PROPRIEDADES DE ESTABILIDADE LINEAR PARA MODELOS DE MATERIAIS COM MEMÓRIA

Ronaldo Ribeiro Alves

Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Curso de Doutorado em Matemática

Orientador:

Jaime E. Muñoz Rivera.

Rio de Janeiro

2014

Propriedades de estabilidade linear para modelos de materiais com memória

Ronaldo Ribeiro Alves

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática

Aprovada por:

Dr. Jaime E. Muñoz Rivera(Orientador). ....
Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha. ....
Universidade Federal de São João Del Rei.

Dr. Mauricio Alejandro Sepúlveda Cortés. ....
Universidade Concepción (Chile).

Dr. Octavio Paulo Vera Villagran. ....
Universidade Bío-Bío (Chile).

Dr. Verônica Poblete Oviedo. ....
Universidade Chile.

Dr. Gustavo Perla Menzala. ....
Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Dr. Pedro Gamboa Romero (Suplente). ....
Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
2014

Ficha Catalográfica

A474p
Alves, Ronaldo Ribeiro.
Propriedades de estabilidade linear para modelos de materiais com memória/ Ronaldo Ribeiro Alves - - Rio de Janeiro, 2014.
60f.

Orientador: Jaime Edilberto Muñoz Rivera.
Tese(Doutorado) - Universidade Federaldo Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Estabilidade Linear. 2. Modelos de materiais com Memória. 3. Teoria de Semigrupos. I. Rivera, Jaime Edilberto Muñoz, orient. II. Título.

A minha esposa
Irene
e aos meus filhos
Marcos e Gabriela.

Agradecimentos

Agradeço a Deus tudo que fizeste por mim até hoje.

Ao Professor Jaime E. Muñoz Rivera pela orientação, paciência e sobretudo pela confiança depositada em mim.

A minha esposa Irene da Consolação Teixeira Alves pelo seu apoio incondicional nesta fase difícil que foi o Doutorado, pela sua força nas minhas ausências e a esperança de poder me ajudar a vencer mais uma etapa.

Aos meus filhos Marcos Teixeira Alves e Gabriela Teixeira Alves o companheirismo e o apoio desde criança e como criança.

Aos meus pais José Alves Filho (in memoriam) e Neide da Conceição Ribeiro Alves pelo apoio e incentivo durante a minha vida acadêmica.

Aos meus irmãos, cunhados, amigos, colegas, alunos e família que me acompanharam durante o Doutorado, se falasse todos seria uma tese.

A UFSJ/Fapemig o apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de estabilidade para ondas abstratas com memória e depois para o sistema de Timoshenko com memória.

Estudamos a existência e unicidade de solução em cada caso. Nosso principal resultado foi mostrar que estes modelos satisfazem a propriedade de estabilidade linear, também conhecida como a propriedade de crescimento definida pelo espectro (PCDE), isto é, o tipo do semigrupo coincide com o limite espectral do seu gerador.

Em outra parte do trabalho, mostramos que o modelo de ondas abstratas com kernel soma de duas exponenciais também satisfaz a propriedade de crescimento definida pelo espectro.

Palavras-chave: Estabilidade Linear - Modelos de materiais com Memória - Teoria de Semigrupos.

Abstract

In this work we studied the problem of stability for abstracts waves with memory and after for the system of Timoshenko with memory.

We study the existence and unique of solution in each case. Our result principal is show that these models satisfy the linear stability propriety, also know how the spectrum determined growth (SDG) propriety, i. e., the type of the semigroup coincides with the spectral bound for its generator.

In other part of the work, we show that the model of abstracts waves with kernel sum of two exponential also satisfy the spectrum determined growth propriety.

Keywords: Linear Stability - Memory models - Semigroups Teory.

Sumário

Introdução

As equações diferenciais parciais são classificadas em elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Mas isto não preenche todas as opções, como por exemplo as equações dispersivas. Se quisermos estudar sua boa colocação ou qualquer outro tipo de propriedades, teríamos que seguir uma metodologia diferente para cada caso. A teoria de semigrupos pode ser aplicada a todos os tipos de equações diferenciais parciais, reduzindo a uma equação de primeira ordem na variável temporal, do tipo

$$U_t = AU.$$

Quando o espaço é de dimensão finita, então todo operador linear é contínuo. No estudo dos semigrupos se apresentam dois tipos de problemas. O primeiro consiste em dado um semigrupo encontrar o gerador infinitesimal. O segundo consiste em verificar se um operador é gerador infinitesimal de um semigrupo. Quando o semigrupo é uma exponencial de uma matriz $T(t) = e^{At}$, a matriz A é o gerador infinitesimal do semigrupo. Isto pode ser obtido derivando o operador T e avaliando no ponto $t = 0$. A fórmula é válida para matrizes ou operadores lineares e contínuos. O problema inverso é mais complicado e se resolve usando teoremas como o de Hille - Yosida.

Todo operador linear e contínuo é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. Os casos interessantes acontecem quando o operador é não limitado. A ideia é que um operador não limitado é um gerador infinitesimal de um semigrupo quando pode ser aproximado por geradores infinitesimais contínuos, cujos correspondentes semigrupos formam uma sequência convergente.

Para o caso do problema de Cauchy não homogêneo, isto é, quando existe uma fonte externa F no sistema

$$U_t - AU = F, \ U(0) = U_0,$$

e A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $S(t)$, então a função $U(t) = S(t)U_0$ é a solução da equação

$$U_t - AU = 0, \ U(0) = U_0.$$

A solução do problema não homogêneo é baseado no princípio de Duhamel, que é um método semelhante ao método de variação de parâmetros usado para resolver EDO's. As relações entre a regularidade da fonte externa e a solução do correspondente problema não homogêneo é através do princípio de superposição.

Um dos grandes objetivos, após encontrar as soluções e sua regularidade, é estudar as condições que devem satisfazer o espectro de um operador A para que o operador e^{At} seja exponencialmente estável.

Denotando por U o vetor coluna de n coordenadas e A a matriz $n \times n$ tal que $U_t = AU$, pela teoria de Semigrupos, a solução decai exponencialmente para zero, se e somente se, a parte real dos autovalores de A é negativo. A taxa de decaimento é dada por

$$\gamma = \max\{\mathcal{R}e\,\lambda_i;\ \lambda_i \in \sigma(A),\ \text{onde } \sigma(A) \text{ é o espectro de } A\}.$$

Em dimensão infinita a situação é diferente. A condição de que a parte real dos autovalores de A sejam negativos não é sufiente para garantir a estabilidade exponencial, pois os autovalores podem aproximar arbitrariamente do eixo imaginário, o que significa que a taxa de decaimento exponencial se aproxima de zero.

Caracterizamos, então, o comportamento assintótico de um semigrupo C_0: Um semigrupo C_0 gerado por A satisfaz a seguinte desigualdade

$$\|e^{At}\| \leq Me^{\omega t}. \tag{1}$$

O interessante é encontrar o menor elemento $\omega \in \mathbb{R}$ que verifica (1). Um resultado importante, vide [20], diz que se

$$\{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathcal{R}e\ \lambda \geq 0\} \subset \rho(A) \text{ e } \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty,\ \forall \mathcal{R}e\ \lambda \geq 0,$$

então o semigrupo e^{At} é exponencialmente estável.

Neste trabalho estamos interessados em estudar a propriedade da estabilidade linear, ou também chamada de propriedade de crescimento definido pelo espectro, associada a alguns problemas com memória. Esta propriedade nos diz que o tipo do semigrupo é igual a cota superior do espectro. Neste caso, basta determinar a cota superior do espectro para encontrar a melhor taxa de decaimento. A propriedade nos dá um critério prático para assegurar estabilidade em um problema de evolução. Se A é $n \times n$, então e^{At} tem a propriedade do crescimento definido pelo espectro.

Porém, alguns autores, dão exemplos em que a propriedade é falsa, vide [17, 14, 28]. Mesmo assim, a propriedade do crescimento definido pelo espectro vale para classes especiais de semigrupos, como por exemplo, semigrupos compactos e semigrupos analíticos.

Existem poucos resultados neste assunto, dentre eles podemos citar o trabalho de Z. Liu e K. Liu [10], onde os autores mostram que esta propriedade é válida para sistemas viscoelásticos no caso particular em que a função de relaxamento é uma exponencial. Em outros casos, como por exemplo, quando a função do relaxamento é soma de exponenciais, a propriedade do crescimento definido pelo espectro é um problema aberto.

Tomando como base o trabalho de Liu [10], a ideia seria criar uma teoria que pudesse ser utilizada para o sistema viscoelástico com função de relaxamento soma de exponenciais. Fazendo sucessivas derivações na equação de ondas abstratas se consegue eliminar o termo com memória. Usando substituição isto acontece. Finalmente com um espaço de fase adequado pode - se ter a equivalência entre os sistemas de ordens diferentes.

No primeiro capítulo, enunciamos algumas definições e resultados importantes que serão utilizados no trabalho sobre semigrupos, estabilidade e operadores, com destaque para os Teoremas de Hille-Yosida [20], de Lummer-Phillips [20], de Prüs [18] e de Renardy [16].

No segundo capítulo, faremos um breve histórico e desenvolvimento das equações do sistema de Timoshenko e das equações de ondas que são a base das aplicações do resultado principal encontrado.

No terceiro capítulo, verificamos que existe solução para o caso de ondas abstratas com memória. Fizemos um método utilizando um sistema equivalente para mostrar que o problema de ondas abstratas com memória satisfaz a propriedade de estabilidade linear. No final do capítulo, fizemos também o caso para função de relaxamento sendo soma de exponenciais, que Liu [10] não conseguiu com seu método.

No quarto capítulo, com a teoria criada no terceiro capítulo, fizemos todo processo para o sistema de Timoshenko com memória.

No último capítulo colocamos a conclusão final do trabalho e alguns possíveis caminhos a seguir com a nova teoria de derivação.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo daremos alguns conceitos e resultados que serão usados nos próximos capítulos. Denotemos por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos com norma $|.|$, X um espaço de Banach com norma $\|.\|_X$ e H um espaço de Hilbert com produto interno $< .,. >_H$.

1.1 Semigrupos

Para o caso de semigrupos de operadores temos as seguintes definições.

Definição 1.1.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família parametrizada de operadores lineares limitados $T(s) : X \longrightarrow X$, $s \in \mathbb{R}^+$ satisfazendo*

1. $T(0) = I$;
2. $T(s) \circ T(t) = T(s+t), \forall t, s \in \mathbb{R}^+$;

é chamado de Semigrupo de Operadores Lineares Limitados em X.

Definição 1.1.2. *Diremos que um semigrupo $T(t)$ é fortemente contínuo (ou de classe C_0), se vale*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x \quad \in \quad X.$$

Definição 1.1.3. *Diremos que um semigrupo $T(t)$ é limitado em $[0, +\infty)$, se existe $M \geq 1$, tal que $\|T(t)\|_X \leq M$. Se $M = 1$, diz - se que $T(t)$ é um semigrupo de contrações.*

Definição 1.1.4. *Seja $A : X \to X$ um operador. Diremos que A é gerador infinitesimal de um semigrupo T, se o domínio de A é*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \ \exists \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \in \quad X \right\}$$

e para cada $x \in D(A)$ temos

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \bigg|_{t=0} \in X.$$

Da definição anterior, podemos reescrever o domínio do operador como

$$D(A) = \left\{ w \in X; Aw = \frac{d^+}{dt} T(t)w \Big|_{t=0} \in X \right\}.$$

Observação 1.1.1. *Para $s \geq 0$, seja $T(s) : X \to X$ um C_0-semigrupo, então valem as regularidades:*

$$T(t) \in C(0, \infty; X) \cap C^1(0, \infty; X) \cap C^0(0, \infty; D(A)). \tag{1.1}$$

PROVA-Vide [20].

Definição 1.1.5. *Seja A um operador de X em X, um espaço de Banach. Chamaremos de conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, ao conjunto:*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; w \longmapsto (\lambda I - A)^{-1} w \in \mathcal{L}(X)\} \tag{1.2}$$

O espectro de A será o conjunto

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A). \tag{1.3}$$

Definição 1.1.6. *Seja X um espaço de Banach e A um operador em X. O espectro de A será decomposto em três subconjuntos disjuntos $\sigma_d(A)$, $\sigma_c(A)$ e $\sigma_r(A)$, respectivamente espectro discreto, espectro contínuo e espectro residual, onde cada um é definido da seguinte maneira*

$\sigma_d(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - A)$ *não é injetor*$\}$;
$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - A)$ *é injetor, não é sobrejetor, mas a imagem é densa em* $X\}$;
$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - A)$ *é injetor, mas a imagem não é densa*$\}$.

Observação 1.1.2. *No caso de um operador compacto, então o espectro é formado apenas dos autovalores (espectro discreto).*

Lemma 1.1.1. *Suponhamos que A seja um operador contínuo, então o espectro de A é um conjunto fechado e limitado, isto é, um conjunto compacto. Mais precisamente*

$$\sigma(A) \subset B_{\|A\|}(0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq \|A\|\},$$

onde $\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_X$.

PROVA-Vide [20].

Definição 1.1.7. *Seja $A : H \to H$ um operador. Diremos que A é dissipativo se*

$$\mathcal{R}e < AU, U >_H \ \leq 0, \ \ \forall U \in H.$$

Teorema 1.1.1. *Se A é o gerador infinitesimal do semigrupo S, então S é um semigrupo de contrações se, e somente se, A é dissipativo.*

PROVA-Vide [20].

Teorema 1.1.2. *(Hille-Yosida) Um operador A linear, não limitado, é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações se, e somente se,*
(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.
(ii) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ e $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$.

Prova-Vide [20].

Teorema 1.1.3. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ atuando num espaço X e seja B um operador linear e contínuo de X em X. Então $A+B$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)e^{Bt}$.*

Prova-Vide [20].

Teorema 1.1.4. *(Lummer-Phillips) Seja A um operador linear com domínio denso em X.*
(i) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 - contrações.
(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 - contrações de X em X, então $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Prova-Vide [20].

Lemma 1.1.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. Então é válida a inclusão*

$$e^{\sigma(A)t} \subset \sigma(e^{At}),$$

onde $\sigma(A)$ é definido em (1.3).

Prova-Vide [20].

Lemma 1.1.3. *Seja $A : X \longrightarrow X$ um operador linear contínuo e com inversa contínua. Seja $B \in \mathcal{L}(B)$ tal que $\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, então $A + B$ é linear contínuo e inversível.*

Prova-Vide [20].

Teorema 1.1.5. *Seja A um operador linear, dissipativo e com domínio denso em X. Se $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.*

Prova-Usa - se o Lema 1.1.3 e o Teorema 1.1.4.

1.2 Estabilidade

Coloquemos, agora, alguns conceitos e resultados de estabilidade.

Definição 1.2.1. *Para $t \geq 0$, seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo definido sobre um espaço de Banach X. O **Tipo do Semigrupo** $S(t)$ é definido como*

$$\omega_0(A) := \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \|e^{At}\|_X}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|e^{At}\|_X}{t}.$$

Exemplo : Seja A uma matriz quadrada. Temos que $\omega_0(A) = \lambda_1$, onde λ_1 é o maior dos autovalores de A.

