



UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

Estabilidade Assintótica de Modelos de Vigas Viscoelásticas com Cargas Pontuais

Míriam Saldanha Carneiro

sob orientação do

Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Novembro - 2014

Rio de Janeiro - RJ

CIP - Catalogação na Publicação

C289e Carneiro, Míriam Saldanha
Estabilidade assintótica de modelos de vigas viscoelásticas com cargas pontuais / Míriam Saldanha Carneiro. -- Rio de Janeiro, 2014.
109 f.

Orientador: Jaime Edilberto Muñoz Rivera.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Viga de Timoshenko viscoelástica. 2. Sistema híbrido. 3. Problema de transmissão. 4. Estabilidade assintótica. 5. Falta de estabilidade exponencial. I. Rivera, Jaime Edilberto Muñoz, orient. II. Título.

Estabilidade Assintótica de Modelos de Vigas Viscoelásticas com Cargas Pontuais

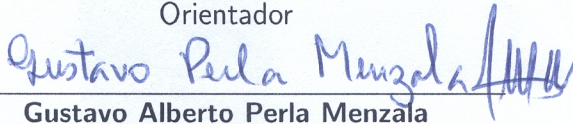
Míriam Saldanha Carneiro

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

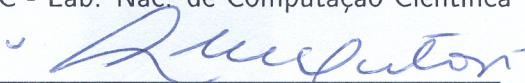
Aprovada por:



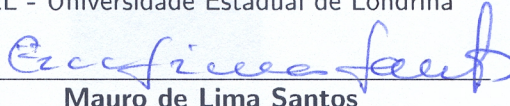
Jaime Edilberto Muñoz Rivera
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
LNCC - Lab. Nac. de Computação Científica
Orientador



Gustavo Alberto Perla Menzala
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
LNCC - Lab. Nac. de Computação Científica



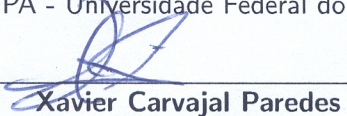
Luci Harue Fatori
UEL - Universidade Estadual de Londrina



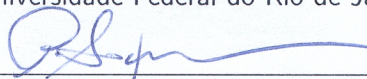
Mauro de Lima Santos
UFPA - Universidade Federal do Pará



Dilberto da Silva Almeida Júnior
UFPA - Universidade Federal do Pará



Xavier Carvajal Paredes
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro



Pedro Gamboa Romero
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro - RJ, 19 de novembro de 2014.

Agradecimentos

Àquele que é poderoso para fazer infinitamente mais do que tudo quanto pedimos ou pensamos, nosso **Deus** misericordioso, que a cada dia nos deu o “maná”, que abriu portas e fez milagres grandiosos.

À **Orias**, meu pai, homem valorosíssimo e de grande caráter. Foi através dele que desenvolvi o gosto pela leitura, que aprendi o valor dos estudos e a dignidade do trabalho. Dez anos sem ele e a saudade só aumenta. Sei que ele ficaria muito feliz e orgulhoso com esse momento.

À **Elvira**, minha mãe, mulher forte, sábia, simples e muito amorosa. Apesar dela não gostar muito da ideia de ficarmos distantes para que eu cursasse o doutorado, entendeu e se fez presente, especialmente através de nossas longas conversas por telefone aos domingos.

À **Marco Antônio**, o amor da minha vida, por ser um super companheiro, o melhor para qualquer situação. Sem ele eu não teria sequer ingressado no doutorado, muito menos conseguido concluí-lo. Além de me ajudar muito com as questões relacionadas à Matemática, me dá forças no dia-a-dia, me apóia, acredita em mim, me acalma e me faz querer ser uma pessoa melhor a cada dia. Ele é o responsável, não apenas pela realização dessa conquista, mas pela minha alegria e é a razão da minha vida. Ao lado dele, onde estivermos, será a cidade maravilhosa.

Às minhas filhotas de quatro patas, **Diana** (in memorian), **Sibico** e **Sarita**. As cachorrinhas mais especiais do mundo. Diana a mais perfeita, Sibico a mais meiga, Sarita a mais feliz. Diana nos deixou no início do segundo semestre de doutorado mas, a sua doce lembrança e a enorme saudade nos acompanhará todos os dias de nossas vidas. O carinho que Sibico nos oferece o tempo todo é um bálsamo em nossos dias. Sarita alivia as nossas tensões e tristezas nos convidando para brincar entre um teorema e outro. Todas as três, companheiras sem igual, literalmente do nosso lado em todos os momentos.

Aos **meus familiares**, pela força mesmo distantes, principalmente à minha irmã **Marluce**,

pelo incentivo constante.

Ao meu sobrinho **Ronaldo**, pelo carinho, pelos inúmeros favores prestados e sempre com um sorriso, especialmente pela atenção e cuidado. Foi ele quem esteve presente nos nossos piores dias no Rio, nos dando forças para suportar esses dias, nos consolando e ouvindo pacientemente as nossas lamúrias.

À minha sogra, **Alice** e à tia **Aristina**, pelo carinho, pelas palavras de incentivo e encorajamento e pelas orações durante todo esse tempo.

Ao **Jaime Rivera**, pelo excelente trabalho de orientação, pelo apoio e paciência a nós dispensado, pela boa vontade em nos receber em sua sala e pelos sábios conselhos; sendo desta forma um dos grandes responsáveis por esta conquista.

Ao **Nelson Nery**, profissional exemplar que, além de orientar os meus trabalhos durante o mestrado na Universidade Federal da Paraíba, se tornou um amigo pelo qual tenho uma imensa consideração. Foi dele que ouvi as primeiras palavras de incentivo para cursar o doutorado na UFRJ.

Ao professor **Gustavo Perla Menzala**, pela maneira carinhosa com que sempre nos tratou, pela humildade e pelo exemplo de pessoa e de profissional.

Aos professores **Luci Harue Fatori**, **Mauro de Lima Santos**, **Dilberto da Silva Almeida Júnior**, **Xavier Carvajal Paredes** e **Pedro Gamboa Romero**, por aceitarem ao convite para participar da banca examinadora, pela atenção dispensada à correção deste trabalho e pelas valiosíssimas contribuições ao mesmo.

À todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRJ,

Aos funcionários da secretaria da pós-graduação e da biblioteca do IM, pela forma atenciosa com que sempre nos atenderam e pela eficiência nos trabalhos prestados;

À **Capes**, pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho estudamos o comportamento assintótico de três modelos híbridos para estruturas formadas por dois materiais fisicamente diferentes - o primeiro, um material viscoelástico com dissipação dada por um termo de memória, e o segundo, um material elástico - com cargas pontuais.

No primeiro problema, a estrutura considerada é uma corda vibrante e, para este modelo, além da boa colocação, mostramos que, quando o efeito de memória é efetivo sobre a parte viscoelástica da corda, o sistema é exponencialmente estável. Na ausência do termo de memória, verificamos a falta de estabilidade exponencial do sistema mas, devido à dissipação introduzida pela carga pontual, obtemos uma taxa polinomial de decaimento.

O segundo modelo estudado refere-se à uma viga de Timoshenko em balanço, com duas memórias agindo na parte viscoelástica, uma sobre a tensão cortante, e outra sobre o momento fletor. Provamos que, neste caso, o modelo é exponencialmente estável. Mostramos ainda que, na ausência dos dois termos de memórias, tem-se a falta de decaimento exponencial do modelo; todavia, graças à dissipação presente na fronteira da viga com a carga, a solução do sistema decai polinomialmente.

Finalmente, no último modelo estudado, consideramos a viga de Timoshenko em balanço mas agora com efeito de memória agindo apenas sobre o momento fletor da parte viscoelástica. Neste caso, sob a hipótese adicional de igualdade de velocidades de ondas das equações, obtém-se a estabilidade exponencial do sistema. Retirando-se esta hipótese, tem-se o decaimento polinomial.

Palavras-chave: Problema de transmissão, efeito de memória, viga de Timoshenko, estabilidade exponencial, estabilidade polinomial, falta de estabilidade exponencial, carga pontual, sistema híbrido.

Abstract

In this paper we study the asymptotic behavior of the behavior of three hybrid models to structures formed by two physically different material - the first of them, a viscoelastic material with dissipation given by memory terms, and the second, an elastic material - with tip load.

In the first problem, the structure is considered to be a vibrating string, and for this model in addition to the well-posedness, we show that when the memory effect is effective on the viscoelastic part of the string, the system is exponentially stable. In the absence of the memory term, there is a lack of exponential decay of the system but due to dissipation introduced by the tip load, we obtain a polynomial decay rate.

The second model examined refers to a beam cantilevered Timoshenko with two memories acting on the viscoelastic part, one on the shear stress, and the other on the flector moment. We proved that, in this case, the model is exponentially stable. We also show that in the absence of the two memory terms, there is a lack of exponential decay of the model, however, thanks to the boundary dissipation of the beam with the tip load, the solution of the system decays polynomially.

Finally, the last model studied, we consider the cantilevered Timoshenko beam but now with memory effect acting only on the bending moment of the viscoelastic part. In this case, under the additional hypothesis of equality of the wave velocities, we obtain the exponential stability of the system. Disregarding this hypothesis, we have polynomial decay.

Key Words: Transmission problem, memory effect, Timoshenko beam, exponential stability, polynomial stability, lack of exponential stability, tip load, hybrid system.

Sumário

Introdução	1
0.1 Vigas de Timoshenko	1
0.2 Materiais Elásticos e Materiais Viscoelásticos	3
0.3 Revisão Bibliográfica	5
0.4 Contribuições e Estrutura do Trabalho	9
1 Resultados Básicos	12
1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$	12
1.2 Os Espaços de Sobolev	14
1.3 Resolvente e Espectro	16
1.4 Semigrupos	18
1.4.1 Propriedades Assintóticas de Semigrupos de Classe C_0	21
1.5 O Espectro Essencial	22
2 Problema de Transmissão para uma Corda Viscoelástica com Carga Pontual	25
2.1 O Modelo	25
2.2 Existência e Unicidade de Soluções	28
2.3 Estabilidade Exponencial	32
2.4 A Falta de Estabilidade Exponencial	38
2.5 Decaimento Polinomial	42
3 Problema de Transmissão para uma Viga de Timoshenko Totalmente Viscoelástica com Carga Pontual	45
3.1 O Modelo	46
3.2 Existência e Unicidade de Soluções	48

3.3	Estabilidade Exponencial	54
3.4	A Falta de Estabilidade Exponencial	66
3.5	Decaimento Polinomial	71
4	Problema de Transmissão para uma Viga de Timoshenko Parcialmente Vis-	
	coelástica com Carga Pontual	75
4.1	O Modelo	75
4.2	Existência e Unicidade de Soluções	78
4.3	Estabilidade Exponencial	83
4.4	Decaimento Polinomial	92
	Considerações Finais	94
	Referências Bibliográficas	96

Introdução

0.1 Vigas de Timoshenko

A viga é um dos elementos fundamentais em engenharia estrutural sendo utilizada em uma variedade de aplicações como, por exemplo, em hélices de helicópteros, satélites flexíveis, asas de aviões, braços robóticos, trilhos de trens e, mais recentemente, em nanotubos de carbono.

As teorias de vigas começaram a ser elaboradas a partir do século XVII e um relato histórico bastante detalhado e interessante sobre o desenvolvimento dessas teorias, feito por Timoshenko, pode ser visto em [50]. Partindo dos trabalhos de Galileu, Timoshenko descreve os refinamentos sofridos pelas teorias de vigas devido, tanto aos seus trabalhos, quanto aos trabalhos de Bernoulli, Euler, Coulomb, Saint-Venant, Poisson, Kirchhoff, Rayleigh, dentre outros.

Entre os mais conhecidos modelos de viga estão o de Euler-Bernoulli e o de Timoshenko. No modelo de Euler-Bernoulli, também chamado de modelo clássico de barras, o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados, e supõe-se que as seções transversais planas permaneçam sempre planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, após sua deformação. Timoshenko propôs uma teoria de vigas em que adiciona tanto o efeito de cisalhamento quanto o efeito de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli. No modelo de Timoshenko, supõe-se também que as seções transversais planas permaneçam planas, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, pois, devido ao cisalhamento, há um giro da seção em relação a essa perpendicular.

A figura abaixo ilustra a diferença entre as hipóteses cinemáticas dos modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. No primeiro, o ângulo ψ de rotação da seção plana é considerado como sendo igual à derivada do deslocamento transversal; já no segundo modelo, que considera

os efeitos da deformação cisalhante, ψ e $\frac{\partial w}{\partial x}$ não têm necessariamente que coincidir.

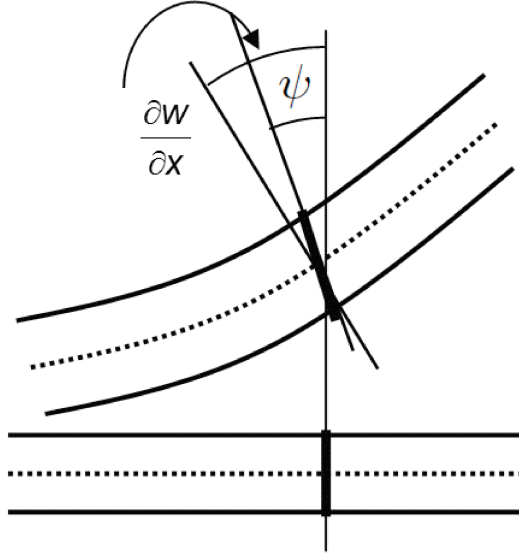


Figura 1: Comparando os Modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

O modelo de Timoshenko para a deformações de vigas é dado pelas equações de movimento

$$(T) : \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = S_x \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - S, \end{cases}$$

onde t denota o tempo, x é a distância ao longo da linha central da estrutura da viga em posição de equilíbrio, φ é o deslocamento transversal, ψ é o ângulo de rotação de um filamento da viga, $\rho_1 = \rho A$ e $\rho_2 = \rho I$, onde ρ é a densidade do material, A é a área da seção transversal e I é o momento de inércia. Além disso, S é a tensão cortante (ou tensão de cisalhamento) e M é o momento fletor.

Quando a viga é formada por um material puramente elástico e homogêneo, S e M são dados pelas seguintes leis constitutivas:

$$S = k(\varphi_x + \psi)$$

$$M = b\psi_x$$

com $k = \tilde{k}GA$ e $b = EI$, onde $\tilde{k}$ é o fator de cisalhamento, G é o módulo de rigidez e E é o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) do material. Para mais detalhes sobre o modelo (T) , ver Timoshenko [51].

Assim, o sistema de Timoshenko (T) para vigas puramente elásticas se escreve como:

$$(T_e) : \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \end{cases}$$

Denotaremos por χ a diferença entre as velocidades de ondas, isto é,

$$\chi := \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}.$$

Em ambos os modelos, utiliza-se a hipótese de pequenas deformações, por isso as variações de geometria podem ser desconsideradas. Dessa forma, esses dois modelos não levam em consideração mudanças na dimensão ou forma da seção transversal da viga quando esta se deforma.

Tanto o modelo de Euler-Bernoulli quanto o modelo de Timoshenko podem ser empregados para o estudo das deformações em vigas. A teoria de Euler-Bernoulli é mais comumente utilizada, pois é bastante simples e fornece aproximações razoáveis para grande parte dos problemas de vigas. Quando as dimensões da seção transversal da viga são pequenas se comparadas ao seu comprimento (vigas compridas e finas) o modelo mais apropriado é, de fato, o de Euler-Bernoulli. Caso contrário, o modelo de Timoshenko é o que fornece melhores resultados, isto é, em se tratando de vigas não-delgadas (vigas grossas), muito comuns em pontes rolantes de galpões industriais, o efeito da flexão deixa de ser predominante e as deformações transversais da seção devido ao esforço cortante se destacam e passam a ter uma influência maior na estrutura. Se tal efeito não é levado em consideração nesse tipo de estrutura, corre-se o risco de um dimensionamento equivocado devido à distribuição dos esforços na região da interface dos materiais, acarretando na ruptura da mesma por cisalhamento.

Um outro aspecto a se destacar é que, embora o modelo de Timoshenko possa parecer mais complexo, elementos finitos baseados neste modelo são mais simples de serem construídos.

Ainda, o modelo de Timoshenko é o que fornece melhores resultados em problemas de vigas viscoelásticas. Neste caso, as deformações de cisalhamento não podem ser desprezadas e, por esse motivo, o modelo de Euler-Bernoulli poderia conduzir a resultados inaceitáveis.

0.2 Materiais Elásticos e Materiais Viscoelásticos

O problema de vigas se torna ainda mais interessante quando consideramos vigas constituídas por materiais fisicamente diferentes. As deformações resultantes da aplicação de um determinado esforço num material vão depender tanto das condições físicas presentes no momento como

da composição e das propriedades mecânicas do material. Atualmente, os sistemas estruturais formados pela combinação de dois materiais vem sendo aplicados de forma expressiva na construção civil. O crescente uso das estruturas mistas deve-se ao excelente resultado, em termos de resistência, apresentado pela combinação das propriedades mecânicas dos materiais utilizados.

Nos três problemas estudados neste trabalho, lidamos com elementos (cordas ou vigas) formadas por dois tipos de materiais, um elástico e outro viscoelástico.

Materiais elásticos são aqueles que, quando sob tensão, apresentam deformações elásticas, isto é, deformações reversíveis. Isto significa que, ao cessar a tensão, o corpo retorna à sua forma e volume originais. Neste caso, a energia de deformação é recuperada quando a tensão aplicada ao material cessa. Quando se fala em elasticidade, o primeiro material que nos vem a mente é a borracha, todavia, até mesmo o aço, quando fabricado com essa finalidade, também apresenta essa propriedade. É o caso do aço para a fabricação das molas.

O físico inglês Robert Hooke (1635-1703), primeiramente observando o comportamento mecânico de uma mola e depois analisando outros sistemas elásticos, verificou que existia sempre proporcionalidade entre força deformante e deformação elástica produzida. Ele enunciou esse resultado de suas observações sob a forma de uma lei geral, publicada em 1676 e conhecida atualmente como Lei de Hooke. Assim, para um sólido elástico e isotrópico submetido a uma carga de tração, vale a Lei de Hooke, a qual pode ser expressa por:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

onde x representa a direção do carregamento, σ a tensão (em pascal), E o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) e ε a deformação (adimensional).

Já os materiais viscosos, quando submetidos a uma tensão de cisalhamento, apresentam deformações viscosas, que são deformações contínuas e irreversíveis. A propriedade que relaciona a taxa de deformação do corpo ao cisalhamento é a viscosidade. Um material viscoso ideal não é capaz de sustentar uma tensão, dissipando a energia de deformação sob a forma de calor, como é o caso de muitos fluidos. Essa propriedade é importante para os processos de fabricação que exigem conformação mecânica como, por exemplo: na prensagem, para a fabricação de partes da carroceria de veículos; na laminação, para a fabricação de chapas; e na extrusão, para a fabricação de tubos.

Finalmente, os materiais viscoelásticos são materiais que ao deformarem-se, apresentam simultaneamente deformações elásticas e viscosas. Tais materiais experimentam, ao sofrerem esforços, deformação elástica mas consomem um certo tempo para retomar ao estado não-deformado após cessarem as tensões.

0.3 Revisão Bibliográfica

Nos últimos anos, o estudo da estabilização de modelos matemáticos envolvendo estruturas flexíveis sujeitas a vibração, têm sido estimulado pelo crescente número de questões de interesse prático. Dentre esses modelos, podemos destacar aqueles relacionados à engenharia estrutural moderna, que requerem mecanismos de controle ativos para estabilizar estruturas intrinsecamente instáveis ou que possuem um amortecimento natural muito fraco, como por exemplo, os modelos que descrevem os deslocamentos de vigas. Nesta seção, apresentaremos um breve resumo dos estudos referentes a modelos deste tipo e que guardam uma maior correlação com aqueles por nós estudados.

As vigas constituem um importante tema de investigação, tanto em engenharia quanto em matemática. No campo da análise matemática, especialmente em teoria de controle, há o interesse em se conhecer o comportamento da energia associada com os modelos dinâmicos. Durante os últimos anos, muitos matemáticos têm se dedicado à esta tarefa, produzindo muitos resultados sobre o comportamento assintótico de modelos de vigas, considerando mecanismos dissipativos, que atuem em todo o domínio ou apenas na fronteira, de atrito ou viscoelástico.

Kim e Renardy [23] mostraram, através de técnicas multiplicativas, o decaimento exponencial da energia associada ao sistema (T_e) acrescido de dois controles na fronteira e obtiveram estimativas numéricas sobre os autovalores do operador associado com o respectivo sistema. Taylor [49] estudou a controlabilidade na fronteira para vigas com características físicas que podem variar ao longo de seu comprimento.

Soufyane [48] provou, usando um mecanismo de atrito localmente distribuído, representado pelo termo $-a(x)\psi_t$ e introduzido na segunda equação de (T_e) , que este sistema é exponencialmente estável se, e somente se, as velocidades de ondas são iguais, isto é, se $\chi = 0$.

Rivera e Racke [34], trataram de um sistema não-linear em domínios limitados unidimensionais,

na forma

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma_1(\varphi_x, \psi)_x = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - \varpi(\psi_x)_x - \sigma_2(\varphi_x, \psi) + d\psi_t = 0, \end{cases}$$

A dissipação friccional é dada por um mecanismo que atua apenas no ângulo de rotação de um filamento da viga. Os autores apresentaram, para o caso linear, uma prova mais simples do que aquela fornecida em [48] para o decaimento exponencial da energia. Além disso, provaram o decaimento polinomial para o caso geral e investigaram o decaimento exponencial para o caso não-linear.

Raposo et al. [43] provaram o decaimento exponencial para um sistema de Timoshenko com dissipação friccional agindo tanto no deslocamento transversal quanto no ângulo de rotação, ou seja, para um sistema obtido de (T_e) introduzindo-se os termos φ_t e ψ_t , respectivamente, à primeira e à segunda equação daquele sistema.

Em [47], Shi e Feng estabeleceram o decaimento exponencial da energia usando controles localmente distribuídos, um em cada equação do sistema (T_e) .

Diversos trabalhos consideraram a dissipação viscoelástica proveniente de um efeito de memória. Ammar-Khodja et al. [3], considerando o efeito de memória agindo apenas sobre o ângulo de rotação, ou seja, tomando-se em (T) , $S = (\varphi_x + \psi)$ e $M = b\psi_x - \int_0^t g(t-s)\psi_x(x, s)ds$, provaram que o sistema assim constituído é uniformemente estável se o núcleo da memória g decai uniformemente. Mais precisamente, considerando a hipótese de igualdade das velocidades de ondas (i.e. $\chi = 0$), eles obtiveram o decaimento exponencial quando o núcleo decai exponencialmente e o decaimento polinomial no caso em que o núcleo decai polinomialmente.

Um outro resultado importante é devido a Muñoz Rivera e Sare [16]. Neste trabalho, os autores estudaram um problema de Timoshenko com história agindo sobre o momento fletor, mais precisamente, estudaram a estabilidade do sistema obtido de (T) ao se tomar $S = k(\varphi_x + \psi)$ e $M = b\psi_x - \int_0^\infty g(s)\psi_x(x, t-s)ds$, com g decaindo exponencialmente. Provaram que este sistema decai exponencialmente se, e somente se, as velocidades de ondas são iguais. No caso contrário, isto é, se $\chi \neq 0$, então o sistema decai polinomialmente.

Um problema interessante surge quando a dissipação atua de diferentes formas sobre o domínio considerado, ou ainda, quando o mecanismo de dissipação é efetivo em apenas uma parte desse domínio. Situações assim ocorrem, por exemplo, quando lidamos com vigas formadas por mais de um tipo de material, os quais apresentam diferentes viscosidades, podendo inclusive acontecer

de uma parte da viga ser constituída de um material puramente elástico, portanto sem dissipação efetiva sobre ele, e outra parte constituída por um material que apresenta algum tipo de dissipação, por exemplo, um material viscoelástico. O modelo matemático para sistemas com essa característica é chamado de **problema de transmissão**. Do ponto de vista matemático um problema de transmissão consiste num problema de valor inicial e de contorno para uma equação hiperbólica e cujo operador elíptico correspondente tem coeficientes descontínuos. Por isso, não podemos esperar que as soluções de um problema de transmissão, quando houver, sejam regulares em todo o domínio. Ao lidarmos com problemas de transmissão é interessante estudarmos o comportamento assintótico das soluções e investigar quais propriedades individuais de cada material são preservadas nessa junção.

Diversos resultados existentes tem trazido luz a questões desse tipo. Um problema de transmissão para ondas viscoelásticas foi estudado por Muñoz Rivera e Oquendo [35]. Neste artigo, os autores mostraram, através de técnicas multiplicativas e argumentos de compacidade, que a dissipação dada pela parte viscoelástica é suficientemente forte para produzir estabilidade exponencial do sistema.

Alves et al. [2] estudaram um problema de transmissão para uma viga de Timoshenko constituída por dois materiais parcialmente viscoelásticos, cada um deles com dissipação dada por um termo de memória que atua apenas sobre o ângulo de rotação. Usando o método da energia, os autores estabeleceram o decaimento exponencial da solução do sistema quando g decai exponencialmente e as velocidades de ondas são iguais. Além disso, mostraram que se g decai polinomialmente, o mesmo se verifica com a solução do sistema.

Um outro tipo de modelo, os chamados **sistemas híbridos**, tem motivado muitas pesquisas, pois dizem respeito ao fenômeno de transmissão de vibrações de uma estrutura para outra. De um modo geral, podemos dizer que um sistema híbrido descreve uma estrutura completa que acopla o movimento vibratório de dois componentes de naturezas diferentes. O exemplo mais simples e clássico é o de um sistema formado por uma corda de comprimento l que possui um corpo rígido anexado no extremo $x = l$. Neste caso, as equações de movimento são:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0) = 0, & t > 0 \\ u_x(l) = -u_{tt}(l) - u_t(l), & t > 0. \end{cases}$$

Do ponto de vista matemático, os sistemas híbridos se escrevem mediante equações diferenciais parciais acopladas com equações diferenciais ordinárias ou com outras equações diferenciais parciais nas condições de contorno. Tomando o sistema acima como exemplo, se denotarmos $u(l, t) = w(t)$, teremos que o movimento do corpo rígido estará descrito por $w(t)$ que satisfaz a equação diferencial ordinária:

$$w_{tt} - w_t = u_x(l)$$

Desta forma, esse sistema acopla a equação de ondas com a equação diferencial ordinária do corpo.

A estabilização de sistemas híbridos tem sido objeto de estudos há vários anos. Um dos trabalhos pioneiros nesta área, devido à Littman e Markus [24], data de 1988. Neste trabalho, os autores estabeleceram a estabilização forte do modelo SCOLE (Spacecraft Control Laboratory Experiment) que descreve as vibrações de um satélite em órbita ligado a uma antena através de uma viga longa e flexível. Este resultado foi obtido mediante a aplicação de controles de força e de momento no ponto de contato da antena com o satélite.

Após esse trabalho, viu-se surgir uma grande quantidade de resultados referentes à estabilização de sistemas híbridos, seja para a equação de ondas, quanto para vigas de Euler-Bernoulli ou para vigas de Timoshenko, com amortecimento interno ou na fronteira. Em [25], Liu e Liu, obtiveram o decaimento exponencial de um sistema híbrido para uma viga não-homogênea de Euler-Bernoulli com inércia rotacional e carga pontual, através de controles aplicados no ponto de contato da viga com a carga.

Andrews e Shillor [6], obtiveram o decaimento exponencial da energia de um sistema híbrido para uma viga de Euler-Bernoulli com viscoelasticidade do tipo Kelvin-Voigt que possui uma carga pontual que contribui com um termo de amortecimento ao sistema devido ao seu conteúdo granular.

O sistema

$$(1) := \begin{cases} y_{tt} - (ay_x)_x = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ a(0)y_x(0, t) - my_{tt}(0, t) = F(t), & t > 0 \\ a(1)y_x(1, t) - My_{tt}(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

foi estudado por diversos autores. Dentre os quais, destacamos os trabalhos de Rao et al. [11], que, para uma escolha conveniente do controle F e negligenciando a massa M da carga pontual,

obtiveram um resultado de estabilidade forte para (1), enquanto que Mifdal [29], estudou a estabilização uniforme do sistema completo (1).

Morgul [32], utilizando o método de Lyapunov, obteve o decaimento exponencial da energia associada a uma estrutura híbrida compreendendo um corpo rígido em rotação, por exemplo, uma nave espacial, e uma viga de Timoshenko anexada a esse corpo rígido através de uma de suas extremidades e que possui a outra extremidade livre. Para obter o decaimento exponencial, foram utilizados controles de fronteira adequados aplicados à extremidade livre da viga e um controle de torque aplicado ao corpo rígido.

Zietsman, Rensburg e Merwe [57], estudaram os efeitos de uma dissipação na fronteira de uma viga de Timoshenko em balanço, isto é, que possui apenas uma extremidade presa, a qual apresenta um corpo rígido anexado à extremidade livre. Os autores mostraram a eficiência e a precisão do método de elementos finitos para o cálculo dos autovalores e autovetores do operador, todavia, não se chegou a obter conclusão referente à estabilização do sistema.

0.4 Contribuições e Estrutura do Trabalho

No primeiro capítulo, faremos um breve resumo dos principais conceitos e resultados utilizados nos capítulos seguintes. Por se tratarem de resultados clássicos, omitiremos suas demonstrações, deixando apenas indicado referências onde estas podem ser encontradas.

No segundo capítulo, consideramos um problema de transmissão para uma corda composta por dois materiais, um viscoelástico, cuja dissipação é dada por um termo do tipo memória com núcleo exponencial, e o outro, um material elástico, portanto, sem dissipação efetiva sobre ele. Consideramos ainda que esta corda possui uma extremidade engastada e a outra extremidade livre mas, com uma carga anexada, a qual apresenta uma dissipação na fronteira com a viga. Mostramos a boa colocação do sistema estabelecendo a existência e unicidade de soluções fracas. O principal resultado apresentado neste capítulo é que, quando o efeito de memória é efetivo sobre a parte viscoelástica da corda, este sistema é exponencialmente estável e, caso contrário, há a falta de estabilidade exponencial do sistema. Isto significa que a dissipação dada pela carga na ponta da corda não é suficiente para produzir estabilidade exponencial, todavia, mostramos que ela faz com que a solução do sistema decaia polinomialmente para zero com $t^{-1/2}$.

