.2)$$

onde $\{e^{it\partial_x^2}\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{e^{-\nu t \mathcal{H} \partial_x^2}\}_{t \in \mathbb{R}}$ denotam, respectivamente, os grupos de operadores unitários em $H^s(\mathbb{R})$ que resolvem as equações lineares de Schrödinger e Benjamin-Ono:

$$\begin{cases} e^{it\partial_x^2} f := \mathcal{F}^{-1}[e^{-it(\cdot)^2} \mathcal{F}f(\cdot)] \\ e^{-\nu t \mathcal{H} \partial_x^2} f := \mathcal{F}^{-1}[e^{-i \operatorname{sgn}(\cdot) \nu t (\cdot)^2} \mathcal{F}f(\cdot)] \end{cases}, \quad \nu, t \in \mathbb{R}, \quad f \in H^s(\mathbb{R}).$$

Utilizando a notação (1.3), temos

$$\begin{cases} e^{it\partial_x^2} = U_\omega(t), & \omega(\xi) := -\xi^2, \\ e^{-\nu t \mathcal{H} \partial_x^2} = U_{\omega_\nu}(t), & \omega_\nu(\xi) := -\nu \operatorname{sgn}(\xi) \xi^2. \end{cases}$$

Então, conforme as Definições 1.1 e 1.2, a partir das funções ω e ω_ν , temos os respectivos espaços de Bourgain associados às equações de Schrödinger e Benjamin-Ono, para os quais fixaremos as notações simplificadas que serão utilizadas de agora em diante:

$$\begin{aligned} X^{s,b} &:= X_\omega^{s,b}, & X_T^{s,b} &:= (X_\omega^{s,b})_T, \\ Y_\nu^{s,b} &:= X_{\omega_\nu}^{s,b}, & Y_T^{s,b} &:= (X_{\omega_\nu}^{s,b})_T. \end{aligned}$$

Podemos agora enunciar nosso resultado de Boa Colocação Local para o sistema (SB-O), no caso não ressonante, para $(s, s') \in \mathcal{W}$ (veja a Figura I.1).

Teorema 2.1. *Sejam $|\nu| \neq 1$ e $s, s' \in \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$-1/2 \leq s' \leq 2s - 1/2, \quad (2.3)$$

$$s - 1 < s' < s + 1/2. \quad (2.4)$$

O Problema de Cauchy para (SB-O) é Localmente Bem Posto em $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$, no seguinte sentido:

Para cada $R > 0$, existem $T = T(R) > 0$ e $b, b' > 1/2$ tais que, se $\|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s'}} < R$, existe uma única $(u, v) \in X_T^{s,b} \times Y_T^{s',b'}$ satisfazendo (2.1) e (2.2) para todo $t \in [-T, T]$. Além disso, $(u, v) \in C^0([-T, T]; H^s(\mathbb{R})) \times C^0([-T, T]; H^{s'}(\mathbb{R}))$ e a aplicação dado-solução

$$\begin{aligned} S : B_R &\rightarrow C^0([-T, T]; H^s(\mathbb{R})) \times C^0([-T, T]; H^{s'}(\mathbb{R})) \\ (\phi, \psi) &\mapsto (u, v) \end{aligned} \quad (2.5)$$

é Lipschitz, onde B_R é a bola aberta de $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$ com raio R centrada na origem.

Observação 2.1. Pode-se mostrar que a aplicação dado-solução (2.5) é analítica. Isto não será demonstrado neste trabalho, mas é consequência do fato do Teorema 2.1 ser provado pelo método do Ponto Fixo (veja o Teorema 3 em [3]). Portanto, provando-se que para certa regularidade (s, s') a aplicação (2.5) não pode ser C^2 , prova-se também que a Boa Colocação Local em $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$ não pode ser obtida pelo método do Ponto Fixo, que é o mais utilizado método para obtenção de Boa Colocação Local para equações dispersivas.

Em seguida, apresentamos os ingredientes principais para a prova do Teorema 2.1. Seguindo o roteiro de [5], usamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e o “*Fourier Restriction Norm Method*” introduzido por Bourgain em [6]. A dificuldade, então, concentra-se em estender as seguintes estimativas bilineares obtidas em [5]

$$\|\partial_x(u_1 \overline{u_2})\|_{Y_\nu^{s-1/2,a}} \leq C \|u_1\|_{X^{s,b}} \|u_2\|_{X^{s,b}}, \quad b > 1/2, a \leq 0, s \geq 0, \quad (2.6)$$

$$\|uv\|_{X^{s,a}} \leq C \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y_\nu^{s-1/2,b}}, \quad 3/4 > b > 1/2, a < -1/4, s \geq 0. \quad (2.7)$$

Procedendo como em [14], dissociamos as regularidades das modulações dos espaços X e Y na tentativa de ganhar alguma regularidade espacial, ou seja, substituímos

$(s-1/2, b)$ por (s', b') em Y . Assim, escolhendo $1/2 < b < c < 3/4$ e $1/2 < b' < c' < 3/4$ dependendo de (s, s') , obtivemos as seguintes estimativas bilineares

$$\|\partial_x(u_1 \bar{u}_2)\|_{Y_\nu^{s', c'-1}} \leq C \|u_1\|_{X^{s, b}} \|u_2\|_{X^{s, b}}, \quad (s, s') \in \mathcal{W}_1, \quad (2.8)$$

$$\|uv\|_{X^{s, c-1}} \leq C \|u\|_{X^{s, b}} \|v\|_{Y_\nu^{s', b'}}, \quad (s, s') \in \mathcal{W}_2, \quad (2.9)$$

onde

$$\mathcal{W}_1 := \{(s, s') \in \mathbb{R}^2 : s \geq 0, s' \leq 2s - 1/2, s' < s + 1/2\}, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{W}_2 := \{(s, s') \in \mathbb{R}^2 : s \geq 0, -1/2 \leq s', s - 1 < s'\}, \quad (2.11)$$

(veja Teoremas 2.5, 2.6 e Figura 2.1). De posse destas estimativas, prova-se com um argumento de contração que o sistema (SB-O) no caso não ressonante é localmente bem posto para $(s, s') \in \mathcal{W} := \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

A estimativa (2.6) oferece pouca dificuldade em [5], já que o regime $s' = s - 1/2$, $s \geq 0$ permite cancelamentos convenientes nas interações das frequências. Todavia, tais cancelamentos não ocorrem para $(s, s') \in \mathcal{W}_1$. Por esta razão, nós precisamos introduzir uma decomposição do espaço Euclidiano (veja (2.40)-(2.43) abaixo), para sermos capazes de obter a estimativa (2.8).

Para a estimativa (2.7), não existem bons cancelamentos de frequências, mesmo sob o regime $s' = s - 1/2$, $s \geq 0$. Não obstante, obtivemos a estimativa (2.9) para $(s, s') \in \mathcal{W}_2$, através da decomposição (2.58)-(2.62) abaixo, que é sutilmente diferente da decomposição utilizada em [5] para obter a estimativa (2.7).

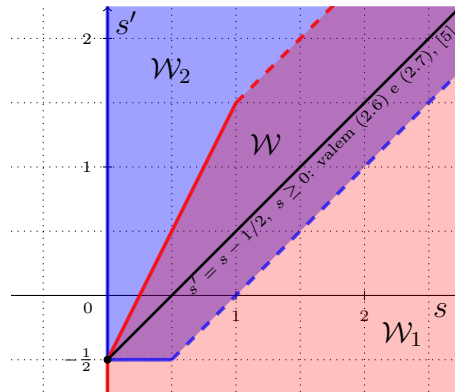


Figura 2.1: Estimativas Bilineares

2.2 Desigualdades Auxiliares

Lema 2.2. *Sejam $b, c, p, q, r, \kappa \in \mathbb{R}$. Então existem $C_1(b), C_2(b) > 0$, independentes de p, q, r , para as quais valem as seguintes estimativas:*

$$(i) \quad \int \frac{d\tau}{\langle p\tau + q \rangle^{2b}} \leq \frac{C_1(b)}{|p|}, \quad \forall b > 1/2, \forall p \neq 0, \quad (2.12)$$

$$(ii) \quad \int \frac{d\tau}{\langle p\tau^2 + q\tau + r \rangle^b} \leq \frac{C_2(b)}{\sqrt{|p|}}, \quad \forall b > 1/2, \forall p \neq 0, \quad (2.13)$$

$$(iii) \quad \int_{|\tau| \leq |\kappa|} \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^c} < \frac{4}{1-c} \langle \kappa \rangle^{1-c}, \quad \forall c < 1, \forall \kappa \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Demonstração: As desigualdade (2.12), (2.13) e (2.14) decorrem, respectivamente, dos Lemas A.1, A.2 e A.3 que são demonstrados no Apêndice. \square

Proposição 2.3. *Sejam $b, b', c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então existem $C_1(b, b'), C_2(b, c) > 0$, independentes de α e β , para as quais valem as seguintes estimativas:*

$$(i) \quad \int \frac{d\tau}{\langle \tau - \alpha \rangle^{2b} \langle \tau - \beta \rangle^{2b'}} \leq \frac{C_1(b, b')}{\langle \beta - \alpha \rangle^{\min\{2b, 2b'\}}}, \quad \forall b, b' > 1/2; \quad (2.15)$$

$$(ii) \quad \int \frac{d\tau}{\langle \tau - \alpha \rangle^{2(1-c)} \langle \tau - \beta \rangle^{2b}} \leq \frac{C_2(b, c)}{\langle \beta - \alpha \rangle^{2(1-c)}}, \quad \forall b > 1/2, \forall c \in (1/2, 1]. \quad (2.16)$$

Demonstração: Esta proposição é uma consequência de um resultado mais geral, o Lema 4.2 de [14], cuja demonstração será apresentada no Apêndice.

Lema A.5 [Lema 4.2 de [14]]: *Sejam $\rho, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Se $0 \leq a_1 \leq a_2$ e $1 < a_1 + a_2$ então existe uma constante $C(a_1, a_2) > 0$, independente de ρ , tal que*

$$\int \frac{d\tau}{\langle \tau + \rho \rangle^{a_1} \langle \tau - \rho \rangle^{a_2}} \leq \frac{C(a_1, a_2)}{\langle \rho \rangle^\alpha}, \quad (2.17)$$

onde

$$\alpha = \alpha(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1, & \text{se } a_2 > 1, \\ a_1 - \epsilon, & \text{se } a_2 = 1, \\ a_1 + a_2 - 1, & \text{se } a_2 < 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

com $\epsilon > 0$ podendo ser tomado arbitrariamente.

Definimos $\rho := \frac{\beta - \alpha}{2}$. Pela mudança de variável $\tau' := \tau - \frac{\beta + \alpha}{2}$ e por (2.17), obtemos a seguinte estimativa

$$\int \frac{d\tau}{\langle \tau - \alpha \rangle^{a_1} \langle \tau - \beta \rangle^{a_2}} = \int \frac{d\tau'}{\langle \tau' + \rho \rangle^{a_1} \langle \tau' - \rho \rangle^{a_2}} \leq \frac{C(a_1, a_2)}{\langle \beta - \alpha \rangle^{\alpha(a_1, a_2)}}. \quad (2.19)$$

A estimativa (2.15) segue de (2.19) e (2.18), para $a_1 = \min\{2b, 2b'\}$ e $a_2 = \max\{2b, 2b'\}$, já que $1 < 2b, 2b'$. Ao passo que a estimativa (2.16) segue de (2.19) e (2.18), para $a_1 = 2(1 - c)$ e $a_2 = 2b$, já que $2(1 - c) < 1 < 2b$. \square

Proposição 2.4. *Seja $K : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável e sejam $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ não nulas. Denotando-se*

$$\mathfrak{X}_{K,f,g} := \frac{\left\| \iint K(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) f(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1) g(\tau_1, \xi_1) d\tau_1 d\xi_1 \right\|_{L^2_{\tau, \xi}}}{\|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}},$$

valem as seguintes estimativas:

$$(i) \quad \mathfrak{X}_{K,f,g} \leq \sup_{\tau, \xi} \|K(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)\|_{L^2_{\tau_1, \xi_1}}; \quad (2.20)$$

$$(ii) \quad \mathfrak{X}_{K,f,g} \leq \sup_{\tau_1, \xi_1} \|K(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)\|_{L^2_{\tau, \xi}}; \quad (2.21)$$

$$(iii) \quad \mathfrak{X}_{K,f,g} \leq \sup_{\tau_2, \xi_2} \|K(\tau, \xi, \tau - \tau_2, \xi - \xi_2)\|_{L^2_{\tau, \xi}}; \quad (2.22)$$

$$(iv) \quad \mathfrak{X}_{K,f,g} \leq \sup_{\tau_2, \xi_2} \|K(\tau_1 + \tau_2, \xi_1 + \xi_2, \tau_1, \xi_1)\|_{L^2_{\tau_1, \xi_1}}. \quad (2.23)$$

Demonstração: Denotemos

$$H(\tau, \xi) := \iint K(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) f(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1) g(\tau_1, \xi_1) d\tau_1 d\xi_1. \quad (2.24)$$

(i) Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|H(\tau, \xi)| \leq \|K(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)\|_{L^2_{\tau_1, \xi_1}} \|f(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1) g(\tau_1, \xi_1)\|_{L^2_{\tau_1, \xi_1}}. \quad (2.25)$$

Além disso, pelo Teorema de Fubini, temos

$$\left\| \|f(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1)g(\tau_1, \xi_1)\|_{L^2_{\tau_1, \xi_1}} \right\|_{L^2_{\tau, \xi}} = \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}. \quad (2.26)$$

Combinando (2.24), (2.25) e (2.26), concluímos (2.20).

