



UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

Estabilidade Assintótica de Sistemas Híbridos de Euler-Bernoulli e de Bresse

Marco Antônio de Alcântara Fernandes

sob orientação do

Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Dezembro - 2014

Rio de Janeiro - RJ

CIP - Catalogação na Publicação

F363e Fernandes, Marco Antonio de Alcantara
Estabilidade assintótica de sistemas híbridos de
Euler-Bernoulli e de Bresse / Marco Antonio de
Alcantara Fernandes. -- Rio de Janeiro, 2014.
115 f.

Orientador: Jaime Edilberto Muñoz Rivera.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, 2014.

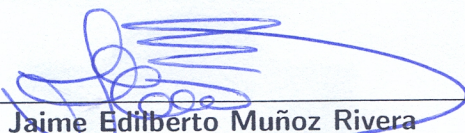
1. Estabilidade assintótica. 2. Sistemas Híbridos. 3.
Problemas de Transmissão. 4. Falta de estabilidade
exponencial. 5. Vigas de Euler-Bernoulli e de
Bresse. I. Rivera, Jaime Edilberto Muñoz, orient. II.
Título.

Estabilidade Assintótica de Sistemas Híbridos de Euler-Bernoulli e de Bresse

Marco Antônio de Alcântara Fernandes

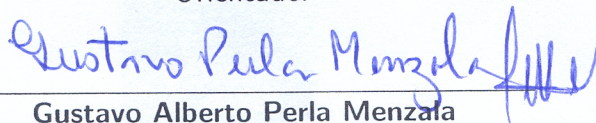
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Aprovada por:



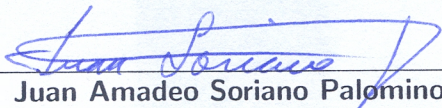
Jaime Edilberto Muñoz Rivera

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
LNCC - Lab. Nacional de Computação Científica
Orientador



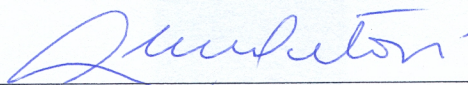
Gustavo Alberto Perla Menzala

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
LNCC - Lab. Nacional de Computação Científica



Juan Amadeo Soriano Palomino

UEM - Universidade Estadual de Maringá



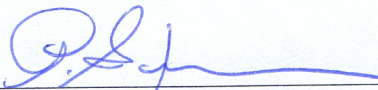
Luci Harue Fatori

UEL - Universidade Estadual de Londrina



Antonio André Novotny

LNCC - Lab. Nacional de Computação Científica



Pedro Gamboa Romero

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro - RJ, 18 de dezembro de 2014.

*À memória de **João Batista Fernandes**, meu pai; que com seus conselhos conseguiu me convencer ainda cedo sobre a importância dos estudos, e com seu exemplo nos ensinou que a honestidade, a honra e a dignidade são imprescindíveis; ensinamentos que perduram mesmo após quase 22 anos de saudade.*

Agradecimentos

Quem é teimoso não sonha outro sonho, não...

Vai renovar a sua fé.

Homem que é Homem não perde a esperança.

Milton Nascimento

À **Deus**, que, estando todo o tempo no controle, nos aproximou sempre de pessoas corretas, justas e bondosas: e nos *protegeu* das outras; além de ter aberto cada uma das portas durante essa nossa caminhada, no Seu tempo, sempre;

À **Míriam**, um verdadeiro presente de Deus na minha vida, pelo carinho, paciência e companheirismo neste período difícil, estando também tão atarefada com as suas próprias atividades de estudo; é o meu grande amor e a música da minha vida, dona do meu amor total e irrestrito, que me faz pensar sempre que o melhor momento da minha existência ainda virá, se for ao seu lado;

À **Alice**, minha mãe, que tem sido super-mãe, super-pai, super-amiga, super-secretária, super-enfermeira, super-tudo, super-atenada com as *novas tecnologias*, no auge das suas 66 primaveras; e que nos contagia com a sua alegria, a cada passo da nossa caminhada;

À **Aristina**, minha querida tia, pelo encorajamento e pela certeza de suas constantes orações por mim a Êle (me sinto no dever de *patrocinar* um tapetinho novo);

Ao **Ronaldo**, companhia constante durante nossa estadia aqui, repartindo conosco não apenas as aflições das atividades de estudo, mas sobretudo as alegrias das poucas folgas na Cidade Maravilhosa; contamos com seus inúmeros favores, sempre executados com toda a presteza e simpatia, como se nenhum incômodo trouxessem. Obrigado por tudo, meu amigo;

À parte da família que tem *quatro patas*: **Sibico**, a simpatia, carisma e carinho em forma de um *dog*; **Sarita**, sempre uma explosão de felicidade e alegria, nos convidando pra brincar, de maneira

irresistível, com seus ‘franguinhos’, ‘bolinhas’, e ‘carneirinhos’; e **Diana**, o cãozinho perfeito como nunca antes existiu, que nos deixou pra virar *saudade* no começo da nossa trajetória aqui;

Ao **Jaime**, por seu excelente e criterioso trabalho de orientação, onde demonstrou que a paciência de um homem pode não ser finita - pra mim, mais que um amigo, é um exemplo a ser seguido, não só de caráter, mas também de como ser *professor*;

Ao professor **Gustavo Perla**, por ter exercido o papel do que em outros programas se atribui a um *orientador acadêmico*, nos conduzindo durante o árduo período da integralização das disciplinas e também dos exames de qualificação, além de ter nos dado a honra de contar com a sua presença na banca de defesa da tese. Ficam para nós como exemplos, tanto a maneira como respeita e se dedica à profissão, quanto a sua infalível gentileza e atenção no trato com *todas* as pessoas que o cercam;

Aos professores **Juan Soriano, Luci Fatori, André Novotny e Pedro Gamboa**, não apenas pela gentileza de terem aceitado o convite para participar da banca examinadora, mas também pelo tempo e atenção dispensados à leitura e correção deste trabalho, o que culminou nas valiosíssimas contribuições e apontamentos que fizeram;

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática do IM-UFRJ com os quais tivemos a oportunidade de conviver durante esse período, sendo seus alunos em disciplinas e/ou nos exames de qualificação: **Rolci, Hugo, Wladimir, Xavier, Ademir e Adán**;

Ao **Alan**, e, juntamente com ele, a todos os seus colegas funcionários da Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Matemática do IM-UFRJ, e também da Biblioteca do IM-UFRJ, pela infalível cordialidade, atenção e excelência dos serviços prestados;

Ao **Nelson Nery**, que, após orientar os meus trabalhos durante o mestrado na Universidade Federal da Paraíba, se tornou um amigo pelo qual tenho extrema consideração e apreço. Sempre nos incentivou a vir para o Rio, a fim de cursar o doutorado no IM-UFRJ. Aproveito para agradecer conjuntamente ao **Marivaldo Matos** pelo incentivo, e também pelo envio das cartas de recomendação;

À **Olga Nakajima**, minha primeira professora de *Análise*, por ter sido a primeira pessoa a me proporcionar o contato com a verdadeira Matemática, em um ambiente absolutamente desfavorável: serei sempre um dos frutos do seu trabalho e da sua coragem;

Aos colegas de curso - não citarei nomes, a fim de não cometer o pecado de me esquecer deste

ou daquele - pela cordial convivência e diálogos fraternos durante esse período;

Aos amigos que, direta ou indiretamente, a Matemática me trouxe: **Flávio Falcão**, pra quem a distância nunca implicou em distância, sempre repartindo as angústias e alegrias da carreira, e do exercer a profissão em contextos semelhantes; **Jessé**, sempre presente, e a *vítima* certa das angústias quando é preciso lidar com figuras nos trabalhos, mesmo quando atordado com as suas próprias atribuições; **Aroldo** e **Joelma**, cuja amizade tem vencidos os anos como se fossem minutos, sempre dois passos à nossa frente, quando se trata de mudar para esta ou aquela cidade; **Mauro**, que depois de ser colega de graduação, passou a ser colega de trabalho, sempre pronto pra ajudar com as nossas demandas na universidade em que trabalhamos; **Rose** (a Rosenil Ferreira de Matos), colega de departamento que sempre nos ajudou, de maneira cordial e amiga, nas nossas demandas por lá; e, finalmente, **Mário Márcio**, cuja amizade me é muitíssimo anterior à Matemática, e que, por ser quase tão antiga quanto eu mesmo, sequer precisa de adjetivos, e que aqui aparece apenas para lembrar da sua preciosa ajuda com os *gifs* para a defesa;

Aos amigos e familiares que nos alegraram com a sua presença em nosso 'apartamento': minha mãe **Alice** e minha tia **Aristina**; meu irmão **Augusto** e sua esposa **Cláudia**; cunhados **Mara** e **Fernando**, com seus filhos **Vítor**, **Lorraine** e **Luan**; cunhados **Marluce** e **Oséas**; e o amigo de longa data **Paulinho**, juntamente com sua esposa **Carla** e seu garotinho **Lucas**; e finalmente o **Mário Márcio** e sua esposa **Zil**;

Aos amigos que nos ajudaram a cuidar da nossa casa nesse período: sobrinho **Gilmar 'Juninho' Júnior**, **Salomão** e a dupla de irmãos **Maxsuel** e **Miguel**;

À **Capes**, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o comportamento assintótico de três sistemas híbridos de vigas.

Inicialmente, consideramos uma viga elástica de Euler-Bernoulli cujo efeito dissipativo é provocado por uma carga pontual fixada em uma das suas extremidades. Usando a Teoria de Semigrupos, estabelecemos a boa-colocação do problema, e mostramos que existe uma falta de decaimento exponencial; isto é, mostramos que a dissipação fornecida pela carga pontual não é suficiente para produzir o decaimento exponencial do sistema. Entretanto, é forte o bastante para produzir uma taxa polinomial de decaimento.

Em seguida, consideramos um problema de transmissão para uma viga de Bresse em balanço, cuja extremidade da parte formada por um material com viscoelasticidade do tipo memória está presa, e na extremidade da parte elástica há uma carga pontual provocando um efeito dissipativo. Mostramos que, quando o efeito de memória atua efetivamente sobre as três equações do sistema, ele produz decaimento exponencial. Na ausência de memória, mostramos que há uma falta de decaimento exponencial. Assim, a dissipação fornecida pela carga pontual não é suficiente para produzir decaimento exponencial, mas produz uma taxa polinomial de decaimento.

Finalmente, retomando o modelo abordado no segundo problema, consideramos que o efeito de memória esteja atuando apenas no momento fletor. Mostramos que, sob a hipótese adicional de igualdade das velocidades de onda da parte viscoelástica da viga, o sistema decai exponencialmente. Entretanto, quando uma parte desta hipótese é retirada, obtivemos uma taxa polinomial de decaimento.

Palavras-chave: Problema de transmissão, efeito de memória, viga de Euler-Bernoulli, viga de Bresse, estabilidade exponencial, decaimento polinomial, falta de estabilidade exponencial, carga pontual, sistema híbrido.

Abstract

In this work, we study the asymptotic behavior of three hybrid systems of beams.

First, we consider an elastic Euler-Bernoulli beam whose dissipative effect is caused by a tip load attached on one end. Using the Theory of Semigroups, we established the well-posedness of this problem, and we show also that there is a lack of exponential decay; that is, we show that the dissipation provided by the tip load is not sufficient to produce the exponential decay of the system. However, it is strong enough to produce a polynomial rate of decay.

Next, we consider a transmission problem for a cantilevered Bresse beam, whose first end of the part formed by a material with viscoelasticity of memory type is attached, and moreover, in the end of the elastic part there is a tip load, causing a dissipative effect. We show that, when the memory effect effectively act on the three equations of the system, it produces exponential decay. In the absence of memory, we show that there is a lack of exponential decay. Thus, the dissipation provided by the tip load is not sufficient to produce exponential decay, but produces a polynomial decay rate.

Finally, returning to the model of the second problem, we consider that the memory effect is acting only in the flector moment. We show that, under the additional hypothesis of equality of the wave velocities of the viscoelastic part of the beam, the system decays exponentially. However, when a part of this assumption is removed, we obtained a polynomial decay rate.

Key Words: Transmission problem, memory effect, Euler-Bernoulli beam, Bresse Beam, exponential stability, polynomial decay, lack of exponential stability, tip load, hybrid system.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Modelo de Vigas de Euler-Bernoulli	4
1.2	Modelo de Vigas de Timoshenko	5
1.3	Modelo de Vigas de Bresse	7
1.4	Revisão Bibliográfica	8
1.5	Contribuições e Estrutura deste Trabalho	10
2	Resultados Básicos	12
2.1	Os Espaços $L^p(\Omega)$	12
2.2	Os Espaços de Sobolev	14
2.3	Os Espaços $L^p(0, T; X)$ e o Lema de Compacidade de Aubin-Lions	16
2.4	Resolvente e Espectro	18
2.5	Semigrupos	19
2.5.1	Propriedades Assintóticas de Semigrupos de Classe C_0	22
2.6	O Espectro Essencial	23
3	Estabilização na Fronteira de um Sistema Híbrido de Euler-Bernoulli	26
3.1	O Modelo	26
3.2	Existência e Unicidade de Soluções	28
3.3	A Falta de Estabilidade Exponencial	29
3.4	Decaimento Polinomial	33
4	Problema de Transmissão para uma Viga de Bresse Viscoelástica-Elástica com Carga Pontual	37
4.1	O Modelo	38
4.2	Existência e Unicidade de Soluções	40
4.3	Estabilidade Exponencial	49

4.4	A Falta de Estabilidade Exponencial	66
4.5	Decaimento Polinomial	73
5	Problema de Transmissão para uma Viga de Bresse Parcialmente Viscoelástica-Elástica com Carga Pontual	77
5.1	O Modelo	78
5.2	Existência e Unicidade de Soluções	80
5.3	Estabilidade Exponencial	84
5.4	Decaimento Polinomial	96
6	Considerações Finais	99
	Referências Bibliográficas	101

Introdução

As **vigas** são elementos estruturais praticamente onipresentes no nosso cotidiano. Por causa dessa imensa gama de aplicações, elas têm sido, há muito tempo, um objeto de investigações de diversas áreas das ciências e engenharias, sob diferentes pontos de vista. Para a *Resistência dos Materiais*, por exemplo, é importante estimar os valores máximos de tensões a que uma viga pode ser submetida, sem que, com isso, venha a sofrer danos estruturais. Entretanto, os modelos matemáticos que abordaremos neste trabalho buscam descrever as **vibrações** de vigas.

Evidentemente, as vigas podem apresentar diferentes tipos de vibrações, e seus efeitos podem ser tanto desejáveis (como em uma escova de dentes elétrica, por exemplo) quanto indesejáveis. Dentre os efeitos indesejáveis, podemos citar os ruídos, as interferências em equipamentos ou máquinas, a aceleração no desgaste e a consequente redução da vida útil, ou mesmo o comprometimento definitivo da estrutura de uma viga. Assim, resta claro que, em qualquer caso, é importante que se conheçam mecanismos de controle, ou, dito de outro modo, de *amortecimento* dessas vibrações.

De modo um pouco mais específico, afirmamos que os modelos matemáticos que abordaremos neste trabalho estão relacionados com o **amortecimento de vibrações** de vigas. Assim, é importante destacar a importância desses estudos. O exemplo clássico nessa direção é o famoso caso da *Ponte Tacoma Narrows*, localizada sobre o Estreito de Tacoma, em Washington, EUA, que ruiu no dia sete de novembro de 1940, poucos meses após a sua inauguração. O colapso ocorreu após ventos de 65 quilômetros por hora terem feito a ponte vibrar e entrar em ressonância¹. Um outro exemplo nessa direção é o caso da *Ponte Presidente Costa e Silva*, popularmente conhecida como

¹As causas da queda da Ponte Tacoma Narrows até hoje são discutidas na comunidade científica. Muitos físicos e engenheiros acreditam que o colapso se deu devido à ocorrência, não de um efeito ressonântico, mas sim de um fenômeno denominado *flutter aeroelástico*.

Ponte Rio-Niterói. Atualmente a décima-primeira maior ponte do mundo em extensão (em 1974, ano em que foi concluída, era a terceira), ainda conserva um número expressivo: possui o maior vão em viga reta contínua do mundo, que é o seu vão central, com 300 metros de comprimento e 72 metros de altura, sustentado por duas vigas de aço. Ventos com velocidade relativamente baixa (em torno de 55 quilômetros por hora) provocavam frequentemente oscilações nessas vigas, que chegaram a sofrer deslocamentos pico-a-pico de 1,20 metros (o equivalente a 60 cm de oscilação para cima e para baixo em relação à sua posição de equilíbrio), o que levava à interdição da ponte quando ocorriam esses ventos. A solução para este problema, que veio através de um projeto desenvolvido por professores da COPPE-UFRJ, foi implementada em 2004, com a instalação de 32 mecanismos atenuadores, pesando duas toneladas cada, dentro das vigas do vão central da ponte. Hoje, as oscilações atingem um deslocamento máximo de 10 cm, de pico-a-pico, associado a um período de oscilação de cerca de 3 segundos, o que não causa desconforto aos usuários que trafegam sobre a ponte.

De acordo com *Timoshenko*² [50], o estudo da vibrações de vigas teve início no século XVIII, com trabalhos de membros da família *Bernoulli* e de *Euler*³. Em 1744, Euler publicou o livro *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes*, onde apresentou a solução da equação diferencial do movimento transversal das vibrações de vigas prismáticas, bem como as frequências naturais e os modos de vibrações de vigas em balanço, vigas simplesmente apoiadas, vigas bi-engastadas e de vigas de extremidades livres. O *Modelo de Vigas de Euler-Bernoulli* é também conhecido como *teoria elementar de vigas*, por considerar apenas a contribuição da deformação causada pelo momento fletor na equação do movimento. O efeito da inércia de rotação foi considerado por *Strutt*⁴ no livro *The Theory of Sound*, publicado em 1877. O efeito da força cortante na vibração de vigas foi incluído no modelo elaborado por Timoshenko em 1921. O modelo de vibrações de vigas que leva em consideração os efeitos do momento fletor, inércia de rotação e força cortante é conhecido como *Teoria de Vigas de Timoshenko*. Quanto às vigas circulares, o modelo normalmente utilizado para modelar suas deformações é conhecido como *Teoria de Vigas de Bresse*⁵, do qual o sistema de Timoshenko pode ser considerado um caso particular, conforme veremos adiante.

²Stephen Prokofievitch Timoshenko, (1878-1972).

³Leonhard Paul Euler, (1707-1783).

⁴John Willian Strutt, (1842-1919).

⁵Jacques Antoine Charles Bresse, (1822-1883).

Tanto o modelo de Euler-Bernoulli quanto o modelo de Timoshenko podem ser empregados para o estudo das deformações em vigas retas. A *Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli* é mais comumente utilizada, pois é bastante simples e fornece aproximações razoáveis para grande parte dos problemas de vigas. Mais especificamente, quando as dimensões da seção transversal da viga são pequenas se comparadas ao seu comprimento (isto é, ao lidar com vigas compridas e finas), o modelo mais apropriado é, de fato, o de Euler-Bernoulli. Caso contrário, o modelo de Timoshenko fornece melhores resultados.

No primeiro modelo que abordaremos aqui, no terceiro capítulo deste trabalho - que é o Modelo de Vigas de Euler-Bernoulli - consideraremos um mecanismo externo de amortecimento, que consiste, basicamente, de uma carga pontual anexada a uma extremidade de uma viga elástica; o que é denominado, na literatura em língua inglesa, de mecanismo do tipo *tip load*. Nosso interesse é investigar quais as taxas de decaimento da energia do sistema que esse mecanismo é capaz de produzir.

Já nos outros dois modelos estudados (no quarto e quinto capítulos), onde trataremos de vigas modeladas pelo *Sistema de Bresse*, consideraremos, além dos efeitos dessa carga pontual, um amortecimento advindo de uma propriedade intrínseca do material utilizado na composição de uma parte da viga.

Antes de apresentar rapidamente esses modelos, é oportuno fazer duas rápidas observações sobre a terminologia utilizada neste trabalho.

Inicialmente, note que problemas interessantes surgem quando a dissipação atua de diferentes formas sobre o domínio considerado, ou ainda, quando o mecanismo de dissipação é efetivo em apenas uma parte desse domínio. Situações assim ocorrem, por exemplo, quando lidamos com vigas formadas por mais de um tipo de material, podendo inclusive acontecer de uma parte da viga ser constituída de um material puramente elástico (portanto, sem dissipação efetiva), e outra parte constituída por um material que apresenta algum tipo de dissipação, como, por exemplo, um material viscoelástico. Modelos matemáticos para sistemas com essa característica são chamados de **problemas de transmissão**. Do ponto de vista matemático, um problema de transmissão como o que citamos acima, consiste de um problema de valor inicial e de contorno para uma equação hiperbólica, cujo operador elíptico correspondente tem coeficientes descontínuos. Por isso, não podemos esperar que as soluções de um problema de transmissão (quando existirem) sejam regulares em todo o domínio. Ao lidarmos com problemas de transmissão, portanto, é interessante

estudarmos o comportamento assintótico das soluções e investigar quais propriedades individuais de cada material são preservadas nessa junção.

A outra observação diz respeito à maneira como a carga pontual contribui para o sistema, nos casos que consideramos. Encontraremos, aqui, um outro tipo de modelo: os chamados **sistemas híbridos**⁶, que têm motivado muitas pesquisas, e que dizem respeito ao fenômeno de transmissão de vibrações de uma estrutura para outra. De um modo geral, podemos dizer que um sistema híbrido descreve uma estrutura completa que acopla o movimento vibratório de dois componentes de naturezas diferentes. O exemplo clássico (e mais simples) é o de um sistema formado por uma corda de comprimento l que possui um corpo rígido anexado no extremo $x = l$. Neste caso, as equações de movimento são:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < l, \quad t \geq 0 \\ u(0) = 0, & t \geq 0 \\ u_x(l) = -u_{tt}(l) - u_t(l), & t \geq 0. \end{cases}$$

Ao denotarmos $u(l, t) =: w(t)$, vemos que o movimento do corpo rígido é descrito por uma função $w = w(t)$ que satisfaz à seguinte equação diferencial ordinária:

$$w_{tt} - w_t = u_x(l).$$

Desta forma, esse sistema acopla a equação de ondas com a equação diferencial ordinária que descreve o movimento do corpo rígido. Do ponto de vista matemático, os sistemas híbridos ocorrem quando encontramos equações diferenciais parciais acopladas com equações diferenciais ordinárias e/ou com outras equações diferenciais parciais nas condições de contorno.

Apresentaremos, a seguir, uma lacônica descrição de cada um dos modelos abordados neste trabalho.

1.1 Modelo de Vigas de Euler-Bernoulli

No **Modelo de Vigas de Euler-Bernoulli**, também conhecido como *de flexão pura*, consideram-se as *pequenas* vibrações de vigas prismáticas uniformes (de seção transversal constante) com comprimento longitudinal como dimensão predominante; isto é, de modo que a dimensão da seção transversal seja pequena quando comparada com o seu comprimento. A hipótese cinemática

⁶E que não há que se confundir com a terminologia *materiais híbridos*, que diz respeito a propriedades intrínsecas dos materiais utilizados na composição dos elementos estruturais considerados, em certos casos.

consiste em supor que as ações de movimento possíveis são tais que as seções transversais permanecem planas, indeformadas, e ainda ortogonais ao eixo longitudinal da viga. A equação diferencial que representa este modelo, no caso em que a viga é composta de material puramente elástico e homogêneo, é dada por:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0,$$

onde w é o *deslocamento transversal*, ρ é a *densidade linear*, A é a *área da seção transversal*, $m = \rho A$ é a *distribuição de massa*, E o *módulo de elasticidade* do material (ou *módulo de Young*) e I é o *momento de inércia*.

Como essa equação possui derivadas de segunda ordem em t , precisa ser complementada com duas condições iniciais: a posição inicial $w(0) = w(x, 0)$ e a velocidade inicial $w_t(0) = w_t(x, 0)$. Já em relação à variável x , ela possui derivadas de quarta ordem, e, por isso, exige que se especifiquem quatro valores na fronteira. Os valores na fronteira podem modelar *pontos de apoio*, *pontos de carga*, *momentos*, dentre outras propriedades físicas. Como estamos denotando por w o deslocamento transversal, temos que a primeira derivada $\frac{\partial w}{\partial x}$ representa a *inclinação*, a segunda derivada $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ representa o *momento fletor*, e a terceira derivada $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ representa o *cisalhamento*. Como exemplo, seguem quatro tipos de condições de contorno clássicas:

$$\begin{aligned} w(0) = \frac{\partial w}{\partial x}(0) &= 0, & \text{para extremo } \mathbf{fixo}; \\ w(0) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0) &= 0, & \text{para extremo } \mathbf{apoado}; \\ \frac{\partial w}{\partial x}(0) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0) &= 0, & \text{para extremo } \mathbf{deslizante}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0) &= 0, & \text{para extremo } \mathbf{livre}. \end{aligned}$$

O leitor interessado em detalhes poderá encontrá-los em [51].

1.2 Modelo de Vigas de Timoshenko

Neste modelo, são considerados dois efeitos que foram ignorados nas hipóteses cinemáticas do modelo de Euler-Bernoulli: a *inércia rotacional*, que se refere à energia cinética produzida pela rotação da viga, causada pelo momento fletor, e a *deformação de cisalhamento* causada pela força de cisalhamento. As seções transversais planas permanecem planas, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, pois há um giro da seção em relação a essa perpendicular,

ocasionado pelo cisalhamento.

A figura abaixo ilustra a diferença entre as hipóteses cinemáticas dos modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. No primeiro, o ângulo ψ da rotação da seção plana é considerado como sendo igual à derivada do deslocamento transversal; já no segundo modelo, que considera os efeitos da deformação cisalhante, ψ e $\frac{\partial w}{\partial x}$ não têm necessariamente que coincidir.

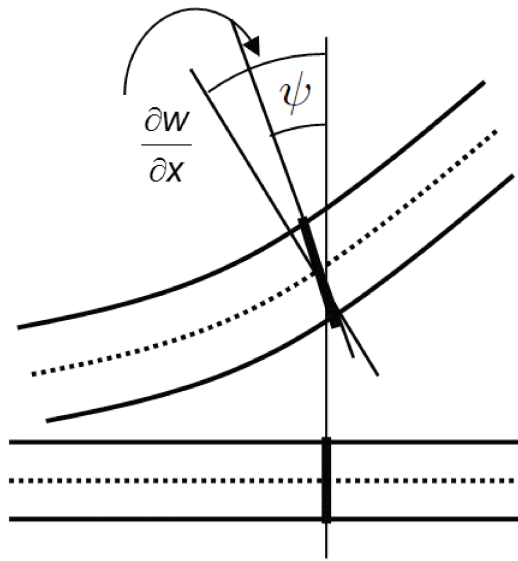


Figura 1: Comparando os Modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

O **Modelo de Timoshenko** para deformações de vigas é sintetizado pelas equações de movimento:

$$(T) : \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = S_x \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - S, \end{cases}$$

onde t denota o *tempo*, x é a *coordenada axial* (isto é, a distância ao longo da linha central da estrutura da viga em posição de equilíbrio), φ é o *deslocamento transversal*, e ψ é o *ângulo de rotação* de um filamento da viga. Além disso, $\rho_1 = \rho A$ e $\rho_2 = \rho I$, onde ρ é a *densidade* do material, A é a *área da seção transversal* e I é o *momento de inércia*.

Quando a viga é formada por um material puramente elástico e homogêneo, a *tensão cortante* (ou *tensão de cisalhamento*) S , e o *momento fletor* M são dados pelas seguintes leis constitutivas:

$$S = k(\varphi_x + \psi)$$

$$M = b\psi_x$$

com $k = \tilde{k}GA$ e $b = EI$, onde $\tilde{k}$ é o *fator de cisalhamento*, G é o *módulo de rigidez* e E é o *módulo de elasticidade* (ou *módulo de Young*) do material. Isto nos leva ao seguinte sistema acoplado de equações diferenciais parciais hiperbólicas:

$$(T) : \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \end{cases}$$

O leitor interessado em detalhes poderá encontrá-los em [51].

1.3 Modelo de Vigas de Bresse

O *Modelo de Bresse* para deformações de vigas nada mais é - a grosso modo - do que uma “adaptação” do modelo de Timoshenko para o caso em que o eixo de referência da viga considerada possui formato circular. Veja a figura abaixo.

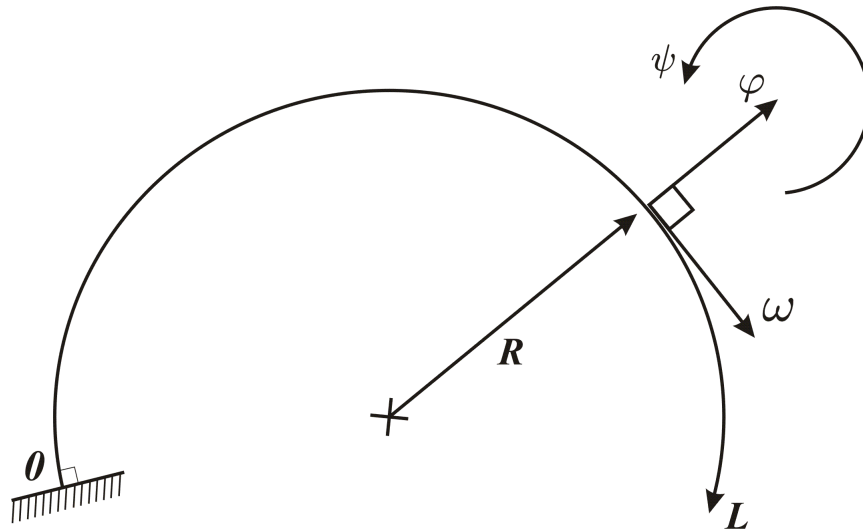


Figura 2: Modelo de Bresse.

Denotemos por ω o *deslocamento longitudinal* e por N a *tensão longitudinal*, e continuemos a usar as mesmas notações que utilizamos no modelo anterior. O **Modelo de Bresse** para vigas circulares é sintetizado pelas equações de movimento:

$$(B) : \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = S_x + \ell N \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - S, \\ \rho_1 \omega_{tt} = N_x - \ell S \end{cases}$$

Para o caso de vigas circulares puramente elásticas e homogêneas, essas tensões são dadas por:

$$S = k(\varphi_x + \psi + \ell\omega)$$

$$M = b\psi_x$$

$$N = k_0(\omega_x - \ell\varphi)$$

Aqui, $k_0 = EA$ e $\ell = R^{-1}$, onde R é o raio da circunferência que contém o eixo de referência da viga. Isto nos leva ao seguinte sistema acoplado de equações diferenciais parciais hiperbólicas:

$$(T) : \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + \ell\omega)_x - k_0 \ell(\omega_x - \ell\varphi) = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + \ell\omega) = 0 \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0(\omega_x - \ell\varphi)_x + k\ell(\varphi_x + \psi + \ell\omega) = 0 \end{cases}$$

Note que, quando $\ell = 0$, o sistema acima se desacopla, e obtemos o sistema de Timoshenko como um caso particular. O leitor interessado em detalhes poderá encontrá-los em [51].

1.4 Revisão Bibliográfica

Nesta seção, apresentaremos um breve resumo dos estudos referentes ao comportamento assintótico de modelos de vigas que guardam uma maior relação com aqueles por abordamos neste trabalho.

No que tange a **problemas de transmissão**, citamos a investigação feita por *RIVERA* e *OQUENDO* em [37], sobre uma corda constituída por dois materiais, sendo o primeiro deles um material elástico, e o segundo, um material com viscoelasticidade do tipo memória. Neste artigo, os autores mostraram, usando técnicas multiplicativas e argumentos de compacidade, que a dissipação dada pela parte viscoelástica é suficientemente forte para produzir a estabilidade exponencial do sistema. Em [2], aparece o estudo feito por *ALVES et al.* sobre um problema de transmissão para uma viga de Timoshenko constituída por dois materiais parcialmente viscoelásticos, cada um deles com dissipação dada por um termo de memória que atua apenas sobre o ângulo de rotação. Usando o método da energia, os autores estabeleceram o decaimento exponencial da energia do sistema quando o núcleo g do termo de memória decai exponencialmente e as velocidades de ondas são iguais. Além disso, mostraram que se g decai polinomialmente, então o mesmo acontece com a energia do sistema.

A estabilização de **sistemas híbridos** tem sido objeto de estudos há vários anos. Um dos trabalhos pioneiros nesta área, devido à *LITTMAN* e *MARKU* [27], data de 1988. Neste trabalho, os autores estabeleceram a estabilização forte do modelo SCOLE (Spacecraft Control Laboratory Experiment) que descreve as vibrações de um satélite em órbita ligado a uma antena através de uma viga longa e flexível. Este resultado foi obtido mediante a aplicação de controles de força e de momento, no ponto de contato da antena com o satélite. Após esse trabalho, viu-se surgir uma grande quantidade de resultados referentes à estabilização de sistemas híbridos, seja para a equação de ondas, quanto para vigas de Euler-Bernoulli ou para vigas de Timoshenko, com amortecimento interno ou na fronteira.

Em [28], *LIU* e *LIU* obtiveram o decaimento exponencial de um sistema híbrido para uma viga não-homogênea de Euler-Bernoulli com inércia rotacional e carga pontual, através de controles aplicados no ponto de contato da viga com a carga. *ANDREWS* e *SHILLOR* [5], obtiveram o decaimento exponencial da energia de um sistema híbrido para uma viga de Euler-Bernoulli com viscoelasticidade do tipo Kelvin-Voigt que possui uma carga pontual contribuindo com um termo de amortecimento para o sistema devido ao seu conteúdo granular.