No terceiro capítulo, procuramos estabelecer resultados semelhantes aos obtidos para o modelo anterior, mas agora, para um problema de transmissão para uma viga de Timoshenko também constituída por dois componentes, um deles um material viscoelástico, cuja viscoelasticidade é dada por termos de memória com núcleo exponencial, e o outro um material elástico. Do mesmo modo como fizemos no problema anterior, admitimos que a viga está em balanço, ou seja, possui uma extremidade engastada (em $x = 0$) e outra livre, sendo que na extremidade livre há uma carga anexada, a qual apresenta uma dissipação na fronteira com a viga. Estabelecemos a boa colocação do sistema. Provamos que, quando o efeito de memória é efetivo em ambas as equações da parte viscoelástica do sistema, o modelo é exponencialmente estável. Na ausência desses dois termos de memória, provamos a falta de decaimento exponencial do modelo e ainda, mostramos que, embora essa dissipação fornecida pela carga não seja forte o bastante para estabilizar exponencialmente o sistema, ela é suficiente para fazer com que a solução do sistema decaia polinomialmente para zero com $t^{-1/2}$.

Sempre que trabalhamos com sistemas que possuem mecanismos dissipativos, instiga-nos saber qual o "menor número" desses mecanismo a serem introduzidas no modelo de modo que ainda se consiga estabilizá-lo. No caso do sistema híbrido de Timoshenko, consideramos dois efeitos de memória atuando na parte viscoelástica da viga, logo, gostaríamos de analisar o comportamento assintótico do sistema quando "retiramos" um termo de memória, isto é, quando a memória age apenas sobre o momento fletor ou apenas sobre a tensão cortante da parte viscoelástica da viga. Essa questão é parcialmente respondida no capítulo seguinte, onde estudamos o problema híbrido do capítulo anterior mas agora com apenas um termo de memória, o qual atua somente sobre o momento fletor da parte viscoelástica. A boa-colocação do sistema é obtida. Para mostrar o decaimento exponencial faz-se necessária uma hipótese adicional a saber, que as velocidades de ondas das equações do sistema sejam iguais. Retirando-se essa hipótese, prova-se que a solução do sistema decai polinomialmente para zero com $t^{-1/4}$.

Em todos os problemas estudados, os sistemas eram não-autônomos devido aos termos de memória. Com o intuito de lançar mão da teoria de semigrupos para estabelecermos, tanto a boa-colocação quanto a estabilidade exponencial ou polinomial, fez-se necessário, primeiramente, considerarmos o sistema mais geral, o qual chamaremos de *sistema com história*, obtido trocando-se os termos de memória por termos de história (dito de outra forma, o sistema com história é aquele obtido alterando-se o limite inferior do intervalo de integração dos termos de memória

de 0 para $-\infty$). Em seguida, utilizamos um argumento introduzido por Dafermos em [9], [10] e por Fabrizio [13], para obtermos, em cada caso, através da introdução de novas variáveis, um sistema autônomo equivalente ao sistema com história. Diversos autores também já se utilizaram deste mesmo argumento e, a título de exemplo, citamos o interessante e bem apresentado artigo de Grasselli e Pata [41], onde os autores estabeleceram de forma padrão o papel da equação suplementar e o retorno à equação original. Procedendo desta forma, foi possível empregar a teoria de semigrupos para mostrar a boa-colocação e ainda mostrar a estabilidade exponencial do sistema através do método baseado no Teorema de Prüss. A prova da falta de estabilidade exponencial dos modelos foi estabelecida com base no Teorema da Invariância de Weyl enquanto que o decaimento polinomial foi obtido tomando como base o resultado de Borichev e Tomilov.

Embora todos os resultados listados acima sobre a boa-colocação e comportamento assintótico dos sistemas estudados sejam inéditos e, por si só, interessantes, a maior contribuição desta tese reside no segundo e terceiro capítulos, mas especificamente no método empregado para estabelecer a falta de decaimento exponencial dos sistemas em estudo. Comumente o método utilizado para esse propósito consiste em exibir soluções particulares, em termos de senos e cossenos, que não decaiam. Este método nem sempre pode ser aplicado a problemas de transmissão com memória, devido às condições de transmissão. Assim, a maior contribuição de nosso trabalho é divulgar um método novo para provar a falta de decaimento de um sistema, cujo cerne está na invariância do espectro essencial por perturbações compactas.

Finalmente, no último capítulo, discorreremos sobre as conclusões de nossas pesquisas e indicamos alguns trabalhos futuros nessa mesma linha de pensamento.

Capítulo 1

Resultados Básicos

Este capítulo é dedicado à apresentação de conceitos e resultados utilizados nos capítulos seguintes. Estes resultados podem facilmente ser vistos na bibliografia existente e por esse motivo omitiremos as suas demonstrações, deixando apenas, em alguns casos, uma referência de onde encontrá-las.

1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Representa-se por $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, o espaço vetorial constituído pelas funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, cuja potência p , $|f|^p$, é integrável à Lebesgue; isto é:*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Gostaríamos que esses espaços fossem espaços de Banach, a fim de lidar com eles usando as ferramentas da *Análise Funcional*. Todavia, o que ocorre é que a “candidata natural” a definir uma norma em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, que é a função $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} : \mathcal{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

é apenas uma semi-norma, uma vez que $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0$ se, e somente se, $f \equiv 0$ quase sempre em Ω .

Para driblar essa “deficiência” dos espaços $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, procedemos do modo seguinte. Primeiro, definimos em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ uma relação binária $\sim$ definida por:

$$f \sim g \iff f \equiv g \text{ quase sempre em } \Omega.$$

É fácil provar que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência. Assim, faz sentido considerar o quociente de $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, pela relação de equivalência $\sim$.

A coleção de classes de equivalência assim obtida forma um espaço vetorial, com norma definida por

$$\| \{f\} \|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

onde f é um representante da classe de equivalência $\{f\}$.

Os espaços vetoriais normados assim definidos são denotados por $L^p(\Omega)$. Eles exercem um papel fundamental no estudo moderno das Equações Diferenciais. Como, na verdade, não há possibilidade de confusão, é usual, devido à conveniência, escrever $f \in L^p(\Omega)$ e $\|f\|_p$ para denotar os elementos e a norma em $L^p(\Omega)$, onde f é um representante qualquer da classe de equivalência em questão.

Pode-se provar que os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, são todos espaços de Banach. Além disso, o único dos $L^p(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert ocorre quando $p = 2$, com produto interno definido por:

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Finalmente, para definir $L^\infty(\Omega)$ é preciso generalizar a idéia de *supremo*.

Definição 1.2. Uma função mensurável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **essencialmente limitada** quando existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, tal que $f \sim g$. A coleção das classes de equivalência de funções definidas em Ω e essencialmente limitadas é denotada por $L^\infty(\Omega)$.

Pode-se definir uma norma em $L^\infty(\Omega)$ por:

$$\|f\|_\infty = \inf \{ \sup |g|; g \sim f \}.$$

O lado direito da igualdade acima é muitas vezes chamado o *supremo essencial* de f , e denotado por $\text{supess } f$. Prova-se que, com a norma acima, $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Lema 1.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq +\infty$, e q o expoente conjugado de p , isto é, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então:*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Demonstração: Ver [7], Teorema 4.6, p. 92. ■

1.2 Os Espaços de Sobolev

Toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções em $L^p(\Omega)$. Este fato levou **Sobolev**, em 1936, a idealizar uma nova classe de espaços vetoriais, os quais são de fundamental importância no estudo das EDP's. Estes espaços são, em sua homenagem, chamados de **Espaços de Sobolev**.

Definição 1.3. *Chamaremos **multi-índice** a toda n -upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de números naturais. Dado um multi-índice α , definimos a **ordem** $|\alpha|$ de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, e representamos por D^α o **operador derivação***

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

No caso em que $\alpha = (0, 0, 0, \dots, 0)$, definimos $D^0 = I$, onde I é o operador identidade.

Definição 1.4. *Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O **Espaço de Sobolev de ordem m , modelado sobre $L^p(\Omega)$** , que denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais de ordem α , pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente, escrevemos:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}.$$

Quando $1 \leq p < \infty$, não é difícil mostrar que $W^{m,p}(\Omega)$ é munido da norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

e $W^{m,\infty}(\Omega)$ tem norma:

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Pode-se provar que os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, equipados com as respectivas normas acima, são *Espaços de Banach*. Além disso, $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo quando $1 < p < \infty$; e separável quando $1 \leq p < \infty$.

Apenas no caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um **Espaço de Hilbert**, que denotaremos por $H^m(\Omega)$. Simbolicamente, escrevemos:

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

O produto interno de $H^m(\Omega)$ e a respectiva norma induzida são dados respectivamente, por:

$$\langle u; v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}.$$

Embora seja um resultado básico de densidade o fato de que $\mathcal{D}(\Omega)$ possui imersão densa em $L^p(\Omega)$, em geral, não é verdade que $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é “bem maior” que a norma de $L^p(\Omega)$, e, por isso, $W^{m,p}(\Omega)$ possui “menos” seqüências convergentes. Desse modo, a necessidade de se referir à aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ levou à seguinte

Definição 1.5.

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

No caso $p = 2$ denotaremos esta aderência por $H_0^m(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)} = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Lema 1.2 (Desigualdade de Poincaré). *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma constante C_p (dependendo somente de Ω e p), tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [7], Corolário 9.19, p. 290. ■

Observação 1.1. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Consideremos em $H_0^1(\Omega)$ a seguinte expressão*

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

Então a desigualdade de Poincaré diz que $\|\cdot\|$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ e que em $H_0^1(\Omega)$ as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes. Com base nesse resultado, em $H_0^1(\Omega)$, Ω limitado do $\mathbb{R}^n$, considera-se o produto escalar

$$a(u, v) = ((u, v)) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Definição 1.6. Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq q < \infty$. Definimos:

$$W^{-m,q}(\Omega) := [W_0^{m,p}(\Omega)]'$$

onde p e q são expoentes conjugados.

No caso $p = 2$, denotamos $H^{-m}(\Omega) := [H_0^m(\Omega)]'$.

Os teoremas a seguir estabelecem como se dão algumas imersões entre os espaços de Sobolev, quando Ω tem medida finita.

Teorema 1.1. Sejam Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^m , $m \geq 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:

- (i) Se $mp < n$ então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, para $q \in \left[1, \frac{np}{n-mp}\right]$;
- (ii) Se $mp = n$ então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, para $q \in [1, +\infty[$;
- (iii) Se $mp > n$ então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^k(\bar{\Omega})$, para $m - \frac{n}{p} \in [k, k+1[$, onde k é um inteiro não negativo.

Demonstração: Ver [1]. ■

1.3 Resolvente e Espectro

Definição 1.7 (Resolvente, Espectro e Operador Resolvente). Seja $\mathcal{A}$ um operador linear (não necessariamente limitado) num espaço de Banach X . O Conjunto Resolvente de $\mathcal{A}$, denotado por $\rho(\mathcal{A})$, é o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $\lambda I - \mathcal{A}$ é inversível, seu inverso é limitado e tem domínio denso em X . Assim,

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{ existe e } (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Definimos o Espectro de $\mathcal{A}$, denotado por $\sigma(\mathcal{A})$, como sendo o complemento do resolvente de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$, isto é,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}).$$

Para cada $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, o operador $R(\lambda; \mathcal{A}) : X \rightarrow D(\mathcal{A})$ dado por $R(\lambda; \mathcal{A}) := (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ é denominado o *Operador λ -Resolvente de $\mathcal{A}$* ou, simplesmente, o *Operador Resolvente de $\mathcal{A}$* .

No caso em que $\mathcal{A}$ é um operador linear fechado sobre X , se $\lambda I - \mathcal{A}$ é bijetor, então, como consequência do Teorema do Gráfico Fechado, tem-se $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ limitado. Logo, para operadores fechados, o conjunto resolvente pode ser reescrito de uma forma mais simples, como

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \mathcal{A}) \text{ é bijetor}\}$$

Assim, para operadores lineares fechados, um elemento λ pertence a $\sigma(\mathcal{A})$ quando o operador $(\lambda I - \mathcal{A})$ não é injetor ou quando o operador $(\lambda I - \mathcal{A})$ é injetor mas não é sobrejetor. Este último caso pode ainda ser decomposto em dois casos, dependendo das propriedades da imagem do operador $(\lambda I - \mathcal{A})$, a saber, quando a imagem é densa ou não em X . Isso nos permite separar $\sigma(\mathcal{A})$ em três subconjuntos disjuntos: o *Espectro Pontual* $\sigma_p(\mathcal{A})$, o *Espectro Contínuo* $\sigma_c(\mathcal{A})$ e o *Espectro Residual* $\sigma_r(\mathcal{A})$, os quais são definidos como

$$\sigma_p(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \mathcal{A}) \text{ não é injetor}\},$$

$$\sigma_c(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - \mathcal{A} \text{ é injetor mas não é sobrejetor e } \text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) \text{ é densa em } X\},$$

$$\sigma_r(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - \mathcal{A} \text{ é injetor mas não é sobrejetor e } \text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) \text{ não é densa em } X\}$$

Dessa forma, tem-se que $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_c(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A})$.

Observação 1.2. Quando $\mathcal{A}$ é um operador não limitado com operador resolvente $R(\lambda_0; \mathcal{A}) = (\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}$ compacto, para algum $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, então $\sigma_c(\mathcal{A}) = \sigma_d(\mathcal{A}) = \emptyset$. Logo, neste caso, o espectro de $\mathcal{A}$ é composto apenas de autovalores de $\mathcal{A}$, isto é, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) = \text{av}(\mathcal{A})$.

Lema 1.3. O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ é aberto em $\mathbb{C}$. A função $R(\lambda; \mathcal{A})$ é analítica em $\rho(\mathcal{A})$.

Demonstração: Ver [42] - Vol. I, Teorema VIII.2, p. 254. ■

Definição 1.8. Seja $\mathcal{A}$ um operador linear num espaço de Banach X . A Cota Superior do Espectro de $\mathcal{A}$, denotada por $\omega_\sigma(\mathcal{A})$, é definida como sendo

$$\omega_\sigma(\mathcal{A}) = \sup\{\text{Re}(\lambda); \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

Chamamos de *Raio Espectral* de $\mathcal{A}$, e denotamos por $R_\sigma(\mathcal{A})$, ao raio do menor círculo complexo, centrado na origem, que contém todos os elementos de $\sigma(\mathcal{A})$.

Proposição 1.1 (Fórmula de Gelfand para o Raio Espectral). *Sejam $\mathcal{A}$ um operador linear e contínuo num espaço de Banach X e $R_\sigma(\mathcal{A})$ o seu raio espectral. Então,*

$$R_\sigma(\mathcal{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}^k\|^{1/k}.$$

Demonstração: Ver [42] - Vol. I, Teorema VI.6, p. 192. ■

1.4 Semigrupos

Em toda esta seção, salvo menção em contrário, X representará um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ denotará a álgebra dos operadores lineares limitados de X .

Definição 1.9 (Semigrupo e Gerador Infinitesimal). *Uma aplicação $T : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é dita um Semigrupo de Operadores Lineares Limitados em X , e denotada por $(T(t))_{t \geq 0}$, quando:*

- (i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \in [0, +\infty)$.

Diz-se que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um Semigrupo de Classe C_0 ou, um C_0 -Semigrupo, quando

$$(iii) \lim_{t \rightarrow 0^+} \|(T(t) - I)x\| = 0, \forall x \in X. \quad (1.2)$$

Definição 1.10. *O operador linear $\mathcal{A}$ definido por*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h}x \text{ existe}\}$$

$$\mathcal{A}x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h}x, \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

é chamado o Gerador Infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

O gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X .

Observação 1.3. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em X e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Então, a função definida por $U(t) := T(t)x$ é a única solução para o problema de Cauchy abstrato*

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, & t > 0 \\ U(0) = x \end{cases}$$

Além disso, U possui as seguintes regularidades

$$\begin{aligned} U &\in C([0, \infty); X), \quad x \in X \\ U &\in C([0, \infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty); X), \quad x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Definição 1.11. Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é dito um Semigrupo de Contrações quando

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

O teorema a seguir fornece uma caracterização dos operadores lineares que são geradores de C_0 -semigrupo de contrações.

Teorema 1.2 (Hille-Yosida). Seja $\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ um operador linear no espaço de Banach X . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações;
- (b) $\mathcal{A}$ é fechado, densamente definido, e para todo real $\lambda > 0$, tem-se que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e

$$\|R(\lambda; \mathcal{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

- (c) $\mathcal{A}$ é fechado, densamente definido, e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, tem-se que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e

$$\|R(\lambda; \mathcal{A})\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)}.$$

Demonstração: Ver [12], Teorema 3.5, p. 73. ■

Teorema 1.3 (Hille-Yosida). Um operador linear (não limitado) $\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações se, e somente se,

- (i) $\mathcal{A}$ é fechado e $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = X$;
- (ii) O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contém $\mathbb{R}^+$ e para todo real $\lambda > 0$ vale que

$$\|R(\lambda; \mathcal{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver [39], Teorema 3.1, p. 9. ■

Sejam X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^* . Para cada $x \in X$, anotemos

$$J(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset, \forall x \in X$. Uma Aplicação Dualidade é uma aplicação $j: X \rightarrow X^*$ tal que $j(x) \in J(x), \forall x \in X$.

Definição 1.12. Um operador linear $\mathcal{A}$ é dito *Dissipativo* quando, para alguma aplicação dualidade j , se verifica

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}x, j(x) \rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Observação 1.4. No caso em que X é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, um operador linear $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq X \rightarrow X$ é dissipativo se, e somente se,

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno de X .

Teorema 1.4 (Lumer-Phillips). Seja $\mathcal{A}$ um operador linear com domínio denso em X .

- (i) Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, então, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .
- (ii) Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X , então, $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$ e $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Demonstração: Ver [39], Teorema 4.5, p. 16. ■

A seguir, apresentamos um corolário do teorema de Lumer-Phillips bastante útil e que, inclusive, será utilizado diversas vezes neste trabalho para estabelecer a boa-colocação, isto é, a existência e unicidade de soluções, dos problemas estudados.

Corolário 1.1. Seja $\mathcal{A}$ um operador linear (não-limitado) densamente definido no espaço de Hilbert X . Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$ então $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .

Demonstração: Ver [39]. ■

Teorema 1.5. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Então, existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \text{para todo } \forall t \geq 0$$

Demonstração: Ver [39], Teorema 2.2, p. 4. ■

1.4.1 Propriedades Assintóticas de Semigrupos de Classe C_0

Definição 1.13. Diz-se que um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável quando existem constantes $\mu > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Definição 1.14. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal. O tipo do semigrupo gerado por $\mathcal{A}$, denotado por $\omega_0(\mathcal{A})$, é definido como

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}$$

Observação 1.5. Note que $\omega_0(\mathcal{A})$ é o ínfimo das constantes ω que satisfazem a desigualdade do teorema 1.5. Ainda, o tipo de um semigrupo pode nos fornecer informações importantes sobre o crescimento de um semigrupo. De fato, um semigrupo é exponencialmente estável se, e somente se, $\omega_0(\mathcal{A}) < 0$. Quando $-\infty < \omega_0(\mathcal{A}) < 0$ ocorre, o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento ótima determinada por $\omega_0(\mathcal{A})$. De fato, em vista da definição de $\omega_0(\mathcal{A})$, dado $0 < \varepsilon < |\omega_0(\mathcal{A})|$ existe t_ε tal que

$$\omega_0(\mathcal{A}) + \varepsilon \geq \frac{\ln \|T(t)\|}{t} \quad \Rightarrow \quad e^{(\omega_0(\mathcal{A}) + \varepsilon)t} \geq \|T(t)\|, \quad \forall t > t_\varepsilon.$$

Como $T(t)$ é contínuo sobre o intervalo compacto $[0, t_\varepsilon]$, existe uma constante $M_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|T(t)\| \leq M_\varepsilon e^{(\omega_0(\mathcal{A}) + \varepsilon)t}, \quad \forall t \geq 0$$

E então, para ver que $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável basta tomarmos $-\mu = \omega_0(\mathcal{A}) + \varepsilon$ na definição 1.13.

Proposição 1.2. Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$. Se $\omega_0(\mathcal{A}) = 0$, então, $\|T(t)\| = 1$, $\forall t \geq 0$.

Demonstração: Por um lado, temos que $\|T(t)\| \leq 1$, pois $(T(t))_{t \geq 0}$ é de contrações. Para a desigualdade contrária, note que, da definição de $\omega_0(\mathcal{A})$, temos que $1 = e^{0t} = e^{\omega_0(\mathcal{A})t} \leq \|T(t)\|$, $\forall t \geq 0$. ■

Proposição 1.3. Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$. Então,

$$-\infty \leq \omega_\sigma(\mathcal{A}) \leq \omega_0(\mathcal{A}) < +\infty$$

onde $\omega_\sigma(\mathcal{A})$ é a cota superior do espectro de $\mathcal{A}$ (ver definição 1.8).

Demonstração: Ver [12]. ■

Definição 1.15. Diz-se que um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de classe C_0 , com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$, satisfaz o princípio da estabilidade linear quando

$$\omega_\sigma(\mathcal{A}) = \omega_0(\mathcal{A}).$$

Teorema 1.6 (Prüss-Gearhart). Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$. Então, $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se,

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \quad \text{e} \quad \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Ver [12], Teorema 1.11, p. 302. ■

Teorema 1.7 (Borichev-Tomilov). Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$, tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Então,

$$\frac{1}{|\lambda|^\beta} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \|T(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \leq \frac{C}{t^{1/\beta}}, \quad \forall t > 0.$$

Demonstração: Ver [8]. ■

1.5 O Espectro Essencial

Denotaremos por $\mathcal{K}(X)$ o espaço vetorial de todos os operadores compactos sobre X .

Definição 1.16. Um operador $T \in \mathcal{L}(X)$ é chamado um Operador de Fredholm quando

$$\dim[\ker(T)] < \infty \quad \text{e} \quad \dim[X/\text{Im}(T)] < \infty.$$

Proposição 1.4. Um operador $T \in \mathcal{L}(X)$ é um operador de Fredholm se, e somente se, existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que $I - ST$ e $I - TS$ são operadores compactos.

Demonstração: Ver [17]. ■

Definição 1.17. Dado $T \in \mathcal{L}(X)$, denominamos Espectro Essencial de T , e anotamos $\sigma_{ess}(T)$, o conjunto definido por

$$\sigma_{ess}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - T \text{ não é um operador de Fredholm}\}$$

Definição 1.18. Chama-se *Álgebra Calkin*, e denota-se por $\mathcal{C}(X)$, a álgebra obtida ao se considerar, sobre o espaço quociente $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$, o produto $[C][D] = [CD]$, onde $[C]$ é a classe $C + \mathcal{K}(X)$.

Vemos que $\mathcal{C}(X)$ é uma álgebra que possui um elemento unidade, a saber, a classe $[I]$ e, se torna uma álgebra de Banach quando equipada com a norma quociente

$$\|\hat{T}\| := \text{dist}(T, \mathcal{K}(X)) = \inf\{\|T - K\|; K \in \mathcal{K}(X)\}$$

para $\hat{T} := T + \mathcal{K}(X) \in \mathcal{C}(X)$. Ainda, devido a equivalência contida na Proposição 1.4, temos

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma(\hat{T}), \quad \forall T \in \mathcal{L}(X),$$

o que implica que $\sigma_{ess}(T)$ é fechado. Se $\dim X < \infty$, então todos os operadores sobre X são operadores de Fredholm, logo, neste caso, $\sigma_{ess}(T) = \emptyset$. Já, se X tem dimensão infinita, então $\sigma_{ess}(T)$ é sempre não-vazio.

Empregaremos as notações

$$\|T\|_{ess} := \|\hat{T}\|$$

e

$$r_{ess}(T) := r(\hat{T}) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_{ess}(T)\}$$

para, respectivamente, a *Norma Essencial* e o *Raio Espectral Essencial* do operador T . Como $\|T\|_{ess} = \|T + K\|_{ess}$ para todo operador compacto K sobre X , vemos que

$$r_{ess}(T + K) = r_{ess}(T), \quad \forall K \in \mathcal{K}(X).$$

Além disso, usando a fórmula de Gelfand (ver Proposição 1.1) para o raio espectral de $\hat{T}$, obtemos a igualdade

$$r_{ess}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|_{ess}^{1/n}.$$

Teorema 1.8 (Teorema de Weyl). *Sejam $S, T \in \mathcal{L}(X)$. Se $S - T$ é um operador compacto, então S e T tem o mesmo raio espectral essencial.*

Demonstração: Ver [21], Teorema 5.35, p. 244. ■

Definição 1.19. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X e $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal. O Tipo Essencial do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, denotado por $\omega_{ess}(\mathcal{A})$, é definido como sendo

$$\omega_{ess}(\mathcal{A}) := \omega_{ess}(T) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|_{ess}}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|_{ess}}{t}.$$

Proposição 1.5. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X e $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal. Então,

$$-\infty \leq \omega_{ess}(\mathcal{A}) = \frac{\ln r_{ess}(T(t_0))}{t_0} \leq \omega_0(\mathcal{A}) < \infty, \quad \text{para cada } t_0 > 0.$$

Demonstração: Ver [12], Proposição 2.10, p. 258. ■

Corolário 1.2. Sejam T um semigrupo de classe C_0 sobre um espaço de Banach X e $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal. Então

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \max\{\omega_{ess}(\mathcal{A}), \omega_\sigma(\mathcal{A})\}.$$

Demonstração: Ver [12], Corolário 2.11, p. 258. ■

Proposição 1.6. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 sobre um espaço de Banach X , $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal e $K \in \mathcal{K}(X)$. Se $(S(t))_{t \geq 0}$ denota o semigrupo gerado por $\mathcal{A} + K$, então $T(t) - S(t)$ é compacto para todo $t \geq 0$. Em particular,

$$\omega_{ess}(\mathcal{A}) = \omega_{ess}(\mathcal{A} + K).$$

Demonstração: Ver [12], Proposição 2.12, p. 258. ■

Capítulo 2

Problema de Transmissão para uma Corda Viscoelástica com Carga Pontual

Neste capítulo, consideramos um problema de transmissão para uma corda constituída por dois componentes: o primeiro deles, um material viscoelástico (com dissipação viscoelástica dada por um termo de memória) e o outro, um material elástico (sem mecanismo de dissipação atuando sobre ele). Além disso, consideramos que em uma extremidade da corda está anexada uma carga (um corpo oco que contém material granular em seu interior). O principal resultado apresentado neste capítulo é que, quando o efeito de memória é efetivo sobre a parte viscoelástica da corda, o sistema é exponencialmente estável e, caso contrário, há a falta de estabilidade exponencial do sistema. Isto significa que a dissipação dada pela carga na ponta da corda não é suficiente para produzir estabilidade exponencial, todavia, mostramos que ela faz com que a solução do sistema decaia polinomialmente para zero.

2.1 O Modelo

Consideramos o problema de transmissão para as vibrações de uma corda cuja extremidade esquerda está presa e que possui, em sua extremidade direita, um corpo oco cujo interior contém material granular. A corda é formada por dois componentes: um deles, um material viscoelástico e o outro, um material elástico (portanto, sem dissipação agindo sobre ele).

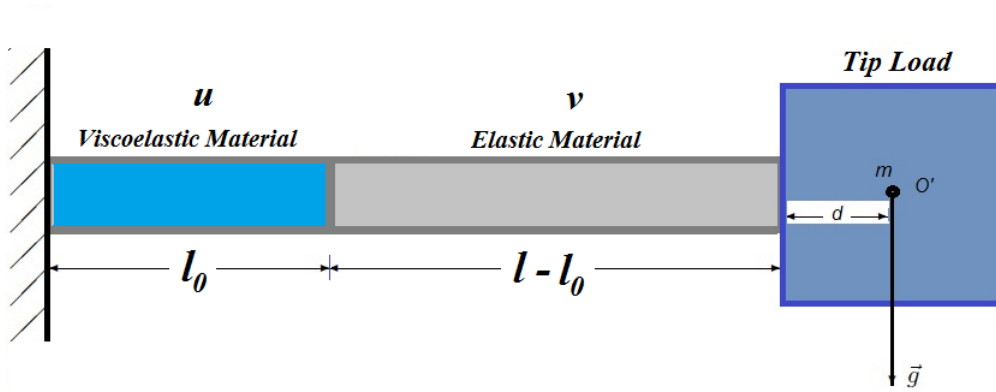


Figura 2.1: Corda com Carga Pontual.

Vamos denotar por U ao deslocamento da corda, isto é,

$$U(x) = \begin{cases} u(x), & x \in]0, l_0[\\ v(x), & x \in]l_0, l[\end{cases},$$

onde l é o comprimento da corda e l_0 é o ponto de transmissão. Com isto, a situação descrita acima pode ser representada pelo seguinte modelo

$$\rho_1 u_{tt} - \alpha_1 u_{xx} + \int_0^t g(t-s) u_{xx}(\cdot, s) ds = 0 \quad \text{em} \quad]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (2.1)$$

$$\rho_2 v_{tt} - \alpha_2 v_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad]l_0, l[\times]0, +\infty[. \quad (2.2)$$

Aqui, $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de relaxamento e $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2$ são constantes positivas que dizem respeito às propriedades físicas da corda. As condições de contorno são dadas por

$$u(0, t) = 0, \quad v(l, t) = w(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.3)$$

e as condições de transmissão são

$$u(l_0, t) = v(l_0, t), \quad \alpha_1 u_x(l_0, t) - \int_0^t g(t-s) u_x(l_0, s) ds = \alpha_2 v_x(l_0, t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

Modelaremos agora o movimento da extremidade direita da corda que possui uma carga pontual. Assumimos que um corpo oco cujo interior contém material granular está rigidamente conectado à corda em $x = l$, possui massa m e centro de massa S' localizado a uma distância

d da extremidade final da corda. Presumimos que o efeito de amortecimento do material granular no interior desse corpo pode ser representado pelo coeficiente de amortecimento γ_1 e cuja contribuição é dada por

$$\rho_3 w_{tt} + \gamma_1 w_t + \gamma_2 w,$$

sendo que o primeiro termo da expressão acima representa a contribuição da inércia desse corpo, o segundo representa o termo de amortecimento dado pelo material granular contido no recipiente, o qual é assumido como sendo proporcional à velocidade e γ_1 é o coeficiente de amortecimento. Assim, o equilíbrio de forças em $x = l$ é descrito por

$$\rho_3 w_{tt} + \gamma_1 w_t + \gamma_2 w + \alpha_2 v_x(l, \cdot) = 0 \quad \text{em} \quad]0, +\infty[, \quad (2.5)$$

onde ρ_3 é uma constante positiva, γ_1 e γ_2 são constantes não-negativas. Finalmente, os dados iniciais são dados por

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \quad \text{em} \quad]0, l_0[, \quad (2.6)$$

$$v(0) = v_0, \quad v_t(0) = v_1 \quad \text{em} \quad]l_0, l[, \quad (2.7)$$

$$w(0) = w_0 \in \mathbb{C}, \quad w_t(0) = w_1 \in \mathbb{C}. \quad (2.8)$$

Assumiremos as seguintes hipóteses sobre a função de relaxamento g :

$$g(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{e} \quad g > 0 \text{ quase sempre em } [0, +\infty[; \quad (2.9)$$

$$\exists k_1, k_2 > 0 : \quad -k_1 g(t) \leq g'(t) \leq -k_2 g(t), \quad \forall t \geq 0; \quad (2.10)$$

$$0 < \alpha := \alpha_1 - \int_0^\infty g(s) ds. \quad (2.11)$$

O principal resultado deste capítulo é mostrar que o sistema (2.1)–(2.8) é exponencialmente estável se, e somente se, o efeito de memória é efetivo sobre a parte viscoelástica da corda. Isto significa que a dissipação introduzida pela carga pontual não é suficientemente forte para produzir taxas de decaimento exponencial quando o efeito de memória não está presente. Finalmente, na ausência do termo de memória, demonstramos que o sistema não é exponencialmente estável todavia, a dissipação dada pela carga pontual produz estabilidade polinomial. O método utilizado para provar a estabilidade exponencial é baseado no Teorema de Prüss (Teorema 1.6). A prova

da falta de estabilidade exponencial é baseado no Teorema de Weyl (Teorema 1.8) e para a prova da estabilidade polinomial utilizamos o resultado devido à Borichev e Tomilov (Teorema 1.7).

