



UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

**Sobre controlabilidade de modelos dinâmicos: Ondas de som
em fluidos compressíveis e cascas de Naghdi com dissipação
localizada**

Alexis Rodriguez Carranza

Sob a orientação do

Prof. Dr. Gustavo A. Perla Menzala

Tese apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Rio de Janeiro
Setembro de 2015

Sobre controlabilidade de modelos dinâmicos: Ondas de som em fluidos compressíveis e cascas de Naghdi com dissipação localizada

Alexis Rodriguez Carranza

Orientador: Dr. Gustavo A. Perla Menzala

Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de doutor em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Dr. Gustavo A. Perla Menzala - IM/UFRJ

Prof. Dr. Walcy Santos - IM/UFRJ

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto - IM/UFRJ

Prof. Dr. André Novotny - LNCC

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão - IM/UFSC

Prof. Dr. Adan Corcho (Suplente)

Rio de Janeiro
Setembro de 2015

Ficha Catalográfica

Rodriguez Carranza Alexis.

Controlabilidad de cascas de Naghdi con disipação interna
Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2015.

Orientador: Dr. Gustavo A. Perla Menzala

Tese - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-
posgraduação do Instituto de Matemática, 2015.

Referências: f.64.

1. Equações Diferenciais Parciais.
2. Controlabilidade.
3. Estabilização.
4. Variedades Riemannianas.

Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação do
Instituto de Matemática. III. Título.

Agradecimentos

No primeiro lugar a Deus pela sua constante presença na minha vida.

Aos meus pais Rosa e Heber, por seu imenso amor e por me apoiar nas minhas decisões em todos os momentos.

A minha esposa Leyli, pelo amor, compreensão e apoio constante. Sua força me levou até o final.

As minhas filhas, Ariana e Sofia, que são meus anjos. Seus sorrisos alegram meu dia a dia.

Aos meus irmãos, Ronald, Harber e Edwin, meus amigos de toda a vida.

Ao meu orientador Professor Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala, pela sua dedicação, paciência e por compartilhar comigo seus conhecimentos, as vezes no IM-UFRJ, as vezes no IMPA. Muito obrigado Professor Perla.

A Meus amigos, em especial ao José Angel Davalos e ao Abraham Munoz Flores que foram minha família no Brasil.

À banca examinadora, em especial ao professor Ademir, por me ensinar controlabilidade.

Aos professores e funcionários da pós-graduação do Instituto de Matemática-UFRJ.

A CAPES, CNPq e ao Brasil, Muito Obrigado!

Resumo

No presente trabalho estudamos dois problemas de interesse matemático pelas suas aplicações na Engenharia. O primeiro descreve a controlabilidade simultânea de um par de sistemas que modelam a evolução do som num fluido compressível, considerado como um problema de transmissão. Mostramos a boa colocação do problema e, que, assumindo condições adequadas na geometria do domínio e nas propriedades do fluido é possível conduzir o par de sistemas ao equilíbrio de forma simultânea usando somente uma função de controle.

No segundo problema abordado mostramos o decaimento exponencial da energia associada ao modelo de Naghdi, com dissipação localizada. O modelo descreve as deformações elásticas e as variações da normal de uma casca. Usando ferramentas de geometria Riemanniana e pela teoria de semigrupos, mostramos a boa colocação do problema e a obtenção de desigualdades de observabilidade. As quais permitem mostrar o decaimento da energia e posteriormente usamos o Princípio de Russell para mostrar a controlabilidade do modelo.

Palavras Chaves: Ondas de som, controlabilidade, Geometria Riemanniana, Cascas de Naghdi.

Abstract

In this Thesis work we study two problems of mathematical interest for their applications in several topics in Applied Science. The first describes simultaneous controllability of a pair of systems which model the evolution of sound in a compressible flow considered as a transmission problem. We show the well posedness of the problem. Furthermore provided appropriate conditions in the geometry of the domain are valid and suitable assumptions on the fluid, is possible to conduce the pair of systems to the equilibrium in a simultaneous way using only one control.

The second problem we study is the exponential stability of the energy associated with a Naghdi's model with localized internal dissipation. Using several tools from Riemannian Geometry we show the well posedness of the model (via semigroup theory) and obtain Observability inequalities which allow us to prove the exponential decay of the total energy. As a consequence then we use Russell Principle for obtain exact controllability.

Key words: sound waves, controllability, Naghdi's type shells

Sumário

Contents	vi
List of Figures	vii
Introdução	ix
1 Controlabilidade simultanea de um problema de transmissão na propagação de ondas de som	1
1.1 Espaços Funcionais	5
1.2 Desigualdade de observabilidade	11
1.3 Controlabilidade exata	27
2 Cascas de Naghdi	31
2.1 Equações de Equilíbrio	32
2.2 Formula de Green / elipticidade da forma Bilinear associada e Existência de Soluções Fracas	38
3 Ecuações de Evolução da Casca de Naghdi	55
3.1 Modelo dinâmico de Naghdi	55
3.2 Existência e unicidade de soluções fortes	56
3.2.1 Espaços Funcionais	56
3.3 Desigualdades de Observabilidade	59
3.4 Campos e região de Fuga para o modelo de Naghdi	68
3.5 Estabilização da Casca de Naghdi com dissipação interna	73
3.6 Controlabilidade via Estabilidade	82
4 Apêndice	86
4.1 Preliminares Básicos	86
4.1.1 Variedades Riemannianas	86
4.2 Conexões Afins	88
4.2.1 Derivação de campo de tensores sobre uma variedade	91
4.2.2 Curvatura	94
4.3 Aplicação Exponencial e Campos de Jacobi	101
4.4 Técnica de Bochner	104
4.5 Espaços de Sobolev de Campos Tensoriais	108
4.5.1 Identidades de Green sobre Variedades	109

Lista de Figuras

1	Caso uma sub-região e 3 sub-regiões	x
2	Turbinas eólicas	xi
3	Fuselagem de avião	xi
4	Pontos após a deformação no modelo de Koiter	xii
5	Pontos após a deformação no modelo de Naghdi	xii
1.1	Caso $m = 0$ e $m = 3$	4
2.1	Configuração inicial e final de uma casca.	33
2.2	Uma casca como sendo a imagem de um subconjunto de \mathbb{R}^2	39
3.1	Região de fuga para o caso da Esfera.	72
3.2	Região de fuga para o caso do cilindro.	73
4.1	Sistemas de coordenadas para a esfera em 2-dimensional.	100

Lista de símbolos

(M, g) Variedade Riemanniana com métrica g .

$\chi(M) = T(M) = \Lambda(M)$ Campos de vetores sobre M .

∇ Conexão de Levi Civita.

R_{XY} Operador Curvatura.

$R(., ., ., .)$ Tensor Curvatura.

$k(\Xi)$ Curvatura seccional do subespaço dois dimensional Ξ .

$\Pi(., .)$ Segunda Forma Fundamental.

Δ Operador de Laplace-Beltrami.

Δ Operador de Hodge-Laplace.

$\Lambda^k(M)$ O conjunto das k formas em M .

$i(X)T$ Produto interior do campo vetorial X e o campo tensorial T .

$L^2(\Omega, T^k)$ O conjunto de campos tensoriais de ordem k que são quadrado integráveis.

$H^k(\Omega, \Lambda)$ O conjunto das 1 formas diferenciáveis com derivadas quadrado integráveis.

$\Upsilon = g - \bar{g}$ Tensor mudança de métrica.

$\rho = \Pi - \bar{P}i$ Tensor mudança de curvatura.

$lo(\xi), Lo(\xi)$ Termos de ordem inferior.

Introdução

Nesta Tese foram abordados dois problemas de interesse matemático pelas suas aplicações na Engenharia. O primeiro trata-se sobre o estudo da controlabilidade simultânea com transmissão para o problema da propagação do som num fluido compressível

Existe uma grande variedade de dispositivos que são usados para detectar e extrair informação de objetos que estão num fluido, enviando para isso ondas de som, por exemplo os radares, as ressonâncias magnéticas, etc. Para o desenvolvimento de tais dispositivos é fundamental o conhecimento das propriedades e o comportamento do som no meio no qual ele se propaga e assim predestinar o comportamento futuro

Um modelo linear bem conhecido[31] descrevendo a evolução do som num fluido compressível é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \nabla p = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \beta \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ é o campo de velocidades do fluido, $\alpha > 0$ é a densidade de equilíbrio e β é a compressibilidade e p é a pressão.

Um dos problemas matemáticos nessa direção é o problema de controlabilidade simultânea, nele, procura-se funções de controle P e Q de tal forma que as soluções de (2) sejam levadas ao equilíbrio.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \nabla p = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \beta \operatorname{div}(u) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u \cdot \eta = Q, & \text{em } S_0 \times (0, T) \\ p = 0, & \text{em } S_1 \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), p(x, 0) = p_0(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \nabla q = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \tau \operatorname{div}(v) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ q = P, & \text{em } S_0 \times (0, T) \\ q = 0, & \text{em } S_1 \times (0, T) \\ v(x, 0) = v_0(x), q(x, 0) = q_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

O problema já foi amplamente estudado, veja [25], [26] e as referencias mencionadas nesses artigos. Num artigo recente[25] os autores estudaram o problema de controlabilidade simultânea para os sistemas (2), onde eles mostraram que ambos modelos podem ser conduzidos ao equilíbrio usando somente uma função de controle, que pode ser $P = -\frac{\beta}{\gamma}Q$.

O primeiro problema que afrontamos foi estudar o problema de controlabilidade simultânea exposto acima numa situação mais interessante do ponto de vista das aplicações: O problema de transmissão. No problema de transmissão as propriedades do fluido são considerados constantes por sub-regiões de Ω , as quais, estão conectadas por interfaces. Isso é mostrada na figura(1).

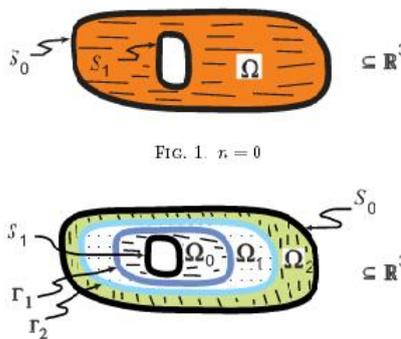


FIG. 1. $n = 0$

FIGURA 1: Caso uma sub-região e 3 sub-regiões

Mostramos que com certas condições geométricas do domínio Ω , condições nas interfaces e monotonicidade da compressibilidade β e a densidade α , os sistemas podem ser levados ao equilíbrio usando somente uma função de controle.

O segundo problema que abordamos é o problema da estabilidade exponencial da energia associada ao modelo de cascas de Naghdi.

Uma casca, matematicamente, é um corpo elástico 3-dimensional envolvendo uma sub-variedade 2-dimensional de \mathbb{R}^3 , porém elas existem na natureza muito antes de defini-las, como por exemplo, a casca de um ovo, carapaça de alguns animais ou as conchas marinhas.

A importância no estudo de cascas radica na sua grande capacidade para suportar cargas o qual motiva seu uso em muitas áreas da engenharia (construção de cobertas, fuselagem de aviões, turbinas eólicas, etc.), levando a um continuo aumento de novos desenhos estruturais, cada vez mais complexos os quais precisam de uma análise cuidadosa. Veja por exemplo as figuras abaixo



FIGURA 2: Turbinas eólicas



FIGURA 3: Fuselagem de avião

As aproximações mais conhecidas para modelar os deslocamentos numa casca são os modelos de Koiter e Naghdi. Nelas são considerados dois mecanismos de ação sobre a casca. Uma de natureza mecânica e outra de natureza geométrica. A hipótese sobre o mecanismo mecânico estabelece que se a espessura da casca é suficientemente pequena em comparação com outras dimensões, então, as tensões dentro da casca são planares, é dizer, as tensões paralelas á superfície media variam aproximadamente de forma linear. Em ambos modelos a hipótese sobre a ação mecânica é a mesma.

A hipótese geométrica no modelo de Naghdi é diferente á de Kirchoff-Love adotada em Koiter. Nela, os pontos sobre a normal á superfície media, antes da deformação, continuam sobre dita reta e á mesma distancia da superfície media após a deformação, mais ela pode deixar de ser normal. O modelo de Naghdi toma em conta as deformações da casca e a flexão da superfície media em conjunto com as deformações transversais. Neste modelo as variáveis desconhecidas do problema linearizado são os deslocamentos dos pontos da superfície media e o campo de rotação do vetor normal á superfície media. A diferença desta hipótese é mostrada nas figuras abaixo

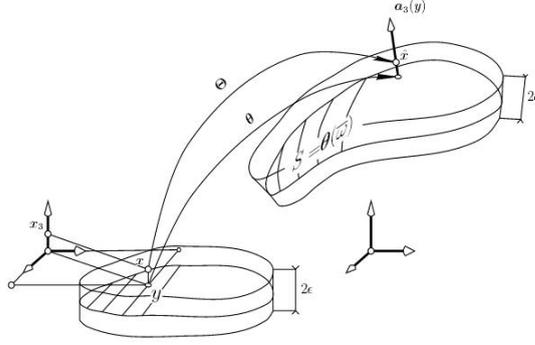


FIGURA 4: Pontos após a deformação no modelo de Koiter

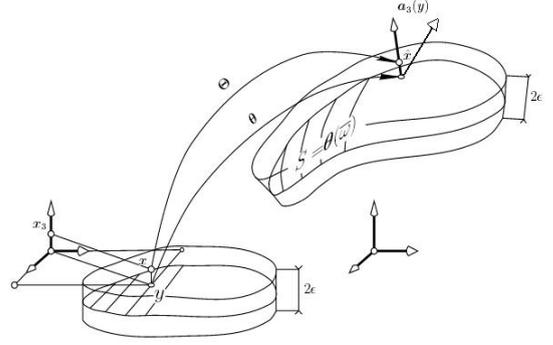


FIGURA 5: Pontos após a deformação no modelo de Naghdi

Seja S uma casca de espessura z e com Ω , uma variedade Riemanniana em \mathbb{R}^3 , como superfície média.

No Modelo de Naghdi os deslocamentos, $\zeta(p)$, de um ponto $p = x + zN(x)$ da casca pode-se aproximar, veja [34], como

$$\zeta(p) = \zeta_1(x) + z\Psi(x) \quad \text{para } x \in \Omega$$

Onde $\zeta_1(x)$ mede os deslocamentos da superfície média e $\Psi(x)$ captura as rotações da normal. Decompondo os campos $\zeta_1(x)$ e $\Psi(x)$ nas suas componentes na superfície média e normal[34], temos

$$\zeta_1(x) = W_1(x) + w_1(x)N(x) \quad \text{e} \quad \Psi(x) = V(x) + w_2(x)N(x)$$

As relações de tensão-deformação de Naghdi são dados por

$$\begin{cases} \varepsilon_\Omega(p) = \Upsilon(\zeta) + z\chi_0(\zeta) \\ i(N) = \varphi_0(\zeta) + \frac{z}{2}Dw_2 \quad \text{para } p = x + zN(x) \in S \\ \varepsilon(N, N)(p) = w_2 \end{cases} \quad (3)$$

Onde

$$\begin{cases} \Upsilon(\zeta) = \frac{1}{2}(DW_1 + D^*W_1) + w_1\Pi \\ \chi_0(\zeta) = \frac{1}{2}[DV + D^*V + \Pi(\cdot, D.W_1) + \Pi(D.W_1, \cdot)] + w_2\Pi + w_1c \\ \varphi_0(\zeta) = \frac{1}{2}[Dw_1 + V - i(W_1)\Pi] \end{cases}$$

A primeira equação de (3) indica as relação tensão-deformação na superfície media e as duas ultimas os deslocamentos e rotações para pontos sobre a normal.

O modelo de evolução de Naghdi para uma casca fixada no bordo, é dado por:

$$\begin{cases} \xi_{tt} + A\xi = 0 & \text{em } (0, \infty) \times \Omega \\ \xi|_{\Sigma} = 0 & \Sigma = \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \xi(0) = \xi_0, \quad \xi_t(0) = \xi_1 & \text{em } \Omega \end{cases}, \quad (4)$$

para $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2)$. Onde a forma bilinear associada ao operador A é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\xi, \eta) &= 2 \langle \Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta) \rangle + 4 \langle \varphi(\xi), \varphi(\eta) \rangle \gamma + 2\beta \left(\text{Traç}\Upsilon(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} w_2 \right) \left(\text{Traç}\Upsilon(\eta) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} u_2 \right) \\ &+ 2 \langle \chi(\xi), \chi(\eta) \rangle + 2\beta \text{Traç}\Upsilon(\xi) \text{Traç}\Upsilon(\eta) \\ &+ \langle Dw_2, Du_2 \rangle + \frac{1}{\gamma} w_2 u_2, \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\eta = (U_1, U_2, u_1, u_2)$ e

$$\begin{cases} \Upsilon(\xi) &= \frac{1}{2} (DW_1 + DW_1^*) + w_1 \Pi, \\ \chi(\xi) &= \frac{1}{2} (DW_2 + DW_2^*) + w_1 \Pi - \sqrt{\gamma} (i(W_1)D\Pi - w_1 c), \\ \varphi(\xi) &= \frac{1}{2} Dw_1 - i(W_1)\Pi + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} W_2 \end{cases}, \quad (6)$$

Existência de soluções fracas para o modelo estacionário é mostrado via uma desigualdade de Korn sobre variedades e o Teorema de Lax-Milgram.

A existência de soluções fortes, para o caso de evolução, é obtida usando a teoria de semigrupos, fato que reduz a demonstração do decaimento exponencial da energia associada ao sistema(4) com dissipação localizada, para uma desigualdade do tipo $E(T) < cE(0)$ com $0 < c < 1$.

Existem muitos trabalhos[6], [15], [29], [19], [7], [34], onde os autores fazem a análise de existencia de soluções do modelo de Nahgdi e a controlabilidade exata [33]. Eles consideram a superfície media como a imagem de uma aplicação injetiva de um aberto de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 . A desvantagem desta aproximação é que no momento de escrever as equações em coordenadas locais, a presença explicita dos símbolos de Christoffel fazem delas sistemas muito complicados e pouco adequadas para usar um esquema de multiplicadores para obter desigualdades de observabilidade que impliquem a estabilização da energia associada ao modelo.

Uma nova aproximação é considerada nesta Tese, seguindo ideias de Yao[42], [13], [43]. Nesta aproximação, a superfície media é considerada uma variedade Riemanniana 2-dimensional com o produto interno induzido de \mathbb{R}^3 . Assim a superfície media é definida de maneira intrínseca sem depender das parametrizações. Logo, para verificar

uma identidade ou alguma estimativa é suficiente fazer as contas pontualmente usando um sistema de coordenadas que oferece uma maior simplificação no momento de fazer as contas.

Aqui usaremos a técnica de Bochner[8], na qual se faz as estimativas usando sistemas de coordenadas e referenciais normais definidos localmente. Os sistemas de coordenadas normais são muito práticos para nossos propósitos já que neles os símbolos de Christoffel anulam-se pontualmente. Um exemplo bem conhecido de tais sistemas são as coordenadas geodésicas[9].

Usando essas ferramentas, resultados de estabilização uniforme da energia associada ao modelo de Naghdi por feedbacks lineares na fronteira foram dados por S. G. Chai[14]. Lasiecka e Triggiani[29] estudaram a estabilização de cascas rasas por feedbacks não lineares na fronteira. Na segunda parte do trabalho estudamos as condições necessárias para obter decaimento exponencial da energia associada ao modelo de Naghdi com dissipação localizada, este resultado em nosso conhecimento ainda não tinha sido provado. Mostramos que para obter o decaimento exponencial os efeitos dissipativos podem atuar numa região arbitrariamente pequena da casca. Resultados dessa natureza foram obtidos por exemplo em[11] para a equação de onda definida sobre uma variedade Riemanniana compacta, que não inclui o caso da casca de Naghdi. Finalmente, usando o decaimento uniforme da energia, mostramos a controlabilidade do modelo usando o Princípio de Russell.

A ideia fundamental usada em ambos problemas abordados nesta Tese, para obter controlabilidade e o decaimento uniforme da energia, tem sua origem num exemplo de controlabilidade em dimensão finita[47]. Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + u \\ x_2' = x_2 \end{cases} \quad (7)$$

onde, u é o controle. O problema de controlabilidade consiste em, dado um $T > 0$, um estado inicial x_0 e um estado final x_n , achar u tal que $x(T) = x_n$. Onde $x(\cdot)$ é a solução do sistema com dado inicial x_0 . É simples mostrar que a função u atuando como em(7) não resolve o problema de controlabilidade[47]. Isso acontece devido ao fato que o controle u não afeta a todas as variáveis do sistema. O Teorema de Kalman[47] garante que para obter controlabilidade de sistemas, em dimensão finita, é preciso que o controle deve agir sobre todas as variáveis do sistema. Em nosso caso precisamos colocar os efeitos dissipativos na superfície media de tal forma que ele agia sobre todo o sistema. Bardos, Lebeau e Rauch[4], mostraram, usando análise micro local, que uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade da equação de ondas no tempo T com

controles localizados numa região $\omega \subset \Omega$ é que todo raio da optica geométrica que se propaga em Ω e bate na fronteira deve entrar em ω num tempo menor a T . Usando as ferramentas de geometria Riemanniana, para obter controlabilidade, um análogo á condição de Bardos-Lebeau-Rauch é a não existência de geodésicas fechadas na superfície media, isso é equivalente a garantir a existência de um campo vetorial de fuga sobre a superfície media da casca, veja a Secção 3.4 do Capitulo 3.

Um campo vetorial, H , sobre uma variedade Riemanniana, Ω , é um campo vetorial de fuga se existe uma constante $\rho_0 > 0$ tal que

$$DH(x) \geq \rho_0 g(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Onde g é a métrica Riemanniana de Ω e D denota a derivada covariante. Mostra-se[42] que a existência de um campo vetorial de fuga sobre uma variedade Riemanniana garante que ela não contem geodésicas fechadas, é dizer, a informação da dissipação localizada vai ser levada a tudo Ω através das geodésicas.

O trabalho da Tese está organizado da seguinte forma.

1. No Capítulo 1 apresentamos em detalhe o problema de transmissão para a controlabilidade de um par de sistemas que modelam a propagação do som num fluido compressível, mostrando a existência de soluções via a teoria clássica de semigrupos[36] e a controlabilidade usando a técnica dos multiplicadores[21].
2. No Capítulo 2 falaremos sobre o modelo de Naghdi estacionário e obteremos identidades de Green que serão usadas para mostrar a existência e unicidade de soluções fracas via o Teorema de Lax-Milgram.
3. No Capítulo 3 mostra-se o resultado principal desta segunda parte da Tese, o decaimento exponencial da energia associada ao modelo de cascas de Naghdi. Primeiro será mostrado a existência de soluções fortes via a teoria de semigrupos, nos espaços funcionais adequados. Logo usando as construções locais de campos vetoriais de fuga, garantimos que os efeitos dissipativos podem agir numa região arbitrariamente pequena da superfície media, obtendo desigualdades de observabilidade para mostrar que a energia do sistema decai exponencialmente. Usando o decaimento exponencial da energia mostrarmos a controlabilidade do modelo de Naghdi aplicando o Principio de Russell.
4. Num apêndice, no final da Tese, apresentamos os preliminares que serão usados no decorrer do trabalho. Introduziremos os conceitos básicos de geometria Riemanniana usados, mostrando a construção local de campos vetoriais de fuga usando

os campos de Jacobi e o tempo máximo de existência de geodésicas minimizantes. Além disso introduzimos os conceitos de espaços de Sobolev sobre variedades assim como os operadores diferenciais usados, operador de Hodge-Laplace e de Laplace-Beltrami. Também será apresentada a técnica de Bochner usando o sistema de coordenadas normais, mostrando algumas identidades de Green, as quais são cruciais no momento de mostrar que a forma bilinear associada ao modelo de Naghdi é coerciva e a obtenção de desigualdades de Observabilidade.

Capítulo 1

Controlabilidade simultanea de um problema de transmissão na propagação de ondas de som

Neste trabalho considerarmos um par de sistemas de equações que descrevem a evolução do som em fluidos compressíveis. Um modelo linear bem conhecido, veja [31], é dado pelo sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \nabla p = 0, \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \beta \operatorname{div}(u) = 0, \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u \cdot \eta = Q, \quad \text{em } S_0 \times (0, T) \\ p = 0, \quad \text{em } S_1 \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), p(x, 0) = p_0(x) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Onde $p = p(x, t)$ denota a pressão acústica, $u = (u_1, u_2, u_3)$ com $u_j = u_j(x, t)$ é o campo de velocidade do fluido, $\alpha > 0$ é a densidade de equilíbrio e $\beta > 0$ é a compressibilidade do fluido. Aqui Ω é um aberto limitado do \mathbb{R}^3 como fronteira regular $S_0 \cup S_1 = \partial\Omega$ e $S_0 \cap S_1 = \emptyset$

Observação 1.1. O modelo (1.1) pode ser deduzido, por exemplo, após linearização da seguinte forma. Sejam $u = u(x, t)$, $p = p(x, t)$ como acima e $\rho(x, t)$ a densidade do fluido. Considere $S(x, t)$ a entropia específica do fluido. As equações de Euler correspondentes seriam

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(p) = 0 \quad (1.2)$$

A equação de continuidade é

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad (1.3)$$

A hipótese adiabática diz que $\frac{\partial S}{\partial t} + u \cdot \nabla S = 0$. Em geral é conhecido que $p = f(\rho, S)$, dependendo do fluido.

Assumindo que u, p, ρ y S são pequenas perturbações de $u_0 = 0$, $p_0 = \text{constante}$, $\rho_0 = \text{constante}$ e $S_0 = \text{constante}$, se lineariza y de (1.2) temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0 \quad (1.4)$$

A equação linearizada de continuidade é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(u) = 0.$$

Como $\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$ com $c^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0)$, obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \rho_0 \operatorname{div}(u) = 0.$$

Para tratar o problema de controlabilidade simultânea vamos considerar também o seguinte sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \nabla q = 0, \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \tau \operatorname{div}(v) = 0, \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ q = P, \quad \text{em } S_0 \times (0, T) \\ q = 0, \quad \text{em } S_1 \times (0, T) \\ v(x, 0) = v_0(x), q(x, 0) = q_0(x) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

onde $\gamma > 0$ e $\tau > 0$. As funções Q e P em (1.1) e (1.5), respectivamente, são chamadas de funções de controle.

Em torno do 1986, D.L. Russell[39] e J.L.Lions [32] perguntaram se for possível resolver o problema de controlabilidade exata para um par de modelos de evolução usando somente uma única função de controle. Eles chamam esse problema como um problema de controlabilidade simultânea. Na ausência de efeitos dissipativos, como no caso considerado em (1.1) e (1.5), o problema presenta dificuldades técnicas a superar, veja por exemplo [23], [25], [27] e [32], onde eles perturbam adequadamente os multiplicadores que irão a usar para obter controlabilidade.

Concretamente o problema de controlabilidade simultânea para os sistemas (1.1) e (1.5) consiste em controlar ambos sistemas usando uma única função de controle, i.e., dado um $T > 0$ e quaisquer dado inicial, (u_0, p_0, v_0, q_0) , e final $(\tilde{u}_0, \tilde{p}_0, \tilde{v}_0, \tilde{q}_0)$ em espaços funcionais adequados, achar $P(x, t)$ e $Q(x, t)$ tais que

a) A solução $\{u, p, v, q\}$ de (1.1) e (1.5) satisfazem no tempo T

$$(u(\cdot, T), p(\cdot, T), v(\cdot, T), q(\cdot, T)) = (\tilde{u}_0, \tilde{p}_0, \tilde{v}_0, \tilde{q}_0)$$

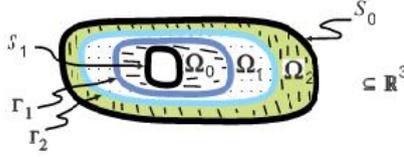
b) A função de controle, $P(x, t)$, para (1.5) seja dada em termos de $Q(x, t)$, ou ao contrario.

Um dos métodos para resolver problemas de controlabilidade é o Hilbert Uniqueness Method (H.U.M) introduzido por J.L.Lions ele é baseado na construção de apropriadas estruturas de espaços de Hilbert no espaço de dados iniciais. Estas estruturas estão conectadas com propriedades de unicidade. Importantes contribuições sobre a controlabilidade para os problemas (1.1) e (1.5) foram feitos por Kapitonov e G. Perla Menzala [25], [27]. Em [27] e [25] os autores responderam de maneira afirmativa para o controle simultâneo e o mostram que o controle $P = -\frac{\beta}{\gamma}Q$ pode ser usado para resolver o problema.

Neste trabalho estudamos o problema de controlabilidade desses sistemas desde um ponto de vista mas interessante para as aplicações, a souber, o chamado problema de transmissão o qual vamos a descrever a continuação.

Sejam σ_0 e σ_1 abertos limitados e conexos de \mathbb{R}^3 , com $\bar{\sigma}_1 \subseteq \sigma_0$. Seja $\Omega = \sigma_0 \setminus \bar{\sigma}_1$ e denotemos por $\partial\sigma_0 = S_0$, $\partial\sigma_1 = S_1$. Fixemos um inteiro $m > 1$ e seja $k = 1, 2, \dots, m$. Para cada k , seja B_k um subconjunto aberto e conexo, com fronteira regular e tal que, $\bar{\sigma}_1 \subseteq B_k \subseteq \sigma_0$, $\bar{B}_k \subseteq B_{k+1}$. Ponha $\Omega_0 = B_1 \setminus \bar{\sigma}_1$, $\Omega_k = B_{k+1} \setminus \bar{B}_k$, $k = 1, 2, \dots, m-1$ e $\Omega_m = \sigma_0 \setminus \bar{B}_m$.

Assim, $\Omega = \cup_{j=0}^m \Omega_j$, para $i \neq j$, tem-se $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ e $\partial\Omega = S_0 \cup S_1$. Exemplos dessa decomposição é mostrada nas seguintes figura


 FIG. 1. $n = 0$

 FIGURA 1.1: Caso $m = 0$ e $m = 3$

Procura-se por uma solução definida por partes, em cada sub domínio, para isso, considere os sistemas (1.1) e (1.5) restritos aos sub domínios Ω_k , assim

$$\begin{cases} \frac{\partial u^k}{\partial t} + \alpha^k \nabla p^k & = & 0, & \text{em } \Omega_k \times (0, T) \\ \frac{\partial p^k}{\partial t} + \beta^k \operatorname{div}(u^k) & = & 0, & \text{em } \Omega_k \times (0, T) \\ u^k(x, 0) & = & u_0^k(x), & p^k(x, 0) = p_0^k(x) \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v^k}{\partial t} + \gamma^k \nabla q^k & = & 0, & \text{em } \Omega_k \times (0, T) \\ \frac{\partial q^k}{\partial t} + \tau^k \operatorname{div}(v^k) & = & 0, & \text{em } \Omega_k \times (0, T) \\ v^k(x, 0) & = & v_0^k(x), & q^k(x, 0) = q_0^k(x) \end{cases} \quad (1.7)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, m$.

com condições de contorno (1.1) e (1.5). As condições de transmissão nas interfaces $\Gamma_k = \partial\Omega_k$, dadas por:

$$\begin{cases} \alpha^{k-1} p^{k-1} & = & \alpha^k p^k \\ \beta^{k-1} (u^{k-1} \cdot \eta) & = & \beta^k (u^k \cdot \eta) \\ k = 2, \dots, m, & (x, t) \in \Gamma_k \times (0, T) \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} \gamma^{k-1} q^{k-1} & = & \gamma^k q^k \\ \tau^{k-1} (v^{k-1} \cdot \eta) & = & \tau^k (v^k \cdot \eta) \\ k = 2, \dots, m, & (x, t) \in \Gamma_k \times (0, T) \end{cases} \quad (1.9)$$

para os sistemas (1.6) e (1.7) respectivamente.

As funções $\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$ e τ^k são as restrições das funções $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ que aparecem nas equações (1.1) e (1.5), as quais assumimos que são funções constantes por partes, estritamente positivas e podem perder a continuidade somente em $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots, m$.

O objetivo nesta parte será obter uma estimativa da forma

$$\begin{aligned} (T - T_0) \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left[\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 + \tau^k |v^k|^2 + \gamma^k (q^k)^2 \right] dx \\ \leq C \int_0^T \int_{S_0} [\alpha p - \tau(v \cdot \eta)]^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} dS_0 dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

para algum $T_0 > 0, C > 0$ e qualquer $T > T_0$. A desigualdade (1.10) é chamada de uma desigualdade de observabilidade a qual será provado no Teorema 1.16 assumindo propriedades geométricas no domínio Ω e nas interfaces Γ_k . Além disso para provar (1.10) serão assumidas condições de monotonicidade nos coeficientes dos sistemas (1.6) e (1.7). A necessidade dos requerimentos mencionados já tinha sido notado por Lions[32] no seu estudo de problemas de transmissão. Lagnese[23] também uso as mesmas hipóteses para provar resultados de controlabilidade para uma ampla classe de problemas hiperbólicos.

A seguir o roteiro do que será feito neste Capítulo 1 da Tese.

1. Mostraremos que o problema (1.6)- (1.9) é bem posto, usando para isso os resultados da teoria de semigrupos [36]
2. Obteremos uma desigualdade de observabilidade simultânea, para ambos sistemas (1.6) e (1.7), isso será feito usando a técnica dos multiplicadores [21]
3. Aplicamos o método H.U.M(Hilbert Uniqueness Method) para obter a controlabilidade simultânea [32].

1.1 Espaços Funcionais

Considere o espaço de Hilbert $X_1 = [L^2(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]$, associado a (1.6). Defina-se um produto interno em X_1 , dado da seguinte forma, se $(\tilde{u}, \tilde{p}), (u, p) \in X_1$, então:

$$\langle (u, p), (\tilde{u}, \tilde{p}) \rangle_{X_1} = \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left\{ \beta^k u^k \cdot \tilde{u}^k + \alpha^k p^k \tilde{p}^k \right\} dx \quad (1.11)$$

Analogamente, considere $X_2 = [L^2(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]$ associado a (1.7). Defina-se um produto interno em X_2 , como segue, dados $(\tilde{v}, \tilde{q}), (v, q) \in X_2$, então:

$$\langle (v, q), (\tilde{v}, \tilde{q}) \rangle_{X_2} = \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left\{ \tau^k v^k \cdot \tilde{v}^k + \gamma^k q^k \tilde{q}^k \right\} dx \quad (1.12)$$

Com as considerações feitas acima considere a energia total associada ao problema (1.6), (1.7), (1.8), (1.9) e as condições na fronteira dadas em (1.1), (1.5), dado por

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left\{ \beta_k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 + \tau_k |v^k|^2 + \gamma^k (q^k)^2 \right\} dx \quad (1.13)$$

A seguir um Lema útil que permite dar um sentido rigoroso para as condições dadas nas interfaces, veja[27] para mais detalhes.

Lema 1.2. *Seja Ω uma região limitada no \mathbb{R}^3 , com fronteira regular $\partial\Omega$. A aplicação*

$$\begin{aligned} [C^1(\bar{\Omega})]^3 &\rightarrow C^1(\partial\Omega) \\ u = (u_1, u_2, u_3) &\rightarrow u \cdot \eta \end{aligned}$$

onde $\eta = \eta(x)$ é o vetor normal unitário exterior em $x \in \partial\Omega$. Podemos estender por continuidade a uma aplicação

$$\tilde{H} \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

onde $\tilde{H} = \left\{ u \in [L^2(\Omega)]^3, \text{ tal que, } \operatorname{div}(u) \in L^2(\Omega) \right\}$ e $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ é o espaço dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$

Para simplificar notações escrevemos u no lugar de u^k , β no lugar de β^k , etc., na região Ω_k .

