UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Matemática

Rômulo Maia Vermersch

Dinâmica Topológica Coletiva e Probabilística sobre o Espaço de Cantor

Orientador

Nilson da Costa Bernardes Junior

Rio de Janeiro
Abril 2014

Dinâmica Topológica Coletiva e Probabilística sobre o Espaço de Cantor

Rômulo Maia Vermersch

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

Rio de Janeiro

Abril de 2014

Dinâmica Topológica Coletiva e Probabilística sobre o Espaço de Cantor

Rômulo Maia Vermersch

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

Tese apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Aprovada por:

Prof. Nilson da Costa Bernardes Junior - IM/UFRJ
(Presidente)

Prof. Antonio Roberto da Silva - IM/UFRJ

Prof. Dinamérico Pereira Pombo Junior - IM/UFF

Prof. Ali Messaoudi - IBILCE/UNESP

Prof. Vinícius Vieira Fávaro- Faculdade de Matemática/UFU

Rio de Janeiro

Abril 2014

Resumo

A proposta deste trabalho é o estudo do comportamento dinâmico das aplicações contínuas genéricas e dos homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor sob dois pontos de vista distintos. O primeiro é o ponto de vista "coletivo", no qual estuda-se como tais aplicações agem sobre subconjuntos compactos do espaço de Cantor. Já o segundo ponto de vista concentra-se sobre o comportamento dinâmico das aplicações induzidas ao espaço das medidas de Borel probabilísticas do espaço de Cantor. Aqui obtemos alguns resultados que valem não apenas para o espaço de Cantor, mas também para espaços métricos compactos gerais.

Palavras-chave: espaço de Cantor, aplicações contínuas, homeomorfismos, hiperespaço, métrica de Hausdorff, medidas de probabilidade, métrica de Prohorov, dinâmica.

Abstract

The purpose of this work is to study the dynamical behavior of generic continuous maps and generic homeomorphisms of the Cantor space from two distinct points of view. The first is the point of view of "collective" dynamics, in which it is studied how these maps act on compact subsets of the Cantor space. The second perspective focuses on the dynamical behavior of induced maps on the space of all Borel probability measures of the Cantor space. Here we get some results that hold not only for the Cantor space but also for general compact metric spaces.

Key-Words: Cantor space, continuous maps, homeomorphisms, hyperspace, Hausdorff metric, probability measures, Prohorov metric, dynamics.

Agradecimentos

À minha mãe Glaucia, pela dedicação de toda uma vida para a criação e educação dos seus filhos. Uma verdadeira guerreira cuja coragem para concluir este objetivo inspirou-me a lutar desde pequeno.

Ao meu irmão Daniel, por todos esses anos de companhia e fidelidade.

À minha avó Normilia (in memoriam), por me ensinar a ler e a escrever, e sempre me incentivar a aprender cada vez mais. O gosto pelo estudo devo muitíssimo a ela.

À minha querida esposa Emille, por todo o amor, compreensão e apoio nos momentos difíceis. Uma companheira incrível que não é apenas linda, mas também uma mulher forte, determinada e muito inteligente.

Ao meu "paidrinho" Hamilton, por toda a sua força e alegria de viver contagiantes. Seu apoio se mostrou fundamental em muitos momentos desde a minha infância e permanece dessa maneira até hoje.

Aos meus sogros Roberto e Leca, por todo o amor e carinho com que me receberam em seus braços. Minha segunda família, meu segundo lar.

Ao meu grande mentor e amigo, professor Nilson da Costa Bernardes Junior, por sempre se mostrar disposto a compartilhar seus conhecimentos e pontos de vista da maneira mais clara possível. Um primor de exposição que dificilmente é igualado. Será sempre uma honra trabalhar ao seu lado. Guardarei para sempre sua amizade e exemplo pessoal.

Ao professor Dinamérico Pereira Pombo Junior, pelo prazer ao assistir suas aulas e seminários impecavelmente preparados. Suas histórias sobre a matemática e a vida em geral também são indispensáveis para qualquer aluno.

Aos professores do Instituto de Matemática da UFRJ e do Instituto de Matemática da UFF que tiveram participação direta ou indireta na minha formação superior. Tentei aproveitar ao máximo seus conhecimentos ao longo de todos esses anos.

Aos amigos e colegas de todos os anos dessa longa caminhada chamada Vida: Fabio e Sarah, Antonio, Diego (Minhoca), Carlos Vitor, Alex, Raphael Antunes e Michely, Roberto e Fernanda, Marcelo Rainha, André (Supino), Sr. Guilherme, Dr. Paulo, Aleksandro, José Weberszpil, Flavio, Manoel, Gilliard, Welington, Tatiana, Sara, Rodrigo e Juliana, Renan e Diego. Sem sombra de dúvidas, vocês tornaram as coisas mais fáceis!

Aos funcionários da secretaria e da biblioteca da Pós-graduação do IM-UFRJ, que com seu importante trabalho nos dão a tranquilidade necessária ao desenvolvimento de qualquer trabalho científico.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo de dinâmica genérica é um tema clássico na área de sistemas dinâmicos. No contexto da dinâmica topológica, tal estudo tem sido desenvolvido por diversos autores nos últimos quarenta anos. Para a dinâmica genérica de aplicações contínuas do intervalo unitário fechado, veja [4] e [39], por exemplo. Para o caso de aplicações contínuas e homeomorfismos de variedades compactas, indicamos [7, 32, 37, 40], onde outras referências podem ser encontradas. Em [9, 10, 11, 12, 13, 14] foi desenvolvido um estudo de propriedades das aplicações contínuas genéricas e dos homeomorfismos genéricos de variedades topológicas que valem para quase todo ponto com respeito a uma dada medida de Borel probabilística sobre a variedade. Um ponto de vista similar foi considerado em [1]. Finalmente, para a dinâmica genérica de aplicações do espaço de Cantor, veja [6, 15, 23, 24, 26, 28], por exemplo.

Por outro lado, o estudo de dinâmica coletiva também é um tema importante na área de sistemas dinâmicos. Enquanto a ação de um sistema dinâmico sobre pontos do espaço de fase pode ser entendida como dinâmica individual, a ação do sistema sobre subconjuntos do espaço de fase pode ser pensada como dinâmica coletiva, e é natural comparar as dinâmicas individual e coletiva. O contexto mais usual para a dinâmica coletiva é o da aplicação induzida sobre o hiperespaço de todos os subconjuntos compactos e não-vazios munido da métrica de Hausdorff. Outro tema muito interessante é o estudo da dinâmica induzida sobre o espaço das medidas probabilísticas. O estudo sistemático dessas dinâmicas induzidas foi iniciado em [8] e vem sendo desenvolvido por diversos autores, principalmente no caso de hiperespaços (veja [2] e [27], por exemplo).

É natural combinar estes temas e estudar a dinâmica coletiva e a dinâmica probabilística de aplicações genéricas. No presente trabalho desenvolvemos um tal estudo no caso do espaço de Cantor.

Devido à sua importância, a dinâmica das aplicações do espaço de Cantor tem sido extensivamente estudada por diversos autores através de diferentes pontos de vista. No caso da dinâmica genérica de homeomorfismos, um dos resultados mais impressionantes é a existência de uma classe de conjugação residual para o grupo $\mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. Isto nos diz que a dinâmica de um elemento genérico de $\mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ se reduz à dinâmica de um único elemento desta classe. Este resultado foi provado pela primeira vez por Kechris e Rosendal [30] usando técnicas de teoria de modelos, e um elemento específico desta classe foi construído posteriormente por Akin, Glasner e Weiss [6]. Bernardes e Darji [15] obtiveram uma nova demonstração da existência desta classe ao construir uma descrição de estrutura de grafo satisfeita por todos os seus elementos. Com tal descrição obtiveram praticamente todas as propriedades dinâmicas conhecidas até então para os elementos desta classe e muitas outras completamente novas. Além disso, usando suas técnicas de grafos eles provaram um resultado um tanto quanto surpreendente, que garante a existência de um subconjunto residual de $\mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ tal que quaisquer dois dos seus elementos são conjugados por um elemento de $\mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

No capítulo 3, desenvolvemos um estudo detalhado da dinâmica coletiva das aplicações contínuas genéricas e dos homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor. Em alguns aspectos, as dinâmicas individual e coletiva são similares. Por exemplo, para o homeomorfismo genérico h do espaço de Cantor, tanto h quanto a aplicação induzida $\overline{h}$ ao hiperespaço têm a propriedade do sombreamento. Mas, em outros aspectos, as dinâmicas individual e coletiva são muito diferentes. Por exemplo, para o homeomorfismo genérico h do espaço de Cantor, h não tem par Li-Yorke e tem entropia topológica zero, enquanto $\overline{h}$ é uniformemente distribucionalmente caótica e tem entropia topológica infinita.

No capítulo 4, desenvolvemos um estudo detalhado da dinâmica induzida sobre o espaço das medidas probabilísticas pelas aplicações contínuas genéricas e pelos homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor. Aqui, cabe destaque os fortes contrastes entre a dinâmica da aplicação $\overline{h}$ induzida ao hiperespaço e da aplicação $\widetilde{h}$ induzida ao espaço das medidas probabilísticas. Com efeito, para o homeomorfismo genérico h do espaço de Cantor, $\overline{h}$ é uniformemente distribucionalmente caótica, tem entropia topológica infinita, tem a propriedade do sombreamento e é contínua em cadeia em todo ponto de um conjunto aberto denso, enquanto $\widetilde{h}$ não tem par Li-Yorke, tem entropia topológica zero, não tem a propriedade do sombreamento e não é contínua em cadeia em ponto algum.

Ao longo do trabalho fazemos uso dos resultados de estrutura de grafo das aplicações contínuas genéricas e dos homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor obtidos por Bernardes e Darji [15]. Estes belos resultados, que mostraram-se fundamentais para o desenvolvimento do presente trabalho, serão lembrados no capítulo 2.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as construções e resultados de [15] que são pertinentes ao desenvolvimento do presente trabalho. Já as definições e fatos válidos nos contextos de cada capítulo da tese são apresentados à medida que sua utilização se faz necessária. Pensamos que isto torna mais dinâmica a leitura do trabalho. Cabe ressaltar que para todos os fatos que não são contribuições da presente tese, apresentamos seus enunciados e indicamos referências seguras para as respectivas demonstrações.

2.1 Estrutura de Grafo das Aplicações Genéricas do Espaço de Cantor

Recorde que um espaço de Cantor é um espaço zero-dimensional, compacto, metrizável e sem pontos isolados. Um resultado clássico devido a Brouwer [22] garante que qualquer espaço de Cantor é homeomorfo ao conjunto ternário de Cantor. Em particular, quaisquer dois espaços de Cantor são homeomorfos. Isso nos permite usar o artigo definido "o" antes da expressão "espaço de Cantor". Na presente tese trabalharemos com o espaço produto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, onde $\{0,1\}$ é munido com a topologia discreta. Consideramos o espaço de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ munido com a métrica compatível d dada por $d(\sigma,\sigma) := 0$ e $d(\sigma,\tau) := \frac{1}{n}$ onde n é o menor inteiro positivo tal que $\sigma(n) \neq \tau(n)$ ($\sigma, \tau \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\sigma \neq \tau$).

Dado um espaço de Baire Z, dizer que "o elemento genérico de Z tem uma certa propriedade P" significa que o conjunto de todos os elementos de Z que satisfazem a propriedade P é residual em Z, isto é, o seu complementar é um conjunto de primeira categoria em Z. A palavra "típico" às vezes é usada no lugar da palavra "genérico".

Dado um espaço métrico compacto M com métrica d, denotamos por $\mathcal{C}(M)$ (resp. $\mathcal{H}(M)$) o espaço de todas as aplicações contínuas de M em M (resp. de todos os homeomorfismos de M sobre M) munido da *métrica uniforme*

$$\tilde{d}(f,g) := \max_{x\in M} d(f(x), g(x)).$$

Definição 2.1. *Uma partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é uma coleção finita de subconjuntos abertos e fechados ("clopen"), não-vazios e dois a dois disjuntos cuja união é $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. A norma de uma partição $\mathcal{P}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é definida por*

$$\|\mathcal{P}\| := \max_{a\in\mathcal{P}} \operatorname{diam}(a).$$

Para cada $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ e cada partição $\mathcal{P}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, consideramos o grafo dirigido $\mathrm{Gr}(f,\mathcal{P})$ cujo conjunto de vértices é $\mathcal{P}$ e cujo conjunto de arestas é

$$\{\overrightarrow{ab} : a, b \in \mathcal{P} \text{ e } f(a) \cap b \neq \emptyset\}.$$

Uma *componente* de um grafo dirigido G é um subgrafo maximal (em vértices e arestas) H de G tal que dados quaisquer dois vértices a, b em H, existem vértices $a_1, \ldots, a_n$ em H tais que $a_1 = a$, $a_n = b$ e, para cada $1 \leq i < n$, $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ ou $\overrightarrow{a_{i+1} a_i}$ é uma aresta de H.