2.2 Existência e Unicidade de Soluções

Gostaríamos de utilizar a teoria de semigrupos para estabelecer, tanto os resultados sobre comportamento assintótico das soluções, quanto a boa-colocação do sistema. Para isso, precisamos reescrever o problema de modo a obtermos um sistema autônomo. Com esse objetivo em mente, introduzimos o *problema com história*, o qual é obtido trocando-se a equação (2.1) pela equação com história

$$\rho_1 u_{tt} - \alpha_1 u_{xx} + \int_{-\infty}^t g(t-s) u_{xx}(\cdot, s) ds = 0 \quad \text{em} \quad]0, l_0[\times]0, +\infty[.$$

Seguindo as ideias de Dafermos [9], [10] e Fabrizio [13], introduzimos a notação

$$\eta(x, t, s) := u(x, t) - u(x, t-s),$$

com $s \in [0, +\infty)$; e consideramos o sistema

$$\rho_1 u_{tt} - \alpha u_{xx} - \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds = 0 \quad \text{em} \quad]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (2.12)$$

$$\rho_2 v_{tt} - \alpha_2 v_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (2.13)$$

$$\eta_t + \eta_s - u_t = 0 \quad \text{em} \quad]0, l_0[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[. \quad (2.14)$$

com u , v e w , satisfazendo (2.5) e as condições iniciais (2.6), (2.7), (2.8) e η verificando

$$\eta(x, 0, s) = \eta_0(x, s) =: u_0(x) - u_0(x, -s), \quad \forall (x, s) \in]0, l_0[\times]0, +\infty[, \quad (2.15)$$

com condições de contorno dadas por

$$\eta(x, t, 0) = 0, \quad \forall (x, t) \in]0, l_0[\times]0, +\infty[, \quad (2.16)$$

$$\eta(0, t, s) = 0, \quad \forall (t, s) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[. \quad (2.17)$$

As condições de transmissão agora são

$$u(l_0, t) = v(l_0, t), \quad \alpha u_x(l_0, t) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, t, s) ds = \alpha_2 v_x(l_0, t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.18)$$

Definimos a energia total deste último sistema como

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{l_0} \left[\rho_1 |u_t|^2 + \alpha |u_x|^2 + \int_0^\infty g(s) |\eta_x(s)|^2 ds \right] dx + \right. \quad (2.19)$$

$$\left. + \int_{l_0}^l \left[\rho_2 |v_t|^2 + \alpha_2 |v_x|^2 \right] dx + \rho_3 |w_t|^2 + \gamma_2 |w|^2 \right\}.$$

Faz-se necessário introduzirmos os seguintes espaços:

$$\mathbb{H}^m := H^m(0, l_0) \times H^m(l_0, l), \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{H}_*^m := \{(u, v) \in \mathbb{H}^m; u(0) = 0, u(l_0) = v(l_0)\}, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{L}^2 := L^2(0, l_0) \times L^2(l_0, l);$$

$$H_*^m(0, l_0) := \{f \in H^m(0, l_0); f(0) = 0\}, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$L_g^2 := \left\{ \varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_*^1(0, l_0); \int_0^\infty g(s) \int_0^{l_0} |\varphi_x(s)|^2 dx ds < \infty \right\}.$$

Graças as hipóteses (2.9) sobre a função g temos que L_g^2 é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno definido por

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_g^2} = \int_0^\infty g(s) \int_0^{l_0} \varphi_x(s) \overline{\psi_x(s)} dx ds.$$

Consideramos o seguinte espaço de fase

$$\mathcal{H} := \{(u, v, U, V, \eta, w, W)^T \in \mathbb{H}_*^1 \times \mathbb{L}^2 \times L_g^2 \times \mathbb{C}^2; v(l) = w\}.$$

Note que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert com a norma

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = \alpha \|u_x\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \alpha_2 \|v_x\|_{L^2(l_0, l)}^2 + \rho_1 \|U\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \rho_2 \|V\|_{L^2(l_0, l)}^2 + \|\eta\|_{L_g^2}^2 + \gamma_2 |w|^2 + \rho_3 |W|^2.$$

onde $\mathcal{U} = (u, v, U, V, \eta, w, W)^T \in \mathcal{H}$.

Denotaremos por $\mathcal{A}$ ao operador não-limitado sobre $\mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{A} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \frac{\alpha}{\rho_1} u_{xx} + \frac{1}{\rho_1} \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds \\ \frac{\alpha_2}{\rho_2} v_{xx} \\ U - \eta_s \\ W \\ -\frac{\gamma_1}{\rho_3} W - \frac{\gamma_2}{\rho_3} w - \frac{\alpha_2}{\rho_3} v_x(l) \end{pmatrix},$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \mathcal{U} = (u, v, U, V, \eta, w, W)^T \in \mathcal{H}; \begin{pmatrix} \alpha u + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds, v \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^2, (U, V) \in \mathbb{H}_*^1, \right. \\ \left. V(l) = W, \quad \eta|_{s=0} = 0, \quad \eta_s \in L_g^2, \quad \alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(l_0, s)ds = \alpha_2 v_x(l_0) \right\}.$$

Usando as hipóteses sobre g , um cálculo direto nos dá que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A} \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle = -\gamma_1 |W|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g'(s) |\eta_x(s)|^2 ds dx \leq 0, \quad (2.20)$$

o que significa que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. O sistema (2.12)-(2.18) é equivalente a

$$\mathcal{U}_t = \mathcal{A} \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0; \quad (2.21)$$

onde $\mathcal{U}(t) = (u(t), v(t), U(t), V(t), \eta(t), w(t), W(t))^T$ e $\mathcal{U}_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1, \eta_0, w_0, w_1)^T$.

Sob estas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$ em $\mathcal{H}$. Assim, para qualquer dado inicial $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$, o problema (2.21) possui uma única solução fraca*

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}^0([0, \infty[, \mathcal{H}).$$

Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, então $\mathcal{U}$ é uma solução forte de (2.21), isto é

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^0([0, \infty[, D(\mathcal{A})).$$

Demonstração: É fácil ver que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$; e, como $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo, é suficiente mostrarmos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Para isso, vamos mostrar que, dado $F = (f^1, f^2, \dots, f^7)^T \in \mathcal{H}$, existe um único $\mathcal{U} = (u, v, U, V, \eta, w, W)^T \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A} \mathcal{U} = F$, isto é, tal que

$$U = f^1 \quad (2.22)$$

$$V = f^2 \quad (2.23)$$

$$\frac{\alpha}{\rho_1} u_{xx} + \frac{1}{\rho_1} \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds = f^3 \quad (2.24)$$

$$\frac{\alpha_2}{\rho_2} v_{xx} = f^4 \quad (2.25)$$

$$U - \eta_s = f^5 \quad (2.26)$$

$$W = f^6 = f^2(l) \quad (2.27)$$

$$-\frac{\gamma_1}{\rho_3} W - \frac{\gamma_2}{\rho_3} w - \frac{\alpha_2}{\rho_3} v_x(l) = f^7 \quad (2.28)$$

Com efeito, das equações (2.22) e (2.26), temos que $\eta_s \in L_g^2$ e que

$$\eta(x, s) = sf^1(x) - \int_0^s f^5(x, \tau) d\tau$$

o que significa que η está univocamente determinada. Além disso, usando (2.10) e (2.16), podemos escrever, para cada $T > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^T g(s) \int_0^{l_0} |\eta_x(s)|^2 dx ds &\leq \frac{2}{k_2} \int_0^T g(s) \int_0^{l_0} \eta_x(s) \overline{\eta_{sx}(s)} dx ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T g(s) \int_0^{l_0} |\eta_x(s)|^2 dx ds + \frac{2}{k_2^2} \int_0^T g(s) \int_0^{l_0} |\eta_{sx}(s)|^2 dx ds \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\|\eta\|_{L_g^2} \leq \frac{2}{k_2} \|\eta_s\|_{L_g^2}$$

o que nos permite concluir que $\eta \in L_g^2$. Assim, resta-nos apenas estabelecer a existência e unicidade de solução para o sistema

$$(P) \begin{cases} u_{xx} = \frac{\rho_1}{\alpha} f^3 - \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds \\ v_{xx} = \frac{\rho_2}{\alpha_2} f^4 \\ u(0) = 0, \quad u(l_0) = v(l_0), \quad \alpha_2 v_x(l) + \gamma_2 v(l) = -\rho_3 f^7 - \gamma_1 f^6 \\ \alpha u_x(l_0) - \alpha_2 v_x(l_0) = - \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds. \end{cases}$$

Para isto, consideremos o funcional $T : X \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$T(\varphi, \psi) := -\rho_1 \int_0^{l_0} \overline{f^3} \varphi dx - \int_0^{l_0} \left(\overline{\int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds} \right) \varphi_x dx + \rho_2 \int_{l_0}^l \left(\overline{\int_{l_0}^x f^4(\tau) d\tau} \right) \psi_x dx + \overline{\tilde{G}} \psi(l)$$

para todo $(\varphi, \psi) \in X$, onde $\tilde{G} := \left(G - \rho_2 \int_{l_0}^l f^4 dx \right)$ e $X := \mathbb{H}_*^1$ é o espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle (\varphi, \psi), (u, v) \rangle_X = \alpha \int_0^{l_0} \overline{u_x} \varphi_x dx + \alpha_2 \int_{l_0}^l \overline{v_x} \psi_x dx + \gamma_2 \overline{v(l)} \psi(l).$$

É claro que $T \in X'$; daí, e pelo teorema de representação de Riesz concluímos que existe uma única solução fraca para o sistema (P).

Portando, temos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. ■

2.3 Estabilidade Exponencial

Nesta seção, mostraremos que, se g verifica as hipóteses (2.9)–(2.11), então o correspondente semigrupo é exponencialmente estável. A principal ferramenta utilizada nesta tarefa é o resultado de Prüss (ver Teorema 1.6, no capítulo 1).

No Lema a seguir mostraremos que a primeira condição do Teorema de Prüss é satisfeita, isto é, que o eixo imaginário está contido no conjunto resolvente.

Lema 2.1. *Sob as hipóteses (2.9)–(2.11), o operador $\mathcal{A}$ verifica*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}). \quad (2.29)$$

Demonstração: No Teorema 2.1, já foi mostrado que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Além disso, note que nós não podemos concluir que o espectro de $\mathcal{A}$ é formado somente por autovalores, uma vez que $\mathcal{A}^{-1}$ não é um operador compacto. Desse modo, se (2.29) não ocorre, então existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\lambda_0|$, tal que $\{i\lambda; |\lambda| < |\lambda_0|\} \subset \rho(\mathcal{A})$ e $\sup\{\|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\|; |\lambda| < |\lambda_0|\} = \infty$. Segue daí, que existem sequências $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ e $(\mathcal{U}_n)_n = ((u_n, v_n, U_n, V_n, \eta_n, w_n, W_n)^T)_n \subset D(\mathcal{A})$, tais que

$$\lambda_n \longrightarrow |\lambda_0|, \quad (2.30)$$

$$\|\mathcal{U}_n\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.31)$$

$$(i\lambda_n - \mathcal{A})\mathcal{U}_n = F_n = (f_n^1, \dots, f_n^7) \longrightarrow 0 \quad \text{em } \mathcal{H}. \quad (2.32)$$

Mas, de (2.32) temos que

$$i\lambda_n u_n - U_n = f_n^1 \quad \text{em } H^1(0, l_0) \quad (2.33)$$

$$i\lambda_n v_n - V_n = f_n^2 \quad \text{em } H^1(l_0, l) \quad (2.34)$$

$$i\lambda_n U_n - \frac{\alpha}{\rho_1} u_{n,xx} - \frac{1}{\rho_1} \int_0^\infty g(s) \eta_{n,xx}(s) ds = f_n^3 \quad \text{em } L^2(0, l_0) \quad (2.35)$$

$$i\lambda_n V_n - \frac{\alpha_2}{\rho_2} v_{n,xx} = f_n^4 \quad \text{em } L^2(l_0, l) \quad (2.36)$$

$$i\lambda_n w_n - W_n = f_n^6 \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (2.37)$$

$$i\lambda_n W_n + \frac{\gamma_1}{\rho_3} W_n + \frac{\gamma_2}{\rho_3} w_n + \frac{\alpha_2}{\rho_3} v_{n,x}(l) = f_n^7 \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (2.38)$$

Tomando o produto interno de (2.32) com $\mathcal{U}_n$ em $\mathcal{H}$, temos

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A} \mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n \rangle = -\gamma_1 |W_n|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) |\eta_{n,x}(s)|^2 ds dx \longrightarrow 0. \quad (2.39)$$

Segue da condição (2.10) e de (2.39) que

$$\|\eta_n\|_{L^2_g} \longrightarrow 0. \quad (2.40)$$

Agora, usando (2.30)-(2.34) concluímos que existem $U \in L^2(0, l_0)$, $V \in L^2(l_0, l)$ e subsequências, que ainda denotaremos por $(U_n)_n$ e $(V_n)_n$, tais que

$$U_n \longrightarrow U \quad \text{em } L^2(0, l_0) \quad \text{e} \quad V_n \longrightarrow V \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (2.41)$$

Por um lado, note que, de (2.30), (2.32), (2.35), (2.36) e (2.41), vem que

$$\alpha u_{n,xx} + \int_0^\infty g(s) \eta_{n,xx}(s) ds = i \lambda_n \rho_1 U_n - \rho_1 f_n^3 \longrightarrow i |\lambda_0| \rho_1 U \quad \text{em } L^2(0, l_0), \quad (2.42)$$

$$\alpha_2 v_{n,xx} = \frac{1}{\alpha_2} (i \lambda_n \rho_2 V_n - \rho_2 f_n^4) \longrightarrow i |\lambda_0| \rho_2 V \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (2.43)$$

Dessas duas últimas convergências acima, de (2.31) e de (2.40), vem que existem $\chi_1 \in L^2(0, l_0)$ e $\chi_2 \in L^2(l_0, l)$ tais que, passando a subsequências, se necessário, valem

$$\alpha u_{n,x} + \int_0^\infty g(s) \eta_{n,x}(s) ds \longrightarrow \chi_1 \quad \text{em } L^2(0, l_0) \quad \text{e} \quad v_{n,x} \longrightarrow \chi_2 \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (2.44)$$

Daí, e por (2.30), (2.32)-(2.34) e (2.40), vem que

$$U_{n,x} = i \lambda_n u_{n,x} - f_{n,x}^1 \longrightarrow \frac{i |\lambda_0|}{\alpha} \chi_1 \quad \text{em } L^2(0, l_0), \quad (2.45)$$

$$V_{n,x} = i \lambda_n v_{n,x} - f_{n,x}^2 \longrightarrow i |\lambda_0| \chi_2 \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (2.46)$$

De (2.41), e dessas duas últimas convergências, concluímos que $\chi_1 = \frac{\alpha}{i |\lambda_0|} U_x$ e $\chi_2 = \frac{1}{i |\lambda_0|} V_x$. Levando isso em (2.44) e então, comparando as convergências assim obtidas com aquelas em (2.42) e em (2.43) vemos que U e V satisfazem as equações

$$|\lambda_0|^2 \rho_1 U + \alpha U_{xx} = 0 \quad \text{e} \quad |\lambda_0|^2 \rho_2 V + \alpha_2 V_{xx} = 0. \quad (2.47)$$

As convergências obtidas acima nos dizem que

$$U_n \longrightarrow U, \quad \alpha u_{n,x} + \int_0^\infty g(s) \eta_{n,x}(s) ds \longrightarrow \frac{\alpha}{i |\lambda_0|} U_x \quad \text{em } H^1(0, l_0), \quad (2.48)$$

$$V_n \longrightarrow V, \quad v_{n,x} \longrightarrow \frac{1}{i |\lambda_0|} V_x \quad \text{em } H^1(l_0, l). \quad (2.49)$$

De onde, utilizando (2.37), (2.38) e o fato que $\mathcal{U}_n \in D(\mathcal{A})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, segue que

$$U(0) = 0, \quad U(l_0) = V(l_0), \quad W_n = V_n(l) \longrightarrow V(l), \quad (2.50)$$

$$\alpha U_x(l_0) = \alpha_2 V_x(l_0), \quad w_n = \frac{1}{i \lambda_n} (W_n + f_n^6) \longrightarrow \frac{1}{i |\lambda_0|} V(l), \quad (2.51)$$

$$(-|\lambda_0|^2 \rho_3 + i |\lambda_0| \gamma_1 + \gamma_2) V(l) + \alpha_2 V_x(l) = 0. \quad (2.52)$$

Logo, (U, V) é precisamente a solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} |\lambda_0|^2 \rho_1 U + \alpha U_{xx} = 0 & \text{em }]0, l_0[\\ |\lambda_0|^2 \rho_2 V + \alpha_2 V_{xx} = 0 & \text{em }]l_0, l[\\ U(0) = 0, \quad U(l_0) = V(l_0) \\ \alpha U_x(l_0) = \alpha_2 V_x(l_0), \quad (-|\lambda_0|^2 \rho_3 + i|\lambda_0|(\gamma_1 + \gamma_2))V(l) + \alpha_2 V_x(l) = 0. \end{cases}$$

Este sistema possui uma única solução, a saber, a solução nula; de onde resulta que

$$\mathcal{U}_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } \mathcal{H}, \quad (2.53)$$

o que contradiz (2.31), completando a prova. ■

De agora em diante, C denotará uma constante genérica, que pode ser diferente em diferentes locais, podendo inclusive mudar mesmo de uma linha para outra. Anotamos

$$b := \int_0^\infty g(s) ds. \quad (2.54)$$

Para mostrar que o operador resolvente é limitado sobre o eixo imaginário, vamos mostrar que, para qualquer $F = (f^1, f^2, \dots, f^7)^T \in \mathcal{H}$, a solução $\mathcal{U}$ da equação resolvente

$$(i\lambda I - \mathcal{A}) \mathcal{U} = F \quad (2.55)$$

é limitada; isto é, $\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$. De fato, escrevendo (2.55) em termos de suas equações componentes, temos

$$i\lambda u - U = f^1 \quad (2.56)$$

$$i\lambda v - V = f^2 \quad (2.57)$$

$$i\lambda \rho_1 U - \alpha u_{xx} - \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds = \rho_1 f^3 \quad (2.58)$$

$$i\lambda \rho_2 V - \alpha_2 v_{xx} = \rho_2 f^4 \quad (2.59)$$

$$i\lambda \eta - U + \eta_s = f^5 \quad (2.60)$$

$$i\lambda w - W = f^6 \quad (2.61)$$

$$i\lambda \rho_3 W + \gamma_1 W + \gamma_2 w + \alpha_2 v_x(l) = \rho_3 f^7 \quad (2.62)$$

As propriedades dissipativas de $\mathcal{A}$ implicam na existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$\gamma_1 |W|^2 + \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) |\eta_x(s)|^2 ds dx \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.63)$$

O Lema a seguir desempenha um importante papel na verificação da segunda condição do teorema de Pruss.

Lema 2.2. *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, vale que*

$$\int_0^{l_0} \rho_1 |U|^2 + \alpha |u_x|^2 dx \leq C_\epsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon \left| \alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right|^2.$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.58) por $\int_0^\infty g(s) \overline{\eta(s)} ds$ e usando (2.60), temos

$$\begin{aligned} b\rho_1 \int_0^{l_0} |U|^2 dx &= \rho_1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_s(s)} U ds dx - \rho_1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \overline{f^5} U ds dx + \alpha \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_x(s)} u_x ds dx + \\ &+ \int_0^{l_0} \left| \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right|^2 dx - \rho_1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\eta(s)} f^3 ds dx + \\ &- \underbrace{\left[\alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right] \left[\int_0^\infty g(s) \overline{\eta(l_0, s)} ds \right]}_{:=R_1}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Para cada $\epsilon > 0$, usamos (2.10) e (2.63) para obter

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_s(s)} U ds dx \right] &\leq \epsilon \|U\|_{L^2(0, l_0)}^2 + C_\epsilon \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) |\eta_x(s)|^2 ds \\ &\leq \epsilon \|U\|_{L^2(0, l_0)}^2 + C_\epsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Usando (2.63) uma vez mais, vemos que

$$\operatorname{Re} \left[\alpha \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_x(s)} u_x ds dx \right] \leq \epsilon \|u_x\|_{L^2(0, l_0)}^2 + C_\epsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad (2.66)$$

e

$$|R_1| \leq C_\epsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \left| \alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right|^2.$$

Portanto, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\int_0^{l_0} \rho_1 |U|^2 dx \leq C_\epsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \int_0^{l_0} |u_x|^2 dx + \epsilon \left| \alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right|^2 \quad (2.67)$$

Por outro lado, multiplicando (2.58) por $\overline{u}$ e usando (2.56), encontramos

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^{l_0} |u_x|^2 dx &= \rho_1 \int_0^{l_0} |U|^2 dx + \rho_1 \int_0^{l_0} U \overline{f^1} dx + \rho_1 \int_0^{l_0} f^3 \overline{u} dx - \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) \overline{u_x} ds dx + \\ &+ \underbrace{\left(\alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right) \overline{u(l_0)}}_{:=R_2}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Como

$$|u(l_0)| \leq \|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u_x\|_{L^2}^{1/2},$$

usando (2.56) obtemos, para cada $\epsilon > 0$ e para $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} |R_2| &\leq \epsilon \left| \alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right|^2 + C_\epsilon |u(l_0)|^2 \\ &\leq \epsilon \left| \alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right|^2 + \epsilon \|u_x\|_{L^2}^2 + C_\epsilon \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \epsilon \left| \alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right|^2 + \epsilon \|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{C_\epsilon}{|\lambda|} \|U\|_{L^2}^2 + \frac{C_\epsilon}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Além disso, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\int_0^{l_0} \alpha |u_x|^2 dx \leq C_{\epsilon, \lambda} \int_0^{l_0} |U|^2 dx + C_\epsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_{\epsilon, \lambda} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon \left| \alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right|^2.$$

Da desigualdade acima e de (2.67) segue a conclusão desejada. ■

O próximo Lema é crucial para garantirmos que o decaimento exponencial ocorre mesmo no caso em que $\gamma_1 = 0$. Na verdade, ele fornece uma nova estimativa para o termo da energia envolvendo $|W|^2$ uma vez que aquela extraída de (2.63) só é válida quando γ_1 é positivo.

Lema 2.3. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\rho_2 |W|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_0^{l_0} \alpha |v_x|^2 dx. \quad (2.69)$$

Demonstração: Multiplicando (2.59) por $(x - l_0) \overline{v_x}$, usando (2.57) e lembrando que $V(l) = W$, resulta que

$$\begin{aligned} \rho_2 |W|^2 + \alpha_2 |v_x(l)|^2 &= -\frac{\rho_2}{l - l_0} \int_{l_0}^l |V|^2 dx - \frac{2\rho_2}{l - l_0} \int_{l_0}^l (x - l_0) V \overline{f_x^2} dx + \frac{\alpha_2}{l - l_0} \int_{l_0}^l |v_x|^2 dx + \\ &\quad - \frac{2\rho_2}{l - l_0} \int_{l_0}^l (x - l_0) f^4 \overline{v_x} dx. \end{aligned}$$

E então, tomando a parte real, obtemos a desigualdade desejada. ■

Agora, estamos em condição de provar o resultado principal desta seção.

Teorema 2.2. *Suponha que as hipóteses (2.9)-(2.11) sejam válidas. Então o semigrupo e^{At} é exponencialmente estável.*

Demonstração: Em vista do Teorema 1.6, nós apenas precisamos mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.70)$$

Como o operador resolvente é holomorfo, é suficiente provarmos a desigualdade acima apenas para $|\lambda|$ suficientemente grande. De fato, multiplicando (2.59) por $(l - x)\bar{v}_x$ e usando (2.57), temos

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^l [\rho_2 |V|^2 + \alpha_2 |v_x|^2] dx &= (l - l_0) [\rho_2 |V(l_0)|^2 + \alpha_2 |v_x(l_0)|^2] - 2\rho_2 \int_{l_0}^l (l - x) V \bar{f}_x^2 dx + \\ &\quad - 2\rho_2 \int_{l_0}^l (l - x) f^4 \bar{v}_x dx. \end{aligned}$$

Tomando a parte real, encontramos

$$\int_{l_0}^l [\rho_2 |V|^2 + \alpha_2 |v_x|^2] dx \leq C [\alpha_2 |v_x(l_0)|^2 + \rho_2 |V(l_0)|^2] + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.71)$$

Por outro lado, multiplicando (2.58) por $x \left(\overline{\alpha u_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds} \right)$ e usando (2.56) e (2.60), obtemos

$$\rho_1 |U(l_0)|^2 + \left| \alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right|^2 \leq C \int_0^{l_0} [\alpha |u_x|^2 + \rho_1 |U|^2] dx + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Do Lema 2.2, nós temos, para ϵ suficientemente pequeno e para $|\lambda|$ suficientemente grande, que

$$\rho_1 |U(l_0)|^2 + \left| \alpha u_x(l_0) + \int_0^\infty g(s) \eta_x(l_0, s) ds \right|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.72)$$

Usando as condições de transmissão, a desigualdade (2.71) pode ser estimada por (2.72), isto é

$$\int_{l_0}^l [\alpha_2 |v_x|^2 + \rho_2 |V|^2] dx \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.73)$$

Além disso, do Lema 2.2 e da desigualdade (2.72), vem que

$$\int_0^{l_0} [\rho_1 |U|^2 + \alpha |u_x|^2] dx \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.74)$$

Ainda, o Lema 2.3 juntamente com (2.61) e (2.73), implicam em

$$|W|^2 + |w|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Das três últimas desigualdades e por (2.63), conclui-se que

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

o que implica em

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, o semigrupo é exponencialmente estável. ■

2.4 A Falta de Estabilidade Exponencial

Nesta seção vamos mostrar que a dissipação dada pelo efeito de memória é necessária para a estabilidade exponencial do sistema. Começemos considerando o problema sem efeito de memória, ou seja,

$$\rho_1 u_{tt} - \alpha_1 u_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (2.75)$$

$$\rho_2 v_{tt} - \alpha_2 v_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (2.76)$$

$$\rho_3 w_{tt} + \gamma_1 w_t + \gamma_2 w + \alpha_2 v_x(l) = 0 \quad \text{em} \quad]0, +\infty[\quad (2.77)$$

com condições de contorno

$$u(0) = 0, \quad v(l) = w \quad \text{em} \quad]0, +\infty[, \quad (2.78)$$

com condições de transmissão

$$u(l_0) = v(l_0), \quad \alpha_1 u_x(l_0) = \alpha_2 v_x(l_0) \quad \text{em} \quad]0, +\infty[\quad (2.79)$$

e dados iniciais

$$(u(0), v(0), u_t(0), v_t(0), w(0), w_t(0)) = (u_0, v_0, u_1, v_1, w_0, w_1) \in \check{\mathcal{H}}, \quad (2.80)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \gamma_2$ são como antes e γ_1 é, agora, uma constante positiva. Ainda, para este problema, consideramos o seguinte espaço de fase

$$\check{\mathcal{H}} = \{\mathcal{U} = (u, v, U, V, w, W)^T \in \mathbb{H}_*^1 \times \mathbb{L}^2 \times \mathbb{C}^2; \quad v(l) = w\}.$$

A energia total associada com este sistema é

$$\check{E}(t) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{l_0} [\rho_1 |u_t|^2 + \alpha_1 |u_x|^2] dx + \int_{l_0}^l [\rho_2 |v_t|^2 + \alpha_2 |v_x|^2] dx + \rho_3 |w_t|^2 + \gamma_2 |w|^2 \right], \quad (2.81)$$

e é fácil ver que, para todo $\mathcal{U} \in \check{\mathcal{H}}$, tem-se

$$\frac{d}{dt} \check{E}(t) = -\gamma_1 |w_t|^2. \quad (2.82)$$

Denotaremos por $\mathcal{B}$ o operador não-limitado em $\check{\mathcal{H}}$ definido por

$$\mathcal{B} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \frac{\alpha_1}{\rho_1} u_{xx} \\ \frac{\alpha_2}{\rho_2} v_{xx} \\ W \\ -\frac{\gamma_1}{\rho_3} W - \frac{\gamma_2}{\rho_3} w - \frac{\alpha_2}{\rho_3} v_x(l) \end{pmatrix},$$

com domínio

$$D(\mathcal{B}) = \left\{ \mathcal{U} = (u, v, U, V, w, W)^T \in (\mathbb{H}_*^1 \cap \mathbb{H}^2) \times \mathbb{H}_*^1 \times \mathbb{C}^2; \quad V(l) = W, \quad \alpha_1 u_x(l_0) = \alpha_2 v_x(l_0) \right\}.$$

Tem-se que

$$\operatorname{Re}(\mathcal{B}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\check{\mathcal{H}}} = -\gamma_1 |W|^2. \quad (2.83)$$

Não é difícil ver que o operador $\mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em $\check{\mathcal{H}}$, o qual denotaremos por $T(t)$. Isto mostra que o problema (2.75)-(2.80) é bem-posto.