Lemma 1.2.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. Então para todo $\epsilon > 0$, existe $M_\epsilon \geq 1$ tal que*

$$\|e^{At}\|_X \leq M_\epsilon e^{\omega_0 t + \epsilon}.$$

Prova-Da definição 1.2.1 temos que ω_0 é o ínfimo dos valores ω satisfazendo

$$\|e^{At}\|_X \leq M e^{\omega t}.$$

Portanto, para $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{\ln \|e^{At}\|_X}{t} \leq \omega_0(A) + \epsilon, \; \forall t \geq N_\epsilon.$$

Assim

$$\|e^{At}\|_X \leq e^{(\omega_0(A)+\epsilon)t}, \; \forall t \geq N_\epsilon. \tag{1.4}$$

Usando a continuidade do operador concluímos que existe $M_\epsilon \geq 1$ tal que

$$\|e^{At}\|_X \leq M_\epsilon e^{\omega_0 t + \epsilon}, \; \forall t \geq 0.$$

Definição 1.2.2. *Seja A um operador de X em X. A **Cota Superior do Espectro** do operador A é definido como*

$$\omega_\sigma(A) := \sup\{\mathcal{R}e\,(\lambda)\,;\, \lambda \in \sigma(A)\},$$

onde $\sigma(A)$ é definido em (1.3).

Exemplo : Seja a equação das ondas

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_t = 0, (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty),$$

$$u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x), x \in (0,l),$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0,$$

onde $\alpha, \gamma > 0$.

Denotemos A o operador

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \alpha(.)_{xx} & -\gamma I \end{pmatrix},$$

onde I é o operador identidade.

Denotemos X o espaço

$$X = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l),$$

que munido com a norma

$$\|(u,v)^T\|_X^2 = \int_0^l [\alpha |u_x|^2 + |v|^2]\, dx$$

é um espaço de Banach.

Temos que o especro de A, será

$$\sigma(A) = \Big\{ -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 4n^2\alpha\frac{\pi^2}{l^2}},\, n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Portanto

$$\omega_\sigma = \begin{cases} -\frac{1}{2}\gamma, & \text{se } \gamma < 2\pi\sqrt{\alpha}/l, \\ -\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\frac{\pi^2}{l^2}}, & \text{se } \gamma \geq 2\pi\sqrt{\alpha}/l. \end{cases}$$

Lemma 1.2.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0, então a cota superior do espectro de A é menor ou igual que o tipo do semigrupo $S(t) = e^{At}$, isto é,*

$$\omega_\sigma(A) \leq \omega_0(A).$$

Prova-Pelo lema 1.1.2 segue que

$$e^{\sigma(A)t} \subset \sigma(e^{At}).$$

De onde

$$\sup\{|\lambda|;\, \lambda \in e^{\sigma(A)t}\} \leq \sup\{|\lambda|;\, \lambda \in \sigma(e^{At})\}.$$

Asim do lema 1.1.1 temos que

$$e^{\omega_\sigma t} \leq \|e^{At}\|.$$

Finalmente, da relação (1.4), encontramos

$$\|e^{At}\| \leq e^{(\omega_0+\epsilon)t},\, \forall t \geq N_\epsilon,\, \forall \epsilon > 0.$$

Portanto das relações anteriores temos

$$\omega_\sigma \leq \omega_0 + \epsilon,\, \forall \epsilon > 0$$

e o resultado segue.

Definição 1.2.3. *Dizemos que a Propriedade de Estabilidade Linear (PEL)(Propriedade do Crescimento Definida pelo Espectro (PCDE)), vale, se*

$$\omega_0 = \omega_\sigma.$$

Observação 1.2.1. *A PEL é importante porque dá um critério prático para assegurar estabilidade de um problema de evolução e para calcular a taxa ótima.*

Observação 1.2.2. *Todo semigrupo analítico verifica a PEL.*

Teorema 1.2.1. *(Prüss)O semigrupo de contrações e^{At} é exponencialmente estável se, e somente se, as seguintes condições verificam*

i) $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$;

ii) $\exists C > 0$ tal que $\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_H \leq C,\, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Prova-Vide [18].

Teorema 1.2.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. Então temos que*

$$\omega_0(A) = \inf\{\mu \in \mathbb{R};\, \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty,\ \forall\, \mathcal{R}e\,(\lambda) \geq \mu\}.$$

Prova-Vide [20].

1.3 Operadores

Coloquemos algums resultados e definições sobre operadores.

Teorema 1.3.1. *(Teorema de Representação de Riesz)Seja H um espaço de Hilbert real ou complexo, munido do produto interno $< .,. >$. Seja L um funcional linear contínuo em H. Então existe um vetor $y \in H$ tal que $L(x) =< x, y >, \forall x \in H$.*

Definição 1.3.1. *Suponha que H é um espaço de Hilbert com produto interno $< .,. >$. Considere um operador linear contínuo $A : H \to H$. Usando o teorema da representação de Riesz, pode-se mostrar que esiste um operador linear contínuo único $A^* : H \to H$ com a seguinte propriedade:*

$$< Ax, y >=< x, A^*y >, \ \forall x, \ y \in H.$$

Esse operador A^* é o adjunto de A.

Definição 1.3.2. *Com as hipóteses da definição anterior, um operador N é normal se $NN^* = N^*N$, onde N^* é o adjunto de N.*

Definição 1.3.3. *Com as definições da definição anterior, um operador L é limitado se $\exists C > 0$ tal que $\|LU\|_X \leq C\|U\|_X$, $\forall U \in X$.*

Teorema 1.3.2. *Sejam λ_j os autovalores do operador $\mathcal{L}u = -div(\alpha(x)\nabla u) + a(x)u$ satisfazendo as condições de Dirichlet, definidos sobre um conjunto aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira regular. Suponhamos que α e a sejam funções satisfazendo*

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1, \ 0 < a_0 \leq a(x) \leq a_1, \ \forall x \in \Omega.$$

Então existem constantes positivas C_1 e C_2 satisfazendo

$$C_1 j^{2/n} \leq \lambda_j \leq C_2 j^{2/n}, \forall j \geq j_0.$$

Prova-Vide [21].

Definição 1.3.4. *Dado um operador A, um autovalor λ de A é isolado se existe uma bola de centro λ e raio r tal que o único valor com multiplicidade finita é o próprio λ.*

Teorema 1.3.3. *(Renardy)[16] Seja H um espaço de Hilbert e $A = A_0 + B$ o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de operadores em H. Suponhamos que A_0 é normal e B é limitado. Assuma que existe um número $M > 0$ e um inteiro n tal que vale o seguinte:*

a) Se $\lambda \in \sigma(A_0)$ e $|\lambda| > M - 1$, então λ é um autovalor isolado de multiplicidade finita;

b) Se $|z| > M$, então o número de autovalores de A_0 no disco unitário centrado em z (contendo as multiplicidades) não excede n.

Nestas condições o semigrupo verifica a Propriedade de Estabilidade Linear (PEL).

Prova- Seja $\gamma > \omega_\sigma$. De acordo com o resultado de Prüss [18], é suficiente mostrar que o resolvente de A é uniformemente limitado na reta $\mathcal{R}e\,(\lambda) = \gamma$. Claramente existe uma limitação uniforme num segmento compacto da reta, assim é suficiente considerar o caso $|\lambda| > M + K$, onde K é suficientemente grande.

Por conveniência, seja

$$\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C}/\mathcal{R}e\,(\lambda) = \gamma,\ |\lambda| > M + K\}.$$

Considere a equação

$$A_0 u - \lambda u + Bu = h, \tag{1.5}$$

para $\lambda \in \Gamma$. Seja P a projeção ortogonal sobre a imagem de todos os autovalores de A_0 que está num disco de raio K centrado em λ e seja $Q = 1 - P$ (P e Q dependem de λ). Seja $Pu = x$, $Qu = y$, $Ph = f$, $Qh = g$, e reescrevemos (1.5) como

$$A_0 x - \lambda x + PBx + PBy = f,\ A_0 y - \lambda y + QBy + QBx = g. \tag{1.6}$$

Se K é escolhido suficientemente grande, podemos resolver a segunda equação para y. Substituindo y na primeira equação, obtemos

$$A_0 x - \lambda x + PBx + PB(A_0 - \lambda + QBQ)^{-1}QBx = f - PB(A_0 - \lambda + QBQ)^{-1}g. \tag{1.7}$$

Por hipótese, o operador do lado esquerdo de (1.7) é invertível para cada $\lambda \in \Gamma$. Além disso, a imagem de P tem limitação uniforme. Seja a partição finita de Γ nos subconjuntos Γ_i tal que a imagem de P é i para $\lambda \in \Gamma_i$. Para $\lambda \in \Gamma_i$, definimos

$$\phi_\lambda(\mu) = \det[A_0 - \lambda - \mu + P(\lambda)BP(\lambda) - P(\lambda)B(A_0 - \lambda - \mu + Q(\lambda)BQ(\lambda))^{-1}Q(\lambda)B]. \tag{1.8}$$

Supondo que o lado direito é uma matriz $i \times i$ relativa a base ortonormal dada pelos autovetores de A_0. Pela hipótese, $\phi_\lambda(\mu)$ é não nula para $\lambda \in \Gamma_i$ e μ suficientemente pequeno, ou seja, $|\mu| \leq \epsilon$. Finalmente, temos que $|\phi_\lambda(0)|$ limitado inferiomente para $\lambda \in \Gamma_i$, já que a limitação do determinante se reduz trivialmente a uma limitação superior da norma da matriz inversa.

Supondo que $|\phi_{\lambda_n}| \to 0$ quando $n \to \infty$. As funções ϕ_{λ_n} são analíticas e uniformemente limitadas no disco $|\mu| \leq \epsilon$. Podemos extrair uma subsequência convergindo uniformemente para uma função ϕ no disco $|\mu| \leq \epsilon/2$. Como $\phi(0) = 0$ e nenhum dos ϕ_{λ_n} tem zeros próximos de 0, o principal argumento implica que ϕ é identicamente nula.

Se K é escolhido suficientemente grande e δ suficientemente pequeno, então as ϕ_λ são definidas no conjunto $S_\delta = \{\mu \in \mathbb{C}/\mathcal{R}e\,(\mu) \geq 0,\ -\delta < \mathcal{I}m\,(\mu) < \delta\}$, e são uniformemente limitados para $\lambda \in \Gamma_i$ e μ em cada subconjunto compacto de S_δ. Concluímos que $\phi_{\lambda_n}(\mu) \to 0$ para cada $\mu \in S_\delta$. Mas isto não é o caso para μ grande e temos uma contradição.

1.4 Física Matemática

Definição 1.4.1. *Em Mecânica dos Fluidos, o modelo da tensão de corte simples é um caso especial de deformação onde somente uma componente do vetor velocidade tem valor não nulo:* $V_x = f(x, y)$; $V_y = V_z = 0$. *O gradiente da velocidade é constante e perpendicular a própria velocidade:*

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \dot{\gamma},$$

onde $\dot{\gamma}$ é a razão da cortante e

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0.$$

O tensor gradiente deformação Γ para esta deformação tem somente um termo não-nulo:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A tensão de corte simples com razão $\dot{\gamma}$ é a combinação da força tensão de corte pura com razão $\dot{\gamma}/2$ e a rotação com a razão $\dot{\gamma}/2$:

$$\Gamma = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\textit{tensão de corte simples}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\textit{tensão de corte pura}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ -\dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\textit{rotação do sólido}}.$$

Definição 1.4.2. *A medida do deslocanto δ^* de um fluxo é a distância na qual uma superfície se desloca na direção perpendicular a seu vetor normal (para fora) tendo como plano de referência um fluxo não viscoso de velocidade u_0 de razão dada.*

Definição 1.4.3. *A medida do momento θ de um fluxo é a distância na qual uma superfície se desloca paralelamente na direção do plano de referência um fluxo não viscoso de velocidade u_0 de razão dada.*

Definição 1.4.4. *O fator shape é usado no contorno de fluxo de camadas para determinar a natureza do fluxo:*

$$H = \delta^*/\theta,$$

onde H é o fator shape, δ^* é a medida de deslocamento e θ é a medida do momento.

Definição 1.4.5. *Na mecânica, a tensão é uma medida da intensidade das forças internas agindo entre as partículas de uma seção transversal imaginária de um corpo de material deformável.O vetor tensão são suas componentes nas direções x, y e z.*

Capítulo 2

Modelos Matemáticos

Neste capítulo faremos as deduções físicas do modelo de Timoshenko [19] e do modelo de ondas abstratas [13].

2.1 Sistema de Timoshenko

A teoria de vigas foi introduzida no século 18 quando o problemas de vigas transversais vibrantes foi formulados em termos de EDP's de movimento, forças externas, condições de contorno e condições iniciais. Para efeito de comparação usaremos o trabalho de Han, Benaroya e Wei [8] que fizeram uma comparação entre as teorias de Euler-Bernoulli, Rayleigh, da Tensão da Cortante ("Shear") e Timoshenko.

Uma formulação exata do problema de viga foi primeiro investigado em termos gerais da equação de elasticidade por Pochhammer (1876) and Chree (1889), conforme [11], descritas num sólido cilíndrico vibrante. Em aplicações, soluções aproximadas para deslocamento transversal são suficientes. A teoria de vigas dá todos os deslocamentos transversais como uma solução.

O modelo de Euler-Bernoulli (século 18) inclui a energia da força devida ao ângulo e a energia cinética devida ao movimento lateral. Jacob Bernoulli descobriu que a curvatura de uma viga elástica em todos os pontos é proporcional ao movimento angular em tal ponto. Daniel Bernoulli, sobrinho de Jacob, formulou a equação diferencial do movimento de uma viga vibrante. A teoria de Jacob Bernoulli foi aceita por Leonhard Euler na sua investigação sobre a deformação das vigas elásticas sob condições de variação de resistência, como está registrado em [25]. A teoria da viga de Euler-Bernoulli, também chamada de teoria clássica da viga, ou teoria da viga de Euler, ou teoria da viga de Bernoulli, é a mais usada em engenharia porque é simples e fornece boas aproximações para muitos problemas. Além disso, o modelo tende a desprezar o excesso de estimativas das frequências naturais. Este problema é agravado para frequências naturais de muitos modelos. Assim, o modelo é bom para vigas delgadas ou não.

A teoria de viga de Rayleigh (1877) [23] fornece uma leve melhora na teoria de Euler - Bernoulli pela inclusão do efeito de rotação na seção transversal. Como resultado, tem-se parcialmente o excesso de estimativas das frequências naturais no modelo de Euler - Bernoulli.

O modelo ”shear”junta a distorção da deformação com o modelo de Euler - Bernoulli. Este modelo é diferente do modelo puro, que inclui somente a distorção da deformação e a rotação inercial, ou o modelo de viga ”shear”simples, que inclui somente a distorção da deformação e o movimento lateral [1]. Nem o modelo de ”shear”puro nem o modelo da tensão da cortante simples obtém um modelo melhor do que o modelo de Euler - Bernoulli pois ambos excluem um fator importante, o efeito angular.

Timoshenko (1921, 1922) [26, 27] propôs uma teoria de viga que junta o efeito da deformação com o efeito da rotação na viga de Euler - Bernoulli. O modelo de Timoshenko é um melhoramento para vigas não delgadas e para respostas com alta frequência, onde os efeitos de deformação ou rotacional não são desprezíveis. Seguindo Timoshenko, vários autores obtiveram as equações de frequência e os modelos de deformação com condições de contorno variadas.

Um parâmetro crucial na teoria de viga de Timoshenko é o fator shape, também chamado de coeficiente de deformação ou fator de redução de área. Este fator aparece porque a deformação não é constante sobre a seção transversal. O fator de deformação é uma função do raio de Poisson e a frequência de vibração assim como a deformação da seção transversal. Vários autores sugeriram métodos para calcular o fator shape como uma função da deformação da seção transversal e o raio de Poisson. Apesar de tentarem fazer uma nova teoria de viga, as teorias de Euler - Bernoulli e Timoshenko são ainda as mais usadas.