(ii) Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|H(\tau, \xi)| \leq \|f\|_{L^2} \|K(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)g(\tau_1, \xi_1)\|_{L^2_{\tau_1, \xi_1}}. \quad (2.27)$$

Além disso, pelo Teorema de Tonelli, temos

$$\left\| \|K(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)g(\tau_1, \xi_1)\|_{L^2_{\tau_1, \xi_1}} \right\|_{L^2_{\tau, \xi}} \leq \sup_{\tau_1, \xi_1} \|K(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)\|_{L^2_{\tau_1, \xi_1}} \|g\|_{L^2}. \quad (2.28)$$

Combinando (2.24), (2.27) e (2.28), concluímos (2.21).

(iii) Através da mudança de variáveis $(\tau_2, \xi_2) := (\tau - \tau_1, \xi - \xi_1)$, a equação (2.24) pode ser reescrita como

$$H(\tau, \xi) = \iint K(\tau, \xi, \tau - \tau_2, \xi - \xi_2) f(\tau_2, \xi_2) g(\tau - \tau_2, \xi - \xi_2) d\tau_2 d\xi_2. \quad (2.29)$$

Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|H(\tau, \xi)| \leq \|g\|_{L^2} \|K(\tau, \xi, \tau - \tau_2, \xi - \xi_2) f(\tau_2, \xi_2)\|_{L^2_{\tau_2, \xi_2}}. \quad (2.30)$$

Além disso, pelo Teorema de Tonelli, temos

$$\left\| \|K(\tau, \xi, \tau - \tau_2, \xi - \xi_2) f(\tau_2, \xi_2)\|_{L^2_{\tau_2, \xi_2}} \right\|_{L^2_{\tau, \xi}} \leq \sup_{\tau_2, \xi_2} \|K(\tau, \xi, \tau - \tau_2, \xi - \xi_2)\|_{L^2_{\tau_2, \xi_2}} \|f\|_{L^2}. \quad (2.31)$$

Combinando (2.29), (2.30) e (2.31), concluímos (2.22).

(iv) A estimativa (2.23) segue imediatamente de (2.22). De fato, fixados τ_2 e ξ_2 , pela mudança de variáveis $(\tau_1, \xi_1) := (\tau - \tau_2, \xi - \xi_2)$, temos

$$\|K(\tau_1 + \tau_2, \xi_1 + \xi_2, \tau_1, \xi_1)\|_{L^2_{\tau_1, \xi_1}} = \|K(\tau, \xi, \tau - \tau_2, \xi - \xi_2)\|_{L^2_{\tau, \xi}}.$$

□

2.3 Estimativa para o termo $\partial_x(|u|^2)$

Nesta seção, estabelecemos o Teorema 2.5, que estende a estimativa bilinear (2.6) obtida em [5] para $(s, s') \in \mathcal{W}_1 = \{(s, s') \in \mathbb{R}^2 : s \geq 0, s' \leq 2s - 1/2, s' < s + 1/2\}$.

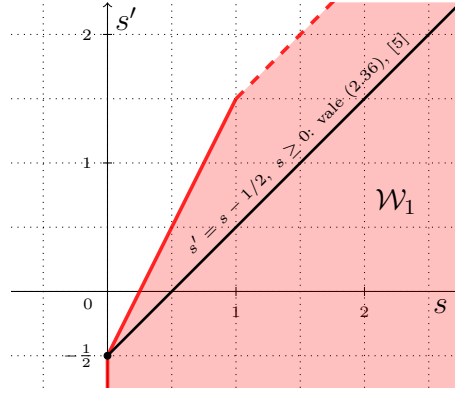


Figura 2.2: Estimativa Bilinear para o termo $\partial_x(|u|^2)$

Observação 2.2. Nesta seção e na seguinte, as constantes positivas que estão implícitas pela utilização da notação \lesssim dependem apenas dos parâmetros s, s', b, c, b', c' e ν .

Teorema 2.5. *Suponha $|\nu| \neq 1$. Sejam $s, s' \in \mathbb{R}$ tais que $s \geq 0$,*

$$s' \leq 2s - 1/2, \quad (2.32)$$

$$s' < s + 1/2. \quad (2.33)$$

Então, para todos $b, c' \in \mathbb{R}$ tais que

$$\max \{1/2, (s' - s)/2 + 1/2\} < b, \quad (2.34)$$

$$c' < \min \{3/4 - (s' - s)/2, 3/4\}, \quad (2.35)$$

vale a seguinte estimativa:

$$\|\partial_x(u_1 \overline{u_2})\|_{Y^{s', c'-1}} \lesssim \|u_1\|_{X^{s, b}} \|u_2\|_{X^{s, b}}, \quad \forall u_1, u_2 \in X^{s, b}. \quad (2.36)$$

Demonstração. É suficiente mostrar (2.36) para $u_1, u_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Então, definindo

$$f(\tau, \xi) := \langle \xi \rangle^s \langle \tau + \xi^2 \rangle^b \widehat{u}_1(\tau, \xi), \quad g(\tau, \xi) := \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^2 \rangle^b \widehat{u}_2(-\tau, -\xi),$$

e denotando $\tau_2 := \tau - \tau_1$ e $\xi_2 := \xi - \xi_1$, decorre que a estimativa (2.36) é equivalente a

$$\left\| \frac{i\xi \langle \xi \rangle^{s'}}{\langle \tau + \nu |\xi| \xi \rangle^{1-c'}} \iint \frac{f(\tau_2, \xi_2) g(\tau_1, \xi_1) d\tau_1 d\xi_1}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^b} \right\|_{L^2_{\tau, \xi}} \lesssim \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Por comodidade, reescrevemos esta estimativa da seguinte maneira

$$\left\| \iint \Phi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) f(\tau_2, \xi_2) g(\tau_1, \xi_1) d\tau_1 d\xi_1 \right\|_{L^2_{\tau, \xi}} \lesssim \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \quad (2.37)$$

onde

$$\Phi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) := \frac{i\xi \langle \xi \rangle^{s'} \langle \sigma \rangle^{c'-1}}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \sigma_2 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^s \langle \sigma_1 \rangle^b}, \quad (2.38)$$

tendo sido utilizadas ainda as notações adicionais

$$\sigma := \tau + \nu |\xi| \xi, \quad \sigma_1 := \tau_1 - \xi_1^2 \quad \text{e} \quad \sigma_2 := \tau_2 + \xi_2^2.$$

Com essas notações, a relação algébrica associada a (2.37) é dada por

$$\sigma - \sigma_1 - \sigma_2 = 2\xi\xi_1 - (1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi^2 = (1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi^2 - 2\xi\xi_2. \quad (2.39)$$

Para provar (2.37), introduzimos a seguinte decomposição de \mathbb{R}^4

$$\mathcal{A} = \{(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^4 : |(1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi - 2\xi_1| < c_\nu |\xi|\}, \quad (2.40)$$

$$\mathcal{B} = \{(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{A}^c : |\sigma| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}\}, \quad (2.41)$$

$$\mathcal{B}_1 = \{(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{A}^c : |\sigma_1| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}\}, \quad (2.42)$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{A}^c : |\sigma_2| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}\}, \quad (2.43)$$

onde $c_\nu := \frac{|1-\nu|}{2} > 0$.

Como $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^4} \leq \mathbf{1}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} + \mathbf{1}_{\mathcal{B}_1} + \mathbf{1}_{\mathcal{B}_2}$, pela desigualdade triangular e pela Proposição 2.4, provar (2.37) resume-se a provar três estimativas,

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \Phi\|_{L^\infty_{\tau, \xi}(L^2_{\tau_1, \xi_1})} \lesssim 1, \quad (2.44)$$

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{B}_1} \Phi\|_{L^\infty_{\tau_1, \xi_1}(L^2_{\tau, \xi})} \lesssim 1, \quad (2.45)$$

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{B}_2} \Phi\|_{L^\infty_{\tau_2, \xi_2}(L^2_{\tau, \xi})} \lesssim 1, \quad (2.46)$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\tau, \xi, \tau_2, \xi_2) &:= \Phi(\tau, \xi, \tau - \tau_2, \xi - \xi_2), \quad \forall (\tau, \xi, \tau_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^4, \\ \tilde{\mathcal{B}}_2 &:= \{(\tau, \xi, \tau_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^4 : (\tau, \xi, \tau - \tau_2, \xi - \xi_2) \in \mathcal{B}_2\}.\end{aligned}$$

Prova da estimativa (2.44): Na região \mathcal{A} , temos

$$|\xi| \sim |\xi_1| \sim |\xi_2|. \quad (2.47)$$

De fato, pela desigualdade triangular reversa, e a definição de \mathcal{A} , temos

$$\begin{aligned}2|\xi_1| &= |(1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi - [(1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi - 2\xi_1]| \\ &> |(1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi| - c_\nu |\xi| \\ &\geq (|1 - \nu| - c_\nu) |\xi| = c_\nu |\xi|.\end{aligned}$$

Logo $c_\nu |\xi| \leq 2|\xi_1| \leq (c_\nu + 1 + |\nu|)|\xi|$ em \mathcal{A} . Analogamente, reescrevendo

$$2|\xi_2| = |(1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi - 2\xi_1 + (1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi|,$$

conclui-se $c_\nu |\xi| \leq 2|\xi_2| \leq (c_\nu + 1 + |\nu|)|\xi|$, e portanto vale (2.47) em \mathcal{A} .

Combinando (2.38), (2.47), $c' < 3/4$ e (2.32) concluímos

$$|\Phi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)| \lesssim \frac{\langle \xi \rangle^{s' - 2s + \frac{1}{2}} |\xi|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b} \lesssim \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b}, \quad \forall (\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{A}. \quad (2.48)$$

A mesma estimativa vale em \mathcal{B} . De fato, de (2.39) temos que na região \mathcal{A}^c vale

$$c_\nu |\xi|^2 \leq |(1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi^2 - 2\xi\xi_1| = |\sigma - \sigma_1 - \sigma_2|. \quad (2.49)$$

Em particular, $|\xi|^2 \lesssim |\sigma|$ na região \mathcal{B} . Portanto, como s, s' e c' satisfazem (2.35), temos

$$\begin{aligned}|\Phi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)| &\lesssim \frac{\langle \xi \rangle^{s' - s + \frac{1}{2}}}{\langle \sigma \rangle^{1 - c'}} \cdot \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b} \\ &\lesssim \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b}, \quad \forall (\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{B},\end{aligned} \quad (2.50)$$

já que $\langle \xi \rangle = \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \lesssim \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2 \rangle$ e $s \geq 0$.

Observe agora que, de (2.15), $b > 1/2$, $\sigma_1 = \tau_1 - \xi_1^2$ e $\sigma_2 = \tau - \tau_1 + (\xi - \xi_1)^2$, temos

$$\sup_{\tau, \xi} \left\| \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b} \right\|_{L^2_{\tau_1, \xi_1}} \lesssim \sup_{\tau, \xi} \left[\int \frac{|\xi|}{\langle 2\xi\xi_1 - \tau - \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_1 \right]^{\frac{1}{2}} \lesssim 1.$$

Combinando esta última estimativa com (2.48) e (2.50) obtemos (2.44).

Prova da estimativa (2.45): Por (2.49), $|\xi|^2 \lesssim |\sigma_1|$ na região \mathcal{B}_1 . Então

$$\begin{aligned} |\Phi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)| &\lesssim \frac{\langle \xi \rangle^{s'-s+1}}{\langle \sigma_1 \rangle^b} \cdot \frac{1}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^{1-c'}} \\ &\lesssim \frac{1}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^{1-c'}}, \quad \forall (\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{B}_1, \end{aligned}$$

já que s, s' e b satisfazem (2.34).

Observe agora que, de (2.16), (2.39), (2.13) e $c' < 3/4$, temos

$$\sup_{\tau_1, \xi_1} \left\| \frac{1}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^{1-c'}} \right\|_{L^2_{\tau, \xi}} \lesssim \sup_{\tau_1, \xi_1} \left[\int \frac{d\xi}{\langle (1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi^2 - 2\xi\xi_1 - \sigma_1 \rangle^{2(1-c')}} \right]^{\frac{1}{2}} \lesssim 1.$$

Portanto, combinando estas duas últimas estimativas, temos (2.45).

Prova da estimativa (2.46): Para $(\tau, \xi, \tau_2, \xi_2) \in \tilde{\mathcal{B}}$, denotaremos agora $\tau_1 := \tau - \tau_2$, $\xi_1 := \xi - \xi_2$ e, como antes, $\sigma := \tau + \nu|\xi|\xi$, $\sigma_1 := \tau_1 - \xi_1^2$ e $\sigma_2 := \tau_2 + \xi_2^2$. Então também temos $|\xi|^2 \lesssim |\sigma_2|$ na região $\tilde{\mathcal{B}}_2$. Portanto, segue de (2.34) que

$$\begin{aligned} |\tilde{\Phi}(\tau, \xi, \tau_2, \xi_2)| &\lesssim \frac{\langle \xi \rangle^{s'-s+1}}{\langle \sigma_2 \rangle^b} \cdot \frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma \rangle^{1-c'}} \\ &\lesssim \frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma \rangle^{1-c'}}, \quad \forall (\tau, \xi, \tau_2, \xi_2) \in \tilde{\mathcal{B}}_2, \end{aligned}$$

e de (2.16), (2.39), (2.13) e $c' < 3/4$ que

$$\sup_{\tau_2, \xi_2} \left\| \frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma \rangle^{1-c'}} \right\|_{L^2_{\tau, \xi}} \lesssim \sup_{\tau_2, \xi_2} \left[\int \frac{1}{\langle (1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi))\xi^2 - 2\xi\xi_2 + \sigma_2 \rangle^{2(1-c')}} d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \lesssim 1,$$

o que conclui (2.46) e encerra a prova de (2.36). \square

2.4 Estimativa para o termo uv

Nesta seção, estabelecemos o Teorema 2.6, que estende a estimativa bilinear (2.7) obtida em [5] para $(s, s') \in \mathcal{W}_2 = \{(s, s') \in \mathbb{R}^2 : s \geq 0, -1/2 \leq s', s - 1 < s'\}$.