Pelo lemma 1.2 é claro que nos espaços seguintes

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(u, p) \in X_1, \text{ tais que, } (-\alpha \nabla p, -\beta \operatorname{div}(u)) \in X_1\} \subseteq X_1 \\ H_2 &= \{(v, q) \in X_2, \text{ tais que, } (-\gamma \nabla q, -\tau \operatorname{div}(v)) \in X_2\} \subseteq X_2 \end{aligned}$$

podem-se definir os seguintes sub espaços:

$$Z_1 = \left\{ (u, p) \in H_1, \text{ tais que } \begin{array}{ll} \alpha^{k-1} p^{k-1} = & \alpha^k p^k \\ \beta^{k-1} (u^{k-1} \cdot \eta) = & \beta^k (u^k \cdot \eta) \\ u \cdot \eta = 0 \in S_0, & p = 0 \in S_1 \end{array} , \text{ em } \Gamma_k, k = 2, \dots, m. \right\}$$

e,

$$Z_2 = \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{k-1}q^{k-1} = \gamma^k q^k \\ (v, q) \in H_2, \text{ tais que } \tau^{k-1}(v^{k-1} \cdot \eta) = \tau^k(v^k \cdot \eta) \\ q = 0, \quad \text{em } \partial\Omega = S_0 \cup S_1 \end{array} \right\}, \quad \text{em } \Gamma_k, \quad k = 2, \dots, m$$

Observe que $[C^1(\bar{\Omega})] \subset Z_j$, $j = 1, 2$. Assim Z_1 e Z_2 são densos em X_1 e X_2 respectivamente. Consideremos os seguintes operadores não limitados

$$A_j : Z_j = D(A_j) \subseteq X_j \longrightarrow X_j$$

definidos como

1. Se $(u, p) \in D(A_1)$, então, $A_1(u, p) = (-\alpha \nabla p, -\beta \operatorname{div}(u))$
2. Se $(v, q) \in D(A_2)$, então, $A_2(v, q) = (-\gamma \nabla q, -\tau \operatorname{div}(v))$

O operador adjunto de A_1 , denotado por A_1^* , pode ser calculado e é dado da seguinte forma:

$$A_1^*(\tilde{u}, \tilde{p}) = (\alpha \nabla \tilde{p}, \beta \operatorname{div}(\tilde{u}))$$

e

$$D(A_1^*) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{k-1}\tilde{p}^{k-1} = \alpha^k \tilde{p}^k \\ (\tilde{u}, \tilde{p}) \in H_1, \quad \text{tais que, } \beta^{k-1}(\tilde{u}^{k-1} \cdot \eta) = \beta^k(\tilde{u}^k \cdot \eta) \\ p = 0 \quad \text{em } S_1, \quad \tilde{u} \cdot \eta = 0 \quad \text{em } S_0 \end{array} \right\}, \quad \text{em } \Gamma_k, \quad k = 2, \dots, m$$

Em [27] mostram que o operador A_1 é skew-adjoint, i.e, $A_1^* = -A_1$, o mesmo resultado é provado para A_2 . Logo, pelo Teorema de Stone segue-se que A_1 e A_2 são geradores infinitesimais de um grupo de operadores unitários fortemente contínuos $\{U_j(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, em X_1 e X_2 respectivamente.

Alem disso, $U_j(t)w_j$ é fortemente diferenciável em relação a t e para qualquer $w_j \in D(A_j)$,

$$\frac{d}{dt} U_j(t)w_j = A_j U_j(t)w_j$$

Agora estudamos algumas propriedades das soluções de (1.6) que serão usadas no que segue.

Lema 1.3. *Seja $V_j = [\text{Ker}(A_j^*)]^\perp$, considerando a ortogonalidade em relação ao produto interno definido em X_1 e X_2 respectivamente. Então, são validos:*

1. $U_j(t)(V_j \cap D(A_j)) \subset V_j \cap D(A_j)$
2. *Fixe $t \in \mathbb{R}$. Se $(u, p) \in V_1 \cap D(A_1)$, então, no sentido das distribuições*
 - (a) $\text{curl}(u^k) = 0$, em Ω_k , $k = 0, 1, \dots, m$
 - (b) $u \times \eta = 0$ em S_1
 - (c) $u^{k-1} \times \eta = u^k \times \eta$ em Γ_k , $k = 2, \dots, m$

onde \times denota o produto vetorial usual de \mathbb{R}^3 e $\eta(x)$ é a normal exterior a Γ_k

3. *Fixe $t \in \mathbb{R}$. Se $(v, q) \in V_2 \cap D(A_2)$, então, no sentido das distribuições*
 - (a) $\text{curl}(v^k) = 0$, em Ω_k , $k = 0, 1, \dots, m$
 - (b) $v \times \eta = 0$ em Γ
 - (c) $v^{k-1} \times \eta = v^k \times \eta$ em Γ_k , $k = 2, \dots, m$

Demonstração. Faremos a prova para A_1 já que para A_2 é completamente análogo. Seja $(u, p) \in V_1 \cap D(A_1)$, então $(u, p) \in V_1$ e $(u, p) \in D(A_1)$. Pela teoria de semigrupos sabe-se que $U(t)(u, p) \in D(A_1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, resta provar que $U(t)(u, p) \in V_1$.

Note que $\text{Ker}(A_1^*) \neq \emptyset$, ele contém elementos da forma $(\beta^{-1}\text{Curl}(v), 0)$ onde $v \in [H^2(\Omega)]^3$, $v = 0$ em S_0

Seja $w = (w_1, w_2) \in \text{Ker}(A_1^*)$, então $A_1^*(w_1, w_2) = 0$. Logo,

$$\frac{d}{dt} \langle U_1(t)(u, p), (w_1, w_2) \rangle = \langle A_1 U_1(t)(u, p), (w_1, w_2) \rangle_{X_1} = \langle U_1(t)(u, p), A_1^*(w_1, w_2) \rangle = 0$$

assim temos,

$$U_1(t)(u, p), (w_1, w_2) = C, \quad C = \text{constante} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $t = 0$, $\langle (u, p), (w_1, w_2) \rangle_{X_1} = C$, mais, $(u, p) \in [\text{Ker}(A_1^*)]^\perp$ e $(w_1, w_2) \in \text{Ker}(A_1^*)$, o que implica que $C = 0$.

Assim, $\langle U_1(t)(u, p), (w_1, w_2) \rangle = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ou seja, $U_1(t)(u, p) \in [\text{Ker}(A_1^*)]^\perp = V_1$ e o item 1.) fica provado.

Agora provemos o primeiro item de 2). Seja $v \in [H^2(\Omega)]^3$ com suporte em Ω_k e considere o elemento $(\beta^{-1}\text{Curl}(v), 0) \in \text{Ker}(A_1^*)$. Então para todo $(u, p) \in V_1 \cap D(A_1)$ temos,

$$0 = \langle (u, p), (\beta^{-1} \text{Curl}(v), 0) \rangle_{X_1} = \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} u \cdot \text{Curl}(v) dx$$

pois o suporte de v está contido em Ω_k . Assim, $\text{Curl}(v) = 0$, no sentido das distribuições em Ω_k , $k = 0, 1, \dots, m$.

Para provar o item b) de 2) usaremos a seguinte identidade,

$$\int_{\Omega} \text{Curl}(u) \cdot v dx = \int_{\Omega} u \cdot \text{Curl}(v) dx - \int_{\partial\Omega} v \cdot (u \times \eta) d\Gamma \quad (1.14)$$

Seja $v \in [H^2(\Omega)]^3$ e seja $(\beta^{-1} \text{Curl}(v), 0) \in \text{Ker}(A_1^*)$, com, $v = 0$ em $\bigcup_{m}^{j=1} \bar{\Omega}_j$. Usando (1.14) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (u, p), (\beta^{-1} \text{Curl}(v), 0) \rangle_{X_1} = \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} u^k \cdot \text{Curl}(v^k) dx \\ &= \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \text{Curl}(u^k) \cdot v^k dx + \sum_{k=0}^m \int_{\partial\Omega_k} v^k \cdot (u^k \times \eta) d\Gamma_k \\ 0 &= \sum_{k=0}^m \int_{\partial\Omega_k} v^k \cdot (u^k \times \eta) d\Gamma_k = \int_{S_1} v \cdot (u \times \eta) dS_1 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Por último provemos o item c) de 2). Seja $v \in [H^2(\Omega)]^3$ e $(\beta^{-1} \text{Curl}(v), 0) \in \text{Ker}(A_1^*)$, usando a identidade (1.15), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \text{Curl}(u^k) \cdot v^k dx + \sum_{k=0}^m \int_{\partial\Omega_k} v^k \cdot (u^k \times \eta) d\Gamma_k \\ 0 &= \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} v^k \cdot (u^k \times \eta) d\Gamma_k \end{aligned} \quad (1.16)$$

Agora, escolhendo v tal que $v = 0$ em S_0 e $v = 0$ em $\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \Gamma_j$, obtemos de (1.16)

$$0 = \int_{\Gamma_k} v \cdot \{u^{k-1} \times \eta - u^k \times \eta\} d\Gamma_k$$

que é o que se queria provar.

A parte 3) é feita de maneira completamente análoga.

□

O seguinte Teorema contém em resumo os resultados obtidos.

Teorema 1.4. *Seja V_j o complemento ortogonal do subespaço $\text{Ker}(A_j^*)$, $j = 1, 2$, em X_j . Considere os problemas (1.6), (1.7), (1.1), (1.5) e os dados iniciais $(u_0, p_0) \in V_1 \cap D(A_1)$ e $(v_0, q_0) \in V_2 \cap D(A_2)$. Então $(u, p) = U_1(t)(u_0, p_0)$ e $(v, q) = U_2(t)(v_0, q_0)$ são as únicas soluções, respectivamente, i.e,*

$$\begin{aligned} (u, p) &\in C(\mathbb{R}; V_1 \cap D(A_1)) \cap C(\mathbb{R}, X_1) \\ (v, q) &\in C(\mathbb{R}; V_2 \cap D(A_2)) \cap C(\mathbb{R}, X_2) \end{aligned}$$

Alem disso, elas satisfazem as propriedades mostradas no lema 1.3

Antes de mostrar a desigualdade de observabilidade provemos algumas propriedades adicionais.

A energia associada a os sistemas (1.6) e (1.7), com condições nulas no bordo, são dados por:

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left\{ \beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right\} dx$$

e

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left\{ \tau^k |v^k|^2 + \gamma^k (q^k)^2 \right\} dx$$

respectivamente. Mostra-se que elas não dependem do tempo t , de fato, multiplicando a primeira equação de (1.6) por $\beta^k u^k$ e integrando em Ω_k e somando em $k = 0, 1, \dots, m$, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \beta^k |u^k|^2 dx - \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \beta^k \alpha^k p^k \text{div}(u^k) dx + \sum_{k=0}^m \int_{\partial\Omega_k} \beta^k \alpha^k p^k (u^k \cdot \eta) dx. \quad (1.17)$$

Multiplicando a segunda equação de (1.6) por $\alpha^k p^k$, integrando em Ω_k e somando em k , temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \alpha^k (p^k)^2 dx + \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \alpha^k \beta^k p^k \text{div}(u^k) dx = 0 \quad (1.18)$$

somando (1.17) e (1.18), temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left\{ \beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^k \right\} dx + \sum_{k=0}^m \int_{\partial\Omega_k} \beta^k \alpha^k p^k (u^k \cdot \eta) dx = 0$$

Mais,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \int_{\partial\Omega_k} \beta^k \alpha^k p^k (u^k \cdot \eta) dx &= \int_{S_1} \alpha \beta p (u \cdot \eta) dS_1 + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \left\{ \alpha^{k-1} \beta^{k-1} p^{k-1} (u^{k-1} \cdot \eta) - \right. \\ &\quad \left. \alpha^k \beta^k p^k (u^k \cdot \eta) \right\} d\Gamma_k + \int_{S_0} \alpha \beta p (u \cdot \eta) dS_0 \end{aligned}$$

Assim, usando as condições de contorno e interface (1.8), temos que $\sum_{k=0}^m \int_{\partial\Omega_k} \alpha^k \beta^k p^k (u^k \cdot \eta) d\Gamma_k = 0$. Segue a afirmação. O caso $E_2(t)$ é completamente análogo.

1.2 Desigualdade de observabilidade

Nesta secção obteremos uma desigualdade de observabilidade, a qual será satisfeita para ambos sistemas (1.6) e (1.7) simultaneamente. A prova será feita usando a teoria dos multiplicadores, uma boa referencia para o uso desta técnica pode-se encontrar no livro de Komornik[21]. Os multiplicadores usados aqui foram convenientemente modificados com o objetivo de obter boas estimativas dos termos de fronteira. Esses multiplicadores já foram usados por outros autores, motivados pela invariância dos sistemas (1.1) e (1.5), relativos ao grupo de dilatações em todas as varáveis, veja[25] e [27] e as referencias neles.

Seja $h : C(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função auxiliar a qual será escolhida depois e $(u, p) \in V_1 \cap D(A_1)$ uma solução do sistema (1.1). Consideremos os multiplicadores dados por:

$$\begin{cases} M_1 = 2 \left(\alpha t p - u \cdot \nabla h + \alpha \int_0^t p(x, s) ds \right) \\ M_2 = 2 (\beta t u - p \nabla h) \\ M_3 = 2 \beta u \end{cases}$$

Sendo (u, p) solução de (1.1), temos a identidade

$$0 = M_1 \{p_t + \beta \operatorname{div} u\} + M_2 \cdot \{u_t + \alpha \nabla p\} + M_3 \cdot \left\{ \int_0^t (u_s + \alpha \nabla p) ds \right\}$$

A expressão acima, pode ser restrita na forma seguinte

$$0 = \frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{div}(\vec{B}) - J \quad (1.19)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= t [\beta |u|^2 + \alpha p^2] - 2p(u \cdot \nabla h) + 2\alpha p \int_0^t p(x, s) ds - 2\beta u(x, 0) \cdot \int_0^t u(x, s) ds \\ \vec{B} &= -2\alpha \beta t p u + \alpha p^2 \nabla h - \beta |u|^2 \nabla h + 2\beta (u \cdot \nabla h) u - 2\alpha \beta \left(\int_0^t p(x, s) ds \right) u \\ J &= \beta (\Delta - 1) |u|^2 - 2\beta \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j - \alpha (\Delta h - 3) p^2 \end{aligned}$$

Observação 1.5. Note que se considerarmos $h(x) = \frac{1}{2} |x - x_0|^2$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$ fixo, então $J = 0$. Neste caso (1.19) representa uma lei de conservação. Se integramos (1.19) em Ω_k observe que, pela expressão de B , precisaremos, para obter boas estimativas, fixar o sinal de $\frac{\partial h}{\partial \eta}$. Isso leva na escolha de $h(x)$ como uma pequena perturbação de $\frac{1}{2} |x - x_0|^2$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

Integrando a identidade (1.19) em $\Omega_k \times (0, s)$ e somando em k , temos

$$0 = \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [A^k(x, s) - A^k(x, 0)] dx - \sum_{k=0}^m \int_0^s \int_{\partial\Omega_k} \vec{B}^k \cdot \eta d\Gamma - \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s J^k dt dx \quad (1.20)$$

Substituindo a expressão de A em (1.20), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left\{ s [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] - 2p^k(x, s) (u^k \cdot \nabla h) + 2\alpha^k p^k \int_0^s p^k(x, \tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - 2\beta^k u_0^k(x) \cdot \int_0^s u^k(x, r) dr + 2p_0^k (u_0^k \cdot \nabla h) \right\} dx - \sum_{k=0}^m \int_0^s \int_{\partial\Omega_k} \vec{B}^k \cdot \eta d\Gamma_k - \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s J^k dt dx \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} s \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] &= 2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} 2p^k(x, s) (u^k \cdot \nabla h) dx - 2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \alpha^k p^k \int_0^s p^k(x, \tau) d\tau \\ &\quad + 2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \beta^k u_0^k(x) \cdot \int_0^s u^k(x, r) dr dx - 2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} p_0^k (u_0^k \cdot \nabla h) dx \\ &\quad + \sum_{k=0}^m \int_0^s \int_{\partial\Omega_k} \vec{B}^k \cdot \eta d\Gamma_k + \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s J^k dt dx \end{aligned} \quad (1.21)$$

onde $p_0^k = p^k(x, 0)$, $u_0^k = u^k(x, 0)$.

A prova do resultado principal, isto é, a obtenção da desigualdade de observabilidade, obtém-se estimando cada termo do lado direito de (1.21). Para efeitos de apresentação da demonstração isso será dividido em vários lemas

Lema 1.6. *Seja $\{u, p\}$ solução regular do problema (1.6)-(1.8), dada pelo Teorema 1.4. Então*

$$\sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} 2p^k(x, s)(u^k \cdot \nabla h) dx \leq C_1 \sum_{k=0}^m \left\{ \beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right\} dx$$

onde $C_1 = 3 \max_{k=0,1,\dots,m} \left\{ (\alpha^k)^{-1}, (\beta^k)^{-1} \right\} \max_{x \in \Omega} |\nabla h|$

Demonstração. Usando a desigualdade de Holder no primeiro termo do lado direito de (1.21), temos

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} p^k(x, s)(u^k \cdot \nabla h) dx &= 2 \sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_k} p^k u_i^k \frac{\partial h}{\partial x_i} dx \leq 2 \max_{x \in \Omega} |\nabla h| \sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_k} p^k u_i^k dx \\ &\leq 2 \max_{x \in \Omega} |\nabla h| \sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\Omega_k} (p^k)^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_k} (u_i^k)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \max_{x \in \Omega} |\nabla h| \sum_{k=0}^m \left\{ 3 \int_{\Omega_k} (p^k)^2 dx + \int_{\Omega_k} |u^k|^2 dx \right\} \\ &\leq 3 \max_{k=0,1,\dots,m} \left\{ (\alpha^k)^{-1}, (\beta^k)^{-1} \right\} \max_{x \in \Omega} |\nabla h| \sum_{k=0}^m \left\{ \beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right\} dx \\ &= C_1 \sum_{k=0}^m \left\{ \beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right\} dx \end{aligned} \tag{1.22}$$

onde,

$$C_1 = 3 \max_{k=0,1,\dots,m} \left\{ (\alpha^k)^{-1}, (\beta^k)^{-1} \right\} \max_{x \in \Omega} |\nabla h|$$

□

O segundo termo do lado direito de (1.21), $2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \alpha^k p^k \int_0^s p^k(x, \tau) d\tau$, pode-se escrever como

$$2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \alpha^k p^k \int_0^s p^k(x, \tau) d\tau = - \frac{\partial}{\partial s} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \alpha^k \left[\int_0^s p^k(x, r) dr \right] dx \tag{1.23}$$

Para estimar o quarto termo do lado direito de (1.21), $-2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} p_0^k (u_0^k \cdot \nabla h) dx$ usamos o fato da energia ser independente do tempo e a estimativa (1.22), assim:

$$-2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} p_0^k (u_0^k \cdot \nabla h) dx \leq C_1 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left[\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right]^2 dx. \quad (1.24)$$

O quinto termo lado direito de (1.21), $\sum_{k=0}^m \int_0^s \int_{\partial\Omega_k} \vec{B}^k \cdot \eta d\Gamma_k$, precisa de uma análise mais cuidadosa.

Lema 1.7. *Seja $\{u, p\}$ solução regular do problema (1.1)-(1.8), dada pelo Teorema 1.4. Para $k = 1, 2, \dots, m$, temos que a seguinte identidade*

$$\vec{B}^{k-1} \cdot \eta - \vec{B}^k \cdot \eta = -\frac{\partial h}{\partial \eta} \left\{ \frac{(\alpha^{k-1} - \alpha^k)}{\alpha^{k-1}} \alpha^k (p^k)^2 + (\beta^{k-1} - \beta^k) \frac{\beta^k}{\beta^{k-1}} |u^k \cdot \eta|^2 + (\beta^{k-1} - \beta^k) |u^k \times \eta|^2 \right\}$$

é válida em Γ_k , $k = 1, 2, \dots, m$.

Demonstração. Usando as condições de contorno (1.8) temos que se $x \in S_1$, então

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \eta &= -\beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + 2\beta (u \cdot \nabla h)(u \cdot \eta) \\ &= -\beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + 2\beta \left\{ |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + (u \times \eta)(\nabla h \times u) \right\} \\ &= -\beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + 2\beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \\ &= \beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

E, se $x \in S_0$, então

$$\vec{B} \cdot \eta = \alpha p^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - \beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta}.$$

Usando as condições (1.8) nas interfaces, temos para $x \in \Gamma_k$, a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
\vec{B}^{k-1} \cdot \eta - \vec{B}^k \cdot \eta &= -2\alpha^{k-1}\beta^{k-1} + p^{k-1}(u^{k-1} \cdot \eta) + \alpha^{k-1}(p^{k-1})^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - \beta^{k-1} |u^{k-1}|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + \\
&+ 2\beta^{k-1}(u^{k-1} \cdot \nabla h)(u^{k-1} \cdot \eta) - 2\alpha^{k-1}\beta^{k-1} \left(\int_0^t p^{k-1}(x, s) ds \right) (u^{k-1} \cdot \eta) + \\
&- \alpha^k (p^k)^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + \beta^k |u^k|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - 2\beta^k (u^k \cdot \nabla h)(u^k \cdot \eta) + 2\alpha^k \beta^k \left(\int_0^t p^k(x, s) ds \right) (u^k \cdot \eta) \\
&= \alpha^{k-1} (p^{k-1})^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - \beta^{k-1} |u^{k-1}|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + 2\beta^{k-1} (u^{k-1} \cdot \nabla h)(u^{k-1} \cdot \eta) - \\
&\alpha^k (p^k)^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + \beta^k |u^k|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - 2\beta^k (u^k \cdot \nabla h)(u^k \cdot \eta)
\end{aligned} \tag{1.26}$$

mais,

$$\begin{aligned}
\alpha^{k-1} (p^{k-1})^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - \alpha^k (p^k)^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} &= \frac{(\alpha^{k-1} p^{k-1})^2}{\alpha^{k-1}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&= \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} - \frac{1}{\alpha^k} \right) (\alpha^k p^k)^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&= -(\alpha^{k-1} - \alpha^k) \frac{\alpha^k}{\alpha^{k-1}} (p^k)^2 \frac{\partial h}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Para $|\eta| = 1$ vale

$$|u|^2 = |(u \cdot \eta)|^2 + |u \times \eta|^2 \tag{1.28}$$

Substituindo (1.28) em (1.26), tem-se

$$\begin{aligned}
\beta^k |u^k|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - \beta^{k-1} |u^{k-1}|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} &= \beta^k \left(|(u^k \cdot \eta)|^2 + |(u^k \times \eta)|^2 \right) \frac{\partial h}{\partial \eta} - \beta^{k-1} \left(|(u^{k-1} \cdot \eta)|^2 + \right. \\
&\left. + |(u^{k-1} \times \eta)|^2 \right) \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&= \left(\beta^k |u^k \cdot \eta|^2 - \beta^{k-1} |u^{k-1} \cdot \eta|^2 \right) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \left(\beta^k |u^k \times \eta|^2 - \right. \\
&\left. \beta^{k-1} |u^{k-1} \times \eta|^2 \right) \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&= \left[\frac{(\beta^k |u^k \cdot \eta|^2)}{\beta^k} - \frac{(\beta^{k-1} |u^{k-1} \cdot \eta|^2)}{\beta^{k-1}} \right] \frac{\partial h}{\partial \eta} + \\
&(\beta^k - \beta^{k-1}) |u^k \times \eta|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&= \left(\frac{1}{\beta^k} - \frac{1}{\beta^{k-1}} \right) (\beta^k |u^k \cdot \eta|^2) + (\beta^k - \beta^{k-1}) |u^k \times \eta|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
&= (\beta^{k-1} - \beta^k) \frac{\beta^k}{\beta^{k-1}} |u^k \cdot \eta|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - (\beta^{k-1} - \beta^k) |u^k \times \eta|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 2\beta^{k-1}(u^{k-1} \cdot \nabla h)(u^{k-1} \cdot \eta) - 2\beta^k(u^k \cdot \nabla h)(u^k \cdot \eta) &= 2\beta^{k-1} |u^{k-1} \cdot \eta|^2 - 2\beta^k |u^k \cdot \eta|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
 &= 2 \frac{(\beta^{k-1} |u^{k-1} \cdot \eta|)^2}{\beta^{k-1}} \frac{\partial h}{\partial \eta} - 2 \frac{(\beta^k |u^k \cdot \eta|)^2}{\beta^k} \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
 &= 2 \left(\frac{1}{\beta^{k-1}} - \frac{1}{\beta^k} \right) (\beta^k |u^k \cdot \eta|)^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
 &= -2(\beta^{k-1} - \beta^k) \frac{\beta^k}{\beta^{k-1}} |u^k \cdot \eta|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta}
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Substituindo (1.27), (1.28) e (1.30) em (1.26) temos

$$\begin{aligned}
 \bar{B}^{k-1} \cdot \eta - \bar{B}^k \cdot \eta &= -(\alpha^{k-1} - \alpha^k) \frac{\alpha^k}{\alpha^{k-1}} (p^k)^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - (\beta^{k-1} - \beta^k) \frac{\beta^k}{\beta^{k-1}} |u^k \cdot \eta|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - \\
 &\quad (\beta^{k-1} - \beta^k) |u^k \times \eta|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
 &= -\frac{\partial h}{\partial \eta} \left\{ \frac{(\alpha^{k-1} - \alpha^k)}{\alpha^{k-1}} \alpha^k (p^k)^2 + (\beta^{k-1} - \beta^k) \frac{\beta^k}{\beta^{k-1}} |u^k \cdot \eta|^2 + (\beta^{k-1} - \beta^k) |u^k \times \eta|^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

□

Agora estimemos o sexto termo, $\sum_{m=0}^{k=0} \int_{\Omega_k} \int_0^s J^k dt dx$. Lembrando que,

$$\sum_m \int_{\Omega_k} \int_0^s J^k dt dx = \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s \left\{ \beta^k (\Delta h - 1) |u^k|^2 - 2\beta^k \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} u_i^k u_j^k - \alpha^k (\Delta h - 3) (p^k)^2 \right\} \tag{1.32}$$

Para estimar (1.32), vamos escolher a função h como sendo,

$$h(x) = \frac{1}{2} |x - x_0|^2 + \delta_0 \Phi(x) \tag{1.33}$$

onde $x_0 \in \sigma_1$ e Φ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 1 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 2 \frac{\text{Vol}(\Omega)}{\text{area}(S_0)}, & \text{em, } S_0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{\text{Vol}(\Omega)}{\text{area}(S_1)}, & \text{em, } S_1 \end{cases} \tag{1.34}$$

Observação 1.8. Seja $\mu = \mu(\Omega)$, dado por

$$\mu(\Omega) = \inf_{x \in \Omega} 2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \quad (1.35)$$

$$|\xi| = 1$$

observe que, considerando $\xi = (1, 0, 0)$, $\xi = (0, 1, 0)$, $\xi = (0, 0, 1)$, temos

$$\mu(\Omega) \leq 2 \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_1^2}, \quad \mu(\Omega) \leq 2 \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_2^2}, \quad \mu(\Omega) \leq 2 \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_3^2}$$

que, somando estas ultimas expressões obtemos,

$$3\mu(\Omega) \leq 2\Delta\Phi, \implies \mu(\Omega) \leq \frac{2}{3}$$

Da expressão de $h(x)$, temos

$$\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \delta_{ij} + \delta_0 \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

e $\Delta h = 3 + \delta_0$.

Lema 1.9. *Seja $\{u, p\}$ solução regular do problema (1.1)-(1.8), dada pelo Teorema 1.4. Escolhendo h como em (1.33) temos*

$$\sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s J^k dt dx \leq \delta_0 (1 - \mu(\Omega)) \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s \left\{ \beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right\} dt dx$$

para qualquer $\delta_0 > 0$

Demonstração. Usando (1.33), (1.34), (1.35) e a observação (1.8), temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s J^k dt dx &= \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s \left\{ \beta^k (2 + \delta_0) |u^k|^2 - 2\beta^k \sum_{i,j=1}^m \left(\delta_{ij} + \delta_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) u_i^k u_j^k - \alpha^k \delta_0 (p^k)^2 \right\} \\
 &\leq \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s \left\{ \beta^k (2 + \delta_0) |u^k|^2 - 2\beta^k |u^k|^2 - \beta^k \mu(\Omega) \delta_0 |u^k|^2 - \alpha^k \delta_0 (p^k)^2 \right\} \\
 &\leq \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s \left\{ \delta_0 \beta^k |u^k|^2 - \mu(\Omega) \delta_0 \beta^k |u^k|^2 - \alpha^k \delta_0 (p^k)^2 \right\} dt dx \\
 &\leq \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s \left\{ \delta_0 (1 - \mu(\Omega)) \beta^k |u^k|^2 \right\} dt dx \\
 &\leq \delta_0 (1 - \mu(\Omega)) \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s \left\{ \beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right\} dt dx
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

□

Para estimar o termo restante de (1.21), $2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \beta^k u_0^k(x) \cdot \int_0^s u^k(x, r) dr dx$, considere a seguinte hipótese sobre o dado inicial $u_0(x)$, assumamos que ele satisfaz:

$$\begin{cases} u_0^{k-1} \cdot \eta = u_0^k \cdot \eta & \text{em } \Gamma_k \\ u_0^{k-1} \times \eta = u_0^k \times \eta & \text{em } \Gamma_k \\ u_0^k = \nabla l^k(x) & \text{em } \Gamma_k \\ l^k \in H^2(\Omega_k) \text{ e } h = 0 & \text{em } S_1 \end{cases} \tag{1.37}$$

Observação 1.10. As hipóteses feitas em (1.37), mesmo a solução do problema satisfazer as propriedades do lema (1.3), são necessárias já que o domínio não é simplesmente conexo.

Lema 1.11. *Seja $\{u, p\}$ solução regular do problema (1.6)-(1.8), dada pelo Teorema 1.4, e o dado inicial u_0 satisfazendo (1.37). Então*

$$2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \beta^k u_0^k(x) \int_0^s u^k(x, r) dr dx = 2 \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} l^k(p^k(x, s) - p_0^k(x)) dx$$

Demonstração. Usando a hipótese sobre l e a condição de contorno em S_0 , temos

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \beta^k u_0^k(x) \int_0^s u^k(x, r) dr dx &= 2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \int_0^s \beta^k \nabla l^k \cdot u^k \\
 &= 2 \sum_{k=0}^m \int_0^s \left\{ - \int_{\Omega_k} \beta^k l^k \operatorname{div}(u^k) + \int_{\partial\Omega_k} \beta^k l^k (u^k \cdot \eta) \right\} \\
 &= 2 \sum_{k=0}^m \int_0^s \int_{\Omega_k} l^k \frac{\partial p^k}{\partial t} + 2 \sum_{k=0}^m \int_0^s \int_{\partial\Omega_k} \beta^k l^k (u^k \cdot \eta) \\
 &= 2 \sum_{k=0}^m \int_0^s \int_{\Omega_k} l^k \frac{\partial p^k}{\partial t} + 2 \int_0^s \int_{S_1} \beta l(u \cdot \eta) + \\
 &2 \sum_{k=1}^m \int_0^s \int_{\Gamma_k} \left[\beta^{k-1} l^{k-1} (u^{k-1} \cdot \eta) - \beta^k l^k (u^k \cdot \eta) \right] + 2 \int_0^s \int_{S_0} \beta l(u \cdot \eta) \\
 &= 2 \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} l^k (p^k(x, s) - p_0^k(x)) + \\
 &2 \sum_{k=1}^m \int_0^s \int_{\Gamma_k} \left[\beta^{k-1} l^{k-1} (u^{k-1} \cdot \eta) - \beta^k l^k (u^k \cdot \eta) \right]
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Pela hipótese feita no dado inicial, (1.37), temos

$$\begin{aligned}
 \text{De, } u_0^{k-1} \cdot \eta = u_0^k \cdot \eta \text{ em } \Gamma_k &\implies \nabla l^{k-1} \cdot \eta = \nabla l^k \cdot \eta \text{ em } \Gamma_k \\
 &\implies \nabla (l^{k-1} - l^k) \cdot \eta = 0 \text{ em } \Gamma_k \\
 &\implies \nabla (l^{k-1} - l^k) \cdot \eta \perp \eta \text{ em } \Gamma_k.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{De, } u_0^{k-1} \times \eta = u_0^k \times \eta \text{ em } \Gamma_k &\implies \nabla l^{k-1} \times \eta = \nabla l^k \times \eta \text{ em } \Gamma_k \\
 &\implies \nabla (l^{k-1} - l^k) \times \eta = 0 \text{ em } \Gamma_k \\
 &\implies \nabla (l^{k-1} - l^k) \times \eta // \eta \text{ em } \Gamma_k.
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

Assim, $\nabla (l^{k-1} - l^k) = 0$ em Γ_k , isso implica que $l^{k-1} - l^k = C$ em Γ_k , $C = \text{constante}$.

substituindo (1.39) no segundo termo da direita de (1.38), temos

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{k=1}^m \int_0^s \int_{\Gamma_k} \left[\beta^{k-1} l^{k-1}(u^{k-1}.\eta) - \beta^k l^k(u^k.\eta) \right] &= 2 \sum_{k=1}^m \int_0^s \int_{\Gamma_k} (l^{k-1} - l^k) \beta^k(u^k.\eta) \\
 &= 2C \sum_{k=1}^m \int_0^s \int_{\Gamma_k} \beta^k(u^k.\eta) \\
 &= 2 \int_0^s \int_{S_0} \beta(u.\eta) = 0
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

E a prova segue-se substituindo (1.40) em (1.38). \square

Substituindo as estimativas obtidas, (1.22), (1.23), (1.24), (1.25), (1.32), (1.40) em (1.21), temos,

$$\begin{aligned}
 s \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left[\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right] dx &= 2C_1 s \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left[\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right] dx - \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial s} \sum_{k=0}^m \alpha^k \left[p^k(x, r) dr \right]^2 dx + \int_0^s \beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + \\
 &\quad \sum_{k=0}^m \int_0^s \int_{\Gamma_k} \left[\vec{B}^{k-1}.\eta - \vec{B}^k.\eta \right] + \int_0^s \int_{S_0} \left(\alpha p^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - \beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \\
 &\quad \delta_0 (1 - \mu(\Omega)) \sum_{k=0}^m \int_0^s \int_{\Gamma_k} \left[\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right] + \\
 &\quad 2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} l^k (p^k(x, s) - p_0^k(x)) dx
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Integrando (1.41) em $(0, T)$ e usando que a energia associada ao modelo é independente do tempo, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{T}{2} [1 - \delta_0 (1 - \mu(\Omega))] \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left[\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right] dx &\leq 2C_1 T \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left[\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 \right] dx - \\
 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \alpha^k \left[\int_0^T p^k(x, r) \right]^2 dx &+ \int_0^T \int_0^s \int_{S_1} \beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_0^s \int_{\Gamma_k} \left[\vec{B}^{k-1}.\eta - \vec{B}^k.\eta \right] + \\
 \int_0^T \int_0^s \int_{S_0} \left(\alpha p^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - \beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) &+ 2 \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} l^k (p^k(x, s) - p_0^k(x))
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Agora precisamos de hipóteses sobre o domínio Ω . Seja $\delta_0 > 0$ tal que para algum $x_0 \in \sigma_1$, tem-se

$$\begin{cases} \delta_0(1 - \mu(\Omega)) < 1, \\ (x - x_0) \cdot \eta \geq -2\delta_0 \frac{\text{Vol}(\Omega)}{\text{area}(S_0)}, \quad \text{para } x \in S_0 \\ (x - x_0) \cdot \eta \leq \delta_0 \frac{\text{Vol}(\Omega)}{\text{area}(S_1)}, \quad \text{para } x \in S_1 \\ (x - x_0) \cdot \eta + \delta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \geq 0, \quad \forall x \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1.43)$$

Observação 1.12. Note que as hipóteses feitas em (1.43) são validas quando $\delta_0 = 0$ que satisfazem as superfícies do tipo estrelado("star-shaped").

Usando (1.43) em S_1 , temos

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = \nabla h \cdot \eta = (x - x_0) \cdot \eta + \delta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = (x - x_0) \cdot \eta - \delta_0 \frac{\text{Vol}(\Omega)}{\text{area} S_1} \leq 0 \quad (1.44)$$

e, para $x \in S_0$,

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = \nabla h \cdot \eta = (x - x_0) \cdot \eta + \delta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = (x - x_0) \cdot \eta + 2\delta_0 \frac{\text{Vol}(\Omega)}{\text{area} S_0} \geq 0 \quad (1.45)$$

Substituindo (1.45) e (1.44) em (1.42), temos

$$\int_0^T \int_0^s \int_{S_1} \beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \leq 0 \quad (1.46)$$

e

$$- \int_0^T \int_0^s \int_{S_0} \beta |u|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \leq 0 \quad (1.47)$$

Além disso suponha que os coeficientes α^k, β^k satisfazem

$$\begin{aligned} \alpha^{k-1} &\leq \alpha^k \\ \beta^{k-1} &\leq \beta^k \end{aligned} \quad (1.48)$$

Então, pela quarta condição em (1.43), (1.48) e o lemma (1.7) temos que

$$\sum_{k=1}^m \int_0^T \int_0^s \int_{\Gamma_k} [\vec{B}^{k-1} \cdot \eta - \vec{B}^k \cdot \eta] \leq 0 \quad (1.49)$$

Usando que a energia associada ao sistema (1.1)-(1.6) não depende do tempo provaremos o seguinte lemma

Lema 1.13. *Seja $\{u, p\}$ solução regular do problema (1.1), dada pelo Teorema 1.4, e o dado inicial u_0 satisfazendo (1.37). Então*

$$2 \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} l^k(p^k(x, s) - p_0^k(x)) dx ds \leq \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left[\int_0^T p^k(x, s) \right]^2 dx + (C_3 + C_4 T) \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] dx$$

onde $C_3 = C_2 \max_k \{(\alpha^k \beta^k)^{-1}\}$ e $C_4 = \max_k \{C_2(\beta^k)^{-1}, (\alpha^k)^{-1}\}$

Demonstração.