Um resumo de todas as hipóteses dos quatro modelos segue. As hipóteses básicas de todos são:

1) Uma dimensão (eixo de direção) é considerado mais largo que as outras duas.

2) O material é elástico linear (Hookean).

3) O efeito de Poisson é desprezado.

4) A área da seção transversal é simétrica de modo que o eixo neutro e o centróide coincidem.

5) Os planos perpendiculares do eixo neutro permanecem perpendiculares depois da deformação.

6) O ângulo de rotação é pequeno de modo que a hipótese de ângulo pequeno pode ser usado.

7) Momento angular e deslocamento lateral.

Já as hipóteses específicas são:

I) Inércia Rotacional: Rayleigh e Timoshenko.

II) Deformação da tensão de corte: ”Shear”e Timoshenko.

Como se vê, apenas a teoria de viga de Timoshenko é completa e assim deduziremos suas equações a seguir.

2.1.1 Dedução das equações da teoria de viga de Timoshenko

A técnica consiste numa aproximação da Teoria da Elasticidade Tridimensional, estudando as relações tensão-deformação da viga, como dado em [19]. O modelo de Timoshenko é útil para efeitos de inércia rotacional e deformação da lâmina.

Seja uma viga sendo um corpo de estrurura delgada, carregado transversalmente, cujo comprimento é muito maior do que a largura e com seção transversal plana. Considere um ponto espacial (x, y, z). Por simplicidade, assumiremos que a área A da seção transversal da viga é simétrica com respeito ao seu eixo z. Assuma também que todas as cargas transversais agindo sobre a viga possuem uma simetria semelhante, ou seja, as componentes do vetor tensão $T = (T_1, T_2, T_3)$ satisfazem

$$T_1 = T_2 \equiv 0 \text{ e } T_3(x, y, z) = T_3(x, -y, z).$$

Consideraremos o efeito das forças externas na fronteira desprezíveis. Depois, usaremos a definição das tensões resultantes como segue

$$M = \int_A z\tau_{xx}\, dA \text{ (momento flector)}, \tag{2.1}$$

$$Q = \int_A \tau_{xy}\, dA \text{ (força de cisalhamento transversal)}. \tag{2.2}$$

O símbolo $\int_A \ldots dA$ denota a integral sobre a seção transversal limitada pela curva C de um plano que é paralelo ao plano yz.

Para cada ponto x, seja o ângulo de inclinação laminar ψ definido por $\psi = \psi(x)$ e o deslocamento transversal da linha elástica da viga representada por $\varphi(x)$.

Nas aplicações práticas, como em [24], para obter a relação tensão-deslocamento de $u = (u_1, u_2, u_3)$, observamos que

$$u_1 = z\tan(\psi) \text{ e } u_3 = \varphi(x).$$

Neste caso, só são permitidos deslocamentos verticais muito pequenos das vigas e as linhas elásticas serão deformadas de modo que podemos admitir $\tan(\psi) = \psi$, donde segue

$$u_1 = z\psi(x) \text{ e } u_3 = \varphi(x).$$

Estas equações implicam que:
(1) os planos que são normais ao eixo da viga permanecem assim após a deformação, e
(2) o deslocamento vertical de todos os pontos de qualquer seção transversal é o mesmo.

Neste caso, usando as equações acima e as leis de Hooke, as tensões de cisalhamento nos planos perpendiculares aos eixos satisfazem

$$\tau_{xx} = Ez\psi_x + \nu(\tau_{yy} + \tau_{zz}), \tag{2.3}$$

$$\tau_{xy} = G(\varphi_x + \psi), \tag{2.4}$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, G é o módulo de elasticidade transversal e ν é o raio de Poisson.

Consideraremos o termo $Ez\psi_x$ muito maior do que $\nu(\tau_{yy} + \tau_{zz})$, ou seja, deprezaremos este último termo. Além disso, colocaremos K^2G no lugar G, onde K^2 é a constante usada para ajustar a teoria da aproximação aos resultados da teoria tridimensional. A constante K^2 pode ser determinada pelas considerações estáticas, e por este método mostra-se que a razão da força média da seção transversal da viga é a força no centróide. Existem muitos métodos para a determinação de K^2, e um método adicional para avaliar está no trabalho [3]. Este trabalho também lista uma série de fórmulas para K^2.

Com estas considerações, as equações (2.3) - (2.4) passam a ser dadas por

$$\tau_{xx} = Ez\psi_x, \tag{2.5}$$

$$\tau_{xy} = K^2 G(\varphi_x + \psi). \tag{2.6}$$

Substituindo (2.5) - (2.6) em (2.1) - (2.2), as tensões resultantes ficam na forma

$$\frac{\partial M}{\partial x} = EI\psi_x, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = K^2 GA(\varphi_x + \psi), \tag{2.8}$$

onde $I = \int_A z^2\, dA$ é o momento de inércia da seção transversal A com respeito ao eixo y. De (2.5) - (2.8) obtemos as seguintes relações

$$\tau_{xx} = \frac{\partial M}{\partial x}\frac{z}{I}, \tag{2.9}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{1}{A}. \tag{2.10}$$

As tensões na viga satisfazem a seguinte equação de equilíbrio

$$\int_A z\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\, dA + \int_A z\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) dA = 0. \tag{2.11}$$

Com ajuda do momento flector (2.1), temos que a primeira integral de (2.11) pode ser escrita como

$$\int_A z\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\, dA = \frac{\partial M}{\partial x}. \tag{2.12}$$

Por outro lado, utilizando o Teorema de Green no plano yz, a segunda integral em (2.11) pode ser reduzida como

$$\begin{aligned} \int_A z\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) dA &= \int_A \left[\frac{\partial (z\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (z\tau_{xz})}{\partial z} - \tau_{xz}\right] dA = \\ &= \oint_C z(\tau_{xy} n_2 + \tau_{xz} n_3)\, ds - \int_A \tau_{xz}\, dA. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Sobre a superfície lateral da viga, isto é, sobre C, temos $n_1 = 0$, ou exatamente ou aproximadamente. Neste caso, temos também que $T_1 = \tau_{xy} n_2 + \tau_{xz} n_3 = 0$ sobre C, e utilizando a equação (2.2) em (2.13), obtemos

$$\int_A z\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) dA = -Q. \tag{2.14}$$

Utilizando a (2.12) e (2.14), a equação (2.11) assume a forma

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = 0. \tag{2.15}$$

Consideremos, agora, uma outra equação de equilíbrio

$$\int_A \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}\, dA + \int_A \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) dA = 0. \tag{2.16}$$

Pela equação (2.2), temos que a primeira integral de (2.16) fica

$$\int_A \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}\, dA = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2.17}$$

Já para segunda integral de (2.16), utilizando novamente o Teorema de Green, reduzimos para

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) dA &= \oint_C (\tau_{zy} n_2 + \tau_{zz} n_3)\, ds = \\ &= \oint_C T_3\, ds = p(x), \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde na superfície lateral da viga, em C, temos $T_3 = \tau_{zy} n_2 + \tau_{zz} n_3$, ou exatamente ou aproximadamente. A função $p(x)$ pode ser interpretada como a distribuição de intensidade das forças aplicadas transversalmente. Utilizando (2.17) e (2.18) em (2.16), segue que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + p(x) = 0. \tag{2.19}$$

Substituindo (2.7) e (2.8) em (2.19) e (2.15), respectivamente, resulta as equações de equilíbrio do deslocamento, dadas por

$$\begin{aligned} K^2 GA(\varphi_x + \psi)_x + p &= 0, \\ EI\psi_{xx} - K^2 GA(\varphi_x + \psi) &= 0. \end{aligned}$$

No caso dinâmico, veja [4], as equações do movimento podem ser obtidas considerando o equilíbrio das forças atuando sobre o segmento diferencial da viga. Somando todas as forças atuando verticalmente, a primeira relação do equilíbrio dinâmico é

$$Q + p\, dx + \left(-Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \right) - f_i\, dx = 0, \tag{2.20}$$

onde f_i representa a força de inércia distribuída transversalmente, que é dada pelo produto da diferencial de massa pela aceleração local, isto é,

$$f_i\, dx = m\, \varphi_{tt}\, dx. \tag{2.21}$$

Substituindo (2.21) em (2.20) e simplificando, obtemos

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + p = m\varphi_{tt}. \tag{2.22}$$

Consideraremos que não há cargas externas atuando na viga, logo $p = 0$ e utilizando (2.8) em (2.22), obtemos

$$m\varphi_{tt} - K^2 GA(\varphi_x + \psi)_x = 0. \tag{2.23}$$

Para obtermos a segunda equação do equilíbrio dinâmico, consideramos as forças de equilíbrio atuando sobre o elemento diferencial de tal forma que a inércia rotacional por unidade de comprimento m_I contribui diretamente para a relação momento-equilíbro do seguinte modo

$$M + Q\,dx + m_I\,dx - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x}\,dx\right) = 0. \tag{2.24}$$

A inércia rotacional é dada pelo produto dos momentos de massa de inércia da seção pela aceleração angular, isto é,

$$m_I = \rho I \psi_{tt},$$

onde $\rho = \frac{m}{A}$ e daí

$$m_I = m\frac{I}{A}\psi_{tt} = mr^2\psi_{tt}, \tag{2.25}$$

onde $r^2 = \frac{I}{A}$ é o raio de giro da seção transversal. Substituindo (2.25) em (2.24) e simplificando, temos

$$\frac{\partial M}{\partial x}\,dx = Q + mr^2\psi_{tt}. \tag{2.26}$$

Por fim, utilizando (2.7) e (2.8) em (2.26), obtemos

$$mr^2\psi_{tt} - EI\psi_{xx} + K^2GA(\varphi_x + \psi) = 0. \tag{2.27}$$

Estas ideias resultam no modelo conhecido como Equações da viga de Timoshenko, em homenagem a Stephan Prokofievitch Timoshenko (1878 - 1972), e descrito por

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), \\ \rho_2\rho\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), \end{aligned}$$

onde denotamos as constantes $\kappa = K^2GA$, $b = EI$, $\rho_1 = m$ e $\rho_2 = mr^2$ em (2.23) e (2.27).

Quando levamos em consideração o termo $\nu(\tau yy + \tau zz)$ da teoria espacial, resulta o modelo de Kirchoff e pode ser visto em [9] que quando $\kappa \longrightarrow \infty$ no modelo da viga de Timoshenko, a solução única deste problema aproximado converge, numa adequada topologia, para a solução do modelo de Kirchoff sujeito a apropriadas condições de fronteira.

Rivera, Ammar-Khodja, Benabdallah e Racke consideraram em [2] uma viga com material viscoelástico e demonstraram a existência e estabilidade de soluções para o modelo de Timoshenko, usando a técnica de Lyapunov. Neste trabalho os autores provaram que o decaimento exponencial ocorre se, e somente se, os coeficientes do sistema satisfazem a seguinte realção

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}.$$

Raposo [15] analisou o problema consistindo de um material misto, isto é, uma parte da viga com propriedade apenas elástica e outra parte com propriedades viscoelásticas, obtendo a existência, regularidade e unicidade de solução pelo método de Faedo-Galerkin e provou o decaimento exponencial da solução.

Neste trabalho analisamos o problema viscoelástico, na qual a dissipação é provocada pelo efeito de memória, obtemos sua boa colocação usando os procedimentos padrões de semigrupos, sua propriedade de estabilidade linear e seu decaimento.

2.2 Modelo de equação de ondas

Faremos um tratamento análogo para o modelo de ondas abstratas com memória. Um dos problemas mais importantes na Física Matemática é a vibração de uma corda tensionada, como dado em [13]. Ocorre com frequência em muitos ramos da Física Matemática como exemplo clássico da teoria de equações diferenciais parciais.

Consideremos uma corda tensionada de comprimento l fixada nos extremos. O problema é determinar a equação do movimento que caracteriza a posição $u(x,t)$ da corda no tempo t quando uma perturbação inicial é dada.

Consideremos as seguintes hipóteses:

(1) A corda é flexível e elástica;

(2) Pela lei de Hooke a tensão é constante;

(3) O peso da corda é pequena comparada com a tensão da corda;

(4) A deflexão é pequena comparada com o comprimento da corda;

(5) A inclinação do deslocamento da corda em cada ponto é pequena comparada com a unidade;

(6) Existe somente vibração transversal pura.

Consideremos, também, um elemento diferencial da corda e T a tensão entre os extremos. As forças que atuam nos elementos da corda na direção vertical são

$$T \sin\beta - T\sin\alpha,$$

onde α e β são os ângulos com o eixo horizontal nos pontos x e $x+\Delta x$, respectivamente.

Pela segunda lei de Newton do movimento, a força resultante é igual a massa vezes a aceleração. Então

$$T\sin\beta - T\sin\alpha = \rho\delta_s u_{tt}, \tag{2.28}$$

onde ρ é a densidade e δ_s é o menor comprimento de arco da corda. Como a inclinação do deslocamento da corda é pequeno, temos

$$\delta_s \simeq \delta_x.$$

De (4) , os ângulos α e β são suficientemente pequenos tais que

$$\sin\alpha \simeq \tan\alpha, \ \ \sin\beta \simeq \tan\beta.$$

Então, a equação (2.28) fica

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\delta_x}{T}u_{tt}. \tag{2.29}$$

Além disso, temos que $\tan\alpha$ e $\tan\beta$ são as inclinações da posição $u(x,t)$ da corda em x e $x+\delta_x$, respectivamente, então

$$\tan\alpha = u_x(x,t) \text{ e } \tan\beta = u_x(x+\delta_x, t),$$

no tempo t. A equação (2.29) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\delta_x}[(u_x)_{x+\delta_x} - (u_x)_x] = \frac{\rho}{T}u_{tt},$$

ou seja,

$$\frac{1}{\delta_x}[u_x(x+\delta_x,t)-u_x(x,t)]=\frac{\rho}{T}u_{tt}.$$

Tomando o limite quando δ_x tende a zero, temos

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0,\ \text{onde}\ c^2=\frac{T}{\rho}. \tag{2.30}$$

Se existe uma força externa f atuando na corda, a equação (2.30) assume a forma

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=F,\ \text{onde}\ F=\frac{f}{\rho},$$

onde f pode ser a pressão, gravidade, resistência, e assim por diante.

2.2.1 Modelo de ondas abstratas

Para o caso de ondas abstratas, consideramos o caso n-dimensional, ao invés da diferença de inclinações da corda, então podemos considerar um operador linear abstrato A não limitado, autoadjuto e positivo definido. Assim a equação (2.30) fica do tipo

$$u_{tt}+Au=0. \tag{2.31}$$

Vários autores trabalharam com este tipo de equação, por exemplo em [20], foi feito estudos sobre semigrupos C_0, chamados de dissipações fracas, associadas com a seguinte equação

$$\begin{aligned}&Cu_{tt}+Au+Bu_t=0,\\&u(0)=u_0,\ u_t(0)=u_1,\end{aligned}$$

onde A, B e C são operadores autoadjuntos definidos positivos com domínio $D(A)\subset D(B)\subset D(C)$ densos num espeço de Hilbert H.

Mostrou-se que usando uma classe de operadores A, B e C, a equação acima é dissipativa, mas o correspondente semigrupo não é exponencialmente estável.