Definição 2.2. *Um grafo dirigido ℓ é dito um loop de comprimento n se o conjunto de vértices de ℓ é um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ com n elementos e o conjunto de arestas de ℓ é $\overrightarrow{v_n v_1}$ e $\overrightarrow{v_i v_{i+1}}$ para $1 \leq i < n$.*

Definição 2.3. *Um grafo dirigido B é dito um balão de tipo (s,t) se o conjunto de vértices de B é a união de dois conjuntos disjuntos $p = \{v_1, \ldots, v_s\}$ e $\ell = \{w_1, \ldots, w_t\}$, e as arestas de B são*

- *as arestas do caminho p, i.e., $\overrightarrow{v_i v_{i+1}}$ para $1 \leq i < s$,*

- *as arestas do loop formado por ℓ, e*

- $\overrightarrow{v_s w_1}$.

Dizemos que v_1 é o *vértice inicial* de B. Exceto quando indicado em contrário, sempre que escrevermos um balão B simplesmente por

$$B = \{v_1, \ldots, v_s\} \cup \{w_1, \ldots, w_t\},$$

estaremos admitindo tacitamente que tal balão é o descrito acima.

Definição 2.4. *Um grafo dirigido D é dito um haltere de tipo (r, s, t) se o conjunto de vértices de D é a união de três conjuntos disjuntos $\ell_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$, $p = \{v_1, \ldots, v_s\}$ e $\ell_2 = \{w_1, \ldots, w_t\}$, e as arestas de D são*

- *as arestas dos loops formados por ℓ_1 e ℓ_2,*

- *as arestas do caminho p, e*

- $\overrightarrow{u_1 v_1}$, $\overrightarrow{v_s w_1}$.

Dizemos que s é o *comprimento da barra do haltere*. Se $r = t$ então dizemos que o haltere é *equilibrado com peso lateral* r. Exceto quando indicado em contrário, sempre que escrevermos um haltere D simplesmente por

$$D = \{u_1, \ldots, u_r\} \cup \{v_1, \ldots, v_s\} \cup \{w_1, \ldots, w_t\},$$

estaremos admitindo tacitamente que tal haltere é o descrito acima.

Definição 2.5. *Suponha $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\mathcal{P}$ partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e B uma componente de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P})$ que é um balão. Escreva*

$$B = \{v_1, \ldots, v_s\} \cup \{w_1, \ldots, w_t\},$$

com a notação usual.

Dizemos que o balão B é estrito relativo a f se $f(v_i) \subsetneq v_{i+1}$ para cada $1 \leq i < s$, $f(w_j) \subsetneq w_{j+1}$ para cada $1 \leq j < t$, e $f(v_s) \cup f(w_t) \subsetneq w_1$.

Definição 2.6. *Suponha* $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\mathcal{P}$ *partição de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *e* D *uma componente de* $\mathrm{Gr}(h,\mathcal{P})$ *que é um haltere. Escreva*

$$D = \{u_1, \dots, u_r\} \cup \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_t\},$$

com a notação usual.

Dizemos que o haltere D *contém um loop à esquerda de* h *(resp. um loop à direita de* h*) se existe um subconjunto aberto e fechado* a *de* u_1 *(resp. de* w_1*) tal que* $h^r(a) = a$ *(resp.* $h^t(a) = a$*).*

Agora estamos em condições de enunciar os resultados de [15] mencionados anteriormente:

Teorema A (Bernardes-Darji, Teorema 5.1). *A aplicação genérica* $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ *tem a seguinte propriedade:*

(Q) *Para cada* $m \in \mathbb{N}$, *existem uma partição* $\mathcal{P}$ *de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *com* $\|\mathcal{P}\| < 1/m$ *e um múltiplo* $q \in \mathbb{N}$ *de* m *tal que toda componente de* $\mathrm{Gr}(f,\mathcal{P})$ *é um balão de tipo* $(q!, q!)$ *que é estrito relativo a* f.

Teorema B (Bernardes-Darji, Teorema 4.1). *A aplicação genérica* $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ *tem a seguinte propriedade:*

(P) *Para cada* $m \in \mathbb{N}$, *existem um partição* $\mathcal{P}$ *de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *com* $\|\mathcal{P}\| < 1/m$ *e um múltiplo* $q \in \mathbb{N}$ *de* m *tal que toda componente de* $\mathrm{Gr}(h,\mathcal{P})$ *é um haltere equilibrado com peso lateral* $q!$ *que contém tanto um loop à esquerda quanto um loop à direita de* h.

Além disso, também foi provado em [15] que quaisquer duas aplicações $f, g \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ (resp. $f, g \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$) com a propriedade (Q) (resp. propriedade (P)) são topologicamente conjugadas, isto é, $f = h^{-1}gh$ para algum $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

Capítulo 3

Dinâmica Topológica Coletiva das Aplicações Genéricas do Espaço de Cantor

Neste capítulo desenvolveremos o estudo da dinâmica coletiva das aplicações contínuas genéricas e dos homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor, com ênfase sobre as noções de caos Li-Yorke, caos distribucional, caos topológico (isto é, entropia topológica positiva), continuidade em cadeia, sombreamento e recorrência.

3.1 Hiperespaços e a Métrica de Hausdorff

Seja (X, τ) um espaço topológico de Hausdorff. Considere $\mathcal{K}(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos compactos e não-vazios de X.

Definição 3.1. *A topologia de Vietoris sobre $\mathcal{K}(X)$ é a menor topologia τ_V para a qual valem as seguintes condições:*

1) $\{A \in \mathcal{K}(X) : A \subset U\} \in \tau_V$ *sempre que* $U \in \tau$ *;*

2) $\{A \in \mathcal{K}(X) : A \subset B\}$ *é* τ_V*-fechado sempre que* B *é* τ*-fechado.*

Para $S_1, S_2, ..., S_n \subset X$ $(n \geq 1)$, considere a notação

$< S_1, S_2, \ldots, S_n >= \{A \in \mathcal{K}(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i \text{ } e \text{ } A \cap S_i \neq \emptyset \text{ } para \text{ } cada \text{ } i \text{ }\}.$

Proposição 3.1. *Seja (X, τ) um espaço topológico de Hausdorff e defina*

$$\mathcal{B}_V := \{< U_1, U_2, \ldots, U_n >: n \in \mathbb{N} \text{ } e \text{ } U_1, U_2, \ldots, U_n \in \tau\}.$$

Então, $\mathcal{B}_V$ é uma base para τ_V.

Demonstração. Veja [29, Teorema 1.2]. □

Definição 3.2. *Seja (M, d) um espaço métrico limitado. A métrica de Hausdorff sobre $\mathcal{K}(M)$ é definida por*

$$d_H(A, B) := \max\left\{\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)\right\} \quad (A, B \in \mathcal{K}(M)).$$

Proposição 3.2. *Se (M, d) é um espaço métrico limitado, então d_H é uma métrica sobre $\mathcal{K}(M)$.*

Demonstração. Veja [29, Teorema 2.2]. □

Proposição 3.3. *Se (M, d) é um espaço métrico compacto, então a métrica de Hausdorff d_H sobre $\mathcal{K}(M)$ induz a topologia de Vietoris.*

Demonstração. Veja [34, Proposição 3.5]. □

Vale o seguinte resultado fundamental:

Teorema 3.1. *Se (M, d) é um espaço métrico limitado, então (M, d) é compacto se e somente se $(\mathcal{K}(M), d_H)$ é compacto.*

Demonstração. Veja [31, Teorema 1 e Teorema 2]. □

Dada uma partição $\mathcal{P}$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, definimos

$$\delta(\mathcal{P}) := \min\{d(a, b) : a, b \in \mathcal{P}, a \neq b\}$$

e

$$I_{\mathcal{P}}(X) := \{a \in \mathcal{P} : a \cap X \neq \emptyset\} \quad (X \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}).$$

Note que $\delta(\mathcal{P}) > 0$. Os próximos dois resultados nos dão uma maneira de interpretar a noção de distância de Hausdorff em função dos vértices dos grafos associados a uma partição arbitrária.

Lema 3.1. *Dados $X, Y \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, tem-se*

$$d_H(X,Y) < \delta(\mathcal{P}) \implies I_{\mathcal{P}}(X) = I_{\mathcal{P}}(Y).$$

Demonstração. Suponha $a \in I_{\mathcal{P}}(X)$ tal que $a \notin I_{\mathcal{P}}(Y)$. Daí, pelas definições de $I_{\mathcal{P}}(X)$ e $\delta(\mathcal{P})$, existe $\sigma \in X$ tal que $d(\sigma, Y) \geq \delta(\mathcal{P})$. Logo, $d_H(X,Y) \geq \delta(\mathcal{P})$. □

Lema 3.2. *Dados $X, Y \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, tem-se*

$$I_{\mathcal{P}}(X) = I_{\mathcal{P}}(Y) \implies d_H(X,Y) \leq \|\mathcal{P}\|.$$

Demonstração. Suponha $d_H(X,Y) > \|\mathcal{P}\|$. Daí, podemos supor que existe $\sigma \in X$ tal que $d(\sigma, Y) > \|\mathcal{P}\|$. Logo, para $a \in I_{\mathcal{P}}(X)$ tal que $\sigma \in a$ tem-se $a \notin I_{\mathcal{P}}(Y)$. Isto mostra que $I_{\mathcal{P}}(X) \neq I_{\mathcal{P}}(Y)$. □

3.2 A Aplicação Induzida ao Hiperespaço

Definição 3.3. *Seja (M,d) um espaço métrico. Dada $f \in \mathcal{C}(M)$, a aplicação induzida $\overline{f} : \mathcal{K}(M) \to \mathcal{K}(M)$ é definida por*

$$\overline{f}(X) := f(X) \ (= \{f(x) : x \in X\}).$$

Proposição 3.4. *Seja (M,d) um espaço métrico. Dada $f \in \mathcal{C}(M)$, temos $\overline{f} \in \mathcal{C}(\mathcal{K}(M))$. Além disso, se $f \in \mathcal{H}(M)$, então $\overline{f} \in \mathcal{H}(\mathcal{K}(M))$.*

Demonstração. Veja [29, Teorema 1.3]. □

3.3 Dinâmica Coletiva das Aplicações Genéricas

Vejamos agora o estudo da dinâmica das aplicações induzidas ao hiperespaço por aplicações contínuas genéricas e homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor. Comecemos estudando o conceito de caos Li-Yorke, o qual foi introduzido por Li e Yorke em [33].

Definição 3.4. *Se $f : M \to M$ é uma aplicação contínua de um espaço métrico (M, d), um par $(x, y) \in M \times M$ é dito um par Li-Yorke para f se*

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

Um conjunto misturado para f é um subconjunto S de M tal que (x, y) é um par Li-Yorke para f sempre que x e y são pontos distintos em S.

A aplicação f é dita Li-Yorke caótica se existe um conjunto misturado para f que é não-enumerável.

Foi provado em [15] que a aplicação genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ não admite par Li-Yorke (em particular, f não é Li-Yorke caótica). Estenderemos este resultado provando que a mesma propriedade é válida para a aplicação induzida $\overline{f}$.

Teorema 3.2. *Para $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ genérica, $\overline{f}$ não admite par Li-Yorke.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfazendo a propriedade (Q) do Teorema A. Suponha que $X, Y \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfazem

$$\liminf_{n\to\infty} d_H\big(\overline{f}^{\,n}(X), \overline{f}^{\,n}(Y)\big) = 0. \tag{3.3.1}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$ tal que toda componente de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P})$ é um balão. Além disso, por (3.3.1), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_H\big(f^{n_0}(X), f^{n_0}(Y)\big) < \delta(\mathcal{P}).$$

Pelo Lema 3.1, $I_{\mathcal{P}}(f^{n_0}(X)) = I_{\mathcal{P}}(f^{n_0}(Y))$. Como cada componente B de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P})$ é um balão, f leva cada vértice de B dentro de um vértice de B, e assim $I_{\mathcal{P}}(f^n(X)) =$

$I_{\mathcal{P}}(f^n(Y))$ para cada $n \geq n_0$. Consequentemente, pelo Lema 3.2,

$$d_H\big(f^n(X), f^n(Y)\big) < \epsilon \quad \text{para cada } n \geq n_0.$$

Isto prova que

$$\lim_{n\to\infty} d_H\big(\overline{f}^n(X), \overline{f}^n(Y)\big) = 0,$$

e assim (X, Y) não é um par Li-Yorke para $\overline{f}$. □

Foi provado em [15] que o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ não admite par Li-Yorke (em particular, h não é Li-Yorke caótico). Em grande contraste com este fato e com o teorema anterior, veremos que para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, a aplicação induzida $\overline{h}$ é Li-Yorke caótica. De fato, veremos que $\overline{h}$ é mais do que isso; $\overline{h}$ é uniformemente distribucionalmente caótica.

Recordemos a definição de caos distribucional uniforme.

Definição 3.5. *Dado $A \subset \mathbb{N}$, a densidade superior de A é definida por*

$$\overline{\text{dens}}(A) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\text{card}([1,n] \cap A)}{n}\cdot$$

Se $f : M \to M$ é uma aplicação contínua de um espaço métrico M, um par $(x,y) \in M \times M$ é dito distribucionalmente ε-caótico para f ($\varepsilon > 0$) se

$$\overline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon\} = 1$$

e

$$\overline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \delta\} = 1,$$

para todo $\delta > 0$. Um conjunto distribucionalmente ε-misturado para f é um subconjunto S de M tal que (x,y) é um par distribucionalmente ε-caótico para f sempre que x e y são pontos distintos em S. A aplicação f é dita uniformemente distribucionalmente caótica se existe um conjunto distribucionalmente ε-misturado para f que é não-enumerável, para algum $\varepsilon > 0$.

