

# Propriedades assintóticas de modelos de misturas e sistemas híbridos

**Francis Félix Córdova Puma**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera**

Rio de Janeiro

Abril de 2014

## Ficha Catalográfica

C796p Cordova Puma, Francis Felix

Propriedades assintóticas de modelos de misturas e sistemas híbridos / Francis Felix Cordova Puma. – Rio de Janeiro, 2014. 105f. : il.; 30 cm.

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Tese (doutorado) – UFRJ / Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2014.

Referências: f. 102-105

1. Termoelasticidade - Modelos Matemáticos - Tese. 2. Teoria assintótica 3. Sistemas híbridos I. Muñoz Rivera, Jaime E.(Orient.). II.Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática,Programa de Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDD 531

# Propriedades assintóticas de modelos de misturas e sistemas híbridos

Francis Félix Córdova Puma

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

(Folha de aprovação)

# Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus por tantas oportunidades felizes e de viver esta etapa.

Agradeço a todos os professores do IM-UFRJ dos quais recebi aula pelos ensinamentos dados e pelo exemplo. Em especial, aos professores Jaime E. M. Rivera pela orientação e paciência que sempre teve para entender e atender aos meus questionamentos, e Hugo Fernandez Sare pelas sugestões e contribuição, e aos membros da banca pelos seus comentários e sugestões que ajudaram a diminuir os erros presentes nesta tese.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro ao longo do meu doutorado. A toda minha família e amigos que torceram por mim, muito obrigado. Em especial agradeço a minha Mãe, Viviana Puma, meu Pai, Felipe Cordova, os meus irmãos Antonio, Maykol e Henry pelo amor e apoio intenso de família e por estarem sempre unidos a mim apesar da distância. Conheci pessoas maravilhosas aqui no Rio de Janeiro, que me brindaram seu apoio e amizade, brasileiros e estrangeiros, amigos e colegas de estudos que compartilharam comigo esta etapa de formação, Por isso lhes agradeço muito.

# Resumo

## Propriedades assintóticas de modelos de misturas e sistemas híbridos

Resumo da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Neste trabalho investigamos o comportamento assintótico das soluções dos problemas de valor inicial e fronteira da teoria unidimensional para mistura de sólidos termoelástica. Também consideramos a mistura de  $n$  sólidos com dissipação friccional em domínios limitados e não limitados ( $\mathbb{R}$ ). Finalmente, estudamos um problema de contacto constituído por um material com duas partes, sendo a primeira parte viscoelástico e a segunda parte possui uma extremidade livre ligada a um corpo rígido, o modelo matemático é uma equação diferencial parcial acoplado com uma equação diferencial ordinária, tais sistemas são chamados de híbridos. Em cada caso, mostramos a existência e unicidade de soluções globais fortes. Nosso principal objetivo é apresentar as condições que asseguram a estabilidade exponencial do semigrupo correspondente aos modelos de mistura. Para o modelo híbrido mostramos a estabilidade polinomial. Os resultados que consideramos relevantes para a teoria de mistura de sólidos está na caracterização da estabilidade exponencial que apresentamos nos capítulos 2 e 3, tais resultados são novos e descrevem de forma completa o comportamento assintótico das soluções destes modelos.

A ferramenta utilizada é a teoria de semigrupos e operadores dissipativos em espaços de Hilbert. Especificamente o resultado de Pruss [33] sobre estabilidade exponencial de um semigrupo e o Teorema de Borichev e Tomilov para o decaimento polinomial [9].

**palavras-chave:** Semigrupo  $C_0$ ; Estabilidade linear; Estabilidade Exponencial; Misturas termoelástica e com dissipação friccional; sistemas híbridos.

# Abstract

## Asymptotic properties of models for mixture and hybrid systems

In this work we investigate the asymptotic behaviour of solutions to the initial boundary value problem for a one-dimensional theory of mixtures of thermoelastic materials. We also consider the mixture of  $n$  materials in the presence of a frictional damping in bounded and unbounded domains ( $\mathbb{R}$ ). Finally we study hybrid systems, which consists of a compost material with a tip load. In each case, we show the existence and uniqueness of global strong solutions. Our main goal is to present conditions which insure the exponential stability and Polynomial stability of the corresponding semigroup.

The main result about the solids mixture is the characterization of exponential stability presented in Chapters 2 and 3, these results are new and fully describe the asymptotic behaviour of the solutions. The tool used is the theory of semigroups and dissipative operators in Hilbert spaces. Specifically the result of Pruss [33] on exponential stability of a semigroup and the Borichev-Tomilov theorem on polynomial stability [9].

**keywords:**  $C_0$ -semigroup; Linear stability; Exponential stability; frictional and thermoelastic mixtures; hybrid systems.

## Notações

- $C([0, \infty[, \mathcal{H})$  é o espaço das funções contínuas de  $[0, \infty[$  em um espaço de Banach  $\mathcal{H}$ .
- $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  é o espaço dos operadores lineares e contínuos em  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  denota o subespaço dos operadores compactos.
- $\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}$  é o conjunto resolvente do operador fechado  $\mathcal{A}$ .
- $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$  é o espectro de  $\mathcal{A}$ .
- $R(\lambda; \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$  é o operador resolvente.
- $w^* = \bar{w}^\top$ ,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ . Transposta do conjugado.
- $z \cdot \bar{w} = w^* z = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$  é o produto interno em  $\mathbb{C}^n$ .
- $\mathbf{A} \succ 0$  denota a propriedade de  $\mathbf{A}$  ser uma matriz definida positiva.
- $\mathbf{A} \succeq 0$  denota a propriedade de  $\mathbf{A}$  ser uma matriz semidefinida positiva.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>10</b>
1.1	Matrizes . . . . .	10
1.2	Espaços de Sobolev . . . . .	13
1.3	Transformada de Fourier . . . . .	16
1.4	Desigualdades e resultados importantes . . . . .	18
1.5	Teoria de Semigrupos e algumas definições . . . . .	20
1.6	Semigrupos $C_0$ gerados por operadores dissipativos não limitados . . . . .	26
1.7	Modelos matemáticos para mistura de sólidos . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Mistura de sólidos com dissipação friccional</b>	<b>31</b>
2.1	Existência e Unicidade . . . . .	31
2.2	Estabilidade Exponencial . . . . .	34
2.3	Exemplo: Matrizes Observáveis . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Mistura de sólidos termoelásticos</b>	<b>52</b>
3.1	Existência e Unicidade . . . . .	52
3.2	Estabilidade Exponencial . . . . .	58
3.3	Exemplos: . . . . .	65



<b>4</b>	<b>Mistura de sólidos com dissipação friccional em <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>69</b>
4.1	Existência e Unicidade . . . . .	70
4.2	Estabilidade exponencial . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Um Sistema Híbrido</b>	<b>81</b>
5.1	Existência e Unicidade . . . . .	83
5.2	Estabilidade Polinomial . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>100</b>
6.1	Conclusões . . . . .	100
6.2	Perspectivas e trabalhos futuros . . . . .	101
	<b>Referências</b>	<b>102</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste Capítulo estabeleceremos alguns resultados e notações que utilizaremos no decorrer deste trabalho. Os detalhes podem ser encontrados em Roger A. Horn [36], Bernstein [7], Brezis [8], Adams [1], Yosida [38], Rudin [37], Pazy [32], Prüss [33], Renardy [35], Huang [13], Borichev e Tomilov [9], Liu e Zheng [22].

### 1.1 Matrizes

**Definição 1.1.1.** *Uma matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é chamada hermitiana se  $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^\top$ .*

Usaremos a notação  $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^\top$ . Desta forma vemos que, se  $\mathbf{A}$  é uma matriz real hermitiana é equivalente a que  $\mathbf{A}$  seja uma matriz simétrica.

Lembremos que as matrizes hermitianas possuem autovalores reais

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} \implies \sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}.$$

A continuação apresentamos algumas propriedades que são relevantes para o desenvolvimento de este trabalho.

**Teorema 1.1.2.** *Seja  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , então as seguintes afirmações são verdadeiras*

(i)  $z^* \mathbf{A} z \in \mathbb{R}$  para todo  $z \in \mathbb{C}^n$  se, e somente se  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ .

(ii)  $z^* \mathbf{A} z \in i\mathbb{R}$  para todo  $z \in \mathbb{C}^n$  se, e somente se  $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$ .

(iii)  $z^* \mathbf{A} z = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}^n$  se, e somente se  $\mathbf{A} = 0$ .

**Teorema 1.1.3.** *Seja  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Então são equivalentes as seguintes afirmações*

(i)  $\mathbf{B}$  é simétrica,

(ii)  $z^* \mathbf{B} z$  é real para todo  $z \in \mathbb{C}^n$ ,

(iii)  $\mathbf{B}$  é normal ( $\mathbf{B} \mathbf{B}^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{B}$ ) e todos seus autovalores são números reais,

(iv) existe uma matriz ortogonal  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz diagonal  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^\top$ .

**Definição 1.1.4.** *Seja  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  uma matriz hermitiana.*

(i) Definimos a forma complexa associada, sendo como

$$z^* \mathbf{A} w = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \bar{z}_i w_j \quad ; \quad z, w \in \mathbb{C}^n$$

que se reduz ao produto interno de  $\mathbb{C}^n$  se  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ .

(ii)  $\mathbf{A}$  é chamada definida positiva ( $\mathbf{A} \succ 0$ ), se

$$z^* \mathbf{A} z > 0 \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

(iii)  $\mathbf{A}$  é chamada semidefinida positiva ( $\mathbf{A} \succeq 0$ ), se

$$z^* \mathbf{A} z \geq 0 \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

**Teorema 1.1.5. (Caracterização)** *Seja  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  uma matriz hermitiana.  $\mathbf{A}$  é semidefinida positiva se, e somente se todos seus autovalores são não negativos.  $\mathbf{A}$  é definida positiva se, e somente se todos seus autovalores são positivos.*

**Teorema 1.1.6. (Rayleigh-Ritz)**

*Seja  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  uma matriz hermitiana e  $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$  seus autovalores. então*

$$\lambda_{\min} |z|^2 \leq z^* \mathbf{A} z \leq \lambda_{\max} |z|^2 \quad ; \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

*Demonstração.* Ver Roger A. Horn [36].

Uma consequência do Teorema acima é o fato de que a forma complexa

$$\int_0^l U^* \mathbf{A} V dx, \quad U, V \in [L^2(0, l)]^n$$

é um produto interno que induz uma norma equivalente à norma de  $[L^2(0, l)]^n$  se  $\mathbf{A} \succ 0$ .

**Teorema 1.1.7.** *Sejam  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  positivas semidefinidas, então todos os autovalores de  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  são não negativos. Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são positivas definidas, então todo autovalor de  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  é positivo.*

*Demonstração.* Ver Corolário 8.3.6. Bernstein [7].

**Teorema 1.1.8. (Diagonalização simultânea)** *Seja  $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}^{n \times n}$ , suponhamos que todo elemento de  $\mathcal{F}$  é uma matriz normal ( $\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^*$ ). Então, existe uma matriz unitária  $\mathbf{U} \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tal que  $\mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}$  é diagonal para todo  $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$  se, e somente se  $\mathcal{F}$  satisfaz*

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{F}.$$

Onde  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Ver Bernstein [7].

**Teorema 1.1.9.** *Sejam  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$  matrizes hermitianas e  $\mathbf{A} \succ 0$ . Então, existe uma matriz não singular  $\mathbf{S} \in \mathbb{F}^{n \times n}$  tal que  $\mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^* = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{S}^*$  é diagonal.*

*Demonstração.* Ver Bernstein [7].

## 1.2 Espaços de Sobolev

Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  dotado da medida de Lebesgue com fronteira  $\partial\Omega$ . Suponhamos conhecidos os conceitos de função integrável, mensurável, conjunto de medida nula, etc.; ver, por exemplo, [37]. Definimos, para  $1 \leq p < \infty$ , o espaço  $L^p(\Omega)$  como o espaço das funções reais  $u$ , mensuráveis em  $\Omega$ , tais que  $|u|^p$  é integrável a Lebesgue em  $\Omega$ , isto é,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} ; \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Em  $L^p(\Omega)$  definimos a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u(x)|^p dx ; \quad 1 \leq p < \infty$$

com a qual  $L^p(\Omega)$  resulta ser um espaço de Banach. No caso  $p = \infty$ ,  $L^p(\Omega)$  representa o espaço de todas as funções essencialmente limitadas em  $\Omega$  com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Também neste caso  $L^\infty(\Omega)$  é um espaço de Banach. Quando  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

e norma induzida

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

**Teorema 1.2.1. (Desigualdade de Hölder)** *Sejam  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$  com  $p$  e  $q$  satisfazendo  $1 \leq p, q \leq \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então  $fg \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

*Demonstração.* Ver [8].

**Lema 1.2.2.** *Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ .*

- (i) *Se  $1 < p < \infty$ , então  $L^p(\Omega)$  é um espaço de Banach reflexivo. Entretanto,  $L^1(\Omega)$  e  $L^\infty(\Omega)$  são espaços de Banach não reflexivos.*
- (ii) *Se  $1 \leq p < \infty$ , então  $L^p(\Omega)$  é separável. Entretanto,  $L^\infty(\Omega)$  não é separável.*

*Demonstração.* Ver [8].

Seja  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Denotamos por  $D^\alpha$  o operador derivação de ordem  $|\alpha|$  definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Quando  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ , definimos  $D^\alpha u = u$ .

Com estas notações definimos o espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  como o espaço de todas as funções reais  $u \in L^p(\Omega)$  tais que a derivada  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq m$ , isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) ; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

A derivada é considerada no sentido das distribuições definidas sobre o espaço  $C_0^\infty(\Omega)$ . Definimos, em  $W^{m,p}(\Omega)$ , a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx$$

com a qual  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach. O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  é chamado *espaço de Sobolev de ordem m*.

**Teorema 1.2.3.**  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach separável se  $1 \leq p < +\infty$ , e reflexivo e uniformemente convexo se  $1 < p < +\infty$ .

Definimos o espaço de Banach  $W_0^{m,p}(\Omega)$  como o fecho do espaço  $C_0^\infty$  em  $W^{m,p}(\Omega)$ , isto é,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Quando  $p = 2$ ,  $W^{m,2}(\Omega)$  é denotado por  $H^m(\Omega)$  e este espaço é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

e norma dada por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx .$$

No caso particular em que  $m = 1$ , tem-se o espaço  $H^1(\Omega)$  definido por

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) ; i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

também é possível identificar via teorema do traço, os espaços

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) ; u = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}.$$

Ver [8].

Em  $H^1(\Omega)$  temos o seguinte produto interno:

$$((u, v))_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

e a norma induzida

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx .$$

**Teorema 1.2.4. (Imersões de Sobolev)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^m$ .*

(i) *Se  $mp < n$ , então a seguinte inclusão é contínua*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega) , \quad \text{onde } \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

*Além disso, a inclusão é compacta para qualquer  $q$ , com  $1 \leq q < q^*$ .*

(ii) *Se  $mp = n$ , então a seguinte inclusão é contínua e compacta*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) , \quad \text{para todo } 1 \leq q < \infty.$$

*Além disso, se  $p = 1$  e  $m = n$ , então vale a mesma relação acima para  $q = \infty$ .*

(iii) *Se  $k + 1 > m - \frac{n}{p} > k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , então escrevendo  $m - \frac{n}{p} = k + \alpha$ , com  $0 < \alpha < 1$ , temos que a seguinte inclusão é contínua*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) ,$$

*onde  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  representa o espaço das funções em  $C^k(\overline{\Omega})$  cujas derivadas de ordem menor ou igual a  $k$  são  $\alpha$ -Hölder contínuas, isto é,*

$$|D^\gamma u(x) - D^\gamma u(y)| \leq L(u) \|x - y\|^\alpha ; \quad \forall x, y \in \Omega \text{ e } \forall \gamma \in \mathbb{N}^n, |\gamma| \leq k.$$

*Além disso, se  $n = m - k - 1$ ,  $\alpha = 1$  e  $p = 1$ , então a inclusão vale também para  $\alpha = 1$ , e a inclusão  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ , é compacta para todo  $0 \leq \beta < \alpha$ .*

*Demonstração.* Ver [1].

**Teorema 1.2.5. (Desigualdade de Poincaré)** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ . Então existe uma constante positiva  $c_p$  que depende univocamente de  $\Omega$  e  $n$  tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1.1)$$

onde  $c_p$  é a constante de Poincaré.

*Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado com fronteira de classe  $C^1$ . Então existe uma constante positiva  $c_p$  que depende univocamente de  $\Omega$  e  $n$  tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_p \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| \right), \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (1.2)$$

(1.1) e (1.2) são conhecidas como desigualdade de Poincaré.

*Demonstração.* Ver [1], [8].

**Observação 1.2.6.** *Se  $u = 0$  em  $\Gamma \subset \partial\Omega$  uma parte aberta de  $\partial\Omega$ , então a desigualdade de Poincaré também é válida.*

Em particular,  $\|\nabla(\cdot)\|_{L^p(\Omega)}$  é uma norma em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , equivalente à norma  $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ ; em  $H_0^1(\Omega)$  a expressão  $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$  é uma norma equivalente à norma  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

No Capítulo 5 usamos um tipo de desigualdade de Poincaré, que enunciamos a continuação:

**Lema 1.2.7.** *Seja  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto limitado. Então existe uma constante positiva  $c$  tal que*

$$\|u\|_{L^2(a,b)} \leq c \|u_x\|_{L^2(a,b)}, \quad \forall u \in H^1(a,b), \quad u(a) = 0. \quad (1.3)$$

### 1.3 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier fornece um útil instrumento no estudo das equações diferenciais parciais.

**Definição 1.3.1. (Espaço de Schwartz  $\mathcal{S}$ )** *Ou espaço das funções rapidamente decrescentes, é o subespaço vetorial formado pelas funções  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tais que:*



$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^k D^\alpha \varphi(x) = 0$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

Introduzimos em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  uma topologia localmente convexa, considerando a família enumerável de seminormas  $\{p_{m,k}(\cdot)\}$  definida por

$$p_{m,k}(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)| \quad (1.4)$$

Definimos a seguinte noção de convergência: *uma sucessão  $\{\varphi_\nu\}$  de funções de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  converge para zero, quando para todo  $k, m \in \mathbb{N}$  a sucessão  $\{p_{m,k}(\varphi_\nu)\}$  converge para zero.* A sucessão  $\{\varphi_\nu\}$  converge para  $\varphi$  em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se  $\{p_{m,k}(\varphi_\nu - \varphi)\}$  converge para zero para todo  $k, m \in \mathbb{N}$ .

As formas lineares definidas em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , contínuas no sentido da convergência definida em  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , são denominadas *Distribuições temperadas*. O espaço vetorial de todas as Distribuições temperadas com a convergência pontual de sucessões será representado por  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Assim

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu = T \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ se } \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle T_\nu, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Qualquer função  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  define uma distribuição temperada. Além disso,  $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'$  é uma inclusão contínua.

Para  $\varphi \in \mathcal{S}$  a transformada de Fourier  $\widehat{\varphi}$  é definida por

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx$$

**Teorema 1.3.2.** *Seja  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Então*

- $(\widehat{D_x^\alpha \varphi})(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$
- $\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \widehat{\varphi}(\xi) = 0.$

O Teorema anterior diagonaliza o operador diferencial  $D_x^\alpha$  agindo em  $\mathcal{S}$  no operador de multiplicação por  $(i\xi)^\alpha$  no espaço  $\{\widehat{\varphi}; \varphi \in \mathcal{S}\}$ . Isso nos permite transformar equações

diferenciais ordinárias em equações algébricas e nos permitirá mais tarde, reduzir EDP's a equações diferenciais ordinárias.

**Teorema 1.3.3.** *Seja  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Então  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$  e a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \\ \varphi &\mapsto \widehat{\varphi} \end{aligned}$$

*é um isomorfismo.*

O seguinte Teorema é uma extensão (por continuidade) da transformada de Fourier para o espaço  $L^2(\mathbb{R}^n)$

**Teorema 1.3.4. (Plancherel)** *Existe uma única bijeção isométrica  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ , para todo  $f \in \mathcal{S}$ .*

## 1.4 Desigualdades e resultados importantes

**Lema 1.4.1. (Desigualdade de Young)** *Sejam  $1 < p, q < +\infty$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0$$

**Lema 1.4.2. (Desigualdade de Young com  $\epsilon$ )** *Sejam  $1 < p, q < +\infty$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $\epsilon > 0$ . Então*

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^q, \quad \forall a, b \geq 0$$

*onde  $C_\epsilon = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ .*

No caso particular em que  $p = q = 2$ , a desigualdade de Young com  $\epsilon$  se resume em

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2, \quad \forall a, b \geq 0,$$

esta desigualdade será utilizada em todos os capítulos seguintes da tese. O próximo resultado também é de fundamental importância no análise dos seguintes capítulos.

**Definição 1.4.3.** *Seja  $H$  um espaço normado com norma  $\|\cdot\|$ . A aplicação denotada por*

$$a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$$

*é chamada*

(i) Sesquilinear se, para todo  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  e para todo  $u, v, w \in H$ , se verifica

$$a(\alpha_1 u + \alpha_2 v, w) = \alpha_1 a(u, w) + \alpha_2 a(v, w) \quad e$$

$$a(u, \beta_1 v + \beta_2 w) = \overline{\beta_1} a(u, v) + \overline{\beta_2} a(u, w).$$

(ii) Contínua se existe uma constante  $c$  tal que  $|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|$ , para todo  $u, v \in H$ .

(iii) Positiva ou coerciva se existe uma constante  $\alpha > 0$  tal que  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ , para todo  $v \in H$ .

**Observação 1.4.4.** Se

$$a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R},$$

então o conceito de sesquilinearidade é equivalente a bilinearidade.

Além disso, dizemos que a aplicação denotada por

$$\varphi(\cdot) : H \rightarrow \mathbb{C}$$

é *Anti-linear*, se  $\varphi(\alpha u) = \overline{\alpha} \varphi(u)$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{C}$  e para todo  $u \in H$ .

**Lema 1.4.5. (Lax-Milgran)** Seja  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma sesquilinear, contínua e positiva.

Então, para toda aplicação anti-linear  $\varphi : H \rightarrow \mathbb{C}$ , existe uma única  $u \in H$  tal que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H$$

*Demonstração.* Ver [38].

## 1.5 Teoria de Semigrupos e algumas definições

De modo geral, um sistema dinâmico é uma família  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  de mapeamentos sobre um espaço de fase  $H$  satisfazendo

$$\begin{aligned}T(t+s) &= T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0, \\T(0) &= I.\end{aligned}$$

Aqui  $H$  é o conjunto de todos os estados de um sistema,  $t \in \mathbb{R}^+$  representa o tempo e  $T(t)$  representa o mapeamento que descreve a mudança de um estado  $u_0 \in H$  para o estado  $T(t)u_0$  no tempo  $t$ . No contexto linear o espaço de fase  $H$  é um espaço vetorial e cada  $T(t)$  é um operador linear em  $H$ , logo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  é chamado um semigrupo de operadores. A situação em que tais semigrupos de operadores aparecem são os chamados problemas de Cauchy abstrato,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(t) &= Au(t) \quad \forall t > 0, \\u(0) &= u_0,\end{aligned}$$

onde  $A$  é um operador linear em um espaço de Banach  $H$ . Em geral a relação entre  $T(t)$  e  $A$  é dada pelas fórmulas

$$\begin{aligned}T(t) &= e^{At} \\A &= \left. \frac{d}{dt}T(t) \right|_{t=0}.\end{aligned}$$

**Definição 1.5.1. (Semigrupo fortemente contínuo)** *Uma família parametrizada  $T(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) de operadores lineares limitados num espaço de Banach  $H$ , é chamado semigrupo fortemente contínuo se*

- (i)  $T(0) = I$ , ( $I$  é o operador identidade em  $H$ ),
- (ii)  $T(s+t) = T(s)T(t)$  para todo  $t, s \geq 0$  (propriedade de semigrupos),
- (iii) Para cada  $u_0 \in H$ ,  $t \mapsto T(t)u_0 \in C([0, +\infty[; H)$ .

Chamaremos de semigrupo de classe  $C_0$  ou simplesmente semigrupo  $C_0$  a um semigrupo fortemente contínuo. Algumas vezes denotaremos  $T(t)$  por  $e^{At}$ .

**Definição 1.5.2.** Um semigrupo  $C_0, T(t)$ , de operadores lineares limitados em  $H$  é dito semigrupo  $C_0$  de contrações se

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Conhecido o semigrupo  $C_0, T(t)$ , definimos

**Definição 1.5.3.** Diz-se que  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $C_0, T(t)$ , se

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

em que

$$D(A) = \{ x \in H : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \}$$

é o domínio de  $A$ .

**Definição 1.5.4.** Um operador linear  $A$  definido em um espaço de Hilbert  $H$ , é dito dissipativo se, para todo  $x \in D(A)$ ,

$$\operatorname{Re}(Ax, x)_H \leq 0, \tag{1.5}$$

onde  $(\cdot, \cdot)_H$  denota o produto interno de  $H$ .