Em [10], a equação abstrata de ondas com memória, num espaço de Hilbert H,

$$u_{tt}+A\left[g(0)u+\int_0^\infty g'(s)u(x,\,t-s)ds\right]=0, \tag{2.32}$$

onde A é um operador linear, não limitado, autoadjuto e positivo definido, e g é a função kernel. Consideremos, também, um domínio $D(A)$. As condições iniciais são dadas por

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ x\in D(A)\subset H. \tag{2.33}$$

Capítulo 3

Equação de ondas abstratas com memória

3.1 Existência e Unicidade de Solução

Neste capítulo estudaremos um critério prático para assegurar estabilidade de um problema de evolução, a propriedade de estabilidade linear.

Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo definido sobre um espaço de Banach X. O **Tipo do Semigrupo** é definido como

$$\omega_0(A) := \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|e^{At}\|_X}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln \|e^{At}\|_X}{t}.$$

Seja A um operador definido sobre um espaço de Banach X. A **Cota Superior do Espectro** do operador A é definido como

$$\omega_\sigma(A) := \sup\{\mathcal{R}e\,(\lambda)\,;\,\lambda \in \sigma(A)\},$$

onde $\sigma(A)$ denota o espectro de A. Pela Teoria dos Semigrupos (lema 1.2.2), temos que $\omega_0 \geq \omega_\sigma$. Dizemos que a Propriedade do Crescimento Definida pelo Espectro (PCDE), ou Propriedade de Estabilidade Linear (PEL) vale, se

$$\omega_0 = \omega_\sigma.$$

É importante observar que o tipo de semigrupo, além da PEL são propriedades gerais, não é necessário que exista dissipação para que isto faça sentido. Por exemplo, o tipo do semigrupo conservativo é zero.

A equação de ondas abstratas com memória, definida num espaço de Hilbert H, estudada por Liu em [10] é dada por

$$u_{tt} + A\left[g(0)u + \int_0^\infty g'(s)u(x,\,t-s)ds\right] = 0, \tag{3.1}$$

onde A é um operador linear, não limitado, autoadjuto e positivo definido, e g é a função de relaxamento de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

As condições iniciais são dadas por

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in D(A), \tag{3.2}$$

onde $D(A)$ é um domínio. A condição de história sobre u é definida como

$$u(x,t) = u_h(x,t), \quad t < 0,\ x \in D(A). \tag{3.3}$$

No trabalho [10], Liu deu uma estimativa para o tipo do semigrupo associado a uma equação abstrata de viscosidade elástica, onde o relaxamento da memória decaia exponencialmente. A função de relaxamento deveria satisfazer as seguintes condições:

$$g \in C^2(0,\infty) \cap C[0,\infty),\ \ g' \in L^1(0,\infty);\ \ g(s) > 0,\ g'(s) < 0,\ g''(s) > 0,\ \text{para } s > 0; \tag{3.4}$$
$$g(\infty) = \lim_{s\to\infty} g(s) > 0;\ g''(s) + kg'(s) \geq 0,\ \text{para algum } k > 0 \text{ e todo } s > 0. \tag{3.5}$$

Liu provou que a PEL vale, quando a função de relaxamento for do tipo núcleo de Maxwell $g(s) = 1+Me^{-ks}$, onde $k,\ M > 0$. Além disso, expressou o tipo do semigrupo explicitamente pela fórmula

$$\omega_0 = \omega_\sigma = \max\left\{ -\frac{k}{1+M},\ \sigma_+(\lambda_1)\right\},$$

onde λ_1 é o menor ponto espectral do operador elástico correspondente.

O método feito por Liu se desenvolve satisfatoriamente para o caso de uma exponencial, mas tomando soma de exponenciais já não pode ser aplicado. Neste trabalho, vamos considerar o mecanismo dissipativo dado pela soma de duas funções exponenciais:

$$g(s) = 1 + M_1e^{-k_1s} + M_2e^{-k_2s},\ \text{onde } M_i,\ k_i > 0,\ i = 1,\ 2, \tag{3.6}$$

que engloba a função utilizada por Liu e melhora o seu resultado.

Esta função satisfaz as condições (3.4) - (3.5) com $k = \min\{k_1,\ k_2\}$, além de valer $\lim_{s\to\infty} g'(s) = 0$.

3.2 Boa Colocação

Primeiramente, mostraremos que existe uma única solução regular para o problema (3.1) - (3.3). Considerando $g(t) = 1 + M_1e^{-k_1t} + M_2e^{-k_2t}$, onde $M_i,\ k_i > 0,\ i = 1,\ 2$, temos

$$\int_0^\infty g'(s)u(x,\ t)\,ds = u(x,\ t) - g(0)u(x,\ t),$$

então a equação (3.1) pode ser reescrita como

$$u_{tt} + A\left\{u - \int_0^\infty g'(s)[u(x,\ t) - u(x,\ t-s)]\,ds\right\} = 0. \tag{3.7}$$

Dafermos [5, 6] introduziram os "espaços de memória", isto é, introduziram uma função auxiliar

$$w(x,t,s) = u(x,t) - u(x,t-s). \tag{3.8}$$

Segue da equação (3.8), uma condição inicial dada por

$$w(x,0,s) \;=\; u(x,0) \;-\; u(x,-s) = u_0(x) - u_h(x,-s) := w_0(x,s). \tag{3.9}$$

Além disso, de (3.8) temos que

$$w_t(x,t,s) = w_t(x,t) - w_t(x,t-s), \quad w_s(x,t,s) = w_t(x,t-s)$$

e somando estas duas relações, encontramos

$$w_t + w_s = u_t(x,t).$$

Usando a definição (3.8) e a equação acima, temos que a equação (3.7) pode ser vista como

$$\begin{aligned} u_{tt} + Au - \int_0^\infty g'(s)Aw(x,\, s)\,ds &= 0,\ u \in L^2(0,t;D(A)), && (3.10)\\ w_t + w_s &= u_t,\ u \in L^2(0,t;D(A)), && (3.11)\end{aligned}$$

com as condições iniciais dadas por

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ w(x,0,s) \,= w_0(x,s),\ x \in D(A),\ 0 < s < t. \tag{3.12}$$

Da definição (3.8) temos

$$w(x,t,0) = 0,\ t \geq 0,\ x \in D(A). \tag{3.13}$$

Seja o vetor $U = (u,v,w)^T$, onde $v = u_t$ e w é dado pela equação (3.8), como $v_t = u_{tt}$, segue das equações (3.10) e (3.11) que

$$\begin{aligned} v_t &= -Au + \int_0^\infty g'(s)Aw(x,\, s)\,ds,\\ w_t &= -w_s + u_t.\end{aligned}$$

De onde segue que o modelo (3.7) munido das condições iniciais (3.2), pode ser reescrito como

$$U_t = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -Au + \int_0^\infty g'(s)Aw(x,\, s)\,ds \\ v - w_s \end{bmatrix} = \mathcal{A}U, \tag{3.14}$$

onde $U_0 = (u_0, u_1, w_0)^T$, com u_0 e u_1 dados na equação (3.2) e w_0 na equação (3.9).

Definamos o conjunto $V = D(A^{1/2})$ com norma dada por $\|u\|_V = \|A^{1/2}\|_H$ e denotemos $L^2_\mu(0,\infty;V)$, o espaço das funções de quadrado integrável, com peso μ e com valores em V, isto é,

$$L^2_\mu(0,\infty;V) = \left\{ f \in V;\, \int_0^{+\infty} |\mu(s)|\|f\|_V^2\,ds < \infty \right\}.$$

Este espaço munido do produto interno

$$(f,g)_{L^2_\mu(0,\infty;V)} = \int_0^{+\infty} |\mu(s)|(f,\, g)_V\,ds$$

é um espaço de Hilbert. Seja o espaço de fase

$$\mathcal{Z} = V \times H \times L^2_{g'}(0, \infty; V),$$

munido do produto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \\ w^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \\ w^2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{Z}} = (v^1,\, v^2)_H + (u^1,\, u^2)_V + \int_0^\infty |g'(s)|(w^1,\, w^2)_V \, ds$$

com norma induzida

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathcal{Z}} = \|v\|^2_H + \|u\|^2_V + \|w\|^2_{L^2_{g'}(0,\infty;V)}.$$

A partir das definições acima, temos que

$$D(\mathcal{A}) = \Big\{U \in \mathcal{Z};\ v \in V; u - \int_0^\infty g'(s)w(s)\, ds \in D(A); w_s \in L^2_{g'}(0, \infty; V);\ w(0) = 0\Big\}. \tag{3.15}$$

Definimos a energia associada ao sistema

$$E(t) := \frac{1}{2}\Big[\|u_t\|^2_H + \|u(t)\|^2_V + \int_0^\infty |g'(s)|\|w(s)\|^2_V \, ds\Big]. \tag{3.16}$$

Mostraremos que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $S(t)$. Para isto, usaremos o Teorema 1.1.5. Mostraremos que $\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato,

$$< \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{Z}} = \Big(-Au + \int_0^\infty g'(s)Aw(s)\, ds,\, v\Big)_H + (v,\, u)_V + \int_0^\infty |g'(s)|(v - w_s,\, w)_V \, ds =$$

$$= -(Au,\, v)_H + \int_0^\infty g'(s)(Aw,\, v)_H \, ds + (v,\, u)_V + \int_0^\infty |g'(s)|(v,\, w)_V \, ds - \int_0^\infty |g'(s)|(w_s,\, w)_V \, ds.$$

Usando (3.13) e tomando a parte real de $< \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{Z}}$, temos que

$$\text{Re } < \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{Z}} = -\int_0^\infty |g'(s)|(w_s,\, w)_V \, ds = -\frac{1}{2}\int_0^\infty |g'(s)|\frac{d}{ds}\|w\|^2_V \, ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[|g'(s)|\|w\|^2_V\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{ds}|g'(s)|\|w\|^2_V \, ds\Big].$$

Pela função g dada em (3.6), temos que

$$\text{Re } < \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{Z}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d}{ds}|g'(s)|\|w\|^2_V \, ds \leq 0. \tag{3.17}$$

Assim $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Finalmente $0 \in \rho(\mathcal{A})$. De fato, a equação resolvente $\lambda U - \mathcal{A}U = F$, com $\lambda = 0$ está dada por

$$-v = f^1 \in V; \tag{3.18}$$

$$A\left[u - \int_0^\infty g'(s)w(s)\,ds\right] = f^2 \in H; \tag{3.19}$$

$$-v + w_s = f^3 \in L^2_{g'}(0,\infty;V). \tag{3.20}$$

De (3.18) segue que $v \in V$. Assim, de (3.20), temos $w_s \in L^2_{g'}(0,\infty;V)$ e daí $w \in H^1_{g'}(0,\infty;V)$ e temos $w(0) = 0$. Por (3.19) temos $u - \int_0^\infty g'(s)w(s)\,ds \in D(A)$.

Portanto, pela definição do $D(\mathcal{A})$ dado em (3.15), segue que $U \in D(\mathcal{A})$ e assim $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Do Teorema 1.1.5, segue que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $S(t)$.

Segue do exposto acima, o resultado

Teorema 3.2.1. *Suponha um mecanismo dissipativo (memória) $g(t)$ satisfazendo as seguintes condições*

$$g \in C^2(0,\infty) \cap C[0,\infty),\ \ g' \in L^1(0,\infty);\ \ g(s) > 0,\ \ g'(s) < 0,\ \ g''(s) > 0,\ \ \textit{para } s > 0;$$

$$g(\infty) = \lim_{s\to\infty} g(s) > 0;\ g''(s) + kg'(s) \geq 0,\ \textit{para algum } k > 0 \textit{ e todo } s > 0,$$

onde $k = \min\{k_1,\, k_2\}$ *e* $\lim_{s\to\infty} g'(s) = 0$. *Tomando* $U_0 \in D(\mathcal{A})$, *então existe uma solução do sistema* (3.10) - (3.11) *com condições iniciais* (3.12) *e de contorno* (3.13) *satisfazendo*

$$U \in C(\mathbb{R}^+; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{Z}).$$

Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A}^n)$, *então*

$$U \in C^{n-k}(\mathbb{R}^+; D(\mathcal{A}^k)),\ \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

3.3 Equação de ordem superior.

Denotemos por H um espaço de Hilbert e seja $A : D(A) \subset H \to H$ o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações e $S(t)$ o correspondente semigrupo, $S(t) = e^{At}$. É simples verificar que a função $U(t) = S(t)U_0$ é solução da equação

$$U_t - AU = 0, \quad U(0) = U_0.$$

Nosso objetivo é mostrar que o problema anterior pode ser estendido para

$$U_{tt} - AU_t = 0, \quad U(0) = U_0, U_1(0) = U_1.$$

Mostrar que o problema acima está bem colocado é equivalente a provar que o operador

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Neste caso, o espaço de fase está definido por

$$\mathcal{H} = \{(U,V) \in D(A) \times H; \;\; AU - V \in D(A)\},$$

munido do produto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} U^1 \\ V^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U^2 \\ V^2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = (V^1,\, V^2)_H + (AU^1 - V^1,\, AU^2 - V^2)_H + (A^2U^1 - AV^1,\, A^2U^2 - AV^2)_H,$$

com norma induzida

$$\left\| \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \|V\|_H^2 + \|AU - V\|_H^2 + \|A^2U - AV\|_H^2.$$

É simples de verificar que $\mathcal{H}$ é um espaco de Hilbert munido do produto interno definido acima. Definiremos como dominio de $\mathcal{A}$, ao seguinte espaço

$$D(\mathcal{A}) = \left\{\mathcal{U} = (U,V) \in \mathcal{H}; \quad (U,V) \in D(A^2) \times D(A)\right\}.$$

Assim temos que

Teorema 3.3.1. *Nas condições anteriores temos que o operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações sobre o espaço $\mathcal{H}$.*

Prova- Usaremos o Teorema de Hille-Yosida. É simples verificar que $D(\mathcal{A})$ é um espaço fechado e denso sobre $\mathcal{H}$. Mostraremos que $\mathbb{R}^+ \subset \rho(\mathcal{A})$. De fato, seja $\mathcal{F} = (F_1,\, F_2) \in \mathcal{H}$. Mostraremos que existe uma única solução $\mathcal{U} \in D(\mathcal{A})$ verificando

$$\lambda\mathcal{U} - \mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{F}.$$

Em termos de suas componentes temos

$$\lambda U - V = F_1, \tag{3.21}$$

$$\lambda V - AV = F_2. \tag{3.22}$$

Como A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações, então temos que para todo $F_2 \in H$ existe uma única solução $V \in D(A)$ verificando

$$\lambda V - AV = F_2.$$

De onde temos que

$$V = (\lambda I - A)^{-1} F_2, \tag{3.23}$$

e ainda,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_H \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Substituindo (3.23) em (3.21) encontramos

$$\lambda U - (\lambda I - A)^{-1} F_2 = F_1.$$

Aplicando $(\lambda I - A)$ na equação acima temos

$$\lambda U - AU = F_1 + \frac{1}{\lambda}F_2 - \frac{1}{\lambda}AF_1 \in D(A).$$

Aplicando mais uma vez que A é generador infinitesimal de um semigrupo, encontramos que $U \in D(A^2)$.

