UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

ANDRÉIA MALACARNE

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DOS SISTEMAS DE VIGAS VISCOELÁSTICAS DE TIMOSHENKO E DE BRESSE

RIO DE JANEIRO

2014

UFRJ

Andréia Malacarne

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DOS SISTEMAS DE VIGAS VISCOELÁSTICAS DE TIMOSHENKO E DE BRESSE

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Jaime Edilberto Muñoz Rivera

Rio de Janeiro
2014

Aos meus pais, Jonacir Malacarne e Adelina Costa Coelho Malacarne.
À memória de meu eterno amigo, Flaviano Bahia Paulinelli Vieira.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida e por todas as graças alcançadas.
Agradeço aos meus pais Jonacir Malacarne e Adelina Costa Coelho Malacarne e aos meus irmãos Valentim Malacarne e Alan Malacarne pelo amor e apoio incondicionais em todos os momentos de minha vida.
Meus mais profundos agradecimentos ao professor Jaime Edilberto Muñoz Rivera pela oportunidade, pela paciência, pelos conhecimentos passados, e principalmente pelo incentivo para a conclusão deste trabalho, que significa para mim muito mais do que a conclusão de um curso, e sim a conclusão de um ciclo da minha vida. Muito obrigada!
Agradeço a Alysson Helton Santos Bueno por ter me ajudado e me incentivado a completar mais esta etapa de minha vida. Muito obrigada pelo apoio e paciência nos momentos difíceis.
Agradeço a toda a minha família pelo apoio e carinho, em especial aos meus tios João Luis Malacarne e Maria Célia Assis Malacarne por terem me acolhido em sua casa, possibilitando a minha graduação.
Agradeço a todos os colegas do DEMAT da Universidade Federal de São João del Rei pelo apoio e incentivo.
Meu agradecimento a Universidade Federal de São João del Rei pela possibilidade e incentivo a me qualificar.
Meu agradecimento especial aos amigos Fábio Alexandre de Matos e Waliston Luiz Lopes Rodrigues Silva pelo apoio nos momentos mais difíceis dessa jornada.
Meu agradecimento a todos os professores, técnicos e colegas da Universidade Federal do Rio de Janeiro, que contribuíram para que eu pudesse chegar a este momento.
Agradeço imensamente a todos os professores que passaram por minha vida, por todos os conhecimentos passados, pelo carinho e pelo incentivo. Em especial, gostaria de agradecer aos professores Alancardek Pereira Araújo e José Gilvan de Oliveira, que contribuíram muito em minha formação acadêmica, através das aulas dadas, das cartas de recomendação aos programas de pós-graduação e principalmente pelo exemplo de comprometimento profissional e amor pela Matemática. Gostaria de agradecer também a minha primeira referência desse profissional tão importante na vida de todos, quero agradecer a minha primeira professora e grande amiga Neusa Maria Malacarne Avancini, por todo carinho, apoio e amizade, por ter acreditado no meu potencial desde sempre.
Quero agradecer a todos os meus amigos queridos, que me apoiaram de perto ou de longe, que se preocuparam, que torceram e me incentivaram; em especial às minhas mais que amigas Alessandra Victor, Juliana Lopes, Rosieli Leal e Ivana de Vasconcellos Latosinski.

RESUMO

Neste trabalho, consideramos o comportamento assintótico das soluções para os sistemas de Timoshenko e Bresse com um mecanismo de dissipação viscoelástica. Analisamos se tal efeito dissipativo dado pela viscosidade elástica seria forte o suficiente para obter estabilidade exponencial. Provamos que o modelo de Bresse ou Timoshenko é exponencialmente estável se, e somente se, todas as leis constitutivas que definem a tensão cortante, momento fletor e tensão longitudinal, são viscoelásticas, do tipo Kelvin-Voight. Ou seja, se qualquer uma das leis constitutivas é do tipo conservativa, então não importa a escolha dos coeficientes, o sistema não é exponencialmente estável. Este resultado é diferente de todos os outros, no sentido de que quando outro mecanismo de dissipação parcial, diferente de amortecimento Kelvin-Voight, é introduzido no sistema de Timoshenko ou Bresse, o semigrupo correspondente é exponencialmente estável, em geral, quando as velocidades de propagação de ondas são iguais.

Em relação ao decaimento polinomial do sistema de Timoshenko, provamos que o mecanismo viscoelástico parcial sempre produz um decaimento polinomial de taxa $t^{-1/2}$, independentemente de onde o mecanismo viscoelástico age efetivamente. Provamos que o mesmo resultado também é válido para o sistema de Bresse, quando dissipação age efetivamente em duas leis constitutivas, mantendo a terceira lei constitutiva constante. Quando o amortecimento Kelvin-Voight é eficaz somente em uma lei constitutiva do modelo de Bresse, provamos o decaimento polinomial sob certas condições para os coeficientes. Para o modelo Timoshenko esta situação nunca acontece. Além disso, no caso de estabilidade polinomial, mostramos que a taxa $t^{-1/2}$ é ótima, sobre quaisquer dados iniciais tomadas no domínio do operador infinitesimal.

O método que usamos é baseado em resultados de Prüss e Borichev e Tomilov.

Palavras-chave: Estabilidade exponencial. Estabilidade polinomial. Taxa ótima. Vigas de Timoshenko. Vigas de Bresse. Viscosidade elástica. Semigrupos C_0.

ABSTRACT

In this work, we consider the asymptotic behavior of the solutions to Timoshenko and Bresse systems with a viscoelastic dissipative mechanism. We analyze whether such dissipative effect given by the elastic viscosity would be strong enough to get exponential stability. We prove that the Bresse or Timoshenko model is exponentially stable if and only if all the constitutive law are of viscoelastic, Kelvin-Voight type. That is to say, if any of the constitutive law is of conservative type, then no matter the choice of the coefficient of the system, the system never is exponentially stable. This result is different to all others in the sense that when other partial dissipative mechanism, different from Kelvin-Voight damping, is introduced on the Timoshenko or Bresse system, the corresponding semigroup is exponentially stable in general when the wave speed are equals.
Concerning the polynomial decay of Timoshenko system we prove that partial viscoelastic mechanism produce always a polynomial decay as $t^{-1/2}$, no matter where the viscoelastic mechanism is effective. We prove that the same result is also valid to Bresse system even when the dissipation is effective in two constitutive laws. When the Kelvin-Voight damping is effective only in one constitutive law to Bresse system, we prove the polynomial decay on certain conditions for the coefficients. For Timoshenko model this situation never happens. Moreover, in case of the polynomial stability we show that the rate $t^{-1/2}$ is optimal over any initial data taken on the domain of the infinitesimal operator.
The method we use is based on Prüss and Borichev and Tomilov result.

Keywords: Exponential stability. Polynomial stability. Optimal rate. Timoshenko beams. Bresse beams. Viscoelasticity. C_0-semigroup.

"O Coelho Branco colocou seus óculos.
'Por onde devo começar Vossa Majestade?' ele perguntou.
'Comece pelo começo', o Rei respondeu rapidamente,
'e continue até você chegar ao final: então pare'. "

Lewis Carroll
Alice no País das Maravilhas

Sumário

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é investigar o comportamento assintótico das soluções dos sistemas de vigas de Timoshenko e de Bresse.
O estudo dos modelos para vigas com cargas atuantes interna ou externamente é de grande importância para o desenvolvimento da alta engenharia, já que a viga é um modelo de estrutura flexível amplamente utilizado em projetos de estrutura e mecânicos, tais como projetos de pontes, estradas, edifícios, aviões, robôs, plataformas de petróleo, dentre muitos outros.

(a) Vigas de um viaduto em construção *(fonte: www.comiteobrasbr116.blogspot.com.br)*

(b) Vigas da estrutura de um avião *(fonte: www.creaform3d.com)*

(c) Vigas em uma plataforma de petróleo *(fonte: www.petrobras.com.br)*

(d) Vigas da estrutura de um caminhão *(fonte: www.lmc.ep.usp.br)*

Para o sistema de vigas de Timoshenko, consideramos uma viga reta de comprimento L em sua posição de equilíbrio, constituída de material isotrópico e linearmente elástico. Consideramos também, que a área da seção transversal da viga é simétrica com respeito ao eixo z.

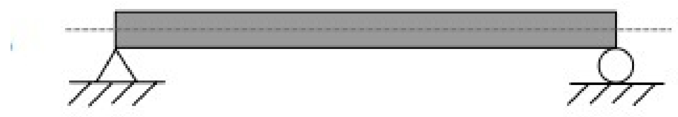

Figura 1: Viga reta

O modelo de Timoshenko é dado por

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi)_x &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \quad (1)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \quad (2)\end{aligned}$$

em que $\phi(x,t)$ e $\psi(x,t)$ descrevem o deslocamento transversal de uma seção plana da viga e o ângulo de rotação de um filamento da viga na posição x e no tempo t, respectivamente. Com essa notação, definimos a energia total da viga por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho_1|\phi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\phi_x+\psi|^2\right] dx.$$

Se ao modelo (1)–(2) acrescentamos condições homogêneas de contorno, temos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0 \text{ em } (0,\infty).$$

Portanto, o sistema (1)-(2) é conservativo, o que significa que a solução não decai.
Contudo, nos últimos anos, vários autores têm dedicado-se a estudar o comportamento assintótico de sistemas de Timoshenko com algum tipo de mecanismo dissipativo.
Soufyane [21] estudou o sistema de vigas de Timoshenko com atrito presente somente na equação da deformação angular, e mostrou que o sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi)_x &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \quad (3)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) + d\psi_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \quad (4)\end{aligned}$$

com $d = d(x)$ positiva, possui estabilidade exponencial se, e somente se,

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}. \quad (5)$$

No caso em que não há decaimento exponencial, Racke e Rivera [17] provaram que o

sistema (3)-(4) é polinomialmente estável.
O sistema com memória

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + g * \psi_{xx} &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

foi estudado por Ammar Khodja, Benabdallah, Rivera, e Racke [4], onde concluiu-se a estabilidade exponencial para memória com núcleo do tipo exponencial se, e somente se, a condição (5) é satisfeita, e a estabilidade polinomial para memória com núcleo polinomial. Raposo [20] estudou a estabilização uniforme para o correspondente problema de transmissão com memória com componentes elásticas e viscoelásticas. Mostrou-se neste trabalho, que a dissipação produzida pela parte viscoelástica sempre produz decaimento exponencial, independente de quão pequena seja a parte viscoelástica.
Em trabalhos mais recentes, Rivera e Sare [10] investigaram a estabilidade do sistema de vigas de Timoshenko, acrescentando um termo de história $\int_0^\infty g(t-s)\psi_{xx}(x,s)ds$ na equação (1), e concluíram que a dissipação dada pela história é suficientemente forte para produzir estabilidade exponencial, novamente se, e somente se, as equações têm as mesmas velocidades de onda, e caso contrário, o sistema correspondente possui estabilidade polinomial. Os mesmos autores, em [9], estudaram o comportamento assintótico de sistemas de Timoshenko com memória de núcleo não dissipativo, atuando apenas sobre a segunda equação do sistema, onde, novamente (5) aparece com condição necessária e suficiente para a estabilidade exponencial. Nessa direção, podemos citar também os trabalhos de Fatori, Garay e Rivera [7], e Ma, Rivera e Silva [11].
Para o modelo de vigas circulares de Bresse, consideramos um arco circular de raio R e comprimento L em sua posição de equilíbrio, constituída de material isotrópico e linearmente elástico.

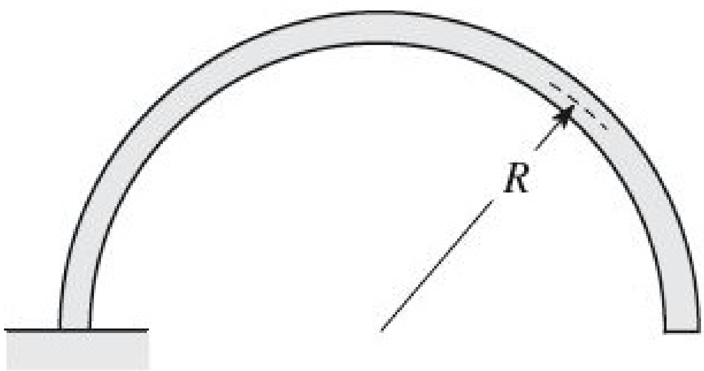

Figura 2: Arco circular

O sistema de Bresse é dado por

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + \psi + l\omega) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

em que $\omega(x,t)$, $\phi(x,t)$ e $\psi(x,t)$ representam, respectivamente, os deslocamentos tangencial, transversal e angular de um filamento da viga na posição x e no tempo t.
Para o sistema de Bresse, a energia total é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho_1|\phi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|\omega_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\phi_x + \psi + l\omega|^2 + k_0|\omega_x - l\phi|\right] dx.$$

Neste caso, temos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0, \text{ em } (0,\infty).$$

Isto significa que a energia se mantém constante ao longo do tempo, e portanto, a solução do sistema não decai. Entretanto, acrescentando termos dissipativos ao sistema, podemos encontrar algum tipo de decaimento nas soluções. Recentemente, pesquisadores da área têm dedicado-se a investigar esses problemas.
Liu e Rao [12] estudaram o decaimento do sistema de Bresse termoelástico, e mostraram que o sistema é exponencialmente estável se, e somente se, a velocidade de propagação de ondas da equação de tensão por corte coincidir com a velocidade de propagação de ondas referente ao deslocamento tangencial, ou de tensão por flexão. No caso contrário, os autores provaram que o sistema possui decaimento polinomial. Fatori e Rivera [8] também deram sua contribuição para o modelo termoelástico. Neste trabalho, os autores provaram que o sistema possui decaimento exponencial somente no caso em que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \qquad \text{e} \qquad k = k_0, \tag{6}$$

e provaram a existência de decaimento polinomial no caso geral, em que as taxas de decaimento dependem das velocidades de propagação de ondas e das condições iniciais. Também foi provado a otimalidade das taxas encontradas. Almeida Júnior, Boussouira e Rivera [2] investigaram o sistema de Bresse com dissipação de atrito, presente somente na equação do deslocamento angular. Neste problema, as igualdades (6) também apresentaram-se como condições necesárias e suficientes para o decaimento exponencial do sistema, sendo o sistema polinomialmente estável no caso geral. Alves, Fatori, Jorge Silva, e Monteiro [3] estudaram o problema acrescentando duas dissipações de atrito no sistema. Foi verificada estabilidade exponencial se, e somente se, $k = k_0$, com decaimento polinomial no caso geral. O problema da otimalidade da taxa de decaimento polinomial também foi investigado.

Neste trabalho, estudamos o efeito dissipativo causado pela viscosidade elástica do tipo Kelvin-Voight nos modelos para vigas retas de Timoshenko e vigas circulares de Bresse. Usamos técnicas multiplicativas e resultados recentes da teoria de semigrupos.
Mostramos que a dissipação causada pela viscosidade elástica agindo de forma parcial no sistema não é forte o suficiente para estabilizar o sistema de forma exponencial, para ambos Timoshenko e Bresse. Esse resultado é nossa contribuição deste trabalho, visto que os modelos já estudados com outros mecanismos dissipativos apresentaram decaimento exponencial sob certa condição para os coeficientes do sistema. Mostramos que os sistemas possuem decaimento do tipo polinomial, em normas não uniformes, em todos os casos, exceto para o sistema de Bresse com uma única viscosidade elásticas. Nestes casos, o sistema decai polinomialmente desde que os coeficientes do sistema satisfaçam certas condições. Além disso, mostramos que a taxa ótima para o decaimento polinomial, independe da quantidade de dissipações consideradas e das equações sobre as quais atuam. Este resultado é outra contribuição relevante para os modelos. No caso em que a viscosidade age totalmente nos sistemas, ou seja, no caso em que consideramos o número de dissipações igual ao número de equações, mostramos que os sistemas de Timoshenko e de Bresse são analíticos. Em particular, possuem decaimento exponencial.
O trabalho está estruturado da seguinte forma:
No capítulo 1, apresentamos os principais resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho.
No capítulo 2, estudamos o sistema de Vigas de Timoshenko viscoelástico, com dissipações agindo de forma total e parcial sobre o sistema.
No capítulo 3, estudamos o modelo de Bresse viscoelástico. Definimos os operadores associados ao sistema e seus respectivos espaços de energia. Mostramos que os operadores diferenciais associados ao problema são geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0.
No capítulo 4, mostramos a analiticidade do sistema de vigas de Bresse sob a ação de três dissipações viscoelásticas.
O caso de sistema de Bresse com duas dissipações viscoelásticas foi estudado no capítulo 5.
E no capítulo 6 investigamos o comportamento assintótico do sistema de Bresse sob a ação de uma única viscosidade elástica.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos e resultados sobre semigrupos de classe C_0. Apresentaremos os principais teoremas que caracterizam o decaimento de um semigrupo C_0 de contrações. Tais teoremas são as ferramentas principais utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Espaços de Sobolev e Resultados Básicos

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com medida de Lebesgue dx.
Para $1 \leq p < \infty$, definimos

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C}; u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}.$$

No espaço $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^p(\Omega)$ munido da norma $\|.\|_{L^p}$ é um espaço de Banach.
Se $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo e separável.
Para $p = \infty$, definimos o espaço

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C}; u \text{ é mensurável e existe constante } C \text{ tal que } |u(x)| \leq C \quad q.t.p. \text{ em } \Omega\}.$$

$L^\infty(\Omega)$ munido do produto interno dado por

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf \{C \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq C \quad q.t.p. \text{ em } \Omega\}$$

é um espaço de Banach.
O espaço $L^2(\Omega)$ dotado do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_\Omega u\overline{v}dx$$

é um espaço de Hilbert, e

$$\|u\|_{L^2}^2 = \langle u, u\rangle_{L^2}.$$

As demonstrações dos próximos resultados podem ser encontradas em [5].

Teorema 1.1.1 ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $p' \in \mathbb{R}$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Então,*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'},$$

para todos $a \geq 0$ *e* $b \geq 0$.

Teorema 1.1.2 ***(Desigualdade de Holder)*** *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* p' *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Se* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^{p'}(\Omega)$, *então* $uv \in L^1(\Omega)$. *Além disso,*

$$\int_\Omega |uv|dx \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^{p'}}.$$

Teorema 1.1.3 ***(Lax-Milgram)*** *Seja* H *um espaço de Hilbert. Se* $a : H \times H \to \mathbb{C}$ *é uma forma bilinear, contínua e coerciva, então para cada* $\phi \in H'$, *existe único* $u \in H$ *tal que*

$$a(u, v) = \phi(v), \text{ para todo } v \in H.$$

Agora, introduziremos os espaços de Sobolev e suas principais propriedades.
Diremos que uma função u tem derivada fraca em $L^p(\Omega)$, se existe uma função v_i tal que

$$\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v_i\phi dx,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Para simplificar a análise, para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}$ e $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$, denotaremos

$$|\alpha| = \Sigma_{j=1}^n \alpha_j,$$

e

$$D^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Sejam m um número inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o funcional $\|.\|_{m,p}$ por

$$\|u\|_{m,p} = \left(\Sigma_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}u\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } 1 \leq p < \infty, \tag{1.1}$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}}, \tag{1.2}$$

para cada função u para a qual as igualdades acima façam sentido.
O *espaço de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ é definido como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \quad \forall \quad |\alpha| \leq m\},$$

em que $D^{\alpha}u$ é a derivada no sentido fraco.
Definimos também o espaço

$$W_0^{m,p}(\Omega) \equiv \text{ fecho de } C_0^{\infty}(\Omega) \text{ no espaço } W^{m,p}(\Omega).$$

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, equipado com a norma $\|.\|_{m,p}$ dada por (1.1) ou (1.2) é um espaço de Banach separável, reflexivo e uniformemente convexo.
Quando $p = 2$, usualmente denotamos $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$, e este é um espaço de Hilbert com o produto interno correspondente.
Um espaço importante é o espaço que denotaremos por

$$H^{m,p}(\Omega) = \overline{\{u \in C^m(\Omega); \|u\|_{m,p} \leq \infty\}}^{\|.\|_{m,p}}.$$

A conjectura

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$$

foi demonstrada por Meyers e Serrin em [14], após ficar muitos anos em aberto.
Agora, apresentaremos os principais teoremas de desigualdades de Sobolev.

Teorema 1.1.4 ***(Sobolev, Gagliardo, Niremberg)*** *Sejam $1 \leq p < n$ e $p^* \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$. Então, temso que*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

Além disso, temos que existe constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: A demontração pode ser vista em [16]. $\square$

Teorema 1.1.5 ***(Morrey)*** *Seja $p > n$, então temos que*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

com imersão contínua. Além disso, se verifica

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma \|\nabla u\|_{L^p},$$

em que $\gamma = 1 - \dfrac{n}{p}$ e C é uma constante.

Demonstração: A demonstração deste resultado, bem como as demonstrações dos corolários que seguem, também pode ser vista em [5]. $\square$

Corolário 1.1.5.1 *Seja $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$, então se verifica*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \ \Rightarrow\ W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n) \text{ em que } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n},\\
&\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \ \Rightarrow\ W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n) \ \ \forall q \in [p,\ \infty[\,,\\
&\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \ \Rightarrow\ W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n),
\end{aligned}$$

com as imersões contínuas. Além disso, se $m - \dfrac{n}{p} > 0$ não é um número inteiro, denotando por

$$k = \left[m - \frac{n}{p}\right] \text{ e } \theta = m - \frac{n}{p} - k, \quad 0 < \theta < 1,$$

verificamos que, para toda $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, é válido

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{m,p}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \quad |\alpha| \leq k,$$

e ainda, temos

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C|x - y|^\theta \|u\|_{m,p}.$$

Em particular, temos que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$.