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} l^k(p^k(x, s) - p_0^k(x)) &= 2 \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} |l^k p^k(x, s)| + 2 \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} |l^k p_0^k(x)| \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} |l^k(x)| \int_0^T |l^k p^k(x, t)| + 2 \sum_{k=0}^m \int_0^T \left(\int_{\Omega_k} |l^k(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_k} |p^k(x, s)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^m \left[\int_{\Omega_k} (l^k(x))^2 \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega_k} [p^k(x, s)]^2 dx \right]^{1/2} + \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} \{(l^k)^2 + (p^k)^2\} \\ &\leq \sum_{k=0}^m \left\{ (\alpha^{k-1})^{-1} \int_{\Omega_k} (l^k(x))^2 + \alpha^k \int_{\Omega_k} \left[\int_0^T p^k(x, s) \right]^2 dx \right\} + \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} \{(l^k)^2 + (p^k)^2\} \\ &\leq C_2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} (\alpha^k)^{-1} |\nabla l^k|^2 + \sum_{k=0}^m \alpha^k \left[\int_0^T p^k(x, s) \right]^2 dx + C_2 \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} |\nabla l^k|^2 + \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} (p^k)^2 \\ &\leq C_2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} (\alpha^k)^{-1} |u_0^k(x)|^2 + \sum_{k=0}^m \alpha^k \left[\int_0^T p^k(x, s) \right]^2 dx + C_2 \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} |\nabla l^k|^2 + \sum_{k=0}^m \int_0^T \int_{\Omega_k} (p^k)^2 \\ &\leq C_2 \max_k \{(\alpha^k \beta^k)^{-1}\} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] + \sum_{k=0}^m \alpha^k \left[\int_0^T p^k(x, s) \right]^2 dx + \\ &C_2 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} (\beta^k)^{-1} \int_0^T \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] + \sum_{k=0}^m (\alpha^k)^{-1} \int_0^T \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] \\ &\leq C_2 \max_k \{(\alpha^k \beta^k)^{-1}\} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] + \sum_{k=0}^m \alpha^k \left[\int_0^T p^k(x, s) \right]^2 dx + \\ &\max_k \{C_2(\beta^k)^{-1}, (\alpha^k)^{-1}\} T \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] dx \\ &\leq \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left[\int_0^T p^k(x, s) \right]^2 dx + (C_3 + C_4 T) \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] dx \end{aligned} \tag{1.50}$$

onde $C_3 = C_2 \max_k \{(\alpha^k \beta^k)^{-1}\}$ e $C_4 = \max_k \{C_2(\beta^k)^{-1}, (\alpha^k)^{-1}\}$

□

Substituindo em (1.42), e usando que $\frac{\partial h}{\partial \eta} \geq 0$ em S_0 , temos

$$\begin{aligned} & \frac{T}{2} [1 - \delta_0(1 - \mu(\Omega))] \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] dx \\ & \leq \{(2C_1 + C_4)T + C_3\} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] dx + T \int_0^T \int_{S_0} \alpha p^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{T}{2} [1 - \delta_0(1 - \mu(\Omega))] \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] dx - 2C_5 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] dx \leq \\ & 2 \int_0^T \int_{S_0} \alpha p^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} dS_0 dt \end{aligned} \quad (1.52)$$

onde $C_5 = C_3 + (2C_1 + C_4)T$ e considerarmos $T > \max 1, (2C_1 + C_4)$.

Temos provado o seguinte:

Teorema 1.14. *Assumindo Φ como em (1.34), as propriedades geométricas (1.43), a hipótese de monotonia dos coeficientes (1.48) e as hipóteses (1.37), feitas para o dado inicial. Então, $\exists C_5 > 0$, independente de t, u, u_0, p_0 , tal que*

$$\frac{T}{2} [1 - \delta_0(1 - \mu(\Omega)) - 2C_5] \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2] dx \leq 2 \int_0^T \int_{S_0} \alpha p^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} dS_0 dt.$$

De forma completamente análoga obtemos uma desigualdade de observabilidade para o sistema (1.5)-(1.7) com suas respectivas condições de interface e a monotonia do seus coeficientes, dados por:

$$\begin{aligned} \gamma^{k-1} & \leq \gamma^k \\ \tau^{k-1} & \leq \tau^k \end{aligned} \quad (1.53)$$

Teorema 1.15. *Assumindo Φ como em (1.34), a monotonia dos coeficientes (1.53) e as hipóteses do Teorema 1.14 com $h(x) = \frac{1}{2} |x - x_0|^2 + \delta_0 \Phi(x)$ e $(v_0, q_0) \in V_2 \cap D(A_2)$, $v_0^k = \nabla m^k$, com $m^k \in H^2(\Omega_k)$, $m = 0$ em S_1 . Então, existe uma constante $C_6 > 0$, independente de t, v_0, q_0 tal que*

$$\begin{aligned}
 & T[1 - \delta_0(1 - \mu(\Omega))] \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\tau^k |v^k|^2 + \gamma^k (q^k)^2] dx - 2C_6 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\tau^k |v^k|^2 + \gamma^k (q^k)^2] dx \\
 & \leq 2 \int_0^T \int_{S_0} \tau |v \cdot \eta|^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} dS_0 dt.
 \end{aligned}$$

Demonstração. A prova obtém-se combinando os resultados em [27] e as estimativas feitas na prova do Teorema 1.14 \square

Assumindo as hipóteses dos Teoremas 1.14 e 1.15, obtemos somando as desigualdades de observabilidade obtidas neles:

$$\begin{aligned}
 & (T - T_0) \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 + \tau^k |v^k|^2 + \gamma^k (q^k)^2] dx \\
 & \leq C_7 \int_0^T \int_{S_0} [\alpha p^2 + \tau |v \cdot \eta|^2] \frac{\partial h}{\partial \eta} dS_0 dt.
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

Para qualquer $T \geq T_0 = \max \left\{ 1, \frac{C_5 + C_6}{1 - \delta_0(1 - \mu(\Omega))} \right\}$.

Como já foi observado em [27] e [25], (1.54) já é uma desigualdade de observabilidade, mais, ainda não é conveniente para usar a técnica H.U.M. Partindo de (1.54) obteremos uma desigualdade apropriada.

Teorema 1.16. *Assumindo as hipóteses dos Teoremas 1.14, 1.15. Além disso supondo que:*

$$\begin{aligned}
 \alpha^k \beta^k &= \gamma^k \tau^k \\
 \beta^{k-1} \tau^k &= \beta^k \tau^{k-1}.
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Então, existe uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
 & (T - T_0) \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} [\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 + \tau^k |v^k|^2 + \gamma^k (q^k)^2] dx \\
 & \leq C \int_0^T \int_{S_0} [\alpha p - \tau(v \cdot \eta)]^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} dS_0 dt.
 \end{aligned}$$

$$\forall T > \max \left\{ 1, \frac{C_5 + C_6}{1 - \delta_0(1 - \mu(\Omega))} \right\}.$$

Demonstração. Usando os sistemas (1.7) e (1.55), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\tau u \cdot v + \alpha p q) dx &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} (\tau^k u^k \cdot v^k + \alpha^k p^k q^k) dx = \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left\{ \tau^k \frac{\partial u^k}{\partial t} \cdot v^k + \tau^k u^k \cdot \frac{\partial v^k}{\partial t} + \right. \\
&\quad \left. \alpha^k \frac{\partial p^k}{\partial t} q^k + \alpha^k p^k \frac{\partial q^k}{\partial t} \right\} \\
&= \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left\{ -\alpha^k \tau^k \nabla p^k \cdot v^k - \tau^k \gamma^k u^k \nabla q^k - \alpha^k \beta^k \operatorname{div}(u^k) q^k - \alpha^k \tau^k p^k \operatorname{div}(v^k) \right\} \\
&= - \sum_{k=0}^m \int_{\partial \Omega_k} \alpha^k \tau^k p^k (v^k \cdot \eta) + \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left\{ \alpha^k \tau^k p^k \operatorname{div}(v^k) - \tau^k \gamma^k u^k \nabla q^k - \right. \\
&\quad \left. \alpha^k \beta^k \operatorname{div}(u^k) q^k - \alpha^k \tau^k p^k \operatorname{div}(v^k) \right\} dx \\
&= - \sum_{k=0}^m \int_{\partial \Omega_k} \alpha^k \tau^k p^k (v^k \cdot \eta) - \sum_{k=0}^m \int_{\partial \Omega_k} \tau^k \gamma^k q^k (u^k \cdot \eta) + \\
&\quad \sum_{k=0}^m \int_{\partial \Omega_k} \left\{ \gamma^k \tau^k \operatorname{div}(u^k) q^k - \alpha^k \beta^k \operatorname{div}(u^k) q^k \right\} \\
&= - \sum_{k=0}^m \int_{\partial \Omega_k} \alpha^k \tau^k p^k (v^k \cdot \eta) - \sum_{k=0}^m \int_{\partial \Omega_k} \tau^k \gamma^k q^k (u^k \cdot \eta) \\
&= - \int_{S_1} \alpha \tau p(v \cdot \eta) - \sum_{k=0}^m \int_{\Gamma_k} \left[\alpha^{k-1} \tau^{k-1} p^{k-1} (v^{k-1} \cdot \eta) - \alpha^k \tau^k p^k (v^k \cdot \eta) \right] - \\
&\quad \int_{S_0} \alpha \tau p(v \cdot \eta) - \int_{S_1} \tau \gamma q(u \cdot \eta) - \sum_{k=0}^m \int_{\Gamma_k} \left[\tau^{k-1} \gamma^{k-1} q^{k-1} (u^{k-1} \cdot \eta) - \tau^k \gamma^k q^k (u^k \cdot \eta) \right] - \\
&\quad \int_{S_0} \tau \gamma q(u \cdot \eta)
\end{aligned} \tag{1.56}$$

E, usando as condições de contorno e (1.55) nas interfaces, temos

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} (\tau^k u^k \cdot v^k + \alpha^k p^k q^k) dx = - \int_{S_0} \alpha \tau p(v \cdot \eta) dS_0 \tag{1.57}$$

Pois, é claro que o primeiro, segundo, quarto e sexto termo de (1.56) anulam-se substituindo diretamente as condições nas interfaces. O quinto termo fica, usando (1.55)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m \int_{\Gamma_k} \left[\tau^{k-1} \gamma^{k-1} q^{k-1}(u^{k-1}, \eta) - \tau^k \gamma^k q^k(u^k, \eta) \right] &= \sum_{k=0}^m \int_{\Gamma_k} \left[\frac{\tau^{k-1}}{\beta^{k-1}} \beta^{k-1} \gamma^{k-1} q^{k-1}(u^{k-1}, \eta) - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\tau^k}{\beta^k} \beta^k \gamma^k q^k(u^k, \eta) \right] \\
 &= \sum_{k=0}^m \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\tau^{k-1}}{\beta^{k-1}} - \frac{\tau^k}{\beta^k} \right) \gamma^k q^k \beta^k(u^k, \eta) \\
 &= \sum_{k=0}^m \int_{\Gamma_k} \frac{\gamma^k}{\beta^{k-1}} (\beta^{k-1} \tau^{k-1} - \beta^{k-1} \tau^k) q^k(u^k, \eta) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

e,

$$\int_0^T \int_{S_0} [\alpha p - \tau(v, \eta)]^2 = \int_0^T \int_{S_0} \alpha^2 p^2 + \int_0^T \int_{S_0} \tau^2 (v, \eta)^2 - 2\tau\alpha \int_0^T \int_{S_0} p(v, \eta) \tag{1.59}$$

Integrando (1.57) em $(0, T)$ e substituindo em (1.59), temos

$$\int_0^T \int_{S_0} [\alpha p + \tau(v, \eta)]^2 = \int_0^T \int_{S_0} \alpha^2 p^2 + \int_0^T \int_{S_0} \tau^2 (v, \eta)^2 + \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} (\tau^k u^k \cdot v^k + \alpha^k p^k q^k) \Big|_0^T$$

De onde tem-se

$$\int_0^T \int_{S_0} (\alpha^2 p^2 + \tau^2 (v, \eta)^2) = \int_0^T \int_{S_0} [\alpha p - \tau(v, \eta)]^2 - \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} (\tau^k u^k \cdot v^k + \alpha^k p^k q^k) \Big|_0^T \tag{1.60}$$

usando (1.60) para estimar o termo da direita na desigualdade (1.54)

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{S_0} [\alpha p^2 + \tau(v, \eta)^2] &\leq \max\{(\alpha^{-1}), (\tau^{-1})\} \int_0^T \int_{S_0} [\alpha^2 p^2 + \tau^2 (v, \eta)^2] \\
 &\leq C_8 \int_0^T \int_{S_0} [\alpha p - \tau(v, \eta)]^2 - C_8 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} (\tau^k u^k \cdot v^k + \alpha^k p^k q^k) \Big|_0^T
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

Substituindo em (1.54) temos

$$\begin{aligned}
 & (T - T_0) \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} \left[\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 + \tau^k |v^k|^2 + \gamma^k (q^k)^2 \right] dx + C_8 \sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} (\tau^k u^k \cdot v^k + \alpha^k p^k q^k) \Big|_0^T \\
 & \leq C_7 C_8 \int_0^T \int_{S_0} [\alpha p - \tau(v \cdot \eta)]^2
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

e a prova do Teorema segue da seguinte desigualdade:

$$\sum_{k=0}^m \int_{\Omega_k} (\tau^k u^k \cdot v^k + \alpha^k p^k q^k) \Big|_0^T \leq C_9 \left[\beta^k |u^k|^2 + \alpha^k (p^k)^2 + \tau^k |v^k|^2 + \gamma^k (q^k)^2 \right] dx \tag{1.63}$$

onde $C_9 = \max \{ \tau^k (\beta^k)^{-1}, \alpha^k (\tau^k)^{-1} \}$ □

Como um corolário, de unicidade, do Teorema 1.16 temos:

Corolário 1.17. *Com as hipóteses do Teorema 1.16, seja $\{u, p\}$ e $\{v, q\}$ soluções do problema (1.6) e (1.5) respectivamente. Suponha que*

$$\alpha p(x, t) = \tau v(x, t) \cdot \eta \quad \forall (x, t) \in \Gamma_0 \times (0, T)$$

Então, se $T > T_0$, $u = v = 0$ e $p = q = 0$ para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$

1.3 Controlabilidade exata

Como consequência do Corolário 1.17 temos que, para $T > T_0$, a expressão

$$\left[\int_0^T \int_{\Gamma_0} [\alpha p - \tau(v \cdot \eta)] \right]^{1/2} \tag{1.64}$$

define uma norma no espaço de dados iniciais (u_0, p_0) e (v_0, q_0) dos problemas (1.6) e (1.5). Denotemos por Y o espaço de Hilbert definido como sendo o fecho de $V_1 \cap D(A_1) \times V_1 \cap D(A_1)$ em $X = X_1 \times X_2$ respeito da norma (1.64). O numero obtido em (1.64) será denotado por $\| (u_0, p_0, v_0, q_0) \|_Y$.

É claro que $Y \subset X$ e

$$\begin{aligned}
 \| (u_0, p_0, v_0, q_0) \|_X^2 &= \| (u_0, p_0) \|_{X_1}^2 + \| (v_0, q_0) \|_{X_2}^2 \\
 &\leq C \| (u_0, p_0, v_0, q_0) \|_Y^2
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

para alguma constante positiva C .

O espaço dual de Y com respeito de X será denotado por Y' . Em $\Omega \times (0, T)$ considere os sistemas (1.6) e (1.7) com dado inicial $(u_0, p_0, v_0, q_0) \in Y'$. Definimos a seguir, usando o método de transposição, a solução dos problemas (1.6) e (1.7) com condições de contorno não homogêneas.

Definição 1.18. Dizemos que $(u(x, t), p(x, t), v(x, t), q(x, t)) \in C(O, T; Y')$ é uma solução de (1.6) e (1.7), se

$$\langle (u, p, v, q), (\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{v}, \tilde{q}) \rangle_X = \langle (u_0, p_0, v_0, q_0), (\tilde{u}_0, \tilde{p}_0, \tilde{v}_0, \tilde{q}_0) \rangle_X - \int_0^T \int_{\Gamma_0} [\alpha\beta Q\tilde{p} + \gamma\tau P(\tilde{n}.\eta)] d\Gamma_0 ds \quad (1.66)$$

para todo $(\tilde{u}_0, \tilde{p}_0, \tilde{v}_0, \tilde{q}_0) \in Y$ e $0 < t < T$. Aqui $(\tilde{u}_0, \tilde{p}_0)$ e $(\tilde{v}_0, \tilde{q}_0)$ são as soluções de (1.6) e (1.7) respectivamente, para funções $P, Q \in C(0, T; L^2(\Gamma_0))$ dadas.

Onde, em (1.66) é dado por

$$\langle (u, p, v, q), (\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{v}, \tilde{q}) \rangle_X = \langle (u, p), (\tilde{u}, \tilde{p}) \rangle_{X_1} + \langle (v, q), (\tilde{v}, \tilde{q}) \rangle_{X_2}$$

Definição 1.19. Uma solução de (1.6) e (1.7) a qual anula-se no tempo $t = T$ é uma função $(u(x, t), p(x, t), v(x, t), q(x, t)) \in C(0, T; Y')$ tal que

$$\langle (u, p, v, q), (\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{v}, \tilde{q}) \rangle_X = \int_0^T \int_{\Gamma_0} [\alpha\beta Q\tilde{p} + \gamma\tau P(\tilde{n}.\eta)] d\Gamma_0 ds \quad (1.67)$$

para todo $(\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{v}, \tilde{q}) \in Y$ e $0 < t < T$

Já que os sistemas (1.6) e (1.7) são lineares e reversíveis no tempo é claro que para resolver o problema de controlabilidade exata é suficiente provar que para qualquer dado inicial em Y' , sua correspondente solução pode ser levada ao equilíbrio no instante T .

Sejam $G_1 = (w_0, k_0)$ e $G_2 = (m_0, l_0)$ elementos arbitrários de Y . Denotemos por

$$(w(x, t), k(x, t)) = U_1(t)(w_0, k_0)$$

$$(m(x, t), l(x, t)) = U_2(t)(m_0, l_0)$$

Considere as seguintes funções

$$\begin{aligned} Q &= \beta (\alpha k(x, t) - \tau m(x, t) \cdot \eta) \\ P &= -\frac{\beta}{\gamma} Q \end{aligned} \quad (1.68)$$

e sejam (u, p) e (v, q) as soluções de (1.6) e (1.7) as quais se anulam no instante T , ($T > T_0$) e condições de contorno (1.68).

Considere o mapeio

$$\begin{aligned} \wedge : Y &\longrightarrow Y' \\ (G_1, G_2) &\longrightarrow \wedge(G_1, G_2) = (u, p, v, q) |_{t=0} \end{aligned}$$

Usando (1.67) em $t = 0$ e substituindo P e Q dados por (1.68) temos

$$\begin{aligned} \langle \wedge(G_1, G_2), (\tilde{u}_0, \tilde{p}_0, \tilde{v}_0, \tilde{q}_0) \rangle_X &= \int_0^T \int_{\Gamma_0} [\alpha \beta Q \tilde{p} + \gamma \tau P \tilde{v} \cdot \eta] d\Gamma_0 ds \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\gamma k - \tau m \cdot \eta) (\alpha \tilde{p} - \tau \tilde{v} \cdot \eta) d\Gamma_0 ds \\ &= \langle (G_1, G_2), (\tilde{u}_0, \tilde{p}_0, \tilde{v}_0, \tilde{q}_0) \rangle_Y \end{aligned} \quad (1.69)$$

De (1.69) conclui-se que \wedge é um isomorfismo de Y em Y' . Pondo

$$\begin{aligned} (G_1, G_2) &= \wedge^{-1}((u_0, p_0), (v_0, q_0)) \\ Q &= \beta^{-1} (\alpha k(x, t) - \tau m(x, t) \cdot \eta) \\ P &= -\frac{\beta}{\gamma} Q \end{aligned} \quad (1.70)$$

Usando (1.66) com $t = T > T_0$, temos

$$\begin{aligned} &\langle (u(x, T), p(x, T), v(x, T), q(x, T)), (U_1(t)(\tilde{u}_0, \tilde{p}_0), U_2(t)(\tilde{v}, \tilde{q})) \rangle_X = \\ &= \langle \wedge(G_1, G_2), (\tilde{u}_0, \tilde{p}_0, \tilde{v}_0, \tilde{q}_0) \rangle_X - \langle (G_1, G_2), (\tilde{u}_0, \tilde{p}_0, \tilde{v}_0, \tilde{q}_0) \rangle_Y \end{aligned}$$

para todo $(\tilde{u}_0, \tilde{p}_0, \tilde{v}_0, \tilde{q}_0) \in Y$. Usando (1.69) temos que $(u(x, T), p(x, T), v(x, T), q(x, T))$ é o funcional nulo sobre Y . Em conclusão provamos o seguinte Teorema

Teorema 1.20. *Assuma as hipóteses do Teorema 1.16. Se $T > T_0$, então para qualquer dado inicial $(u_0, p_0, v_0, q_0) \in Y'$ do problema (1.1), (1.5), (1.8), (1.8). Então existe um controle $Q(x, t) \in C(0, T; L^2(\Gamma_0))$ tal que a correspondente solução (u, p, v, q) com condições de contorno dadas por*

$$\begin{cases} u.\eta = Q, & \text{em } S_0 \times (0, T) \\ p = 0, & \text{em } S_1 \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), p(x, 0) = p_0(x) \end{cases} \quad (1.71)$$

e

$$\begin{cases} q = P, & \text{em } S_0 \times (0, T) \\ q = 0, & \text{em } S_1 \times (0, T) \\ v(x, 0) = v_0(x), q(x, 0) = q_0(x) \end{cases} \quad (1.72)$$

com $P = -\beta\gamma^{-1}Q$, satisfazem, para $x \in \Omega$

$$\begin{cases} u(x, T) = 0 \\ p(x, T) = 0 \\ v(x, T) = 0 \\ q(x, T) = 0 \end{cases} \quad (1.73)$$

Capítulo 2

Cascas de Naghdi

Nesta segunda parte do trabalho estudamos o comportamento assintótico da energia associada ao modelo dinâmico dos deslocamentos numa casca, usando a aproximação linear dada por Naghdi[34]. Uma casca é um corpo tridimensional S definido como

$$S = \left\{ p = x + zN(x) \quad \text{com} \quad x \in \Omega \quad \text{e} \quad z \in \mathbb{R} \quad \text{sendo} \quad |z| < \frac{h}{2} \right\}$$

onde h é a espessura da casca e é assumida pequena. $N(x)$ é a normal a Ω em x . Ω é chamada a superfície media da casca

Classicamente os tópicos sobre cascas tem sido estudados por muitos autores[34], [20], [6], [15], [33], entre outros. Na teoria clássica de cascas a superfície media é descrita por um sistema de coordenadas, é dizer, por uma aplicação injetiva de um aberto de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 . Esta consideração da superfície media gera equações muito complexas onde o tensor de deformação e o tensor de rotações da normal á superfície media são as desconhecidas. A complexidade destas equações vem da presença explícita dos símbolos de Christoffel, os quais, fazem pouco adequado a implementação de um esquema de multiplicadores para obter desigualdades de observabilidade os quais impliquem controle ou estabilização.

Essas limitações foram superadas pela recente aproximação dada por Yao[43] em torno de 2000. Nesta aproximação, a superfície media da casca é considerada uma variedade Riemanniana, de dimensão 2, com o produto interno induzido de \mathbb{R}^3 . Sendo assim obtém-se um modelo matemático na forma de coordenadas livres onde as ferramentas provenientes da geometria Riemanniana ajudam ao desenvolvimento do esquema de Multiplicadores.

A ferramenta básica da geometria Riemanniana usada aqui é a técnica de Bochner[8] a qual consiste em definir sistemas de coordenadas que permitam reduzir as contas ao momento de fazer as estimativas, que pelo dito acima, são aquelas onde os símbolos de Christoffel anulam-se pontualmente. Tais sistemas de coordenadas são chamadas normais e sempre existem, um exemplo bem conhecido é o sistema de coordenadas geodésico. Uma boa referencia desta técnica é [8].

Usando estas novas ferramentas, resultados de estabilização uniforme da energia associada ao modelo de Naghdi por feedbacks lineares na fronteira foram dadas por Shu Gen Chai[14]. Lasiecka e Triggiani[29] estudaram a estabilização de cascas rasas por feedbacks não lineares na fronteira. A Estabilização uniforme usando dissipação localizada no interior da superfície media, em nosso conhecimento, até agora não tinha sido provado. A dificuldade nesse caso vem das estimativas na fronteira a qual é superada usando a condição de Bardos-Lebeau-Rauch[4].

Neste capítulo e no próximo estudaremos o problema do decaimento uniforme da energia usando dissipação localizada no interior, mostraremos que a dissipação pode atuar numa região arbitrariamente pequena da superfície media e, usando o Princípio de Russell, mostrarmos a controlabilidade do sistema por controles na região de dissipação. As notações que serão usada de aqui em diante são descritas no Apêndice

Começamos nosso estudo com o modelo estacionário.

2.1 Equações de Equilíbrio

Seja M uma superfície em \mathbb{R}^3 com normal N . Seja g a métrica induzida em M pela métrica usual de \mathbb{R}^3 . Considere a variedade Riemanniana (M, g) . Suponha que a superfície media de uma casca contem uma região limitada, Ω , de M . A casca, um corpo do \mathbb{R}^3 é definido como sendo:

$$S = \left\{ p = x + zN(x) \quad \text{com } x \in \Omega \quad \text{e } z \in \mathbb{R} \quad \text{sendo } |z| < \frac{h}{2} \right\}$$

onde h é a espessura da casca que é assumida pequena e $N(x)$ é a normal a Ω em x .

A seguir vamos usar a teoria exposta no Apêndice para estudar os campos de deslocamentos do modelo de Naghdi em forma livre de coordenadas. Logo, no momento de fazer estimativas pontuais usaremos a técnica de Bochner usando referencias normais ou sistema de coordenadas geodésicos.

No modelo de Naghdi o vetor descolamento $\xi(p)$ de um ponto $p = x + zN(x) \in S$ pode ser aproximado por:

$$\xi(p) = \xi_1(x) + z\Psi(x), \quad x \in \Omega$$

onde $\xi_1(x) \in \mathbb{R}^3$ denota o vetor deslocamento da superfície média e $\Psi(x) \in \mathbb{R}^3$ representa a deformação da normal $N(x)$ para cada $x \in \Omega$

O seguinte gráfico mostra a deformação de uma casca onde a normal após a deformação continua sendo normal (caso Koiter-Love)

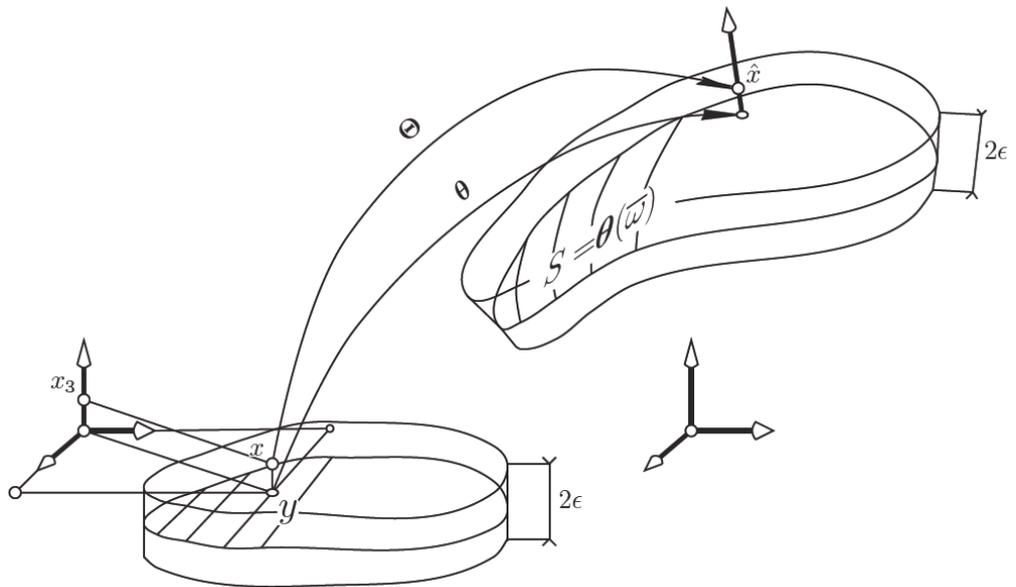


FIGURA 2.1: Configuração inicial e final de uma casca.

Considere que depois de um deslocamento da casca ela passa a ocupar a região $F(S) \subseteq \mathbb{R}^3$ sendo $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função regular. Após a deformação a superfície média agora deve estar em $F(S) = \{F(x), \quad x \in \Omega\}$. Assim a nova posição é dado por

$$F(x) = x + \xi_1(x) \tag{2.1}$$

Para a modelagem da casca de Naghdi o trabalho consiste então em achar a superfície média da casca deformada usando as condições físicas e geométricas impostas.

Naghdi assume que a normal após a deformação pode deixar de ser normal, mais a distância de um ponto sobre a normal à superfície média fica invariante, i.e, as deformações na direção normal são desprezíveis. Assim, em $\Psi(x)$ temos só duas incógnitas, que são as projeções da normal rotada sobre o $T_x M$. Decompõe-se $\xi_1(x)$ e $\Psi(x)$ por

$$\xi_1(x) = W_1(x) + w_1(x)N(x) \quad (2.2)$$

$$\Psi(x) = V(x) + w_2(x)N(x) \quad (2.3)$$

onde $W_1, V \in \chi(\Omega)$ e $w_1, w_2 \in C^\infty(\Omega)$.

Para modelar as deformações da superfície média é preciso fazer uma análise no cambio da primeira e segunda forma fundamental, veja (4.19) e o Teorema 4.30. Seja então g e \bar{g} a métrica induzida sobre a superfície média antes e após a deformação, respectivamente. O tensor

$$\Upsilon = \frac{1}{2}(\bar{g} - g)$$

é chamado o tensor variação da métrica. Agora, dado $x \in \Omega$, seja $\{E_i\}$ um referencial normal em x . Então $\{E_1(x), E_2(x), E_3(x) = N(x)\}$ formam uma base de \mathbb{R}^3 . Para determinar Υ é suficiente fazer o análise no referencial $\{E_i\}$, assim usando (2.1)

$$\begin{aligned} \bar{g}(E_i, E_j) &= \langle dF(E_i), dF(E_j) \rangle \\ &= \left\langle E_i + \tilde{\nabla}_{E_i} \xi_1, E_j + \tilde{\nabla}_{E_j} \xi_1 \right\rangle \\ &= \langle E_i, E_j \rangle + \left\langle E_i, \tilde{\nabla}_{E_j} \xi_1 \right\rangle + \left\langle \tilde{\nabla}_{E_i} \xi_1, E_j \right\rangle + \left\langle \tilde{\nabla}_{E_i} \xi_1, \tilde{\nabla}_{E_j} \xi_1 \right\rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde d denota o diferencial de funções, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\tilde{\nabla}$ denotam o produto interno e a conexão de \mathbb{R}^3 , respectivamente. Usando as equações (2.2) e as propriedades da conexão, temos

$$\tilde{\nabla}_{E_j} \xi_1 = \tilde{\nabla}_{E_j} (W_1 + w_1 N) = \tilde{\nabla}_{E_j} W_1 + E_j(w_1)N + w_1 \tilde{\nabla}_{E_j} N \quad (2.5)$$

Então

$$\begin{aligned} \left\langle E_i, \tilde{\nabla}_{E_j} \xi_1 \right\rangle &= \left\langle E_i, \tilde{\nabla}_{E_j} W_1 + E_j(w_1)N + w_1 \tilde{\nabla}_{E_j} N \right\rangle \\ &= \left\langle E_i, \tilde{\nabla}_{E_j} W_1 \right\rangle + w_1 \left\langle E_i, \tilde{\nabla}_{E_j} N \right\rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

e

$$\begin{aligned}\langle E_j, \tilde{\nabla}_{E_i} \xi_1 \rangle &= \langle E_j, \tilde{\nabla}_{E_i} W_1 + E_i(w_1)N + w_1 \tilde{\nabla}_{E_i} N \rangle \\ &= \langle E_j, \tilde{\nabla}_{E_i} W_1 \rangle + w_1 \langle E_j, \tilde{\nabla}_{E_i} N \rangle\end{aligned}\quad (2.7)$$

Substituindo as equações (2.6) e (2.7) em (2.4), temos

$$\begin{aligned}\bar{g}(E_i, E_j) &= \langle E_i, E_j \rangle + \langle E_i, \tilde{\nabla}_{E_j} W_1 \rangle + w_1 \langle E_i, \tilde{\nabla}_{E_j} N \rangle + \langle E_j, \tilde{\nabla}_{E_i} W_1 \rangle + w_1 \langle E_j, \tilde{\nabla}_{E_i} N \rangle \\ &+ \langle \tilde{\nabla}_{E_i} \xi_1, \tilde{\nabla}_{E_j} \xi_1 \rangle \\ &= g(E_i, E_j) + DW_1(E_i, E_j) + w_1 \Pi(E_j, E_i) + DW_1(E_j, E_i) + w_1 \Pi(E_i, E_j) \\ &+ \langle \tilde{\nabla}_{E_i} \xi_1, \tilde{\nabla}_{E_j} \xi_1 \rangle \\ &= g(E_i, E_j) + DW_1(E_i, E_j) + D^*W_1(E_i, E_j) + 2w_1 \Pi(E_i, E_j) + \langle \tilde{\nabla}_{E_i} \xi_1, \tilde{\nabla}_{E_j} \xi_1 \rangle\end{aligned}$$

De onde obtemos, para pequenas deformações, o **tensor cambio de métrica linearizado**,

$$\Upsilon(\xi) = \frac{1}{2}(DW_1 + D^*W_1) + w_1 \Pi \quad (2.8)$$

De forma completamente análoga obtemos o **tensor de mudança de curvatura linearizado**

$$\chi_0(\xi) = \frac{1}{2}(\bar{\Pi} - \Pi) = \frac{1}{2}[DV + D^*V + \Pi(\cdot, \nabla \cdot W_1) + \Pi(\nabla \cdot W_1, \cdot)] + w_2 \Pi + w_1 c, \quad (2.9)$$

e o tensor que captura as **rotações da normal**,

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{2}[Dw_1 + V - i(W_1)\Pi] \quad (2.10)$$

Assim, temos o campo tensorial, (2.8), (2.9) e (2.10), definido sobre a superfície média, o qual é chamado o **tensor de deformação de Naghdi**.

Para escrever de forma mais compacta, considere a seguinte mudança de variável

$$W_2 = V + i(W_1)\Pi \quad \text{para } x \in \Omega \quad (2.11)$$

Seja $x \in \Omega$ e $\{E_1, E_2\}$ um referencial normal em x . Usando que $\nabla_{E_i} E_j(x) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} DW_2(E_i, E_j) &= E_j \langle W_2, E_i \rangle = E_j \langle V + i(W_1)\Pi, E_i \rangle \\ &= E_j \langle V, E_i \rangle + E_j \langle \Pi(W_1, E_i) \rangle \\ &= DV(E_i, E_j) + D\Pi(W_1, E_i, E_j) + \Pi(E_i, \nabla_{E_j} W_1) \end{aligned}$$

Logo,

$$DW_2 = DV + \Pi(\cdot, \nabla \cdot W_1) + i(W_1)D\Pi, \quad \text{para } x \in \Omega \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.9) e (2.11) em (2.10), obtemos

$$\chi_0(\xi) = \frac{1}{2} (DW_2 + D^*W_2) + \chi_{0L}(\xi)$$

e

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{2} Dw_1 + \varphi_{0L}(\xi)$$

onde, $\chi_{0L}(\xi) = -i(W_1)D\Pi + w_1c + w_2\Pi$ e $\varphi_{0L}(\xi) = -i(W_1)\Pi + \frac{1}{2}W_2$ são os termos de ordem zero.

Denota-se por $\hat{\varepsilon}$ o tensor de deformação da casca. Usando a formulação de P. M. Nagdi(veja([35])), obtem-se a seguinte relação tensão-deformação

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}|_{\Omega}(p) &= \Upsilon(\xi) + z\chi_0(\xi) \\ i(N)\hat{\varepsilon}(p) &= \varphi_0(\xi) + \frac{z}{2}Dw_2 \\ \hat{\varepsilon}(N, N)(p) &= w_2, \end{cases} \quad (2.13)$$

para $p = x + zN(x) \in S$. Onde $\hat{\varepsilon}|_{\Omega}$ denota as componentes do tensor de deformação $\hat{\varepsilon}$ sobre a superfície média.