Em relação ao comportamento assintótico do sistema de Bresse existem alguns poucos resultados. *LIU* e *RAO* [19] provaram que a energia de um sistema termoelástico de Bresse, com dois mecanismos de dissipação, decai exponencialmente para zero quando as velocidades de propagação de ondas das equações são iguais. No caso em que estas velocidades são diferentes, eles obtiveram o decaimento polinomial. Os resultados obtidos em [19] foram melhorados por *FATORI* e *RIVERA* em [17], onde os autores obtiveram os mesmos resultados considerando apenas um mecanismo de dissipação para o sistema termoelástico de Bresse. Em [48], os mesmos autores mostraram que o mecanismo dissipativo dado por $\mathbf{a}(x)\psi_t$, com $\mathbf{a} \in L^\infty(0, L)$ torna o sistema exponencialmente estável, mesmo mudando de sinal, desde que satisfaça à condição:

$$\bar{\mathbf{a}} := \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{a}(x) dx > 0.$$

A hipótese de igualdade das velocidades de propagação de ondas, isto é:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \quad \text{e} \quad k = k_0$$

tem sido usada em muitos trabalhos, para estabelecer estabilidade exponencial. Entretanto, quando essa hipótese falha, os mesmos trabalhos apresentam apenas taxas de decaimento polinomial. Nessa direção, veja [48], [7], [17] e [16].

Em [49], *SORIANO et al.* consideraram o sistema de Bresse com uma dissipação total não-linear na equação de rotação das seções transversais, e com dissipações não-lineares localizadas nas outras equações, enquanto que em [9], *CHARLES et al.* consideraram o mesmo modelo, mas desta vez com dissipações não-lineares localizadas nas três equações. Em ambos os casos, obtiveram diversas taxas de decaimento.

WEHBE e *YOUSSEF* [52] estudaram o sistema de Bresse com dois mecanismos de atrito localmente distribuídos, agindo um na equação do ângulo e o outro na equação do deslocamento longitudinal. Eles estabeleceram que, quando as velocidades de ondas são iguais, o sistema é exponencialmente estável. No caso em que as velocidades de ondas são diferentes, os autores mostraram a falta de estabilidade exponencial e o decaimento polinomial da energia do sistema.

BOUSSOUIRA et al. [7] consideraram o sistema de Bresse com dissipação de atrito agindo apenas na equação do ângulo, isto é, na segunda equação do sistema. Os autores provaram que este mecanismo de dissipação é suficiente para estabilizar exponencialmente todo o sistema, desde que as velocidades de propagação de ondas sejam iguais. Quando essas velocidades são diferentes, eles mostraram que o sistema não é exponencialmente estável mas que a solução vai para zero polinomialmente, com taxas que podem ser melhorados tomando dados iniciais mais regulares.

FATORI e *MONTEIRO* [16] estabeleceram taxas ótimas de decaimento polinomial para o modelo em [7], isto é, com amortecimento produzido pelo atrito agindo apenas na equação do ângulo de rotação.

1.5 Contribuições e Estrutura deste Trabalho

No capítulo 2, faremos um breve resumo dos principais conceitos e resultados utilizados nos capítulos seguintes. O objetivo é apenas tornar o texto auto-suficiente, razão pela qual omitiremos as respectivas demonstrações; deixaremos, entretanto, indicações de onde essas provas podem ser encontradas.

O capítulo 3 será dedicado ao primeiro problema que abordamos. Consideramos um sistema híbrido constituído por uma viga elástica de Euler-Bernoulli que possui, em uma de suas extremidades, uma carga anexada contribuindo com um efeito dissipativo para o sistema. Além de estabelecer a boa-colocação, mostramos que a dissipação dada pela carga na ponta da viga não é suficiente para estabilizar exponencialmente o sistema. Entretanto, ela se mostra forte o bastante para produzir

decaimento polinomial.

No capítulo 4, consideramos um problema de transmissão para uma viga de Bresse em balanço constituída por dois componentes: o primeiro, que compõe a parte da extremidade engastada da viga, é constituído por um material viscoelástico, cuja viscoelasticidade é dada por um termo de memória com núcleo exponencial; e o segundo é um material puramente elástico. Novamente, consideramos que, na extremidade livre, há uma carga anexada contribuindo com um efeito dissipativo para o sistema. Além de estabelecer a boa-colocação, mostramos que, quando o efeito de memória ocorre efetivamente nas três equações do sistema, o modelo é exponencialmente estável. Na ausência desses três termos de memória, provamos que o que existe é uma falta de decaimento exponencial. Finalmente, provamos também que, embora a dissipação fornecida pela carga não seja forte o bastante para estabilizar exponencialmente o sistema, ela é suficiente para fazer com que a energia do sistema decaia polinomialmente para zero com $t^{-1/2}$.

No capítulo 5, retomamos parcialmente o sistema híbrido do capítulo anterior, com a diferença que, agora, admitimos o efeito de memória atuando apenas no momento fletor. Além de estabelecer a boa-colocação, mostramos que o sistema é exponencialmente estável, sob a hipótese adicional de igualdade das velocidades de propagação de ondas das equações da parte viscoelástica da viga. Embora esta hipótese seja inverossímil do ponto de vista físico, o resultado obtido é bastante interessante do ponto de vista matemático. Em seguida, enfraquecendo parcialmente essa hipótese, em um sentido que tornaremos preciso mais adiante, provamos que a energia do sistema decai polinomialmente para zero como $t^{-1/4}$.

Para a boa-colocação dos três sistemas, a ferramenta usada foi a *Teoria de Semigrupos* (mais precisamente, um corolário do clássico *Teorema de Lummer-Phillips*). A estabilidade exponencial, em cada um dos casos, foi obtida através do método baseado no *Teorema de Prüss*. A prova da falta de estabilidade exponencial dos modelos foi estabelecida usando resultados de *Teoria Espectral* (tanto de operadores em geral, quanto de operadores que são geradores infinitesimais), notadamente o *Teorema de Weyl* sobre a invariância do raio espectral essencial por perturbações compactas. Salvo melhor juízo, estes trabalhos são pioneiros no uso destes resultados como método para estabelecer a falta de estabilidade exponencial. O decaimento polinomial, em cada um dos casos, foi estabelecido usando a caracterização obtida por Borichev e Tomilov.

Finalmente, no último capítulo, discorreremos resumidamente sobre as conclusões de nossas pesquisas e indicamos perspectivas de alguns trabalhos futuros.

Capítulo 2

Resultados Básicos

Este capítulo é dedicado à apresentação de conceitos e resultados utilizados nos capítulos seguintes. Estes resultados podem ser facilmente vistos na bibliografia existente e por esse motivo omitiremos as suas demonstrações, deixando apenas, em alguns casos, uma referência de onde encontrá-las.

2.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 2.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, onde $n \in \mathbb{N}$. Representa-se por $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, o espaço vetorial constituído pelas funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, cuja potência p , isto é, $|f|^p$, é integrável à Lebesgue; ou seja:*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Gostaríamos que esses espaços fossem espaços de Banach, a fim de lidar com eles usando as ferramentas da *Análise Funcional*. Todavia, o que ocorre é que a “candidata natural” a definir uma norma em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, que é a função $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} : \mathcal{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

é apenas uma semi-norma, pois $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0$ se, e somente se, $f \equiv 0$ quase sempre em Ω .

Para driblar essa “deficiência” dos espaços $\mathcal{L}^p(\Omega)$, procedemos do modo seguinte. Primeiro, consideramos em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ uma relação binária $\sim$ definida pondo $f \sim g$ quando $f = g$ quase sempre

em Ω . É fácil provar que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência. Assim, faz sentido considerar o quociente de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ pela relação de equivalência $\sim$.

A coleção de classes de equivalência assim obtida forma um espaço vetorial, com norma definida por

$$\| \{f\} \|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

onde f é um representante da classe de equivalência $\{f\}$.

Os espaços vetoriais normados assim definidos são denotados por $L^p(\Omega)$. Eles exercem um papel fundamental no estudo moderno das Equações Diferenciais. Como, na verdade, não há possibilidade de confusão, é usual, devido à conveniência, escrever $f \in L^p(\Omega)$ e $\|f\|_p$ para denotar os elementos e a norma em $L^p(\Omega)$, onde f é um representante qualquer da classe de equivalência em questão.

Pode-se provar que os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, são todos espaços de Banach. Além disso, o único dos $L^p(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert ocorre quando $p = 2$, com produto interno definido por:

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Finalmente, para definir $L^\infty(\Omega)$ é preciso generalizar a idéia de *supremo*.

Definição 2.2. Uma função mensurável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **essencialmente limitada** quando existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, tal que $f \sim g$. A coleção das classes de equivalência de funções definidas em Ω e essencialmente limitadas é denotada por $L^\infty(\Omega)$.

Pode-se definir uma norma em $L^\infty(\Omega)$ por:

$$\|f\|_\infty = \inf \{ \sup |g|; g \sim f \}.$$

O lado direito da igualdade acima é muitas vezes chamado o *supremo essencial* de f , e denotado por $\text{supess } f$. Prova-se que, com a norma acima, $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Lema 2.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq +\infty$, e q o expoente conjugado de p , isto é, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então:*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

.

Demonstração: Ver [8], Teorema 4.6, p. 92. ■

2.2 Os Espaços de Sobolev

Toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções em $L^p(\Omega)$. Este fato levou **Sobolev**, em 1936, a idealizar uma nova classe de espaços vetoriais, os quais são de fundamental importância no estudo das EDP's. Estes espaços são, em sua homenagem, chamados de **Espaços de Sobolev**.

Definição 2.3. Chamaremos **multi-índice** a toda n -upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de números naturais. Dado um multi-índice α , definimos a **ordem** $|\alpha|$ de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, e representamos por D^α o **operador derivação**

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

No caso em que $\alpha = (0, 0, 0, \dots, 0)$, definimos $D^0 = I$, onde I é o operador identidade.

Definição 2.4. Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O **Espaço de Sobolev de ordem m , modelado sobre $L^p(\Omega)$** , que denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais de ordem α , pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente, escrevemos:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}.$$

Quando $1 \leq p < \infty$, não é difícil mostrar que $W^{m,p}(\Omega)$ é munido da norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

e $W^{m,\infty}(\Omega)$ tem norma:

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Pode-se provar que os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, equipados com as respectivas normas acima, são *Espaços de Banach*. Além disso, $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo quando $1 < p < \infty$; e separável quando $1 \leq p < \infty$.

Apenas no caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um **Espaço de Hilbert**, que denotaremos por $H^m(\Omega)$. Simbolicamente, escrevemos:

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

O produto interno de $H^m(\Omega)$ e a respectiva norma induzida são dados respectivamente, por:

$$\langle u; v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}.$$

Embora seja um resultado básico de densidade o fato de que $\mathcal{D}(\Omega)$ possui imersão densa em $L^p(\Omega)$, em geral, não é verdade que $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é “bem maior” que a norma de $L^p(\Omega)$, e, por isso, $W^{m,p}(\Omega)$ possui “menos” seqüências convergentes. Desse modo, a necessidade de se referir à aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ levou à seguinte

Definição 2.5.

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

No caso $p = 2$ denotaremos esta aderência por $H_0^m(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)} = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Lema 2.2 (Desigualdade de Poincaré). *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma constante $C_{\Omega,p}$ (dependendo somente de Ω e p), tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{\Omega,p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [8], Corolário 9.19, p. 290. ■

Observação 2.1. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Consideremos em $H_0^1(\Omega)$ a seguinte expressão:*

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então a desigualdade de Poincaré diz que $\|\cdot\|$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ e que em $H_0^1(\Omega)$ as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes. Com base nesse resultado, em $H_0^1(\Omega)$, onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, considera-se o produto escalar:

$$a(u, v) = ((u, v)) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Definição 2.6. *Sejam m um número inteiro positivo e $1 \leq q < \infty$. Definimos:*

$$W^{-m,q}(\Omega) := [W_0^{m,p}(\Omega)]'$$

onde p e q são expoentes conjugados.

No caso $p = 2$, denotamos $H^{-m}(\Omega) := [H_0^m(\Omega)]'$.

O teorema a seguir estabelece algumas imersões compactas entre espaços de Sobolev.

Teorema 2.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^m , $m \geq 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

- (i) *Se $mp < n$ então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, para $q \in \left[1, \frac{np}{n-mp}\right[$;*
- (ii) *Se $mp = n$ então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, para $q \in [1, +\infty[$;*
- (iii) *Se $mp > n$ então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^k(\bar{\Omega})$, para $m - \frac{n}{p} \in [k, k+1[$, onde $k \geq 0$ é um inteiro.*

Demonstração: Ver [1]. ■

2.3 Os Espaços $L^p(0, T; X)$ e o Lema de Compacidade de Aubin-Lions

Uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é dita **fracamente mensurável** quando a função numérica $t \mapsto \langle f, u(t) \rangle$ é mensurável, para todo $f \in X'$. E dizemos que u é **fortemente mensurável** quando u for o limite quase sempre de uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Tem-se que, em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável à Lebesgue.

Definição 2.7. *Denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$, definidas quase sempre em $(0, T)$ com valores em X , fortemente mensuráveis, e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X$ assume valores em $L^p(0, T)$.*

Não é difícil verificar que, neste espaço vetorial, os funcionais $\|\cdot\|_{p,X} : L^p(0, T; X) \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$\|u\|_{p,X} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right]^{1/p}, \quad \text{quando } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{\infty,X} = \sup \text{ess} \|u(t)\|_X, \quad \text{quando } p = +\infty,$$

definem normas. Imitando o caso escalar, prova-se que $L^p(0, T; X)$ é um espaço de Banach com as normas definidas acima.

Apenas no caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é também um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por:

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(s), v(s))_X ds.$$

Uma aplicação simples da *Desigualdade de Hölder* nos mostra que, se $u \in L^p(0, T; X)$, e $v \in L^q(0, T; X')$, então a função numérica $t \mapsto \langle v(t), u(t) \rangle_{X', X}$ assume valores em $L^1(0, T)$. E ainda, um dos resultados fundamentais da teoria dos espaços $L^p(0, T; X)$, de demonstração bastante sofisticada, é aquele que estabelece a identificação entre os espaços (duais):

$$[L^p(0, T; X)]' = L^q(0, T; X).$$

Aqui, $p > 1$ e q são índices conjugados; isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso em que $p = 1$, vale:

$$[L^1(0, T; X)]' = L^\infty(0, T; X').$$

A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por:

$$\langle v, u \rangle_{L^q(0, T; X'), L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{X', X} dt.$$

Com esta identificação, os espaços $L^p(0, T; X)$ “herdam” as propriedades básicas do espaço de Banach X . Por exemplo, se X é reflexivo, então $L^p(0, T; X)$ será reflexivo, para $1 < p < \infty$; e, se X for separável, então $L^p(0, T; X)$ também será separável, para $1 \leq p < \infty$.

Finalizamos esta seção enunciando um teorema de compacidade que será utilizado no próximo capítulo.

Teorema 2.2 (Lema de Compacidade de Aubin-Lions). *Sejam X_0 , X e X_1 espaços de Banach tais que $X_0 \xhookrightarrow{c} X \hookrightarrow X_1$, com X_0 e X_1 reflexivos. Anotemos:*

$$W := \{u \in L^p(0, T; X_0); \frac{d}{dt}u \in L^q(0, T; X_1)\}.$$

Se $1 \leq p < +\infty$ e $q = 1$, ou, alternativamente, $p = +\infty$ e $q > 1$, então:

$$W \xhookrightarrow{c} L^p(0, T; X).$$

Demonstração: Veja [10]. ■

2.4 Resolvente e Espectro

Definição 2.8 (Resolvente, Espectro e Operador Resolvente). *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear (não necessariamente limitado) num espaço de Banach X . O Conjunto Resolvente de $\mathcal{A}$, denotado por $\rho(\mathcal{A})$, é o conjunto constituído por cada $\lambda \in \mathbb{C}$ para o qual o operador linear $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ existe, é limitado e tem domínio denso em X . Assim:*

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

O Espectro de $\mathcal{A}$, denotado por $\sigma(\mathcal{A})$, é o complemento do resolvente de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$, isto é:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}).$$

Para cada $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, o operador $R(\lambda; \mathcal{A}) : X \rightarrow D(\mathcal{A})$ dado por $R(\lambda; \mathcal{A}) := (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ é denominado o Operador λ -Resolvente de $\mathcal{A}$ ou, simplesmente, o Operador Resolvente de $\mathcal{A}$.

Suponhamos que $\mathcal{A}$ é um operador linear **fechado** sobre X . Nesse caso, se $\lambda I - \mathcal{A}$ é bijetor, então, como consequência do *Teorema do Gráfico Fechado*, tem-se $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ limitado. Logo, no caso dos operadores fechados, o conjunto resolvente pode ser reescrito de uma forma mais simples, a saber:

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \mathcal{A}) \text{ é bijetor}\}.$$

Assim, para operadores lineares fechados, um elemento $\lambda \in \mathbb{C}$ pertence a $\sigma(\mathcal{A})$ quando o operador $(\lambda I - \mathcal{A})$ não é injetor ou quando o operador $(\lambda I - \mathcal{A})$ é injetor mas não é sobrejetor. Este último caso pode ainda ser decomposto em dois, dependendo das propriedades da imagem do operador $(\lambda I - \mathcal{A})$; mais precisamente, no caso em que a imagem é densa em X e no caso contrário. Isso nos permite separar $\sigma(\mathcal{A})$ em três subconjuntos disjuntos: o *Espectro Pontual* $\sigma_p(\mathcal{A})$, o *Espectro Contínuo* $\sigma_c(\mathcal{A})$ e o *Espectro Residual* $\sigma_r(\mathcal{A})$, que são definidos como:

$$\sigma_p(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \mathcal{A}) \text{ não é injetor}\},$$

$$\sigma_c(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - \mathcal{A} \text{ é injetor mas não é sobrejetor e } \text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) \text{ é densa em } X\},$$

$$\sigma_r(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - \mathcal{A} \text{ é injetor mas não é sobrejetor e } \text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) \text{ não é densa em } X\}$$

Dessa forma, tem-se que $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_c(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A})$.

Observação 2.2. *Quando $\mathcal{A}$ é um operador não-limitado, com operador λ_0 -resolvente $R(\lambda_0; \mathcal{A}) = (\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}$ compacto para algum $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, então $\sigma_c(\mathcal{A}) = \sigma_d(\mathcal{A}) = \emptyset$. Logo, neste caso, o espectro de $\mathcal{A}$ é composto apenas de autovalores de $\mathcal{A}$, isto é, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) = \text{av}(\mathcal{A})$.*

Lema 2.3. *O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ é aberto em $\mathbb{C}$. A função $R(\lambda; \mathcal{A})$ é analítica em $\rho(\mathcal{A})$.*

Demonstração: Ver [43] - Vol. I, Teorema VIII.2, p. 254. ■

Definição 2.9. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear num espaço de Banach X . A Cota Superior do Espectro de $\mathcal{A}$, denotada por $\omega_\sigma(\mathcal{A})$, é definida como sendo:*

$$\omega_\sigma(\mathcal{A}) = \sup\{Re(\lambda); \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

Chamamos de Raio Espectral de $\mathcal{A}$, e denotamos por $R_\sigma(\mathcal{A})$, ao raio do menor círculo complexo, centrado na origem, que contém todos os elementos de $\sigma(\mathcal{A})$.

Proposição 2.1 (Fórmula de Gelfand para o Raio Espectral). *Sejam $\mathcal{A}$ um operador linear e contínuo num espaço de Banach X e $R_\sigma(\mathcal{A})$ o seu raio espectral. Então,*

$$R_\sigma(\mathcal{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}^k\|^{1/k}.$$

Demonstração: Ver [43] - Vol. I, Teorema VI.6, p. 192. ■

2.5 Semigrupos

Em toda esta seção, salvo menção em contrário, X representará um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ denotará a álgebra dos operadores lineares limitados de X .

Definição 2.10 (Semigrupo e Gerador Infinitesimal). *Uma aplicação $T : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é dita um Semigrupo de Operadores Lineares Limitados em X , e denotada por $(T(t))_{t \geq 0}$, quando:*

- (i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \in [0, +\infty)$.

Além disso, diz-se que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um Semigrupo de Classe C_0 ou, um C_0 -Semigrupo, quando:

$$(iii) \lim_{t \rightarrow 0^+} \|(T(t) - I)x\| = 0, \forall x \in X.$$

O operador linear $\mathcal{A}$ definido por:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h}x \text{ existe}\}$$

com domínio:

$$\mathcal{A}x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h}x, \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

é chamado o Gerador Infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

Observação 2.3. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em X e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Então, a função definida por $U(t) := T(t)x$ é a única solução para o problema de Cauchy (abstrato):

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, & t > 0 \\ U(0) = x \end{cases}.$$

Além disso, U possui as seguintes regularidades:

$$U \in C([0, \infty); X), \text{ quando } x \in X;$$

$$U \in C([0, \infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty); X), \text{ quando } x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Definição 2.11. Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é dito um *Semigrupo de Contrações* quando:

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

O teorema a seguir fornece uma caracterização dos operadores lineares que são geradores de um C_0 -semigrupo de contrações.

Teorema 2.3 (Hille-Yosida). Seja $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ um operador linear no espaço de Banach X . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações;
- (b) $\mathcal{A}$ é fechado, densamente definido, e para todo real $\lambda > 0$, tem-se que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e

$$\|R(\lambda; \mathcal{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

- (c) $\mathcal{A}$ é fechado, densamente definido, e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, tem-se que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e

$$\|R(\lambda; \mathcal{A})\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)}.$$

Demonstração: Ver [14], Teorema 3.5, p. 73. ■

Sejam X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^* . Para cada $x \in X$, anotemos:

$$J(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo *Teorema de Hahn-Banach*, segue que $J(x) \neq \emptyset, \forall x \in X$. Uma *Aplicação Dualidade* é uma aplicação $j : X \rightarrow X^*$ tal que $j(x) \in J(x), \forall x \in X$.

Definição 2.12. Um operador linear $\mathcal{A}$ é dito *dissipativo* quando, para alguma aplicação dualidade j , vale que:

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}x, j(x) \rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Observação 2.4. No caso em que X é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, tem-se que um operador linear $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq X \rightarrow X$ é dissipativo se, e somente se:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}x, x)_X \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

onde $(\cdot, \cdot)_X$ denota o produto interno de X .

Teorema 2.4 (Lumer-Phillips). Seja $\mathcal{A}$ um operador linear densamente definido no espaço de Banach X .

(i) Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, então, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .

(ii) Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X , então, $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$ e $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Demonstração: Ver [40], Teorema 4.5, p. 16. ■

A seguir, apresentamos um corolário do Teorema de Lumer-Phillips que será utilizado neste trabalho para estabelecer a boa-colocação dos problemas estudados.

Corolário 2.1. Seja $\mathcal{A}$ um operador linear (não-limitado) densamente definido no espaço de Hilbert X . Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .

Demonstração: Ver [40]. ■

Teorema 2.5. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Então, existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que:

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Demonstração: Ver [40], Teorema 2.2, p. 4. ■

2.5.1 Propriedades Assintóticas de Semigrupos de Classe C_0

Definição 2.13. Diz-se que um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é *exponencialmente estável* quando existem constantes $\mu > 0$ e $M \geq 1$ tais que:

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Definição 2.14. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal. O tipo do semigrupo gerado por $\mathcal{A}$, denotado por $\omega_0(\mathcal{A})$, é definido por:

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}.$$

Observação 2.5. Note que $\omega_0(\mathcal{A})$ é o ínfimo das constantes ω que satisfazem a desigualdade do Teorema 2.5. Além disso, o tipo de um semigrupo pode nos fornecer informações importantes sobre o comportamento assintótico desse semigrupo. Com efeito, um semigrupo é exponencialmente estável se, e somente se, $\omega_0(\mathcal{A}) < 0$. Quando $-\infty < \omega_0(\mathcal{A}) < 0$ ocorre, o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento ótima determinada por $\omega_0(\mathcal{A})$. De fato, em vista da definição de $\omega_0(\mathcal{A})$, temos que, para cada $0 < \varepsilon < |\omega_0(\mathcal{A})|$ dado, existe t_ε tal que:

$$\omega_0(\mathcal{A}) + \varepsilon > \frac{\ln \|T(t)\|}{t} \quad \Rightarrow \quad e^{(\omega_0(\mathcal{A}) + \varepsilon)t} \geq \|T(t)\|, \quad \forall t > t_\varepsilon.$$

Como $T(t)$ é contínuo sobre o intervalo compacto $[0, t_\varepsilon]$, existe uma constante $M_\varepsilon > 0$ tal que:

$$\|T(t)\| \leq M_\varepsilon e^{(\omega_0(\mathcal{A}) + \varepsilon)t}, \quad \forall t \geq 0$$

E então, para ver que $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável basta tomarmos $-\mu = \omega_0(\mathcal{A}) + \varepsilon$ na definição 2.13.

Proposição 2.2. Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$. Se $\omega_0(\mathcal{A}) = 0$, então $\|T(t)\| = 1$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Por um lado, temos que $\|T(t)\| \leq 1$, pois $(T(t))_{t \geq 0}$ é de contrações, por hipótese. Para a desigualdade contrária, note que, da definição de $\omega_0(\mathcal{A})$, temos que:

$$1 = e^{0t} = e^{\omega_0(\mathcal{A})t} \leq \|T(t)\|,$$

para todo $t \geq 0$. ■

Proposição 2.3. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$. Então:*

$$-\infty \leq \omega_\sigma(\mathcal{A}) \leq \omega_0(\mathcal{A}) < +\infty,$$

onde $\omega_\sigma(\mathcal{A})$ é a cota superior do espectro de $\mathcal{A}$ (ver definição 2.9).

Demonstração: Ver [14]. ■

Definição 2.15. *Dizemos que o C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, cujo gerador infinitesimal é $\mathcal{A}$, satisfaz o princípio da estabilidade linear quando:*

$$\omega_\sigma(\mathcal{A}) = \omega_0(\mathcal{A}).$$

Teorema 2.6 (Prüss). *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ cujo gerador infinitesimal é $\mathcal{A}$. Então, $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se:*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad e \quad \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Ver [14], Teorema 1.11, p. 302. ■

Teorema 2.7 (Borichev-Tomilov). *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$, tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Então,*

$$\frac{1}{|\lambda|^\beta} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \|T(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \leq \frac{C}{t^{1/\beta}}, \quad \forall t > 0.$$

Demonstração: Ver [6]. ■

2.6 O Espectro Essencial

Denotaremos por $\mathcal{K}(X)$ o espaço vetorial de todos os operadores compactos sobre X .

Definição 2.16. *Um operador $T \in \mathcal{L}(X)$ é chamado um Operador de Fredholm quando*

$$\dim[\ker(T)] < \infty \quad e \quad \dim[X/\text{Im}(T)] < \infty.$$

Proposição 2.4. *Um operador $T \in \mathcal{L}(X)$ é um operador de Fredholm se, e somente se, existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que $(I - ST)$ e $(I - TS)$ são operadores compactos.*

Demonstração: Ver [20]. ■

Definição 2.17. Seja $T \in \mathcal{L}(X)$. O *Espectro Essencial* de T , que denotamos por $\sigma_{ess}(T)$, é o conjunto dado por:

$$\sigma_{ess}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - T \text{ não é um operador de Fredholm}\}$$

Definição 2.18. Denominamos *Álgebra Calkin*, e denotamos por $\mathcal{C}(X)$, à álgebra obtida ao se considerar, sobre o espaço quociente $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$, o produto $[C][D] = [CD]$, onde $[C]$ é a classe $C + \mathcal{K}(X)$.

Vemos que $\mathcal{C}(X)$ é uma álgebra que possui um elemento unidade, a saber, a classe $[I]$; e se torna uma álgebra de Banach quando equipada com a norma quociente:

$$\|\hat{T}\| := \text{dist}(T, \mathcal{K}(X)) = \inf\{\|T - K\|; K \in \mathcal{K}(X)\}$$

para $\hat{T} := T + \mathcal{K}(X) \in \mathcal{C}(X)$. Além disso, devido à equivalência contida na Proposição 2.4, temos:

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma(\hat{T}), \quad \forall T \in \mathcal{L}(X),$$

o que implica que $\sigma_{ess}(T)$ é fechado. Se $\dim X < \infty$, então todos os operadores sobre X são operadores de Fredholm; logo, neste caso, $\sigma_{ess}(T) = \emptyset$. Por outro lado, se X tem dimensão infinita, então $\sigma_{ess}(T)$ é sempre não-vazio.

Aqui, empregaremos as notações

$$\|T\|_{ess} := \|\hat{T}\| \quad \text{e} \quad r_{ess}(T) := r(\hat{T}) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_{ess}(T)\}$$

para, respectivamente, a *Norma Essencial* e o *Raio Espectral Essencial* do operador T .

Teorema 2.8 (Teorema de Weyl). *Sejam $S, T \in \mathcal{L}(X)$. Se $S - T$ é um operador compacto, então S e T tem o mesmo raio espectral essencial.*

Demonstração: Ver [23], Teorema 5.35, p. 244. ■

Como $\|T\|_{ess} = \|T + K\|_{ess}$ para todo operador compacto K sobre X , vemos que

$$r_{ess}(T + K) = r_{ess}(T), \quad \forall K \in \mathcal{K}(X).$$

Além disso, usando a fórmula de Gelfand (ver Proposição 2.1) para o raio espectral de $\hat{T}$, obtemos a igualdade:

$$r_{ess}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|_{ess}^{1/n}.$$

Definição 2.19. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X e $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal. O Tipo Essencial $\omega_{ess}(\mathcal{A})$ do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é dado por:

$$\omega_{ess}(\mathcal{A}) := \omega_{ess}(T) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|_{ess}}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|_{ess}}{t}.$$

Proposição 2.5. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X e $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal. Então:

$$-\infty \leq \omega_{ess}(\mathcal{A}) = \frac{\ln r_{ess}(T(t_0))}{t_0} \leq \omega_0(\mathcal{A}) < \infty, \quad \text{para cada } t_0 > 0.$$

Demonstração: Ver [14], Proposição 2.10, p. 258. ■

Corolário 2.2. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X e $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal. Então:

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \max\{\omega_{ess}(\mathcal{A}), \omega_\sigma(\mathcal{A})\}.$$

Demonstração: Ver [14], Corolário 2.11, p. 258. ■

Proposição 2.6. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X , $\mathcal{A}$ o seu gerador infinitesimal e $K \in \mathcal{K}(X)$. Se $(S(t))_{t \geq 0}$ denota o semigrupo gerado por $\mathcal{A} + K$, então $T(t) - S(t)$ é compacto para todo $t \geq 0$. Em particular:

$$\omega_{ess}(\mathcal{A}) = \omega_{ess}(\mathcal{A} + K).$$

Demonstração: Ver [14], Proposição 2.12, p. 258. ■

Capítulo 3

Estabilização na Fronteira de um Sistema Híbrido de Euler-Bernoulli

Neste capítulo, consideramos a estabilização uniforme de um sistema híbrido consistindo de uma viga de Euler-Bernoulli com um mecanismo dissipativo provocado por uma carga fixada em uma das suas extremidades. O resultado principal é que o semigrupo associado ao modelo não é exponencialmente estável. Além disso, mostramos que o semigrupo decai polinomialmente para zero como $t^{-1/2}$.

3.1 O Modelo

Consideremos uma viga de comprimento l , e denotemos por u o deslocamento transversal de cada ponto da viga, satisfazendo a equação da viga de Euler-Bernoulli

$$mu_{tt}(x, t) + \beta u_{xxx}(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

onde x denota a *coordenada axial* e t representa o *tempo*, e as constantes positivas $\beta := \mathcal{E}I$ e m são, respectivamente, a *rigidez flexural* e a *densidade linear* da viga, e $\mathcal{E}$ e I são, respectivamente, o *módulo de Young* do material e o *momento de inércia*.

Estamos admitindo que a viga tem a extremidade $x = l$ livre, e possui um recipiente contendo material granular fixado na extremidade $x = 0$. Além disso, vamos admitir que o recipiente e seu

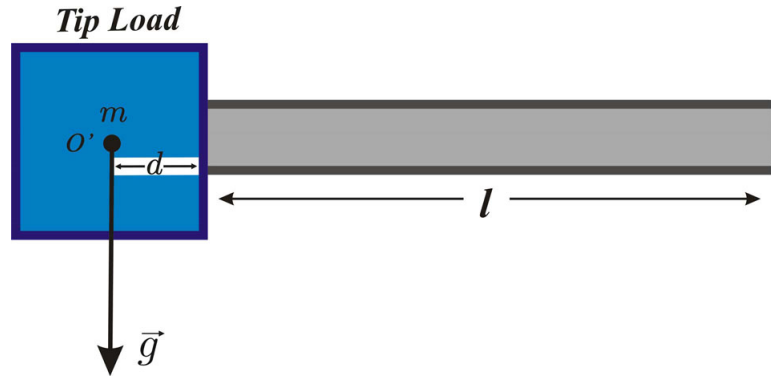


Figura 3.1: Viga de Euler-Bernoulli com Carga Pontual.

conteúdo formam um corpo de massa m_H e centro de massa O' localizado a uma distância d da extremidade da viga, como mostra a figura acima.

Assim, as condições de fronteira são dadas por:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0, \quad u(0, t) = w(t), \quad t \geq 0. \quad (3.2)$$

onde assumimos que o efeito dissipativo provocado pelo material granular interno pode ser representado pelo coeficiente γ , de modo que sua contribuição precisa para o sistema é descrita por:

$$\rho w_{tt} + \gamma w_t + \alpha w + \beta u_{xxx}(0) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

onde ρ , γ e α são constantes positivas que expressam propriedades físicas da carga.