Corolário 1.1.5.2 *Seja* Ω *um aberto de classe* C^1 *com fronteira limitada, ou* $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. *Seja* $1 \leq p < \infty$, *então se verifica*

$$\begin{aligned} 1 \leq p < n \ &\Rightarrow \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \ \text{em que} \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \\ p = n \ &\Rightarrow \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \ \ \forall q \in [p, \ \infty[\,, \\ p > n \ &\Rightarrow \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

com as imersões contínuas. Além disso, se $m - \dfrac{n}{p} > 0$ *não é um número inteiro, denotando por*

$$k = \left[m - \frac{n}{p}\right] \ \text{e} \ \theta = m - \frac{n}{p} - k, \quad 0 < \theta < 1,$$

verificamos que, para toda $u \in W^{m,p}(\Omega)$, *é válido*

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{m,p}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \quad |\alpha| \leq k,$$

e ainda, temos

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C|x - y|^\theta \|u\|_{m,p}.$$

Em particular, temos que $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.1.6 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Suponhamos* Ω *limitado de classe* C^1. *Então, se verifica*

$$\begin{aligned} p < n \ &\Rightarrow \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \ \ \forall q \in [1, \ p^*[\,, \ \text{em que} \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \\ p = n \ &\Rightarrow \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \ \ \forall q \in [1, \ \infty[\,, \\ p > n \ &\Rightarrow \ W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \end{aligned}$$

com as imersões compactas.

Demonstração: Veja [5]. □

Uma desigualdade muito importante, e que será utilizada de forma recorrente nesse texto é a desigualdade de Poincaré.

Lema 1 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponhamos que* Ω *é um aberto limitado, pelo menos em uma direção. Então, existe uma constante* C, *dependente de* Ω *e de* p, *tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \ 1 \leq p < \infty.$$

Em particular, a expressão $\int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v} dx$ *é um produto interno em* $H_0^1(\Omega)$, *que induz a norma* $\|\nabla u\|_{L^p}$, *equivalente a norma usual de* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: A demonstração desta desigualdade pode ser vista em [5]. □

1.2 Semigrupos C_0 Gerados por Operadores Dissipativos

Definição 1 *Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares limitados $T(t) : X \to X$, $0 \leq t < \infty$ é um semigrupo fortemente contínuo ou de classe C_0 se*

(i) $T(0) = I$, em que I representa o operador Identidade,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todos $t, s \geq 0$,

(iii) $T(t)x$ é contínuo na variável t em $[0, \infty)$, para cada $x \in X$.

Diremos que um semigrupo $T(t)$ de classe C_0 é *limitado*, se existir constante $M > 0$ tal que

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq \infty.$$

Além disso, se $M = 1$, diremos que $T(t)$ é um semigrupo de classe C_0 de *contrações*.
Seja $T(t)$ um semigrupo de classe C_0. Consideremos o conjunto

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe em } X \right\}.$$

O operador linear $A : D(A) \to X$, dado por

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

é chamado de *gerador infinitesimal* do semigrupo $T(t)$. Muitas vezes, denotamos $T(t) = e^{At}$.
Seguem das definições que

$$t \mapsto T(t)x \in C^0([0\,,\infty)\,;X), \quad \text{para cada } x \in X,$$

e além disso, se A é o gerador infinitesimal de $T(t)$, temos que

$$t \mapsto T(t)x \in C^0([0\,,\infty)\,;D(A)) \cap C^1([0\,,\infty)\,;X), \quad \text{para cada } x \in D(A).$$

Seja A um operador linear sobre o espaço de Banach X. Definimos o conjunto *resolvente* de A por

$$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} : X \to X \text{ existe e é limitado}\},$$

e o *espectro* de A por

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A).$$

O conjunto $\sigma(A)$ é formado por três subconjuntos disjuntos:

- o *espectro discreto* $\sigma_d(A)$, formado pelos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - A$ não é injetivo;
- o *espectro contínuo* $\sigma_c(A)$, formado pelos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - A$ é injetivo, tem imagem densa em X, mas $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \to X$ é ilimitado;
- o *espectro residual* $\sigma_r(A)$, formado por $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - A$ é injetivo e o conjunto imagem não é denso em X.

Observação 1 *No caso de dimensão finita temos que $\sigma_c(A) = \emptyset$ e $\sigma_r(A) = \emptyset$. De fato, se $(\lambda I - A)$ for injetivo, então será sobrejetivo, e portanto, existirá o operador linear $A^{-1} : X \to X$. Como todo operador linear é limitado em dimensão finita, teremos A^{-1} operador limitado.*

Observação 2 *No caso em que A é um operador linear não limitado, se existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador compacto, então $\sigma(A)$ será composto apenas pelos autovalores de A, ou seja, $\sigma(A) = \sigma_d(A)$.*

Lema 2 *Sejam X um espaço métrico completo e $S : X \to X$ um operador linear e contínuo com inversa contínua. Seja $B \in \mathcal{L}(X)$ em que*

$$\| B \| < \frac{1}{\| S^{-1} \|},$$

então $S + B$ é um operador linear contínuo e inversível.

Demonstração: Temos que $S + B$ é bijetivo. De fato, seja $w \in X$ e denotemos por P o operador dado por

$$P(x) = S^{-1}(w) - S^{-1}B(x).$$

Assim, P é um operador linear limitado, por hipótese, e ainda

$$\| P(x) - P(y) \|_X \leq \alpha \| x - y \|,$$

em que $\alpha = \| S^{-1} \| \| B \| < 1$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, segue que existe único $z \in X$ tal que $P(z) = z$, ou seja, existe único $z \in X$ tal que

$$z = S^{-1}(w) - S^{-1}B(z) \quad \Leftrightarrow (S + B)(z) = w.$$

Logo, temos que $S + B$ é um operador bijetivo, e portanto, inversível.
Agora, como $S + B$ é contínuo, segue do Teorema do Gráfico Fechado que $(S + B)^{-1}$ também um operador contínuo. □

O próximo lema será frequentemente usado durante o texto.

Lema 3 *Seja A um operador linear tal que $0 \in \varrho(A)$. Se $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(A)$, então existe $w \in \mathbb{R}$ com $\| A^{-1} \| \leq |w| < \infty$ tal que*

$$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \varrho(A) \ e \ sup\{\| (i\beta I - A)^{-1} \|; |\beta| < |w|\} = \infty.$$

Demonstração: Como $0 \in \varrho(A)$, segue do lema anterior que

$$i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I)$$

possui inversa contínua para $|\beta| < \| A_{-1} \|^{-1}$.
Se $sup\{\| (i\beta I - A)^{-1} \|; |\beta| < \| A^{-1} \|^{-1}\} = M < \infty$, então, segue novamente do lema anterior que o operador

$$i\beta I - A = (i\beta_0 I - A)(I + i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - A)^{-1},)$$

com $|\beta_0| < \| A^{-1} \|^{-1}$, possui inversa contínua para $|\beta - \beta_0| < M^{-1}$ e $\| (i\beta I - A)^{-1} \|$ é uma aplicação contínua de β no intervalo $(- \| A^{-1} \| - M^{-1}, \| A^{-1} \| + M^{-1})$.
Segue que, se $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(A)$, então existe $w \in \mathbb{R}$ com $\| A^{-1} \| \leq |w| < \infty$ tal que $\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \rho(A)$ e $sup\{\| (i\beta I - A)^{-1} \|; |\beta| < |w|\} = \infty$. □

O próximo teorema, de Hille-Yosida, nos fornece uma caracterização dos geradores infinitesimais de semigrupos C_0 de contrações.

Teorema 1.2.1 ***(Hille-Yosida)*** *Um operador linear não limitado A é gerador infinite-*

simal de um semigrupo C_0 de contrações $T(t)$, $t \leq 0$, se, e somente se,
(i) A é um operador fechado e $D(A)$ é denso em X,

(ii) $\mathbb{R}^+ \subset \varrho(A)$ e $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser vista em [18]. □

Outra caracterização de geradores infinitesimais de semigrupos C_0 de contrações é dada no teorema Lummer-Phillips. Para essa caracterização, introduziremos o conceito de operador dissipativo.

Definição 2 *Seja H um espaço de Hilbert, equipado com produto interno $\langle , \rangle_H$, que induz em H a norma $\|.\|_H$. Seja A um operador linear densamente definido sobre H. Dizemos que A é um operador dissipativo se*

$$Re\langle Ax, x\rangle_H \leq 0, \ \text{para cada } x \in D(A).$$

Teorema 1.2.2 ***(Lummer-Phillips)*** *Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso no espaço de Hilbert H.*

(i) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que o conjunto imagem, $R(\lambda_0 I - A)$, de $\lambda_0 I - A$ é H, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre H.

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre H então A é dissipativo e $R(\lambda I - A) = H$, para todo $\lambda > 0$.

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [18]. □

O próximo resultado, corolário do teorema de Lummer-Phillips, será frequentemente usado neste trabalho.

Corolário 1.2.2.1 *Seja A um operador linear dissipativo com domínio $D(A)$ denso no espaço de Hilbert H, tal que $0 \in \varrho(A)$. Então, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre H.*

Demonstração: Por hipótese $0 \in \varrho(A)$, portanto, existe e é limitado o operador A^{-1}. Recorrendo ao lema 2, é fácil ver que $\lambda I - A$ é invertível para $0 < \lambda < \|A^{-1}\|^{-1}$. Assim, pelo teorema de Lummer-Phillips, segue que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre H. □

1.3 Resultados sobre propriedades assintóticas de um semigrupo

Nesta seção, apresentamos os resultados fundamentais sobre o comportamento assintótico de um semigrupo dissipativo.

Teorema 1.3.1 *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo de classe C_0 sobre o espaço de Banach X. Então existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|e^{At}\| \leq Me^{wt}, \quad \forall \quad 0 \leq t < \infty. \tag{1.3}$$

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser vista em [18]. □

Se a desigualdade acima é válida, então

$$\|e^{At}\| \leq Me^{(w+\alpha^2)t}, \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assim, um resultado interessante é encontrar o menor valor de $w \in \mathbb{R}$ que verifique (1.3).

Definição 3 *Seja A o gerador infinitesimal de semigrupo C_0. Definimos o tipo do semigrupo e^{At}, denotado por $w_0(A)$, como*

$$w_0(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t} = \inf_{t\to\infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t}. \tag{1.4}$$

Lema 4 *Seja A o gerador infinitesimal de semigrupo C_0. Então*

$$w_0(A) = \inf\{w \in \mathbb{R}; \|e^{At}\| \leq Me^{wt}, \quad \forall \quad 0 \leq t < \infty\}.$$

Demonstração: De fato, se $\tilde{w} \in \{w \in \mathbb{R}; \|e^{At}\| \leq Me^{wt}, \quad \forall \quad 0 \leq t < \infty\}$, então

$$\|e^{At}\| \leq Me^{\tilde{w}t}, \quad \forall \quad 0 \leq t < \infty,$$

o que implica

$$\frac{\ln \|e^{At}\|}{t} \leq \frac{\ln M}{t} + \tilde{w}, \quad \forall \quad t > 0.$$

Logo,

$$w_0(A) = \inf_{t\to\infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t} \leq \tilde{w}.$$

Portanto,

$$w_0(A) \leq \inf\{w \in \mathbb{R}; \|e^{At}\| \leq Me^{wt}, \ \forall \ \ 0 \leq t < \infty\}.$$

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon > 0$ tal que

$$w_0(A) + \epsilon \geq \frac{\ln \|e^{At}\|}{t}, \ \ \forall \ \ t > N_\epsilon, \tag{1.5}$$

ou seja,

$$e^{(w_0(A)+\epsilon)t} \geq \|e^{At}\|, \ \ \forall \ \ t > N_\epsilon.$$

Pelo Teorema 1.3.1, existem constantes $\alpha > 0$ e $\tilde{C} > 1$ tais que

$$\|e^{At}\| \leq \tilde{C}e^{\alpha t}, \ \ \forall \ \ 0 \leq t < \infty,$$

assim,

$$\|e^{At}\| \leq \tilde{C}e^{\alpha N_\epsilon} \leq \tilde{M}e^{(w_0(A)+\epsilon)t}, \ \ \forall \ \ t \in [0, N_\epsilon],$$

em que $\tilde{M} = \dfrac{\tilde{C}e^{\alpha N_\epsilon}}{\max\{e^{(w_0(A)+\epsilon)t}; 0 \leq t \leq N_\epsilon\}}$.

Tomando $M = \min\{1, \tilde{M}\}$, temos que

$$\|e^{At}\| \leq Me^{(w_0(A)+\epsilon)t}, \ \ \forall \ \ t \geq 0,$$

para todo $\epsilon > 0$, e logo,

$$\|e^{At}\| \leq Me^{w_0(A)t}, \ \ \forall \ \ t \geq 0.$$

Portanto,

$$w_0(A) \geq \inf\{w \in \mathbb{R}; \|e^{At}\| \leq Me^{wt}, \ \forall \ \ 0 \leq t < \infty\}. \tag{1.6}$$

Das desigualdades (1.5) e (1.6) segue o resultado. □

Definição 4 *Um semigrupo $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$ é exponencialmente estável se existirem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\alpha t}, \ \ \forall \ \ t \geq 0.$$

Observação 3 *É importante notar que se $w_0(A) < 0$, então o semigrupo $\{e^{At}\}$ é exponencialmente estável, com taxa ótima determinada por $w_0(A)$.*

O próximo teorema, devido a J. Prüss, [19], carateriza a estabilidade exponencial de um semigrupo C_0 de contrações. Este será o resultado utilizado no trabalho para investigar o decaimento exponencial dos sistemas.

Teorema 1.3.2 *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\varrho(\mathcal{A}) \supset \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \tag{1.7}$$

e

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \tag{1.8}$$

Demonstração: Veja [13] e [19]. □

Observação 4 *Se $\|S(t)\| \to 0$, então $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ é exponencialmente estável. Em particular, se $\|S(t)u\|_H \leq \phi(t)\|u\|_H$, para todo $u \in D(A)$, em que $\phi(t) \to 0$, então $S(t)$ é exponencialmente estável.*

Para semigrupos que não decaem exponencialmente, podemos analisar o decaimento do tipo polinomial com normas não uniformes.

Definição 5 *Um semigrupo $S(t) = e^{At}$ é polinomialmente estável se existirem constantes $C > 0$ e $\gamma > 0$ tais que*

$$\|e^{At}u\|_H \leq \frac{C}{t^\gamma}\|u\|_{D(A)}, \quad \forall u \in D(A).$$

O próximo teorema, de A. Borichev and Y. Tomilov, [6], caracteriza a estabilidade polinomial de semigrupos C_0 limitados sobre espaços de Hilbert. Usaremos uma reformulação desse resultado para analisar o decaimento polinomial dos modelos deste trabalho.

Teorema 1.3.3 *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo C_0 limitado sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, tal que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. Então, para $\alpha > 0$ fixado, as seguintes condições são equivalentes:*

(I) $\|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| = O(|\lambda|^\alpha), \quad \lambda \to \infty.$

(II) $\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\| = O(t^{-\frac{1}{\alpha}}), \quad t \to \infty.$

Demonstração: Ver [6]. □

O teorema acima pode ser reescrito por:

Teorema 1.3.4 *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo C_0 limitado sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, tal que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. Então, para $\alpha > 0$ fixado, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\sup_{|\beta|\geq\delta} \dfrac{1}{\beta^\alpha}\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq C$, *para alguma constante* $\delta > 0$

(ii) Existe constante $C > 0$ *tal que* $\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq C\dfrac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$, $\forall\ U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Demonstração: A equivalência entre a condição (i) e a condição (I) do teorema 1.3.3 é imediata.
Dado $F \in \mathcal{H}$, existe $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $F = \mathcal{A}U_0$.
Suponhamos que valha (ii). Então,

$$\begin{aligned}
\|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} &= \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C\frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \\
&= C\frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}} \\
&= C\frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\| = O(t^{-\frac{1}{\alpha}}), \quad t \to \infty.$$

Por outro lado, se vale a condição (II) do teorema anterior, então temos que

$$\begin{aligned}
\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} &= \|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C\frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&= C\frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}} \\
&= C\frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}.
\end{aligned}$$

Portanto, (ii) e (II) são equivalentes. □

Definição 6 *Diz-se que um semigrupo $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ é analítico quando admite uma extensão $S(\lambda)$, para $\lambda \in \triangle_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda)| < \theta\}$, para algum $\theta > 0$, tal que $\lambda \mapsto S(\lambda)$ é analítica e* *(i)* $\lim_{\triangle_\theta \ni \lambda \to 0} \|S(\lambda)u - u\| = 0, \quad \forall u \in H,$

(ii) $S(\lambda + \mu) = S(\lambda)S(\mu), \quad \forall \lambda, \mu \in \triangle_\theta.$

Para analisarmos analiticidade, usaremos o seguinte resultado:

Teorema 1.3.5 *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então $S(t)$ é analítico se, e somente se,*

$$\varrho(\mathcal{A}) \supset \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \tag{1.9}$$

e

$$\overline{\lim}_{|\beta| \to \infty} \|\beta(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \tag{1.10}$$

Observação 5 *As condições do teorema acima implicam que, se $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ é um semigrupo C_0 de contrações analítico sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ é exponencialmente estável.*

Definição 7 *Seja A um operador sobre um espaço de Banach X. A cota superior do espectro de A é o valor*

$$w_\sigma(A) = \sup\{Re\{\lambda\}; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Definição 8 *Dizemos que o semigrupo C_0 $S(t) = e^{At}$ possui a propriedade da estabilidade linear, se*

$$w_0(A) = w_\sigma(A).$$

Verificar que um semigrupo possui a propriedade da estabilidade linear é importante pois permite calcular de forma mais simples o tipo do semigrupo. Assim, quando $w_0(A) = w_\sigma(A)$, basta determinar a cota superior do espectro para encontrar a melhor taxa de decaimento. Por isso, quando esta propriedade é válida, dizemos que o semigrupo possui a *propriedade do crescimento determinado pelo espectro (PCDE).*

Observação 6 *A propriedade da estabilidade linear se verifica quando A é um operador normal, ou quando A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.*

Capítulo 2

Vigas Viscoelásticas de Timoshenko

2.1 O modelo de vigas de Timoshenko viscoelástico

Neste capítulo, estudamos o comportamento assintótico de sistemas de vigas de Timoshenko viscoelástico.

Consideramos uma viga de comprimento L em sua posição de equilíbrio, constituída de material isotrópico e linearmente elástico.

Consideramos também, que a área da seção transversal da viga é simétrica com respeito ao eixo z. A teoria de Timoshenko para o movimento das vibrações transversais em uma viga

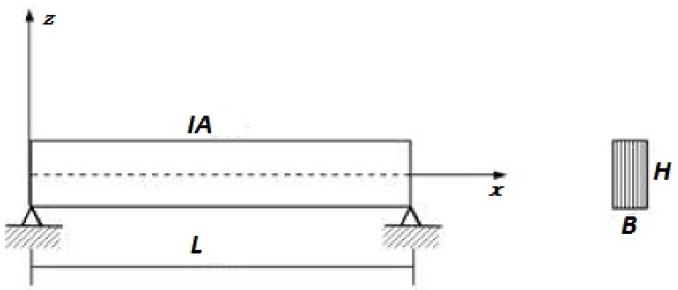

Figura 2.1: Viga em posição de equilíbrio

elástica leva em consideração tanto o efeito do cisalhamento quanto o efeito da rotação. Se $\phi(x,t)$ e $\psi(x,t)$ descrevem o deslocamento transversal de uma seção plana da viga e o ângulo de rotação de um filamento da viga na posição x e no tempo t, respectivamente, a equação do movimento nos dá

$$\rho A\phi_{tt} = S_x \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \tag{2.1}$$

$$\rho I\psi_{tt} = M_x - S \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \tag{2.2}$$

em que

$$\begin{aligned} M &= EI\psi_x && \leftarrow \text{ Deformação por flexão} \\ S &= KAG(\phi_x+\psi) && \leftarrow \text{ Deformação por corte.} \end{aligned}$$

Os coeficientes ρA, ρI, E, I, KAG representam massa por unidade de comprimento, momento polar, módulo de elasticidade de Young, momento de inércia da seção transversal e módulo de cisalhamento, respectivamente. Denotando $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $b = EI$ e

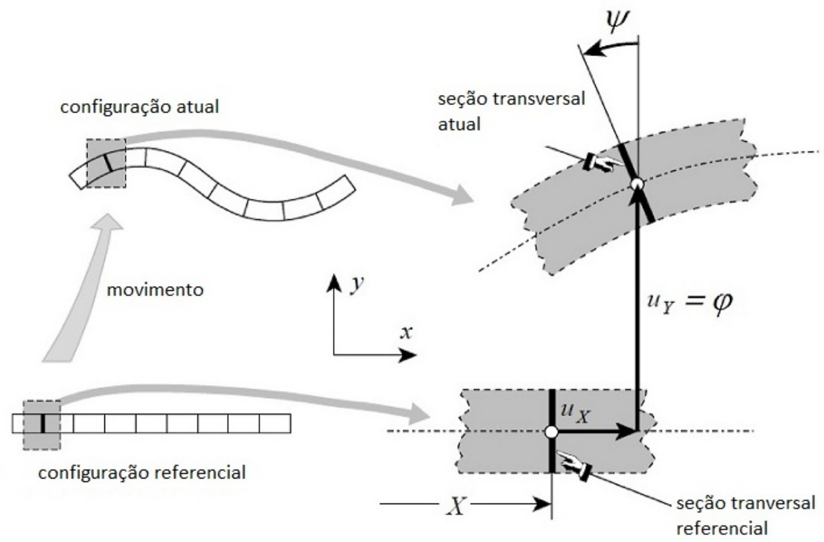

Figura 2.2: Viga em movimento

$k = KAG$, obtemos de (2.1)-(2.2) o sistema hiperbólico e acoplado de Timoshenko

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi)_x = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \tag{2.3}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty). \tag{2.4}$$

Com essa notação e considerando condições de contorno homogêneas, definimos a energia total da viga por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho_1|\phi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\phi_x+\psi|^2\right] dx.$$

De fato, multiplicando (2.3) por $\overline{\phi_t}$ e integrando em relação a x de 0 a L, obtemos que

$$\rho_1\int_0^L \phi_{tt}\overline{\phi_t}\,dx + k\int_0^L(\phi_x+\psi)\overline{\phi_{xt}}\,dx = 0 \text{ em } (0,\infty).$$

Multiplicando (2.4) por $\overline{\psi_t}$, obtemos que

$$\rho_2\int_0^L \psi_{tt}\overline{\psi_t}\,dx + \int_0^L b\psi_x\overline{\psi_{xt}}\,dx + k\int_0^L(\phi_x+\psi)\overline{\psi_t}\,dx = 0 \text{ em } (0,\infty).$$

Somando as duas últimas expressões, obtemos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0, \text{ em } (0, \infty).$$

Portanto, o sistema (2.3)-(2.4) é conservativo, o que significa que a solução não decai. Vamos investigar o sistema de vigas de Timoshenko viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt com dissipação agindo de forma parcial e total sobre o sistema.
Investigaremos, portanto, o comportamento assintótico da solução (ϕ, ψ) do sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1(\phi_x + \psi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} + \gamma_1(\phi_x + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

nos casos em que:

- $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$,
- $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 = 0$,
- $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 > 0$.