A noção de caos distribucional foi introduzida por Schweizer e Smítal em [38] (veja também Oprocha [36]).

Teorema 3.3. *Existe um subconjunto aberto e denso $\mathcal{O}$ de $\mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ tal que, para todo $h \in \mathcal{O}$, $\overline{h}$ é uniformemente distribucionalmente caótica. Em particular, para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\overline{h}$ é uniformemente distribucionalmente caótica.*

Demonstração. Seja $\mathcal{O}$ o conjunto de todos os $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ para os quais existe uma partição $\mathcal{P}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que alguma componente de $\mathrm{Gr}(h,\mathcal{P})$ é um haltere equilibrado com peso lateral ≥ 2. Claramente o conjunto $\mathcal{O}$ é aberto em $\mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. Pelo Teorema B, $\mathcal{O}$ é também denso em $\mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. Fixe $h \in \mathcal{O}$ e seja $\mathcal{P}$ uma partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que existe uma componente D de $\mathrm{Gr}(h,\mathcal{P})$ que é um haltere equilibrado com peso lateral $q \geq 2$. Escreva

$$D = \{u_1, \dots, u_q\} \cup \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_q\},$$

com a notação usual. Como

$$u_1 \supset h^{-q}(u_1) \supset h^{-2q}(u_1) \supset \cdots \quad \text{e} \quad w_1 \supset h^{q}(w_1) \supset h^{2q}(w_1) \supset \cdots,$$

segue que as interseções

$$F := \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{-nq}(u_1) \quad \text{e} \quad G := \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{nq}(w_1)$$

são não-vazias. Além disso, $h^q(F) = F$ e $h^q(G) = G$. Definimos

$$X := F \cup h(F) \cup \ldots \cup h^{q-1}(F) \quad \text{e} \quad Y := G \cup h(G) \cup \ldots \cup h^{q-1}(G).$$

Não é difícil verificar que valem as seguintes propriedades:

(a) X é um subconjunto fechado e não-vazio de $u_1 \cup \ldots \cup u_q$ com $h(X) = X$;

(b) $(u_1 \cup \ldots \cup u_q) \backslash X$ é exatamente o conjunto de todos os $\sigma \in u_1 \cup \ldots \cup u_q$ cuja trajetória positiva vai para a barra do haltere D em algum momento (i.e., existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $h^r(\sigma) \in v_1$);

(a') Y é um subconjunto fechado e não-vazio de $w_1 \cup \ldots \cup w_q$ com $h(Y) = Y$;

(b') $(w_1 \cup \ldots \cup w_q) \backslash Y$ é exatamente o conjunto de todos os $\sigma \in w_1 \cup \ldots \cup w_q$ cuja trajetória negativa vai para a barra do haltere D em algum momento (i.e., existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $h^{-r}(\sigma) \in v_s$).

Além disso, afirmamos que:

(c) $\lim_{m\to\infty} \max_{\sigma\in v_1} d(h^{-m}(\sigma), X) = 0$;

(c') $\lim_{m\to\infty} \max_{\sigma\in v_1} d(h^{m}(\sigma), Y) = 0$.

De fato, suponha que (c) é falso. Então, existem $\epsilon > 0$ e uma sequência crescente $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de inteiros positivos tais que $\max_{\sigma\in v_1} d(h^{-m_j}(\sigma), X) > \epsilon$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Daí, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\sigma_j \in v_1$ tal que

$$d(h^{-m_j}(\sigma_j), X) > \epsilon. \tag{3.3.2}$$

Note que $h^{-m_j}(\sigma_j) \in u_1 \cup \ldots \cup u_q$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que existe

$$\tau := \lim_{j\to\infty} h^{-m_j}(\sigma_j) \in u_1 \cup \ldots \cup u_q.$$

Por (3.3.2), $\tau \notin X$. Assim, segue de (b) que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $h^r(\tau) \in v_1$. Por continuidade,

$$\lim_{j\to\infty} h^{r-m_j}(\sigma_j) = h^r(\tau) \in v_1.$$

Logo, $h^{r-m_j}(\sigma_j) \in v_1$ para todo j suficientemente grande. Mas isto é impossível, pois $h^n(v_1) \cap v_1 = \emptyset$ para todo n negativo. Isto prova (c). A prova de (c') é análoga.

Agora fixe um ponto $\sigma_0 \in v_1$. Por (c) e (c'),

$$\lim_{m\to\infty} d(h^{-m}(\sigma_0), X) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{m\to\infty} d(h^{m}(\sigma_0), Y) = 0. \tag{3.3.3}$$

Portanto, podemos construir uma sequência crescente

$$a_1 < b_1 < c_1 < d_1 < a_2 < b_2 < c_2 < d_2 < \cdots$$

de inteiros positivos tal que valem as seguintes propriedades:

(d) $d(h^{n-t}(\sigma_0), X) < \frac{1}{j}$ sempre que $n \leq a_j$ e $t \geq b_j$;

(e) $\lim_{j\to\infty} \frac{c_j - b_j}{c_j} = 1$;

(d') $d(h^{n-t}(\sigma_0), Y) < \frac{1}{j}$ sempre que $n \geq d_j$ e $t \leq c_j$;

(e') $\lim_{j\to\infty} \dfrac{a_{j+1} - d_j}{a_{j+1}} = 1.$

Seja H um conjunto de subsequências da sequência (b_j) tal que H tem a cardinalidade do contínuo e quaisquer dois elementos distintos em H diferem em infinitas coordenadas. Cada elemento θ de H é uma sequência da forma

$$\theta = (b_{j_1}, b_{j_2}, b_{j_3}, \ldots),$$

com $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$. Associamos a cada tal sequência θ, a sequência $\widetilde{\theta}$ dada por

$$\widetilde{\theta} := (b_{j_1}, b_{j_1} + 1, \ldots, c_{j_1}, b_{j_2}, b_{j_2} + 1, \ldots, c_{j_2}, \ldots).$$

Para cada $\theta \in H$, seja

$$C_\theta := X \cup Y \cup \{h^{-\widetilde{\theta}(k)}(\sigma_0) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Segue de (3.3.3) que cada C_θ é um conjunto fechado, ou seja,

$$C_\theta \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \quad \text{para cada } \theta \in H.$$

O conjunto $S := \{C_\theta : \theta \in H\}$ tem a cardinalidade do contínuo e mostraremos que é um conjunto distribucionalmente $\delta(\mathcal{P})$-misturado para $\overline{h}$.

Sejam $\phi, \theta \in H$ com $\phi \neq \theta$. Pela definição de H, podemos supor que existem infinitos b_j's que são termos de ϕ mas não são termos de θ. Para cada tal b_j, tem-se

$$h^n(C_\phi) \cap v_1 = \{\sigma_0\} \ \text{ e } \ h^n(C_\theta) \cap v_1 = \emptyset \quad \text{para todo } n \in \{b_j, b_j + 1, \ldots, c_j\},$$

o que implica que

$$d_H\big(\overline{h}^n(C_\phi), \overline{h}^n(C_\theta)\big) \geq \delta(\mathcal{P}) \quad \text{para todo } n \in \{b_j, b_j + 1, \ldots, c_j\}.$$

Por (e), concluímos que

$$\overline{\text{dens}}\,\big\{n \in \mathbb{N} : d_H\big(\overline{h}^n(C_\phi), \overline{h}^n(C_\theta)\big) \geq \delta(\mathcal{P})\big\} = 1. \tag{3.3.4}$$

Dados $\theta \in H$, $j \in \mathbb{N}$ e $n \in \{d_j, d_j + 1, \ldots, a_{j+1}\}$, podemos escrever

$$h^n(C_\theta) = X \cup Y \cup \{h^{n-\widetilde{\theta}(k)}(\sigma_0) : \widetilde{\theta}(k) \leq c_j\} \cup \{h^{n-\widetilde{\theta}(k)}(\sigma_0) : \widetilde{\theta}(k) \geq b_{j+1}\}.$$

Por (d),

$$d(h^{n-\widetilde{\theta}(k)}(\sigma_0), X) < \frac{1}{j+1} \quad \text{sempre que } \widetilde{\theta}(k) \geq b_{j+1}.$$

Por (d'),

$$d(h^{n-\widetilde{\theta}(k)}(\sigma_0), Y) < \frac{1}{j} \quad \text{sempre que } \widetilde{\theta}(k) \leq c_j.$$

Portanto,

$$d_H\big(\overline{h}^n(C_\theta), X \cup Y\big) < \frac{1}{j}.$$

Finalmente, sejam $\phi, \theta \in H$. Pelo que acabamos de ver,

$$d_H\big(\overline{h}^n(C_\phi), \overline{h}^n(C_\theta)\big) < \frac{2}{j}$$

sempre que $j \in \mathbb{N}$ e $n \in \{d_j, d_j + 1, \ldots, a_{j+1}\}$. Daí, (e') implica que

$$\overline{\text{dens}}\,\big\{n \in \mathbb{N} : d_H\big(\overline{h}^n(C_\phi), \overline{h}^n(C_\theta)\big) < \delta\big\} = 1, \tag{3.3.5}$$

para cada $\delta > 0$. Por (3.3.4) e (3.3.5), S é um conjunto distribucionalmente $\delta(\mathcal{P})$-misturado para $\overline{h}$. □

Recordemos agora a noção de entropia topológica.

Definição 3.6. *Seja $f : M \to M$ uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto M. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos uma métrica equivalente d_n sobre M por*

$$d_n(x, y) := \max_{0 \leq k < n} d(f^k(x), f^k(y)).$$

Um subconjunto A de M é dito (n, ϵ, f)-separado se

$$d_n(x, y) \geq \epsilon \text{ para quaisquer } x, y \in A \text{ com } x \neq y.$$

Seja $N(n, \epsilon, f)$ a cardinalidade máxima de um conjunto (n, ϵ, f)-separado. A entropia topológica de f é definida por

$$\text{ent}(f) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \Big(\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon, f)\Big).$$

A aplicação f é dita topologicamente caótica se $\text{ent}(f) > 0$.

A noção de entropia topológica foi introduzida por Adler, Konheim e McAndrew [3]. Aqui, estamos adotando a definição equivalente formulada por Bowen [19] e Dinaburg [25].

Teorema 3.4. *Para a função genérica* $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\operatorname{ent}(\overline{f}) = 0$.

Demonstração. Suponha que $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfaz a propriedade (Q) e fixe $\epsilon > 0$. Então, existe uma partição $\mathcal{P}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < \epsilon$ tal que toda componente de $\operatorname{Gr}(f, \mathcal{P})$ é um balão. Se $X, Y \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ e $I_{\mathcal{P}}(X) = I_{\mathcal{P}}(Y)$, então $I_{\mathcal{P}}(f^n(X)) = I_{\mathcal{P}}(f^n(Y))$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde

$$d_H\big(f^n(X), f^n(Y)\big) \leq \|\mathcal{P}\| < \epsilon \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Isto implica que $N(n, \epsilon, \overline{f}) \leq 2^{\operatorname{card}(\mathcal{P})}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\operatorname{ent}(\overline{f}) = 0$. □

Em relação ao teorema anterior, mencionamos que Blanchard, Glasner, Kolyada e Maass solucionaram em [18] uma pergunta que estava em aberto há muito tempo ao provar que caos topológico implica caos Li-Yorke. De posse deste resultado, vemos que o Teorema 3.2 implica o Teorema 3.4. Entretanto, acreditamos ser instrutivo estabelecer o Teorema 3.4 diretamente do Teorema A, como fizemos acima.

Em contraste com o teorema anterior, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.5. *Para o homeomorfismo genérico* $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\operatorname{ent}(\overline{h}) = \infty$.

Demonstração. Seja $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfazendo a propriedade (P). Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$d_n(X, Y) := \max_{0 \leq k < n} d_H\big(\overline{h}^k(X), \overline{h}^k(Y)\big) \qquad (X, Y \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})).$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, existe uma partição $\mathcal{P}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < 1/m$ tal que toda componente de $\operatorname{Gr}(h, \mathcal{P})$ é um haltere equilibrado com peso lateral $q \geq 2$. Ponha $\delta := \delta(\mathcal{P}) > 0$. Sejam

$$D_i = \{u_{i,1}, \ldots, u_{i,q}\} \cup \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,s_i}\} \cup \{w_{i,1}, \ldots, w_{i,q}\} \qquad (1 \leq i \leq N)$$

as componentes (halteres) de $\mathrm{Gr}(h,\mathcal{P})$. A fim de simplificarmos a indexação no que se segue, não usaremos a notação usual para estes halteres. A única diferença é que consideraremos $\overrightarrow{u_{i,q}v_{i,1}}$ como uma aresta de $\mathrm{Gr}(h,\mathcal{P})$ ao invés de $\overrightarrow{u_{i,1}v_{i,1}}$. Para cada $t\in\mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}_t$ a partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ obtida de $\mathcal{P}$ trocando-se cada $u_{i,j}$ por sua partição dada pelos conjuntos

$$h^{-kq+j-1}(v_{i,1})\ \ (1\leq k\leq t) \qquad \text{e} \qquad u_{i,j}\backslash\Big(\bigcup_{k=1}^{t}h^{-kq+j-1}(v_{i,1})\Big).$$

Note que $\mathrm{card}(\mathcal{P}_t)=\mathrm{card}(\mathcal{P})+tqN$. Agora, afirmamos que vale a seguinte propriedade:

($*$) Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são subconjuntos distintos e não-vazios de $\mathcal{P}_t$, então $d_{tq+1}(\cup\mathcal{C}_1,\cup\mathcal{C}_2)\geq\delta$.