Estamos considerando as seguintes condições iniciais:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.4)$$

$$w(0) = w_0 \in \mathbb{C}, \quad w_t(0) = w_1 \in \mathbb{C}. \quad (3.5)$$

O resultado principal deste capítulo é mostrar que o sistema (3.1)–(3.5) não é exponencialmente estável, mas a energia das suas soluções decai polinomialmente. Isto significa que as propriedades dissipativas da carga pontual não são suficientes para estabilizar exponencialmente o sistema, mas produzem uma taxa polinomial de decaimento.

3.2 Existência e Unicidade de Soluções

Definimos a energia total do sistema como sendo:

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l [m |u_t|^2 + \beta |u_{xx}|^2] dx + \frac{1}{2} [\alpha |w|^2 + \rho |w_t|^2].$$

E consideramos o espaço de fase $\mathcal{H}$ dado por:

$$\mathcal{H} := \{\mathcal{U} = (u, U, w, W)^T \in V_1 \times L^2(0, l) \times \mathbb{C}^2; u(0) = w\},$$

onde:

$$V_1 := \{f \in H^2(0, l); f_x(0) = 0\}.$$

Note que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, quando munido com o produto interno que induz a norma:

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = m \|U\|_{L^2(0, l)}^2 + \beta \|u_{xx}\|_{L^2(0, l)}^2 + \alpha |w|^2 + \rho |W|^2.$$

Agora, introduzimos o operador $\mathcal{A}$ em $\mathcal{H}$ definido por:

$$\mathcal{A} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} U \\ -\frac{\beta}{m} u_{xxxx} \\ W \\ -\frac{\alpha}{\rho} w - \frac{\gamma}{\rho} W - \frac{\beta}{\rho} u_{xxx}(0) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

com domínio:

$$D(\mathcal{A}) := \{\mathcal{U} := (u, U, w, W)^T \in V_2 \times V_1 \times \mathbb{C}^2; u(0) = w, U(0) = W\} \quad (3.7)$$

onde:

$$V_2 := \{f \in H^4(0, l); f_x(0) = 0, f_{xx}(l) = f_{xxx}(l) = 0\}.$$

Um cálculo simples nos mostra que:

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A} \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle = -\gamma |W|^2 \leq 0, \quad (3.8)$$

o que significa que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. Com isto, o sistema (3.1)-(3.5) é equivalente a:

$$\mathcal{U}_t = \mathcal{A} \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0, \quad (3.9)$$

onde $\mathcal{U}(t) = (u(t), U(t), w(t), W(t))^T$ e $\mathcal{U}_0 = (u_0, u_1, w_0, w_1)^T$.

Sob estas condições, temos o seguinte

Teorema 3.1. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ em $\mathcal{H}$. Portanto, para cada dado inicial $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$, o problema (3.9) possui uma única solução fraca*

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}^0([0, \infty[, \mathcal{H}).$$

Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, então $\mathcal{U}$ é uma solução forte de (3.9), com

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^0([0, \infty[, D(\mathcal{A})).$$

Demonstração: Não é difícil ver que o domínio $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$; e, como $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo, segue do corolário 2.1 que é suficiente mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Para isto, iremos provar que, para cada $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T \in \mathcal{H}$, existe um único $\mathcal{U} = (u, U, w, W)^T \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{U} = F$. Em termos de componentes, temos:

$$U = f^1 \tag{3.10}$$

$$-\frac{\beta}{m}u_{xxxx} = f^2 \tag{3.11}$$

$$W = f^3 = f^1(0) \tag{3.12}$$

$$-\frac{\alpha}{\rho}w - \frac{\gamma}{\rho}W - \frac{\beta}{\rho}u_{xxx}(0) = f^4 \tag{3.13}$$

Com efeito, segue das equações (3.10) e (3.12), que U e W estão univocamente determinados, com $U \in V_1$, $W \in \mathbb{C}$ e $U(0) = W$. Além disso, é fácil ver que o sistema

$$\begin{cases} u_{xxxx} = -\frac{m}{\beta}f^2 \\ u_x(0) = u_{xx}(l) = u_{xxx}(l) = 0 \\ \alpha u(0) + \beta u_{xxx}(0) = -(\rho f^4 + \gamma f^3) \end{cases}$$

possui uma única solução. E isto nos permite concluir que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. ■

3.3 A Falta de Estabilidade Exponencial

Para mostrar que o sistema (3.1)-(3.5) não é exponencialmente estável, a principal ferramenta que usamos é o *Teorema de Weyl* sobre a invariância do raio espectral essencial por perturbações compactas. Entretanto, para a argumentação que segue, vamos precisar tomar dados iniciais mais

regulares. Em outras palavras, consideraremos o sistema (3.1)-(3.5) modelado sobre o espaço de fase $\mathcal{H}$ dado por:

$$\mathcal{H} := D(\mathcal{A}) = \{\mathcal{U} := (u, U, w, W)^T \in V_2 \times V_1 \times \mathbb{C}^2; u(0) = w, U(0) = W\}$$

munido da norma:

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = m \|U_t\|_{L^2(0,l)}^2 + \beta \|u_{xxt}\|_{L^2(0,l)}^2 + \alpha |w_t|^2 + \rho |W_t|^2.$$

Assim, a *energia total* associada ao sistema (3.1)-(3.5), que é compatível com a norma considerada no espaço de fase $\mathcal{H}$, é dada por:

$$E_2(t) = E_2(t; u, w) := \frac{1}{2} \int_0^l [m |u_{tt}|^2 + \beta |u_{xxt}|^2] dx + \frac{1}{2} [\alpha |w_t|^2 + \rho |w_{tt}|^2].$$

Denotemos por $\mathcal{A}$ o operador de $\mathcal{H}$ dado pela mesma lei que aparece em (3.6). É fácil ver que o operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ sobre $\mathcal{H}$.

Para usarmos o *Teorema de Weyl*, consideremos o seguinte *sistema conservativo*:

$$m \tilde{u}_{tt} + \beta \tilde{u}_{xxxx} = 0 \quad \text{em }]0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.14)$$

$$\rho \tilde{w}_{tt} + \alpha \tilde{w} + \beta \tilde{u}_{xxx}(0) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.15)$$

onde m, β, α, ρ , e os dados iniciais e condições de fronteira são os mesmos que consideramos anteriormente. Mais precisamente, com condições de fronteira:

$$\tilde{u}_x(0) = 0, \quad \tilde{u}_{xx}(l) = \tilde{u}_{xxx}(l) = 0 \quad \tilde{u}(0) = \tilde{w}, \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.16)$$

e dados iniciais:

$$(\tilde{u}(0), \tilde{u}_t(0), \tilde{w}(0), \tilde{w}_t(0)) = (u_0, u_1, w_0, w_1) \in \mathcal{H}. \quad (3.17)$$

A *energia total* associada a este sistema é definida por:

$$\tilde{E}(t) := E_2(t; \tilde{u}, \tilde{w}) = \frac{1}{2} \int_0^l [m |\tilde{u}_{tt}|^2 + \beta |\tilde{u}_{xxt}|^2] dx + \frac{1}{2} [\alpha |\tilde{w}_t|^2 + \rho |\tilde{w}_{tt}|^2]$$

e é fácil ver que:

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(t) = 0.$$

Agora estamos prontos para estabelecer o resultado principal dessa seção.

Teorema 3.2. *O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ associado ao sistema (3.1)-(3.5) não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Vamos mostrar que $(T(t))_{t \geq 0}$ tem o mesmo tipo essencial $\omega_{ess}(T)$ que um outro C_0 -semigrupo sobre $\mathcal{H}$; a saber, o semigrupo $(T_0(t))_{t \geq 0}$ associado ao sistema (3.14)-(3.17). Aqui, usaremos o *Teorema de Weyl* (teorema 2.8). Em vista disso, iremos mostrar que, para cada $t > 0$, a diferença $T(t) - T_0(t)$ é um operador compacto de $\mathcal{H}$; de onde obteremos:

$$\omega_{ess}(T) = \omega_{ess}(T_0).$$

Mas, como $(T_0(t))_{t \geq 0}$ é unitário, temos que $\omega_{ess}(T_0) = 0$. Denotando por $\omega(T)$ e $\omega_\sigma(\mathcal{A})$ o *tipo* do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ e a *cota superior do espectro* $\sigma(\mathcal{A})$, respectivamente, temos que (veja o corolário 2.2):

$$\omega(T) = \max \{ \omega_\sigma(\mathcal{A}), \omega_{ess}(T) \} = 0. \quad (3.18)$$

E isto implica que $(T(t))_{t \geq 0}$ não é exponencialmente estável.

Vejamos. Sejam (u, w) e $(\tilde{u}, \tilde{w})$ soluções dos sistemas (3.1)-(3.5) e (3.14)-(3.17), respectivamente. Anotando:

$$U := u - \tilde{u}, \quad W := w - \tilde{w},$$

temos que (U, W) é solução do sistema

$$mU_{tt} + \beta U_{xxxx} = 0 \quad \text{em }]0, l[\times]0, +\infty[\quad (3.19)$$

$$\rho W_{tt} + \alpha W + \beta U_{xxx}(0) + \gamma w_t = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.20)$$

com condições de fronteira

$$U_x(0) = 0, \quad U_{xx}(l) = U_{xxx}(l) = 0, \quad U(0) = W \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (3.21)$$

e dados iniciais

$$(U(0), U_t(0), W(0), W_t(0)) = (0, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}. \quad (3.22)$$

A *energia total* associada ao sistema (3.19)-(3.22) é definida por:

$$\mathbb{E}(t) := E_2(t; U, W) = \frac{1}{2} \int_0^l [m |U_{tt}|^2 + \beta |U_{xxx}|^2] dx + \frac{1}{2} [\alpha |W_t|^2 + \rho |W_{tt}|^2].$$

Diferenciando (3.19)-(3.21) com respeito a t e multiplicando por $\overline{U_{tt}}$ a igualdade assim obtida de (3.19), encontramos:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(t) = -\gamma w_{tt} \overline{W_{tt}}$$

de onde segue que:

$$\mathbb{E}(t) = -\gamma \int_0^t w_{tt} \overline{W_{tt}} ds$$

o que se reescreve, em vista de (3.3) e (3.20), como:

$$\mathbb{E}(t) = -\frac{\gamma}{\rho^2} \int_0^t [\beta u_{xxx}(0) + \gamma w_t + \alpha w] \left[\beta \overline{U_{xxx}(0)} + \alpha \overline{W} + \gamma \overline{w_t} \right] ds. \quad (3.23)$$

Agora, consideremos uma sequência $(\mathcal{U}_{0,n})_n$ da forma $\mathcal{U}_{0,n} := (u_{0,n}, u_{1,n}, w_{0,n}, w_{1,n})^T$, limitada no espaço de fase $\mathcal{H}$, e denotemos por $((U_n, W_n))_n$ a sequência correspondente de soluções do sistema (3.19)-(3.22). Vamos mostrar que a sequência $(\mathcal{U}_n)_n$ dada por $\mathcal{U}_n := (U_n, U_{n,t}, W_n, W_{n,t})^T$ tem uma subsequência que converge fortemente em $\mathcal{H}$.

Para isto, note que $(T(t)\mathcal{U}_{0,n})_n$ e $(T_0(t)\mathcal{U}_{0,n})_n$ são limitadas em $\mathcal{H}$, o que implica em:

$$(u_{n,xxxx})_n, \quad (U_{n,xxxx})_n, \quad (u_{n,txt})_n, \quad \text{e} \quad (U_{n,txt})_n \quad \text{limitadas em } L^\infty(0, T; L^2(0, l)) \quad (3.24)$$

$$\text{e} \quad (w_{n,t})_n \quad \text{e} \quad (W_{n,t})_n \quad \text{limitadas em } H^1(0, T), \quad (3.25)$$

para cada $T > 0$. Segue daí, usando a *desigualdade de Poincaré*:

$$(u_{n,xx})_n \quad \text{e} \quad (U_{n,xx})_n \quad \text{limitadas em } L^\infty(0, T; H^2(0, l)). \quad (3.26)$$

Agora, tomando $0 < \delta < \frac{1}{2}$ e aplicando o *Teorema de Aubin-Lions*, concluímos que existe uma subsequência, que continuaremos denotando por $(\mathcal{U}_n)_n$, tal que:

$$(u_{n,xx})_n \quad \text{e} \quad (U_{n,xx})_n \quad \text{convergem forte em } L^\infty(0, T; H^{2-\delta}(0, l)). \quad (3.27)$$

Mas, graças à maneira como tomamos δ , obtemos a seguinte imersão (veja o teorema 2.1):

$$H^{2-\delta}(0, l) \xhookrightarrow{c} C^1([0, l]). \quad (3.28)$$

Assim, segue de (3.27) e (3.28) que:

$$(u_{n,xxx}(0))_n \quad \text{e} \quad (U_{n,xxx}(0))_n \quad \text{convergem forte em } L^2(0, T). \quad (3.29)$$

Além disso, usando (3.3), (3.20), (3.25) e (3.29), encontramos:

$$(w_n)_n \quad \text{e} \quad (W_n)_n \quad \text{limitadas em } H^2(0, T), \quad (3.30)$$

de onde segue que existe uma subsequência, ainda denotada por $(\mathcal{U}_n)_n$, tal que:

$$(w_n)_n, \quad (w_{n,t})_n \quad \text{e} \quad (W_n)_n \quad \text{convergem forte em } L^2(0, T). \quad (3.31)$$

Finalmente, usando (3.29) e (3.31) em (3.23), segue que $(\|[T(t) - T_0(t)]\mathcal{U}_{0,n}\|_{\mathcal{H}})_n$ converge, o que implica que $([T(t) - T_0(t)]\mathcal{U}_{0,n})_n$ converge fortemente em $\mathcal{H}$. Isto significa que, para cada $t > 0$, $T(t) - T_0(t)$ é um operador compacto em $\mathcal{H}$, e portanto a prova está completa. ■

3.4 Decaimento Polinomial

Nesta seção, vamos mostrar que a energia das soluções do sistema (3.1)-(3.5) decai polinomialmente para zero como $t^{-1/2}$. Aqui, usaremos o *Teorema de Borichev-Tomilov* (teorema 2.7). Em vista disso, no próximo lema, vamos mostrar que o eixo imaginário está contido no resolvente de $\mathcal{A}$.

Lema 3.1. *O operador $\mathcal{A}$ é tal que*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}). \quad (3.32)$$

Demonstração: Como $(I - \mathcal{A})^{-1}$ é compacto em $\mathcal{H}$, para estabelecer (3.32) é suficiente mostrar que $\mathcal{A}$ não possui autovalores imaginários puros. Para isto, suponhamos que exista $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $i\lambda_0$ é um autovalor de $\mathcal{A}$, e seja $\mathcal{U} = (u, U, w, W)^T \in D(\mathcal{A})$ um autovetor normalizado associado a $i\lambda_0$; isto é:

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = i\lambda_0\mathcal{U}. \quad (3.33)$$

Usando (3.8) e (3.33), obtemos:

$$W = 0. \quad (3.34)$$

Por outro lado, note que, reescrevendo (3.33) em termos de componentes, temos:

$$i\lambda_0 u - U = 0 \quad (3.35)$$

$$i\lambda_0 mU + \beta u_{xxxx} = 0 \quad (3.36)$$

$$i\lambda_0 w - W = 0 \quad (3.37)$$

$$i\rho\lambda_0 W + \alpha w + \gamma W + \beta u_{xxx}(0) = 0. \quad (3.38)$$

De (3.34) e das igualdades acima, segue que:

$$w = 0$$

e que u satisfaz

$$\begin{cases} u_{xxxx} - \frac{m\lambda_0^2}{\beta}u = 0 \\ u(0) = u_x(0) = u_{xx}(l) = u_{xxx}(l) = 0 \end{cases}.$$

Da boa-colocação do sistema acima vem que $u = 0$ e $U = 0$. Portanto, concluímos que $\mathcal{U} = 0$, o que encerra a prova deste lema. ■

Agora, iremos provar que a solução $\mathcal{U}$ da equação resolvente

$$(i\lambda I - \mathcal{A})\mathcal{U} = F \quad (3.39)$$

satisfaz a primeira desigualdade do Teorema 2.7 (com $\beta = 2$) para $|\lambda|$ suficientemente grande. Para isto, reescrevemos (3.39) em termos dos seus componentes, encontrando:

$$i\lambda u - U = f^1 \quad (3.40)$$

$$i\lambda mU + \beta u_{xxxx} = mf^2 \quad (3.41)$$

$$i\lambda w - W = f^3 \quad (3.42)$$

$$i\rho\lambda W + \alpha w + \gamma W + \beta u_{xxx}(0) = \rho f^4. \quad (3.43)$$

Tomando o produto interno em (3.39) com $\mathcal{U}$, segue que:

$$\gamma |W|^2 \leq C \|\mathcal{U}\| \|F\|. \quad (3.44)$$

Lema 3.2. *Existe uma constante C positiva tal que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:*

$$\begin{aligned} |U_x(l)|^2 &\leq C [|\lambda|^2 |W|^2 + |w|^2 + \|\mathcal{U}\| \|F\| + \|F\|^2] + C [\|U_x\|_{L^2(0,l)} + \|u_{xxx}\|_{L^2(0,l)}] \|F\| + \\ &+ C |\lambda| |W| \|u_{xxx}\|_{L^2(0,l)}. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (3.41) por $\bar{u}_{xxx}$ e usando (3.40), obtemos:

$$\frac{m}{2} |U_x(l)|^2 = i\lambda m W \overline{u_{xx}(0)} + \frac{\beta}{2} |u_{xxx}(0)|^2 + R_1 \quad (3.45)$$

onde:

$$R_1 := m \int_0^l \bar{u}_{xxx} f^2 dx - m \int_0^l U_x \overline{f_{xx}^1} dx.$$

Mas, de (3.43) e (3.44) segue que:

$$\frac{\beta}{2} |u_{xxx}(0)|^2 \leq C [|\lambda|^2 |W|^2 + |w|^2 + \|\mathcal{U}\| \|F\| + \|F\|^2]. \quad (3.46)$$

Além disso, é fácil ver que:

$$\operatorname{Re}(R_1) \leq C [\|U_x\|_{L^2(0,l)} + \|u_{xxx}\|_{L^2(0,l)}] \|F\| \quad (3.47)$$

e

$$\left| i\lambda m W \overline{u_{xx}(0)} \right| \leq c |\lambda| |W| \|u_{xxx}\|_{L^2(0,l)}. \quad (3.48)$$

Tomando a parte real em (3.45) e usando (3.46)-(3.48), obtemos a desigualdade desejada. ■

Lema 3.3. Para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante positiva C_ε tal que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:

$$\int_0^l [|U_x|^2 + |u_{xxx}|^2] dx \leq \varepsilon \|U\|_{L^2(0,l)}^2 + C_\varepsilon |w|^2 + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\| \|F\| + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C_\varepsilon \|F\|^2.$$

Demonstração: Multiplicando (3.41) por $(x-l)\overline{u_{xxx}}$ e usando (3.40), encontramos:

$$\int_0^l \left[\frac{3m}{2} |U_x|^2 + \frac{\beta}{2} |u_{xxx}|^2 \right] dx = i\lambda m W \overline{u_{xx}(0)} + m U(l) \overline{U_x(l)} + \frac{\beta}{2} l |u_{xxx}(0)|^2 + R_2 \quad (3.49)$$

onde:

$$R_2 := m \int_0^l U \overline{f_{xx}^1} dx + m \int_0^l (x-l) U_x \overline{f_{xx}^1} dx - m \int_0^l (x-l) \overline{u_{xxx}} f^2 dx.$$

Além disso, é fácil ver que:

$$\operatorname{Re}(R_2) \leq C \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \|U_x\|_{L^2(0,l)} \|F\| + C \|u_{xxx}\|_{L^2(0,l)} \|F\| \quad (3.50)$$

e que, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante positiva C_ε tal que:

$$m |U(l)| |U_x(l)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \|U\|_{L^2(0,l)}^2 + \frac{1}{2} \|U_x\|_{L^2(0,l)}^2 + C_\varepsilon |U_x(l)|^2. \quad (3.51)$$

Finalmente, tomando a parte real em (3.49) e usando (3.46), (3.48), (3.50), (3.51), (3.44) e o Lema anterior, chegamos à conclusão desejada. ■

Lema 3.4. Para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante positiva C_ε tal que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:

$$\int_0^l [|U|^2 + |u_{xx}|^2] dx \leq \varepsilon \|U\|_{L^2(0,l)}^2 + C_\varepsilon |w|^2 + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\| \|F\| + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C_\varepsilon \|F\|^2.$$

Demonstração: Multiplicando (3.41) por $(x-l)\overline{u_x}$ e usando (3.40), obtemos:

$$\int_0^l [m |U|^2 + \beta |u_{xx}|^2] dx = l\beta |u_{xx}(0)|^2 + lm |W|^2 + R_3 \quad (3.52)$$

onde:

$$R_3 := 2\beta \int_0^l u_{xxx} \overline{u_x} dx + 2m \int_0^l (x-l) U \overline{f_x^1} dx + 2m \int_0^l (x-l) f^2 \overline{u_x} dx.$$

Mas, é fácil ver que:

$$\operatorname{Re}(R_3) \leq \frac{\beta}{2} \|u_{xx}\|_{L^2(0,l)}^2 + C \|u_{xxx}\|_{L^2(0,l)}^2 + C \|\mathcal{U}\| \|F\|. \quad (3.53)$$

e também:

$$l\beta |u_{xx}(0)|^2 \leq l\beta \|u_{xx}\|_{L^\infty(0,l)}^2 \leq C \|u_{xx}\|_{H^1(0,l)}^2 \leq C \|u_{xxx}\|_{L^2(0,l)}^2. \quad (3.54)$$

Tomando a parte real em (3.52) e usando (3.53), (3.54), (3.44), e o lema anterior, obtemos a desigualdade desejada. ■

De posse destes lemas, estamos prontos para estabelecer o resultado principal desta seção.

Teorema 3.3. *O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ decai polinomialmente como $t^{-1/2}$. Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A}^k)$, então:*

$$\|T(t)\mathcal{U}_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} \|\mathcal{U}_0\|_{D(\mathcal{A}^k)}.$$

Demonstração: Note que, de (3.42), obtemos:

$$|\lambda|^2 |w|^2 \leq C \|U\| \|F\| + C \|F\|^2. \quad (3.55)$$

Agora, usando (3.55), (3.44) e o Lema 3.4, encontramos, para cada $\varepsilon > 0$ dado, uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que, para todo $|\lambda| \geq 1$, vale:

$$\int_0^l [m |u_t|^2 + \beta |u_{xx}|^2] dx + \alpha |w|^2 + \rho |w_t|^2 \leq \varepsilon \|U\|_{L^2(0,l)}^2 + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C_\varepsilon \|F\|^2.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que, para todo $|\lambda| \geq 1$, temos:

$$\|\mathcal{U}\|^2 \leq C |\lambda|^4 \|F\|^2$$

o que implica em:

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C |\lambda|^2 \|F\|$$

para λ suficientemente grande. E isto encerra a prova. ■

Capítulo 4

Problema de Transmissão para uma Viga de Bresse Viscoelástica-Elástica com Carga Pontual

Neste capítulo, consideramos um problema de transmissão para uma viga de Bresse constituída de dois componentes: uma parte formada por um material viscoelástico (com viscoelasticidade do tipo memória), e a outra parte formada por um material elástico (sem efeito dissipativo atuando sobre este componente). Além disso, consideramos também a ação de um efeito dissipativo provocado por uma carga presa na extremidade da viga que é constituída pelo material elástico. O principal resultado obtido é que o modelo é exponencialmente estável quando o efeito da memória ocorre efetivamente nas três equações da viga. Além disso, quando não há efeito de memória, existe uma falta de decaimento exponencial, mas a dissipação fornecida pela carga produz uma taxa polinomial de decaimento; a saber, a energia do sistema decai para zero como $t^{-1/2}$. Isto significa que a dissipação fornecida pela carga não é forte o suficiente para estabilizar exponencialmente o sistema, mas produz uma taxa polinomial de decaimento.

4.1 O Modelo

Consideremos um problema de transmissão para uma viga de Bresse constituída de dois componentes: uma parte formada por um material viscoelástico (com viscoelasticidade do tipo memória), e a outra parte formada por um material elástico (sem efeito dissipativo atuando sobre este componente); sendo que a extremidade da parte viscoelástica está presa, e na outra extremidade há um recipiente contendo material granular provocando um efeito dissipativo no sistema, como mostra a figura abaixo.

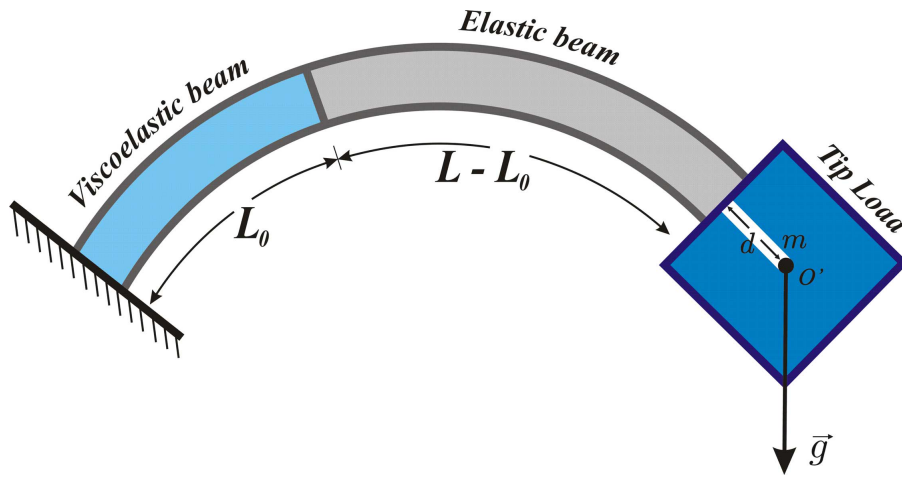


Figura 4.1: Viga de Bresse Viscoelástica-Elástica em Balanço com Carga Pontual.

Denotemos por $\varphi = \varphi(x, t)$, $\omega = \omega(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$, respectivamente, o *deslocamento transversal*, o *deslocamento longitudinal*, e o *ângulo de rotação* de um filamento da viga.

Usaremos as seguintes notações:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi^1 & \text{em }]0, L_0[\\ \varphi^2 & \text{em }]L_0, L[\end{cases}, \quad \psi = \begin{cases} \psi^1 & \text{em }]0, L_0[\\ \psi^2 & \text{em }]L_0, L[\end{cases} \quad \text{e} \quad \omega = \begin{cases} \omega^1 & \text{em }]0, L_0[\\ \omega^2 & \text{em }]L_0, L[\end{cases}, \quad (4.1)$$

onde L é o *comprimento* da viga e $L_0 \in]0, L[$ é o *ponto de transmissão*.

Assim, o modelo que consideramos é dado por:

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)_x - \ell \tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell \varphi^1) + \int_0^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)_x(.,s)ds + \quad (4.2)$$

$$+ \ell \int_0^t g_3(t-s)(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(.,s)ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) + \int_0^t g_2(t-s)\psi_{xx}^1(.,s)ds + \quad (4.3)$$

$$- \int_0^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(.,s)ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[$$

$$\rho_1^1 \omega_{tt}^1 - \tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)_x + \ell k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) + \int_0^t g_3(t-s)(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)_x(.,s)ds + \quad (4.4)$$

$$- \ell \int_0^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(.,s)ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)_x - \ell \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.5)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.6)$$

$$\rho_1^2 \omega_{tt}^2 - \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)_x + \ell k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[. \quad (4.7)$$

Aqui, $g_i : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) são as *funções de relaxamento* (ou, *núcleos de memória*), e $\rho_j^i, k_i, \tilde{k}_i, b_i$ ($i, j \in \{1, 2\}$) são constantes positivas que refletem propriedades físicas da viga. As condições de fronteira são dadas por:

$$\varphi^1(0) = \psi^1(0) = \omega^1(0) = 0, \quad \varphi^2(L) = u, \quad \psi^2(L) = v, \quad \omega^2(L) = w \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.8)$$

e as condições de transmissão são:

$$\varphi^1(L_0, t) = \varphi^2(L_0, t), \quad \psi^1(L_0, t) = \psi^2(L_0, t), \quad \omega^1(L_0, t) = \omega^2(L_0, t) \quad (4.9)$$

$$k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(L_0, t) - \int_0^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(L_0, s)ds = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L_0, t) \quad (4.10)$$

$$b_1 \psi_x^1(L_0, t) - \int_0^t g_2(t-s)\psi_x^1(L_0, s)ds = b_2 \psi_x^2(L_0, t) \quad (4.11)$$

$$\tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0, t) - \int_0^t g_3(t-s)(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0, s)ds = \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)(L_0, t) \quad (4.12)$$

onde $t \in [0, +\infty[$. O efeito da carga pontual sobre o sistema é modelado como:

$$m_1 u_{tt} + d_1 u_t + \gamma_1 u + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L) = 0 \quad (4.13)$$

$$m_2 v_{tt} + d_2 v_t + \gamma_2 v + b_2 \psi_x^2(L) = 0 \quad (4.14)$$

$$m_3 w_{tt} + d_3 w_t + \gamma_3 w + \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)(L) = 0 \quad (4.15)$$

em $]0, +\infty[$, onde os parâmetros m_i, γ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) são constantes positivas e d_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) são constantes não-negativas que refletem propriedades físicas da carga pontual. Finalmente, os dados iniciais são:

$$\varphi^1(0) = \varphi_0^1, \quad \varphi_t^1(0) = \varphi_1^1, \quad \psi^1(0) = \psi_0^1, \quad \psi_t^1(0) = \psi_1^1, \quad \omega^1(0) = \omega_0^1, \quad \omega_t^1(0) = \omega_1^1 \text{ em }]0, L_0[, \quad (4.16)$$

$$\varphi^2(0) = \varphi_0^2, \quad \varphi_t^2(0) = \varphi_1^2, \quad \psi^2(0) = \psi_0^2, \quad \psi_t^2(0) = \psi_1^2, \quad \omega^2(0) = \omega_0^2, \quad \omega_t^2(0) = \omega_1^2 \text{ em }]L_0, L[, \quad (4.17)$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad v(0) = v_0, \quad v_t(0) = v_1, \quad w(0) = w_0, \quad w_t(0) = w_1 \text{ em } \mathbb{C}. \quad (4.18)$$

Aqui, consideramos os núcleos de memória decaindo exponencialmente; isto é, assumimos as seguintes hipóteses sobre as funções de relaxamento g_i ($i \in \{1, 2, 3\}$):

$$g_i(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{e } g_i > 0 \text{ quase sempre em } [0, +\infty[; \quad (4.19)$$

$$\exists c_1^i, c_2^i, c_3^i > 0 : \quad -c_1^i g_i(t) \leq g_i'(t) \leq -c_2^i g_i(t), \quad t \in [0, +\infty[; \quad (4.20)$$

$$0 < k := k_1 - \int_0^\infty g_1(s)ds, \quad 0 < b := b_1 - \int_0^\infty g_2(s)ds, \quad 0 < k_0 := \tilde{k}_1 - \ell \int_0^\infty g_3(s)ds. \quad (4.21)$$

4.2 Existência e Unicidade de Soluções

Para usar uma abordagem baseada da Teoria de Semigrupos, introduzimos o *problema com história*, obtido substituindo-se as equações (4.2)-(4.4) pelas correspondentes equações com história:

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)_x - \ell \tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell \varphi^1) + \int_{-\infty}^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)_x(., s)ds + \\ + \ell \int_{-\infty}^t g_3(t-s)(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(., s)ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) + \int_{-\infty}^t g_2(t-s)\psi_{xx}^1(., s)ds + \\ - \int_{-\infty}^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(., s)ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \omega_{tt}^1 - \tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)_x + \ell k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) + \int_{-\infty}^t g_3(t-s)(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)_x(., s)ds + \\ - \ell \int_{-\infty}^t g_1(t-s)(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(., s)ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Seguindo as ideias de Dafermos [11], [12] e Fabrizio [15], introduzimos as seguintes notações:

$$\eta(x, t, s) := \varphi^1(x, t) - \varphi^1(x, t-s) \quad (4.4)$$

$$\xi(x, t, s) := \psi^1(x, t) - \psi^1(x, t-s) \quad (4.5)$$

$$\mu(x, t, s) := \omega^1(x, t) - \omega^1(x, t-s) \quad (4.6)$$

com $s \in [0, +\infty)$; de modo que o sistema (4.1)-(4.3), (4.5)-(4.18) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)_x - \ell k_0(\omega_x^1 - \ell \varphi^1) - \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell \mu)_x(s) ds + \\ - \ell \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell \eta)(s) ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b \psi_{xx}^1 + k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) - \int_0^\infty g_2(s) \xi_{xx}(s) ds + \\ + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell \mu)(s) ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \omega_{tt}^1 - k_0(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)_x + \ell k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) - \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell \eta)_x(s) ds + \\ + \ell \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell \mu)(s) ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)_x - \ell \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.10)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.11)$$

$$\rho_1^2 \omega_{tt}^2 - \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)_x + \ell k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.12)$$

$$\eta_t + \eta_s - \varphi_t^1 = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\quad (4.13)$$

$$\xi_t + \xi_s - \psi_t^1 = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\quad (4.14)$$

$$\mu_t + \mu_s - \omega_t^1 = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\quad (4.15)$$

onde k , b e k_0 são definidos em (4.21), com $\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, u, v$ e w satisfazendo às condições (4.8) e (4.13)-(4.18), e η , ξ e μ verificando as condições iniciais:

$$\eta(x, 0, s) = \eta_0(x, s) =: \varphi_0^1(x) - \varphi^1(x, -s), \quad (x, s) \in]0, L_0[\times]0, \infty[\quad (4.16)$$

$$\xi(x, 0, s) = \xi_0(x, s) =: \psi_0^1(x) - \psi^1(x, -s), \quad (x, s) \in]0, L_0[\times]0, \infty[\quad (4.17)$$

$$\mu(x, 0, s) = \mu_0(x, s) =: \omega_0^1(x) - \omega^1(x, -s), \quad (x, s) \in]0, L_0[\times]0, \infty[\quad (4.18)$$

e as condições de fronteira:

$$\eta(x, t, 0) = \xi(x, t, 0) = \mu(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in]0, L_0[\times]0, +\infty[, \quad (4.19)$$

$$\eta(0, t, s) = \xi(0, t, s) = \mu(0, t, s) = 0, \quad (t, s) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[. \quad (4.20)$$