Além disso, estudaremos o sistema com dissipação viscoelástica

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1'\phi_{xxt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \tag{2.5}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \tag{2.6}$$

nos seguintes casos:

- $\gamma_1' > 0$ e $\gamma_2' > 0$,
- $\gamma_1' > 0$ e $\gamma_2' = 0$,
- $\gamma_1' = 0$ e $\gamma_2' > 0$.

A análise do sistema (2.5)-(2.6) será feita exclusivamente do ponto de vista matemático, com a finalidade de comparar com os resultados obtidos para o sistema de vigas de Timoshenko viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt (2.5)-(2.5).
Primeiramente, vamos considerar

$$M = EI\psi_x + \gamma_2\psi_{xt} \tag{2.7}$$

$$S = KAG(\phi_x + \psi) + \gamma_1(\phi_x + \psi)_t. \tag{2.8}$$

Assim, obtemos o sistema de vigas de Timoshenko viscoelástico

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1(\phi_x + \psi)_{xt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \tag{2.9}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} + \gamma_1(\phi_x + \psi)_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty). \tag{2.10}$$

Consideramos condições de contorno mistas, do tipo Dirichlet-Neumann

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = 0, \quad \forall t > 0. \tag{2.11}$$

e condições iniciais

$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x), x \in (0,L). \tag{2.12}$$

De (2.4), temos que

$$f(t) = \int_0^L [\phi_x(x,t) + \psi(x,t)]\, dx \quad \text{satisfaz} \quad f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0.$$

Se as condições iniciais $f(0) = f'(0) = 0$ são satisfeitas, $f(t)$ se anula para todo $t > 0$. Por isso, assumimos que os dados iniciais satisfazem as condições

$$\int_0^L \psi_0(x)dx = \int_0^L \psi_1(x)dx = 0. \tag{2.13}$$

Denotemos

$$L^2_*(0,L) = \left\{ f \in L^2(0,L); \int_0^L f(x)dx = 0 \right\} \quad \text{e} \quad H^1_*(0,L) = H^1(0,L) \cap L^2_*(0,L).$$

A condição (2.13) nos garante que $L^2_*(0,L)$ e $H^1_*(0,L)$ estão bem definidos.
Assim, para o problema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1(\phi_x + \psi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0,L) \times (0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} + \gamma_1(\phi_x + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0,L) \times (0,\infty), \end{aligned}$$

com condições de contorno mistas Dirichlet-Neumann, consideramos como espaço de energia o espaço dado por

$$\mathcal{H}_1 = H^1_0(0,L) \times L^2(0,L) \times H^1_*(0,L) \times L^2_*(0,L),$$

com produto interno

$$\begin{aligned} \langle (\phi, \Phi, \psi, \Psi), (\widetilde{\phi}, \widetilde{\Phi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\Psi}) \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \rho_1 \int_0^L \Phi\overline{\widetilde{\Phi}}dx + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{\widetilde{\Psi}}dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\widetilde{\psi}_x}dx \\ &\quad + k\int_0^L (\phi_x + \psi)(\overline{\widetilde{\phi}_x + \widetilde{\psi}})dx. \end{aligned}$$

O produto interno em $\mathcal{H}_1$ acima induz a norma da energia

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \left\|(\phi, \Phi, \psi, \Psi)^t\right\|_{\mathcal{H}_1}^2 \\ &= \rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\phi_x + \psi\|_{L^2}^2 . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Definimos o operador linear $\mathcal{A}_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, por

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 & \frac{\gamma_1}{\rho_1}\partial_x^2 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & \frac{\gamma_1}{\rho_1}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{-k}{\rho_2}\partial_x & \frac{-\gamma_1}{\rho_2}\partial_x & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2}I & \frac{\gamma_2}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\gamma_1}{\rho_2}I \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = \left\{U^t \in \mathcal{H}_1 | \Phi \in H_0^1(0,L), \Psi \in H_*^1(0,L), k\phi + \gamma_1\Phi \in H^2(0,L), b\psi_x + \gamma_2\Psi_x \in H_0^1(0,L)\right\}.$$

Assim, o sistema de vigas de Timoshenko viscoelástico apresentado acima pode ser reescrito como um sistema de primeira ordem sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$:

$$U_t(t) = \mathcal{A}_1 U(t), \qquad U(0) = U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1), \tag{2.16}$$

correspondendo às condições de fronteira (2.11), em que $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1)^t$.

Teorema 2.1.1 *O operador $\mathcal{A}_1$, dado em (2.15), é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $T(t) = e^{\mathcal{A}_1 t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$, para $\gamma_1 \geq 0$ e $\gamma_2 \geq 0$.*

Demonstração: Primeiramente, vejamos que $\mathcal{A}_1$ dissipativo.
De fato, seja $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, então

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1 U, U\rangle_{\mathcal{H}_1} &= \rho_1 \int_0^L [\frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x + \frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x + \Psi)_x]\overline{\Phi}\, dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^L [\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) + \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi_{xx} - \frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi_x + \Psi)]\overline{\Psi}\, dx \\ &\quad + b\int_0^L \Psi_x \overline{\psi_x} dx + k\int_0^L [\Phi_x + \Psi][\overline{\phi_x + \psi}]\, dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Re\langle \mathcal{A}_1 U, U\rangle_{\mathcal{H}_1} = -\gamma_1 \int_0^L |\Phi_x + \Psi|^2\, dx - \gamma_2 \int_0^L |\Psi_x|^2\, dx \leq 0, \quad \text{para } \gamma_1, \gamma_2 \geq 0. \tag{2.17}$$

Portanto, $\mathcal{A}_1$ é dissipativo.
Agora, mostraremos que $0 \in \varrho(\mathcal{A}_1)$. Para isto, devemos verificar a existência do operador inverso $-\mathcal{A}_1^{-1}$ e mostrar que este é limitado em $\mathcal{H}_1$.

(i) $-\mathcal{A}_1$ bijetivo.

Dado $F^t = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}_1$, devemos encontrar única $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$ tal que

$$-\mathcal{A}_1 U = F.$$

Considerando as condições de contorno Dirichet-Neumann, devemos ter

$$\begin{aligned} -\Phi &= f_1 \in H_0^1(0,L) && (2.18)\\ -[\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi)_x + \frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x+\Psi)_x] &= f_2 \in L^2(0,L) && (2.19)\\ -\Psi &= f_3 \in H_*^1(0,L) && (2.20)\\ -[\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi) + \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi_{xx} - \frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi_x+\Psi)] &= f_4 \in L_*^2(0,L). && (2.21) \end{aligned}$$

De (2.18) e (2.20) segue que

$$\begin{aligned} \Phi &= -f_1 \in H_0^1(0,L)\\ \Psi &= -f_3 \in H_*^1(0,L). \end{aligned}$$

Então, nos resta mostrar que existem ϕ, ψ soluções de

$$\left\{ \begin{aligned} -k(\phi_x+\psi)_x &= f := \gamma_1(f_1)_{xx} + \gamma_1(f_3)_x + \rho_1 f_2 &\in\ & H^{-1}(0,L)\\ -b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) &= g := \gamma_2(f_3)_{xx} - \gamma_1[(f_1)x + f_3] + \rho_2 f_4 &\in\ & H^{-1}(0,L) \end{aligned} \right. \quad (2.22)$$

satisfazendo

$$\phi(0) = \phi(L) = \psi_x(0) = \psi_x(L) = 0.$$

Consideremos o espaço $W_1 = H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L)$, e denotemos por $a_1(.,.)$ a forma bilinear $a_1 : W_1 \times W_1 \to \mathbb{C}$ dada por

$$a_1\Big((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\Big) = k\int_0^L (\phi_x+\psi)(\overline{\widetilde{\phi}_x} + \overline{\widetilde{\psi}})\,dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\widetilde{\psi}_x}\,dx.$$

Tem-se que a_1 é bilinear, coerciva e contínua no espaço de Hilbert $W_1 \times W_1$, e logo, pelo teorema de Lax-Milgram, existe solução para o problema variacional

$$a_1\Big((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\Big) = \langle (f,g),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\rangle, \quad \forall(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}) \in W_1,$$

em que $(f,g) \in H^{-1}(0,L) \times H^{-1}(0,L)$.
Portanto, existe única solução $(\phi,\psi) \in W_1$ do sistema (2.22).
Logo, existe única $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ que satisfaz $-\mathcal{A}_1 U = F$.

(ii) $-\mathcal{A}_1$ é um operador limitado em $\mathcal{H}_1$
Multiplicando (2.18) por $\overline{\Phi}$ e integrando de 0 a L em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L |\Phi|^2\,dx &\leq C_{\epsilon_1}\int_0^L |f_1|^2\,dx + C\epsilon_1\int_0^L |\Phi|^2\,dx \\ &\leq \widetilde{C}_{\epsilon_1}\int_0^L |(f_1)_x + f_3|^2\,dx + \widetilde{C}_{\epsilon_1}\int_0^L |(f_3)_x|^2\,dx + C\epsilon_1\int_0^L |\Phi|^2\,dx, \forall \epsilon_1 > 0.\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\rho_1\int_0^L |\Phi|^2\,dx \quad\leq\quad \widehat{C}_1\|F\|^2_{\mathcal{H}_1}. \tag{2.23}$$

Multiplicando (2.20) por $\overline{\Psi}$ e ntegrando de 0 a L em relação a x, obtemos

$$\int_0^L |\Psi|^2\,dx \quad\leq\quad C_{\epsilon_2}\int_0^L |f_3|^2\,dx + C\epsilon_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx, \forall \quad \epsilon_2 > 0.$$

Assim, tomando $\epsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx \quad\leq\quad \widehat{C}_2\|F\|^2_{\mathcal{H}_1}. \tag{2.24}$$

Multiplicando (2.19) por $\overline{\phi}$ e (2.21) por $\overline{\psi}$, obtemos que

$$\begin{aligned}k\int_0^L |\phi_x+\psi|^2\,dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx &\leq C_{\epsilon_3}\int_0^L |f_2|^2\,dx + C\epsilon_3\int_0^L |\phi|^2\,dx \\ &\quad + C_{\epsilon_4}\int_0^L |f_4|^2\,dx + C\epsilon_4\int_0^L |\psi|^2\,dx \\ &\quad + \gamma_1\int_0^L |\Phi_x+\Psi||\phi_x+\psi|\,dx + \gamma_2\int_0^L |\Psi_x||\psi_x|\,dx.\end{aligned}$$

Usando (2.17) na desigualdade acima, e tomando ϵ_3, ϵ_4 pequenos o suficiente, temos que

$$k\int_0^L |\phi_x+\psi|^2\,dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx \quad\leq\quad \widehat{C}_3\|F\|^2_{\mathcal{H}_1} + \widehat{C}_3\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{2.25}$$

Finalmente, das desigualdades (2.23)-(2.25) segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1} \leq K\|F\|_{\mathcal{H}_1}, \tag{2.26}$$

para constante positiva K que independe de U. Portanto, $\|\mathcal{A}_1^{-1}\| \leq K$.

Como $0 \in \varrho(\mathcal{A}_1)$, segue da identidade do resolvente que, para λ pequeno, $R(\lambda I - \mathcal{A}_1) = \mathcal{H}_1$ (teorema 1.2.4 em [13]). Pelo teorema de Lummer-Phillips, $\mathcal{A}_1$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$, para $\gamma_1 \geq 0$ e $\gamma_2 \geq 0$. $\square$

Sob estas condições, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.2 *Suponhamos que os dados iniciais* $(\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, *então existe única solução* (ϕ, Φ, ψ, Ψ) *para o sistema,*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1(\phi_x + \psi)_{xt} &= 0 \ \textit{em} \ (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} + \gamma_1(\phi_x + \psi)_t &= 0 \ \textit{em} \ (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

satisfazendo

$$(\phi, \Phi, \psi, \Psi) \in C\left([0, +\infty]; \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)\right) \cap C^1\left([0, +\infty]; \mathcal{H}_1\right).$$

Agora, se acrescentarmos a dissipação viscoelástica diretamente na equações do modelo original, obtemos

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1'\phi_{xxt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \tag{2.27}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty). \tag{2.28}$$

Novamente consideramos condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0, \tag{2.29}$$

e condições iniciais

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \phi_1(x), x \in (0, L),$$

e o espaço de fase $\mathcal{H}_1$.

Assim, o sistema de vigas de Timoshenko viscoelástico apresentado em (2.27) – (2.28) pode ser reescrito como um sistema de primeira ordem sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$:

$$U_t(t) = \widetilde{\mathcal{A}}_1 U(t), \qquad U(0) = U_0 \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1),$$

correspondendo às condições de fronteira (2.29), em que $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1)^t$, e

$$\widetilde{\mathcal{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 & \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\partial_x^2 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{-k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2}I & \frac{\gamma_2'}{\rho_2}\partial_x^2 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1) = \left\{ U \in \mathcal{H}_1 | \Phi \in H_0^1(0,L), \Psi \in H_*^1(0,L), k\phi + \gamma 1\Phi \in H^2(0,L), b\psi_x + \gamma_2'\Psi_x \in H_0^1(0,L) \right\}.$$

De forma análoga aos caso anterior, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.3 *O operador $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ dado em (2.30), é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $T(t) = e^{\widetilde{\mathcal{A}}_1 t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$, para $\gamma_1' \geq 0$ e $\gamma_2' \geq 0$.*

Demonstração: Seja $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$. Então

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{\mathcal{A}}_1 U, U \right\rangle_{\mathcal{H}_1} &= \left\langle \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x + \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\Phi_{xx} \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) + \frac{\gamma_2'}{\rho_2}\Psi_{xx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_1} \\ &= \rho_1 \int_0^L [\frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x + \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\Phi_{xx}]\overline{\Phi}\, dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^L [\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) + \frac{\gamma_2'}{\rho_2}\Psi_{xx}]\overline{\Psi}\, dx \\ &\quad + b\int_0^L \Psi_x \overline{\psi_x} dx + k\int_0^L [\Phi_x + \Psi][\overline{\phi_x + \psi}]\, dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$Re\left\langle \widetilde{\mathcal{A}}_1 U, U \right\rangle_{\mathcal{H}_1} = -\gamma_1' \int_0^L |\Phi_x|^2\, dx - \gamma_2' \int_0^L |\Psi_x|^2\, dx \leq 0, \quad \text{para } \gamma_1', \gamma_2' \geq 0. \tag{2.31}$$

Portanto, mostramos que o operador $\widetilde{\mathcal{A}}_j$ é dissipativo.
Para completar a demonstração, é suficiente mostrar que $0 \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$. Para isto, vamos verificar a existência do operador $-\widetilde{\mathcal{A}}_1^{-1}$ e mostrar que este é limitado em $\mathcal{H}_1$.

(i) $-\widetilde{\mathcal{A}}_1$ bijetivo.

Seja $F=(f_1,f_2,f_3,f_4)^t\in\mathcal{H}_1$. Vamos mostrar que existe única $U=(\phi,\Phi,\psi,\Psi)^t\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$ tal que

$$-\widetilde{\mathcal{A}}_1U=F.$$

Considerando condições de contorno Dirichet-Neumann, devemos ter

$$\begin{aligned}
-\Phi &= f_1\in H_0^1(0,L) &(2.32)\\
-[\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi)_x+\frac{\gamma_1'}{\rho_1}\Phi_{xx}] &= f_2\in L^2(0,L) &(2.33)\\
-\Psi &= f_3\in H_*^1(0,L) &(2.34)\\
-[\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi)+\frac{\gamma_2'}{\rho_2}\Psi_{xx}] &= f_4\in L_*^2(0,L). &(2.35)
\end{aligned}$$

De (2.32) e (2.34) obtemos que

$$\begin{aligned}
\Phi &= -f_1\in H_0^1(0,L)\\
\Psi &= -f_3\in H_*^1(0,L).
\end{aligned}$$

Assim, basta mostrarmos que existem ϕ,ψ soluções de

$$\left\{\begin{array}{rcl} -k(\phi_x+\psi)_x &=& f:=\gamma_1'(f_1)_{xx}+\rho_1f_2\ \in\ H^{-1}(0,L)\\ -b\psi_{xx}+k(\phi_x+\psi) &=& g:=\gamma_2'(f_3)_{xx}+\rho_2f_4\ \in\ H^{-1}(0,L)\end{array}\right. \tag{2.36}$$

satisfazendo

$$\phi(0)=\phi(L)=\psi_x(0)=\psi_x(L)=0.$$

Consideremos o espaço $W_1=H_0^1(0,L)\times H_*^1(0,L)$.
Seja $\widetilde{a}_1:W_1\times W_1\to\mathbb{C}$ dada por

$$\widetilde{a}_1\Big((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\Big)=k\int_0^L(\phi_x+\psi)(\overline{\widetilde{\phi}}_x+\overline{\widetilde{\psi}})\,dx+b\int_0^L\psi_x\overline{\widetilde{\psi}_x}\,dx.$$

Temos que $\widetilde{a}_1$ é uma forma bilinear, coerciva e contínua no espaço de Hilbert $W_1\times W_1$. Logo, pelo teorema de Lax-Milgram, existe solução para o problema variacional

$$\widetilde{a}_1\Big((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\Big)=\langle(f,g),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\rangle,\quad\forall(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\in W_1,$$

em que $(f,g)\in H^{-1}(0,L)\times H^{-1}(0,L)$.
Portanto, existe única solução $(\phi,\psi)\in W_1$ do sistema (2.36).
Logo, existe única $U\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$ que satisfaz $-\widetilde{\mathcal{A}}_1U=F$.

(ii) $-\widetilde{\mathcal{A}}_1$ é limitado em $\mathcal{H}_1$

Do produto de (2.32) por $\overline{\Phi}$, obtemos que

$$\int_0^L |\Phi|^2\, dx \;\; \leq \;\; C_{\epsilon_1}\int_0^L |f_1|^2\, dx + C\epsilon_1 \int_0^L |\Phi|^2\, dx.$$

Logo, para $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\rho_1 \int_0^L |\Phi|^2\, dx \;\; \leq \;\; \widehat{C}_1 \|F\|^2_{\mathcal{H}_1}. \tag{2.37}$$

Do produto de (2.20) por $\overline{\Psi}$ segue que

$$\int_0^L |\Psi|^2\, dx \;\; \leq \;\; C_{\epsilon_2}\int_0^L |f_3|^2\, dx + C\epsilon_2 \int_0^L |\Psi|^2\, dx, \forall \epsilon_2 > 0.$$

Assim, tomando $\epsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\rho_2 \int_0^L |\Psi|^2\, dx \;\; \leq \;\; \widehat{C}_2 \|F\|^2_{\mathcal{H}_1}. \tag{2.38}$$

Somando o produto interno dem $L^2(0,L)$ de (2.33) por ϕ com o produto interno dem $L^2(0,L)$ de (2.35) por ψ, obtemos que

$$\begin{aligned} k\int_0^L |\phi_x + \psi|^2\, dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\, dx \;\; \leq \;\; & C_{\epsilon_3}\int_0^L |f_2|^2\, dx + C\epsilon_3 \int_0^L |\phi|^2\, dx \\ & + C_{\epsilon_4}\int_0^L |f_4|^2\, dx + C\epsilon_4 \int_0^L |\psi|^2\, dx \\ & + \gamma_1' \int_0^L |\Phi_x||\phi_x|\, dx + \gamma_2' \int_0^L |\Psi_x||\psi_x|\, dx. \end{aligned}$$

Logo, por (2.31), e tomando ϵ_3, ϵ_4 pequenos o suficiente, obtemos que

$$k\int_0^L |\phi_x + \psi|^2\, dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\, dx \;\; \leq \;\; \widehat{C}\|F\|^2_{\mathcal{H}_1} + \widehat{C}\epsilon_5 \|U\|^2_{\mathcal{H}_1}, \tag{2.39}$$

para todo $\epsilon_5 > 0$.

Portanto, das desigualdades (2.37)-(2.39) segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1} \leq K\|F\|_{\mathcal{H}_1}, \tag{2.40}$$

para constante $K > 0$ que independe de U.

Logo, $\|\widetilde{\mathcal{A}}_1^{-1}\| \leq K$.

Como $0 \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$, segue da identidade do resolvente que, para λ pequeno, $R(\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_1) = \mathcal{H}_1$. Assim, pelo teorema de Lummer-Phillips, concluímos que $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$, para $\gamma_1' \geq 0$ e $\gamma_2' \geq 0$. $\square$

2.2 Viscoelasticidade agindo totalmente no sistema

Nesta seção, investigaremos o efeito dissipativo o sistema totalmente dissipativo de Timoshenko, ou seja, acrescentaremos viscoelasticidade tanto na equação da deformação por corte, quanto na equação de deformação angular. Na primeira subseção, estudaremos o modelo acrescentando as viscosidades na leis contitutivas do modelo. Já na subseção subsequente, estudaremos o caso em que acrescentamos as viscoelasticidades diretamente no sistema. Mostraremos que, em ambos os casos, a dissipação é suficientemente forte para estabilizar o sistema de forma analítica.

A demonstração do resultado terá como alicerce a caracterização de semigrupos analíticos dada no teorema 1.3.5. Pelo teorema 1.3.5, para concluirmos que o sistema é analítico, basta mostrarmos que

$$\varrho(\mathcal{A}_1) \supset \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$$

e

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty} \|\beta(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}\| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Por simplicidade, empregaremos o mesmo símbolo C para diferentes constantes positivas. Além disso, muitas vezes faremos uso sem menção explícita das desigualdades de Poincaré, de Young e de Cauchy-Schwarz.

2.2.1 Dissipação nas leis constitutivas

Vamos considerar o sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1(\phi_x + \psi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (2.41) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} + \gamma_1(\phi_x + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.42) \end{aligned}$$

em que $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$.