Para provar que o sistema (2.75)-(2.80) não é exponencialmente estável, a principal ferramenta a ser utilizada é o Teorema de Weyl sobre a invariância do raio espectral essencial por perturbações compactas. Para isso, consideremos o seguinte sistema conservativo

$$\rho_1 \tilde{u}_{tt} - \alpha_1 \tilde{u}_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (2.84)$$

$$\rho_2 \tilde{v}_{tt} - \alpha_2 \tilde{v}_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (2.85)$$

$$\rho_3 \tilde{w}_{tt} + \gamma_2 \tilde{w} + \alpha_2 \tilde{v}_x(l) = 0 \quad \text{em} \quad]0, +\infty[\quad (2.86)$$

verificando as mesmas condições de contorno e de transmissão e com os mesmos dados iniciais do problema sem efeito de memória, onde α_1 , α_2 , ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 e γ_2 são como antes. Isto é, com condições de contorno

$$\tilde{u}(0) = 0, \quad \tilde{v}(l) = \tilde{w} \quad \text{em} \quad]0, +\infty[\quad (2.87)$$

e condições de transmissão

$$\tilde{u}(l_0) = \tilde{v}(l_0), \quad \alpha_1 \tilde{u}_x(l_0) = \alpha_2 \tilde{v}_x(l_0) \quad \text{em} \quad]0, +\infty[\quad (2.88)$$

e dados iniciais

$$(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{u}_t(0), \tilde{v}_t(0), \tilde{w}(0), \tilde{w}_t(0)) = (u_0, v_0, u_1, v_1, w_0, w_1) \in \check{\mathcal{H}}. \quad (2.89)$$

A energia total associada com este sistema é

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{l_0} [\rho_1 |\tilde{u}_t|^2 + \alpha_1 |\tilde{u}_x|^2] dx + \int_{l_0}^l [\rho_2 |\tilde{v}_t|^2 + \alpha_2 |\tilde{v}_x|^2] dx + \rho_3 |\tilde{w}_t|^2 + \gamma_2 |\tilde{w}|^2 \right], \quad (2.90)$$

e não é difícil ver que

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(t) = 0. \quad (2.91)$$

Esta última igualdade nos diz que a energia do sistema não decai e, portanto o sistema é conservativo.

Agora estamos em condições de estabelecer o resultado principal desta seção, o qual está expresso no teorema a seguir.

Teorema 2.3. *O semigrupo $T(t)$ associado com o sistema (2.75)-(2.80) não é exponencialmente estável.*

Demonstração:

A ideia principal é provar que $T(t)$ tem o mesmo raio espectral essencial que o semigrupo associado com o sistema conservativo (2.84)-(2.89), que denotaremos por $T_0(t)$. Aqui, utilizaremos o Teorema de Weyl (Teorema 1.8, do capítulo 1) que estabelece que, *se a diferença de dois operadores é um operador compacto então, eles possuem o mesmo raio espectral essencial*. De posse desse resultado, vamos mostrar que a diferença $T(t) - T_0(t)$ é um operador compacto, o que implicará então em

$$\omega_{ess}(T) = \omega_{ess}(T_0).$$

Mas, como $T_0(t)$ é unitário, então $\omega_{ess}(T_0) = 0$. Denotando por $\omega_0(T)$ e $\omega_\sigma(\mathcal{B})$ o tipo do semigrupo $T(t)$ e a cota superior do espectro $\sigma(\mathcal{B})$, respectivamente, temos que (veja [12], Corolário 2.11, p. 258):

$$\omega_0(T) = \max \{ \omega_\sigma(\mathcal{B}), \omega_{ess}(T) \} = 0. \quad (2.92)$$

Isto implica que $T(t)$ não é exponencialmente estável. Vejamos. Sejam (u, v, w) e $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ soluções dos sistemas (2.75)-(2.80) e (2.84)-(2.89), respectivamente. Denotando por

$$U := u - \tilde{u}, \quad V := v - \tilde{v}, \quad W := w - \tilde{w},$$

temos que (U, V, W) é solução dos sistema

$$\rho_1 U_{tt} - \alpha_1 U_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (2.93)$$

$$\rho_2 V_{tt} - \alpha_2 V_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (2.94)$$

$$\rho_3 W_{tt} + \gamma_1 w_t + \gamma_2 W + \alpha_2 V_x(l) = 0 \quad \text{em} \quad]0, +\infty[\quad (2.95)$$

com condições de contorno

$$U(0) = 0, \quad V(l) = W \quad \text{em} \quad]0, +\infty[, \quad (2.96)$$

e condições de transmissão

$$U(l_0) = V(l_0), \quad \alpha_1 U_x(l_0) = \alpha_2 V_x(l_0) \quad \text{em} \quad]0, +\infty[, \quad (2.97)$$

e dados iniciais

$$(U(0), V(0), U_t(0), V_t(0), W(0), W_t(0)) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \in \check{\mathcal{H}}. \quad (2.98)$$

A energia associada com este sistema (2.93)-(2.98) é dada por

$$\mathbb{E}(t) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{l_0} [\rho_1 |U_t|^2 + \alpha_1 |U_x|^2] dx + \int_{l_0}^l [\rho_2 |V_t|^2 + \alpha_2 |V_x|^2] dx + \rho_3 |W_t|^2 + \gamma_2 |W|^2 \right]. \quad (2.99)$$

É fácil ver que

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(t) + \gamma_1 |W_t|^2 = -\gamma_1 \tilde{w}_t \overline{W}_t,$$

de onde segue que

$$\mathbb{E}(t) + \gamma_1 \int_0^t |W_t|^2 ds = -\gamma_1 \int_0^t \tilde{w}_t \overline{W}_t ds. \quad (2.100)$$

Agora, seja $\mathcal{U}_{0,n} := (u_{0,n}, v_{0,n}, u_{1,n}, v_{1,n}, w_{0,n}, w_{1,n})^T$ uma sequência limitada de dados iniciais no espaço de fase $\check{\mathcal{H}}$. Vamos mostrar que a correspondente sequência de soluções $\mathcal{U}_n := (U_n, V_n, U_{n,t}, V_{n,t}, W_n, W_{n,t})^T$ possui uma subsequência que converge forte em $\check{\mathcal{H}}$.

Para provar isto, note que $(T(t)\mathcal{U}_{0,n})_n$ e $(T_0(t)\mathcal{U}_{0,n})_n$ são limitadas em $\check{\mathcal{H}}$. Isto implica que, para todo $T > 0$, $(\tilde{w}_{n,t})_n$, $(W_{n,t})_n$, $(\tilde{v}_{n,x}(l))_n$ e $(V_{n,x}(l))_n$ são limitadas em $L^2(0, T)$. Isto,

juntamente com (2.86) e (2.95) implicam que $(\tilde{w}_{n,t})_n$ e $(W_{n,t})_n$ são limitadas em $H^1(0, T)$. Como $H^1(0, T)$ está imerso compactamente em $L^2(0, T)$, segue que existem subsequências, que ainda denotaremos do mesmo modo, tais que

$$\tilde{w}_{n,t} \longrightarrow \tilde{w}_t \quad \text{forte em } L^2(0, T). \quad (2.101)$$

e

$$W_{n,t} \longrightarrow W_t \quad \text{forte em } L^2(0, T), \quad (2.102)$$

Dessas convergências segue que

$$\int_0^T \tilde{w}_{n,t} \overline{W}_{n,t} dt \longrightarrow \int_0^T \tilde{w}_t \overline{W}_t dt. \quad (2.103)$$

Usando as duas últimas convergências acima em (2.100) segue que $\|[T(t) - T_0(t)]\mathcal{U}_{0,n}\|_{\check{\mathcal{H}}}$ converge, o que implica que $([T(t) - T_0(t)]\mathcal{U}_{0,n})_n$ converge forte em $\check{\mathcal{H}}$. Isto significa que $T(t) - T_0(t)$ é um operador compacto em $\check{\mathcal{H}}$ e, portanto, a prova está completa.

2.5 Decaimento Polinomial

Nesta seção vamos mostrar que a solução do sistema (2.75)-(2.80) decai polinomialmente para zero como $t^{-1/2}$. Para mostrar isto, usaremos o Teorema de Borichev e Tomilov (Teorema 1.7 do capítulo 1).

Nosso ponto de partida é a equação resolvente

$$i\lambda\mathcal{U} - \mathcal{B}\mathcal{U} = F$$

a qual, em termos de suas equações componentes, se escreve como

$$i\lambda u - U = f^1 \quad (2.104)$$

$$i\lambda v - V = f^2 \quad (2.105)$$

$$i\lambda U - \frac{\alpha_1}{\rho_1} u_{xx} = f^3 \quad (2.106)$$

$$i\lambda V - \frac{\alpha_2}{\rho_2} v_{xx} = f^4 \quad (2.107)$$

$$i\lambda w - W = f^5 \quad (2.108)$$

$$i\lambda W + \frac{\gamma_1}{\rho_3} W + \frac{\gamma_2}{\rho_3} w + \frac{\alpha_2}{\rho_3} v_x(l) = f^6. \quad (2.109)$$

Tomando o produto interno da equação resolvente com $\mathcal{U}$ e usando (2.83) segue que

$$\gamma_1 |W|^2 \leq C \|\mathcal{U}\| \|F\|. \quad (2.110)$$

Lema 2.4. Para $|\lambda|$ suficientemente grande, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{l_0}^l [\rho_2 |V|^2 + \alpha_2 |v_x|^2] dx \leq C |\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \|F\|^2.$$

Demonstração: Multiplicando (2.107) por $(x - l_0)\bar{v}_x$ e usando (2.105), obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{l_0}^l [\rho_2 |V|^2 + \alpha_2 |v_x|^2] dx = \frac{(l - l_0)}{2} [\rho_2 |W|^2 + \alpha_2 |v_x(l)|^2] + \rho_2 \int_{l_0}^l (x - l_0) [f^4 \bar{v}_x + V \bar{f}_x^2] dx. \quad (2.111)$$

Por outro lado, usando (2.109), temos

$$\alpha_2 |v_x(l)|^2 \leq C |\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \|F\|^2. \quad (2.112)$$

Finalmente, levando (2.110) e (2.112) em (2.111) obtemos a desigualdade desejada.

Lema 2.5. Para $|\lambda|$ suficientemente grande, existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^{l_0} [\rho_1 |U|^2 + \alpha_1 |u_x|^2] dx \leq C |\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \|F\|^2.$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.106) por $x\bar{u}_x$, usando (2.104) e as condições de transmissão, temos

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_0} [\rho_1 |U|^2 + \alpha_1 |u_x|^2] dx = \frac{l_0}{2} \left[\rho_1 |V(l_0)|^2 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} |v_x(l_0)|^2 \right] + \rho_1 \int_0^{l_0} x [f^3 \bar{u}_x + U \bar{f}_x^1] dx. \quad (2.113)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (2.107) por $(l - x)\bar{v}_x$ e usando (2.105), obtemos

$$\frac{(l - l_0)}{2} [\rho_2 |V(l_0)|^2 + \alpha_2 |v_x(l_0)|^2] = \frac{1}{2} \int_{l_0}^l [\rho_2 |V|^2 + \alpha_2 |v_x|^2] dx + \rho_2 \int_{l_0}^l (l - x) [f^4 \bar{v}_x + V \bar{f}_x^2] dx.$$

Daí, e pelo Lema 2.4 vem que existe $C > 0$, tal que

$$\rho_2 |V(l_0)|^2 + \alpha_2 |v_x(l_0)|^2 \leq C |\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \|F\|^2. \quad (2.114)$$

Combinando (2.113) e (2.114) obtemos a conclusão desejada. ■

Agora estamos aptos a estabelecer o resultado principal desta seção.

Teorema 2.4. *O semigrupo $T(t)$ associado ao problema sem efeito de memória (2.75)-(2.80) decai polinomialmente como $t^{-1/2}$. Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{B}^k)$, então*

$$\|T(t)\mathcal{U}_0\|_{\check{\mathcal{H}}} \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} \|\mathcal{U}_0\|_{D(\mathcal{B}^k)}.$$

Demonstração: A prova de que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{B})$ é análoga a prova do Lema 2.1 e, por isso, será aqui omitida. Dos Lemas 2.4 e 2.5, segue que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, temos

$$\|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}}^2 \leq C|\lambda|^2 \|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}} \|F\|_{\check{\mathcal{H}}} + C\|F\|_{\check{\mathcal{H}}}^2,$$

e isto implica que

$$\|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}}^2 \leq C|\lambda|^4 \|F\|_{\check{\mathcal{H}}}^2,$$

o que nos dá, para $|\lambda|$ suficientemente grande

$$\|(i\lambda I - \mathcal{B})^{-1}F\|_{\check{\mathcal{H}}} = \|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}} \leq C|\lambda|^2 \|F\|_{\check{\mathcal{H}}}.$$

Daí e do Teorema de Borichev e Tomilov (Teorema 1.7 do capítulo 1) segue a conclusão desejada. ■

Capítulo 3

Problema de Transmissão para uma Viga de Timoshenko Totalmente Viscoelástica com Carga Pontual

Neste capítulo, consideramos um problema de transmissão para uma viga de Timoshenko constituída por dois componentes: o primeiro deles, um material viscoelástico (com dissipação viscoelástica dada por um termo de memória), e o outro, um material elástico (sem mecanismo de dissipação atuando sobre ele). Além disso, consideramos que em uma extremidade da viga está anexada uma carga. Mostraremos que este sistema híbrido é exponencialmente estável quando o efeito de memória é efetivo sobre ambas as equações da parte viscoelástica da viga, isto é, quando a dissipação dada por um efeito de memória está presente tanto no momento fletor quanto na tensão cortante da parte viscoelástica. Além disso, provaremos que, quando não há dissipação viscoelástica, isto é, quando o efeito de dissipação dado pela memória não é efetivo sobre as equações da parte viscoelástica da viga (o que significa que a viga é constituída por dois diferentes materiais puramente elásticos), então há uma falta de estabilidade exponencial, todavia, a dissipação introduzida pela carga anexada à ponta da viga faz com que o sistema seja polinomialmente estável. De onde se conclui que a dissipação dada pela carga não é suficientemente forte para estabilizar exponencialmente o sistema mas é forte o bastante para produzir uma taxa de decaimento polinomial.

3.1 O Modelo

Consideramos um modelo constituído por um problema de transmissão para uma viga de Timoshenko em balanço, cuja extremidade esquerda está presa e que possui, em sua extremidade direita, um corpo oco cujo interior contém material granular. A viga é formada por dois componentes: um deles, um material viscoelástico e o outro, um material elástico (portanto, sem dissipação agindo sobre ele).

Minha Inserção da Figura

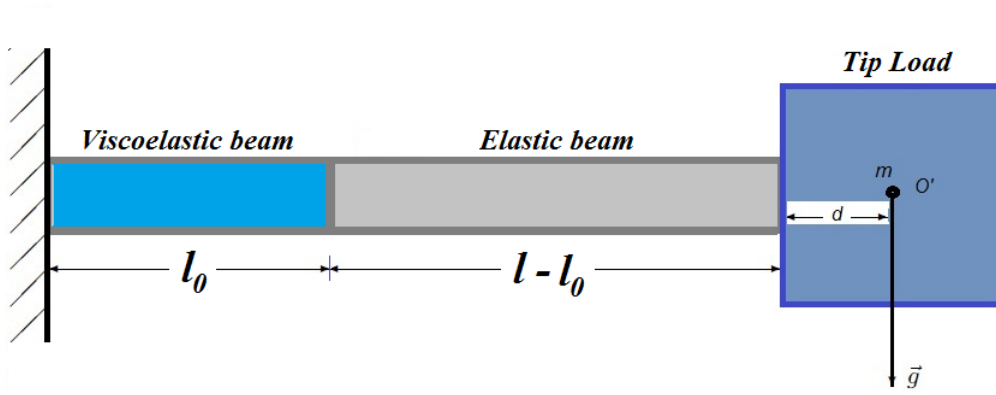


Figura 3.1: Viga de Timoshenko com Carga Pontual.

Denotemos por $\Phi = \Phi(x, t)$ e $\Psi = \Psi(x, t)$, respectivamente, o deslocamento transversal da viga e o ângulo de rotação de um filamento da viga. Adotaremos a seguinte notação:

$$\Phi = \begin{cases} \varphi^1 & \text{in }]0, l_0[\\ \varphi^2 & \text{in }]l_0, l[\end{cases} \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{cases} \psi^1 & \text{in }]0, l_0[\\ \psi^2 & \text{in }]l_0, l[\end{cases} \quad (3.1)$$

onde l é o comprimento da corda e l_0 é o ponto de transmissão. Com isto, a situação descrita acima pode ser representada pelo seguinte modelo

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x + \int_0^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1)_x(., s)ds = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + \int_0^t g_2(t-s) \psi_{xx}^1(., s)ds + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1) + \\ - \int_0^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1)(., s)ds = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.4)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2) = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[. \quad (3.5)$$

Aqui, $g_i : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \{1, 2\}$) são as funções de relaxamento e ρ_j^i, k_i, b_i ($i, j \in \{1, 2\}$) são constantes positivas que dizem respeito às propriedades físicas da viga. As condições de contorno são dadas por

$$\varphi^1(0) = \psi^1(0) = 0, \quad \varphi^2(l) = u \quad \text{e} \quad \psi^2(l) = v \quad \text{em} \quad]0, +\infty[\quad (3.6)$$

e as condições de transmissão são

$$\varphi^1(l_0, t) = \varphi^2(l_0, t), \quad \psi^1(l_0, t) = \psi^2(l_0, t), \quad t \in [0, +\infty[\quad (3.7)$$

$$k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0, t) - \int_0^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0, s)ds = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0, t), \quad t \in [0, +\infty[\quad (3.8)$$

$$b_1\psi_x^1(l_0, t) - \int_0^t g_2(t-s)\psi_x^1(l_0, s)ds = b_2\psi_x^2(l_0, t), \quad t \in [0, +\infty[. \quad (3.9)$$

O efeito da carga pontual é modelado como

$$m_1 u_{tt} + d_1 u_t + \gamma_1 u + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l, \cdot) = 0 \quad \text{em} \quad]0, +\infty[\quad (3.10)$$

$$m_2 v_{tt} + d_2 v_t + \gamma_2 v + b_2 \psi_x^2(l, \cdot) = 0 \quad \text{em} \quad]0, +\infty[\quad (3.11)$$

onde m_i ($i \in \{1, 2\}$) são constantes positivas e d_i, γ_i ($i \in \{1, 2\}$) são constantes não-negativas que refletem propriedades físicas da carga. Finalmente, os dados iniciais são dados por

$$\varphi^1(0) = \varphi_0^1, \quad \varphi_t^1(0) = \varphi_1^1, \quad \psi^1(0) = \psi_0^1, \quad \psi_t^1(0) = \psi_1^1 \quad \text{em} \quad]0, l_0[\quad (3.12)$$

$$\varphi^2(0) = \varphi_0^2, \quad \varphi_t^2(0) = \varphi_1^2, \quad \psi^2(0) = \psi_0^2, \quad \psi_t^2(0) = \psi_1^2 \quad \text{em} \quad]l_0, l[\quad (3.13)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{C}, \quad u_t(0) = u_1 \in \mathbb{C}, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{C}, \quad v_t(0) = v_1 \in \mathbb{C}. \quad (3.14)$$

Neste trabalho, consideramos que as funções de relaxamento decaem exponencialmente, isto é, assumimos as seguintes hipóteses sobre as funções g_i ($i \in \{1, 2\}$):

$$g_i(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{e} \quad g_i > 0 \text{ quase sempre em } [0, +\infty[; \quad (3.15)$$

$$\exists k_1^i, k_2^i > 0 : \quad -k_1^i g_i(t) \leq g_i'(t) \leq -k_2^i g_i(t), \quad t \in [0, +\infty[; \quad (3.16)$$

$$0 < k := k_1 - \int_0^\infty g_1(s)ds, \quad 0 < b := b_1 - \int_0^\infty g_2(s)ds. \quad (3.17)$$

O principal resultado deste trabalho é mostrar que o modelo acima é exponencialmente estável quando o efeito de memória é efetivo em ambas as equações da parte viscoelástica da viga. Além disso, quando não há nenhum efeito de memória, então há uma falta de estabilidade exponencial. Isto significa que as dissipações introduzidas pela carga pontual não são suficientes para produzir a estabilidade exponencial. Finalmente, vamos mostrar que a dissipação introduzida pela carga produz estabilidade polinomial.

3.2 Existência e Unicidade de Soluções

Gostaríamos de utilizar a teoria de semigrupos para estabelecer, tanto os resultados sobre comportamento assintótico das soluções, quanto a boa-colocação do sistema. Para isso, precisamos reescrever o problema de modo a obtermos um sistema autônomo. Com esse objetivo em mente, introduzimos o *problema com história*, que é obtido trocando-se as equações (3.2) e (3.3) pelas equações com história

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x + \int_{-\infty}^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1)_x(.,s)ds = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + \int_{-\infty}^t g_2(t-s) \psi_{xx}^1(.,s)ds + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x + \\ - \int_{-\infty}^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1)_x(.,s)ds = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Seguindo as ideias de Dafermos [9], [10] e Fabrizio [13], introduzimos a notação

$$\eta(x, t, s) := \varphi^1(x, t) - \varphi^1(x, t-s) \quad \text{e} \quad \xi(x, t, s) := \psi^1(x, t) - \psi^1(x, t-s), \quad (3.20)$$

com $s \in [0, +\infty)$; dessa forma, o sistema (3.18), (3.19), (3.4)-(3.14) pode ser escrito como

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k(\varphi_x^1 + \psi^1)_x - \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)_x(s)ds = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (3.21)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b \psi_{xx}^1 - \int_0^\infty g_2(s) \xi_{xx}(s)ds + k(\varphi_x^1 + \psi^1)_x + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)_x(s)ds = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (3.22)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.23)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.24)$$

$$\eta_t + \eta_s - \varphi_t^1 = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\quad (3.25)$$

$$\xi_t + \xi_s - \psi_t^1 = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\quad (3.26)$$

onde k e b estão definidos em (3.17), com $\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, u$ e v satisfazendo as condições (3.6), (3.12), (3.13), (3.14), e η e ξ verificando as condições iniciais

$$\eta(x, 0, s) = \eta_0(x, s) =: \varphi_0^1(x) - \varphi^1(x, -s), \quad (x, s) \in]0, l_0[\times]0, \infty[\quad (3.27)$$

$$\xi(x, 0, s) = \xi_0(x, s) =: \psi_0^1(x) - \psi^1(x, -s), \quad (x, s) \in]0, l_0[\times]0, \infty[\quad (3.28)$$

e condições de contorno

$$\eta(x, t, 0) = \xi(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in]0, l_0[\times]0, +\infty[, \quad (3.29)$$

$$\eta(0, t, s) = \xi(0, t, s) = 0, \quad (t, s) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[. \quad (3.30)$$

As condições de transmissão são reescritas como

$$\varphi^1(l_0, t) = \varphi^2(l_0, t), \quad \psi^1(l_0, t) = \psi^2(l_0, t), \quad t \in [0, +\infty[\quad (3.31)$$

$$k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0, t) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(l_0, t, s)ds = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0, t), \quad t \in [0, +\infty[\quad (3.32)$$

$$b\psi_x^1(l_0, t) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, t, s)ds = b_2\psi_x^2(l_0, t), \quad t \in [0, +\infty[. \quad (3.33)$$

Definimos a energia total do sistema como

$$E(t) := E_1(t) + E_2(t) \quad (3.34)$$

onde

$$E_1(t) := \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left[\rho_1^2 |\varphi_t^1|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^1|^2 + b |\psi_x^1|^2 + k |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 + \int_0^\infty g_2(s) |\xi_x(s)|^2 ds + \int_0^\infty g_1(s) |(\eta_x + \xi)(s)|^2 ds \right] dx$$

e

$$E_2(t) := \frac{1}{2} \left\{ \int_{l_0}^l \left[\rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 \right] dx + \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + m_1 |u_t|^2 + m_2 |v_t|^2 \right\}.$$

Recordando que, no segundo capítulo, foram introduzidos os espaços

$$\mathbb{H}^m := H^m(0, l_0) \times H^m(l_0, l), \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{H}_*^m := \{(u, v) \in \mathbb{H}^m; u(0) = 0, u(l_0) = v(l_0)\}, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{L}^2 := L^2(0, l_0) \times L^2(l_0, l);$$

$$H_*^m(0, l_0) := \{f \in H^m(0, l_0); f(0) = 0\}, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$L_{g_i}^2 := \left\{ \varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_*^1(0, l_0); \int_0^\infty g_i(s) \int_0^{l_0} |\varphi_x(s)|^2 dx ds < \infty \right\}, \quad i \in \{1, 2\};$$

$$L_{g_{1,2}}^2 := L_{g_1}^2 \cap L_{g_2}^2.$$

Vemos que $L_{g_i}^2, i \in \{1, 2\}$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno definido

por

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_{g_i}^2} = \int_0^\infty g_i(s) \int_0^{l_0} \varphi_x(s) \overline{\psi_x(s)} dx ds.$$

Com as notações acima, consideramos o seguinte espaço de fase

$$\mathcal{H} := \left\{ (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \eta, \xi, u, v, U, V)^T \in [\mathbb{H}_*^1]^2 \times [\mathbb{L}^2]^2 \times L_{g_1}^2 \times L_{g_{1,2}}^2 \times \mathbb{C}^4; \varphi^2(l) = u, \psi^2(l) = v \right\}.$$

Note que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno induzido pela norma da energia, a qual, para cada $\mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \eta, \xi, u, v, U, V)^T \in \mathcal{H}$, é dada por

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = & k\|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + b\|\psi_x^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \rho_1^1\|\Phi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \rho_2^1\|\Psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \\ & + k_2\|\varphi_x^2 + \psi^2\|_{L^2(l_0,l)}^2 + b_2\|\psi_x^2\|_{L^2(l_0,l)}^2 + \rho_1^2\|\Phi^2\|_{L^2(l_0,l)}^2 + \rho_2^2\|\Psi^2\|_{L^2(l_0,l)}^2 + \\ & + \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s) |(\eta_x + \xi)(s)|^2 ds dx + \|\xi\|_{L_{g_2}^2}^2 + \gamma_1|u|^2 + \gamma_2|v|^2 + m_1|U|^2 + m_2|V|^2. \end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathcal{A}$ ao operador linear não-limitado em $\mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{A} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \frac{k}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1)_x + \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)_x(s) ds \\ \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2)_x \\ \frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 - \frac{k}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1) + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s) ds - \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s) ds \\ \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2) \\ \Phi^1 - \eta_s \\ \Psi^1 - \xi_s \\ U \\ V \\ -\frac{d_1}{m_1}U - \frac{\gamma_1}{m_1}u - \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2)(l) \\ -\frac{d_2}{m_2}V - \frac{\gamma_2}{m_2}v - \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(l) \end{pmatrix},$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \eta, \xi, u, v, U, V) \in \mathcal{H}; \left(k\varphi^1 + \int_0^\infty g_1(s)\eta(s)ds, \varphi^2 \right) \in \mathbb{H}^2, \right. \\ \left. \left(b\psi^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi(s)ds, \psi^2 \right) \in \mathbb{H}^2, (\Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2) \in [\mathbb{H}_*^1]^2, \eta_s \in L_{g_1}^2, \xi_s \in L_{g_{1,2}}^2, \right. \\ \left. \eta|_{s=0} = \xi|_{s=0} = 0, \Phi^2(l) = U, \Psi^2(l) = V, b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, s)ds = b_2\psi_x^2(l_0), \right. \\ \left. k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(l_0, s)ds = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0) \right\}.$$

Usando as hipóteses sobre as funções g_i ($i \in \{1, 2\}$), um cálculo direto nos dá que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A} \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{H}} = -d_1|U|^2 - d_2|V|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1'(s)|(\eta_x + \xi)(s)|^2 ds dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2'(s)|\xi_x(s)|^2 ds dx \leq 0,$$

o que significa que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo.

O sistema (3.21) - (3.33) é equivalente a

$$\mathcal{U}_t = \mathcal{A} \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0, \quad (3.35)$$

onde

$$\mathcal{U}(t) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t), \psi^1(t), \psi^2(t), \Phi^1(t), \Phi^2(t), \Psi^1(t), \Psi^2(t), \eta(t), \xi(t), u(t), v(t), U(t), V(t))^T \text{ e} \\ \mathcal{U}_0 = (\varphi_0^1, \varphi_0^2, \psi_0^1, \psi_0^2, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \psi_1^1, \psi_1^2, \eta_0, \xi_0, u_0, v_0, u_1, v_1)^T.$$

Sob estas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$ em $\mathcal{H}$. Assim, para qualquer dado inicial $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$, o problema (3.35) possui uma única solução fraca*

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}^0([0, \infty[, \mathcal{H}).$$

Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, então $\mathcal{U}$ é uma solução forte de (3.35), isto é

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^0([0, \infty[, D(\mathcal{A})).$$

Demonstração: É fácil ver que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo, para concluirmos que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, é suficiente mostrarmos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Para isto, vamos verificar que, para cada $F = (f^1, \dots, f^{14})^T \in \mathcal{H}$, existe um único $\mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \eta, \xi, u, v, U, V)^T \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A} \mathcal{U} = F$,

isto é, tal que

$$\Phi^1 = f^1 \quad (3.36)$$

$$\Phi^2 = f^2 \quad (3.37)$$

$$\Psi^1 = f^3 \quad (3.38)$$

$$\Psi^2 = f^4 \quad (3.39)$$

$$\frac{k}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1)_x + \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)_x(s)ds = f^5 \quad (3.40)$$

$$\frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = f^6 \quad (3.41)$$

$$\frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 - \frac{k}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1) + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)ds - \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s)ds = f^7 \quad (3.42)$$

$$\frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2) = f^8 \quad (3.43)$$

$$\Phi^1 - \eta_s = f^9 \quad (3.44)$$

$$\Psi^1 - \xi_s = f^{10} \quad (3.45)$$

$$U = f^{11} = f^2(l) \quad (3.46)$$

$$V = f^{12} = f^4(l) \quad (3.47)$$

$$-\frac{d_1}{m_1}U - \frac{\gamma_1}{m_1}u - \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2)(l) = f^{13} \quad (3.48)$$

$$-\frac{d_2}{m_2}V - \frac{\gamma_2}{m_2}v - \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(l) = f^{14} \quad (3.49)$$

Com efeito, das equações (3.36), (3.44), (3.38) e (3.45), temos que $\eta_s \in L_{g_1}^2$, $\xi_s \in L_{g_{1,2}}^2$ e que

$$\eta(x, s) = sf^1(x) - \int_0^s f^9(x, \tau)d\tau \quad \text{e} \quad \xi(x, s) = sf^3(x) - \int_0^s f^{10}(x, \tau)d\tau,$$

o que significa que η e ξ estão univocamente determinadas. Além disso, usando (3.16) e (3.29), nós podemos escrever, para cada $T > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^T g_1(s) \int_0^{l_0} |\eta_x(s)|^2 dx ds &\leq \frac{2}{k_2^1} \int_0^T g_1(s) \int_0^{l_0} \eta_x(s) \overline{\eta_{sx}(s)} dx ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T g_1(s) \int_0^{l_0} |\eta_x(s)|^2 dx ds + \frac{2}{(k_2^1)^2} \int_0^T g_1(s) \int_0^{l_0} |\eta_{sx}(s)|^2 dx ds \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\|\eta\|_{L_{g_1}^2} \leq \frac{2}{k_2^1} \|\eta_s\|_{L_{g_1}^2}$$

o que nos permite concluir que $\eta \in L_{g_1}^2$. Procedendo analogamente, concluímos que $\xi \in L_{g_1,2}^2$.