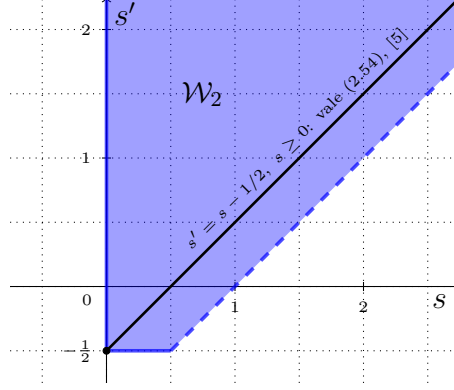


Figura 2.3: Estimativa Bilinear para o termo uv

Teorema 2.6. *Suponha $|\nu| \neq 1$. Sejam $s, s' \in \mathbb{R}$ tais que $s \geq 0$,*

$$-1/2 \leq s', \quad (2.51)$$

$$s - 1 < s'. \quad (2.52)$$

Então, para todos $b, b', c \in \mathbb{R}$ tais que $1/2 < b, b'$ e

$$1/2 < c < \min \{3/4, (s' - s)/2 + 1\}, \quad (2.53)$$

vale a seguinte estimativa:

$$\|uv\|_{X^{s,c-1}} \lesssim \|u\|_{X^{s,b}} \|v\|_{Y_\nu^{s',b'}}, \quad \forall u \in X^{s,b}, \forall v \in Y_\nu^{s',b'}. \quad (2.54)$$

Demonstração: É suficiente mostrar (2.54) para $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Então, definindo

$$f(\tau, \xi) := \langle \xi \rangle^s \langle \tau + \xi^2 \rangle^b \hat{u}(\tau, \xi), \quad g(\tau, \xi) := \langle \xi \rangle^{s'} \langle \tau + \nu |\xi| \xi \rangle^{b'} \hat{v}(\tau, \xi),$$

e denotando $\tau_2 := \tau - \tau_1$ e $\xi_2 := \xi - \xi_1$, a estimativa (2.54) é equivalente a

$$\left\| \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{1-c}} \iint \frac{f(\tau_2, \xi_2) g(\tau_1, \xi_1) d\tau_1 d\xi_1}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^{s'} \langle \tau_1 + \nu |\xi_1| \xi_1 \rangle^{b'}} \right\|_{L_{\tau, \xi}^2} \lesssim \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Reescreveremos a última estimativa da seguinte maneira

$$\left\| \iint \Psi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) f(\tau_2, \xi_2) g(\tau_1, \xi_1) d\tau_1 d\xi_1 \right\|_{L^2_{\tau, \xi}} \lesssim \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \quad (2.55)$$

onde

$$\Psi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) := \frac{\langle \xi \rangle^s \langle \sigma \rangle^{c-1}}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \sigma_2 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^{s'} \langle \sigma_1 \rangle^{b'}}, \quad (2.56)$$

sendo que

$$\sigma := \tau + \xi^2, \quad \sigma_1 := \tau_1 + \nu |\xi_1| |\xi_1| \quad \text{e} \quad \sigma_2 := \tau_2 + \xi_2^2.$$

Logo, a relação algébrica associada a (2.55) é dada por

$$\sigma - \sigma_1 - \sigma_2 = 2\xi\xi_1 - (1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1^2 = (1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2. \quad (2.57)$$

Consideremos as seguintes cinco regiões de \mathbb{R}^4

$$\mathcal{A} = \{(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^4 : |\xi_1| \leq 1\}, \quad (2.58)$$

$$\mathcal{B} = \{(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{A}^c : |(1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1 - 2\xi| < c_\nu |\xi_1|\}, \quad (2.59)$$

$$\mathcal{C} = \{(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c : |\sigma| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}\}, \quad (2.60)$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c : |\sigma_1| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}\}, \quad (2.61)$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c : |\sigma_2| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}\}, \quad (2.62)$$

onde $c_\nu := \frac{|1-\nu|}{2} > 0$.

Utilizando a desigualdade triangular, $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^4} \leq \mathbf{1}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}} + \mathbf{1}_{\mathcal{C}_1} + \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{C}}_2}$ e a Proposição 2.4, a prova de (2.55) resume-se à prova das seguintes três estimativas,

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}} \Psi\|_{L^\infty_{\tau, \xi}(L^2_{\tau_1, \xi_1})} \lesssim 1, \quad (2.63)$$

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{C}_1} \Psi\|_{L^\infty_{\tau_1, \xi_1}(L^2_{\tau, \xi})} \lesssim 1, \quad (2.64)$$

$$\|\mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{C}}_2} \tilde{\Psi}\|_{L^\infty_{\tau_2, \xi_2}(L^2_{\tau_1, \xi_1})} \lesssim 1, \quad (2.65)$$

onde

$$\tilde{\Psi}(\tau_2, \xi_2, \tau_1, \xi_1) := \Psi(\tau_1 + \tau_2, \xi_1 + \xi_2, \tau_1, \xi_1), \quad \forall (\tau_2, \xi_2, \tau_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^4,$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_2 := \{(\tau_2, \xi_2, \tau_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^4 : (\tau_1 + \tau_2, \xi_1 + \xi_2, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{C}_2\}.$$

Prova da estimativa (2.63): Na região \mathcal{A} , já que $\langle \xi \rangle = \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \lesssim \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2 \rangle$, $s \geq 0$, $c < 3/4$ e $|\xi_1| \leq 1$, temos

$$|\Psi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)| \lesssim \frac{\langle \xi_1 \rangle^{s-s'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^{b'}} \lesssim \frac{1}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^{b'}}, \quad \forall (\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{A}.$$

Consequentemente, deduzimos de (2.15), (2.57) e (2.13) que vale

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \Psi\|_{L_{\tau, \xi}^{\infty}(L_{\tau_1, \xi_1}^2)} \lesssim \sup_{\tau, \xi} \left[\int \frac{d\xi_1}{\langle (1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1^2 - 2\xi\xi_1 + \sigma \rangle^{2\min\{b, b'\}}} \right]^{\frac{1}{2}} \lesssim 1. \quad (2.66)$$

Na região \mathcal{B} , temos $|\xi| \lesssim |\xi_2|$. De fato, em \mathcal{B} valem

$$2|\xi| = |(1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1 - 2\xi - (1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1| < (c_{\nu} + 1 + |\nu|)|\xi_1|$$

e

$$\begin{aligned} 2|\xi_2| &= |(1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1 - 2\xi + (1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1| \\ &> |(1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1| - c_{\nu}|\xi_1| \geq c_{\nu}|\xi_1|. \end{aligned}$$

Além disso, $\langle \xi_1 \rangle \leq \sqrt{2}|\xi_1| \leq \frac{\sqrt{2}}{c_{\nu}}|2(1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1 - 2\xi|$. Logo

$$|\Psi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)| \lesssim \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^{s'} \langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^{b'}} \lesssim \frac{|2(1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1 - 2\xi|^{\frac{1}{2}}}{\langle \xi_1 \rangle^{s'+\frac{1}{2}} \langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^{b'}}, \quad \forall (\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{B}.$$

Portanto, através a mudança de variável $y := (1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1^2 - 2\xi\xi_1 + \sigma$, obtemos juntamente com (2.51), (2.15), (2.57), (2.12) e $b', b > 1/2$, a estimativa

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{\mathcal{B}} \Psi\|_{L_{\tau, \xi}^{\infty}(L_{\tau_1, \xi_1}^2)} &\lesssim \sup_{\tau, \xi} \left[\iint \frac{|2(1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1 - 2\xi|}{\langle \sigma_2 \rangle^{2b} \langle \sigma_1 \rangle^{2b'}} d\tau_1 \xi_1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \sup_{\tau, \xi} \left[\int \frac{dy}{\langle y \rangle^{2\min\{b, b'\}}} \right]^{\frac{1}{2}} \lesssim 1. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Na região $\mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c$, temos

$$c_{\nu}|\xi_1|^2 \leq |(1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1^2 - 2\xi\xi_1| = |\sigma - \sigma_1 - \sigma_2|. \quad (2.68)$$

Em particular, $|\xi_1|^2 \lesssim |\sigma|$ na região \mathcal{C} . Logo (2.53) implica que

$$|\Psi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)| \lesssim \frac{\langle \xi_1 \rangle^{s-s'}}{\langle \sigma \rangle^{1-c}} \cdot \frac{1}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^{b'}} \lesssim \frac{1}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^{b'}}, \quad \forall (\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{C}.$$

Donde, juntamente com (2.15), (2.57) e (2.13), deduzimos a estimativa

$$\|\mathbf{1}_C \Psi\|_{L_{\tau,\xi}^\infty(L_{\tau_1,\xi_1}^2)} \lesssim \sup_{\tau,\xi} \left[\int \frac{d\xi_1}{\langle (1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1^2 - 2\xi\xi_1 + \sigma \rangle^{2\min\{b,b'\}}} \right]^{\frac{1}{2}} \lesssim 1. \quad (2.69)$$

Portanto, concluimos a prova de (2.63) pelas estimativas (2.66), (2.67) e (2.69).

Prova da estimativa (2.64): Por (2.68), temos $1 \leq |\xi_1|^2 \lesssim |\sigma_1|$ na região \mathcal{C}_1 . Além disso, de (2.52) temos $s - s' - 1/2 < 1/2 < b'$. Então

$$|\Psi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1)| \lesssim \frac{\langle \xi_1 \rangle^{s-s'-\frac{1}{2}}}{\langle \sigma_1 \rangle^{\frac{b'}{2}} \langle \sigma_1 \rangle^{\frac{b'}{2}}} \cdot \frac{|2\xi_1|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^{1-c}} \lesssim \frac{|2\xi_1|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma_1 \rangle^{\frac{1}{4}} \langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^{1-c}}, \quad \forall (\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathcal{C}_1.$$

Portanto, usando (2.16), (2.57) e a mudança de variável

$$y := 2\xi_1\xi - (1 + \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1^2 + \sigma_1 = \sigma - \sigma_2,$$

concluimos a estimativa

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{C}_1} \Psi\|_{L_{\tau_1,\xi_1}^\infty(L_{\tau,\xi}^2)} \lesssim \sup_{\tau_1,\xi_1} \langle \sigma_1 \rangle^{-\frac{1}{4}} \left[\int_{|y| \leq 2|\sigma_1|} \frac{dy}{\langle y \rangle^{2(1-c)}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Então, por (2.14) e $1/2 < c < 3/4$, temos

$$\|\mathbf{1}_{\mathcal{C}_1} \Psi\|_{L_{\tau_1,\xi_1}^\infty(L_{\tau,\xi}^2)} \lesssim \sup_{\tau_1,\xi_1} \langle \sigma_1 \rangle^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+c} \lesssim 1,$$

o que conclui a prova de (2.65).

Prova da estimativa (2.65): Para $(\tau_2, \xi_2, \tau_1, \xi_1) \in \tilde{\mathcal{C}}_2$, denotamos $\tau := \tau_1 + \tau_2$, $\xi := \xi_1 + \xi_2$ e, como antes, $\sigma := \tau + \xi^2$, $\sigma_1 := \tau_1 + \nu|\xi_1|\xi_1$ e $\sigma_2 := \tau_2 + \xi_2^2$. Então também temos $|\xi_1|^2 \lesssim |\sigma_2|$ na região $\tilde{\mathcal{C}}_2$. Logo

$$|\tilde{\Psi}(\tau_2, \xi_2, \tau_1, \xi_1)| \lesssim \frac{\langle \xi_1 \rangle^{s-s'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b} \cdot \frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle^{b'} \langle \sigma \rangle^{1-c}} \lesssim \frac{1}{\langle \sigma_1 \rangle^{b'} \langle \sigma \rangle^{1-c}}, \quad \forall (\tau_2, \xi_2, \tau_1, \xi_1) \in \tilde{\mathcal{C}}_2,$$

já que de (2.52) temos $s - s' < 1 < 2b$.

Portanto, de (2.16), (2.57), (2.13) e $c < 3/4$, segue que

$$\|\mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{C}}_2} \tilde{\Psi}\|_{L_{\tau_2,\xi_2}^\infty(L_{\tau_1,\xi_1}^2)} \lesssim \sup_{\tau_2,\xi_2} \left[\int \frac{d\xi_1}{\langle (1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \sigma_2 \rangle^{2(1-c)}} \right]^{\frac{1}{2}} \lesssim 1,$$

o que conclui (2.65) e encerra a prova de (2.54). \square

2.5 Prova da Boa Colocação Local

De posse dos Teoremas 2.5 e 2.6 e das estimativas lineares provadas no Capítulo 1, usaremos um argumento de contração para demonstrar o Teorema 2.1.

Demonstração do Teorema 2.1: Fixemos $s, s' \in \mathbb{R}$ satisfazendo (2.3) e (2.4), logo $-1/2 < (s' - s)/2 < 1/4$. Então, podemos fixar também $b, c, b', c' \in \mathbb{R}$ tais que

$$\max \{1/2, (s' - s)/2 + 1/2\} < b < c < \min \{3/4, (s' - s)/2 + 1\}$$

e

$$1/2 < b' < c' < \min \{3/4 - (s' - s)/2, 3/4\},$$

satisfazendo, portanto, as hipóteses dos Teoremas 2.5 e 2.6.

Fixemos agora uma função $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\eta = 1$ em $[-1, 1]$ e $\text{supp}(\eta) \subset [-2, 2]$. E fixemos também uma constante $C = C(s, b, c, s', b', c', \nu, \eta) > |\alpha| + |\beta|$ grande o suficiente para que tenhamos as estimativas (2.36), (2.54), (1.7) e (1.9) válidas com $\leq C$ substituindo o símbolo \lesssim .