As condições de transmissão são agora reescritas, para $t \in [0, +\infty[$, como:

$$\varphi^1(L_0, t) = \varphi^2(L_0, t), \quad \psi^1(L_0, t) = \psi^2(L_0, t), \quad \omega^1(L_0, t) = \omega^2(L_0, t) \quad (4.21)$$

$$k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0, t) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(L_0, s)ds = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0, t) \quad (4.22)$$

$$b\psi_x^1(L_0, t) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s)ds = b_2\psi_x^2(L_0, t) \quad (4.23)$$

$$k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0, t) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(L_0, s)ds = \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0, t). \quad (4.24)$$

Definimos a energia total do sistema por:

$$E(t) := E_1(t) + E_2(t) \quad (4.25)$$

onde:

$$\begin{aligned} E_1(t) := & \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \left[\rho_1^1 |\varphi_t^1|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^1|^2 + \rho_1^1 |\omega_t^1|^2 + k |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1|^2 + b |\psi_x^1|^2 + k_0 |\omega_x^1 - \ell\varphi^1|^2 \right] dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \left[\int_0^\infty g_1(s) |(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)|^2 ds + \int_0^\infty g_2(s) |\xi_x(s)|^2 ds + \int_0^\infty g_3(s) |(\mu_x - \ell\eta)(s)|^2 ds \right] dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E_2(t) := & \frac{1}{2} \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 + \rho_1^2 |\omega_t^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx + \\ & + \frac{1}{2} [\gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + \gamma_3 |w|^2 + m_1 |u_t|^2 + m_2 |v_t|^2 + m_3 |w_t|^2]. \end{aligned}$$

Introduzimos também os seguintes espaços:

$$\mathbb{H}^m := H^m(0, L_0) \times H^m(L_0, L), \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{H}_*^m := \{(u, v) \in \mathbb{H}^m; u(0) = 0, u(L_0) = v(L_0)\}, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{L}^2 := L^2(0, L_0) \times L^2(L_0, L);$$

$$H_*^m(0, L_0) := \{f \in H^m(0, L_0); f(0) = 0\}, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$L_{g_i}^2 := \left\{ \varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_*^1(0, L_0); \int_0^\infty g_i(s) \int_0^{L_0} |\varphi_x(s)|^2 dx ds < \infty \right\}, \quad i \in \{1, 2, 3\};$$

$$L_{g_{i,j}}^2 := L_{g_i}^2 \cap L_{g_j}^2, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j.$$

Recordamos que cada espaço de história $L_{g_j}^2$ (com $j \in \{1, 2, 3\}$) é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno dado por:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_{g_j}^2} = \int_0^\infty g_j(s) \int_0^{L_0} \varphi_x(s) \overline{\psi_x(s)} dx ds.$$

Com estas notações, consideramos o seguinte espaço de fase:

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} := (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, \eta, \xi, \mu, u, v, w, U, V, W)^T; \\ \mathcal{U} \in [\mathbb{H}_*^1]^3 \times [\mathbb{L}^2]^3 \times L_{g_{1,3}}^2 \times L_{g_{1,2}}^2 \times L_{g_{1,3}}^2 \times \mathbb{C}^6, \quad \varphi^2(L) = u, \quad \psi^2(L) = v, \quad \omega^2(L) = w \end{array} \right\}.$$

Note que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno que induz a norma da energia; isto é, aquela que, em cada $\mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, \eta, \xi, \mu, u, v, w, U, V, W)^T \in \mathcal{H}$, é dada por:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = & \rho_1^1 \|\Phi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \rho_2^1 \|\Psi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \rho_1^1 \|W^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \\ & + k \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + b \|\psi_x^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + k_0 \|\omega_x^1 - \ell \varphi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \\ & + \int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x + \xi + \ell \mu\|_{L^2(0, L_0)}^2 ds + \|\xi\|_{L_{g_2}^2}^2 + \int_0^\infty g_3(s) \|\mu_x - \ell \eta\|_{L^2(0, L_0)}^2 ds + \\ & + \rho_1^2 \|\Phi^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + \rho_2^2 \|\Psi^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + \rho_1^2 \|W^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + \\ & + k_2 \|\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + b_2 \|\psi_x^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + \tilde{k}_2 \|\omega_x^2 - \ell \varphi^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + \\ & + \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + \gamma_3 |w|^2 + m_1 |U|^2 + m_2 |V|^2 + m_3 |W|^2. \end{aligned}$$

Introduzimos também o operador linear não-limitado $\mathcal{A}$ em $\mathcal{H}$ dado por:

$$\mathcal{A} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ W^1 \\ W^2 \\ \frac{k}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)_x + \frac{k_0\ell}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1) + \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)_x(s)ds + \frac{\ell}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(s)ds \\ \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)_x + \frac{\tilde{k}_2\ell}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2) \\ \frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 - \frac{k}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)ds - \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)ds \\ \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) \\ \frac{k_0}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)_x - \frac{k\ell}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) + \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)_x(s)ds - \frac{\ell}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)ds \\ \frac{\tilde{k}_2}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)_x - \frac{k_2\ell}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) \\ \Phi^1 - \eta_s \\ \Psi^1 - \xi_s \\ W^1 - \mu_s \\ U \\ V \\ W \\ -\frac{d_1}{m_1}U - \frac{\gamma_1}{m_1}u - \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L) \\ -\frac{d_2}{m_2}V - \frac{\gamma_2}{m_2}v - \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(L) \\ -\frac{d_3}{m_3}W - \frac{\gamma_3}{m_3}w - \frac{\tilde{k}_2}{m_3}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L) \end{pmatrix}$$

com domínio:

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, \eta, \xi, \mu, u, v, w, U, V, W)^T \in \mathcal{H}; \\ \left(k\varphi^1 + \int_0^\infty g_1(s)\eta(s)ds, \varphi^2, b\psi^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi(s)ds, \psi^2, k_0\omega^1 + \int_0^\infty g_3(s)\mu(s)ds, \omega^2 \right) \in [\mathbb{H}^2]^3 \\ (\Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2) \in [\mathbb{H}_*^1]^3, \quad \Phi^2(L) = U, \quad \Psi^2(L) = V, \quad W^2(L) = W \\ (\eta_s, \xi_s, \mu_s) \in L_{g_{1,3}}^2 \times L_{g_{1,2}}^2 \times L_{g_{1,3}}^2, \quad \eta|_{s=0} = \xi|_{s=0} = \mu|_{s=0} = 0 \\ k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(L_0, s)ds = k^2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0) \\ b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s)ds = b^2\psi_x^2(L_0) \\ k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)_x(L_0, s)ds = \tilde{k}^2(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0) \end{array} \right\}.$$

Um cálculo simples, usando as hipóteses que assumimos sobre as funções g_i ($i \in \{1, 2, 3\}$), nos dá:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \mathcal{A} \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= -d_1 |U|^2 - d_2 |V|^2 - d_3 |W|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1'(s) |(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)|^2 ds dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2'(s) |\xi_x(s)|^2 ds dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3'(s) |(\mu_x - \ell\eta)(s)|^2 ds dx \leq 0 \end{aligned}$$

o que significa que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo.

Com a introdução desses espaços e dessas notações, o sistema (4.7)-(4.24) é equivalente a:

$$\mathcal{U}_t = \mathcal{A} \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0, \quad (4.26)$$

onde anotamos $\mathcal{U}(t) = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, \eta, \xi, \mu, u, v, w, U, V, W)^T(t)$

e $\mathcal{U}_0 = (\varphi_0^1, \varphi_0^2, \psi_0^1, \psi_0^2, \omega_0^1, \omega_0^2, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \psi_1^1, \psi_1^2, \omega_1^1, \omega_1^2, \eta_0, \xi_0, \mu_0, u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1)^T$.

Teorema 4.1. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$ em $\mathcal{H}$. Assim, para cada dado inicial $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$, o problema (4.26) possui uma única solução fraca $\mathcal{U} \in C^0([0, \infty[, \mathcal{H})$. Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, então $\mathcal{U}$ é uma solução forte de (4.26) tal que $\mathcal{U} \in C^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty[, D(\mathcal{A}))$.*

Demonstração: É fácil ver que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$. E, como $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo, para concluir que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, iremos mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, de onde a conclusão desejada segue do corolário 2.1.

Assim, mostraremos que, para cada $F = (f^1, f^2, \dots, f^{21})^T \in \mathcal{H}$, existe um único elemento $\mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, \eta, \xi, \mu, u, v, w, U, V, W)^T \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A} \mathcal{U} = F$. Em termos de componentes, a igualdade $\mathcal{A} \mathcal{U} = F$ é reescrita como:

$$\Phi^1 = f^1 \quad (4.27)$$

$$\Phi^2 = f^2 \quad (4.28)$$

$$\Psi^1 = f^3 \quad (4.29)$$

$$\Psi^2 = f^4 \quad (4.30)$$

$$W^1 = f^5 \quad (4.31)$$

$$W^2 = f^6 \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)_x + \frac{k_0\ell}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1) + \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)_x(s)ds + \\ + \frac{\ell}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(s)ds = f^7 \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \omega^2)_x - \frac{\tilde{k}_2}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2) = f^8 \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 - \frac{k}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)ds + \\ - \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)ds = f^9 \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) = f^{10} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{k_0}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)_x - \frac{k\ell}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) + \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)_x(s)ds + \\ - \frac{\ell}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)ds = f^{11} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\frac{\tilde{k}_2}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)_x - \frac{k_2\ell}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) = f^{12} \quad (4.38)$$

$$\Phi^1 - \eta_s = f^{13} \quad (4.39)$$

$$\Psi^1 - \xi_s = f^{14} \quad (4.40)$$

$$W^1 - \mu_s = f^{15} \quad (4.41)$$

$$U = f^{16} = f^2(L) \quad (4.42)$$

$$V = f^{17} = f^4(L) \quad (4.43)$$

$$W = f^{18} = f^6(L) \quad (4.44)$$

$$-\frac{d_1}{m_1}U - \frac{\gamma_1}{m_1}u - \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L) = f^{19} \quad (4.45)$$

$$-\frac{d_2}{m_2}V - \frac{\gamma_2}{m_2}v - \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(l) = f^{20} \quad (4.46)$$

$$-\frac{d_3}{m_3}W - \frac{\gamma_3}{m_3}w - \frac{\tilde{k}_2}{m_3}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L) = f^{21} \quad (4.47)$$

Com efeito, de (4.27), (4.29), (4.31) e (4.39)-(4.44), segue que:

$$(\eta_s, \xi_s, \mu_s) \in L_{g_{1,3}}^2 \times L_{g_{1,2}}^2 \times L_{g_{1,3}}^2$$

e ainda, que, para cada $(x, s) \in [0, L_0] \times [0, \infty[$, valem:

$$\eta(x, s) = sf^1(x) - \int_0^s f^{13}(x, \tau) d\tau$$

$$\xi(x, s) = sf^3(x) - \int_0^s f^{14}(x, \tau) d\tau$$

$$\mu(x, s) = sf^5(x) - \int_0^s f^{15}(x, \tau) d\tau$$

o que significa que η , ξ e μ estão univocamente determinados.

Além disso, usando (4.20) e (4.19), podemos escrever, para cada $T > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^T g_1(s) \int_0^{L_0} |\eta_x(s)|^2 dx ds &\leq \frac{2}{k_2^1} \int_0^T g_1(s) \int_0^{L_0} \eta_x(s) \overline{\eta_{sx}(s)} dx ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T g_1(s) \int_0^{L_0} |\eta_x(s)|^2 dx ds + \frac{2}{(k_2^1)^2} \int_0^T g_1(s) \int_0^{L_0} |\eta_{sx}(s)|^2 dx ds \end{aligned}$$

de onde segue que:

$$\|\eta\|_{L_{g_1}^2} \leq \frac{2}{k_2^1} \|\eta_s\|_{L_{g_1}^2}$$

e isto nos permite concluir $\eta \in L_{g_1}^2$.

Procedendo analogamente, obtemos:

$$(\eta, \xi, \mu) \in L_{g_{1,3}}^2 \times L_{g_{1,2}}^2 \times L_{g_{1,3}}^2.$$

Assim, resta a tarefa de estabelecer a existência e unicidade de solução para o sistema (P) dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)_x + \frac{k_0\ell}{k} (\omega_x^1 - \ell\varphi^1) = \\
\quad = \frac{1}{k} \left[\rho_1^1 f^7 - \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)_x(s)ds - \ell \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(s)ds \right] & \text{em }]0, L_0[\\
(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)_x + \frac{\tilde{k}_2\ell}{k_2} (\omega_x^2 - \ell\varphi^2) = \frac{\rho_1^2}{k_2} f^8 & \text{em }]L_0, L[\\
\psi_{xx}^1 - \frac{k}{b} (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) = \frac{1}{b} \left[\rho_2^1 f^9 + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)ds - \int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)ds \right] & \text{em }]0, L_0[\\
\psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{b_2} (\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) = \frac{\rho_2^2}{b_2} f^{10} & \text{em }]L_0, L[\\
(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)_x - \frac{k\ell}{k_0} (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) = \\
\quad = \frac{1}{k_0} \left[\rho_1^1 f^{11} + \ell \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)ds - \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)_x(s)ds \right] & \text{em }]0, L_0[\\
(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)_x - \frac{k_2\ell}{\tilde{k}_2} (\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) = \frac{\rho_1^2}{\tilde{k}_2} f^{12} & \text{em }]L_0, L[\\
\varphi^1(0) = \psi^1(0) = \omega^1(0) = 0, \quad \varphi^1(L_0) = \varphi^2(L_0), \quad \psi^1(L_0) = \psi^2(L_0), \quad \omega^1(L_0) = \omega^2(L_0) \\
\gamma_1\varphi^2(L) + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L) = -m_1 f^{19} - d_1 f^{16} =: G_1 \\
\gamma_2\psi^2(L) + b_2\psi_x^2(L) = -m_2 f^{20} - d_2 f^{17} =: G_2 \\
\gamma_3\omega^2(L) + \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L) = -m_3 f^{21} - d_3 f^{18} =: G_3 \\
k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0) = - \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(L_0, s)ds \\
b\psi_x^1(L_0) - b_2\psi_x^2(L_0) = - \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s)ds \\
k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0) - \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0) = - \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(L_0, s)ds
\end{array} \right.$$

Para isto, consideremos o funcional linear $T : X \rightarrow \mathbb{C}$ definido em cada $(h^1, \dots, h^6) \in X := [\mathbb{H}_*^1]^3$ por:

$$\begin{aligned}
T(h^1, \dots, h^6) := & - \int_0^{L_0} \left(\rho_1^1 \overline{f^7} h^1 + \rho_2^1 \overline{f^9} h^3 + \rho_1^1 \overline{f^{11}} h^5 \right) dx - \int_{L_0}^L \left(\rho_1^2 \overline{f^8} h^2 + \rho_2^2 \overline{f^{10}} h^4 + \rho_1^2 \overline{f^{12}} h^6 \right) dx + \\
& - \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s) \overline{(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)} (h_x^1 + h^3 + \ell h^5) ds dx - \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi_x(s)} h_x^3 ds dx + \\
& - \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s) \overline{(\mu_x - \ell\eta)(s)} (h_x^5 - \ell h^1) ds dx + \overline{G_1} h^2(L) + \overline{G_2} h^4(L) + \overline{G_3} h^6(L)
\end{aligned}$$

onde $X := [\mathbb{H}_*^1]^3$ é um espaço de Hilbert, quando munido do produto interno dado por:

$$\begin{aligned} \langle (h^1, h^2, h^3, h^4, h^5, h^6), (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2) \rangle_X := & \gamma_1 \overline{\varphi^2(L)} h^2(L) + \gamma_2 \overline{\psi^2(L)} h^4(L) + \gamma_3 \overline{\omega^2(L)} h^6(L) + \\ & + \int_0^{L_0} \left[k(\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1})(h_x^1 + h^3 + \ell h^5) + b \overline{\psi_x^1} h_x^3 + k_0(\overline{\omega_1 - \ell \varphi^1})(h_x^5 - \ell h^1) \right] dx + \\ & + \int_{L_0}^L \left[k_2(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2})(h_x^2 + h^4 + \ell h^6) + b_2 \overline{\psi_x^2} h_x^4 + k_2(\overline{\omega_2 - \ell \varphi^2})(h_x^6 - \ell h^2) \right] dx. \end{aligned}$$

É fácil ver que $T \in X'$; de onde, pelo *Teorema da Representação de Riesz*, segue que existe uma única solução fraca para o sistema (P). Logo, $\mathcal{A}$ é uma bijeção de $D(\mathcal{A})$ sobre o espaço $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é fechado, segue do Teorema do Gráfico Fechado que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. ■

4.3 Estabilidade Exponencial

Nesta seção, vamos mostrar que se as funções g_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) verificam as hipóteses (4.19)-(4.21), então o semigrupo correspondente é exponencialmente estável. O argumento principal que utilizaremos é o *Teorema de Prüss* (teorema 2.6). Em vista disso, o próximo lema será dedicado a mostrar que o eixo imaginário está contido no conjunto resolvente do gerador $\mathcal{A}$.

Lema 4.1. *Sob as hipóteses (4.19)-(4.21), o operador $\mathcal{A}$ satisfaz*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}). \quad (4.48)$$

Demonstração: No teorema 4.1, já mostramos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Além disso, note que não é possível concluir que o espectro $\sigma(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ é formado apenas por autovalores, pois $\mathcal{A}^{-1}$ não é compacto. Deste modo, se (4.48) não ocorre, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\lambda_0|$, tal que $\{i\lambda; |\lambda| < |\lambda_0|\} \subset \rho(\mathcal{A})$ e $\sup \{\|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\|; |\lambda| < |\lambda_0|\} = \infty$.

Em vista disso, é possível mostrar que existem sequências $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ e $(\mathcal{U}_n)_n \subset D(\mathcal{A})$, do tipo $\mathcal{U}_n := (\varphi_n^1, \varphi_n^2, \psi_n^1, \psi_n^2, \omega_n^1, \omega_n^2, \Phi_n^1, \Phi_n^2, \Psi_n^1, \Psi_n^2, W_n^1, W_n^2, \eta_n, \xi_n, \mu_n, u_n, v_n, w_n, U_n, V_n, W_n)^T$, tais que:

$$\lambda_n \longrightarrow |\lambda_0|, \quad (4.49)$$

$$\|\mathcal{U}_n\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4.50)$$

$$(i\lambda_n - \mathcal{A})\mathcal{U}_n = F_n = (f_n^1, \dots, f_n^{14}) \longrightarrow 0 \quad \text{em } \mathcal{H}. \quad (4.51)$$

Mas, de (4.51) segue que:

$$i\lambda_n \varphi_n^1 - \Phi_n^1 = f_n^1 \text{ em } H^1(0, L_0) \quad (4.52)$$

$$i\lambda_n \varphi_n^2 - \Phi_n^2 = f_n^2 \text{ em } H^1(L_0, L) \quad (4.53)$$

$$i\lambda_n \psi_n^1 - \Psi_n^1 = f_n^3 \text{ em } H^1(0, L_0) \quad (4.54)$$

$$i\lambda_n \psi_n^2 - \Psi_n^2 = f_n^4 \text{ em } H^1(L_0, L) \quad (4.55)$$

$$i\lambda_n \omega_n^1 - W_n^1 = f_n^5 \text{ em } H^1(0, L_0) \quad (4.56)$$

$$i\lambda_n \omega_n^2 - W_n^2 = f_n^6 \text{ em } H^1(L_0, L) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} i\lambda_n \Phi_n^1 - \frac{k}{\rho_1^1}(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1 + \ell\omega_n^1)_x - \frac{k_0\ell}{\rho_1^1}(\omega_{n,x}^1 - \ell\varphi_n^1) + \\ - \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{n,x} + \xi_n + \ell\mu_n)_x(s)ds - \frac{\ell}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_3(s)(\mu_{n,x} - \ell\eta_n)(s)ds = f_n^7 \text{ em } L^2(0, L_0) \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$i\lambda_n \Phi_n^2 - \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2 + \ell\omega_n^2)_x - \frac{\tilde{k}_2\ell}{\rho_1^2}(\omega_{n,x}^2 - \ell\varphi_n^2) = f_n^8 \text{ em } L^2(L_0, L) \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} i\lambda_n \Psi_n^1 - \frac{b}{\rho_2^1}\psi_{n,xx}^1 + \frac{k}{\rho_2^1}(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1 + \ell\omega_n^1) + \\ - \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_2(s)\xi_{n,xx}(s)ds + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{n,x} + \xi_n + \ell\mu_n)(s)ds = f_n^9 \text{ em } L^2(0, L_0) \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$i\lambda_n \Psi_n^2 - \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{n,xx}^2 + \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2 + \ell\omega_n^2) = f_n^{10} \text{ em } L^2(L_0, L) \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} i\lambda_n W_n^1 - \frac{k_0}{\rho_1^1}(\omega_{n,x}^1 - \ell\varphi_n^1)_x + \frac{k\ell}{\rho_1^1}(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1 + \ell\omega_n^1) + \\ - \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_3(s)(\mu_{n,x} - \ell\eta_n)_x(s)ds + \frac{\ell}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{n,x} + \xi_n + \ell\mu_n)(s)ds = f_n^{11} \text{ em } L^2(0, L_0) \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$i\lambda_n W_n^2 - \frac{\tilde{k}_2}{\rho_1^2}(\omega_{n,x}^2 - \ell\varphi_n^2)_x + \frac{k_2\ell}{\rho_1^2}(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2 + \ell\omega_n^2) = f_n^{12} \text{ em } L^2(L_0, L) \quad (4.63)$$

$$i\lambda_n u_n - U_n = f_n^{16} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.64)$$

$$i\lambda_n v_n - V_n = f_n^{17} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.65)$$

$$i\lambda_n w_n - W_n = f_n^{18} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.66)$$

$$i\lambda_n U_n + \frac{d_1}{m_1}U_n + \frac{\gamma_1}{m_1}u_n + \frac{k_2}{m_1}(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2 + \ell\omega_n^2)(L) = f_n^{19} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.67)$$

$$i\lambda_n V_n + \frac{d_2}{m_2}V_n + \frac{\gamma_2}{m_2}v_n + \frac{b_2}{m_2}\psi_{n,x}^2(L) = f_n^{20} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.68)$$

$$i\lambda_n W_n + \frac{d_3}{m_3}W_n + \frac{\gamma_3}{m_3}w_n + \frac{\tilde{k}_2}{m_3}(\omega_{n,x}^2 - \ell\varphi_n^2)(L) = f_n^{21} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.69)$$

Tomando o produto interno de $\mathcal{H}$ por $\mathcal{U}_n$ em ambos os membros de (4.51), obtemos:

$$\begin{aligned} d_1 |U_n|^2 + d_2 |V_n|^2 + d_3 |W_n|^2 - \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g'_1(s) |(\eta_{n,x} + \xi_n + \ell\mu_n)(s)|^2 ds dx + \\ - \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g'_2(s) |\xi_{n,x}(s)|^2 ds dx - \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g'_3(s) |(\mu_{n,x} - \ell\eta_n)(s)|^2 ds dx \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Disto e de (4.20) segue que:

$$\left[\int_0^\infty g_1(s) \|(\eta_{n,x} + \xi_n + \mu_n)(s)\|_{L^2(0,L_0)}^2 ds + \|\xi_n\|_{L_{g_2}^2}^2 + \int_0^\infty g_3(s) \|(\mu_{n,x} - \ell\eta_n)(s)\|_{L^2(0,L_0)}^2 ds \right] \longrightarrow 0. \quad (4.70)$$

Agora, o passo seguinte é usar (4.49)-(4.57) para concluirmos que existem $\Phi^1, \Psi^1, W^1 \in L^2(0, L_0)$, $\Phi^2, \Psi^2, W^2 \in L^2(L_0, L)$ e uma subsequência ainda denotada por $(\mathcal{U}_n)_n$, tais que:

$$\begin{aligned} \Phi_n^1 &\longrightarrow \Phi^1, & \Psi_n^1 &\longrightarrow \Psi^1, & W_n^1 &\longrightarrow W^1 \quad \text{em } L^2(0, L_0), \\ \Phi_n^2 &\longrightarrow \Phi^2, & \Psi_n^2 &\longrightarrow \Psi^2, & W_n^2 &\longrightarrow W^2 \quad \text{em } L^2(L_0, L). \end{aligned}$$

Além disso, usando (4.50), (4.51), e (4.58)-(4.63), concluimos que existem $\chi_1, \chi_3, \chi_5 \in L^2(0, L_0)$, $\chi_2, \chi_4, \chi_6 \in L^2(L_0, L)$ e uma subsequência que insistiremos em denotar por $(\mathcal{U}_n)_n$ tais que:

$$\begin{aligned} k(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1 + \ell\omega_n^1) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{n,x} + \xi_n + \ell\mu_n)(s)ds &\longrightarrow \chi_1 \quad \text{em } L^2(0, L_0), \\ k_2(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2 + \ell\omega_n^2) &\longrightarrow \chi_2 \quad \text{em } L^2(L_0, L), \\ b\psi_{n,x}^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_{n,x}(s)ds &\longrightarrow \chi_3 \quad \text{em } L^2(0, L_0), \\ b\psi_{n,x}^2 &\longrightarrow \chi_4 \quad \text{em } L^2(L_0, L), \\ k_0(\omega_{n,x}^1 - \ell\varphi_n^1) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_{n,x} - \ell\eta_n)(s)ds &\longrightarrow \chi_5 \quad \text{em } L^2(0, L_0), \\ \tilde{k}_2(\omega_{n,x}^2 - \ell\varphi_n^2) &\longrightarrow \chi_6 \quad \text{em } L^2(0, L_0). \end{aligned}$$

Destas convergências, usando (4.49) e (4.58)-(4.63), não é difícil ver que:

$$\begin{aligned} k(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1 + \ell\omega_n^1)_x + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{n,x} + \xi_n + \ell\mu_n)_x(s)ds &\longrightarrow (\chi_1)_x = (i|\lambda_0|\rho_1^1\Phi^1 - \ell\chi_5) \quad \text{em } L^2(0, L_0), \\ k_2(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2 + \ell\omega_n^2)_x &\longrightarrow (\chi_2)_x = (i|\lambda_0|\rho_1^2\Phi^2 - \ell\chi_6) \quad \text{em } L^2(L_0, L), \\ b\psi_{n,x}^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_{n,x}(s)ds &\longrightarrow (\chi_3)_x = (i|\lambda_0|\rho_2^1\Psi^1 + \chi_1) \quad \text{em } L^2(0, L_0), \\ b\psi_{n,x}^2 &\longrightarrow (\chi_4)_x = (i|\lambda_0|\rho_2^2\Psi^2 + \chi_2) \quad \text{em } L^2(L_0, L), \\ k_0(\omega_{n,x}^1 - \ell\varphi_n^1)_x + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_{n,x} - \ell\eta_n)_x(s)ds &\longrightarrow (\chi_5)_x = (i|\lambda_0|\rho_1^1W^1 + \ell\chi_1) \quad \text{em } L^2(0, L_0), \\ \tilde{k}_2(\omega_{n,x}^2 - \ell\varphi_n^2)_x &\longrightarrow (\chi_6)_x = (i|\lambda_0|\rho_1^2W^2 + \ell\chi_2) \quad \text{em } L^2(0, L_0). \end{aligned}$$

Mas, usando (4.70), (4.52)-(4.57) e as convergências acima, encontramos:

$$\begin{aligned}\Phi_{n,x}^1 &\longrightarrow \Phi_x^1, & \Psi_{n,x}^1 &\longrightarrow \Psi_x^1, & W_{n,x}^1 &\longrightarrow W_x^1 & \text{em } L^2(0, L_0), \\ \Phi_{n,x}^2 &\longrightarrow \Phi_x^2, & \Psi_{n,x}^2 &\longrightarrow \Psi_x^2, & W_{n,x}^2 &\longrightarrow W_x^2 & \text{em } L^2(L_0, L),\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}\Phi_x^1 &= \left(\frac{i|\lambda_0|}{k} \chi_1 - \Psi^1 - \ell W^1 \right), & \Psi_x^1 &= \frac{i|\lambda_0|}{b} \chi_3, & W_x^1 &= \left(\frac{i|\lambda_0|}{k_0} \chi_5 + \ell \Phi^1 \right) & \text{em } L^2(0, L_0), \\ \Phi_x^2 &= \left(\frac{i|\lambda_0|}{k_2} \chi_2 - \Psi^2 - \ell W^2 \right), & \Psi_x^2 &= \frac{i|\lambda_0|}{b_2} \chi_4, & W_x^2 &= \left(\frac{i|\lambda_0|}{\tilde{k}_2} \chi_6 + \ell \Phi^2 \right) & \text{em } L^2(L_0, L),\end{aligned}$$

de onde segue que:

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \frac{k}{i|\lambda_0|} (\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell W^1), & \chi_3 &= \frac{b}{i|\lambda_0|} \Psi_x^1, & \chi_5 &= \frac{k_0}{i|\lambda_0|} (W_x^1 - \ell \Phi^1) & \text{em } L^2(0, L_0), \\ \chi_2 &= \frac{k_2}{i|\lambda_0|} (\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2), & \chi_4 &= \frac{b_2}{i|\lambda_0|} \Psi_x^2, & \chi_6 &= \frac{\tilde{k}_2}{i|\lambda_0|} (W_x^2 - \ell \Phi^2) & \text{em } L^2(L_0, L).\end{aligned}$$

Isto nos permite concluir, por um lado, que:

$$\begin{aligned}(\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell W^1)_x + \frac{k_0 \ell}{k} (W_x^1 - \ell \Phi^1) + \frac{\rho_1^1 |\lambda_0|^2}{k} \Phi^1 &= 0 & \text{em } L^2(0, L_0), \\ (\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2)_x + \frac{\tilde{k}_2 \ell}{k_2} (W_x^2 - \ell \Phi^2) + \frac{\rho_1^2 |\lambda_0|^2}{k_2} \Phi^2 &= 0 & \text{em } L^2(L_0, L), \\ \Psi_{xx}^1 - \frac{k}{b} (\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell W^1) + \frac{\rho_2^1 |\lambda_0|^2}{b} \Psi^1 &= 0 & \text{em } L^2(0, L_0), \\ \Psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{b_2} (\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2) + \frac{\rho_2^2 |\lambda_0|^2}{b_2} \Psi^2 &= 0 & \text{em } L^2(L_0, L), \\ (W_x^1 - \ell \Phi^1)_x - \frac{k \ell}{k_0} (\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell W^1) + \frac{\rho_1^1 |\lambda_0|^2}{k_0} W^1 &= 0 & \text{em } L^2(0, L_0), \\ (W_x^2 - \ell \Phi^2)_x - \frac{k_2 \ell}{\tilde{k}_2} (\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2) + \frac{\rho_1^2 |\lambda_0|^2}{\tilde{k}_2} W^2 &= 0 & \text{em } L^2(L_0, L).\end{aligned}$$

Por outro lado, temos também que:

$$\begin{aligned}\Phi_n^1 &\longrightarrow \Phi^1, & \Psi_n^1 &\longrightarrow \Psi^1, & W_n^1 &\longrightarrow W^1 & \text{em } H^1(0, L_0), \\ \Phi_n^2 &\longrightarrow \Phi^2, & \Psi_n^2 &\longrightarrow \Psi^2, & W_n^2 &\longrightarrow W^2 & \text{em } H^1(L_0, L),\end{aligned}$$

de onde, lembrando que $\mathcal{U}_n \in D(\mathcal{A})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que:

$$\begin{aligned}\Phi^1(0) &= \Psi^1(0) = W^1(0) = 0, & \Phi^1(L_0) &= \Phi^2(L_0), & \Psi^1(L_0) &= \Psi^2(L_0), & W^1(L_0) &= W^2(L_0), \\ U &:= \lim_n U_n = \lim_n \Phi_n^2(L) = \Phi^2(L), & V &:= \lim_n V_n = \Psi^2(L), & W &:= \lim_n W_n = W^2(L), & & (4.71)\end{aligned}$$

e, indo com isto em (4.64)-(4.66), encontramos:

$$u := \lim_n u_n = \frac{1}{i|\lambda_0|} \Phi^2(L), \quad v := \lim_n v_n = \frac{1}{i|\lambda_0|} \Psi^2(L), \quad w := \lim_n w_n = \frac{1}{i|\lambda_0|} W^2(L). \quad (4.72)$$