Assim, resta-nos apenas estabelecer a existência e unicidade de solução para o sistema

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_x^1 + \psi^1)_x = \frac{1}{k} \left[\rho_1^1 f^5 - \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)_x(s) ds \right] & \text{em }]0, l_0[\\ (\varphi_x^2 + \psi^2)_x = \frac{\rho_1^2}{k_2} f^6 & \text{em }]l_0, l[\\ \psi_{xx}^1 - \frac{k}{b}(\varphi_x^1 + \psi^1) = \frac{1}{b} \left[\rho_2^1 f^7 + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s) ds - \int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s) ds \right] & \text{em }]0, l_0[\\ \psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{b_2}(\varphi_x^2 + \psi^2) = \frac{\rho_2^2}{b_2} f^8 & \text{em }]l_0, l[\\ \varphi^1(0) = \psi^1(0) = 0, \quad \varphi^1(l_0) = \varphi^2(l_0), \quad \psi^1(l_0) = \psi^2(l_0) \\ \gamma_1 \varphi^2(l) + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l) = -m_1 f^{13} - d_1 f^{11} =: G_1 \\ \gamma_2 \psi^2(l) + b_2 \psi_x^2(l) = -m_2 f^{14} - d_2 f^{12} =: G_2 \\ k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0) = - \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(l_0, s) ds \\ b\psi_x^1(l_0) - b_2\psi_x^2(l_0) = - \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, s) ds \end{array} \right.$$

Para isto, consideremos o funcional $T : X \rightarrow \mathbb{C}$ definido em cada $(h^1, \dots, h^4) \in X$ por

$$\begin{aligned} T(h^1, \dots, h^4) := & - \int_0^{l_0} \left(\rho_1^1 \overline{f^5} h^1 + \rho_2^1 \overline{f^7} h^3 \right) dx - \int_0^{l_0} \left(\int_0^\infty g_1(s) \overline{(\eta_x + \xi)(s)} ds \right) (h_x^1 + h^3) dx + \\ & - \int_0^{l_0} \left(\int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi_x(s)} ds \right) h_x^3 dx + \rho_1^2 \int_{l_0}^l \left(\int_{l_0}^x \overline{f^6(\tau)} d\tau \right) (h_x^2 + h^4) dx + \\ & + \int_{l_0}^l \left[\rho_2^2 \int_{l_0}^x \overline{f^8(\tau)} d\tau + \rho_1^2 \int_{l_0}^x \int_{l_0}^\tau \overline{f^6(\nu)} d\nu d\tau \right] h_x^4 dx + \overline{G_3} h^2(l) + \overline{G_4} h^4(l) \end{aligned}$$

onde $G_3 := \left(G_1 - \rho_1^2 \int_{l_0}^l \overline{f^6} dx \right)$ e $G_4 := \left(G_2 - \rho_2^2 \int_{l_0}^l \overline{f^8} dx - \rho_1^2 \int_{l_0}^l \int_{l_0}^x \overline{f^6(\tau)} d\tau dx \right)$; e também onde $X := [\mathbb{H}_*^1]^2$ é o espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\begin{aligned} \langle (h^1, \dots, h^4), (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2) \rangle_X := & \int_0^{l_0} \left[b \overline{\psi_x^1} h_x^3 + k \overline{(\varphi_x^1 + \psi^1)} (h_x^1 + h^3) \right] dx + \\ & + \int_{l_0}^l \left[b_2 \overline{\psi_x^2} h_x^4 + k_2 \overline{(\varphi_x^2 + \psi^2)} (h_x^2 + h^4) \right] dx + \gamma_1 \overline{\varphi^2(l)} h^2(l) + \gamma_2 \overline{\psi^2(l)} h^4(l). \end{aligned}$$

É claro que $T \in X'$; daí, e pelo teorema de representação de Riesz, concluímos que existe uma única solução fraca para o sistema (P).

Portando, temos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. ■

3.3 Estabilidade Exponencial

Nesta seção, mostraremos que, se g_i ($i \in \{1, 2\}$) verificam as hipóteses (3.15)–(3.17), então o correspondente semigrupo é exponencialmente estável. A principal ferramenta utilizada nesta tarefa é o resultado de Prüss (ver Teorema 1.6, no capítulo 1).

No Lema a seguir, mostraremos que a primeira condição do Teorema de Prüss é satisfeita, isto é, que o eixo imaginário está contido no conjunto resolvente.

Lema 3.1. *Sob as hipóteses (3.15)–(3.17), o operador $\mathcal{A}$ verifica*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}). \quad (3.50)$$

Demonstração: No Teorema 3.1, já foi mostrado que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Além disso, note que nós não podemos concluir que o espectro de $\mathcal{A}$ é formado somente por autovalores, uma vez que $\mathcal{A}^{-1}$ não é um operador compacto. Desse modo, se (3.50) não ocorre, então existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\lambda_0|$, tal que $\{i\lambda; |\lambda| < |\lambda_0|\} \subset \rho(\mathcal{A})$ e $\sup\{\|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\|; |\lambda| < |\lambda_0|\} = \infty$. Segue daí, que existem sequências $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ e $(\mathcal{U}_n)_n = ((\varphi_n^1, \varphi_n^2, \psi_n^1, \psi_n^2, \Phi_n^1, \Phi_n^2, \Psi_n^1, \Psi_n^2, \eta_n, \xi_n, u_n, v_n, U_n, V_n)^T)_n \subset D(\mathcal{A})$, tais que

$$\lambda_n \longrightarrow |\lambda_0|, \quad (3.51)$$

$$\|\mathcal{U}_n\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.52)$$

$$(i\lambda_n - \mathcal{A})\mathcal{U}_n = F_n = (f_n^1, \dots, f_n^{14}) \longrightarrow 0 \quad \text{em } \mathcal{H}. \quad (3.53)$$

Mas, de (3.53) temos que

$$i\lambda_n \varphi_n^1 - \Phi_n^1 = f_n^1 \quad \text{em } H^1(0, l_0) \quad (3.54)$$

$$i\lambda_n \varphi_n^2 - \Phi_n^2 = f_n^2 \quad \text{em } H^1(l_0, l) \quad (3.55)$$

$$i\lambda_n \psi_n^1 - \Psi_n^1 = f_n^3 \quad \text{em } H^1(0, l_0) \quad (3.56)$$

$$i\lambda_n \psi_n^2 - \Psi_n^2 = f_n^4 \quad \text{em } H^1(l_0, l) \quad (3.57)$$

$$i\lambda_n \Phi_n^1 - \frac{k}{\rho_1^1}(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1)_x - \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{n,x} + \xi_n)_x(s)ds = f_n^5 \quad \text{em } L^2(0, l_0) \quad (3.58)$$

$$i\lambda_n \Phi_n^2 - \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2)_x = f_n^6 \quad \text{em } L^2(l_0, l) \quad (3.59)$$

$$i\lambda_n \Psi_n^1 - \frac{b}{\rho_2^1} \psi_{n,xx}^1 + \frac{k}{\rho_2^1} (\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1) - \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_2(s) \xi_{n,xx}(s) ds + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_1(s) (\eta_{n,x} + \xi_n)(s) ds = f_n^7 \quad \text{em } L^2(0, l_0) \quad (3.60)$$

$$i\lambda_n \Psi_n^2 - \frac{b_2}{\rho_2^2} \psi_{n,xx}^2 + \frac{k_2}{\rho_2^2} (\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2) = f_n^8 \quad \text{em } L^2(l_0, l) \quad (3.61)$$

$$i\lambda_n u_n - U_n = f_n^{11} \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (3.62)$$

$$i\lambda_n v_n - V_n = f_n^{12} \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (3.63)$$

$$i\lambda_n U_n + \frac{d_1}{m_1} U_n + \frac{\gamma_1}{m_1} u_n + \frac{k_2}{m_1} (\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2)(l) = f_n^{13} \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (3.64)$$

$$i\lambda_n V_n + \frac{d_2}{m_2} V_n + \frac{\gamma_2}{m_2} v_n + \frac{b_2}{m_2} \psi_{n,x}^2(l) = f_n^{14} \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (3.65)$$

Tomando o produto interno de (3.53) com $\mathcal{U}_n$ em $\mathcal{H}$, temos

$$d_1 |U_n|^2 + d_2 |V_n|^2 - \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1'(s) |(\eta_{n,x} + \xi_n)(s)|^2 ds dx - \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2'(s) |\xi_{n,x}(s)|^2 ds dx \rightarrow 0. \quad (3.66)$$

Segue da condição (3.16) e de (3.66) que

$$\int_0^\infty g_1(s) \|(\eta_{n,x} + \xi_n)(s)\|_{L^2(0, l_0)}^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|\xi_n\|_{L_{g_2}^2} \rightarrow 0. \quad (3.67)$$

Agora, usamos (3.51)-(3.57) para concluir que existem $\Phi^1, \Psi^1 \in L^2(0, l_0)$, $\Phi^2, \Psi^2 \in L^2(l_0, l)$ e subsequências, que ainda denotaremos por $(\Phi_n^1)_n, (\Psi_n^1)_n, (\Phi_n^2)_n$ e $(\Psi_n^2)_n$, tais que

$$\Phi_n^1 \rightarrow \Phi^1 \quad \text{e} \quad \Psi_n^1 \rightarrow \Psi^1 \quad \text{em } L^2(0, l_0), \quad (3.68)$$

$$\Phi_n^2 \rightarrow \Phi^2 \quad \text{e} \quad \Psi_n^2 \rightarrow \Psi^2 \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (3.69)$$

Por um lado, note que, de (3.51), (3.53), (3.58), (3.59), (3.68) e (3.69), vem que

$$k(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1)_x + \int_0^\infty g_1(s) (\eta_{n,x} + \xi_n)_x(s) ds = i\lambda_n \rho_1^1 \Phi_n^1 - \rho_1^1 f_n^5 \rightarrow i|\lambda_0| \rho_1^1 \Phi^1 \quad \text{em } L^2(0, l_0), \quad (3.70)$$

$$(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2)_x = \frac{1}{k_2} (i\lambda_n \rho_1^2 \Phi_n^2 - \rho_1^2 f_n^6) \rightarrow \frac{\rho_1^2}{k_2} i|\lambda_0| \Phi^2 \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (3.71)$$

Dessas duas últimas convergências acima, de (3.52) e de (3.67), vem que existem $\chi_1 \in L^2(0, l_0)$ e $\chi_2 \in L^2(l_0, l)$ tais que, passando a subsequências, se necessário, valem

$$k(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1)_x + \int_0^\infty g_1(s) (\eta_{n,x} + \xi_n)_x(s) ds \rightarrow \chi_1 \quad \text{em } L^2(0, l_0), \quad (3.72)$$

$$(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2)_x \rightarrow \chi_2 \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (3.73)$$

Daí, e por (3.51), (3.53)-(3.57), (3.67)-(3.69), vem que

$$\Phi_{n,x}^1 = i\lambda_n(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1) - (f_{n,x}^1 + f_n^3) - \Psi_n^1 \longrightarrow \frac{i|\lambda_0|}{k}\chi_1 - \Psi^1 \quad \text{em } L^2(0, l_0), \quad (3.74)$$

$$\Phi_{n,x}^2 = i\lambda_n(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2) - (f_{n,x}^2 + f_n^4) - \Psi_n^2 \longrightarrow i|\lambda_0|\chi_2 - \Psi^2 \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (3.75)$$

De (3.68), (3.69), e dessas duas últimas convergências, concluímos que $\chi_1 = \frac{k}{i|\lambda_0|}(\Phi_x^1 + \Psi^1)$ e $\chi_2 = \frac{1}{i|\lambda_0|}(\Phi_x^2 + \Psi^2)$. Levando isso em (3.72) e (3.73) e então, comparando as convergências assim obtidas, com aquelas em (3.70) e em (3.71) vemos que Φ^1, Ψ^1, Φ^2 e Ψ^2 satisfazem as equações

$$|\lambda_0|^2 \rho_1^1 \Phi^1 + k(\Phi_x^1 + \Psi^1)_x = 0 \quad \text{e} \quad |\lambda_0|^2 \rho_1^2 \Phi^2 + k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2)_x = 0. \quad (3.76)$$

Das convergências obtidas acima vemos que

$$\Phi_n^1 \longrightarrow \Phi^1, \quad k(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{n,x} + \xi_n)(s)ds \longrightarrow \frac{k}{i|\lambda_0|}(\Phi_x^1 + \Psi^1) \quad \text{em } H^1(0, l_0), \quad (3.77)$$

$$\Phi_n^2 \longrightarrow \Phi^2, \quad (\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2) \longrightarrow \frac{1}{i|\lambda_0|}(\Phi_x^2 + \Psi^2) \quad \text{em } H^1(l_0, l). \quad (3.78)$$

Note ainda que, de (3.51), (3.53), (3.60), (3.61), (3.77)-(3.78), vem que

$$\begin{aligned} b\psi_{n,xx}^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_{n,xx}(s)ds &= i\lambda_n\rho_2^1\Psi_n^1 + k(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{n,x} + \xi_n)(s)ds - \rho_2^1 f_n^7 \\ &\longrightarrow i|\lambda_0|\rho_2^1\Psi^1 + \frac{k}{i|\lambda_0|}(\Phi_x^1 + \Psi^1) \quad \text{em } L^2(0, l_0), \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$b_2\psi_{n,xx}^2 = i\lambda_n\rho_2^2\Psi_n^2 + k_2(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2) - \rho_2^2 f_n^9 \longrightarrow i|\lambda_0|\rho_2^2\Psi^2 + \frac{k_2}{i|\lambda_0|}(\Phi_x^2 + \Psi^2) \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (3.80)$$

Dessas duas últimas convergências acima, de (3.52) e de (3.67), vem que existem $\chi_3 \in L^2(0, l_0)$ e $\chi_4 \in L^2(l_0, l)$ tais que, passando a subsequências, se necessário, valem

$$b\psi_{n,x}^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_{n,x}(s)ds \longrightarrow \chi_3 \quad \text{em } L^2(0, l_0), \quad (3.81)$$

$$\psi_{n,x}^2 \longrightarrow \chi_4 \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (3.82)$$

Daí, e por (3.51), (3.53), (3.56), (3.57), (3.67)-(3.69), vem que

$$\Psi_{n,x}^1 = i\lambda_n\psi_{n,x}^1 - f_{n,x}^3 \longrightarrow \frac{i|\lambda_0|}{b}\chi_3 \quad \text{em } L^2(0, l_0), \quad (3.83)$$

$$\Psi_{n,x}^2 = i\lambda_n\psi_{n,x}^2 - f_{n,x}^4 \longrightarrow i|\lambda_0|\chi_4 \quad \text{em } L^2(l_0, l). \quad (3.84)$$

De (3.68), (3.69), e dessas duas últimas convergências, concluímos que $\chi_3 = \frac{b}{i|\lambda_0|}\Psi_x^1$ e $\chi_4 = \frac{1}{i|\lambda_0|}\Psi_x^2$. Levando isso em (3.81) e (3.82) e então, comparando as convergências assim obtidas, com aquelas em (3.79) e em (3.80) vemos que Φ^1, Φ^2, Ψ^1 , e Ψ^2 satisfazem as equações

$$|\lambda_0|^2 \rho_2^1 \Psi^1 + b \Psi_{xx}^1 - k(\Phi_x^1 + \Psi^1) = 0 \quad \text{e} \quad |\lambda_0|^2 \rho_2^2 \Psi^1 + b_2 \Psi_{xx}^2 - k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2) = 0. \quad (3.85)$$

Das convergências obtidas acima vemos que

$$\Psi_n^1 \longrightarrow \Psi^1, \quad b \psi_{n,x}^1 + \int_0^\infty g_2(s) \xi_{n,x}(s) ds \longrightarrow \frac{b}{i|\lambda_0|} \Psi_x^1 \quad \text{em } H^1(0, l_0), \quad (3.86)$$

$$\Psi_n^2 \longrightarrow \Psi^2, \quad \psi_{n,x}^2 \longrightarrow \frac{1}{i|\lambda_0|} \Psi_x^2 \quad \text{em } H^1(l_0, l). \quad (3.87)$$

De (3.77), (3.78), (3.86), (3.87), utilizando (3.64), (3.65) e o fato que $\mathcal{U}_n \in D(\mathcal{A}), \forall n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\Phi^1(0) = \Psi^1(0) = 0, \quad \Phi^1(l_0) = \Phi^2(l_0), \quad \Psi^1(l_0) = \Psi^2(l_0), \quad (3.88)$$

$$k(\Phi_x^1 + \Psi^1)(l_0) = k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2)(l_0), \quad b \Psi_x^1(l_0) = b_2 \Psi_x^2(l_0), \quad (3.89)$$

$$U_n(l) = \Phi_n^2(l) \longrightarrow \Phi^2(l), \quad V_n(l) = \Psi_n^2(l) \longrightarrow \Psi^2(l), \quad (3.90)$$

$$u_n = \frac{1}{i\lambda_n}(U_n + f_n^{11}) \longrightarrow \frac{1}{i|\lambda_0|} \Phi^2(l), \quad v_n = \frac{1}{i\lambda_n}(V_n + f_n^{12}) \longrightarrow \frac{1}{i|\lambda_0|} \Psi^2(l), \quad (3.91)$$

$$(-|\lambda_0|^2 m_1 + i|\lambda_0|d_1 + \gamma_1)\Phi^2(l) + k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2)(l) = 0, \quad (3.92)$$

$$(-|\lambda_0|^2 m_2 + i|\lambda_0|d_2 + \gamma_2)\Psi^2(l) + b_2 \Psi_x^2(l) = 0. \quad (3.93)$$

Logo, $(\Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2)$ é precisamente a solução do seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} |\lambda_0|^2 \rho_1^1 \Phi^1 + k(\Phi_x^1 + \Psi^1)_x = 0 \\ |\lambda_0|^2 \rho_1^2 \Phi^2 + k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2)_x = 0 \\ |\lambda_0|^2 \rho_2^1 \Psi^1 + b \Psi_{xx}^1 - k(\Phi_x^1 + \Psi^1) = 0 \\ |\lambda_0|^2 \rho_2^2 \Psi^1 + b_2 \Psi_{xx}^2 - k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2) = 0 \\ \Phi^1(0) = \Psi^1(0) = 0, \quad \Phi^1(l_0) = \Phi^2(l_0), \quad \Psi^1(l_0) = \Psi^2(l_0) \\ k(\Phi_x^1 + \Psi^1)(l_0) = k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2)(l_0), \quad b \Psi_x^1(l_0) = b_2 \Psi_x^2(l_0) \\ (-|\lambda_0|^2 m_1 + i|\lambda_0|d_1 + \gamma_1)\Phi^2(l) + k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2)(l) = 0 \\ (-|\lambda_0|^2 m_2 + i|\lambda_0|d_2 + \gamma_2)\Psi^2(l) + b_2 \Psi_x^2(l) = 0. \end{array} \right.$$

Este sistema possui uma única solução, a saber, a solução nula; de onde resulta que $\mathcal{U}_n \rightarrow 0$ em $\mathcal{H}$, o que contradiz (3.52), completando a prova. ■

De agora em diante, C denotará uma constante genérica, que pode ser diferente em diferentes lugares, podendo inclusive mudar mesmo de uma linha para outra. Anotamos

$$\beta_1 := \int_0^\infty g_1(s)ds \quad \text{e} \quad \beta_2 := \int_0^\infty g_2(s)ds. \quad (3.94)$$

Para mostrar que o operador resolvente é limitado sobre o eixo imaginário, vamos mostrar que, para qualquer $F = (f^1, f^2, \dots, f^{14})^T \in \mathcal{H}$, a solução $\mathcal{U}$ da equação resolvente

$$(i\lambda I - \mathcal{A}) \mathcal{U} = F \quad (3.95)$$

é limitada; isto é, $\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$. De fato, escrevendo (3.95) em termos de suas equações componentes, temos

$$i\lambda\varphi^1 - \Phi^1 = f^1 \quad (3.96)$$

$$i\lambda\varphi^2 - \Phi^2 = f^2 \quad (3.97)$$

$$i\lambda\psi^1 - \Psi^1 = f^3 \quad (3.98)$$

$$i\lambda\psi^2 - \Psi^2 = f^4 \quad (3.99)$$

$$i\lambda\Phi^1 - \frac{k}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1)_x - \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)_x(s)ds = f^5 \quad (3.100)$$

$$i\lambda\Phi^2 - \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = f^6 \quad (3.101)$$

$$i\lambda\Psi^1 - \frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 + \frac{k}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1) - \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)ds + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s)ds = f^7 \quad (3.102)$$

$$i\lambda\Psi^2 - \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 + \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2) = f^8 \quad (3.103)$$

$$i\lambda\eta - \Phi^1 + \eta_s = f^9 \quad (3.104)$$

$$i\lambda\xi - \Psi^1 + \xi_s = f^{10} \quad (3.105)$$

$$i\lambda u - U = f^{11} \quad (3.106)$$

$$i\lambda v - V = f^{12} \quad (3.107)$$

$$i\lambda U + \frac{d_1}{m_1}U + \frac{\gamma_1}{m_1}u + \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2)(l) = f^{13} \quad (3.108)$$

$$i\lambda V + \frac{d_2}{m_2}V + \frac{\gamma_2}{m_2}v + \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(l) = f^{14} \quad (3.109)$$

As propriedades dissipativas de $\mathcal{A}$ implicam na existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$d_1|U|^2 + d_2|V|^2 + \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s)|(\eta_x + \xi)(s)|^2 ds dx + \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)|\xi_x(s)|^2 ds dx \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.110)$$

Passaremos agora a estabelecer resultados que serão úteis na tarefa de mostrar que a segunda condição do teorema de Pruss se verifica.

Lema 3.2. *Sob as notações acima, para cada $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$, tais que*

$$\begin{aligned} \rho_2^1 \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx &\leq C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)}\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C\|\psi_x^1\|_{L^2(0,l_0)}\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\ &+ \varepsilon \left| b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, s) ds \right|^2. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (3.102) por $\int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi(s)} ds$, e usando (3.105), temos

$$\begin{aligned} \beta_2 \rho_2^1 \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx &= k \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi(s)}(\varphi_x^1 + \psi^1) ds dx + b \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi_x(s)}\psi_x^1 ds dx + \\ &+ \int_0^{l_0} \left(\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s) ds \right) \left(\int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi(s)} ds \right) dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi_s(s)}\Psi^1 ds dx + \\ &+ \int_0^{l_0} \left| \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s) ds \right|^2 dx - \rho_2^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)\overline{f^{10}(s)}\Psi^1 ds dx - \rho_2^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi(s)}f^7 ds dx + \\ &- \underbrace{\left[b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, s) ds \right] \left[\int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi(l_0, s)} ds \right]}_{=: R_1}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Mas, usando (3.110), obtemos

$$\operatorname{Re} \left[k \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi(s)}(\varphi_x^1 + \psi^1) ds dx \right] \leq C\|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)}\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \quad (3.112)$$

$$\operatorname{Re} \left[b \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi_x(s)}\psi_x^1 ds dx \right] \leq C\|\psi_x^1\|_{L^2(0,l_0)}\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \quad (3.113)$$

$$\operatorname{Re} \left[\int_0^{l_0} \left(\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s) ds \right) \left(\int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi(s)} ds \right) dx \right] \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.114)$$

e

$$|R_1| \leq \varepsilon \left| b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, s) ds \right|^2 + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \quad (3.115)$$

Além disso, usando (3.16) e (3.110), resulta que

$$\operatorname{Re} \left[\rho_2^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi_s(s)}\Psi^1 ds dx \right] \leq \frac{\beta_2 \rho_2^1}{2} \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx + C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.116)$$

Finalmente, tomando a parte real em (3.111) e usando (3.112)-(3.116), obtemos a desigualdade desejada. ■

Lema 3.3. Para cada $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \int_0^{l_0} |\Phi^1|^2 dx &\leq C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C \|\psi_x^1\|_{L^2(0,l_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\ &+ \varepsilon \left| b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(l_0, s) ds \right|^2 + \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) + \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi)(l_0, s) ds \right|^2. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (3.100) por $\int_0^\infty g_1(s) \left(\overline{\eta(s) + \int_0^x \xi(y, s) dy} \right) ds$ e usando (3.104) e (3.105), temos

$$\begin{aligned} \beta_1 \rho_1^1 \int_0^{l_0} |\Phi^1|^2 dx &= \rho_1^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s) \left(\overline{\eta(s) + \int_0^x \xi(y, s) dy} \right)_s \Phi^1 ds dx - \rho_1^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s) \left(\overline{\int_0^x \Psi^1(y) dy} \right) \Phi^1 ds dx + \\ &+ \int_0^{l_0} \left| \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi)(s) ds \right|^2 dx + k \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s) \overline{(\eta_x + \xi)(s)} (\varphi_x^1 + \psi^1) ds dx + \\ &- \rho_1^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s) \left(\overline{f^9(s) + \int_0^x f^{10}(y, s) dy} \right) \Phi^1 ds dx - \rho_1^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s) \left(\overline{\eta(s) + \int_0^x \xi(y, s) dy} \right) f^5 ds dx + \\ &- \underbrace{\left[k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) + \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi)(l_0, s) ds \right] \left[\int_0^\infty g_1(s) \int_0^{l_0} \overline{(\eta_x + \xi)(s)} dx ds \right]}_{=: R_2}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Mas, usando (3.110), obtemos

$$\operatorname{Re} \left[\rho_1^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s) \left(\overline{\eta + \int_0^x \xi(y, s) dy} \right)_s \Phi^1 ds dx \right] \leq \frac{\beta_1 \rho_1^1}{4} \|\Phi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad (3.118)$$

e

$$|R_2| \leq \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) + \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi)(l_0, s) ds \right|^2 + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.119)$$

Além disso, não é difícil ver que

$$\operatorname{Re} \left[-\rho_1^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s) \left(\overline{\int_0^x \Psi^1(y) dy} \right) \Phi^1 ds dx \right] \leq \frac{\beta_1 \rho_1^1}{4} \|\Phi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + C \|\Psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 \quad (3.120)$$

e

$$\operatorname{Re} \left[k \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s) \overline{(\eta_x + \xi)(s)} (\varphi_x^1 + \psi^1) ds dx \right] \leq C \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}. \quad (3.121)$$

Finalmente, tomando a parte real em (3.117), usando (3.118), (3.119), (3.120) e o Lema 3.2, obtemos a desigualdade desejada. ■

Lema 3.4. Para cada $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que, para todo $|\lambda| > 0$, vale

$$\begin{aligned} b \int_0^{l_0} |\psi_x^1|^2 dx + k \int_0^{l_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx &\leq C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon \left| b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, s)ds \right|^2 + \\ &+ \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(l_0, s)ds \right|^2 + \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|^2} \left[\|\Phi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \|\Psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right]. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (3.100) e (3.102) por, respectivamente, $\overline{\varphi^1}$ e $\overline{\psi^1}$, e usando (3.96) e (3.98), temos

$$\begin{aligned} b \int_0^{l_0} |\psi_x^1|^2 dx + k \int_0^{l_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx &= \rho_1^1 \int_0^{l_0} |\Phi^1|^2 dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx + \rho_1^1 \int_0^{l_0} \Phi^1 \overline{f^1} dx + \\ &+ \rho_2^1 \int_0^{l_0} \Psi^1 \overline{f^3} dx + \rho_1^1 \int_0^{l_0} f^5 \overline{\varphi^1} dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} f^7 \overline{\psi^1} dx - \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s) (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1}) ds dx + \\ &- \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s) \overline{\psi_x^1} ds dx + \underbrace{\left[k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(l_0, s)ds \right] \overline{\varphi^1(l_0)}}_{=:R_3} + \\ &+ \underbrace{\left[b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, s)ds \right] \overline{\psi^1(l_0)}}_{=:R_4}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Usando (3.110), vemos que

$$\operatorname{Re} \left[- \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s) (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1}) ds dx \right] \leq C \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0, l_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \quad (3.123)$$

e

$$\operatorname{Re} \left[- \int_0^{l_0} \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s) \overline{\psi_x^1} ds dx \right] \leq C \|\psi_x^1\|_{L^2(0, l_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}. \quad (3.124)$$

Agora, note que, como

$$|\varphi^1(l_0)| \leq \|\varphi^1\|_{L^\infty(0, l_0)} \leq \sqrt{2} \|\varphi\|_{L^2(0, l_0)}^{1/2} \|\varphi_x^1\|_{L^2(0, l_0)}^{1/2}$$

segue de (3.96) que

$$C |\varphi^1(l_0)|^2 \leq \frac{b}{4} \|\psi_x^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \frac{k}{2} \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \frac{\tilde{C}}{|\lambda|^2} \left[\|\Phi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right]$$

o que nos dá, para cada $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |R_3| &\leq \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(l_0, s)ds \right|^2 + \frac{b}{4} \|\psi_x^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \\ &+ \frac{k}{2} \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|^2} \left[\|\Phi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Analogamente, de (3.98), vemos que

$$C|\psi^1(l_0)|^2 \leq \frac{b}{4}\|\psi_x^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \frac{\tilde{C}}{|\lambda|^2} \left[\|\Psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right]$$

de onde obtemos, para cada $\varepsilon > 0$

$$|R_4| \leq \varepsilon \left| b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, s)ds \right|^2 + \frac{b}{4}\|\psi_x^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|^2} \left[\|\Psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right]. \quad (3.126)$$

Então, tomando a parte real em (3.122), usando (3.123)-(3.126) e os Lemas 3.2 e 3.3, segue o resultado desejado. ■

Lema 3.5. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} (i) \quad & |\Psi^1(l_0)|^2 + \left| b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, s)ds \right|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \\ & + C \left[\|\Psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \|\psi_x^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 \right]; \\ (ii) \quad & |\Phi^1(l_0)|^2 + \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(l_0, s)ds \right|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \\ & + C \left[\|\Phi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \|\Psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (3.102) por $\left[p \left(\overline{b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)ds} \right) \right]$, onde $p \in C^1([0, l_0]; \mathbb{R})$, encontramos

$$\begin{aligned} & \underbrace{-\rho_2^1 \int_0^{l_0} p \Psi^1 \left(\overline{b(i\lambda\psi^1)_x} + \int_0^\infty g_2(s) \overline{(i\lambda\xi)_x(s)} ds \right) dx}_{I_1} - \frac{p}{2} \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)ds \right|^2 \Big|_{x=0}^{x=l_0} + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} p' \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)ds \right|^2 dx - \rho_2^1 \int_0^{l_0} p \left(\overline{b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)ds} \right) f^7 dx = \\ & = - \int_0^{l_0} p \left(k(\varphi_x^1 + \psi^1) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s)ds \right) \left(\overline{b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)ds} \right) dx. \quad (3.127) \end{aligned}$$

Mas, usando (3.98) e (3.105) em I_1 obtemos de (3.127)

$$\begin{aligned} & \frac{b_1 \rho_2^1}{2} p(l_0) |\Psi^1(l_0)|^2 + \frac{p}{2} \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(s) ds \right|^2 \Big|_{x=0}^{x=l_0} = \frac{b_1 \rho_2^1}{2} \int_0^{l_0} p' |\Psi^1|^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} p' \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(s) ds \right|^2 dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} p \Psi^1 \int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi_{sx}(s)} ds dx + \\ & + \int_0^{l_0} p \left(k(\varphi_x^1 + \psi^1) + \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi)(s) ds \right) \left(\overline{b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(s) ds} \right) dx + \\ & - b \rho_2^1 \int_0^{l_0} p \Psi^1 \overline{f_x^3} dx - \rho_2^1 \int_0^{l_0} p \Psi^1 \int_0^\infty g_2(s) \overline{f_x^{10}(s)} ds dx - \rho_2^1 \int_0^{l_0} p \left(\overline{b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(s) ds} \right) f^7 dx. \quad (3.128) \end{aligned}$$

Agora, escolhendo $p \in C^1([0, l_0]; \mathbb{R})$ tal que $p(l_0) = 2$ e $p(0) = 0$, tomando a parte real em (3.128) e usando (3.110), obtemos a desigualdade (i).