Para este problema, consideramos condições iniciais

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \phi_1(x), \quad x \in (0, L),$$

e condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann.
Temos, então, o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 *O semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}_1$ dado em* (2.15)*, em que $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$, é analítico.*

Demonstração: Pelo teorema 1.3.5, é suficiente mostrarmos que

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1), \tag{2.43}$$

e

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty}\|\beta(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}\| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.44}$$

Inicialmente, vamos mostrar, por contradição, que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1)$.
Vamos supor que

$$i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_1).$$

Como $0 \in \varrho(\mathcal{A}_1)$, então, pelo lema 3, existe $w \in \mathbb{R}$ com

$$\|\mathcal{A}_1^{-1}\| \leq |w| < \infty,$$

tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \varrho(\mathcal{A}_1) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}\|; |\beta| < |w|\} = \infty.$$

Portanto, existem sequências $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to w$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |w|$ e $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_1)y_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
i\beta_n\rho_1\Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n)_x - \gamma_1(\Phi_x^n + \Psi^n)_x &\to 0 \text{ em } L^2(0,L) & (2.45)\\
i\beta_n\rho_2\Psi^n + k(\phi_x^n + \psi^n) - b\psi_{xx}^n + \gamma_1(\Phi_x^n + \Psi^n) - \gamma_2\Psi_{xx}^n &\to 0 \text{ em } L^2(0,L) & (2.46)\\
i\beta_n\psi_x^n - \Psi_x^n &\to 0 \text{ em } L^2(0,L) & (2.47)\\
i\beta_n\phi_x^n - \Phi_x^n + i\beta_n\psi^n - \Psi^n &\to 0 \text{ em } L^2(0,L), & (2.48)
\end{aligned}$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n)^t$.
Tomando o produto interno de $(i\beta_n I - \mathcal{A}_1)y_n$ com y_n em $\mathcal{H}_1$, obtemos

$$Re\langle i\beta_n y_n - \mathcal{A}_1 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_1} = -Re\langle \mathcal{A}_j y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_1} = \gamma_1\int_0^L |\Phi_x^n + \Psi^n|^2 dx + \gamma_2\int_0^L |\Psi_x^n|^2 dx \to 0,$$

portanto,

$$\Phi_x^n + \Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{2.49}$$

e

$$\Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L). \tag{2.50}$$

Pela desigualdade de Poincaré, podemos concluir que

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L),$$

e

$$\|\Phi^n\|_{L^2} \leq \|\Phi_x^n\|_{L^2} = \|\Phi_x^n + \Psi - \Psi\|_{L^2} \leq \|\Phi_x^n + \Psi\|_{L^2} + \|\Psi_x^n\|_{L^2} \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Das convergências (2.47) e (2.50) segue que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L),$$

Finalmente, por (2.49) e (2.48), temos que

$$\phi_x^n + \psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Assim, acabamos de mostrar que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0$, o que é uma contradição, já que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$, para todo n.
Portanto, $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1)$.
Agora, devemos mostrar que

$$\overline{\lim}_{|\beta| \to \infty} \|\beta(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}\| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.51}$$

De fato, se não vale (2.51), devem existir sequências $(U_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$, $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \infty$, tais que

$$\lim_{n \to \infty} \|\beta_n^{-1}(i\beta_n I - \mathcal{A}_1)U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0, \quad j = 1, 2,$$

isto é, valem em $L^2(0,L)$ as seguintes convegências:

$$\begin{aligned}
\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\rho_1\Phi^n - k(\phi_x^n+\psi^n)_x - \gamma_1(\Phi_x^n+\Psi^n)_x\right\} &\to 0, &(2.52)\\
\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\rho_2\Psi^n + k(\phi_x^n+\psi^n) + \gamma_1(\Phi_x^n+\Psi^n) - b\psi_{xx}^n - \gamma_2\Psi_{xx}^n\right\} &\to 0, &(2.53)\\
\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\psi_x^n - \Psi_x^n\right\} &\to 0, &(2.54)\\
\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\phi_x^n - \Phi_x^n + i\beta_n\psi^n - \Psi^n\right\} &\to 0. &(2.55)
\end{aligned}$$

Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_1$ de $\dfrac{1}{\beta_n}(i\beta_n I - \mathcal{A}_1)U_n$ com U_n, temos que

$$\begin{aligned}
Re\left\langle \frac{1}{\beta_n}i\beta_n U_n - \frac{1}{\beta_n}\mathcal{A}_1U_n, U_n\right\rangle_{\mathcal{H}_1} &= -\frac{1}{\beta_n}Re\langle\mathcal{A}_1U_n,U_n\rangle_{\mathcal{H}_1}\\
&= \gamma_1\int_0^L|\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Phi_x^n+\Psi^n)|^2dx + \gamma_2\int_0^L|\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi_x^n|^2dx \to 0,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Phi_x^n+\Psi^n)\to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Psi_x^n)\to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{2.56}$$

o que implica, pela desigualdade de Poincaré, que

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Psi^n)\to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Temos também que

$$\|\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Phi_x^n)\|_{L^2} \le \|\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Phi_x^n+\Psi^n)\|_{L^2} + \|\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Psi^n)\|_{L^2} \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e logo, novamente pela desigualdade de Poincaré,

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Phi^n)\to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de $\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\psi_x^n - \Psi_x^n\right\}$ por ψ_x^n, obtemos, por (2.54),

$$i\|\psi_x^n\|_{L^2}^2 - \int_0^L[\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi_x^n][\beta_n^{-\frac{1}{2}}\overline{\psi_x^n}]dx \quad\to\quad 0,$$

e como

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Psi_x^n)\to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

temos que

$$\|\psi_x^n\|_{L^2}^2 \quad \to \quad 0,$$

e logo, pela desigualdade de Poincaré

$$\|\psi^n\|_{L^2}^2 \quad \to \quad 0.$$

Usando as convergências acima em (2.55), podemos concluir que

$$\phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e portanto, temos que

$$\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

O produto interno em $L^2(0,L)$ de (2.52) com Φ^n, e de (2.53) com Ψ^n, implicam que

$$\begin{aligned} & i\rho_1\|\Phi^n\|_{L^2}^2 + k\beta_n^{-1}\|\phi_x^n + \psi^n\|_{L^2}^2 + \gamma_1\beta_n^{-1}\|\Phi_x^n + \Psi^n\|_{L^2}^2 + i\beta_n^{-1}\rho_2\|\Psi^n\|_{L^2}^2 \\ & + b\int_0^L \beta_n^{-1}\psi_x^n\overline{\Psi_x^n}dx + \gamma_2\beta_n^{-1}\|\Psi_x^n\|_{L^2}^2 \to 0, \end{aligned}$$

e portanto , pelas convergências já encontradas, temos que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Logo, mostramos que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

o que contradiz o fato de que $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$.
Portanto,

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty}\|\beta(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}\| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Concluímos, então, que o semigrupo é analítico. □

Corolário 2.2.1.1 *O semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}_1$, dado em (2.15), com $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$, é exponencialmente estável.*

Corolário 2.2.1.2 *O semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}_1$, dado em (2.15), com $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$, possui a propriedade da estabilidade linear.*

2.2.2 Dissipação no sistema

Nesta subseção, vamos analisar o comportamento assintótico do sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) && (2.57)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), && (2.58) \end{aligned}$$

em que $\gamma_1' > 0$ e $\gamma_2' > 0$, com condições iniciais

$$\phi(x,0)=\phi_0(x),\quad \phi_t(x,0)=\phi_1(x),\quad \psi(x,0)=\psi_0(x),\quad \psi_t(x,0)=\phi_1(x),\quad x\in(0,L),$$

e condições de contorno mistas do tipo Dirichlet-Neumann.
Nesse caso, obtemos um resultado similiar ao obtido na subseção anterior:

Teorema 2.2.2 *O semigrupo gerado pelo operador $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ dado em (2.30), com $\gamma_1' > 0$ e $\gamma_2' > 0$, é analítico.*

Demonstração: A demonstração seguirá os mesmos passos da demonstração do teorema anterior.
Vamos mostrar que

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_1),$$

e

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty}\|\beta(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}\| < \infty,\quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Se

$$i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_1).$$

Como $0\in\varrho(\mathcal{A}_1)$, então pelo lema 3, existe $w\in\mathbb{R}$ com

$$\|\mathcal{A}_1^{-1}\| \le |w| < \infty,$$

tal que

$$\{i\beta;|\beta|<|w|\}\subset\rho(\widetilde{\mathcal{A}}_1) \text{ e } sup\{\|(i\beta I-\widetilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}\|;|\beta|<|w|\}=\infty.$$

Logo, devem existir sequências $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to w$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |w|$ e $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_1)y_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

ou seja, valem as seguintes convergências em $L^2(0, L)$:

$$i\beta_n\rho_1\Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n)_x - \gamma_1'\Phi_{xx}^n \quad \to \quad 0 \tag{2.59}$$

$$i\beta_n\rho_2\Psi^n + k(\phi_x^n + \psi^n) - b\psi_{xx}^n - \gamma_2'\Psi_{xx}^n \quad \to \quad 0 \tag{2.60}$$

$$i\beta_n\psi_x^n - \Psi_x^n \quad \to \quad 0 \tag{2.61}$$

$$i\beta_n\phi_x^n - \Phi_x^n + i\beta_n\psi^n - \Psi^n \quad \to \quad 0, \tag{2.62}$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n)^t$.
Tomando o produto interno de $(i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_1)y_n$ com y_n em $\mathcal{H}_1$, obtemos

$$Re\left\langle i\beta_n y_n - \widetilde{\mathcal{A}}_1 y_n, y_n\right\rangle_{\mathcal{H}_1} = -Re\left\langle \widetilde{\mathcal{A}}_1 y_n, y_n\right\rangle_{\mathcal{H}_1} = \gamma_1' \int_0^L |\Phi_x^n|^2 dx + \gamma_2' \int_0^L |\Psi_x^n|^2 dx \to 0,$$

de onde segue que,

$$\Phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L),$$

e

$$\Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Usando a desigualdade de Poincaré, obtemos, também, que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L),$$

e

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

As convergências acima, juntamente com (2.62), implicam que

$$\phi_x^n + \psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

De (2.61), segue que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Portanto, $\|y_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que não pode acontecer, pois, por hipótese, $\|y_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Assim, provamos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$.

Para completarmos a demonstração, devemos mostrar que

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty}\|\beta(i\beta I-\widetilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}\|<\infty,\quad \beta\in\mathbb{R},\quad j=1,2. \tag{2.63}$$

Novamente, usaremos argumento por contradição.
Suponhamos que (2.63) não seja verdadeiro. Então, existem sequências $(U_n)_n\subset\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$, com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1}=1$, $(\beta_n)_n\subset\mathbb{R}$ com $\beta_n\to\infty$, tais que

$$\lim_{n\to\infty}\|\beta_n^{-1}(i\beta_n I-\widetilde{\mathcal{A}}_1)U_n\|_{\mathcal{H}_1}\to 0,$$

isto é, seguem em $L^2(0,L)$ as seguintes convegências:

$$\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\rho_1\Phi^n-k(\phi_x^n+\psi^n)_x-\gamma_1'\Phi_{xx}^n\right\}\ \to\ 0, \tag{2.64}$$

$$\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\rho_2\Psi^n+k(\phi_x^n+\psi^n)-b\psi_{xx}^n-\gamma_2'\Psi_{xx}^n\right\}\ \to\ 0, \tag{2.65}$$

$$\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\psi_x^n-\Psi_x^n\right\}\ \to\ 0, \tag{2.66}$$

$$\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\phi_x^n-\Phi_x^n+i\beta_n\psi^n-\Psi^n\right\}\ \to\ 0. \tag{2.67}$$

Do produto interno em $\mathcal{H}_1$ de $\dfrac{1}{\beta_n}(i\beta_n I-\widetilde{\mathcal{A}}_1)U_n$ por U_n segue que

$$\begin{aligned}Re\left\langle\frac{1}{\beta_n}i\beta_nU_n-\frac{1}{\beta_n}\widetilde{\mathcal{A}}_1U_n,U_n\right\rangle_{\mathcal{H}_1} &= -\frac{1}{\beta_n}Re\left\langle\widetilde{\mathcal{A}}_1U_n,U_n\right\rangle_{\mathcal{H}_1}\\ &= \gamma_1'\int_0^L|\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Phi_x^n|^2dx+\gamma_2'\int_0^L|\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi_x^n|^2dx\to 0,\end{aligned}$$

portanto,

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Phi_x^n\to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi_x^n\to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{2.68}$$

o que implica, pela desigualdade de Poincaré, que

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Phi^n\to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi^n.\to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Assim, pela convergência (2.67), obtemos que

$$\phi_x^n + \psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Das convergências (2.68) e (2.66) segue que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Tomando o produto interno em $L^2(0, L)$ de Φ^n por

$$\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\rho_1\Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n)_x - \gamma_1'\Phi_{xx}^n\right\},$$

obtemos, por (2.64),

$$i\rho_1\|\Phi^n\|_{L^2}^2 + k\int_0^L \frac{1}{\beta_n^{1/2}}(\phi_x^n + \psi^n)\left[\frac{1}{\beta_n^{1/2}}\overline{\Phi_x^n}\right]\,dx + \gamma_1'\frac{1}{\beta_n}\|\Phi_x^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

portanto, usando as convergências anteriormente encontradas, temos que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Já o produto interno em $L^2(0, L)$ de Ψ^n por

$$\beta_n^{-1}\left\{i\beta_n\rho_2\Psi^n + k(\phi_x^n + \psi^n) - b\psi_{xx}^n - \gamma_2'\Psi_{xx}^n\right\}$$

implica, por (2.65),

$$i\rho_2\|\Psi^n\|_{L^2}^2 + \frac{k}{\beta_n^{1/2}}\int_0^L(\phi_x^n + \psi^n)\left[\frac{1}{\beta_n^{1/2}}\overline{\Psi^n}\right]\,dx + \frac{b}{\beta_n^{1/2}}\int_0^L\psi_x^n\left[\frac{1}{\beta_n^{1/2}}\overline{\Psi_x^n}\right]\,dx + \frac{\gamma_2'}{\beta_n}\|\Psi_x^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

portanto, podemos concluir que,

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Portanto, acabamos de mostrar que $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0$ quando $n \to 0$, o que contradiz o fato de que $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Logo, temos que

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty}\|\beta(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}\| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Assim, acabamos de mostrar que o semigrupo é analítico. $\square$

Corolário 2.2.2.1 *O semigrupo gerado pelo operador* $\widetilde{\mathcal{A}}_1$*, dado em* (2.30)*, com* $\gamma_1' > 0$ *e* $\gamma_2' > 0$*, é exponencialmente estável.*

Corolário 2.2.2.2 *O semigrupo gerado pelo operador* $\widetilde{\mathcal{A}}_1$*, dado em* (2.30)*, com* $\gamma_1' > 0$ *e* $\gamma_2' > 0$*, possui a propriedade da estabilidade linear.*

2.3 Viscoelasticidade agindo apenas na deformação por corte

Vimos, na seção anterior, que o sistema de vigas de Timoshenko viscoelástico, com dissipao presente tanto na tensão por corte, quanto no momento fletor, é forte o suficiente para estabilizar todo o sistema de forma analítica, em particular, o sistema é exponencialmente estável e sua taxa ótima de decaimento é dada pela cota superior do espectro do operador correspondente, já que, neste caso, o semigrupo possui a propriedade da estabilidade linear.

Na presente seção, nosso objetivo é estudar o comportamento assintótico das soluções do sistema de vigas de Timoshenko com viscosidade elástica parcial, presente somente no estresse cortante. Novamente iremos investigar o caso em que a dissipação aparece nas leis constitutivas do modelos e o caso em que a dissipação é acrescentada diretamente na primeira equação do sistema.

Veremos que, nos dois casos investigados, independentemente dos coeficientes, o sistema não possui estabilidade exponencial, para condições de contorno mistas do tipo Dirichlet-Neumann. Contudo, o sistema é polinomialmente estável, tanto para condições de contorno Dirichlet-Neumann. Finalmente, como principal resultado desta seção, mostraremos que as taxas de decaimento polinomial encontradas, que são a mesma em ambos os casos, são as taxas ótimas, no sentido de que não podem ser melhoradas sobre os domínios dos respectivos operadores.

Novamente, para simplificar o texto, empregaremos o mesmo símbolo C para diferentes constantes positivas, e muitas vezes faremos uso sem menção explícita das desigualdades de Poincaré, de Young e de Cauchy-Schwarz.

2.3.1 Dissipação nas leis constitutivas

Acrescentando uma viscosidade elástica do tipo Kelvin-Voight $\gamma_1(\phi_x+\psi)_{xt}$, com $\gamma_1 > 0$, na deformação por corte, obtemos, pelas leis constitutivas do modelo de vigas de Timoshenko, o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi)_x - \gamma_1(\phi_x+\psi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) + \gamma_1(\phi_x+\psi)_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty).
\end{aligned}$$

Foi provado, na seção 2.1, que o sistema é dissipativo e seu operador diferencial correspondente $\mathcal{A}_1$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

Falta de estabilidade exponencial

Pelo teorema 1.3.2, o semigrupo $S(t) = e^{t\mathcal{A}_1}$ será exponencialmente estável se, e somente se,

$$\varrho(\mathcal{A}_1) \supset \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$$

e

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}\| < \infty.$$

Assim, para que o semigrupo $S(t) = e^{t\mathcal{A}_j}$ não seja exponencialmente estável, é suficiente que existam uma sequência numérica $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$$

e sequências $(U_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_j$ limitada em $\mathcal{H}_j$, tais que

$$(i\lambda_n - \mathcal{A}_1)U_n = F_n \tag{2.69}$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = \infty.$$

Isto significa que devemos mostrar que as funções U_n formam uma sequência ilimitada, enquanto $(F_n)_n$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}_j$.
Aqui, consideraremos condições iniciais

$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \phi_1(x) \text{ em } (0,L),$$

e condições de contorno mistas Dirichlet-Neumann

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = 0 \text{ em } (0,\infty).$$

Teorema 2.3.1 *O semigrupo* $\left\{e^{t\mathcal{A}_1}\right\}_{t\geq 0}$, *gerado pelo operador* $\mathcal{A}_1$ *do sistema*

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1(\phi_x + \psi)_{xt} = 0 \; em \; (0,L) \times (0,\infty) \tag{2.70}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma_1(\phi_x + \psi)_t = 0 \; em \; (0,L) \times (0,\infty), \tag{2.71}$$

com condições de contorno Dirichlet-Neumann, dado em (2.15), *não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Para este caso, escolhemos funções F_n, dadas por

$$F_n = (0, 0, 0, \rho_2^{-1} \cos \beta_n x)^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$.
A sequência $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_1$ escolhida é limitada em $\mathcal{H}_1$. De fato,

$$\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_1} = \frac{1}{\rho_2}\frac{L}{2}.$$

A solução $U_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n)^t$ de $(i\lambda_n - \mathcal{A}_1)U_n = F_n$ deve satisfazer

$$\begin{aligned}
i\lambda_n \phi^n - \Phi^n &= 0 && (2.72)\\
i\lambda_n \Phi^n - \frac{k}{\rho_1}(\phi^n_x + \psi^n)_x - \frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi^n_x + \Psi^n)_x &= 0 && (2.73)\\
i\lambda_n \psi^n - \Psi^n &= 0 && (2.74)\\
i\lambda_n \Psi^n + \frac{k}{\rho_2}(\phi^n_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2}\psi^n_{xx} + \frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi^n_x + \Psi^n) &= \rho_2^{-1}\cos \beta_n x. && (2.75)
\end{aligned}$$

De (2.72) e (2.74) segue que

$$i\lambda_n \phi^n = \Phi^n,$$

$$i\lambda_n \psi^n = \Psi^n.$$

Substituindo as últimas igualdades em (2.73) e (2.75), obtemos que

$$\begin{aligned}
-\lambda_n^2 \phi^n - \frac{k}{\rho_1}(\phi^n_x + \psi^n)_x - \frac{i\lambda_n\gamma_1}{\rho_1}(\phi^n_{xx} + \psi^n_x) &= 0 && (2.76)\\
-\lambda^2 \psi^n + \frac{k}{\rho_2}(\phi^n_x + \psi^n) - \frac{b}{\rho_2}\psi^n_{xx} + \frac{i\lambda_n\gamma_1}{\rho_2}(\phi_x + \psi) &= \rho_2^{-1}\cos \beta_n x. && (2.77)
\end{aligned}$$

Devido as condições de contorno consideradas, as funções

$$\phi^n(x) = A_n \sin \beta_n x, \qquad \psi^n(x) = B_n \cos \beta_n x \tag{2.78}$$

resolvem o sistema (2.76)-(2.76) para valores apropriados de A_n e B_n.
Temos que $\phi^n(x) = A_n \sin \beta_n x$, $\psi^n(x) = B_n \cos \beta_n x$ formam solução do sistema acima, se A_n e B_n satisfazem

$$\begin{aligned}
\left(-\lambda_n^2 \rho_1 + k\beta_n^2 + i\gamma_1\lambda_n\beta_n^2\right) A_n + (k\beta_n + i\gamma_1\lambda_n\beta_n)B_n &= 0 && (2.79)\\
(k\beta_n + i\gamma_1\lambda_n\beta_n)A_n + \left(-\lambda_n^2 \rho_2 + b\beta_n^2 + i\gamma_1\lambda_n + k\right) B_n &= 1. && (2.80)
\end{aligned}$$

Somando a equação resultante do produto de $-\beta_n$ por (2.80) com equação (2.79), obtemos um sistema equivalente a (2.79)-(2.80), dado por

$$\begin{aligned} \left(-\lambda_n^2\rho_1\right) A_n + (\lambda_n^2\rho_2\beta_n - b\beta_n^3)B_n &= -\beta_n \\ (k\beta_n + i\gamma_1\lambda_n\beta_n)A_n + \left(-\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 + i\gamma_1\lambda_n + k\right) B_n &= 1. \end{aligned}$$

Introduzindo as notações

$$q(\lambda_n) = i\gamma_1\lambda_n + k, \qquad p(\lambda_n) = -\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2,$$

o sistema anterior pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \left(-\lambda_n^2\rho_1\right) A_n + \beta_n p(\lambda_n)B_n &= -\beta_n \\ \beta_n q(\lambda_n)A_n + \left(-p(\lambda_n) + q(\lambda_n)\right) B_n &= 1. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{-\beta_n q}{\rho_1\lambda_n^2 p - \rho_1\lambda_n^2 q - \beta_n^2 pq} \\ B_n &= \frac{-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 q}{\rho_1\lambda_n^2 p - \rho_1\lambda_n^2 q - \beta_n^2 pq}. \end{aligned}$$

Tomamos

$$\lambda_n = \frac{b}{\rho_2}\beta_n^2 - \frac{b\rho_1}{\rho_2^2} \quad \Rightarrow \quad p(\lambda_n) = -\frac{b\rho_1}{\rho_2}.$$

Sob estas condições, temos que

$$\begin{aligned} \rho_1\lambda_n^2 p - \rho_1\lambda_n^2 q - \beta_n^2 pq &= -\lambda_n^2\frac{b\rho_1^2}{\rho_2} - (\rho_1\lambda_n^2 + \beta_n^2 p)q \\ &= -\lambda_n^2\frac{b\rho_1^2}{\rho_2} - \left(\frac{b\rho_1}{\rho_2}\beta_n^2 - \frac{b\rho_1^2}{\rho_2^2} - \beta_n^2\frac{b\rho_1}{\rho_2}\right) \\ &= \frac{b\rho_1^2}{\rho_2}\left(-\lambda_n^2 + \frac{1}{\rho_2}q\right) \approx -\frac{b^2\rho_1^2}{\rho_2^2}\beta_n^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos que,

$$B_n = \frac{-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 q}{\rho_1\lambda_n^2 p - \rho_1\lambda_n^2 q - \beta_n^2 pq} \approx \frac{i\gamma_1\sqrt{b}\beta_n^3}{\frac{b^2\rho_1^2}{\rho_2^{\frac{3}{2}}}\beta_n^2} = i\frac{\gamma_1\rho_2^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}\rho_1^2}\beta_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|U_n\|^2_{\mathcal{H}_1} &\geq \rho_2 \|\Psi^n\|^2_{L^2} \\ &= \rho_2 |i\lambda_n B_n|^2 \|\cos\beta_n x\|^2_{L^2} \\ &\geq C\beta_n^4 \frac{L}{2}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Calculando o limite quando n tende ao infinito, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = \infty.$$

Logo, o semigrupo não é exponencialmente estável. □

Estabilidade polinomial

Apesar da dissipação, presente no sistema de vigas de Timoshenko viscoelástico

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1(\phi_x + \psi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma_1(\phi_x + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

não ser forte o suficiente para estabilizar o sistema de forma exponencial, ela é capaz de estabilizar o sistema de forma polinomial com normas não uniformes. Mais precisamente, mostraremos a existência de constantes $C > 0$ e $\delta > 0$, tais que

$$\|e^{\mathcal{A}_1 t}U\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^\delta}\|U\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)}, \qquad \forall \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$$

Consideraremos novamente condições de contorno Dirichlet-Neumann, e faremos uso do teorema 1.3.4, que caracteriza a estabilidade polinomial de semigrupos C_0 limitados sobre espaços de Hilbert.