Dado $R > 0$, consideremos o espaço métrico completo

$$\mathfrak{B} := \left\{ (u, v) \in X^{s,b} \times Y_\nu^{s',b'} : \|(u, v)\|_{\mathfrak{B}} := \|(u, v)\|_{X^{s,b} \times Y_\nu^{s',b'}} \leq 2CR \right\}. \quad (2.70)$$

E para cada $(\phi, \psi) \in B_R$ e $T \in (0, 1)$ tal que

$$T^{\min\{c-b, c'-b'\}} < (6C^4R)^{-1}, \quad (2.71)$$

consideremos também a aplicação $\Xi = \Xi(\phi, \psi, T)$

$$\begin{aligned} \Xi : \mathfrak{B} &\rightarrow X^{s,b} \times Y_\nu^{s',b'} \\ (u, v) &\mapsto (\Xi_{u,v}^1, \Xi_{u,v}^2) \end{aligned}$$

definida por

$$\Xi_{u,v}^1(t) := \eta(t)e^{it\partial_x^2}\phi - i\alpha\eta(t/T) \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2}[u(t')v(t')]dt', \quad (2.72)$$

$$\Xi_{u,v}^2(t) := \eta(t)e^{-\nu t\mathcal{H}\partial_x^2}\psi + \beta\eta(t/T) \int_0^t e^{-\nu(t-t')\mathcal{H}\partial_x^2}\partial_x|u(t')|^2dt'. \quad (2.73)$$

Usando as Proposições 1.2 e 1.3, e os Teoremas 2.5 e 2.6, mostraremos que (2.72) e (2.73) de fato definem elementos de $X^{s,b}$ e $Y_\nu^{s',b'}$. Mais ainda, mostraremos que $\Xi = \Xi(\phi, \psi, T)$ é uma contração de \mathfrak{B} em \mathfrak{B} .

Usando as estimativas (1.7), (1.9) e (2.54), de (2.72) obtemos

$$\begin{aligned} \|\Xi_{u,v}^1\|_{X^{s,b}} &\leq C\|\phi\|_{H^s} + |\alpha|CT^{c-b}\|uv\|_{X^{s,c-1}} \\ &\leq C\|\phi\|_{H^s} + |\alpha|C^2T^{c-b}\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{Y_\nu^{s',b'}}, \end{aligned}$$

e usando as estimativas (1.7), (1.9) e (2.36), de (2.73) obtemos

$$\begin{aligned} \|\Xi_{u,v}^2\|_{Y_\nu^{s',b'}} &\leq C\|\psi\|_{H^{s'}} + |\beta|CT^{c'-b'}\|\partial_x(u\bar{u})\|_{X^{s,c'-1}} \\ &\leq C\|\psi\|_{H^{s'}} + |\beta|C^2T^{c'-b'}\|u\|_{X^{s,b}}^2. \end{aligned}$$

Combinando estas duas desigualdades temos

$$\begin{aligned} \|\Xi(u, v)\|_{X^{s,b} \times Y_\nu^{s',b'}} &\leq C\|(\phi, \psi)\|_{H^s \times H^{s'}} + (|\alpha| + |\beta|)C^2T^{\min\{c-b, c'-b'\}}\|u\|_{X^{s,b}}\|(u, v)\|_{\mathfrak{B}} \\ &\leq CR + (2C^4RT^{\min\{c-b, c'-b'\}})(2CR), \quad \forall (u, v) \in \mathfrak{B}, \end{aligned}$$

portanto, de (2.70) e (2.71), segue que $\Xi(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}$.

Vamos mostrar agora que $\Xi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ é uma contração. Note que

$$\Xi(u, v) - \Xi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(i\alpha\eta(t/T) \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} [\tilde{u}\tilde{v} - uv] dt', \beta\eta(t/T) \int_0^t e^{\nu(t'-t)\mathcal{H}\partial_x^2} \partial_x [u\bar{u} - \tilde{u}\tilde{u}] dt' \right).$$

Então, usando (1.9), (2.36), (2.54) e as igualdades $\tilde{u}\tilde{v} - uv = (\tilde{u} - u)\tilde{v} + u(\tilde{v} - v)$ e $u\bar{u} - \tilde{u}\tilde{u} = (u - \tilde{u})\bar{u} + \tilde{u}(\overline{u - \tilde{u}})$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Xi(u, v) - \Xi(\tilde{u}, \tilde{v})\|_{\mathfrak{B}} &\leq C^2T^{\min\{c-b, c'-b'\}} \left(\|\tilde{u}\tilde{v} - uv\|_{X^{s,c-1}} + \|u\bar{u} - \tilde{u}\tilde{u}\|_{Y_\nu^{s',c'-1}} \right) \\ &\leq C^3T^{\min\{c-b, c'-b'\}} \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|_{\mathfrak{B}} \left[\|\tilde{v}\|_{Y_\nu^{s',b'}} + 2\|u\|_{X^{s,b}} + \|\tilde{u}\|_{X^{s,b}} \right] \\ &\leq 6C^4RT^{\min\{c-b, c'-b'\}} \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|_{\mathfrak{B}}, \quad \forall (u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Portanto, de (2.71), a aplicação $\Xi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ é uma contração.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, $\Xi = \Xi(\phi, \psi, T)$ possui um único ponto fixo que é, portanto, solução das equações (2.1) e (2.2) para todo $t \in [-T, T]$, com

T satisfazendo (2.71). Além disso, pela Proposição 1.1, este ponto fixo pertence a $C^0(\mathbb{R}; H^s) \times C^0(\mathbb{R}; H^{s'})$.

Portanto, a aplicação dado-solução S em (2.5) é definida, em cada $(\phi, \psi) \in B_R$, como sendo a restrição a $[-T, T]$, conforme a Definição 1.2, do ponto fixo de $\Xi = \Xi(\phi, \psi, T)$.

Com a mesma argumentação usada para mostrar que Ξ é contração, deduz-se

$$\|S(\phi, \psi) - S(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{\mathfrak{B}} \leq \lambda \|(\phi, \psi) - (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{H^s \times H^{s'}}, \quad \forall (\phi, \psi), (\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in B_R,$$

onde $\lambda = C(1 - 6C^4 RT^{\min\{c-b, c'-b'\}})^{-1}$. Portanto, de (1.5), concluímos que a aplicação dado-solução S é Lipschitz.

Por fim, vamos mostrar a unicidade da solução na classe $X_T^{s,b} \times Y_T^{s',b'}$. Suponha que $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in X^{s,b} \times Y_{\nu}^{s',b'}$ satisfazem (2.1) e (2.2) para cada $t \in [-T, T]$.

Seja $T^* \leq T$, tal que

$$2C^3 \left(\|(u_1, v_1)\|_{X^{s,b} \times Y_{\nu}^{s',b'}} + \|(u_2, v_2)\|_{X^{s,b} \times Y_{\nu}^{s',b'}} \right) T^{*\min\{c-b, c'-b'\}} \leq 1/2. \quad (2.74)$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in X^{s,b} \times Y_{\nu}^{s',b'}$ tal que $\tilde{u}(t) = u_1(t) - u_2(t)$ e $\tilde{v}(t) = v_1(t) - v_2(t)$ para todo $t \in [-T^*, T^*]$ e

$$\|(\tilde{u}, \tilde{v})\|_{X^{s,b} \times Y_{\nu}^{s',b'}} \leq \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{X_{T^*}^{s,b} \times Y_{T^*}^{s',b'}} + \epsilon. \quad (2.75)$$

Então, para todo $t \in [-T^*, T^*]$,

$$\begin{aligned} u_1(t) - u_2(t) &= -i\alpha\eta(t/T^*) \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} [\tilde{u}(t')v_1(t') + u_2(t')\tilde{v}(t')] dt', \\ v_1(t) - v_2(t) &= \beta\eta(t/T^*) \int_0^t e^{-\nu(t-t')\mathcal{H}\partial_x^2} \partial_x [\tilde{u}(t')\overline{u_1(t')} + u_2(t')\overline{\tilde{u}(t')}] dt'. \end{aligned}$$

Logo de (1.9), (2.36) e (2.54) temos

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{X_{T^*}^{s,b}} &\leq \left\| -i\alpha\eta(t/T^*) \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} [\tilde{u}(t')v_1(t') + u_2(t')\tilde{v}(t')] dt' \right\|_{X^{s,b}} \\ &\leq C^3 T^{*c-b} \left(\|\tilde{u}\|_{X^{s,b}} \|v_1\|_{Y_{\nu}^{s',b'}} + \|u_2\|_{X^{s,b}} \|\tilde{v}\|_{Y_{\nu}^{s',b'}} \right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

e

$$\|v_1 - v_2\|_{Y_{T^*}^{s',b'}} \leq C^3 T^{*c'-b'} (\|\tilde{u}\|_{X^{s,b}} \|u_1\|_{X^{s,b}} + \|u_2\|_{X^{s,b}} \|\tilde{u}\|_{X^{s,b}}). \quad (2.77)$$

Combinando (2.74), (2.76) e (2.77), obtemos

$$\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{X_{T^*}^{s,b} \times Y_{T^*}^{s',b'}} \leq \frac{1}{2} \|(\tilde{u}, \tilde{v})\|_{X^{s,b} \times Y_{\nu}^{s',b'}}. \quad (2.78)$$

Combinando agora (2.75) e (2.78), concluímos

$$\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{X_{T^*}^{s,b} \times Y_{T^*}^{s',b'}} \leq \epsilon.$$

Portanto $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ em $[-T^*, T^*]$, já que ϵ é arbitrário.

Definindo $u'_1(t) := u_1(t + T^*)$, $v'_1(t) := v_1(t + T^*)$, $u'_2(t) := u_2(t + T^*)$ e $v'_2(t) := v_2(t + T^*)$, a argumentação acima pode ser refeita para concluir que $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ em $[T^*, 2T^*]$, mais precisamente, em $[T^*, \min\{2T^*, T\}]$. Portanto, repetindo este argumento um número finito de vezes, concluímos que $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ em $[-T, T]$. \square

Capítulo 3

Resultados de Má Colocação

Na Seção 3.1, provamos nos Teoremas 3.2, 3.3 e 3.4 a C^2 -Má Colocação de (SB-O), para (s, s') em \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 e ℓ^c , respectivamente (veja as Figuras I.1 e I.2). O primeiro resultado de C^2 -Má Colocação foi obtido por Tzvetkov para a equação KdV em [24], melhorando o resultado de C^3 -Má Colocação obtido por Bourgain em [7]. Nas provas dos Teoremas 3.2 e 3.4, essencialmente seguimos os argumentos de Tzvetkov. Mas para (s, s') em \mathcal{R}_2 , surgem dificuldades técnicas adicionais. Para contornar estas dificuldades, na prova do Teorema 3.3 fizemos (assim como em [3] e [10]) a variável t tender a zero e, por isso, a conclusão é sobre a aplicação dado-solução (2.5) e não sobre o fluxo (3.9). Até onde sabemos, este é o primeiro resultado de Má-Colocação de um sistema não linear dispersivo, para dados iniciais em uma região como \mathcal{R}_2 (veja a Figura 3.2).

Na Seção 3.2, provamos alguns resultados sobre as regiões que restaram após os resultados de Boa Colocação Local e de C^2 -Má Colocação (veja as Figuras I.1 e I.2). No caso não ressonante, o Teorema 3.5 estabelece que, na maior parte da região restante, o método utilizado neste trabalho não pode obter a Boa Colocação Local de (SB-O) com os mesmos espaços de funções. E no caso particular $\nu = 0$, idem para toda a região restante. No caso ressonante, o Teorema 3.6 estabelece que, no *end-point*, o método empregado em [22] não pode obter Boa Colocação Local de (SB-O) com os mesmos espaços de funções. As provas destes resultados seguem os argumentos utilizados em [16] para provar que a estimativa bilinear para a equação KdV não vale para $s < -3/4$. Mas em nossas provas, o Lema 3.1 abaixo viabilizou provas um pouco mais diretas.

3.1 C^2 -Má Colocação

Suponha que existe $T > 0$ tal que o problema de Cauchy (SB-O) é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$, para o intervalo de tempo $[-T, T]$. Suponha ainda que existe $t \in [-T, 0) \cup (0, T]$ tal que a aplicação dado-solução $S^t : (\phi, \psi) \mapsto (u(t), v(t))$ é duas vezes Fréchet diferenciável em zero. Então, a segunda derivada de Fréchet de S^t em zero, pertence ao espaço normado das aplicações bilineares limitadas de $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$, que denotaremos por \mathcal{B} . Em particular, temos a seguinte estimativa para a segunda derivada de Gâteaux de S^t em zero,

$$\left\| \frac{\partial^2 S^t}{\partial(\phi, \psi)^2}(0, 0) \right\|_{H^s \times H^{s'}} \leq \|D^2 S^t(0, 0)\|_{\mathcal{B}} \|(\phi, \psi)\|_{H^s \times H^{s'}}^2, \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (3.1)$$

Denotaremos $(u_{\phi, \psi}(t), v_{\phi, \psi}(t)) := S^t(\phi, \psi)$. Isto significa que $(u_{\phi, \psi}(t), v_{\phi, \psi}(t))$ é uma solução das equações integrais associadas

$$u_{\phi, \psi}(t) = e^{it\partial_x^2} \phi - i\alpha \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} (u_{\phi, \psi}(t')v_{\phi, \psi}(t')) dt', \quad (3.2)$$

$$v_{\phi, \psi}(t) = e^{-\nu t \mathcal{H} \partial_x^2} \psi + \beta \int_0^t e^{-\nu(t-t') \mathcal{H} \partial_x^2} (\partial_x |u_{\phi, \psi}(t')|^2) dt'. \quad (3.3)$$

Usaremos (3.2) e (3.3) para calcular o membro da esquerda da desigualdade (3.1). Para isto, pretendemos utilizar a regra clássica de derivação do produto para obter as derivadas de Gâteaux dos termos $u_{\phi, \psi}v_{\phi, \psi}$ e $\partial_x |u_{\phi, \psi}|^2$. Entretanto, esta regra é formal para baixos valores de s e s' , pois $H^r(\mathbb{R})$ é uma álgebra apenas quando $r > 1/2$. Contudo, pelo Teorema 2.1, quando $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, temos $(u_{\phi, \psi}(t'), v_{\phi, \psi}(t')) \in H^r \times H^{r-1/2}$ para todo $r \geq 1/2$. Além disso, o argumento de contração fornece aplicação dado-solução analítica. Portanto, para pontos e direções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$, a regra clássica do produto pode ser aplicada na topologia de $H^s \times H^{s'}$, pois é válida na topologia de $H^r \times H^{r-1/2}$ para $r > 1$, tomado grande o suficiente para que a norma de $H^r \times H^{r-1/2}$ seja mais forte que a norma de $H^s \times H^{s'}$ (lembrando que a derivada de Gâteaux é preservada por normas mais fracas).