Além disso, é fácil ver que:

$$\begin{aligned} k(\varphi_{n,x}^1 + \psi_n^1 + \ell\omega_n^1) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_{n,x} + \xi_n + \ell\mu_n)(s)ds &\longrightarrow \frac{k}{i|\lambda_0|}(\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell W^1) \text{ em } H^1(0, L_0), \\ k_2(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2 + \ell\omega_n^2) &\longrightarrow \frac{k_2}{i|\lambda_0|}(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2) \text{ em } H^1(L_0, L), \\ b\psi_{n,x}^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_{n,x}(s)ds &\longrightarrow \frac{b}{i|\lambda_0|}\Psi_x^1 \text{ em } H^1(0, L_0), \\ b_2\psi_{n,x}^2 &\longrightarrow \frac{b_2}{i|\lambda_0|}\Psi_x^2 \text{ em } H^1(L_0, L), \\ k_0(\omega_{n,x}^1 - \ell\varphi_n^1) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_{n,x} - \ell\eta_n)(s)ds &\longrightarrow \frac{k_0}{i|\lambda_0|}(W_x^1 - \ell\Phi^1) \text{ em } H^1(0, L_0), \\ k_2(\omega_{n,x}^2 - \ell\varphi_n^2) &\longrightarrow \frac{k_2}{i|\lambda_0|}(W_x^2 - \ell\Phi^2) \text{ em } H^1(0, L_0), \end{aligned}$$

de onde, lembrando que $\mathcal{U}_n \in D(\mathcal{A})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que:

$$\begin{aligned} k(\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell W^1)(L_0) &= k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2)(L_0), \\ b\Psi_x^1(L_0) &= b_2\Psi_x^2(L_0), \\ k_0(W_x^1 - \ell\Phi^1)(L_0) &= \tilde{k}_2(W_x^2 - \ell\Phi^2)(L_0), \\ \frac{k_2}{i|\lambda_0|}(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2)(L) &= \lim_n [k_2(\varphi_{n,x}^2 + \psi_n^2 + \ell\omega_n^2)(L)], \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\frac{b_2}{i|\lambda_0|}\Psi_x^2(L) = \lim_n [b_2\psi_{n,x}^2(L)], \quad (4.74)$$

$$\frac{\tilde{k}_2}{i|\lambda_0|}(W_x^2 - \ell\Phi^2)(L) = \lim_n [\tilde{k}_2(\omega_{n,x}^2 - \ell\varphi_n^2)(L)], \quad (4.75)$$

e, finalmente, indo com (4.73)-(4.75), (4.71) e (4.72) em (4.67)-(4.69), encontramos:

$$\begin{aligned} k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2)(L) + (\gamma_1 + i|\lambda_0|d_1 - |\lambda_0|^2m_1)\Phi^2(L) &= 0, \\ b_2\Psi_x^2(L) + (\gamma_2 + i|\lambda_0|d_2 - |\lambda_0|^2m_2)\Psi^2(L) &= 0, \\ \tilde{k}_2(W_x^2 - \ell\Phi^2)(L) + (\gamma_3 + i|\lambda_0|d_3 - |\lambda_0|^2m_3)W^2(L) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a sêxtupla $(\Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2)$ é uma solução do seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
(\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell W^1)_x + \frac{k_0 \ell}{k} (W_x^1 - \ell \Phi^1) + \frac{\rho_1^1 |\lambda_0|^2}{k} \Phi^1 = 0 & \text{em } L^2(0, L_0) \\
(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2)_x + \frac{\tilde{k}_2 \ell}{k_2} (W_x^2 - \ell \Phi^2) + \frac{\rho_1^2 |\lambda_0|^2}{k_2} \Phi^2 = 0 & \text{em } L^2(L_0, L) \\
\Phi_{xx}^1 - \frac{k}{b} (\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell W^1) + \frac{\rho_2^1 |\lambda_0|^2}{b} \Psi^1 = 0 & \text{em } L^2(0, L_0) \\
\Phi_{xx}^2 - \frac{k_2}{b_2} (\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2) + \frac{\rho_2^2 |\lambda_0|^2}{b_2} \Psi^2 = 0 & \text{em } L^2(L_0, L) \\
(W_x^1 - \ell \Phi^1)_x - \frac{k \ell}{k_0} (\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell W^1) + \frac{\rho_1^1 |\lambda_0|^2}{k_0} W^1 = 0 & \text{em } L^2(0, L_0) \\
(W_x^2 - \ell \Phi^2)_x - \frac{k_2 \ell}{\tilde{k}_2} (\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2) + \frac{\rho_1^2 |\lambda_0|^2}{\tilde{k}_2} W^2 = 0 & \text{em } L^2(L_0, L) \\
\Phi^1(0) = \Psi^1(0) = W^1(0) = 0, \quad \Phi^1(L_0) = \Phi^2(L_0), \quad \Psi^1(L_0) = \Psi^2(L_0), \quad W^1(L_0) = W^2(L_0) \\
k(\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell W^1)(L_0) = k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2)(L_0) \\
b\Psi_x^1(L_0) = b_2\Psi_x^2(L_0), \quad k_0(W_x^1 - \ell \Phi^1)(L_0) = \tilde{k}_2(W_x^2 - \ell \Phi^2)(L_0) \\
k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell W^2)(L) + (\gamma_1 + i|\lambda_0|d_1 - |\lambda_0|^2 m_1)\Phi^2(L) = 0 \\
b_2\Psi_x^2(L) + (\gamma_2 + i|\lambda_0|d_2 - |\lambda_0|^2 m_2)\Psi^2(L) = 0 \\
\tilde{k}_2(W_x^2 - \ell \Phi^2)(L) + (\gamma_3 + i|\lambda_0|d_3 - |\lambda_0|^2 m_3)W^2(L) = 0.
\end{array} \right.$$

Procedendo de modo análogo ao que fizemos no final da prova do teorema 4.1, não é difícil estabelecer a boa-colocação desse sistema. Assim, o sistema acima possui uma única solução fraca, a saber, a solução nula; de onde concluímos que:

$$\mathcal{U}_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } \mathcal{H}$$

e isto contradiz (4.50), completando a prova. ■

O próximo passo é mostrar que o operador resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Para isto, reescrevemos a equação resolvente:

$$(i\lambda I - \mathcal{A})\mathcal{U} = F \tag{4.76}$$

(onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \in D(\mathcal{A})$ e $F = (f^1, f^2, \dots, f^{21})^T \in \mathcal{H}$) em termos de componentes, o que nos dá:

$$i\lambda\varphi^1 - \Phi^1 = f^1 \text{ em } H^1(0, L_0) \quad (4.77)$$

$$i\lambda\varphi^2 - \Phi^2 = f^2 \text{ em } H^1(L_0, L) \quad (4.78)$$

$$i\lambda\psi^1 - \Psi^1 = f^3 \text{ em } H^1(0, L_0) \quad (4.79)$$

$$i\lambda\psi^2 - \Psi^2 = f^4 \text{ em } H^1(L_0, L) \quad (4.80)$$

$$i\lambda\omega^1 - W^1 = f^5 \text{ em } H^1(0, L_0) \quad (4.81)$$

$$i\lambda\omega^2 - W^2 = f^6 \text{ em } H^1(L_0, L) \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} i\lambda\Phi^1 - \frac{k}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)_x - \frac{k_0\ell}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1) + \\ - \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)_x(s)ds - \frac{\ell}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(s)ds = f^7 \text{ em } L^2(0, L_0) \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$i\lambda\Phi^2 - \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)_x - \frac{\tilde{k}_2\ell}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2) = f^8 \text{ em } L^2(L_0, L) \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} i\lambda\Psi^1 - \frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 + \frac{k}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) + \\ - \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)ds + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)ds = f^9 \text{ em } L^2(0, L_0) \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$i\lambda\Psi^2 - \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 + \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) = f^{10} \text{ em } L^2(L_0, L) \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} i\lambda W^1 - \frac{k_0}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)_x + \frac{k\ell}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) + \\ - \frac{1}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)_x(s)ds + \frac{\ell}{\rho_1^1} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)ds = f^{11} \text{ em } L^2(0, L_0) \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$i\lambda W^2 - \frac{\tilde{k}_2}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)_x + \frac{k_2\ell}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) = f^{12} \text{ em } L^2(L_0, L) \quad (4.88)$$

$$i\lambda\eta - \Phi^1 + \eta_s = f^{13} \text{ em } L_{g1,3}^2 \quad (4.89)$$

$$i\lambda\xi - \Psi^1 + \xi_s = f^{14} \text{ em } L_{g1,2}^2 \quad (4.90)$$

$$i\lambda\mu - W^1 + \mu_s = f^{15} \text{ em } L_{g1,3}^2 \quad (4.91)$$

$$i\lambda u - U = f^{16} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.92)$$

$$i\lambda v - V = f^{17} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.93)$$

$$i\lambda w - W = f^{18} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.94)$$

$$i\lambda U + \frac{d_1}{m_1}U + \frac{\gamma_1}{m_1}u + \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L) = f^{19} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.95)$$

$$i\lambda V + \frac{d_2}{m_2}V + \frac{\gamma_2}{m_2}v + \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(L) = f^{20} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.96)$$

$$i\lambda W + \frac{d_3}{m_3}W + \frac{\gamma_3}{m_3}w + \frac{\tilde{k}_2}{m_3}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L) = f^{21} \text{ em } \mathbb{C} \quad (4.97)$$

Note que as propriedades dissipativas do operador $\mathcal{A}$ implicam na existência de uma constante positiva C tal que:

$$\begin{aligned} d_1 |U|^2 + d_2 |V|^2 + d_3 |W|^2 + \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s) |(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)|^2 ds dx + \\ + \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) |\xi_x(s)|^2 ds dx + \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s) |(\mu_x - \ell\eta)(s)|^2 ds dx \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Doravante, neste trabalho, C irá denotar uma constante positiva, que pode ser diferente em diferentes lugares. Anotemos também:

$$\beta_1 := \int_0^\infty g_1(s) ds, \quad \beta_2 := \int_0^\infty g_2(s) ds \quad \text{e} \quad \beta_3 := \int_0^\infty g_3(s) ds. \quad (4.99)$$

Lema 4.2. *Sob as notações acima, para cada $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que:*

$$\begin{aligned} \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\Psi^1|^2 dx \leq C \left[\|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0,L_0)} + \|\psi_x^1\|_{L^2(0,L_0)} \right] \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\ + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(L_0, s) ds \right|^2. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (4.85) por $\int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi(s)} ds$, e usando (4.90), obtemos:

$$\begin{aligned} \beta_2 \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\Psi^1|^2 dx = k \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi(s)} (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) ds dx + b \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi_x(s)} \psi_x^1 ds dx + \\ + \int_0^{L_0} \left(\int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi + \ell\mu)(s) ds \right) \left(\int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi(s)} ds \right) dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi_s(s)} \Psi^1 ds dx + \\ + \int_0^{L_0} \left| \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(s) ds \right|^2 dx - \rho_2^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) \overline{f^{14}(s)} \Psi^1 ds dx - \rho_2^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi(s)} f^9 ds dx + \\ - \underbrace{\left[b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(L_0, s) ds \right] \left[\int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi(L_0, s)} ds \right]}_{=: P_1}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Mas, usando (4.20) e (4.98), encontramos:

$$\operatorname{Re} \left[\rho_2^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi_s(s)} \Psi^1 ds dx \right] \leq \frac{\beta_2 \rho_2^1}{2} \int_0^{L_0} |\Psi^1|^2 dx + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.101)$$

Além disso, usando (4.98), concluímos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que:

$$|P_1| \leq \varepsilon \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s)ds \right|^2 + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.102)$$

e também:

$$\operatorname{Re} \left[k \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi(s)} (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) ds dx \right] \leq C \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \quad (4.103)$$

$$\operatorname{Re} \left[b \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi_x(s)} \psi_x^1 ds dx \right] \leq C \|\psi_x^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \quad (4.104)$$

e

$$\operatorname{Re} \left[\int_0^{L_0} \left(\int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi + \ell\mu)(s) ds \right) \left(\int_0^\infty g_2(s) \overline{\xi(s)} ds \right) dx \right] \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.105)$$

Tomando a parte real em (4.100) e usando (4.101)-(4.105), obtemos a conclusão desejada. $\blacksquare$

Lema 4.3. Para cada $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}^*$, vale:

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \int_0^{L_0} |\Phi^1|^2 dx &\leq C \left[\|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0, L_0)} + \|\psi_x^1\|_{L^2(0, L_0)} + \|\omega_x^1 - \ell\varphi^1\|_{L^2(0, L_0)} \right] \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\ &+ C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) + \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi + \ell\mu)(L_0, s) ds \right|^2 + \\ &+ \varepsilon \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(L_0, s) ds \right|^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^2} \left| k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(0) + \int_0^\infty g_3(s) (\mu_x - \ell\eta)(0, s) ds \right|^2. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (4.83) por $\int_0^\infty g_1(s) \left(\overline{\eta(s)} + \int_0^x \overline{(\xi + \ell\mu)(y, s)} dy \right) ds$ e usando (4.89)-(4.91), obtemos:

$$\begin{aligned} \beta_1 \rho_1^1 \int_0^{L_0} |\Phi^1|^2 dx &= \rho_1^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s) \Phi^1 \frac{d}{ds} \left(\overline{\eta(s)} + \int_0^x \overline{(\xi + \ell\mu)(y, s)} dy \right) ds dx + \\ &- \beta_1 \rho_1^1 \int_0^{L_0} \int_0^x \Phi^1 \overline{(\Psi^1 + \ell W^1)(y)} dy dx + \int_0^{L_0} \left| \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi + \ell\mu)(s) ds \right|^2 dx + \\ &+ k \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s) (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) \overline{(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)} ds dx + \\ &- \ell \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s) \left(k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1) + \int_0^\infty g_3(s) (\mu_x - \ell\eta)(s) ds \right) \left(\overline{\eta(s)} + \int_0^x \overline{(\xi + \ell\mu)(y, s)} dy \right) ds dx + \\ &- \rho_1^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s) f^7 \left(\overline{\eta(s)} + \int_0^x \overline{(\xi + \ell\mu)(y, s)} dy \right) ds dx + \\ &- \rho_1^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s) \Phi^1 \left(\overline{f^{13}(s)} + \int_0^x \overline{(f^{14} + \ell f^{15})(y, s)} dy \right) ds dx + P_2 \end{aligned} \quad (4.106)$$

onde

$$P_2 := - \left[k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(L_0, s) ds \right] \int_0^\infty g_1(s) \left(\overline{\eta(L_0, s)} + \int_0^{L_0} \overline{(\xi + \ell\mu)(y, s)} dy \right) ds.$$

Mas, usando (4.98), obtemos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que:

$$|P_2| \leq \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(L_0, s) ds \right|^2 + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad (4.107)$$

e também:

$$\operatorname{Re} \left[\rho_1^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s) \Phi^1 \frac{d}{ds} \left(\overline{\eta(s)} + \int_0^x \overline{(\xi + \ell\mu)(y, s)} dy \right) ds dx \right] \leq \frac{\beta_1 \rho_1^1}{4} \|\Phi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.108)$$

$$\operatorname{Re} \left[k \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s) (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) \overline{(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)} ds dx \right] \leq C \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \quad (4.109)$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[-\ell \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s) \left(k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(s) ds dx \right) \left(\overline{\eta(s)} + \int_0^x \overline{(\xi + \ell\mu)(y, s)} dy \right) ds dx \right] \leq \\ \leq C \|\omega_x^1 - \ell\varphi^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Além disso, usando (4.87) não é difícil ver que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[-\beta_1 \rho_1^1 \int_0^{L_0} \int_0^x \Phi^1 \overline{(\Psi^1 + \ell W^1)(y)} dy dx \right] \leq \frac{\beta_1 \rho_1^1}{4} \|\Phi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + C \|\Psi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \\ + \frac{C}{|\lambda|^2} [\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2] + \frac{C}{|\lambda|^2} \left| k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(0) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)_x(0, s) ds \right|^2. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Finalmente, tomando a parte real em (4.106), e usando (4.107)-(4.111) e o Lema 4.2, obtemos a conclusão desejada. ■

Lema 4.4. Para cada $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}^*$, vale:

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx \leq C \left[\|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0, L_0)} + \|\psi_x^1\|_{L^2(0, L_0)} + \|\omega_x^1 - \ell\varphi^1\|_{L^2(0, L_0)} \right] \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\ + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(L_0, s) ds \right|^2 + \\ + \varepsilon \left| k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(L_0, s) ds \right|^2 + \\ + \varepsilon \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s) ds \right|^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (4.87) por $\int_0^\infty g_3(s) \left(\overline{\mu(s)} - \ell \int_0^x \overline{\eta(y, s)} dy \right) ds$, e usando (4.89) e (4.91), obtemos:

$$\begin{aligned}
\beta_3 \rho_1^1 \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx &= \rho_1^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s) W^1 \frac{d}{ds} \left(\overline{\mu(s)} - \ell \int_0^x \overline{\eta(y, s)} dy \right) ds dx + \\
&+ \beta_3 \ell \rho_1^1 \int_0^{L_0} W^1 \int_0^x \overline{\Phi^1(y)} dy dx + \int_0^{L_0} \left| \int_0^\infty g_3(s) (\mu_x - \ell \eta)(s) ds \right|^2 dx + \\
&+ k_0 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s) (\omega_x^1 - \ell \varphi^1) \overline{(\mu_x - \ell \eta)(s)} ds dx + \\
&+ \ell \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s) \left(k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) + \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi + \ell \mu)(s) ds \right) \left(\overline{\mu(s)} - \ell \int_0^x \overline{\eta(y, s)} dy \right) ds dx + \\
&- \rho_1^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s) W^1 \left(\overline{f^{15}(s)} - \ell \int_0^x \overline{f^{13}(y, s)} dy \right) ds dx + \\
&- \rho_1^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s) f^{11} \left(\overline{\mu(s)} - \ell \int_0^x \overline{\eta(y, s)} dy \right) ds dx + P_3
\end{aligned} \tag{4.112}$$

onde

$$P_3 := - \left[k_0 (\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0) + \int_0^\infty g_3(s) (\mu_x - \ell \eta)(L_0, s) ds \right] \int_0^\infty g_3(s) \left(\overline{\mu(L_0, s)} - \ell \int_0^{L_0} \overline{\eta(y, s)} dy \right) ds.$$

Mas, usando (4.98), obtemos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que:

$$|P_3| \leq \varepsilon \left| k_0 (\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0) + \int_0^\infty g_3(s) (\mu_x - \ell \eta)(L_0, s) ds \right|^2 + C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.113}$$

e também:

$$\operatorname{Re} \left[\rho_1^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s) W^1 \frac{d}{ds} \left(\overline{\mu(s)} - \ell \int_0^x \overline{\eta(y, s)} dy \right) ds dx \right] \leq \frac{\beta_3 \rho_1^1}{4} \|W^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.114}$$

$$\operatorname{Re} \left[k_0 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s) (\omega_x^1 - \ell \varphi^1) \overline{(\mu_x - \ell \eta)(s)} ds dx \right] \leq C \|\omega_x^1 - \ell \varphi^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \tag{4.115}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left[\ell \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s) \left(k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) + \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x + \xi + \ell \mu)(s) ds \right) \left(\overline{\mu(s)} - \ell \int_0^x \overline{\eta(y, s)} dy \right) ds dx \right] &\leq \\
&\leq C \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{4.116}$$

Além disso, não é difícil ver que:

$$\operatorname{Re} \left[\beta_3 \ell \rho_1^1 \int_0^{L_0} W^1 \int_0^x \overline{\Phi^1(y)} dy dx \right] \leq \frac{\beta_3 \rho_1^1}{4} \|W^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + C \|\Phi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2. \tag{4.117}$$

Finalmente, tomando a parte real em (4.112), e usando (4.113)-(4.117) e o Lema 4.3, obtemos a desigualdade desejada. ■

Lema 4.5. Para cada $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}^*$, vale:

$$\begin{aligned} k \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1|^2 dx + b \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 dx + k_0 \int_0^{L_0} |\omega_x^1 - \ell \varphi^1|^2 dx &\leq C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(L_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell \mu)(L_0, s) ds \right|^2 + \\ &+ \varepsilon \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s) ds \right|^2 + \\ &+ \varepsilon \left| k_0(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell \eta)(L_0, s) ds \right|^2 + \\ &+ \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|^2} [\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2] + \frac{C}{|\lambda|^2} \left| k_0(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(0) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell \eta)(0, s) ds \right|^2. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (4.83), (4.85) e (4.87) por $\overline{\varphi^1}$, $\overline{\psi^1}$ e $\overline{\omega^1}$, respectivamente, e usando (4.77), (4.79) e (4.81), obtemos:

$$\begin{aligned} k \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1|^2 dx + b \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 dx + k_0 \int_0^{L_0} |\omega_x^1 - \ell \varphi^1|^2 dx &= \rho_1^1 \int_0^{L_0} |\Phi^1|^2 dx + \\ &+ \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\Psi^1|^2 dx + \rho_1^1 \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx - \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s)(\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1})(\eta_x + \xi + \ell \mu)(s) ds dx + \\ &- \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s)\overline{\psi_x^1} \xi_x(s) ds dx - \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s)(\overline{\omega_x^1 - \ell \varphi^1})(\mu_x - \ell \eta)(s) ds dx + \\ &+ \int_0^{L_0} \left[\rho_1^1 \Phi^1 \overline{f^1} + \rho_2^1 \Psi^1 \overline{f^3} + \rho_1^1 W^1 \overline{f^5} + \rho_1^1 f^7 \overline{\varphi^1} + \rho_2^1 f^9 \overline{\psi^1} + \rho_1^1 f^{11} \overline{\omega^1} \right] dx + P_4 + P_5 + P_6 \quad (4.118) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} P_4 &:= \left[k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(L_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell \mu)(L_0, s) ds \right] \overline{\varphi^1(L_0)}, \\ P_5 &:= \left[b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s) ds \right] \overline{\psi^1(L_0)} \quad \text{e} \\ P_6 &:= \left[k_0(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell \eta)(L_0, s) ds \right] \overline{\omega^1(L_0)}. \end{aligned}$$

Mas, usando (4.98), não é difícil ver que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[- \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell \mu)(s) \overline{(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)} ds dx \right] &\leq \frac{k}{4} \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \\ &+ C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.119) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \left[- \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s) \overline{\psi_x^1} ds dx \right] \leq \frac{b}{4} \|\psi_x^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.120)$$

e

$$\operatorname{Re} \left[- \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell \eta)(s) \overline{(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)} ds dx \right] \leq \frac{k_0}{4} \|\omega_x^1 - \ell \varphi^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.121)$$

Além disso, como

$$|\varphi^1(L_0)| \leq \|\varphi^1\|_{L^\infty(0,L_0)} \leq \sqrt{2} \|\varphi\|_{L^2(0,L_0)}^{1/2} \|\varphi_x^1\|_{L^2(0,L_0)}^{1/2}$$

segue de (4.77), (4.79) e (4.81) que, para cada $\delta > 0$, existe uma constante $C_\delta > 0$ tal que:

$$\delta |\varphi^1(L_0)|^2 \leq \frac{k}{4} \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \frac{C_\delta}{|\lambda|^2} [\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2],$$

e, procedendo analogamente, temos também:

$$\delta |\psi^1(L_0)|^2 \leq \frac{b}{4} \|\psi_x^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \frac{C_\delta}{|\lambda|^2} [\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2] \quad \text{e}$$

$$\delta |\omega^1(L_0)|^2 \leq \frac{k_0}{4} \|\omega_x^1 - \ell\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \frac{C_\delta}{|\lambda|^2} [\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2],$$

o que nos dá:

$$\begin{aligned} |P_4| &\leq \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(L_0, s)ds \right|^2 + \\ &+ \frac{k}{4} \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \frac{C_\epsilon}{|\lambda|^2} [\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2], \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$|P_5| \leq \varepsilon \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s)ds \right|^2 + \frac{b}{4} \|\psi_x^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \frac{C_\epsilon}{|\lambda|^2} [\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2], \quad (4.123)$$

$$\begin{aligned} |P_6| &\leq \varepsilon \left| k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(L_0, s)ds \right|^2 + \\ &+ \frac{k_0}{4} \|\omega_x^1 - \ell\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \frac{C_\epsilon}{|\lambda|^2} [\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2]. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Finalmente, tomando a parte real em (4.118), e usando (4.119)-(4.124) e os Lemas 4.2, 4.3 e 4.4, obtemos a desigualdade desejada. ■

Lema 4.6. *Existe uma constante $C > 0$ tal que:*

$$\begin{aligned} (i) \quad |\Phi^1(L_0)|^2 + \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(L_0, s)ds \right|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_0^{L_0} [|\Phi^1|^2 + |\Psi^1|^2 + |W^1|^2 + |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1|^2 + |\omega_x^1 - \ell\varphi^1|^2] dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad |\Psi^1(L_0)|^2 + \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s)ds \right|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_0^{L_0} [|\Psi^1|^2 + |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1|^2 + |\psi_x^1|^2] dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (iii) \quad & \left| W^1(L_0) \right|^2 + \left| k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(L_0, s)ds \right|^2 + \\
 & + \left| k_0(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(0) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell\eta)(0, s)ds \right|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\
 & + C \int_0^{L_0} \left[|\Phi^1|^2 + |W^1|^2 + |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1|^2 + |\omega_x^1 - \ell\varphi^1|^2 \right] dx.
 \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (4.85) por $\left[p \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi_x(s)}ds \right) \right]$, onde $p \in C^1([0, L_0]; \mathbb{R})$, encontramos:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{-\rho_2^1 \int_0^{L_0} p \Psi^1 \left[b(i\lambda\psi^1)_x + \int_0^\infty g_2(s)(i\lambda\xi)_x(s)ds \right] dx}_{=: I_1} - \left[\frac{p}{2} \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)ds \right|^2 \right] \Big|_{x=0}^{x=L_0} + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{L_0} p_x \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)ds \right|^2 dx - \rho_2^1 \int_0^{L_0} p \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi_x(s)}ds \right) f^9 dx = \\
 & = - \int_0^{L_0} p \left[k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)ds \right] \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi_x(s)}ds \right) dx. \quad (4.125)
 \end{aligned}$$

Agora, usando (4.79) e (4.90) em I_1 , obtemos, de (4.125):

$$\begin{aligned}
 & \frac{b_1\rho_2^1 p(L_0)}{2} \left| \Psi^1(L_0) \right|^2 + \left[\frac{p}{2} \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)ds \right|^2 \right] \Big|_{x=0}^{x=L_0} = \frac{b_1\rho_2^1}{2} \int_0^{L_0} p_x \left| \Psi^1 \right|^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{L_0} p_x \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)ds \right|^2 dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) p \Psi^1 \overline{\xi_{sx}(s)} ds dx + \\
 & + \int_0^{L_0} p \left[k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell\mu)(s)ds \right] \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi_x(s)}ds \right) dx + \\
 & - \rho_2^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g_2(s) p \Psi^1 \overline{f_x^{14}(s)} ds dx - \rho_2^1 \int_0^{L_0} p \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g_2(s)\overline{\xi_x(s)}ds \right) f^9 dx + \\
 & - b\rho_2^1 \int_0^{L_0} p \Psi^1 \overline{f_x^3} dx. \quad (4.126)
 \end{aligned}$$

Com isto, obtemos a desigualdade (i) tomando $p \in C^1([0, L_0]; \mathbb{R})$ tal que $p(L_0) = -p(0) = 2$ em (4.126) e usando (4.98).

As provas de (ii) e (iii) são inteiramente análogas, e são obtidas multiplicando-se as equações (4.83) e (4.87) por $p \left(k(\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1}) + \int_0^\infty g_1(s)(\overline{\eta_x + \xi + \ell\mu})(s)ds \right)$ e por $p \left(k_0(\overline{\omega_x^1 - \ell\varphi^1}) + \int_0^\infty g_3(s)(\overline{\mu_x - \ell\eta})(s)ds \right)$, respectivamente. ■

Lema 4.7. *Existe uma constante $C > 0$ tal que:*

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx &\leq \\ &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_0^{L_0} \left[|\Phi^1|^2 + |\Psi^1|^2 + |W^1|^2 + |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1|^2 + |\psi_x^1|^2 + |\omega_x^1 - \ell\varphi^1|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a função $q_n : [L_0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$q_n(x) := \int_x^L e^{-ns} ds = \frac{1}{n} (e^{-nx} - e^{-nL}).$$

Multiplicando (4.84) por $\left[q_n(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2}) \right]$ e usando (4.78), (4.80) e (4.82), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L e^{-nx} \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 \right] dx &= q_n(L_0) \left[\rho_1^2 |\Phi^2(L_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0)|^2 \right] + \\ &- 2\ell\tilde{k}_2 \int_{L_0}^L q_n (\omega_x^2 - \ell\varphi^2) (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2}) dx - 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n \Phi^2 (\overline{\Psi^2 + \ell W^2}) dx + \\ &- 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n \Phi^2 (\overline{f_x^2 + f^4 + \ell f^6}) dx - 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n f^8 (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2}) dx. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Analogamente, multiplicando (4.86) por $q_n \overline{\psi_x^2}$ e usando (4.80), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L e^{-nx} \left[\rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 \right] dx &= q_n(L_0) \left[\rho_2^2 |\Psi^2(L_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(L_0)|^2 \right] + \\ &+ 2k_2 \int_{L_0}^L q_n (\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) \overline{\psi_x^2} dx - 2\rho_2^2 \int_{L_0}^L q_n \Psi^2 \overline{f_x^4} dx - 2\rho_2^2 \int_{L_0}^L q_n \overline{\psi_x^2} f^{10} dx. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Do mesmo modo, multiplicando (4.88) por $q_n (\overline{\omega_x^2 - \ell\varphi^2})$ e usando (4.78) e (4.82), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L e^{-nx} \left[\rho_1^2 |W^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx &= q_n(L_0) \left[\rho_1^2 |W^2(L_0)|^2 + \tilde{k}_2 |(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0)|^2 \right] + \\ &+ 2\ell k_2 \int_{L_0}^L q_n (\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) (\overline{\omega_x^2 - \ell\varphi^2}) dx + 2\ell\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n W^2 \overline{\Phi^2} dx + \\ &- 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n W^2 (\overline{f_x^6 - \ell f^2}) dx - 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n (\overline{\omega_x^2 - \ell\varphi^2}) f^{12} dx. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Destas últimas três igualdades, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{C}{n}\right) \int_{L_0}^L e^{-nx} \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx &\leq \\ &\leq q_n(L_0) \left[k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(L_0)|^2 + \tilde{k}_2 |(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0)|^2 \right] + \\ &+ q_n(L_0) \left[\rho_1^2 |\Phi^2(L_0)|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2(L_0)|^2 + \rho_1^2 |W^2(L_0)|^2 \right] + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Então, tomando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, usando o Lema 4.6, e lembrando que $\mathcal{U} \in D(\mathcal{A})$, obtemos a desigualdade desejada. ■

O próximo lema é crucial para garantir que o decaimento exponencial ocorre também no caso em que $d_1 = d_2 = d_3 = 0$. Com efeito, ele fornece uma estimativa para os termos envolvendo $|U|^2$, $|V|^2$ e $|W|^2$ que podem ser obtidos de (4.98) apenas quando d_1 , d_2 e d_3 , respectivamente, são positivos.

Lema 4.8. *Existe $C > 0$ tal que:*

$$\begin{aligned} \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + \gamma_3 |w|^2 + m_1 |U|^2 + m_2 |V|^2 + m_3 |W|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Demonstração: Por um lado, multiplicando (4.84) por $\left[(x - L_0)(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2}) \right]$, e usando (4.78), (4.80) e (4.82), obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 |\Phi^2(L)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L)|^2 &= \frac{1}{L - L_0} \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 \right] dx + \\ &- \frac{2\rho_1^2}{L - L_0} \int_{L_0}^L (x - L_0) \Phi^2 (\overline{\Psi^2 + \ell W^2}) dx - \frac{2\ell \tilde{k}_2}{L - L_0} \int_{L_0}^L (x - L_0) (\omega_x^2 - \ell \varphi^2) (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2}) dx + \\ &- \frac{2\rho_1^2}{L - L_0} \int_{L_0}^L (x - L_0) \Phi^2 (\overline{f_x^2 + f^4 + \ell f^6}) dx - \frac{2\rho_1^2}{L - L_0} \int_{L_0}^L (x - L_0) (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2}) f^8 dx \end{aligned}$$

e disto, lembrando que $\Phi^2(L) = U$, segue que existe $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 |U|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L)|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Analogamente, multiplicando (4.86) por $\left[(x - L_0) \overline{\psi_x^2} \right]$, usando (4.80) e lembrando que $\Psi^2(L) = V$, obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\rho_2^2 |V|^2 + b_2 |\psi_x^2(L)|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{L_0}^L \left[\rho_2^2 |\Psi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 \right] dx \quad (4.132)$$

e, do mesmo modo, multiplicando (4.88) por $\left[(x - L_0) (\overline{\omega_x^2 - \ell \varphi^2}) \right]$, usando (4.78), (4.82) e $W^2(L) = W$, concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 |W|^2 + k_2 |(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)(L)|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Por outro lado, multiplicando (4.95) por $\bar{u}$ e usando (4.92), temos que:

$$\gamma_1 |u|^2 = m_1 |U|^2 - d_1 U \bar{u} - k_2 \bar{u} (\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L) + m_1 \bar{u} f^{19} + m_1 U \bar{f}^{16}$$

o que nos dá, usando (4.131):

$$\begin{aligned} \gamma_1 |u|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Similarmente, multiplicando (4.96) por $\bar{v}$ e usando (4.93) e (4.132), obtemos:

$$\gamma_2 |v|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{L_0}^L \left[\rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 \right] dx, \quad (4.135)$$

e, do mesmo modo, multiplicando (4.97) por $\bar{w}$ e usando (4.94) e (4.133), encontramos:

$$\gamma_3 |w|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \quad (4.136)$$

Finalmente, de (4.131)-(4.136) segue a conclusão desejada. ■

Com este último lema, estamos prontos para estabelecer o resultado principal desta seção.