Lema 5 *Seja $\mathcal{A}_1$, o operador diferencial do sistema de Timoshenko*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1(\phi_x + \psi)_{xt} &= 0 \textit{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma_1(\phi_x + \psi)_t &= 0 \textit{ em } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

dado em (2.15), para condições de contorno Dirichlet-Neumann.
Então

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1).$$

Demonstração: Faremos uso de argumentos de contradição.
Suponhamos que $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_1)$. Como $0 \in \varrho(\mathcal{A}_1)$, então pelo lema 3, existe $w \in \mathbb{R}$ com

$\|\mathcal{A}_1^{-1}\| \leq |w| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \varrho(\mathcal{A}_1),$$

e

$$sup\{\|(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}\|; |\beta| < |w|\} = \infty.$$

Segue, então, que existem sequência numérica $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$, com $\beta_n \to w$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |w|$ e sequência de funções $(U_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$, para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_1)U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} i\beta_n\rho_1\Phi^n - k(\phi^n_x + \psi^n)_x - \gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n)_x &\to 0 \text{ em } L^2(0,L) && (2.82)\\ i\beta_n\rho_2\Psi^n + k(\phi^n_x + \psi^n) - b\psi^n_{xx} + \frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi^n_x + \Psi^n) &\to 0 \text{ em } L^2(0,L) && (2.83)\\ i\beta_n\psi^n_x - \Psi^n_x &\to 0 \text{ em } L^2(0,L) && (2.84)\\ i\beta_n\phi^n_x - \Phi^n_x + i\beta_n\psi^n - \Psi^n &\to 0 \text{ em } L^2(0,L), && (2.85) \end{aligned}$$

em que $U_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n)^t$.
Tomando o produto interno de $(i\beta_n I - \mathcal{A}_1)U_n$ com U_n em $\mathcal{H}_1$, obtemos que

$$Re\langle i\beta_n U_n - \mathcal{A}_1 U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}_1} = -Re\langle \mathcal{A}_1 U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}_1} = \gamma_1\int_0^L |\Phi^n_x + \Psi^n|^2 dx \to 0,$$

portanto,

$$\Phi^n_x + \Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{2.86}$$

De (2.86) e (2.85), obtemos que

$$\phi^n_x + \psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Do produto de $\overline{\Phi^n}$ pela expressão

$$i\beta_n\rho_1\Phi^n - k(\phi^n_x + \psi^n)_x - \gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n)_x$$

segue, pela convergência (2.82), que

$$i\beta_n\rho_1\|\Phi^n\|^2 + k\int_0^L (\phi^n_x + \psi^n)\overline{\Phi^n_x}\, dx + \gamma_1\int_0^L (\Phi^n_x + \Psi^n)\overline{\Phi^n_x}\, dx \to 0,$$

portanto,

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Como $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $(\psi_x^n)_n$ é limitada uniformemente em $L^2(0, L)$, e portanto, por (2.84), a sequência $(\Psi_x^n)_n$ também é limitada uniformemente em $L^2(0, L)$.
Assim, multiplicando (2.85) por $\overline{\Psi^n}$ e integrando de 0 a L, concluímos que

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Finalmente, do produto interno em $L^2(0, L)$ de ψ por

$$i\beta_n\rho_2\Psi^n + k(\phi_x^n + \psi^n) - b\psi_{xx}^n + \frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi_x^n + \Psi^n),$$

obtemos, por (2.83), que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Assim, acabamos de mostrar que $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que contradiz o fato de $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$.
Portanto, $i\mathbb{R} \in \varrho(\mathcal{A}_1)$.
□

Teorema 2.3.2 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$. *Então, a solução do problema*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1(\phi_x + \psi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma_1(\phi_x + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_1}U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)}. \tag{2.87}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1^\alpha)$, *então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_1}U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1^\alpha)}. \tag{2.88}$$

Demonstração: Pelo teorema 1.3.4, devemos mostrar que

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1),$$

e

$$\sup_{|\beta|\geq 1} \frac{1}{\beta^2}\|(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}\| \leq C, \text{ para alguma constante } C > 0.$$

Já provamos, no lema anterior, que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1)$.
Para completar a demonstração, devemos verificar a existência de constante positiva C, independente de $\beta \in \mathbb{R}$, com $|\beta| \geq 1$, e $F \in \mathcal{H}_1$ tais que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_1} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_1}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1.$$

Sejam $F \in \mathcal{H}_1$ e $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi)^t \in \mathcal{A}_1$, tais que

$$i\beta U - \mathcal{A}_1 U = F,$$

então, em termos das componentes, temos

$$\begin{aligned} i\beta\phi - \Phi &= f_1 && (2.89)\\ i\beta\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1(\Phi_x + \Psi)_x &= f_2 && (2.90)\\ i\beta\psi - \Psi &= f_3 && (2.91)\\ i\beta\rho_2\Psi + k(\phi_x + \psi) + \gamma_1(\Phi_x + \Psi) - b\psi_{xx} &= f_4 && (2.92)\end{aligned}$$

Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_1$ de $i\beta U - \mathcal{A}_1 U$ por U, temos, pela propriedade dissipativa do sistema, que

$$\|\Phi_x + \Psi\|^2_{L^2} = \gamma_1^{-1} Re\langle i\beta U - \mathcal{A}_1 U, U\rangle_{\mathcal{H}_1} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{2.93}$$

Das equações (2.89) e (2.91), obtemos

$$i\beta(\phi_x + \psi) - (\Phi_x + \Psi) = f_{1x} + f_3,$$

o que implica

$$\beta^2\|\phi_x + \psi\|^2_{L^2} \leq C\|\Phi_x + \Psi\|^2_{L^2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_1},$$

e logo, usando a estimativa (2.93), obtemos que

$$\beta^2\|\phi_x + \psi\|^2_{L^2} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_1}. \tag{2.94}$$

Agora, tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de (2.90) por Φ, temos que

$$i\beta\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + k\int_0^L (\phi_x+\psi)(\overline{\Phi_x})\,dx + \int_0^L \gamma_1(\Phi_x+\Psi)(\overline{\Phi_x})\,dx = \int_0^L f_2(\overline{\Phi})\,dx,$$

assim,

$$\begin{aligned} i\beta\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 &= -k\int_0^L (\phi_x+\psi)(\overline{\Phi_x+\Psi})\,dx + k\int_0^L (\phi_x+\psi)(\overline{\Psi})\,dx \\ &\quad -\gamma_1\|\Phi_x+\Psi\|^2 + \int_0^L \gamma_1(\Phi_x+\Psi)(\overline{\Psi})\,dx + \int_0^L f_2(\overline{\Phi})\,dx. \end{aligned}$$

Tomando a parte imaginária da equação acima, e usando as estimativas (2.93) e (2.94), obtemos que

$$\rho_1\beta\|\Phi\|_{L^2}^2 \le \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall\epsilon>0.$$

Integrando o produto de (2.92) por $\overline{\psi}$, temos que

$$i\beta\rho_2\int_0^L \Psi\overline{\psi}\,dx + k\int_0^L (\phi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx + \gamma_1\int_0^L (\Phi_x+\Psi)\overline{\psi}\,dx + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 = \int_0^L f_4\overline{\psi}\,dx,$$

logo, por (2.91), obtemos

$$\begin{aligned} -\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 - \rho_2\int_0^L \Psi\overline{f_3}\,dx + k\int_0^L (\phi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx \\ +\gamma_1\int_0^L (\Phi_x+\Psi)\overline{\psi}\,dx + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 = \int_0^L f_4\overline{\psi}\,dx, \end{aligned}$$

o que implica

$$\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 \le C\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + C\|\psi_x\|_{\mathcal{H}_1}^2.$$

Por outro lado, da equação

$$i\beta(\phi_x+\psi) - (\Phi_x+\Psi) = f_{1x} + f_3$$

segue que

$$\int_0^x \Psi\,dx = i\beta\int_0^x (\phi_x+\psi)\,dx - \int_0^x \Phi_x\,dx - \int_0^x (f_{1x}+f_3)\,dx$$

ou seja,

$$|\int_0^x \Psi dx| \le C\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}} + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Integrando a equação (2.92), obtemos

$$b|\psi_x(x)| \leq \int_0^x |f_4|dx + \beta\rho_2|\int_0^x \Psi dx| + k\int_0^x |\phi_x + \psi|dx + \gamma_1\int_0^x |\Phi_x + \Psi|dx,$$

e logo,

$$b|\psi_x(x)| \leq C\beta\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}} + C\beta_n\|F\|_{\mathcal{H}_1},$$

o que implica

$$b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + C\beta^2\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.$$

Assim, mostramos que

$$\frac{1}{\beta^4}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_1} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_1}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1.$$

Portanto, a solução do problema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi)_x - \gamma_1(\phi_x+\psi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) + \gamma_1(\phi_x+\psi)_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned}$$

decai polinomialmente a zero, e

$$\|e^{t\mathcal{A}_j}U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)}, \qquad U_0 = (\phi_0,\phi_1,\phi_0,\psi_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1).$$

□

Otimalidade

Na subseção anterior mostramos que o sistemas de vigas de Timoshenko com viscosidade elástica parcial presente apenas no estresse por corte, inserida nas leis constitutivas do modelo, decai polinomialmente a uma taxa de $t^{-\frac{1}{2}}$, isto é, mostramos que

$$\|e^{t\mathcal{A}_1}U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)}, \tag{2.95}$$

para constante positiva C e $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$.
Nesta subseção, vamos mostrar que a taxa de decaimento polinomial encontrada é a taxa ótima de decaimento.
É importante notar que, se $S(t) = e^{tB}$ é um semigrupo C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert H satisfazendo

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{C}{t^l} \|U_0\|_{D(B)},$$

para algum $l > 0$, então $S(t)$ também satisfaz

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{C_k}{t^{lk}} \|U_0\|_{D(B^k)}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

A desigualdade acima nos diz que a taxa de decaimento polinomial depende da regularidade dos dados iniciais. Por consequência, a otimalidade do decaimento depende também da regularidade.
Uma vez fixado o domínio $D(B^k)$, vamos provar que a taxa de lk não pode ser melhorada para os dados iniciais sobre este domínio.
A relação (ii) $\Rightarrow$ (i) do teorema 1.3.4 nos diz que, se a taxa de decaimento $\frac{1}{2}$ sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty)$, encontrada no teorema 2.3.2, puder ser melhorada, isto é, se existir $\epsilon > 0$ tal que

$$\left\|e^{t\mathcal{A}_1}U_0\right\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\epsilon}}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)},$$

então teremos

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}} \left\|(i\lambda I - \mathcal{A}_1)^{-1}\right\| \leq C_\epsilon, \ \forall |\lambda| \geq 1.$$

Portanto, para mostrar a otimalidade da taxa de decaimento encontrada, é suficiente mostrar que existem sequências de números complexos $|\lambda_n| \geq 1$, funções $F_n \in \mathcal{H}_1$ e soluções $U_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ de

$$\lambda_n U_n - \mathcal{A}_1 U_n = F_n,$$

tais que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}} \left\|(i\lambda_n I - \mathcal{A}_1)^{-1} F_n\right\|_{\mathcal{H}_1} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \ \forall \epsilon > 0.$$

Teorema 2.3.3 *A taxa de decaimento polinomial encontrada no teorema* 2.3.1 *é a taxa ótima.*

Demonstração: Sejam $\lambda_n = \sqrt{\dfrac{b}{\rho_2}\beta_n^2 - \dfrac{b\rho_1}{\rho_2^2}}$, com $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, e

$$\begin{aligned}
\phi^n &= A_n \sin(\beta_n x) \\
\psi^n &= B_n \cos(\beta_n x) \\
\Phi^n &= i\lambda_n \phi^n \\
\Psi^n &= i\lambda_n \psi^n,
\end{aligned}$$

em que A_n e B_n são dados por

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{-\beta_n q}{\rho_1\lambda_n^2 p - \rho_1\lambda_n^2 q - \beta_n^2 pq} \\
B_n &= \frac{-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 q}{\rho_1\lambda_n^2 p - \rho_1\lambda_n^2 q - \beta_n^2 pq},
\end{aligned}$$

e

$$q(\lambda_n) = i\gamma_1\lambda_n + k, \qquad p(\lambda_n) = -\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 = -\frac{b\rho_1}{\rho_2},$$

Da demonstração do teorema 2.3.1, temos que

$$U_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$$

é solução da equação

$$i\lambda_n U_n - \mathcal{A}_1 U_n = F_n,$$

em que $F_n = (0, 0, \rho_2^{-1}\cos(\beta_n x), 0)' \in \mathcal{H}_1$, e além disso, vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\|U_n\|_{\mathcal{H}_1}^2 &\geq \rho_2 \|\Psi^n\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_2 |i\lambda_n B_n|^2 \|\cos\beta_n x\|_{L^2}^2 \\
&\geq C\beta_n^4 \frac{L}{2} \\
&\geq C\lambda_n^4 \frac{L}{2}.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Seja $\epsilon > 0$. Da desigualdade acima, temos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\|U_n\|_{\mathcal{H}_1}^2 \geq C\lambda_n^{2\epsilon}\frac{L}{2}.$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\|(i\lambda_n I - \mathcal{A}_1)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_1} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Portanto, a taxa de decaimento polinomial $t^{-\frac{1}{2}}$ não pode ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$. $\square$

2.3.2 Dissipação viscosa parcial no sistema

Nas seções anteriores, estudamos o problema de vigas de Timoshenko viscoelásticas em que a dissipação foi acrescentada nas leis constitutivas do sistema. Nesta seção, investigaremos o comportamento assintótico das soluções do sistema de Timoshenko com uma dissipação viscoelástica acrescentada diretamente na primeira equação do sistema.
Estudaremos, então, o sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty). \end{aligned}$$

Veremos que, considerando condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann, esse sistema não é exponencialmente estável, porém, apresenta estabilidade polinomial.
Concluiremos a seção mostrando que a taxa de decaimento polinomial encontrada é a melhor possível, no sentido de que não pode ser melhorada sobre o domínio do operador, e é a mesma encontrada para o sistema com dissipação viscoelástica introduzida nas leis constitutivas do modelo.
A demonstrações serão feitas com argumentos análogos aos usados na seção anterior, e baseadas nos mesmo teoremas.

Falta de estabilidade exponencial

Consideremos o sistema

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1'\phi_{xxt} = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \tag{2.97}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \tag{2.98}$$

com condições de contorno Dirichlet-Neumann

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = 0, \quad \forall t > 0,$$

e condições iniciais

$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \phi_1(x), \text{ para } x \in (0,L).$$

Sob estas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.4 *Seja* (ϕ, Φ, ψ, Ψ) *a solução do problema determinado pelo sistema* (2.97)–(2.98), *com condições de fronteira mista do tipo Dirichlet-Neumann e condições iniciais* $\phi(x,0) = \phi_0(x)$, $\phi_t(x,0) = \phi_1(x)$, $\psi(x,0) = \psi_0(x)$, $\psi_t(x,0) = \phi_1(x)$.
Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L \psi_0(x)dx = \int_0^L \psi_1(x)dx = 0$, *então o semigrupo gerado pelo operador* $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ *associado ao sistema, dado em* (2.30), *não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Seja

$$F_n = (0, 0, 0, \rho_2^{-1} \cos \beta_n x)^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$.
A sequência $(F_n) \subset \mathcal{H}_1$ dada acima é limitada em $\mathcal{H}_1$. De fato, temos que

$$\|F_n\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \frac{1}{\rho_2}\frac{L}{2}.$$

Se $U_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n)^t$ é solução de

$$(i\lambda_n - \mathcal{A}_1)U_n = F_n,$$

então as funções ϕ^n, Φ^n, ψ^n e Ψ^n devem satisfazer

$$i\lambda_n \phi^n - \Phi^n = 0 \tag{2.99}$$
$$i\lambda_n \rho_1 \Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n)_x - \gamma_1' \Phi_{xx}^n = 0 \tag{2.100}$$
$$i\lambda_n \psi^n - \Psi^n = 0 \tag{2.101}$$
$$i\lambda_n \rho_2 \Psi^n + k(\phi_x^n + \psi) - b\psi_{xx}^n = \rho_2^{-1} \cos \beta_n x. \tag{2.102}$$

Das equações (2.99) e (2.101), obtemos que

$$\begin{aligned} i\lambda_n \phi^n &= \Phi^n \\ i\lambda_n \psi^n &= \Psi^n, \end{aligned}$$

e logo, por (2.100) e (2.102), temos que

$$-\lambda_n^2 \phi^n - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x^n + \psi^n)_x - \frac{i\lambda_n \gamma_1'}{\rho_1}\phi_{xx}^n = 0 \tag{2.103}$$
$$-\lambda^2 \psi^n + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x^n + \psi^n) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}^n = \rho_2^{-1} \cos \beta_n x. \tag{2.104}$$

Como consideramos as condições de contorno Dirichlet-Neumann, as funções

$$\phi^n(x) = A_n \sin \beta_n x, \qquad \psi^n(x) = B_n \cos \beta_n x \tag{2.105}$$

são soluções das equações acima, para valores de A_n e B_n que satisfazem

$$\begin{aligned}(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + i\gamma_1'\lambda_n\beta_n^2)A_n + (k\beta_n)B_n &= 0 \quad (2.106)\\ (k\beta_n)A_n + (\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 + k)B_n &= 1. \quad (2.107)\end{aligned}$$

Escolhemos $\lambda_n = \sqrt{\dfrac{b\beta_n^2 + k}{\rho_2}}$.
Assim, de (2.107), obtemos que

$$A_n = \frac{1}{k\beta_n}.$$

Substituindo o valor de A_n encontrado em (2.106), temos que

$$B_n = \frac{\lambda_n^2 - k\beta_n^2}{k^2\beta_n^2} - i\frac{\gamma_1'\lambda_n}{k^2}. \quad (2.108)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|U_n\|_{\mathcal{H}_1}^2 &\geq \rho_2\|\Psi_n\|_{L^2}^2\\ &= \rho_2|i\lambda_n B_n|^2\frac{L}{2}\\ &\geq \frac{(\gamma_1')^2 L}{2\rho_2 k^4}(b\beta_n^2 + k)^2. \quad (2.109)\end{aligned}$$

Logo, Tomando o limite na estimativa acima, obtemos que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, o sistema não é exponencialmente estável. □

Estabilidade polinomial

Lema 6 *Seja $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ o operador associado ao problema*

$$\begin{aligned}\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty),\end{aligned}$$

para condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann.
Então

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_1).$$

Demonstração: De fato, se $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$, então pelo lema 3 existe $w \in \mathbb{R}$ com $\|\widetilde{\mathcal{A}}_1^{-1}\| \leq |w| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \rho(\widetilde{\mathcal{A}}_1) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}\|; |\beta| < |w|\} = \infty.$$