Usando as equações (3.21) e (3.22) temos

$$\begin{aligned} \lambda AU - AV &= AF_1, \\ \lambda V - AV &= F_2. \end{aligned}$$

Tomando a diferença destas equações temos

$$\lambda(AU - V) = AF_1 - F_2.$$

Analogamente temos que

$$\lambda(A^2U - AV) = A^2F_1 - AF_2.$$

Tomando as normas das equações acima, segue os resultados

$$\lambda\|AU - V\|_H \leq \|AF_1 - F_2\|_H, \qquad \lambda\|A^2U - AV\|_H \leq \|A^2F_1 - AF_2\|_H. \tag{3.24}$$

Finalmente, tomando o produto interno da equação (3.22) com V temos

$$\lambda\|V\|_H^2 - (AV, V)_H = (F_2, V)_H.$$

Como $(AV, V)_H \leq 0$ para todo $V \in D(A)$, tomando a desigualdade triangular, concluímos que

$$\lambda\|V\|_H \leq \|F_2\|_H. \tag{3.25}$$

Elevando ao quadrado as relações (3.24)-(3.25) obtemos que

$$\lambda^2\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2,$$

que implica

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Usando o Teorema de Hille - Yosida segue o resultado.

3.4 Equações de terceira ordem.

Usando os mesmos argumentos da seção anterior, podemos estender este resultado de forma indutiva. Mostraremos que o problema

$$U_{ttt} - AU_{tt} = 0, \quad U(0) = U_0, \quad U_t(0) = U_1, \quad U_{tt}(0) = U_2.$$

é estendido em relação aos anteriores dados no início da seção anterior.

Este problema é equivalente a provar que o operador

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Neste caso, o espaço de fase está definido por

$$\mathcal{H}_2 = \left\{(U, V, W) \in D(A^2) \times D(A) \times H;\;\; AU - V \in D(A^2);\;\; AV - W \in D(A)\right\}.$$

munido do produto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} U^1 \\ V^1 \\ W^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U^2 \\ V^2 \\ W^2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_2} = (W^1,\, W^2)_H + \sum_{j=1}^{3} (A^j U^1 - A^{j-1} V^1,\, A^j U^2 - A^{j-1} V^2)_H + $$
$$+ \sum_{j=1}^{2} (A^j V^1 - A^{j-1} W^1,\, A^j V^2 - A^{j-1} W^2)_H,$$

com norma induzida

$$\left\| \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|W\|_H^2 + \sum_{j=1}^{3} \|A^j U - A^{j-1} V\|_H^2 + \sum_{j=1}^{2} \|A^j V - A^{j-1} W\|_H^2.$$

É simples de verificar que $\mathcal{H}_2$ é um espaco de Hilbert munido do produto interno definido acima. Definiremos como dominio de $\mathcal{A}_2$, ao seguinte espaço

$$D(\mathcal{A}_2) = \left\{\mathcal{U} = (U,\, V,\, W) \in \mathcal{H}_2;\quad (U,\, V,\, W) \in D(A^3) \times D(A^2) \times D(A)\right\}.$$

Assim temos que

Teorema 3.4.1. *Nas condições anteriores temos que o operador $\mathcal{A}_2$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações sobre o espaço $\mathcal{H}_2$.*

Prova - A prova é similar ao teorema anterior.

Teorema 3.4.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações então o operador*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

verifica

$$\rho(\mathcal{A}) = \rho(A) \cup \{0\}$$

PROVA- Suponhamos que $\lambda \in \rho(A)$ então temos que existe uma única solução de

$$\lambda U - AU = F,$$

para todo F elemento de H. Mostraremos que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. De fato considere o problema

$$\lambda \mathcal{U} - \mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{F}.$$

Em termos das componentes temos

$$\lambda U - V = F_1 \in D(A^2), \tag{3.26}$$

$$\lambda V - W = F_2 \in D(A), \tag{3.27}$$

$$\lambda W - AW = F_3 \in H. \tag{3.28}$$

Pela hipótese temos que existe uma única $W \in D(A)$ tal verifica (3.28). Desta forma temos que (3.27) pode ser reescrita como

$$\lambda V - (\lambda I - A)^{-1} F_3 = F_2.$$

De onde segue que

$$\lambda(\lambda I - A)V = (\lambda I - A)F_2 + F_3 \in D(A).$$

Usando novamente a hipótese encontramos que existe uma única $V \in D(A^2)$ verificando

$$\lambda V = F_2 + (\lambda I - A)^{-1} F_3 \in D(A).$$

Finalmente substituindo em (3.26) multiplicado por λ encontramos

$$\lambda^2 U - F_2 - (\lambda I - A)^{-1} F_3 = \lambda F_1 \in D(A^2).$$

De onde temos que

$$\lambda^2(\lambda I - A)U - (\lambda I - A)F_2 - F_3 = \lambda(\lambda I - A)F_1 \in D(A^2).$$

Assim

$$\lambda^2(\lambda U - AU) = \lambda^2 F_1 + \lambda F_2 - \lambda A F_1 - AF_2 + F_3 \in D(A^2).$$

Segue que $U \in D(A^3)$ e mostra que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Reciprocamente, tomemos agora $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, então temos para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ existe um único elemento $\mathcal{U} \in D(\mathcal{A})$ verificando (3.26)-(3.28). Em particular, de (3.28) concluimos que para todo $F_3 \in H$ existe um único $W \in D(A)$. Que implica que $\lambda \in \rho(A)$. A prova está completa.

Como consequência temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4.3. *Suponhamos que A seja um operador normal tal que existe um número $M > 0$ e um inteiro n tal que vale o seguinte:*

a) Se $\lambda \in \sigma(A_0)$ e $|\lambda| > M - 1$, então λ é um autovalor isolado de multiplicidade finita;

b) Se $|z| > M$, então o número de autovalores de A_0 no disco unitário centrado em z (contendo as multiplicidades) não excede n. Então o operador $\mathcal{A}$ definido por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

é um operador normal que também possui as propriedades (a) e (b).

PROVA- Como A é autoadjunto e normal, temos que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, e em particular $\mathcal{A}$ é normal. Além disso, os espectros de A e $\mathcal{A}$ são iguais fora de uma bola unitária e o resultado segue pois $M > 1$.

3.5 Aplicações aos modelos com memória.

Neste trabalho, vamos aplicar os resultados anteriores considerando a função de relaxamento

$$g(t) = 1 + M_1 e^{-k_1 t} + M_2 e^{-k_2 t}, \text{ onde } M_i,\ k_i > 0,\ i = 1, 2, \tag{3.29}$$

que, no caso de $M_2 = 0$, seria a função utilizada por Liu.

Para facilitar os cálculos, fazendo $r = t - s$ na integral de (3.1), temos

$$\int_0^{\infty} g'(s)u(t-s)\,ds = -\int_t^{-\infty} g'(t-r)u(r)\,dr = \int_{-\infty}^{t} g'(t-s)u(s)\,ds.$$

Portanto, reescrevemos (3.1) como sendo a equação com memória dada por

$$u_{tt} + g(0)Au + \int_{-\infty}^{t} g'(t-s)Au(s)\ ds = 0 \tag{3.30}$$

Definamos o operador diferencial $\mathcal{L} : H \to H$, onde H é um espaço de Hilbert, dado por

$$\mathcal{L}(f) = f'' + (k_1 + k_2)f' + k_1 k_2 f.$$

Claramente temos que

$$\mathcal{L}(g'(t)) = 0.$$

Aplicando o operador $\mathcal{L}$ na equação (3.30) obtemos

$$u_{tttt} + (k_1 + k_2)u_{ttt} + k_1 k_2 u_{tt} + g(0)Au_{tt} + (k_1 + k_2)g(0)Au_t + k_1 k_2 g(0)Au +$$

$$+ g'(0)Au_t + [g''(0) + (k_1 + k_2)g'(0)]Au = 0,$$

que pode ser escrito na forma

$$u_{tttt} + g(0)Au_{tt} + Bu = 0 \tag{3.31}$$

onde

$$Bu = (k_1+k_2)u_{ttt}+k_1k_2u_{tt}+(k_1+k_2)g(0)Au_t+k_1k_2g(0)Au+g'(0)Au_t+[g''(0)+(k_1+k_2)g'(0)]Au.$$

Teorema 3.5.1. *Suponhamos que A seja um operador autoadjunto verifique as propriedades (a) e (b) do teorema 3.4.3, então o sistema (3.30) verifica a propriedade da estabilidade linear.*

Prova- Neste caso consideraremos o gerador infinitesimal da equação de ondas abstratas,

$$u_{tt} + g(0)Au = 0, \quad (*)$$

isto é,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -g(0)A & 0 \end{pmatrix}, \qquad U^T = (u, u_t).$$

Note que A_1 é um operador normal. Assim o problema $(*)$ pode ser reescrito como

$$U_t - A_1 U = 0.$$

Portanto o modelo abstrato associada ao problema de Cauchy (3.31) é definida por

$$\mathcal{U}_t - \mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{F},$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{U}^T = (U, U_t, U_{tt}).$$

Como A_1 é normal, do Teorema 3.4.3 segue que $\mathcal{A}$ é um operador normal que verifica as condições (a) e (b).

Finalmente da terceira expressão, segue que

$$U_{ttt} - A_1 U_{tt} = F,$$

onde

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -Bu \end{pmatrix}, \qquad U^T = (u, u_t).$$

Note que o operador $\mathcal{F}$ é um operador contínuo, pois os operadores B e F são contínuos, onde o último depende de B. A continuidade de B é feita através de desigualdades de derivadas. Usando o Teorema de Renardy, segue o resultado.

3.6 Cálculo do $\omega_0(\mathcal{A})$

Nesta seção faremos o cálculo do polinômio cujas raízes nos dão o valor de $\omega_0(\mathcal{A})$. Do sistema (3.10) - (3.11) e (3.14), obtemos que o operador $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{A}U = \begin{bmatrix} v \\ -Au + \int_0^\infty g'(s)Aw(x,\, s)\, ds \\ v - w_s \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Observação 3.6.1. *Vários autores mostraram o decaimento exponencial, como por exemplo [20].*

Definamos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{Z} = V \times H \times L^2_{g'}(0,\infty;V),$$

onde $V = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$, com norma induzida

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathcal{Z}} := \int_\Omega \left[|v|^2 + |A^{1/2}u|^2 + \int_0^\infty |g'(s)||A^{1/2}w|^2\, ds \right] dx.$$

O domínio de $\mathcal{A}$ é dado por

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{Z};\ v \in V; u - \int_0^\infty g'(s)w(s)\,ds \in D(A); w_s \in L^2_{g'}(0,\infty;V);\ w(0) = 0\Big\}.$$

A função de relaxamento g dada por

$$g(s) = 1 + M_1 e^{-k_1 s} + M_2 e^{-k_2 s},$$

satisfaz as seguintes condições (3.4) - (3.5) :

$$g \in C^2(0,\infty) \cap C[0,\infty),\ \ g' \in L^1(0,\infty);$$

$$g(s) > 0,\ g'(s) < 0,\ g''(s) > 0,\ \text{para } s > 0;$$
$$g(\infty) = \lim_{s\to\infty} g(s) > 0;$$

$$g''(s) + kg'(s) \geq 0,\ \text{para } k > 0 \text{ e todo } s > 0,\ \text{onde } k = \min\{k_1,\, k_2\}.$$

Seguem alguns resultados de [10] que serão usados a seguir:

Proposição 3.6.1. *Suponhamos que $f(s) \in W$, $\mathcal{R}e\lambda > -k/2$, $g(s)$ satisfaz as condições (3.4) - (3.5) e $w(s) = \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)} f(\tau)d\tau$. Então*
a)$|sg'(s)| \to 0$ quando $s \downarrow 0$, e $f \in L^2(0,T;V)$, para todo $T > 0$;
b)$w \in W \cap C([0,\infty),V), w' \in W$ e valem

$$\|w\|^2_W \leq \frac{1}{\delta}(2\mathcal{R}e\lambda + k - \delta)^{-1}\|f\|^2_W,\ \textit{para } \delta \in (0,\, 2\mathcal{R}e\lambda + k),$$

$$\mathcal{R}e\int_0^\infty g'(s) < w'(s),\, w(s) >_V\ ds \leq -\frac{k}{2}\|w\|^2_W;$$

c)$\|g'(s)w(s)\|_V \to 0$ quando $s \downarrow 0$, e $\|g'(s)w(s)\|_V \to 0$, quando $s \to \infty$.

Denotemos o conjunto

$$\Lambda_k = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e\lambda > -\frac{k}{2}\right\}$$

e o operador

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 A^{-1} + g(0) + \widehat{g}'(\lambda),$$

onde $\widehat{g}'(\lambda) = \int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s}\,ds$.

Observação 3.6.2. $\Delta(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$ *para cada* $\lambda \in \Lambda_k$.

Proposição 3.6.2. *O operador* $\mathcal{A}$ *definido em* (3.32) *é fechado e densamente definido. Além disso, temos*

$$\begin{gathered} \Lambda_k \cap \rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \Lambda_k \,|\, \mathcal{I}m(\Delta(\lambda)) = H\}, \\ \Lambda_k \cap \sigma(\mathcal{A}) = \left\{\lambda \in \Lambda_k \,\middle|\, -\frac{1}{\lambda^2}[g(0) + \widehat{g}'(\lambda)] \in \sigma(A^{-1})\right\}, \\ \rho(\mathcal{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \mathcal{R}e\lambda \geq 0\}, \end{gathered} \tag{3.33}$$

onde $\rho(\mathcal{A})$ *é o conjunto resolvente de* $\mathcal{A}$.

Teorema 3.6.1. *Suponha que* $\sigma < k/2$ *satisfazendo* $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \mathcal{R}e\lambda \geq -\sigma\} \subset \rho(\mathcal{A})$ *e* $\sigma < \frac{k}{2}C(\sigma)[1 + g(0) + C(\sigma)]^{-1}$, *onde* $C(\sigma) = \int_0^\infty (1 + e^{2\sigma s})|g'(s)|\, ds$. *Então* $\omega_0(\mathcal{A}) < -\sigma$.

Observação 3.6.3. *Considerando a função de relaxamento* g *dada por*

$$g(s) = 1 + M_1 e^{-k_1 s} + M_2 e^{-k_2 s},$$

onde $M_i, k_i > 0$, $i = 1, 2$. *Então*

$$C(\sigma) = \frac{2M_1(k_1 - \sigma)}{k_1 - 2\sigma} + \frac{2M_2(k_2 - \sigma)}{k_2 - 2\sigma}.$$

Assim, para encontrar $\sigma_0(\mathcal{A})$, usaremos (3.33) e resolveremos a equação

$$\gamma\lambda^2 + g(0) + \widehat{g}'(\lambda) = 0, \tag{3.34}$$

em Λ_k, onde $\gamma \in \sigma(A^{-1})$.