Apresentamos a seguir as condições necessárias e suficientes para que um dado operador  $A$  seja gerador infinitesimal de algum semigrupo  $C_0$ . Isto é, o Teorema de Hille-Yosida.

**Teorema 1.5.5. (Hille-Yosida)** Um operador linear (não limitado)  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $C_0$  de contrações  $T(t)$ ,  $t \geq 0$  se, e somente se,

(i)  $A$  é um operador fechado e  $\overline{D(A)}^{\|\cdot\|_H} = H$ .

(ii) O conjunto resolvente  $\rho(A)$  de  $A$  contém  $\mathbb{R}^+$  e, para todo  $\lambda > 0$ ,

$$\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

*Demonstração.* Ver [32].

**Corolário 1.5.6.** Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0, T(t)$ , de contrações. Então o conjunto resolvente de  $A$  contém o semiplano positivo, isto é,  $\mathbb{C}^+ := \{ \lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0 \} \subset \rho(A)$ . Além disso, para todo  $\operatorname{Re}\lambda > 0$ , temos que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

*Demonstração.* Ver [32].

**Teorema 1.5.7.** *Um operador linear  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ ,  $T(t)$ , satisfazendo  $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\omega t}$  se, e somente se,*

(i)  *$A$  é fechado e  $\overline{D(A)} = H$ .*

(ii) *O conjunto resolvente  $\rho(A)$  de  $A$  contém o semiplano  $\text{Re}\lambda > \omega$  e*

$$\|R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{M}{(\text{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad \forall \text{Re}\lambda > \omega, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

*Demonstração.* Ver [32].

**Teorema 1.5.8. (Lumer-Phillips)** *Seja  $A$  um operador linear com domínio denso  $D(A)$  em  $H$ .*

(i) *Se  $A$  é dissipativo e existe um  $\lambda_0 > 0$  tal que a imagem de  $\lambda_0 I - A$  é todo o espaço  $H$ , isto é,  $R(\lambda_0 I - A) = H$ , então  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  de contrações em  $H$ .*

(ii) *Se  $A$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  de contrações em  $H$ , então  $R(\lambda I - A) = H$  para todo  $\lambda > 0$  e  $A$  é dissipativo.*

*Demonstração.* Ver [32].

Um gerador infinitesimal de um semigrupo  $C_0$ , é dissipativo se, e somente se, o semigrupo  $e^{At}$  é de contrações. Como corolário do teorema acima, obtemos o seguinte resultado que será freqüentemente usado neste trabalho para mostrar a existência e unicidade de soluções.

**Corolário 1.5.9.** *Seja  $A$  um operador linear (não limitado) densamente definido em  $H$  espaço de Hilbert. Se  $A$  é dissipativo e  $0 \in \rho(A)$ , então  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações  $T(t)$ ,  $t \geq 0$  em  $H$ .*

*Demonstração.* Ver [32].

**Teorema 1.5.10.** *Seja  $T(t)$  um Semigrupo  $C_0$  em um espaço de Banach  $H$  e seja  $A$  seu gerador. Então a aplicação  $u := T(t)x$  é a única solução para o problema de Cauchy*

abstrato

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (1.6)$$

Satisfazendo

$$u \in C([0, \infty); H), \quad x \in H \quad (1.7)$$

$$u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); H), \quad x \in D(A). \quad (1.8)$$

**Teorema 1.5.11.** *Seja  $T(t)$  um semigrupo de classe  $C_0$ . Então existem constantes  $\omega \geq 0$  e  $M \geq 1$  tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\omega t} \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

*Demonstração.* Ver [32].

**Definição 1.5.12.** *Dizemos que um semigrupo  $C_0$ ,  $T(t)$ , é exponencialmente estável se existe uma constante positiva  $\omega$  e  $M \geq 1$  tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.9)$$

**Definição 1.5.13.** *Seja  $e^{At}$  um semigrupo de classe  $C_0$  gerado por  $A$ . Diz-se que  $\omega_0(A)$  é o tipo do semigrupo gerado por  $A$  se*

$$\omega_0(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(H)} = \inf_{t > 0} t^{-1} \ln \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

**Observação 1.5.14.** *É importante notar que  $\omega_0(A)$  é o ínfimo das constantes  $\omega \in \mathbb{R}$  que satisfazem*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \text{para todo } 0 \leq t < \infty.$$

Portanto proporciona informação sobre o crescimento de  $e^{tA}$ . Se  $\omega_0(A) < 0$ , então o semigrupo  $e^{At}$  é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento determinada por  $\omega_0(A)$ .

De fato, aplicando a definição 1.5.13 para  $0 < \epsilon < |\omega_0(A)|$ , obtemos

$$\omega_0(A) + \epsilon > \frac{\ln \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(H)}}{t} \Rightarrow e^{(\omega_0(A)+\epsilon)t} \geq \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(H)}, \quad \forall t > N_\epsilon,$$

logo, usando a continuidade do operador  $e^{At}$  sobre o intervalo compacto  $[0, N_\epsilon]$ , concluímos que existe uma constante  $M_\epsilon > 0$  tal que

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M_\epsilon e^{(\omega_0(A)+\epsilon)t}, \quad \forall t \geq 0$$

escolhendo  $-\mu = \omega_0(A) + \epsilon < 0$ , da definição 1.5.12, obtemos a estabilidade exponencial do semigrupo  $e^{At}$ .

**Definição 1.5.15.** *Seja  $A$  um operador linear em  $H$ . Definimos, e denotamos por  $\omega_\sigma$ , a cota superior do espectro de  $A$ , isto é,*

$$\omega_\sigma(A) = \sup \{ \operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A) \} .$$

**Observação 1.5.16.** *Se  $A$  é um operador não limitado com resolvente compacto, isto é,  $R(\lambda_0; A) \in \mathcal{K}(H)$  para algum  $\lambda_0$ , então  $\sigma(A)$  está composto só por autovalores (com multiplicidade finita) de  $A$  ( $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ ).*

**Definição 1.5.17.** *Seja  $T(t)$  um semigrupo de classe  $C_0$  gerado pelo operador  $A$ . Então dizemos que  $T(t)$  satisfaz o princípio de estabilidade linear, se*

$$\omega_0(A) = \omega_\sigma(A).$$

Em geral, sabemos que a desigualdade  $\omega_0(A) \geq \omega_\sigma(A)$  se verifica para todo gerador  $A$  (ver [12],[28], [33] ), mas tal desigualdade pode ser estrita. No entanto, existem várias classes de geradores  $A$  para os quais  $e^{At}$  satisfaz o principio da estabilidade linear. Por exemplo, se

- (i)  $A$  é limitado,
- (ii)  $H$  é um espaço de Hilbert e  $A$  é um operador normal, isto é,  $A$  e seu operador adjunto comutam,
- (iii)  $e^{At}$  é contínuo em  $\mathcal{L}(H)$  para todo  $t > t_0 \geq 0$ . ( $e^{At}$  é uniformemente contínuo)

Em (iii) estão incluídos os semigrupos que possuem extensões analíticas (Semigrupos analíticos).

O próximo resultado nos dá uma condição necessária e suficiente para determinar quando a taxa de crescimento do semigrupo ( $\omega_0$ ) é determinada pela cota superior do espectro ( $\omega_\sigma$ ).

**Corolário 1.5.18.** *Seja  $H$  espaço de Hilbert e seja  $e^{At}$  um semigrupo de classe  $C_0$  em  $H$  gerado por  $A$ . Então  $e^{At}$  satisfaz o princípio de estabilidade linear se, e somente se,*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists M_\epsilon \geq 1 \text{ tal que } \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M_\epsilon \quad \forall \operatorname{Re}(\lambda) \geq \omega_\sigma(A) + \epsilon$$



*Demonstração.* Ver [33].

Como conseqüência dos resultados acima, Renardy [35] estabeleceu condições suficientes para que o semigrupo,  $T(t)$ , gerado pela perturbação contínua de um operador normal,  $A_0$ , satisfaça o princípio de estabilidade linear. Este resultado será aplicado no estudo do sistema de mistura de sólidos. Enunciamos a seguir o resultado de Renardy.

**Teorema 1.5.19.** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $A := A_0 + B$  gerador infinitesimal de um semigrupo  $C_0$  em  $H$ . Supomos que  $A_0$  é um operador normal e  $B$  é limitado. Se existem  $M > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$  satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) *Se  $\lambda \in \sigma(A_0)$  e  $|\lambda| > M - 1$ , então  $\lambda$  é um autovalor isolado com multiplicidade finita.*

(b) *Se  $|z| > M$ , então o número de autovalores de  $A_0$  no disco  $D(z, 1)$ , com suas multiplicidades, não excede  $n$ .*

*Então  $e^{At}$  satisfaz o princípio de estabilidade linear, isto é,  $\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$ .*

*Demonstração.* Ver [35].

**Observação 1.5.20.** *Os corolários (1.5.18) e (1.5.19), nos dizem que basta determinar a cota superior do espectro para encontrar a melhor taxa de decaimento. Quando esta propriedade é válida, diz-se também que o semigrupo possui a propriedade do crescimento determinada pelo espectro (PCDE).*

## 1.6 Semigrupos $C_0$ gerados por operadores dissipativos não limitados

Para continuar com o estudo da estabilidade de sistemas dissipativos consideramos a equação de evolução linear (1.6) com dado inicial  $u(0) = u_0$  no espaço de Hilbert  $H$ . Suponha que  $A$  gera o semigrupo  $C_0$  de contrações  $T(t)$ . Agora apresentamos definições relevantes à estabilidade de tais sistemas.

**Definição 1.6.1.** Dizemos que o semigrupo  $C_0$ ,  $T(t)$ , é fortemente estável se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)u_0\|_H = 0 \quad (1.10)$$

para cada  $u_0 \in H$ .

**Definição 1.6.2.** Dizemos que o sistema (1.6) é uniforme exponencialmente estável se o semigrupo  $T(t)$  for um semigrupo exponencialmente estável.

Observamos que

$$\text{Exponencialmente estável} \implies \text{Fortemente estável}$$

Existem muitos semigrupos  $C_0$  que são fortemente estáveis mas não de forma uniforme exponencial. Nesse caso, outros tipos de decaimento foram introduzidas.

**Definição 1.6.3.** Dizemos que a solução de (1.6) decai a uma taxa de  $f(t)$ , se  $f(t)$  é uma função positiva com

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

tal que

$$\|u(t)\|_H \leq f(t)\|u_0\|_{D(A)}, \quad t > 0, \quad (1.11)$$

para todos os  $u_0 \in D(A)$ .

**Observação 1.6.4.** A norma sobre o lado direito de (1.11) não pode ser a norma de  $H$ . Caso contrário, temos decaimento uniforme com taxa  $f(t)$  e por propriedades de semigrupo, (1.11) implica que o sistema (1.6) seja uniforme exponencialmente estável.

$$\text{decaimento uniforme para zero} \implies \text{uniforme exponencialmente estável}$$

De fato, por hipótese temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = 0 \implies \exists t_0 \in \mathbb{R}_+; \quad \|T(t_0)\|_{\mathcal{L}(H)} < 1.$$

Denotemos por  $\alpha$  a constante definida como

$$\alpha = \|T(t_0)\|_{\mathcal{L}(H)} < 1.$$

Pelo algoritmo da divisão, todo número  $t$  pode ser escrito na forma

$$t = mt_0 + r$$

onde  $m \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq r \leq t_0$ . Como  $T(t)$  é um operador contínuo, encontramos que existe  $M > 0$ , tal que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Seja  $t \in \mathbb{R}_+$ , usando as propriedades de semigrupos, obtemos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T(t_0)^m T(r)\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

De onde temos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M\alpha^m.$$

Lembrando a definição de  $m$ , encontramos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M_1 \alpha^{\gamma t},$$

onde  $M_1 = M\alpha^{-\frac{r}{t_0}}$  e  $\gamma = \frac{1}{t_0}$ . Lembremos também que

$$\alpha^\gamma = e^{\gamma \ln(\alpha)} = e^{-\beta}, \quad \beta > 0$$

pois  $\alpha < 1$ , assim,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M_1 e^{-\beta t}.$$

Isto é,  $T(t)$  é exponencialmente estável.

**Teorema 1.6.5. (Huang)** *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um semigrupo  $C_0$  de operadores  $T(t)$ . Se  $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ , então  $T(t)$  é Fortemente estável.*

*Demonstração.* Ver [13].

Tais definições e resultados são importantes para o estudo do comportamento assintótico das soluções do problema (1.6) e serão aplicados no estudo da estabilidade de

sistemas relacionados à mistura de sólidos e o problema de transmissão viscoelástica com tip load (Sistema híbrido). Em particular se  $f(t)$  é a inversa de um polinômio em  $t$ , a Definição 1.6.3 é conhecida na literatura como Decaimento Polinomial (ou semigrupo Polinomialmente estável). O seguinte teorema é uma ferramenta eficiente para a determinação da taxa polinomial do sistema (1.6).

**Teorema 1.6.6. ( Borichev - Tomilov )** *Seja  $e^{At}$  um semigrupo  $C_0$  de contrações em  $H$  Hilbert tal que  $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ . Então para todo  $\alpha > 0$  fixado:*

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = O(|\lambda|^\alpha), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \iff \|e^{At} A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = O(t^{-1/\alpha}), \quad t \longrightarrow \infty.$$

*Demonstração.* Ver [9].

O decaimento exponencial é o decaimento mais rápido de todos os apresentados até agora, a continuação segue uma caracterização dos semigrupos exponencialmente estáveis em espaços de Hilbert.

**Teorema 1.6.7. ( Prüss )** *Seja  $e^{At}$  um semigrupo de classe  $C_0$  de contrações num espaço de Hilbert. Então  $e^{At}$  é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$(i) \quad i\mathbb{R} \subset \rho(A).$$

$$(ii) \quad \limsup_{|\beta| \rightarrow +\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

*são verdadeiras.*

*Demonstração.* Ver [22] ou [33].

## 1.7 Modelos matemáticos para mistura de sólidos

Os sistemas de mistura de sólidos é um assunto que tem recebido muita atenção nos últimos anos. Os primeiros trabalhos sobre este tema foram as contribuições de Truesdell e Toupin (1960), Green e Naghdi (1965,1968) ou Bowen e Wiese (1969). Apresentações dessas teorias podem ser encontradas nos artigos de Atkin e Craine [2] ou Iesan D. [7]. Nos últimos anos, um crescente interesse tem sido dirigido para o estudo das propriedades qualitativas das soluções de este tipo de modelos. Em particular, podemos encontrar vários resultados sobre a existência, unicidade, dependência contínua e estabilidade assintótica, ver [8], [9], [20] ou [21]. Queremos enfatizar o estudo do comportamento das soluções para o caso de uma viga unidimensional composta por uma mistura de  $n$  sólidos elástica e queremos saber que tipo de dissipação podemos dotar ao sistema para obter estabilidade exponencial das soluções. No contexto mecânico o decaimento exponencial significa que depois de um certo período de tempo os deslocamentos mecânicos são muito pequenos e podem ser desprezados; em caso contrário os deslocamentos podem ser apreciados no sistema após algum tempo, portanto, a natureza das soluções determina o comportamento temporal do sistema e é importante ser capaz de classificá-los.

Consideremos uma viga configurada no intervalo  $\Omega = ]0, l[$ , conformada pela mistura de  $n$  sólidos. Os deslocamentos verticais das partículas no tempo  $t$  serão denotados por  $(u^1, u^2, \dots, u^n)^\top = U$ , onde  $u^j = u^j(x, t)$ ,  $x \in \Omega$  e seja  $\theta = \theta(x, t)$  a diferença de temperatura em cada ponto  $x \in \Omega$  e no tempo  $t$ .

Denotamos por  $\rho_j$  a densidade de massa de cada material constituinte no tempo  $t = 0$ , seja  $\sigma = (\sigma^j)$  a tensão do material associado com os constituintes, seja  $\Xi$  a densidade de entropia e por  $Q$  denotamos o vetor fluxo do calor. Na presença de forças externas e aplicando as leis de Newton, a equação do movimento é dada pela seguinte expressão

$$\mathbf{R}U_{tt} - \sigma_x = F \quad (1.12)$$

onde  $\mathbf{R} = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ . Pela lei de Hooke a tensão do material ( $\sigma_e$ ) é dado por

$$\sigma_e = \mathbf{A}U_x$$

sendo  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  a matriz de coeficientes de elasticidade do material e por condições de simetria temos que  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ .

Definimos a continuação diferentes tipos de dissipação para o material  $\Omega$

- **Dissipação friccional.** Considera-se uma força externa  $F$ ,

$$F = -\mathbf{B}U_t \quad , \quad \sigma = \sigma_e$$

e substituindo em (1.12) obtemos o modelo matemático para a mistura de  $n$  sólidos com dissipação friccional

$$\mathbf{R}U_{tt} = \mathbf{A}U_{xx} - \mathbf{B}U_t \quad (1.13)$$

- **Dissipação Termoelástica** A tensão do material é dada pela expressão

$$\sigma = \sigma_e - \theta\beta \quad ,$$

considerando a equação de energia

$$\Theta_0 \left( \sum_{j=0}^n \rho_j \right) \Xi_t = Q_x \quad ,$$

leis constitutivas

$$\Xi = \beta^\top U_x + \varsigma\theta$$

$$Q = K\theta_x \quad ,$$

onde  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  é um vetor coluna não nulo de  $\mathbb{R}^n$ . Assim, obtemos o sistema acoplado para a mistura de  $n$  sólidos termoelásticos

$$\begin{aligned} \mathbf{R}U_{tt} &= \mathbf{A}U_{xx} - \theta_x\beta \\ \varsigma\theta_t &= \kappa\theta_{xx} - \beta^\top U_{xt} \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde  $\kappa = K\Theta_0^{-1} \left( \sum_{j=1}^n \rho_j \right)^{-1}$ .

Assumimos que as constantes  $\varsigma$  e  $\kappa$  são positivas, que as matrizes  $\mathbf{R}$  ,  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  são definida positivas e a matriz  $\mathbf{B}$  semidefinida positiva.

Estudaremos os problemas (1.13)-(1.14) com condições iniciais

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad U_t(x, 0) = U_1(x), \quad x \in \Omega \quad (1.15)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in \Omega \quad (1.16)$$

e condições de fronteira

$$U(0, t) = U(l, t) = 0 \quad (1.17)$$

$$\theta(0, t) = \theta(l, t) = 0. \quad (1.18)$$

## Capítulo 2

# Mistura de sólidos com dissipação friccional

Estudaremos o sistema (1.13) que modela uma mistura de  $n$  sólidos unidimensional configurada no intervalo  $(0, l)$  com dissipação friccional. Neste capítulo assumimos que:

$$\mathbf{R} \succ 0, \mathbf{A} \succ 0 \text{ e } \mathbf{B} \succeq 0$$

para caracterizar as propriedades assintóticas das soluções.

### 2.1 Existência e Unicidade

Nesta seção mostraremos a boa colocação do problema

$$\mathbf{R}U_{tt} = \mathbf{A}U_{xx} - \mathbf{B}U_t \tag{2.1}$$

com condições iniciais

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad U_t(x, 0) = U_1(x), \quad x \in (0, l) \tag{2.2}$$

e condições de fronteira

$$U(0, t) = U(l, t) = 0. \tag{2.3}$$

Consideremos o espaço vetorial

$$\mathcal{H} = [H_0^1(0, l)]^n \times [L^2(0, l)]^n$$

que, munido com o produto interno

$$\left( (\tilde{U}, \tilde{V}), (U, V) \right)_{\mathcal{H}} = \int_0^l U_x^* \mathbf{A} \tilde{U}_x dx + \int_0^l V^* \mathbf{R} \tilde{V} dx$$

é um espaço de Hilbert com a seguinte norma induzida

$$\|(U, V)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^l U_x^* \mathbf{A} U_x dx + \int_0^l V^* \mathbf{R} V dx,$$

onde  $U = (u^1, \dots, u^n)^\top$  e  $V = (v^1, \dots, v^n)^\top$ . Desde que  $\mathbf{R}, \mathbf{A} \succ 0$  obtemos

$$\|(U, V)\|_{\mathcal{H}}^2 \asymp \sum_{i=1}^n \int_0^l |u_x^i|^2 + |v^i|^2 dx,$$

a notação " $a \asymp b$ " significa que existem constantes positivas  $c_0$  e  $c_1$  satisfazendo

$$c_0 b \leq a \leq c_1 b,$$

logo tal norma induzida é equivalente à norma usual de  $\mathcal{H}$ .

Introduzimos o operador  $\mathcal{A}$ , dado por

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} V \\ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} U_{xx} \end{pmatrix}}_{:= \mathcal{A}_0 \mathbf{U}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B} V \end{pmatrix}}_{:= \mathcal{B} \mathbf{U}} \quad (2.4)$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = [H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)]^n \times [H_0^1(0, l)]^n.$$

Usando as notações acima o problema de valor inicial e fronteira (2.1), (2.2), (2.3) pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U} = \mathcal{A} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0$$

onde  $\mathbf{U}(t) = (U(t), V(t))^\top$  e  $\mathbf{U}_0 = (U_0, U_1)^\top$ .

**Teorema 2.1.1.** *O operador  $\mathcal{A}$  é gerador infinitesimal de um semigrupo  $C_0$  de contrações, denotado por  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t) = e^{\mathcal{A}t}$ .*

*Demonstração.* Usando as imersões dos espaços de Sobolev, temos que  $D(\mathcal{A})$  é um subespaço denso de  $\mathcal{H}$ . Como  $\mathbf{B} \succeq 0$  o operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo, isto é

$$(\mathcal{A} \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = \left( \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{A} U_{xx} - \mathbf{B} V] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^l U_x^* \mathbf{A} V_x dx + \int_0^l V^* \mathbf{A} U_{xx} - V^* \mathbf{B} V dx \\
&= \int_0^l U_x^* \mathbf{A} V_x dx - \int_0^l V_x^* \mathbf{A} U_x dx - \int_0^l V^* \mathbf{A} V dx \\
&= \int_0^l U_x^* \mathbf{A} V_x - (U_x^* \mathbf{A} V_x)^* dx - \int_0^l V^* \mathbf{A} V dx.
\end{aligned}$$

Como  $\operatorname{Re} (U_x^* \mathbf{A} V_x - (U_x^* \mathbf{A} V_x)^*) = 0$ , temos que

$$\operatorname{Re} (\mathcal{A} \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = - \int_0^l V^* \mathbf{B} V dx \leq 0. \quad (2.5)$$

Agora provaremos que  $0 \in \rho(\mathcal{A})$  e a conclusão segue usando o Lema 1.5.9. Com efeito, dado  $\mathbf{F} = (F, G) \in \mathcal{H}$ , mostraremos que existe um único  $\mathbf{U} = (U, V)$  em  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  tal que  $\mathcal{A} \mathbf{U} = \mathbf{F}$ . Em termos das componentes temos

$$V = F \quad \text{in } [H_0^1(0, l)]^n \quad (2.6)$$

$$\mathbf{A} U_{xx} - \mathbf{B} V = \mathbf{R} G \quad \text{in } [L^2(0, l)]^n \quad (2.7)$$

logo o problema acima se reduz a encontrar  $U \in [H^2 \cap H_0^1]^n$  tal que

$$\mathbf{A} U_{xx} = \mathbf{B} F + \mathbf{R} G.$$

Consideremos a forma sesquilinear  $\mathfrak{B}$  positiva e continua definida por

$$\mathfrak{B}(U, \Phi) = \int_0^l \Phi_x^* \mathbf{A} U_x dx ; \quad \forall (U, \Phi) \in [H_0^1(0, l)]^n \times [H_0^1(0, l)]^n$$

Definimos a aplicação anti-linear  $\mathfrak{J} : [H_0^1(0, l)]^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\mathfrak{J}(\Phi) = - \int_0^l \Phi^* \mathbf{B} F dx - \int_0^l \Phi^* \mathbf{R} G dx$$

Aplicando o Lema 1.4.5 de Lax-Milgran obtemos a existência de  $U$  em  $[H_0^1(0, l)]^n$  tal que

$$\mathfrak{B}(U, \Phi) = \mathfrak{J}(\Phi) \quad \forall \Phi \in \mathbb{H}^1.$$

Então

$$\int_0^l \Phi_x^* \mathbf{A} U_x dx = - \int_0^l \Phi^* [\mathbf{B}F + \mathbf{R}G] dx.$$

Consideremos a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{e_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ , logo definimos  $\Phi^* = \varphi e_j$  onde  $\varphi \in \mathcal{D}(0, l)$  para obter

$$\int_0^l \varphi_x e_j \mathbf{A} U_x dx = - \int_0^l \varphi e_j [\mathbf{B}F + \mathbf{R}G] dx$$

ou

$$\langle \varphi, e_j \mathbf{A} U_{xx} \rangle_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}'} = \int_0^l \varphi e_j [\mathbf{B}F + \mathbf{R}G] dx.$$

Onde  $e_j \mathbf{A} U_{xx}$  representa a  $j$ -ésima linha de  $\mathbf{A} U_{xx}$  e  $e_j [\mathbf{B}F + \mathbf{R}G]$  representa a  $j$ -ésima linha de  $[\mathbf{B}F + \mathbf{R}G]$ . Então  $\mathbf{A} U_{xx} \in [L^2(0, l)]^n$  e

$$\mathbf{A} U_{xx} = \mathbf{B}F + \mathbf{R}G.$$

Como  $\mathbf{A} \succ 0$  temos  $U \in [H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)]^n$  e as equações (2.6) e (2.7) são verificadas.