Teorema 4.2. *Suponhamos que as condições (4.19)-(4.21) sobre g_1, g_2 e g_3 são verificadas. Então o semigrupo $(e^{At})_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável.*

Demonstração: Tendo em vista o Lema 4.1, basta mostrarmos que existe $C > 0$ tal que:

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.137)$$

Como o operador resolvente é holomorfo, é suficiente estabelecer a desigualdade acima para $|\lambda|$ suficientemente grande. Para isto, note que, por um lado, os Lemas 4.8 e 4.7 nos permitem escrever:

$$E_2(t) \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C E_1(t). \quad (4.138)$$

Por outro lado, usando (4.98) e os Lemas 4.2-4.5, concluímos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} E_1(t) &\leq \varepsilon \left| k(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(L_0) + \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi + \ell \mu)(L_0, s) ds \right|^2 + \\ &+ \varepsilon \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s) ds \right|^2 + \varepsilon \left| k_0(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0) + \int_0^\infty g_3(s)(\mu_x - \ell \eta)(L_0, s) ds \right|^2 + \\ &+ C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|^2} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.139)$$

Agora, de (4.138) e (4.139), usando o Lema 4.6, e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, encontramos:

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Então, para $|\lambda|$ suficientemente grande, temos:

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

o que implica em:

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo, o semigrupo $(e^{At})_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável. ■

4.4 A Falta de Estabilidade Exponencial

Nesta seção, iremos provar que, na ausência da dissipação provocada pelo efeito de memória, existe uma falta de estabilidade exponencial do sistema. Para isto, consideremos o *problema sem efeito de memória*, isto é:

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)_x - \tilde{k}_1 \ell(\omega_x^1 - \ell \varphi^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (4.140)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (4.141)$$

$$\rho_1^1 \omega_{tt}^1 - \tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)_x + k_1 \ell(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (4.142)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)_x - \tilde{k}_2 \ell(\omega_x^2 - \ell \varphi^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.143)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.144)$$

$$\rho_1^2 \omega_{tt}^2 - \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)_x + k_2 \ell(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.145)$$

$$m_1 u_{tt} + d_1 u_t + \gamma_1 u + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.146)$$

$$m_2 v_{tt} + d_2 v_t + \gamma_2 v + b_2 \psi_x^2(L) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.147)$$

$$m_3 w_{tt} + d_3 w_t + \gamma_3 w + \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)(L) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.148)$$

com condições de fronteira:

$$\varphi^1(0) = \psi^1(0) = \omega^1(0) = 0, \quad \varphi^2(L) = u, \quad \psi^2(L) = v, \quad \omega^2(L) = w \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.149)$$

e condições de transmissão:

$$\varphi^1(L_0) = \varphi^2(L_0), \quad \psi^1(L_0) = \psi^2(L_0), \quad \omega^1(L_0) = \omega^2(L_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.150)$$

$$k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.151)$$

$$b_1\psi_x^1(L_0) = b_2\psi_x^2(L_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.152)$$

$$\tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0) = \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.153)$$

e dados iniciais:

$$\begin{aligned} & (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \varphi_t^1, \varphi_t^2, \psi_t^1, \psi_t^2, \omega_t^1, \omega_t^2, u, v, w, u_t, v_t, w_t) \big|_{t=0} = \\ & = (\varphi_0^1, \varphi_0^2, \psi_0^1, \psi_0^2, \omega_0^1, \omega_0^2, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \psi_1^1, \psi_1^2, \omega_1^1, \omega_1^2, u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) \in \check{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (4.154)$$

onde $\rho_i^j, k_i, \tilde{k}_i, b_i, m_r, \gamma_r$ (com $i, j \in \{1, 2\}$ e $r \in \{1, 2, 3\}$) são exatamente os mesmos de antes, e d_i (com $i \in \{1, 2, 3\}$), agora, são constantes positivas.

Além disso, para este problema, consideremos o espaço de fase:

$$\check{\mathcal{H}} := \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} := (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, u, v, w, U, V, W)^T; \\ \mathcal{U} \in [\mathbb{H}_*^1]^3 \times [\mathbb{L}^2]^3 \times \mathbb{C}^6, \quad \varphi^2(L) = u, \quad \psi^2(L) = v, \quad \omega^2(L) = w \end{array} \right\}.$$

A *energia total* associada ao sistema (4.140)-(4.154) é definida por:

$$\begin{aligned} \check{E}(t) &= \check{E}(t; \varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, u, v, w) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \left[\rho_1^1 |\varphi_t^1|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^1|^2 + \rho_1^1 |\omega_t^1|^2 + k_1 |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1|^2 + b_1 |\psi_x^1|^2 + \tilde{k}_1 |\omega_x^1 - \ell\varphi^1|^2 \right] dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 + \rho_1^2 |\omega_t^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx + \\ &+ \frac{1}{2} [\gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + \gamma_3 |w|^2 + m_1 |u_t|^2 + m_2 |v_t|^2 + m_3 |w_t|^2] \end{aligned} \quad (4.155)$$

e não é difícil ver que, para todo $\mathcal{U} \in \check{\mathcal{H}}$, vale:

$$\frac{d}{dt} \check{E}(t) = -d_1 |u_t|^2 - d_2 |v_t|^2 - d_3 |w_t|^2. \quad (4.156)$$

Denotemos por $\mathcal{B}$ o operador linear não-limitado de $\check{\mathcal{H}}$ dado por:

$$\mathcal{B} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ W^1 \\ W^2 \\ \frac{k_1}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)_x + \frac{\tilde{k}_1\ell}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1) \\ \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)_x + \frac{\tilde{k}_2\ell}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2) \\ \frac{b_1}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 - \frac{k_1}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) \\ \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) \\ \frac{\tilde{k}_1}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)_x - \frac{k_1\ell}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) \\ \frac{\tilde{k}_2}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)_x - \frac{k_2\ell}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) \\ \check{U} \\ \check{V} \\ \check{W} \\ -\frac{d_1}{m_1}U - \frac{\gamma_1}{m_1}u - \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L) \\ -\frac{d_2}{m_2}V - \frac{\gamma_2}{m_2}v - \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(L) \\ -\frac{d_3}{m_3}W - \frac{\gamma_3}{m_3}w - \frac{\tilde{k}_2}{m_3}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L) \end{pmatrix},$$

com domínio:

$$D(\mathcal{B}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} := (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, u, v, w, U, V, W)^T; \\ \mathcal{U} \in [\mathbb{H}_*^1 \cap \mathbb{H}^2]^3 \times [\mathbb{H}_*^1]^3 \times \mathbb{C}^6, \quad \Phi^2(L) = \check{U}, \quad \Psi^2(L) = \check{V}, \quad W^2(L) = \check{W}, \\ k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0), \\ b_1\psi_x^1(L_0) = b_2\psi_x^2(L_0), \quad \tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0) = \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0) \end{array} \right\}.$$

É fácil ver que:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{B}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\tilde{\mathcal{H}}} = -d_1|\dot{U}|^2 - d_2|\dot{V}|^2 - d_3|\dot{W}|^2. \quad (4.157)$$

Além disso, não é difícil ver que o operador $\mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre $\tilde{\mathcal{H}}$, que denotaremos por $(T(t))_{t \geq 0}$. Isto estabelece a boa-colocação do problema (4.140)-(4.154).

Para provar que este sistema não é exponencialmente estável, a principal ferramenta que usamos é o *Teorema de Weyl* sobre a invariância do raio espectral essencial por perturbações compactas. Com isso em vista, consideremos o seguinte *sistema conservativo*:

$$\rho_1^1 \tilde{\varphi}_{tt}^1 - k_1(\tilde{\varphi}_x^1 + \tilde{\psi}^1 + \ell \tilde{\omega}^1)_x - \tilde{k}_1 \ell(\tilde{\omega}_x^1 - \ell \tilde{\varphi}^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (4.158)$$

$$\rho_2^1 \tilde{\psi}_{tt}^1 - b_1 \tilde{\psi}_{xx}^1 + k_1(\tilde{\varphi}_x^1 + \tilde{\psi}^1 + \ell \tilde{\omega}^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (4.159)$$

$$\rho_1^1 \tilde{\omega}_{tt}^1 - \tilde{k}_1(\tilde{\omega}_x^1 - \ell \tilde{\varphi}^1)_x + k_1 \ell(\tilde{\varphi}_x^1 + \tilde{\psi}^1 + \ell \tilde{\omega}^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (4.160)$$

$$\rho_1^2 \tilde{\varphi}_{tt}^2 - k_2(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2 + \ell \tilde{\omega}^2)_x - \tilde{k}_2 \ell(\tilde{\omega}_x^2 - \ell \tilde{\varphi}^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.161)$$

$$\rho_2^2 \tilde{\psi}_{tt}^2 - b_2 \tilde{\psi}_{xx}^2 + k_2(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2 + \ell \tilde{\omega}^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.162)$$

$$\rho_1^2 \tilde{\omega}_{tt}^2 - \tilde{k}_2(\tilde{\omega}_x^2 - \ell \tilde{\varphi}^2)_x + k_2 \ell(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2 + \ell \tilde{\omega}^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.163)$$

$$m_1 \tilde{u}_{tt} + \gamma_1 \tilde{u} + k_2(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2 + \ell \tilde{\omega}^2)(L) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.164)$$

$$m_2 \tilde{v}_{tt} + \gamma_2 \tilde{v} + b_2 \tilde{\psi}_x^2(L) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.165)$$

$$m_3 \tilde{w}_{tt} + \gamma_3 \tilde{w} + \tilde{k}_2(\tilde{\omega}_x^2 - \ell \tilde{\varphi}^2)(L) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.166)$$

verificando as mesmas condições de transmissão e de fronteira, e com os mesmos dados iniciais que consideramos anteriormente, onde $\rho_i^j, k_i, \tilde{k}_i, b_i, m_r, \gamma_r$ (com $i, j \in \{1, 2\}$ e $r \in \{1, 2, 3\}$) são como antes; isto é, com condições de fronteira:

$$\tilde{\varphi}^1(0) = \tilde{\psi}^1(0) = \tilde{\omega}^1(0) = 0, \quad \tilde{\varphi}^2(L) = \tilde{u}, \quad \tilde{\psi}^2(L) = \tilde{v}, \quad \tilde{\omega}^2(L) = \tilde{w} \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.167)$$

e condições de transmissão:

$$\tilde{\varphi}^1(L_0) = \tilde{\varphi}^2(L_0), \quad \tilde{\psi}^1(L_0) = \tilde{\psi}^2(L_0), \quad \tilde{\omega}^1(L_0) = \tilde{\omega}^2(L_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.168)$$

$$k_1(\tilde{\varphi}_x^1 + \tilde{\psi}^1 + \ell \tilde{\omega}^1)(L_0) = k_2(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2 + \ell \tilde{\omega}^2)(L_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.169)$$

$$b_1 \tilde{\psi}_x^1(L_0) = b_2 \tilde{\psi}_x^2(L_0), \quad k_1(\tilde{\omega}_x^1 - \ell \tilde{\varphi}^1)(L_0) = k_2(\tilde{\omega}_x^2 - \ell \tilde{\varphi}^2)(L_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.170)$$

e dados iniciais:

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\psi}^1, \tilde{\psi}^2, \tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \tilde{\varphi}_t^1, \tilde{\varphi}_t^2, \tilde{\psi}_t^1, \tilde{\psi}_t^2, \tilde{\omega}_t^1, \tilde{\omega}_t^2, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{u}_t, \tilde{v}_t, \tilde{w}_t \right) \Big|_{t=0} = \\ & = \left(\varphi_0^1, \varphi_0^2, \psi_0^1, \psi_0^2, \omega_0^1, \omega_0^2, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \psi_1^1, \psi_1^2, \omega_1^1, \omega_1^2, u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1 \right) \in \check{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (4.171)$$

A *energia total* associada ao sistema (4.158)-(4.171) é definida por:

$$\tilde{E}(t) := \check{E}(t; \tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\psi}^1, \tilde{\psi}^2, \tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z}) \quad (4.172)$$

e não é difícil ver que:

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(t) = 0. \quad (4.173)$$

Agora estamos prontos para estabelecer o resultado principal desta seção.

Teorema 4.3. *O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ associado ao sistema (4.140)-(4.154) não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Vamos mostrar que $(T(t))_{t \geq 0}$ tem o mesmo tipo essencial $\omega_{ess}(T)$ que outro semigrupo associado a um sistema conservativo; a saber, do semigrupo $(T_0(t))_{t \geq 0}$ definido pelo sistema (4.158)-(4.171). Aqui, usaremos o *Teorema de Weyl* (teorema 2.8). Assim, vamos mostrar que, para cada $t \geq 0$, a diferença $[T(t) - T_0(t)]$ é um operador compacto; de onde segue que:

$$\omega_{ess}(T) = \omega_{ess}(T_0).$$

Mas, como $(T_0(t))_{t \geq 0}$ é unitário, temos que $\omega_{ess}(T_0) = 0$. Denotando por $\omega(T)$ e $\omega_\sigma(\mathcal{B})$ o tipo do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ e a cota superior do espectro $\sigma(\mathcal{B})$, respectivamente, temos que (veja o corolário 2.2):

$$\omega(T) = \max \{ \omega_\sigma(\mathcal{B}), \omega_{ess}(T) \} = 0, \quad (4.174)$$

e isto implica que $(T(t))_{t \geq 0}$ não é exponencialmente estável.

Vejamos. Sejam $(\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, u, v, w)$ e $(\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \tilde{\psi}^1, \tilde{\psi}^2, \tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ soluções dos sistemas (4.140)-(4.154) e (4.158)-(4.171), respectivamente. Anotando:

$$\begin{aligned} \Phi^1 &:= \varphi^1 - \tilde{\varphi}^1, & \Phi^2 &:= \varphi^2 - \tilde{\varphi}^2, & \Psi^1 &:= \psi^1 - \tilde{\psi}^1, & \Psi^2 &:= \psi^2 - \tilde{\psi}^2, \\ \mathbf{W}^1 &:= \omega^1 - \tilde{\omega}^1 & \mathbf{W}^2 &:= \omega^2 - \tilde{\omega}^2 & \mathbf{U} &:= u - \tilde{u}, & \mathbf{V} &:= v - \tilde{v}, & \mathbf{W} &:= w - \tilde{w} \end{aligned}$$

temos que $(\Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \mathbf{W}^1, \mathbf{W}^2, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$ é solução do sistema:

$$\rho_1^1 \Phi_{tt}^1 - k_1(\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell \mathbf{W}^1)_x - \tilde{k}_1 \ell (\mathbf{W}_x^1 - \ell \Phi^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (4.175)$$

$$\rho_2^1 \Psi_{tt}^1 - b_1 \Psi_{xx}^1 + k_1(\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell \mathbf{W}^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (4.176)$$

$$\rho_1^1 \mathbf{W}_{tt}^1 - \tilde{k}_1(\mathbf{W}_x^1 - \ell \Phi^1)_x + k_1 \ell (\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell \mathbf{W}^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (4.177)$$

$$\rho_1^2 \Phi_{tt}^2 - k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell \mathbf{W}^2)_x - \tilde{k}_2 \ell (\mathbf{W}_x^2 - \ell \Phi^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.178)$$

$$\rho_2^2 \Psi_{tt}^2 - b_2 \Psi_{xx}^2 + k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell \mathbf{W}^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.179)$$

$$\rho_1^2 \mathbf{W}_{tt}^2 - \tilde{k}_2(\mathbf{W}_x^2 - \ell \Phi^2)_x + k_2 \ell (\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell \mathbf{W}^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (4.180)$$

$$m_1 \mathbf{U}_{tt} + \gamma_1 \mathbf{U} + k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell \mathbf{W}^2)(L) = -d_1 u_t \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.181)$$

$$m_2 \mathbf{V}_{tt} + \gamma_2 \mathbf{V} + b_2 \Psi_x^2(L) = -d_2 v_t \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.182)$$

$$m_3 \mathbf{W}_{tt} + \gamma_3 \mathbf{W} + \tilde{k}_2(\mathbf{W}_x^2 - \ell \Phi^2)(L) = -d_3 w_t \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.183)$$

com condições de fronteira:

$$\Phi^1(0) = \Psi^1(0) = \mathbf{W}^1(0) = 0, \quad \Phi^2(L) = \mathbf{U}, \quad \Psi^2(L) = \mathbf{V}, \quad \mathbf{W}^2(L) = \mathbf{W} \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.184)$$

e condições de transmissão:

$$\Phi^1(L_0) = \Phi^2(L_0), \quad \Psi^1(L_0) = \Psi^2(L_0), \quad \mathbf{W}^1(L_0) = \mathbf{W}^2(L_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.185)$$

$$k_1(\Phi_x^1 + \Psi^1 + \ell \mathbf{W}^1)(L_0) = k_2(\Phi_x^2 + \Psi^2 + \ell \mathbf{W}^2)(L_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.186)$$

$$b_1 \Psi_x^1(L_0) = b_2 \Psi_x^2(L_0), \quad \tilde{k}_1(\mathbf{W}_x^1 - \ell \Phi^1)(L_0) = \tilde{k}_2(\mathbf{W}_x^2 - \ell \Phi^2)(L_0) \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (4.187)$$

e dados iniciais nulos; isto é:

$$(\Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \mathbf{W}^1, \mathbf{W}^2, \Phi_t^1, \Phi_t^2, \Psi_t^1, \Psi_t^2, \mathbf{W}_t^1, \mathbf{W}_t^2, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{U}_t, \mathbf{V}_t, \mathbf{W}_t) \Big|_{t=0} = 0 \in \check{\mathcal{H}}. \quad (4.188)$$

A *energia total* associada ao sistema (4.175)-(4.188) é dada por:

$$\mathbb{E}(t) := \check{E}(t; \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, \mathbf{W}^1, \mathbf{W}^2, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}) \quad (4.189)$$

e é fácil verificar que:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(t) + d_1 |\mathbf{U}_t|^2 + d_2 |\mathbf{V}_t|^2 + d_3 |\mathbf{W}_t|^2 = -d_1 \tilde{u}_t \bar{\mathbf{U}}_t - d_2 \tilde{v}_t \bar{\mathbf{V}}_t - d_3 \tilde{w}_t \bar{\mathbf{W}}_t \quad (4.190)$$

de onde segue:

$$\mathbb{E}(t) + d_1 \int_0^t |\mathbf{U}_t|^2 d\sigma + d_2 \int_0^t |\mathbf{V}_t|^2 d\sigma + d_3 \int_0^t |\mathbf{W}_t|^2 d\sigma = -d_1 \int_0^t \tilde{u}_t \bar{\mathbf{U}}_t d\sigma - d_2 \int_0^t \tilde{v}_t \bar{\mathbf{V}}_t d\sigma - d_3 \int_0^t \tilde{w}_t \bar{\mathbf{W}}_t d\sigma. \quad (4.191)$$

Agora, consideremos para dados iniciais uma sequência limitada $(\mathcal{U}_{0,n})_n$ de elementos do espaço de fase $\check{\mathcal{H}}$, da forma

$$\mathcal{U}_{0,n} := (\varphi_{0,n}^1, \varphi_{0,n}^2, \psi_{0,n}^1, \psi_{0,n}^2, \omega_{0,n}^1, \omega_{0,n}^2, \varphi_{1,n}^1, \varphi_{1,n}^2, \psi_{1,n}^1, \psi_{1,n}^2, \omega_{1,n}^1, \omega_{1,n}^2, u_{0,n}, v_{0,n}, w_{0,n}, u_{1,n}, v_{1,n}, w_{1,n})^T.$$

Além disso, denotemos por $(\Phi_n^1, \Phi_n^2, \Psi_n^1, \Psi_n^2, \mathbf{W}_n^1, \mathbf{W}_n^2, \mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n, \mathbf{W}_n)$ a sequência correspondente de soluções do sistema (4.175)-(4.188). Mostraremos que a sequência $(\mathcal{U}_n)_n$ dada por:

$$\mathcal{U}_n := (\Phi_n^1, \Phi_n^2, \Psi_n^1, \Psi_n^2, \mathbf{W}_n^1, \mathbf{W}_n^2, \Phi_{n,t}^1, \Phi_{n,t}^2, \Psi_{n,t}^1, \Psi_{n,t}^2, \mathbf{W}_{n,t}^1, \mathbf{W}_{n,t}^2, \mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n, \mathbf{W}_n, \mathbf{U}_{n,t}, \mathbf{V}_{n,t}, \mathbf{W}_{n,t})^T$$

possui uma subsequência que converge fortemente em $\check{\mathcal{H}}$.

Inicialmente, note que $(T(t)\mathcal{U}_{0,n})_n$ e $(T_0(t)\mathcal{U}_{0,n})_n$ são limitadas em $\check{\mathcal{H}}$, e isto implica que

$$\begin{aligned} ((\tilde{\varphi}_{n,x}^2 + \tilde{\psi}_n^2 + \ell \tilde{\omega}_n^2)(L))_n, & \quad ((\tilde{\psi}_{n,x}^2)(L))_n, & \quad ((\tilde{\omega}_{n,x}^2 - \ell \tilde{\varphi}_n^2)(L))_n, \\ ((\Phi_{n,x}^2 + \Psi_n^2 + \ell \mathbf{W}_n^2)(L))_n, & \quad ((\Psi_{n,x}^2)(L))_n, & \quad \text{e} \quad ((\mathbf{W}_{n,x}^2 - \ell \Phi_n^2)(L))_n \end{aligned}$$

são limitadas em $L^2(0, T)$, para todo $T > 0$. Disto, usando (4.164)-(4.166) e (4.181)-(4.183), segue que

$$(\tilde{u}_{n,t})_n, \quad (\tilde{v}_{n,t})_n, \quad (\tilde{w}_{n,t})_n, \quad (\mathbf{U}_{n,t})_n, \quad (\mathbf{V}_{n,t})_n \quad \text{e} \quad (\mathbf{W}_{n,t})_n$$

são limitadas em $H^1(0, T)$. Portanto, existem subsequências que denotaremos do mesmo modo, tais que:

$$\tilde{u}_{n,t} \longrightarrow \tilde{u}_t, \quad \tilde{v}_{n,t} \longrightarrow \tilde{v}_t, \quad \text{e} \quad \tilde{w}_{n,t} \longrightarrow \tilde{w}_t \quad \text{forte em } L^2(0, T), \quad \text{e} \quad (4.192)$$

$$\mathbf{U}_{n,t} \longrightarrow \mathbf{U}_t, \quad \mathbf{V}_{n,t} \longrightarrow \mathbf{V}_t, \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_{n,t} \longrightarrow \mathbf{W}_t \quad \text{forte em } L^2(0, T). \quad (4.193)$$

Das convergências acima segue que:

$$\int_0^T \tilde{u}_{n,t} \bar{\mathbf{U}}_{n,t} dt \longrightarrow \int_0^T \tilde{u}_t \bar{\mathbf{U}}_t dt, \quad \int_0^T \tilde{v}_{n,t} \bar{\mathbf{V}}_{n,t} dt \longrightarrow \int_0^T \tilde{v}_t \bar{\mathbf{V}}_t dt \quad \text{e} \quad \int_0^T \tilde{w}_{n,t} \bar{\mathbf{W}}_{n,t} dt \longrightarrow \int_0^T \tilde{w}_t \bar{\mathbf{W}}_t dt.$$

Usando estas convergências em (4.191), encontramos que $(\| [T(t) - T_0(t)] \mathcal{U}_{0,n} \|_{\check{\mathcal{H}}})_n$ converge, e isto implica que $([T(t) - T_0(t)] \mathcal{U}_{0,n})_n$ converge forte em $\check{\mathcal{H}}$. Isto significa que $T(t) - T_0(t)$ é um operador compacto em $\check{\mathcal{H}}$, e portanto a prova está completa. ■

4.5 Decaimento Polinomial

Nesta seção, nosso objetivo é mostrar que as soluções do sistema (4.140)-(4.154) decaem polinomialmente para zero como $t^{-1/2}$. Aqui, usaremos o *Teorema de Borichev-Tomilov* (teorema 2.7). Vale lembrar que, no Lema 4.1, já mostramos que o eixo imaginário está contido no resolvente do operador $\mathcal{A}$. Assim, vamos provar que a solução $\mathcal{U}$ da equação resolvente

$$i\lambda\mathcal{U} - \mathcal{B}\mathcal{U} = F \quad (4.194)$$

satisfaz a primeira desigualdade do Teorema 2.7 (com $\beta = 2$) para $|\lambda|$ suficientemente grande. Para isto, reescrevemos (4.194) em termos de componentes, obtendo:

$$i\lambda\varphi^1 - \Phi^1 = f^1 \quad (4.195)$$

$$i\lambda\varphi^2 - \Phi^2 = f^2 \quad (4.196)$$

$$i\lambda\psi^1 - \Psi^1 = f^3 \quad (4.197)$$

$$i\lambda\psi^2 - \Psi^2 = f^4 \quad (4.198)$$

$$i\lambda\omega^1 - W^1 = f^5 \quad (4.199)$$

$$i\lambda\omega^2 - W^2 = f^6 \quad (4.200)$$

$$i\lambda\Phi^1 - \frac{k_1}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)_x - \frac{\tilde{k}_1\ell}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1) = f^7 \quad (4.201)$$

$$i\lambda\Phi^2 - \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)_x - \frac{\tilde{k}_2\ell}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2) = f^8 \quad (4.202)$$

$$i\lambda\Psi^1 - \frac{b_1}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 + \frac{k_1}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) = f^9 \quad (4.203)$$

$$i\lambda\Psi^2 - \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 + \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) = f^{10} \quad (4.204)$$

$$i\lambda W^1 - \frac{\tilde{k}_1}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)_x + \frac{k_1\ell}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) = f^{11} \quad (4.205)$$

$$i\lambda W^2 - \frac{\tilde{k}_2}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)_x + \frac{k_2\ell}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) = f^{12} \quad (4.206)$$

$$i\lambda u - U = f^{13} \quad (4.207)$$

$$i\lambda v - V = f^{14} \quad (4.208)$$

$$i\lambda w - W = f^{15} \quad (4.209)$$

$$i\lambda U + \frac{d_1}{m_1}U + \frac{\gamma_1}{m_1}u + \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L) = f^{16} \quad (4.210)$$

$$i\lambda V + \frac{d_2}{m_2}V + \frac{\gamma_2}{m_2}v + \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(L) = f^{17} \quad (4.211)$$

$$i\lambda W + \frac{d_3}{m_3}W + \frac{\gamma_3}{m_3}w + \frac{\tilde{k}_2}{m_3}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L) = f^{18}. \quad (4.212)$$

Note que, tomando o produto interno com $\mathcal{U}$ e usando (4.157), segue que:

$$d_1|U|^2 + d_2|V|^2 + d_3|W|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|\|F\|. \quad (4.213)$$

Lema 4.9. *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, vale:*

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx &\leq \\ &\leq C|\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C\|F\|^2. \end{aligned}$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $q_n : [L_0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$q_n(x) := \int_{L_0}^x e^{ns} ds = \frac{1}{n} (e^{nx} - e^{nL_0}).$$

Multiplicando (4.202), (4.204) e (4.206) por $\left[q_n(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2}) \right]$, $\left[q_n \overline{\psi_x^2} \right]$ e $\left[q_n(\overline{\omega_x^2 - \ell\varphi^2}) \right]$, respectivamente, e usando (4.196), (4.198) e (4.200), encontramos:

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L q_{n,x} \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx &= \\ = q_n(L) \left[\rho_1^2 |U|^2 + \rho_2^2 |V|^2 + \rho_1^2 |W|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L)|^2 + b_2 |\psi_x^2(L)|^2 + \tilde{k}_2 |(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L)|^2 \right] &+ \\ + 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n \Phi^2 (\overline{\Psi^2 + \ell W^2}) dx - 2\ell\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n W^2 \overline{\Phi^2} dx - 2k_2 \int_{L_0}^L q_n (\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) (\overline{\psi_x^2 + \ell(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)}) dx &+ \\ + 2\tilde{k}_2 \ell \int_{L_0}^L q_n (\omega_x^2 - \ell\varphi^2) (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2}) dx + 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n \left[\Phi^2 (\overline{f_x^2 + f^4 + \ell f^6}) + f^8 (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2}) \right] dx &+ \\ + 2\rho_2^2 \int_{L_0}^L q_n \left[\Psi^2 \overline{f_x^4 + f^{10} \psi_x^2} \right] dx + 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n \left[W^2 (\overline{f_x^6 - \ell f^2}) + f^{12} (\overline{\omega_x^2 - \ell\varphi^2}) \right] dx. \end{aligned}$$

Tomando a parte real e usando (4.213), segue daí que:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{C}{n} \right) \int_{L_0}^L e^{nx} \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx &\leq \\ \leq C\|\mathcal{U}\|\|F\| + C \left[k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L)|^2 + b_2 |\psi_x^2(L)|^2 + \tilde{k}_2 |(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.214)$$

Mas, de (4.210)-(4.212) e usando (4.213), temos que, para todo $|\lambda| \geq 1$, vale:

$$k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L)|^2 + b_2 |\psi_x^2(L)|^2 + \tilde{k}_2 |(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L)|^2 \leq C|\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C\|F\|^2. \quad (4.215)$$

Finalmente, voltando com (4.215) em (4.214), e escolhendo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, nossa conclusão segue. ■

Lema 4.10. *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, vale:*

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} \left[\rho_1^1 |\Phi^1|^2 + \rho_2^1 |\Psi^1|^2 + \rho_1^1 |W^1|^2 + k_1 |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1|^2 + b_1 |\psi_x^1|^2 + \tilde{k}_1 |\omega_x^1 - \ell \varphi^1|^2 \right] dx &\leq \\ &\leq C |\lambda|^2 \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \|F\|^2. \end{aligned}$$

Demonstração: Procedendo de modo análogo ao que fizemos no teorema anterior, e usando as condições de transmissão, encontramos:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} \left[\rho_1^1 |\Phi^1|^2 + \rho_2^1 |\Psi^1|^2 + \rho_1^1 |W^1|^2 + k_1 |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1|^2 + b_1 |\psi_x^1|^2 + \tilde{k}_1 |\omega_x^1 - \ell \varphi^1|^2 \right] dx &\leq \\ &\leq C \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \left[\rho_1^2 |\Phi^2(L_0)|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2(L_0)|^2 + \rho_1^2 |W^2(L_0)|^2 \right] + \\ &+ C \left[k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(L_0)|^2 + \tilde{k}_2 |(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)(L_0)|^2 \right]. \quad (4.216) \end{aligned}$$

Agora, seja $q : [L_0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $q(x) := L - x$, para cada $x \in [L_0, L]$. Multiplicando (4.202), (4.204) e (4.206) por $\left[q(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2}) \right]$, $\left(q \overline{\psi_x^2} \right)$ e $\left[q(\overline{\omega_x^2 - \ell \varphi^2}) \right]$, respectivamente, e usando (4.196), (4.198) e 4.200), obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 |\Phi^2(L_0)|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2(L_0)|^2 + \rho_1^2 |W^2(L_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(L_0)|^2 + \tilde{k}_2 |(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)(L_0)|^2 &= \\ = \frac{1}{q(L_0)} \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx + \\ + \frac{2\rho_1^2}{q(L_0)} \int_{L_0}^L q \left[\Phi^2(\overline{\Psi^2 + \ell W^2}) - \ell W^2 \overline{\Phi^2} \right] dx - \frac{2k_2}{q(L_0)} \int_{L_0}^L q(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) \left[\overline{\psi_x^2} + \ell(\overline{\omega_x^2 - \ell \varphi^2}) \right] dx + \\ + \frac{2\tilde{k}_2 \ell}{q(L_0)} \int_{L_0}^L q(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2}) dx + \frac{2\rho_2^2}{q(L_0)} \int_{L_0}^L q \left[\overline{\psi_x^2} f^{10} + \Psi^2 \overline{f_x^4} \right] dx + \\ + \frac{2\rho_1^2}{q(L_0)} \int_{L_0}^L q \left[(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2}) f^8 + \Phi^2(\overline{f_x^2 + f^4 + \ell f^6}) + (\overline{\omega_x^2 - \ell \varphi^2}) f^{12} + W^2(\overline{f_x^6 - \ell f^2}) \right] dx. \quad (4.217) \end{aligned}$$

Tomando a parte real, segue que:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 |\Phi^2(L_0)|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2(L_0)|^2 + \rho_1^2 |W^2(L_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(L_0)|^2 + \tilde{k}_2 |(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)(L_0)|^2 &\leq \\ \leq C \|\mathcal{U}\| \|F\| + C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Combinando esta última desigualdade com (4.216) e aplicando o Lema anterior, nossa conclusão segue. ■

Agora estamos prontos para estabelecer o resultado principal desta seção.