A prova de (ii) é inteiramente análoga e é obtida multiplicando-se a equação (3.100) por $\left[p \left(\overline{k(\varphi_x^1 + \psi^1) + \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi)(s) ds} \right) \right]$. ■

Lema 3.6. *Existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\begin{aligned} & \int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx \leq \\ & \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_0^{l_0} [\rho_1^1 |\Phi^1|^2 + \rho_2^1 |\Psi^1|^2 + b |\psi_x^1|^2 + k |\varphi_x^1 + \psi^1|^2] dx. \end{aligned}$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $q_n : [l_0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$q_n(x) = \int_x^l e^{-ns} ds = \frac{1}{n} (e^{-nx} - e^{-nl}).$$

Multiplicando (3.101) por $q_n(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2})$ e usando (3.97) e (3.99), vem que

$$\begin{aligned} & \int_{l_0}^l e^{-nx} [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx = q_n(l_0) [\rho_1^2 |\Phi^2(l_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0)|^2] + \\ & - 2\rho_1^2 \int_{l_0}^l q_n \Phi^2 \overline{\Psi^2} dx - 2\rho_2^2 \int_{l_0}^l q_n \Phi^2 (\overline{f_x^2} + \overline{f^4}) dx - 2\rho_1^2 \int_{l_0}^l q_n (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2}) f^6 dx. \quad (3.129) \end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando (3.103) por $q_n \overline{\psi_x^2}$ e usando (3.99), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{l_0}^l e^{-nx} [\rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2] dx = q_n(l_0) [\rho_2^2 |\Psi^2(l_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(l_0)|^2] + \\ & + 2k_2 \int_{l_0}^l q_n (\varphi_x^2 + \psi^2) \overline{\psi_x^2} dx - 2\rho_2^2 \int_{l_0}^l q_n \Psi^2 \overline{f_x^4} dx - 2\rho_2^2 \int_{l_0}^l q_n \overline{\psi_x^2} f^8 dx. \quad (3.130) \end{aligned}$$

De (3.129) e (3.130) resulta que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c}{n}\right) \int_{l_0}^l e^{-nx} [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ \frac{1}{n} (e^{-nl_0} - e^{-nl}) [\rho_1^2 |\Phi^2(l_0)|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2(l_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(l_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0)|^2]. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Então, tomando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, usando as condições de transmissão (3.32) e (3.33), o Lema (3.5) e lembrando que $\Phi^2(l_0) = \Phi^1(l_0)$ e $\Psi^2(l_0) = \Psi^1(l_0)$, obtemos a desigualdade desejada. ■

O próximo Lema é crucial para garantirmos que o decaimento exponencial ocorre mesmo no caso em que $d_1 = d_2 = 0$. Na verdade, ele fornece uma nova estimativa para os termos da energia envolvendo $|U|^2$ e $|V|^2$ uma vez que aquelas extraídas de (3.110) só são válidas quando d_1 e d_2 são ambos positivos.

Lema 3.7. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + m_1 |U|^2 + m_2 |V|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \end{aligned}$$

Demonstração:

Multiplicando (3.101) por $(x-l_0)\overline{(\varphi_x^2 + \psi^2)}$, usando (3.97) e (3.99), e lembrando que $\Phi^2(l) = U$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1^2 |U|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l)|^2 &= \frac{1}{l-l_0} \int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx - \frac{2\rho_1^2}{l-l_0} \int_{l_0}^l (x-l_0) \Phi^2 \overline{\Psi^2} dx + \\ &- \frac{2\rho_1^2}{l-l_0} \int_{l_0}^l (x-l_0) \Phi^2 (\overline{f_x^2 + f^4}) dx - \frac{2\rho_1^2}{l-l_0} \int_{l_0}^l (x-l_0) \overline{(\varphi_x^2 + \psi^2)} f^6 dx \end{aligned} \quad (3.132)$$

e isto implica que existe $C > 0$, tal que

$$\rho_1^2 |U|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l)|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \quad (3.133)$$

Analogamente, multiplicando (3.103) por $(x-l_0)\overline{\psi_x^2}$, usando (3.99), e lembrando que $\Psi^2(l) = V$, conclui-se que existe $C > 0$ tal que

$$\rho_2^2 |V|^2 + b_2 |\psi_x^2(l)|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0}^l [\rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \quad (3.134)$$

Por outro lado, multiplicando (3.108) por $\bar{u}$ e usando (3.106), encontramos

$$\gamma_1 |u|^2 = m_1 |U|^2 + m_1 U \bar{f}^{11} - d_1 U \bar{u} - k_2 \bar{u} (\varphi_x^2 + \psi^2)(l) + m_1 \bar{u} f^{13}$$

o que nos dá, usando (3.133)

$$\gamma_1 |u|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \quad (3.135)$$

Semelhantemente, multiplicando (3.109) por $\bar{v}$ e, em seguida, usando (3.107) e (3.134), resulta que

$$\gamma_2 |v|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0}^l [\rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \quad (3.136)$$

Finalmente, de (3.133)-(3.136) segue a conclusão desejada. ■

Teorema 3.2. *Suponha que as hipóteses (3.15)-(3.17) sobre g_1 and g_2 sejam válidas. Então, o semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ é exponencialmente estável.*

Demonstração: Em vista do Lema 3.1, somente precisamos mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.137)$$

Como o operador resolvente é holomorfo, é suficiente provar a desigualdade acima apenas para $|\lambda|$ suficientemente grande. Para isto, note que, por um lado, os Lemas 3.6 e 3.7 nos permitem escrever

$$E_2(t) \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C E_1(t). \quad (3.138)$$

Por outro lado, usando (3.110) e os Lemas 3.2, 3.2 e 3.4, concluimos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} E_1(t) \leq & C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(l_0, s) ds \right|^2 + \\ & + \varepsilon \left| b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(l_0, s) ds \right|^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \left[\|\Phi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \|\Psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right]. \end{aligned}$$

Então, usando o Lema 3.5 e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, encontramos

$$E_1(t) \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|^2} E_1(t) + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.139)$$

De (3.138) e (3.139), para $|\lambda|$ suficientemente grande, resulta que $\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2$, de onde segue que

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, o semigrupo é exponencialmente estável. ■

3.4 A Falta de Estabilidade Exponencial

Nesta seção vamos mostrar que a dissipação dada pelo efeito de memória é necessária para a estabilidade exponencial do sistema. Começemos considerando o problema sem efeito de memória, ou seja,

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (3.140)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1) = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (3.141)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.142)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2) = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.143)$$

$$m_1 u_{tt} + d_1 u_t + \gamma_1 u + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.144)$$

$$m_2 v_{tt} + d_2 v_t + \gamma_2 v + b_2 \psi_x^2(l) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.145)$$

com condições de contorno

$$\varphi^1(0) = \psi^1(0) = 0, \quad \varphi^2(l) = u, \quad \psi^2(l) = v \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.146)$$

e condições de transmissão

$$\varphi^1(l_0) = \varphi^2(l_0), \quad \psi^1(l_0) = \psi^2(l_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.147)$$

$$k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0), \quad b_1 \psi_x^1(l_0) = b_2 \psi_x^2(l_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.148)$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} (\varphi^1(0), \varphi^2(0), \psi^1(0), \psi^2(0), \varphi_t^1(0), \varphi_t^2(0), \psi_t^1(0), \psi_t^2(0), u(0), v(0), u_t(0), v_t(0)) = \\ = (\varphi_0^1, \varphi_0^2, \psi_0^1, \psi_0^2, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \psi_1^1, \psi_1^2, u_0, v_0, u_1, v_1) \in \check{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3.149)$$

onde $\rho_i^j, m_i, k_i, b_i, \gamma_i$ ($i, j \in \{1, 2\}$), são como antes e d_1, d_2 , agora, são constantes positivas.

Para este problema, consideramos o seguinte espaço de fase

$$\check{\mathcal{H}} := \{\mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, u, v, U, V)^T \in [\mathbb{H}_*^1]^2 \times [\mathbb{L}^2]^2 \times \mathbb{C}^4; \varphi^2(l) = u, \psi^2(l) = v\}.$$

munido da norma

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}}^2 &= \rho_1^1 \|\Phi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \rho_2^1 \|\Psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + b_1 \|\psi_x^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + k_1 \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \\ &+ \rho_1^2 \|\Phi^2\|_{L^2(l_0, l)}^2 + \rho_2^2 \|\Psi^2\|_{L^2(l_0, l)}^2 + b_2 \|\psi_x^2\|_{L^2(l_0, l)}^2 + k_2 \|\varphi_x^2 + \psi^2\|_{L^2(l_0, l)}^2 + \\ &+ m_1 |U|^2 + m_2 |V|^2 + \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2. \end{aligned}$$

A energia total associada com o sistema (3.140)-(3.149) é

$$\begin{aligned} \check{E}(t) = \check{E}(t; \varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, u, v) &:= \frac{1}{2} \int_0^{l_0} [\rho_1^1 |\varphi_t^1|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^1|^2 + b_1 |\psi_x^1|^2 + k_1 |\varphi_x^1 + \psi^1|^2] dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx + \\ &+ \frac{1}{2} [m_1 |u_t|^2 + m_2 |v_t|^2 + \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2] \end{aligned} \quad (3.150)$$

e é fácil ver que, para todo $\mathcal{U} \in \check{\mathcal{H}}$, tem-se

$$\frac{d}{dt} \check{E}(t) = -d_1 |u_t|^2 - d_2 |v_t|^2. \quad (3.151)$$

Denotaremos por $\mathcal{B}$ o operador não-limitado em $\check{\mathcal{H}}$ definido por

$$\mathcal{B} \mathcal{U} := \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \frac{k_1}{\rho_1^1} (\varphi_x^1 + \psi^1)_x \\ \frac{k_2}{\rho_1^2} (\varphi_x^2 + \psi^2)_x \\ \frac{b_1}{\rho_2^1} \psi_{xx}^1 - \frac{k_1}{\rho_2^1} (\varphi_x^1 + \psi^1) \\ \frac{b_2}{\rho_2^2} \psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{\rho_2^2} (\varphi_x^2 + \psi^2) \\ U \\ V \\ -\frac{d_1}{m_1} U - \frac{\gamma_1}{m_1} u - \frac{k_2}{m_1} (\varphi_x^2 + \psi^2)(l) \\ -\frac{d_2}{m_2} V - \frac{\gamma_2}{m_2} v - \frac{b_2}{m_2} \psi_x^2(l) \end{pmatrix},$$

com domínio

$$D(\mathcal{B}) = \left\{ \mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, u, v, U, V)^T \in [\mathbb{H}_*^1 \cap \mathbb{H}^2]^2 \times [\mathbb{H}_*^1]^2 \times \mathbb{C}^4; \right. \\ \left. \Phi^2(l) = U, \quad \Psi^2(l) = V, \quad k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0), \quad b_1\psi_x^1(l_0) = b_2\psi_x^2(l_0) \right\}.$$

Tem-se que

$$\operatorname{Re}(\mathcal{B}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\check{\mathcal{H}}} = -d_1|U|^2 - d_2|V|^2. \quad (3.152)$$

Não é difícil ver que o operador $\mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em $\check{\mathcal{H}}$, o qual denotaremos por $T(t)$. Isto mostra que o problema (3.140)-(3.149) é bem-posto.

Para provar que o sistema (3.140)-(3.149) não é exponencialmente estável, a principal ferramenta a ser utilizada é o Teorema de Weyl sobre a invariância do raio espectral essencial por perturbações compactas. Para isso, consideremos o seguinte sistema conservativo

$$\rho_1^1 \tilde{\varphi}_{tt}^1 - k_1(\tilde{\varphi}_x^1 + \tilde{\psi}^1)_x = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (3.153)$$

$$\rho_2^1 \tilde{\psi}_{tt}^1 - b_1 \tilde{\psi}_{xx}^1 + k_1(\tilde{\varphi}_x^1 + \tilde{\psi}^1) = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (3.154)$$

$$\rho_1^2 \tilde{\varphi}_{tt}^2 - k_2(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2)_x = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.155)$$

$$\rho_2^2 \tilde{\psi}_{tt}^2 - b_2 \tilde{\psi}_{xx}^2 + k_2(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2) = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.156)$$

$$m_1 \tilde{u}_{tt} + \gamma_1 \tilde{u} + k_2(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2)(l) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.157)$$

$$m_2 \tilde{v}_{tt} + \gamma_2 \tilde{v} + b_2 \tilde{\psi}_x^2(l) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.158)$$

verificando as mesmas condições de contorno e de transmissão e com os mesmos dados iniciais do problema sem efeito de memória, onde $\rho_i^j, m_i, k_i, b_i, \gamma_i$ ($i, j \in \{1, 2\}$) são como antes. Isto é, com condições de contorno

$$\tilde{\varphi}^1(0) = \tilde{\psi}^1(0) = 0, \quad \tilde{\varphi}^2(l) = \tilde{u}, \quad \tilde{\psi}^2(l) = \tilde{v} \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.159)$$

e condições de transmissão

$$\tilde{\varphi}^1(l_0) = \tilde{\varphi}^2(l_0), \quad \tilde{\psi}^1(l_0) = \tilde{\psi}^2(l_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.160)$$

$$k_1(\tilde{\varphi}_x^1 + \tilde{\psi}^1)(l_0) = k_2(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2)(l_0), \quad b_1 \tilde{\psi}_x^1(l_0) = b_2 \tilde{\psi}_x^2(l_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.161)$$

e dados iniciais

$$(\tilde{\varphi}^1(0), \tilde{\varphi}^2(0), \tilde{\psi}^1(0), \tilde{\psi}^2(0), \tilde{\varphi}_t^1(0), \tilde{\varphi}_t^2(0), \tilde{\psi}_t^1(0), \tilde{\psi}_t^2(0), \tilde{u}(0), \tilde{v}(0), \tilde{u}_t(0), \tilde{v}_t(0)) = \\ = (\varphi_0^1, \varphi_0^2, \psi_0^1, \psi_0^2, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \psi_1^1, \psi_1^2, u_0, v_0, u_1, v_1) \in \check{\mathcal{H}}. \quad (3.162)$$

A energia total associada com o sistema (3.153)-(3.162) é

$$\tilde{E}(t) := \check{E}(t; \tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\psi}^1, \tilde{\psi}^2, \tilde{u}, \tilde{v}) \quad (3.163)$$

e não é difícil ver que

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(t) = 0. \quad (3.164)$$

Esta última igualdade nos diz que a energia do sistema não decai e, portanto o sistema é conservativo.

Agora estamos em condições de estabelecer o resultado principal desta seção, o qual está expresso no teorema a seguir.

Teorema 3.3. *O semigrupo $T(t)$ associado com o sistema (3.140)-(3.149) não é exponencialmente estável.*

Demonstração: A ideia principal desta demonstração é mostrar que $T(t)$ tem o mesmo raio espectral essencial que o semigrupo associado com o sistema conservativo (3.153)-(3.162), que denotaremos por $T_0(t)$. Aqui, utilizaremos o Teorema de Weyl (Teorema 1.8, do capítulo 1) que estabelece que, *se a diferença de dois operadores é um operador compacto então, eles possuem o mesmo raio espectral essencial*. De posse desse resultado, vamos mostrar que a diferença $T(t) - T_0(t)$ é um operador compacto, o que implicará então em

$$\omega_{ess}(T) = \omega_{ess}(T_0).$$

Mas, como $T_0(t)$ é unitário, então $\omega_{ess}(T_0) = 0$. Denotando por $\omega_0(T)$ e $\omega_\sigma(\mathcal{B})$ o tipo do semigrupo $T(t)$ e a cota superior do espectro $\sigma(\mathcal{B})$, respectivamente, temos que (veja Corolário 1.2 do capítulo 1):

$$\omega_0(T) = \max \{ \omega_\sigma(\mathcal{B}), \omega_{ess}(T) \} = 0. \quad (3.165)$$

Isto implica que $T(t)$ não é exponencialmente estável. Vejamos. Sejam $(\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, u, v)$ e $(\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\psi}^1, \tilde{\psi}^2, \tilde{u}, \tilde{v})$ soluções dos sistemas (3.140)-(3.149) e (3.153)-(3.162), respectivamente. Denotando por

$$\Phi^1 := \varphi^1 - \tilde{\varphi}^1, \quad \Phi^2 := \varphi^2 - \tilde{\varphi}^2, \quad \Psi^1 := \psi^1 - \tilde{\psi}^1, \quad \Psi^2 := \psi^2 - \tilde{\psi}^2, \quad U := u - \tilde{u}, \quad V := v - \tilde{v}$$

temos que $(\Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, U, V)$ é solução dos sistema

$$\rho_1^1 \Phi_{tt}^1 - k_1(\Phi_x^1 + \Psi^1)_x = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (3.166)$$

$$\rho_2^1 \Psi_{tt}^1 - b_1 \Psi_{xx}^1 + k_1(\Phi_x^1 + \Psi^1) = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (3.167)$$

$$\rho_1^2 \Phi_{tt}^2 - k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2)_x = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.168)$$

$$\rho_2^2 \Psi_{tt}^2 - b_2 \Psi_{xx}^2 + k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2) = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.169)$$

$$m_1 U_{tt} + \gamma_1 U + k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2)(l) = -d_1 u_t \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.170)$$

$$m_2 V_{tt} + \gamma_2 V + b_2 \Psi_x^2(l) = -d_2 v_t \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.171)$$

com condições de contorno

$$\Phi^1(0) = \Psi^1(0) = 0, \quad \Phi^2(l) = U, \quad \Psi^2(l) = V \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.172)$$

e condições de transmissão

$$\Phi^1(l_0) = \Phi^2(l_0), \quad \Psi^1(l_0) = \Psi^2(l_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.173)$$

$$k_1(\Phi_x^1 + \Psi^1)(l_0) = k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2)(l_0), \quad b_1 \Psi_x^1(l_0) = b_2 \Psi_x^2(l_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.174)$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} &(\Phi^1(0), \Phi^2(0), \Psi^1(0), \Psi^2(0), \Phi_t^1(0), \Phi_t^2(0), \Psi_t^1(0), \Psi_t^2(0), U(0), V(0), U_t(0), V_t(0)) = \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0 \in \check{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.175)$$

A energia associada com o sistema (3.166)-(3.175) é dada por

$$\mathbb{E}(t) := \check{E}(t; \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, U, V). \quad (3.176)$$

É fácil ver que

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(t) + d_1 |U_t|^2 + d_2 |V_t|^2 = -d_1 \tilde{u}_t \bar{U}_t - d_2 \tilde{v}_t \bar{V}_t, \quad (3.177)$$

de onde segue que

$$\mathbb{E}(t) + d_1 \int_0^t |U_t|^2 d\sigma + d_2 \int_0^t |V_t|^2 d\sigma = -d_1 \int_0^t \tilde{u}_t \bar{U}_t d\sigma - d_2 \int_0^t \tilde{v}_t \bar{V}_t d\sigma. \quad (3.178)$$

Agora, seja $\mathcal{U}_{0,n} := (\varphi_{0,n}^1, \varphi_{0,n}^2, \psi_{0,n}^1, \psi_{0,n}^2, \varphi_{1,n}^1, \varphi_{1,n}^2, \psi_{1,n}^1, \psi_{1,n}^2, u_{0,n}, v_{0,n}, u_{1,n}, v_{1,n})^T$ uma sequência limitada de dados iniciais no espaço de fase $\check{\mathcal{H}}$. Vamos mostrar que a correspondente

sequência de soluções $\mathcal{U}_n := (\Phi_n^1, \Phi_n^2, \Psi_n^1, \Psi_n^2, \Phi_{n,t}^1, \Phi_{n,t}^2, \Psi_{n,t}^1, \Psi_{n,t}^2, U_n, V_n, U_{n,t}, V_{n,t})^T$ possui uma subsequência que converge forte em $\check{\mathcal{H}}$.

Para provar isto, note que $(T(t)\mathcal{U}_{0,n})_n$ e $(T_0(t)\mathcal{U}_{0,n})_n$ são limitadas em $\check{\mathcal{H}}$. Isto implica que, para todo $T > 0$,

$$(U_{n,t})_n, (V_{n,t})_n, ((\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2)(l))_n, (\tilde{\psi}_x^2(l))_n, ((\Phi_{n,x}^2 + \Psi_n^2)(l))_n \text{ e } ((\Psi_{n,x}^2)(l))_n$$

são limitadas em $L^2(0, T)$. Isto, juntamente com (3.157), (3.158), (3.170) e (3.171) implicam que $(\tilde{u}_{n,t})_n$, $(\tilde{v}_{n,t})_n$, $(U_{n,t})_n$ e $(V_{n,t})_n$ são limitadas em $H^1(0, T)$. Como $H^1(0, T)$ está imerso compactamente em $L^2(0, T)$, segue que existem subsequências, que ainda denotaremos do mesmo modo, tais que

$$\tilde{u}_{n,t} \longrightarrow \tilde{u}_t \text{ e } \tilde{v}_{n,t} \longrightarrow \tilde{v}_t \text{ forte em } L^2(0, T), \quad (3.179)$$

e

$$U_{n,t} \longrightarrow U_t \text{ e } V_{n,t} \longrightarrow V_t \text{ forte em } L^2(0, T). \quad (3.180)$$

Dessas convergências segue que

$$\int_0^T \tilde{u}_{n,t} \overline{U}_{n,t} dt \longrightarrow \int_0^T \tilde{u}_t \overline{U}_t dt \text{ e } \int_0^T \tilde{v}_{n,t} \overline{V}_{n,t} dt \longrightarrow \int_0^T \tilde{v}_t \overline{V}_t dt. \quad (3.181)$$

Usando as convergências acima em (3.178) segue que $\|[T(t) - T_0(t)]\mathcal{U}_{0,n}\|_{\check{\mathcal{H}}}$ converge, o que implica que $([T(t) - T_0(t)]\mathcal{U}_{0,n})_n$ converge forte em $\check{\mathcal{H}}$. Isto significa que $T(t) - T_0(t)$ é um operador compacto em $\check{\mathcal{H}}$ e, portanto, a prova está completa. ■

3.5 Decaimento Polinomial

Nesta seção vamos mostrar que a solução do sistema (3.140)-(3.149) decai polinomialmente para zero como $t^{-1/2}$. Para mostrar isto, usaremos o Teorema de Borichev e Tomilov (Teorema 1.7 do capítulo 1).

Nosso ponto de partida é a equação resolvente

$$i\lambda\mathcal{U} - \mathcal{B}\mathcal{U} = F$$

a qual, em termos de suas equações componentes, se escreve como

$$i\lambda\varphi^1 - \Phi^1 = f^1 \quad (3.182)$$

$$i\lambda\varphi^2 - \Phi^2 = f^2 \quad (3.183)$$

$$i\lambda\psi^1 - \Psi^1 = f^3 \quad (3.184)$$

$$i\lambda\psi^2 - \Psi^2 = f^4 \quad (3.185)$$

$$i\lambda\Phi^1 - \frac{k_1}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1)_x = f^5 \quad (3.186)$$

$$i\lambda\Phi^2 - \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = f^6 \quad (3.187)$$

$$i\lambda\Psi^1 - \frac{b_1}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 + \frac{k_1}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1) = f^7 \quad (3.188)$$

$$i\lambda\Psi^2 - \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 + \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2) = f^8 \quad (3.189)$$

$$i\lambda u - U = f^9 \quad (3.190)$$

$$i\lambda v - V = f^{10} \quad (3.191)$$

$$i\lambda U + \frac{d_1}{m_1}U + \frac{\gamma_1}{m_1}u + \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2)_x(l) = f^{11} \quad (3.192)$$

$$i\lambda V + \frac{d_2}{m_2}V + \frac{\gamma_2}{m_2}v + \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(l) = f^{12}. \quad (3.193)$$

Tomando o produto interno da equação resolvente com $\mathcal{U}$ e usando (3.152) segue que

$$d_1|U|^2 + d_2|V|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|\|F\|. \quad (3.194)$$

Lema 3.8. *Existe $C > 0$ tal que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, vale*

$$\int_{l_0}^l [\rho_1^2|\Phi^2|^2 + \rho_2^2|\Psi^2|^2 + b_2|\psi_x^2|^2 + k_2|\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx \leq C|\lambda|^2\|\mathcal{U}\|\|F\| + C\|F\|^2.$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $q_n : [l_0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$q_n(x) := \int_{l_0}^x e^{ns} ds = \frac{1}{n} (e^{nx} - e^{nl_0}).$$

Multiplicando (3.187) e (3.189) por $q_n(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2})$ e $q_n\overline{\psi_x^2}$, respectivamente, e usando (3.183) e (3.185), encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{l_0}^l q'_n [\rho_1^2|\Phi^2|^2 + \rho_2^2|\Psi^2|^2 + b_2|\psi_x^2|^2 + k_2|\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx = \\ & = \frac{q_n(l)}{2} [\rho_1^2|\Phi^2(l)|^2 + \rho_2^2|\Psi^2(l)|^2 + b_2|\psi_x^2(l)|^2 + k_2|(\varphi_x^2 + \psi^2)(l)|^2] + \int_{l_0}^l q_n [\rho_1^2\Phi^2\overline{\Psi^2} - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)\overline{\psi_x^2}] dx + \\ & + \rho_1^2 \int_{l_0}^l q_n [\Phi^2(\overline{f_x^2 + f^4}) + f^6(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2})] dx + \rho_2^2 \int_{l_0}^l q_n [\Psi^2\overline{f_x^4} + f^8\overline{\psi_x^2}] dx. \end{aligned}$$

Tomando a parte real, escolhendo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e usando (3.194), segue que

$$\int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx \leq C \|\mathcal{U}\| \|F\| + C [b_2 |\psi_x^2(l)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l)|^2]. \quad (3.195)$$

Mas, de (3.192), (3.193) e usando (3.194), temos que, para todo $|\lambda| \geq 1$, vale

$$b_2 |\psi_x^2(l)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l)|^2 \leq C |\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \|F\|^2. \quad (3.196)$$

Finalmente, retornando com (3.196) em (3.195), a conclusão desejada segue.

Lema 3.9. *Existe $C > 0$ tal que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, vale*

$$\int_0^{l_0} [\rho_1^1 |\Phi^1|^2 + \rho_2^1 |\Psi^1|^2 + b_1 |\psi_x^1|^2 + k_1 |\varphi_x^1 + \psi^1|^2] dx \leq C |\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \|F\|^2.$$

Demonstração: Procedendo como no lema anterior e usando as condições de transmissão, encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^{l_0} [\rho_1^1 |\Phi^1|^2 + \rho_2^1 |\Psi^1|^2 + b_1 |\psi_x^1|^2 + k_1 |\varphi_x^1 + \psi^1|^2] dx &\leq \\ &\leq C \|\mathcal{U}\| \|F\| + C [\rho_1^2 |\Phi^2(l_0)|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2(l_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(l_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0)|^2] \end{aligned} \quad (3.197)$$

Agora, seja $q : [l_0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $q(x) := l - x$, para todo $x \in [l_0, l]$. Multiplicando (3.187) e (3.189) por $q(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2})$ e $q\overline{\psi_x^2}$, respectivamente, e usando (3.183) e (3.185), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{q(l_0)}{2} [\rho_1^2 |\Phi^2(l_0)|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2(l_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(l_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0)|^2] &= \\ = \frac{1}{2} \int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx &+ \int_{l_0}^l q [\rho_1^2 \Phi^2 \overline{\Psi^2} - k_2 (\varphi_x^2 + \psi^2) \overline{\psi_x^2}] dx + \\ + \rho_1^2 \int_{l_0}^l q [(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2}) f^6 + \Phi^2 (\overline{f_x^2} + \overline{f_x^4})] dx &+ \rho_2^2 \int_{l_0}^l q [\overline{\psi_x^2} f^8 + \Psi^2 (\overline{f_x^4})] dx. \end{aligned} \quad (3.198)$$

Tomando a parte real, resulta que

$$\begin{aligned} \rho_1^2 |\Phi^2(l_0)|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2(l_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(l_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0)|^2 &\leq \\ &\leq C \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \end{aligned} \quad (3.199)$$

Combinando (3.197) e (3.199), e aplicando os lemas anteriores obtemos a desigualdade desejada. ■

Agora estamos aptos a estabelecer o resultado principal desta seção.