Tomando

$$g(s) = 1 + M_1 e^{-k_1 s} + M_2 e^{-k_2 s},$$

temos

$$g(0) = 1 + M_1 + M_2 \quad \text{e} \quad g'(s) = -\sum_{i=1}^{2} k_i M_i e^{-k_i s}. \tag{3.35}$$

Assim

$$\widehat{g}'(\lambda) = -\sum_{i=1}^{2} \frac{k_i M_i}{k_i + \lambda}. \tag{3.36}$$

Substituindo (3.35) e (3.36) em (3.34) segue a equação

$$\gamma\lambda^2 + 1 + M_1 + M_2 - \frac{k_1 M_1}{k_1 + \lambda} - \frac{k_2 M_2}{k_2 + \lambda} = 0. \tag{3.37}$$

Desenvolvendo, temos o polinômio de 4º grau:

$$\gamma\lambda^2(k_1 + \lambda)(k_2 + \lambda) + (1 + M_1 + M_2)(k_1 + \lambda)(k_2 + \lambda) - k_1 M_1(k_2 + \lambda) - k_2 M_2(k_1 + \lambda) = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \gamma\lambda^4 + \gamma(k_1 + k_2)\lambda^3 + [\gamma k_1 k_2 + (1 + M_1 + M_2)]\lambda^2 + \\ &+ [k_1(1 + M_2) + k_2(1 + M_1)]\lambda + k_1 k_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Portanto de (3.38) segue que

$$\omega_\sigma(\mathcal{A}) = \mathrm{Re}\{\lambda \in \mathbb{C} / \; P(\lambda) = 0, \, \gamma \in \sigma(A^{-1})\}. \tag{3.39}$$

Observação 3.6.4. *Para o caso $n = 1$, segue de [10] dois polinômios dados por*

$$\lambda = -\frac{k_1}{1 + M_1}$$

e

$$P(\lambda, \mu) = \lambda^3 + k_1\lambda^2 + \mu(1 + M_1)\lambda + \mu k_1 = 0.$$

Novamente por Liu [10], temos que

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \omega_\sigma(\mathcal{A}) = \max\left\{ -\frac{k_1}{1 + M_1}, \, \sigma_+(\lambda_1)\right\},$$

onde λ_1 é o menor ponto espectral de A.

Seguindo a mesma direção do trabalho de Liu [10], consideremos, primeiramente, o caso de $0 = \gamma \in \sigma(A^{-1})$, obtendo o polinômio

$$P_1(\lambda) = (1 + M_1 + M_2)\lambda^2 + [k_1(1 + M_2) + k_2(1 + M_1)]\lambda + k_1k_2 = 0. \tag{3.40}$$

As raízes de (3.40) são dadas por

$$\lambda = \frac{-[k_1(1 + M_2) + k_2(1 + M_1)] \pm \sqrt{[k_1(1 + M_2) - k_2(1 + M_1)]^2 + 4k_1k_2M_1M_2}}{2(1 + M_1 + M_2)}.$$

Se $0 \neq \gamma \in \sigma(A^{-1})$, tome $\mu = 1/\gamma$, temos o polinômio

$$\begin{aligned} P_2(\lambda, \mu) &= \lambda^4 + (k_1 + k_2)\lambda^3 + [k_1k_2 + \mu(1 + M_1 + M_2)]\lambda^2 + \\ &+ \mu[k_1(1 + M_2) + k_2(1 + M_1)]\lambda + \mu k_1k_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Assim de (3.40) e (3.41) temos

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; P_1(\lambda) = 0 \text{ ou } P_2(\lambda, \mu) = 0, \mu \in \sigma(A)\}. \tag{3.42}$$

De acordo com [12], substituindo $\lambda = y - \left(\frac{k_1+k_2}{4}\right)$ na equação (3.41), simplificamos como

$$y^4 + ry^2 + sy + t = 0, \tag{3.43}$$

onde

$$r = r(\mu) = k_1k_2 + \mu(1 + M_1 + M_2) - \frac{3(k_1 + k_2)^2}{8},$$

$$s = s(\mu) = \frac{1}{8}(k_1 + k_2)^3 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)[k_1k_2 + \mu(1 + M_1 + M_2)] + \mu[k_1(1 + M_2) + k_2(1 + M_1)],$$

$$t = t(\mu) = \frac{1}{16}(k_1 + k_2)^2[k_1k_2 + \mu(1 + M_1 + M_2)] - \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\mu[k_1(1 + M_2) + k_2(1 + M_1)] -$$

$$-\frac{3}{256}(k_1 + k_2)^4 + \mu k_1k_2.$$

Consideremos a seguinte decomposição para as raízes y:

$$y = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}.$$

Além disso, definimos os números

$$S = y_1 + y_2 + y_3,\ T = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 \text{ e } P = y_1y_2y_3.$$

Logo

$$y^2 = y_1 + y_2 + y_3 + 2(\sqrt{y_1y_2} + \sqrt{y_1y_3} + \sqrt{y_2y_3}) = S + 2(\sqrt{y_1y_2} + \sqrt{y_1y_3} + \sqrt{y_2y_3}).$$

Então

$$[y^2 - S]^2 = 4(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) + 8\sqrt{y_1y_2y_3}(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}).$$

Usando as notações acima temos

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + (S^2 - 4T) = 0. \tag{3.44}$$

Comparando (3.43) e (3.44), temos

$$-2S = r;\ -8\sqrt{P} = s;\ S^2 - 4T = t;$$

ou seja,

$$S = -\frac{r}{2};\ P = \frac{s^2}{64};\ T = \frac{S^2 - t}{4} = \frac{r^2 - 4t}{16}.$$

Por outro lado y_1, y_2 e y_3 são as três raízes da equação do 3º grau do tipo

$$y^3 - Sy^2 + Ty - P = 0,$$

ou seja, raízes do polinômio

$$P(y,\mu) = y^3 + \frac{r}{2}y^2 + \frac{r^2 - 4t}{16}y - \frac{s^2}{64} = 0, \tag{3.45}$$

Novamente, de acordo com [12], substituindo $y = x + \frac{S}{3}$ na equação do 3º grau acima, simplificamos como

$$x^3 + px + q = 0, \tag{3.46}$$

onde

$$p = p(\mu) = T - \frac{S^2}{3} = -\frac{r^2 + 12t}{48},$$

$$q = q(\mu) = -\frac{2}{27}S^3 + \frac{ST}{3} - P = -\frac{r^3}{864} + \frac{rt}{24} - \frac{s^2}{64}.$$

Denote

$$Q(\mu) = (p/3)^3 + (q/2)^2,$$

$$B_\pm = B_\pm(\mu) = \left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{Q(\mu)} \right)^{1/3} \text{para } Q(\mu) \geq 0,$$

$$\xi_{\pm} = \xi_{\pm}(\mu) = -\frac{r}{6} \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Seja $l(\mu)$ a menor raiz real de (3.45). Então as outras duas raízes são

$$l_{\pm}(\mu) = -\left(\frac{r + 2l(\mu)}{4}\right) \pm \sqrt{-p - \frac{3}{4}\left[l(\mu) + \frac{r}{6}\right]^2}.$$

Vamos dividir em três casos:

1ºcaso)$Q(\mu) > 0$. De acordo com o Apêndice A de [20], temos que a menor raiz real do polinômio (3.46) é dada por

$$x_1 = B_+ + B_-.$$

Ou seja, a menor raiz real do polinômio (3.45) será

$$l(\mu) = -\frac{r}{6} + B_+ + B_-$$

e as raízes complexas

$$l_{\pm}(\mu) = -\frac{r}{6} - \frac{B_+ + B_-}{2} \pm i\sqrt{3}\,\frac{B_+ - B_-}{2}.$$

Portanto uma das raízes de (3.43) será

$$\sqrt{l(\mu)} + \sqrt{l_+(\mu)} + \sqrt{l_-(\mu)}.$$

As outras três são tais que o produto seja P, então duas tem sinais negativos e uma positivo, ou seja,

$$\sqrt{l(\mu)}+\sqrt{-l_+(\mu)}+\sqrt{-l_-(\mu)},\ \sqrt{-l(\mu)}+\sqrt{-l_+(\mu)}+\sqrt{l_-(\mu)} \text{ e } \sqrt{-l(\mu)}+\sqrt{l_+(\mu)}+\sqrt{-l_-(\mu)}.$$

Daí as raízes de (3.41) são do tipo

$$\lambda_1 = -\frac{k_1 + k_2}{4} + \sqrt{-\frac{r}{6} + B_+ + B_-} + \sqrt{-\frac{r}{6} - \frac{B_+ + B_-}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{B_+ - B_-}{2}} +$$

$$+\sqrt{-\frac{r}{6} - \frac{B_+ + B_-}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{B_+ - B_-}{2}}.$$

$$\lambda_2 = -\frac{k_1 + k_2}{4} + \sqrt{-\frac{r}{6} + B_+ + B_-} + \sqrt{\frac{r}{6} + \frac{B_+ + B_-}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{B_+ - B_-}{2}} +$$

$$+\sqrt{\frac{r}{6} + \frac{B_+ + B_-}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{B_+ - B_-}{2}}.$$

$$\lambda_3 = -\frac{k_1 + k_2}{4} + \sqrt{\frac{r}{6} - B_+ - B_-} + \sqrt{\frac{r}{6} + \frac{B_+ + B_-}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{B_+ - B_-}{2}} +$$

$$+\sqrt{-\frac{r}{6}-\frac{B_+ + B_-}{2}-i\sqrt{3}\,\frac{B_+ - B_-}{2}}.$$

$$\lambda_4=-\frac{k_1+k_2}{4}+\sqrt{\frac{r}{6}-B_+-B_-}+\sqrt{-\frac{r}{6}-\frac{B_+ + B_-}{2}+i\sqrt{3}\,\frac{B_+ - B_-}{2}}+$$

$$+\sqrt{\frac{r}{6}+\frac{B_+ + B_-}{2}+i\sqrt{3}\,\frac{B_+ - B_-}{2}}.$$

2^{o}caso)$Q(\mu)<0$. De acordo com [10], a equação (3.45) tem três raízes reais distintas. A maior raiz será

$$l_+(\mu)=-\frac{r}{6}+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3},\ \cos\alpha=\frac{-q}{2\sqrt{-(p/3)^3}},$$

as outras duas são

$$l_-(\mu),\, l(\mu)=-\frac{r}{6}-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi\pm\alpha}{3}.$$

Portanto, como comentado no 1^{o}*caso*, as raízes de (3.41) são do tipo

$$\lambda_1=-\frac{k_1+k_2}{4}+\sqrt{-\frac{r}{6}-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi-\alpha}{3}}+\sqrt{-\frac{r}{6}+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}}+$$

$$+\sqrt{-\frac{r}{6}-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi+\alpha}{3}}.$$

$$\lambda_2=-\frac{k_1+k_2}{4}+\sqrt{-\frac{r}{6}-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi-\alpha}{3}}+\sqrt{\frac{r}{6}-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}}+$$

$$+\sqrt{\frac{r}{6}+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi+\alpha}{3}}.$$

$$\lambda_3=-\frac{k_1+k_2}{4}+\sqrt{\frac{r}{6}+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi-\alpha}{3}}+\sqrt{\frac{r}{6}-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}}+$$

$$+\sqrt{-\frac{r}{6}-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi+\alpha}{3}}.$$

$$\lambda_4=-\frac{k_1+k_2}{4}+\sqrt{\frac{r}{6}+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi-\alpha}{3}}+\sqrt{-\frac{r}{6}+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}}+$$

$$+\sqrt{\frac{r}{6}+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi+\alpha}{3}}.$$

3ºcaso)$Q(\mu)=0$. De acordo com o Apêndice A de [20], temos uma raiz real simples do polinômio (3.45) dada por

$$-\frac{r}{6}+2\Big(-\frac{q}{2}\Big)^{1/3},$$

e uma raiz dupla real

$$-\frac{r}{6}-\Big(-\frac{q}{2}\Big)^{1/3}=\begin{cases}\xi_-(\mu),\ q\leq 0,\\ \xi_+(\mu),\ q\geq 0.\end{cases}$$

Portanto, como comentado no 1º*caso*, as raízes de (3.41) são do tipo

$$\lambda_1=-\frac{k_1+k_2}{4}+\sqrt{-\frac{r}{6}+2\Big(-\frac{q}{2}\Big)^{1/3}}+2\sqrt{-\frac{r}{6}-\Big(-\frac{q}{2}\Big)^{1/3}}.$$

$$\lambda_2=-\frac{k_1+k_2}{4}+\sqrt{-\frac{r}{6}+2\Big(-\frac{q}{2}\Big)^{1/3}}+2\sqrt{\frac{r}{6}+\Big(-\frac{q}{2}\Big)^{1/3}}.$$

$$\lambda_3=\lambda_4=-\frac{k_1+k_2}{4}+\sqrt{\frac{r}{6}-2\Big(-\frac{q}{2}\Big)^{1/3}}+\sqrt{-\frac{r}{6}-\Big(-\frac{q}{2}\Big)^{1/3}}+\sqrt{\frac{r}{6}+\Big(-\frac{q}{2}\Big)^{1/3}}.$$

3.7 Conclusões

Como visto neste capítulo, usando o método de nova derivação, conseguimos através do Teorema de Renardy, provar que vale PEL, onde a memória é dada do tipo soma de exponenciais. O valor do tipo de semigrupo é mais difícil de ser calculado. Para o caso do tipo sendo soma de n exponenciais o processo é semelhante, o que muda seria basicamente a ordem do sistema, neste caso seria de ordem $n+1$. Com isso o operador $\mathcal{L}$ também seria de uma ordem superior para anular a função g'.

Capítulo 4

Vigas de Timoshenko com memória

4.1 Existência e Unicidade de Solução

Neste capítulo, faremos um estudo semelhante ao feito no capítulo anterior. Usaremos resultados provados na seções 3 e 4 do capítulo de ondas abstratas e estudaremos para o sistema de Timoshenko com duas histórias na forma geral

$$\rho_1\varphi_{tt} - S_x = 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), \tag{4.1}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - M_x + S = 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), \tag{4.2}$$

onde

$$S = \kappa(\varphi_x+\psi) - \int_{-\infty}^{t} h(t-s)(\varphi_x+\psi)(x,\,s)ds$$

e

$$M = b\psi_x - \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\psi_x(x,\,s)ds,$$

com as condições iniciais dadas por

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x),\ \psi(x,0)=\psi_0(x),\ \psi_t(x,0)=\psi_1(x). \tag{4.3}$$

Para facilitar nossa análise, consideraremos as condições de contorno sendo Dirichlet - Neumann dadas por

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = 0,\ t>0. \tag{4.4}$$

As condições de história sobre φ e ψ são definidas como

$$\varphi(x,t)=\varphi_h(x,t),\ \psi(x,t)=\psi_h(x,t),\quad t<0. \tag{4.5}$$

Observação 4.1.1. *Para outras condições de contorno diferentes de* (4.4)*, o que mudará será o domínio do operador* $\mathcal{A}$.