Pela regra de derivação do produto, de (3.2) obtemos

$$\frac{\partial S^t}{\partial(\phi, \psi)}(0, 0) = \left(\frac{\partial u_{0,0}}{\partial(\phi, \psi)}(t), \frac{\partial v_{0,0}}{\partial(\phi, \psi)}(t) \right) = \left(e^{it\partial_x^2} \phi, e^{-\nu t \mathcal{H} \partial_x^2} \psi \right), \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

já que $(u_{0,0}(t), v_{0,0}(t)) = S^t(0, 0) = (0, 0)$. Logo, de (3.2), calculando a segunda derivada de Gâteaux de u em zero, na direção $(\phi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$, obtemos

$$\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial(\phi, \psi)^2}(t) = -2i\alpha \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} \left(e^{it'\partial_x^2} \phi \cdot e^{-\nu t' \mathcal{H} \partial_x^2} \psi \right) dt'.$$

Denotando então $\xi_2 := \xi - \xi_1$, concluímos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial(\phi, \psi)^2}(t) \right\|_{H^s} &= \left\| 2\alpha \langle \xi \rangle^s \int_0^t e^{-i(t-t')\xi^2} \left((2\pi)^{-\frac{1}{2}} (e^{it'\partial_x^2} \phi)^\wedge * (e^{-\nu t' \mathcal{H} \partial_x^2} \psi)^\wedge \right) (\xi) dt' \right\|_{L_\xi^2} \\ &= \left\| \left(\frac{2\alpha^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \langle \xi \rangle^s \int_0^t e^{it'\xi^2} \int e^{-it'(\xi_2^2 + \nu|\xi_1|\xi_1)} \widehat{\phi}(\xi_2) \widehat{\psi}(\xi_1) d\xi_1 dt' \right\|_{L_\xi^2} \\ &= \left\| \int_0^t \int \Theta(t', \xi, \xi_1) f(\xi_2) g(\xi_1) d\xi_1 dt' \right\|_{L_\xi^2}, \end{aligned}$$

onde $f(\xi_2) := \langle \xi_2 \rangle^s \widehat{\phi}(\xi_2)$, $g(\xi_1) := \langle \xi_1 \rangle^{s'} \widehat{\psi}(\xi_1)$ e

$$\Theta(t', \xi, \xi_1) := \left(\frac{2\alpha^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \xi_1 \rangle^{s'}} \cdot e^{it'(\xi^2 - \xi_2^2 - \nu|\xi_1|\xi_1)}. \quad (3.4)$$

Portanto, se a aplicação dado-solução (3.9) é C^2 em zero então

$$\left\| \int_0^t \int \Theta(t', \xi, \xi_1) f(\xi_2) g(\xi_1) d\xi_1 dt' \right\|_{L_\xi^2} \leq \|D^2 S^t(0, 0)\|_{\mathcal{B}} (\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2})^2, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (3.5)$$

Analogamente, de (3.3), calculando a segunda derivada de Gâteaux de v em zero, na direção $(\phi, 0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$, obtemos

$$\frac{\partial^2 v_{0,0}}{\partial(\phi, 0)^2}(t) = 2\beta \int_0^t e^{-\nu(t-t')\mathcal{H}\partial_x^2} \partial_x \left(e^{it'\partial_x^2} \phi \cdot \overline{e^{it'\partial_x^2} \phi} \right) dt'.$$

Portanto, se a aplicação dado-solução (3.9) é C^2 em zero então também temos

$$\left\| \int_0^t \int \Upsilon(t', \xi, \xi_1) f(\xi_2) \overline{f(-\xi_1)} d\xi_1 dt' \right\|_{L_\xi^2} \leq \|D^2 S^t(0, 0)\|_{\mathcal{B}} \|f\|_{L^2}^2, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (3.6)$$

onde,

$$\Upsilon(t', \xi, \xi_1) := \left(\frac{2\beta^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{|i\xi| \langle \xi \rangle^{s'}}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \xi_1 \rangle^s} \cdot e^{it'(\nu|\xi|\xi - \xi_2^2 + \xi_1^2)}. \quad (3.7)$$

No próximo lema, estabeleceremos um resultado elementar, que será muito útil para a demonstração dos teoremas deste capítulo.

Lema 3.1. *Sejam $A, B, R \subset \mathbb{R}^n$. Se $R - B \subset A$ então*

$$\|\mathbf{1}_R\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{1}_B\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.8)$$

Demonstração: Se $R - B \subset A$ então

$$\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B(x) = \int_A \mathbf{1}_B(x - y) dy = \int_A \mathbf{1}_{x-B}(y) dy \geq \mathbf{1}_R(x) \|\mathbf{1}_B\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

tomando a norma L^2 nesta desigualdade, obtemos (3.8). \square

Agora estamos em condições de provar nossos resultados de C^2 -Má Colocação para o sistema (SB-O). Os dois primeiros resultados referem-se ao caso não ressonante $|\nu| \neq 1$.

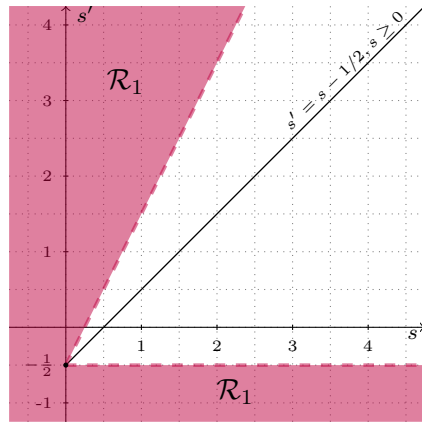


Figura 3.1: Fluxo (3.9) não é C^2 em zero

Teorema 3.2. *Sejam $|\nu| \neq 1$ e $s, s' \in \mathbb{R}$. Suponha que o Problema de Cauchy (SB-O) é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$, no sentido do Teorema 2.1. Se (2.3) não se verifica, i.e., $s' < -1/2$ ou $2s - 1/2 < s'$, então o fluxo*

$$\begin{aligned} S^t : B_R &\rightarrow H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R}) \\ (\phi, \psi) &\mapsto (u(t), v(t)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

não é C^2 em zero¹, para qualquer $t \in [-T, 0) \cup (0, T]$. A fortiori, a aplicação dada-solução (2.5) também não é C^2 em zero¹.

¹Na verdade, estamos provando algo um pouco mais forte do que está enunciado nos Teoremas 3.2, 3.3 e 3.4. Estamos provando que estas aplicações não são duas vezes Fréchet-diferenciáveis em zero.

Demonstração: Basta mostrar que (3.5) não vale ou (3.6) não vale.

Caso $s' < -1/2$: Neste caso, (3.5) não vale. De fato, para cada $N \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{aligned} A_N &:= \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |(1 + |\nu|)\xi_1 + \operatorname{sgn}(\nu)N| < (1 + |\nu|)(4\langle t \rangle N)^{-1}\}, \\ B_N &:= \{\xi_2 \in \mathbb{R} : |2\xi_2 - \operatorname{sgn}(\nu)N| < (4\langle t \rangle N)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Para N suficientemente grande (precisamente $N > 1 + |\nu|$), temos que

$$\langle \xi_1 \rangle \sim \langle \xi_2 \rangle \sim \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim N, \quad \forall \xi_1 \in A_N, \forall \xi_2 \in B_N, \quad (3.10)$$

já que $1 + |\nu| \neq 2$, além disso, $\operatorname{sgn}(\xi_1) = -\operatorname{sgn}(\nu)$ para todo $\xi_1 \in A_N$, logo também temos que

$$|(\xi_1 + \xi_2)^2 - \nu|\xi_1|\xi_1 - \xi_2^2| = |\xi_1| \cdot |(1 + |\nu|)\xi_1 + 2\xi_2| < \frac{2N}{1 + |\nu|} \cdot \frac{2 + |\nu|}{4\langle t \rangle N} \leq \frac{1}{|t|}. \quad (3.11)$$

Observe que $\cos(x) \geq 1/2$ quando $|x| \leq 1$. Portanto, de (3.4), (3.10) e (3.11), temos

$$\operatorname{Re}(\Theta(t', \xi_1 + \xi_2, \xi_1)) \gtrsim \frac{1}{N^{s'}}, \quad \forall |t'| \leq |t|, \forall \xi_1 \in A_N, \forall \xi_2 \in B_N. \quad (3.12)$$

Sejam agora $f_N, g_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tais que $\mathbf{1}_{A_N} \leq g_N$, $\mathbf{1}_{B_N} \leq f_N$, $\|g_N\|_{L^2} \leq 2\|\mathbf{1}_{A_N}\|_{L^2}$ e $\|f_N\|_{L^2} \leq 2\|\mathbf{1}_{B_N}\|_{L^2}$. De (3.12), concluímos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int \Theta(t', \xi, \xi_1) f_N(\xi - \xi_1) g_N(\xi_1) d\xi_1 dt' \right| &\geq \left| \int_0^t \int \operatorname{Re}(\Theta(t', \xi, \xi_1)) \mathbf{1}_{B_N}(\xi - \xi_1) \mathbf{1}_{A_N}(\xi_1) d\xi_1 dt' \right| \\ &\gtrsim |t| \cdot \frac{\mathbf{1}_{A_N} * \mathbf{1}_{B_N}(\xi)}{N^{s'}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Combinando (3.13) com (3.5), obtemos então

$$|t| \cdot \frac{\|\mathbf{1}_{A_N} * \mathbf{1}_{B_N}\|_{L^2}}{N^{s'}} \lesssim \|D^2 S^t(0, 0)\|_{\mathcal{B}} (\|\mathbf{1}_{A_N}\|_{L^2} + \|\mathbf{1}_{B_N}\|_{L^2})^2. \quad (3.14)$$

Por outro lado, definindo

$$R_N := \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi + b_\nu \operatorname{sgn}(\nu)N| < (8\langle t \rangle N)^{-1}\},$$

onde $b_\nu = \frac{1}{1+|\nu|} - \frac{1}{2} \neq 0$, temos que $R_N - B_N \subset A_N$. Então, pelo Lema 3.1 e por (3.14), concluímos que

$$|t| \cdot \frac{N^{-\frac{1}{2}} N^{-1}}{N^{s'}} \lesssim \frac{\|D^2 S^t(0, 0)\|_{\mathcal{B}}}{N}. \quad (3.15)$$

Mas (3.15) não vale para $s' < -1/2$, já que N pode ser escolhido arbitrariamente grande. Logo (3.5) não vale no caso $s' < -1/2$ e, portanto, a aplicação dado-solução (3.9) não é C^2 em zero neste caso.

Caso $s' > 2s - 1/2$: Para este caso, utilizando o mesmo procedimento utilizado para o caso anterior, mostraremos que (3.6) não vale.

Para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (precisamente, $N > |1 - |\nu||^{-1}$), definimos

$$\begin{aligned} A_N &:= \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |a_\nu \xi_1 + \operatorname{sgn}(\nu)(1 + |\nu|)N| < (c_t N)^{-1}\}, \\ B_N &:= \{\xi_2 \in \mathbb{R} : |a_\nu \xi_2 + \operatorname{sgn}(\nu)(1 - |\nu|)N| < (2c_t N)^{-1}\}, \\ R_N &:= \{\xi \in \mathbb{R} : |a_\nu \xi + 2\operatorname{sgn}(\nu)N| < (2c_t N)^{-1}\}, \end{aligned}$$

onde $a_\nu := |1 - |\nu|| \cdot |1 + |\nu|| \neq 0$ e $c_t := 1 + 8|t|(1 - |\nu|)^{-2}$. Então, $R_N - B_N \subset A_N$.

Além disso,

$$\langle \xi_1 \rangle \sim \langle \xi_2 \rangle \sim \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim N, \quad \forall \xi_1 \in A_N, \forall \xi_2 \in B_N, \quad (3.16)$$

$\operatorname{sgn}(\xi_1 + \xi_2) = -\operatorname{sgn}(\nu)$ e

$$\begin{aligned} |\nu(\xi_1 + \xi_2)|\xi_1 + \xi_2| - \xi_2^2 + \xi_1^2| &= |\xi_1 + \xi_2| \cdot |(1 - |\nu|)\xi_1 - (1 + |\nu|)\xi_2| \\ &< \frac{4N}{a_\nu} \cdot \frac{2}{c_t |1 - |\nu||N} \leq \frac{1}{|t|}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Analogamente a (3.10)-(3.12), de (3.7), (3.16) e (3.17), obtemos

$$\operatorname{Re}(\Upsilon(t', \xi_1 + \xi_2, \xi_1)) \gtrsim \frac{N^{s'+1}}{N^{2s}}, \quad \forall |t'| \leq |t|, \forall \xi_1 \in A_N, \forall \xi_2 \in B_N. \quad (3.18)$$

Sejam agora $f_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tais que $\mathbf{1}_{-A_N \cup B_N} \leq f_N$ e $\|f_N\|_{L^2} \leq 2\|\mathbf{1}_{-A_N \cup B_N}\|_{L^2} \lesssim N^{-\frac{1}{2}}$.