Seja $x \in \Omega$ e $\{E_1, E_2\}$ um referencial normal em x . Logo $\{E_1, E_2, E_3 = N\}$ formam uma base de \mathbb{R}^3 . Assumindo que o material da casca é homogêneo e isotrópico segue da teoria de elasticidade que a relação tensão-deformação da casca na superfície média é dado por

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \mu} \left[\hat{\varepsilon}_{ij} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \text{Traç}(\hat{\varepsilon})\delta_{ij} \right] \quad \text{para } x \in \Omega \quad (2.14)$$

para $1 \leq i, j \leq 3$, onde $\sigma_{ij} = \sigma(E_i, E_j)$, $\hat{\varepsilon}_{ij} = \hat{\varepsilon}(E_i, E_j)$, E é o módulo de Young e μ é o raio de Poisson. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \sigma_{ij} \hat{\varepsilon}_{ij} &= \frac{E}{1+\mu} \left[|\hat{\varepsilon}|^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} (\text{Traç} \hat{\varepsilon})^2 \right] \\ &= \frac{E}{1+\mu} \left[\sum_{i,j=1}^2 \hat{\varepsilon}_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^2 \hat{\varepsilon}_{i3}^2 + \hat{\varepsilon}_{33}^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\sum_{i=1}^2 \hat{\varepsilon}_{ii} + \hat{\varepsilon}_{33} \right)^2 \right] \\ &= \frac{E}{1+\mu} \left[|\hat{\varepsilon}_\Omega|^2 + 2|i(N)\hat{\varepsilon}|^2 + \hat{\varepsilon}^2(N, N) + \frac{\mu}{1-2\mu} (\text{Traç}(\hat{\varepsilon}|\Omega) + \hat{\varepsilon}(N, N))^2 \right] \end{aligned}$$

Para $x \in \Omega$. Então a energia cinética de deformação da casca é obtido integrando a expressão acima na região S :

$$I(\xi) = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} J(x, z) dz dx$$

onde $J(x, z) = \left[|\hat{\varepsilon}_\Omega|^2 + 2|i(N)\hat{\varepsilon}|^2 + \hat{\varepsilon}^2(N, N) + \frac{\mu}{1-2\mu} (\text{Traç}(\hat{\varepsilon}|\Omega) + \hat{\varepsilon}(N, N))^2 \right] (1 + \text{Traç}(\Pi z) + kz^2)$, $\alpha = \frac{E}{1+\mu}$, $\beta = \frac{\mu}{1-2\mu}$ e k é a curvatura Gaussiana da superfície média.

Inserindo (2.13) nos termos de $J(x, z)$, integrando em $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ e assumindo que $\frac{h}{R} \ll 1$, onde R é o menor raio principal da curvatura da superfície media, numa aproximação $I(\xi)$ é aproximadamente:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \alpha h \int_{\Omega} \left\{ |\Upsilon(\xi)|^2 + 2|\varphi_0(\xi)|^2 + w_2^2 + \beta (\text{Traç}(\Upsilon(\xi)) + w_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + \gamma \left[|\chi_0(\xi)|^2 + \frac{|Dw_2|^2}{2} + \beta \text{Traç}^2(\chi_0(\xi)) \right] \right\} \end{aligned}$$

onde $\gamma = \frac{h^2}{12}$.

Observe que $I(\xi)$ contém somente derivadas de ordem um. Define-se a seguinte forma bilinear e simétrica associada à energia de deformação, no espaço $(H^1(\Omega, \Lambda))^2 \times (H^1(\Omega))^2$,

$$B_0(\xi, \eta) = \frac{\alpha h}{2} \int_{\Omega} \mathcal{B}_0(\xi, \eta) dx$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(\xi, \eta) &= 2 \langle \Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta) \rangle + 4 \langle \varphi_0(\xi), \varphi_0(\eta) \rangle + 2w_2u_2 \\ &\quad + 2\beta (\text{Traç}(\Upsilon(\xi) + w_2)) (\text{Traç}(\Upsilon(\eta) + u_2)) + 2\gamma \langle \chi_0(\xi), \chi_0(\eta) \rangle \\ &\quad + \gamma \langle Dw_2, Du_2 \rangle + 2\gamma \beta \text{Traç}(\chi_0(\xi)) \text{Traç}(\chi_0(\eta)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\xi, \eta \in (H^1(\Omega, \Lambda))^2 \times (H^1(\Omega))^2$ são dados por

$$\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2), \quad \eta = (U_1, U_2, u_1, u_2)$$

Usaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= (L^2(\Omega, \Lambda))^2 \times (L^2(\Omega))^2 \\ H^1(\Omega) &= (H^1(\Omega, \Lambda))^2 \times (H^1(\Omega))^2 \end{aligned}$$

Seja $L \in L^2(\Omega)$ e considere um funcional associado as forças aplicadas na casca, dado por

$$\eta \in L^2(\Omega) \longrightarrow \langle L, \eta \rangle$$

Seja Ω uma casca de Naghdi, teremos o seguinte problema variacional. Achar $\xi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ talque

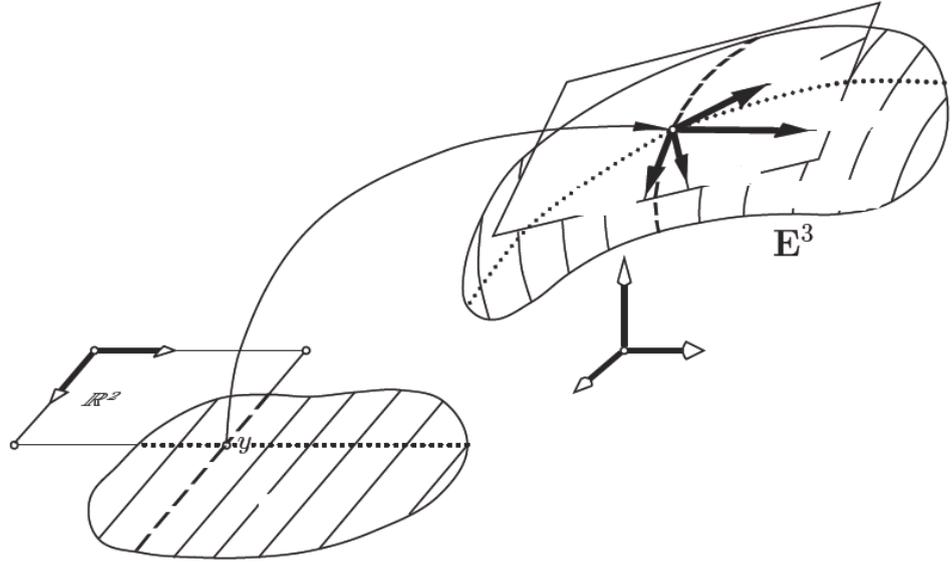
$$B_0(\xi, \eta) = \langle L, \eta \rangle, \quad \text{para todo } \eta \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \quad (2.16)$$

onde $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ são as funções em $H^1(\Omega)$ que anulam-se numa porção Γ_0 de $\Gamma = \partial\Omega$ e $B_0(\cdot, \cdot)$ é a forma bilinear (2.15).

Existência e unicidade de soluções do problema (2.16) foi provado em ([6]). Será feita a prova aqui também usando as ferramentas expostas no Capítulo (4) e a formulação obtida.

2.2 Formula de Green / elipticidade da forma Bilinear associada e Existência de Soluções Fracas

Nesta secção vamos mostrar que a formulação aqui obtida coincide com a formulação clássica [6], quando um sistema de coordenadas é fixado. Note que a nossa formulação é livre de coordenadas. Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\varphi(U) = \Omega$, é injetiva e de classe C^3 . Ver a seguinte figura


 FIGURA 2.2: Uma casca como sendo a imagem de um subconjunto de \mathbb{R}^2 .

Para cada $p = \varphi(x)$, com $x = (x_1, x_2) \in U$, temos que $\{a_1 = d\varphi_x(\bar{e}_1), a_2 = d\varphi_x(\bar{e}_2)\}$ formam uma base de $T_p\Omega$. Então avaliando o tensor cambio de métrica (2.8) nesta base, temos

$$\begin{aligned}
 \Upsilon(\xi)(a_\alpha, a_\beta) &= \frac{1}{2} \{DW_1(a_\alpha, a_\beta) + D^*W_1(a_\alpha, a_\beta)\} + w_1\Pi(a_\alpha, a_\beta) \\
 &= \frac{1}{2} \{ \langle \nabla_{a_\beta} W_1, a_\alpha \rangle + \langle \nabla_{a_\alpha} W_1, a_\beta \rangle \} + w_1 \langle \tilde{\nabla}_{a_\alpha} a_3, a_\beta \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \{ \langle \nabla_{a_\beta} (W_{1\sigma} a_\sigma), a_\alpha \rangle + \langle \nabla_{a_\alpha} (W_{1\sigma} a_\sigma), a_\beta \rangle \} + w_1 \langle \tilde{\nabla}_{a_\alpha} a_3, a_\beta \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \{ \langle a_\beta (W_{1\sigma}) a_\sigma + W_{1\sigma} \Gamma_{\rho}^{\beta\sigma} a_\rho, a_\alpha \rangle + \langle a_\alpha (W_{1\sigma}) a_\sigma + W_{1\sigma} \Gamma_{\rho}^{\alpha\sigma} a_\rho, a_\beta \rangle \} + \\
 &+ w_1 \langle \tilde{\nabla}_{a_\alpha} a_3, a_\beta \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \{ a_\beta (W_{1\sigma}) \langle a_\sigma, a_\alpha \rangle + W_{1\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} \langle a_\rho, a_\alpha \rangle + a_\alpha (W_{1\sigma}) \langle a_\sigma, a_\beta \rangle + W_{1\sigma} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\rho} \langle a_\rho, a_\beta \rangle \} + \\
 &+ w_1 \langle \tilde{\nabla}_{a_\alpha} a_3, a_\beta \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \{ a_\beta (W_{1\alpha}) + W_{1\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} + a_\alpha (W_{1\beta}) + W_{1\sigma} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta} \} + w_1 \langle \tilde{\nabla}_{a_\alpha} a_3, a_\beta \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \{ W_{1\alpha|\beta} + W_{1\beta|\alpha} \} + w_1 \langle \tilde{\nabla}_{a_\alpha} a_3, a_\beta \rangle
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

..

onde $a_3 = N$ e $W_{1\alpha|\beta} = a_\beta(W_{1\alpha}) + W_{1\sigma}\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha$. Usando a compatibilidade da conexão (4.1) com a métrica, temos que $\langle \tilde{\nabla}_{a_\alpha}, a_\beta \rangle = -\langle a_3, \tilde{\nabla}_{a_\alpha} a_\beta \rangle = -b_{\alpha\beta}$. Substituindo em (2.17), temos finalmente

$$\begin{aligned}\Upsilon(\xi) &= \frac{1}{2} \{W_{1\alpha|\beta} + W_{1\beta|\alpha}\} - w_1 \langle \tilde{\nabla}_{a_\alpha} a_3, a_\beta \rangle \\ \Upsilon(\xi) &= \frac{1}{2} \{W_{1\alpha|\beta} + W_{1\beta|\alpha}\} - w_1 b_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

que é o tensor obtido em[15]. De forma análoga verifica-se a igualdade para o tensor mudança de curvatura e rotação da normal.

A seguir, obteremos uma identidade de Green. Dados $x \in \Omega$ e $G \in T^2(\Omega)$, $\langle G, i(X)D\Pi \rangle$ é um funcional linear em relação a $X \in T_x\Omega$. Logo, existe um vetor em $T_x\Omega$, denotado por PG , tal que:

$$\langle G, i(X)D\Pi \rangle = \langle PG, X \rangle \quad \text{para todo } X \in T_x(\Omega). \quad (2.18)$$

Assim, $P : T^2(\Omega) \rightarrow \chi(\Omega)$ é um operador linear.

Teorema 2.1. *Considere a forma bilinear $B_0(\cdot, \cdot)$ dada por (2.15). Dados $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2)$ e $\eta = (U_1, U_2, u_1, u_2) \in H^1(\Omega)$, tem-se*

$$B_0(\xi, \eta) = (A_0\xi, \eta)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Gamma} \partial(A_0\xi, \eta) d\Gamma.$$

$$A(\xi) = -(\Delta_\beta W_1 + F_1(\xi), \gamma \Delta_\beta W_2 + F_2(\xi), \Delta w_1 + f_1(\xi), \gamma \Delta w_2 + f_2(\xi))$$

$F_i(\xi), f_i(\xi)$ são os termos de primer ordem (≤ 1), em relação a ξ , para $i = 1, 2$. $\Delta_\beta = -[\delta d + 2(1 + \beta)d\delta]$ e Δ são os operadores do tipo Hodge-Laplace e Laplace-Beltrami, respectivamente.

Demonstração. Usando a formula (2.15), temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} B_0(\xi, \eta) dx &= 2(\Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta))_{L^2(\Omega, T^2)} + 4(\varphi_0(\xi), \varphi_0(\eta))_{L^2(\Omega, \Lambda)} + 2(w_2, u_2)_{L^2(\Omega)} + \\ &+ 2\beta(\text{Traç}(\Upsilon(\xi)) + w_2, \text{Traç}(\Upsilon(\eta)) + u_2)_{L^2(\Omega)} + 2\gamma(\xi_0(\xi), \xi_0(\eta))_{L^2(\Omega, T^2)} + \\ &+ \gamma(Dw_2, Du_2)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + 2\gamma\beta(\text{Traç}(\xi_0(\xi)), \text{Traç}(\xi_0(\eta)))_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \quad (2.19)$$

Denotaremos todos os termos de ordem (≤ 1) por $F(\xi)$, assim $F(\xi)$ pode variar de linha a linha. A ideia da demonstração é integrar por partes, usando as técnicas dadas no

apêndice, trocando as derivadas em η para ξ . Faremos isso termo a termo.

$$\begin{aligned}
 2(\Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta))_{L^2(\Omega, T^2)} &= 2 \left(\frac{1}{2} (DW_1 + D^*W_1) + w_1\Pi, \frac{1}{2} (DU_1 + D^*U_1) + u_1\Pi \right)_{L^2(\Omega, T^2)} \\
 &= \frac{1}{2} (DW_1, DU_1)_{L^2(\Omega, T^2)} + \frac{1}{2} (DW_1, D^*U_1)_{L^2(\Omega, T^2)} + \\
 &+ \frac{1}{2} (D^*W_1, DU_1)_{L^2(\Omega, T^2)} + \frac{1}{2} (D^*W_1, D^*U_1)_{L^2(\Omega, T^2)} + \\
 &+ (DW_1 + D^*W_1, u_1\Pi)_{L^2(\Omega, T^2)} + (DU_1 + D^*U_1, w_1\Pi)_{L^2(\Omega, T^2)} + \\
 &+ 2(w_1\Pi, u_1\Pi)_{L^2(\Omega, T^2)} \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
 \langle D^*W_1, D^*U_1 \rangle &= \sum_{i,j=1}^2 D^*W_1(E_i, E_j) D^*U_1(E_i, E_j) = \sum_{i,j=1}^2 D^*W_1(E_j, E_i) D^*U_1(E_j, E_i) \\
 &= \sum_{i,j=1}^2 D^*W_1(E_i, E_j) D^*U_1(E_i, E_j) = \langle DW_1, DU_1 \rangle \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

e, usando a simetria da segunda forma fundamental (4.18), tem-se

$$\begin{aligned}
 \langle D^*W_1, u_1\Pi \rangle &= \sum_{i,j=1}^2 u_1 D^*W_1(E_i, E_j) \Pi(E_i, E_j) = \sum_{i,j=1}^2 u_1 DW_1(E_j, E_i) \Pi(E_i, E_j) \\
 &= \sum_{i,j=1}^2 u_1 DW_1(E_i, E_j) \Pi(E_j, E_i) = \sum_{i,j=1}^2 u_1 DW_1(E_i, E_j) \Pi(E_i, E_j) \\
 &= \langle DW_1, u\Pi \rangle \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Substituindo (2.21) e (2.22) em (2.20), segue, omitindo por simplicidade o espaço de integração,

$$\begin{aligned}
 2(\Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta)) &= (DW_1, DU_1) + (D^*W_1, DU_1) + 2(DW_1, u_1\Pi) \\
 &+ 2(DU_1, w_1\Pi) + 2(W_1\Pi, U_1\Pi) \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Agora usando o Teorema 4.58 para (DW_1, DU_1) e (D^*W_1, DU_1) , temos

$$\begin{aligned}
 (DW_1, DU_1)_{L^2(\Omega, T^2)} &= (\Delta W_1 - i(W_1)\text{Ric}, U_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + \int_{\Gamma} \langle \bar{\nabla}_{\nu} W_1, U_1 \rangle d\Gamma \\
 (D^*W_1, DU_1)_{L^2(\Omega, T^2)} &= (d\delta W_1 - i(W_1)\text{Ric}, U_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + \int_{\Gamma} \langle \nabla_{U_1} W_1, \nu \rangle d\Gamma \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

e o Teorema 4.56 para $(DU_1, w_1\Pi)$. Note que o termo $(DW_1, u_1\Pi)$ não precisa ser integrado por partes.

$$2(DU_1, w_1\Pi) = 2(-Q(w_1\Pi), U_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + 2 \int_{\Gamma} \langle i(\nu)(w_1\Pi)^*, U_1 \rangle d\Gamma \quad (2.25)$$

Substituindo (2.24) e (2.25) em (2.23), tem-se

$$\begin{aligned} 2(\Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta)) &= (\Delta W_1 + 2d\delta - 2i(W_1)\text{Ric} - 2Q(w_1\Pi), U_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} \\ &+ \int_{\Gamma} \{DW_1(U_1, \nu) + D^*W_1(U_1, \nu) + 2w_1\Pi(U_1, \nu)\} \\ &+ 2(DW_1, u_1\Pi) + (w_1\Pi, u_1\Pi) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Seja $\{E_i\}_{i=1}^2$ um referencial normal em $x \in \Omega$, então

$$\begin{aligned} 2(DW_1, u_1\Pi) &= 2 \int_{\Omega} \langle DW_1, u_1\Pi \rangle dx = 2 \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} DW_1(E_i, E_j) u_1\Pi(E_i, E_j) dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 DW_1(E_i, E_j) u_1\Pi(E_i, E_j) \right) u_1(x) dx = 2 \int_{\Omega} \langle DW_1, \Pi \rangle u_1 dx \\ &= 2(\langle DW_1, \Pi \rangle, u_1) \end{aligned} \quad (2.27)$$

e

$$\begin{aligned} (w_1\Pi, u_1\Pi)_{L^2(\Omega, T^2)} &= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} w_1\Pi(E_i, E_j) u_1\Pi(E_i, E_j) dx \\ &= \int_{\Omega} |\Pi|^2 w_1 u_1 dx = (|\Pi|^2 w_1, u_1) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) e (2.27) em (2.26) obtemos

$$\begin{aligned} 2(\Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta))_{L^2(\Omega, T^2)} &= (\Delta W_1 + d\delta W_1 - 2i(W_1)\text{Ric} - 2Q(w_1\Pi), U_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} \\ &+ 2 \int_{\Gamma} \Upsilon(\xi)(\nu, U_1) d\Gamma + (2\langle DW_1, \Pi \rangle + w_1|\Pi|^2, u_1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para superfícies em dimensão 2, tem-se que $\text{Ric} = kg$, onde k é a curvatura Gaussiana e g a métrica.

Seja $x \in \Omega$ e $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de $T_x\Omega$. Então, para $X, Y \in \chi(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} R(e_i, X, e_i, Y) &= \langle X, e_j \rangle \langle Y, e_j \rangle R(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ &= k \langle X, e_j \rangle \langle Y, e_j \rangle \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \text{Ric}(X, Y) &= R(e_1, X, e_1, Y) + R(e_2, X, e_2, Y) \\
 &= k \langle X, e_2 \rangle \langle Y, e_2 \rangle + k \langle X, e_1 \rangle \langle Y, e_1 \rangle \\
 &= k \langle X, Y \rangle
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Dai segue que se $X \in \chi(\Omega)$, tem-se $2i(W_1)\text{Ric}(X) = 2\text{Ric}(X, Y) = 2 \langle X, W_1 \rangle$, i.e.,

$$2i(W_1)\text{Ric} = 2kW_1 \tag{2.31}$$

Agora determinemos $Q(w_1\Pi)$. Pela definição (4.34), para $X \in \chi(\Omega)$,

$$\langle Q(w_1\Pi), X \rangle = \text{Traç}[i(X)D(w_1\Pi)]$$

Seja $x \in \Omega$ e $\{E_i\}_{i=1}^2$ um referencial normal em x . Então,

$$\begin{aligned}
 \langle Q(w_1\Pi), X \rangle &= \sum_{i=1}^2 i(X)D(w_1\Pi)(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^2 D(w_1\Pi)(X, E_i, E_i) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \{E_i(w_1\Pi(X, E_i)) - w_1\Pi(\nabla_{E_i}X, E_i)\} \\
 &= \sum_{i=1}^2 \{E_i(w_1)\Pi(X, E_i) + w_1E_i(\Pi(X, E_i)) - w_1\Pi(\nabla_{E_i}X, E_i)\} \\
 &= \Pi(X, dw) + w_1 \sum_{i=1}^2 \{E_i(\Pi(X, E_i)) - w_1\Pi(\nabla_{E_i}X, E_i)\} \\
 &= \langle i(dw_1)\Pi, X \rangle + w_1 \sum_{i=1}^2 D\Pi(X, E_i, E_i) \\
 &= \langle i(dw_1)\Pi, X \rangle + w_1 \sum_{i=1}^2 D\Pi(E_i, E_i, X) \\
 &= \langle i(dw_1)\Pi, X \rangle + w_1 \sum_{i=1}^2 X(\Pi(E_i, E_i)) \\
 &= \langle i(dw_1)\Pi, X \rangle + w_1 X(\text{Traç}\Pi) \\
 &= \langle i(dw_1)\Pi, X \rangle + w_1 \langle d(\text{Traç}\Pi), X \rangle
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Q(w_1\Pi) = i(dw_1)\Pi + w_1d(\text{Traç}\Pi) \tag{2.32}$$

Substituindo (2.32), (2.31) em (2.29), obtemos

$$\begin{aligned}
2(\Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta))_{L^2(\Omega, T^2)} &= ((\delta d + 2d\delta)W_1 - 2kW_1 - i(dw_1)\Pi - w_1d(\text{Traç}\Pi), U_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} \\
&+ 2 \int_{\Gamma} \Upsilon(\xi)(\nu, U_1) d\Gamma + (2 \langle DW_1, \Pi \rangle + w_1|\Pi|^2, u_1) \\
&= ((\delta d + 2d\delta)W_1 + F(\xi), U_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + (F(\xi), u_1) \\
&+ 2 \int_{\Gamma} \Upsilon(\xi)(\nu, U_1) d\Gamma \tag{2.33}
\end{aligned}$$

O segundo termo do lado direito de (2.19) será analisado a seguir

$$\begin{aligned}
4(\varphi_0(\xi), \varphi_0(\eta))_{L^2(\Omega, \Lambda)} &= 4 \left(\frac{1}{2}Dw_1 - i(W_1)\Pi + \frac{1}{2}W_2, \frac{1}{2}DU_1 - i(U_1)\Pi + \frac{1}{2}U_2 \right) \\
&= (Dw_1, Du_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} - 2(Dw_1, i(U_1)\Pi)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + (Dw_1, U_2)_{L^2(\Omega, \Lambda)} \\
&- 2(i(W_1)\Pi, U_2)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + 4(i(W_1)\Pi, i(U_1)\Pi)_{L^2(\Omega, \Lambda)} - 2(i(W_1)\Pi, U_2)_{L^2(\Omega, \Lambda)} \\
&+ (W_2, Du_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} - 2(w_2, i(U_1)\Pi)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + (W_2, U_2)_{L^2(\Omega, \Lambda)} \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Note agora que os termos que precisam ser integrados em (2.34) são $(Dw_1, Du_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)}$, $2(i(W_1)\pi, Du_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)}$ e $(W_2, Du_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)}$. Integrando cada um deles e usando o lema 4.46 e o Teorema 4.54, segue

$$\begin{aligned}
(Dw_1, Du_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \langle Dw_1, E_i \rangle \langle Du_1, E_i \rangle dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i(w_1) E_i(u_1) dx \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i(E_i(w_1)u_1) dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i E_i(w_1)u_1 dx \\
&= - \int_{\Omega} \Delta w_1 u_1 dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} \nu_i E_i(w_1) u_1 d\Gamma \\
&= - \int_{\Omega} \Delta w_1 u_1 dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} u_1 d\Gamma \\
&= (-\Delta w_1, u_1) + \int_{\Gamma} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} u_1 d\Gamma \tag{2.35}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
2(i(W_1)\pi, Du_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} &= 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \Pi(W_1, E_i) E_i(u_1) dx \\
&= 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i (\Pi(W_1, E_i) u_1) dx - 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i (\Pi(W_1, E_i)) u_1 dx \\
&= 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} \Pi(W_1, \nu_i, E_i) u_1 d\Gamma - 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i (\langle \bar{\nabla}_{W_1} N, E_i \rangle) u_1 dx \\
&= 2 \int_{\Gamma} \Pi(W_1, \nu) u_1 d\Gamma - 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{W_1} N, E_i \rangle u_1 dx \\
&= 2 \int_{\Gamma} \Pi(W_1, \nu) u_1 d\Gamma - 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} D(\bar{\nabla}_{W_1} N) (E_i, E_i) u_1 dx \\
&= 2 \int_{\Gamma} \Pi(W_1, \nu) u_1 d\Gamma - 2 \int_{\Omega} \text{Traç} [D(\bar{\nabla}_{W_1} N)] u_1 dx \\
&= 2 \int_{\Gamma} \Pi(W_1, \nu) u_1 d\Gamma - 2(F(\xi), u_1) \tag{2.36}
\end{aligned}$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de \mathbb{R}^3 com a métrica Euclidiana.

$$\begin{aligned}
(W_2, Du_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \langle W_2, E_i \rangle E_i(u_1) dx \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i (\langle W_2, E_i \rangle u_1) dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i (\langle W_2, E_i \rangle) u_1 dx \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} \langle W_2, \nu_i E_i \rangle u_1 d\Gamma - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} DW_2(E_i, E_i) u_1 dx \\
&= \int_{\Gamma} \langle W_2, \nu \rangle u_1 d\Gamma - (\text{Traç}(DW_2), u_1) \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Usando a simetria da segunda forma fundamental (4.18), temos

$$\begin{aligned}
2(Dw_1, i(U_1)\Pi)_{L^2(\Omega, \Lambda)} &= 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \Pi(U_1, E_i) E_i(w_1) dx \\
&= 2 \int_{\Omega} \Pi(U_1, Dw_1) dx = 2 \int_{\Omega} \Pi(Dw_1, U_1) dx \\
&= 2 \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla}_{Dw_1} N, U_1 \rangle dx = (F(\xi), U_1)_{L^2(\Omega, \Lambda)} \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
 4(i(W_1)\Pi, i(U_1)\Pi) &= 4 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \Pi(W_1, E_i) \Pi(U_1, E_i) dx \\
 &= 4 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \langle \bar{\nabla}_{W_1} N, E_i \rangle \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, U_1 \rangle dx \\
 &= 4 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \langle \langle \bar{\nabla}_{W_1} N, E_i \rangle \bar{\nabla}_{E_i} N, U_1 \rangle dx = 4(F(\xi), U_1) \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

Substituindo (2.39), (2.38), (2.37), (2.36), (2.35) em (2.34), obtemos

$$\begin{aligned}
 4(\varphi_0(\xi), \varphi_0(\eta))_{L^2(\Omega, \Lambda)} &= (-\Delta w_1, u_1) + \int_{\Gamma} \langle Dw_1, \nu \rangle d\Gamma + (F(\xi), U_1) + (Dw_1, U_2) \\
 &\quad - 2 \int_{\Gamma} \Pi(W_1, \nu) d\Gamma + (F(\xi), u_1) + (F(\xi), U_2) + \int_{\Gamma} \langle W_2, \nu \rangle u_1 d\Gamma \\
 &= (-\Delta w_1 + F(\xi), u_1) + 2 \int_{\Gamma} \left\langle \frac{1}{2} Dw_1 - i(W_1)\Pi + \frac{1}{2} W_2, \nu \right\rangle u_1 d\Gamma \\
 &\quad + (F(\xi), U_1) + (F(\xi), U_2) \\
 &= (-\Delta w_1 + F(\xi), u_1) + 2 \int_{\Gamma} \langle \varphi_0(\xi), \nu \rangle u_1 d\Gamma + (F(\xi), U_1) \\
 &\quad + (F(\xi), U_2) \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Continuando com o seguinte termo,

$$\begin{aligned}
 2\beta(\text{Traç}\Upsilon(\xi) + w_2, \text{Traç}\Upsilon(\eta) + u_2) &= 2\beta(\text{Traç}\Upsilon(\xi), \text{Traç}\Upsilon(\eta)) + 2\beta(\text{Traç}\Upsilon(\xi), u_2) \\
 &\quad + 2\beta(w_2, \text{Traç}\Upsilon(\eta)) + (w_2, u_2) \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

Notando que, pela formula (4.26), tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{Traç}\Upsilon(\xi) &= \sum_{i=1}^2 \Upsilon(\xi)(E_i, E_i) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} (DW_1 + D^*W_1)(E_i, E_i) + w_1 \Pi(E_i, E_i) \right\} \\
 &= \text{Traç}(DW_1) + w_1 \text{Traç}(\Pi) \\
 &= \sum_{i=1}^2 DW_1(E_i, E_i) + w_1 \text{Traç}(\Pi) = \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i} W_1, E_i \rangle + w_1 \text{Traç}(\Pi) \\
 &= \sum_{i=1}^2 i(E_i) \nabla_{E_i} W_1 + w_1 \text{Traç}(\Pi) \\
 &= -\delta W_1 + w_1 \text{Traç}(\Pi)
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
2\beta (\text{Traç}\Upsilon(\xi), \text{Traç}\Upsilon(\eta)) &= 2\beta (-\delta W_1 + w_1 \text{Traç}(\Pi), -\delta U_1 + u_1 \text{Traç}(\Pi)) \\
&= 2\beta (\delta W_1, \delta U_1) - 2\beta (\delta W_1, u_1 \text{Traç}(\Pi)) - 2\beta (w_1 \text{Traç}(\Pi), \delta U_1) \\
&\quad + (w_1 \text{Traç}(\Pi), u_1 \text{Traç}(\Pi))
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Agora, usando as formulas do Teorema 4.55, temos

$$\begin{aligned}
2\beta (\text{Traç}\Upsilon(\xi), \text{Traç}\Upsilon(\eta)) &= 2\beta (d\delta W_1, U_1) - 2\beta \int_{\Gamma} \delta W_1 \langle U_1, \nu \rangle d\Gamma - 2\beta (\delta W_1 \text{Traç}(\Pi), u_1) \\
&\quad - 2\beta (d(w_1 \text{Traç}\Pi), U_1) + 2\beta \int_{\Gamma} w_1 \text{Traç}\Pi \langle U_1, \nu \rangle d\Gamma + (w_1 \text{Traç}^2\Pi, u_1)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Alem disso,

$$\begin{aligned}
\langle d(w_1 \text{Traç}\Pi), E_i \rangle &= E_i (w_1 \text{Traç}\Pi) = E_i(w_1) \text{Traç}\Pi + w_1 E_i(\text{Traç}\Pi) \\
&= \langle Dw_1, E_i \rangle \text{Traç}\Pi + w_1 \langle d(\text{Traç}\Pi), E_i \rangle \\
&= \langle Dw_1 \text{Traç}\Pi + w_1 (d(\text{Traç}\Pi)), E_i \rangle
\end{aligned} \tag{2.44}$$

De (2.44) concluímos que

$$d(w_1 \text{Traç}\Pi) = Dw_1 \text{Traç}\Pi + w_1 (d(\text{Traç}\Pi)) \tag{2.45}$$

Substituindo (2.45) em (2.43), temos

$$\begin{aligned}
2\beta (\text{Traç}\Upsilon(\xi), \text{Traç}\Upsilon(\eta)) &= 2\beta (d\delta W_1 + F(\xi), U_1) + 2\beta \int_{\Gamma} \text{Traç}(DW_1) \langle U_1, \nu \rangle d\Gamma + (F(\xi), u_1) \\
&\quad + 2\beta \int_{\Gamma} w_1 \text{Traç}\Pi \langle U_1, \nu \rangle + (w_1 \text{Traç}^2\Pi, u_1) \\
&= 2\beta (d\delta W_1 + F(\xi), U_1) + 2\beta \int_{\Gamma} \text{Traç}\Upsilon(\xi) \langle U_1, \nu \rangle d\Gamma + (F(\xi), u_1)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Continuando com o seguinte termo de (2.41)

$$\begin{aligned}
2\beta (w_2, \text{Traç}\Upsilon(\eta)) &= 2\beta (w_2, -\delta U_1 + u_1 \text{Traç}\Pi) \\
&= -2\beta (w_2, \delta U_1) + (w_2, u_1 \text{Traç}\Pi) \\
&= -2\beta (dw_2, U_1) + 2\beta \int_{\Gamma} w_2 \langle U_1, \nu \rangle d\Gamma + 2\beta (\text{Traç}\Pi w_2, u_1)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Substituindo (2.47) e (2.46) em (2.41), temos

$$\begin{aligned}
2\beta (\text{Traç}\Upsilon(\xi) + w_2, \text{Traç}\Upsilon(\eta) + u_2) &= 2\beta (d\delta W_1 + F(\xi), U_1) + 2\beta \int_{\Gamma} \text{Traç}\Upsilon(\xi) \langle U_1, \nu \rangle d\Gamma \\
&+ (F(\xi), u_1) + (F(\xi), u_2) + 2\beta \int_{\Gamma} w_2 \langle U_1, \nu \rangle d\Gamma \\
&= 2\beta (d\delta W_1 + F(\xi), U_1) + 2\beta \int_{\Gamma} (\text{Traç}\Upsilon(\xi) + w_2) \langle U_1, \nu \rangle d\Gamma \\
&+ (F(\xi), u_1) + (F(\xi), u_2) \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Prosseguindo com o seguinte termo de (2.19), novamente usando as formulas (4.58), temos

$$\begin{aligned}
2\gamma (\chi_0(\xi), \chi_0(\eta))_{L^2(\Omega, T^2)} &= 2\gamma \left(\frac{1}{2}(DW_2 + D^*W_2) + \chi_{0L}(\xi), \frac{1}{2}(DU_2 + D^*U_2) + \chi_{0L}(\eta) \right) \\
&= 2\gamma (DW_2, DU_2) + 2\gamma (DW_2, D^*U_2) + 2\gamma (D^*W_2, DU_2) \\
&+ 2\gamma (D^*W_2, D^*U_2) + \gamma (DW_2 + D^*W_2, \chi_{0L}(\eta)) + \gamma (\chi_{0L}(\xi), DU_2 + D^*U_2) \\
&+ 2\gamma (\chi_{0L}(\xi), \chi_{0L}(\eta)) \\
&= \gamma (DW_2, DU_2) + \gamma (D^*W_2, DU_2) + \gamma (DW_2 + D^*W_2, \chi_{0L}(\eta)) \\
&+ \gamma (\chi_{0L}(\xi), DU_2 + D^*U_2) + 2\gamma (\chi_{0L}(\xi), \chi_{0L}(\eta)) \\
&= \gamma (\Delta - i(W_2)\text{Ric}, U_2) + \gamma \int_{\Gamma} \langle \nabla_{\nu} W_2, U_2 \rangle d\Gamma \\
&+ \gamma (d\delta W_2 - i(W_2)\text{Ric}, U_2) + \gamma \int_{\Gamma} \langle \nabla_{U_2} W_2, \nu \rangle d\Gamma + (F(\xi), U_2) \\
&+ (F(\xi), U_1) + (F(\xi), u_1) + (F(\xi), u_2) \\
&= \gamma ((\delta d + 2d\delta)W_2 + F(\xi), U_2) + \gamma \int_{\Gamma} \{DW_2(U_2, \nu) + DW_2(\nu, U_2)\} d\Gamma \\
&+ (F(\xi), U_1) + (F(\xi), u_1) + (F(\xi), u_2) \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\gamma \int_{\Gamma} \{DW_2(U_2, \nu) + DW_2(\nu, U_2)\} d\Gamma &= 2\gamma \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} (DW_2 + D^*W_2)(\nu, U_2) + \chi_{0L}(\chi)(\nu, U_2) \right\} d\Gamma \\
&- 2\gamma \int_{\Gamma} \chi_{0L}(\chi)(\nu, U_2) d\Gamma \\
&= 2\gamma \int_{\Gamma} \chi_0(\nu, U_2) d\Gamma - 2\gamma \int_{\Gamma} \chi_{0L}(\chi)(\nu, U_2) d\Gamma \\
&= 2\gamma \int_{\Gamma} \chi_0(\nu, U_2) d\Gamma + 2\gamma \int_{\Gamma} D\Pi(W_1, \nu, U_2) d\Gamma \\
&- 2\gamma \int_{\Gamma} w_1 c(\nu, U_2) - 2\gamma \int_{\Gamma} w_2 \Pi(\nu, U_2) d\Gamma \\
&= \gamma \int_{\Gamma} \chi_0(\nu, U_2) d\Gamma + 2\gamma \int_{\Gamma} \langle i(U_2)(i(W_1)D\Pi), \nu \rangle \\
&- 2\gamma \int_{\Gamma} \langle w_1 i(U_2)c, \nu \rangle d\Gamma - 2\gamma \int_{\Gamma} \langle w_2 i(U_2)\Pi, \nu \rangle d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Usando a formula (4.48) em(2.50), temos