4.2 Boa Colocação.

Nesta seção, mostraremos a existência de solução, regularidade e unicidade de solução para o problema (4.1) - (4.5). Dafermos [5, 6], Fabrizio [7], introduziram os "espaços de memória", isto é, introduziram funções auxiliares

$$\eta(x,t,s) = \psi(x,t) - \psi(x,t-s), \;\; \nu(x,t,s) = \varphi(x,t) - \varphi(x,t-s). \tag{4.6}$$

Note que por (4.6) valem

$$\eta_t(x,t,s) = \psi_t(x,t) - \psi_t(x,t-s), \;\; \eta_s(x,t,s) = \psi_t(x,t-s),$$

$$\nu_t(x,t,s) = \varphi_t(x,t) - \varphi_t(x,t-s), \;\; \nu_s(x,t,s) = \varphi_t(x,t-s).$$

Somando as duas primeiras relações e depois as duas últimas, encontramos as equações

$$\eta_t + \eta_s = \psi_t(x,t), \;\; \nu_t + \nu_s = \varphi_t(x,t).$$

Pelas definções de η e ν, respectivamente, temos novas condições de contorno dadas por

$$\eta(x,t,0) = 0 = \nu(x,t,0), \; \forall t \geq 0, \; x \in (0,l).$$

Além disso, segue que

$$\eta(x,0,s) \; = \; \psi(x,0) \; - \; \psi(x,-s) = \psi_0(x) - \psi_h(x,-s) := \eta_0(x,s),$$

$$\nu(x,0,s) \; = \; \varphi(x,0) \; - \; \varphi(x,-s) = \varphi_0(x) - \varphi_h(x,-s) := \nu_0(x,s).$$

Denotemos $L^2_\mu(0,\infty;H^1_0(0,l))$ o espaço das funções de quadrado integrável com peso μ e com valores em $H^1_0(0,l)$, isto é,

$$L^2_\mu(0,\infty;H^1_0(0,l)) = \left\{ f \in H^1_0(0,l); \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_0^l |f_x(x,s)|^2 \, dx \, ds < \infty \right\}.$$

Este espaço munido do produto interno

$$(f,g)_{L^2_\mu} = \int_0^{+\infty} \mu(s) \int_0^l f_x(x,s) g_x(x,s) \, dx \, ds$$

é um espaço de Hilbert. Fazendo mudanças de variáveis e usando as equações (4.6), encontramos

$$\int_{-\infty}^t g(t-\tau)\psi_{xx}(x,\,\tau)\,d\tau = \int_0^\infty g(\tau)\psi_{xx}(x,\,t-\tau)\,d\tau = -\int_0^\infty g(\tau)\eta_{xx}(x,\,\tau)\,d\tau + \int_0^\infty g(\tau)\,d\tau\psi_{xx},$$

$$\int_{-\infty}^t h(t-\tau)(\varphi_x+\psi)_x(x,\,\tau)\,d\tau = \int_0^\infty h(\tau)(\varphi_x+\psi)_x(x,\,t-\tau)\,d\tau = -\int_0^\infty h(\tau)(\nu_x+\eta)_x(x,\,\tau)\,d\tau +$$
$$+\int_0^\infty h(\tau)\,d\tau(\varphi_x+\psi)_x.$$

E analogamente

$$\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)(\varphi_x+\psi)(x,\,\tau)\,d\tau = -\int_0^{\infty} h(\tau)(\nu_x+\eta)(x,\,\tau)\,d\tau + \int_0^{\infty} h(\tau)\,d\tau(\varphi_x+\psi).$$

Assim o sistema (4.1) - (4.2) pode ser reescrito como

$$\rho_1\varphi_{tt} - \underbrace{\left(\kappa - \int_0^{\infty} h(\tau)\,d\tau\right)}_{:=\kappa_0}(\varphi_x+\psi)_x - \int_0^{\infty} h(\tau)(\nu_x+\eta)_x(x,\,\tau)\,d\tau = 0,$$

$$\rho_2\psi_{tt} - \underbrace{\left(b - \int_0^{\infty} g(\tau)\,d\tau\right)}_{:=b_0}\psi_{xx} + \underbrace{\left(\kappa - \int_0^{\infty} h(\tau)\,d\tau\right)}_{:=\kappa_0}(\varphi_x+\psi) - \int_0^{\infty} g(\tau)\eta_{xx}(x,\,\tau)\,d\tau +$$

$$+\int_0^{\infty} h(\tau)(\nu_x+\eta)(x,\,\tau)\,d\tau = 0.$$

Consideramos, para efeito de cálculo, que $\int_0^{\infty} h(\tau)\,d\tau < +\infty$ e $\int_0^{\infty} g(\tau)\,d\tau < +\infty$, além de serem positivas. Depois, as funções g e h terão estas propriedades.

O sistema (4.1) - (4.4) pode ser visto como segue

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - \widetilde{S}_x &= 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), && (4.7)\\ \rho_2\psi_{tt} - \widetilde{M}_x + \widetilde{S} &= 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), && (4.8)\\ \nu_t + \nu_s &= \varphi_t, \text{ em } (0,l)\times(0,t), && (4.9)\\ \eta_t + \eta_s &= \psi_t, \text{ em } (0,l)\times(0,t), && (4.10) \end{aligned}$$

onde

$$\widetilde{S} = \kappa_0(\varphi_x+\psi) + \int_0^{\infty} h(s)(\nu_x+\eta)(x,\,s)\,ds$$

e

$$\widetilde{M} = b_0\psi_x + \int_0^{\infty} g(s)\eta_x(x,\,s)\,ds.$$

As condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned} &\varphi(x,0)=\varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x),\ \psi(x,0)=\psi_0(x),\ \psi_t(x,0)=\psi_1(x),\\ &\qquad \nu(x,0,s)=\nu_0(x,s),\ \eta(x,0,s)=\eta_0(x,s), \qquad (4.11) \end{aligned}$$

e as condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned} &\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = \nu(0,t,0) = \nu(l,t,0) =\\ &\qquad = \eta(0,t,0) = \eta(l,t,0) = 0,\ t>0. \qquad (4.12) \end{aligned}$$

Consideremos as variáveis $\Phi = \varphi_t$ e $\Psi = \psi_t$. Seja o vetor $U = (\varphi, \Phi, \nu, \psi, \Psi, \eta)^T$, assim temos que o modelo (4.7)-(4.12), pode ser escrito como

$$U_t = \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \Phi_t \\ \nu_t \\ \psi_t \\ \Psi_t \\ \eta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{\kappa_0}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{1}{\rho_1}\int_0^\infty h(s)(\nu_x + \eta)_x(s)\, ds \\ \Phi - \nu_s \\ \Psi \\ \frac{b_0}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa_0}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\, ds - \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty h(s)(\nu_x + \eta)(s)\, ds \\ \Psi - \eta_s \end{bmatrix} = \mathcal{A}U, \tag{4.13}$$

onde $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \nu_0, \psi_0, \psi_1, \eta_0)^T$.

Introduzimos os espaços

$$L^2_*(0,l) = \{f \in L^2(0,l);\ f_x(0) = f_x(l) = 0\}, \quad H^m_*(0,l) = H^m(0,l) \cap L^2_*(0,l).$$

O espaço de fase é

$$\mathcal{V} = H^1_0(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2_h(0,\infty; H^1_0(0,l)) \times H^1_*(0,l) \times L^2_*(0,l) \times (L^2_h \cap L^2_g)(0,\infty; H^1_0(0,l)),$$

munido do produto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \Phi^1 \\ \nu^1 \\ \psi^1 \\ \Psi^1 \\ \eta^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi^2 \\ \Phi^2 \\ \nu^2 \\ \psi^2 \\ \Psi^2 \\ \eta^2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{V}} = \rho_1 \int_0^l \Phi^1 \overline{\Phi^2}\, dx + \rho_2 \int_0^l \Psi^1 \overline{\Psi^2}\, dx + \kappa_0 \int_0^l (\varphi^1_x + \psi^1)\overline{(\varphi^2_x + \psi^2)}\, dx +$$

$$+ b_0 \int_0^l \psi^1_x \overline{\psi^2_x}\, dx + \int_0^l \int_0^\infty h(s)(\nu^1_x + \eta^1)\overline{(\nu^2_x + \eta^2)}\, ds\, dx + \int_0^l \int_0^\infty g(s)\eta^1_x \overline{\eta^2_x}\, ds\, dx,$$

com norma induzida

$$\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \Phi \\ \nu \\ \psi \\ \Psi \\ \eta \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathcal{V}} = \int_0^l \Bigg[\rho_1 |\Phi|^2 + \rho_2 |\Psi|^2 + \kappa_0 |\varphi_x + \psi|^2 + b_0 |\psi_x|^2 +$$

$$+ \int_0^\infty h(s)|\nu_x + \eta|^2\, ds + \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\, ds \Bigg] dx.$$

A partir das definições acima, temos que

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= [H^2(0,l) \cap H^1_0(0,l)] \times H^1_0(0,l) \times H^1_h(0,\infty; H^1_0(0,l)) \times H^1_*(0,l) \times \\ &\times H^1_*(0,l) \times (H^1_h \cap H^1_g)(0,\infty; H^1_0(0,l)) \cap \Big\{ \kappa_0(\varphi_x + \psi) + \\ &+ \int_0^\infty h(s)(\nu_x + \eta)(s)\, ds \in H^1(0,l);\ b_0\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)\, ds \in H^2_*(0,l) \Big\}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Definimos a energia associada ao sistema

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^l \Big[\rho_1|\varphi_t|^2 \; + \rho_2|\psi_t|^2 + \kappa_0|\varphi_x+\psi|^2 + b_0|\psi_x|^2 + \\ + \int_0^\infty h(s)|\nu_x+\eta|^2\, ds + \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2\, ds\Big]\, dx. \tag{4.15}$$

Mostraremos que $\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato,

$$< \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{V}} = \kappa_0\int_0^l (\varphi_x+\psi)_x\overline{\Phi}\, dx + \int_0^l\int_0^\infty h(s)(\nu_x+\eta)_x(x,\, s)\, ds\,\overline{\Phi}\, dx + \\ +b_0\int_0^l \psi_{xx}\overline{\Psi}\, dx - \kappa_0\int_0^l(\varphi_x+\psi)\overline{\Psi}\, dx + \int_0^l\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(x,\, s)\, ds\,\overline{\Psi}\, dx - \\ -\int_0^l\int_0^\infty h(s)(\nu_x+\eta)(x,\, s)\, ds\,\overline{\Psi}\, dx + \kappa_0\int_0^l (\Phi_x+\Psi)\overline{(\varphi_x+\psi)}\, dx + b_0\int_0^l \Psi_x\overline{\psi_x}\, dx + \\ +\int_0^l\int_0^\infty h(s)(\Phi_x-\nu_{sx}+\Psi-\eta_s)\overline{(\nu_x+\eta)}\, ds\, dx + \int_0^l\int_0^\infty g(s)(\Psi_x-\eta_{sx})\overline{\eta_x}\, ds\, dx.$$

Usando as condições de contorno (4.12) e tomando a parte real de $< \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{V}}$, temos que

$$\text{Re } < \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{V}} = -\int_0^\infty h(s)\int_0^l (\nu_x+\eta)_s\overline{(\nu_x+\eta)}\, dx\, ds - \int_0^\infty g(s)\int_0^l \eta_{sx}\overline{\eta_x}\, dx\, ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^l \Big[h(s)|\nu_x+\eta|^2\Big|_0^\infty - \int_0^\infty h'(s)|\nu_x+\eta|^2\, ds\Big]\, dx - \frac{1}{2}\int_0^l \Big[g(s)|\eta_x|^2\Big|_0^\infty - \int_0^\infty g'(s)|\eta_x|^2\, ds\Big]\, dx.$$

Temos que

$$\text{Re } < \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty h'(s)\int_0^l |\nu_x+\eta|^2\, dx\, ds \; + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\int_0^l |\eta_x|^2\, dx\, ds \le 0. \tag{4.16}$$

Assim $\mathcal{A}$ é dissipativo.
Finalmente $0 \in \rho(\mathcal{A})$. De fato, a equação resolvente $\lambda U - \mathcal{A}U = F$, com $\lambda = 0$ será

$$-\Phi = f^1 \in H_0^1(0, l); \tag{4.17}$$

$$-\kappa_0(\varphi_x+\psi)_x - \int_0^\infty h(s)(\nu_x+\eta)_x(s)\, ds = \rho_1 f^2 \in L^2(0, l); \tag{4.18}$$

$$-\Phi + \nu_s = f^3 \in L_h^2(0, \infty; H_0^1(0, l)); \tag{4.19}$$

$$-\Psi = f^4 \in H_*^1(0, l); \tag{4.20}$$

$$-b_0\psi_{xx} + \kappa_0(\varphi_x+\psi) - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds + \int_0^\infty h(s)(\nu_x+\eta)(s)ds = \rho_2 f^5 \in L_*^2(0, l); \tag{4.21}$$

$$-\Psi + \eta_s = f^6 \in (L_h^2 \cap L_g^2)(0, \infty; H_0^1(0, l)). \tag{4.22}$$

De (4.17) e (4.20) segue, respectivamente, que $\Phi \in H_0^1(0,l)$ e $\Psi \in H_*^1(0,l)$. Assim, de (4.19), temos $\nu_s \in L_h^2(0,\infty; H_0^1(0,l))$ e daí $\nu \in H_h^1(0,\infty; H_0^1(0,l))$. Analogamente, de (4.22), temos $\eta_s \in (L_h^2 \cap L_g^2)(0,\infty; H_0^1(0,l))$ e daí $\eta \in (H_h^1 \cap H_g^1)(0,\infty; H_0^1(0,l))$.

Por (4.18) temos $\kappa_0(\varphi_x+\psi)+\int_0^\infty h(s)(\nu_x+\eta)(s)\, ds \in H^1(0,l)$ e daí $b_0\psi+\int_0^\infty g(s)\eta(s)\, ds \in H_*^2(0,l)$.

Portanto, pela definição do $D(\mathcal{A})$ dado em (4.14), segue que $U \in D(\mathcal{A})$ e assim $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Pelo Teorema 1.1.5, segue que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $S(t)$.

Segue do exposto acima, o resultado

Teorema 4.2.1. *Suponha mecanismos dissipativos (memória)*

$$h(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i e^{-\gamma_i t} \ \ e \ \ g(t) = \sum_{j=1}^{2} \nu_j e^{-\delta_j t},$$

onde μ_i, ν_j, γ_i, $\delta_j > 0$ *e que* $U_0 \in D(\mathcal{A})$, *então existe uma solução do sistema* (4.7) - (4.10) *com condições iniciais* (4.11) *e de contorno* (4.12) *satisfazendo*

$$U \in C(\mathbb{R}^+; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{Z}).$$

Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A}^n)$, *então*

$$U \in C^{n-k}(\mathbb{R}^+; D(\mathcal{A}^k)), \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

4.3 Caso de uma memória na cortante.

Seja o sistema de Timoshenko com memória na cortante na forma geral

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - S_x &= 0, \text{ em } (0,l) \times (0,t), \\ \rho_2\psi_{tt} - M_x + S &= 0, \text{ em } (0,l) \times (0,t), \end{aligned}$$

onde

$$S = \kappa(\varphi_x + \psi) - \int_{-\infty}^{t} h(t-s)(\varphi_x+\psi)(x,\, s)ds$$

e

$$M = b\psi_x,$$

ou seja, o modelo fica na forma

$$\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x+\psi)_x + \int_{-\infty}^{t} h(t-s)(\varphi_x+\psi)_x(s)ds = 0, \text{ em } (0,l) \times (0,t), \tag{4.23}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x+\psi) - \int_{-\infty}^{t} h(t-s)(\varphi_x+\psi)(s)ds = 0, \text{ em } (0,l) \times (0,t). \tag{4.24}$$

As condições iniciais são dadas por

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \ \psi(x,0) = \psi_0(x), \ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \tag{4.25}$$

e as condições de contorno que usaremos são Dirichlet - Neumann dadas por

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = 0. \tag{4.26}$$

As condições de história sobre φ e ψ são definidas como

$$\varphi(x,t) = \varphi_h(x,t), \ \psi(x,t) = \psi_h(x,t), \quad t < 0. \tag{4.27}$$

Nesta seção, vamos considerar a função de relaxamento

$$h(t) = \mu e^{-\gamma t}, \tag{4.28}$$

onde μ, $\gamma > 0$. Fazendo $U = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \end{pmatrix}$, obtemos

$$U_t = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \varphi_{tt} \\ \psi_t \\ \psi_{tt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \psi_t \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \end{pmatrix}}_{:=\mathcal{A}_0 U} - \underbrace{h * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ 0 \\ \frac{1}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \end{pmatrix}}_{:=h*\mathcal{A}_1 U},$$

onde $h * f$ denota a convolução do tipo $\int_{-\infty}^{t} h(t-s)f(s)ds$.