De fato, sejam $X:=\cup\mathcal{C}_1$ e $Y:=\cup\mathcal{C}_2$. Sem perda de generalidade, podemos supor que existe $a\in\mathcal{C}_1$ tal que $a\notin\mathcal{C}_2$. Se a é algum $v_{i,j}$ ou algum $w_{i,j}$, então

$$d_H(X,Y)\geq\delta.$$

Se $a=h^{-kq+j-1}(v_{i,1})$ para algum i,j,k, então $v_{i,1}\subset h^{kq-j+1}(X)$ e $v_{i,1}\cap h^{kq-j+1}(Y)=\emptyset$, o que implica

$$d_H\big(\overline{h}^{kq-j+1}(X),\overline{h}^{kq-j+1}(Y)\big)\geq\delta.$$

Finalmente, se $a=u_{i,j}\backslash\big(\bigcup_{k=1}^{t}h^{-kq+j-1}(v_{i,1})\big)$ para algum i,j, então $h^{tq-j+1}(a)=u_{i,1}$. Consequentemente, $u_{i,1}\subset h^{tq-j+1}(X)$ e $u_{i,1}\cap h^{tq-j+1}(Y)=\emptyset$, o que nos dá

$$d_H\big(\overline{h}^{tq-j+1}(X),\overline{h}^{tq-j+1}(Y)\big)\geq\delta.$$

Em qualquer caso, vemos que $d_{tq+1}(X,Y)\geq\delta$.

Agora, para todo $t\in\mathbb{N}$, ($*$) nos diz que o conjunto $\{\cup\mathcal{C};\mathcal{C}\subset\mathcal{P}_t,\mathcal{C}\neq\emptyset\}$ é $(tq{+}1,\delta,\overline{h})$-separado, e assim

$$N(tq+1,\delta,\overline{h})\geq 2^{\mathrm{card}(\mathcal{P}_t)}-1=2^{\mathrm{card}(\mathcal{P})+tqN}-1\geq 2^{\mathrm{card}(\mathcal{P})+tqN-1}.$$

Daí,

$$\frac{1}{tq+1}\log N(tq+1,\delta,\overline{h})\geq\frac{\mathrm{card}(\mathcal{P})+tqN-1}{tq+1}\log 2\qquad(t\in\mathbb{N}),$$

o que implica

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \delta, \overline{h}) \geq N \log 2.$$

Consequentemente, $\mathrm{ent}(\overline{h}) \geq N \log 2$. Como $N \to \infty$ quando $m \to \infty$, concluímos que $\mathrm{ent}(\overline{h}) = \infty$. □

Definição 3.7. *Dada uma aplicação f de um espaço métrico (M, d) em si mesmo, recorde que f é dita equicontínua em um ponto $x \in M$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(y, x) < \delta \implies d(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq 0.$$

Definição 3.8. *Dada uma aplicação f de um espaço métrico (M, d) em si mesmo, f é dita contínua em cadeia em x [5, 9] se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer escolha de pontos*

$$x_0 \in B(x; \delta),\ x_1 \in B(f(x_0); \delta),\ x_2 \in B(f(x_1); \delta), \ldots,$$

tem-se

$$d(x_n, f^n(x)) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Obviamente, continuidade em cadeia é uma propriedade muito mais forte que equicontinuidade. Foi provado em [15] que a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ é contínua em cadeia em todo ponto. Veremos agora que a aplicação induzida $\overline{f}$ tem a mesma propriedade.

Teorema 3.6. *Para a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\overline{f}$ é contínua em cadeia em todo ponto.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfazendo a propriedade (Q) e fixe $\varepsilon > 0$. Existe uma partição $\mathcal{P}$ of $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$ tal que toda componente de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P})$ é um balão. Ponha $\delta := \delta(\mathcal{P}) > 0$. Fixe $X \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ e seja

$$X_0 \in B(X; \delta),\ X_1 \in B(\overline{f}(X_0); \delta),\ X_2 \in B(\overline{f}(X_1); \delta), \ldots.$$

Temos que provar que $d_H\big(X_n, \overline{f}^{\,n}(X)\big) < \varepsilon$ para todo $n \geq 0$. Pelo Lema 3.2, é suficiente provar que

$$I_{\mathcal{P}}(X_n) = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{f}^{\,n}(X)\big) \tag{3.3.6}$$

para todo $n \geq 0$. Como $d_H(X_0, X) < \delta$, o Lema 3.1 mostra que (3.3.6) vale para $n = 0$. Suponha que (3.3.6) valha para um certo $n \geq 0$. Como toda componente de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P})$ é um balão, segue que

$$I_{\mathcal{P}}\big(\overline{f}(X_n)\big) = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{f}^{\,n+1}(X)\big). \tag{3.3.7}$$

Por outro lado,

$$I_{\mathcal{P}}(X_{n+1}) = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{f}(X_n)\big), \tag{3.3.8}$$

pois $d_H\big(X_{n+1}, \overline{f}(X_n)\big) < \delta$. As igualdades (3.3.7) e (3.3.8) mostram que (3.3.6) também é válida com $n+1$ em lugar de n. Por indução, obtemos o resultado. $\square$

Definição 3.9. *Um ponto $x \in M$ é dito um ponto recorrente de uma aplicação $f \in \mathcal{C}(M)$ se, para qualquer U vizinhança de x, tem-se $f^n(x) \in U$ para infinitos $n's$.*

Foi provado em [15] que o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ não é equicontínuo em cada ponto de um conjunto não-enumerável, donde a mesma propriedade é válida para a aplicação induzida $\overline{h}$. Entretanto, temos o seguinte resultado, onde $R(h)$ denota o conjunto de todos os pontos recorrentes de h.

Teorema 3.7. *Para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\overline{h}$ é contínua em cadeia em todo ponto $X \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ com $X \cap R(h) = \emptyset$; em particular, $\overline{h}$ é contínua em cadeia em todo ponto de um conjunto aberto e denso.*

Demonstração. Seja $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfazendo a propriedade (P). Fixe $X \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ com $X \cap R(h) = \emptyset$. Para cada $\sigma \in X$, existe $t'_\sigma > 0$ tal que

$$B(\sigma; t'_\sigma) \cap \{h(\sigma), h^2(\sigma), \ldots\} = \emptyset.$$

Além disso, como h é equicontínuo em cada ponto não-recorrente [15, Teorema 4.6], existe $t''_\sigma > 0$ tal que

$$d(\tau, \sigma) < t''_\sigma \implies d(h^n(\tau), h^n(\sigma)) < \frac{t'_\sigma}{2} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Defina $t_\sigma := \min\left\{\frac{t'_\sigma}{2}, t''_\sigma\right\}$ para cada $\sigma \in X$. Então,

$$B(\sigma; t_\sigma) \cap \{h(\tau), h^2(\tau), \ldots\} = \emptyset \ \text{ sempre que } \sigma \in X \text{ e } \tau \in B(\sigma; t_\sigma).$$

Agora, um argumento simples de compacidade mostra que existe $t > 0$ tal que

$$B(\sigma; t) \cap \{h(\sigma), h^2(\sigma), \ldots\} = \emptyset \ \text{ para todo } \sigma \in X. \tag{3.3.9}$$

Fixe $\varepsilon > 0$ e considere $\mathcal{P}$ uma partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < \min\{\varepsilon, t\}$ tal que toda componente de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$ é um haltere equilibrado com peso lateral $q \geq 2$. Sejam

$$D_i = \{u_{i,1}, \ldots, u_{i,q}\} \cup \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,s_i}\} \cup \{w_{i,1}, \ldots, w_{i,q}\} \qquad (1 \leq i \leq N)$$

as componentes (halteres) de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$. Como na prova do Teorema 3.5, consideramos $\overrightarrow{u_{i,q}v_{i,1}}$ como uma aresta de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$ ao invés de $\overrightarrow{u_{i,1}v_{i,1}}$. Por (3.3.9), tem-se

$$h^{q-j+1}(X \cap u_{i,j}) \subset v_{i,1} \ \text{ sempre que } i \in \{1, \ldots, N\} \text{ e } j \in \{1, \ldots, q\}. \tag{3.3.10}$$

Seja $\mathcal{P}'$ a partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ obtida de $\mathcal{P}$ ao trocarmos cada $u_{i,j}$ por

$$\left\{h^{-(q-j+1)}(v_{i,1}), u_{i,j} \backslash h^{-(q-j+1)}(v_{i,1})\right\}.$$

Defina $\delta := \delta(\mathcal{P}') > 0$. Segue de (3.3.10) que as relações

$$X_0 \in B(X; \delta),\ X_1 \in B(\overline{h}(X_0); \delta),\ X_2 \in B(\overline{h}(X_1); \delta), \ldots$$

implicam

$$d\big(X_n, \overline{h}^n(X)\big) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Isto prova que $\overline{h}$ é contínua em cadeia em X.

Finalmente, como $R(h)$ é fechado e tem interior vazio em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ [15, Teorema 4.5], segue que o conjunto de todos os $X \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ com $X \cap R(h) = \emptyset$ é aberto e denso em $\mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. $\square$

Definição 3.10. *Dado um homeomorfismo $h : M \to M$ de um espaço métrico M, recorde que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é dita uma δ-pseudotrajetória ($\delta > 0$) de h se*

$$d(h(x_n), x_{n+1}) \leq \delta \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Dizemos que o homeomorfismo h tem a propriedade do sombreamento [20, 21] se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudotrajetória $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ of h é ε-sombreada por uma trajetória de h, i.e., existe $x \in X$ tal que

$$d(x_n, h^n(x)) < \varepsilon \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Foi provado em [15] que o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ tem a propriedade do sombreamento. Veremos que esta propriedade também é satisfeita por $\overline{h}$.

Teorema 3.8. *Para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\overline{h}$ tem a propriedade do sombreamento.*

Demonstração. Suponha que $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfaz a propriedade (P) e seja $\varepsilon > 0$. Então, existe uma partição $\mathcal{P}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$ tal que toda componente de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$ é um haltere equilibrado com peso lateral $q \geq 2$. Fixe

$$0 < \delta < \delta(\mathcal{P}).$$

Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma δ-pseudotrajetória de $\overline{h}$. Vamos encontrar $X \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ tal que

$$d_H\big(X_n, \overline{h}^n(X)\big) < \varepsilon \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Pelo Lema 3.2, é suficiente encontrar $X \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ tal que

$$I_{\mathcal{P}}(X_n) = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^n(X)\big) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Fixemos uma componente

$$D = \{u_1, \ldots, u_q\} \cup \{v_1, \ldots, v_s\} \cup \{w_1, \ldots, w_q\}$$

de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$. A fim de simplificarmos os índices no que se segue, não usaremos a notação usual para este haltere. Como nas demonstrações dos Teoremas 3.5 e 3.7, a única diferença é que consideramos $\overrightarrow{u_q v_1}$ como uma aresta de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$ ao invés de $\overrightarrow{u_1 v_1}$. Note que é suficiente provar a existência de um subconjunto fechado Y de $\cup D$ tal que

$$I_{\mathcal{P}}\big(X_n \cap (\cup D)\big) = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^n(Y)\big) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \tag{3.3.11}$$

Para tal, fixamos pontos

$$\sigma_j \in \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{-nq}(u_j) \subset u_j, \qquad \sigma_{j,k} \in h^{-kq+j-1}(v_1) \subset u_j,$$

$$\tau_j \in \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{nq}(w_j) \subset w_j, \qquad \tau_{j,k} \in h^{(k-1)q+j}(v_s) \subset w_j,$$

para cada $j \in \{1, \ldots, q\}$ e cada $k \in \mathbb{N}$. Fixamos também um ponto $\theta_i \in v_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$. Note que tanto a trajetória positiva quanto a trajetória negativa de σ_j fica no "loop" $\{u_1, \ldots, u_q\}$ para sempre. O mesmo é válido para a trajetória negativa de $\sigma_{j,k}$, mas a trajetória positiva de $\sigma_{j,k}$ dá exatamente $k-1$ voltas no "loop" $\{u_1, \ldots, u_q\}$, então passa através da barra do haltere, e finalmente fica no "loop" $\{w_1, \ldots, w_q\}$ para sempre. Temos descrições geométricas análogas para as trajetórias de τ_j e $\tau_{j,k}$.

Agora, definimos um conjunto A consistindo de σ_j's, $\sigma_{j,k}$'s, τ_j's, $\tau_{j,k}$'s e θ_i's da seguinte maneira:

- $\sigma_j \in A \iff X_{nq} \cap u_j \neq \emptyset$ para todo $n \geq 0$,
- $\sigma_{j,k} \in A \iff X_{kq-j+1} \cap v_1 \neq \emptyset$,
- $\tau_j \in A \iff X_{-nq} \cap w_j \neq \emptyset$ para todo $n \geq 0$,
- $\tau_{j,k} \in A \iff X_{-(k-1)q-j} \cap v_s \neq \emptyset$,
- $\theta_i \in A \iff X_0 \cap v_i \neq \emptyset$.