Por outro lado, multiplicando as equações (2.6) e (2.7) por  $V^*$  e  $U^*$  respectivamente, integrando em  $(0, l)$  e somando obtemos

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \asymp \int_0^l V^* V + U_x^* \mathbf{A} U_x dx = \int_0^l V^* F - U^* \mathbf{B}V - U^* \mathbf{R}G$$

e como

$$\int_0^l |V^* F| + |U^* \mathbf{B}V| + |U^* \mathbf{R}G| dx \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

concluimos que  $\|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} = \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$ , para uma constante positiva  $C$ . Por tanto  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ou equivalentemente  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ .

□

## 2.2 Estabilidade Exponencial

Primeiro vejamos que  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t)$  satisfaz o princípio da estabilidade linear.

**Lema 2.2.1.** *Seja  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t) = e^{\mathcal{A}t}$  dado pelo Teorema (2.1.1), então o semigrupo verifica  $\omega_{\sigma}(\mathcal{A}) = \omega_0(\mathcal{A})$ .*

*Demonstração.* De (2.4) observamos que  $\mathcal{A}$  pode ser reescrito como

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}.$$

Onde  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Para obter o resultado verificamos a hipótese do Teorema 1.5.19 de Renardy.

Da demonstração do Teorema 2.1.1 temos que  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , agora mostraremos que  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ . Como  $\mathcal{A}$  é fechado e densamente definido com  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ , vemos que  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  se, e somente se a injeção canônica

$$\Upsilon : (D(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$$

é compacta.

Suponha que  $\{\mathbf{U}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  é uma sequência limitada em  $D(\mathcal{A})$ , então

$$\|\mathcal{A}\mathbf{U}_\nu\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C$$

e em termos das componentes implica que

$$\begin{aligned} \|V_{\nu x}\|^2 &\asymp \int_0^l V_{\nu x}^* \mathbf{A} V_{\nu x} \, dx \leq C, \\ \|\mathbf{A}U_{\nu xx} - \mathbf{B}V_\nu\|^2 &= \int_0^l |\mathbf{A}U_{\nu xx} - \mathbf{B}V_\nu|^2 \, dx \leq C, \\ \|U_{\nu xx}\|^2 &\asymp \int_0^l |\mathbf{A}U_{\nu xx}|^2 \, dx \leq 2 \int_0^l |\mathbf{A}U_{\nu xx} - \mathbf{B}V_\nu|^2 + |\mathbf{B}V_\nu|^2 \, dx \leq C, \end{aligned}$$

como as imersões  $H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l) \hookrightarrow H_0^1(0, l) \hookrightarrow L^2(0, l)$  são densas e compactas, existe uma subsequência que ainda denotaremos por  $\mathbf{U}_\nu = (U_\nu, V_\nu)$  que converge em  $\mathcal{H}$ . Portanto  $\Upsilon$  é compacta e  $\mathcal{A}^{-1}$  possui resolvente compacto ( $\sigma_p(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ ).

Para verificar as hipóteses de Renardy, denotamos por  $\lambda$  um autovalor de  $\mathcal{A}_0$  e por  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_0)$  o correspondente autovetor ( $\mathbf{U} \neq 0$ )

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{U} - \lambda \mathbf{U} = 0. \tag{2.8}$$

Em termos das componentes obtemos

$$\begin{aligned} \lambda U - V &= 0 \\ \lambda \mathbf{R}V - \mathbf{A}U_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

eliminamos  $V$  para obter

$$\lambda^2 \mathbf{R}U - \mathbf{A}U_{xx} = 0.$$

Por outro lado todo autovetor pode ser escrito como  $U = Y \operatorname{sen}(\mu x)$ , onde  $Y \in \mathbb{C}^n$  é um vetor coluna,  $\mu = \frac{\pi m}{l}$  e  $m \in \mathbb{N}$ . Usando estas notações em (2.8) obtemos

$$[\lambda^2 \mathbf{R} + \mu^2 \mathbf{A}]Y = 0$$

e

$$q_\mu(\lambda) = \det[\lambda^2 \mathbf{R} + \mu^2 \mathbf{A}] = 0$$

então

$$\sigma(\mathcal{A}_0) = \bigcup_{\mu} \{\lambda \in \mathbb{C} ; q_\mu(\lambda) = 0\} \quad (2.9)$$

Como  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{A}$  são positiva definidas, aplicando o Teorema 1.1.7, obtemos que  $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}$  possui autovalores positivos. De (2.9) obtemos

$$\sigma(\mathcal{A}_0) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \pm \frac{m\pi\sqrt{\tau}}{l} i ; \tau \in \sigma(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}) \right\}.$$

Por tanto  $\sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq i\mathbb{R}$ .

Por outro lado, para todo  $\mathbf{U} = (U, V) \in D(\mathcal{A})$ , temos que

$$\begin{aligned} (i\mathcal{A}_0\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} &= \left( \left( \begin{array}{c} iV \\ i\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}U_{xx} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} U \\ V \end{array} \right) \right)_{\mathcal{H}} \\ &= i \int_0^l U_x^* \mathbf{A}V_x dx + i \int_0^l V^* \mathbf{A}U_{xx} dx \\ &= i \int_0^l U_x^* \mathbf{A}V_x dx - i \int_0^l V_x^* \mathbf{A}U_x dx \\ &= -i \int_0^l V_x^* \mathbf{A}U_x dx + i \int_0^l U_x^* \mathbf{A}V_x dx \\ &= -i \int_0^l V_x^* \mathbf{A}U_x dx - i \int_0^l U_{xx}^* \mathbf{A}V dx \\ &= \int_0^l (iV)_x^* \mathbf{A}U_x dx + \int_0^l (i\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}U_{xx})^* \mathbf{R}V dx \\ &= \left( \left( \begin{array}{c} U \\ V \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} iV \\ i\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}U_{xx} \end{array} \right) \right)_{\mathcal{H}} \\ &= (\mathbf{U}, i\mathcal{A}_0\mathbf{U})_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

então  $i\mathcal{A}_0$  é um operador simétrico em  $\mathcal{H}$ . Além disso, como  $0 \in \varrho(i\mathcal{A}_0)$  e  $\varrho(i\mathcal{A}_0)$  é um conjunto aberto, existe  $\lambda > 0$  tal que  $(\pm i\lambda I - i\mathcal{A}_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Em particular, temos

$$\text{Im}(i\mathcal{A}_0 \pm i\lambda) = \mathcal{H}. \quad (2.10)$$

Um resultado do análise Funcional diz que todo operador simétrico satisfazendo (2.10) é auto-adjunto (ver por exemplo [2], Capítulo IV), logo  $i\mathcal{A}_0$  é um operador auto-adjunto, portanto  $\mathcal{A}_0$  é um operador normal.

Logo  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$  satisfaz as condições do Teorema 1.5.19. Portanto obtemos o resultado.  $\square$

**Observação 2.2.2.** *Sem perda de generalidade podemos assumir que  $\mathbf{B}$  é uma matriz diagonal. Pois do contrario fazemos a substituição  $\mathbf{S}^{-1}U = \tilde{U}$ , onde  $\mathbf{S}$  é uma matriz não singular dada pelo Teorema 1.1.9, que diagonaliza  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{B}$  simultaneamente.*

Denotamos por  $\text{Rank}(\mathbf{B}) = J$  o posto da matriz  $B$ , isto é

$$\mathbf{B} = \text{diag} (b_1, \dots, b_J, 0, \dots, 0)$$

Para uma matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  estabelecemos a seguinte notação

$$\mathbf{A}_J = (a_{ij})_{J \times J}$$

logo definimos  $\mathbf{A}_S$  e  $\mathbf{A}_k$  tais que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_J & \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_S^\top & \mathbf{A}_k \end{pmatrix}$$

Seja  $U$  um vetor coluna de ordem  $n$ . Definimos  $U^J$  e  $U^k$  tais que

$$U = \underbrace{(u^1, \dots, u^J)}_{:=U^J}, \underbrace{(u^{J+1}, \dots, u^n)}_{:=U^k}^\top$$

usando as notações acima estabelecemos a equação resolvente. Seja  $\mathbf{U} = (U, V) \in D(\mathcal{A})$  a solução de

$$i\lambda\mathbf{U} - \mathcal{A}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{F} = (F, G) \in \mathcal{H}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então,  $i\lambda U = V + F$  e

$$\begin{aligned}
i\lambda\rho_1v^1 &= a_{11}u_{xx}^1 + \dots + a_{1J}u_{xx}^J + a_{1(J+1)}u_{xx}^{J+1} + \dots + a_{1n}u_{xx}^n - b_1v^1 + \rho_1g^1 \\
i\lambda\rho_2v^2 &= a_{21}u_{xx}^1 + \dots + a_{2J}u_{xx}^J + a_{2(J+1)}u_{xx}^{J+1} + \dots + a_{2n}u_{xx}^n - b_2v^2 + \rho_2g^2 \\
&\vdots \\
i\lambda\rho_Jv^J &= a_{J1}u_{xx}^1 + \dots + a_{JJ}u_{xx}^J + a_{J(J+1)}u_{xx}^{J+1} + \dots + a_{Jn}u_{xx}^n - b_Jv^J + \rho_Jg^J \\
i\lambda\rho_{J+1}v^{J+1} &= a_{(J+1)1}u_{xx}^1 + \dots + a_{(J+1)J}u_{xx}^J + a_{(J+1)(J+1)}u_{xx}^{J+1} + \dots + a_{(J+1)n}u_{xx}^n + \rho_{J+1}g^{J+1} \\
&\vdots \\
i\lambda\rho_nv^n &= a_{n1}u_{xx}^1 + \dots + a_{nJ}u_{xx}^J + a_{n(J+1)}u_{xx}^{J+1} + \dots + a_{nn}u_{xx}^n + \rho_nv^n
\end{aligned}$$

usando a notação estabelecida temos  $n = J + k$ ,

$$\mathbf{A}_J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1J} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2J} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{J1} & a_{J2} & \cdots & a_{JJ} \end{pmatrix}_{J \times J}, \quad \mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} a_{1(J+1)} & a_{1(J+2)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2(J+1)} & a_{2(J+2)} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{J(J+1)} & a_{J(J+2)} & \cdots & a_{Jn} \end{pmatrix}_{J \times k},$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} a_{(J+1)(J+1)} & a_{(J+1)(J+2)} & \cdots & a_{(J+1)n} \\ a_{(J+2)(J+1)} & a_{(J+2)(J+2)} & \cdots & a_{(J+2)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n(J+1)} & a_{n(J+2)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{k \times k},$$

$\mathbf{R}_J = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_J)$ ,  $\mathbf{R}_k = \text{diag}(\rho_{J+1}, \rho_{J+2}, \dots, \rho_n)$  e  $\mathbf{B}_J = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_J)$ . Logo

$$\begin{aligned}
i\lambda U &= V + F & (2.12) \\
i\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{R}_J V^J \\ \mathbf{R}_k V^k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_J & \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_S^\top & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^J \\ U^k \end{bmatrix}_{xx} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^J \\ V^k \end{bmatrix} + \mathbf{R}G & (2.13)
\end{aligned}$$

definimos as Matrizes  $\mathcal{M} = \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{A}_k^{-1}$  e  $\mathcal{N} = \mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{A}_S$ ,

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \frac{a_{1(J+1)}}{\rho_1} & \frac{a_{1(J+2)}}{\rho_1} & \cdots & \frac{a_{1n}}{\rho_1} \\ \frac{a_{2(J+1)}}{\rho_2} & \frac{a_{2(J+2)}}{\rho_2} & \cdots & \frac{a_{2n}}{\rho_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{J(J+1)}}{\rho_J} & \frac{a_{J(J+2)}}{\rho_J} & \cdots & \frac{a_{Jn}}{\rho_J} \end{pmatrix}_{J \times k}$$

O seguinte Lema caracteriza a condição necessária para a estabilidade do semigrupo gerado por  $\mathcal{A}$ .

**Lema 2.2.3.**  $i\mathbb{R} \cap \sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset$  se, e somente se

$$\dim \text{Span} \{ \mathcal{N}_j, \mathcal{N}_j \mathcal{M}, \mathcal{N}_j \mathcal{M}^2, \dots, \mathcal{N}_j \mathcal{M}^{k-1}; \quad j = 1, 2, \dots, J \} < k \quad (2.14)$$

onde  $\mathcal{N}_j$  é a  $j$ -ésima linha de  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{N} = \mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{A}_S$ ,  $\mathcal{M} = \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{A}_k$  e  $k = n - J$ .

*Demonstração.* Suponhamos que existe  $\mathbf{U}_\lambda \neq 0$  no domínio de  $\mathcal{A}$  satisfazendo (2.11) com  $\mathbf{F} = 0$ . De (2.5) obtemos que

$$\int_0^l |V^J|^2 dx \asymp \int_0^l V^* \mathbf{B} V dx = 0. \quad (2.15)$$

e substituindo em (2.12) obtemos  $U^J = 0$ . Logo (2.12)-(2.13) se reduz à seguinte equação

$$-\lambda^2 U^k = \mathcal{M} U_{xx}^k \quad (2.16)$$

$$\mathcal{N} U^k = 0 \quad (2.17)$$

Das equações acima e as condições de fronteira tipo Dirichlet obtemos

$$\mathcal{N} \mathcal{M} U_{xx}^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N} \mathcal{M} U^k = 0.$$

multiplicando por  $\mathcal{N} \mathcal{M}$  na equação (2.16) concluímos que  $\mathcal{N} \mathcal{M}^2 U^k = 0$ . Logo  $\mathcal{N} \mathcal{M}^m U^k = 0$  para todo  $m \in \{0, 1, \dots, k\}$ . Se

$$\dim \text{Span} \{ \mathcal{N}_j, \mathcal{N}_j \mathcal{M}, \mathcal{N}_j \mathcal{M}^2, \dots, \mathcal{N}_j \mathcal{M}^{k-1}; \quad j = 1, 2, \dots, J \} \geq k$$

então concluímos que  $U^k = 0$ , isto contradiz nossa hipótese, portanto (2.14) é verdadeiro.

Reciprocamente, suponha que (2.14) é verdadeiro. Então, existe um vetor não nulo  $Y_0^\top \in \mathbb{C}^k$  tal que

$$\mathcal{N} \mathcal{M}^m Y_0 = 0, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots, k-1. \quad (2.18)$$

Agora, seja  $p_0 \in \mathbb{C}[z]$  o polinômio de menor grau tal que

$$p_0(\mathcal{M}) Y_0 = 0. \quad (2.19)$$

Observe que  $p_0$  não é um polinômio constante e  $\det \mathcal{M} \neq 0$ , então

$$1 \leq \deg p_0 \leq \deg p_{\mathcal{M}} \leq k$$

onde  $p_{\mathcal{M}}$  é o polinômio minimal de  $\mathcal{M}$ .

Por outro lado, sejam  $\tau \in \mathbb{C}$  tal que  $p_0(\tau) = 0$  e  $q \in \mathbb{C}[z]$  tal que  $p_0(z) = (\tau - z)q(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Desde que  $\deg q < \deg p_0$  obtemos

$$\tilde{Y}_0 := q(\mathcal{M})Y_0 \neq 0.$$

Além disso, aplicando (2.18) e (2.19) obtemos

$$\begin{bmatrix} \tau \mathbf{I} - \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{bmatrix} \tilde{Y}_0 = 0 \quad (2.20)$$

A hipótese  $\mathbf{A}, \mathbf{R} \succ 0$  e o Teorema 1.1.7 implica que  $\sigma(\mathcal{M}) \subset (0, \infty)$ , logo da equação acima concluímos que  $\tau > 0$ . Para cada  $\nu \in \mathbb{N}$  definimos

$$\begin{aligned} U_\nu^J &= 0 \\ V_\nu^J &= 0 \\ U_\nu^k &= \tilde{Y}_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\nu\pi x}{l}\right) \\ V_\nu^k &= i\lambda_\nu \tilde{Y}_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\nu\pi x}{l}\right) \\ \lambda_\nu &= \frac{\nu\pi\sqrt{\tau}}{l} \end{aligned}$$

Então  $\mathbf{U}_\nu := (U_\nu, V_\nu) \in D(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$  e de (2.20) obtemos

$$i\lambda_\nu \mathbf{U}_\nu - \mathcal{A}\mathbf{U}_\nu = 0.$$

Portanto  $i\lambda_\nu \in i\mathbb{R} \cap \sigma(\mathcal{A})$ , logo obtemos o resultado.  $\square$

O resultado principal do trabalho é obter a estabilidade exponencial do semigrupo associado quando o eixo imaginário esta contido no conjunto resolvente. Primeiro vejamos as desigualdades que podem ser obtidas com os multiplicadores usuais. Multiplicando a equação (2.13) por  $U^*$  e aplicando integração por partes, obtemos

$$\int_0^l U_x^* \mathbf{A} U_x dx + i\lambda \int_0^l U^* \mathbf{B} U dx = \int_0^l V^* \mathbf{R} V dx + R,$$

onde  $R$  satisfaz  $|R| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$ , para alguma constante positiva  $C$ . Considerando a parte real obtemos

$$\int_0^l U_x^* \mathbf{A} U_x dx \leq \int_0^l V^* \mathbf{R} V dx + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.21)$$



Por outro lado, multiplicando a equação (2.13) por  $V^*$  obtemos

$$i\lambda \int_0^l V^* \mathbf{R}V dx = i\lambda \int_0^l U_x^* \mathbf{A}U_x dx - \int_0^l V^* \mathbf{B}V dx + R.$$

Tomando a parte imaginária da identidade acima, obtemos

$$\int_0^l V^* \mathbf{R}V dx = \int_0^l U_x^* \mathbf{A}U_x dx + \frac{\text{Im}R}{\lambda}. \quad (2.22)$$

**Observação 2.2.4.** Se  $\det \mathbf{B} \neq 0$  então  $V^* \mathbf{B}V \asymp |v^1|^2 + \dots + |v^n|^2 = |V|^2$ . Aplicando (2.5) e (2.21) obtemos

$$\int_0^l |U_x|^2 dx \asymp \int_0^l U_x^* \mathbf{A}U_x dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (2.23)$$

devido à desigualdade acima concluímos que  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. Logo aplicando o Teorema 1.6.7 obtemos a estabilidade exponencial de  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t)$ .

A metodologia neste trabalho consiste em obter uma desigualdade do tipo (2.23). Os seguintes lemas são essenciais no caso  $\mathbf{B}$  seja singular. Devido à desigualdade (2.5) temos

$$\int_0^l |V^J|^2 dx \asymp \int_0^l V^* \mathbf{B}V dx \leq \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \quad (2.24)$$

**Lema 2.2.5.** Para cada  $\epsilon > 0$  existe  $c_\epsilon > 0$  tal que

$$\int_0^l |V^J|^2 + |U_x^J|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.25)$$

*Demonstração.* De (2.11) temos que

$$i\mathbf{R}_J \lambda V^J = \mathbf{A}_J U_{xx}^J + \mathbf{A}_S U_{xx}^k - \mathbf{B}V^J + \mathbf{R}_J G^J \quad (2.26)$$

$$i\mathbf{R}_k \lambda V^k = \mathbf{A}_S^\top U_{xx}^J + \mathbf{A}_k U_{xx}^k + \mathbf{R}_k G^k \quad (2.27)$$

Multiplicando (2.27) por  $\mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1}$  obtemos

$$i\mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{R}_k \lambda V^k = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{A}_S^\top U_{xx}^J + \mathbf{A}_S U_{xx}^k + \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{R}_k G^k$$

Subtraindo a equação acima com a equação (2.26) obtemos

$$i\mathbf{R}_J \lambda V^J - i\mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{R}_k \lambda V^k = \mathbf{C}_J U_{xx}^J - \mathbf{B}_J V^J - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{R}_k G^k + \mathbf{R}_J G^J \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{C}_J = \mathbf{A}_J - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{A}_S^\top$  é uma matriz não singular, pois o posto da matriz  $\mathbf{A}$  é igual ao posto da matriz obtida pela multiplicação da segunda linha de  $\mathbf{A}$  por  $-\mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1}$

e logo somando-la à primeira linha. Isto é

$$\text{Rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_J & \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_S^\top & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} = \text{Rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_J - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{A}_S^\top & 0 \\ \mathbf{A}_S^\top & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}$$

Logo o posto da matriz  $\mathbf{C}_J$  é  $J$ . Pois em caso contrario  $\mathbf{A}$  resulta ser matriz singular, que é contrario à hipótese. Multiplicando a equação (2.28) por  $(U^J)^* \mathbf{C}_J^{-1}$  e aplicando (2.12) obtemos

$$-(V^J)^* \mathbf{C}_J^{-1} \mathbf{R}_J V^J + (V^J)^* \mathbf{C}_J^{-1} \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{R}_k V^k = (U^J)^* U_{xx}^J - (U^J)^* \mathbf{C}_J^{-1} \mathbf{B}_J V^J + R$$

onde  $R$  satisfaz  $\|R\| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$  e integrando por partes obtemos

$$\int_0^l |U_x^J|^2 dx \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|V^J\| + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

usando (2.24) e a desigualdade de Young obtemos

$$\int_0^l |U_x^J|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

logo obtemos o resultado. □

**Lema 2.2.6.** *Para todo  $\epsilon > 0$  existe um número positivo  $c_\epsilon$  com a seguinte propriedade*

$$\int_0^l |\mathcal{N} \mathcal{M}^m V^k|^2 + |\mathcal{N} \mathcal{M}^m U_x^k|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (2.29)$$

$\forall m < k$ .

*Demonstração.* Da equação (2.26) obtemos

$$i\lambda V^J = \mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{A}_J U_{xx}^J + \underbrace{\mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{A}_S}_{:=\mathcal{N}} U_{xx}^k - \mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{B}_J V^J + G^J.$$

Observe que  $\mathcal{N}U^k$  é um vetor coluna de  $\mathbb{C}^J$ , multiplicando a equação acima por  $\mathcal{N}U^k$  obtemos

$$-(i\lambda \mathcal{N}U^k)^* V^J = (\mathcal{N}U^k)^* (\mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{A}_J U_{xx}^J)_{xx} + (\mathcal{N}U^k)^* (\mathcal{N}U^k)_{xx} - (\mathcal{N}U^k)^* (\mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{B}_J V^J) + (\mathcal{N}U^k)^* G^J$$

logo, usando a integração por partes e a desigualdade de Poincare concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^l |\mathcal{N}U_x^k|^2 dx &= \int_0^l (\mathcal{N}V^k)^* V^J - (\mathcal{N}U^k)_x^* (\mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{A}_J U_{xx}^J)_x dx \\ &\quad - \int_0^l (\mathcal{N}U^k)^* (\mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{B}_J V^J) dx + R \\ &\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|V^J\| + C \|U_x^J\| \|\mathcal{N}U_x^k\| + C \|V^J\| \|\mathcal{N}U_x^k\| + |R| \end{aligned}$$

onde  $R$  satisfaz  $|R| \leq C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$ . Aplicando o Lema 2.2.5 obtemos

$$\int_0^l |\mathcal{N}U_x^k|^2 dx \leq C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|V^J\| + C\|U_x^J\|^2 + C\|V^J\|^2 + C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

Isto é,

$$\int_0^l |\mathcal{N}U_x^k|^2 dx \leq \epsilon\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.30)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (2.27) por  $\mathcal{N}\mathbf{R}_k^{-1}$  obtemos

$$i\lambda\mathcal{N}V^k = \mathcal{N}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{A}_S^\top U_x^J + \mathcal{N}\mathcal{M}U_{xx}^k + \mathcal{N}G^k \quad (2.31)$$

onde  $\mathcal{M} = \mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{A}_k$ .

Multiplicando a equação acima por  $\mathcal{N}U^k$  temos

$$-(i\lambda\mathcal{N}U^k)^*\mathcal{N}V^k = (\mathcal{N}U^k)^*(\mathcal{N}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{A}_S^\top U_x^J)_{xx} + (\mathcal{N}U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k)_{xx} + (\mathcal{N}U^k)^*(\mathcal{N}G^k)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l |\mathcal{N}V^k|^2 dx &= \int_0^l (\mathcal{N}U_x^k)^*(\mathcal{N}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{A}_S^\top U_x^J) + (\mathcal{N}U_x^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k) dx \\ &\quad - \int_0^l (\mathcal{N}U^k)^*(\mathcal{N}G^k) + (\mathcal{N}F^k)^*(\mathcal{N}V^k) dx \\ &\leq C\|U_x^J\| \|\mathcal{N}U_x^k\| + C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{N}U_x^k\| + C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \epsilon\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

Logo concluímos que

$$\int_0^l |\mathcal{N}V^k|^2 + |\mathcal{N}U_x^k|^2 dx \leq \epsilon\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.32)$$

Portanto o Lema é verdadeiro para  $m = 0$ .