$$\begin{aligned}
\gamma \int_{\Gamma} \{DW_2(U_2, \nu) + DW_2(\nu, U_2)\} d\Gamma &= 2\gamma \int_{\Gamma} \chi_0(\xi)(\nu, U_2) d\Gamma + 2\gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} (i(U_2)(i(W_1)D\Pi)) dx \\
&- 2\gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} (w_1 i(U_2)c) dx - 2\gamma \int_{\Omega} \operatorname{div} (w_2 i(U_2)\Pi) dx \\
&= 2\gamma \int_{\Gamma} \chi_0(\xi)(\nu, U_2) d\Gamma + (F(\xi), U_2)_{L^2(\Omega, \Lambda)}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Substituindo (2.51) em (2.49), temos

$$\begin{aligned}
2\gamma (\chi_0(\xi), \chi_0(\eta))_{L^2(\Omega, T^2)} &= \gamma ((\delta d + 2d\delta)W_2 + F(\xi), U_2)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + 2\gamma \int_{\Gamma} \chi_0(\xi)(\nu, U_2) d\Gamma \\
&+ (F(\xi), U_1) + (F(\xi), u_1) + (F(\xi), u_2)
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Prosseguindo com o seguinte termo de (2.19),

$$\begin{aligned}
\gamma (Dw_2, Du_2)_{L^2(\Omega, \Lambda)} &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i(w_2) E_i(u_2) dx \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i(E_i(w_2) u_2) dx - \gamma \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i E_i(w_2) u_2 dx \\
&= \gamma \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} \nu_i E_i(w_2) u_2 dx - \gamma \int_{\Omega} \Delta w_2 u_2 dx \\
&= \gamma \int_{\Gamma} \frac{\partial w_2}{\partial \nu} u_2 d\Gamma - \gamma \int_{\Omega} \Delta w_2 u_2 dx \\
&= \gamma (-\Delta w_2, u_2) + \gamma \int_{\Gamma} \frac{\partial w_2}{\partial \nu} u_2 d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Agora o último termo de (2.19), mais antes, notemos que

$$\begin{aligned}
\text{Traç}(\xi_0(\xi)) &= \sum_{i=1}^2 \chi_0(\xi)(E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} (DW_2 + D_2^*)(E_i, E_i) - i(W_1) D\Pi(E_i, E_i) - w_1 c(E_i, E_i) + w_2 \Pi(E_i, E_i) \right\} \\
&= \text{Traç}(DW_2) - \text{Traç}(i(W_1) D\Pi) + w_1 \text{Traç}(c) + w_2 \text{Traç}\Pi \\
&= -\delta W_2 - \text{Traç}(i(W_1) D\Pi) + w_1 \text{Traç}(c) + w_2 \text{Traç}\Pi
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Então,

$$\begin{aligned}
2\gamma\beta (\text{Traç}(\xi_0(\xi)), \text{Traç}(\xi_0(\eta))) &= 2\gamma\beta (\text{Traç}\chi_0(\xi), -\delta U_2 - \text{Traç}(i(U_1) D\Pi) + u_1 \text{Traç}(c) + u_2 \text{Traç}\Pi) \\
&= -2\gamma\beta (\text{Traç}(\xi_0(\xi)), \delta U_2) - 2\gamma\beta (\text{Traç}(\xi_0(\xi)), \text{Traç}(i(U_1) D\Pi)) \\
&\quad + 2\gamma\beta (\text{Traç}(\xi_0(\xi)), u_1 \text{Traç}(c)) + 2\gamma\beta (\text{Traç}(\xi_0(\xi)), u_2 \text{Traç}\Pi) \\
&= -2\gamma\beta (\text{Traç}(\xi_0(\xi)), \delta U_2) + (F(\xi), U_1) + (F(\xi), U_1) + (F(\xi), u_2) \\
&= -2\gamma\beta (-\delta W_2 - \text{Traç}(i(U_1) D\Pi) + u_1 \text{Traç}(c) + u_2 \text{Traç}\Pi, \delta U_2) \\
&\quad + (F(\xi), U_1) + (F(\xi), U_1) + (F(\xi), u_2) \\
&= -2\gamma\beta (-d\delta W_2 - d[\text{Traç}(i(U_1) D\Pi) + u_1 \text{Traç}(c) + u_2 \text{Traç}\Pi], U_2) \\
&\quad + 2\gamma\beta \int_{\Gamma} \text{Traç}\chi_0(\xi) \langle U_2, \nu \rangle d\Gamma + (F(\xi), U_1) + (F(\xi), U_1) + (F(\xi), u_2)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Finalmente, substituindo (2.33), (2.40), (2.48), (2.52), (2.53) e (2.54) em (2.19), temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} B_0(\xi, \eta) dx &= ((2d\delta + \delta d)W_1 + F(\xi), U_1) + (F(\xi), u_1) + 2 \int_{\Gamma} \Upsilon(\xi)(\nu, U_1) d\Gamma \\
 &+ (\Delta w_1 + F(\xi), u_1) + 2 \int_{\Gamma} \langle \varphi_0(\xi), \nu \rangle u_1 d\Gamma + (F(\xi), U_1) + (F(\xi), U_2) + 2(w_2, u_2) \\
 &+ 2\beta(d\delta W_1 + F(\xi), U_1) + 2\beta \int_{\Gamma} (\text{Tra}\zeta \Upsilon(\xi) + w_2) \langle U_1, \nu \rangle d\Gamma + (F(\xi), u_1) + (F(\xi), u_2) \\
 &+ \gamma((\delta d + 2d\delta)W_2 + F(\xi), U_2) + 2\gamma \int_{\Gamma} \chi_0(\xi)(\nu, U_2) d\Gamma + (F(\xi), U_1) + (F(\xi), u_1) \\
 &+ (F(\xi), u_2) + \gamma(-\Delta w_2, u_2) + \gamma \int_{\Gamma} u_2 \frac{\partial w_2}{\partial \nu} d\Gamma + 2\gamma\beta(d\delta W_2 + F(\xi), U_2) \\
 &+ 2\gamma\beta \int_{\Gamma} \text{Tra}\zeta \chi_0(\xi) \langle U_2, \nu \rangle d\Gamma + (F(\xi), U_1) + (F(\xi), u_1) + (F(\xi), u_2) \\
 &= ((2d\delta + \delta d + 2\beta d\delta)W_1 + F(\xi), U_1) + ((\gamma\delta d + 2\gamma d\delta + 2\gamma\beta d\delta)W_2 + F(\xi), U_2) \\
 &+ (-\Delta w_1 + F(\xi), u_1) + (-\gamma\Delta w_2 + F(\xi), u_2) + \int_{\Gamma} \langle 2i(\nu)\Upsilon(\xi), U_1 \rangle d\Gamma \\
 &+ \int_{\Gamma} 2 \langle \varphi_0(\xi), \nu \rangle u_1 d\Gamma + \int_{\Gamma} 2 \langle 2\beta(\text{Tra}\zeta \Upsilon(\xi) + w_2)\nu, U_1 \rangle d\Gamma + \int_{\Gamma} 2 \langle 2\gamma i(\nu)\chi_0(\xi), U_2 \rangle d\Gamma \\
 &+ \int_{\Gamma} 2 \langle 2\gamma\beta \text{Tra}\zeta \chi_0(\xi), U_2 \rangle d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} u_1 \frac{\partial w_2}{\partial \nu} d\Gamma \\
 &= ((\delta d + 2(1 + \beta))W_1 + F(\xi), U_2) + (\gamma(\delta d + 2(1 + \beta)d\delta)W_2, U_2) \\
 &+ (-\Delta w_1 + F(\xi), u_1) + (-\gamma\Delta w_2 + F(\xi), u_2) \\
 &+ \int_{\Gamma} \langle 2i(\nu)\Upsilon(\xi) + 2\beta(\text{Tra}\zeta \Upsilon(\xi) + w_2)\nu, U_1 \rangle d\Gamma \\
 &+ \int_{\Gamma} \langle 2i(\nu)\chi_0(\xi) + 2\gamma\beta(\text{Tra}\zeta \chi_0(\xi) + w_2)\nu, U_2 \rangle d\Gamma + \int_{\Gamma} 2 \langle \varphi_0(\xi), \nu \rangle u_1 d\Gamma \\
 &+ \int_{\Gamma} u_2 \frac{\partial w_2}{\partial \nu} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Logo,

$$\int_{\Omega} B_0(\xi, \eta) dx = (A_0(\xi), \eta) + \int_{\Gamma} \partial(A_0(\xi), \eta) d\Gamma$$

Onde, para $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2)$ e $\eta = (U_1, U_2, u_1, u_2)$,

$$A_0(\xi) = (-\Delta_{\beta} W_1 + F_1(\xi), -\gamma \Delta_{\beta} W_2 + F_2(\xi), \Delta w_1 + f_1(\xi), \gamma \Delta w_2 + f_2(\xi))$$

e,

$$\partial(A_0(\xi), \eta) = \langle B_{01}(\xi), U_1 \rangle + \langle B_{02}(\xi), U_2 \rangle + 2 \langle \varphi_0(\xi), \nu \rangle u_1 + \gamma \frac{\partial w_2}{\partial \nu} u_2$$

onde

$$\begin{cases} B_{01}(\xi) &= 2i(\nu)\Upsilon(\xi) + 2\beta(\text{Traç}\Upsilon(\xi) + w_2)\nu \\ B_{01}(\xi) &= 2\gamma i(\nu)\chi_0(\xi) + 2\gamma\beta\text{Traç}(\chi_0(\xi))\nu \end{cases}$$

E o Teorema 2.1 fica demonstrado. \square

Pelo Teorema 2.1, segue-se que o problema variacional (2.16) é equivalente ao seguinte problema de valor de contorno. Para $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2)$,

$$\begin{cases} \frac{\alpha h}{2} A_0(\xi) &= (F_1, F_2, f_1, f_2) \\ W_1|_{\Gamma_0} &= W_2|_{\Gamma_0} = w_1|_{\Gamma_0} = w_2|_{\Gamma_0} = 0 \\ \frac{\alpha h}{2} B_{01}(\xi)|_{\Gamma_1} &= \frac{\alpha h}{2} \gamma B_{02}(\xi)|_{\Gamma_1} = \alpha h \varphi_0(\xi)|_{\Gamma_1} = \frac{\alpha h}{2} \gamma \frac{\partial w_2}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Agora provaremos a elipticidade da forma bilinear B_0 . Inicialmente vamos mostrar:

Lema 2.2. *Seja $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ tal que*

$$\Upsilon(\xi) = 0, \quad \chi_0(\xi) = 0 \quad \varphi_0(\xi) = 0 \quad e \quad w_2 = 0,$$

então $\xi = 0$ para todo $x \in \Omega$. Onde Γ_0 é uma porção, com medida positiva, de Γ .

Demonstração. observe que $\Upsilon(\xi) = 0$ diz que a deformação preserva o produto interno e $\chi_0(\xi) = 0$ diz que também foi preservada a segunda forma fundamental. Assim, pelo Teorema 4.30, o movimento é rígido.

Pelas formulas (2.8), (4.11), (2.10), temos

$$DW_1 + D^*W_1 = -2w_1\Pi \quad (2.58)$$

$$DW_2 + D^*W_2 = -2w_1c + 2i(W_1)D\Pi \quad (2.59)$$

$$Dw_1 = 2i(W_1)\Pi - W_2 \quad (2.60)$$

Seja $U = -2w_1\Pi$, então

$$\begin{aligned} DU(E_i, E_j, E_k) &= E_k(U(E_i, E_j)) = -E_k(2w_1\Pi(E_i, E_j)) \\ &= -2E_k(w_1)\Pi(E_i, E_j) - 2w_1E_k(\Pi(E_i, E_j)) \\ &= -2\langle Dw_1, E_k \rangle \Pi(E_i, E_j) - 2Dw_1D\Pi(E_i, E_j, E_k) \\ &= -2(Dw_1 \otimes \Pi)(E_i, E_j, E_k) - 2w_1D\Pi(E_i, E_j, E_k) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$DU = -2Dw_1 \otimes \Pi - 2w_1D\Pi \quad (2.61)$$

Usando o Teorema 4.26, temos

$$\begin{aligned} D^2W_1(X, Y, Z) &= -\Pi(X, Y)Z(w_1) - \Pi(Z, X)Y(w_1) + \Pi(Y, Z)X(w_1) \\ &\quad + R(X, YZ, W_1) - w_1D\Pi(X, Y, Z) \end{aligned}$$

Para $X, Y, Z \in \chi(\Omega)$. Agora, seja $x \in \Omega$ e $\{E_1, E_2\}$ um referencial normal em x . Pela segunda formula (4.27), temos

$$\begin{aligned} \Delta W_1 &= -\sum_{i=1}^2 \nabla_{E_i E_i}^2 W_1 + \sum_{i,j=1}^2 R(E_i, E_j, W_1, E_j) E_i \\ &= -\sum_{i,j=1}^2 D^2W_1(E_j, E_i, E_i) E_j + kW_1 \\ &= 2i(Dw_1)\Pi - (\text{Traç}\Pi)Dw_1 + w_1D(\text{Traç}\Pi) + 2kW_1 \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde Δ é o operador de Hodge-Laplace e k é a curvatura Gaussiana. Além disso, pela formula (4.8),

$$\begin{aligned} \Delta w_1 &= \text{Traç}D^2w_1 = \sum_{i=1}^2 D^2w_1(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^2 D(Dw_1)(E_i, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^2 D(2i(W_1)\Pi - W_2)(E_i, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^2 \{2D(i(W_1)\pi)(E_i, E_i) - DW_2(E_i, E_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^2 E_i(\Pi(W_1, E_i)) - \text{div}(W_2) \\ &= 2 \sum_{i=1}^2 [D\Pi(W_1, E_i, E_i) + \Pi(\nabla_{E_i} W_1, E_i)] - \text{div}(W_2) \\ &= 2 \langle W_1, D(\text{Traç}\Pi) \rangle + \langle 2\text{Traç}(\nabla \cdot W_1, \cdot) - \text{div}(W_2) \rangle \\ &= w_1\text{Traç}(c) + \langle W_1, D(\text{Traç}\Pi) \rangle + 2\text{Traç}\Pi(\nabla \cdot W_1, \cdot) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Aplicando([3]) ao sistema de equações elípticas (??) e (2.64) obtemos que $W_1 = 0$ e $w_1 = 0$ sobre Ω . Pela formula (2.59) tem-se

$$DW_2 + D^*W_2 = 0, \quad \text{em } \Omega$$

De onde tem-se $W_2 = 0$ pelo lema (3.20). □

Finalizamos esta seção com a prova da coercividade da forma bilinear (2.15).

Teorema 2.3. *Seja $B_0(\cdot, \cdot)$ a forma bilinear dado por (2.15). Então, existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$B_0(\xi, \xi) \geq c \|\xi\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 \quad \text{para } \xi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega). \quad (2.65)$$

onde $\Gamma_0 \subset \Gamma$ com medida de Lebesgue positiva.

Demonstração. Usando as formulas (2.8), (4.11) e (2.10) em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} B_0(\xi, \xi) &\geq c_1 (|DW_1 + D^*W_1|^2 + |DW_2 + D^*W_2|^2 + |Dw_1|^2 + |Dw_2|^2) \\ &\quad - c_2 (|W_1|^2 + |W_2|^2 + w_1^2 + w_2^2) \end{aligned}$$

De onde obtemos

$$B_0(\xi, \xi) + c_2 \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1 \|\xi\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2$$

Então o resultado segue-se usando um resultado de compacidade-unicidade, veja [42], Pg 81 □

O seguinte resultado segue-se imediatamente do Teorema anterior.

Teorema 2.4. *Para $F \in L^2(\Omega)$ o problema (2.57) tem uma única solução em $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$.*

Capítulo 3

Ecuaciones de Evolución da Casca de Naghdi

Nesta seção estudaremos as equações de evolução para o modelo de cascas de Naghdi.

3.1 Modelo dinâmico de Naghdi

Primeiro faremos o estudo das equações de evolução para o modelo de cascas de Naghdi homogêneo, mostrando existência e unicidade de soluções fortes. A existência e unicidade para o modelo com dissipação interna é uma aplicação direta da teoria de perturbação de semigrupos [36].

Considere o sistema de equações de evolução de Naghdi

$$\begin{cases} \xi_{tt} + A\xi = 0 & \text{em } (0, \infty) \times \Omega \\ \xi|_{\Sigma} = 0 & \Sigma = \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \xi(0) = \xi_0, \quad \xi_t(0) = \xi_1 & \text{em } \Omega \end{cases}, \quad (3.1)$$

para $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2)$. A forma bilinear associada ao operador A é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\xi, \eta) &= 2 \langle \Upsilon(\xi), \Upsilon(\eta) \rangle + 4 \langle \varphi(\xi), \varphi(\eta) \rangle \gamma + 2\beta \left(\text{Traç}\Upsilon(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} w_2 \right) \left(\text{Traç}\Upsilon(\eta) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} u_2 \right) \\ &+ 2 \langle \chi(\xi), \chi(\eta) \rangle + 2\beta \text{Traç}\Upsilon(\xi) \text{Traç}\Upsilon(\eta) \\ &+ \langle Dw_2, Du_2 \rangle + \frac{1}{\gamma} w_2 u_2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\eta = (U_1, U_2, u_1, u_2)$ e

$$\begin{cases} \Upsilon(\xi) &= \frac{1}{2} (DW_1 + DW_1^*) + w_1 \Pi, \\ \chi(\xi) &= \frac{1}{2} (DW_2 + DW_2^*) + w_1 \Pi - \sqrt{\gamma} (i(W_1) D\Pi - w_1 c), \\ \varphi(\xi) &= \frac{1}{2} Dw_1 - i(W_1) \Pi + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} W_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

E a formula de Green (2.1) é dada por,

$$B = (A\xi, \eta)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Gamma} \partial(A\xi, \eta) \quad (3.4)$$

onde

$$B = \int_{\Omega} \mathbf{B}(\xi, \eta) dx, \quad (3.5)$$

$$\partial(A\xi, \eta) = \langle B_1(\xi), U_1 \rangle + \langle B_2(\xi), U_2 \rangle + 2 \langle \varphi(\xi), \nu \rangle + \frac{\partial w_2}{\partial \nu} u_2 \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} B_1(\xi) &= 2i(\nu)\Upsilon(\xi) + 2\beta \left(\text{Traç}\Upsilon(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} w_2 \right) \nu \\ B_2(\xi) &= 2i(\nu)\chi(\xi) + 2\beta (\text{Traç}\chi(\xi)) \nu. \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2 Existência e unicidade de soluções fortes

Nesta secção baseados nas ferramentas dadas em [22], [29], [30], [36] e [2], será estudada a existência e unicidade de soluções fortes, obtendo a regularidade necessária para obter a estabilização do modelo.

3.2.1 Espaços Funcionais

Sejam os espaços

$$\begin{aligned} V &= (H_0^1(\Omega, \Lambda))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2 \\ H &= H = (L^2(\Omega, \Lambda))^2 \times (L^2(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pela formula de Green (3.4), temos que a formulação variacional do problema (3.1) consiste em achar $\eta \in C([0, \infty); V) \cap C^1([0, \infty); H)$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\eta_t, \xi) + B(\eta, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in V \\ \eta(0) = \eta_0 \in V, \quad \eta_t(0) = \eta_0 \in H \end{cases} \quad (3.9)$$

No capítulo anterior provamos a coercividade da forma bilinear e simétrica B (veja o Teorema 2.3). Isso implica que B define um produto interno em V e identificamos ele com seu dual usando aquele produto interno. Assim temos

$$V \subset H \subset V' \quad (3.10)$$

Seja P o isomorfismo canónico de V em V' , usando o produto interno dado por B , dado por:

$$\begin{aligned} P : V &\rightarrow V' \\ \eta &\rightarrow P\eta : V \rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\rightarrow \langle P\eta, \xi \rangle_{V',V} = B(\eta, \xi) \end{aligned}$$

Assim (3.9) se escreve como

$$\frac{d}{dt}\eta_t + P\eta = 0 \quad \text{em } V' \quad (3.11)$$

Reescrevendo (3.11), temos

$$Y' = QY, \quad \text{em } V' \times H \quad (3.12)$$

onde

$$Y = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & O \\ 0 & -P \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Agora já que nosso problema é de segunda ordem, introduzimos o domínio do operador Q , como sendo

$$D(Q) = \{(\eta, \xi) \in V \times H, \quad \text{tal que, } -P\eta \in H\} \quad (3.14)$$

Assim as soluções de (3.9) ficam definidas por (3.12)-(3.14). Seguindo a teoria de semigrupos [36] e sua adaptação para cascas [29], [?], [30], temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *O operador Q é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações sobre $V \times H$*

Demonstração. É claro que o domínio do operador Q é denso em $V \times H$ já que, pela formula de integração por partes (2.1), temos

$$\langle P\eta, \xi \rangle = B(\eta, \xi) = (A\eta, \xi)$$

Isso mostra que $D(Q)$ contém o subconjunto

$$D_0 = \left\{ (\eta, \xi) \in V \times H, \quad \text{tal que,} \quad \eta \in V \cap (H_0^2(\Omega, \Lambda))^2 \times (H_0^2(\Omega))^2 \right\}$$

o qual é denso em $V \times H$.

Agora mostremos que Q é dissipativo. Com efeito, seja $(\eta, \xi) \in D(Q)$, então

$$\begin{aligned} \langle Q(\eta, \xi), (\eta, \xi) \rangle &= \langle (\xi, -P\eta), (\eta, \xi) \rangle \\ &= \langle \xi, \eta \rangle - \langle P\eta, \xi \rangle \\ &= B(\xi, \eta) - B(\xi, \eta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lembrando que estamos usando o produto interno induzido por B .

Por último para mostrar que $\text{Ran}(\lambda I + Q) = V \times H$ basta nota que isso é equivalente a provar que

$$\text{Ran}(\lambda I - P) = H.$$

Mais isso segue das imersões (3.10) e o Teorema de Lax-Milgram □

Como consequência do Teorema 3.1 temos o seguinte

Teorema 3.2. *O problema (3.9) admite uma única solução:*

$$\eta \in C([0, \infty); V), \quad \eta_t \in C([0, \infty); H). \quad (3.15)$$

Alem disso, se $(\eta_0, \xi_0) \in D(Q)$, então a solução satisfaz

$$\eta \in C^1([0, \infty); V) \cap C^2([0, \infty); H). \quad (3.16)$$

Se a solução, η satisfaz (3.15) então ela é chamada solução fraca de 3.1. Se ela satisfaz (3.16), então, ela é chamada de solução forte.

A regularidade espacial é obtida usando os Teoremas de regularidade elíptica [2] e usando coordenadas locais [19], [7]

Usando resultados clássicos da teoria de perturbação de semigrupos[36], mostra-se a existência e unicidade de soluções para o modelo como dissipação localizada:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{tt} + A\xi + a(x)\xi_t = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times \Omega \\ \xi|_{\Sigma} = 0 \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \xi(0) = \xi_0, \quad \xi_t(0) = \xi_1 \quad \text{em } \Omega \end{array} \right., \quad (3.17)$$

para $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2)$ e a uma função positiva com suporte numa região do interior de Ω . Mostraremos que o suporte de a pode ser escolhido arbitrariamente pequeno.

3.3 Desigualdades de Observabilidade

Agora mostramos nosso resultado principal deste capítulo, a estabilização de modelo de cascas de Naghdi com dissipação localizada. Fixemos algumas notações que serão usadas. Seja $b(\cdot, \cdot)$ a forma bilinear sobre $T^2(\Omega) \times T^2(\Omega)$ dado por

$$b(T_1, T_2) = \langle T_1, T_2 \rangle + \beta \text{Traç}(T_1)\text{Traç}(T_2), \quad \text{Para } T_1, T_2 \in T^2(\Omega) \quad (3.18)$$

onde $\beta > 0$ é dado em (2.15), é uma constante.

Para $W \in H^1(\Omega, \Lambda)$ seja

$$S(W) = \frac{1}{2} (DW + D^*W) \quad (3.19)$$

Agora enunciamos e mostramos alguns lemas que precisaremos.

Lema 3.3. *Existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|DW + D^*W\|_{L^2(\Omega, T^2)} \geq c \|W\|_{H^1(\Omega, \Lambda)} \quad \forall W \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \Lambda) \quad (3.20)$$

Notemos que, para $W \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega, \Lambda)$

$$\begin{aligned} b(S(W), S(W)) &= \langle S(W), S(W) \rangle + (\text{Traç}(S(W)))^2 \\ &= \frac{1}{4} |DW + D^*W|^2 + (\text{Traç}(S(W)))^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Logo,

$$b(S(W), S(W)) + |W|^2 \geq \frac{1}{4} |DW + D^*W|^2.$$

De onde, integrando em Ω e usando o lema (3.20)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [b(S(W), S(W)) + |W|^2] dx &= \frac{1}{4} \|DW + D^*W\|_{L^2(\Omega, T^2)}^2 \geq \frac{c}{4} \|W\|_{H^1(\Omega, \Lambda)}^2 \\ &\geq \frac{c}{4} \|DW\|_{L^2(\Omega, \Lambda)}^2 \\ \lambda_0 \int_{\Omega} [b(S(W), S(W)) + |W|^2] dx &\geq \|DW\|_{L^2(\Omega, \Lambda)}^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

com $\lambda_0 = \frac{4}{c}$.

Outra notação a fixar é a seguinte. Dado $W \in \chi(\Omega)$ e $T \in T^2(\Omega)$, seja $G(W, T) \in T^2(\Omega)$ dado por

$$G(W, T) = \frac{1}{2} [T(\cdot, \nabla \cdot W) + T^*(\cdot, \nabla \cdot W)] \quad (3.23)$$

Seja $V \in \chi(\Omega)$ tal que existe uma função $v \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$DV(x)(X, X) = v(x)|X|^2 \quad \text{para todo } X \in T_x\Omega, x \in \Omega \quad (3.24)$$

Para $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2) \in H^1(\Omega)$ seja $m(\xi) = (\nabla_V W_1, \nabla_V W_2, V(w_1), V(w_2))$.

Como tínhamos falado ao início, usaremos a técnica dos multiplicadores para obter uma desigualdade de observabilidade. Garantido a existência de um campo vetorial em Ω satisfazendo (3.24) nosso multiplicador será $m(\xi)$. Então multiplicando a equação (3.17) por $m(\xi)$ e integrando em Ω , obtemos

$$(\xi_{tt}, m(\xi)) + (A\xi, m(\xi)) + (a\xi_t, m(\xi)) = 0$$

E, usando a fórmula (3.4) temos

$$(\xi_{tt}, m(\xi))_{L^2(\Omega, \Lambda)} + B(\xi, m(\xi)) - \int_{\Gamma} \partial(A\xi, m(\xi)) d\Gamma = -(a\xi_t, m(\xi)) \quad (3.25)$$

Em (3.25) vamos a estimar cada um dos termos para obter a nossa desigualdade de observabilidade. Para uma melhor compreensão tais estimativas serão divididas em lemas. Começamos com B

Lema 3.4.

$$2B(\xi, m(\xi)) = \int_{\Gamma} \mathbf{B}(\xi, \xi) \langle V, \nu \rangle d\Gamma - 2 \int_{\Omega} v \mathbf{B}(\xi, \xi) + 2 \int_{\Omega} e(\xi, \xi) dx + Lo(\xi)$$

onde B é a forma bilinear dada em (3.5) e

$$e(\xi, \xi) = 2b(S(W_1), G(V, DW_1)) + 2b(S(W_2), G(V, DW_2)) + 4v|\varphi(\xi)|^2 + v|Dw_2|^2$$

Demonstração. Pela formula (3.2) temos que estimar $\Upsilon(\xi)$, $\chi(m(\xi))$, $\varphi(m(\xi))$ e $\langle Dw_2, D(V(w_2)) \rangle$. Começamos pelo primeiro termo,

$$\Upsilon(m(\xi)) = \frac{1}{2} [D(\nabla_V W) + D^*(\nabla_V W)] + V(w_1)\Pi \quad (3.26)$$

Usaremos a técnica de Bochner. Seja $x \in \Omega$ e $\{E_i\}_{i=1}^2$ um referencial normal em x . Usando as formulas (4.4), (4.6) e o Teorema 4.20, temos

$$\begin{aligned} D(\nabla_V W_1)(E_i, E_j) &= E_j \langle \nabla_V W_1, E_i \rangle \\ &= E_j (DW_1(E_i, V)) = D^2 W_1(E_i, V, E_j) + DW_1(E_i, \nabla_{E_j} V) \\ &= D^2 W_1(E_i, E_j, V) + \langle R_{VE_j} W_1, E_i \rangle + DW_1(E_i, \nabla_{E_j} V) \\ &= \nabla_V DW_1(E_i, E_j) + R(V, E_j, W_1, E_i) + DW_1(E_i, \nabla_{E_j} V) \end{aligned}$$

De donde,

$$D(\nabla_V W_1) = \nabla_V DW_1 + R(V, \cdot, W_1, \cdot) + DW_1(\cdot, \nabla \cdot V) \quad (3.27)$$

Análogamente,

$$D^*(\nabla_V W_1) = \nabla_V D^* W_1 + R(V, \cdot, W_1, \cdot) + DW_1(\cdot, \nabla \cdot V) \quad (3.28)$$

E,

$$V(w_1\Pi) = V(w_1)\Pi + w_1\nabla_V\Pi$$

assim

$$V(w_1)\Pi = V(w_1\Pi) - w_1\nabla_V\Pi \quad (3.29)$$

Substituindo (3.29), (3.28), (3.27) em (3.26), temos

$$\begin{aligned} \Upsilon(m(\xi)) &= \frac{1}{2} \{ \nabla_V (DW_1 + D^* W_1) + DW_1(\cdot, \nabla \cdot V) + DW_1(\nabla \cdot V, \cdot) \} \\ &\quad + R(V, \cdot, W_1, \cdot) + V(w_1)\Pi - w_1\nabla_V\Pi \\ &= \nabla_V \Upsilon(\xi) + G(V, DW_1) + Lo(\xi) \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde, $Lo(\xi) = R(V, \cdot, W_1, \cdot) - w_1\nabla_V\Pi$. Prosseguindo com os termos seguintes,

$$\chi(m(\xi)) = \frac{1}{2} (D(\nabla_V W_2) + D^*(\nabla_V W_2)) + V(w_2)\Pi - \sqrt{\gamma} (i(\nabla_V W_1)D\Pi - V(w_1)c) \quad (3.31)$$

agora estimando os termos de (3.31),

$$\begin{aligned}
\nabla_V (i(W_1)D\Pi) (E_i, E_j) &= D(i(W_1)D\Pi) (E_i, E_j, V) = V(i(W_1)D\Pi(E_i, E_j)) \\
&= V(D\Pi(W_1, E_i, E_j)) \\
&= D(D\Pi)(W_1, E_i, E_j, V) + D\Pi(\nabla_V W_1, E_i, E_j) \\
&= i(W_1)\nabla_V D\Pi(E_i, E_j) + i(\nabla_V W_1)D\Pi(E_i, E_j)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$i(\nabla_V W_1)D\Pi = \nabla_V (i(W_1)D\Pi) - i(W_1)\nabla_V D\Pi \quad (3.32)$$

Substituindo (3.27), (3.28), (3.29) e (3.32) em (3.31), temos

$$\begin{aligned}
\chi(m(\xi)) &= \frac{1}{2} \{ \nabla_V (DW_2 + D^*W_2) + DW_2(., \nabla.V) + DW_2(\nabla.V, .) \} \\
&+ R(V, ., W_2, .) + V(w_2\Pi) - w_2\nabla_V \Pi - \sqrt{\gamma}\nabla_V (i(W_1)D\Pi) - \sqrt{\gamma}i(W_1)\nabla_V D\Pi \\
&- \sqrt{\gamma}V(w_1c) - \sqrt{\gamma}w_1\nabla_V c \\
&= \nabla_V \chi(\xi) + G(V, DW_2) + Lo(\xi)
\end{aligned} \quad (3.33)$$

Continuando com $\varphi(\xi)$,

$$\varphi(m(\xi)) = \frac{1}{2}D(V(w_1)) - i(\nabla_V W_1)\Pi + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\nabla_V W_2 \quad (3.34)$$

Estimando os termos de (3.34),

$$\begin{aligned}
\langle D(V(w_1)), E_i \rangle &= E_i(V(w_1)) = E_i(\langle Dw_1, V \rangle) \\
&= \langle \nabla_{E_i} Dw_1, V \rangle + \langle Dw_1, \nabla_{E_i} V \rangle \\
&= \langle \nabla_V Dw_1, E_i \rangle + Dw_1(\nabla_{E_i} V)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$D(V(w_1)) = \nabla_V Dw_1 + Dw_1(\nabla.V) \quad (3.35)$$

Continuando,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_V (i(W_1)\Pi), E_i \rangle &= D(i(W_1)\Pi)(E_i, V) = V(i(W_1)\Pi(E_i)) = V(\Pi(W_1, E_i)) \\
&= D\Pi(W_1, E_i, V) + \Pi(\nabla_V W_1, E_i) \\
&= \nabla_V \Pi(W_1, E_i) + \langle i(\nabla_V W_1)\Pi, E_i \rangle \\
&= \langle i(W_1)\nabla_V \Pi, E_i \rangle + \langle i(\nabla_V W_1)\Pi, E_i \rangle
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$i(\nabla_V W_1)\Pi = \nabla_V (i(W_1)\Pi) - i(W_1)\nabla_V \Pi \quad (3.36)$$

Substituindo (3.35), (3.36) em (3.34), temos,

$$\begin{aligned}\varphi(m(\xi)) &= \frac{1}{2} (\nabla_V Dw_1 + Dw_1 (\nabla \cdot V)) - \nabla_V (i(W_1)\Pi) + i(W_1)\nabla_V \Pi + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \nabla_V W_2 \\ &= \nabla_V \varphi(\xi) + \varphi(\xi) (\nabla \cdot V) + Lo(\xi)\end{aligned}\quad (3.37)$$

Agora escrevendo a equação (3.2), com $\eta = m(\xi)$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\xi, m(\xi)) &= 2 \langle \Upsilon(\xi), \Upsilon(m(\xi)) \rangle + 4 \langle \varphi(\xi), \varphi(m(\xi)) \rangle + 2\beta \left(\text{Traç}(\Upsilon(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} w_2) \right. \\ &\quad \left. \left(\text{Traç}(\Upsilon(m(\xi)) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} V(w_2)) \right) + 2 \langle \chi(\xi), \chi(m(\xi)) \rangle + 2\beta \text{Traç}(\chi(\xi)) \text{Traç}(\chi(m(\xi))) \right) \\ &\quad + \langle Dw_2, D(V(w_2)) \rangle + \frac{1}{\gamma} w_2 V(w_2)\end{aligned}\quad (3.38)$$

Usando (3.30), (3.33) e (3.37) estimemos cada termo de (3.38).

$$\begin{aligned}2 \langle \varphi(\xi), \varphi(m(\xi)) \rangle &= 2 \langle \varphi(\xi), \nabla_V \varphi(\xi) + \varphi(\xi) (\nabla \cdot V) + Lo(\xi) \rangle \\ &= 2 \langle \varphi(\xi), \nabla_V \varphi(\xi) \rangle + 2 \langle \varphi(\xi), \varphi(\xi) (\nabla \cdot V) \rangle + Lo(\xi) \\ &= V(|\varphi(\xi)|^2) + 2 \langle \varphi(\xi), \nabla_{\varphi(\xi)} V \rangle + Lo(\xi) \\ &= V(|\varphi(\xi)|^2) + 2DV(\varphi(\xi), \varphi(\xi)) + Lo(\xi).\end{aligned}$$

De onde, usando (3.24), temos

$$2 \langle \varphi(\xi), \varphi(m(\xi)) \rangle = V(|\varphi(\xi)|^2) + 2v|\varphi(\xi)|^2 + Lo(\xi) \quad (3.39)$$

Prosseguindo com os termos de (3.38),

$$\begin{aligned}2 \langle Dw_2, D(V(w_2)) \rangle &= 2 \langle Dw_2, \nabla_V Dw_2 + Dw_2 (\nabla \cdot V) \rangle \\ &= 2 \langle Dw_2, \nabla_V Dw_2 \rangle + 2 \langle Dw_2, \nabla_{Dw_2} V \rangle \\ &= V(|Dw_2|^2) + 2v|Dw_2|^2\end{aligned}\quad (3.40)$$

E,

$$\begin{aligned}2 \langle \Upsilon(\xi), \Upsilon(m(\xi)) \rangle &= \langle \Upsilon(\xi), \nabla_V \Upsilon(\xi) + G(V, DW_1) + Lo(\xi) \rangle \\ &= V(|\Upsilon(\xi)|^2) + 2 \langle \Upsilon(\xi), G(V, DW_1) \rangle + Lo(\xi)\end{aligned}\quad (3.41)$$