Afirmamos que

$$I_{\mathcal{P}}\big(X_n \cap (\cup D)\big) = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^n(A)\big) \tag{3.3.12}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. A fim de provarmos esta afirmação, note que

$$I_{\mathcal{P}}(X_{n+1}) = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}(X_n)\big) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}, \tag{3.3.13}$$

pela nossa escolha de δ. Por (3.3.13) e pela forma como o conjunto A foi definido, é claro que (3.3.12) vale para $n = 0$. Suponha que (3.3.12) vale para um certo $n \geq 0$. Vamos provar que (3.3.12) também vale com $n+1$ em lugar de n. Por (3.3.13), é suficiente mostrar que

$$I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}(X_n \cap (\cup D))\big) = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^{n+1}(A)\big). \tag{3.3.14}$$

Pela estrutura do haltere, segue que

$$I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}(X_n \cap (\cup D))\big)\backslash\{u_1, v_1\} = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^{\,n+1}(A)\big)\backslash\{u_1, v_1\}.$$

Daí, temos de nos preocupar apenas com os vértices u_1 e v_1. Suponha que pelo menos um desses vértices pertence a algum dos conjuntos em (3.3.14). Então, temos que provar que

$$u_q \in I_{\mathcal{P}}\big(X_n \cap (\cup D)\big) = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^{\,n}(A)\big).$$

Escreva n na forma $n = kq - j$ com $j \in \{1, \ldots, q\}$. Então,

$$\begin{aligned} v_1 \in I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}(X_n \cap (\cup D))\big) &\iff v_1 \in I_{\mathcal{P}}(X_{n+1}) \\ &\iff X_{kq-j+1} \cap v_1 \neq \emptyset \\ &\iff \sigma_{j,k} \in A \\ &\iff h^{kq-j+1}(A) \cap v_1 \neq \emptyset \\ &\iff v_1 \in I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^{\,n+1}(A)\big). \end{aligned}$$

Além disso, $u_1 \in I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}(X_n \cap (\cup D))\big)$ se e somente se $u_1 \in I_{\mathcal{P}}(X_{n+1}) = I_{\mathcal{P}}(X_{kq-j+1})$, e isto ocorre se e somente se

$$X_{rq} \cap u_j \neq \emptyset \quad \text{para cada } r \geq 0$$

ou

$$X_{k'q-j+1} \cap v_1 \neq \emptyset \quad \text{para algum } k' > k,$$

o que é equivalente a dizer que $u_1 \in I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^{\,n+1}(A)\big)$. Isto completa a prova de (3.3.14). Por indução temos (3.3.12) válida para todo $n \geq 0$. Um argumento de indução similar mostra que (3.3.12) também é válida para $n \leq 0$.

Finalmente, seja $Y := \overline{A}$, o qual é um subconjunto fechado de $\cup D$. Temos que provar que (3.3.11) é válido. Por (3.3.12), é suficiente mostrar que

$$I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^{\,n}(Y)\big) = I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^{\,n}(A)\big) \tag{3.3.15}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como $A \subset Y$, a inclusão "$\supset$" é clara. A fim de provarmos a inclusão reversa, suponha $y \in Y\backslash A$. Então, ou y pertence a algum u_j ou y pertence a algum w_j.

Consideraremos apenas o primeiro caso, já que o segundo é análogo. Assim, suponha $y \in u_j$ para um certo j. Existe uma subsequência $(\sigma_{j,k})_{k \in N}$ de $(\sigma_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ contida em A tal que y é um ponto limite desta subsequência. Como

$$h^{kq-j+1}(\sigma_{j,k}) \in v_1 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

toda a trajetória de y está contida no "loop" $\{u_1, \ldots, u_q\}$. Esta informação juntamente com o fato de que a subsequência $(\sigma_{j,k})_{k \in N}$ pertence a A implica que

$$I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^n(\{y\})\big) \subset I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}^n(A)\big) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Como isto vale para cada $y \in Y \backslash A$, concluímos que (3.3.15) é verdadeira. $\square$

Definição 3.11. *Considere uma aplicação f de um espaço métrico (M, d) em si mesmo.*

(a) Um ponto $x \in M$ é dito um ponto periódico de f se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Neste caso, o menor n com esta propriedade é dito período de x.

(b) Um ponto $x \in M$ é dito um ponto não-errante de f se, para qualquer U vizinhança de x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

(c) Um ponto $x \in M$ é dito um ponto recorrente em cadeia de f se, para cada $\delta > 0$, existe uma δ-pseudotrajetória periódica de f que passa por x.

Denotamos por $P(f)$ (resp. $R(f)$, $\Omega(f)$, $CR(f)$) o conjunto de todos os pontos periódicos (resp. recorrentes, não-errantes, recorrentes em cadeia) de f.

Foi provado em [23] (resp. [7]) que a aplicação genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ (resp. $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$) não tem pontos periódicos. Veremos que a situação é completamente diferente para a aplicação induzida $\overline{f}$ (resp. $\overline{h}$).

Teorema 3.9. *Para a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, valem as seguintes propriedades:*

(a) *$\overline{f}$ tem uma quantidade não-enumerável de pontos periódicos para todo período $p \geq 1$.*

(b) $R(\overline{f}) = \Omega(\overline{f}) = CR(\overline{f})$.

(c) $CR(\overline{f})$ *tem interior vazio em* $\overline{f}\big(\mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})\big)$.

(d) $P(\overline{f})$ *é denso em* $CR(\overline{f})$.

Demonstração. Suponha que $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfaz a propriedade (Q).

(a): Fixe $p \in \mathbb{N}$ e suponha que $\overline{f}$ tem apenas uma quantidade enumerável de pontos de período p. Seja $X_1, X_2, X_3, \ldots$ uma lista de todos esses pontos periódicos. Existem uma partição $\mathcal{P}_1$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e um inteiro positivo $q_1 \geq p$ tais que toda componente de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$ é um balão de tipo $(q_1!, q_1!)$. Além disso, escolhendo $\mathcal{P}_1$ com $\|\mathcal{P}_1\|$ suficientemente pequena, também podemos garantir que $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$ tem pelo menos duas componentes. Então, podemos escolher uma componente B_1 de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$ com

$$X_1 \backslash (\cup B_1) \neq \emptyset.$$

Agora, existem uma partição $\mathcal{P}_2$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}_2\| < \delta(\mathcal{P}_1)$ e um inteiro positivo q_2 tais que toda componente de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P}_2)$ é um balão de tipo $(q_2!, q_2!)$. A condição $\|\mathcal{P}_2\| < \delta(\mathcal{P}_1)$ implica que $\mathcal{P}_2$ é um refinamento de $\mathcal{P}_1$. Daí, toda componente B de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P}_2)$ está *contida* em alguma componente B' de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$ no sentido de que $\cup B \subset \cup B'$. Além disso, escolhendo $\mathcal{P}_2$ com $\|\mathcal{P}_2\|$ suficientemente pequena, podemos também garantir que $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P}_2)$ tem pelo menos duas componentes cujos vértices iniciais estão contidos no vértice inicial da componente B_1 de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$. Então, podemos escolher uma tal componente B_2 de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P}_2)$ com

$$X_2 \backslash (\cup B_2) \neq \emptyset.$$

Continuando dessa maneira, obtemos sequências $(\mathcal{P}_j)$, (q_j) e (B_j).

Como B_j é uma componente de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P}_j)$, B_j é um balão da forma

$$B_j = \{v_{j,1}, \ldots, v_{j,q_j!}\} \cup \{w_{j,1}, \ldots, w_{j,q_j!}\}.$$

Por construção, $\mathcal{P}_{j+1}$ refina $\mathcal{P}_j$ e $v_{j+1,1} \subset v_{j,1}$, o que implica

$$q_{j+1} \geq q_j \quad \text{e} \quad w_{j+1,1} \subset w_{j,1} \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, ponha

$$F_j := \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{nq_j!}(w_{j,1}).$$

Claramente, $F_j \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ e $f^{q_j!}(F_j) = F_j$. Escreva $q_j! = k_j p$. Então

$$Y_j := F_j \cup f^p(F_j) \cup f^{2p}(F_j) \cup \ldots \cup f^{(k_j-1)p}(F_j)$$

é um ponto periódico de $\overline{f}$ de período p. Como $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \cdots$, o conjunto

$$Y := \bigcap_{j=1}^{\infty} Y_j$$

também é um ponto periódico de $\overline{f}$ de período p. Finalmente, como $X_j \backslash (\cup B_j) \neq \emptyset$ e $Y \subset Y_j \subset \cup B_j$, temos $Y \neq X_j$ ($j \in \mathbb{N}$). Esta contradição completa a demonstração do item (a).

(b): Segue do fato de que $\overline{f}$ é contínua em cadeia em todo ponto (Theorem 3.6).

(c): Fixe $X \in R(\overline{f})$ e $\varepsilon > 0$. Existem uma partição $\mathcal{P}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$ e um inteiro positivo q tal que toda componente de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P})$ é um balão de tipo (q, q). Sejam

$$B_i = \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,q}\} \cup \{w_{i,1}, \ldots, w_{i,q}\} \qquad (1 \leq i \leq N)$$

as componentes (balões) de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P})$. Como X é um ponto recorrente de $\overline{f}$, temos

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{q} w_{i,j}.$$

Daí, podemos definir Y como a única união de alguns dos conjuntos

$$f(v_{i,q}), \ldots, f^q(v_{i,q}),$$

com i variando em $\{1, \ldots, N\}$, que satisfaz $I_{\mathcal{P}}(Y) = I_{\mathcal{P}}(X)$. Então,

$$Y \in \overline{f}\big(\mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})\big) \quad \text{e} \quad d_H(Y, X) < \varepsilon.$$

Além disso, segue da estrutura de balão que Y não é um ponto recorrente de $\overline{f}$.

(d): Sejam X, ε, $\mathcal{P}$, q e B_i como na demonstração de (c). Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, ponha

$$F_i := \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{nq}(w_{i,1}).$$

Então, F_i é um ponto periódico de $\overline{f}$ de período q. Seja Z a única união de alguns dos conjuntos

$$F_i, f(F_i), \ldots, f^{q-1}(F_i),$$

com i variando em $\{1, \ldots, N\}$, que satisfaz $I_{\mathcal{P}}(Z) = I_{\mathcal{P}}(X)$. Então,

$$\overline{f}^{\,q}(Z) = Z \quad \text{e} \quad d_H(Z, X) < \varepsilon,$$

o que completa a demonstração. □

Teorema 3.10. *Para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, valem as seguintes propriedades:*

(a) *$\overline{h}$ tem uma quantidade não-enumerável de pontos periódicos para todo período $p \geq 1$.*

(b) *$R(\overline{h}) \neq \Omega(\overline{h}) = CR(\overline{h})$.*

(c) *$CR(\overline{h})$ tem interior vazio em $\mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.*

(d) *$P(\overline{h})$ é denso em $CR(\overline{h})$.*

Demonstração. Seja $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfazendo a propriedade (P).

(a): Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que toda componente de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$ é um haltere equilibrado com peso lateral $q \geq 2$. Fixe uma tal componente

$$D = \{u_1, \ldots, u_q\} \cup \{v_1, \ldots, v_s\} \cup \{w_1, \ldots, w_q\}.$$

Considere X e Y definidos como na demonstração do Teorema 3.3. Para cada $\sigma \in v_1$, ponha

$$Z_\sigma := X \cup Y \cup \{h^{kp}(\sigma) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Segue das propriedades (c) e (c') na demonstração do Teorema 3.3 que cada Z_σ é um conjunto fechado. Daí, $\{Z_\sigma : \sigma \in v_1\}$ é um conjunto não-enumerável de pontos periódicos de $\overline{h}$ com período p.

(b): Sejam $\mathcal{P}$, q, D, X e Y como na demonstração de (a). Defina

$$Z := X \cup Y \cup v_1 \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}).$$

Como

$$d_H\big(Z, \overline{h}^n(Z)\big) \geq \delta(\mathcal{P}) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos que Z não é um ponto recorrente de $\overline{h}$. Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja

$$Z_k := Z \cup h^{-k}(v_1) \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}).$$

Então

$$h^k(Z_k) = Z \cup h^k(v_1)$$

e segue das propriedades (c) e (c') na demonstração do Teorema 3.3 que

$$Z_k \to Z \qquad \text{e} \qquad h^k(Z_k) \to Z.$$

Assim, Z é um ponto não-errante de $\overline{h}$.

A igualdade $\Omega(\overline{h}) = CR(\overline{h})$ segue de (d).

(c): Fixe $X \in CR(\overline{h})$ e $\varepsilon > 0$. Existem uma partição $\mathcal{P}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$ e um inteiro positivo q tal que toda componente de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$ é um haltere equilibrado com peso lateral q. Sejam

$$D_i = \{u_{i,1}, \ldots, u_{i,q}\} \cup \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,s_i}\} \cup \{w_{i,1}, \ldots, w_{i,q}\} \qquad (1 \leq i \leq N)$$

as componentes (halteres) de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$. Defina Y como a única união de alguns dos conjuntos

$$h^{-q}(v_{i,1}), \ldots, h^{-1}(v_{i,1}), v_{i,1}, \ldots, v_{i,s_i}, h(v_{i,s_i}), \ldots, h^q(v_{i,s_i}), \tag{3.3.16}$$

com i variando em $\{1, \ldots, N\}$, que satisfaz $I_{\mathcal{P}}(Y) = I_{\mathcal{P}}(X)$. Então,

$$d_H(Y, X) < \varepsilon.$$

Além disso, segue da estrutura de haltere que Y não é um ponto recorrente em cadeia de $\overline{h}$.