Portanto, nesse caso, existem sequência $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to w$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |w|$, e sequência $(U_n)_n \subset \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$ com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$, para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_1)U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty, \tag{2.110}$$

ou seja,

$$i\beta_n\rho_1\Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n)_x - \gamma_1'\Phi_{xx}^n \;\to\; 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{2.111}$$
$$i\beta_n\rho_2\Psi^n + k(\phi_x^n + \psi^n) - b\psi_{xx}^n \;\to\; 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{2.112}$$
$$i\beta_n\psi_x^n - \Psi_x^n \;\to\; 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{2.113}$$
$$i\beta_n\phi_x^n - \Phi_x^n + i\beta_n\psi^n - \Psi^n \;\to\; 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{2.114}$$

em que $U_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n)^t$.
Tomando o produto interno de $(i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_1)U_n$ com U_n em $\mathcal{H}_1$ e tomando a parte real, obtemos que

$$Re\Big\langle i\beta_n U_n - \widetilde{\mathcal{A}}_1 U_n, U_n\Big\rangle_{\mathcal{H}_1} = -Re\Big\langle \widetilde{\mathcal{A}}_1 U_n, U_n\Big\rangle_{\mathcal{H}_1} = \gamma_1'\int_0^L |\Phi_x^n|^2 dx.$$

Segue de (2.110) que

$$\gamma_1'\|\Phi_x^n\|_{L^2}^2 Re\Big\langle i\beta_n U_n - \widetilde{\mathcal{A}}_1 U_n, U_n\Big\rangle_{\mathcal{H}_1} \leq \|i\beta_n U_n - \widetilde{\mathcal{A}}_1 U_n\|_{\mathcal{H}_1}\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0,$$

isto é,

$$\Phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e logo, pela desigualdade de Poincaré,

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Da convergência (2.113) e pela desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$i\beta_n\psi^n - \Psi^n \;\to\; 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{2.115}$$

e portanto, de (2.114), podemos concluir que

$$\phi_x^n \quad \to \quad 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de (2.111) por ψ_x^n, obtemos que

$$\begin{aligned} i\beta_n \int_0^L \Phi^n \overline{\psi_x^n} dx + \int_0^L \frac{k}{\rho_1} \phi_x^n \overline{\psi_{xx}^n} dx + \int_0^L |\psi_x^n|^2 dx \\ + \frac{\gamma_1'}{\rho_1} \int_0^L \Phi_x^n \overline{\psi_{xx}^n} dx - \frac{1}{\rho_1} (k\phi_x^n \Phi_x^n) \overline{\psi_x^n} \mid_0^L \to 0. \end{aligned}$$

A convergência (2.112) nos diz que a sequência (ψ_{xx}^n) é limitada em $L^2(0,L)$, assim, de (2.116) segue que

$$\int_0^L |\psi_x^n|^2 dx \quad \to \quad 0.$$

Usando a desigualdade de Poincaré, temos que

$$\int_0^L |\psi^n|^2 dx \quad \to \quad 0. \tag{2.116}$$

Portanto,

$$\|\phi_x + \psi^n\|_{L^2} \leq \|\phi_x^n\|_{L^2} + \|\psi^n\|_{L^2} \quad \to \quad 0.$$

Finalmente, as convergêcias (2.116) e (2.115) implicam que

$$\Psi^n \quad \to \quad 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Portanto, mostramos que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = \left\{ \rho_1 \|\Phi^n\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi^n\|_{L^2}^2 + k\|\phi_x + \psi^n\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x^n\|_{L^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \to \quad 0, \tag{2.117}$$

o que contradiz o fato de $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$.
Portanto, $i\mathbb{R} \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$.
□

Teorema 2.3.5 *Se $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$, então, a solução do problema*

$$\rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x - \gamma_1' \phi_{xxt} \;=\; 0 \textit{ em } (0,L) \times (0,\infty) \tag{2.118}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) \;=\; 0 \textit{ em } (0,L) \times (0,\infty), \tag{2.119}$$

decai polinomialmente a zero. Mais precisamente, existe constante $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\widetilde{\mathcal{A}}_1}U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)}.$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1^\alpha)$*, então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\widetilde{\mathcal{A}}_1}U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1^\alpha)}.$$

Demonstração: Temos, pelo lema anterior, que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$.
Assim, para completar a demonstração da estabilidade polinomial do sistema, mostraremos que existe constante positiva C independente de $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \geq 1$ e $F \in \mathcal{H}_1$ tal que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_1} \leq C\,\|F\|_{\mathcal{H}_1}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1.$$

Sejam $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^t \in \mathcal{H}_1$ e $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$ tais que

$$i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_1 U = F,$$

que em termos das suas componentes, é dada por

$$i\beta\phi - \Phi = f_1 \tag{2.120}$$
$$i\beta\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x - \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\Phi_{xx} = f_2 \tag{2.121}$$
$$i\beta\psi - \Psi = f_3 \tag{2.122}$$
$$i\beta\Psi + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} = f_4. \tag{2.123}$$

Temos que

$$\gamma_1'\|\Phi_x^n\|_{L^2}^2 = Re\Big\langle i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_1 U, U\Big\rangle_{\mathcal{H}_1} \leq \|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},$$

e, por Poincaré, segue também que

$$\|\Phi^n\|_{L^2}^2 \leq C\,\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Da equação (2.120), temos que

$$i\beta\phi_x - \Phi_x = f_{1x},$$

de onde segue

$$|\beta|\|\phi_x\|_{L^2} \leq \|\Phi_x\|_{L^2} + \|f_{1x}\|_{L^2},$$

e logo,

$$|\beta|^2\|\phi_x\|_{L^2}^2 \leq \|\Phi_x\|_{L^2}^2 + 2\|\Phi_x\|_{L^2}\|f_{1x}\|_{L^2} + \|f_{1x}\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ da equação (2.121) por ψ_x, obtemos

$$-i\beta\int_0^L \Phi_x\overline{\psi}dx + \frac{k}{\rho_1}\int_0^L \phi_x\overline{\psi_{xx}}dx - \frac{k}{\rho_1}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\int_0^L \Phi_x\overline{\psi_{xx}}dx = \int_0^L f_2\overline{\psi_x}dx,$$

então, de (2.122) e (2.123), segue que

$$\begin{aligned}\int_0^L \Phi_x(\overline{f_3+\Psi})dx + \frac{k}{\rho_1}\int_0^L \phi_x\overline{\left[i\frac{\beta\rho_2}{b}\Psi + \frac{k}{b}(\phi_x+\psi) - \frac{\rho_2}{b}f_4\right]}dx - \frac{k}{\rho_1}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ +\frac{\gamma_1'}{\rho_1}\int_0^L \Phi_x\overline{\left[i\frac{\beta\rho_2}{b}\Psi + \frac{k}{b}(\phi_x+\psi) - \frac{\rho_2}{b}f_4\right]}dx = \int_0^L f_2\overline{\psi_x}dx,\end{aligned}$$

e logo,

$$\begin{aligned}\|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq C\|\Phi_x\|_{L^2}^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\beta_n^2\|\phi_x\|_{L^2}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\beta_n^2\|\Phi_x\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\{1+\beta_n^2\}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2,\end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{L^2}^2 &\leq C\|\Phi_x\|^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\beta_n^2\|\phi_x\|_{L^2}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\beta_n^2\|\Phi_x\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\{1+\beta_n^2\}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}\|\phi_x+\psi\|_{L^2}^2 &\leq C\|\phi_x\|_{L^2}^2 + C\|\psi\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\{1+\beta_n^2\}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.\end{aligned}$$

Finalmente, do produto interno em $L^2(0,L)$ de (2.123) por ψ, segue que

$$i\beta\int_0^L \Psi\overline{\psi}dx + \frac{k}{\rho_2}\int_0^L (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx + \frac{b}{\rho_2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 = \int_0^L f_4\overline{\psi}dx,$$

logo, usando (2.122) e as desigualdades obtidas acima, temos

$$\begin{aligned}\|\Psi\|^2_{L^2} &\leq C\int_0^L |\Psi||\overline{f_3}|dx + C\int_0^L |\phi_x+\psi||\overline{\psi}|dx + C\int_0^L |f_4||\overline{\psi}|dx + C\|\psi_x\|^2_{L^2}\\ &\leq C\{1+\beta_n^2\}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned}$$

Logo, acabamos de mostrar que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq C\beta^4\,\|F\|^2_{\mathcal{H}_1}\,,\ \text{para todo } |\beta|\geq 1,$$

e portanto,

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I-\widetilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_1} \leq C\,\|F\|_{\mathcal{H}_1}\,,\ \text{para todo } |\beta|\geq 1.$$

Concluímos, então, que o sistema é polinomialmente estável. □

Otimalidade

Vamos mostrar que a taxa de decaimento polinomial do sistema

$$\begin{aligned}\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi)_x - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),\end{aligned}$$

encontrada na subseção anterior, não pode ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$.
Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.6 *A taxa* $\frac{1}{2}$ *de decaimento polinomial encontrada no teorema* 2.3.5 *é a taxa ótima.*

Demonstração: Consideramos $\lambda_n = \sqrt{\dfrac{b\beta_n^2+k}{\rho_2}}$, e $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$.
Sejam

$$\begin{aligned}\phi^n &= A_n\sin(\beta_n x)\\ \psi^n &= B_n\cos(\beta_n x)\\ \Phi^n &= \lambda_n\phi^n\\ \Psi^n &= \lambda_n\psi_n,\end{aligned}$$

em que A_n e B_n são dados por

$$A_n = \frac{1}{k\beta_n},$$

e,

$$B_n = \frac{\lambda_n^2 - k\beta_n^2}{k^2\beta_n^2} - i\frac{\gamma_1'\lambda_n}{k^2}.$$

Da demonstração do teorema 2.3.4 segue que

$$U_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$$

é solução de

$$\lambda_n U_n - \widetilde{\mathcal{A}}_1 U_n = F_n,$$

para

$$F_n = (0, 0, 0, \rho_2^{-1}\cos\beta_n x)^t.$$

Segue, também do teorema 2.3.4, a estimativa

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}_1}^2 &\geq \rho_2\|\Psi_n\|_{L^2}^2 \\ &= \rho_2|i\lambda_n B_n|^2\frac{L}{2} \\ &\geq \frac{(\gamma_1')^2 L}{2\rho_2 k^4}(b\beta_n^2 + k)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\|U_n\|_{\mathcal{H}_1}^2 \geq \frac{(\gamma_1')^2 L\rho_2^{1-\epsilon}}{2k^4}\left(b\beta_n^2 + k\right)^{\epsilon}, \quad \forall\epsilon > 0,$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito, temos que

$$\frac{1}{|\beta_n|^{4-2\epsilon}}\left\|(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}F_n\right\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \frac{1}{|\beta_n|^{4-2\epsilon}}\|U_n\|_{\mathcal{H}_1}^2 \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \ \forall\epsilon > 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{|\beta_n|^{2-\epsilon}}\left\|(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_1)^{-1}F_n\right\|_{\mathcal{H}_1} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \ \forall\epsilon > 0.$$

Isto significa que a taxa de decaimento polinomial $\frac{1}{2}$ não pode ser melhorada sobre o domínio $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$. $\square$

Observação 7 *A taxa ótima de decaimento polinomial que encontramos é igual a taxa ótima de decaimento polinomial encontrada para o sistema com dissipação apenas na tensão de corte e introduzida no sistema pelas leis contitucionais do modelo de vigas de Timoshenko.*

2.4 Viscoelasticidade agindo somente sobre o momento fletor

Nesta seção estamos interessados em analisar o comportamento assintótico das soluções do sistema de vigas de Timoshenko com viscoelasticidade agindo de forma parcial no problema, somente sobre o momento fletor.

Ao introduzirmos a dissipação viscoelástica no problema através das leis constitutivas do modelo, ou simplesmente adicionando um termo viscoelástico diretamente na segunda equação do sistema, obtemos o seguinte sistema de vigas de Timoshenko viscoelástico:

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi)_x &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) - \gamma_2\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty). \end{aligned}$$

Veremos que, para $\gamma_2 > 0$, o sistema não decai exponencialmente, independentemente dos coeficientes, para condições de contorno Dirichlet-Neumann. Contudo, a dissipação é suficientemente forte a ponto de estabilizar o sistema de forma polinomial.

No final da seção, encontraremos a melhor taxa de decaimento polinomial do sistema, para condições de contorno mistas do tipo Dirichlet-Neumann, e vamos mostrar que a taxa ótima encontrada é igual a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema com viscoelasticidade presente somente no estresse por corte.

Empregaremos o mesmo símbolo C para diferentes constantes positivas, e muitas vezes faremos uso sem menção explícita das desigualdades de Poincaré, de Young e de Cauchy-Schwarz, para simplificar o texto.

2.4.1 Falta de estabilidade exponencial

O objetivo desta subseção é mostrar que o efeito dissipativo adquirido pelo sistema de Timoshenko viscoelástico, considerando a vicosidade agindo apena sobre o momento fletor, não é forte o suficiente para estabilizar o sistema uniformemente de forma exponencial. Para isto, usamos fortemente o fato de que a condição de contorno considerada é do tipo Dirichlet-Neumann.

Consideramos, então, o sistema de Timoshenko (2.9) – (2.10) com $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 > 0$,

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \tag{2.124}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty). \tag{2.125}$$

Consideraremos as condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann, dadas por

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0 \text{ em } (0, \infty).$$

Na demonstração, novamente faremos uso da caracterização de estabilidade exponencial de semigrupos dissipativos dada no teorema 1.3.2.

Teorema 2.4.1 *Seja* (ϕ, Φ, ψ, Ψ) *a solução do problema determinado pelas equações* (2.124) *e* (2.125)*, com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann e condições iniciais* $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$, $\phi_t(x, 0) = \phi_1(x)$, $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$, $\psi_t(x, 0) = \phi_1(x)$. *Se os dados iniciais satisfazem a condição* $\int_0^L \psi_0(x)dx = \int_0^L \psi_1(x)dx = 0$, *então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}_1$ *associado ao sistema, dado em (2.15) com* $\gamma_1 = 0$ *e* $\gamma_2 > 0$, *não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Pelo teorema 1.3.2, é suficiente mostrarmos a existência de uma sequência $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_1$ limitada em $\mathcal{H}_1$, tais que

$$(i\lambda_n - \mathcal{A}_1)U_n = F_n,$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda\phi - \Phi &= f_1 \in H_0^1(0, L) \\
i\lambda\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x &= f_2 \in L^2(0, L) \\
i\lambda\psi - \Psi &= f_3 \in H_*^1(0, L) \\
i\lambda\Psi + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi_{xx} &= f_4 \in L_*^2(0, L).
\end{aligned}$$

Escolhemos F_n como

$$F_n = (0, \rho_1^{-1} \sin(\beta_n x), 0, 0)^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.
A sequência $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_1$ escolhida é limitada em $\mathcal{H}_1$, pois

$$\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_1} = \frac{1}{\rho_1}\frac{L}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja

$$\lambda_n = \beta_n \sqrt{\frac{k}{\rho_1}},$$

então, a solução $U_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n)^t$ de $(i\lambda_n - \mathcal{A}_1)U_n = F_n$ satisfaz

$$\begin{aligned} i\lambda_n\phi^n - \Phi^n &= 0 && (2.126)\\ i\lambda_n\Phi^n - \frac{k}{\rho_1}(\phi^n_x + \psi^n_x) &= \rho_1^{-1}\sin\beta_n x && (2.127)\\ i\lambda_n\psi^n - \Psi^n &= 0 && (2.128)\\ i\lambda_n\Psi^n + \frac{k}{\rho_2}(\phi^n_x + \psi^n) - \frac{b}{\rho_2}\psi^n_{xx} - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi^n_{xx} &= 0 && (2.129) \end{aligned}$$

Das equações (2.126) e (2.128) segue que

$$\begin{aligned} i\lambda_n\phi^n &= \Phi^n\\ i\lambda_n\psi^n &= \Psi^n. \end{aligned}$$

Substituindo as igualdades acima em (2.127) e (2.129), obtemos que

$$\begin{aligned} -\lambda_n^2\rho_1\phi^n - k(\phi^n_x + \psi^n)_x &= \sin\beta_n x && (2.130)\\ -\lambda_n^2\rho_2\psi^n + k(\phi^n_x + \psi^n) - b\psi^n_{xx} - i\lambda\gamma_2\psi^n_{xx} &= 0. && (2.131) \end{aligned}$$

Observando as condições de contorno consideradas, temos que as funções

$$\phi^n(x) = A_n \sin\beta_n x, \qquad \psi^n(x) = B_n\cos\beta_n x$$

resolvem o sistema (2.130)-(2.131) para apropriados valores de A_n and B_n, que serão determinados a seguir.
Substituindo as funções $\phi^n(x) = A_n\sin\beta_n x$ e $\psi^n(x) = B_n\cos\beta_n x$ nas equações (2.130), (2.131), encontramos que A_n e B_n devem satisfazer

$$\begin{aligned} \left(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2\right)A_n + k\beta_n B_n &= 1 && (2.132)\\ k\beta_n A_n + \left(-\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 + k + i\gamma_2\lambda_n\beta_n^2\right)B_n &= 0. && (2.133) \end{aligned}$$

Como $-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 = 0$, concluímos de (2.132) que

$$B_n = \frac{1}{k\beta_n}, \tag{2.134}$$

e então, pela equação (2.133), concluímos que

$$A_n = -\frac{1}{k^2}\left(\frac{-\lambda_n^2\rho_2}{\beta_n^2} + b + \frac{k}{\beta_n^2} + i\gamma_2\lambda_n\right). \tag{2.135}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_1} &\geq k\,\|\phi_x^n + \psi^n\|^2_{L^2} \\
&= k\,|A_n\beta_n + B_n|^2\,\|\cos\beta_n x\|^2_{L^2} \\
&= k\left|-\frac{1}{k^2}\left(\frac{-\lambda_n^2\rho_2}{\beta_n^2} + b + \frac{k}{\beta_n^2} + i\gamma_2\lambda_n\right)\beta_n + \frac{1}{k\beta_n}\right|^2 \frac{L}{2} \\
&\geq k\left|-\frac{1}{k^2}\gamma_2\lambda_n\beta_n\right|^2 \frac{L}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_1} \geq \frac{L}{2}\frac{1}{k^2}\gamma_2^2\beta_n^4, \tag{2.136}$$

e tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = \infty.$$

Logo, o sistema não possui decaimento exponencial. □

2.4.2 Estabilidade polinomial

Apesar da viscoelasticidade, presente apenas no momento fletor no sistema de Timoshenko, não ser suficientemente forte para estabilizar exponencialmente todo o sistema, nessa seção provamos, que nesse caso, o sistema decai polinomialmente.
Vamos utilizar a caracterização dada no teorema 1.3.4 para mostrar que o sistema

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \tag{2.137}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty). \tag{2.138}$$

é polinomialmente estável, para condições de fronteira Dirichlet-Neumann.

Lema 7 *Seja $\mathcal{A}_1$ o operador do problema viscoelástico* (2.137) − (2.138) *para condições*

de contorno mistas Dirichlet-Neumann, dado em (2.15).
Então,

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1)$$

Demonstração: Vamos supor que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A}_1)$. Como $0 \in \varrho(\mathcal{A}_1)$, segue do lema 3 que existe $w \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}_1^{-1}\| \leq |w| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \varrho(\mathcal{A}_1),$$

e

$$sup\{\|(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}\|; |\beta| < |w|\} = \infty.$$

Portanto, existem sequência $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$, com $\beta_n \to w$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |w|$ e sequência de funções $(U_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$, para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_1)U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty, .$$

Logo, temos que

$$i\beta_n\rho_1 Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n)_x \quad \to \quad 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{2.139}$$
$$i\beta_n\rho_2\Psi^n + k(\phi_x^n + \psi^n) - b\psi_{xx}^n - \gamma_2\Psi_{xx}^n \quad \to \quad 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{2.140}$$
$$i\beta_n\psi_x^n - \Psi_x^n \quad \to \quad 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{2.141}$$
$$i\beta_n\phi_x^n - \Phi_x^n + i\beta_n\psi^n - \Psi^n \quad \to \quad 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{2.142}$$

em que $U_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n)^t$.
Tomando o produto interno de $(i\beta_n I - \mathcal{A}_1)U_n$ com U_n em $\mathcal{H}_1$ e tomando a parte real, obtemos

$$Re\langle i\beta_n U_n - \mathcal{A}_1 U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}_1} = -Re\langle \mathcal{A}_1 U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}_1} = \gamma_2 \int_0^L |\Psi_x^n|^2 dx \to 0,$$

portanto,

$$\Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{2.143}$$

o que implica, pela desigualdade de Poincaré,

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Das convergências (2.143) e (2.141) segue que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e logo, novamente pela desigualdade de Poincaré, podemos concluir que

$$\psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Por (2.139), temos que $(\phi^n_{xx})_n$ é uma sequência uniformemente limitada em $L^2(0, L)$. Observando que

$$\|\phi^n_x\|^2_{L^2} = \langle \phi^n_x, \phi^n_x \rangle_{L^2} = -\langle \phi^n, \phi^n_{xx} \rangle_{L^2} \leq \|\phi^n\|_{L^2} \|\phi^n_{xx}\|_{L^2},$$

temos que (ϕ^n_x) também é uma sequência uniformemnte limitada em $L^2(0, L)$. Assim, tomando o produto interno em $L^2(0, L)$ de ϕ^n_x por

$$i\beta_n \rho_2 \Psi^n + k(\phi^n_x + \psi^n) - b\psi^n_{xx} - \gamma_2 \Psi^n_{xx},$$

obtemos, por (2.140) e pelas convergências já encontradas, que

$$\phi^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Usando a última convergência em (2.142), segue que

$$\Phi^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0, L),$$

e logo, por Poincaré,

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

A desigualdade triangular e as convergências acima implicam

$$\|\phi^n_x + \psi^n\|_{L^2} \leq \|\phi_x\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} \to 0,$$

e portanto,

$$\phi^n_x + \psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Assim, acabamos de mostrar que $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que contradiz o fato de $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$.
Portanto, temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1)$.
$\square$

Teorema 2.4.2 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$. *Então, a solução do problema viscoelástico* (2.137) – (2.138) *decai polinomialmente a zero, isto é, existe cons-*

tante $C > 0$ tal que

$$\|e^{t\mathcal{A}_1}U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)}.$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1^\alpha)$, então existe constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$\|e^{t\mathcal{A}_1}U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1^\alpha)}.$$

Demonstração: Pelo lema anterior, temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1)$.
Agora, mostraremos que existe constante positiva C independente de $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \geq 1$ e $F \in \mathcal{H}_1$ tal que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_1)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_1} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_1}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1.$$