**Vejamos que o Lema é verdadeiro para  $m = 1$ .**

De fato, multiplicando a equação (2.31) por  $\mathcal{N}\mathcal{M}U^k$  obtemos

$$\begin{aligned} -(i\lambda\mathcal{N}\mathcal{M}U^k)^*(\mathcal{N}V^k) &= (\mathcal{N}\mathcal{M}U^k)^*(\mathcal{N}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{A}_S^\top U_x^J)_{xx} + (\mathcal{N}\mathcal{M}U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k)_{xx} \\ &\quad + (\mathcal{N}\mathcal{M}U^k)^*(\mathcal{N}G^k) \end{aligned}$$

então

$$\int_0^l |\mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k|^2 dx \leq C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{N}V^k\| + C\|U_x^J\|^2 + C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

isto é,

$$\int_0^l |\mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k|^2 dx \leq \epsilon\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.33)$$

Multiplicando a equação (2.27) por  $\mathcal{N}\mathcal{M}\mathbf{R}_k^{-1}$  obtemos

$$i\lambda\mathcal{N}\mathcal{M}V^k = \mathcal{N}\mathcal{M}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{A}_S^\top U_x^J + \mathcal{N}\mathcal{M}^2 U_{xx}^k + \mathcal{N}\mathcal{M}G^k \quad (2.34)$$

logo, multiplicamos (2.34) por  $\mathcal{N}\mathcal{M}U^k$  para obter

$$\begin{aligned} -(i\lambda\mathcal{N}\mathcal{M}U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}V^k) &= (\mathcal{N}\mathcal{M}U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{A}_S^\top U_x^J)_{xx} + (\mathcal{N}\mathcal{M}U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}^2 U_{xx}^k)_{xx} \\ &\quad + (\mathcal{N}\mathcal{M}U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}G^k), \end{aligned}$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_0^l |\mathcal{N}\mathcal{M}V^k|^2 dx &= \int_0^l (\mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{A}_S^\top U_x^J) + (\mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}^2 U_x^k) dx \\ &\quad - \int_0^l (\mathcal{N}\mathcal{M}U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}G^k) + (\mathcal{N}\mathcal{M}F^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}V^k) dx \end{aligned}$$

e usando (2.33) concluímos que

$$\int_0^l |\mathcal{N}\mathcal{M}V^k|^2 + |\mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k|^2 dx \leq \epsilon\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.35)$$

Portanto o Lema é verdadeiro para  $m = 1$ . Agora seguiremos um processo indutivo, suponhamos que (2.29) é verdadeiro para as potências  $0, 1, \dots, m-1$  de  $\mathcal{M}$  e  $m < k$ .

Multiplicamos  $\mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1}\mathbf{R}_k^{-1}$  à equação (2.27) para obter

$$i\lambda\mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1}V^k = \mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{A}_S^\top U_x^J + \mathcal{N}\mathcal{M}^m U_{xx}^k + \mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1}G^k$$

e multiplicando por  $\mathcal{N}\mathcal{M}^m U^k$  temos

$$\begin{aligned} -(i\lambda\mathcal{N}\mathcal{M}^m U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1}V^k) &= (\mathcal{N}\mathcal{M}^m U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1}\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{A}_S^\top U_x^J)_{xx} \\ &\quad + (\mathcal{N}\mathcal{M}^m U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_{xx}^k)_{xx} + (\mathcal{N}\mathcal{M}^m U^k)^*(\mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1}G^k) \end{aligned}$$

integrando por partes e usando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^l |\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k|^2 dx &= - \int_0^l (\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k)^* (\mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1} \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{A}_S^\top U_x^J) dx \\
&\quad + \int_0^l (\mathcal{N}\mathcal{M}^m V^k)^* (\mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1} V^k) dx + R \\
&\leq C \|\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k\| \|U_x^J\| + C \|\mathbf{U}\| \|\mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1} V^k\| + |R| \\
&\leq C_\epsilon \|U_x^J\|^2 + \epsilon \|\mathbf{U}\|^2 + C_\epsilon \|\mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1} V^k\|^2 + |R|,
\end{aligned}$$

onde  $R$  satisfaz  $|R| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$ . Aplicando a hipótese indutiva concluímos que

$$\int_0^l |\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (2.36)$$

Multiplicamos  $\mathcal{N}\mathcal{M}^m \mathbf{R}_k^{-1}$    equa o (2.27) para obter

$$i\lambda \mathcal{N}\mathcal{M}^m V^k = \mathcal{N}\mathcal{M}^m \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{A}_S^\top U_{xx}^J + \mathcal{N}\mathcal{M}^{m+1} U_{xx}^k + \mathcal{N}\mathcal{M}^m G^k$$

e multiplicando por  $\mathcal{N}\mathcal{M}^m U^k$  temos

$$\begin{aligned}
-(\mathcal{N}\mathcal{M}^m V^k + \mathcal{N}\mathcal{M}^m F^k)^* (\mathcal{N}\mathcal{M}^m V^k) &= (\mathcal{N}\mathcal{M}^m U^k)^* (\mathcal{N}\mathcal{M}^m \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{A}_S^\top U^J)_{xx} \\
&\quad + (\mathcal{N}\mathcal{M}^m U^k)^* (\mathcal{N}\mathcal{M}^{m+1} U^k)_{xx} + (\mathcal{N}\mathcal{M}^m U^k)^* (\mathcal{N}\mathcal{M}^m G^k)
\end{aligned}$$

integrando por partes e usando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^l |\mathcal{N}\mathcal{M}^m V^k|^2 dx &= \int_0^l (\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k)^* (\mathcal{N}\mathcal{M}^m \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{A}_S^\top U_x^J) dx \\
&\quad + \int_0^l (\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k)^* (\mathcal{N}\mathcal{M}^{m+1} U_x^k) dx + R \\
&\leq C \|\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k\| \|U_x^J\| + C \|\mathbf{U}\| \|\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k\| + |R| \\
&\leq C \|U_x^J\|^2 + \epsilon \|\mathbf{U}\|^2 + C_\epsilon \|\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k\|^2 + |R|,
\end{aligned}$$

Aplicando a hipótese indutiva e a equa o (2.36) concluimos que

$$\int_0^l |\mathcal{N}\mathcal{M}^m V^k|^2 + |\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall m < k.$$

□

**Teorema 2.2.7.**  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t)$  é exponencialmente estável se, e somente se  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ . Caso contrario o operador  $\mathcal{A}$  possui infinitos autovalores imaginários.

*Demonstração.* Do Lema 2.2.3.  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$  se, e somente se

$$\dim \text{Span} \{ \mathcal{N}_j, \mathcal{N}_j \mathcal{M}, \mathcal{N}_j \mathcal{M}^2, \dots, \mathcal{N}_j \mathcal{M}^{k-1}; \quad j = 1, 2, \dots, J \} \geq k$$

Nesse caso, a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{N}\mathcal{M} \\ \mathcal{N}\mathcal{M}^2 \\ \vdots \\ \mathcal{N}\mathcal{M}^{k-1} \end{bmatrix}_{J(k) \times k}$$

tem posto  $k$ . Logo existem  $k$  linhas linearmente independentes as quais denotamos por

$$L = \{ \mathcal{N}_{j_1} \mathcal{M}^{m_1}, \mathcal{N}_{j_2} \mathcal{M}^{m_2}, \dots, \mathcal{N}_{j_k} \mathcal{M}^{m_k} \}$$

agora definimos os vetores coluna  $W = (w_1, w_2, \dots, w_k)$  e  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ .

$$w_1 = \mathcal{N}_{j_1} \mathcal{M}^{m_1} U_x^k, \quad w_2 = \mathcal{N}_{j_2} \mathcal{M}^{m_2} U_x^k, \quad \dots, \quad w_k = \mathcal{N}_{j_k} \mathcal{M}^{m_k} U_x^k.$$

$$z_1 = \mathcal{N}_{j_1} \mathcal{M}^{m_1} V^k, \quad z_2 = \mathcal{N}_{j_2} \mathcal{M}^{m_2} V^k, \quad \dots, \quad z_k = \mathcal{N}_{j_k} \mathcal{M}^{m_k} V^k.$$

Do Lema 2.2.6 obtemos

$$\int_0^l |W|^2 + |Z|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

pela independência linear de  $L$  podemos escrever  $U_x^k = M^{-1}W$  e  $V^k = M^{-1}Z$  onde  $M$  é a matriz formada pelos vetores linha  $L$ .

$$\int_0^l |U_x^k|^2 + |V^k|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2$$

e aplicando o Lema 2.2.5 concluímos

$$\int_0^l |U_x|^2 + |V|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Então existe uma constante positiva  $C$  tal que

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

logo aplicamos o Teorema 1.6.7 para obter a estabilidade exponencial do Semigrupo. Em caso contrario, (2.14) é verdadeiro, pela demonstração do Lema 2.2.3, existe uma sequência de autovalores imaginários determinados por  $\tau \in \sigma(\mathcal{M})$  (2.20).

$$i\lambda_\nu = i \frac{\nu\pi\sqrt{\tau}}{l}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

assim, obtemos uma sequência infinita de autovalores imaginários do operador  $\mathcal{A}$ .  $\square$

## 2.3 Exemplo: Matrizes Observáveis

Nesta seção veremos que existe uma família de matrizes que satisfazem nossas hipóteses sobre estabilidade exponencial.

**Definição 2.3.1.** *Um par de matrizes  $(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \in \mathbb{R}^{k \times k} \times \mathbb{R}^{J \times k}$  são chamados observáveis se o posto da matriz  $\mathbf{O}$ , definida como*

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{NM} \\ \mathbf{NM}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{NM}^{k-1} \end{bmatrix}_{Jk \times k} \quad (2.37)$$

é  $k = \text{número de colunas de } \mathbf{O}$ .

As definições e propriedades associadas com matrizes observáveis podem ser encontradas no Capítulo 12, D. Bernstein [7]. (Ver Lemas 12.3.2 e Corolário 12.3.18)

**Exemplo 1.** Consideremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{1}{4}u_{tt}^1 = u_{xx}^1 - u_t^1 - u_t^2 \\ \frac{1}{9}u_{tt}^2 = u_{xx}^2 - u_t^1 - u_t^2 \end{cases}$$

$(x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty)$  com condições de contorno

$$u^i(0, t) = 0 = u^i(\pi, t) \quad ; i = 1, 2.$$

Logo as matrizes são:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Podemos diagonalizar simultaneamente  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{B}$  usando a transformação

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

isto é ,

$$\mathbf{SRS}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{SAS}^* = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 97 & -30 \\ -30 & 72 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{SBS}^* = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Note que

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{SRS}^* \succ 0, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{SAS}^* \succ 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{SBS}^* \succeq 0.$$

e o sistema transformado é da forma

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}^1 = \frac{97}{13}\tilde{u}_{xx}^1 - \frac{30}{13}\tilde{u}_{xx}^2 - 13\tilde{u}_t^1 \\ \tilde{u}_{tt}^2 = -\frac{30}{13}\tilde{u}_{xx}^1 + \frac{30}{13}\tilde{u}_{xx}^2 \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{S}^*(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = (u^1, u^2)$$

Usando a notação estabelecida na seção anterior, temos  $J = k = 1$ ,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_J & \tilde{\mathbf{A}}_S \\ \tilde{\mathbf{A}}_S^\top & \tilde{\mathbf{A}}_k \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 97 & -30 \\ -30 & 72 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_J & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{R}}_k \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Logo,

$$\mathcal{M} = \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_k = \frac{72}{13}, \quad \mathcal{N} = \tilde{\mathbf{R}}_J^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_S = -\frac{30}{13}$$

Neste caso

$$\mathbf{O} = \left[ \mathcal{N} \right]_{1 \times 1} \neq 0$$

e aplicando o Teorema 2.2.7, obtemos que o Semigrupo associado ao sistema é exponencialmente estável. Como  $\mathbf{S}$  é não singular, temos a estabilidade exponencial do sistema inicial.



**Exemplo 2.** Por outro lado, Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2u_{tt}^1 = 8u_{xx}^1 + 3u_{xx}^2 + u_{xx}^4 - u_t^1 \\ u_{tt}^2 = 3u_{xx}^1 + 10u_{xx}^2 + 7u_{xx}^3 + u_{xx}^4 \\ u_{tt}^3 = 7u_{xx}^2 + 8u_{xx}^3 \\ u_{tt}^4 = u_{xx}^1 + u_{xx}^2 + u_{xx}^4 \end{cases}$$

$(x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty)$  com condições de contorno

$$u^i(0, t) = 0 = u^i(\pi, t) \quad ; i = 1, 2, 3, 4.$$

Usando a notação estabelecida na seção anterior, temos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 10 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4},$$

logo,  $J = 1$ ,  $k = 3$ ,  $\mathbf{A}_J = (8)$ ,  $\mathbf{R}_J = (2)$

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{1 \times 3}.$$

Então

$$\mathcal{M} = \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad \mathcal{N} = \mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}_{1 \times 3}.$$

$$\Rightarrow \mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{NM} \\ \mathcal{NM}^2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0.5 \\ 15.5 & 10.5 & 2 \\ 230.5 & 192.5 & 17.5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Como  $\det \mathbf{O} = -20.125$ ,  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  são observáveis e aplicando o Teorema 2.2.7, obtemos que o Semigrupo associado ao sistema é exponencialmente estável.

**Exemplo 3.** Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} 2u_{tt}^1 = 8u_{xx}^1 + 7u_{xx}^2 - 2u_t^1 \\ u_{tt}^2 = 7u_{xx}^1 + 10u_{xx}^2 + u_{xx}^3 + u_{xx}^4 - u_t^2 \\ 3u_{tt}^3 = u_{xx}^2 + 3u_{xx}^3 \\ u_{tt}^4 = u_{xx}^2 + u_{xx}^4 \end{cases}$$

$(x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty)$  com condições de contorno

$$u^i(0, t) = 0 = u^i(\pi, t) \quad ; i = 1, 2, 3, 4.$$

Usando a notação estabelecida na seção anterior, temos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4},$$

logo,  $J = k = 2$ ,

$$\mathbf{A}_J = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

$$\mathbf{R}_J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Então

$$\mathcal{M} = \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathcal{N} = \mathbf{R}_J^{-1} \mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

$$\Rightarrow \mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{N}\mathcal{M} \end{bmatrix}_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 2}$$

Como o posto de  $\mathbf{O}$  é 1,  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  não são observáveis e aplicando o Teorema 2.2.7, obtemos que o Semigrupo associado ao sistema não é exponencialmente estável. Como  $\sigma(\mathcal{M}) = \{1\}$  temos que

$$\{i\nu ; \nu \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(\mathcal{A})$$

e os autovetores correspondentes são  $\mathbf{U}_\nu = (U_\nu, V_\nu)$ , definidos por

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sen } \nu x \\ -\text{sen } \nu x \end{pmatrix}, \quad V_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\nu \text{sen } \nu x \\ -i\nu \text{sen } \nu x \end{pmatrix}$$

e vemos que

$$i\nu \mathbf{U}_\nu - \mathcal{A} \mathbf{U}_\nu = 0.$$

# Capítulo 3

## Mistura de sólidos termoelásticos

Estudaremos o sistema (1.14) que modela uma mistura de  $n$  sólidos termoelásticos unidimensional configurada no intervalo  $(0, l)$ . Neste capítulo assumimos que:

$$\mathbf{R} \succ 0, \mathbf{A} \succ 0 \text{ e } \beta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

para caracterizar as propriedades assintóticas das soluções.

### 3.1 Existência e Unicidade

Nesta seção mostraremos a boa colocação do problema para os modelos de mistura de sólidos termoelásticos.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}U_{tt} &= \mathbf{A}U_{xx} - \theta_x \beta \\ \varsigma \theta_t &= \kappa \theta_{xx} - \beta^\top U_{xt} \end{aligned} \tag{3.1}$$

com condições iniciais

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad U_t(x, 0) = U_1(x), \quad x \in (0, l) \tag{3.2}$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in (0, l) \tag{3.3}$$

e condições de fronteira

$$U(0, t) = U(l, t) = 0 \tag{3.4}$$

$$\theta(0, t) = \theta(l, t) = 0. \tag{3.5}$$

Assumimos que as constantes  $\varsigma$  e  $\kappa$  são positivas e as matrizes  $\mathbf{R} = \text{diag}(\rho_j)$  e  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  são definidas positivas.

Consideremos o espaço vetorial

$$\mathcal{H} = [H_0^1(0, l)]^n \times [L^2(0, l)]^n \times [L^2(0, l)]$$

que, munido com o produto interno

$$\left( (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{\theta}), (U, V, \theta) \right)_{\mathcal{H}} = \int_0^l U_x^* \mathbf{A} \tilde{U}_x dx + \int_0^l V^* \mathbf{R} \tilde{V} dx + \varsigma \int_0^l \bar{\theta} \tilde{\theta} dx$$

é um espaço de Hilbert, com a seguinte norma induzida

$$\|(U, V, \theta)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^l U_x^* \mathbf{A} U_x dx + \int_0^l V^* \mathbf{R} V dx + \varsigma \int_0^l |\theta|^2 dx,$$

onde  $U = (u^1, \dots, u^n)^\top$  e  $V = (v^1, \dots, v^n)^\top$ . Desde que  $\mathbf{R}, \mathbf{A} \succ 0$  temos

$$\|(U, V, \theta)\|_{\mathcal{H}}^2 \asymp \sum_{i=1}^n \int_0^l |u_x^i|^2 + |v^i|^2 dx + \int_0^l |\theta|^2 dx$$

Agora introduzimos o operador  $\mathcal{A}$  dado por

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} U \\ V \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} U_{xx} - \mathbf{R}^{-1} \beta \theta_x \\ \varsigma^{-1} \kappa \theta_{xx} - \varsigma^{-1} \beta^\top V_x \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = [H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)]^n \times [H_0^1(0, l)]^n \times [H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)].$$

Sob estas condições o problema de valor inicial e fronteira (3.1)-(3.5) pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U} = \mathcal{A} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0$$

where  $\mathbf{U}(t) = (U(t), V(t), \theta(t))^\top$  and  $\mathbf{U}_0 = (U_0, U_1, \theta_0)^\top$ .

**Teorema 3.1.1.** *O operador  $\mathcal{A}$  é gerador infinitesimal de um Semigrupo  $C_0$  de contrações, denotado por  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t) = e^{At}$ .*

*Demonstração.* Devido aos teoremas de imersão de Sobolev temos que  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  é denso em  $\mathcal{H}$ . Vejamos agora que o operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} &= \left( \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{A}U_{xx} - \beta\theta_x] \\ \varsigma^{-1}[\kappa\theta_{xx} - \beta^\top V_x] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U \\ V \\ \theta \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \int_0^l U_x^* AV_x dx + \int_0^l V^* AU_{xx} - (V^*\beta)\theta_x dx + \int_0^l \kappa\bar{\theta}\theta_{xx} - \bar{\theta}(\beta^\top V)_x dx \\
&= \int_0^l U_x^* AV_x dx - \int_0^l V_x^* AU_x dx - \int_0^l \theta_x(V^*\beta) dx - \kappa \int_0^l |\theta_x|^2 dx + \int_0^l \bar{\theta}_x(\beta^\top V) dx \\
&= \int_0^l U_x^* AV_x - (U_x^* AV_x)^* dx - \int_0^l \theta_x V^* \beta - (\theta_x V^* \beta)^* dx - \kappa \int_0^l |\theta_x|^2 dx
\end{aligned}$$

Desde que  $\text{Re}((U_x^* AV_x) - (U_x^* AV_x)^*) = 0$  e  $\text{Re}((\theta_x V^* \beta) - (\theta_x V^* \beta)^*) = 0$ , temos que

$$\text{Re} \langle \mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa \int_0^l |\theta_x|^2 dx \leq 0. \quad (3.7)$$

Agora mostraremos que  $0 \in \rho(\mathcal{A})$  e nossa conclusão seguirá por uma aplicação do Lema 1.5.9 . Com efeito, dado  $\mathbf{F} = (F, G, h) \in \mathcal{H}$ , mostraremos que existe um único vetor  $\mathbf{U} = (U, V, \theta)$  em  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  tal que  $\mathcal{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}$  que em termos das componentes se escreve

$$V = F \quad \text{in } [H_0^1(0, l)]^n \quad (3.8)$$

$$\mathbf{A}U_{xx} - \beta\theta_x = \mathbf{R}G \quad \text{in } [L^2(0, l)]^n \quad (3.9)$$

$$\kappa\theta_{xx} - \beta^\top V_x = \varsigma h \quad \text{in } L^2(0, l) \quad (3.10)$$

logo o problema se reduz a encontrar  $\theta \in H^2 \cap H_0^1$  e  $U \in [H^2 \cap H_0^1]^n$  tal que

$$\kappa\theta_{xx} = \varsigma h + \beta^\top F_x$$

e

$$\mathbf{A}U_{xx} = \mathbf{R}G + \beta\theta_x .$$

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} \kappa\theta_{xx} = \varsigma h + \beta^\top F_x \in L^2(0, l) \\ \theta(0) = \theta(l) = 0. \end{cases}$$

Seja  $\mathfrak{b}$  a forma sesquilinear definida por

$$\mathfrak{b}(\theta, \phi) = \kappa \int_0^l \phi_x^* \theta_x dx ; \forall (\theta, \phi) \in H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l)$$

a qual é positiva e continua. Definimos a aplicação antilinear  $\mathfrak{j} : H_0^1(0, l) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\mathfrak{j}(\phi) = -\varsigma \int_0^l \phi^* h dx - \int_0^l \phi^* (\beta^\top F)_x dx.$$

Aplicando o Teorema de Lax-Milgran obtemos a existência e unicidade de  $\theta$  em  $H_0^1(0, l)$  tal que

$$\mathfrak{b}(\theta, \phi) = \mathfrak{j}(\phi) \quad \forall \phi \in H_0^1(0, l).$$

Então

$$\kappa \int_0^l \phi_x^* \theta_x dx = -\varsigma \int_0^l h \phi^* dx - \int_0^l \phi^* (\beta^\top F_x) dx.$$

Em particular para  $\phi \in D(0, l)$  temos,

$$\int_0^l \phi_x (\kappa\theta)_x dx = - \int_0^l \phi [\varsigma h + \beta^\top F_x] dx.$$

ou

$$\langle \phi, \kappa\theta_{xx} \rangle_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}'} = \int_0^l \phi [\varsigma h + \beta^\top F_x] dx.$$

Então  $\theta_{xx} \in L^2(0, l)$  e

$$\kappa\theta_{xx} = \varsigma h + \beta^\top F_x.$$

e concluimos que  $\theta \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)$ . Logo estabelecemos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \mathbf{A}U_{xx} = \mathbf{R}G + \beta\theta_x \in [L^2(0, l)]^n \\ U(0) = U(l) = 0. \end{cases}$$

Neste caso consideramos a forma sesquilinear  $\mathfrak{B}$  positiva e continua definida por

$$\mathfrak{B}(U, \Phi) = \int_0^l \Phi_x^* \mathbf{A} U_x dx ; \forall (U, \Phi) \in [H_0^1(0, l)]^n \times [H_0^1(0, l)]^n$$

e definimos a aplicação antilinear  $\mathfrak{J} : [H_0^1(0, l)]^n \longrightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\mathfrak{J}(\Phi) = - \int_0^l \Phi^* \beta \theta_x dx - \int_0^l \Phi^* \mathbf{R} G dx$$

Aplicando o Teorema de Lax-Milgran obtemos a existência de  $U$  em  $[H_0^1(0, l)]^n$  tal que

$$\mathfrak{B}(U, \Phi) = \mathfrak{J}(\Phi) \quad \forall \Phi \in [H_0^1(0, l)]^n.$$

Então

$$\int_0^l \Phi_x^* \mathbf{A} U_x dx = - \int_0^l \Phi^* [\beta \theta_x + \mathbf{R} G] dx.$$

Consideremos a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{e_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ , logo definimos  $\Phi^* = \varphi e_j$  onde  $\varphi \in \mathcal{D}(0, l)$  para obter

$$\int_0^l \varphi_x e_j \mathbf{A} U_x dx = - \int_0^l \varphi e_j [\beta \theta_x + \mathbf{R} G] dx$$

ou

$$\langle \varphi, e_j \mathbf{A} U_{xx} \rangle_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}'} = \int_0^l \varphi e_j [\beta \theta_x + \mathbf{R} G] dx.$$

Onde  $e_j \mathbf{A} U_{xx}$  representa a  $j$ -ésima componente de  $\mathbf{A} U_{xx}$  e  $e_j [\beta \theta_x + \mathbf{R} G]$  representa a  $j$ -ésima componente de  $[\beta \theta_x + \mathbf{R} G]$ . Então  $\mathbf{A} U_{xx} \in [L^2(0, l)]^n$  e

$$\mathbf{A} U_{xx} = \beta \theta_x + \mathbf{R} G.$$

Desde que  $\mathbf{A} \succ 0$  temos  $U \in [H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)]^n$ . Portanto, existe um único vetor  $\mathbf{U} = (U, V, \theta) \in D(\mathcal{A})$  satisfazendo  $\mathcal{A} \mathbf{U} = \mathbf{F}$ .