Assim temos

$$U_t = \mathcal{A}_0 U - h * \mathcal{A}_1 U.$$

Derivando temos

$$U_{tt} = \mathcal{A}_0 U_t - h' * \mathcal{A}_1 U = \mathcal{A}_0 U_t + \gamma h * \mathcal{A}_1 U.$$

Logo temos

$$U_{tt} = \mathcal{A}_0 U_t - \gamma U_t + \gamma \mathcal{A}_0 U.$$

Consideraremos $B = -\gamma U_t + \gamma \mathcal{A}_0 U$.

Teorema 4.3.1. *O sistema* $(4.23) - (4.24)$ *verifica a propriedade da estabilidade linear.*

Prova- Neste caso consideraremos o gerador infinitesimal do sistema de Timoshenko,

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \tag{4.29}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \tag{4.30}$$

isto é,

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x^2 & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\kappa}{\rho_2}I & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \end{pmatrix}.$$

Note que $\mathcal{A}_0$ é um operador normal. Assim o problema $(4.29) - (4.30)$ pode ser reescrito como

$$U_t - \mathcal{A}_0 U = 0.$$

Portanto o modelo associado ao problema de Cauchy $(4.23) - (4.24)$ é definida por

$$\mathcal{U}_t - \mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{F},$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_t \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{U} = \begin{pmatrix} U \\ U_t \\ U_{tt} \end{pmatrix}.$$

Como $\mathcal{A}_0$ é normal, do Teorema 3.4.3 segue que $\mathcal{A}$ é um operador normal que verifica as condições (a) e (b).

A continuidade de B_t é feita através de desigualdades de derivadas. Usando o Teorema de Renardy, segue o resultado.

4.4 Caso de uma memória no momento flector.

Seja o sistema de Timoshenko com memória no momento flector na forma geral

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - S_x &= 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), \\ \rho_2\psi_{tt} - M_x + S &= 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), \end{aligned}$$

onde

$$S = \kappa(\varphi_x + \psi)$$

e

$$M = b\psi_x - \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\psi_x(x,\, s)ds,$$

ou seja, o modelo fica na forma

$$\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x+\psi)_x = 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), \tag{4.31}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\psi_{xx}(s)ds + \kappa(\varphi_x+\psi) = 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t). \tag{4.32}$$

As condições iniciais são dadas por

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x),\; \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\; \psi(x,0) = \psi_0(x),\; \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \tag{4.33}$$

e as condições de contorno que usaremos são Dirichlet - Neumann dadas por

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = 0. \tag{4.34}$$

As condições de história sobre φ e ψ são definidas como

$$\varphi(x,t) = \varphi_h(x,t),\; \psi(x,t) = \psi_h(x,t), \quad t < 0. \tag{4.35}$$

Nesta seção, vamos considerar a função de relaxamento

$$g(t) = \nu e^{-\delta t}, \tag{4.36}$$

onde ν, $\delta > 0$. Fazendo $U = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \end{pmatrix}$, obtemos

$$U_t = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \varphi_{tt} \\ \psi_t \\ \psi_{tt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \psi_t \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \end{pmatrix}}_{:=\mathcal{A}_0 U} - \underbrace{g * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho_2}\psi_{xx} \end{pmatrix}}_{:=g*\mathcal{A}_2 U},$$

onde $g * f$ denota a convolução do tipo $\int_{-\infty}^{t} g(t-s)f(s)ds$.

Assim temos

$$U_t = \mathcal{A}_0 U - g * \mathcal{A}_2 U.$$

Derivando temos

$$U_{tt} = \mathcal{A}_0 U_t - g' * \mathcal{A}_2 U = \mathcal{A}_0 U_t + \delta g * \mathcal{A}_2 U.$$

Logo temos

$$U_{tt} = \mathcal{A}_0 U_t - \delta U_t + \delta \mathcal{A}_0 U.$$

Consideraremos $C = -\delta U_t + \delta \mathcal{A}_0 U$.

Teorema 4.4.1. *O sistema* (4.31) – (4.32) *verifica a propriedade da estabilidade linear.*

Prova- Neste caso consideraremos o gerador infinitesimal do sistema de Timoshenko,

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \tag{4.37}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \tag{4.38}$$

isto é,

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x^2 & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\kappa}{\rho_2} I & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \end{pmatrix}.$$

Note que $\mathcal{A}_0$ é um operador normal. Assim o problema (4.37) – (4.38) pode ser reescrito como

$$U_t - \mathcal{A}_0 U = 0.$$

Portanto o modelo associado ao problema de Cauchy (4.31) – (4.32) é definida por

$$\mathcal{U}_t - \mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{G},$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_t \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{U} = \begin{pmatrix} U \\ U_t \\ U_{tt} \end{pmatrix}.$$

Como $\mathcal{A}_0$ é normal, do Teorema 3.4.3 segue que $\mathcal{A}$ é um operador normal que verifica as condições (a) e (b).

A continuidade de C_t é feita através de desigualdades de derivadas. Usando o Teorema de Renardy, segue o resultado.

4.5 Caso de duas memórias.

Seja o sistema de Timoshenko com duas histórias na forma geral

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - S_x &= 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), && (4.39)\\ \rho_2\psi_{tt} - M_x + S &= 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), && (4.40)\end{aligned}$$

onde

$$S = \kappa(\varphi_x+\psi) - \int_{-\infty}^{t} h(t-s)(\varphi_x+\psi)(x,\, s)ds$$

e

$$M = b\psi_x - \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\psi_x(x,\, s)ds,$$

ou seja, o modelo fica na forma

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x+\psi)_x + \int_{-\infty}^{t} h(t-s)(\varphi_x+\psi)_x(s)ds &= 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t), && (4.41)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\psi_{xx}(s)ds + \kappa(\varphi_x+\psi) &- \\ - \int_{-\infty}^{t} h(t-s)(\varphi_x+\psi)(s)ds &= 0, \text{ em } (0,l)\times(0,t). && (4.42)\end{aligned}$$

As condições iniciais são dadas por

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x),\ \psi(x,0)=\psi_0(x),\ \psi_t(x,0)=\psi_1(x), \tag{4.43}$$

e as condições de contorno que usaremos são Dirichlet - Neumann dadas por

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = 0. \tag{4.44}$$

As condições de história sobre φ e ψ são definidas como

$$\varphi(x,t)=\varphi_h(x,t),\ \psi(x,t)=\psi_h(x,t), \quad t<0. \tag{4.45}$$

Neste trabalho, vamos considerar os mecanismos dissipativos

$$h(t)=\mu e^{-\gamma t} \text{ e } g(t)=\nu e^{-\delta t}, \tag{4.46}$$

onde μ, ν, γ, $\delta > 0$.

Fazendo $U = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \end{pmatrix}$, obtemos

$$U_t = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \varphi_{tt} \\ \psi_t \\ \psi_{tt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \psi_t \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \end{pmatrix}}_{:=\mathcal{A}_0 U} \underbrace{- h * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ 0 \\ \frac{1}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \end{pmatrix}}_{:=h*\mathcal{A}_1 U} \underbrace{- g * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho_2}\psi_{xx} \end{pmatrix}}_{:=g*\mathcal{A}_2 U},$$

onde $h * f$ e $g * f$ denotam as convoluções do tipo $\int_{-\infty}^{t} h(t-s)f(s)ds$ e $\int_{-\infty}^{t} g(t-s)f(s)ds$, respectivamente.

Assim temos

$$U_t = \mathcal{A}_0 U - h * \mathcal{A}_1 U - g * \mathcal{A}_2 U. \tag{4.47}$$

Derivando temos

$$U_{tt} = \mathcal{A}_0 U_t - h' * \mathcal{A}_1 U - g' * \mathcal{A}_2 U = \mathcal{A}_0 U_t + \gamma h * \mathcal{A}_1 U + \delta g * \mathcal{A}_2 U.$$

Definamos os operador diferencial $\mathcal{L} : H \to H$, onde H é um espaço de Hilbert, dados por

$$\mathcal{L}(f) = f'' + (\gamma + \delta) f' + \gamma\delta f.$$

Claramente temos que

$$\mathcal{L}(h(t)) = 0 \text{ e } \mathcal{L}(g(t)) = 0.$$

Aplicando o operador $\mathcal{L}$ na equação (4.47), temos

$$\mathcal{L}(U_t) = \mathcal{A}_0 \mathcal{L}(U) - \mathcal{L}(h) * \mathcal{A}_1 U - \mathcal{L}(g) * \mathcal{A}_2 U.$$

Assim

$$U_{ttt} + (\gamma + \delta) U_{tt} + \gamma\delta U_t = \mathcal{A}_0 U_{tt} + (\gamma + \delta)\mathcal{A}_0 U_t + \gamma\delta \mathcal{A}_0 U.$$

Ou seja,

$$U_{ttt} = \mathcal{A}_0 U_{tt} - (\gamma + \delta) U_{tt} - \gamma\delta U_t + (\gamma + \delta)\mathcal{A}_0 U_t + \gamma\delta \mathcal{A}_0 U.$$

Consideraremos $D = -(\gamma + \delta) U_{tt} - \gamma\delta U_t + (\gamma + \delta)\mathcal{A}_0 U_t + \gamma\delta \mathcal{A}_0 U$.

Teorema 4.5.1. *O sistema* (4.41) – (4.42) *verifica a propriedade da estabilidade linear.*

Prova- Neste caso consideraremos o gerador infinitesimal do sistema de Timoshenko,

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \tag{4.48}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \tag{4.49}$$

isto é,

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x^2 & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\kappa}{\rho_2} I & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \end{pmatrix}.$$

Note que $\mathcal{A}_0$ é um operador normal. Assim o problema $(4.48) - (4.49)$ pode ser reescrito como

$$U_t - \mathcal{A}_0 U = 0.$$

Portanto o modelo associado ao problema de Cauchy $(4.41) - (4.42)$ é definida por

$$\mathcal{U}_t - \mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{J},$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{U} = \begin{pmatrix} U \\ U_t \\ U_{tt} \end{pmatrix}.$$

Como $\mathcal{A}_0$ é normal, do Teorema 3.4.3 segue que $\mathcal{A}$ é um operador normal que verifica as condições (a) e (b).

A continuidade de D é feita através de desigualdades de derivadas. Usando o Teorema de Renardy, segue o resultado.

4.6 Conclusões

Como visto neste capítulo, usando o método de nova derivação, conseguimos através do Teorema de Renardy, provar que vale PEL, onde a memória na cortante ou no momento flector é do tipo exponencial. Além disso, se tivermos uma memória somente, o método é o mesmo, pois o operador A_0 não se altera. Para o caso do tipo sendo soma de n exponenciais o processo é semelhante, o que muda seria basicamente a ordem do sistema, neste caso seria de ordem $n+1$. Com isso o operador $\mathcal{L}$ também seria de uma ordem superior para anular a função g e h. O valor do tipo de semigrupo é mais difícil de ser calculado.

Capítulo 5

Conclusão Final

O método de nova derivação, juntamente com o Teorema de Renardy, se mostrou bastando eficiente para provar que vale PEL onde a memória é dada do tipo soma de exponenciais. Gostaríamos de ampliar as funções para combinação de polinômios, produto de polinômio com exponenciais e assim por diante.

Um interesse também poderia ser o enfraquecimento das hipóteses do Teorema de Renardy e com isso fazer um método similar para este caso.

Mesmo com a PEL, encontrar o tipo do semigrupo ainda é difícil, pois os polinômios não são de resolução simples e um método computacional pode não aproximar tão bem como queremos a cota espectral.

Referências Bibliográficas

[1] *B. A. H. Abbas e J. Thomas*, **The second frequency spectrum of Timoshenko beams**, *Journal of Sound and Vibration 51, 123-137*(1977).

[2] *F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. M. Rivera e R. Racke*, **Energy decay for Timoshenko systems of memory type**, *Journal of Diferential Equations 194, 82-115*(2003).

[3] *G. R. Cowper*, **The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory**, *Journal of Applied Mechanics 33, 335-340*(1966).

[4] *R. W. Clough e J. Penzien*, **Dinamics of Structures**, *McGraw-Hill*(1975).

[5] *C. M. Dafermos*, **On abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity**, *Differential and Integral Equations Vol. 7(1), 554-569*, (1970).

[6] *C. M. Dafermos*, **Asymptotic Stability in Viscoelasticity**, *Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 37(1), 297-308*, (1970).

[7] *M. Fabrizio e A. Morro*, **Mathematical problems in linear viscoelasticity**, *SIAM - Studies in Applied Mathematics Vol. 12*, Philadelphia, (1992).

[8] *S. M. Han, H. Benaroya e T. Wei*, **Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories**, *Journal of Sound and Vibration Vol. 225(5), 935-988*, Piscataway, (1999).

[9] *J. E. Lagnese e J. L. Lions*, **Modelling Analysis and Control of Thin Plates**, *Collection RMA*, Masson, Paris, (1998).

[10] *K. Liu e Z. Liu*, **On the type of C_0-semigroups associated with the abstract linear viscoelastic system**, *Z. Angew. Math. Phys. Vol. 47(1), 1 - 15*(1996).

[11] *A. E. H. Love*, **A treatise on the mathematical theory of Elasticity**, *Dover Publications, INC.*, New York, (1927).

[12] *C. G. T. de A. Moreira*, **Uma solução das equações do 3º e do 4º graus**, *Revista do Professor de Matemática 25, 23 - 28*(1994).

[13] *T. Myint-U e L. Debnath*, **Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers**, *Birkhäuser*, Boston-Basel-Berlin, (2007).

[14] *A. Pazy*, **Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations**, *Springer-Verlag*, New York, (1983).

[15] *C. A. Raposo C.*, **Problema de Transmissão para o sistema de Timoshenko com Memória**, *Tese(Doutorado em Matemática), Instituto de Matemática*, UFRJ, (2001).

[16] *M. Renardy*, **On the type of certain C_0-semigroups**, *Commun. in Partial Differential Equations 18(7 e 8), 1299 - 1307*(1993).

[17] *M. Renardy*, **On the linear stability of hyperbolic PDEs and viscoelastic flows**, *Zangew Math Phys 45, 854 - 865*(1994).

[18] *J. Prüss*, **On the Spectrum of C_0-Semigroups**, *Transaction of the American Mathematical Society, 284(2), 847-857*, (1984).

[19] *H. Reismann e P. S. Pawlik*, **Elasticity - Theory and Applications**, *John Wiley & Sons*, (1980).

[20] *J. E. M. Rivera*, **Estabilização de Semigrupos e Aplicações**, *Série de Métodos Matemáticos*, Rio de Janeiro (2008).

[21] *J. E. M. Rivera*, **Introdução as Equações Diferenciais Parciais**, *Textos de Graduação*, Petrópolis (2004).

[22] *H. D. F. Sare*, **Propriedades assintóticas e problemas inversos para sistemas de Timoshenko**, *Tese(Doutorado em Matemática), Instituto de Matemática*, UFRJ, (2006).

[23] *J. W. Strutt*, **Theory of Sound**, *Macmillan Publications Co.*, Inc., London, (1877).

[24] *S. P. Timoshenko e S. Woinowsk-Krieger*, **Theory of Plates and Shells**, *McGraw-Hill*, Book Company, New York, (1959).

[25] *S. P. Timoshenko*, **History of Strength of Materials**, *Dover Publications, Inc.*, New York, (1953).

[26] *S. P. Timoshenko*, **On the correction for shear of the diferential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section**, *Philosophical Magazine, vol 43, 744*, (1921).

[27] *S. P. Timoshenko*, **On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section**, *Philosophical Magazine, 125*, (1922).

[28] *J. Zabczyk*, **A note on C_0-semigroups**, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., 23, 895-898*, (1975).