Teorema 4.4. *O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ associado ao problema de transmissão (4.140)-(4.154) decai polinomialmente como $t^{-1/2}$. Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{B}^k)$, então:*

$$\|T(t)\mathcal{U}_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} \|\mathcal{U}_0\|_{D(\mathcal{B}^k)}.$$

Demonstração: A prova de $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{B})$ é análoga à prova do Lema 4.1. E, dos Lemas 4.9 e 4.10, concluímos que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, vale:

$$\|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}}^2 \leq C|\lambda|^2 \|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}} \|F\|_{\check{\mathcal{H}}} + C \|F\|_{\check{\mathcal{H}}}^2$$

de onde segue que:

$$\|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}}^2 \leq C|\lambda|^4 \|F\|_{\check{\mathcal{H}}}^2$$

o que nos dá, para $|\lambda|$ suficientemente grande:

$$\|(i\lambda I - \mathcal{B})^{-1}F\|_{\check{\mathcal{H}}} = \|\mathcal{U}\|_{\check{\mathcal{H}}} \leq C|\lambda|^2 \|F\|_{\check{\mathcal{H}}}.$$

E isto encerra a prova. ■

Capítulo 5

Problema de Transmissão para uma Viga de Bresse Parcialmente Viscoelástica-Elástica com Carga Pontual

Neste capítulo, consideramos um problema de transmissão para uma viga de Bresse constituída de dois componentes: uma parte formada por um material parcialmente viscoelástico (com viscoelasticidade do tipo memória agindo apenas sobre o momento fletor), e a outra parte formada por um material elástico (sem efeito dissipativo atuando sobre este componente). Além disso, consideramos também a ação de um efeito dissipativo provocado por uma carga presa na extremidade da viga que é constituída pelo material elástico. O principal resultado obtido é que o modelo é exponencialmente estável quando o efeito da memória ocorre efetivamente sobre o momento fletor da viga e as velocidades de propagação de ondas da parte viscoelástica da viga são iguais. Finalmente, enfraquecendo um pouco as hipóteses de igualdade das velocidades de ondas, num sentido que tornaremos preciso mais adiante, mostramos que a solução do sistema decai polinomialmente para zero como $t^{-1/4}$.

5.1 O Modelo

Consideremos um problema de transmissão para uma viga de Bresse constituída de dois componentes: uma parte formada por um material viscoelástico (com viscoelasticidade do tipo memória agindo apenas sobre o momento fletor da viga), e a outra parte formada por um material elástico (sem efeito dissipativo atuando sobre este componente); sendo que a extremidade da parte viscoelástica está presa, e na outra extremidade há um recipiente contendo material granular¹, provocando um efeito dissipativo no sistema.

Denotemos por $\varphi = \varphi(x, t)$, $\omega = \omega(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$, respectivamente, o *deslocamento transversal*, o *deslocamento longitudinal*, e o *ângulo de rotação* de um filamento da viga. Usaremos as seguintes notações:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi^1 & \text{em }]0, L_0[\\ \varphi^2 & \text{em }]L_0, L[\end{cases}, \quad \psi = \begin{cases} \psi^1 & \text{em }]0, L_0[\\ \psi^2 & \text{em }]L_0, L[\end{cases} \quad \text{e} \quad \omega = \begin{cases} \omega^1 & \text{em }]0, L_0[\\ \omega^2 & \text{em }]L_0, L[\end{cases}, \quad (5.1)$$

onde L é o *comprimento* da viga e $L_0 \in]0, L[$ é o *ponto de transmissão*. O modelo que consideramos é dado por:

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)_x - \tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell \varphi^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (5.2)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) + \int_0^t g(t-s) \psi_{xx}^1(., s) ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (5.3)$$

$$\rho_1^1 \omega_{tt}^1 - \tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)_x + \ell k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (5.4)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)_x - \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (5.5)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (5.6)$$

$$\rho_1^2 \omega_{tt}^2 - \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)_x + \ell k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (5.7)$$

Aqui, $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a *função de relaxamento* (ou, *núcleo da memória*), e $\rho_j^i, k_i, \tilde{k}_i, b_i$ ($i, j \in \{1, 2\}$) são constantes positivas que refletem propriedades físicas da viga. As condições de fronteira são dadas por:

$$\varphi^1(0) = \psi^1(0) = \omega^1(0) = 0, \quad \varphi^2(L) = u, \quad \psi^2(L) = v \quad \text{e} \quad \omega^2(L) = w \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (5.8)$$

¹Mecanismo do tipo *tip load*.

e as condições de transmissão são:

$$\varphi^1(L_0, t) = \varphi^2(L_0, t), \quad \psi^1(L_0, t) = \psi^2(L_0, t), \quad \omega^1(L_0, t) = \omega^2(L_0, t), \quad (5.9)$$

$$k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0, t) = k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0, t), \quad (5.10)$$

$$b_1\psi_x^1(L_0, t) - \int_0^t g(t-s)\psi_x^1(L_0, s)ds = b_2\psi_x^2(L_0, t), \quad (5.11)$$

$$\tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0, t) = \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0, t), \quad (5.12)$$

onde $t \in [0, +\infty[$. O efeito da carga pontual sobre o sistema é modelado como:

$$m_1u_{tt} + d_1u_t + \gamma_1u + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (5.13)$$

$$m_2v_{tt} + d_2v_t + \gamma_2v + b_2\psi_x^2(L) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (5.14)$$

$$m_3w_{tt} + d_3w_t + \gamma_3w + \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L) = 0 \quad \text{em }]0, +\infty[\quad (5.15)$$

onde os parâmetros m_i, γ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) são constantes positivas e d_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) são constantes não-negativas que refletem propriedades físicas da carga pontual. Finalmente, os dados iniciais são:

$$\varphi^1(0) = \varphi_0^1, \quad \varphi_t^1(0) = \varphi_1^1, \quad \psi^1(0) = \psi_0^1, \quad \psi_t^1(0) = \psi_1^1, \quad \omega^1(0) = \omega_0^1, \quad \omega_t^1(0) = \omega_1^1 \quad \text{em }]0, L_0[\quad (5.16)$$

$$\varphi^2(0) = \varphi_0^2, \quad \varphi_t^2(0) = \varphi_1^2, \quad \psi^2(0) = \psi_0^2, \quad \psi_t^2(0) = \psi_1^2, \quad \omega^2(0) = \omega_0^2, \quad \omega_t^2(0) = \omega_1^2 \quad \text{em }]L_0, L[\quad (5.17)$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad v(0) = v_0, \quad v_t(0) = v_1, \quad w(0) = w_0, \quad w_t(0) = w_1 \quad \text{em } \mathbb{C}. \quad (5.18)$$

Estamos considerando o núcleo de memória decaindo exponencialmente; isto é, assumimos as seguintes hipóteses sobre a função de relaxamento g :

$$g(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{e} \quad g > 0 \quad \text{quase sempre em } [0, +\infty[; \quad (5.19)$$

$$\exists c_1, c_2 > 0 : \quad -c_1g(t) \leq g'(t) \leq -c_2g(t), \quad t \in [0, +\infty[; \quad (5.20)$$

$$0 < b := b_1 - \beta, \quad \text{onde} \quad \beta := \int_0^\infty g(s)ds \quad (5.21)$$

Além disso, anotaremos:

$$\chi_1 := \frac{k_1}{\rho_1^1} - \frac{b_1}{\rho_2^1} \quad \text{e} \quad \chi_2 := k_1 - \tilde{k}_1. \quad (5.22)$$

O principal resultado deste capítulo é mostrar que o modelo acima é exponencialmente estável quando as velocidades de propagação de ondas da parte viscoelástica da viga são iguais, isto é, no caso em que $\chi_1 = \chi_2 = 0$. Em seguida, vamos mostrar que, se admitirmos apenas que $\chi_2 = 0$, então a solução do sistema decai polinomialmente para zero, a saber, como $t^{-1/4}$.

5.2 Existência e Unicidade de Soluções

Para usar uma abordagem baseada da *Teoria de Semigrupos*, introduzimos o *problema com história*, obtido substituindo-se a equação (5.3) pela equação com história:

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) + \int_{-\infty}^t g(t-s) \psi_{xx}^1(., s) ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (5.23)$$

e a condição de transmissão (5.11) por:

$$b_1 \psi_x^1(L_0, t) - \int_{-\infty}^t g(t-s) \psi_x^1(L_0, s) ds = b_2 \psi_x^2(L_0, t), \quad t \in [0, +\infty[\quad (5.24)$$

Seguindo as ideias de Dafermos [11], [12] e Fabrizio [15], introduzimos a seguinte notação:

$$\xi(x, t, s) := \psi^1(x, t) - \psi^1(x, t-s) \quad (5.25)$$

com $s \in [0, +\infty)$; de modo que o sistema (5.2), (5.4)-(5.10), (5.12)-(5.18), (5.23)-(5.24), pode ser reescrito como:

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)_x - \tilde{k}_1 \ell(\omega_x^1 - \ell \varphi^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (5.26)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b \psi_{xx}^1 + k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) - \int_0^\infty g(s) \xi_{xx}(s) ds = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (5.27)$$

$$\rho_1^1 \omega_{tt}^1 - \tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)_x + k_1 \ell(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) = 0 \quad \text{em }]0, L_0[\times]0, +\infty[\quad (5.28)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)_x - \tilde{k}_2 \ell(\omega_x^2 - \ell \varphi^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (5.29)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + k_2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (5.30)$$

$$\rho_1^2 \omega_{tt}^2 - \tilde{k}_2(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)_x + k_2 \ell(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2) = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\quad (5.31)$$

$$\xi_t + \xi_s - \psi_t^1 = 0 \quad \text{em }]L_0, L[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[\quad (5.32)$$

onde b é definido em (5.21), com $\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, u, v$ e w satisfazendo às condições (5.8)-(5.10), (5.12)-(5.18) e ξ verificando a condição inicial:

$$\xi(x, 0, s) = \xi_0(x, s) =: \psi_0^1(x) - \psi^1(x, -s), \quad (x, s) \in]0, L_0[\times]0, \infty[\quad (5.33)$$

e as condições de fronteira:

$$\xi(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in]0, L_0[\times]0, +\infty[, \quad (5.34)$$

$$\xi(0, t, s) = 0, \quad (t, s) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[. \quad (5.35)$$

A condição de transmissão (5.24) é agora reescrita, para $t \in [0, +\infty[$, como:

$$b\psi_x^1(L_0, t) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s)ds = b_2\psi_x^2(L_0, t). \quad (5.36)$$

Definimos a energia total do sistema por:

$$E(t) := E_1(t) + E_2(t) \quad (5.37)$$

onde:

$$\begin{aligned} E_1(t) := & \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \left[\rho_1^1 |\varphi_t^1|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^1|^2 + \rho_1^1 |\omega_t^1|^2 + k_1 |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1|^2 + b |\psi_x^1|^2 + \tilde{k}_1 |\omega_x^1 - \ell\varphi^1|^2 \right] dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) |\xi_x(s)|^2 ds dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E_2(t) := & \frac{1}{2} \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 + \rho_1^2 |\omega_t^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx + \\ & + \frac{1}{2} [\gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + \gamma_3 |w|^2 + m_1 |u_t|^2 + m_2 |v_t|^2 + m_3 |w_t|^2]. \end{aligned}$$

Introduzimos também os seguintes espaços:

$$\mathbb{H}^m := H^m(0, L_0) \times H^m(L_0, L), \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{H}_*^m := \{(u, v) \in \mathbb{H}^m; u(0) = 0, u(L_0) = v(L_0)\}, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{L}^2 := L^2(0, L_0) \times L^2(L_0, L);$$

$$H_*^m(0, L_0) := \{f \in H^m(0, L_0); f(0) = 0\}, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$L_g^2 := \left\{ \varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_*^1(0, L_0); \int_0^\infty g(s) \int_0^{L_0} |\varphi_x(s)|^2 dx ds < \infty \right\}.$$

Recordamos que o espaço de história L_g^2 é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno dado por:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_g^2} = \int_0^\infty g(s) \int_0^{L_0} \varphi_x(s) \overline{\psi_x(s)} dx ds.$$

Com estas notações, consideramos o seguinte espaço de fase:

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} := (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, \xi, u, v, w, U, V, W)^T; \\ \mathcal{U} \in [\mathbb{H}_*^1]^3 \times [\mathbb{L}^2]^3 \times L_g^2 \times \mathbb{C}^6, \quad \varphi^2(L) = u, \quad \psi^2(L) = v, \quad \omega^2(L) = w \end{array} \right\}.$$

Note que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno que induz a norma da energia; isto é, aquela que, em cada

$$\mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, \xi, u, v, w, U, V, W)^T \in \mathcal{H},$$

é dada por:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1^1 \|\Phi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \rho_2^1 \|\Psi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \rho_1^1 \|W^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \\ &+ k_1 \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + b \|\psi_x^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \tilde{k}_1 \|\omega_x^1 - \ell \varphi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|\xi\|_{L_{g_2}^2}^2 + \\ &+ \rho_1^2 \|\Phi^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + \rho_2^2 \|\Psi^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + \rho_1^2 \|W^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + \\ &+ k_2 \|\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + b_2 \|\psi_x^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + \tilde{k}_2 \|\omega_x^2 - \ell \varphi^2\|_{L^2(L_0, L)}^2 + \\ &+ \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + \gamma_3 |w|^2 + m_1 |U|^2 + m_2 |V|^2 + m_3 |W|^2. \end{aligned}$$

Introduzimos também o operador linear não-limitado $\mathcal{A}$ em $\mathcal{H}$ dado por:

$$\mathcal{A} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ W^1 \\ W^2 \\ \frac{k_1}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)_x + \frac{\tilde{k}_1\ell}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1) \\ \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)_x + \frac{\tilde{k}_2\ell}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2) \\ \frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 - \frac{k_1}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) + \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g(s)\xi_{xx}(s)ds \\ \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 - \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) \\ \frac{\tilde{k}_1}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)_x - \frac{k_1\ell}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) \\ \frac{\tilde{k}_2}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)_x - \frac{k_2\ell}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) \\ \Psi^1 - \xi_s \\ U \\ V \\ W \\ -\frac{d_1}{m_1}U - \frac{\gamma_1}{m_1}u - \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L) \\ -\frac{d_2}{m_2}V - \frac{\gamma_2}{m_2}v - \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(L) \\ -\frac{d_3}{m_3}W - \frac{\gamma_3}{m_3}w - \frac{\tilde{k}_2}{m_3}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L) \end{pmatrix}$$

com domínio:

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, \xi, u, v, w, U, V, W)^T \in \mathcal{H}; \\ \left(\varphi^1, \varphi^2, b\psi^1 + \int_0^\infty g(s)\xi(s)ds, \psi^2, \omega^1, \omega^2 \right) \in [\mathbb{H}^2]^3, \quad (\Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2) \in [\mathbb{H}_*^1]^3, \\ \Phi^2(L) = U, \quad \Psi^2(L) = V, \quad W^2(L) = W, \quad \xi_s \in L_g^2, \quad \xi|_{s=0} = 0 \\ k_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0) = k^2(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0) \\ b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g_2(s)\xi_x(L_0, s)ds = b^2\psi_x^2(L_0), \quad \tilde{k}_1(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0) = \tilde{k}^2(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0) \end{array} \right\}.$$

Usando as hipóteses que assumimos sobre a função g , um cálculo simples nos mostra que:

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A} \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{H}} = -d_1 |U|^2 - d_2 |V|^2 - d_3 |W|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g'(s) |\xi_x(s)|^2 ds dx \leq 0 \quad (5.38)$$

o que significa que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo.

Com isto, o sistema (5.26)-(5.36), (5.8)-(5.10), (5.12)-(5.18), é equivalente a:

$$\mathcal{U}_t = \mathcal{A} \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0, \quad (5.39)$$

onde anotamos $\mathcal{U}(t) = (\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2, \omega^1, \omega^2, \Phi^1, \Phi^2, \Psi^1, \Psi^2, W^1, W^2, \xi, u, v, w, U, V, W)^T(t)$ e $\mathcal{U}_0 = (\varphi_0^1, \varphi_0^2, \psi_0^1, \psi_0^2, \omega_0^1, \omega_0^2, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \psi_1^1, \psi_1^2, \omega_1^1, \omega_1^2, \xi_0, u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1)^T$.

Teorema 5.1. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$ em $\mathcal{H}$. Assim, para cada dado inicial $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$, o problema (5.39) possui uma única solução fraca $\mathcal{U} \in C^0([0, \infty[, \mathcal{H})$. Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, então $\mathcal{U}$ é uma solução forte de (5.39), e tal que $\mathcal{U} \in C^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty[, D(\mathcal{A}))$.*

Demonstração: A prova é feita, *mutatis mutandis*, como no teorema 4.1, e por isso será aqui omitida. ■

5.3 Estabilidade Exponencial

Nesta seção, o nosso objetivo é mostrar que se a função g verifica as hipóteses (5.19)-(5.21) e se as velocidades de propagação de ondas da parte viscoelástica da viga são iguais (isto é, se $\chi_1 = \chi_2 = 0$), então o semigrupo correspondente é exponencialmente estável.

A estratégia, novamente, é lançarmos mão do *Teorema de Prüss* (teorema 2.6). Além disso, a prova da primeira condição desse teorema (isto é, que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$) é inteiramente análoga àquela apresentada no capítulo anterior, e por isso será omitida. Passaremos, então, a estabelecer a validade da segunda condição, ou seja, que o operador resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Para esta tarefa, reescrevemos a equação resolvente :

$$(i\lambda I - \mathcal{A})\mathcal{U} = F \quad (5.40)$$

(onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \in D(\mathcal{A})$ e $F = (f^1, f^2, \dots, f^{19})^T \in \mathcal{H}$) em termos de componentes, o que nos dá:

$$i\lambda\varphi^1 - \Phi^1 = f^1 \quad \text{em } H^1(0, L_0) \quad (5.41)$$

$$i\lambda\varphi^2 - \Phi^2 = f^2 \quad \text{em } H^1(L_0, L) \quad (5.42)$$

$$i\lambda\psi^1 - \Psi^1 = f^3 \quad \text{em } H^1(0, L_0) \quad (5.43)$$

$$i\lambda\psi^2 - \Psi^2 = f^4 \quad \text{em } H^1(L_0, L) \quad (5.44)$$

$$i\lambda\omega^1 - W^1 = f^5 \quad \text{em } H^1(0, L_0) \quad (5.45)$$

$$i\lambda\omega^2 - W^2 = f^6 \quad \text{em } H^1(L_0, L) \quad (5.46)$$

$$i\lambda\Phi^1 - \frac{k_1}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)_x - \frac{\tilde{k}_1\ell}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1) = f^7 \quad \text{em } L^2(0, L_0) \quad (5.47)$$

$$i\lambda\Phi^2 - \frac{k_2}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)_x - \frac{\tilde{k}_2\ell}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2) = f^8 \quad \text{em } L^2(L_0, L) \quad (5.48)$$

$$i\lambda\Psi^1 - \frac{b}{\rho_2^1}\psi_{xx}^1 + \frac{k_1}{\rho_2^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) - \frac{1}{\rho_2^1} \int_0^\infty g(s)\xi_{xx}(s)ds = f^9 \quad \text{em } L^2(0, L_0) \quad (5.49)$$

$$i\lambda\Psi^2 - \frac{b_2}{\rho_2^2}\psi_{xx}^2 + \frac{k_2}{\rho_2^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) = f^{10} \quad \text{em } L^2(L_0, L) \quad (5.50)$$

$$i\lambda W^1 - \frac{\tilde{k}_1}{\rho_1^1}(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)_x + \frac{k_1\ell}{\rho_1^1}(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) = f^{11} \quad \text{em } L^2(0, L_0) \quad (5.51)$$

$$i\lambda W^2 - \frac{\tilde{k}_2}{\rho_1^2}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)_x + \frac{k_2\ell}{\rho_1^2}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) = f^{12} \quad \text{em } L^2(L_0, L) \quad (5.52)$$

$$i\lambda\xi - \Psi^1 + \xi_s = f^{13} \quad \text{em } L_g^2 \quad (5.53)$$

$$i\lambda u - U = f^{14} \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (5.54)$$

$$i\lambda v - V = f^{15} \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (5.55)$$

$$i\lambda w - W = f^{16} \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (5.56)$$

$$i\lambda U + \frac{d_1}{m_1}U + \frac{\gamma_1}{m_1}u + \frac{k_2}{m_1}(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L) = f^{17} \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (5.57)$$

$$i\lambda V + \frac{d_2}{m_2}V + \frac{\gamma_2}{m_2}v + \frac{b_2}{m_2}\psi_x^2(L) = f^{18} \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (5.58)$$

$$i\lambda W + \frac{d_3}{m_3}W + \frac{\gamma_3}{m_3}w + \frac{\tilde{k}_2}{m_3}(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L) = f^{19} \quad \text{em } \mathbb{C} \quad (5.59)$$

Note que as propriedades dissipativas do operador $\mathcal{A}$ implicam na existência de uma constante positiva C tal que:

$$d_1 |U|^2 + d_2 |V|^2 + d_3 |W|^2 + \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) |\xi_x(s)|^2 ds dx \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.60)$$

Doravante, C irá denotar uma constante positiva, que pode ser diferente em diferentes lugares.

Lema 5.1. *Sob as notações acima, existe uma constante $C > 0$, tal que:*

$$\rho_2^1 \int_0^{L_0} |\Psi^1|^2 dx \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \left(\|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1\|_{L^2(0, L_0)} + \|\psi_x^1\|_{L^2(0, L_0)} \right) \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C |R_1|,$$

$$\text{onde } R_1 := \left(b \psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g(s) \xi_x(L_0, s) ds \right) \left(\int_0^\infty g(s) \overline{\xi(L_0, s)} ds \right).$$

Demonstração: Multiplicando (5.49) por $\int_0^\infty g(s) \overline{\xi(s)} ds$, e usando (5.54), obtemos:

$$\begin{aligned} \beta \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\Psi^1|^2 dx &= k_1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\xi(s)} (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) ds dx + b \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_x(s)} \psi_x^1 ds dx + \\ &+ \rho_2^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_s(s)} \Psi^1 ds dx + \int_0^{L_0} \left| \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right|^2 dx \\ &- \rho_2^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \overline{f^{13}(s)} \Psi^1 ds dx - \rho_2^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\xi(s)} f^9 ds dx - R_1. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Mas, usando (5.20) e (5.60), encontramos

$$\operatorname{Re} \left[\rho_2^1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_s(s)} \Psi^1 ds dx \right] \leq \frac{\beta \rho_2^1}{2} \int_0^{L_0} |\Psi^1|^2 dx + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.62)$$

Novamente usando (5.60) concluímos que

$$\operatorname{Re} \left[k_1 \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\xi(s)} (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) ds dx \right] \leq C \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \quad (5.63)$$

e também:

$$\operatorname{Re} \left[b \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \overline{\xi_x(s)} \psi_x^1 ds dx \right] \leq C \|\psi_x^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \quad (5.64)$$

Tomando a parte real em (5.61) e usando (5.62)-(5.64), obtemos a conclusão desejada. ■

Lema 5.2. Para $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ dados, existem $C, C_{\varepsilon_1}, C_{\varepsilon_2} > 0$, tais que, para $|\lambda| > 1$, vale:

$$\begin{aligned} k_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1|^2 dx &\leq C |\chi_1| \left| \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx \right| + C_{\varepsilon_1} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon_1 \|\Phi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \\ &+ \varepsilon_2 \|W^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + C_{\varepsilon_2} [\|\psi_x^1\|_{L^2(0, L_0)} + \|\omega_x^1 - \ell \varphi^1\|_{L^2(0, L_0)}] \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\ &+ C |\Phi^1(L_0)| |\Psi^1(L_0)| + C |\psi^1(L_0)| |(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0)| + C_{\varepsilon_2} |R_1| + C |R_2| \end{aligned}$$

onde $R_2 := \left(\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1} \right) \left(b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right) \Big|_{x=0}^{x=L_0}$.

Demonstração: Multiplicando (5.49) por $\overline{(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)}$, e usando (5.41), (5.42) e (5.43), obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1|^2 dx &= \rho_2^1 \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\Psi^1|^2 dx + \rho_2^1 \ell \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{W^1} dx + \quad (5.65) \\ &\quad - \underbrace{\int_0^{L_0} \left(b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right) (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1})_x dx}_{=: I_1} + \\ &\quad + \rho_2^1 \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{(f_x^1 + f^3 + \ell f^5)} dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1}) f^9 dx + R_2. \end{aligned}$$

Usando (5.43), (5.47) e (5.53), podemos reescrever I_1 como:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{b_1 \rho_1^1}{k_1} \Psi^1(L_0) \overline{\Phi^1(L_0)} - \frac{b_1 \rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx - \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \xi_{sx}(s) \overline{\Phi^1} ds dx + \\ &+ \underbrace{\frac{\rho_1^1 \tilde{k}_1}{k_1} \int_0^{L_0} \psi_x^1 (\overline{\omega_x^1 - \ell^1}) dx + \frac{\tilde{k}_1}{k_1} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) (\overline{\omega_x^1 - \ell \varphi^1}) ds dx}_{I_2} + \\ &+ \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \left(b f_x^3 + \int_0^\infty g(s) f_x^{13}(s) ds \right) \overline{\Phi^1} dx + \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \left(b \psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right) \overline{f^7} dx. \end{aligned}$$

E ainda, usando (5.43) e (5.51), podemos reescrever I_2 como:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{b \tilde{k}_1}{k_1} \psi^1(L_0) \overline{(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0)} + \frac{b \rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{W^1} dx + \frac{b \rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} f^3 \overline{W^1} dx + \\ &- b \ell \int_0^{L_0} \psi^1 \overline{(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)} dx + \frac{b \rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \psi^1 \overline{f^{11}} dx. \end{aligned}$$

Retornando com I_1 e I_2 em (5.65), encontramos:

$$\begin{aligned}
k_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1|^2 dx &= \frac{\rho_1^1 \rho_2^1}{k_1} \chi_1 \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\Psi^1|^2 dx + \left(\rho_2^1 \ell + \frac{b \rho_1^1}{k_1} \right) \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{W^1} dx + \\
&\quad - \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \xi_{sx}(s) \overline{\Phi^1} ds dx - b \ell \int_0^{L_0} \psi^1 (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1}) dx + \\
&\quad + \frac{\tilde{k}_1}{k_1} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) (\overline{\omega_x^1 - \ell \varphi^1}) ds dx + \frac{b \rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} f^3 \overline{W^1} dx + \frac{b \rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \psi^1 \overline{f^{11}} dx + \\
&\quad + \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \left(b f_x^3 + \int_0^\infty g(s) f_x^{13}(s) \right) \overline{\Phi^1} ds dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} f^9 (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1}) dx + \\
&\quad + \frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \left(b \psi_x^1 + \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) ds \right) \overline{f^7} dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} \Psi^1 (\overline{f_x^1 + f^3 + \ell f^5}) dx + \\
&\quad + \frac{b_1 \rho_1^1}{k_1} \Psi^1(L_0) \overline{\Phi^1(L_0)} + \frac{b \tilde{k}_1}{k_1} \psi^1(L_0) (\overline{\omega_x^1 - \ell \varphi^1})(L_0) + R_2. \tag{5.66}
\end{aligned}$$

Mas, de (5.60), vemos que, para cada $\varepsilon_1 > 0$, existe $C_{\varepsilon_1} > 0$ tal que:

$$\operatorname{Re} \left[-\frac{\rho_1^1}{k_1} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \xi_{sx}(s) \overline{\Phi^1} ds dx \right] \leq \frac{\varepsilon_1}{4} \|\Phi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + C_{\varepsilon_1} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \tag{5.67}$$

e também:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\tilde{k}_1}{k_1} \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) (\overline{\omega_x^1 - \ell \varphi^1}) ds dx \right] \leq C \|\omega_x^1 - \ell \varphi^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}. \tag{5.68}$$

Além disso, usando (5.43), obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left[-b \ell \int_0^{L_0} \psi^1 (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1}) dx \right] &= \operatorname{Re} \left[\frac{-b \ell}{i \lambda} \int_0^{L_0} (\Psi + f^3) (\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1}) dx \right] \leq \\
&\leq \frac{k_1}{2} \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1|^2 dx + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\Psi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Tomando a parte real em (5.66) e usando (5.67)-(5.69) e o Lema 5.1, obtemos a desigualdade desejada. ■

Lema 5.3. *Existe uma constante $C > 0$, tal que:*

$$\begin{aligned}
b \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 dx &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\
&\quad + C \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\psi^1\|_{L^2(0, L_0)} + C |R_1| + C |R_3|
\end{aligned}$$

onde $R_3 := \left(b \psi_x^1(l_0) + \int_0^\infty g(s) \xi_x(L_0, s) ds \right) \overline{\psi^1(L_0)}$.

Demonstração: Por um lado, multiplicando (5.49) por $\overline{\psi^1}$ e usando (5.43), obtemos:

$$\begin{aligned} b \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 dx &= \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\Psi^1|^2 dx - k_1 \int_0^{L_0} (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) \overline{\psi^1} dx - \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) \overline{\psi_x^1} ds dx + \\ &+ \rho_2^1 \int_0^{L_0} f^9 \overline{\psi^1} dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{f^3} dx + R_3. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Mas, de (5.60), segue que:

$$\operatorname{Re} \left[- \int_0^{L_0} \int_0^\infty g(s) \xi_x(s) \overline{\psi_x^1} ds dx \right] \leq \frac{b}{2} \|\psi_x^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.71)$$

Tomando a parte real em (5.70) e usando (5.71) e o Lema 5.1, obtemos a conclusão desejada. ■

Lema 5.4. Para cada $\varepsilon_2 > 0$, existem $C, C_{\varepsilon_2} > 0$ tais que, para $|\lambda| > 1$, vale:

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \int_0^{L_0} |\Phi^1|^2 dx &\leq C |\chi_1| \left| \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx \right| + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon_2 C \|W^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \\ &+ C_{\varepsilon_2} [\|\psi_x^1\|_{L^2(0,L_0)} + \|\omega_x^1 - \ell \varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}] \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C |\Phi^1(L_0)| |\Psi^1(L_0)| + \\ &+ C [\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2] + C |\psi^1(L_0)| |(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0)| + \\ &+ C |\varphi^1(L_0)| |(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(L_0)| + C |\omega^1(L_0)| |\varphi^1(L_0)| + C_{\varepsilon_2} |R_1| + C |R_2|. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (5.47) por $\overline{\varphi^1}$, e usando (5.41), encontramos:

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \int_0^{L_0} |\Phi^1|^2 dx &= k_1 \int_0^{L_0} (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) \overline{\varphi_x^1} dx - \underbrace{\tilde{k}_1 \ell \int_0^{L_0} (\omega_x^1 - \ell \varphi^1) \overline{\varphi^1} dx}_{I_2} - \rho_1^1 \int_0^{L_0} \Phi^1 \overline{f^1} dx + \\ &- \rho_1^1 \int_0^{L_0} f^7 \overline{\varphi^1} dx - k_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(L_0) \varphi^1(L_0). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Mas, note que, integrando por partes, podemos escrever:

$$\begin{aligned} I_2 &= \tilde{k}_1 \ell \int_0^{L_0} \omega^1 (\overline{\varphi_x^1 + \psi + \ell \omega^1}) dx - \tilde{k}_1 \ell \int_0^{L_0} \omega^1 \overline{\psi^1} dx - \tilde{k}_1 \ell^2 \int_0^{L_0} |\omega^1|^2 dx + \\ &+ \tilde{k}_1 \ell^2 \int_0^{L_0} |\varphi^1|^2 dx - \tilde{k}_1 \ell \omega^1(L_0) \varphi^1(L_0) \end{aligned}$$

de onde segue que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(I_2) &\leq C \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + C [\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2] + \\ &+ C |\omega^1(L_0)| |\varphi^1(L_0)|. \end{aligned}$$

Além disso, é fácil ver que:

$$\operatorname{Re} \left[k_1 \int_0^{L_0} (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) \overline{\varphi_x^1} dx \right] \leq C \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + C \left[\|\psi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 \right].$$

Tomando a parte real em (5.72), usando as duas últimas desigualdades, e escolhendo $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno no Lema 5.2, obtemos a conclusão desejada. ■

Lema 5.5. *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para $|\lambda| > 1$, vale:*

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 \int_0^{L_0} |\omega_x^1 - \ell \varphi^1|^2 dx + \rho_1^1 \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx &\leq C |\chi_2| \left| \int_0^{L_0} \Phi_x^1 \overline{W^1} dx \right| + C \|\psi_x^1\|_{L^2(0, L_0)} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \\ &+ C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \left[\|\varphi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 \right] + \\ &+ C |\Phi^1(L_0)| \left[|\Psi^1(L_0)| + |W^1(L_0)| \right] + C |\psi^1(L_0)| |(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)(L_0)| + \\ &+ C |\varphi^1(L_0)| |(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1)(L_0)| + C |R_1| + C |R_2| + C |R_4| \end{aligned}$$

$$\text{onde } R_4 := -k_1 \left(\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1} \right) (\omega_x^1 - \ell \varphi^1) \Big|_{x=0}^{x=L_0}.$$

Demonstração: Multiplicando (5.47) por $\overline{(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)}$ e usando (5.41) e (5.45), obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 \int_0^{L_0} |\omega_x^1 - \ell \varphi^1|^2 dx &= \rho_1^1 \int_0^{L_0} \Phi_x^1 \overline{W^1} dx + \underbrace{k_1 \int_0^{L_0} (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell \omega^1) \overline{(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)}_x dx}_{I_3} + \\ &+ \rho_1^1 \ell \int_0^{L_0} |\Phi^1|^2 dx - \rho_1^1 \int_0^{L_0} \Phi^1 (\overline{f_x^5 - \ell f^1}) dx - \rho_1^1 \int_0^{L_0} f^{11} \overline{(\omega_x^1 - \ell \varphi^1)} dx - \rho_1^1 \Phi^1(L_0) \overline{W^1(L_0)} + R_4. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Mas, usando (5.51), seguida de (5.41), (5.43) e (5.45), podemos reescrever I_3 como:

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{\rho_1^1 k_1}{\tilde{k}_1} \left[\int_0^{L_0} \Phi_x^1 \overline{W^1} dx + \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{W^1} dx + \ell \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx - \frac{k_1 \ell}{\rho_1^1} \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi + \ell \omega^1|^2 dx \right] + \\ &- \frac{\rho_1^1 k_1}{\tilde{k}_1} \left[\int_0^{L_0} (f_x^1 + f^3 + \ell f^5) \overline{W^1} dx + \int_0^{L_0} (\varphi_x^1 + \psi + \ell \omega^1) \overline{f^{11}} dx \right]. \end{aligned}$$

Indo com I_3 em (5.73) e tomando a parte real, encontramos:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 \int_0^{L_0} |\omega_x^1 - \ell \varphi^1|^2 dx + \rho_1^1 \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx &\leq C |\chi_2| \left| \int_0^{L_0} \Phi_x^1 \overline{W^1} dx \right| + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C |\Phi^1(L_0)| |W^1(L_0)| + C \left[\|\Phi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|\Psi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|\varphi_x^1 + \psi + \ell \omega^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 \right] + C |R_4| \end{aligned}$$

de onde obtemos a conclusão desejada usando os Lemas anteriores. ■

Lema 5.6. *Existe uma constante $C > 0$, tal que:*

$$\begin{aligned} |\Psi^1(L_0)|^2 + \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(L_0, s)ds \right|^2 + \left| b\psi_x^1(0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(0, s)ds \right|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \\ + C\|\psi_x^1\|_{L^2(0, l_0)}^2 + C\|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0, L_0)} \left[\|\psi_x^1\|_{L^2(0, L_0)} + \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (5.74)$$

e

$$\begin{aligned} |\Phi^1(L_0)|^2 + |(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0)|^2 + |\varphi_x^1(0)|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\Phi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \\ + C \left[\|\Psi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|W^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|\omega_x^1 - \ell\varphi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 \right] \end{aligned} \quad (5.75)$$

e ainda:

$$\begin{aligned} |W^1(L_0)|^2 + |(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0)|^2 + |\varphi_x^1(0)|^2 \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\Phi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \\ + C \left[\|W^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 + \|\omega_x^1 - \ell\varphi^1\|_{L^2(0, L_0)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Demonstração: Multiplicando (5.49) por $\left[p \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g(s)\overline{\xi_x(s)}ds \right) \right]$, onde $p \in C^1([0, L_0]; \mathbb{R})$, e usando (5.43) e (5.53), encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{b_1\rho_2^1}{2}p(L_0)|\Psi^1(L_0)|^2 + \frac{p}{2} \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s)\xi_x(s)ds \right|^2 \Big|_{x=0}^{x=L_0} = \frac{b_1\rho_2^1}{2} \int_0^{l_0} p_x |\Psi^1|^2 dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{L_0} p_x \left| b\psi_x^1 + \int_0^\infty g(s)\xi_x(s)ds \right|^2 dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} p \Psi^1 \int_0^\infty g(s)\overline{\xi_{sx}(s)}ds dx + \\ + k_1 \int_0^{L_0} p (\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g(s)\overline{\xi_x(s)}ds \right) dx - \rho_2^1 \int_0^{L_0} p \Psi^1 \int_0^\infty g(s)\overline{f_x^{13}(s)}ds dx + \\ - b\rho_2^1 \int_0^{L_0} p \Psi^1 \overline{f_x^3} dx - \rho_2^1 \int_0^{L_0} p \left(b\overline{\psi_x^1} + \int_0^\infty g(s)\overline{\xi_x(s)}ds \right) f^9 dx. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Tomando a parte real em (5.77), usando (5.60) e escolhendo $p \in C^1([0, L_0]; \mathbb{R})$ tal que $p(L_0) = -p(0) = 2$, obtemos a desigualdade (5.74).