Agora mostraremos que  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Usando a dissipação (3.7) e a desigualdade de Poincaré temos

$$\|\theta\|^2 \leq c \|\theta_x\|^2 \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \quad (3.11)$$



multiplicando as equações (3.8) e (3.9) por  $V^*$  e  $U^*$  respectivamente obtemos

$$\|V\|^2 = \int_0^l V^*V \, dx = \int_0^l V^*F \, dx \leq C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

$$\|U_x\|^2 \asymp \int_0^l U_x^* \mathbf{A}U_x \, dx \leq \int_0^l |U^* \mathbf{R}G| + |U^* \beta| |\theta_x| \, dx \leq C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\theta_x\|$$

e aplicando (3.11) concluímos que

$$\|U_x\| + \|v\| + \|\theta\| \asymp \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

isto é,

$$\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

Por tanto  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ou equivalentemente  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$  obtendo o resultado.

□

## 3.2 Estabilidade Exponencial

Consideremos a equação resolvente

$$i\lambda\mathbf{U} - \mathcal{A}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.12)$$

que em termos das componentes se escreve

$$i\lambda U = V + F \quad (3.13)$$

$$i\lambda V = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}U_{xx} - \mathbf{R}^{-1}\beta\theta_x + G \quad (3.14)$$

$$i\lambda\theta = \varsigma^{-1}\kappa\theta_{xx} - \varsigma^{-1}\beta^\top V_x + h \quad (3.15)$$

O primeiro resultado para o operador termoelástico afirma que o espectro correspondente esta composto só por autovalores, a seguir enunciamos tal propriedade na forma equivalente,

**Lema 3.2.1.**  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

*Demonstração.* Da demonstração do Teorema 3.1.1 temos que  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , agora mostraremos que tal operador possui resolvente compacto, isto é,  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ .

Desde que  $\mathcal{A}$  é fechado e densamente definido com  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ , vemos que  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$  se, e somente se a injeção canônica

$$\Upsilon : (D(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$$

é compacta.

Suponha que  $\{\mathbf{U}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência limitada em  $D(\mathcal{A})$ , então

$$\|\mathcal{A}\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C$$

e em termos das componentes implica que

$$\begin{aligned} \|V_{\nu x}\|^2 &\asymp \int_0^l V_{\nu x}^* \mathbf{A} V_{\nu x} dx \leq C, \\ \|\mathbf{A}U_{\nu xx} - \beta\theta_{\nu x}\|^2 &= \int_0^l |\mathbf{A}U_{\nu xx} - \beta\theta_{\nu x}|^2 dx \leq C, \\ \|\kappa\theta_{\nu xx} - \beta^\top V_x\|^2 &= \int_0^l |\kappa\theta_{\nu xx} - \beta^\top V_x|^2 dx \leq C, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \|\theta_{\nu xx}\|^2 &\leq c \int_0^l |\kappa\theta_{\nu xx} - \beta^\top V_x|^2 + |\beta^\top V_x|^2 dx \leq C, \\ \|U_{\nu xx}\|^2 &\asymp \int_0^l |\mathbf{A}U_{\nu xx}|^2 dx \leq c \int_0^l |\mathbf{A}U_{\nu xx} - \beta\theta_{\nu x}|^2 + |\beta\theta_{\nu x}|^2 dx \leq C, \end{aligned}$$

como as imersões  $H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l) \hookrightarrow H_0^1(0, l) \hookrightarrow L^2(0, l)$  são densas e compactas, concluímos que existe uma subsequência que ainda denotaremos por  $\mathbf{U}_\nu = (U_\nu, V_\nu, \theta_\nu) \in D(\mathcal{A})$  que converge em  $\mathcal{H}$ . Portanto  $\Upsilon$  é compacta e  $\mathcal{A}^{-1}$  possui resolvente compacto ( $\sigma_p(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$ ).

□

O seguinte Lema caracteriza a primeira condição necessária para la estabilidade exponencial do semigrupo gerado por  $\mathcal{A}$ .

**Lema 3.2.2.**  $i\mathbb{R} \cap \sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset$  se, e somente se

$$\dim \text{Span} \{ \beta^\top, \beta^\top \mathcal{M}, \beta^\top \mathcal{M}^2, \dots, \beta^\top \mathcal{M}^{n-1} \} < n \quad (3.16)$$

onde  $\mathcal{M} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}$ .

*Demonstração.* Suponhamos que existe  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$  tal que (3.12) é verdadeiro com  $\mathbf{F} = 0$ . De (3.7) temos que

$$\int_0^l |\theta_x|^2 dx = 0 \quad (3.17)$$

então  $\theta = 0$ , portanto (3.13)-(3.15) é reduzido às seguintes equações

$$-\lambda^2 U = \mathcal{M}U_{xx} \quad (3.18)$$

$$\beta^\top U = 0. \quad (3.19)$$

De tais equações e as condições de Dirichlet associadas ao problema obtemos

$$\beta^\top \mathcal{M}U_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta^\top \mathcal{M}U = 0.$$

multiplicando por  $\beta^\top \mathcal{M}$  à equação (3.18) concluimos que  $\beta^\top \mathcal{M}^2 U = 0$ . Portanto  $\beta^\top \mathcal{M}^m U = 0$  para todo  $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Isto é

$$\begin{bmatrix} \beta^\top \\ \beta^\top \mathcal{M} \\ \beta^\top \mathcal{M}^2 \\ \vdots \\ \beta^\top \mathcal{M}^{n-1} \end{bmatrix} U = 0 .$$

Se

$$\dim \text{Span} \{ \beta^\top, \beta^\top \mathcal{M}, \beta^\top \mathcal{M}^2, \dots, \beta^\top \mathcal{M}^{n-1} \} \geq n$$

então  $U = 0$ , e isto é contrário a nossa hipótese, portanto (3.16) é verdadeiro.

Reciprocamente, suponhamos que (3.16) é verdadeiro. Então, existe um vetor não nulo  $Y_0^\top \in \mathbb{C}^n$  tal que

$$\beta^\top \mathcal{M}^m Y_0 = 0, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.20)$$

Seja  $p_0 \in \mathbb{C}[z]$  o polinômio de menor grau tal que

$$p_0(\mathcal{M})Y_0 = 0. \quad (3.21)$$

Note que  $p_0$  não é o polinômio constante, então

$$1 \leq \deg p_0 \leq \deg p_{\mathcal{M}} \leq n$$

onde  $p_{\mathcal{M}}$  é o polinômio minimal de  $\mathcal{M}$ .

Seja  $\tau \in \mathbb{C}$  tal que  $p_0(\tau) = 0$ . Definimos  $q \in \mathbb{C}[z]$  tal que  $p_0(z) = (\tau - z)q(z)$  for all  $z \in \mathbb{C}$ . Desde que  $\deg q < \deg p_0$ , segue que

$$\tilde{Y}_0 := q(\mathcal{M})Y_0 \neq 0.$$

Além disso, aplicando (3.20) e (3.21) obtemos

$$\begin{bmatrix} \tau \mathbf{I} - \mathcal{M} \\ \beta^\top \end{bmatrix} \tilde{Y}_0 = 0 \quad (3.22)$$

logo  $\tau \in \sigma(\mathcal{M})$  e aplicando o Teorema 1.1.7 obtemos que  $\tau > 0$ .

Para cada  $\nu \in \mathbb{N}$  definimos

$$\begin{aligned} U_\nu &= \tilde{Y}_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\nu\pi x}{l}\right) \\ V_\nu &= i\lambda_\nu \tilde{Y}_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\nu\pi x}{l}\right) \\ \theta_\nu &= 0 \\ \lambda_\nu &= \frac{\nu\pi\sqrt{\tau}}{l} \end{aligned}$$

logo  $\mathbf{U}_\nu := (U_\nu, V_\nu, \theta_\nu) \in D(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$ . Devido a (3.22) obtemos

$$i\lambda_\nu \mathbf{U}_\nu - \mathcal{A}\mathbf{U}_\nu = 0.$$

Portanto  $i\lambda_\nu \in i\mathbb{R} \cap \sigma(\mathcal{A})$ .

□

Mostraremos que existe estabilidade exponencial do semigrupo se , e somente se o eixo imaginario esta contido no resolvente. Aplicando a propriedade (3.7) obtemos

$$\int_0^l |\theta_x|^2 dx \leq \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \quad (3.23)$$

**Lema 3.2.3.** *Para cada  $\epsilon > 0$  existe  $c_\epsilon > 0$  tal que*

$$\int_0^l |\beta^\top U_x|^2 dx + \int_0^l |\beta^\top V|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.24)$$

*Demonstração.* Definimos  $\varphi$  satisfazendo

$$-\varphi_{xx} = \beta^\top V \quad , \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0. \quad (3.25)$$

Multiplicando a equação (3.15) por  $\varphi_x^*$  obtemos

$$i\lambda \int_0^l \varphi_x^* \theta dx - \int_0^l \kappa \varphi_x^* \theta_{xx} dx + \int_0^l \varphi_x^* \beta^\top V_x dx = \varsigma \int_0^l \varphi_x^* h dx$$

logo

$$\int_0^l |\beta^\top V|^2 dx = \kappa \varphi_x^* \theta_x \Big|_0^l + i\lambda \int_0^l \varphi_x^* \theta dx + \kappa \int_0^l \beta^\top \bar{V} \theta_x dx - \varsigma \int_0^l \varphi_x^* h dx$$

portanto obtemos

$$\int_0^l |\beta^\top V|^2 dx \leq \underbrace{|\kappa \varphi_x^* \theta_x \Big|_0^l|}_{:=I_1} + \underbrace{|i\lambda \int_0^l \varphi_x^* \theta dx|}_{:=I_2} + c \|\theta_x\|^2 + c \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \quad (3.26)$$

usando (3.25) e interpolação entre espaços de Sobolev vemos que

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \kappa \sqrt{|\theta_x(l)|^2 + |\theta_x(0)|^2} \sqrt{|\varphi_x(l)|^2 + |\varphi_x(0)|^2} \\
&\leq c \|\theta\|_{H^{\frac{3}{2}}} \|\varphi\|_{H^{\frac{3}{2}}} \\
&\leq c \|\theta_x\|^{\frac{1}{2}} \|\theta_{xx}\|^{\frac{1}{2}} \|\varphi_{xx}\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\
&\leq c \|\theta_x\|^{\frac{1}{2}} \|\theta_{xx}\|^{\frac{1}{2}} \|\beta^\top V\|^{\frac{1}{2}} \|\beta^\top V\|_{H^{-1}}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

então

$$|I_1| \leq c \left( \|\theta_x\| \|\beta^\top V\| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \|\theta_{xx}\| \|\beta^\top V\|_{H^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.27)$$

Usando (3.13) na equação (3.15) obtemos

$$\|\theta_{xx}\| \leq c|\lambda| \|\theta\| + c|\lambda| \|\beta^\top U_x\| + c\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.28)$$

Por outro lado, da equação (3.14) temos

$$i\lambda V = \underbrace{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}}_{=\mathcal{M}} U_{xx} - \mathbf{R}^{-1}\beta\theta_x + G \quad (3.29)$$

multiplicando por  $\beta^\top$  e usando a norma de  $H^{-1}(0, l)$  vemos que

$$|\lambda| \|\beta^\top V\|_{H^{-1}} \leq \|\beta^\top \mathcal{M} U_x\| + c\|\theta\| + c\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.30)$$

De (3.28) e (3.30) obtemos

$$\|\theta_{xx}\| \|\beta^\top V\|_{H^{-1}} \leq c\|\beta^\top U_x\|^2 + c\|\beta^\top \mathcal{M} U_x\|^2 + c\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + c\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2$$

logo substituindo em (3.27) obtemos

$$|I_1| \leq \epsilon \|\beta^\top U_x\|^2 + \epsilon \|\beta^\top V\|^2 + \epsilon \|\beta^\top \mathcal{M} U_x\|^2 + c_\epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + c\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2$$

ou

$$|\kappa \varphi_x^* \theta_x|_0^l \leq \epsilon \int_0^l |\beta^\top U_x|^2 dx + \epsilon \int_0^l |\beta^\top V|^2 dx + \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Similarmente

$$|I_2| = |i\lambda \varsigma \int_0^l \varphi_x^* \theta dx| \leq \epsilon \int_0^l |\beta^\top \mathcal{M} U_x|^2 dx + \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2$$

aplicando as desigualdades acima em (3.26) obtemos

$$\int_0^l |\beta^\top V|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.31)$$

Multiplicando (3.29) por  $\beta^\top \bar{U} \beta^\top \mathcal{M}^{-1}$  temos

$$\int_0^l |\beta^\top U_x|^2 dx \leq \|\beta^\top \mathcal{M}^{-1} V\| \|\beta^\top V\| + c \|\theta_x\| \|\beta^\top U\| + c \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \quad (3.32)$$

usando a desigualdade de Poincaré e (3.31) obtemos

$$\int_0^l |\beta^\top U_x|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

**Lema 3.2.4.** *Para todo  $\epsilon > 0$  existe uma constante positiva  $c_\epsilon$  com a seguinte propriedade*

$$\int_0^l |\beta^\top \mathcal{M}^m U_x|^2 + |\beta^\top \mathcal{M}^m V|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.33)$$

$\forall m < n$ .

*Demonstração.* Multiplicando a equação (3.29) por  $\beta^\top \mathcal{M} \bar{U} \beta^\top$  vemos que

$$\int_0^l |\beta^\top \mathcal{M} U_x|^2 dx \leq \|\beta^\top \mathcal{M} V\| \|\beta^\top V\| + c \|\theta_x\| \|\beta^\top \mathcal{M} U\| + c \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

usando a desigualdade de Poincaré e (3.31) obtemos

$$\int_0^l |\beta^\top \mathcal{M} U_x|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.34)$$

Similarmente, multiplicando a equação (3.29) por  $\beta^\top \mathcal{M} \bar{U} \beta^\top \mathcal{M}$  obtemos

$$\int_0^l |\beta^\top \mathcal{M} V|^2 dx \leq \|\beta^\top \mathcal{M} U_x\| \|\beta^\top \mathcal{M}^2 U_x\| + c \|\theta_x\| \|\beta^\top \mathcal{M} U\| + c \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

aplicando desigualdade de Poincaré e (3.34) vemos que

$$\int_0^l |\beta^\top \mathcal{M} U_x|^2 + |\beta^\top \mathcal{M} V|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.35)$$

seguindo um processo indutivo, repetindo o procedimento acima, obtemos

$$\int_0^l |\beta^\top \mathcal{M}^m U_x|^2 + |\beta^\top \mathcal{M}^m V|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.36)$$

para  $m = 0, \dots, n-1$ . □

**Teorema 3.2.5.**  *$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t)$  é exponencialmente estável se, e somente se  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ . Caso contrario, O operador  $\mathcal{A}$  possui infinitos autovalores imaginarios.*

*Demonstração.* Do Lema 3.2.2.  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$  se, e somente se

$$\dim \text{Span} \{ \beta^\top, \beta^\top \mathcal{M}, \beta^\top \mathcal{M}^2, \dots, \beta^\top \mathcal{M}^{n-1} \} \geq n$$

Nesse caso, a seguinte matriz

$$M = \begin{bmatrix} \beta^\top \\ \beta^\top \mathcal{M} \\ \beta^\top \mathcal{M}^2 \\ \vdots \\ \beta^\top \mathcal{M}^{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

tem posto  $n$ . Logo existem  $n$  linhas linearmente independentes, definimos os vetores coluna  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$  e  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^\top$ .

$$w_1 = \beta^\top U_x, \quad w_2 = \beta^\top \mathcal{M} U_x, \quad \dots, \quad w_n = \beta^\top \mathcal{M}^{n-1} U_x.$$

$$z_1 = \beta^\top V, \quad z_2 = \beta^\top \mathcal{M} V, \quad \dots, \quad z_n = \beta^\top \mathcal{M}^{n-1} V.$$

Do Lema 3.2.4 obtemos

$$\int_0^l |W|^2 + |Z|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

desde que  $\det M \neq 0$  podemos escrever  $U_x = M^{-1}W$  e  $V = M^{-1}Z$ .

$$\int_0^l |U_x|^2 + |V|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2$$

Então existe uma constante positiva  $C$  tal que

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

logo aplicamos o Teorema 1.6.7 para obter a estabilidade exponencial do Semigrupo. Caso contrario, (3.16) é verdadeiro, pela demonstração do Lema 3.2.2, existe uma seqüência de autovalores imaginários determinados por  $\tau \in \sigma(\mathcal{M}) \subset (0, +\infty)$  (3.22).

$$i\lambda_\nu = i \frac{\nu \pi \sqrt{\tau}}{l}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

assim, obtemos uma seqüência infinita de autovalores imaginários do operador  $\mathcal{A}$ .  $\square$



### 3.3 Exemplos:

Nesta seção veremos alguns exemplos de matrizes que satisfazem nossas hipóteses sobre estabilidade exponencial.

**Exemplo 1.** Consideremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u_{tt}^1 = 5u_{xx}^1 + 6u_{xx}^2 - \theta_x \\ \frac{1}{3}u_{tt}^2 = 6u_{xx}^1 + 10u_{xx}^2 \\ \theta_t = \theta_{xx} - u_{xt}^1 \end{cases}$$

$(x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty)$  com condições de contorno

$$u^i(0, t) = u^i(\pi, t) = 0, \quad \theta(0, t) = \theta(\pi, t) = 0 \quad ; i = 1, 2.$$

Logo as matrizes são:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad \beta^\top = (1, 0).$$

Usando a notação estabelecida na seção anterior, temos

$$\mathcal{M} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Neste caso

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \beta^\top \\ \beta^\top \mathcal{M} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

o posto da matriz  $\mathbf{O}$  é 2, e aplicando o Teorema 2.2.7, obtemos que o Semigrupo associado ao sistema é exponencialmente estável.

**Exemplo 2.** Por outro lado, consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 4u_{tt}^1 = 8u_{xx}^1 + 4u_{xx}^4 \\ u_{tt}^2 = 10u_{xx}^2 + u_{xx}^3 + 2u_{xx}^4 \\ u_{tt}^3 = u_{xx}^2 + 3u_{xx}^3 \\ 2u_{tt}^4 = 4u_{xx}^1 + 2u_{xx}^2 + 6u_{xx}^4 - 0.1\theta_x \\ \theta_t = \theta_{xx} - 0.1u_{xt}^4 \end{cases}$$

$(x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty)$  com condições de contorno

$$u^i(0, t) = 0 = u^i(\pi, t), \quad \theta(0, t) = \theta(\pi, t) = 0 \quad ; i = 1, 2, 3, 4.$$

Usando a notação estabelecida na seção anterior, temos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}_{4 \times 1},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 4},$$

Então

$$\mathcal{M} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{4 \times 4},$$

$$\Rightarrow \mathbf{O} = \begin{bmatrix} \beta^\top \\ \beta^\top \mathcal{M} \\ \beta^\top \mathcal{M}^2 \\ \beta^\top \mathcal{M}^3 \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0.3 \\ 1 & 1.3 & 0.1 & 1.3 \\ 4.6 & 14.4 & 1.6 & 7.5 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

Como  $\det \mathbf{O} = -0.0014$ ,  $(\mathcal{M}, \beta^\top)$  são observáveis e aplicando o Teorema 3.2.5, obtemos que o Semigrupo associado ao sistema é exponencialmente estável.

**Exemplo 3.** Consideremos o sistema de equações

$$\begin{cases} u_{tt}^1 = 0.2u_{xx}^1 + 0.1u_{xx}^4 - a\theta_x \\ u_{tt}^2 = 0.2u_{xx}^2 + 0.1u_{xx}^4 \\ 3u_{tt}^3 = 0.9u_{xx}^3 - b\theta_x \\ u_{tt}^4 = 0.1u_{xx}^1 + 0.1u_{xx}^2 + 0.3u_{xx}^4 \\ \theta_t = \theta_{xx} - au_{xt}^1 - bu_{xt}^3 \end{cases}$$

$(x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty)$ , onde  $(a, b) = (1, 1)$  ou  $(0, 1)$ . Com condições de contorno

$$u^i(0, t) = 0 = u^i(\pi, t), \quad \theta(0, t) = \theta(\pi, t) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Usando a notação estabelecida na seção anterior, temos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad \beta = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4},$$

Então

$$\mathcal{M} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}_{4 \times 4}.$$

Se  $(a, b) = (1, 1)$ ,

$$\beta^\top = (1, 0, 1, 0) \implies \begin{bmatrix} \beta^\top \\ \beta^\top \mathcal{M} \\ \beta^\top \mathcal{M}^2 \\ \beta^\top \mathcal{M}^3 \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0.05 & 0.01 & 0.09 & 0.05 \\ 0.015 & 0.007 & 0.027 & 0.021 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

e a determinante da matriz acima é diferente de zero, logo os vetores linha formam um conjunto Linearmente independente e aplicando o Teorema 3.2.5, obtemos que o Semi-grupo associado ao sistema é exponencialmente estável.

Se  $(a, b) = (0, 1)$

$$\beta^\top = (0, 0, 1, 0) \implies \begin{bmatrix} \beta^\top \\ \beta^\top \mathcal{M} \\ \beta^\top \mathcal{M}^2 \\ \beta^\top \mathcal{M}^3 \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0900 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0270 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

e a determinante da matriz acima é zero, logo os vetores linha formam um conjunto Linearmente dependente e aplicando o Teorema 3.2.5, obtemos que o Semigrupo associado ao sistema não é exponencialmente estável.

## Capítulo 4

# Mistura de sólidos com dissipação friccional em $\mathbb{R}$

Estudaremos a seguinte equação hiperbólica de segunda ordem:

$$\mathbf{R}U_{tt} - \mathbf{A}U_{xx} + \mathbf{B}U_t + \mathbf{D}U = 0 ; x \in (-\infty, +\infty). \quad (4.1)$$

Assumimos que:

$$\mathbf{R} \succ 0, \mathbf{A} \succ 0 \text{ e } \mathbf{B} \succeq 0$$

para caracterizar as propriedades assintóticas das soluções. Consideramos

estudaremos o problema dado acima com condições iniciais

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad U_t(x, 0) = U_1(x). \quad (4.2)$$

Consideramos  $\mathbf{A} \succ 0$ ,  $\mathbf{D} \succ 0$ ,  $\mathbf{R} = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \succ 0$  e  $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_J, 0, \dots, 0) \succeq 0$ .

Nosso principal resultado é mostrar que o semigrupo associado é exponencialmente estável se os coeficientes satisfazem a relação (4.14)

## 4.1 Existência e Unicidade

Consideremos o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \mathbb{H}^1 \times \mathbb{L}^2,$$

onde  $\mathbb{H}^s = [H^s(\mathbb{R})]^n = H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}) \times \cdots \times H^s(\mathbb{R})$ , com produto interno

$$\langle (U, V), (\tilde{U}, \tilde{V}) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{U}_x^* \mathbf{A} U_x + \tilde{U}^* \mathbf{D} U + \tilde{V}^* \mathbf{R} V \, dx$$

e norma induzida  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ ,

$$\|(U, V)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}} U_x^* \mathbf{A} U_x + U^* \mathbf{D} U + V^* \mathbf{R} V \, dx$$

onde  $U = (u^1, \dots, u^n)^\top$  e  $V = (v^1, \dots, v^n)^\top$ . Desde que  $\mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{R} \succ 0$  temos

$$\|(U, V)\|_{\mathcal{H}}^2 \asymp \int_{\mathbb{R}} |U_x|^2 + |U|^2 + |V|^2 \, dx.$$

Definimos o operador  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{A}U_{xx} - \mathbf{D}U - \mathbf{B}V] \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^1.$$

Sob estas condições o problema de valor inicial e fronteira (4.1)-(4.2) pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U} = \mathcal{A} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0$$

onde  $\mathbf{U}(t) = (U(t), V(t))^\top$  and  $\mathbf{U}_0 = (U_0, U_1)^\top$ .