Consequentemente, temos

$$f_N(\xi - \xi_1) \overline{f_N(-\xi_1)} \geq \mathbf{1}_{-A_N \cup B_N}(\xi - \xi_1) \mathbf{1}_{-A_N \cup B_N}(-\xi_1) \geq \mathbf{1}_{B_N}(\xi - \xi_1) \mathbf{1}_{A_N}(\xi_1), \quad \forall \xi, \xi_1 \in \mathbb{R}.$$

Analogamente a (3.13), de (3.18) deduzimos que

$$\left| \int_0^t \int \Upsilon(t', \xi, \xi_1) f_N(\xi - \xi_1) \overline{f_N(-\xi_1)} d\xi_1 dt' \right| \gtrsim |t| \cdot \frac{\mathbf{1}_{A_N} * \mathbf{1}_{B_N}(\xi) \cdot N^{s'+1}}{N^{2s}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Então, de (3.19), do Lema 3.1 e de (3.6), concluímos que

$$|t| \cdot \frac{N^{s'+1} \cdot N^{-\frac{1}{2}} \cdot N^{-1}}{N^{2s}} \lesssim \frac{\|D^2 S^t(0, 0)\|_{\mathcal{B}}}{N}. \quad (3.20)$$

Mas como (3.20) não pode valer no caso $2s - 1/2 < s'$, a aplicação dado-solução não pode ser C^2 para este caso. \square

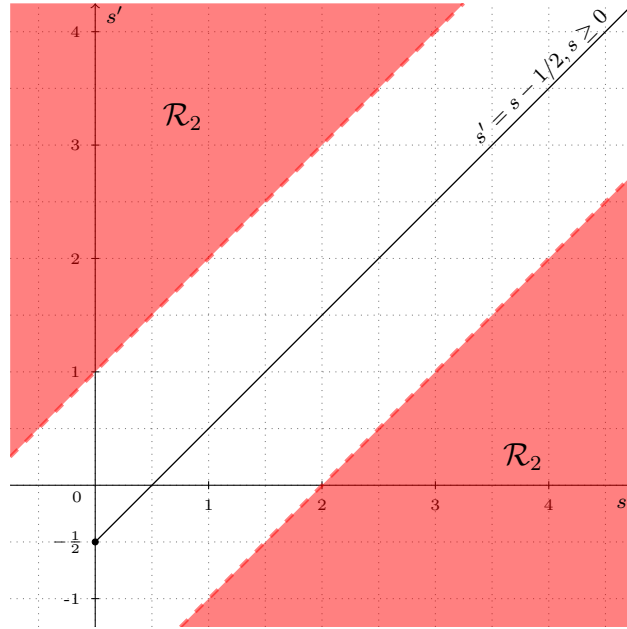


Figura 3.2: Aplicação dado-solução (2.5) não é C^2 em zero

Teorema 3.3. *Sejam $|\nu| \neq 1$ e $s, s' \in \mathbb{R}$. Suponha que o Problema de Cauchy para o sistema (SB-O) é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$, no sentido do Teorema 2.1. Se $|s' - (s - 1/2)| > 3/2$, a aplicação dado-solução associada (2.5), i.e.,*

$$\begin{aligned} S : B_R &\rightarrow C^0([-T, T]; H^s(\mathbb{R})) \times C^0([-T, T]; H^{s'}(\mathbb{R})) \\ (\phi, \psi) &\mapsto (u, v) \end{aligned}$$

não é C^2 em zero.

Demonstração: Se a aplicação dado-solução (2.5) é C^2 em zero então (3.5) e (3.6) valem para todo $t \in [-T, T]$ e

$$\sup_{t \in [-T, T]} \|D^2 S^t(0, 0)\|_{\mathcal{B}} < \infty. \quad (3.21)$$

Portanto, precisamos mostrar que (3.21) não vale em dois casos, para $s' < s - 2$ e para $s + 1 < s'$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned} A_N &:= \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |\xi_1 - N| < 1/2\}, \\ B_N &:= \{\xi_2 \in \mathbb{R} : |\xi_2| < 1/4\}, \\ R_N &:= \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - N| < 1/4\}. \end{aligned}$$

Logo $R_N - B_N \subset A_N$ e se $\xi_1 \in A_N$ e $\xi_2 \in B_N$ então

$$\langle \xi_1 \rangle \sim N, \quad \langle \xi_2 \rangle \sim 1, \quad \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim N, \quad (3.22)$$

$$|(\xi_1 + \xi_2)^2 - \nu|\xi_1|\xi_1 - \xi_2^2| = |\xi_1| \cdot |(1 - \nu \operatorname{sgn}(\xi_1))\xi_1 + 2\xi_2| < 6(1 + |\nu|)N^2. \quad (3.23)$$

Agora, para cada $N > (6(1 + |\nu|)T)^{-\frac{1}{2}}$, definimos

$$t_N := (6(1 + |\nu|)N^2)^{-1} \in (0, T]. \quad (3.24)$$

Como $\cos(x) \geq 1/2$ quando $|x| \leq 1$, de (3.4), (3.22), (3.23) e (3.24), obtemos

$$\operatorname{Re}(\Theta(t', \xi_1 + \xi_2, \xi_1)) \gtrsim \frac{N^s}{N^{s'}}, \quad \forall \xi_1 \in A_N, \forall \xi_2 \in B_N, \forall t' \in [0, t_N]. \quad (3.25)$$

Portanto, repetindo a argumentação usada em (3.12)-(3.15), concluimos de (3.25) e $\|R_N\|_{L^2}\|B_N\|_{L^1} \sim 1$ que

$$N^{s-2-s'} \lesssim \frac{N^s \cdot t_N}{N^{s'}} \lesssim \|D^2 S^{t_N}(0, 0)\|_{\mathcal{B}},$$

o que contradiz (3.21) no caso $s' < s - 2$, pois N pode ser arbitrariamente grande.

Por outro lado,

$$|\nu(\xi_1 + \xi_2)|\xi_1 + \xi_2| - \xi_2^2 + \xi_1^2| < 6(1 + |\nu|)N^2, \quad \forall \xi_1 \in A_N, \forall \xi_2 \in B_N. \quad (3.26)$$

Logo, de (3.7), (3.22), (3.26) e (3.24), deduzimos que

$$\operatorname{Re}(\Upsilon(t', \xi_1 + \xi_2, \xi_1)) \gtrsim \frac{N^{s'+1}}{N^s}, \quad \forall \xi_1 \in A_N, \forall \xi_2 \in B_N, \forall t' \in [0, t_N]. \quad (3.27)$$

Repetindo agora a argumentação de (3.18)-(3.20), de (3.27) e $\|R_N\|_{L^2}\|B_N\|_{L^1} \sim 1$, concluímos que

$$N^{s'-s-1} \lesssim \frac{N^{s'+1} \cdot t_N}{N^s} \lesssim \|D^2 S^{t_N}(0, 0)\|_{\mathcal{B}},$$

contradizendo (3.21) no caso $s + 1 < s'$.

Portanto, se $|s' - (s - 1/2)| > 3/2$ então (3.21) não vale, logo a aplicação dado-solução (2.5) não é C^2 em zero. \square

Para finalizar esta seção, provamos um resultado de C^2 -Má Colocação para o sistema (SB-O) no caso ressonante $|\nu| = 1$, que mostra que o resultado de Pecher [22] é *sharp* exceto pelo *end-point*.

Teorema 3.4. *Sejam $|\nu| = 1$ e $(s, s') \notin \ell$, i.e., $s' \neq s - 1/2$ ou $s < 0$. Suponha que o Problema de Cauchy para o sistema (SB-O) é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R})$, no sentido do Teorema 2.1. então o fluxo*

$$\begin{aligned} S^t : B_R &\rightarrow H^s(\mathbb{R}) \times H^{s'}(\mathbb{R}) \\ (\phi, \psi) &\mapsto (u(t), v(t)) \end{aligned} \tag{3.28}$$

não é C^2 em zero, para qualquer $t \in [-T, 0) \cup (0, T]$. A fortiori, a aplicação dado-solução (2.5) também não é C^2 em zero.

Demonstração: Faremos a demonstração usando os mesmo argumentos utilizados na prova do Teorema 3.2.

Suponha que existe $t \in [-T, 0) \cup (0, T]$ tal que a aplicação dado-solução (3.9) é C^2 em zero.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned} A_N &:= \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |\xi_1 - \text{sgn}(\nu)N| < (2\langle t \rangle N)^{-1}\}, \\ B_N &:= \{\xi_2 \in \mathbb{R} : |\xi_2| < (4\langle t \rangle N)^{-1}\}, \\ R_N &:= \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - \text{sgn}(\nu)N| < (4\langle t \rangle N)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Então, $R_N - B_N \subset A_N$. Além disso, se $\xi_1 \in A_N$ e $\xi_2 \in B_N$ então $\text{sgn}(\xi_1) = \text{sgn}(\nu)$,

$$\langle \xi_1 \rangle \sim N, \quad \langle \xi_2 \rangle \sim 1, \quad \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim N,$$

$$|(\xi_1 + \xi_2)^2 - \nu|\xi_1|\xi_1 - \xi_2^2| = |2\xi_1\xi_2| < 4N \cdot (4\langle t \rangle N)^{-1} \leq |t|^{-1}.$$

Analogamente a (3.10)-(3.15), concluimos de (3.5) que

$$|t| \cdot N^{s-\frac{1}{2}-s'} \lesssim \|D^2 S^t(0,0)\|_{\mathcal{B}}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Portanto $s' \geq s - 1/2$.

Por outro lado, definindo

$$A_N := \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |\xi_1 + \operatorname{sgn}(\nu)N| < (2\langle t \rangle N)^{-1}\},$$

$$B_N := \{\xi_2 \in \mathbb{R} : |\xi_2| < (4\langle t \rangle N)^{-1}\},$$

$$R_N := \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi + \operatorname{sgn}(\nu)N| < (4\langle t \rangle N)^{-1}\},$$

temos $R_N - B_N \subset A_N$. Além disso, se $\xi_1 \in A_N$ e $\xi_2 \in B_N$ então $\operatorname{sgn}(\xi_1 + \xi_2) = -\operatorname{sgn}(\nu)$,

$$\langle \xi_1 \rangle \sim N, \quad \langle \xi_2 \rangle \sim 1, \quad \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim N,$$

$$|\nu(\xi_1 + \xi_2)|\xi_1 + \xi_2| - \xi_2^2 + \xi_1^2| = |2(\xi_1 + \xi_2)\xi_2| < 4N \cdot (4\langle t \rangle N)^{-1} \leq |t|^{-1}.$$

Analogamente a (3.17)-(3.20), concluimos de (3.6) que

$$|t| \cdot N^{s'-s+\frac{1}{2}} \lesssim \|D^2 S^t(0,0)\|_{\mathcal{B}}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Logo $s' \leq s - 1/2$ e portanto $s' = s - 1/2$.

Resta mostrar que $s \geq 0$. De fato, definindo

$$A_N := \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |\xi_1 + \operatorname{sgn}(\nu)N| < (8\langle t \rangle N)^{-1}\},$$

$$B_N := \{\xi_2 \in \mathbb{R} : |\xi_2 - \operatorname{sgn}(\nu)N| < (16\langle t \rangle N)^{-1}\},$$

$$R_N := \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| < (16\langle t \rangle N)^{-1}\},$$

temos $R_N - B_N \subset A_N$. Além disso, se $\xi_1 \in A_N$ e $\xi_2 \in B_N$ então $\operatorname{sgn}(\xi_1) = -\operatorname{sgn}(\nu)$,

$$\langle \xi_1 \rangle \sim N, \quad \langle \xi_2 \rangle \sim N, \quad \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim 1,$$

$$|(\xi_1 + \xi_2)^2 - \nu|\xi_1|\xi_1 - \xi_2^2| = |2\xi_1(\xi_1 + \xi_2)| < 4N \cdot (4\langle t \rangle N)^{-1} \leq |t|^{-1}.$$

Analogamente a (3.10)-(3.15), concluimos de (3.5) que

$$|t| \cdot N^{-\frac{1}{2}-s'-s} \lesssim \|D^2 S^t(0,0)\|_{\mathcal{B}}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Portanto $-2s = -1/2 - s' - s \leq 0$, o que conclui a demonstração do Teorema. \square

3.2 Onde as Estimativas Bilineares Não Valem

Teorema 3.5. *Sejam $|\nu| \neq 1$ e $s, s', c, c' \in \mathbb{R}$. Se $c', c > 1/2$ então*

(i) *a estimativa bilinear (2.36) não vale para $s + 1/2 \leq s'$;*

(ii) *a estimativa bilinear (2.54) não vale para $s' \leq s - 3/2$;*

(iii) *a estimativa bilinear (2.54) não vale para $s' \leq s - 1$, quando $\nu = 0$.*

Demonstração: (i) Retomemos as notações utilizadas na demonstração do Teorema 2.5. Então, apenas temos que mostrar que (2.37) não vale quando $s + 1/2 \leq s'$.

Definindo, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$A_N := \{(\tau_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1 - N| < N^{-1}, |\sigma_1| < 6\},$$

$$B_N := \{(\tau_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_2| < (2N)^{-1}, |\sigma_2| < 1\},$$

$$R_N := \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 : |\xi - N| < (2N)^{-1}, |\tau + \xi^2 - 2\xi N| < 1\},$$

temos $R_N - B_N \subset A_N$, já que $\sigma_1 + \sigma_2 = \tau + \xi^2 - 2\xi N$. Além disso,

$$\langle \xi_1 \rangle \sim N, \quad \langle \xi_2 \rangle \sim 1, \quad \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim N, \quad \langle \sigma \rangle \lesssim N^2, \quad \forall (\tau_1, \xi_1) \in A_N, \forall (\tau_2, \xi_2) \in B_N.$$

Logo, de (2.38) e (2.39), temos

$$\frac{N^{s'+1} \mathbf{1}_{B_N}(\tau_2, \xi_2) \mathbf{1}_{A_N}(\tau_1, \xi_1)}{N^{2(1-c')} \cdot N^s} \lesssim |\Phi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \mathbf{1}_{B_N}(\tau_2, \xi_2) \mathbf{1}_{A_N}(\tau_1, \xi_1)|, \quad \forall (\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^4. \quad (3.29)$$

Sejam agora $f_N, g_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tais que $\mathbf{1}_{A_N} \leq g_N$, $\mathbf{1}_{B_N} \leq f_N$, $\|g_N\|_{L^2} \leq 2\|\mathbf{1}_{A_N}\|_{L^2}$ e $\|f_N\|_{L^2} \leq 2\|\mathbf{1}_{B_N}\|_{L^2}$. Combinando (2.37), (3.29) e (3.8), deduzimos a estimativa

$$\frac{N^{s'+1} \cdot N^{-\frac{1}{2}} \cdot N^{-1}}{N^{2(1-c')} \cdot N^s} \lesssim N^{-\frac{1}{2}} \cdot N^{-\frac{1}{2}}.$$

Mas está estimativa não vale para todo N quando $s + 1/2 \leq s'$ e $c' > 1/2$.