(d): Sejam X, ε, $\mathcal{P}$, q e D_i como na demonstração de (c). Para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, definimos

$$F_i := \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{-nq}(u_{i,1}) \quad \text{e} \quad G_i := \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{nq}(w_{i,1}).$$

Claramente,

$$h^q(F_i) = F_i \quad \text{e} \quad h^q(G_i) = G_i.$$

Como X é um ponto recorrente em cadeia de $\overline{h}$, existe uma sequência finita $X_0, \dots, X_k$ em $\mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ tal que $d_H(X, X_0) < \delta(\mathcal{P}), d_H(\overline{h}(X_0), X_1) < \delta(\mathcal{P}), \dots, d_H(\overline{h}(X_{k-1}), X_k) < \delta(\mathcal{P})$ e $X_k = X$. Portanto,

$$I_{\mathcal{P}}(X) = I_{\mathcal{P}}(X_0),\ I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}(X_0)\big) = I_{\mathcal{P}}(X_1), \dots, I_{\mathcal{P}}\big(\overline{h}(X_{k-1})\big) = I_{\mathcal{P}}(X_k) = I_{\mathcal{P}}(X). \quad (3.3.17)$$

Seja Z_1 a união de todos os conjuntos da forma $h^j(F_i)$, com $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in \{0, \dots, q-1\}$, tais que $u_{i,j+1} \cap X \neq \emptyset$. Por (3.3.17), se $u_{i,j+1} \cap X \neq \emptyset$ e $u_{i,\ell+1}$ é o vértice que contém $h^{-k}(u_{i,j+1})$, então temos também $u_{i,\ell+1} \cap X \neq \emptyset$ e assim $h^{-k}(h^j(F_i)) = h^{\ell}(F_i) \subset Z_1$. Isto implica que

$$h^k(Z_1) = Z_1. \quad (3.3.18)$$

Seja Z_2 a união de todos os conjutos da forma $h^j(G_i)$, com $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in \{0, \dots, q-1\}$, tais que $w_{i,j+1} \cap X \neq \emptyset$. Por (3.3.17), se $w_{i,j+1} \cap X \neq \emptyset$ e $w_{i,\ell+1}$ é o vértice que contém $h^k(w_{i,j+1})$, então $w_{i,\ell+1} \cap X \neq \emptyset$ e assim $h^k(h^j(G_i)) = h^{\ell}(G_i) \subset Z_2$. Daí,

$$h^k(Z_2) = Z_2. \quad (3.3.19)$$

Seja Z_3 a união de todos os conjuntos da forma $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^{nk}(v_{i,j})$, com $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in \{1, \dots, s_i\}$, tais que $v_{i,j} \cap X \neq \emptyset$. Obviamente,

$$h^k(Z_3) = Z_3. \quad (3.3.20)$$

Finalmente, defina $Z := Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$. Segue de (3.3.17) que

$$I_{\mathcal{P}}(Z) = I_{\mathcal{P}}(X).$$

Pelas propriedades (c) e (c') na demonstração do Teorema 3.3,

$$Z \in \mathcal{K}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}).$$

Por (3.3.18), (3.3.19) e (3.3.20),

$$h^k(Z) = Z.$$

Portanto, Z é um ponto periódico de $\overline{h}$ e $d_H(Z, X) < \varepsilon$. □

3.4 Observações sobre a Dinâmica Induzida sobre Produtos

Outro contexto muito natural para a dinâmica coletiva consiste em olhar para a ação de um sistema sobre k-uplas de pontos do espaço de fase. Em outras palavras, dados $f \in C(M)$ e $k \in \mathbb{N}$, consiste em estudar a dinâmica da aplicação produto induzida

$$f^{\times k} : (x_1, \ldots, x_k) \in M^k \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_k)) \in M^k.$$

No caso da dinâmica genérica das aplicações do espaço de Cantor, ocorre que a dinâmica destas aplicações induzidas sobre produtos pode ser facilmente obtida através da dinâmica das aplicações originais. Nesta direção, temos os seguintes resultados.

Teorema 3.11. *Para a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, valem as seguintes propriedades para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado:*

(a) *$f^{\times k}$ não tem par Li-Yorke. Em particular,* $\mathrm{ent}(f^{\times k}) = 0$.

(b) *$f^{\times k}$ é contínua em cadeia em todo ponto.*

(c) $P(f^{\times k}) = \emptyset$.

(d) $R(f^{\times k}) = \Omega(f^{\times k}) = CR(f^{\times k})$.

(e) *$R(f^{\times k})$ é um conjunto de Cantor com interior vazio em $f^{\times k}((\{0,1\}^{\mathbb{N}})^k)$.*

Teorema 3.12. *Para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, valem as seguintes propriedades para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado:*

(a) $h^{\times k}$ *não tem par Li-Yorke. Em particular,* $\mathrm{ent}(h^{\times k}) = 0$.

(b) $h^{\times k}$ *tem a propriedade do sombreamento.*

(c) $h^{\times k}$ *é contínua em cadeia em cada ponto de um conjunto aberto e denso, mas não é equicontínua em cada ponto de um conjunto não-enumerável .*

(d) $P(h^{\times k}) = \emptyset$.

(e) $R(h^{\times k}) = \Omega(h^{\times k}) = CR(h^{\times k})$.

(f) $R(h^{\times k})$ *é um conjunto de Cantor com interior vazio em* $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^k$.

Diremos agora algumas palavras sobre a demonstração do Teorema 3.12 (a demonstração do Teorema 3.11 segue de maneira análoga). As propriedades (a), (b), (c) e (d) seguem facilmente das correspondentes propriedades da aplicação h como apresentadas em [15]. Já as propriedades (e) e (f) também seguem das correspondentes propriedades de h, desde que provemos que

$$R(h^{\times k}) = R(h)^k.$$

Como a inclusão "$\subset$" é óbvia, tomemos um ponto $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in R(h)^k$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\mathcal{P}$ uma partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$ tal que toda componente de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$ é um haltere equilibrado com peso lateral $q \geq 2$. Sejam

$$D_i = \{u_{i,1}, \ldots, u_{i,q}\} \cup \{v_{i,1}, \ldots, v_{i,s_i}\} \cup \{w_{i,1}, \ldots, w_{i,q}\} \qquad (1 \leq i \leq N)$$

as componentes (halteres) de $\mathrm{Gr}(h, \mathcal{P})$. Para cada $1 \leq j \leq k$, seja $1 \leq i_j \leq N$ tal que σ_j cai em um vértice do haltere D_{i_j}. Como σ_j é um ponto recorrente de h, então ou σ_j pertence a $u_{i_j,1} \cup \ldots \cup u_{i_j,q}$ ou σ_j pertence a $w_{i_j,1} \cup \ldots \cup w_{i_j,q}$. Além disso, no caso $\sigma_j \in u_{i_j,1} \cup \ldots \cup u_{i_j,q}$, devemos ter $h^n(\sigma_j) \in u_{i_j,1} \cup \ldots \cup u_{i_j,q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em ambos os casos, vemos que

$$d(h^{nq}(\sigma_j), \sigma_j) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Como isto vale para cada $1 \leq j \leq k$, e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in R(h^{\times k})$.

Capítulo 4

Dinâmica Topológica Probabilística das Aplicações Genéricas do Espaço de Cantor

4.1 O Espaço das Medidas de Probabilidade e a Métrica de Prohorov

Seja (M, d) um espaço métrico compacto e considere $\mathcal{B}_M$ o conjunto de todos os subconjuntos de Borel de M. Denotamos por $\mathcal{M}(M)$ o espaço de todas as medidas de Borel probabilísticas sobre M.

Definição 4.1. *Dados $\mu \in \mathcal{M}(M)$, um conjunto finito $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\}$ de funções reais e contínuas definidas em M e $\varepsilon > 0$, considere o conjunto*

$$V(\mu; \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k; \varepsilon) := \{\nu \in \mathcal{M}(M) : |\int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}$$

Os conjuntos

$$V(\mu; \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k; \varepsilon)$$

($\mu \in \mathcal{M}(M)$, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k \in \mathcal{C}(M; \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$) formam uma base para a dita topologia fraca sobre $\mathcal{M}(M)$.*

Definição 4.2. *A distância de Prohorov sobre $\mathcal{M}(M)$ é definida por*

$$d_P(\mu, \nu) := \inf\{\delta > 0 : \mu(X) \leq \nu(X^\delta) + \delta \text{ e } \nu(X) \leq \mu(X^\delta) + \delta \text{ para todo } X \in \mathcal{B}_M\},$$

onde $X^\delta := \{x \in M : d(x, X) < \delta\}$ é a δ-vizinhança de X ($X \subset M$).

Proposição 4.1. *A distância de Prohorov é uma métrica sobre $\mathcal{M}(M)$.*

Demonstração. Veja [17, item (i), página 72]. $\square$

Proposição 4.2. *Para quaisquer $\mu, \nu \in \mathcal{M}(M)$,*

$$d_P(\mu, \nu) = \inf\{\delta > 0 : \mu(X) \leq \nu(X^\delta) + \delta \text{ para todo } X \in \mathcal{B}_M\}.$$

Demonstração. Veja [17, item (ii), página 72]. $\square$

Proposição 4.3. *Se (M, d) é separável e completo, então a métrica de Prohorov d_P sobre $\mathcal{M}(M)$ induz a topologia fraca*.*

Demonstração. Veja [17, Teorema 6.8] $\square$

Vale o seguinte resultado fundamental:

Teorema 4.1. *(M, d) é compacto se e somente se $(\mathcal{M}(M), d_P)$ é compacto.*

Demonstração. Veja [17, Teorema 6.8]. $\square$

4.2 A Aplicação Induzida ao Espaço das Medidas de Probabilidade

Seja (M, d) um espaço métrico compacto. Como no capítulo anterior, denotamos por $\mathcal{C}(M)$ (resp. $\mathcal{H}(M)$) o espaço de todas as aplicações contínuas de M em M (resp. de todos os homeomorfismos de M sobre M) munido da métrica

$$\tilde{d}(f, g) := \max_{x \in M} d(f(x), g(x)).$$

Definição 4.3. *Dada $f \in \mathcal{C}(M)$, a aplicação induzida $\widetilde{f} : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)$ é definida por*

$$(\widetilde{f}(\mu))(X) := \mu(f^{-1}(X)) \qquad (\mu \in \mathcal{M}(M), X \in \mathcal{B}_M).$$

Proposição 4.4. *Seja (M, d) um espaço métrico compacto. Dada $f \in \mathcal{C}(M)$, a aplicação induzida $\widetilde{f} : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)$ é contínua.*

Demonstração. Veja [35, Lema 4.9]. $\square$

Note que se f é um homeomorfismo, então $\widetilde{f}$ também o é.

4.3 Dinâmica Probabilística das Aplicações Genéricas

Foi provado no capítulo anterior (Teorema 3.3) que para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, a aplicação induzida $\overline{h}$ é uniformemente distribucionalmente caótica. Em forte contraste, veremos agora que a aplicação induzida $\widetilde{h}$ não é sequer Li-Yorke caótica. Com efeito, vale algo ainda mais forte.

Teorema 4.2. *Para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\widetilde{h}$ não tem par Li-Yorke.*

Demonstração. Seja $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfazendo a propriedade (P). Considere (μ,ν) um par de elementos de $\mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ e suponha que

$$\limsup_{n\to\infty} d_P(\widetilde{h}^n(\mu),\widetilde{h}^n(\nu)) > 0.$$

Então, podemos fixar $\varepsilon > 0$ tal que

$$d_P(\widetilde{h}^n(\mu),\widetilde{h}^n(\nu)) > \varepsilon \tag{4.3.1}$$

para infinitos valores de n. Para cada tal n, existe um subconjunto de Borel Y_n de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\mu(h^{-n}(Y_n)) > \nu(h^{-n}((Y_n)^{\varepsilon})) + \varepsilon. \tag{4.3.2}$$

Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$ tal que toda componente de $\mathrm{Gr}(h,\mathcal{P})$ é um haltere equilibrado com peso lateral $q \geq 2$. Sejam

$$D_i := \{u_{i,1},\ldots,u_{i,q}\} \cup \{v_{i,1},\ldots,v_{i,s_i}\} \cup \{w_{i,1},\ldots,w_{i,q}\} \quad (1 \leq i \leq N)$$

as componentes (halteres) de $\mathrm{Gr}(h,\mathcal{P})$. Para cada $i \in \{1,\ldots,N\}$, consideramos o conjunto fechado e não-vazio

$$X_i := F_i \cup h(F_i) \cup \ldots \cup h^{q-1}(F_i),$$

onde $F_i := \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{-nq}(u_{i,1})$. Note que $h(X_i) = X_i$, pois $h^q(F_i) = F_i$. Além disso, $(u_{i,1} \cup \ldots \cup u_{i,q})\backslash X_i$ é exatamente o conjuntos de todos os $\sigma \in u_{i,1} \cup \ldots \cup u_{i,q}$ cuja trajetória positiva sai em algum momento para a barra do haltere D_i, isto é, $h^r(\sigma) \in v_{i,1}$ para algum $r \in \mathbb{N}$.