**Teorema 4.1.1.** *O operador  $\mathcal{A}$  é gerador infinitesimal de um semigrupo  $C_0$  de contrações, denotado por  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t) = e^{\mathcal{A}t}$ .*

*Demonstração.* Pelas imersões dos espaços de Sobolev é fácil ver que  $D(\mathcal{A})$  é denso em  $\mathcal{H}$ . Agora vejamos que o operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo, isto é

$$(\mathcal{A} \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = \left( \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{A}U_{xx} - \mathbf{D}U - \mathbf{B}V] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int U_x^* \mathbf{A}V_x \, dx + \int U^* \mathbf{D}V \, dx + \int V^* \mathbf{A}U_{xx} - \int V^* \mathbf{D}U \, dx - \int V^* \mathbf{B}V \, dx \\
&= \int U_x^* \mathbf{A}V_x \, dx + \int U^* \mathbf{D}V \, dx - \int V_x^* \mathbf{A}U_x - \int V^* \mathbf{D}U \, dx - \int V^* \mathbf{B}V \, dx \\
&= \int U_x^* \mathbf{A}V_x - V_x^* \mathbf{A}U_x \, dx + \int U^* \mathbf{D}V - V^* \mathbf{D}U \, dx - \int V^* \mathbf{B}V \, dx
\end{aligned}$$

Desde que  $\operatorname{Re} (U_x^* \mathbf{A}V_x - V_x^* \mathbf{A}U_x) = 0$ , e  $\operatorname{Re} (U^* \mathbf{D}V - V^* \mathbf{D}U) = 0$  temos que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} = - \int_{\mathbb{R}} V^* \mathbf{B}V \, dx \leq 0. \quad (4.4)$$

Agora mostraremos que  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$  nossa conclusão segue do Lema 1.6.7. Com efeito, dado  $\mathbf{F} = (F, G) \in \mathcal{H}$ , mostraremos que existe um único vetor  $\mathbf{U} = (U, V)$  em  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  tal que  $\mathcal{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ , que em termos das componentes se escreve

$$V = F \quad \text{in } \mathbb{H}^1 \quad (4.5)$$

$$\mathbf{A}U_{xx} - \mathbf{D}U - \mathbf{B}V = \mathbf{R}G \quad \text{in } \mathbb{L}^2 \quad (4.6)$$

portanto o problema se reduz a encontrar  $U \in \mathbb{H}^1$  tal que

$$\mathbf{A}U_{xx} - \mathbf{D}U = \mathbf{B}F + \mathbf{R}G .$$

Consideremos a forma sesquilinear  $\mathfrak{B}$  coerciva e continua definida por

$$\mathfrak{B}(U, \Phi) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_x^* \mathbf{A}U_x + \Phi^* \mathbf{D}U \, dx ; \quad \forall (U, \Phi) \in \mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^1$$

Definimos a aplicação antilinear  $\mathfrak{J} : \mathbb{H}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\mathfrak{J}(\Phi) = - \int_{\mathbb{R}} \Phi^* \mathbf{B}F \, dx - \int_{\mathbb{R}} \Phi^* \mathbf{R}G \, dx$$

Aplicando o Teorema de Lax-Milgran obtemos a existência de  $U$  em  $\mathbb{H}^1$  tal que

$$\mathfrak{B}(U, \Phi) = \mathfrak{J}(\Phi) \quad \forall \Phi \in \mathbb{H}^1 .$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_x^* \mathbf{A}U_x + \Phi^* \mathbf{D}U \, dx = - \int_{\mathbb{R}} \Phi^* [\mathbf{B}F + \mathbf{R}G] \, dx.$$

consideremos a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$ , e definimos  $\Phi^* = e_j \varphi$  onde  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  para obter

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_x e_p \mathbf{A}U_x + \int_{\mathbb{R}} \varphi e_j \mathbf{D}U \, dx = - \int_{\mathbb{R}} \varphi e_j [\mathbf{B}F + \mathbf{R}G] \, dx$$

ou

$$\begin{aligned} \langle \varphi, e_j \mathbf{A}U_{xx} \rangle_{\mathcal{S} \times \mathcal{S}'} - \langle \varphi, e_j \mathbf{D}U \rangle_{\mathcal{S} \times \mathcal{S}'} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi e_j [\mathbf{B}F + \mathbf{R}G] \, dx \\ \langle \varphi, e_j [\mathbf{A}U_{xx} - \mathbf{D}U] \rangle_{\mathcal{S} \times \mathcal{S}'} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi e_j [\mathbf{B}F + \mathbf{R}G] \, dx. \end{aligned}$$

Então  $\mathbf{A}U_{xx} \in \mathbb{L}^2$  e

$$\mathbf{A}U_{xx} - \mathbf{D}U = \mathbf{B}F + \mathbf{R}G.$$

Desde que  $\mathbf{A} \succ 0$  temos  $U \in \mathbb{H}^2$  e as equações (4.5) e (4.6) são verificadas.

Por outro lado, multiplicando as equações (4.5) e (4.6) por  $V^*$  e  $U^*$  respectivamente, integrando em  $\mathbb{R}$  e somando obtemos

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \asymp \int_{\mathbb{R}} V^*V + U_x^* \mathbf{A}U_x + U^* \mathbf{D}U \, dx = \int_{\mathbb{R}} V^*F - U^* \mathbf{B}V - U^* \mathbf{R}G$$

e desde que

$$\int_{\mathbb{R}} |V^*F| + |U^* \mathbf{B}V| + |U^* \mathbf{R}G| \, dx \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

concluimos que  $\|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} = \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$ , para uma constante positiva  $C$ . Por tanto  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ou equivalentemente  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ .

□



## 4.2 Estabilidade exponencial

Para o estudo da estabilidade do Sistema, consideramos as Matrizes  $\mathbf{R} = I, \mathbf{D} = I$  identidade e  $\mathbf{B}$  uma matriz diagonal de posto  $J$ .

Seja  $\mathbf{U} = (U, V) \in D(\mathcal{A})$  a solução da equação resolvente

$$i\lambda\mathbf{U} - \mathcal{A}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{F} = (F, G) \in \mathcal{H}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então

$$i\lambda U = V + F \quad (4.8)$$

$$i\lambda V^J = \mathbf{A}_J U_{xx}^J + \mathbf{A}_S U_{xx}^k - U^J - \mathbf{B}_J V^J + G^J \quad (4.9)$$

$$i\lambda V^k = \mathbf{A}_S^\top U_{xx}^J + \mathbf{A}_k U_{xx}^k - U^k + G^k \quad (4.10)$$

Devido a (4.4) temos

$$\int |V^J|^2 dx \asymp \int V^* \mathbf{B} V dx \leq \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \quad (4.11)$$

Agora estabelecemos uma desigualdade que será usada quando o sistema (4.8)-(4.10) seja bem colocado.

**Lema 4.2.1.** *Suponha que a equação espectral (4.8)-(4.10) esta bem colocado. Para cada  $\epsilon > 0$  existe  $C_\epsilon > 0$  tal que*

$$\int |V^J|^2 + |U^J|^2 + |U_x^J|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.12)$$

*Demonstração.* Multiplicando (4.10) por  $\mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1}$  obtemos

$$i\lambda \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} V^k = \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{A}_S^\top U_{xx}^J + \mathbf{A}_S U_{xx}^k - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} U^k + \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} G^k$$

Tomando a diferença destas equações e (4.9) vemos que

$$\begin{aligned} i\lambda V^J + i\lambda \underbrace{[-\mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1}]}_{:=\mathbf{Q}_S} V^k &= \mathbf{C}_J U_{xx}^J - U^J + \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} U^k - \mathbf{B}_J V^J \\ &+ G^J - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} G^k \end{aligned}$$

ou

$$i\lambda V^J + i\lambda \mathbf{Q}_S V^k = \mathbf{C}_J U_{xx}^J - U^J + \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} U^k - \mathbf{B}_J V^J - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} G^k + G^J \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{C}_J = \mathbf{A}_J - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{A}_S^\top$  é uma matriz não singular, pois o posto de  $\mathbf{A}$  e o posto da matriz obtida pela multiplicação da segunda linha de  $\mathbf{A}$  por  $-\mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1}$  somada à primeira linha são iguais. Isto é

$$\text{Rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_J & \mathbf{A}_S \\ \mathbf{A}_S^\top & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} = \text{Rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_J - \mathbf{A}_S \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{A}_S^\top & 0 \\ \mathbf{A}_S^\top & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}$$

Logo o posto de  $\mathbf{C}_J$  é  $J$ , pois do contrario a matriz  $\mathbf{A}$  resulta singular contradizendo nossa hipótese.

Multiplicando a equação (4.13) por  $U^{J*} \mathbf{C}_J^{-1}$  e integrando obtemos

$$\int |U_x^J|^2 dx \leq \epsilon \int |U^k|^2 dx + \epsilon \int |V^k|^2 dx + C_\epsilon \int |U^J|^2 dx + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

□

O seguinte Lema proporciona a primeira condição necessária para a estabilidade exponencial de  $\mathcal{A}$ .

**Lema 4.2.2.** *Se*

$$\dim \text{Span} \{ \mathcal{N}_j, \mathcal{N}_j \mathcal{M}, \mathcal{N}_j \mathcal{M}^2, \dots, \mathcal{N}_j \mathcal{M}^{k-1}; \quad j = 1, 2, \dots, J \} \geq k, \quad (4.14)$$

então

$$i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A}). \quad (4.15)$$

Onde  $\mathcal{M} = A_k$  e  $\mathcal{N} = A_S$

*Demonstração.* Para a demonstração do Lema seguimos os seguintes passos:

**I.** Desde que  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$  e do Teorema das aplicações de contração segue que para  $\lambda$  com  $|\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}$ , o operador

$$i\lambda \mathbf{I} - \mathcal{A} = \mathcal{A} (i\lambda \mathcal{A}^{-1} - \mathbf{I})$$

é invertível. Além disso,  $\|(i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$  é uma função contínua de  $\lambda$  no intervalo

$$\left(-\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}\right).$$

**II.** Se  $\sup\left\{\|(i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}; |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}\right\} = M < \infty$ , aplicando novamente o Teorema das aplicações de contração, temos que o operador

$$i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A} = (i\lambda_0\mathbf{I} - \mathcal{A}) (\mathbf{I} + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1})$$

com  $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}$  é invertível para  $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{M}$ . Logo concluímos que

$$\left\{\lambda; |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} + \frac{1}{M}\right\} \subseteq \varrho(\mathcal{A})$$

e  $\|(i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$  é uma função contínua de  $\lambda$  no intervalo

$$\left(-\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} - \frac{1}{M}, \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} + \frac{1}{M}\right).$$

**III.** Então, segue do argumento **II**, que se (4.15) não é verdadeiro, existe  $\omega \in \mathbb{R}$  com  $\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} \leq |\omega| < \infty$  tal que

$$\{i\lambda; |\lambda| < |\omega|\} \subset \varrho(\mathcal{A})$$

e

$$\sup\left\{\|(i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}; |\lambda| < |\omega|\right\} = \infty.$$

Logo existe uma seqüência  $\lambda_\nu \in \mathbb{R}$  com  $\lambda_\nu \rightarrow \omega$ ,  $|\lambda_\nu| < |\omega|$  e uma seqüência de vetores  $\mathbf{U}_\nu \in D(\mathcal{A})$  com  $\|\mathbf{U}_\nu\|_{\mathcal{H}} = 1$  tal que

$$\|i\lambda_\nu\mathbf{U}_\nu - \mathcal{A}\mathbf{U}_\nu\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$$

quando  $\nu \rightarrow \infty$ .

**IV.** Denotamos  $\mathbf{U}_n = (U_\nu, V_\nu)$  e  $\mathbf{F}_\nu = i\lambda_\nu\mathbf{U}_\nu - \mathcal{A}\mathbf{U}_\nu$ , aplicando o argumento **III**, obtemos

$$i\lambda U_\nu^J - V_\nu^J \rightarrow 0 \text{ em } [H^1(\mathbb{R})]^J \quad (4.16)$$

$$i\lambda U_\nu^k - V_\nu^k \rightarrow 0 \text{ em } [H^1(\mathbb{R})]^k \quad (4.17)$$

$$i\lambda_\nu V_\nu^J - \mathbf{A}_J U_{\nu xx}^J - \mathcal{N} U_{\nu xx}^k + U_\nu^J + \mathbf{B}_J V_\nu^J \rightarrow 0 \text{ em } [L^2(\mathbb{R})]^J \quad (4.18)$$

$$i\lambda_\nu V_\nu^k - \mathcal{N}^\top U_{\nu xx}^J - \mathcal{M} U_{\nu xx}^k + U_\nu^k \rightarrow 0 \text{ em } [L^2(\mathbb{R})]^k \quad (4.19)$$

e usando a dissipação do sistema, (4.11), temos

$$Re\langle (i\lambda_\nu - \mathcal{A})\mathbf{U}_\nu, \mathbf{U}_\nu \rangle_{\mathcal{H}} = \int V_\nu^* B_J V_\nu^J dx \asymp \int |V_\nu^J| dx \longrightarrow 0 .$$

Das equações (4.16)-(4.19) e (4.12) temos

$$\int |V_\nu^J|^2 + |U_\nu^J|^2 + |U_{\nu x}^J|^2 \longrightarrow 0 \quad (4.20)$$

**Observação 4.2.3.** *Sejam  $\{\phi^n\} \subset L^2(\mathbb{R})$  uma seqüência limitada e  $\{f^n\}$  uma seqüência convergente a zero em  $L^2(\mathbb{R})$ ,*

$$f^n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}) ,$$

*logo uma aplicação direta da desigualdade de Hölder implica a seguinte convergência*

$$\int f^n \phi^n dx \longrightarrow 0 .$$

Como  $\{\mathcal{N}U_\nu^k\}$  é uma seqüência limitada em  $[L^2(\mathbb{R})]^J$ , podemos multiplicar com (4.18) e aplicar a observação anterior , para obter a seguinte convergência

$$i\lambda_\nu \int (\mathcal{N}U_\nu^k)^* V_\nu^J dx + \int (\mathcal{N}U_{\nu x}^k)^* \mathbf{A}_J U_{\nu x}^J dx + \int |\mathcal{N}U_{\nu x}^k|^2 dx + \int (\mathcal{N}U_\nu^k)^* U_\nu^J dx \longrightarrow 0$$

e usando (4.20) obtemos

$$\int |\mathcal{N}U_{\nu x}^k|^2 dx \longrightarrow 0$$

Aplicando  $\mathcal{N}$  a (4.19), obtemos

$$i\lambda_\nu \mathcal{N}V_\nu^k - \mathcal{N}\mathcal{N}^\top U_{\nu xx}^J - \mathcal{N}\mathcal{M}U_{\nu xx}^k + \mathcal{N}U_\nu^k \longrightarrow 0 \text{ em } [L^2(\mathbb{R})]^J \quad (4.21)$$

agora multiplicamos por  $\mathcal{N}U_\nu^k$  para obter

$$- \int (i\lambda_\nu \mathcal{N}U_\nu^k)^* \mathcal{N}V_\nu^k dx + \int (\mathcal{N}U_\nu^k)^* (\mathcal{N}U_\nu^k) dx \longrightarrow 0$$

ou

$$- \int (i\lambda_\nu \mathcal{N}U_\nu^k - \mathcal{N}V_\nu^k)^* \mathcal{N}V_\nu^k dx - \int |\mathcal{N}V_\nu^k|^2 + \frac{1}{\lambda_\nu^2} \int (i\lambda_\nu \mathcal{N}U_\nu^k)^* (i\lambda_\nu \mathcal{N}U_\nu^k) dx \longrightarrow 0$$

então

$$\left(\frac{1}{\lambda_\nu^2} - 1\right) \int |\mathcal{N}V_\nu^k|^2 dx \longrightarrow 0$$

Como  $\lambda_\nu$  é uma seqüência convergente concluímos que

$$\int |\mathcal{N}V_\nu^k|^2 dx + \int |\mathcal{N}U_{\nu x}^k|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (4.22)$$

Como  $\{\mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k\}$  é uma seqüência limitada em  $[L^2(\mathbb{R})]^J$ , podemos multiplicar com (4.24) e uma aplicação direta da desigualdade de Hölder implica que

$$-(i\lambda_\nu \mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k)^* \mathcal{N}V_\nu^k + (\mathcal{N}\mathcal{M}U_{\nu x}^k)^* \mathcal{N}\mathcal{N}^\top U_{\nu x}^J + |\mathcal{N}\mathcal{M}U_{\nu x}^k|^2 + (\mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k)^* \mathcal{N}U_\nu^k \longrightarrow 0$$

usamos as convergências (4.20) e (4.22) para obter

$$\int |\mathcal{N}\mathcal{M}U_{\nu x}^k|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (4.23)$$

Aplicando  $\mathcal{N}\mathcal{M}$  a (4.19), obtemos

$$i\lambda_\nu \mathcal{N}\mathcal{M}V_\nu^k - \mathcal{N}\mathcal{M}\mathcal{N}^\top U_{\nu xx}^J - \mathcal{N}\mathcal{M}^2 U_{\nu xx}^k + \mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k \longrightarrow 0 \text{ em } [L^2(\mathbb{R})]^J \quad (4.24)$$

agora multiplicamos por  $\mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k$  para obter

$$- \int (i\lambda_\nu \mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k)^* \mathcal{N}\mathcal{M}V_\nu^k dx + \int (\mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k)^* (\mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k) dx \longrightarrow 0$$

ou

$$- \int (i\lambda_\nu \mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k - \mathcal{N}\mathcal{M}V_\nu^k)^* \mathcal{N}\mathcal{M}V_\nu^k dx - \int |\mathcal{N}\mathcal{M}V_\nu^k|^2 + \frac{1}{\lambda_\nu^2} \int (i\lambda_\nu \mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k)^* (i\lambda_\nu \mathcal{N}\mathcal{M}U_\nu^k) dx \longrightarrow 0$$

então

$$\left(\frac{1}{\lambda_\nu^2} - 1\right) \int |\mathcal{N}\mathcal{M}V_\nu^k|^2 dx \longrightarrow 0$$

Como  $\lambda_\nu$  é uma sequência convergente concluímos que

$$\int |\mathcal{N}\mathcal{M}V_\nu^k|^2 dx + \int |\mathcal{N}\mathcal{M}U_{\nu x}^k|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (4.25)$$

realizando um processo análogo, indutivamente, podemos obter

$$\sum_{p=0}^{k-1} \int |\mathcal{N}\mathcal{M}^p V_\nu^k|^2 dx + |\mathcal{N}\mathcal{M}^p U_{\nu x}^k|^2 dx \longrightarrow 0 .$$

Desde quedim  $\text{Span} \{ \mathcal{N}_j, \mathcal{N}_j \mathcal{M}, \mathcal{N}_j \mathcal{M}^2, \dots, \mathcal{N}_j \mathcal{M}^{k-1}; j = 1, 2, \dots, J \} \geq k$ , concluímos

$$1 = \|\mathbf{U}_\nu\|_{\mathcal{H}}^2 \asymp \int |V_\nu|^2 + |U_\nu|^2 + |U_{\nu x}|^2 dx \longrightarrow 0$$

que é uma contradição. Portanto  $i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A})$ .

□

Antes de enunciar a condição suficiente para a estabilidade exponencial calcularemos as estimativas correspondentes usando multiplicadores usuais. Multiplicando (4.9)-(4.10) por  $U^*$  e aplicando integração por partes obtemos

$$\int U_x^* \mathbf{A} U_x dx + \int |U|^2 dx + i\lambda \int U^* \mathbf{B} U dx = \int |V|^2 dx + R,$$

onde  $R$  satisfaz  $|R| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$ . Usando a parte real temos

$$\int U_x^* \mathbf{A} U_x dx + \int |U|^2 dx \leq \int |V|^2 dx + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.26)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (4.9)-(4.10) por  $V^*$  temos

$$i\lambda \int |V|^2 dx = i\lambda \int U_x^* \mathbf{A} U_x dx + i\lambda \int |U|^2 dx - \int_0^l V^* \mathbf{B} V dx + R$$

usando a parte imaginária temos

$$\int |V|^2 dx = \int U_x^* \mathbf{A} U_x dx + \int |U|^2 dx + \frac{\text{Im}R}{\lambda}. \quad (4.27)$$

**Observação 4.2.4.** Se  $\det \mathbf{B} \neq 0$  então  $J = n$  e  $V^* \mathbf{B} V \asymp |v^1|^2 + \dots + |v^n|^2 = |V|^2$ , usando (4.4) e (4.26) obtemos

$$\int |U_x|^2 + |U|^2 dx \asymp \int U_x^* \mathbf{A} U_x dx + \int |U|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.28)$$

devido à equação acima obtemos que  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. Aplicando Teorema 1.6.7 obtemos a estabilidade exponencial  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t)$ .

Nossa metodologia consiste em obter uma desigualdade do tipo (4.28). O seguinte Lema ajuda a esse propósito quando  $\mathbf{B}$  é uma matriz singular (  $\text{rank } B = J < n$  ).

**Lema 4.2.5.** *Para cada  $\epsilon > 0$  existe uma constante positiva  $C_\epsilon$  com a seguinte propriedade*

$$\int |\mathcal{N}\mathcal{M}^m V^k|^2 + |\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\epsilon}{\lambda^2} \int \sum_{j=0}^m |\mathcal{N}\mathcal{M}^j V^k|^2 dx ,$$

para todo  $m < k$  .

*Demonstração.* Multiplicando a equação (4.9) por  $\mathcal{N}\overline{U^k}$  e integrando em  $\mathbb{R}$  obtemos

$$\begin{aligned} \int |\mathcal{N}U_x^k|^2 dx &= \int V^J \cdot \mathcal{N}\overline{V^k} - \mathbf{A}_J U_x^J \cdot \mathcal{N}\overline{U_x^k} dx \\ &\quad - \int \mathbf{B}_J V^J \cdot \overline{\mathcal{N}U^k} + \frac{V^J}{i\lambda} \cdot \overline{\mathcal{N}U^k} dx + \mathbf{R}_0 \\ &\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|V^J\| + C \|U_x^J\| \|\mathcal{N}U_x^k\| + C \|V^J\| \|\mathcal{N}U^k\| + \mathbf{R}_0 \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{R}_0$  satisfaz

$$|\mathbf{R}_0| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}},$$

e usando o Lema 4.2.1 vemos que

$$\int |\mathcal{N}U_x^k|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 . \quad (4.29)$$

Por outro lado, multiplicamos  $\mathcal{N}$  a (4.10) depois por  $\mathcal{N}\overline{U^k}$  para obter

$$\begin{aligned} \int |\mathcal{N}V^k|^2 dx &= \int \mathcal{N}\mathbf{A}_S^\top U_x^J \cdot \mathcal{N}\overline{U_x^k} + \mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k \cdot \mathcal{N}\overline{U_x^k} + |\mathcal{N}U^k|^2 dx \\ &\quad - \int \mathcal{N}G^k \cdot \mathcal{N}\overline{U^k} dx - \int \mathcal{N}V^k \cdot \mathcal{N}\overline{F^k} dx \\ &\leq C \|U_x^J\| \|\mathcal{N}U_x^k\| + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{N}U_x^k\| + \|\mathcal{N}U^k\|^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \int |\mathcal{N}U^k|^2 dx , \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{M} = \mathbf{A}_k$ . Portanto obtemos

$$\int |\mathcal{N}V^k|^2 + |\mathcal{N}U_x^k|^2 dx \leq \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \int |\mathcal{N}U^k|^2 dx . \quad (4.30)$$

Agora, aplicamos  $\mathcal{N}$  a (4.10) e multiplicando por  $\mathcal{N}\mathcal{M}\overline{U^k}$  obtemos

$$\begin{aligned} \int |\mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k|^2 dx &\leq C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{N}V^k\| + C\|U_x^J\|\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{N}U^k\| + \mathbf{R}_0 \\ &\leq \epsilon\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \int |\mathcal{N}U^k|^2 dx . \end{aligned}$$

Multiplicamos a equação (4.10) por  $\mathcal{N}\mathcal{M}$  para obter

$$i\lambda\mathcal{N}\mathcal{M}V^k = \mathcal{N}\mathcal{M}\mathbf{A}_S^\top U_{xx}^J + \mathcal{N}\mathcal{M}^2 U_{xx}^k - \mathcal{N}\mathcal{M}U^k + \mathcal{N}\mathcal{M}G^k \quad (4.31)$$

logo multiplicamos (4.31) por  $\mathcal{N}\mathcal{M}\overline{U^k}$  e obtemos

$$\int |\mathcal{N}\mathcal{M}V^k|^2 + |\mathcal{N}\mathcal{M}U_x^k|^2 dx \leq \epsilon\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \int |\mathcal{N}U^k|^2 + |\mathcal{N}\mathcal{M}U^k|^2 dx . \quad (4.32)$$

Com um procedimento indutivo, aplicamos  $\mathcal{N}\mathcal{M}^{m-1}$  a (4.10) e multiplicamos por  $\mathcal{N}\mathcal{M}^m\overline{U^k}$ , obtemos

$$\int |\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k|^2 dx \leq \epsilon\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \int \sum_{j=0}^{m-1} |\mathcal{N}\mathcal{M}^j U^k|^2 dx , \quad (4.33)$$

e aplicando  $\mathcal{N}\mathcal{M}^m$  a (2.27) , multiplicando por  $\mathcal{N}\mathcal{M}^m\overline{U^k}$  obtemos

$$\int |\mathcal{N}\mathcal{M}^m V^k|^2 + |\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k|^2 dx \leq \epsilon\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon \int \sum_{j=0}^m |\mathcal{N}\mathcal{M}^j U^k|^2 dx . \quad (4.34)$$

Portanto

$$\int |\mathcal{N}\mathcal{M}^m V^k|^2 + |\mathcal{N}\mathcal{M}^m U_x^k|^2 dx \leq \epsilon\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\epsilon}{\lambda^2} \int \sum_{j=0}^m |\mathcal{N}\mathcal{M}^j V^k|^2 dx , \quad (4.35)$$

para  $m = 0, \dots, k-1$ . □

**Teorema 4.2.6.** *Se*

$$\dim \text{Span} \{ \mathcal{N}_j, \mathcal{N}_j\mathcal{M}, \mathcal{N}_j\mathcal{M}^2, \dots, \mathcal{N}_j\mathcal{M}^{k-1}; \quad j = 1, 2, \dots, J \} \geq k.$$

*então  $\mathcal{S}_A(t)$  é exponencialmente estável.*

*Demonstração.* Do Lema 4.2.5 obtemos a existência de uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

Portanto o semigrupo é exponencialmente estável.