(ii) Retomemos as notações utilizadas na demonstração do Teorema 2.6. Então, apenas temos que mostrar que (2.55) não vale para $s' \leq s - 3/2$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_N := \{(\tau_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1 - \operatorname{sgn}(\nu)N| < N^{-1}, |\sigma_1| < 7(1 + |\nu|)\},$$

$$B_N := \{(\tau_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_2| < (2N)^{-1}, |\sigma_2| < 1\},$$

$$R_N := \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 : |\xi - \operatorname{sgn}(\nu)N| < (2N)^{-1}, |\tau + \xi^2 + a_\nu \operatorname{sgn}(\nu)N\xi| < 1\},$$

onde $a_\nu := |\nu| - 1$. Então $R_N - B_N \subset A_N$, já que de (2.57) segue que

$$\sigma_1 + \sigma_2 = [\tau + \xi^2 + a_\nu \operatorname{sgn}(\nu)N\xi] + [(1 + |\nu|)\xi_1(\xi_1 - \xi)] + [a_\nu(\xi_1 - \operatorname{sgn}(\nu)N)\xi].$$

Argumentando como no item (i), de (2.55) deduzimos a seguinte estimativa

$$\frac{N^s \cdot N^{-\frac{1}{2}} \cdot N^{-1}}{N^{2(1-c)} \cdot N^{s'}} \lesssim N^{-\frac{1}{2}} \cdot N^{-\frac{1}{2}}.$$

Mas esta estimativa não vale para todo N quando $s' \leq s - 3/2$ e $c > 1/2$.

(iii) Mantendo as notações do Teorema 2.6, definimos para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$A_N := \{(\tau_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1 - N| < 1, |\sigma_1| < 3\},$$

$$B_N := \{(\tau_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_2| < 1/2, |\sigma_2| < 1\},$$

$$R_N := \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 : |\xi - N| < 1/2, |\tau| < 1\}.$$

Então $R_N - B_N \subset A_N$, já que $\sigma_1 + \sigma_2 = \tau + \xi_2^2$ quando $\nu = 0$.

Argumentando como no item (i), de (2.55) deduzimos a seguinte estimativa

$$\frac{N^s}{N^{2(1-c)} \cdot N^{s'}} \lesssim 1.$$

Mas esta estimativa não vale para todo N quando $s' \leq s - 1$ e $c > 1/2$. □

Pelo próximo teorema, concluímos que o método utilizado por Pecher em [22] não pode obter Boa Colocação Local para o caso ressonante de (SB-O) no *end-point* $(s, s') = (0, -1/2)$.

Teorema 3.6. *Sejam $|\nu| = 1$, $(s, s') = (0, -1/2)$ e $c, b, b' \in \mathbb{R}$. Se $c > 1/2$ então a estimativa (2.54) não vale.*

Demonstração: Retomemos as notações utilizadas na demonstração do Teorema 2.6. Então, apenas temos que mostrar que (2.55) não vale. Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned} A_N &:= \{(\tau_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1 + \operatorname{sgn}(\nu)N| < 1/2, |\sigma_1| < 1\}, \\ B_N &:= \{(\tau_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_2 - \operatorname{sgn}(\nu)N| < 1/4, |\sigma_2| < 1/3\}, \\ R_N &:= \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2 : |\xi| < 1/4, |\sigma + 2 \operatorname{sgn}(\nu)N\xi| < 1/3\}. \end{aligned}$$

Então $R_N - B_N \subset A_N$, pois $\nu \operatorname{sgn}(\xi - \xi_2) = \nu \operatorname{sgn}(\xi_1) = -1$, logo de (2.57) temos

$$\sigma_1 = [\sigma + 2 \operatorname{sgn}(\nu)N\xi] - \sigma_2 + 2\xi[(\xi_2 - \operatorname{sgn}(\nu)N) - \xi].$$

Além disso,

$$\langle \xi_1 \rangle \sim N, \quad \langle \xi_2 \rangle \sim N, \quad \langle \xi_1 + \xi_2 \rangle \sim 1, \quad \langle \sigma \rangle \lesssim N, \quad \forall (\tau_1, \xi_1) \in A_N, \forall (\tau_2, \xi_2) \in B_N.$$

Logo, de (2.56) e (2.57), temos

$$\frac{N^{c-1} \mathbf{1}_{B_N}(\tau_2, \xi_2) \mathbf{1}_{A_N}(\tau_1, \xi_1)}{N^{-\frac{1}{2}}} \lesssim |\Psi(\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \mathbf{1}_{B_N}(\tau_2, \xi_2) \mathbf{1}_{A_N}(\tau_1, \xi_1)|, \quad \forall (\tau, \xi, \tau_1, \xi_1) \in \mathbb{R}^4. \quad (3.30)$$

Sejam agora $f_N, g_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tais que $\mathbf{1}_{A_N} \leq g_N$, $\mathbf{1}_{B_N} \leq f_N$, $\|g_N\|_{L^2} \leq 2\|\mathbf{1}_{A_N}\|_{L^2}$ e $\|f_N\|_{L^2} \leq 2\|\mathbf{1}_{B_N}\|_{L^2}$. Combinando (2.55), (3.30) e (3.8), obtemos a estimativa

$$N^{c-\frac{1}{2}} \lesssim 1.$$

Mas esta estimativa não vale para todo N quando $c > 1/2$. □

Trabalhos Futuros

Apresentamos agora três tópicos relacionados aos resultados deste trabalho, que foram e estão sendo objeto de estudo:

- Até o momento, os melhores resultados sobre Boa Colocação para (SB-O), no caso ressonante ($|\nu| = 1$), foram obtidos por Pecher em [22]: Boa Colocação Local para $s' = s - 1/2$ e $s > 0$; Boa Colocação Global para $s' = s - 1/2$ e $s > 1/3$, no caso particular $\nu = 1$ e $\frac{\alpha}{\beta} < 0$. Pelo Teorema 3.4, a Boa Colocação Local não pode ser provada por método de ponto fixo para $s' \neq s - 1/2$ ou $s < 0$. E pelo Teorema 3.6, a estimativa bilinear (2.54) não vale para $(s, s') = (0, -1/2)$ (o *end-point*). Entretanto, ainda existe a possibilidade de construir modificações dos espaços $X^{s,b}$ e $Y_\nu^{s',b'}$ para as quais sejam válidas as estimativas bilineares. Construindo uma modificação do tipo Besov do espaço de Bourgain, Kishimoto provou em [18] a Boa Colocação Local da equação KdV na regularidade crítica $s = -3/4$. Inspirado nesse trabalho, estamos tentando construir espaços para os quais tenhamos as estimativas bilineares e, então, obter a Boa Colocação Local de (SB-O) no *end-point*. Se obtivermos êxito, esperamos também conseguir Boa Colocação Global em toda a semirreta $s' = s - 1/2$, $s \geq 0$, pois pensamos que a prova do mesmo resultado já obtido para o caso não ressonante (em [1]) pode então ser adaptada ao caso ressonante.
- Até onde sabemos, o Teorema 3.3 é o primeiro resultado de C^2 -Má Colocação a ser obtido para um sistema não linear dispersivo, no caso específico em que a diferença entre as regularidades do dado inicial é suficientemente grande (i.e. $|s - s'| > c$). Isto é o que ocorre para todo dado inicial cuja regularidade (s, s')

está na região \mathcal{R}_2 (veja as Figuras I.1 e 3.2). Tal resultado parece natural devido ao acoplamento do sistema pelos termos não lineares das equações e ao Princípio de Duhamel. Acreditamos que o mesmo procedimento utilizado para provar o Teorema 3.3 pode obter resultados para outros sistemas não lineares dispersivos tais como o sistema de Zakharov, o sistema Schrödinger-Korteweg-de Vries etc.

- Em [3], Bejenaru e Tao provaram que o Problema de Cauchy para equação de Schrödinger com não linearidade u^2 é Mal Colocado para regularidade $s < -1$, no sentido de que a aplicação dado-solução não é contínua em zero. Eles utilizaram um belíssimo argumento cujos ingredientes principais, *grosso modo*, são: o fato da Boa Colocação em $s = -1$ ser provada pelo método de contração; o fato da segunda derivada de Fréchet da aplicação dado-solução em zero ser uma aplicação bilinear “suficientemente” não limitada para regularidade $s < -1$. Estudamos a viabilidade da aplicação do argumento de Bejenaru e Tao para transformar os resultados de C^2 -Má Colocação obtidos nesse trabalho, e os que eventualmente vierem a ser obtidos para outros sistemas (veja o item anterior), em resultados de Má Colocação (no sentido de que a aplicação dado-solução não é contínua).

Apêndice

Os dois próximos lemas são resultados elementares de cálculo que obtivemos inspirados por (2.13) e (2.14) do Lema 2.5 em [4].

Lema A.1. *Sejam $b, p, q \in \mathbb{R}$. Se $p \neq 0$ e $b > 1/2$ então*

$$\|\langle p\tau + q \rangle^{-b}\|_{L^2_\tau} = \left(\int \frac{d\tau}{\langle p\tau + q \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{2 \max\{1, (2b-1)^{-1/2}\}}{\sqrt{|p|}}.$$

Demonstração: Se $b \geq 1$ então, pela mudança de variável $x = p\tau + q$, temos

$$\|\langle p\tau + q \rangle^{-b}\|_{L^2_\tau}^2 \leq \frac{1}{|p|} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{|p|} < \frac{4}{|p|}.$$

Para o caso $1/2 < b < 1$, como $1 + |\tau| \leq \sqrt{2}\langle \tau \rangle$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$, temos

$$\|\langle p\tau + q \rangle^{-b}\|_{L^2_\tau}^2 = \frac{1}{|p|} \int \frac{dx}{\langle x \rangle^{2b}} \leq \frac{2}{|p|} \int_1^{+\infty} \frac{2^b}{x^{2b}} dx < \frac{4}{(2b-1)|p|}.$$

□

Lema A.2. *Sejam $b, p, q, r \in \mathbb{R}$. Se $b > 1/2$ e $p \neq 0$ então*

$$\int \frac{d\tau}{\langle p\tau^2 + q\tau + r \rangle^b} \leq \frac{2^5 \max\{1, (2b-1)^{-1}\}}{\sqrt{|p|}}.$$

Demonstração: Pela mudança de variável $\tilde{\tau} = (\sqrt{|p|})\tau$, temos

$$\int \frac{d\tau}{\langle p\tau^2 + q\tau + r \rangle^b} = \frac{1}{\sqrt{|p|}} \int \frac{d\tilde{\tau}}{\langle \tilde{\tau}^2 + \tilde{q}\tilde{\tau} + \tilde{r} \rangle^b}, \quad (\text{A.1})$$

onde $\tilde{q} = \frac{\text{sgn}(p)}{\sqrt{|p|}}q$ e $\tilde{r} = \text{sgn}(p)r$.

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ as duas raízes do polinômio $P(\tilde{\tau}) = \tilde{\tau}^2 + \tilde{q}\tilde{\tau} + \tilde{r}$. Então, por (A.1), por $1 + |\cdot| \leq 2\langle \cdot \rangle$, e por $|z| \geq |Re(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\int \frac{d\tau}{\langle p\tau^2 + q\tau + r \rangle^b} \leq \frac{2^b}{\sqrt{|p|}} \left(4 + \int_{B^c} \frac{d\tau}{(1 + |\tau - r_1| |\tau - r_2|)^b} \right), \quad (\text{A.2})$$

onde $r_1 := Re(z_1)$, $r_2 := Re(z_2)$ e $B := \{\tau \in \mathbb{R} : |\tau - r_1| \leq 1\} \cup \{\tau \in \mathbb{R} : |\tau - r_2| \leq 1\}$.

Observe agora que

$$(1 + |\tau - r_1|)(1 + |\tau - r_2|) \leq 3(1 + |\tau - r_1| |\tau - r_2|), \quad \forall \tau \in B^c. \quad (\text{A.3})$$

Então, combinando (A.3) em (A.2), usando $\langle \cdot \rangle \leq (1 + |\cdot|)$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{d\tau}{\langle p\tau^2 + q\tau + r \rangle^b} &\leq \frac{2^b}{\sqrt{|p|}} \left(4 + \int \frac{3^b d\tau}{(1 + |\tau - r_1|)^b (1 + |\tau - r_2|)^b} \right) \\ &\leq \frac{2^b}{\sqrt{|p|}} \left(4 + 3^b \|\langle \tau - r_1 \rangle^{-b}\|_{L^2_\tau} \|\langle \tau - r_2 \rangle^{-b}\|_{L^2_\tau} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Se $1/2 < b \leq 1$ então, por (A.4) e o Lema A.1, temos

$$\int \frac{d\tau}{\langle p\tau^2 + q\tau + r \rangle^b} \leq \frac{2^5 (2b - 1)^{-1}}{\sqrt{|p|}},$$

e portanto, para todo $b > 1/2$,

$$\int \frac{d\tau}{\langle p\tau^2 + q\tau + r \rangle^b} \leq \frac{2^5 \max\{1, (2b - 1)^{-1}\}}{\sqrt{|p|}}.$$

□

O próximo lema é um resultado elementar de cálculo que obtivemos inspirados por (2.4) do Lema 2.1 de [17].