Para cada n tal que vale (4.3.1), definimos $A_n := \bigcup\{a : a \in I_{\mathcal{P}}(Y_n)\} \supset Y_n$. Como $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$, temos $A_n \subset (Y_n)^\varepsilon$. Assim, por (4.3.2) temos

$$\mu(h^{-n}(A_n)) > \nu(h^{-n}(A_n)) + \varepsilon.$$

Como esta última desigualdade vale para infinitos valores de n e existe apenas um número finito de possíveis A_n's, vemos que existe um conjunto A que é uma união de alguns elementos de $\mathcal{P}$ tal que

$$\mu(h^{-n}(A)) > \nu(h^{-n}(A)) + \varepsilon \tag{4.3.3}$$

para infinitos valores de n.

Como

$$\lim_{k\to\infty} \varphi\Big(\bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{n=k}^{\infty} h^{-n}(v_{i,1})\Big) = 0$$

para todo $\varphi \in \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(Z) < \varepsilon/3 \qquad \text{e} \qquad \nu(Z) < \varepsilon/3, \tag{4.3.4}$$

onde

$$Z := \bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{n=k}^{\infty} h^{-n}(v_{i,1}).$$

Agora, decomponha o conjunto A em três conjuntos disjuntos:

$$A = B \cup C \cup D,$$

onde

$$\begin{aligned}
&B \subset X := \bigcup_{i=1}^{N} X_i,\\
&C \subset U := \bigcup_{i=1}^{N} \big[((u_{i,1} \cup \ldots \cup u_{i,q}) \backslash X_i) \cup (v_{i,1} \cup \ldots \cup v_{i,s_i})\big],\\
&D \subset W := \bigcup_{i=1}^{N} (w_{i,1} \cup \ldots \cup w_{i,q}).
\end{aligned}$$

Como $h^{-q}(B) = B$, $h^{-q}(D) \cap W = D$ e $h^{-n}(C) \subset h^{-n}(U) \subset Z$ sempre que n é suficientemente grande, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a sequência

$$(h^{-n}(A) \backslash Z)_{n \geq n_0}$$

é periódica e q é um período para esta sequência (não necessariamente o menor). Por (4.3.3), existe $m_0 \geq n_0$ tal que

$$\mu(h^{-m_0}(A)) > \nu(h^{-m_0}(A)) + \varepsilon.$$

Consequentemente, por (4.3.4),

$$\mu(h^{-m_0}(A) \backslash Z) > \nu(h^{-m_0}(A) \backslash Z) + \frac{2\varepsilon}{3}\cdot$$

Como q é um período para a sequência $(h^{-n}(A) \backslash Z)_{n \geq n_0}$, obtemos

$$\mu(h^{-m_0-nq}(A) \backslash Z) > \nu(h^{-m_0-nq}(A) \backslash Z) + \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.3.5}$$

Tome $0 < \delta < \min\{\delta(\mathcal{P}), \varepsilon/3\}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
\mu(h^{-m_0-nq}(A)) &\geq \mu(h^{-m_0-nq}(A) \backslash Z) \\
&> \nu(h^{-m_0-nq}(A) \backslash Z) + \frac{2\varepsilon}{3} \\
&> \nu(h^{-m_0-nq}(A)) + \frac{\varepsilon}{3} \\
&> \nu(h^{-m_0-nq}(A)) + \delta \\
&= \nu(h^{-m_0-nq}(A^\delta)) + \delta,
\end{aligned}$$

onde usamos (4.3.5), (4.3.4) e o fato de que $A^\delta = A$ (pois $\delta < \delta(\mathcal{P})$). Assim,

$$d_P(\widetilde{h}^{m_0+nq}(\mu), \widetilde{h}^{m_0+nq}(\nu)) \geq \delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Isto implica que

$$\liminf_{n \to \infty} d_P(\widetilde{h}^n(\mu), \widetilde{h}^n(\nu)) > 0,$$

donde (μ, ν) não é um par Li-Yorke para $\widetilde{h}$. □

Foi provado no capítulo anterior (Teorema 3.5) que para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, a aplicação induzida $\overline{h}$ tem entropia topológica infinita. Em grande contraste, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3. *Para o homeomorfismo genérico* $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\mathrm{ent}(\widetilde{h}) = 0$.

Demonstração. Foi provado em [18] que entropia topológica positiva implica caos Li-Yorke. Portanto, o teorema segue ao combinarmos este fato com o Teorema 4.2. □

Consideremos agora o caso das aplicações contínuas. Para tal precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 4.1. *Seja* $\mathcal{P}$ *uma partição de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$*. Para cada* $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$*, se*

$$d_P(\mu, \nu) < \delta \leq \delta(\mathcal{P}),$$

então

$$|\mu(a) - \nu(a)| < \delta \quad \textit{para todo } a \in \mathcal{P}.$$

Demonstração. Seja γ tal que $d_P(\mu,\nu) < \gamma < \delta$. Como $\gamma < \delta(\mathcal{P})$, temos $a^\gamma = a$ para cada $a \in \mathcal{P}$. Portanto, sendo $d_P(\mu,\nu) < \gamma$,

$$\mu(a) \leq \nu(a^\gamma) + \gamma = \nu(a) + \gamma \quad \text{e} \quad \nu(a) \leq \mu(a^\gamma) + \gamma = \mu(a) + \gamma,$$

donde $|\mu(a) - \nu(a)| \leq \gamma < \delta$ $(a \in \mathcal{P})$. □

Lema 4.2. *Seja* $\mathcal{P}$ *uma partição de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$*. Para cada* $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$*, se*

$$|\mu(a) - \nu(a)| \leq \frac{\|\mathcal{P}\|}{\mathrm{card}(\mathcal{P})} \quad \textit{para todo } a \in \mathcal{P},$$

então

$$d_P(\mu,\nu) \leq \|\mathcal{P}\|.$$

Demonstração. Fixe $\gamma > \|\mathcal{P}\|$. Para cada subconjunto de Borel X de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

$$\bigcup \{a : a \in I_{\mathcal{P}}(X)\} \subset X^\gamma,$$

donde

$$\mu(X) = \sum_{a \in I_{\mathcal{P}}(X)} \mu(X \cap a) \leq \sum_{a \in I_{\mathcal{P}}(X)} \mu(a) \leq \Big(\sum_{a \in I_{\mathcal{P}}(X)} \nu(a) \Big) + \|\mathcal{P}\| < \nu(X^\gamma) + \gamma.$$

Assim, $d_P(\mu, \nu) \leq \gamma$. Como $\gamma > \|\mathcal{P}\|$ é arbitrário, temos a desigualdade desejada. □

Dada $f : M \to M$, recorde que f é *equicontínua* em um ponto $x \in M$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(y, x) < \delta \implies d(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq 0.$$

Teorema 4.4. *Para a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\widetilde{f}$ é equicontínua em todo ponto.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ satisfazendo a propriedade (Q). Dado $\varepsilon > 0$, existem uma partição $\mathcal{P}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$ e um inteiro $q \geq 1$ de modo que toda componente de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P})$ é um balão de tipo (q, q). Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ tais que

$$d_P(\mu, \nu) < \min \Big\{ \delta(\mathcal{P}), \frac{\|\mathcal{P}\|}{2\,\mathrm{card}(\mathcal{P})} \Big\}.$$

Pelo Lema 4.1,

$$|\mu(a) - \nu(a)| < \frac{\|\mathcal{P}\|}{2\,\mathrm{card}(\mathcal{P})} \qquad (a \in \mathcal{P}).$$

Fixe $a \in \mathcal{P}$ e $n \geq 0$. Seja B a componente (balão) de $\mathrm{Gr}(f, \mathcal{P})$ que contém a como um vértice. Então,

$$|(\widetilde{f}^n(\mu))(a) - (\widetilde{f}^n(\nu))(a)| = |\mu(f^{-n}(a)) - \nu(f^{-n}(a))| < \frac{\|\mathcal{P}\|}{\mathrm{card}(\mathcal{P})},$$

pois $f^{-n}(a)$ é vazio ou um vértice de B ou a união de dois vértices de B. Portanto, segue do Lema 4.2 que

$$d_P(\widetilde{f}^n(\mu), \widetilde{f}^n(\nu)) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq 0.$$

Isto completa a demonstração. □

O resultado anterior não é válido no caso dos homeomorfismos. De fato, foi provado em [15] que o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ não é equicontínuo em cada ponto de um conjunto não-enumerável, donde o mesmo é válido para a aplicação induzida $\widetilde{h}$.

O teorema anterior tem consequências interessantes:

Corolário 4.1. *Para a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\widetilde{f}$ não tem par Li-Yorke.*

Corolário 4.2. *Para a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\mathrm{ent}(\widetilde{f}) = 0$.*

Foi provado no capítulo anterior que para a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ (resp. $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$), a aplicação induzida $\overline{f}$ (resp. $\overline{h}$) é contínua em cadeia em todo ponto (Teorema 3.6) (resp. é contínua em cadeia em todo ponto de um aberto denso) (resp. Teorema 3.7). Veremos que a situação é completamente diferente para a aplicação induzida $\widetilde{f}$ (resp. $\widetilde{h}$). Com efeito, para a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ (resp. $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$), a aplicação induzida $\widetilde{f}$ (resp. $\widetilde{h}$) não tem pontos de continuidade em cadeia. Vamos obter tal fato através um resultado mais geral, válido para espaços métricos compactos arbitrários.

Lema 4.3. *Seja (M,d) um espaço métrico compacto. Se $f \in \mathcal{C}(M)$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}(M)$, $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$, então*

$$\widetilde{f}(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha\widetilde{f}(\mu) + \beta\widetilde{f}(\nu).$$

Demonstração. Para cada subconjunto de Borel X de M,

$$\begin{aligned}(\widetilde{f}(\alpha\mu + \beta\nu))(X) &= (\alpha\mu + \beta\nu)(f^{-1}(X)) = \alpha\mu(f^{-1}(X)) + \beta\nu(f^{-1}(X)) \\ &= \alpha(\widetilde{f}(\mu))(X) + \beta(\widetilde{f}(\nu))(X) = (\alpha\widetilde{f}(\mu) + \beta\widetilde{f}(\nu))(X),\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Lema 4.4. *Seja (M,d) um espaço métrico compacto. Se $\mu, \nu \in \mathcal{M}(M)$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ e $1 - (n+1)\delta > 0$, então*

$$d_P\big((1-(n+1)\delta)\mu + (n+1)\delta\nu, (1-n\delta)\mu + n\delta\nu\big) \leq \delta.$$

Demonstração. Para cada subconjunto de Borel X de M,

$$\begin{aligned}((1-(n+1)\delta)\mu + (n+1)\delta\nu)(X) &= ((1-n\delta)\mu + n\delta\nu)(X) + \delta(\nu(X) - \mu(X)) \\ &\leq ((1-n\delta)\mu + n\delta\nu)(X^{\delta}) + \delta.\end{aligned}$$

Isto implica a desigualdade desejada. □

Seja (M,d) um espaço métrico compacto. Para cada $z \in M$, $\pi_z \in \mathcal{M}(M)$ denota a *massa unitária concentrada em* z. Note que

$$d_P(\pi_z, \pi_w) = \min\{d(z,w), 1\}.$$

Além disso, para cada $f \in \mathcal{C}(M)$,

$$\widetilde{f}(\pi_z) = \pi_{f(z)}.$$

Teorema 4.5. *Seja (M,d) um espaço métrico compacto. Dado $0 < \delta < 1$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $f \in \mathcal{C}(M)$, cada $\mu, \nu \in \mathcal{M}(M)$ e cada $k \geq k_0$, existem*

$$\mu_0 \in B(\mu;\delta),\ \ \mu_1 \in B(\widetilde{f}(\mu_0);\delta),\ \ \mu_2 \in B(\widetilde{f}(\mu_1);\delta), \ldots, \mu_k \in B(\widetilde{f}(\mu_{k-1});\delta)$$

tais que

$$\mu_k = \widetilde{f}^{\,k}(\nu).$$

Em particular, se tomarmos $\nu = \pi_z$ para algum $z \in M$, então

$$\mu_k = \pi_{f^k(z)}.$$

Demonstração. Seja $0 < \gamma < \delta$ e tome $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0\gamma < 1 \leq (k_0+1)\gamma$. Defina

$$\mu_0 := (1-\gamma)\mu + \gamma\nu.$$

Pelo Lema 4.4, $d_P(\mu_0, \mu) \leq \gamma < \delta$. Pelo Lema 4.3,

$$\widetilde{f}(\mu_0) = (1-\gamma)\widetilde{f}(\mu) + \gamma\widetilde{f}(\nu).$$

Defina

$$\mu_1 := (1-2\gamma)\widetilde{f}(\mu) + 2\gamma\widetilde{f}(\nu).$$

Pelo Lema 4.4, $d_P(\mu_1, \widetilde{f}(\mu_0)) \leq \gamma < \delta$. Pelo Lema 4.3,

$$\widetilde{f}(\mu_1) = (1-2\gamma)\widetilde{f}^{\,2}(\mu) + 2\gamma\widetilde{f}^{\,2}(\nu).$$