Teorema 3.4. *O semigrupo $T(t)$ associado com o problema sem efeito de memória (3.140)-(3.149) decai polinomialmente como $t^{-1/2}$. Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{B}^k)$, então*

$$\|T(t)\mathcal{U}_0\|_{\check{\mathcal{H}}} \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} \|\mathcal{U}_0\|_{D(\mathcal{B}^k)}.$$

Demonstração: A prova de que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{B})$ é análoga a prova do Lema 3.1 e, por isso, será aqui omitida. Dos Lemas (3.8) e (3.9), segue que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, temos

$$\|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}}^2 \leq C|\lambda|^2 \|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}} \|F\|_{\check{\mathcal{H}}} + C\|F\|_{\check{\mathcal{H}}}^2,$$

e isto implica que

$$\|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}}^2 \leq C|\lambda|^4 \|F\|_{\check{\mathcal{H}}}^2,$$

o que nos dá, para $|\lambda|$ suficientemente grande

$$\|(i\lambda I - \mathcal{B})^{-1}F\|_{\check{\mathcal{H}}} = \|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}} \leq C|\lambda|^2 \|F\|_{\check{\mathcal{H}}}.$$

Daí e do Teorema de Borichev e Tomilov segue a conclusão desejada. ■

Capítulo 4

Problema de Transmissão para uma Viga de Timoshenko Parcialmente Viscoelástica com Carga Pontual

Neste capítulo, consideramos um problema de transmissão para uma viga de Timoshenko constituída por dois componentes: o primeiro deles, um material parcialmente viscoelástico (com dissipação apenas no ângulo de rotação dos filamentos da viga, ocasionada por um termo de memória agindo sobre o momento fletor), e o outro, um material elástico (sem mecanismo de dissipação atuando sobre ele). Assumimos que a extremidade esquerda da viga está presa enquanto que, na extremidade direita da viga, está anexada uma carga. Mostraremos que este sistema híbrido é exponencialmente estável quando o efeito de memória é efetivo sobre o momento fletor da parte viscoelástica da viga e as velocidades de ondas são iguais. Do ponto de vista físico o caso em que as velocidades de ondas são diferentes é mais realístico e, para este caso, mostramos que a solução do sistema decai polinomialmente para zero como $t^{-1/4}$.

4.1 O Modelo

Consideramos um modelo constituído por um problema de transmissão para uma viga de Timoshenko em balanço, cuja extremidade esquerda está presa e que possui, em sua extremidade

direita, um corpo oco cujo interior contém material granular. A viga é formada por dois componentes: um deles, um material viscoelástico e o outro, um material elástico (portanto, sem dissipação agindo sobre ele).

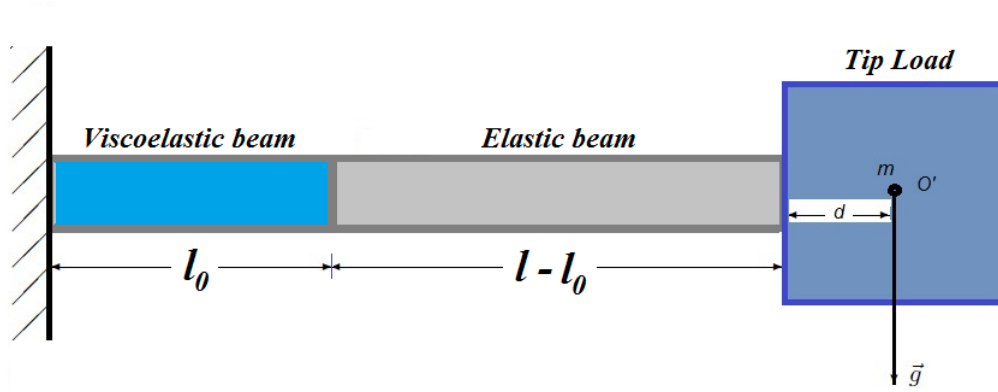


Figura 4.1: Viga de Timoshenko com Carga Pontual.

Denotemos por $\Phi = \Phi(x, t)$ e $\Psi = \Psi(x, t)$, respectivamente, o deslocamento transversal da viga e o ângulo de rotação de um filamento da viga. Adotaremos a seguinte notação:

$$\Phi = \begin{cases} \varphi^1 & \text{em }]0, l_0[\\ \varphi^2 & \text{em }]l_0, l[\end{cases} \quad \text{e} \quad \Psi = \begin{cases} \psi^1 & \text{em }]0, l_0[\\ \psi^2 & \text{em }]l_0, l[\end{cases} \quad (4.1)$$

onde l é o comprimento da corda e l_0 é o ponto de transmissão. Com isto, o modelo aqui considerado é escrito como

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (4.2)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1) + \int_0^t g(t-s) \psi_{xx}^1(., s) ds = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (4.3)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (4.4)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2) = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (4.5)$$

Aqui, $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de relaxamento e ρ_j^i, k_i, b_i ($i, j \in \{1, 2\}$) são constantes positivas que dizem respeito às propriedades físicas da viga. As condições de contorno são dadas por

$$\varphi^1(0) = \psi^1(0) = 0, \quad \varphi^2(l) = u \quad \text{e} \quad \psi^2(l) = v \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.6)$$

e as condições de transmissão são

$$\varphi^1(l_0, t) = \varphi^2(l_0, t), \quad \psi^1(l_0, t) = \psi^2(l_0, t), \quad t \in [0, +\infty[\quad (4.7)$$

$$k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0, t) = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0, t), \quad t \in [0, +\infty[\quad (4.8)$$

$$b_1\psi_x^1(l_0, t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x^1(l_0, s)ds = b_2\psi_x^2(l_0, t), \quad t \in [0, +\infty[. \quad (4.9)$$

O efeito da carga pontual é modelado como

$$m_1 u_{tt} + d_1 u_t + \gamma_1 u + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l, \cdot) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.10)$$

$$m_2 v_{tt} + d_2 v_t + \gamma_2 v + b_2 \psi_x^2(l, \cdot) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.11)$$

onde m_i ($i \in \{1, 2\}$) são constantes positivas, d_i e γ_i ($i \in \{1, 2\}$) ($i \in \{1, 2\}$) são constantes não-negativas que refletem propriedades físicas da carga. Finalmente, os dados iniciais são dados por

$$\varphi^1(0) = \varphi_0^1, \quad \varphi_t^1(0) = \varphi_1^1, \quad \psi^1(0) = \psi_0^1, \quad \psi_t^1(0) = \psi_1^1 \quad \text{em }]0, l_0[\quad (4.12)$$

$$\varphi^2(0) = \varphi_0^2, \quad \varphi_t^2(0) = \varphi_1^2, \quad \psi^2(0) = \psi_0^2, \quad \psi_t^2(0) = \psi_1^2 \quad \text{em }]l_0, l[\quad (4.13)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{C}, \quad u_t(0) = u_1 \in \mathbb{C}, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{C}, \quad v_t(0) = v_1 \in \mathbb{C}. \quad (4.14)$$

Neste trabalho, consideramos que a função de relaxamento decai exponencialmente, isto é, assumimos as seguintes hipóteses sobre a função g :

$$g(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{e} \quad g > 0 \text{ quase sempre em } [0, +\infty[; \quad (4.15)$$

$$\exists c_1, c_2 > 0 : -c_1 g(t) \leq g'(t) \leq -c_2 g(t), \quad t \in [0, +\infty[; \quad (4.16)$$

$$0 < b := b_1 - \beta, \quad \text{onde} \quad \beta := \int_0^\infty g(s)ds. \quad (4.17)$$

Denotaremos por χ a diferença entre as velocidades de ondas, isto é,

$$\chi := \frac{\rho_1^1}{k_1} - \frac{\rho_2^1}{b_1}.$$

O principal resultado deste trabalho é mostrar que o modelo acima é exponencialmente estável no caso em que as velocidades de ondas são iguais, ou seja, quando $\chi = 0$ e, no caso contrário, que a solução do sistema decai polinomialmente para zero.

4.2 Existência e Unicidade de Soluções

Gostaríamos de utilizar a teoria de semigrupos para estabelecer, tanto os resultados sobre comportamento assintótico das soluções, quanto a boa-colocação do sistema. Para isso, precisamos reescrever o problema de modo a obtermos um sistema autônomo. Com esse objetivo em mente, introduzimos o *problema com história*, que é obtido trocando-se a equação (4.3) pela equação com história

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1) + \int_{-\infty}^t g(t-s) \psi_{xx}^1(., s) ds = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[. \quad (4.18)$$

Seguindo as ideias de Dafermos [9], [10] e Fabrizio [13], introduzimos a notação

$$\xi(x, t, s) := \psi^1(x, t) - \psi^1(x, t-s), \quad (4.19)$$

com $s \in [0, +\infty)$; dessa forma, o sistema (4.2), (4.18), (4.4)-(4.14) pode ser escrito como

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (4.20)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b \psi_{xx}^1 + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1) - \int_0^\infty g(s) \xi_{xx}(s) ds = 0 \quad \text{em }]0, l_0[\times]0, +\infty[\quad (4.21)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (4.22)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2) = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\quad (4.23)$$

$$\xi_t + \xi_s - \psi_t^1 = 0 \quad \text{em }]l_0, l[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\quad (4.24)$$

onde b foi definido em (4.17), com $\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, u$ e v satisfazendo as condições (4.6), (4.12), (4.13), (4.14), e ξ verificando as condições iniciais

$$\xi(x, 0, s) = \xi_0(x, s) =: \psi_0^1(x) - \psi^1(x, -s), \quad (x, s) \in]0, l_0[\times]0, \infty[\quad (4.25)$$

e condições de contorno

$$\xi(0, t, s) = 0, \quad (t, s) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[; \quad \xi(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in]0, l_0[\times]0, +\infty[. \quad (4.26)$$

A condição de transmissão (4.9) é reescrita como

$$b\psi_x^1(l_0, t) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(l_0, t, s)ds = b_2\psi_x^2(l_0, t), \quad t \in [0, +\infty[. \quad (4.27)$$

Definimos a energia total do sistema como

$$E(t) := E_1(t) + E_2(t) \quad (4.28)$$

onde

$$E_1(t) := \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left[\rho_1^1 |\varphi_t^1|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^1|^2 + b |\psi_x^1|^2 + k_1 |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 + \int_0^\infty g(s) |\xi_x(s)|^2 ds \right] dx$$

e

$$E_2(t) := \frac{1}{2} \left\{ \int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx + \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + m_1 |u_t|^2 + m_2 |v_t|^2 \right\}.$$

Recordando que, no segundo capítulo, foram introduzidos os espaços

$$\mathbb{H}^m := H^m(0, l_0) \times H^m(l_0, l), \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{H}_*^m := \{(u, v) \in \mathbb{H}^m; u(0) = 0, u(l_0) = v(l_0)\}, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{L}^2 := L^2(0, l_0) \times L^2(l_0, l);$$

$$H_*^m(0, l_0) := \{f \in H^m(0, l_0); f(0) = 0\}, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$L_g^2 := \left\{ \varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_*^1(0, l_0); \int_0^\infty g(s) \int_0^{l_0} |\varphi_x(s)|^2 dx ds < \infty \right\}.$$

Com estas notações, consideramos o seguinte espaço de fase

$$\mathcal{H} := \{(\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \xi, u, v, U, V)^T \in [\mathbb{H}_*^1]^2 \times [\mathbb{L}^2]^2 \times L_g^2 \times \mathbb{C}^4; \varphi^2(l) = u, \psi^2(l) = v\}.$$

Note que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno induzido pela norma da energia, a qual, para cada $\mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \xi, u, v, U, V)^T \in \mathcal{H}$, é dada por

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = & k_1 \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + b \|\psi_x^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \rho_1^1 \|\Phi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \rho_2^1 \|\Psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \\ & + k_2 \|\varphi_x^2 + \psi^2\|_{L^2(l_0, l)}^2 + b_2 \|\psi_x^2\|_{L^2(l_0, l)}^2 + \rho_1^2 \|\Phi^2\|_{L^2(l_0, l)}^2 + \rho_2^2 \|\Psi^2\|_{L^2(l_0, l)}^2 + \\ & + \|\xi\|_{L_g^2}^2 + \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + m_1 |U|^2 + m_2 |V|^2. \end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathcal{A}$ ao operador linear não-limitado em $\mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{A} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \frac{k_1}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1)_x \\ \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2)_x \\ \frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 - \frac{k_1}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1) + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g(s)\xi_{xx}(s)ds \\ \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2) \\ \Psi^1 - \xi_s \\ U \\ V \\ -\frac{d_1}{m_1}U - \frac{\gamma_1}{m_1}u - \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2)(l) \\ -\frac{d_2}{m_2}V - \frac{\gamma_2}{m_2}v - \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(l) \end{pmatrix},$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \xi, u, v, U, V) \in \mathcal{H}; \quad (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathbb{H}^2, \\ \left(b\psi^1 + \int_0^\infty g(s)\xi(s)ds, \psi^2 \right) \in \mathbb{H}^2, \quad (\Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2) \in [\mathbb{H}_*^1]^2, \quad \xi_s \in L_g^2, \\ \xi|_{s=0} = 0, \quad \Phi^2(l) = U, \quad \Psi^2(l) = V, \quad b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(l_0, s)ds = b_2\psi_x^2(l_0), \\ k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0) \end{array} \right\}.$$

Usando as hipóteses sobre a função g , um cálculo direto nos dá que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A} \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{H}} = -d_1|U|^2 - d_2|V|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g'(s)|\xi_x(s)|^2 ds dx \leq 0,$$

o que significa que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo.

O sistema (4.20)-(4.27), (4.7), (4.8) é equivalente a

$$\mathcal{U}_t = \mathcal{A} \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0, \quad (4.29)$$

onde $\mathcal{U}(t) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t), \psi^1(t), \psi^2(t), \Phi^1(t), \Phi^2(t), \Psi^1(t), \Psi^2(t), \xi(t), u(t), v(t), U(t), V(t))^T$
and $\mathcal{U}_0 = (\varphi_0^1, \varphi_0^2, \psi_0^1, \psi_0^2, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \psi_1^1, \psi_1^2, \xi_0, u_0, v_0, u_1, v_1)^T$.

Sob estas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$ em $\mathcal{H}$. Assim, para qualquer dado inicial $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$, o problema (4.29) possui uma única solução fraca*

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}^0([0, \infty[, \mathcal{H}).$$

Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, então $\mathcal{U}$ é uma solução forte de (4.29), isto é

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^0([0, \infty[, D(\mathcal{A})).$$

Demonstração: É fácil ver que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$. Como $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo, para concluirmos que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, é suficiente mostrarmos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Para isto, vamos verificar que, para cada $F = (f^1, \dots, f^{13})^T \in \mathcal{H}$ existe um único $\mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \xi, u, v, U, V)^T \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A} \mathcal{U} = F$, isto é, tal que

$$\Phi^1 = f^1 \quad (4.30)$$

$$\Phi^2 = f^2 \quad (4.31)$$

$$\Psi^1 = f^3 \quad (4.32)$$

$$\Psi^2 = f^4 \quad (4.33)$$

$$\frac{k_1}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1)_x = f^5 \quad (4.34)$$

$$\frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = f^6 \quad (4.35)$$

$$\frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 - \frac{k_1}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1) + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g(s)\xi_{xx}(s)ds = f^7 \quad (4.36)$$

$$\frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2) = f^8 \quad (4.37)$$

$$\Psi^1 - \xi_s = f^9 \quad (4.38)$$

$$U = f^{10} = f^2(l) \quad (4.39)$$

$$V = f^{11} = f^4(l) \quad (4.40)$$

$$-\frac{d_1}{m_1}U - \frac{\gamma_1}{m_1}u - \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2)(l) = f^{12} \quad (4.41)$$

$$-\frac{d_2}{m_2}V - \frac{\gamma_2}{m_2}v - \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(l) = f^{13} \quad (4.42)$$

Com efeito, das equações (4.32) and (4.38), temos que $\xi_s \in L_g^2$, e que

$$\xi(x, s) = s f^3(x) - \int_0^s f^9(x, \tau) d\tau,$$

o que significa que ξ está univocamente determinada. Além disso, usando (4.16) e (4.26), nós podemos escrever, para cada $T > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^T g(s) \int_0^{l_0} |\xi_x(s)|^2 dx ds &\leq \frac{2}{c_2} \int_0^T g(s) \int_0^{l_0} \xi_x(s) \overline{\xi_{sx}(s)} dx ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T g(s) \int_0^{l_0} |\xi_x(s)|^2 dx ds + \frac{2}{c_2^2} \int_0^T g(s) \int_0^{l_0} |\xi_{sx}(s)|^2 dx ds \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\|\xi\|_{L_g^2} \leq \frac{2}{c_2} \|\xi_s\|_{L_g^2}$$

o que nos permite concluir que $\xi \in L_g^2$. Assim, resta-nos apenas estabelecer a existência e unicidade de solução para o sistema

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_x^1 + \psi^1)_x = \frac{\rho_1^1}{k_1} f^5 & \text{em }]0, l_0[\\ (\varphi_x^2 + \psi^2)_x = \frac{\rho_1^2}{k_2} f^6 & \text{em }]l_0, l[\\ \psi_{xx}^1 - \frac{k_1}{b} (\varphi_x^1 + \psi^1) = \frac{\rho_2^1}{b} f^7 - \frac{1}{b} \int_0^\infty g(s) \xi_{xx}(s) ds & \text{em }]0, l_0[\\ \psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{b_2} (\varphi_x^2 + \psi^2) = \frac{\rho_2^2}{b_2} f^8 & \text{em }]l_0, l[\\ \varphi^1(0) = \psi^1(0) = 0, \quad \varphi^1(l_0) = \varphi^2(l_0), \quad \psi^1(l_0) = \psi^2(l_0) \\ \gamma_1 \varphi^2(l) + k_2 (\varphi_x^2 + \psi^2)(l) = -m_1 f^{12} - d_1 f^{10} =: G_1 \\ \gamma_2 \psi^2(l) + b_2 \psi_x^2(l) = -m_2 f^{13} - d_2 f^{11} =: G_2 \\ k_1 (\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) - k_2 (\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0) = 0, \quad b \psi_x^1(l_0) - b_2 \psi_x^2(l_0) = - \int_0^\infty g(s) \xi_x(l_0, s) ds \end{array} \right.$$

Para isto, consideremos o funcional $T : X \rightarrow \mathbb{C}$ definido em cada $(h^1, \dots, h^4) \in X$ por

$$\begin{aligned} T(h^1, \dots, h^4) := & - \int_0^{l_0} \left(\rho_1^1 \overline{f^5} h^1 + \rho_2^1 \overline{f^7} h^3 \right) dx - \int_0^{l_0} \left(\int_0^\infty g(s) \overline{\xi_x(s)} ds \right) h_x^3 dx + \\ & + \rho_1^2 \int_{l_0}^l \left(\int_{l_0}^x \overline{f^6(\tau)} d\tau \right) (h_x^2 + h^4) dx + \int_{l_0}^l \left[\rho_2^2 \int_{l_0}^x \overline{f^8(\tau)} d\tau + \rho_1^2 \int_{l_0}^x \int_{l_0}^\tau \overline{f^6(\nu)} d\nu d\tau \right] h_x^4 dx + \\ & + \overline{G_3} h^2(l) + \overline{G_4} h^4(l) \end{aligned}$$

onde $G_3 := \left(G_1 - \rho_1^2 \int_{l_0}^l f^6 dx \right)$ e $G_4 := \left(G_2 - \rho_2^2 \int_{l_0}^l f^8 dx - \rho_1^2 \int_{l_0}^l \int_{l_0}^x f^6(\tau) d\tau dx \right)$; e também onde $X := [\mathbb{H}_*^1]^2$ é o espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\begin{aligned} \langle (h^1, \dots, h^4), (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2) \rangle_X := & \int_0^{l_0} \left[b \overline{\psi_x^1} h_x^3 + k_1 (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1}) (h_x^1 + h^3) \right] dx + \\ & + \int_{l_0}^l \left[b_2 \overline{\psi_x^2} h_x^4 + k_2 (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2}) (h_x^2 + h^4) \right] dx + \gamma_1 \overline{\varphi^2(l)} h^2(l) + \gamma_2 \overline{\psi^2(l)} h^4(l). \end{aligned}$$

É claro que $T \in X'$; daí, e pelo teorema de representação de Riesz, concluímos que existe uma única solução fraca para o sistema (P).

Portando, temos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. ■

4.3 Estabilidade Exponencial

Nesta seção, mostraremos que, se g verifica as hipóteses (4.15)–(4.17) e se as velocidades de ondas são iguais, então o correspondente semigrupo é exponencialmente estável. A principal ferramenta utilizada nesta tarefa é o resultado de Prüss (ver Teorema 1.6, no capítulo 1). A prova da primeira condição do Teorema de Prüss, isto é, que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, é inteiramente análoga àquela apresentada no capítulo 3 e, por isso, será aqui omitida. Passaremos então a estabelecer a validade da segunda condição do Teorema de Prüss, a saber, que o operador resolvente é limitado sobre o eixo imaginário.

De agora em diante, C denotará uma constante genérica, que pode ser diferente em diferentes lugares, podendo inclusive mudar mesmo de uma linha para outra.

Devemos mostrar que, para qualquer $F = (f^1, f^2, \dots, f^{13})^T \in \mathcal{H}$, a solução $\mathcal{U}$ da equação resolvente

$$(i\lambda I - \mathcal{A})\mathcal{U} = F \tag{4.43}$$

é limitada; isto é, $\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$. De fato, escrevendo (4.43) em termos de suas equações componentes, temos

$$i\lambda\varphi^1 - \Phi^1 = f^1 \tag{4.44}$$

$$i\lambda\varphi^2 - \Phi^2 = f^2 \tag{4.45}$$

$$i\lambda\psi^1 - \Psi^1 = f^3 \tag{4.46}$$

$$i\lambda\psi^2 - \Psi^2 = f^4 \tag{4.47}$$

$$i\lambda\Phi^1 - \frac{k_1}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1)_x = f^5 \quad (4.48)$$

$$i\lambda\Phi^2 - \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = f^6 \quad (4.49)$$

$$i\lambda\Psi^1 - \frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 + \frac{k_1}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1) - \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g(s)\xi_{xx}(s)ds = f^7 \quad (4.50)$$

$$i\lambda\Psi^2 - \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 + \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2) = f^8 \quad (4.51)$$

$$i\lambda\xi - \Psi^1 + \xi_s = f^9 \quad (4.52)$$

$$i\lambda u - U = f^{10} \quad (4.53)$$

$$i\lambda v - V = f^{11} \quad (4.54)$$

$$i\lambda U + \frac{d_1}{m_1}U + \frac{\gamma_1}{m_1}u + \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2)(l) = f^{12} \quad (4.55)$$

$$i\lambda V + \frac{d_2}{m_2}V + \frac{\gamma_2}{m_2}v + \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(l) = f^{13} \quad (4.56)$$

As propriedades dissipativas de $\mathcal{A}$ implicam na existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$d_1|U|^2 + d_2|V|^2 + \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s)|\xi_x(s)|^2 ds dx \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.57)$$

Passaremos agora a estabelecer resultados que serão úteis na tarefa de mostrar que a segunda condição do teorema de Pruss se verifica.

Lema 4.1. *Sob as notações acima, existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\rho_2^1 \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\left(\|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)} + \|\psi_x^1\|_{L^2(0,l_0)}\right)\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C|R_1|,$$

$$\text{onde } R_1 := \left(b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(l_0, s)ds\right)\left(\int_0^\infty g(s)\overline{\xi(l_0, s)}ds\right).$$

Demonstração: Multiplicando a equação (4.50) por $\int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi(s)}ds$, e usando (4.52), temos

$$\begin{aligned} \beta\rho_2^1 \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx &= k_1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s)\overline{\xi(s)}(\varphi_x^1 + \psi^1)ds dx + b \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s)\overline{\xi_x(s)}\psi_x^1 ds dx + \\ &+ \rho_2^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s)\overline{\xi_s(s)}\Psi^1 ds dx + \int_0^{l_0} \left| \int_0^\infty g(s)\xi_x(s)ds \right|^2 dx + \\ &- \rho_2^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s)\overline{f^9(s)}\Psi^1 ds dx - \rho_2^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s)\overline{\xi(s)}f^7 ds dx - R_1. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Mas, usando (4.57), obtemos

$$\operatorname{Re} \left[k_1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\xi(s)} (\varphi_x^1 + \psi^1) ds dx \right] \leq C \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \quad (4.59)$$

e

$$\operatorname{Re} \left[b \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_x(s)} \psi_x^1 ds dx \right] \leq C \|\psi_x^1\|_{L^2(0,l_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}. \quad (4.60)$$

Além disso, usando (4.16) e (4.57), resulta que

$$\operatorname{Re} \left[\rho_2^1 \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_s(s)} \Psi^1 ds dx \right] \leq \frac{\beta_2 \rho_2^1}{2} \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.61)$$

Finalmente, tomando a parte real em (4.58) e usando (4.59)-(4.61), obtemos a desigualdade desejada. ■

Agora, para estimar o termo da energia relativo a ψ^1 , introduzimos o multiplicador w dado pela solução do seguinte problema de Dirichlet

$$-w_{xx} = \psi_x^1, \quad w(0) = w(l_0) = 0. \quad (4.62)$$

Note que w pode ser escrito como

$$w(x) = - \int_0^x \psi^1(y) dy + \frac{x}{l_0} \int_0^{l_0} \psi^1(y) dy =: G(\psi^1)(x). \quad (4.63)$$

Este multiplicador nos permite obter o seguinte resultado.

Lema 4.2. *Para cada $\varepsilon > 0$, existem $C, C_\varepsilon > 0$, tais que*

$$\begin{aligned} b \int_0^{l_0} |\psi_x^1|^2 dx &\leq C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\ &+ \varepsilon \|\Phi^1\|_{L^2(0,l_0)} + C |\varphi^1(l_0)|^2 + C_\varepsilon |R_1| + C |R_2|, \end{aligned}$$

onde $R_2 := \left(b \psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g(s) \xi_x(l_0, s) ds \right) \overline{\psi^1(l_0)}$.

Demonstração: Por um lado, multiplicando (4.50) por $\overline{\psi^1}$ e usando (4.46), vem que

$$\begin{aligned} b \int_0^{l_0} |\psi_x^1|^2 dx + k_1 \int_0^{l_0} \varphi_x^1 \overline{\psi^1} dx + k_1 \int_0^{l_0} |\psi^1|^2 dx &= \rho_2^1 \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx - \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) \overline{\psi_x^1} ds dx + \\ &+ \rho_2^1 \int_0^{l_0} f^7 \overline{\psi^1} dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} \Psi^1 \overline{f^3} dx + R_2. \end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando (4.48) por $\bar{w}$, e usando (4.46), (4.62) e (4.63), obtemos

$$-k_1 \int_0^{l_0} |w_x|^2 dx - k_1 \int_0^{l_0} \varphi_x^1 \bar{\psi}^1 dx = \rho_1^1 \int_0^{l_0} \Phi^1 \left(\overline{G(\Psi^1)} + \overline{G(f^3)} \right) dx - \frac{k_1}{l_0} \varphi^1(l_0) \int_0^{l_0} \psi^1 dx + \rho_1^1 \int_0^{l_0} f^5 \bar{w} dx.$$

Destas duas últimas equações, obtemos

$$\begin{aligned} b \int_0^{l_0} |\psi_x^1|^2 dx - k_1 \left(\int_0^{l_0} |w_x|^2 dx - \int_0^{l_0} |\psi^1|^2 dx \right) &= \rho_2^1 \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx - \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) \bar{\psi}_x^1 ds dx + \\ &+ \rho_1^1 \int_0^{l_0} \Phi^1 \overline{G(\Psi^1)} dx + \rho_1^1 \int_0^{l_0} \Phi^1 \overline{G(f^3)} dx + \rho_1^1 \int_0^{l_0} f^5 \bar{w} dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} f^7 \bar{\psi}^1 dx + \\ &+ \rho_2^1 \int_0^{l_0} \Psi^1 \bar{f}^3 dx - \frac{k_1}{l_0} \varphi^1(l_0) \int_0^{l_0} \psi^1 dx + R_2. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Mas, usando (4.57), vemos que

$$\operatorname{Re} \left[- \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) \bar{\psi}_x^1 ds dx \right] \leq \frac{b}{4} \int_0^{l_0} |\psi_x^1|^2 dx + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.65)$$

Além disso, é fácil ver que

$$\left| - \frac{k_1}{l_0} \varphi^1(l_0) \int_0^{l_0} \psi^1 dx \right| \leq \frac{b}{4} \int_0^{l_0} |\psi_x^1|^2 dx + C |\varphi^1(l_0)|^2 \quad (4.66)$$

e que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\operatorname{Re} \left[\rho_1^1 \int_0^{l_0} \Phi^1 \overline{G(\Psi^1)} dx \right] \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_0^{l_0} |\Phi^1|^2 dx + C_\varepsilon \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx. \quad (4.67)$$

Então, como

$$\int_0^{l_0} |w_x|^2 dx \leq \int_0^{l_0} |\psi^1|^2 dx \quad (4.68)$$

basta tomar a parte real em (4.64), usar (4.65)-(4.68) e o Lema 4.1 para obter o resultado desejado. ■

Lema 4.3. Para cada $\varepsilon > 0$, existem $C, C_\varepsilon > 0$, tais que

$$\begin{aligned} k_1 \int_0^{l_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx &\leq C |\chi| \left| \int_0^{l_0} \Psi^1 \bar{\Phi}_x^1 dx \right| + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\psi_x^1\|_{L^2(0,l_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\ &+ \varepsilon \|\Phi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + C |\Phi^1(l_0)| |\Psi^1(l_0)| + C |R_1| + C |R_3|, \end{aligned}$$

$$\text{onde } R_3 := \left(\overline{\varphi_x^1 + \psi^1} \right) \left(b \psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right) \Big|_{x=0}^{x=l_0} \quad \text{e} \quad \chi := \frac{\rho_1^1}{k_1} - \frac{\rho_2^1}{b_1}.$$

Demonstração: Multiplicando (4.50) por $(\overline{\varphi_x^1 + \psi^1})$, e usando (4.44) e (4.46), temos

$$k_1 \int_0^{l_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx = \rho_2^1 \int_0^{l_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1}) f^7 dx + \underbrace{- \int_0^{l_0} \left(b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right) (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1})_x dx}_{=: I_1} + \rho_2^1 \int_0^{l_0} \Psi^1 (\overline{f_x^1 + f^3}) dx + R_3. \quad (4.69)$$

Usando (4.48), (4.46) e (4.52), podemos reescrever I_1 como

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{b_1 \rho_1^1}{k_1} \Psi^1(l_0) \overline{\Phi^1(l_0)} - \frac{b_1 \rho_1^1}{k_1} \int_0^{l_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx - \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \xi_{sx}(s) \overline{\Phi^1} ds dx + \\ &+ \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) f_x^9(s) \overline{\Phi^1} ds dx + \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{l_0} \left(b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right) \overline{f^5} dx + \\ &+ \frac{b \rho_1^1}{k_1} \int_0^{l_0} \overline{\Phi^1} f_x^3 dx. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Retornando com (4.70) em (4.69), encontramos

$$\begin{aligned} k_1 \int_0^{l_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx &= -b_1 \chi \int_0^{l_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} |\Psi^1|^2 dx - \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \xi_{sx}(s) \overline{\Phi^1} ds dx + \\ &+ \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) f_x^9(s) \overline{\Phi^1} ds dx + \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{l_0} \left(b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right) \overline{f^5} dx + \\ &+ \rho_2^1 \int_0^{l_0} (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1}) f^7 dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} \Psi^1 (\overline{f_x^1 + f^3}) dx + \frac{b \rho_1^1}{k_1} \int_0^{l_0} \overline{\Phi^1} f_x^3 dx + \\ &+ \frac{b_1 \rho_1^1}{k_1} \Psi^1(l_0) \overline{\Phi^1(l_0)} + R_3. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Mas, por (4.57), vemos que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$\operatorname{Re} \left[-\frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{l_0} \int_0^\infty g(s) \xi_{sx}(s) \overline{\Phi^1} ds dx \right] \leq \varepsilon \|\Phi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.72)$$

Tomando a parte real em (4.71) e usando (4.72) e o Lema 4.1, obtém-se a desigualdade desejada. ■

Lema 4.4. *Existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \int_0^{l_0} |\Phi^1|^2 dx &\leq C |\chi| \left| \int_0^{l_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx \right| + C (\|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0, l_0)} + \|\psi_x^1\|_{L^2(0, l_0)}) \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\ &+ C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C |\varphi^1(l_0)|^2 + C |\Phi^1(l_0)| |\Psi^1(l_0)| + C |(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0)| |\varphi^1(l_0)| + \\ &+ C |R_1| + C |R_2| + C |R_3|. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (4.48) por $\overline{\varphi^1}$, e usando (4.44), temos

$$\rho_1^1 \int_0^{l_0} |\Phi^1|^2 dx = k_1 \int_0^{l_0} (\varphi_x^1 + \psi^1) \overline{\varphi_x^1} dx - \rho_1^1 \int_0^{l_0} \Phi^1 \overline{f^1} dx - \rho_1^1 \int_0^{l_0} f^5 \overline{\varphi^1} dx - k_1 (\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0) \varphi^1(l_0).$$

Tomando a parte real na equação acima e, em seguida, escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno nos Lemas 4.2 e 4.3, tem-se a conclusão desejada.