Sejam $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^t \in \mathcal{H}_1$ e $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ tais que

$$i\beta U - \mathcal{A}_1 U = F,$$

que em termos das suas componentes, é dada por

$$i\beta\phi - \Phi = f_1 \tag{2.144}$$

$$i\beta\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x = f_2 \tag{2.145}$$

$$i\beta\psi - \Psi = f_3 \tag{2.146}$$

$$i\beta\Psi + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi_{xx} = f_4. \tag{2.147}$$

Pela propriedade dissipativa do sistema, temos que

$$\gamma_2 \int_0^L |\Psi_x|^2\, dx \leq \|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{2.148}$$

Do produto de (2.147) por $(\overline{\phi_x + \psi})$ segue que

$$i\beta\int_0^L \Psi(\overline{\phi_x + \psi})dx + \frac{k}{\rho_2}\int_0^L (\phi_x + \psi)(\overline{\phi_x + \psi})dx - \frac{b}{\rho_2}\int_0^L \psi_{xx}(\overline{\phi_x + \psi})dx$$
$$-\frac{\gamma_2}{\rho_2}\int_0^L \Psi_{xx}(\overline{\phi_x + \psi})dx = \int_0^L f_4(\overline{\phi_x + \psi})dx.$$

Fazendo uso da equação (2.145), obtemos que

$$\begin{aligned} k\int_0^L |\phi_x+\psi|^2 dx &= \rho_2\int_0^L f_4(\overline{\phi_x+\psi})\,dx - \frac{b\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x(\overline{i\beta\Phi - f_2})\,dx \\ &\quad -\frac{\gamma_2\rho_1}{k}\int_0^L \Psi_x(\overline{i\beta\Phi - f_2})\,dx - i\beta\rho_2\int_0^L \Psi(\overline{\phi_x+\psi})\,dx. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} k\int_0^L |\phi_x+\psi|^2\,dx &\le \rho_2\int_0^L |f_4||\overline{\phi_x+\psi}|\,dx + \frac{b\rho_1}{k}\int_0^L |\beta\psi_x||\Phi|\,dx \\ &\quad +\frac{b\rho_1}{k}\int_0^L |\psi_x||f_2|\,dx + \frac{\gamma_2\rho_1}{k}\int_0^L |\Psi_x||\beta\Phi|\,dx \\ &\quad +\frac{\gamma_2\rho_1}{k}\int_0^L |\Psi_x||f_2|\,dx + \rho_2\int_0^L |\Psi||i\beta\phi_x + i\beta\psi|\,dx. \end{aligned}$$

Por (2.147) e (2.146) obtemos que

$$\begin{aligned} k\int_0^L |\phi_x+\psi|^2\,dx &\le \rho_2\int_0^L |f_4||\overline{\phi_x+\psi}|\,dx + \frac{b\rho_1}{k}\int_0^L |\Psi_x + f_{3x}||\Phi|\,dx \\ &\quad +\frac{b\rho_1}{k}\int_0^L |\psi_x||f_2|\,dx + \frac{\gamma_2\rho_1}{k}\int_0^L |\beta\Psi_x||\Phi|\,dx \\ &\quad +\frac{\gamma_2\rho_1}{k}\int_0^L |\Psi_x||f_2|\,dx + \rho_2\int_0^L |\Psi||f_{1x}+f_3|\,dx \\ &\quad +\rho_2\int_0^L |\Psi||\Phi_x|\,dx + \rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} k\int_0^L |\phi_x+\psi|^2\,dx &\le C\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + C(1+|\beta|)\|\Psi_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1} \\ &\quad +C\|\Psi_x\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + \rho_2\|\Psi\|^2_{L^2}. \end{aligned}$$

Por (2.148), podemos concluir que

$$k\int_0^L |\phi_x+\psi|^2\,dx \le C_\epsilon(1+|\beta|)^2\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1} + \epsilon\, C\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} + C_\epsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_1}, \forall\epsilon>0 \quad (2.149)$$

Multiplicando (2.145) por $\overline{\phi}$ obtemos que

$$i\beta\int_0^L \Phi\overline{\phi}\,dx - \frac{k}{\rho_1}\int_0^L (\phi_x+\psi)_x\overline{\phi}\,dx = \int_0^L f_2\overline{\phi}\,dx.$$

De (2.144) segue que

$$-\int_0^L \Phi\overline{(f_1+\Phi)}\,dx+\frac{k}{\rho_1}\int_0^L(\phi_x+\psi)\overline{(\phi_x)}\,dx=\int_0^L f_2\overline{\phi}\,dx.$$

Então,

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L|\Phi|^2\,dx &= -\rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}\,dx-\rho_1\int_0^L\Phi\overline{f_1}\,dx\\ &+k\int_0^L|\phi_x+\psi|^2\,dx-k\int_1^L\overline{\psi}(\phi_x+\psi)\,dx.\end{aligned}$$

Agora, de (2.146), obtemos que

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L|\Phi|^2\,dx &= -\rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}\,dx-\rho_1\int_0^L\Phi\overline{f_1}\,dx\\ &+k\int_0^L|\phi_x+\psi|^2\,dx-k\int_1^L\overline{\left[(\frac{1}{i\beta}f_3+\Psi)\right]}(\phi_x+\psi)\,dx\end{aligned}$$

Usando (2.148) e considerando $|\beta|\geq 1$ concluímos que

$$\rho_1\int_0^L|\Phi|^2\,dx\leq C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1}+k\int_0^L|\phi_x+\psi|^2\,dx+\epsilon C\|U\|^2_{\mathcal{H}_1},\forall\epsilon>0. \quad (2.150)$$

A multiplicação de (2.147) por $\overline{\psi}$ implica que

$$i\beta\rho_2\int_0^L\Psi\overline{\psi}\,dx+k\int_0^L(\phi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx+b\int_0^L\|\psi_x\|^2\,dx+\gamma_2\int_0^L\Psi_x\overline{\psi}_x\,dx=\rho_2\int_0^L f_4\overline{\psi}\,dx.$$

Por (2.146), temos que

$$\begin{aligned}b\int_0^L|\psi_x|^2\,dx &= \rho_2\int_0^L f_4\overline{\psi}\,dx-\gamma_2\int_0^L\Psi_x\overline{\psi}_x\,dx\\ &+\rho_2\int_0^L\Psi\overline{[(\Psi+f_3)]}\,dx-k\int_0^L(\phi_x+\psi)\overline{\left[\frac{1}{i\beta}(f_3+\Psi)\right]}\,dx.\end{aligned}$$

Da desigualdade (2.148), e considerando $|\beta|\geq 1$, obtemos que

$$b\int_0^L|\psi_x|^2\,dx\leq C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1}+\epsilon\,C\|U\|^2_{\mathcal{H}_1},\forall\epsilon>0. \quad (2.151)$$

Integrando o produto de (2.146) por $\overline{\Psi}$, obtemos em

$$i\beta\int_0^L\psi\overline{\Psi}\,dx-\int_0^L|\Psi|^2\,dx=\int_0^L f_3\overline{\Psi}\,dx.$$

De (2.147) segue que

$$\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx=-\int_0^L \psi\overline{(f_4-k(\phi_x+\psi)+b\psi_{xx}+\gamma_2\Psi_{xx})}\,dx-\rho_2\int_0^L f_3\overline{\Psi}\,dx.$$

Então, usando a equação (2.146), obtemos que

$$\begin{aligned}\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx &= -\int_0^L \psi\overline{f_4}\,dx+k\int_0^L (\frac{1}{i\beta}f_3+\Psi)\overline{(\phi_x+\psi)}\,dx\\ &\quad +b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx+\gamma_2\int_0^L \Psi_x\psi_x\,dx-\rho_2\int_0^L f_3\overline{\Psi}\,dx\end{aligned}$$

Considerando $|\beta|\geq 1$, concluímos que

$$\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx\leq C_\epsilon\,\|U\|_{\mathcal{H}_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1}+\epsilon\,C\,\|U\|^2_{\mathcal{H}_1}+b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx,\forall\epsilon>0. \tag{2.152}$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno, por (2.149)-(2.152), concluímos que

$$\frac{1}{\beta^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\leq C\,\|F\|_{\mathcal{H}_1},\ \text{para todo } |\beta|\geq 1,$$

e portanto,

$$\left\|e^{t\mathcal{A}_1}U_0\right\|_{\mathcal{H}_1}\leq C\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)}.$$

Assim, provamos que o sistema

$$\begin{aligned}\rho_1\phi_{tt}-k(\phi_x+\psi)_x &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\ \rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\phi_x+\psi)-\gamma_2\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\end{aligned}$$

é polinomialmente estável. □

2.4.3 Otimalidade

Na seção anterior, vimos que o sistema de vigas de Timoshenko com viscosidade elástica do tipo Kelvin-Voight presente somente no momento fletor possui decaimento polinomial. Mais precisamemte, provamos que

$$\left\|e^{t\mathcal{A}_1}U_0\right\|_{\mathcal{H}_j}\leq C\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A}_1)}.$$

Nesta seção, vamos provar que a taxa $\frac{1}{2}$ de decaimento polinomial encontrada é a melhor possível, no sentido de que não pode ser melhorada sobre o domínio do operador.

Teorema 2.4.3 *A taxa* $\frac{1}{2}$ *de decaimento polinomial do sistema de vigas de Timoshenko viscoelástico*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

encontrada no teorema 2.4.2, é a taxa ótima.

Demonstração: Consideramos $\lambda_n = i\beta_n\sqrt{\frac{k}{\rho_1}}$, com $\beta_n = \frac{n\pi}{L}$ e

$$\begin{aligned} \phi^n &= A_n \sin(\beta_n x) \\ \psi^n &= B_n \cos(\beta_n x) \\ \Phi^n &= \lambda_n \phi^n \\ \Psi^n &= \lambda_n \psi_n, \end{aligned}$$

em que A_n e B_n são dados por

$$A_n = -\frac{1}{k^2}\left(\frac{-\lambda_n^2\rho_2}{\beta_n^2} + b + \frac{k}{\beta_n^2} + i\gamma_2\lambda_n\right)$$

e,

$$B_n = \frac{1}{k\beta_n}.$$

Da demonstração do teorema 2.4.1 segue que

$$U_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$$

é solução de

$$i\lambda_n U_n - \mathcal{A}_1 U_n = F_n,$$

em que

$$F_n = (0, \rho_1^{-1}\sin(\beta_n x), 0, 0)^t \in \mathcal{H}_1.$$

Seguindo os mesmo passos da demonstração do teorema 2.4.1, encontramos, como em (2.136), a estimativa

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_1}^2 \geq \frac{L}{2}\frac{1}{k^2}\gamma_2^2\beta_n^4.$$

Portanto,

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\,\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_1} \;\geq\; K_\epsilon \beta_n^{2\epsilon}, \qquad \forall \epsilon > 0,$$

em que K_ϵ é uma constante positiva que depende de ϵ.
Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\left\|(i\lambda_n I-\mathcal{A}_1)^{-1}F_n\right\|^2_{\mathcal{H}_1} = \frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\,\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_1} \to \infty,\ \text{quando } n \to \infty,\ \forall \epsilon > 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\left\|(i\lambda_n I-\mathcal{A}_1)^{-1}F_n\right\|_{\mathcal{H}_1} \to \infty,\ \text{quando } n \to \infty,\ \forall \epsilon > 0.$$

Isto significa que a taxa de decaimento polinomial $\dfrac{1}{2}$ não pode ser melhorada sobre o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$. □

Observação 8 *Encontramos que $\tau = \frac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial tanto para o sistema de vigas de Timoshenko com disssipação viscoelástica presente apenas na tensão por corte, quanto para o sistema com dissipação presente apenas no momento fletor.*

Capítulo 3

Vigas Viscoelásticas de Bresse

3.1 O modelo viscoelástico de vigas de Bresse

Neste capítulo, vamos investigar o comportamento assintótico das soluções do sistema viscoelástico de vigas de Bresse, também conhecido como o problema do arco circular. Consideramos um arco circular de raio R e comprimento L em sua posição de equilíbrio, constituída de material linear, isotrópico e linearmente elástico.

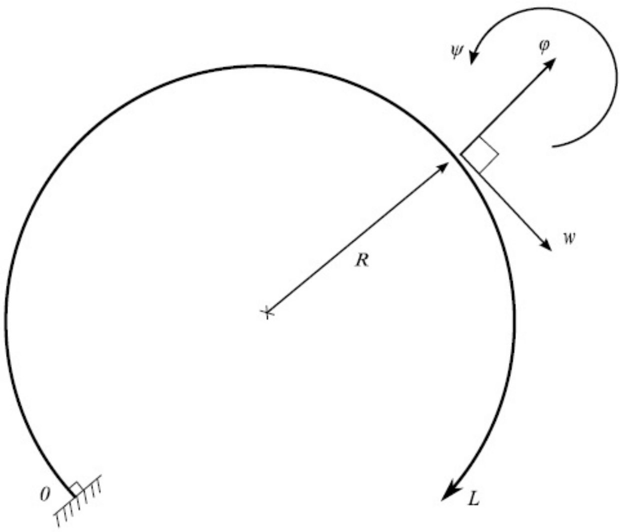

Figura 3.1: Arco circular

Se $\omega(x,t)$, $\phi(x,t)$ e $\psi(x,t)$ representam, respectivamente, os deslocamentos tangencial, transversal e angular de um filamento da viga na posição x e no tempo t, resulta, da equação de movimento,

$$\begin{aligned} \rho A\phi_{tt} &= S_x + R^{-1}N \qquad (3.1)\\ \rho I\psi_{tt} &= M_x - S \qquad (3.2)\\ \rho A\omega_{tt} &= N_x - R^{-1}S, \qquad (3.3) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} N &= EA(\omega_x - R^{-1}\phi) && \leftarrow \text{ Deslocamento tangencial}\\ M &= EI\psi_x && \leftarrow \text{ Deslocamento angular}\\ S &= KAG(\phi_x + \psi + R^{-1}\omega) && \leftarrow \text{ Deslocamento transversal.} \end{aligned}$$

Os coeficientes ρA, ρI, E, A, I, KAG representam massa por unidade de comprimento, momento polar, módulo de elasticidade de Young, seção transversal, momento de inércia da seção transversal e módulo de cisalhamento, respectivamente.
Introduzindo as notações $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $l = R^{-1}$, $k_0 = EA$, $b = EI$ e $k = KAG$, obtemos de (3.1)-(3.3), o sistema hiperbólico e acoplado de Bresse, para vigas circulares,

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \qquad (3.4)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \qquad (3.5)\\ \rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + \psi + l\omega) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty). \qquad (3.6) \end{aligned}$$

Observação 9 *Se tomarmos a curvatura $l = 0$, então, desacoplamos a equação da tensão longitudinal do sistema, e as duas primeiras equações, referentes à tensão por corte e tensão por flexão, formam o sistema de vigas de Timoshenko.*

Para o sistema de Bresse, com condições de contorno homogêneas, a energia total é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho_1|\phi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|\omega_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\phi_x + \psi + l\omega|^2 + k_0|\omega_x - l\phi|\right] dx.$$

Tomando o produto de (3.4), (3.5), (3.6), por $\overline{\phi_t}$, $\overline{\psi_t}$ e $\overline{\omega_t}$, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1\int_0^L \phi_{tt}\overline{\phi_t}\,dx + k\int_0^L(\phi_x + \psi + l\omega)\overline{\phi_{xt}}\,dx - lk_0\int_0^L(\omega_x - l\phi)\overline{\phi_t}\,dx &= 0\\ \rho_2\int_0^L \psi_{tt}\overline{\psi_t}\,dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\psi_{xt}}\,dx + k\int_0^L(\phi_x + \psi + l\omega)\overline{\psi_t}\,dx &= 0\\ \rho_1\int_0^L w_{tt}\overline{\omega_t}\,dx + k_0\int_0^L(w_x - l\phi)\overline{\omega_{xt}}\,dx + kl\int_0^L(\phi_x + \psi + l\omega)\overline{\omega_t}\,dx &= 0. \end{aligned}$$

Da soma das três equações acima segue que

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L \phi_{tt}\overline{\phi_t}\,dx+\rho_2\int_0^L \psi_{tt}\overline{\psi_t}\,dx+\rho_1\int_0^L w_{tt}\overline{\omega_t}\,dx+b\int_0^L \psi_x\overline{\psi_{xt}}\,dx&\\ +k\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)\overline{(\phi_{xt}+\psi_t+l\omega_t)}\,dx+k_0\int_0^L(w_x-l\phi)\overline{(\omega_{xt}-l\phi_t)}\,dx&=0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}E(t)=0, \text{ em } (0,\infty).$$

Isto significa que a energia se mantém constante ao logo do tempo, e portanto, a solução do sistema não decai. Entretanto, acrescentando termos dissipativos ao sistema, podemos encontrar algum tipo de decaimento nas soluções. Recentemente, pesquisadores da área têm dedicado-se a investigar esses problemas.

A contribuição deste trabalho para o modelo está em investigar o comportamento assintótico das soluções do sistema de Bresse viscoelástico, com dissipação do tipo Kelvin-Voight agindo parcialmente ou totalmente sobre o sistema, no caso em que o mecanismo dissipativo é inserido no sistema através das leis constitucionais do sistema, bem como no caso em que a viscosidade elástica é simplesmente adicionada nas equações.

Mais precisamente, estudaremos o comportamento assintótico das soluções (ϕ,ψ,ω) do sistema, em $(0,L)\times(0,\infty)$, dado por

$$\begin{aligned}\rho_1\phi_{tt}-k(\phi_x+\psi+l\omega)_x-lk_0(\omega_x-l\phi)-\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_{xt}-\gamma_3 l(\omega_x-l\phi)_t&=0\\ \rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\phi_x+\psi+l\omega)+\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_t-\gamma_2\psi_{xxt}&=0\\ \rho_1\omega_{tt}-k_0(\omega_x-l\phi)_x+kl(\phi_x+\psi+l\omega)-\gamma_3(\omega_x-l\phi)_{xt}+l\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_t&=0,\end{aligned}$$

nos seguintes casos:

- $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$ e $\gamma_3>0$,
- $\gamma_1>0$, $\gamma_2=0$ e $\gamma_3=0$,
- $\gamma_1=0$, $\gamma_2>0$ e $\gamma_3=0$,
- $\gamma_1=0$, $\gamma_2=0$ e $\gamma_3>0$,
- $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$ e $\gamma_3=0$, e
- $\gamma_1>0$, $\gamma_2=0$ e $\gamma_3>0$;

e também o sistema

$$\begin{aligned}\rho_1\phi_{tt}-k(\phi_x+\psi+l\omega)_x-lk_0(\omega_x-l\phi)-\gamma_1'\phi_{xxt}&=0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\ \rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\phi_x+\psi+l\omega)-\gamma_2'\psi_{xxt}&=0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\ \rho_1\omega_{tt}-k_0(\omega_x-l\phi)_x+kl(\phi_x+\psi+l\omega)-\gamma_3'\omega_{xxt}&=0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),\end{aligned}$$

nos casos em que:

- $\gamma_1' > 0$, $\gamma_2' > 0$ e $\gamma_3' > 0$,
- $\gamma_1' > 0$, $\gamma_2' = 0$ e $\gamma_3' = 0$,
- $\gamma_1' = 0$, $\gamma_2' > 0$ e $\gamma_3' = 0$,
- $\gamma_1' = 0$, $\gamma_2' = 0$ e $\gamma_3' > 0$,
- $\gamma_1' > 0$, $\gamma_2' > 0$ e $\gamma_3' = 0$, e
- $\gamma_1' > 0$, $\gamma_2' = 0$ e $\gamma_3' > 0$;

com condições iniciais

$$\begin{aligned} &\phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \\ &\qquad w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x) \text{ em } (0,L). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Consideraremos condições de contorno mistas do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0 \text{ em } (0,\infty). \tag{3.8}$$

Consideramos o espaço $\mathcal{H}_2$, dado por

$$\mathcal{H}_2 := H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L). \tag{3.9}$$

O espaço $\mathcal{H}_2$ é equipado de produto interno, que induz a norma da energia

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \|(\phi,\Phi,\psi,\Psi,\omega,W)\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\ &= \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\phi_x + l\omega + \psi\|_{L^2}^2 + k_0\|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 . \end{aligned}$$

Lema 8 *A norma $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$, definida acima, é equivalente a norma usual de $\mathcal{H}_2$, dada por*

$$\|U\|_2^2 = \|\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi_x\|_{L^2}^2 + \|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\Psi\|_{L^2}^2 + \|\omega\|_{L^2}^2 + \|\omega_x\|_{L^2}^2 + \|W\|_{L^2}^2 .$$