Lema A.3. *Sejam $c, \kappa \in \mathbb{R}$. Se $c < 1$ então vale a seguinte estimativa:*

$$\int_{|\tau| \leq |\kappa|} \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^c} < \frac{4}{1-c} \langle \kappa \rangle^{1-c}.$$

Demonstração: Como $c < 1$ e $1 + |\tau| \leq 2\langle\tau\rangle$, temos

$$\int_{|\tau| \leq |\kappa|} \frac{d\tau}{\langle\tau\rangle^c} \leq 2^{c+1} \int_1^{1+|\kappa|} \frac{d\tau}{\tau^c} \leq \frac{2^{c+1}}{1-c} (1+|\kappa|)^{1-c} < \frac{4}{1-c} \langle\kappa\rangle^{1-c}.$$

□

O próximo lema estabelece uma desigualdade que foi utilizada para a prova do Lema 3.2 de [13], a saber, a desigualdade encontra-se na equação (3.18) de [13].

Lema A.4. *Se $b \geq 0$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $J \in H^b(\mathbb{R})$ então $\phi J \in H^b(\mathbb{R})$. Além disso, vale a seguinte estimativa*

$$\|\phi J\|_{H^b} \leq 2^{b+\frac{1}{2}} (\|\langle\tau\rangle^b \mathcal{F}_t \phi(\tau)\|_{L^1_\tau} \|J\|_{L^2} + \|\mathcal{F}_t \phi(\tau)\|_{L^1_\tau} \|J\|_{H^b}).$$

Demonstração: Por um argumento de densidade, podemos supor que $J \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então

$$\mathcal{F}_t[\phi J](\tau) = \mathcal{F}_t \phi * \mathcal{F}_t J(\tau) = \int \mathcal{F}_t \phi(\tau - \tau_1) \mathcal{F}_t J(\tau_1) d\tau_1, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.5})$$

Além disso, pela desigualdade triangular, temos que $|\tau|^2 \leq 2|\tau - \tau_1|^2 + 2|\tau_1|^2$ para quaisquer $\tau, \tau_1 \in \mathbb{R}$. Logo, para todo $b \geq 0$, também temos

$$\langle\tau\rangle^b = (1 + |\tau|^2)^{\frac{b}{2}} \leq (2 \max\{2\langle\tau - \tau_1\rangle^2, 2\langle\tau_1\rangle^2\})^{\frac{b}{2}} \leq 2^b \langle\tau - \tau_1\rangle^b + 2^b \langle\tau_1\rangle^b. \quad (\text{A.6})$$

Combinando (A.5) e (A.6) temos

$$\langle\tau\rangle^b |\mathcal{F}_t[\phi J](\tau)| \leq 2^b (\langle\cdot\rangle^b |\mathcal{F}_t \phi|) * |\mathcal{F}_t J|(\tau) + 2^b |\mathcal{F}_t \phi| * (\langle\cdot\rangle^b |\mathcal{F}_t J|)(\tau).$$

Desta desigualdade, obtemos a estimativa

$$\|\phi J\|_{H^b}^2 \leq 2^{2b+1} (\|(\langle\cdot\rangle^b |\mathcal{F}_t \phi|) * |\mathcal{F}_t J|\|_{L^2} + \| |\mathcal{F}_t \phi| * (\langle\cdot\rangle^b |\mathcal{F}_t J|) \|_{L^2})^2.$$

Por fim, utilizando a Desigualdade de Young para Convoluções e o Teorema de Plancherel, concluímos a prova do lema. □

O próximo lema difere do Lema 4.2 de [14] apenas por notação. E a prova que apresentamos aqui não é nada além de um detalhamento da prova apresentada por Ginibre, Tsutsumi e Velo.

Lema A.5. [**Lema 4.2 de [14]**] *Sejam $\rho, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Se $0 \leq a_1 \leq a_2$ e $1 < a_1 + a_2$ então existe uma constante $C(a_1, a_2) > 0$, independente de ρ , tal que*

$$\int \frac{d\tau}{\langle \tau + \rho \rangle^{a_1} \langle \tau - \rho \rangle^{a_2}} \leq \frac{C(a_1, a_2)}{\langle \rho \rangle^\alpha},$$

onde

$$\alpha = \alpha(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1, & \text{se } a_2 > 1, \\ a_1 - \epsilon, & \text{se } a_2 = 1, \\ a_1 + a_2 - 1, & \text{se } a_2 < 1, \end{cases}$$

com $\epsilon > 0$ podendo ser tomado arbitrariamente.

Para demonstrar o Lema A.5, vamos estabelecer um resultado auxiliar:

Lema A.6. *Se $\rho \geq 0$ então*

$$\int_1^{1+\rho} \frac{d\tau}{\tau^a} \leq \frac{2^{[1-a]_+} \langle \rho \rangle^{[1-a]_+}}{[1-a]_+}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.7})$$

onde $[\lambda]_+ = \lambda$ se $\lambda > 0$, $[\lambda]_+ = 0$ se $\lambda < 0$ e $[0]_+$ é um número real positivo qualquer.

Demonstração: Se $a > 1$ então $[1-a]_+ = 0$ e $[1-a]_+ = a-1$, logo

$$\int_1^{1+\rho} \frac{d\tau}{\tau^a} \leq \int_1^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^a} = \frac{1}{a-1} \leq \frac{2^{[1-a]_+} \langle \rho \rangle^{[1-a]_+}}{[1-a]_+}.$$

Se $a < 1$ então $[1-a]_+ = 1-a$ e $[1-a]_+ = 1-a$. Logo, como $1+\rho \leq 2\langle \rho \rangle$, temos

$$\int_1^{1+\rho} \frac{d\tau}{\tau^a} = \frac{(1+\rho)^{1-a} - 1}{1-a} \leq \frac{(2\langle \rho \rangle)^{1-a}}{1-a} = \frac{2^{[1-a]_+} \langle \rho \rangle^{[1-a]_+}}{[1-a]_+}. \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, se $a = 1$ então para todo $\epsilon > 0$ temos, por (A.8), temos

$$\int_1^{1+\rho} \frac{d\tau}{\tau^a} \leq \int_1^{1+\rho} \frac{d\tau}{\tau^{1-\epsilon}} \leq \frac{(2\langle \rho \rangle)^\epsilon}{\epsilon} = \frac{2^{[1-a]_+} \langle \rho \rangle^{[1-a]_+}}{[1-a]_+}.$$

□

Demonstração do Lema A.5: Por uma mudança de variável $\tau' = -\tau$, e pelo fato de $\langle -\cdot \rangle = \langle \cdot \rangle$, podemos supor $\rho \geq 0$.

Se $|\tau| \geq 2\rho$ então $|\tau \pm \rho| \geq |\tau| - \rho \geq |\tau/2|$. Logo, lembrando que $\langle \tau \rangle \leq 1 + |\tau| \leq 2\langle \tau \rangle$, temos

$$\int_{|\tau| \geq 2\rho} \frac{d\tau}{\langle \tau + \rho \rangle^{a_1} \langle \tau - \rho \rangle^{a_2}} \leq 2 \int_{2\rho}^{+\infty} \frac{d\tau}{\langle \tau/2 \rangle^{a_1 + a_2}} \leq \frac{C_1(a_1, a_2)}{\langle \rho \rangle^{a_1 + a_2 - 1}}, \quad (\text{A.9})$$

onde $C_1(a_1, a_2) = 2^{2+a_1+a_2}(a_1 + a_2 - 1)^{-1}$.

Se $0 \leq \tau \leq 2\rho$ então $\langle \tau + \rho \rangle \geq \langle \rho \rangle$. Logo, por (A.7), temos

$$\int_0^{2\rho} \frac{d\tau}{\langle \tau + \rho \rangle^{a_1} \langle \tau - \rho \rangle^{a_2}} \leq \frac{2^{a_2}}{\langle \rho \rangle^{a_1}} \int_0^{2\rho} \frac{d\tau}{(1 + |\tau - \rho|)^{a_2}} = \frac{2^{a_2+1}}{\langle \rho \rangle^{a_1}} \int_1^{1+\rho} \frac{d\tau}{\tau^{a_2}} \leq \frac{C_2(a_1, a_2)}{\langle \rho \rangle^{a_1 - [1-a_2]_+}}, \quad (\text{A.10})$$

onde $C_2(a_1, a_2) = 2^{a_2+1+[1-a_2]_+} [[1 - a_2]_+]^{-1}$.

Fazendo uma mudança de variável e repetindo o argumento utilizado em (A.10) temos

$$\int_{-2\rho}^0 \frac{d\tau}{\langle \tau + \rho \rangle^{a_1} \langle \tau - \rho \rangle^{a_2}} = \int_0^{2\rho} \frac{d\tau}{\langle \tau + \rho \rangle^{a_2} \langle \tau - \rho \rangle^{a_1}} \leq \frac{2^{a_1+1}}{\langle \rho \rangle^{a_2}} \int_1^{1+\rho} \frac{d\tau}{\tau^{a_1}} \leq \frac{C_3(a_1, a_2)}{\langle \rho \rangle^{a_2 - [1-a_1]_+}}, \quad (\text{A.11})$$

onde $C_3(a_1, a_2) = 2^{a_1+1+[1-a_1]_+} [[1 - a_1]_+]^{-1}$.

Observe agora que a desigualdade

$$\alpha(a_1, a_2) \leq \min\{a_1 - [1 - a_2]_+, a_2 - [1 - a_1]_+, a_1 + a_2 - 1\} \quad (\text{A.12})$$

é válida, para todas as possibilidades de a_1 e a_2 (nos casos em que se tem $a_1 = 1$ ou $a_2 = 1$, fazendo-se escolhas adequadas para $[1 - a_1]_+$, $[1 - a_2]_+$ e $\alpha(a_1, a_2)$).

Portanto, combinando (A.9), (A.10), (A.11) e (A.12), temos

$$\int \frac{d\tau}{\langle \tau + \rho \rangle^{a_1} \langle \tau - \rho \rangle^{a_2}} \leq \frac{C(a_1, a_2)}{\langle \rho \rangle^\alpha},$$

onde $C(a_1, a_2) = C_1(a_1, a_2) + C_2(a_1, a_2) + C_3(a_1, a_2)$, o que encerra a demonstração. \square

Referências Bibliográficas

- [1] J. Angulo, C. Matheus, D. Pilod, *Global well-posedness and non-linear stability of periodic traveling waves for a Schrödinger-Benjamin-Ono system*, Commun. Pure Appl. Anal., **8** (2009), p. 815-844.
- [2] E. Araújo, “*O problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s > -3/4$* ”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas (2004).
- [3] I. Bejenaru, T. Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for quadratic non-linear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **233** (2006), p. 228-259.
- [4] D. Bekiranov, T. Ogawa, G. Ponce, *Weak solvability and well-posedness of a coupled Schrödinger-Korteweg-de Vries equation for capillary-gravity wave interactions*, Proc. Amer. Math. Soc., **125**, (1997), p. 2907-2919.
- [5] D. Bekiranov, T. Ogawa, G. Ponce, *Interaction equation for short and long dispersive waves*, J. Funct. Anal. **158** (1998), p. 357-388.
- [6] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to the nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations. II. KdV-equation.*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), p. 107-156, p. 209-262.
- [7] J. Bourgain, *Periodic Korteweg-de Vries equation with measures as initial data*, Sel. Math., New Ser., **3** (1997), p. 115-159.

- [8] J. Colliander, J. Holmer, N. Tzirakis, *Low regularity global well-posedness for the Zakharov and Klein-Gordon-Schrödinger systems*, Trans. Amer. Math. Soc., **360** (2008), p. 4619-4638.
- [9] A. J. Corcho, F. Linares, *Well-posedness for the Schrödinger-Korteweg-de Vries system*, Trans. Amer. Math. Soc., **359** (2007), p. 4089-4106.
- [10] L. G. Farah, *Local solutions in Sobolev space with negative indices for the “good” Boussinesq equation*, Comm. Part. Diff. Eq., **34** (2009), p. 52-73.
- [11] G. Folland, *“Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications”*, (2nd ed.), A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, (1999). (ISBN 978-0-471-31716-6)
- [12] M. Funakoshi, M. Oikawa, *The resonant interaction between a long internal gravity wave and a surface gravity wave packet*, J. Phys. Soc. Japan., **52** (1983), p. 1982-1995.
- [13] J. Ginibre, *Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d’espace (d’après Bourgain)*, Séminaire Bourbaki **796**, Astérisque **237** (1996), p. 163-187.
- [14] J. Ginibre, Y. Tsutsumi, G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov System*, J. Funct. Anal. **151** (1997), p. 384-436.
- [15] R. Iório Jr, V. M. Iório, *“Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução”*, (2^a ed), Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, (2010). (ISBN 978-85-244-0035-3)
- [16] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc., **9** (1996), p. 573-603.
- [17] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), p. 3323-3353.

- [18] N. Kishimoto, *Well-posedness of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation at the critical regularity*, Diff. Integral Eq., **22** (2009), p. 447-464.
- [19] F. Linares, G. Ponce, *“Introduction to Nonlinear Dispersive Equations”*, Universitext. Springer, New York, (2009). (ISBN 978-0-387-84898-3)
- [20] L. A. Medeiros, M. M. Miranda, *“Espaços de Sobolev. Iniciação aos Problemas Elípticos Não Homogêneos”*, UFRJ. IM, Rio de Janeiro, (2010). (ISBN: 85-87674-03-X)
- [21] T. Oh, *Invariance of the Gibbs measure for the Schrödinger-Benjamin-Ono system*, SIAM J. Math. Anal., **41** (2009/10), p. 2207-2225.
- [22] H. Pecher, *Rough solutions of a Schrödinger-Benjamin-Ono system*, Diff. Integral Eq., **19** (2006), p. 517-535.
- [23] T. Tao, *“Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis”*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **106**, the American Mathematical Society, (2006). (ISBN: 0-8218-4143-2)
- [24] N. Tzvetkov, *Remark on the local ill-posedness for KdV equation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **329** (1999), p. 1043-1047.
- [25] Y. Wu, *The Cauchy problem of the Schrödinger-Korteweg-de Vries system*, Diff. Integral Eq., **23** (2010), p. 569-600.