Continue este processo até definir

$$\mu_{k_0-1} := (1-k_0\gamma)\widetilde{f}^{\,k_0-1}(\mu) + k_0\gamma\widetilde{f}^{\,k_0-1}(\nu).$$

Pelo Lema 4.3,

$$\widetilde{f}(\mu_{k_0-1}) = (1-k_0\gamma)\widetilde{f}^{k_0}(\mu) + k_0\gamma\widetilde{f}^{k_0}(\nu).$$

Agora, defina

$$\mu_{k_0} := \widetilde{f}^{k_0}(\nu).$$

Para cada subconjunto de Borel X de M,

$$(\widetilde{f}(\mu_{k_0-1}))(X) \leq 1 - k_0\gamma + k_0\gamma(\widetilde{f}^{k_0}(\nu))(X) \leq \mu_{k_0}(X^\gamma) + \gamma.$$

Assim, $d_P(\mu_{k_0}, \widetilde{f}(\mu_{k_0-1})) \leq \gamma < \delta$. Finalmente, é suficiente completar a sequência definindo $\mu_{k_0+1} := \widetilde{f}(\mu_{k_0}), \ldots, \mu_k := \widetilde{f}(\mu_{k-1})$. □

Teorema 4.6. *Seja* (M,d) *em espaço métrico compacto. Dado* $0 < \delta < 1$, *existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $h \in \mathcal{H}(M)$, *cada* $\mu, \nu \in \mathcal{M}(M)$ *e cada* $k \geq k_0$, *existem*

$$\mu_0 \in B(\mu;\delta),\ \mu_1 \in B(\widetilde{h}(\mu_0);\delta),\ \mu_2 \in B(\widetilde{h}(\mu_1);\delta), \ldots, \mu_k \in B(\widetilde{h}(\mu_{k-1});\delta)$$

tais que

$$\mu_k = \nu.$$

Demonstração. Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ como no Teorema 4.5. Como $h \in \mathcal{H}(M)$, podemos tomar $\nu' \in \mathcal{M}(M)$ tal que $\widetilde{h}^k(\nu') = \nu$. Consequentemente, é suficiente considerar ν' em lugar de ν no Teorema 4.5. □

O próximo resultado mostra que existe uma condição necessária muito forte para que $\widetilde{f}$ seja contínua em cadeia em algum ponto.

Teorema 4.7. *Seja* (M,d) *em espaço métrico compacto. Se* $f \in \mathcal{C}(M)$ *e* $\widetilde{f}$ *é contínua em cadeia em algum ponto, então*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(M) \quad \text{é um conjunto unitário.}$$

Demonstração. Ponha $Y := \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(M)$. Por hipótese, existe $\mu \in \mathcal{M}(M)$ tal que $\widetilde{f}$ é contínua em cadeia em μ. Fixe $0 < \varepsilon < 1/2$. Existe $\delta > 0$ tal que as relações

$$\mu_0 \in B(\mu;\delta),\ \mu_1 \in B(\widetilde{f}(\mu_0);\delta),\ \mu_2 \in B(\widetilde{f}(\mu_1);\delta), \ldots$$

implicam
$$d_P(\mu_n, \widetilde{f}^n(\mu)) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq 0.$$
Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ associado a este δ como no Teorema 4.5. Dado $y \in Y$, podemos tomar $z \in X$ tal que $f^{k_0}(z) = y$. Pelo Teorema 4.5 com $\nu = \pi_z$ e $k = k_0$, existem
$$\mu_0 \in B(\mu; \delta),\ \mu_1 \in B(\widetilde{f}(\mu_0); \delta),\ \mu_2 \in B(\widetilde{f}(\mu_1); \delta), \ldots, \mu_{k_0} \in B(\widetilde{f}(\mu_{k_0-1}); \delta)$$
com
$$\mu_{k_0} = \pi_{f^{k_0}(z)} = \pi_y.$$
Daí, $d_P(\pi_y, \widetilde{f}^{k_0}(\mu)) < \varepsilon$. Como $y \in Y$ é arbitrário, concluímos que
$$d_P(\pi_y, \pi_w) < 2\varepsilon \quad \text{sempre que } y, w \in Y.$$
Isto implica que $\operatorname{diam}(Y) \leq 2\varepsilon$. □

Para a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, como f não tem pontos periódicos [15, Teorema 5.5, (a)], segue do teorema anterior que $\widetilde{f}$ não tem pontos de continuidade em cadeia.

Teorema 4.8. *Seja (M, d) um espaço métrico compacto com pelo menos dois pontos distintos. Para todo $h \in \mathcal{H}(M)$, $\widetilde{h}$ não tem pontos de continuidade em cadeia.*

Demonstração. Segue imediatamente do teorema anterior. □

Definição 4.4. *Seja (M, d) um espaço métrico. Dada $f \in \mathcal{C}(M)$, f é dita* topologicamente transitiva *(resp.* misturadora*) se, para qualquer par $U, V \subset M$ de conjuntos abertos e não-vazios, existe $k \in \mathbb{N}_0$ (resp. $k_0 \in \mathbb{N}_0$) tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ (resp. para todo $k \geq k_0$).*

Definição 4.5. *Seja (M, d) um espaço métrico. Dados $f \in \mathcal{C}(M)$ e $\delta > 0$, dizemos que uma sequência finita $(x_n)_{n=0,1,\ldots,k}$ de elementos de M é uma* δ-cadeia de x_0 a x_k *se $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta$ para todo $n = 0, 1, \ldots, k-1$. Neste caso, dizemos que k é o comprimento da cadeia.*

Dizemos que f é misturadora em cadeia *se, para cada $\delta > 0$ e cada par $x, y \in M$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$, existe uma δ-cadeia de x a y com comprimento k.*

Note que se f é misturadora em cadeia, então f é necessariamente sobrejetiva.

Teorema 4.9. *Seja (M, d) um espaço métrico compacto. Para todo $h \in \mathcal{H}(M)$, $\widetilde{h}$ é misturadora em cadeia.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 4.6. □

Tendo em vista o teorema anterior, é natural indagar se $\widetilde{h}$ é sempre misturadora. Vamos ver que este não é o caso. Com efeito, foi provado em [8] que se $\widetilde{h}$ é topologicamente transitivo então h é topologicamente transitivo, mas a recíproca não é verdade em geral. Como uma consequência, para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\widetilde{h}$ não é topologicamente transitivo.

Por outro lado, para a função genérica $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, como f não é sobrejetiva, segue que $\widetilde{f}$ não é topologicamente transitiva nem misturadora em cadeia.

Foi provado no capítulo anterior (Teorema 3.8) que para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, a aplicação induzida $\overline{h}$ tem a propriedade do sombreamento. Novamente, veremos que a aplicação induzida $\widetilde{h}$ tem um comportamento completamente diferente.

Teorema 4.10. *Para o homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $\widetilde{h}$ não tem a propriedade do sombreamento.*

Demonstração. Fixe um homeomorfismo genérico $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ e suponha que $\widetilde{h}$ tem a propriedade do sombreamento. Seja U, V um par de conjuntos abertos e não-vazios em $\mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. Fixe $\mu \in U$ e $\nu \in V$, e tome $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(\mu; \varepsilon) \subset U \qquad \text{e} \qquad B(\nu; \varepsilon) \subset V.$$

Como $\widetilde{h}$ tem a propriedade do sombreamento, existe um $\delta > 0$ associado a este ε de acordo com a definição de sombreamento. Como $\widetilde{h}$ é misturante em cadeia (Teorema 4.9), existe uma δ-cadeia $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k)$ de $\widetilde{h}$ começando em $\mu_0 = \mu$ e terminando em $\mu_k = \nu$. Estenda esta δ-cadeia a uma δ-pseudotrajetória $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\widetilde{h}$. Pelo sombreamento, existe $\eta \in \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ tal que

$$d_P(\mu_n, \widetilde{h}^n(\eta)) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, $\eta \in U$ e $\widetilde{h}^k(\eta) \in V$, o que mostra que $\widetilde{h}$ é topologicamente transitivo. Como observado após a demonstração do Teorema 4.9, isto é uma contradição. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] F. Abdenur & N. M. Andersson, *Ergodic theory of generic continuous maps*, Commun. in Math. Phys. **318** (2013), no. 3, 831–855. 1

[2] G. Acosta, A. Illanes & H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl. **156** (2009), no. 5, 1013–1033. 2

[3] R. L. Adler, A. G. Konheim & M. H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 309–319. 17

[4] S. J. Agronsky, A. M. Bruckner & M. Laczkovich, *Dynamics of typical continuous functions*, J. London Math. Soc. (2) **40** (1989), no. 2, 227–243. 1

[5] E. Akin, *On chain continuity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **2** (1996), no. 1, 111–120. 19

[6] E. Akin, E. Glasner & B. Weiss, *Generically there is but one self homeomorphism of the Cantor set*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 7, 3613–3630. 1, 2

[7] E. Akin, M. Hurley & J. A. Kennedy, *Dynamics of topologically generic homeomorphisms*, Mem. Amer. Math. Soc. **164** (2003), no. 783. 1, 25

[8] W. Bauer & K. Sigmund, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. **79** (1975), 81–92. 1, 44

[9] N. C. Bernardes Jr., *On the predictability of discrete dynamical systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 7, 1983–1992. 1, 19

[10] N. C. Bernardes Jr., *On the predictability of discrete dynamical systems II*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 12, 3473–3483. 1

[11] N. C. Bernardes Jr., *Limit sets of typical continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **319** (2006), no. 2, 651–659. 1

[12] N. C. Bernardes Jr., *On the predictability of discrete dynamical systems III*, J. Math. Anal. Appl. **339** (2008), no. 1, 58–69. 1

[13] N. C. Bernardes Jr., *Limit sets of typical homeomorphisms*, Canad. Math. Bull. **55** (2012), no. 2, 225–232. 1

[14] N. C. Bernardes Jr., *Addendum to "Limit sets of typical homeomorphisms"*, Canad. Math. Bull., DOI 10.4153/CMB-2012-033-1. 1

[15] N. C. Bernardes Jr. & U. B. Darji, *Graph theoretic structure of maps of the Cantor space*, Adv. Math. **231** (2012), no. 3-4, 1655–1680. 1, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 19, 20, 21, 22, 32, 39, 43

[16] N. C. Bernardes Jr. & R. M. Vermersch, *Hyperspace dynamics of generic maps of the Cantor space*, Canad. J. Math., DOI 10.4153/CJM-2014-005-5.

[17] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. 34

[18] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada & A. Maass, *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math. **547** (2002), 51–68. 17, 38

[19] R. Bowen, *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 401–414. 17

[20] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **470**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. 22

[21] R. Bowen, *ω-limit sets for axiom A diffeomorphisms*, J. Differential Equations **18** (1975), no. 2, 333–339.

[22] L. E. J. Brouwer, *On the structure of perfect sets of points*, Proc. Akad. Amsterdam **12** (1910), 785–794. 22

[23] E. D'Aniello & U. B. Darji, *Chaos among self-maps of the Cantor space*, J. Math. Anal. Appl. **381** (2011), no. 2, 781–788. 4

[24] E. D'Aniello, U. B. Darji & T. H. Steele, *Ubiquity of odometers in topological dynamical systems*, Topology Appl. **156** (2008), no. 2, 240–245. 1, 25

[25] E. I. Dinaburg, *A connection between various entropy characterizations of dynamical systems*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **35** (1971), 324–366. 1

[26] E. Glasner & B. Weiss, *The topological Rohlin property and topological entropy*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 6, 1055–1070. 17

[27] J. L. G. Guirao, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha & A. Peris, *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Anal. **71** (2009), no. 1-2, 1–8. 1

[28] M. Hochman, *Genericity in topological dynamics*, Ergodic Theory Dynam. Systems **28** (2008), no. 1, 125–165. 2

[29] A. Illanes & S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999. 1

[30] A. S. Kechris & C. Rosendal, *Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures*, Proc. London Math. Soc. (3) **94** (2007), no. 2, 302–350. 9, 10

[31] K. Kuratowski, *Topology*, vol 2, Academic Press, New York and London, 1966. 2

[32] H. Lehning, *Dynamics of typical continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), no. 6, 1703–1707. 9

[33] T. Y. Li & J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), no. 10, 985–992. 1

[34] E. Michael, *Topologies on Spaces of Subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), no. 1, 152–182. 11

[35] K. de Oliveira, *Um Primeiro Curso sobre Teoria Ergódica com Aplicações*, **25** Colóquio Brasileiro de Matemática, Vol. **14**, IMPA, 2005. 9

[36] P. Oprocha, *Distributional chaos revisited*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 9, 4901–4925. 34

[37] S. Yu. Pilyugin, *The Space of Dynamical Systems with the C^0-Topology*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **1571**, Springer-Verlag, Berlin, 1994. 12

[38] B. Schweizer & J. Smítal, *Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), no. 2, 737–754. 1

[39] K. Simon, *On the periodic points of a typical continuous function*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), no. 1, 244–249. 12

[40] K. Yano, *A remark on the topological entropy of homeomorphisms*, Invent. Math. **59** (1980), no. 3, 215–220. 1

1