Continuando com o resto de termos,

$$\begin{aligned}
 & 2\beta \left(\text{Traç}\Upsilon(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}w_2 \right) \left(\text{Traç}\Upsilon(m(\xi)) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}V(w_2) \right) = 2\beta \text{Traç}\Upsilon(\xi) \text{Traç}\Upsilon(m(\xi)) \\
 & + \frac{2\beta}{\sqrt{\gamma}} \text{Traç}\Upsilon(\xi) V(w_2) + \frac{2\beta}{\sqrt{\gamma}} w_2 \text{Traç}\Upsilon(m(\xi)) + \frac{2\beta}{\sqrt{\gamma}} w_2 V(w_2) \\
 & = 2\beta \text{Traç}\Upsilon(\xi) (\text{Traç}\nabla_V \Upsilon(\xi) + \text{Traç}G(V, DW_1) + Lo(\xi)) + \frac{2\beta}{\sqrt{\gamma}} \text{Traç}\Upsilon(\xi) V(w_2) \\
 & + \frac{2\beta}{\sqrt{\gamma}} w_2 \text{Traç}\Upsilon(m(\xi)) + \frac{\beta}{\gamma} V(w_2^2) \\
 & = 2\beta \text{Traç}\Upsilon(\xi) \text{Traç}\nabla_V \Upsilon(\xi) + 2\beta \text{Traç}\Upsilon(\xi) \text{Traç}G(V, DW_1) + \frac{2\beta}{\sqrt{\gamma}} \text{Traç}\Upsilon(\xi) V(w_2) \\
 & + \frac{2\beta}{\sqrt{\gamma}} w_2 \text{Traç}\Upsilon(m(\xi)) + \frac{\beta}{\gamma} V(w_2^2) \\
 & = \beta V \left(\left(\text{Traç}\Upsilon(\xi) + \frac{1}{\gamma} w_2 \right)^2 \right) + 2\beta \text{Traç}\Upsilon(\xi) \text{Traç}G(V, DW_1) + Lo(\xi) \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
 2 \langle \chi(\xi), \chi(m(\xi)) \rangle & = 2 \langle \chi(\xi), \nabla_V \chi(\xi) + G(V, DW_2) + Lo(\xi) \rangle \\
 & = 2 \langle \chi(\xi), \nabla_V \chi(\xi) \rangle + 2 \langle \chi(\xi), G(V, DW_2) \rangle + Lo(\xi) \\
 & = V(|\chi(\xi)|^2) + 2 \langle \chi(\xi), G(V, DW_2) \rangle + Lo(\xi) \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
 2\beta \text{Traç}(\chi(\xi)) \beta \text{Traç}(\chi(m(\xi))) & = 2\beta \text{Traç}(\chi(\xi)) (\text{Traç}\nabla_V \chi(\xi) + \text{Traç}G(V, DW_2) + Lo(\xi)) \\
 & = \beta V \left((\text{Traç}\chi(\xi))^2 \right) + 2\beta \text{Traç}\chi(\xi) \text{Traç}G(V, DW_2) + Lo(\xi) \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Substituindo (3.44), (3.43), (3.42), (3.41), (3.40) e (3.39) em (3.38), tem-se

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\xi, m(\xi)) &= V (|\Upsilon(\xi)|^2) + 2 \langle \Upsilon(\xi), G(V, DW_1) \rangle + 2V (|\varphi(\xi)|^2) + 4v|\varphi(\xi)|^2 \\
 &+ \beta V \left(\left(\text{Traç}\Upsilon(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}w_2 \right)^2 \right) + 2\beta \text{Traç}\Upsilon(\xi) \text{Traç}G(V, DW_1) \\
 &+ 2\beta \text{Traç}\Upsilon(\xi) \text{Traç}G(V, DW_1) + V (|\chi(\xi)|^2) + 2 \langle \chi(\xi), G(V, DW_2) \rangle + \beta V \left((\text{Traç}\chi(\xi))^2 \right) \\
 &+ 2\beta \text{Traç}\chi(\xi) \text{Traç}G(V, DW_2) + \frac{1}{2}V (|Dw_2|^2) + v|Dw_2|^2 \\
 &+ \frac{1}{\gamma}V(w_2^2) + Lo(\xi) \\
 &= \frac{1}{2}V \left(2|\Upsilon(\xi)|^2 + 4|\varphi(\xi)|^2 + 2\beta \left(\text{Traç}\Upsilon(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}w_2 \right)^2 + 2|\chi(\xi)|^2 + 2\beta (\text{Traç}\chi(\xi))^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(|Dw_2|^2 + \frac{1}{\gamma}w_2^2 \right) + 2 \langle \Upsilon(\xi), G(V, DW_1) \rangle + 4v|\varphi(\xi)|^2 + 2\beta \text{Traç}\Upsilon(\xi) \text{Traç}G(V, DW_1) \\
 &+ 2 \langle \chi(\xi), G(V, DW_2) \rangle + 2\beta \text{Traç}\chi(\xi) \text{Traç}G(V, DW_2) + v|Dw_2|^2 + Lo(\xi) \\
 &= \frac{1}{2}V (B(\xi, \xi)) + 2b(\Upsilon(\xi), G(V, DW_1)) + 2b(\chi(\xi), G(V, DW_2)) \\
 &+ 4v|\varphi(\xi)|^2 + v|Dw_2|^2 + Lo(\xi)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 2\mathbf{B}(\xi, m(\xi)) &= \int_{\Omega} [V (B(\xi, xi)) + 4b(\Upsilon(\xi), G(V, DW_1)) + b(\chi(\xi), G(V, DW_2))] dx \\
 &+ \int_{\Omega} [8v|\varphi(\xi)|^2 + 2v|Dw_2|^2 + Lo(\xi)] \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Agora, pondo $V = \sum_{i=1}^2 V_i E_i$, onde $\{E_1, E_2\}$ é um referencial normal que varia com x .

Temos, usando (4.48)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} V (B(\xi, \xi)) dx &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} V_i E_i (B(\xi, \xi)) dx \\
 &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i (V_i B(\xi, \xi)) dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i (V_i) B(\xi, \xi) dx \\
 &= \int_{\Omega} \text{div} (B(\xi, \xi) V) dx - \int_{\Omega} \text{div}(V) B(\xi, \xi) dx \\
 &= \int_{\Omega} B(\xi, \xi) \langle V, \nu \rangle dx - 2 \int_{\Omega} v B(\xi, \xi) dx \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Na última linha de (3.46) usarmos (3.24). De fato,

$$\text{div}(V) = \text{Traç}DV = \sum_{i=1}^2 DV(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^2 v|E_i|^2 = 2v$$

Substituindo (3.46) em (3.45), temos

$$2B(\xi, m(\xi)) = \int_{\Gamma} B(\xi, \xi) dx - 2 \int_{\Omega} v B(\xi, \xi) dx + 2 \int_{\Omega} e(\xi, \xi) dx + Lo(\xi)$$

com $e(\xi, \xi) = 2b(\Upsilon(\xi), G(V, DW_1)) + b(\chi(\xi), G(V, DW_2)) + 4v|\varphi(\xi)|^2 + v|Dw_2|^2$ e o lema fica mostrado. \square

Seja ξ o campo de deslocamentos da casca. A energia total dela é definido por

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\xi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + B(\xi, \xi) \quad (3.47)$$

Onde B é definido por (3.2). Temos o seguinte

Teorema 3.5. *Seja $\xi = (W_1, W_2, w_1, w_2) \in H^1(\Omega)$ solução do problema*

$$\xi_{tt} + A\xi + a(x)\xi_t = 0, \quad em \quad (0, T) \times \Omega \quad (3.48)$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} [2\partial(A\xi, m(\xi)) + (|\xi_t|^2 - B(\xi, \xi)) \langle V, \nu \rangle] d\Sigma = 2(\xi_t, m(\xi))|_0^T + 2 \int_Q v [|\xi_t|^2 - B(\xi, \xi)] dQ \\ + 2 \int_Q e(\xi, \xi) dQ - \int_0^T (a\xi_t, 2m(\xi)) + L(\xi) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Onde $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$ e $e(\xi, \xi) = e(\xi, \xi) = 2b(S(W_1), G(V, DW_1)) + 2b(S(W_2), G(V, DW_2)) + 4v|\varphi(\xi)|^2 + v|Dw_2|^2$. $L(\xi)$ denota os termos de ordem menor respeito da energia. Além disso, se p é uma função em Ω , então

$$\int_{\Sigma} \partial(A\xi, p\xi) dQ = \int_Q p [B(\xi, \xi) - |\xi_t|^2] dQ - \int_0^T (a\xi_t, p\xi) + L(\xi) \quad (3.50)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.48) por $2m(\xi)$ e integrando em Ω temos:

$$\begin{aligned} (\xi_{tt}, 2m(\xi))_{L^2(\Omega)} + (A\xi, 2m(\xi)) &= - (a\xi_t, 2m(\xi)) \\ (\xi_{tt}, 2m(\xi))_{L^2(\Omega)} + B(\xi, 2m(\xi)) - \int_{\Gamma} \partial(\xi, 2m(\xi)) &= - (a\xi_t, 2m(\xi)) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Estimando o primeiro termo do lado esquerdo de (3.51), já que o segundo termo foi estimado no lema (3.4).

$$(\xi_{tt}, 2m(\xi))_{L^2(\Omega)} = 2 \left[(\xi_t, m(\xi))_{L^2(\Omega)} \right]_t - 2(\xi_t, m(\xi_t))_{L^2(\Omega)} \quad (3.52)$$

E,

$$\begin{aligned}
 2 (\xi_{tt}, 2m(\xi))_{L^2(\Omega)} &= 2 ((W_{1t}, W_{2t}, w_{1t}, w_{2t}), (\nabla_V W_{1t}, \nabla_V W_{2t}, V(w_{1t}), V(w_{2t})))_{L^2(\Omega)} \\
 &= V \left(\|W_{1t}\|_{L^2(\Omega, \Lambda)}^2 + \|W_{2t}\|_{L^2(\Omega, \Lambda)}^2 + \|w_{1t}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_{2t}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 &= V(\|\xi_t\|_{L^2(\Omega)}^2) = \int_{\Omega} V(|\xi_t|^2) dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} V_i E_i(|\xi_t|^2) dx \\
 &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i(V_i |\xi_t|^2) dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E_i(V_i) |\xi_t|^2 dx \\
 &= \int_{\Gamma} |\xi_t|^2 \langle V, \nu \rangle d\Gamma - 2 \int_{\Omega} v |\xi_t|^2 dx \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

Substituindo (3.53) em (3.52), temos

$$(\xi_{tt}, 2m(\xi))_{L^2(\Omega)} = 2 \left[(\xi_t, m(\xi))_{L^2(\Omega)} \right]_t + 2 \int_{\Omega} v |\xi_t|^2 dx - \int_{\Gamma} |\xi_t|^2 \langle V, \nu \rangle d\Gamma \tag{3.54}$$

Substituindo (3.54) e usando o lema (3.4) em (3.51), temos:

$$\begin{aligned}
 2 \left[(\xi_{tt}, m(\xi))_{L^2(\Omega)} \right]_t &+ 2 \int_{\Omega} v |\xi_t|^2 dx - \int_{\Gamma} |\xi_t|^2 \langle V, \nu \rangle d\Gamma + \int_{\Gamma} B(\xi, \xi) \langle V, \nu \rangle d\Gamma \\
 &- 2 \int_{\Omega} v B(\xi, \xi) dx + 2 \int_{\Omega} e(\xi, \xi) dx - \int_{\Gamma} \partial(\xi, 2m(\xi)) d\Gamma + Lo(\xi) = \\
 &- (a\xi_t, 2m(\xi)) \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

integrando (3.55) de 0 a T , temos

$$\begin{aligned}
 2 \left[(\xi_{tt}, m(\xi))_{L^2(\Omega)} \right]_0^T &+ 2 \int_Q v |\xi_t|^2 dx - \int_{\Sigma} |\xi_t|^2 \langle V, \nu \rangle d\Sigma + \int_{\Sigma} B(\xi, \xi) \langle V, \nu \rangle d\Sigma \\
 &- 2 \int_Q v B(\xi, \xi) dx + 2 \int_Q e(\xi, \xi) dx - \int_{\Sigma} \partial(\xi, 2m(\xi)) d\Sigma + Lo(\xi) = \\
 &\int_0^T (a\xi_t, 2m(\xi))
 \end{aligned}$$

De onde,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} [2\partial(\xi, m(\xi)) + (|\xi_t|^2 - B(\xi, \xi)) \langle V, \nu \rangle] d\Sigma &= 2 \left[(\xi_t, m(\xi_t))_{L^2(\Omega)} \right]_0^T + 2 \int_Q v [|\xi_t|^2 - B(\xi, \xi)] \\
 &+ 2 \int_Q e(\xi, \xi) dQ - \int_0^T (a\xi_t, 2m(\xi)) + Lo(\xi)
 \end{aligned}$$

E o Teorema fica mostrado. \square

3.4 Campos e região de Fuga para o modelo de Naghdi

Agora introduzimos as hipóteses necessárias para obter estabilização do modelo de cascas de Naghdi.

Definição 3.6. Um campo vetorial V sobre Ω chama-se de fuga para a Casca de Naghdi, se:

- 1) Existe uma função v sobre Ω tal que

$$DV(X, X) = v(x)|X|^2 \quad \text{Para todo } X \in T_x\Omega, x \in \Omega.$$

- 2) Seja

$$l(x) = \frac{\langle DV, E \rangle}{2} \quad \text{Para } x \in \Omega,$$

onde E denota o elemento de Volume da superfície media Ω . Então as funções $v(x)$ e $l(x)$ satisfazem

$$2 \min_{x \in \Omega} v(x) = \lambda_0(1 + 2\beta) \max_{x \in \Omega} |l(x)|.$$

O seguinte Teorema diz que a existência de um campo vetorial de fuga garante que Ω não contem geodésicas fechadas no interior.

Teorema 3.7. *Seja V um campo vetorial sobre $\bar{\Omega}$ satisfazendo as condições da definição (3.6). Então $\bar{\Omega}$ não contem geodésicas fechadas.*

Demonstração. Suponha que $\gamma(t) \in \bar{\Omega}$, com $t \in [0, b]$, é uma geodésica fechada em $\bar{\Omega}$. Então,

$$\gamma(0) = \gamma(b) \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = \gamma'(b). \quad (3.56)$$

E seja V um campo vetorial sobre $\bar{\Omega}$, satisfazendo as condições da definição (3.6). Considere-se a seguinte função

$$f(t) = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle, \quad \text{para } t \in [0, b].$$

Pelas condições (3.56), tem-se

$$f(0) = f(b). \quad (3.57)$$

Já que V é de fuga e que γ é geodésica ($\nabla_{\gamma'(t)} \gamma' = 0$), temos

$$f'(t) = DV(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0 \quad \text{para } t \in [0, b]$$

O qual implica que $f(b) > f(a)$, o que contradiz (3.57). □

Pelo lema (4.39), soube-se que se Ω é uma superfície de curvatura constante, então a existência de um campo vetorial satisfazendo o item(1) da definição (3.6) é garantido localmente, no interior do cut-locus $\exp_{x_0}(\Sigma(x_0))$. Ele poderia não ser definido sobre todo Ω . Por exemplo se Ω é um cilindro a curvatura dele é zero. Mais, não existe um campo vetorial definido em tudo Ω , pois ele contem geodésica fechadas que são os grandes círculos. O mesmo acontece com a esfera. Algúms exemplos serão dados na seguinte seção. Explorando um poco mais o lema (4.39), observe-se que se Ω tem curvatura, k , constante e negativa, então

$$DV(X, X) = v(x)g \quad (3.58)$$

onde g é métrica Riemanniana. Além disso $v(x) = \sqrt{-k}\cosh(\sqrt{-k}\rho(x))$ e $\rho(x)$ é a função distancia. Logo, por (3.58), a primeira condição da definição (3.6) é satisfeita por V . Também por (3.58) DV é simétrica, logo $l(x) = 0$ e a segunda condição na definição (3.6) se reduz a

$$\min_{x \in \Omega} v(x) > 0. \quad (3.59)$$

Que, neste caso, é satisfeito já que $k < 0$.

Por outro lado, se $k > 0$, usando de novo o Teorema 4.39, temos

$$DV(X, X) = v(x)g \quad (3.60)$$

onde g é métrica Riemanniana. Além disso $v(x) = \sqrt{k}\cos(\sqrt{k}\rho(x))$ e $\rho(x)$ é a função distancia. Logo a primeira condição de campo vetorial de fuga é satisfeita e a segunda se reduz

$$\min_{x \in \Omega} v(x) > 0. \quad (3.61)$$

Mas, neste caso, isso vai acontecer se $x \in B_{x_0}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{k}}\right)$. Logo, a existência de um campo vetorial de fuga para a casca de Naghdi é garantida localmente, numa bola geodésica. Juntando estos fatos temos o seguinte

Lema 3.8. *Seja M uma superfície em \mathbb{R}^3 , simplesmente conexa e com curvatura constante k . Então*

1. *Se $k < 0$, então para qualquer superfície media $\Omega \subset M$ existe um campo vetorial de fuga para a casaca de Naghdi.*
2. *Se $k > 0$, então existe uma bola geodésica $B_{x_0}(\delta) \subset M$, centrada em algúm ponto $x_0 \in M$ e raio $\delta < \frac{\pi}{2k}$, tal que para $\Omega \subset B_{x_0}(\delta)$, existe um campo vetorial de fuga para a casca de Naghdi.*

A existência de um campo vetorial de fuga definido numa região de Ω permite considerar a mesma livre de efeitos de dissipação/controlado. A continuação definiremos o conceito de região de fuga para o modelo de cascas de Naghdi.

Definição 3.9. Uma região $G \subset \Omega$ é chamada uma região de fuga para o modelo de cascas de Naghdi, se

- 1) Existe um número finito de sub-regiões $\{\Omega_i\}_{i=1}^J$, com bordo Γ_i , J um natural positivo, tal que

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{para todo } 1 \leq i < j \leq J.$$

- 2) Para cada Ω_i existe um campo vetorial V_i e uma função v_i tal que,

$$\begin{aligned} DV_i(X, X) &= v_i(x)|X|^2 \quad \text{sobre } \Omega_i \\ 2 \min_{x \in \Omega_i} v_i(x) &> \lambda_0(1 + 2\beta) \max_{x \in \Omega_i} \frac{|l_i(x)|}{2}, \end{aligned}$$

Onde $l_i(x) = \frac{\langle DV_i, E \rangle}{2}$ para todo $1 \leq i \leq J$;

- 3)

$$G \supset \bar{\Omega} \cap N_\epsilon \left[\bigcup_{i=1}^J \Gamma_{i0} \cup \left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^J \Omega_i \right) \right]$$

onde $\epsilon > 0$, pequeno, e:

$$\begin{aligned} N_\epsilon(S) &= \bigcup_{x \in S} \{y \in \Omega / d_g(y, x) < \epsilon\} \quad \text{para } S \subset M \\ \Gamma_{i0} &= \{x \in \Gamma_i, \langle V_i(x), \nu(x) \rangle > 0\}, \end{aligned}$$

ν_i é a normal a Ω_i apontando para fora.

Em geral não existe um campo vetorial de fuga definido sobre toda a superfície media Ω . Porém, pelo Teorema 4.39, tais campos podem ser definidos sobre pequenas bolas geodésicas. Logo, considerando $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, \delta)$ com $x_n \in \Omega$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, um campo vetorial de fuga pode se definido em $B(x_n, \delta)$. Então $\mu(\Omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mu(B(x_n, \delta))$, onde μ é a medida de Lebesgue dois dimensional sobre a superfície Ω . Assim, dado $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(B(x_n, \delta)) < \epsilon.$$

Logo, considerando $\Omega_i = B(x_i, \delta)$ com $1 \leq i \leq N$, temos provado o seguinte

Teorema 3.10. Para $\epsilon > 0$ dado, pode-se escolher uma região de fuga $G \subset \bar{\Omega}$ tal que

$$\mu(G) < \epsilon$$

onde $\mu(G)$ é a medida dois dimensional de Lebesgue de G

A seguir daremos algúms exemplos.

Exemplo 3.1. No caso de existir um campo vetorial de fuga, V , definido sobre todo Ω , então na definição (3.9) temos que $J = 1$. Pela condição(3) a região de fuga é suportado na região do bordo Γ_0 , onde

$$\Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega / \langle V(x), \nu(x) \rangle > 0\}.$$

Essa região de fuga já foi usado por muitos autores[11],[?], [6], [21], [32],etc. O campo de fuga considerado, no caso \mathbb{R}^n , foi $V = x - x_0$

Exemplo 3.2. Seja

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

a esfera unitária em \mathbb{R}^3 . Pelo lema (3.7) não existe um campo vetorial de fuga definido sobre todo Ω , pois os grandes círculos são geodésicas fechadas em Ω . Considerando Ω_1 como sendo a capa superior da esfera, sem o ecuador, e Ω_2 a capa inferior sem o ecuador, temos que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$ e pelo Teorema 4.39 existem campos vectoriais de fuga V_1 e V_2 definidos em Ω_1 e Ω_2 , respectivamente. Pois eles são o interior do cut-locus no polo norte e sur.

Então uma região de fuga para Ω é suportado numa faixa, arbitrariamente pequena, do ecuador. Ver figura (3.1)

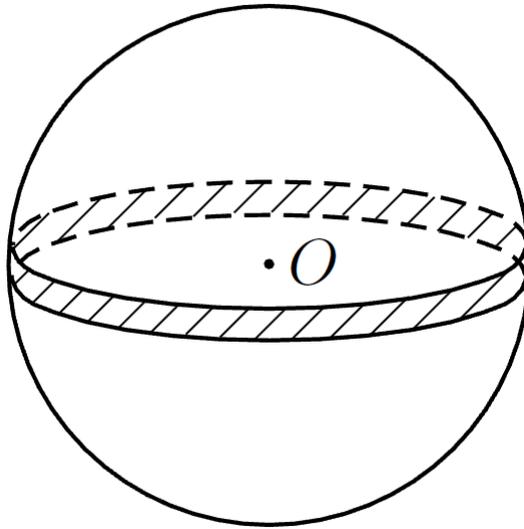


FIGURA 3.1: Região de fuga para o caso da Esfera.

Exemplo 3.3. Considere agora

$$\Omega = C = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad -1 \leq x_3 \leq 1\},$$

o cilindro limitado em \mathbb{R}^3 . Pelo lema (3.7) não é possível definir um campo vetorial de fuga sobre todo Ω . Para construir uma região de fuga, seja $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in C$, com $x_{03} = 0$ e seja L_0 a reta geratriz contendo x_0 . Seja $x_1 \in C$ a antípoda de x_0 . Já que o interior do cut-locus de x_1 é $C \setminus L_0$, existe um campo vetorial de fuga definido sobre $C \setminus L_0$. Assim, uma região de fuga para Ω é suportado numa vizinhança do bordo de Ω e de L_0 . Ver figura (3.2)

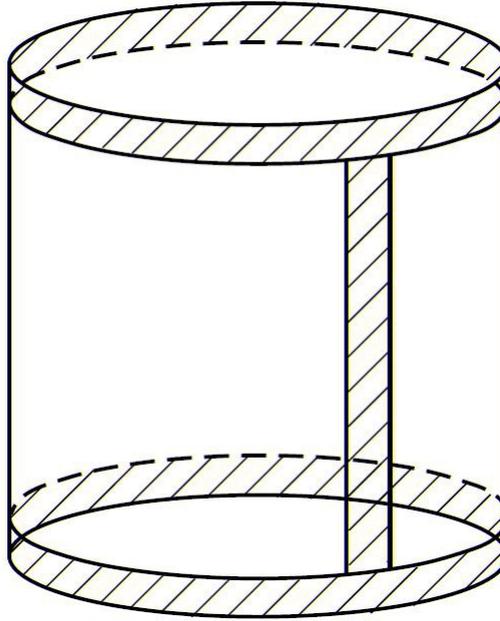


FIGURA 3.2: Região de fuga para o caso do cilindro.

3.5 Estabilização da Casca de Naghdi com dissipação interna

Para continuar com a resolução do problema do decaimento exponencial da energia, precisamos dos seguintes lemas.

Lema 3.11. *Seja $V \in \chi(\Omega)$ satisfazendo a primeira condição da definição (3.24). Então o campo tensorial DV pode-se decompor como*

$$DV = v(x)g + l(x)E \quad \text{para } x \in \Omega$$

Demonstração. Decompondo DV na sua parte simétrica e antissimétrica, por

$$DV = \frac{1}{2}(DV + D^*V) + \frac{1}{2}(DV - D^*V) \quad (3.62)$$

Já que $\frac{1}{2}(DV - D^*V)$ é uma 2-forma antissimétrica e Ω é 2-dimensional, existe uma função q tal que

$$\frac{1}{2}(DV - D^*V) = q(x)E \quad \text{para } x \in \Omega. \quad (3.63)$$

Pois a dimensão das 2-formas definidas sobre espaços 2-dimensionais é 1. Substituindo (3.63) na expressão de $l(x)$, temos

$$\begin{aligned} l(x) &= \frac{1}{2} \langle DV, E \rangle = \frac{1}{2} \langle 2q(x)E + D^*V, E \rangle \\ &= \langle q(x)E, E \rangle + \frac{1}{2} \langle D^*V, E \rangle = 2q(x) + \frac{1}{2} \langle D^*V, E \rangle \\ &= 2q(x) - \frac{1}{2} \langle DV, E \rangle \\ &= 2q(x) - l(x), \end{aligned}$$

de onde,

$$l(x) = q(x). \quad (3.64)$$

Substituindo (3.64) em (3.63) e usando que $DV = vg$ temos o resultado. \square

Lema 3.12. *Seja V um campo vetorial de fuga para o modelo de cascas de Naghdi e seja $G(V, DW) \in T^2(\Omega)$ dado por (3.23), para $W \in H^1(\Omega, \Lambda)$. Então,*

$$\sigma_1 \int_{\Omega} b(S(W), S(W)) dx \leq \int_{\Omega} b(S(W), G(V, DW)) dx + Lo(\xi).$$

Onde $\sigma_1 = \min_{x \in \Omega} v(x) - (1 + 2\beta) \max_{x \in \Omega} \frac{|l(x)|}{2}$.

Demonstração. Lembrando que, para $T_1, T_2 \in T^2(\Omega)$, temos:

$$b(T_1, T_2) = \langle T_1, T_2 \rangle + \beta \text{Traç} T_1 \text{Traç} T_2.$$

Logo,

$$b(S(W), G(V, DW)) = \langle S(W), G(V, DW) \rangle + \text{Traç}(S(W)) \text{Traç}(G(V, DW)) \quad (3.65)$$

Agora estimemos cada termo de (3.65). Para isso, dado $x \in \Omega$, seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de $T_x \Omega$ tal que

$$DW(e_1, e_2) + D^*W(e_1, e_2) = 0 \quad \text{em } x \quad (3.66)$$

isto é possível pois o tensor de ordem 2, $DW + D^*W$, é simétrico. Com isso,

$$S(W)(e_1, e_2) = 0. \quad (3.67)$$

Pondo $W_{ij} = DW(e_i, e_j)$, temos

$$\begin{aligned} \text{Traç}(S(W)) &= S(W)(e_1, e_2) + S(W)(e_1, e_2) \\ &= DW(e_1, e_2) + DW(e_2, e_1) \\ &= W_{11} + W_{22} \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \text{Traç}G(V, DW) &= G(V, DW)(e_1, e_2) + G(V, DW)(e_2, e_2) \\ &= DW(e_1, \nabla_{e_1} V) + DW(e_2, \nabla_{e_2} V) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Mais, usando o lema (3.11), temos

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} V &= \langle \nabla_{e_1} V, e_1 \rangle e_1 + \langle \nabla_{e_1} V, e_2 \rangle e_2 \\ &= DV(e_1, e_2)e_1 + DV(e_2, e_1)e_2 \\ &= v(x)e_1 - l(x)e_2 \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2} V &= \langle \nabla_{e_2} V, e_1 \rangle e_1 + \langle \nabla_{e_2} V, e_2 \rangle e_2 \\ &= DV(e_1, e_2)e_1 + DV(e_2, e_2)e_2 \\ &= l(x)e_1 + v(x)e_2 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Substituindo (3.71), (3.70) em (3.69), temos

$$\begin{aligned} \text{Traç}G(V, DW) &= DW(e_1, v(x)e_1 - l(x)e_2) + DW(e_2, l(x)e_1 + v(x)e_2) \\ &= v(x)DW(e_1, e_1) - l(x)DW(e_1, e_2) + l(x)DW(e_2, e_1) + v(x)DW(e_2, e_2) \end{aligned}$$

que, por (3.66), temos

$$\begin{aligned} \text{Traç}G(V, DW) &= v(x)(W_{11} + W_{22}) + 2l(x)W_{21} \\ &= v(x)\text{Traç}(DW) + 2l(x)W_{21} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Substituindo (3.67), (3.68) e (3.72) em (3.65), obtemos:

$$\begin{aligned} b(S(W), G(V, DW)) &= \beta \text{Traç}DW (v(x)\text{Traç}DW + 2l(x)W_{21}) \\ &= \beta v(x) (\text{Traç}DW)^2 + 2\beta l(x) (W_{11} + W_{22}) W_{21} \\ &= v(x)b(S(W), S(W)) + 2\beta l(x) (W_{11} + W_{22}) W_{21} \\ &\geq \min_{x \in \Omega} v(x)b(S(W), S(W)) - (1 + 2\beta) \max_{x \in \Omega} \frac{|l(x)|}{2} |DW|^2 + Lo(\xi), \end{aligned}$$

Integrando está última equação em Ω , temos:

$$\int_{\Omega} b(S(W), G(V, DW)) dx \geq \min_{x \in \Omega} \int_{\Omega} b(S(W), S(W)) dx - (1+2\beta) \max_{x \in \Omega} \frac{|l(x)|}{2} \int_{\Omega} |DW|^2 dx \quad (3.73)$$

Finalmente, usando (3.22) em (3.73), temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b(S(W), G(V, DW)) dx &\geq \min_{x \in \Omega} \int_{\Omega} b(S(W), S(W)) dx \\ &- \lambda_0(1+2\beta) \max_{x \in \Omega} \frac{|l(x)|}{2} \int_{\Omega} b(S(W), S(W)) dx + Lo(\xi) \\ &= \sigma_1 \int_{\Omega} b(S(W), S(W)) dx + Lo(\xi) \end{aligned}$$

□

Nesta secção enunciamos e provamos o resultados principal da Tese, a estabilização da equação de evolução do modelo de Naghdi. Precisaremos do seguinte resultado.

Teorema 3.13. *Seja V um campo vetorial de fuga para a casca de Naghdi. Seja ξ solução do problema*

$$\xi_{tt} + A\xi + a(x)\xi_t = 0. \quad (3.74)$$

Então para $T > 0$,

$$\int_{\Sigma} SB d\Sigma + \lambda_0 \sigma_0 [E(0) + e(T)] - \int_0^T \int_{\Omega} a \langle \xi, \xi_t \rangle \geq 2\sigma_1 \int_0^T E(t) dt + L(\xi) \quad (3.75)$$

onde

$$\begin{aligned} SB &= \partial(A\xi, 2m(\xi) + \rho\xi) + [|\xi_t|^2 - B(\xi, \xi)] \langle V, \nu \rangle \\ m(\xi) &= (\nabla_V W_1, \nabla_V W_2, V(w_1), V(w_2)), \quad \rho = 2v - \sigma_1 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Demonstração. Seja $p = \rho$ na identidade (3.50) e somando com a identidade (3.50), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} SB d\Sigma &= 2(\xi_t, m(\xi))_{(L^2(\Omega))} \Big|_0^T + \sigma_1 \int_Q [|\xi_t|^2 + B(\xi, \xi)] dQ + \\ &2 \int_Q e(\xi, \xi) dQ + L(\xi) \end{aligned} \quad (3.77)$$

E, pelas expressão de B , temos que

$$B(\xi, \xi) = 2b(S(W_1), S(W_1)) + 2\beta b(S(W_2), S(W_2)) + 4|\varphi(\xi)|^2 + |Dw_2| + L(\xi) \quad (3.78)$$

Usando o lema (3.12), temos

$$\int_Q e(\xi, \xi) dQ \geq \sigma_1 \int_Q B(\xi, \xi) dQ + L(\xi) \quad (3.79)$$

usando a identidade (3.78), a coercividade de b , temos

$$\begin{aligned} 2(\xi_t, m(\xi))_{L^2(\Omega)} &\leq \sigma_0 \left[\|\xi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \left(\|DW_i\|_{L^2(\Omega, T^2)}^2 + \|Dw_i\|_{L^2(\Omega, \Lambda)}^2 \right) \right] \\ &\leq 2\lambda_0 \sigma_0 E(t) + L(\xi) \end{aligned} \quad (3.80)$$

finalmente, substituindo (3.80) e (3.79), em (3.77), temos a desigualdade (3.75). \square

Agora enunciamos e provamos o nosso resultado principal, a estabilização do modelo de evolução de Naghdi

Teorema 3.14. *Seja a equação de evolução para o modelo de cascas de Naghdi, com dissipação interna*

$$\begin{aligned} \xi_{tt} + A\xi + a(x)\xi_t &= 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \xi &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde a função $a = a(x)$ é suportada numa região de fuga $w \subset \bar{\Omega}$. Seja $a_0 > 0$ tal que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{para todo } x \in w \quad (3.82)$$

Então, existem constantes c_1, c_2 tais que

$$E(t) \leq c_1 E(0) \exp(-c_2 t) \quad (3.83)$$

onde $E(t)$ é a energia total do sistema (3.81)

Demonstração. Multiplicando a equação (3.81) por ξ_t , integrando em Ω e considerando as condições de contorno, temos que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_{\Omega} a(x) |\xi_t|^2 dx \quad (3.84)$$

de onde, integrando em $(0, T)$, tem-se

$$E(T) = E(0) - \int_{\Omega} a(x) |\xi_t|^2 dx. \quad (3.85)$$

Por (3.85) é suficiente provar que existe um $T > 0$ e $C > 0$, independente das soluções do problema (3.81), tal que

$$E(T) \leq C \int_Q a |\xi_t|^2 dQ,$$

pois nesse caso, substituindo em (3.85), temos que

$$E(T) \leq \frac{C}{C+1} E(0) \quad (3.86)$$

Afirmamos que (3.83) segue-se de (3.86). De fato, note que (3.86) é equivalente

$$E(T) \leq \gamma E(0) \quad (3.87)$$

onde $\gamma = \frac{C}{C+1} < 1$. Já que, o sistema é invariante por translações no tempo, temos que (3.87) é valido em $[(m-1)T, mT]$, assim

$$\begin{aligned} E(mT) &\leq \gamma E((m-1)T) \\ &\leq \gamma^2 E((m-2)T) \\ &\vdots \\ &\leq \gamma^m E(0) \\ &\leq e^{-\omega m T} E(0) \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde $\omega = \frac{1}{T} \ln(\frac{1}{\gamma}) > 0$. Para $t > 0$ arbitrário, existe $m = 1, 2, \dots$, tal que $(m-1)T < t \leq mT$. Finalmente usando que a energia do sistema é decrescente tem-se

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E((m-1)T) \\ &\leq e^{-\omega(m-1)T} E(0) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} e^{-\omega m T} E(0) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} e^{-\omega t} E(0) \end{aligned}$$

O que prova a nossa afirmação. Assim, vamos a provar (3.86)

Pela definição de campos e regiões de fuga discutidos na secção 3.4, podemos supor que existem subconjuntos de Ω , $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$, satisfazendo (3.24). Logo as identidades (3.76) e

(3.50) podem ser usadas sobre cada Ω_i , já que campos vectoriais de fuga são definidos sobre cada um deles.

A ideia é, estimar a energia total do sistema, primeiro no interior de Ω usando que sobre os Ω_i temos campos vectoriais de fuga definidos neles e no complementar usando a propriedade da função dissipação, a .

Agora, já que (3.75) é válida somente nos Ω_i , vamos nos restringir, primeiro, a nossas estimativas neles.