As provas de (5.75) e de (5.76) são análogas e são obtidas multiplicando-se as equações (5.47) e (5.49) por $p(\overline{\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1})$ e $p(\overline{\omega_x^1 - \ell\varphi^1})$, respectivamente. ■

Lema 5.7. *Existe uma constante $C > 0$ tal que:*

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx \leq \\ \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_0^{L_0} \left[|\Phi^1|^2 + |\Psi^1|^2 + |W^1|^2 + |\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1|^2 + |\psi_x^1|^2 + |\omega_x^1 - \ell\varphi^1|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a função $q_n : [L_0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$q_n(x) := \int_x^L e^{-ns} ds = \frac{1}{n} (e^{-nx} - e^{-nL}).$$

Multiplicando (5.48) por $\left[q_n(\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2}) \right]$ e usando (5.42), (5.44) e (5.46), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L e^{-nx} \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 \right] dx &= q_n(L_0) \left[\rho_1^2 |\Phi^2(L_0)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0)|^2 \right] + \\ &- 2\ell\tilde{k}_2 \int_{L_0}^L q_n (\omega_x^2 - \ell\varphi^2) (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2}) dx - 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n \Phi^2 (\overline{\Psi^2 + \ell W^2}) dx + \\ &- 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n \Phi^2 (\overline{f_x^2 + f^4 + \ell f^6}) dx - 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n f^8 (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2}) dx. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Analogamente, multiplicando (5.50) por $q_n \overline{\psi_x^2}$ e usando (5.44), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L e^{-nx} \left[\rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 \right] dx &= q_n(L_0) \left[\rho_2^2 |\Psi^2(L_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(L_0)|^2 \right] + \\ &+ 2k_2 \int_{L_0}^L q_n (\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) \overline{\psi_x^2} dx - 2\rho_2^2 \int_{L_0}^L q_n \Psi^2 \overline{f_x^4} dx - 2\rho_2^2 \int_{L_0}^L q_n \overline{\psi_x^2} f^{10} dx. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Do mesmo modo, multiplicando (5.52) por $q_n(\overline{\omega_x^2 - \ell\varphi^2})$ e usando (5.42) e (5.46), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L e^{-nx} \left[\rho_1^2 |W^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx &= q_n(L_0) \left[\rho_1^2 |W^2(L_0)|^2 + \tilde{k}_2 |(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0)|^2 \right] + \\ &+ 2\ell k_2 \int_{L_0}^L q_n (\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2) (\overline{\omega_x^2 - \ell\varphi^2}) dx + 2\ell\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n W^2 \overline{\Phi^2} dx + \\ &- 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n W^2 (\overline{f_x^6 - \ell f^2}) dx - 2\rho_1^2 \int_{L_0}^L q_n (\overline{\omega_x^2 - \ell\varphi^2}) f^{12} dx. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Destas últimas três igualdades, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{C}{n}\right) \int_{L_0}^L e^{-nx} \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell\varphi^2|^2 \right] dx &\leq \\ &\leq q_n(L_0) \left[k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell\omega^2)(L_0)|^2 + b_2 |\psi_x^2(L_0)|^2 + \tilde{k}_2 |(\omega_x^2 - \ell\varphi^2)(L_0)|^2 \right] + \\ &+ q_n(L_0) \left[\rho_1^2 |\Phi^2(L_0)|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2(L_0)|^2 + \rho_1^2 |W^2(L_0)|^2 \right] + C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Então, tomando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, usando o Lema 5.6, e lembrando que $\mathcal{U} \in D(\mathcal{A})$, obtemos a desigualdade desejada. ■

O próximo lema é crucial para garantir que o decaimento exponencial ocorre também no caso em que $d_1 = d_2 = d_3 = 0$. Com efeito, ele fornece uma estimativa para os termos envolvendo

$|U|^2$, $|V|^2$ e $|W|^2$ que podem ser obtidos de (5.60) apenas quando d_1 , d_2 e d_3 , respectivamente, são positivos.

Lema 5.8. *Existe $C > 0$ tal que:*

$$\begin{aligned} \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2 |v|^2 + \gamma_3 |w|^2 + m_1 |U|^2 + m_2 |V|^2 + m_3 |W|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Demonstração: Por um lado, multiplicando (5.48) por $\left[(x - L_0) (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2}) \right]$, e usando (5.42), (5.44) e (5.46), obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 |\Phi^2(L)|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L)|^2 &= \frac{1}{L - L_0} \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 \right] dx + \\ &- \frac{2\rho_1^2}{L - L_0} \int_{L_0}^L (x - L_0) \Phi^2 (\overline{\Psi^2 + \ell W^2}) dx - \frac{2\ell \tilde{k}_2}{L - L_0} \int_{L_0}^L (x - L_0) (\omega_x^2 - \ell \varphi^2) (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2}) dx + \\ &- \frac{2\rho_1^2}{L - L_0} \int_{L_0}^L (x - L_0) \Phi^2 (\overline{f_x^2 + f^4 + \ell f^6}) dx - \frac{2\rho_1^2}{L - L_0} \int_{L_0}^L (x - L_0) (\overline{\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2}) f^8 dx \end{aligned}$$

e disto, lembrando que $\Phi^2(L) = U$, segue que existe $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 |U|^2 + k_2 |(\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L)|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Analogamente, multiplicando (5.50) por $\left[(x - L_0) \overline{\psi_x^2} \right]$, usando (5.44) e lembrando que $\Psi^2(L) = V$, obtemos que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\rho_2^2 |V|^2 + b_2 |\psi_x^2(L)|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{L_0}^L \left[\rho_2^2 |\Psi^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 \right] dx. \quad (5.83)$$

Do mesmo modo, multiplicando (5.52) por $\left[(x - L_0) (\overline{\omega_x^2 - \ell \varphi^2}) \right]$, usando (5.42), (5.46) e $W^2(L) = W$, concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 |W|^2 + k_2 |(\omega_x^2 - \ell \varphi^2)(L)|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Por outro lado, multiplicando (5.57) por $\bar{u}$ e usando (5.54), temos que:

$$\gamma_1 |u|^2 = m_1 |U|^2 - d_1 U \bar{u} - k_2 \bar{u} (\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2)(L) + m_1 \bar{u} f^{19} + m_1 U \bar{f}^{16}$$

o que nos dá, usando (5.82):

$$\begin{aligned} \gamma_1 |u|^2 &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \\ &+ C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |\Phi^2|^2 + \rho_2^2 |\Psi^2|^2 + \rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Similarmente, multiplicando (5.58) por $\bar{v}$ e usando (5.55) e (5.83), obtemos:

$$\gamma_2 |v|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{L_0}^L \left[\rho_2^2 |\Psi^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 \right] dx, \quad (5.86)$$

e, do mesmo modo, multiplicando (5.59) por $\bar{w}$ e usando (5.56) e (5.84), encontramos:

$$\gamma_3 |w|^2 \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_{L_0}^L \left[\rho_1^2 |W^2|^2 + k_2 |\varphi_x^2 + \psi^2 + \ell \omega^2|^2 + \tilde{k}_2 |\omega_x^2 - \ell \varphi^2|^2 \right] dx. \quad (5.87)$$

Finalmente, de (5.82)-(5.87) segue a conclusão desejada. ■

Com este último lema, estamos prontos para estabelecer o resultado principal desta seção.

Teorema 5.2. *Suponha que as hipóteses (5.19)-(5.21) sobre g sejam válidas e que as velocidades de propagação de ondas da parte viscoelástica da viga sejam iguais, isto é, que $\chi_1 = \chi_2 = 0$. Então, o semigrupo e^{At} é exponencialmente estável.*

Demonstração: Já demonstramos que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Assim, de acordo com o *Teorema de Prüss*, somente precisamos mostrar que existe $C > 0$ tal que:

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.88)$$

Como o operador resolvente é holomorfo, é suficiente estabelecer a desigualdade acima apenas para $|\lambda|$ suficientemente grande. Para isto, note que, por um lado, os Lemas 5.7 e 5.8 nos permitem escrever:

$$E_2(t) \leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C E_1(t). \quad (5.89)$$

Por outro lado, tomando $\chi_1 = 0$ nos Lemas 5.2 e 5.4, fazendo $\chi_2 = 0$ no Lema 5.5, e usando (5.60) e os Lemas 5.1 e 5.3, concluímos que, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, tal

que:

$$\begin{aligned}
E_1(t) &\leq C_\varepsilon \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \left[\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 \right] + \\
&+ \varepsilon \left[|\Phi^1(L_0)|^2 + |(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0)|^2 + |\varphi_x^1(0)|^2 \right] + \\
&+ C_\varepsilon \left[|\varphi^1(L_0)|^2 + |\psi^1(L_0)|^2 + |\omega^1(L_0)|^2 \right] + \\
&+ C_\varepsilon \left[|\Psi^1(L_0)|^2 + \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(L_0, s)ds \right|^2 + \left| b\psi_x^1(0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(0, s)ds \right|^2 \right] + \\
&+ C_\varepsilon \left[|W^1(L_0)|^2 + |(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0)|^2 + |\varphi_x^1(0)|^2 \right]. \tag{5.90}
\end{aligned}$$

Daí, usando (5.75) e tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos:

$$\begin{aligned}
E_1(t) &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \left[\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 \right] + \tag{5.91} \\
&+ C \left[|\varphi^1(L_0)|^2 + |\psi^1(L_0)|^2 + |\omega^1(L_0)|^2 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ C \left[|\Psi^1(L_0)|^2 + \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(L_0, s)ds \right|^2 + \left| b\psi_x^1(0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(0, s)ds \right|^2 \right] + \\
&+ C \left[|W^1(L_0)|^2 + |(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0)|^2 + |\varphi_x^1(0)|^2 \right]. \tag{5.92}
\end{aligned}$$

Agora, segue de (5.74), usando os Lemas 5.3 e 5.1 que, para cada $\delta > 0$, existe $C_\delta > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}
|\Psi^1(L_0)|^2 + \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(L_0, s)ds \right|^2 + \left| b\psi_x^1(0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(0, s)ds \right|^2 &\leq \\
&\leq C_\delta \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \delta E_1(t) + C_\delta \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + C_\delta |\psi^1(L_0)|^2 \tag{5.93}
\end{aligned}$$

e, analogamente, de (5.76), usando os Lemas 5.2 e 5.5, (5.93) e (5.74), obtemos:

$$\begin{aligned}
|W^1(L_0)|^2 + |(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0)|^2 + |\varphi_x^1(0)|^2 &\leq C_\delta \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \delta E_1(t) + \\
&+ C_\delta \left[\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 \right] + \\
&+ C_\delta \left[|\varphi^1(L_0)|^2 + |\psi^1(L_0)|^2 + |\omega^1(L_0)|^2 \right]. \tag{5.94}
\end{aligned}$$

Então, indo com (5.93) e (5.94) em (5.91) e escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, encontramos:

$$\begin{aligned}
E_1(t) &\leq C \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \left[\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 \right] + \\
&+ C \left[|\varphi^1(L_0)|^2 + |\psi^1(L_0)|^2 + |\omega^1(L_0)|^2 \right]. \tag{5.95}
\end{aligned}$$

Mas, de (5.41), (5.43) e (5.45) resulta que:

$$\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 \leq \frac{C}{|\lambda|^2} \left[\|\Phi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\Psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|W^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right]. \tag{5.96}$$

Por outro lado, observando que:

$$|\varphi^1(L_0)| \leq \|\varphi^1\|_{L^\infty} \leq C\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^{1/2}\|\varphi_x^1\|_{L^2(0,L_0)}^{1/2}$$

e usando (5.41), é fácil ver que, para cada $\delta > 0$, existe $C_\delta > 0$, tal que:

$$C|\varphi^1(L_0)|^2 \leq \delta\|\varphi_x^1 + \psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \delta\|\psi_x^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \frac{C_\delta}{|\lambda|^2} \left[\|\Phi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right] \quad (5.97)$$

e, analogamente, usando (5.43) e (5.45), obtemos também:

$$C|\psi^1(L_0)|^2 \leq \delta\|\psi_x^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \frac{C_\delta}{|\lambda|^2} \left[\|\Psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right] \quad (5.98)$$

e

$$C|\omega^1(L_0)|^2 \leq \delta\|\psi_x^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \frac{C_\delta}{|\lambda|^2} \left[\|W^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right]. \quad (5.99)$$

Assim, usando (5.95)-(5.99) e escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, encontramos:

$$E_1(t) \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|^2}E_1(t) + \frac{C}{|\lambda|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo, decorre daí que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, vale:

$$E_1(t) \leq C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.100)$$

Finalmente, de (5.89) e (5.100) resulta que:

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

o que implica em:

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, o semigrupo $(e^{\mathcal{A}t})_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável. ■

5.4 Decaimento Polinomial

Nesta seção, vamos estabelecer a estabilidade polinomial da solução para um caso mais geral do que o que tratamos na seção anterior. Provaremos que, quando $\chi_1 \neq 0$ e $\chi_2 = 0$, o sistema (5.26)-(5.36), (5.8), (5.9), (5.10), (5.12), (5.13)-(5.15), (5.16)-(5.18) decai polinomialmente como $1/\sqrt[4]{t}$. Para mostrar isto, usaremos novamente o *Teorema de Borichev-Tomilov* (teorema 2.7).

Teorema 5.3. *O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ decai polinomialmente como $t^{-1/4}$ quando $\chi_2 = 0$. Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A}^k)$, então*

$$\|T(t)\mathcal{U}_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_k}{t^{k/4}} \|\mathcal{U}_0\|_{D(\mathcal{A}^k)}.$$

Demonstração: De (5.60) e dos Lemas 5.1-5.5, concluímos que:

$$\begin{aligned} E_1(t) &\leq C|\chi_1| \left| \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx \right| + C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \left[\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 \right] + \\ &+ C|\Phi^1(L_0)| [|\Psi^1(L_0)| + |W^1(L_0)|] + C|\psi^1(L_0)| |(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0)| + C|\varphi^1(L_0)| |\omega^1(L_0)| + \\ &+ C|\varphi^1(L_0)| |(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0)| + C|R_1| + C|R_2| + C|R_3| + C|R_4|. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Agora, a fim de estimar o primeiro termo do segundo membro de (5.101), usamos (5.41), (5.43) e (5.45) para encontrar:

$$\Phi_x^1 = i\lambda(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1) - (f_x^1 + f^3 + \ell f^5) - (\Psi^1 + \ell W^1)$$

o que nos permite concluir que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, vale:

$$\left| \int_0^{L_0} \Psi^1 \overline{\Phi_x^1} dx \right| \leq \frac{k_1}{4} \|\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \frac{\rho_1^1}{4} \|W^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + C|\lambda|^2 \|\Psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.102)$$

De (5.101) e (5.102) segue que:

$$\begin{aligned} E_1(t) &\leq C|\lambda|^2 \|\Psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \left[\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 \right] + \\ &+ C|\Phi^1(L_0)| [|\Psi^1(L_0)| + |W^1(L_0)|] + C|\psi^1(L_0)| |(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0)| + C|\varphi^1(L_0)| |\omega^1(L_0)| + \\ &+ C|\varphi^1(L_0)| |(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0)| + C|R_1| + C|R_2| + C|R_3| + C|R_4|. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Daí, usando o Lema 5.1, concluímos que para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} E_1(t) &\leq C_\varepsilon |\lambda|^4 \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \left[\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 \right] + \\ &+ C_\varepsilon [|\varphi^1(L_0)|^2 + |\psi^1(L_0)|^2 + |\omega^1(L_0)|^2] + \\ &+ \varepsilon \left[|\Phi^1(L_0)|^2 + |(\varphi_x^1 + \psi^1 + \ell\omega^1)(L_0)|^2 + |\varphi_x^1(0)|^2 \right] + \\ &+ C_\varepsilon \left[|\Psi^1(L_0)|^2 + \left| b\psi_x^1(L_0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(L_0, s)ds \right|^2 + \left| b\psi_x^1(0) + \int_0^\infty g(s)\xi_x(0, s)ds \right|^2 \right] + \\ &+ C_\varepsilon \left[|W^1(L_0)|^2 + |(\omega_x^1 - \ell\varphi^1)(L_0)|^2 + |\omega_x^1(0)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.104)$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande. Daí, usando o Lema 5.6 e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, encontramos:

$$\begin{aligned} E_1(t) \leq & C|\lambda|^4 \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \left[\|\varphi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\psi^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 + \|\omega^1\|_{L^2(0,L_0)}^2 \right] + \\ & + C \left[|\varphi^1(L_0)|^2 + |\psi^1(L_0)|^2 + |\omega^1(L_0)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Agora, usamos novamente (5.96)-(5.99) escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, para concluir que, para $|\lambda|$ suficientemente grande, vale:

$$E_1(t) \leq C|\lambda|^4 \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Finalmente, juntando isto com (5.89), concluimos que:

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C|\lambda|^8 \|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande, o que nos dá:

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}},$$

encerrando a prova. ■

Capítulo 6

Considerações Finais

No primeiro sistema híbrido considerado, estabelecemos a insuficiência da dissipação fornecida pela carga pontual, para a estabilidade exponencial do sistema. Entretanto, essa dissipação se mostrou eficaz para produzir uma taxa polinomial de decaimento.

No segundo sistema, verificamos claramente a necessidade (restrita a este contexto, sem levar em conta outros mecanismos dissipativos) quanto a suficiência da dissipação dada pelo efeito de memória para se obter a estabilidade exponencial. De fato, na ausência de tais termos, mostramos que o que ocorre é uma falta de decaimento exponencial. E, se os termos de memória atuam efetivamente sobre a parte viscoelástica da viga, então o sistema é exponencialmente estável. Além disso, as propriedades dissipativas provocadas pela carga pontual se mostraram irrelevantes para esse decaimento; ou seja, a estabilidade exponencial acontece, mesmo quando desprezamos a ação dissipativa da carga. Entretanto, assim como ocorreu com o primeiro modelo, quando consideramos apenas a dissipação fornecida pela carga, esta acarreta uma taxa polinomial de decaimento.

No terceiro sistema, quando consideramos a viga de Bresse em balanço com o efeito de memória agindo apenas sobre o momento fletor, esta dissipação, embora necessária, não se mostrou suficiente para estabilizar exponencialmente o sistema; e, para atingir esse objetivo, uma hipótese adicional precisou ser acrescentada: de que as velocidades de propagação de ondas das equações da parte viscoelástica da viga sejam iguais. Retirando-se parte desta hipótese adicional, obtivemos o decaimento polinomial do sistema; mas faltou concluir sobre a necessidade desta hipótese, uma vez que,

na falta dela, não conseguimos mostrar a falta de estabilidade exponencial do sistema. Assim, esta é uma questão que continua em aberto.

As dissipações introduzidas pelas cargas pontuais nos três modelos estudados não se mostraram relevantes para a estabilidade exponencial, uma vez que esta se dá mesmo quando tais dissipações não estão presentes. Além disso, elas também não se mostraram fortes o bastante para, sozinhas, produzirem estabilidade exponencial dos sistemas, o que ficou claro, por exemplo, quando mostramos a falta de estabilidade exponencial na ausência dos termos de memória, no segundo modelo. Contudo, quando essas foram as únicas dissipações efetivas sobre os modelos, elas se mostraram suficientes para provocar uma taxa polinomial de decaimento.

A seguir, listamos algumas sugestões para possíveis trabalhos futuros.

1. Analisar o comportamento assintótico do sistema híbrido de Bresse, mas desta vez com uma única memória agindo apenas sobre a tensão cortante ou sobre a tensão longitudinal.
2. Considerar outras condições de contorno para a viga de Euler-Bernoulli.
3. Considerar problemas de transmissão para a viga de Euler-Bernoulli.
4. Estudar se há relação entre o decaimento do núcleo de cada memória com o tipo da taxa de decaimento dos sistemas; por exemplo, analisar o comportamento assintótico dos sistemas para funções de relaxamento decaindo apenas polinomialmente.
5. Considerar outros tipos de dissipação agindo sobre a viga de Bresse, como por exemplo, do tipo Kelvin-Voigt.
6. Considerar problemas híbridos para vigas constituídas por três ou mais componentes. Uma situação interessante seria, por exemplo, considerar a viga formada por três materiais fisicamente diferentes, um viscoelástico (com memória ou de Kelvin-Voigt), outro elástico e um terceiro, com dissipação dada por um mecanismo de atrito. Aqui, além do interesse do papel de cada dissipação na estabilidade do modelo, há ainda o interesse em se verificar a influência que as possíveis posições de cada material na viga eventualmente teriam nas taxas de decaimento.
7. Considerar sistemas híbridos para outros tipos de estruturas, tais como placas de Mindlin-Timoshenko, por exemplo, com cargas anexadas às suas extremidades.
8. Considerar problemas de transmissão com outros tipos de materiais dissipativos, tais como materiais termoelásticos, por exemplo.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A.. *Sobolev Spaces*. Academic Press. 1975.
- [2] ALVES, M. S. et al. *Uniform Stabilization for the Transmission Problem of the Timoshenko System with Memory*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 369, (2010), 323-345.
- [3] AMMAR-KHODJA, F.; KERBAL, S.; SOUFYANE, A. *Stabilization of the Nonuniform Timoshenko Beam*. J. Math. Anal. Appl. 327 (2007), 525 - 538.
- [4] ANDREWS, K. T.; FERNANDEZ, J. R.; SHILLOR, M. *A Thermoviscoelastic Beam With a Tip Body*. Computational Mechanics, Vol. 33 (1), (2004). 225-234.
- [5] ANDREWS, K.T.; SHILLOR, M. *Vibrations of a Beam With a Damping Tip Body*. Mathematical and Computer Modelling 35 (2002), 1033-1042.
- [6] BORICHEV, A.; TOMILOV, Y. *Optimal Polynomial Decay of Functions and Operator Semigroups*. Math. Ann. Vol. 347 (2), (2009), 455-478.
- [7] BOUSSOUIRA, F. A.; MUÑOZ RIVERA, J.E.; ALMEIDA JR, D.S. *Stability to Weak Dissipative Bresse System*. J. Math. Anal. Appl. 374 (2) (2011) 481-498.
- [8] BRÉZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer. 2010.
- [9] CHARLES, Wenden; SORIANO, J. A.; NASCIMENTO, F.A. F.; RODRIGUES, J. H.. *Decay Rates for Bresse System with Arbitrary Nonlinear Localized Damping*. Journal of Differential Equations. 255(8) (2013) 2267-2290.

- [10] CHEN, X.; JUNGEL, A.; LIU, J.. *A Note on Aubin-Lions-Dubinskii Lemmas*. Acta Appl. Math. 133(1), (2014), 33-43.
- [11] DAFERMOS, C. M. *On Abstract Volterra Equation with Applications to Linear Viscoelasticity*. Differential and Integral Equations. Vol. 7(1) (1970), 554-569.
- [12] DAFERMOS, C. M. *Asymptotic Stability in Viscoelasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal.. Vol. 37(1) (1970), 297-308.
- [13] D'ANDREA-NOVEL, B.; BOUSTANY, F.; CONRAD, F.; RAO, B. *Feedback Stabilization of a Hybrid PDE-ODE System, Application to an Overhead Crane*, Math. Control Signals Systems, (1994). p. 1-22.
- [14] ENGEL, K.; NAGEL, R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag (2000).
- [15] FABRIZIO, M.; MORRO, A. *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*. SIAM Studies in Applied Mathematics. Vol. 12 (1992).
- [16] FATORI, L.H.; MONTEIRO, R. N. *The optimal Decay Rate for a Weak Dissipative Bresse System*. Applied Mathematics Letters 25 (2012) 600-604.
- [17] FATORI, L.H.; MUÑOZ RIVERA, J.E. *Rates of Decay to Weak Thermoelastic Bresse System*. IMA J. Appl. Math. 75 (6) (2010) 881-904.
- [18] FEIREISL, E.; O'DOWD, G. *Stabilisation d'un Système Hybride par un Feedback non Linéaire, non Monotone*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I, Mathématique, Vol. 326(3), (1998), 323-327.
- [19] LIU, Z.; RAO, B. *Energy Decay Rate of the Thermoelastic Bresse System*. Z. Angew. Math. Phys. 60 (2009) 54-69.
- [20] GOHBERG, I.; GOHBERG, S.; KAASHOEK, M.A. *Classes of Linear Operators I*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 49, Birkhäuser Verlag, 1990.
- [21] GOMES, A. M. *Semi-Grupos Não-Lineares e Equações Diferenciais em Espaços de Banach*. Textos de Métodos Matemáticos 24 - IM-UFRJ. 1992.

- [22] GROBBELAAR-VAN DALSEN, M. *Uniform Stability for the Timoshenko Beam With Tip Load*. Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 361 (1), (2010), 392-400.
- [23] KATO, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, New York, (1980).
- [24] KIM, J.U.; RENARDY, Y. *Boundary Control of the Timoshenko Beam*. SIAM, J. Control Optim. 25 (6) (1987) 1417-1429.
- [25] LI, F.L.; WU, Z.K.; HUANG, K.M. *A Difference Scheme for Solving the Timoshenko Beam Equations with Tip Body*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series Vol. 24, No. 2 (2008), 337-352.
- [26] LI, F.L.; SUN, Z.Z. *A Finite Difference Scheme for Solving the Timoshenko Beam Equations With Boundary Feedback*. Journal of Computational and Applied Mathematics 200 (2007), 606-627.
- [27] LITTMAN, W.; MARKUS, L. *Stabilization of a Hybrid System of Elasticity by Feedback Boundary Damping*. Ann. Mat. Pura Appl. 152 (1988) 281-330.
- [28] LIU, K.; LIU, Z. *Boundary Stabilization of Nonhomogeneous Beam with Rotatory Inertia at the Tip*, Comp. Appl. Math., 114 (2000), 1-10.
- [29] LIU, Z.; ZHENG, S. *Semigroups Associated With Dissipative Systems*. In CRC Research Notes in Mathematics 398, Chapman & Hall, (1999).
- [30] MACCELLI, A.; MELCHIORRI, C. *Modeling and Control of the Timoshenko Beam. The Distributed Port Hamiltonian Approach*. SIAM J. Control Optim. Vol. 43, No. 2, (2004), 743-767.
- [31] MESSAOUDI, S. A.; MUSTAFA, M. I. *On The Internal and Boundary Stabilization of Timoshenko Beams*. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 15 (2008), 655-671.
- [32] MESSAOUDI, S. A.; MUSTAFA, M. I. *General Energy Decay Rates for a Weakly Damped Timoshenko System*. Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 16, No. 2, (2010), 211-226.
- [33] MIFDAL, A. *Stabilisation Uniforme d'un Système Hybride*. C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1987) 37-42.

- [34] MORGUL, O. *Boundary Control of a Timoshenko Beam Attached to a Rigid Body: Planar Motion*, Internat. J. Control 54 (1991) 763-791.
- [35] MUÑOZ RIVERA, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. Série Textos Avançados - LNCC. 1999.
- [36] MUÑOZ RIVERA, J.E.; RACKE, R., *Global Stability for Damped Timoshenko Systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 9 no. 6 (2003), 1625-1639.
- [37] MUÑOZ RIVERA, J.E.; OQUENDO, H.P. *The Transmission Problem of Viscoelastic Waves*. Acta Appl. Math. 62 (2000), 1-21.
- [38] MUÑOZ RIVERA, J. E.; RACKE, R. *Smoothing Properties, Decay and Global Existence of Solutions to Nonlinear Coupled System of Thermoelastic Type*. SIAM J. Math. Anal. Vol. 26 (1995), 1547-1563.
- [39] PATA, V.; GRASSELLI, M. *Uniform Attractors of non Autonomous Dynamical Systems with Memory*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 50 (2002) 155-178.
- [40] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [41] PRÜSS, J. *On the Spectrum of C_0 -semigroups*. Trans. AMS. 284 (1984), 847-857.
- [42] RAPOSO, C.A.; FERREIRA, J.; SANTOS, M.L.; CASTRO, N.N.O. *Exponential Stability for the Timoshenko System with Two Weak Damping*. Appl. Math. Lett. 18 (2005), 535-541.
- [43] REED, M.; SIMON, B.. *Methods of Modern Mathematical Physics, Volumes I- IV*. Academic Press Inc., London, 1970.
- [44] RENARDY, M. *On The Type of Certain C_0 -semigroups*. Journal of Differential and Integral Equations Vol. 18 (1) (1993), 1299-1309.
- [45] SARE, H. D. F.; RACKE, R. *On the Stability of Damped Timoshenko Systems: Cattaneo versus Fourier Law*. Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 194 (1), (2009), 221- 251.
- [46] SARE, H. D. F.; MUÑOZ RIVERA, J.E. M. *Stability of Timoshenko Systems With Past History*. J. Math. Anal. Appl. 339 (1), (2008), 482-502.

- [47] SHEN, Z.B.; LI, X.F.; SHENG, L.P.; TANG, G.J. *Transverse Vibration of Nanotube-based Micro-mass Sensor via Nonlocal Timoshenko Beam Theory*. Computational Materials Science 53 (2012), 340-346.
- [48] SORIANO, J. A.; MUÑOZ RIVERA, J.E.; FATORI, L.H. *Bresse System with Indefinite Damping*. J. Math. Anal. Appl. 387 (2012) 284-290.
- [49] SORIANO, J. A.; CHARLES, W.; SCHULZ, R. A.. *Asymptotic Stability for Bresse Systems*. J. Math. Anal. Appl. 412 (2014) 369-380.
- [50] TIMOSHENKO, S. *History of Strength of Materials*. Dover Publications, New York, 1953.
- [51] TIMOSHENKO, S. *Vibration Problems in Engineering*. Van Nostrand, New York, 1928.
- [52] WEHBE, A.; YOUSSEF, W. *Exponential and Polynomial Stability of an Elastic Bresse System with Two Locally Distributed Feedbacks*. JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS 51, 103523 (2010).
- [53] WEYL, H. *Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die Zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen*. Math. Ann. Vol. 68 (2) (1910), 220-269.
- [54] ZIETSMAN, L.; VAN RENSBURG, N.F.J.; VAN DER MERWE, A.J. *A Timoshenko Beam with Tip Body and Boundary Damping*. Wave Motion 39 (2004), 199-211.