Lema 4.5. *Existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\begin{aligned} |\Psi^1(l_0)|^2 + \left| b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g(s) \xi_x(l_0, s) ds \right|^2 + \left| b\psi_x^1(0) + \int_0^\infty g(s) \xi_x(0, s) ds \right|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ + C \|\Psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + C \|\psi_x^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + C \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0, l_0)} \left[\|\psi_x^1\|_{L^2(0, l_0)} + \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.73)$$

e

$$\begin{aligned} |\Phi^1(l_0)|^2 + |(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0)|^2 + |\varphi_x^1(0)|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ + C \left[\|\Phi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \|\Psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0, l_0)} \right]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Demonstração: Multiplicando (4.50) por $\left[p \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_x(s)} ds \right) \right]$, onde $p \in C^1([0, l_0]; \mathbb{R})$, encontramos

$$\begin{aligned} \underbrace{-\rho_2^1 \int_0^{l_0} p \Psi^1 \left(b \overline{(i\lambda\psi^1)_x} + \int_0^\infty g(s) \overline{(i\lambda\xi)_x(s)} ds \right) dx}_{I_2} - \frac{p}{2} \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right|^2 \Big|_{x=0}^{x=l_0} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} p_x \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right|^2 dx - \rho_2^1 \int_0^{l_0} p \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_x(s)} ds \right) f^7 dx = \\ = -k_1 \int_0^{l_0} p (\varphi_x^1 + \psi^1) \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_x(s)} ds \right) dx. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Mas, usando (4.46) e (4.52) em I_2 obtemos, de (4.75)

$$\begin{aligned} \frac{b_1 \rho_2^1}{2} p(l_0) |\Psi^1(l_0)|^2 + \frac{p}{2} \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right|^2 \Big|_{x=0}^{x=l_0} = \frac{b_1 \rho_2^1}{2} \int_0^{l_0} p_x |\Psi^1|^2 dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} p_x \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right|^2 dx + \rho_2^1 \int_0^{l_0} p \Psi^1 \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_{sx}(s)} ds dx - b \rho_2^1 \int_0^{l_0} p \Psi^1 \overline{f_x^3} dx + \\ + k_1 \int_0^{l_0} p (\varphi_x^1 + \psi^1) \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_x(s)} ds \right) dx - \rho_2^1 \int_0^{l_0} p \Psi^1 \int_0^\infty g(s) \overline{f_x^9(s)} ds dx + \\ - \rho_2^1 \int_0^{l_0} p \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_x(s)} ds \right) f^7 dx. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Tomando a parte real em (4.76), usando (4.57) e escolhendo $p \in C^1([0, l_0]; \mathbb{R})$ tal que $p(l_0) = -p(0) = 2$, obtemos a desigualdade (4.73). A prova de (4.74) é análoga e é obtida multiplicando a equação (4.48) por $p(\overline{\varphi_x^1 + \psi^1})$. ■

Lema 4.6. *Existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^l [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_0^{l_0} [\rho_1^1 |\Phi^1|^2 + \rho_2^1 |\Psi^1|^2 + b |\psi_x^1|^2 + k_1 |\varphi_x^1 + \psi^1|^2] dx. \end{aligned}$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $q_n : [l_0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$q_n(x) = \int_x^l e^{-ns} ds = \frac{1}{n} (e^{-nx} - e^{-nl}).$$

Multiplicando (4.49) por $q_n(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2})$, usando (4.45) e (4.47), vem que

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^l e^{-nx} [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx &= q_n(l_0) [\rho_1^2 |\Phi^2(l_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0)|^2] + \\ &- 2\rho_1^2 \int_{l_0}^l q_n \Phi^2 \overline{\Psi^2} dx - 2\rho_1^2 \int_{l_0}^l q_n \Phi^2 (\overline{f_x^2 + f^4}) dx - 2\rho_1^2 \int_{l_0}^l q_n (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2}) f^6 dx. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Por outro lado, multiplicando (4.51) por $q_n \overline{\psi_x^2}$ e usando (4.47), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^l e^{-nx} [\rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2] dx &= q_n(l_0) [\rho_2^2 |\Psi^2(l_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(l_0)|^2] + \\ &+ 2k_2 \int_{l_0}^l q_n (\varphi_x^2 + \psi^2) \overline{\psi_x^2} dx - 2\rho_2^2 \int_{l_0}^l q_n \Psi^2 \overline{f_x^4} dx - 2\rho_2^2 \int_{l_0}^l q_n \overline{\psi_x^2} f^8 dx. \end{aligned} \quad (4.78)$$

De (4.77) e (4.78), segue que existe uma constante $C_0 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{C_0}{n}\right) \int_{l_0}^l e^{-nx} [\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ \frac{1}{n} (e^{-nl_0} - e^{-nl}) [\rho_1^2 |\Phi^2(l_0)|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2(l_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(l_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2)(l_0)|^2] \end{aligned} \quad (4.79)$$

Finalmente, tomando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, usando as condições de transmissão e o Lema 4.5 e, lembrando que, $\Phi^1(l_0) = \Phi^2(l_0)$ e $\Psi^1(l_0) = \Psi^2(l_0)$, obtemos a desigualdade desejada. ■

O próximo Lema é crucial para garantirmos que o decaimento exponencial ocorre mesmo no caso em que $d_1 = d_2 = 0$. Na verdade, ele fornece uma nova estimativa para os termos da energia envolvendo $|U|^2$ e $|V|^2$ uma vez que aquelas extraídas de (4.57) só são válidas quando d_1 e d_2 são ambos positivos.

Lema 4.7. *Existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\begin{aligned} \gamma_1|u|^2 + \gamma_2|v|^2 + m_1|U|^2 + m_2|V|^2 &\leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_{l_0}^l [\rho_1^2|\Phi^2|^2 + \rho_2^2|\Psi^2|^2 + b_2|\psi_x^2|^2 + k_2|\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (4.49) por $(x-l_0)(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2})$, usando (4.45) e (4.47), e lembrando que $\Phi^2(l) = U$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1^2|U|^2 + k_2|(\varphi_x^2 + \psi^2)(l)|^2 &= \frac{1}{l-l_0} \int_{l_0}^l [\rho_1^2|\Phi^2|^2 + k_2|\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx - \frac{2\rho_1^2}{l-l_0} \int_{l_0}^l (x-l_0)\Phi^2\overline{\Psi^2} dx + \\ &- \frac{2\rho_1^2}{l-l_0} \int_{l_0}^l (x-l_0)\Phi^2(\overline{f_x^2 + f^4}) dx - \frac{2\rho_1^2}{l-l_0} \int_{l_0}^l (x-l_0)(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2})f^6 dx \end{aligned}$$

e isto implica que existe $C > 0$, tal que

$$\rho_1^2|U|^2 + k_2|(\varphi_x^2 + \psi^2)(l)|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0}^l [\rho_1^2|\Phi^2|^2 + \rho_2^2|\Psi^2|^2 + k_2|\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \quad (4.80)$$

Analogamente, multiplicando (4.51) por $(x-l_0)\overline{\psi_x^2}$, usando (4.47), e lembrando que $\Psi^2(l) = V$, conclui-se que existe $C > 0$, tal que

$$\rho_2^2|V|^2 + b_2|\psi_x^2(l)|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0}^l [\rho_2^2|\Psi^2|^2 + b_2|\psi_x^2|^2 + k_2|\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \quad (4.81)$$

Por outro lado, multiplicando (4.55) por $\bar{u}$ e usando (4.53), encontramos

$$\gamma_1|u|^2 = m_1|U|^2 + m_1U\overline{f^{10}} - d_1U\bar{u} - k_2\bar{u}(\varphi_x^2 + \psi^2)(l) + m_1\bar{u}f^{12}$$

o que nos dá, usando (4.80)

$$\gamma_1|u|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0}^l [\rho_1^2|\Phi^2|^2 + \rho_2^2|\Psi^2|^2 + k_2|\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \quad (4.82)$$

Semelhantemente, multiplicando (4.56) por $\bar{v}$ e, em seguida, usando (4.54) e (4.81), resulta que

$$\gamma_2|v|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{l_0}^l [\rho_2^2|\Psi^2|^2 + b_2|\psi_x^2|^2 + k_2|\varphi_x^2 + \psi^2|^2] dx. \quad (4.83)$$

Finalmente, de (4.80)-(4.83) segue a conclusão desejada. ■

Teorema 4.2. *Suponha que as hipóteses (4.15)-(4.17) sobre g sejam válidas e que as velocidades de ondas sejam iguais, isto é, que $\chi = 0$. Então, o semigrupo e^{At} é exponencialmente estável.*

Demonstração: Em vista do Teorema de Pruss (Teorema 1.6 do capítulo 1) e do Lema ??, somente precisamos mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.84)$$

Como o operador resolvente é holomorfo, é suficiente provar a desigualdade acima apenas para $|\lambda|$ suficientemente grande. Para isto, note que, por um lado, os Lemas 4.6 e 4.7 nos permitem escrever

$$E_2(t) \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + CE_1(t). \quad (4.85)$$

Por outro lado, tomando $\chi = 0$ nos Lemas 4.3 e 4.4, usando (4.57) e os Lemas 4.1 e 4.2, concluímos que, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$\begin{aligned} E_1(t) \leq & C_\varepsilon\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon \left[|\Phi^1(l_0)|^2 + |(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0)|^2 + |\varphi_x^1(0)|^2 \right] + C_\varepsilon \left[|\varphi^1(l_0)|^2 + |\psi^1(l_0)|^2 \right] + \\ & + C_\varepsilon \left[|\Psi^1(l_0)|^2 + \left| b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(l_0, s)ds \right|^2 + \left| b\psi_x^1(0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(0, s)ds \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

Então, usando o Lema 4.5 e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, encontramos

$$E_1(t) \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C \left[|\varphi^1(l_0)|^2 + |\psi^1(l_0)|^2 \right]. \quad (4.86)$$

Mas, observando que

$$|\varphi^1(l_0)| \leq \|\varphi^1\|_{L^\infty} \leq C\|\varphi^1\|_{L^2}^{1/2}\|\varphi_x^1\|_{L^2}^{1/2}$$

e usando (4.44), é fácil ver que para cada $\delta > 0$, existe $C_\delta > 0$, tal que

$$C|\varphi^1(l_0)|^2 \leq \delta\|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2}^2 + \delta\|\psi_x^1\|_{L^2}^2 + \frac{C_\delta}{|\lambda|^2} \left[\|\Phi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right] \quad (4.87)$$

e, analogamente, por (4.46), vale que

$$C|\psi^1(l_0)|^2 \leq \delta\|\psi_x^1\|_{L^2}^2 + \frac{C_\delta}{|\lambda|^2} \left[\|\Psi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right]. \quad (4.88)$$

Então, usando (4.86), (4.87) e (4.88) e escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, encontramos

$$E_1(t) \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|^2} E_1(t) + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Segue, para $|\lambda|$ suficientemente grande, que

$$E_1(t) \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.89)$$

De (4.85) e (4.89) resulta que

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

o que implica em

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, o semigrupo é exponencialmente estável. ■

4.4 Decaimento Polinomial

Nesta seção vamos estudar a estabilidade polinomial da solução para o caso mais geral. Em outras palavras, quando $\chi \neq 0$ (que, do ponto de vista físico, é um caso mais realístico), provaremos que o sistema de Timoshenko parcialmente viscoso (4.20)-(4.27), (4.7), (4.8) é polinomialmente estável com taxa de decaimento $1/\sqrt[4]{t}$. Para mostrar isto, usaremos o Teorema de Borichev e Tomilov (Teorema 1.7 do capítulo 1).

Dessa forma, o principal resultado desta seção está expresso no teorema seguinte.

Teorema 4.3. *O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ decai polinomialmente como $t^{-1/4}$. Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A}^k)$, então*

$$\|T(t)\mathcal{U}_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_k}{t^{k/4}} \|\mathcal{U}_0\|_{D(\mathcal{A}^k)}.$$

Demonstração: De (4.57) e dos Lemas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, concluímos que

$$\begin{aligned} E_1(t) \leq & \chi C \left| \int_0^{l_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx \right| + C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C|\varphi^1(l_0)|^2 + C|\Phi^1(l_0)| |\Psi^1(l_0)| + \\ & + C|R_1| + C|R_2| + C|R_3| + C|k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0)| |\varphi^1(l_0)|. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Agora, a fim de estimar o primeiro termo do segundo membro de (4.90), usamos (4.44) e (4.46) para encontrar

$$\Phi_x^1 + \Psi^1 = i\lambda(\varphi_x^1 + \psi^1) - (f_x^1 + f^3)$$

e isto implica, para $|\lambda|$ suficientemente grande, que

$$\left| \int_0^{l_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx \right| \leq \frac{k_1}{2} \|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,l_0)} + C|\lambda|^2 \|\Psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.91)$$

De (4.90) e (4.91), segue que

$$\begin{aligned} E_1(t) \leq & C|\lambda|^2 \|\Psi^1\|_{L^2(0,l_0)}^2 + C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C|\varphi^1(l_0)|^2 + C|\Phi^1(l_0)| |\Psi^1(l_0)| + \\ & + C|R_1| + C|R_2| + C|R_3| + C|k_1(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0)| |\varphi^1(l_0)|. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Então, usando o Lema 4.1, concluímos que para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$\begin{aligned} E_1(t) \leq & C_\varepsilon |\lambda|^4 \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon \left[|\Phi^1(l_0)|^2 + |(\varphi_x^1 + \psi^1)(l_0)|^2 + |\varphi_x^1(0)|^2 \right] + \\ & + C_\varepsilon \left[|\Psi^1(l_0)|^2 + \left| b\psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(l_0, s)ds \right|^2 + \left| b\psi_x^1(0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(0, s)ds \right|^2 \right] + \\ & + C_\varepsilon [|\varphi^1(l_0)|^2 + |\psi^1(l_0)|^2] \end{aligned} \quad (4.93)$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande. Daí, usando o Lema 4.5 e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, encontramos

$$E_1(t) \leq C|\lambda|^4 \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C [|\varphi^1(l_0)|^2 + |\psi^1(l_0)|^2]. \quad (4.94)$$

De (4.94) e novamente usando (4.87) e (4.88), temos, para $|\lambda|$ suficientemente grande

$$E_1(t) \leq C|\lambda|^4 \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Disto, juntamente com (4.85), concluímos que para $|\lambda|$ suficientemente grande, vale que

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C|\lambda|^8 \|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

o que nos dá

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, do Teorema de Borichev e Tomilov, tem-se a conclusão desejada. ■

Considerações Finais

Nos dois primeiros sistemas híbridos estudados, verificamos claramente a suficiência das dissipações dadas pelos termos de memória para a estabilidade exponencial dos sistemas. De fato, se os termos de memória eram efetivos sobre a parte viscoelástica da estrutura considerada (corda vibrante ou viga de Timoshenko), então, provamos que os sistemas eram exponencialmente estáveis. Ainda, verificamos que na ausência de tais termos de memória há a falta de estabilidade exponencial de ambos os sistemas.

No terceiro sistema, quando consideramos a viga de Timoshenko em balanço com um termo de memória agindo apenas sobre o momento fletor da parte viscoelástica, esta dissipação não se mostrou suficiente para estabilizar exponencialmente o sistema e, para atingir esse objetivo, uma hipótese adicional precisou ser acrescentada: de que a velocidade de ondas das equações eram iguais. Retirando-se esta hipótese adicional obtivemos o decaimento polinomial do sistema mas, faltou concluir sobre a necessidade desta hipótese para a estabilidade assintótica do modelo estudado, uma vez que, na falta dela, não conseguimos mostrar a falta de estabilidade exponencial do sistema, muito embora acreditemos que isso de fato ocorra. Dessa forma, esta é uma questão que fica em aberto.

As dissipações introduzidas pelas cargas pontuais nos três modelos estudados não se mostraram relevantes para a estabilidade exponencial, uma vez que esta se dá mesmo quando tais dissipações não estão presentes. Além disso, nos dois primeiros sistemas estudados, elas também não se mostraram fortes o bastante para, sozinhas, produzirem estabilidade exponencial dos sistemas, o que ficou claro quando mostramos a falta de estabilidade exponencial na ausência dos termos de memória. Contudo, quando essas foram as únicas dissipações efetivas sobre os modelos,

elas se mostraram suficientes para estabilizarem polinomialmente os dois primeiros modelos.

A seguir, listamos algumas sugestões para possíveis trabalhos futuros.

1. Analisar o comportamento assintótico do sistema híbrido estudado no capítulo três mas com uma única memória agindo apenas sobre a tensão cortante.

2. Considerar outras condições de contorno.

3. Estudar se há relação entre o decaimento do núcleo de cada memória com o tipo/taxa de decaimento dos sistemas. Por exemplo, analisar o comportamento assintótico dos sistemas para funções de relaxamento decaindo polinomialmente.

3. Considerar outros tipos de dissipação agindo sobre a viga, como por exemplo, do tipo Kelvin-Voigt.

4. Considerar problemas híbridos para vigas constituídas por três ou mais componentes. Uma situação interessante seria, por exemplo, considerar a viga formada por três materiais fisicamente diferentes, um viscoelástico (com memória ou de Kelvin-Voigt), outro elástico e um terceiro, com dissipação dada por um mecanismo de atrito. Aqui, além do interesse do papel de cada dissipação na estabilidade do modelo, há ainda o interesse em se verificar a influência na taxa de decaimento, das possíveis posições de cada material na viga.

5. Considerar sistemas híbridos para outros tipos de estruturas, tais como vigas de Euler-Bernoulli, vigas de Bresse ou placas de Mindlin-Timoshenko, com cargas anexadas às suas extremidades.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A.. *Sobolev Spaces*. Academic Press. 1975.
- [2] ALVES, M. S. et al. *Uniform Stabilization for the Transmission Problem of the Timoshenko System with Memory*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 369, (2010), 323-345.
- [3] AMMAR-KHODJA, F. et al. *Energy Decay for Timoshenko Systems of Memory Type*. J. Differential Equations, 194 (1) (2003) 82-115.
- [4] AMMAR-KHODJA, F.; KERBAL, S.; SOUFYANE, A. *Stabilization of the Nonuniform Timoshenko Beam*. J. Math. Anal. Appl. 327 (2007), 525 - 538.
- [5] ANDREWS, K. T.; FERNANDEZ, J. R.; SHILLOR, M. *A Thermoviscoelastic Beam With a Tip Body*. Computational Mechanics, Vol. 33 (1), (2004). 225-234.
- [6] ANDREWS, K.T.; SHILLOR, M. *Vibrations of a Beam With a Damping Tip Body*. Mathematical and Computer Modelling 35 (2002), 1033-1042.
- [7] BRÉZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer. 2010.
- [8] BORICHEV, A.; TOMILOV, Y. *Optimal Polynomial Decay of Functions and Operator Semigroups*. Math. Ann. Vol. 347 (2), (2009), 455-478.
- [9] DAFERMOS, C. M. *On Abstract Volterra Equation with Applications to Linear Viscoelasticity*. Differential and Integral Equations. Vol. 7(1) (1970), 554-569.

- [10] DAFERMOS, C. M. *Asymptotic Stability in Viscoelasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal.. Vol. 37(1) (1970), 297-308.
- [11] D'ANDREA-NOVEL, B.; BOUSTANY, F.; CONRAD, F.; RAO, B. *Feedback Stabilization of a Hybrid PDE-ODE System, Application to an Overhead Crane*, Math. Control Signals Systems, (1994). p. 1-22.
- [12] ENGEL, K.; NAGEL, R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag (2000).
- [13] FABRIZIO, M.; MORRO, A. *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*. SIAM Studies in Applied Mathematics. Vol. 12 (1992).
- [14] FEIREISL, E.; O'DOWD, G. *Stabilisation d'un Système Hybride par un Feedback non Linéaire, non Monotone*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I, Mathématique, Vol. 326(3), (1998), 323-327.
- [15] SARE, H. D. F.; RACKE, R. *On the Stability of Damped Timoshenko Systems: Cattaneo versus Fourier Law*. Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 194 (1), (2009), 221- 251.
- [16] SARE, H. D. F.; MUÑOZ RIVERA, J.E. M. *Stability of Timoshenko Systems With Past History*. J. Math. Anal. Appl. 339 (1), (2008), 482-502.
- [17] GOHBERG, I.; GOHBERG, S.; KAASHOEK, M.A. *Classes of Linear Operators I*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 49, Birkhäuser Verlag, 1990.
- [18] GOMES, A. M. *Semi-Grupos Não-Lineares e Equações Diferenciais em Espaços de Banach*. Textos de Métodos Matemáticos 24 - IM-UFRJ. 1992.
- [19] GROBBELAAR-VAN DALSEN, M. *Uniform Stability for the Timoshenko Beam With Tip Load*. Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 361 (1), (2010), 392-400.
- [20] HAN, Z.J.; XU, G.Q. *Exponential Stability of Timoshenko Beam System With Delay Terms in Boundary Feedbacks*. ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations 17, (2011), 552-574.
- [21] KATO, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, New York, (1980).

- [22] KAFINI, M. *General Energy Decay in a Timoshenko-type System of Thermoelasticity of Type III with a Viscoelastic Damping*. J. Math. Anal. Appl. 375 (2011), 523-537.
- [23] KIM, J.U.; RENARDY, Y. *Boundary Control of the Timoshenko Beam*. SIAM, J. Control Optim. 25 (6) (1987) 1417-1429.
- [24] LITTMAN, W.; MARKUS, L. *Stabilization of a Hybrid System of Elasticity by Feedback Boundary Damping*. Ann. Mat. Pura Appl. 152 (1988) 281-330.
- [25] LIU, K.; LIU, Z. *Boundary Stabilization of Nonhomogeneous Beam with Rotatory Inertia at the Tip*, Comp. Appl. Math., 114 (2000), 1-10.
- [26] LI, F.L.; WU, Z.K.; HUANG, K.M. *A Difference Scheme for Solving the Timoshenko Beam Equations with Tip Body*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series Vol. 24, No. 2 (2008), 337-352.
- [27] LIU, Z.; ZHENG, S. *Semigroups Associated With Dissipative Systems*. In CRC Research Notes in Mathematics 398, Chapman & Hall, (1999).
- [28] LI, F.L.; SUN, Z.Z. *A Finite Difference Scheme for Solving the Timoshenko Beam Equations With Boundary Feedback*. Journal of Computational and Applied Mathematics 200 (2007), 606-627.
- [29] MIFDAL, A. *Stabilisation Uniforme d'un Système Hybride*. C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1987) 37-42.
- [30] MA, Z.; ZHANG, L.; YANG, X. *Exponential Stability for a Timoshenko-type System with History*. J. Math. Anal. Appl. 380 (2011), 299-312.
- [31] MACCELLI, A.; MELCHIORRI, C. *Modeling and Control of the Timoshenko Beam. The Distributed Port Hamiltonian Approach*. SIAM J. Control Optim. Vol. 43, No. 2, (2004), 743-767.
- [32] MORGUL, O. *Boundary Control of a Timoshenko Beam Attached to a Rigid Body: Planar Motion*, Internat. J. Control 54 (1991) 763-791.

- [33] MUÑOZ RIVERA, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. Série Textos Avançados - LNCC. 1999.
- [34] MUÑOZ RIVERA, J.E.; RACKE, R., *Global Stability for Damped Timoshenko Systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 9 no. 6 (2003), 1625-1639.
- [35] MUÑOZ RIVERA, J.E.; OQUENDO, H.P. *The Transmission Problem of Viscoelastic Waves*. Acta Appl. Math. 62 (2000), 1-21.
- [36] MUÑOZ RIVERA, J. E.; RACKE, R. *Smoothing Properties, Decay and Global Existence of Solutions to Nonlinear Coupled System of Thermoelastic Type*. SIAM J. Math. Anal. Vol. 26 (1995), 1547-1563.
- [37] MESSAOUDI, S. A.; MUSTAFA, M. I. *On The Internal and Boundary Stabilization of Timoshenko Beams*. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 15 (2008), 655-671.
- [38] MESSAOUDI, S. A.; MUSTAFA, M. I. *General Energy Decay Rates for a Weakly Damped Timoshenko System*. Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 16, No. 2, (2010), 211-226.
- [39] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [40] PRÜSS, J. *On the Spectrum of C_0 -semigroups*. Trans. AMS. 284 (1984), 847-857.
- [41] PATA, V.; GRASSELLI, M. *Uniform Attractors of non Autonomous Dynamical Systems with Memory*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 50 (2002) 155-178.
- [42] REED, M.; SIMON, B.. *Methods of Modern Mathematical Physics, Volumes I- IV*. Academic Press Inc., London, 1970.
- [43] RAPOSO, C.A.; FERREIRA, J.; SANTOS, M.L.; CASTRO, N.N.O. *Exponential Stability for the Timoshenko System with Two Weak Damping*. Appl. Math. Lett. 18 (2005), 535-541.
- [44] RENARDY, M. *On The Type of Certain C_0 -semigroups*. Journal of Differential and Integral Equations Vol. 18 (1) (1993), 1299-1309.

- [45] SALARIEH, H.; GHORSHI, M. *Free Vibration of Timoshenko Beam With Finite Mass Rigid Tip Load and Flexural-torsional Coupling*. International Journal of Mechanical Sciences 48 (2006), 763-779.
- [46] SHEN, Z.B.; LI, X.F.; SHENG, L.P.; TANG, G.J. *Transverse Vibration of Nanotube-based Micro-mass Sensor via Nonlocal Timoshenko Beam Theory*. Computational Materials Science 53 (2012), 340-346.
- [47] SHI, D.H.; FENG, D.X. *Exponential Decay of Timoshenko Beam with Locally Distributed Feedback*. Proceeding of the IFAC World Congress, Beijing, vol. F, 1999.
- [48] SOUFYANE, A. *Stabilisation de la Poutre de Timoshenko*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 328 (1999), 731-734.
- [49] TAYLOR, S. W. *Boundary Control of the Timoshenko Beam with Variable Physical Characteristics*. Research Report, Dept. Math. Univ. Auckland 356, 1998.
- [50] TIMOSHENKO, S. *History of Strength of Materials*. Dover Publications, New York, 1953.
- [51] TIMOSHENKO, S. *Vibration Problems in Engineering*. Van Nostrand, New York, 1928.
- [52] VERA, O.; SEPULVEDA, M.; MUÑOZ RIVERA, J. E. *The Lack of Exponential Stability to N-dimensional Transmission Problem with Localized Kelvin Voigt Dissipation*. (??)
- [53] WEYL, H. *Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die Zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen*. Math. Ann. Vol. 68 (2) (1910), 220-269.
- [54] XU, G.Q.; YUNG, S.P. *Exponential Decay Rate for a Timoshenko Beam with Boundary Damping*. Journal of Optimization Theory and Applications: Vol. 123 (3), (2004), 669-693.
- [55] XU, G.Q.; YUNG, S.P. *Stabilization of Timoshenko Beam by Means of Pointwise Controls*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations Vol. 9 (2003), 579-600.
- [56] YAN, Q.X.; HOU, S.H.; FENG, D.X. *Asymptotic Behavior of Timoshenko Beam with Dissipative Boundary Feedback*. J. Math. Anal. Appl. 269 (2002), 556-577.
- [57] ZIETSMAN, L.; VAN RENSBURG, N.F.J.; VAN DER MERWE, A.J. *A Timoshenko Beam with Tip Body and Boundary Damping*. Wave Motion 39 (2004), 199-211.