Seja então $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1 < \epsilon_0 < \epsilon$ e sejam

$$V_j = N_{\epsilon_j} \left\{ \bigcup_{i=1}^N \Gamma_0^i \cup (\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N \Omega_i) \right\}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Note que $V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset \bar{V}_0$. Sejam

$$\phi^i = \begin{cases} 1, & \Omega_i \setminus V_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ 0, & V_2 \end{cases}$$

Considere agora $V^i = \phi^i H^i$, $p^i = \phi^i q$ e $\xi^i = \phi^i \xi$ onde H^i é um campo vectorial de fuga em Ω_i e q uma função definida em Ω , respectivamente. Assim, em cada Ω_i é válido (3.75) e temos

$$2\sigma_1 \int_0^T E^i(t) \leq \int_{\Sigma_i} SB_i d\Sigma_i + \lambda_0 \sigma_0 [E^i(0) + E^i(T)] - \int_0^T \int_{\Omega_i} a \langle \xi^i, \xi_t^i \rangle dx dt \quad (3.89)$$

onde,

$$SB_i = \partial (A\xi^i, 2m(\xi^i) + \rho\xi^i) + [|\xi_t^i|^2 - B(\xi^i, \xi^i)] \langle V^i, \nu \rangle \quad (3.90)$$

Pela definição de V_2 , temos que $\Gamma_0^i \subset V_2$ e já que $\phi^i = 0$ em V_2 , temos que para $x \in \Gamma_0^i$, os termos na fronteira anulam-se. Assim

$$SB_i = 0 \quad \text{para } x \in \Gamma_0^i. \quad (3.91)$$

Se $x \in \Omega_i \cap \Gamma$, usando as condições de fronteira, $\xi = 0$, substituindo em (3.90) temos

$$\begin{aligned} SB_i &= 2\partial (A\xi_i, m(\xi^i)) - B(\xi^i, \xi^i) \langle V^i, \nu \rangle \\ &= B(\xi^i, \xi^i) \langle V^i, \nu \rangle \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

onde usamos a coercividade de B . Concluí-se que

$$\int_{\Sigma_i} SB_i \leq 0 \quad \text{para todo } i \quad (3.93)$$

Usando a estimativa (3.91) e (3.93) em (3.89) temos

$$2\sigma_1 \int_0^T \int_{\Omega_i} |\xi_t|^2 + 2\sigma_1 \int_0^T \int_{\Omega_i} B(\xi, \xi) \leq - \int_0^T (a\xi_t, 2m(\xi)) + \lambda_0\sigma_0 [E(T) + E(0)] + L(\xi)$$

de onde,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_i \setminus V_1} B(\xi, \xi) \leq C_1 \int_0^T \int_{\Omega_i \cap V_1} B(\xi, \xi) + C_\beta \int_0^T \int_{\Omega_i} |\xi|^2 + \beta \int_0^T \int_{\Omega_i} B(\xi, \xi) dQ + \\ \lambda_0\sigma_0 [E(T) + E(0)] + L(\xi) \end{aligned} \quad (3.94)$$

onde $\beta > 0$ é pequeno suficiente tal que $\beta \int_0^T \int_{\Omega_i} B(\xi, \xi) dxdt \leq \int_0^T \int_{\Omega_i \cap V_1} B(\xi, \xi) dxdt$.

Já que $\Omega \subset (\cup \Omega_i) \cup V_1$, então

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega \setminus V_1} B(\xi, \xi) \leq \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega_i \setminus V_1} B(\xi, \xi) \\ \leq C_2 \int_0^T \int_{\Omega \cap V_1} B(\xi, \xi) dQ + C_3 \int_0^T a \|\xi_t\|^2 dt + \lambda_0\sigma_0 [E(T) + E(0)] + L(\xi) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Agora estimemos no complementar da união dos Ω_i . Para isso, seja $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus V_0 \\ 1, & x \in V_1 \end{cases} \quad (3.96)$$

Considerando $p = \psi$ em (3.50) temos

$$\int_{Q_i} B(\xi, \xi) dQ_i = \int_{Q_i} |\xi_t|^2 dQ_i + \int_0^T (a\xi_t, \psi\xi) dt + L(\xi)$$

de onde,

$$\int_0^T \int_{\Omega \cap V_1} B(\xi, \xi) dQ + \int_0^T \int_{\Omega \cap V_0} B(\xi, \xi) dQ \leq \int_0^T \int_{\Omega \cap V_0} B \|\xi_t\|^2 dQ + \int_0^T \int_{\Omega \cap V_0} \langle a\xi_t, \xi \rangle + L(\xi)$$

E já que $\epsilon_0 < \epsilon$, então $w \supset \bar{\Omega} \cap V_0$. Usando a hipótese da função a em w , temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega \cap V_1} B(\xi, \xi) dQ &\leq \int_0^T \int_{\Omega \cap V_0} \|\xi_t\|^2 dQ + \int_0^T \int_{\Omega \cap V_0} \langle a\xi_t, \xi \rangle + L(\xi) \\ &\leq \frac{1}{a_0} \int_0^T \int_{\Omega \cap V_0} a |\xi|^2 dt + L(\xi) + \beta \int_0^T \|\xi_t\|^2 dt + L(\xi) \end{aligned}$$

onde β será escolhido depois. Assim, de (3.95), (3.97), temos

$$\begin{aligned} \int_Q B(\xi, \xi) &= \int_0^T \int_{\Omega \setminus V_1} B(\xi, \xi) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega \cap V_1} B(\xi, \xi) dx dt \\ &\leq C_4 \int_0^T \int_{\Omega \cap V_1} B(\xi, \xi) dx dt + C_5 \int_0^T a \|\xi_t\|^2 dt + L(\xi) \\ &\leq C_6 \int_Q a |\xi_t|^2 dt + \beta \int_0^T \|\xi_t\|^2 dt + \lambda_0 \sigma_0 [E(T) + E(0)] + L(\xi) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Considerando agora $p = \frac{1}{2}$ em (3.50), temos

$$\frac{1}{2} \int_Q [|\xi_t|^2 - B(\xi, \xi)] dQ = \frac{1}{2} \int_0^T (a\xi_t, \xi) dt + L(\xi) \leq C_8 \int_0^T a \|\xi_t\|^2 dt + L(\xi) \quad (3.98)$$

Juntando (3.97) e (3.98), temos

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) dt &= \int_Q B(\xi, \xi) dQ + \frac{1}{2} \int_Q [|\xi_t|^2 - B(\xi, \xi)] dQ \\ &\leq C \int_Q a |\xi_t|^2 dQ + \beta \int_0^T \|\xi_t\|^2 dt + \lambda_0 \sigma_0 [E(T) + E(0)] + C_8 \int_Q a |\xi_t| dQ + L(\xi) \\ &\leq C_9 \int_Q a |\xi_t| dQ + \beta \int_0^T E(t) dt + C_9 [E(T) + E(0)] + L(\xi) \end{aligned} \quad (3.99)$$

Pegando $\beta = \frac{1}{2}$, considerando que a energia é decrescente isto é, $E(t) \geq E(T)$ para $t \in [0, T]$ e que $E(T) = E(0) - \int_Q a |\xi|^2 dQ$, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_0^T E(t) dt &\leq C_9 \int_Q a |\xi_t| dQ + C_9 [E(T) + E(0)] + L(\xi) \\
 \frac{T}{2} E(T) &\leq C_9 \int_Q a |\xi_t| dQ + \lambda_0 \sigma_0 \left[E(T) + E(T) + \int_Q a |\xi_t| dQ \right] + L(\xi) \\
 \left(\frac{T}{2} - 2\lambda_0 \sigma_0 \right) &\leq C_{10} \int_Q a |\xi_t| dQ + L(\xi)
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

Para $T > 4\lambda_0 \sigma_0$ de (3.100) e o argumento de unicidade-compacidade[42], temos

$$E(t) \leq C \int_Q a |\xi_t| dQ$$

Isso prova o Teorema. □

3.6 Controlabilidade via Estabilidade

O Princípio de Russell[39] fornece um método para provar a controlabilidade exata usando o resultado de estabilização uniforme.

Nesta secção vamos a estudar a controlabilidade exata para o sistema de evolução de Naghdi. Para isso, aplicamos o Princípio de Russell usando o resultado de decaimento da energia provado no Teorema 3.14

O problema de controlabilidade exata, com controles no interior, consiste em achar uma função vetorial $F = F(x, t)$, chamada de controle, tal que para algum $T > 0$ o seguinte problema tenha solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{tt} + A\eta = F(x, t) \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \eta = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ \eta(0) = \eta_0, \quad \eta_t(0) = \eta_1 \\ \eta(T) = \tilde{\eta}_0, \quad \eta_t(T) = \tilde{\eta}_1 \end{array} \right. \tag{3.101}$$

para quaisquer dados iniciais (η_0, η_1) e finais $(\tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1)$ nos espaços funcionais adequados e F atuando numa sub região de Ω .

Usando os fatos do Capítulo anterior provamos que a função F precisa atuar somente numa sub região de Ω arbitrariamente pequena, precisamente na região de fuga para a casca de Naghdi.

Consideramos $T > 0$ tal que

$$c_1 e^{-c_2 T} < 1 \tag{3.102}$$

onde $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ são as constantes que aparecem no Teorema 3.14.

Nesta secção provamos o seguinte resultado:

Teorema 3.15. *Seja Ω a superfície media da casca de Naghdi e $w \subset \Omega$ a região de fuga dada na demonstração do Teorema 3.14. Então, se $T > 0$ satisfaz (3.102) o sistema (3.101) é exatamente controlável no tempo T com controles localizados em w*

Demonstração. Aqui usaremos as notações da secção (3.2) do capítulo (3).

Já que o sistema é linear e reversível no tempo basta considerar a controlabilidade a zero, é dizer, $(\tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1) = (0, 0)$

Pela secção (3.2) do capítulo (3), temos que, para $(\eta_0, \eta_1) \in V \times H$, existe uma única solução $\eta \in C([0, \infty); V) \times C^1([0, \infty); H)$ do problema.

$$\begin{cases} \eta_{tt} + A\eta + a(x)\eta_t = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \eta = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ \eta(0) = \eta_0, \quad \eta_t(0) = \eta_1 \end{cases} \quad (3.103)$$

Alem disso, para os dados iniciais $(-\eta(T), \eta_t(T))$ existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} \theta_{tt} + A\theta + a(x)\theta_t = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \theta = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ \theta(0) = -\eta(T), \quad \theta_t(T) = \eta_t(T) \end{cases} \quad (3.104)$$

onde a atua na região de fuga dada no Teorema 3.14.

Definamos $\xi(x, t) = \eta(x, t) + \theta(x, T - t)$. O campo ξ satisfaz

$$\begin{cases} \xi_{tt} + A\xi = a(x)(\eta_t + \theta_t) & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \xi = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ \xi(0) = \eta_0 + \theta(T), \quad \xi_t(0) = \eta_1 - \theta_t(T) \\ \xi(T) = 0, \quad \xi_t(T) = 0 \end{cases} \quad (3.105)$$

De (3.105) temos que os dados iniciais que são levados ao equilíbrio tem a forma

$$(\xi_0, \xi_1) = (\eta_0 + \theta(T), \eta_1 - \theta_t(T)) \quad (3.106)$$

Assim é suficiente provar que para cada dado inicial $(\xi_0, \xi_1) \in V \times H$, existe (η_0, η_1) satisfazendo (3.106). Equivalentemente, mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned} L : V \times H &\longrightarrow V \times H \\ (\eta_0, \eta_1) &\longrightarrow (\eta_0 + \theta(T), \eta_1 - \theta_t(T)) \end{aligned} \quad (3.107)$$

é sobrejetora. Como $L = I - K$ onde K é a aplicação dada por

$$K(\eta_0, \eta_1) = (-\theta(T), \theta_t(T))$$

é suficiente mostrar que $\|K\|_{V \times H} < 1$. Aplicando duas vezes o Teorema 3.14 temos

$$\begin{aligned} \|K(\eta_0, \eta_1)\|_{V \times H} &= \|(-\theta(T), \theta_t(T))\|_{V \times H} \\ &\leq c_1 e^{-c_2 T} \|(-\eta(T), \eta_t(T))\|_{V \times H} \\ &\leq c_3 e^{-c_4 T} \|(\eta(0), \eta_1)\|_{V \times H} . \end{aligned} \quad (3.108)$$

Escolhendo $T > 0$ tal que $c_3 e^{-c_4 T} < 1$ temos que $\|K\|_{V \times H} < 1$. Dessa forma $L = I - K$ é uma aplicação sobrejetora e portanto o Teorema 3.15 está demonstrado. \square

Considerações Finais

1. Na primeira parte do trabalho foram usadas as técnicas dos multiplicadores, onde eles foram convenientemente modificados. O preço pagado foi supor algumas restrições geométricas ao domínio, porém, existem outras técnicas para resolver o problema de controlabilidade. Um trabalho futuro nessa direção seria estudar a implementação de outro método para obter controlabilidade sem depender das condições geométricas impostas.
2. Estudar a controlabilidade do modelo não linear para o modelo de propagação de ondas de som em fluidos compressíveis.
3. Observe que na resolução do problema de decaimento uniforme da energia no modelo de Naghdi, usamos condições de contorno nulas e tipo Dirichlet. Nessa direção um trabalho futuro seria estudar o decaimento uniforme da energia com dissipação localizada, mais com condições de contorno diferentes, tipo Neuman, Robin ou Mixtas.
4. A conexão entre os modelos em dimensão infinita e os modelos em dimensão finita é a análise numérica. Implementações numéricas são necessárias para comparar nossos resultados teóricos e se for possível pretendemos fazer isso.
5. Estudar o decaimento e/ou controlabilidade de outros modelos não lineares, como descritas no livro de Coron[10], de cascas usando estas novas ferramentas.

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Preliminares Básicos

4.1.1 Variedades Riemannianas

Definição 4.1. Uma variedade diferenciável de dimensão n é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M satisfazendo as seguintes condições:

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$
2. Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos de \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal relativamente as condições (1) e (2).

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização*, ou sistema de coordenadas, de M em p ; $x_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada de uma vizinhança coordenada em p . Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em M . Se as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são de classe C^k , então M dita de classe C^k .

Observação 4.2. A hipótese da variedade ter base enumerável permite que a variedade possa ser coberta por uma família enumerável de abertos e definir nela uma partição diferenciável da unidade. A hipótese dela ser Hausdorff é usada para garantir a unicidade do limite.

Definição 4.3. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^∞ de dimensão n . Dizemos que g é uma *métrica Riemanniana* sobre M , se para cada $x \in M$, $g(x)$ é um produto

interno no espaço tangente a M em x e esta correspondência é C^∞ , i.e, para qualquer sistema de coordenadas locais (x_1, x_2, \dots, x_n) , se denotamos:

$$g_{ij}(x) = g(x) \langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle,$$

então estas funções são de classe C^∞ sobre M . $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ é uma base do $T_x M$, espaço tangente a M em x , dado pela parametrização.

Observe que a definição (4.3) diz essencialmente que uma métrica Riemanniana numa variedade M de classe C^∞ é dada por um produto escalar em cada plano tangente $T_x M$ que depende C^∞ do ponto base x .

Ao longo deste capítulo (M, g) sempre denotara uma variedade Riemanniana de dimensão n e métrica g . A seguir daremos alguns exemplos de variedades Riemannianas.

Exemplo 4.1. *O espaço euclidiano munido da métrica Euclidiana é uma variedade Riemanniana. Se $A(x)$ é uma matriz simétrica e definida positiva para cada $x \in \mathbb{R}^n$, introduzimos um outro produto interno sobre cada \mathbb{R}_x^n , por*

$$g(x)(X, Y) = \langle A(x)X, Y \rangle \quad \text{para } X, Y \in \mathbb{R}_x^n,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica Euclidiana de \mathbb{R}^n . Então (\mathbb{R}^n, g) é uma variedade Riemanniana

Exemplo 4.2. *O exemplo que será considerado nesta Tese é basicamente o seguinte. Seja M uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} . Para cada $x \in M$, $T_x M$ é um plano n dimensional tangente a M em x . Definimos um produto interno sobre cada $T_x M$ por*

$$g(x)(X, Y) = \langle X, Y \rangle \quad \text{para } X, Y \in T_x M,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica Euclidiana em \mathbb{R}^{n+1} . Esta métrica é chamada a métrica induzida de \mathbb{R}^{n+1}

Neste trabalho considera-se uma superfície de dimensão 2 no \mathbb{R}^3 como uma variedade Riemanniana munida com a métrica induzida.

A grande dificuldade ao tentar obter desigualdades de observabilidade para cascas de Naghdi é o aparecimento dos símbolos de Christoffel. A ideia então é conseguir estimativas usando um sistema de coordenadas locais onde eles são nulos. Esse sistema de coordenadas sempre pode ser considerado e um exemplo bem conhecido é o sistema de coordenadas geodésico. Essa técnica é conhecida como a técnica de Bochner. Para isso a primeira etapa é escrever as equações que descrevem os deslocamentos numa casca de Naghdi sem fixar nenhum sistema de coordenadas. Essas técnicas tem sido usadas

recentemente por Yao[42]. A seguir daremos as ferramentas que usaremos para essa finalidade.

Um campo de vetores X numa variedade Riemanniana M é uma correspondência $p \in M \rightarrow X(p) \in T_x M$. Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, podemos escrever $X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Denota-se por $\chi(M)$ a coleção de todos os campos de vetores em M .

Um campo de tensores, T , de ordem k sobre M é uma aplicação que associa a cada $p \in M$ um funcional k linear definido sobre o $T_p M$, i.e, para cada $p \in M$, tem-se que:

$$T(p) : T_p M \times T_p M \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

é linear em cada uma de suas variáveis e $T(p)(X_1, X_2, \dots, X_k) \in C^\infty(M)$

Vamos a introduzir uma forma de derivar campos de vetores e campos tensoriais numa variedade Riemanniana. Denota-se por $C^\infty(M)$ e $\chi(M)$ o conjunto das funções C^∞ e o conjunto de campos vetoriais sobre M , respectivamente. Para $X \in \chi(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, $X(f)$ denota a derivada direcional de f ao longo das direções dadas pelo campo X . Logo, $X(f) \in C^\infty(M)$

4.2 Conexões Afins

A noção de conexão afim numa variedade Riemanniana M é de fornecer uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas em M . No caso mais simples, se M é uma superfície do \mathbb{R}^3 e considerarmos uma curva $c : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ e V um campo de vetores tangentes a M ao longo de $c(t)$, é conhecido que $\frac{dV(t)}{dt}$, $t \in I$ em geral não pertence $T_{c(t)}M$. Para corrigir esse problema é usada a derivada covariante $\frac{DV(t)}{dt}$, $t \in I$ que é a projeção ortogonal de $\frac{dV(t)}{dt}$ sobre o $T_{c(t)}M$. Pode-se também observar que a noção de conexão é motivada pela noção de derivada direcional.

Definição 4.4. Seja M uma variedade Riemanniana C^∞ . Uma conexão é uma aplicação $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$

que satisfaz as seguintes propriedades:
 $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.

iii) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$,

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$

Exemplo 4.3. Seja $p \in M$ e uma base $\{E_i\}_{i=1}^n$ de T_pM . Podemos escolher n^3 funções Γ_{ij}^k , $1 \leq i, j, k \leq n$ e considerar a conexão:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k E_k$$

onde $X = E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = E_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Exemplo 4.4. Seja M uma variedade Riemanniana definida por 1 sistema de coordenadas. Escolha n^3 funções regulares Γ_{ij}^k em M . Então uma conexão é dada por:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i} Y^k + \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Observação 4.5. É fato conhecido que as funções Γ_{ij}^k são determinadas pela métrica g da variedade M .

Numa variedade diferenciável pode-se definir muitas conexões. A conexão mais significativa dentro delas é a chamada conexão de Levi-Civita a qual é unicamente determinada pela métrica, é conhecido o seguinte Teorema, ver M.do Carmo[9].

Teorema 4.6. Seja M uma variedade Riemanniana com métrica $g := \langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, existe uma única conexão ∇ satisfazendo:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle; \quad (4.1)$$

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y], \quad (4.2)$$

onde $[X, Y] = XY - YX$ é o colchete de Lie.

Um fato bem conhecido(veja[9], Proposição 2.2) é que se X é induzido por um campo de vetores $Y \in \chi(M)$ ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$, i.e, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$. Isso mostra que a escolha de uma conexão afim em M vai dar origem a uma derivada de campos de vetores ao longo de curvas.

Daqui em diante a conexão que será usada é a de Levi-Civita. Observe também que a conexão é introduzida como uma forma abstrata para derivar campos definidos numa variedade Riemanniana.

Para definir uma forma de diferenciar tensores em M , precisamos do conceito de transporte paralelo.

Definição 4.7. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva mergulhada. Um campo vetorial X é chamado paralelo ao longo de γ se $\nabla_{\gamma'(t)} X = 0$. Um vetor $w \in T_{\gamma(b)}M$ é chamado o

transporte paralelo de um vetor $v \in T_{\gamma(a)}$ se existe um campo vetorial paralelo, X , ao longo de γ , tal que $X(\gamma(a)) = v$ e $X(\gamma(b)) = w$.

Dada uma curva γ , mergulhada em M , a existência de um campo paralelo ao longo dela é garantido pela teoria de EDO's. Com efeito, queremos achar um campo X tal que $\nabla_{\gamma'(t)}X = 0$. Por simplicidade considere-se que a curva está contida numa vizinhança coordenada (x_1, x_2, \dots, x_n) da variedade. Então:

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \gamma'_i(t) \partial_{x_i}(\gamma(t))$$

e

$$X(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^n X_i(t) \partial_{x_i}(\gamma(t))$$

Então, usando as propriedades da conexão (definição 4.4), temos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'(t)}X &= \sum_j \nabla_{\gamma'(t)}(X_j(t) \partial_{x_j}(\gamma(t))) \\ &= \sum_j X'_j(t) \partial_{x_j}(\gamma(t)) + \sum_j X_j(t) \nabla_{\gamma'(t)} \partial_{x_j}(\gamma(t)) \\ &= \sum_k \left[X'_k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) X_j(t) \right] \partial_{x_k}(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Temos usado o seguinte fato: Já que $\nabla_{\gamma'(t)} \partial_{x_j}(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M$, pela definição de conexão, então ele é combinação linear da base, $\partial_{x_j}(\gamma(t))$, de $T_{\gamma(t)}$. Logo, existem números $\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$ tais que $\nabla_{\gamma'(t)} \partial_{x_j}(\gamma(t)) = \sum_i \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \partial_{x_i}(\gamma(t))$.

Logo, $\nabla_{\gamma'(t)}X = 0$ é equivalente a resolver o sistema de EDO's:

$$X'_k(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) X_j(t) = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

nas incógnitas $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$. Logo, para qualquer $v \in T_{\gamma(a)}M$ condição inicial, existe uma única solução $X(t)$ tal que:

$$X(a) = v, \quad \text{e} \quad \nabla_{\gamma'(t)}X = 0.$$

Assim vale:

Teorema 4.8. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva mergulhada. Para cada $v \in T_{\gamma(a)}M$, existe uma única $w \in T_{\gamma(b)}M$ tal que w é o transporte paralelo de v ao longo de γ*

Pelo Teorema 4.8, para cada curva mergulhada $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, pode-se definir a aplicação $P^\gamma : T_{\gamma(a)}M \rightarrow T_{\gamma(b)}M$ tal que $P^\gamma(v)$ é o transporte paralelo de v ao longo de γ . Prova-se que P^γ é um isomorfismo isométrico entre os espaços $T_{\gamma(a)}M$ e $T_{\gamma(b)}M$.

Definição 4.9. P^γ é chamado o isomorfismo paralelo, dado pela conexão ∇ .

Um outro conceito fundamental em geometria Riemanniana é o de geodésica, a qual é aquela curva tal que seu campo de vetores tangentes é paralelo ao longo dela mesma.

Definição 4.10. Uma curva γ é dita uma geodésica se $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma' = 0$, para todo $t \in I$

As geodésicas existem, pelo menos localmente. Com efeito, fazendo o mesmo análise como no caso de campo paralelo, chegamos a que $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma' = 0$ é equivalente ao seguinte sistema:

$$\gamma''(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(t) \gamma'_i(t) \gamma'_j(t) \quad \text{para } 1 \leq k \leq n.$$

O qual é um sistema de EDO's não linear de segunda ordem, assim somente podemos garantir a existência e unicidade local, no tempo, de uma solução. Assim, temos o seguinte

Teorema 4.11. *Dado $v \in T_xM$, $x \in M$, existe uma única geodésica, localmente definida no tempo, tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$*

Usando o conceito de conexão de Levi-Civita podemos definir a diferencial de campos tensoriais.

4.2.1 Derivação de campo de tensores sobre uma variedade

Iniciamos definindo os objetos com os que trabalharemos. Campos tensoriais sobre variedades. Os interessados podem ver mais detalhes em [9], seção 5, Pg 111.

Definição 4.12. Seja M uma variedade Riemanniana. Uma função $C^\infty(M)$ é chamada um campo tensorial de ordem 0 sobre M ; um campo vetorial é chamado de um tensor de ordem 1 sobre M . Seja $k \geq 2$ um inteiro. Se diz que T é um campo tensorial de ordem k se, para cada $x \in M$, T é um funcional k -linear sobre T_xM tal que $T(X_1, X_2, \dots, X_k) \in C^\infty(M)$, onde X_1, X_2, \dots, X_k são campos vetoriais sobre M .

Exemplo 4.5. *Seja M uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$. Então Df , a diferencial covariante de f , é um tensor de ordem 1 sobre M , dado por:*

$$Df(p)(X) = X(f(p)),$$

onde $X \in T_pM$.

Similarmente D^2f , a segunda derivada covariante de f , é um tensor de ordem 2 sobre M , dado por:

$$D^2f(p)(X, Y) = Y(X(f)) - \nabla_Y X(f),$$

onde $X, Y \in T_pM$

Denota-se por $T^k(M)$ o conjunto dos campos tensoriais de ordem k sobre M . Então $T^0(M) = C^\infty(M)$ e $T^1(M) = \chi(M)$. Seja $v \in T_xM$ e $T \in T^k(M)$. Considere uma curva $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$. Seja

$$P(t) : T_xM \rightarrow T_{\gamma(t)}M \quad \text{para } t \in [0, a]$$

o isomorfismo paralelo, ao longo de γ , dado pela conexão. Define-se $\nabla_v T$ como segue.

Para $v_1, v_2, \dots, v_k \in T_xM$,

$$\nabla_v T(v_1, v_2, \dots, v_k) = \frac{d}{dt} [T(\gamma(t))(P(t)v_1, P(t)v_2, \dots, P(t)v_k)]|_{t=0} \quad (4.3)$$

Então $\nabla_v T$ é novamente um funcional k -linear sobre T_xM . Prova-se que a definição de $\nabla_v T$, dada pela formula (4.3), independe da escolha da curva γ . $\nabla_v T$ é chamada a derivada covariante de T na direção v . Define-se a continuação a diferencial de um campo tensorial.

Definição 4.13. *Seja M uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ , $k \neq 0$ um inteiro e $T \in T^k(M)$. A diferencial do campo tensorial T é um campo tensorial de ordem $k + 1$, denotado por DT , e definido pela seguinte formula.*

$$DT(X_1, X_2, \dots, X_k, X) = \nabla_X T(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad (4.4)$$

Sendo $X_1, X_2, \dots, X_k \in \chi(M)$, onde para cada $x \in M$, o lado direito de (4.4) é definido pela formula (4.3)

Enunciemos a continuação algumas das propriedades da diferencial de tensores. Dados $T_1 \in T^k(M)$ e $T_2 \in T^l(M)$, denota-se por $T_1 \otimes T_2 \in T^{k+l}(M)$ o produto tensorial de T_1

e T_2 , dado por

$$T_1 \otimes T_2(X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_l) = T_1(X_1, \dots, X_k)T_2(Y_1, \dots, Y_l)$$

O seguinte resultado é conhecido, veja por exemplo[43]

Teorema 4.14. 1) *Sejam T_1, T_2 campos vetoriais. Então*

$$D(T_1 \otimes T_2) = DT_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes DT_2 \quad (4.5)$$

2) *Sejam $X_1, \dots, X_{k+1} \in \chi(M)$ e $T \in T^k(M)$. Então*

$$DT(X_1, \dots, X_{k+1}) = X_{k+1}(T(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k+1} T(X_1, \dots, \nabla_{X_{k+1}} X_i, \dots, X_k) \quad (4.6)$$

Uma função $f \in C^\infty(M)$ é um tensor de ordem 0, logo Df é um campo vetorial (tensor de ordem 1), chamado o gradiente de f . Usando a fórmula (4.6), temos

$$Df(X) = X(f) = \langle X, f \rangle$$

A diferencial de Df , D^2f , é um tensor de ordem 2 chamada a Hessiana de f e pode ser calculada usando (4.6). Em geral, se $T \in T^k(M)$, então

$$D^2T(\dots, X, Y) \neq D^2T(\dots, Y, X)$$

mais no caso $k = 0$ temos que a Hessiana de funções $C^\infty(M)$ é simétrica. Este fato não é difícil de mostrar e para isso usa-se a formula (4.6).

Teorema 4.15. *Seja $f \in C^\infty(M)$, então*

$$D^2f(X, Y) = D^2f(Y, X)$$

Demonstração. Pelo exemplo (4.5), temos que:

$$D^2f(X, Y) = Y(X(f)) - \nabla_Y X(f)$$

e usando o Teorema 4.1 tem-se que $\nabla_Y X(f) = \nabla_X Y(f) + [Y, X]f$. Substituindo em $D^2 f$ temos:

$$\begin{aligned}
 D^2 f(X, Y) &= Y(X(f)) - (\nabla_X Y(f) + [Y, X]f) \\
 &= Y(X(f)) - \nabla_X Y(f) - [Y, X]f \\
 &= Y(X(f)) - \nabla_X Y(f) - Y(X(f)) + X(Y(f)) \\
 &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\
 &= D^2 f(Y, X)
 \end{aligned}$$

□

Seja T um tensor de ordem 2, simétrico, i.e, $T(X, Y) = T(Y, X)$. Define-se a traça de T por

$$\text{Traç}(T) = \sum_{i=1}^n T(E_i, E_i) \quad (4.7)$$

onde, para cada $x \in M$, $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base do $T_x M$. Dada $f \in C^\infty(M)$ o Teorema 4.15 diz que $D^2 f$ é um tensor de ordem 2 simétrico. Logo, define-se o Laplaciano de f por

$$\Delta f(x) = \text{Traç}(D^2 f(x)) \quad (4.8)$$

Como um exemplo, calculemos o Laplaciano de funções C^∞ no caso $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ seja $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$ a base de $\mathbb{R}_x^n \equiv \mathbb{R}^n$ dada pelas coordenadas usuais. Então

$$\begin{aligned}
 \Delta f(x) &= \text{Traç}(D^2 f) = \sum_{i=1}^n D^2 f(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\langle Df, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \right) - \left\langle Df, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\langle Df, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \right) \right\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}
 \end{aligned}$$

pois $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ii}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$, onde os Γ_{ii}^k são os símbolos de Christoffel e eles são nulos no caso $M = \mathbb{R}^n$. Por tanto, nesse caso temos que o Laplaciano coincide com o Laplaciano usual. O operador Δ é chamado do operador de Laplace-Beltrami.

4.2.2 Curvatura

Agora vamos a dar outro conceito importante que é a curvatura. Veremos que informação sobre a curvatura da variedade em estudo, permite obter resultados globais (Veja

[9], seção 4).

Definição 4.16. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana n - dimensional. Sejam $X, Y \in \chi(M)$ e $k \geq 0$ um inteiro. Define-se a seguinte aplicação

$$R_{XY} : T^k(M) \rightarrow T^k(M) \quad (4.9)$$

como sendo

$$R_{XY} = -\nabla_X \nabla_Y + \nabla_Y \nabla_X + \nabla_{[X, Y]} \quad (4.10)$$

R_{XY} é chamado do *operador de curvatura*

Usando as propriedades dadas no Teorema 4.14, prova-se (Veja [9] ou [42]):

Teorema 4.17. R_{XY} tem a seguintes propriedades:

1. Para $T_1 \in T^k(M)$ e $T_2 \in T^l(M)$,

$$R_{XY}(T_1 \otimes T_2) = R_{XY}T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes R_{XY}T_2;$$

2. Para qualquer $f \in C^\infty(M)$ e $T \in T^k(M)$,

$$R_{(fX)Y}T = R_{X(fY)}T = R_{XY}(fT) = fR_{XY}T;$$

3. Para qualquer $f \in C^\infty(M)$, $R_{XY}f = 0$

Sejam $Z, W \in \chi(M)$, então R_{XY} é um campo vetorial. Pelo item (2) do Teorema 4.17 $R_{XY}Z$ é linear em cada uma de suas variáveis X, Y, Z . Define-se então, para $X, Y, Z, W \in \chi(M)$, o tensor de quarto ordem

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R_{XY}Z, W \rangle \quad (4.11)$$

Chamado de tensor de curvatura. Mostra-se que o tensor de curvatura possui as seguintes propriedades (Veja [42] ou [9])

Teorema 4.18. Para quaisquer $X, Y, Z, W \in \chi(M)$, temos:

1. $R_{XY} = -R_{YX}$;

2. $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$, conhecida como a primeira identidade de Bianchi;

3. $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$;

4. $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$

Usando o tensor curvatura daremos o conceito de curvatura seccional.

Definição 4.19. Dado $x \in M$, seja Ξ um subespaço de dimensão 2 do $T_x M$. Para qualquer base $\{v_1, v_2\}$ de Ξ , definimos a curvatura seccional de Ξ por

$$k(\Xi) = \frac{R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{|v_1 \wedge v_2|^2} \quad (4.12)$$

onde $|v_1 \wedge v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$

Das propriedades do tensor curvatura, segue-se, que o lado direito da equação (4.12) não depende da escolha da base de Ξ . Não é possível em geral, trocar a ordem nos argumentos da diferencial covariante. Porém, a diferença entre eles é precisamente o tensor de curvatura.

Teorema 4.20. *Seja T um campo tensorial e $X, Y \in \chi(M)$. Então*

$$D^2 T(\dots, X, Y) = D^2 T(\dots, Y, X) + (R_{XY} T(\dots)) \quad (4.13)$$

Demonstração. Veja [42] □

A seguir define-se o tensor de Ricci e a função curvatura de Ricci. O tensor de Ricci é um tensor de ordem 2 definido por

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(X, e_i, Y, e_i), \quad \text{em cada } x \in M \quad (4.14)$$

onde $X, Y \in \chi(M)$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de $T_x M$. Pelo Teorema 4.18 temos que o tensor de Ricci é simétrico, i.e, $\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X)$. Seja $x \in M$ e $X \in T_x M$ com $|X| = 1$. Define-se por $\text{Ric}(X, X)$ a curvatura de Ricci do vetor X . Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de $T_x M$ tal que $e_1 = X$. Então

$$\text{Ric}(X, X) = \sum_{i=2}^n R(e_1, e_i, e_1, e_i) \quad (4.15)$$

pois $R(e_1, e_1, e_1, e_1) = 0$. Assim $\text{Ric}(X, X)$ é a soma de $n - 1$ curvaturas seccionais.

Agora introduzimos o conceito de isometria o qual será usado no momento de mostrar que os resultados obtidos usando está nova linguagem coincidem com os resultados clássicos.

Sejam M e N variedades Riemannianas e $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação C^∞ . Para cada $x \in M$ define-se a aplicação $d\phi_x : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} N$ da seguinte forma. Dado $v \in T_x M$,

seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, uma curva tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$. Então $d\phi_x(v) \in T_{\phi(x)}N$ é definido como sendo:

$$d\phi_x(v) = \beta'(0)$$

onde $\beta(t) = \phi(\gamma(t))$ é uma curva em N tal que $\beta(0) = \phi(\gamma(0)) = \phi(x)$. A aplicação $d\phi$ é chamada a diferencial da aplicação ϕ .

Definição 4.21. Uma aplicação $\phi : M \rightarrow N$, C^∞ , é chamada de uma isometria local entre as duas variedades Riemannianas M e N , se para cada $x \in M$, ϕ é um isomorfismo local em x e tal que a aplicação $d\phi_x : T_xM \rightarrow T_{\phi(x)}N$ é uma isometria entre os espaços com produto interno T_xM e $T_{\phi(x)}N$. Além disso, ϕ é chamada uma isometria de M em N se ϕ é uma isometria local e ao mesmo tempo um difeomorfismo.

Uma isometria local preserva conexões no sentido seguinte.

Teorema 4.22. *Sejam M e N variedades Riemannianas e ∇, ∇' suas respectivas conexões. Seja $\phi : M \rightarrow N$ uma isometria local e $X, Y \in \chi(M)$. Então*

$$d\phi(\nabla_X Y) = \nabla_{d\phi(X)} d\phi(Y)$$

Demonstração. Veja [42], Teorema 1.11 □

Como já tínhamos mencionado antes, nesta Tese será considerada a superfície media de uma casca como sendo uma variedade Riemanniana de dimensão 2 imersa em \mathbb{R}^3 , logo ela será considerada uma hipersuperfície. Então precisamos explorar as propriedades delas. Começamos por definir a segunda forma fundamental.

Tradicionalmente a primeira forma fundamental permite calcular o comprimento de um arco de curva, ângulos e áreas de regiões numa superfície parametrizada. A segunda forma fundamental permite medir quanto o vetor normal muda se percorremos longe de p numa certa direção v , com $v \in T_pM$. Isto permite medir as curvaturas seccionais numa variedade.

Segunda Forma Fundamental de Hipersuperfícies: Seja \widetilde{M} uma $n + 1$ - variedade Riemanniana. Uma subvariedade n - dimensional de \widetilde{M} , denotada por M , é chamada de hipersuperfície. Um campo vetorial $N \in \chi(\widetilde{M})$ é chamado de campo vetorial normal a M , se para cada $p \in M$, $N \perp T_pM$ e $|N| = 1$.