# Capítulo 5

## Um Sistema Híbrido

Uma das primeiras contribuições na área da estabilização de sistemas elásticos híbridos pode ser encontrada em Littman and Markus [20]. Da mesma forma, a interação de um meio elástico com uma massa rígida (sistema híbrido) tem sido estudada na literatura matemática por vários autores. Na área de controle do sistema, por exemplo, pode ser encontrada em C.M. Castro e E. Zuazua [10]. Além disso, modelos de equações de onda, com dissipação fraca (ou Maxwell) , em vez de dissipação de tipo Kelvin-Voigt, têm sido considerados por A. Freiria Neves, H. de Souza Ribeiro e O. Lopes [11], principalmente com o objetivo de estudar o decaimento das soluções.

Por outro lado, é conhecido que a dissipação viscoelástica de tipo Kelvin Voigt é eficaz quando está presente em todo o domínio. Este mecanismo de amortecimento não só implica estabilidade exponencial, mas também transforma o correspondente semigrupo em um semigrupo analítico, que, em particular, implica que o sistema seja exponencialmente estável entre outras propriedades importantes, ver o livro de Zheng-Liu [22]. Mas quando a dissipação esta localizada é mais fraco do que a dissipação friccional, no sentido de que o semigrupo correspondente não é exponencialmente estável como demonstrado no [21]. Um resultado recente de J. E. M. Rivera e outros [3] mostram que o semigrupo correspondente do problema de transmissão da equação de onda com viscoelasticidade localizada do tipo kelvin Voigt não é exponencialmente estável, mas a solução decai polinomialmente para zero  $1/(1+t)^2$  e que tal taxa é ótima.

Neste capitulo consideraremos o problema de transmissão localizada viscoelástica de tipo

Kevin Voigt híbrido.

$$\rho_1 u_{tt} - \alpha_1 u_{xx} - \alpha_2 u_{txx} = 0 \quad \text{in } ]0, l_0[ \times ]0, \infty[ \quad (5.1)$$

$$\rho_2 v_{tt} - \alpha_3 v_{xx} = 0 \quad \text{in } ]l_0, l[ \times ]0, \infty[ \quad (5.2)$$

$$\rho_3 w_{tt} + \delta w_t + \mu w + \alpha_3 v_x(l) = 0 \quad \text{in } ]0, \infty[ \quad (5.3)$$

onde  $u = u(x, t)$  e  $v = v(x, t)$  representam as duas partes do corpo.  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  são constantes positivas e  $\delta \geq 0$ .  $\rho_1, \rho_2$  e  $\rho_3$  são as densidades de massa.

As condições fronteira

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & v(l, t) = w(t) \\ u(l_0, t) = v(l_0, t), & t \geq 0 \\ \alpha_1 u_x(l_0, t) + \alpha_2 u_{tx}(l_0, t) = \alpha_3 v_x(l_0, t) \end{cases} \quad (5.4)$$

e dados iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{in } ]0, l_0[ \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x) \quad \text{in } ]l_0, l[ \\ w(0) = w_0 \in \mathbb{C}, & w_t(0) = w_1 \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (5.5)$$

Denotamos por  $\mathcal{E}$  a energia

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & \frac{1}{2} \left[ \int_0^{l_0} (\rho_1 |u_t|^2 + \alpha_1 |u_x|^2) dx \right. \\ & \left. + \int_0^{l_0} (\rho_2 |v_t|^2 + \alpha_3 |v_x|^2) dx + \rho_3 |w_t|^2 + \mu |w|^2 \right]. \end{aligned}$$

logo, não é difícil ver que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -\alpha_2 \int_0^{l_0} |u_{tx}|^2 dx - \delta |w_t|^2.$$

Aqui mostraremos que as soluções decaem polinomialmente a zero com uma taxa  $t^{-2}$ .

## 5.1 Existência e Unicidade

Em esta seção mostraremos a boa colocação do problema. Para a formulação do problema (5.1)-(5.5) em uma equação de evolução, consideramos

$$\mathbb{H}^m = H^m(0, l_0) \times H^m(l_0, l), \quad \mathbb{L}^2 = L^2(0, l_0) \times L^2(l_0, l)$$

$$\mathbb{H}_*^1 = \{(u, v) \in \mathbb{H}^1; u(0) = 0, u(l_0) = v(l_0)\}$$

Usando tais espaços vemos que o espaço da energia (espaço de fase) está dada por

$$\mathcal{H} = \{(u, v, U, V, w, W) \in \mathbb{H}_*^1 \times \mathbb{L}^2 \times \mathbb{C}^2, v(l) = w\}$$

aqui consideramos a norma

$$\begin{aligned} \|(u, v, U, V, w, W)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^{l_0} \alpha_1 |u_x|^2 + \rho_1 |U|^2 dx + \int_{l_0}^l \alpha_3 |v_x|^2 + \rho_2 |V|^2 dx \\ &\quad + \mu |w|^2 + \rho_3 |W|^2. \end{aligned}$$

Agora, definimos o operador  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  como

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ U \\ V \\ w \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \frac{1}{\rho_1} (\alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 U_{xx}) \\ \frac{\alpha_3}{\rho_2} v_{xx} \\ W \\ \frac{-1}{\rho_3} (\mu w + \delta W + \alpha_3 v_x(l)) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

com domínio

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= \{\mathcal{U} = (u, v, U, V, w, W) \in \mathcal{H} ; (U, V) \in \mathbb{H}_*^1, V(l) = W, \\ &\quad (\alpha_1 u + \alpha_2 U, v) \in \mathbb{H}^2, \alpha_1 u_x(l_0) + \alpha_2 U_x(l_0) = \alpha_3 v_x(l_0)\}. \end{aligned}$$

usando as notações acima, reescrevemos (5.1)-(5.5) no seguinte problema abstrato

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U} = \mathcal{A} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0$$

onde  $\mathbf{U}(t) = (u(t), v(t), U(t), V(t), w(t), W(t))^\top$  and  $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1, w_0, w_1)^\top$ .

**Teorema 5.1.1.** *O operador  $\mathcal{A}$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  de contrações em  $\mathcal{H}$ .*

*Demonstração.* Vejamos primeiro que  $D(\mathcal{A})$  é denso em  $\mathcal{H}$ . De fato, é conhecido que

$$\mathcal{H} = \overline{D(\mathcal{A})} \oplus D(\mathcal{A})^\perp ,$$

seja  $f \in D(\mathcal{A})^\perp$  e pela representação de Riesz, existe  $(f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathcal{H}$  tal que

$$\langle f, \phi \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} = ((f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6), (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6))_{\mathcal{H}} = 0 ,$$

para todo  $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6) \in D(\mathcal{A})$ . Então

$$\int_0^{l_0} \alpha_1 f_x^1 \overline{\phi^1_x} + \rho_1 f^3 \overline{\phi^3} dx + \int_{l_0}^l \alpha_3 f_x^2 \overline{\phi^2_x} + \rho_2 f^4 \overline{\phi^4} dx + \mu f^5 \overline{\phi^5} + \rho_3 f^6 \overline{\phi^6} = 0 \quad (5.7)$$

para todo  $(\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6) \in D(\mathcal{A})$ .

Em particular, para os vetores  $(\phi^1, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, \phi^2, 0, 0, 0, 0) \in D(\mathcal{A})$ , onde  $\phi^1 \in D(0, l_0)$  e  $\phi^2 \in D(l_0, l)$ , obtemos  $(f^1, f^2) \in \mathbb{H}^2$  e as derivadas distribucionais satisfazem

$$(f_{xx}^1, f_{xx}^2) = (0, 0). \quad (5.8)$$

Analogamente, tomando os vetores  $(0, 0, \phi^3, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, \phi^4, 0, 0) \in D(\mathcal{A})$ , onde  $\phi^3 \in D(0, l_0)$  e  $\phi^4 \in D(l_0, l)$ , obtemos

$$(f^3, f^4) = (0, 0). \quad (5.9)$$

Considerando  $(0, \phi_0^2, 0, 0, \phi_0^2(l), 0) \in D(\mathcal{A})$ , onde  $\phi_0^2 \equiv 0$  quase sempre tal que  $\phi_0^2(l_0) = 0$  e  $\phi_0^2(l) \neq 0$ , em (5.7) para obter

$$f^5 = f^2(l) = 0 \quad (5.10)$$

analogamente, usamos  $(0, 0, 0, \phi_0^4, 0, \phi_0^4(l)) \in D(\mathcal{A})$ , onde  $\phi_0^4 \equiv 0$  quase sempre tal que  $\phi_0^4(l_0) = 0$  e  $\phi_0^4(l) \neq 0$ , de (5.7) obtemos que

$$f^6 = 0 \quad (5.11)$$

Logo podemos realizar integração por partes em (5.7) para obter

$$[\alpha_1 f_x^1(l_0) - \alpha_3 f_x^2(l_0)] \overline{\phi^1(l_0)} + [\alpha_3 f_x^2(l)] \overline{\phi^2(l)} = 0. \quad (5.12)$$

Agora tomamos  $(0, \phi_\star^2, 0, 0, 1, 0) \in D(\mathcal{A})$ , onde  $\phi_\star^2(x) = \frac{(x-l_0)^2}{(l-l_0)^2}$ , assim de (5.12) obtemos que

$$f_x^2(l) = 0. \quad (5.13)$$

Do fato  $(f^1, f^2) \in \mathbb{H}^2 \hookrightarrow C^1([0, l_0]) \times C^1([l_0, l])$ , (5.8), (5.13) e pela desigualdade de Poincaré temos:

- $f_x^2 = 0$ , portanto  $f_x^2(l_0) = f_x^2(l) = 0$
- Aplicamos tais resultados em (5.12) para obter  $f_x^1(l_0) = 0$
- Usando novamente a desigualdade de Poincaré obtemos  $\|f^1\| \leq c\|f_x^1\| \leq c\|f_{xx}^1\| = 0$

Finalmente concluimos que  $(f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) = \mathbf{0}$ . Desta forma concluimos que  $D(\mathcal{A})^\perp = \{\mathbf{0}\}$ , portanto  $\mathcal{H} = \overline{D(\mathcal{A})}$ .

verificamos que o operador é dissipativo

$$Re \langle \mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} = -\alpha_2 \int_0^{l_0} |U_x|^2 dx - \delta |W|^2 \leq 0. \quad (5.14)$$

Agora mostraremos que  $0 \in \rho(\mathcal{A})$  e nossa conclusão segue do teorema 1.5.9. De fato, seja  $\mathbf{F} = (f, g, F, G, h, H) \in \mathcal{H}$ , mostraremos que existe um único vetor  $\mathbf{U} = (u, v, U, V, w, W)$  in  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  tal que  $\mathcal{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ . Que em termos das componentes se escreve

$$U = f \in H^1(0, l_0) \quad (5.15)$$

$$V = g \in H^1(l_0, l) \quad (5.16)$$

$$W = h = g(l) \in \mathbb{C} \quad (5.17)$$

$$\alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 U_{xx} = \rho_1 F \in L^2(0, l_0) \quad (5.18)$$

$$\alpha_3 v_{xx} = \rho_2 G \in L^2(l_0, l) \quad (5.19)$$

$$\mu w + \delta W + \alpha_3 v_x(l) = -\rho_3 H \in \mathbb{C} \quad (5.20)$$

usando (5.15) nas outras equações, temos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 u_{xx} = \rho_1 F - \alpha_2 f_{xx} & \text{em } H^{-1}(0, l_0) \\ \alpha_3 v_{xx} = \rho_2 G & \text{em } L^2(l_0, l) \\ -\alpha_3 v_x(l) - \mu v(l) = \rho_3 H + \delta g(l) & \\ u(0) = 0, u(l_0) = v(l_0) & \text{condição de } D(\mathcal{A}) \\ \alpha_1 u_x(l_0) - \alpha_3 v_x(l_0) = -\alpha_2 f_x(l_0) & \text{condição de } D(\mathcal{A}) \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Seja o espaço

$$\widetilde{\mathbb{H}}_\star^1 = \{(u, v, w) \in \mathbb{H}_\star^1 \times \mathbb{C}, w = v(l)\}$$

com norma

$$\|(u, v, w)\|^2 = \int_0^{l_0} \alpha_1 |u_x|^2 dx + \int_{l_0}^l \alpha_3 |v_x|^2 dx + \mu |v(l)|^2$$

então é claro que a forma sesquilinear  $\mathcal{B}$  em  $\widetilde{\mathbb{H}}_\star^1 \times \widetilde{\mathbb{H}}_\star^1$  definida por

$$\mathcal{B}((u, v, v(l)), (\psi, \varphi, \varphi(l))) = \int_0^{l_0} \alpha_1 u_x \bar{\psi}_x dx + \int_{l_0}^l \alpha_3 v_x \bar{\varphi}_x dx + \mu v(l) \overline{\varphi(l)}$$

é positiva e continua. Definimos a aplicação antilinear  $\mathcal{J}$  em  $\widetilde{\mathbb{H}}_\star^1$  como

$$\mathcal{J}(\psi, \varphi, \varphi(l)) = - \int_0^{l_0} \rho_1 F \bar{\psi} + \alpha_2 f_x \bar{\psi}_x dx - \int_{l_0}^l \rho_2 G \bar{\varphi} dx - (\rho_3 H + \delta g(l)) \overline{\varphi(l)}$$

Aplicando o Lema de Lax Milgram, obtemos a existência e unicidade de  $(u, v) \in \mathbb{H}_\star^1$  tal que

$$\mathcal{B}((u, v, v(l)), (\psi, \varphi, \varphi(l))) = \mathcal{J}(\psi, \varphi, \varphi(l))$$

para todo  $(\psi, \varphi) \in \mathbb{H}_\star^1$ .

Isto é,

$$\begin{aligned} \int_0^{l_0} \alpha_1 u_x \bar{\psi}_x dx + \int_{l_0}^l \alpha_3 v_x \bar{\varphi}_x dx + \mu v(l) \overline{\varphi(l)} &= - \int_0^{l_0} \rho_1 F \bar{\psi} dx - \int_0^{l_0} \alpha_2 f_x \bar{\psi}_x dx \\ &\quad - \int_{l_0}^l \rho_2 G \bar{\varphi} dx - (\rho_3 H + \delta g(l)) \overline{\varphi(l)}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Em particular, para  $\psi \in D(0, l_0)$  temos  $(\psi, 0, 0) \in \mathbb{H}_\star^1$  e

$$\int_0^{l_0} \alpha_1 u_x \psi_x dx + \int_0^{l_0} \alpha_2 f_x \psi_x dx = - \int_0^{l_0} \rho_1 F \psi dx,$$

ou

$$\langle \alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 f_{xx}, \psi \rangle_{D' \times D} = \int_0^{l_0} \rho_1 F \psi \, dx ,$$

então  $\alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 U_{xx} = \rho_1 F \in L^2(0, l_0)$ . Agora consideramos  $\varphi \in D(l_0, l)$  e  $(0, \varphi, 0) \in \mathbb{H}_*^1$  em (5.22) para obter:

$$\int_{l_0}^l \alpha_3 v_x \varphi_x \, dx = - \int_{l_0}^l \rho_2 G \varphi \, dx$$

ou

$$\langle \alpha_3 v_{xx}, \varphi \rangle_{D' \times D} = \int_{l_0}^l \rho_2 G \varphi \, dx ,$$

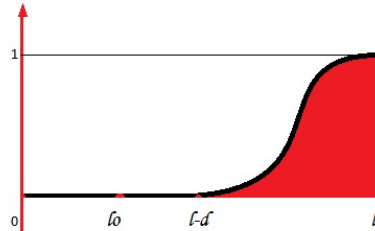
então  $\alpha_3 v_{xx} = \rho_2 G \in L^2(l_0, l)$ .

Com as regularidades obtidas até agora, podemos realizar integração por partes em (5.22) para obter

$$\begin{aligned} & - \int_0^{l_0} (\alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 U_{xx}) \bar{\psi} \, dx + (\alpha_1 u_x(l_0) + \alpha_2 U_x(l_0)) \overline{\psi(l_0)} - \int_{l_0}^l \alpha_3 v_{xx} \bar{\varphi} \, dx = \\ & - \mu v(l) \overline{\varphi(l)} + \alpha_3 v_x(l_0) \overline{\varphi(l_0)} - \alpha_3 v_x(l) \overline{\varphi(l)} - \int_0^{l_0} \rho_1 F \bar{\psi} \, dx - \int_{l_0}^l \rho_2 G \bar{\varphi} \, dx - (\rho_3 H + \delta g(l)) \overline{\varphi(l)} \end{aligned} \quad (5.23)$$

para todo  $(\psi, \varphi) \in \mathbb{H}_*^1$ .

Consideramos a função  $\varphi_\delta \in C^\infty([l_0, l])$ , tal que  $\varphi_\delta(x) = 0$ ,  $x \in [l_0, l - \delta]$  e  $\varphi_\delta(l) = 1$ , então  $(0, \varphi_\delta, 1) \in \mathbb{H}_*^1$ .



Se  $\vartheta \in L^2(l_0, l)$  pela desigualdade de Holder temos

$$\int_{l_0}^l |\vartheta \varphi_\delta| \, dx \leq \|\varphi_\delta\|_{L^2((l-\delta, l))} \|\vartheta\|_{L^2((l_0, l))} \leq \delta \|\vartheta\|_{L^2((l_0, l))}$$

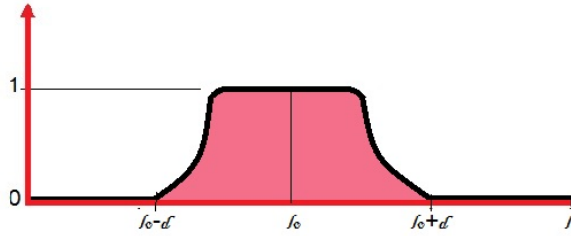
então

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{l_0}^l \vartheta \varphi_\delta dx = 0 \quad ; \quad \forall \vartheta \in L^2(l_0, l). \quad (5.24)$$

aplicando (5.24) e substituindo  $(0, \varphi_\delta, 1)$  na equação (5.23), obtemos

$$\mu v(l) + \alpha_3 v_x(l) + \delta g(l) = -\rho_3 H$$

Analogamente, consideramos  $(\psi_\delta, \varphi_\delta^1, 1) \in \mathbb{H}_*^1$  tais que  $(\psi_\delta, \varphi_\delta^1) \in C^\infty([0, l_0]) \times C^\infty([l_0, l])$ ,  $(\psi_\delta, \varphi_\delta^1) \equiv 0$  em  $[0, l_0 - \delta] \times [l_0 + \delta, l]$  e  $\psi_\delta(l_0) = \varphi_\delta^1(l_0) = 1$ .



Então, para todo  $(\kappa, \vartheta) \in \mathbb{L}^2$  temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{l_0} |\kappa \psi_\delta| dx &\leq \|\psi_\delta\|_{L^2((l_0 - \delta, l_0))} \|\kappa\|_{L^2((0, l_0))} \leq \delta \|\kappa\|_{L^2((0, l_0))} \longrightarrow 0 \\ \int_{l_0}^l |\vartheta \varphi_\delta| dx &\leq \|\varphi_\delta\|_{L^2((l_0, l_0 + \delta))} \|\vartheta\|_{L^2((l_0, l))} \leq \delta \|\vartheta\|_{L^2((l_0, l))} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

aplicando os resultados acima e substituindo  $(\psi_\delta, \varphi_\delta^1, 0)$  na equação (5.23), obtemos

$$\alpha_1 u_x(l_0) + \alpha_2 U_x(l_0) = \alpha_3 v_x(l_0).$$

Além disso,  $(u, v)$  é solução de (5.21). De (5.15), (5.18) e (5.19) temos que  $(\alpha_1 u + \alpha_2 U, v) \in \mathbb{H}^2$ . Portanto obtemos a existência e unicidade de um vetor  $\mathbf{U} = (u, v, U, V, w, W) \in D(\mathcal{A})$  tal que  $\mathcal{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ .

Por outro lado, o operador  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Com efeito, a primeira estimativa é obtida multiplicando (5.16)-(5.19) por  $\rho_2 \bar{V}$ ,  $\rho_3 \bar{W}$ ,  $-\bar{u}$  e  $-\bar{v}$  respectivamente, somando

$$-\int_0^{l_0} [\alpha_1 u_x + \alpha_2 U_x]_x \bar{u} dx - \alpha_3 \int_{l_0}^l v_{xx} \bar{v} dx + \rho_2 \int_{l_0}^l |V|^2 dx + \rho_3 |W|^2$$



$$= \rho_2 \int_{l_0}^l g \bar{V} dx - \rho_1 \int_0^{l_0} F \bar{u} dx - \rho_2 \int_{l_0}^l G \bar{v} dx + \rho_3 h \bar{W}$$

e integrando por partes temos

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \int_0^{l_0} |u_x|^2 dx + \alpha_3 \int_{l_0}^l |v_x|^2 dx + \rho_2 \int_{l_0}^l |V|^2 dx + \rho_3 |W|^2 \\ = & -\alpha_2 \int_0^{l_0} U_x \bar{u}_x dx + [\alpha_1 u_x(l_0) + \alpha_2 U_x(l_0)] \bar{u}(l_0) + \alpha_3 v_x(l) \bar{v}(l) - \alpha_3 v_x(l_0) \bar{v}(l_0) + R \\ = & -\alpha_2 \int_0^{l_0} U_x \bar{u}_x dx + \alpha_3 v_x(l) \bar{v}(l) + R, \end{aligned}$$

onde  $R$  satisfaz  $|R| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$ . Aplicando (5.15) e (5.20) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \int_0^{l_0} |u_x|^2 dx + \alpha_3 \int_{l_0}^l |v_x|^2 dx + \rho_2 \int_{l_0}^l |V|^2 dx + \rho_3 |W|^2 \\ & = -[\rho_3 H + \mu w + \delta W] \bar{w} + R \end{aligned}$$

ou

$$\alpha_1 \int_0^{l_0} |u_x|^2 dx + \alpha_3 \int_{l_0}^l |v_x|^2 dx + \rho_2 \int_{l_0}^l |V|^2 dx + \rho_3 |W|^2 + \frac{\mu}{2} |w|^2 \leq C \delta |W|^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

pela propriedade dissipativa do operador

$$\alpha_2 \int_0^{l_0} |U_x|^2 dx + \delta |W|^2 \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.25)$$

e aplicando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\int_0^{l_0} \alpha_1 |u_x|^2 + \rho_1 |U|^2 dx + \int_{l_0}^l \alpha_3 |v_x|^2 + \rho_2 |V|^2 dx + \rho_3 |W|^2 + \mu |w|^2 \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

isto é,  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$ . Logo  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ou equivalentemente  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ .

□

Como conseqüência da existência do semigrupo, obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 5.1.2.** *Para todo  $U_0 \in \mathcal{H}$  existe uma solução  $\mathbf{U} = (u, v, u_t, v_t, w, w_t)$  of (5.1)-(5.5) satisfazendo*

$$(u, v, u_t, v_t, w, w_t) \in C([0, \infty); \mathcal{H})$$

*Se  $U_0 \in D(\mathcal{A})$ , então*

$$(u, v, u_t, v_t, w, w_t) \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C([0, \infty); D(\mathcal{A}))$$

## 5.2 Estabilidade Polinomial

Nesta seção mostraremos o decaimento polinomial das soluções. para conseguir o objetivo usaremos o resultado de A. Borichev and Y. Tomilov [9]

**Teorema 5.2.1.** *Seja  $\mathcal{S}(t)$  um semigrupo  $C_0$  limitado num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  gerado por  $\mathcal{A}$  tal que  $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ . Então*

$$\frac{1}{|\lambda|^\beta} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \iff \|\mathcal{S}(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{D(\mathcal{A})} \leq \frac{C}{t^{1/\beta}}.$$

Consideremos a equação resolvente

$$i\lambda \mathbf{U} - \mathcal{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (5.26)$$

que no caso de boa colocação, em termos das componentes, obtemos

$$i\lambda u - U = f \quad \text{in } H^1(0, l_0) \quad (5.27)$$

$$i\lambda v - V = g \quad \text{in } H^1(l_0, l) \quad (5.28)$$

$$i\lambda w - W = h \quad \text{in } \mathbb{C} \quad (5.29)$$

$$\rho_1 i\lambda U - \alpha_1 u_{xx} - \alpha_2 U_{xx} = \rho_1 F \quad \text{in } L^2(0, l_0) \quad (5.30)$$

$$\rho_2 i\lambda V - \alpha_3 v_{xx} = \rho_2 G \quad \text{in } L^2(l_0, l) \quad (5.31)$$

$$\rho_3 i\lambda W + \delta W + \mu w + \alpha_3 v_x(l) = \rho_3 H \quad \text{in } \mathbb{C} \quad (5.32)$$

De (5.14), note que

$$\operatorname{Re} \langle (i\lambda I - \mathcal{A})\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} = -\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \alpha_2 \int_0^{l_0} |U_x|^2 dx + \delta |W|^2$$

Então

$$\alpha_2 \int_0^{l_0} |U_x|^2 dx + \delta |W|^2 \leq \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.33)$$

De (5.27) e (5.33) obtemos

$$|\lambda|^2 \int_0^{l_0} |u_x|^2 dx \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (5.34)$$

Agora mostraremos que o eixo imaginário esta contido no resolvente.