Introduzimos uma métrica Riemanniana sobre uma hipersuperfície M , a qual é chamada a métrica induzida por \widetilde{M} , como segue,

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle \quad \text{para } X, Y \in \chi(M),$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica \widetilde{M} . Sejam $\widetilde{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de \widetilde{M} e M respectivamente. Então (veja [42], Pg. 16)

Lema 4.23. Para qualquer $X, Y \in \chi(M)$,

$$\nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y - \langle \widetilde{\nabla}_X Y, N \rangle N \quad (4.16)$$

Agora definimos a segunda forma fundamental para hipersuperfícies.

Definição 4.24. A segunda forma fundamental de uma hipersuperfície M é um campo tensorial de ordem 2 sobre M , dado por

$$\Pi(X, Y) = \langle \widetilde{\nabla}_X N, Y \rangle \quad \text{para } X, Y \in \chi(M) \quad (4.17)$$

Um lema que será usado ao longo desta Tese é o seguinte

Lema 4.25. A segunda forma fundamental de uma hipersuperfície é simétrica, i.e,

$$\Pi(X, Y) = \Pi(Y, X) \quad \text{para } X, Y \in \chi(M) \quad (4.18)$$

Os seguintes Teoremas serão usados no momento de modelar cascas de Naghdi.

Teorema 4.26. Para $X, Y \in \chi(M)$,

$$\widetilde{R}(X, Y, X, Y) = R(X, Y, X, Y) - \Pi(X, X)\Pi(Y, Y) + \Pi^2(X, Y)$$

Onde \widetilde{R} e R são os tensores de curvatura de \widetilde{M} e M respectivamente.

Teorema 4.27. Seja \widetilde{R} o tensor de curvatura de \widetilde{M} . Então

$$D\Pi(Z, X, Y) = D\Pi(Z, Y, X) + \widetilde{R}(X, Y, N, Z)$$

Para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$.

Se $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ e M é uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} , então soube-se que $\widetilde{R} = 0$. Logo, usando o Teorema 4.27 segue que

Lema 4.28. Seja M uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} . Seja Π sua segunda forma fundamental. Então $D\Pi$ é simétrica na suas variáveis.

A métrica induzida sobre uma hipersuperfície é chamada da primeira forma fundamental de M

Observação 4.29. Sejam M e M' duas hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} . Se existe uma isometria $\phi : M \rightarrow M'$, então

$$g(X, Y) = g'(d\phi(X), d\phi(Y)) \quad (4.19)$$

$\forall X, Y \in \chi(M)$ sendo g e g' as métricas induzidas em M e M' respectivamente. Neste caso se diz que duas superfícies isométricas tem a mesma primeira forma fundamental no sentido de (4.19). Duas superfícies isométricas podem ter diferente configuração. Por exemplo o plano e o cilindro(menos uma geratriz) são isométricos, porem diferentes. Para que duas superfícies tenham a mesma configuração(forma) a segunda forma fundamental também tem que ser preservada. Isso é garantido pelo seguinte resultado

Teorema 4.30. Sejam M e M' duas hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} . Sejam N e N' campos normais a M e M' , respectivamente. Seja $\phi : M \rightarrow M'$ uma isometria tal que

$$\Pi(X, Y) = \Pi'(d\phi(X), d\phi(Y))$$

Para todo $X, Y \in \chi(M)$, onde Π e Π' são as segundas formas fundamentais de M e M' , respectivamente. Então existe uma isometria $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\Phi|_M = \phi$

Para finalizar esta secção daremos um exemplo de uma variedade Riemanniana e usando alguns dos fatos expostos nestas secções.

Exemplo 4.6. Seja $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ e considere o conjunto

$$M = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

É fácil ver que M é uma variedade diferenciável, na figura (4.1) mostra-se algúms sistemas coordenadas admissíveis no caso 2-dimensional

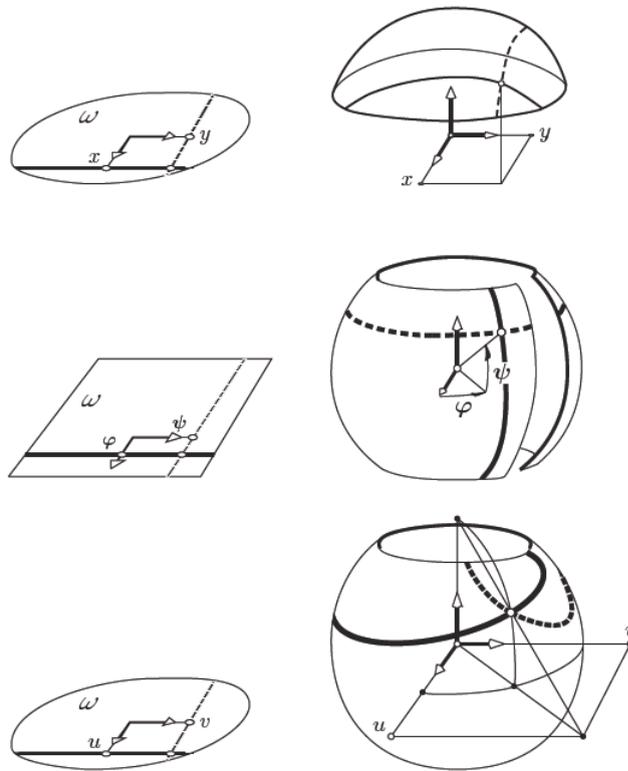


FIGURA 4.1: Sistemas de coordenadas para a esfera em 2-dimensional.

Ela também pode ser considerada Riemanniana ao muni-la da métrica induzida de \mathbb{R}^{n+1} . O campo normal a M é $N(x) = x$. Sejam $X = (X_1, \dots, X_{n+1})$ e $Y = (Y_1, \dots, Y_{n+1})$ campos vetoriais sobre M . Então

$$\begin{aligned} \Pi(X, Y) &= \frac{\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle}{\langle \tilde{\nabla}_X (\sum_{i=1}^{n+1} x_i \partial_{x_i}), Y \rangle} \dots \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \langle X(x_i) \partial_{x_i}, Y \rangle}{\sum_{i=1}^{n+1} X(x_i) \left\langle \partial_{x_i}, \sum_{j=1}^{n+1} Y_j \partial_{x_j} \right\rangle} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n+1} X(x_i) Y_i}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i Y_i} \end{aligned}$$

Pois $X(x_i) = \sum_{j=1}^{n+1} X_j \partial_{x_j}(x_i) = \sum_{j=1}^{n+1} X_j \delta_{ij} = X_i$. Assim temos que $\Pi = g$.

Agora calculemos curvaturas seccionais em M . Seja $x \in M$ e seja e_1, e_2 uma base ortonormal de um subespaço 2 dimensional Ξ de $T_x M$. Já que $\tilde{R} = 0$, usando a formula dada no

Teorema 4.26, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Curvatura seccional de } (\Xi) &= \Pi(e_1, e_1)\Pi(e_2, e_2) - \Pi(e_1, e_2)^2 \\ &= g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - g(e_1, e_2)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

4.3 Aplicação Exponencial e Campos de Jacobi

Para construir campos vetoriais e regiões de fuga, como foi descrito na introdução, precisamos da aplicação exponencial e os Campos de Jacobi. Nesta seção serão descritos tais conceitos.

Definição 4.31. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e completa, i.e, as geodésicas estão definidas para todo tempo. Seja $x \in M$, define-se a aplicação $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ da seguinte maneira: Para $v \in T_x M$, seja γ a geodésica saindo de x e velocidade v . Considere o ponto $y \in \gamma$ tal que a longitude de arco de γ entre x e y é $|v|$. Então $\exp_x v = y$. $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ é chamada a aplicação exponencial de M em x .

Geometricamente, $\exp_x v$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de x sobre uma geodésica que passa por x com velocidade $\frac{v}{|v|}$

Observação 4.32. Aqui assumimos que a variedade é completa para garantir que as geodésicas existem para todo tempo. Caso contrario, pelo Teorema 4.11, as geodésicas existem localmente no tempo.

O seguinte lema é muito importante ao momento de definir campos vetoriais de fuga para o modelo de cascas de Naghdi.

Lema 4.33. *Seja $x \in M$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_x : B_x(\epsilon) \rightarrow M$ é um difeomorfismo, onde $B_x(\epsilon) = \{v \in T_x M \text{ tais que } |v| < \epsilon\}$*

Demonstração. Veja [42], Pg. 24 □

Dado $x \in M$. Fixemos $\epsilon \geq 0$ tal que \exp_x é um difeomorfismo de $B_x(\epsilon)$ em M . $B(x, \epsilon) = \exp_x(B_x(\epsilon)) \subset M$ é chamada bola geodésica, em M , centrada em x e raio ϵ .

Para $0 < s < \epsilon$, seja $S_x(s) = \{v \in T_x M / |v| = s\}$ e $S(x, \epsilon) = \exp_x(S_x(s))$. $S(x, s)$ é chamada esfera geodésica centrada em x e raio s .

O seguinte Teorema diz que as geodésicas minimizam distância.

Teorema 4.34. *Seja $\epsilon > 0$ tal que $\exp_x : B_x(\epsilon) \rightarrow M$ é um difeomorfismo. Seja $v \in B_x(\epsilon)$ e $\gamma(t) = \exp_x(tv)$ com $t \in [0, 1]$. Então $d(x, y) = L(\gamma) = |v|$, onde $y = \gamma(1)$*

O Teorema anterior é valido globalmente se consideramos hipótese sobre a curvatura seccional, o qual, como veremos mais adiante, garante a existência global de campos vetoriais de fuga. O seguinte Teorema é conhecido como o Teorema de Cartan-Hadamard, os interessados podem ver [16].

Teorema 4.35. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e curvatura seccional não positiva. Então, para qualquer $x \in M$, $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ é um difeomorfismo.*

As região mais grande onde garantimos a existência de Campos vetoriais de fuga é o interior do cut-locus, definido para cada $x \in M$. Vamos a definir tais regiões que serão usadas na resolução de nosso problema. Não usaremos o interior do cut-locus todo, e sim, uma parte de ela já que para pontos diferentes dessas regiões podem-se intersectar.

Pelo Teorema 4.34, sem informação da curvatura, as geodésicas minimizam distância localmente. Seja $x_0 \in M$, $v \in T_{x_0} M$ e $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tv)$ com $|v| = 1$ com $t \in [0, t_0]$, tal que $\gamma|_{[0, t_0]}$ minimiza distância. Logo, para $t < t_0$, γ ainda minimiza distância. Porém para $t \geq t_0$ ela deixa de ter essa propriedade. $\gamma(t_0)$ é chamado o ponto de corte (cut-point) de γ com respeito de x_0 e $t_0 v \in T_{x_0} M$ é chamado o ponto de corte tangente. Defina a aplicação $\tau : S_{x_0}(1) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\tau(v) = t_0 \quad \text{para } v \in S_{x_0}(1)$$

Seja $C(x_0) = \{\tau(v)v \mid v \in S_{x_0}(1)\}$. $C(x_0)$ é chamado o "cut-locus tangente de x_0 " e o conjunto $\exp_{x_0}(C(x_0))$ é chamado o cut-locus de x_0 .

Seja M uma variedade Riemanniana completa. Seja $x_0 \in M$ e

$$\sum(x_0) = \{tv \mid v \in S_{x_0}(1), 0 < t < \tau(v)\}$$

$\sum(x_0)$ é chamado o interior do cut-locus tangente de x_0 . Então $\exp_{x_0} : \sum(x_0) \rightarrow \exp_{x_0}(\sum(x_0))$ é um difeomorfismo.

Definição 4.36. $\exp_{x_0}(\sum(x_0))$ é chamado o interior do cut-locus de x_0 .

Definição 4.37. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica. Um campo vetorial J ao longo de γ é um campo de Jacobi, se ele satisfaz

$$\ddot{J}(t) + R_{\gamma'} J \gamma' = 0 \quad \text{para } t \in [a, b],$$

onde $\ddot{J}(t) = \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} J$ e $R_{\gamma' J}$ é o operador de curvatura. Um campo de Jacobi é chamado Normal, se $\langle \gamma'(t), J(t) \rangle = 0$ para todo $t \in [a, b]$

A seguir vamos construir campos vetoriais de fuga. Os campos vetoriais de fuga garantem que as regiões onde eles estão definidos podem ser livres de efeitos dissipativos o de controle. O seguinte lema será útil.

Lema 4.38. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa e $x_0 \in M$ dado. Seja $\rho(x) = d(x, x_0)$ a função distância de x a x_0 na métrica g . Seja $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tv)$ para $t \in \mathbb{R}$, onde $v \in T_{x_0}M$ com $|v| = 1$. Seja $x = \exp_{x_0} bv \in \exp_{x_0}(\sum(x_0))$. Então, para qualquer $X \in T_x(S(x_0, b))$, existe um campo de Jacobi Normal, J , ao longo de γ tal que*

$$J(0) = 0, \quad J(b) = X;$$

e

$$D^2\rho(X, X) = \langle \dot{J}(b), J(b) \rangle$$

Estudemos os campos de Jacobi em espaços de curvatura seccional constante. É válido o seguinte resultado.

Lema 4.39. *Seja M uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante k . Seja $x \in \exp_{x_0} \sum(x_0)$ fixo. Seja $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tv)$ com $|v| = 1$ tal que $x = \gamma(b)$. Seja $X \in T_x[S(x_0, b)]$ e $e \in T_{x_0}M$ tal que o transporte paralelo $e(t) \in T_{\gamma(t)}M$ dele ao longo de γ satisfaz $e(b) = X$*

Seja J um campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(b) = X$. Então

$$J(t) = f_0(t)e(t),$$

onde

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{sen}\sqrt{kb}} \operatorname{sen}\sqrt{kt} & k > 0; \\ \frac{1}{b} t & k = 0; \\ \frac{1}{\operatorname{senh}\sqrt{-kb}} \operatorname{senh}\sqrt{-kt} & k < 0. \end{cases}$$

Combinando os lemas (4.38) e (4.39), temos o seguinte

Teorema 4.40. *Seja M uma variedade Riemanniana de curvatura constante k . Seja $x_0 \in M$ dado. Seja $\rho(x) = d(x, x_0)$ a função distância de x a x_0 na métrica g . Então, para $x \in \exp_{x_0} \sum(x_0)$, tem-se*

$$D^2\rho(X, X) = f(\rho)|X|^2 \quad \text{para } X \in T_x M, \quad \langle D\rho, X \rangle = 0,$$

onde

$$f(\rho) = \begin{cases} \sqrt{k} \cotg(\sqrt{k}\rho) & k > 0; \\ \frac{1}{b} & k = 0; \\ \sqrt{-k} \cotgh(\sqrt{-k}\rho) & k < 0. \end{cases}$$

A ideia para obter resultados de estabilização é que a região onde serão considerados os efeitos dissipativos leve tal informação ao domínio todo. A existência de um campo vetorial de fuga garante que essa região será uma vizinhança de seu bordo. Logo não será necessário colocar efeitos dissipativos no interior dessa região.

Em geral se define H como sendo de fuga para la métrica g sobre um aberto Ω de M , se existe uma função v definida em $\bar{\Omega}$, tal que $DH(X, X) = v(x)|X|^2$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ e todo $X \in T_x\Omega$. Este fato garante que Ω não contem geodésicas fechadas, veja o Teorema 3.7, logo a informação pode ser levada para o bordo de Ω e ele pode ser considerado livre de efeitos dissipativos/controle. Observe já que o Teorema 4.40 garante a existência de tais campos definidos no interior do cut-locus de um ponto.

4.4 Técnica de Bochner

Nesta seção descrevemos a técnica de Bochner a qual permite uma grande simplificação no momento de obter estimativas. A dificuldade na análise clássica de cascas é lidar com os símbolos de Christoffel que aparecem ao considerar ela como a imagem de um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Essa dificuldade é superada fazendo estimativas pontuais respeito de um sistema de coordenadas onde esses símbolos anulem-se. Um exemplo bem conhecido de tal sistema é o sistema geodésico o qual será exposto a seguir.

Definição 4.41. Seja M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Seja (x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas no ponto p . Se

$$\begin{cases} g_{ij}(p) = \delta_{ij} \\ \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}(p) = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Para todo $i, j = 1, \dots, n$, então o sistema $\{x_i\}$ é chamado de normal em p .

Um sistema de coordenadas normal pode-se obter usando a aplicação exponencial. Dado $p \in M$, seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de T_pM e seja $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \rightarrow M$ tal que \exp_p seja um difeomorfismo. Para $q \in \exp_p(B_\epsilon(0))$ considere o sistema (x_1, \dots, x_n) , onde $q = \exp_p(\sum_{i=1}^n x_i e_i)$. Vale

Teorema 4.42. *Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. Então o sistema de coordenadas geodésico é normal em p*

Definição 4.43. Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. Uma família de campos E_1, \dots, E_n , definidos numa vizinhança de p , os quais satisfazem:

$$\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij} \quad (4.21)$$

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = 0, \quad (4.22)$$

para todo i, j , é chamada um referencial normal em p . Se a família somente satisfaz (4.21) ela é dita um referencial no ponto p .

É claro que a existência de um referencial para cada $p \in M$ sempre existe. A pergunta é se sempre pode-se achar um referencial que satisfaça a condição (4.22) e a resposta é sim. O seguinte resultado é conhecido.

Teorema 4.44. Dado $p \in M$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$, então existe um referencial normal em p tal que $E_i(p) = e_i$, para $1 \leq i \leq n$.

Observação 4.45. Para um referencial normal em p , vale

$$[E_i, E_j](p) = 0 \quad \text{para todo } i, j.$$

Com efeito $[E_i, E_j](p) = \nabla_{E_i} E_j(p) - \nabla_{E_j} E_i(p) = 0$.

Como aplicação da técnica de Bochner em alguns exemplos clássicos, podemos mencionar

Lema 4.46. Seja $\{x_i\}$ um sistema de coordenadas locais em M , normal em p . Então para $f \in C^2(M)$,

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p).$$

Se E_1, \dots, E_n é um referencial normal em p , então

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n E_i E_i(f).$$

O conceito que generaliza a noção de diferencial de uma função $f \in C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ para formas diferenciais é a derivada exterior. A derivada exterior de uma k -forma é uma $k+1$ forma. Se $f \in C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, e (x_1, x_2, \dots, x_n) um sistemas de coordenadas em $p \in M$ então a derivada exterior de f em p é a 1-forma

$$df(p) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Se $w = b_1 dx_1 + b_2 dx_2$ é uma 1-forma, então dw é a 2-forma dada por

$$dw = db_1 \wedge dx_1 + db_2 \wedge dx_2$$

Em geral, a derivada exterior define-se como segue. Considere $F^k(M) = \{\text{todas as } k\text{-formas sobre } M\}$, então $d : F^k(M) \rightarrow F^{k+1}(M)$, satisfazendo:

- 1) $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$
- 2) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$
- 3) $d(d\alpha) = 0$

veja [9].

Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional orientada. Uma n -forma ω_0 sobre M é chamada elemento de volume se, para qualquer referencial $\{E_1, \dots, E_n\}$, $|\omega_0(E_1, \dots, E_n)| = 1$. Seja $X \in \chi(M)$ um campo vetorial e $\omega_0 \in \Lambda^n(M)$ um elemento de volume. Então, existe uma única função sobre M , denotado por $\text{div}(X)$, tal que

$$(\text{div}X)\omega_0 = d(i(X)\omega_0),$$

onde d é a derivada exterior. A função $\text{div}X$ é chamada o divergente de X .

Lema 4.47. *Seja E_1, \dots, E_n um referencial. Então:*

$$d = \sum_{i=1}^n E_i \wedge \nabla_{E_i}$$

Lema 4.48. *Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional, orientada. Seja $X \in \chi(M)$. Então*

$$\text{div}(X) = \text{traç}DX.$$

Seja $p \in M$. Se $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial normal em p , então

$$\text{div}(X) = \sum_{i=1}^n E_i \langle X, E_i \rangle.$$

Seja $p \in M$. Denota-se por $T^k(T_p M)$ o conjunto de tensores de ordem k sobre $T_p M$. Introduzimos um produto interno em $T^k(T_p M)$, ainda denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, da seguinte forma. Para qualquer $\alpha, \beta \in T^k(T_p M)$,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \quad (4.23)$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM . Mostra-se que a definição dada pela fórmula (4.23) independe da escolha da base. De forma análoga introduzimos um produto interno sobre as k -formas definidas no T_pM , $\Lambda^k(T_pM)$. Para $\alpha, \beta \in \Lambda^k(M)$,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i_1 < \dots < i_k = 1}^n \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \quad (4.24)$$

Note que, em particular, para $k = 1$, temos $T(T_pM) = \Lambda(T_pM) = T_pM$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle = g$. Se $T_1, T_2 \in T^k(M)$, então

$$\langle T_1, T_2 \rangle$$

é uma função sobre M a qual está definida, para cada $p \in M$, pela fórmula (4.23). Analogamente, para $\alpha, \beta \in \Lambda^k(M)$, a função $\langle \alpha, \beta \rangle$ é definida, para cada $p \in M$, pela fórmula (4.24).

Uma noção importante é a de orientação. Seja W um espaço vetorial de dimensão n e e_1, e_2, \dots, e_n e f_1, f_2, \dots, f_n duas bases de W . Se o determinante da matriz de mudança de base entre elas é positivo, dizemos que elas definem a mesma orientação em W . O conjunto de bases com essa propriedade é chamada de uma orientação positiva em W .

Seja $p \in M$. Sejam e_1, \dots, e_n uma base ortonormal de T_pM . Então $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, com $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, formam uma base ortonormal de $\Lambda^k(T_pM)$ com o produto interno (4.24).

Seja T_pM com uma orientação. Define-se o operador tipo estrela $*$: $\Lambda^k(T_pM) \rightarrow \Lambda^{n-k}(T_pM)$, onde $0 \leq k \leq n$, por

$$*(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-k}} \quad (4.25)$$

onde j_1, \dots, j_{n-k} é escolhido tal que $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-k}}\}$ seja uma base positiva de T_pM .

O operador de Hodge-Laplace é definido como $\Delta = d\delta + \delta d$, onde δ atua sobre as k -formas é dado em termos do operador estrela (4.25), por

$$\delta = (-1)^{nk+n+1} * d*$$

Assim $\Delta : \Lambda^k(T_pM) \rightarrow \Lambda^k(T_pM)$. Algumas propriedades importantes de d e δ são dadas a seguir:

Teorema 4.49. 1. $d^2 = 0$;

2. $\delta^2 = 0$.

3. Seja E_1, \dots, E_n um referencial normal. Então

$$\delta = - \sum_{j=1}^n i(E_j) \nabla_{E_j} \quad (4.26)$$

Teorema 4.50. *Seja M uma variedade Riemanniana orientada de dimensão n . Se $\{E_i\}$ é um referencial, então*

$$\Delta = - \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i E_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n E_i \wedge i(E_j) R_{E_i E_j} \quad (4.27)$$

onde $\nabla_{XY}^2 = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y}$ é a derivada covariante de segundo ordem e R_{XY} é o operador de curvatura.

Observação 4.51. Se $f \in C^\infty(M)$, pelo item 3 de (4.17), $R_{XY}f = 0$, logo $\Delta f = -\Delta f$

Teorema 4.52. *Sejam X, Y campos vetoriais, ou equivalentemente 1-formas. Então*

$$\langle \Delta X, Y \rangle + \langle X, \Delta Y \rangle + \Delta \langle X, Y \rangle = 2 \langle DX, DY \rangle + 2 \text{Ric}(X, Y),$$

onde Δ é o Laplaciano sobre M , Δ é o Hodge-Laplaciano e Ric é o tensor de Ricci.

4.5 Espaços de Sobolev de Campos Tensoriais

Para definir os espaços de Sobolev sobre variedades precisamos definir a integral em M usando a métrica g (Veja [17], [42]).

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Seja $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com um sistema de coordenadas $\varphi = \{x_i\} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então a métrica (que é um tensor de ordem 2) pode-se escrever como

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$$

Seja $G = \det(g_{ij})$. Então $G(q) > 0$ para $q \in U$. Seja $f \in C(M)$ tal que $\text{supp}(f) \subset U$. Define-se

$$\int_U f dg = \int_{\mathbb{R}^n} f \circ \varphi^{-1}(x) \sqrt{G \circ \varphi^{-1}(x)} dx_1 \dots dx_n \quad (4.28)$$

onde o lado direito de (4.28) é uma integral em \mathbb{R}^n .

Seja $\Omega \subset M$ um conjunto aberto. Usamos (4.28) e uma partição da unidade para definir $\int_{\Omega} f dg$. Seja $\{(U_i, \varphi_i)\}$ um cubrimento de Ω , localmente finito e seja $\{\phi\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}$. Define-se

$$\int_{\Omega} f dg = \sum_i \int_{\Omega \cap U_i} f \phi_i dg$$

Lema 4.53. *Seja M uma variedade Riemanniana orientada e seja ω_0 um elemento de volume. Então para $f \in C(M)$,*

$$\int_M f dg = \pm \int_M f \omega_0$$

4.5.1 Identidades de Green sobre Variedades

Agora enunciemos as identidades que são obtidas usando a técnica de Bochner. Começamos pela formula de Green

Teorema 4.54. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada. Seja $\Omega \subset M$ uma região aberta, limitada e com fronteira regular Γ . Seja ν o campo normal a Γ e apontando para fora. Então para $X \in \chi(M)$*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(X) dg = \int_{\Gamma} \langle X, \nu \rangle d\Gamma$$

onde $d\Gamma$ denota o elemento de volumen de Γ com a métrica induzida de (M, g)

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Seja $\Omega \subset M$ uma região aberta, limitada e com fronteira suave Γ . Introduzimos um produto interno em $T^k(\Omega)$, o conjunto dos tensores de ordem k em M , por:

$$(T_1, T_2)_{T^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \langle T_1, T_2 \rangle dg \quad \text{para } T_1, T_2 \in T^k(\Omega) \quad (4.29)$$

onde $\langle T_1, T_2 \rangle$ é definido, para cada $p \in M$ por (4.23). O completamento de $T^k(\Omega)$ pelo produto interno (4.29) é denotado por $L^2(\Omega, T^k)$. Denota-se por $L^2(\Omega)$ o completamento de $C^\infty(\Omega)$ respeito do seguinte produto interno

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dg, \quad f, h \in C^\infty(\Omega)$$

Analogamente, para $k \geq 2$, introduzimos um produto interno sobre $\Lambda^k(\Omega)$ por

$$(\varphi, \phi)_{\Lambda^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \langle \varphi, \phi \rangle dg, \quad \varphi, \phi \in \Lambda^k(\Omega) \quad (4.30)$$

onde $\langle \varphi, \phi \rangle$ é definido, para cada $p \in \Omega$, por (4.24). O completamento de $\Lambda^k(\Omega)$ respeito do produto interno (4.30) é denotado por $L^2(\Omega, \Lambda^k)$.

Define-se o espaço de Sobolev $H^k(\Omega)$ como o completamento de $C^\infty(\Omega)$ com respeito da norma

$$\|f\|_{H^k(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^k \|D^i f\|_{L^2(\Omega, T^i)}^2 + \|f\|^2 \quad (4.31)$$

onde $D^i f$ é a i -ésima diferencial covariante de f na métrica g . Outro espaço de Sobolev que usaremos é o seguinte

$$H^k(\Omega, \Lambda) = \{U \in L^2(\Omega, \Lambda), D^i U \in L^2(\Omega, T^{i+1}), \quad 1 \leq i \leq k\} \quad (4.32)$$

com o produto interno

$$(U, V)_{H^k(\Omega, \Lambda)} = \sum_{i=0}^k (D^i U, D^i V)_{L^2(\Omega, T^{i+1})} \quad (4.33)$$

As seguintes identidades serão usadas nos seguintes capítulos e são fundamentais no desenvolvimento de nosso trabalho.

Teorema 4.55. *Seja M uma variedade Riemanniana orientada. Então*

$$(d\alpha, \beta)_{L^2(\Omega, \Lambda^2)} = (\alpha, \delta\beta)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + \int_{\Gamma} \langle \nu \wedge \alpha, \beta \rangle d\Gamma$$

onde d é a derivada exterior e $\delta = (-1)^{nk+n+1} \star d\star$, $\alpha \in \Lambda(\Omega)$ e $\beta \in \Lambda^2(\Omega)$ quaisquer.

Alem disso,

$$(\alpha, d\beta)_{L^2(\Omega, \Lambda)} = (\delta\alpha, \beta) + \int_{\Gamma} \beta \langle \alpha, \nu \rangle d\Gamma$$

Para qualquer $\alpha \in \Lambda(\Omega)$ e $\beta \in C^\infty(\Omega)$. Aqui ν denota a normal na fronteira apontado para fora de Ω .

Seja $T \in T^2(M)$ um campo tensorial de ordem 2. Define-se $T^* \in T^2(M)$ por

$$T^*(X, Y) = T(Y, X), \quad \text{para } X, Y \in \chi(M)$$

T^* é chamado do transposto do campo tensorial T . Dado $T \in T^2(\Omega)$, $\text{Traç}[i(X)DT]$ é um funcional linear na variável X . Logo, existe um único $QT \in \chi(\Omega)$ tal que

$$\langle X, QT \rangle = \text{Traç}[i(X)DT], \quad \text{para } X \in \chi(\Omega) \quad (4.34)$$

Assim temos definido o operador $Q : T^2(\Omega) \rightarrow \chi(\Omega)$. O seguinte resultado mostra que o operador Q é a adjunta formal do operador diferencial covariante $D : \chi(\Omega) \rightarrow T^2(\Omega)$.

Teorema 4.56. Para $T \in T^2(\Omega)$ e $U \in \chi(\Omega)$,

$$(T, DU)_{L^2(\Omega, T^2)} = (-QT, U)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + \int_{\Gamma} \langle i(\nu)T^*, U \rangle d\Gamma$$

onde T^* é a transposta de T e $i(\nu)T^*$ é o produto interior de T^* por ν , o qual é um campo vetorial normal sob Γ , dado por

$$\langle i(\nu)T^*, Z \rangle = T^*(\nu, Z), \quad \text{para todo } Z \in \chi(\Gamma)$$

Teorema 4.57. Seja X um campo vetorial, então:

$$QDX = -\Delta X + i(X)Ric; \quad (4.35)$$

$$QD^*X = -d\delta X + i(X)Ric \quad (4.36)$$

onde D^*X denota a transposta de DX e Ric é o tensor de Ricci.

Teorema 4.58. Para $U, V \in \Lambda(\Omega)$, temos

$$(DV, DU)_{L^2(\Omega, T^2)} = (\Delta V - i(V)Ric, U)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + \int_{\Gamma} \langle \nabla_{\nu} V, U \rangle d\Gamma \quad (4.37)$$

$$(D^*V, DU)_{L^2(\Omega, T^2)} = (d\delta V - i(V)Ric, U)_{L^2(\Omega, \Lambda)} + \int_{\Gamma} \langle \nabla_U V, \nu \rangle d\Gamma \quad (4.38)$$

Referências

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for the solutions of elliptic partial equations satisfying general boundary conditions II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17(1), 35-92 (1964)
- [3] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for the solutions of elliptic partial equations satisfying general boundary conditions II, *Comm. Pure Appl. Math.* 17(1964, 35-92)
- [4] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of wave from the boundary, *SIAM J. Control Optim.* 30(1992), 1024-1065.
- [5] M. Bernadou and J. M. Boissarie, The finite Element Method in Thin Shell Theory: Applications to Arch Dam Simulation, *Progress in Scientific Computing*, Vol. 1, Boston, 1982.
- [6] M. Bernadou, P. G. Ciarlet, and B. Miara, Existence theorems for two-dimensional linear shell theories, *J. Elasticity* 34(2)(1994), 111-138.
- [7] A. Blouza, Nagdhi's Shell Model: Existence, Uniqueness and Continuous Dependence on the Midsurface, *Journal of Elasticity* 64: 199-216, 2001.
- [8] S. Bochner, Vector Fields and Ricci curvature *Bull. Amer. Math Soc.* 53 (1947), 179-195
- [9] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Boston, 1992.
- [10] J. M. Coron, *Control and nonlinearity*, Mathematical Survey and Monographs 2009.
- [11] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, and J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping-a sharp result, *Trans. Amer. Math. Soc.* 361(9)(2009), 4561-4580.

-
- [12] S. G. Chai and B. Z. Guo, Well-posedness and regularity of Naghdi shell equations under boundary control and observation, *J. Differential Equations* 249(2010), 3174-3214.
- [13] S. G. Chai and P. F. Yao, Observability inequality for thin shell, *Science in china Ser. A* 44(3)(2003), 300-311.
- [14] S. G. Chai, Boundary Feedback Stabilization of Naghdi's Model, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2005, Vol.21, No.1, pp. 169-184
- [15] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol III Theory of Shells* (2000), North Holland.
- [16] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison Theorem in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [17] E. Hebey, *Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds*, *Lecture Notes in Mathematics* 1635, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [18] L. Hormander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol III*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1985.
- [19] O. Iosifescu, Regularity for Naghdi Shell Equations, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 5 (4), pp. 453-465. *Mathematics*, 2000.
- [20] W. T. Koiter, A Consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells, *Proc. IUTAM Symposium on the theory of Thin Shells*, North-Holland(1960).
- [21] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The multiplier method*, RAM:Research in Applied Mathematics. Masson, Paris; Jhon Wiley and Sons, Chichester, 1994.
- [22] J. E. Lagnese, *Boundary Stabilization of Thin Plates*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1989
- [23] J. E. Lagnese, Boundary controllability in problems of transmission for a class of second order hyperbolic systems, *ESAIM Control Optim. Calc Var.*, 2 (1997), 343-357
- [24] J. E. Lagnese and J. L Lions, *Modelling Analysis and Control of thin Plates*. *Recherches en Mathematiques Appliques*, 6. Masson, Paris, 1988.
- [25] B.V. Kapitnov, and G. Perla , Simultaneous exact controllability for a pair of systems of evolution of sound in a compressible fluid, *Journal of Mathematics and System Science* 3 (2013) 655-658

- [26] B.V. Kapitonov, and G.Perla, Boundary Stabilization and a problem of transmission for a system of propagation of sound, *Funkcialaj Ekvacioj*, 49 (2006), 107–132.
- [27] B.V. Kapitonov, and G. Perla, Simultaneous exact controllability: an elastodynamic system and Maxwell's equations, *Adv. Differential Equations Volume 16, Number 5/6* (2011), 551-571.
- [28] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics Volume 6 of Course of Theoretical Physics Pergamon Press, Oxford, New York, Paris* (1960)
- [29] I. Lasiecka, R. Triggiani, and W. Valente, Uniform stabilization of spherical shells by boundary dissipation, *Adv. Differential Equations I*(1996), 635-674.
- [30] I. Lasiecka, R. Triggiani, Uniform stabilization of a shallow shell model with nonlinear boundary feedbacks, *J. Math. Anal. Appl.*, 269 (2002), pp. 642-688
- [31] R. Leis, *Initial boundary value problems in Mathematical Physics*, John Wiley, New York, 1986
- [32] J. L. Lions, Exact controllability, Stabilization and perturbations for distributed system, *SIAM Review* 30(1988), 1-68.
- [33] B. Miara and G. Perla, Exact Controllability Of Naghdi Shells, *Comptes Rendus de l'Academia des Sciences, Paris, Serie Mathematique - Vol. 348 - Issue 5-6 - 2010*, 341-346
- [34] P. M. Naghdi, *Foundations of elastic shell theory*, 1963. *Progress in Solid Mechanics*, Vol IV, pp. 1-90, North-Holland, Amsterdam.
- [35] P. M. Naghdi, *Theory of shells and Plates*, *Handbuch der physik*, Vol VI. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [36] A. Pazy, *Semigroup of Linear Operator and Application to Partial Differential equations*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1983.
- [37] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Second edition. *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, New York, 2006.
- [38] D. L. Russell, A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations, *Studies in Appl. Math.* 52(1973),189-211.
- [39] D. L. Russell, Controllability and Stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress an open questions, *SIAM Review* 20(4)(1978), 639-739.
- [40] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I, II, IV*, Boston Publish or Perish, 1970-1975.

-
- [41] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations I, II*. Springer-Verlag, New-York, 1996
- [42] P. F. Yao, *Modeling and Control in Vibrational and Structural Dynamics: A Differential Geometric Approach*, Chapman and Hall-CRC Applied Mathematics and Non-linear Science, 2011
- [43] P. F. Yao, On the Observability inequalities for the exact controllability of the wave equation with variable coefficient, *SIAM J. Control Optim.* 37(6)(1999), 1568-1599.
- [44] P. F. Yao, Observability inequalities for shallow shells, *SIAM J. Contr. and Optim.* 38(6)(2006), 1729-1756.
- [45] P. F. Yao, Observability inequalities for Naghdi's shells, MMAR 2000, the 6th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Poland 2000.
- [46] P. F. Yao, Boundary controllability for the quasilinear wave equation with boundary dissipation, *J. Differential Equations*, Volume 61, Issue 2, pp 191-233, 2010.
- [47] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, *Comm. Partial Differential Equations* 15(1990), 205-235.
- [48] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping in unbound domains, *J. Math. Pures Appl* 70(9) 70 (1991), 513-529.