**Lema 5.2.2.** *Seja  $\mathcal{A}$  o operador definido em (5.6), então*

$$i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A}) \quad (5.35)$$

*Demonstração.* Para a demonstração do Lema seguimos os seguintes passos:

**I.** Desde que  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$  e do Teorema das aplicações de contração segue que para  $\lambda$  com  $|\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}$ , o operador

$$i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A} = \mathcal{A}(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - \mathbf{I})$$

é invertível. Além disso,  $\|(i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$  é uma função contínua de  $\lambda$  no intervalo

$$\left(-\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}\right).$$

**II.** Se  $\sup \left\{ \|(i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}; |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} \right\} = M < \infty$ , aplicando novamente o Teorema das aplicações de contração, temos que o operador

$$i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A} = (i\lambda_0\mathbf{I} - \mathcal{A})(\mathbf{I} + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1})$$

com  $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}$  é invertível para  $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{M}$ . Logo concluímos que

$$\left\{ \lambda; |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} + \frac{1}{M} \right\} \subseteq \varrho(\mathcal{A})$$

e  $\|(i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$  é uma função contínua de  $\lambda$  no intervalo

$$\left(-\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} - \frac{1}{M}, \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} + \frac{1}{M}\right).$$

**III.** Então, segue do argumento **II**, que se (5.35) não é verdadeiro, existe  $\omega \in \mathbb{R}$  com  $\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} \leq |\omega| < \infty$  tal que

$$\{i\lambda; |\lambda| < |\omega|\} \subset \varrho(\mathcal{A})$$

e

$$\sup \left\{ \|(i\lambda\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}; |\lambda| < |\omega| \right\} = \infty.$$

Logo existe uma seqüência  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  com  $\lambda_n \rightarrow \omega$ ,  $|\lambda_n| < |\omega|$  e uma seqüência de vetores  $\mathbf{U}_n \in D(\mathcal{A})$  com  $\|\mathbf{U}_n\|_{\mathcal{H}} = 1$  tal que

$$\|i\lambda_n\mathbf{U}_n - \mathcal{A}\mathbf{U}_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

**IV.** Denotamos  $\mathbf{U}_n = (u^n, v^n, U^n, V^n, w^n, W^n)$  e  $\mathbf{F}_n = i\lambda_n \mathbf{U}_n - \mathcal{A}\mathbf{U}_n$ , aplicando o argumento **III**, obtemos

$$i\lambda_n u^n - U^n \longrightarrow 0 \text{ em } H^1(0, l_0) \quad (5.36)$$

$$i\lambda_n v_x^n - V_x^n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(l_0, l) \quad (5.37)$$

$$i\lambda_n w^n - W^n \longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{C} \quad (5.38)$$

$$\rho_1 i\lambda_n U^n - \alpha_1 u_{xx}^n - \alpha_2 U_{xx}^n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l_0) \quad (5.39)$$

$$\rho_2 i\lambda_n V^n - \alpha_3 v_{xx}^n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(l_0, l) \quad (5.40)$$

$$\rho_3 i\lambda_n W^n + \delta W^n + \mu w^n + \alpha_3 v_x^n(l) \longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{C} \quad (5.41)$$

Desde que a sequencia  $\{\lambda_n\}$  é convergente e aplicando as desigualdades (5.33) e (5.34), obtemos

$$\alpha_1 u^n + \alpha_2 U^n \longrightarrow 0 \text{ em } H^1(0, l_0) \hookrightarrow C([0, l_0])$$

Considerando o fato  $U^n \longrightarrow 0$  em  $L^2(0, l_0)$  e usando (5.39), obtemos

$$\alpha_1 u^n + \alpha_2 U^n \longrightarrow 0 \text{ em } H^2(0, l_0) \hookrightarrow C^1([0, l_0]) \quad (5.42)$$

então

$$\rho_2 |U^n(l_0)|^2 + \alpha_1 u_x^n(l_0) + \alpha_2 U_x^n(l_0) \longrightarrow 0 \quad (5.43)$$

**Observação 5.2.3.** *Devido a uma aplicação direta da fórmula de integração por partes, para todo  $(v, V) \in H^2(0, l_0) \times H^1(0, l_0)$ , temos as seguinte identidades*

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \int_{l_0}^l (x-l)v_{xx}\bar{v}_x dx + \int_{l_0}^l |v_x|^2 dx &= (l-l_0)|v_x(l_0)|^2 \\ 2\operatorname{Re} \int_{l_0}^l (x-l)V\bar{V}_x dx + \int_{l_0}^l |V|^2 dx &= (l-l_0)|V(l_0)|^2 \end{aligned}$$

**Observação 5.2.4.** *Sejam  $\{\phi^n\} \subset L^2(a, b)$  uma seqüência limitada e  $\{f^n\}$  uma seqüência convergente a zero em  $L^2(a, b)$ ,*

$$f^n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(a, b),$$

logo uma aplicação direta da desigualdade de Hölder implica a seguinte convergência

$$\int_a^b f^n \phi^n dx \longrightarrow 0 .$$

Desde que  $\{(x-l)\bar{v}_x^n\}$  é uma seqüência limitada em  $L^2(l_0, l)$ , podemos multiplicar com (5.40), usar as identidades da Observação 5.2.3 e considerar (5.37) para obter as seguintes convergências

$$\rho_2 \int_{l_0}^l (x-l)V^n(\overline{i\lambda v^n - V^n})_x + (x-l)V^n\bar{V}_x^n dx + \alpha_3 \int_{l_0}^l (x-l)v_{xx}^n \bar{v}_x^n dx \longrightarrow 0$$

logo

$$\rho_2 \int_{l_0}^l (x-l)V^n\bar{V}_x^n dx + \alpha_3 \int_{l_0}^l (x-l)v_{xx}^n \bar{v}_x^n dx \longrightarrow 0$$

então

$$R_n := \alpha_3 \int_{l_0}^l |v_x^n|^2 dx + \rho_2 \int_{l_0}^l |V^n|^2 dx - (l-l_0)\rho_2|V^n(l_0)|^2 - (l-l_0)\alpha_3|v_x^n(l_0)|^2 \longrightarrow 0$$

e usando (5.43) conclui mos que

$$\alpha_3 \int_{l_0}^l |v_x^n|^2 dx + \rho_2 \int_{l_0}^l |V^n|^2 dx = R_n + (l-l_0)(\rho_2|V^n(l_0)|^2 + \alpha_3|v_x^n(l_0)|^2) \longrightarrow 0$$

ou

$$\alpha_3 \int_{l_0}^l |v_x^n|^2 dx + \rho_2 \int_{l_0}^l |V^n|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (5.44)$$

como a seqüência  $\{\lambda_n\}$  é limitada e  $V^n \longrightarrow 0$  em  $L^2(l_0, l)$ , de (5.40), obtemos

$$v_x^n \longrightarrow 0 \text{ em } H^1(l_0, l) \hookrightarrow C([l_0, l])$$

portanto,

$$v_x^n(l) \longrightarrow 0 \quad (5.45)$$

Agora multiplicamos  $\bar{w}^n$ , que é uma seqüência limitada, à equação (5.41) para obter a seguinte convergência

$$-\rho_3(\overline{i\lambda_n w^n - W^n})W^n - \rho_3|W^n|^2 + \delta\bar{w}^n W^n + \mu|w^n|^2 + \alpha_3\bar{w}^n v_x^n(l) \longrightarrow 0$$

então

$$-\rho_3|W^n|^2 + \delta\bar{w}^n W^n + \mu|w^n|^2 \longrightarrow 0 \quad (5.46)$$

Se  $\delta > 0$ , então da propriedade de dissipação do operador (5.33) e a convergência anterior, temos

$$\mu|w^n|^2 \longrightarrow 0$$

Desta forma, obtemos que

$$1 = \|\mathbf{U}_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^{l_0} \alpha_1|u_x^n|^2 + \rho_1|U^n|^2 dx + \int_{l_0}^l \alpha_3|v_x^n|^2 + \rho_2|V^n|^2 dx + \rho_3|W^n|^2 + \mu|w^n|^2 \longrightarrow 0$$

que é uma contradição.

Por outro lado, se  $\delta = 0$  não temos dissipação na componente  $W^n$ , logo consideramos o seguinte multiplicador  $(x - l_0)\bar{v}_x^n$  na equação (5.40). Como a seqüência  $\{(x - l_0)\bar{v}_x^n\}$  é limitada em  $L^2(l_0, l)$ , obtemos

$$\rho_2 \int_{l_0}^l (x - l_0)V^n(\overline{i\lambda v^n - V^n})_x + (x - l_0)V^n\bar{V}_x^n dx + \alpha_3 \int_{l_0}^l (x - l_0)v_{xx}^n\bar{v}_x^n dx \longrightarrow 0$$

e usando (5.37), segue que

$$\rho_2 2\text{Re} \int_{l_0}^l (x - l)V^n\bar{V}_x^n dx + \alpha_3 2\text{Re} \int_{l_0}^l (x - l_0)v_{xx}^n\bar{v}_x^n dx \longrightarrow 0$$

e aplicando (5.44), obtemos

$$\rho_2|V^n(l)|^2 + \alpha_3|v_x^n(l)|^2 \longrightarrow 0$$

como  $V^n(l) = W^n$ , (5.46) implica que  $|w^n| \longrightarrow 0$ . Desta forma, obtemos que

$$1 = \|\mathbf{U}_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^{l_0} \alpha_1|u_x^n|^2 + \rho_1|U^n|^2 dx + \int_{l_0}^l \alpha_3|v_x^n|^2 + \rho_2|V^n|^2 dx + \rho_3|W^n|^2 + \mu|w^n|^2 \longrightarrow 0$$

que é uma contradição. Portanto  $i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A})$ .

□

**Lema 5.2.5.** Usando as notações descritas em (5.27)-(5.32), é possível encontrar uma constante positiva  $C$ , com a seguinte propriedade,

$$\int_{l_0}^l |v_x|^2 + |V|^2 dx \leq C|\lambda|^{1/2} \left( \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^{5/4} + \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \right)$$

*Demonstração.* De (5.30) temos

$$|\lambda| \|U\|_{-1} \leq c (\|u_x\| + \|U_x\| + \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}) \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando interpolação e a desigualdade (5.33) obtemos

$$\begin{aligned} \|U\|^2 &\leq C \|U\|_{-1} \|U\|_1 \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \left( \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \right) \|U\|_1 \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \left( \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^{3/2} \right) \end{aligned}$$

então

$$|\lambda| \|U\|^2 \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^{3/2} \quad (5.47)$$

Multiplicando a equação (5.30) por  $x(\overline{\alpha_1 u_x + \alpha_2 U_x})$  e tomando a parte real temos

$$\begin{aligned} \rho_1 \operatorname{Re} i\lambda \int_0^{l_0} x U (\overline{\alpha_1 u_x + \alpha_2 U_x}) dx - \frac{1}{2} \int_0^{l_0} x \frac{d}{dx} |\alpha_1 u_x + \alpha_2 U_x|^2 dx \\ = \rho_1 \operatorname{Re} \int_0^{l_0} x F (\overline{\alpha_1 u_x + \alpha_2 U_x}) dx. \end{aligned}$$

Usando (5.27) temos

$$\rho_1 \alpha_1 \operatorname{Re} i\lambda \int_0^{l_0} x U \bar{u}_x dx = \frac{\rho_1 \alpha_1}{2} \int_0^{l_0} |U|^2 dx - \frac{l_0 \rho_1 \alpha_1}{2} |U(l_0)|^2 - \rho_1 \alpha_1 \operatorname{Re} \int_0^{l_0} x U \bar{f}_x dx.$$

Denotamos o funcional

$$\mathcal{J}_u := \frac{l_0}{2} (\rho_1 \alpha_1 |U(l_0)|^2 + |\alpha_1 u_x(l_0) + \alpha_2 U_x(l_0)|^2)$$

logo



$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_u &= \rho_1 \alpha_2 \operatorname{Re} i\lambda \int_0^{l_0} x U \bar{U}_x dx + \frac{\rho_1 \alpha_1}{2} \int_0^{l_0} |U|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_0} |\alpha_1 u_x + \alpha_2 U_x|^2 dx \\
&\quad - \rho_1 \alpha_1 \operatorname{Re} \int_0^{l_0} x U \bar{f}_x dx - \rho_1 \operatorname{Re} \int_0^{l_0} x F(\overline{\alpha_1 u_x + \alpha_2 U_x}) dx \\
&\leq C \int_0^{l_0} |\lambda| |U| |U_x| + |U_x|^2 + |u_x|^2 dx + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq C |\lambda|^{1/2} \int_0^{l_0} |U_x| (|\lambda|^{1/2} |U|) dx + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Using (5.47) então

$$\mathcal{J}_u \leq C |\lambda|^{1/2} \left( \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^{5/4} + \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \right), \quad (5.48)$$

para  $\lambda$  suficientemente grande. por outro lado, multiplicando a equação (5.31) por  $(x-l)\bar{v}_x$  obtemos

$$\rho_2 i\lambda \int_{l_0}^l (x-l) V \bar{v}_x dx - \alpha_3 \int_{l_0}^l (x-l) v_{xx} \bar{v}_x dx = \rho_2 \int_{l_0}^l (x-l) G \bar{v}_x dx.$$

Tomando a parte real e usando (5.28) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{l_0}^l |V|^2 + \frac{\alpha_3}{\rho_2} |v_x|^2 dx = \\
&(l-l_0) |V(l_0)|^2 + \frac{\alpha_3}{\rho_2} (l-l_0) |v_x(l_0)|^2 + 2 \operatorname{Re} \int_{l_0}^l (x-l) (G \bar{v}_x + V \bar{g}_x) dx.
\end{aligned}$$

agora, considerando que  $(u, v, w, U, V, W) \in D(\mathcal{A})$  e usando convenientemente as estimativas segue

$$\begin{aligned}
\int_{l_0}^l |V|^2 + \frac{\alpha_3}{\rho_2} |v_x|^2 dx &\leq (l-l_0) \left[ |V(l_0)|^2 + \frac{\alpha_3}{\rho_2} |v_x(l_0)|^2 \right] + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C [|U(l_0)|^2 + |\alpha_1 u_x(l_0) + \alpha_2 U_x(l_0)|^2] + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C \mathcal{J}_u + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (5.48) obtemos

$$\int_{l_0}^l |V|^2 + |v_x|^2 dx \leq C |\lambda|^{1/2} \left( \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^{5/4} + \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \right). \quad (5.49)$$

**Observação 5.2.6.** *Com um proceso análogo, multiplicamos a equação (5.31) por  $(x - l_0)\bar{v}_x$  e obtemos que*

$$(l - l_0) \left[ |V(l)|^2 + \frac{\alpha_3}{\rho_2} |v_x(l)|^2 \right] \leq \int_{l_0}^l |V|^2 + \frac{\alpha_3}{\rho_2} |v_x|^2 dx,$$

então

$$|W|^2 + |v_x(l)|^2 \leq C|\lambda|^{1/2} \left( \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^{5/4} + \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \right). \quad (5.50)$$

Multiplicando a equação (5.32) por  $\bar{w}$  e usando (5.29) obtemos que

$$-\rho_3 |W|^2 - \rho_3 W \bar{h} + \delta \bar{w} W + \mu |w|^2 + \alpha_3 v_x(l) \bar{w} = \rho_3 H \bar{w} \in \mathbb{C}$$

ou

$$\mu |w|^2 + \rho_3 |W|^2 = 2\rho_3 |W|^2 - \alpha_3 v_x(l) \bar{w} - \delta \bar{w} W + \rho_3 W \bar{h} + \rho_3 H \bar{w}$$

então

$$|w|^2 + |W|^2 \leq C|W|^2 + C|v_x(l)|^2 + C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$$

e aplicando (5.50) obtemos

$$\mu |w|^2 + \rho_3 |W|^2 \leq C|\lambda|^{1/2} \left( \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^{5/4} + \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \right). \quad (5.51)$$

De (5.33), (5.34), (5.49) e (5.51) concluímos que

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C|\lambda|^{1/2} \left( \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^{3/4} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^{5/4} + \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \right),$$

e considerando

$$a, b, \alpha, \beta > 0 \text{ and } \alpha + \beta = 1 \implies a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b ;$$

com  $a = \epsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}$ ,  $b = \epsilon^{-3/5} |\lambda|^{2/5} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}$ ,  $\alpha = 3/8$  e  $\beta = 5/8$  obtemos

$$\|\mathbf{U}\|^{3/4} (|\lambda|^{2/5} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}})^{5/4} \leq \epsilon^2 \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{\epsilon} |\lambda|^{4/25} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Então

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C |\lambda|^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} ; \quad (5.52)$$

para  $\lambda$  suficientemente grande.

□

Desta forma terminamos enunciando o seguinte resultado

**Teorema 5.2.7.**  $e^{tA_{\gamma}}$

$$\|e^{At} \mathbf{U}_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^2} \|\mathbf{U}\|_{D(A)}.$$

**Observação 5.2.8.** *Acreditamos que o resultado sobre decaimento Polinomial obtido neste capítulo é ótimo devido ao resultado de M. Alves, J.E. Muñoz Rivera, M. Sepúlveda e O. Vera Villagrán [4] , que provaram a otimalidade para o problema de transmissão.*

# Capítulo 6

## Considerações finais

### 6.1 Conclusões

- Em domínios limitados mostramos que, quando o acoplamento do sistema para mistura de sólidos é de segunda ordem, basta provar que

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$$

para obter o decaimento exponencial do semigrupo associado. Esta propriedade foi obtida nos casos de

Dissipação friccional — Capítulo 2

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = - \int_0^l U_t^* B U_t \, dx$$

Dissipação termo elástica — Capítulo 3

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = -\kappa \int_0^l |\theta_x|^2 \, dx$$

- Mostramos também que, no caso não limitado, com dissipação friccional é possível obter decaimento exponencial do semigrupo associado.

Dissipação friccional em domínio não limitado — Capítulo 4

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = - \int_{-\infty}^{+\infty} U_t^* B U_t \, dx$$

apresentando as hipóteses suficientes para o decaimento exponencial, quando a matriz de dissipação  $B$  é singular.

- Mostramos que, no sistema híbrido associado ao problema de transmissão, o semigrupo associado possui decaimento de tipo polinomial.

Dissipação de tipo Kelvin Voigt no problema híbrido — Capítulo 5

$$Re(\mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = -\alpha_2 \int_0^{l_0} |u_{tx}| dx - \delta |v_t(l)|^2, \quad \delta \geq 0.$$

## 6.2 Perspectivas e trabalhos futuros

- Consideraremos o caso de mistura de  $n$  sólidos termoelásticos em  $\mathbb{R}^1$

Dissipação termo elástica

$$Re(\mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathcal{H}} = -\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} |\theta_x|^2 dx$$

e estenderemos os resultados para  $\mathbb{R}^d$ .

- Estudaremos a relação do decaimento com respeito à ordem do acoplamento em forma abstrata.
- Estudaremos a falta de decaimento exponencial para o problema híbrido.

# Referências

- [1] R. A. ADAMS and J. J. F. FOURNIER, **Sobolev Spaces**. Second edition, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] N. I. AKHIEZER and I. M. GLAZMAN, **Theory of linear operators in Hilbert Space**, Dover Publications, Inc., New York, 1993.
- [3] M. ALVES, J.E. MUÑOZ RIVERA, M. SEPÚLVEDA, O. VERA VILLAGRAN and M. ZEGARRA, **The asymptotic behavior of the linear transmission problem in viscoelasticity**, Math. Nachr. In Press (2013). doi: 10.1002/mana.201200319.
- [4] M. ALVES, J.E. MUÑOZ RIVERA, M. SEPÚLVEDA and O. VERA VILLAGRAN **The lack of exponential stability in certain transmission problems with localized Kelvin-Voigt Dissipation**, SIAM J. APPL. MATH. Vol. 74, No. 2, pp. 345-365. 2014
- [5] AMARI K., LIU Z. and TUCSNAK M. **Decay rates for a beam with pointwise force and moment feedback**. Math. Control Signals Systems 15, 229-255, 2002.
- [6] ATKIN, R.J. and CRAINE, R.E. **Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development**. Quat. J. Mech. Appl. Math. 29, 209-243, 1976.
- [7] BERNSTEIN D. S. **Matrix Mathematics: theory, facts and formulas**, Princeton, New Jersey, United States, 2009.
- [8] BREZIS, H. **Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications**. Masson, Paris, 1983.
- [9] A. BORICHEV and Y. TOMILOV. **Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups**. mathematische Annalen. Vol. 347. 2 (2009) 455-478.

- [10] CASTRO C. , ZUAZUA E., **Boundary controllability of a hybrid system consisting in two flexible beams connected by a point mass**, SIAM J. Control Optim. 36 (1998) 1576-1595.
- [11] A. FREIRIA NEVES, H. DE SOUZA RIBEIRO, O. LOPES. **On the spectrum of evolution operators generated by hyperbolic systems**, J. Functional Anal. 67 (1986) 320-344.
- [12] HILLE E. and PHILLIPS R. S. **Functional Analysis and Semigroups**. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1957.
- [13] HUANG, F. L. **Strong asymptotic stability theory for linear dynamical systems in Banach spaces**. JDE, Vol. 104, 307-324, 1993.
- [14] IESAN, D. **On the theory of mixtures of thermoelastic solids**. J. Thermal Stresses 14, 389-408, 1991.
- [15] IESAN, D. and QUINTANILLA, R. **A theory of porous thermoviscoelastic mixtures**. Jour. Therm. Stress. 30, 693-714, 2007.
- [16] IESAN, D. and QUINTANILLA, R. **On a theory of thermoelasticity with microtemperatures**. Jour. Therm. Stress. 23, 199-215, 2000.
- [17] KESAVAN, S. **Topics in Functional Analysis and Applications**. Jhon Wiley and Sons, New Delhi, 1989.
- [18] KLAUS-JOCHEN ENGEL and RAINER NAGEL. **One-Parameter Semigroups for linear Evolution Equations**. Springer-Verlag, Inc., New York, 2000.
- [19] LIU Z. and RAO B. **Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation**. Z. angew. Math. Phys. Nro. 56, pp 630-644, 2005.
- [20] W. LITTMAN and L. MARKUS, **Stabilization of a hybrid system of elasticity by feedback boundary damping**, Ann. Mat. Pura Appl. 152 (1988) 281-330 .
- [21] K. LIU and Z. LIU, **Exponential decay of the energy of the Euler Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping**. SIAM Journal of control and Optimization Vol. 36. 3(1998) 1086-1098.

- [22] LIU Z. and ZHENG S. **Semigroups associated with dissipative systems.** CHAPMAN and HALL/CRC, 1999.
- [23] LITTMAN W. and LIU B. **On the spectral problems and stabilization of acoustic flow.** SIAM J. Appl. Math. 59, 17-34, 1998.
- [24] LOVE, A. E. H. **Mathematical Theory of Elasticity.** Dover Publications, fourth edition, New York, 1944.
- [25] MILLER R. K. and MICHEL A. N. **Ordinary Differential Equations.** Academic Press, New York, 1982.
- [26] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Tópicos em Termoelasticidade e Viscoelasticidade.** Rio de Janeiro, LNCC, 1997.
- [27] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Teoria das distribuições e Equações Diferenciais Parciais.** Textos Avançados, LNCC, 1999.
- [28] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Estabilização de semigrupos e aplicações.** Série de métodos matemáticos, LNCC, 2008.
- [29] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Energy Decay Rates in Linear Thermoelasticity.** Funkcialaj Ekvacioj, Nro.35, pp 19-30, 1992.
- [30] MUÑOZ RIVERA, J. E. and ALVES M. S. **Analyticity of semigroups associated with thermoviscoelastic mixtures of solids.** Journal of thermal stresses Nro. 32, pp 986-1004, 2009.
- [31] MUÑOZ RIVERA J. E., ALVES M. S. and QUINTANILLA R. **Exponential decay in thermoelastic mixture of solids.** Internacional Journal of Solids and Structures Nro. 46, pp 1659-1666, 2009.
- [32] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.** Springer-Verlag, New York, 1983.
- [33] PRÜSS, J. **On the Spectrum of  $C_0$ -Semigroups.** Transaction of the American Mathematical Society, 284, Nro. 2, pp 847-857, 1984.



- [34] PRÜSS, J. , BATKAI A. , ENGEL K. and SCHNAUBELT R. **Polynomial stability of operator semigroups**. Match. Nachr., 279, Nro. 1, pp 1425-1440, 2006.
- [35] RENARDY, M. **On the Type of Certain  $C_0$ -Semigroups**. Commun. in Partial Differential Equations, 18(7-8), pp 1299-1307, 1993.
- [36] ROGER A. HORN and CHARLES R. JOHNSON **Matrix Analysis**. Cambridge University Press, United States of America, 1999.
- [37] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. McGraw Hill, 2da edição, 1974 (tradução ao espanhol, Alhabama 1979).
- [38] YOSIDA K. **Functional Analysis**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.