Demonstração: De fato, usando a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\phi_x + l\omega + \psi\|_{L^2}^2 + k_0\|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 \\ &\le \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + 2k\|\phi_x\|_{L^2}^2 + 4kl^2\|\omega\|_{L^2}^2 + 4k\|\psi\|_{L^2}^2 \\ &\quad + 2k_0\|\omega_x\|_{L^2}^2 + 2k_0 l^2\|\phi\|_{L^2}^2 \\ &\le C\|U\|_2^2, \text{ em que } C = \max\{\rho_1,\rho_2,b,2k,4kl^2,4k,2k_0,2k_0l^2\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, sejam $F = \phi_x + l\omega + \psi$ e $G = \omega_x - l\phi$, então

$$\begin{aligned} \phi_x + l\omega &= F - \psi \qquad (3.10)\\ \omega_x - l\phi &= G, \qquad (3.11) \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_x(x\overline{\phi})dx + l\int_0^L \omega(x\overline{\phi})dx &= \int_0^L (F-\psi)(x\overline{\phi})dx\\ \int_0^L \overline{\omega_x}(x\omega)dx - l\int_0^L \overline{\phi}(x\omega)dx &= \int_0^L \overline{G}(x\omega)dx, \end{aligned}$$

o que implica, aplicando integração por partes,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_0^L |\phi|^2dx + l\int_0^L \omega(x\overline{\phi})dx &= \int_0^L (F-\psi)(x\overline{\phi})dx\\ -\frac{1}{2}\int_0^L |\omega|^2dx - l\int_0^L \overline{\phi}(x\omega)dx &= \int_0^L \overline{G}(x\omega)dx, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^L |\phi|^2dx + \frac{1}{2}\int_0^L |\omega|^2dx &\leq C\epsilon\int_0^L |\phi|^2dx + C\epsilon\int_0^L |\omega|^2dx + C_\epsilon\int_0^L |\psi|^2dx\\ &\quad + C_\epsilon\int_0^L |F|^2dx + C_\epsilon\int_0^L |G|^2dx. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi|^2dx + \int_0^L |\omega|^2dx &\leq C\int_0^L |\psi|^2dx + C_\epsilon\int_0^L |\phi_x + l\omega + \psi|^2dx\\ &\quad + C_\epsilon\int_0^L |\omega_x - l\phi|^2dx. \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Das equações (3.10) e (3.11) segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2dx + \int_0^L |\omega_x|^2dx &\leq \tilde{C}\int_0^L |\psi|^2dx + \tilde{C}\int_0^L |\phi|^2dx + \tilde{C}\int_0^L |\omega|^2dx\\ &\quad + \tilde{C}\int_0^L |F|^2dx + \tilde{C}\int_0^L |G|^2dx, \end{aligned}$$

e usando a desigualdade (3.12), obtemos

$$\int_0^L |\phi_x|^2dx + \int_0^L |\omega_x|^2dx \leq \hat{C}\int_0^L |\psi|^2dx + \hat{C}\int_0^L |\phi_x + l\omega + \psi|^2dx + \hat{C}\int_0^L |\omega_x - l\phi|^2dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|U\|_2^2 &= \|\phi\|_{L^2}^2+\|\phi_x\|_{L^2}^2+\|\Phi\|_{L^2}^2+\|\psi\|_{L^2}^2+\|\psi_x\|_{L^2}^2+\|\Psi\|_{L^2}^2+\|\omega\|_{L^2}^2+\|\omega_x\|_{L^2}^2+\|W\|_{L^2}^2\\
&\le \|\Phi\|_{L^2}^2+C_1\|\psi_x\|_{L^2}^2+\|\Psi\|_{L^2}^2+\|W\|_{L^2}^2+C_1\int_0^L|\psi|^2dx+C_1\int_0^L|\phi_x+l\omega+\psi|^2dx\\
&\quad +C_1\int_0^L|\omega_x-l\phi|^2dx\\
&\le \|\Phi\|_{L^2}^2+C_2\|\psi_x\|_{L^2}^2+\|\Psi\|_{L^2}^2+\|W\|_{L^2}^2+C_2\|\phi_x+l\omega+\psi\|_{L^2}^2+C_2\|\omega_x-l\phi\|_{L^2}^2\\
&\le \check{C}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2,
\end{aligned}$$

em que $\check{C}=\max\{1,C_2\}$.
Logo, as normas $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$ e $\|.\|_2$ em $\mathcal{H}_2$ são equivalentes.
□

Portanto, $\mathcal{H}_2$ munido do produto interno induzido pela energia é um espaço de Hilbert.
Para o sistema com viscosidade elástica inserida nas leis constitutivas do modelo

$$\rho_1\phi_{tt}-k(\phi_x+\psi+l\omega)_x-lk_0(\omega_x-l\phi)-\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_{xt}-\gamma_3 l(\omega_x-l\phi)_t = 0 \quad (3.13)$$
$$\rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\phi_x+\psi+l\omega)+\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_t-\gamma_2\psi_{xxt} = 0 \quad (3.14)$$
$$\rho_1\omega_{tt}-k_0(\omega_x-l\phi)_x+kl(\phi_x+\psi+l\omega)-\gamma_3(\omega_x-l\phi)_{xt}+l\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_t = 0, \quad (3.15)$$

definimos o operador linear $\mathcal{A}_2:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2$ por

$$\mathcal{A}_2=\begin{bmatrix}
0 & I & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{k}{\rho_1}\partial_x^2-\frac{l^2k_0}{\rho_1}I & \frac{\gamma_1}{\rho_1}\partial_x^2-\frac{l^2\gamma_3}{\rho_1}I & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & \frac{\gamma_1}{\rho_1}\partial_x & \frac{l(k+k_0)}{\rho_1}\partial_x & \frac{l(\gamma_1+\gamma_3)}{\rho_1}\partial_x\\
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0\\
\frac{-k}{\rho_2}\partial_x & \frac{-\gamma_1}{\rho_2}\partial_x & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2-\frac{k}{\rho_2}I & \frac{\gamma_2}{\rho_2}\partial_x^2-\frac{\gamma_1}{\rho_2}I & -\frac{lk}{\rho_2}I & -\frac{l\gamma_1}{\rho_2}I\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I\\
-\frac{l(k+k_0)}{\rho_1}\partial_x & -\frac{l(\gamma_1+\gamma_3)}{\rho_1}\partial_x & -\frac{lk}{\rho_1}I & -\frac{l\gamma_1}{\rho_1}I & \frac{k_0}{\rho_1}\partial_x^2-\frac{l^2k}{\rho_1}I & \frac{\gamma_3}{\rho_1}\partial_x^2-\frac{l^2\gamma_1}{\rho_1}I
\end{bmatrix} \quad (3.16)$$

com domínio

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}_2) &= \big\{U\in\mathcal{H}_2|\Phi\in H_0^1(0,L),\Psi,W\in H_*^1(0,L),b\psi_x+\gamma_2\Psi_x,k_0\omega_x+\gamma_3W_x\in H_0^1(0,L),\\
&\quad k\phi+\gamma_1\Phi\in H^2(0,L)\big\}.
\end{aligned}$$

Portanto, o sistema de vigas de Bresse viscoelástico (3.13)-(3.15) pode ser reescrito como um sistema de primeira ordem sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$:

$$U_t(t) = \mathcal{A}_2 U(t), \qquad U(0) = U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2), \tag{3.17}$$

correspondendo às condições de contorno (3.8), respectivamente, em que $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t$.

Teorema 3.1.1 *O operador $\mathcal{A}_2$, dado em (3.16), é o gerador infinitesimal de um semi-grupo C_0 de contrações $T(t) = e^{\mathcal{A}_2 t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$, para $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$ e $\gamma_3 \geq 0$.*

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que $\mathcal{A}_2$ é um operador dissipativo. Seja $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, então, denotando $S = k(\phi_x + \psi + l\omega)$ e $N = k_0(\omega_x - l\phi)$, temos que

$$\langle \mathcal{A}_2 U, U \rangle_{\mathcal{H}_2} =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1} S_x + \frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x + \Psi + lW)_x + l\frac{1}{\rho_1} N + l\frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi) \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{1}{\rho_2} S + \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi_{xx} - \frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi_x + \Psi + lW) \\ W \\ -\frac{l}{\rho_1} S - l\frac{(\gamma_1)}{\rho_1}(\Phi_x + \Psi + lW) + \frac{1}{\rho_1} N_x + \frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi)_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \\ \omega \\ W \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_2}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \rho_1 \int_0^L [\frac{1}{\rho_1} S_x + \frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x + \Psi + lW)_x + l\frac{1}{\rho_1} N + l\frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi)]\overline{\Phi}\, dx \\ & + \rho_2 \int_0^L [\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{1}{\rho_2} S + \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi_{xx} - \frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi_x + \Psi + lW)]\overline{\Psi}\, dx \\ & + \rho_1 \int_0^L [-l\frac{1}{\rho_1} S - l\frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x + \Psi + lW) + \frac{1}{\rho_1} N_x + \frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi)_x]\overline{W}\, dx \\ & + b\int_0^L \Psi_x \overline{\psi_x}\, dx + \int_0^L [\Phi_x + lW + \Psi][\overline{S}]\, dx + \int_0^L [W_x - l\Phi][\overline{N}]\, dx. \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned} Re\langle \mathcal{A}_2 U, U \rangle_{\mathcal{H}_2} \quad = \quad & -\gamma_1 \int_0^L |\Phi_x + lW + \Psi|^2 dx - \gamma_2 \int_0^L |\Psi_x|^2 dx \\ & -\gamma_3 \int_0^L |W_x - l\Phi|^2 dx \leq 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Portanto, $\mathcal{A}_2$ é dissipativo.
Para completarmos a demonstração do teorema, devemos mostrar que $0 \in \varrho(\mathcal{A}_2)$.

(i) $-\mathcal{A}_2$ é bijetivo.
Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^t \in \mathcal{H}_2$, vamos mostrar que existe única $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ tal que

$$-\mathcal{A}_2 U = F.$$

Escrevendo a equação acima nas componentes, para condições de cortorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann, devemos ter

$$\begin{aligned}
-\Phi &= f_1 \in H_0^1(0,L), && (3.19)\\
-\frac{1}{\rho_1}S_x - \frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x + \Psi + lW)_x - \frac{l}{\rho_1}N - l\frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi) &= f_2 \in L^2(0,L), && (3.20)\\
-\Psi &= f_3 \in H_*^1(0,L), && (3.21)\\
-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{1}{\rho_2}S - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi_{xx} + \frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi_x + \Psi + lW) &= f_4 \in L_*^2(0,L), && (3.22)\\
-W &= f_5 \in H_*^1(0,L), && (3.23)\\
\frac{l}{\rho_1}S + l\frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x + \Psi + lW) - \frac{1}{\rho_1}N_x - \frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi)_x &= f_6 \in L_*^2(0,L). && (3.24)
\end{aligned}$$

Do sistema acima, segue que

$$\begin{aligned}
\Phi &= -f_1 \in H_0^1(0,L),\\
\Psi &= -f_3 \in H_*^1(0,L),\\
W &= -f_5 \in H_*^1(0,L).
\end{aligned}$$

Então, nos resta mostrar que existem ϕ, ψ, ω soluções de

$$\begin{aligned}
-k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= f, && (3.25)\\
f &:= \rho_1 f_2 - \gamma_1(f_{1x} + f_3 + lf_5)_x - l\gamma_3(f_{5x} - lf_1) \in H^{-1}(0,L)\\
-b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) &= g, && (3.26)\\
g &:= \rho_2 f_4 - \gamma_2 f_{3xx} + \gamma_1(f_{1x} + f_3 + lf_5) \in H^{-1}(0,L)\\
lk(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= h, && (3.27)\\
h &:= \rho_1 f_6 + l\gamma_1(f_{1x} + f_3 + lf_5) - \gamma_3(f_{5x} - lf_1)_x \in H^{-1}(0,L),
\end{aligned}$$

satisfazendo

$$\phi(0) = \phi(L) = \psi_x(0) = \psi_x(L) = \omega_x(0) = \omega_x(L) = 0. \quad (3.28)$$

Consideremos, então, a forma bilinear $a_2 = W_2 \times W_2 \to \mathbb{C}$, definida por

$$\begin{aligned} a_2((\phi,\psi,\omega),(\tilde{\phi},\tilde{\psi},\tilde{\omega})) &= k\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)(\overline{\tilde{\phi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{\omega}})dx \\ &\quad +k_0\int_0^L(\omega_x-l\phi)(\overline{\tilde{\omega}_x-l\tilde{\phi}})dx+b\int_0^L\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}dx, \end{aligned} \tag{3.29}$$

em que $W_2 = H_0^1(0,L)\times H_*^1(0,L)\times H_*^1(0,L)$.
Temos que a_2 é contínua e coerciva no espaço de Hilbert $W_2\times W_2$, logo, pelo teorema de Lax-Milgram, existe única solução para o problema variacional

$$a_2((\phi,\psi,\omega),(\tilde{\phi},\tilde{\psi},\tilde{\omega})) = \langle (f,g,h),(\tilde{\phi},\tilde{\psi},\tilde{\omega})\rangle, \quad \forall(\tilde{\phi},\tilde{\psi},\tilde{\omega})\in W_2,$$

em que $(f,g,h)\in H^{-1}(0,L)\times H^{-1}(0,L)\times H^{-1}(0,L)$.
Portanto, existe única $U\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ tal que

$$-\mathcal{A}_2 U = F.$$

(ii) $-\mathcal{A}_2$ é um operador limitado em $\mathcal{H}_2$.
Integrando de 0 a L, em relação a x, o produto de (3.21) por $\overline{\Psi}$ obtemos

$$\int_0^L|\Psi|^2dx \;\le\; \widetilde{C}_{\epsilon_1}\int_0^L|f_3|^2dx + C\epsilon_1\int_0^L|\Psi|^2dx, \quad \forall\epsilon_1>0. \tag{3.30}$$

Assim, tomando $\epsilon_1>0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\rho_2\int_0^L|\Psi|^2dx \;\le\; \hat{C}_1\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}. \tag{3.31}$$

Do produto de (3.20), (3.22), (3.24) por $\overline{\phi}$, $\overline{\psi}$ e $\overline{\omega}$, respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\int_0^L|S|^2dx+\frac{1}{k_0}\int_0^L|N|^2dx+b\int_0^L|\psi_x|^2dx &= -\frac{\gamma_1}{k}\int_0^L(\Phi_x+\Psi+lW)(\overline{S})dx \\ &\quad -\gamma_2\int_0^L\Psi_x\overline{\psi}_xdx-\frac{\gamma_3}{k_0}\int_0^L(W_x-l\Phi)(\overline{N})dx \\ &\quad +\rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}dx+\rho_2\int_0^L f_4\overline{\psi}dx \\ &\quad +\rho_1\int_0^L f_6\overline{\omega}dx. \end{aligned}$$

Logo, por (3.19), (3.21) e (3.23), temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k}\int_0^L |S|^2dx + \frac{1}{k_0}\int_0^L |N|^2dx + b\int_0^L |\psi_x|^2dx \leq\ & \frac{\gamma_1}{k}\int_0^L |f_{1x}+f_3+lf_5||\overline{S}|dx \\
&+\gamma_2\int_0^L |f_{3x}||\overline{\psi}_x|dx \\
&+\frac{\gamma_3}{k_0}\int_0^L |f_{5x}-lf_1||\overline{N}|dx + \rho_1\int_0^L |f_2||\overline{\phi}|dx \\
&+\rho_2\int_0^L |f_4||\overline{\psi}|dx + \rho_1\int_0^L |f_6||\overline{\omega}|dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k}\int_0^L |S|^2dx + \frac{1}{k_0}\int_0^L |N|^2dx + b\int_0^L |\psi_x|^2dx \leq\ & C_{\epsilon_2}\int_0^L |f_{1x}+f_3+lf_5|^2dx \\
&+C_{\epsilon_2}\int_0^L |f_{3x}|^2dx + C_{\epsilon_2}\int_0^L |f_{5x}-lf_1|^2dx \\
&+C_{\epsilon_2}\int_0^L |f_2|^2dx + C_{\epsilon_2}\int_0^L |f_4|^2dx \\
&+C_{\epsilon_2}\int_0^L |f_6|^2dx + C_{\epsilon_2}\int_0^L |f_{3x}|^2dx \\
&+\epsilon_2\int_0^L |S|^2dx + \epsilon_2\int_0^L |\psi_x|^2dx \\
&+\epsilon_2\int_0^L |N|^2dx + \epsilon_2\int_0^L |\phi|^2dx \\
&+\epsilon_2\int_0^L |\psi|^2dx\epsilon_2\int_0^L |\omega|^2dx.
\end{aligned}
$$

Usando a equivalência entre a norma $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$ e a norma usual de $\mathcal{H}_2$, e tomando $\epsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$
k\int_0^L |\phi_x+\psi+l\omega|^2dx + b\int_0^L |\psi_x|^2dx + k_0\int_0^L |\omega_x - l\phi|^2dx \ \leq\ \hat{C}_2\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}.
$$

Portanto,

$$
\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq K\|F\|_{\mathcal{H}_2},
$$

para constante positiva K que independe de U, de onde segue que $\|\mathcal{A}_2^{-1}\| \leq K$.
Como $0 \in \varrho(\mathcal{A}_2)$, temos que $R(\lambda I - \mathcal{A}_2) = \mathcal{H}_2$, para λ pequeno. Pelo teorema de Lummer-Philips, $\mathcal{A}_2$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$, para $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$ e $\gamma_3 \geq 0$. $\square$

Sob estas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.2 *Se os dados iniciais* $(\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$*, então existe única solução de (3.36), satisfazendo*

$$(\phi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W) \in C([0, +\infty]; \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)) \cap C^1([0, +\infty]; \mathcal{H}_2).$$

Para caso em que a viscosidade elástica é inserida diretamente nas equações, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 && (3.32)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0 && (3.33)\\ \rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + \psi + l\omega) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0. && (3.34) \end{aligned}$$

Seja $\widetilde{\mathcal{A}}_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ o operador linear definido por

$$\widetilde{\mathcal{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{l^2k_0}{\rho_1}I & \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\partial_x^2 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{l(k+k_0)}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{-k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2}I & \frac{\gamma_2'}{\rho_2}\partial_x^2 & -\frac{lk}{\rho_2}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{l(k+k_0)}{\rho_1}\partial_x & 0 & -\frac{lk}{\rho_1}I & 0 & \frac{k_0}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{l^2k}{\rho_1}I & \frac{\gamma_3'}{\rho_1}\partial_x^2 \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

com domínio

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2) \;=\; & \big\{U \in \mathcal{H}_2 | \Phi \in H_0^1(0, L), \Psi, W \in H_*^1(0, L), b\psi_x + \gamma_2'\Psi_x, k_0\omega_x + \gamma_3'W_x \in H_0^1(0, L), \\ & k\phi + \gamma_1'\Phi \in H^2(0, L)\big\}. \end{aligned}$$

Com as notações acima, o sistema de vigas de Bresse viscoelástico (3.32)–(3.34) pode ser reescrito como um sistema de primeira ordem sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$:

$$U_t(t) = \widetilde{\mathcal{A}}_2 U(t), \qquad U(0) = U_0 \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2), \tag{3.36}$$

correspondendo às condições de contorno mistas Dirichlet-Neumann-Neumann dada em (3.8), em que $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t$.
Seguindo os mesmo passos da demonstração do teorema 3.1.1, obtemos o seguinte resul-

tado:

Teorema 3.1.3 *O operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, dado em (3.35), é o gerador infinitesimal de um semi-grupo C_0 de contrações $T(t) = e^{\widetilde{\mathcal{A}}_2 t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$, para $\gamma_1' \geq 0$, $\gamma_2' \geq 0$ e $\gamma_3' \geq 0$.*

Demonstração: Temos que o operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ é um operador dissipativo.
De fato, seja $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$,
Denotando $S = k(\phi_x + \psi + l\omega)$ e $N = k_0(\omega_x - l\phi)$, temos que

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U \right\rangle_{\mathcal{H}_2} =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1} S_x + \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\Phi_{xx} + l\frac{1}{\rho_1}N \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{1}{\rho_2}S + \frac{\gamma_2'}{\rho_2}\Psi_{xx} \\ W \\ -\frac{l}{\rho_1}S + \frac{1}{\rho_1}N_x + \frac{\gamma_3'}{\rho_1}W_{xx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \\ \omega \\ W \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_2}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \rho_1 \int_0^L [\frac{1}{\rho_1} S_x + \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\Phi_{xx} + l\frac{1}{\rho_1}N]\overline{\Phi}\, dx \\ & +\rho_2 \int_0^L [\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{1}{\rho_2}S + \frac{\gamma_2'}{\rho_2}\Psi_{xx}]\overline{\Psi}\, dx \\ & +\rho_1 \int_0^L [-l\frac{1}{\rho_1}S + \frac{1}{\rho_1}N_x + \frac{\gamma_3'}{\rho_1}W_{xx}]\overline{W}\, dx \\ & +b\int_0^L \Psi_x \overline{\psi_x}\, dx + \int_0^L [\Phi_x + lW + \Psi][\overline{S}]\, dx + \int_0^L [W_x - l\Phi][\overline{N}]\, dx. \end{aligned}$$

De onde segue que

$$Re\left\langle \widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U \right\rangle_{\mathcal{H}_2} \;=\; -\gamma_1' \int_0^L |\Phi_x|^2 dx - \gamma_2' \int_0^L |\Psi_x|^2 dx - \gamma_3' \int_0^L |W_x|^2 dx \leq 0. \quad (3.37)$$

Logo, $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ é dissipativo.
Temos também que $0 \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
De fato:

(i) $-\widetilde{\mathcal{A}}_2$ é bijetivo.
Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^t \in \mathcal{H}_2$, vamos mostrar que existe única $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W)^t \in$

$\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ tal que

$$-\widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F.$$

Então, devemos ter

$$\begin{aligned}
-\Phi &= f_1 \in H_0^1(0,L), && (3.38)\\
-\frac{1}{\rho_1}S_x - \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\Phi_{xx} - \frac{l}{\rho_1}N &= f_2 \in L^2(0,L), && (3.39)\\
-\Psi &= f_3 \in H_*^1(0,L), && (3.40)\\
-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{1}{\rho_2}S - \frac{\gamma_2'}{\rho_2}\Psi_{xx} &= f_4 \in L_*^2(0,L), && (3.41)\\
-W &= f_5 \in H_*^1(0,L), && (3.42)\\
\frac{l}{\rho_1}S - \frac{1}{\rho_1}N_x - \frac{\gamma_3'}{\rho_1}W_{xx} &= f_6 \in L_*^2(0,L). && (3.43)
\end{aligned}$$

Do sistema acima, segue que

$$\begin{aligned}
\Phi &= -f_1 \in H_0^1(0,L),\\
\Psi &= -f_3 \in H_*^1(0,L),\\
W &= -f_5 \in H_*^1(0,L).
\end{aligned}$$

Então, nos resta mostrar que existem ϕ, ψ, ω soluções de

$$\begin{aligned}
-k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= f, && (3.44)\\
f &:= \rho_1 f_2 - \gamma_1' f_{1xx} \in H^{-1}(0,L)\\
-b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) &= g, && (3.45)\\
g &:= \rho_2 f_4 - \gamma_2' f_{3xx} \in H^{-1}(0,L)\\
lk(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= h, && (3.46)\\
h &:= \rho_1 f_6 - \gamma_3' f_{5xx} \in H^{-1}(0,L),
\end{aligned}$$

satisfazendo

$$\phi(0) = \phi(L) = \psi_x(0) = \psi_x(L) = \omega_x(0) = \omega_x(L) = 0. \quad (3.47)$$

Seja $\widetilde{a}_2 = W_2 \times W_2 \to \mathbb{C}$, a forma bilinear definida por

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_2((\phi,\psi,\omega),(\tilde{\phi},\tilde{\psi},\tilde{\omega})) &= k\int_0^L (\phi_x + \psi + l\omega)(\overline{\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}})dx\\
&\quad + k_0\int_0^L (\omega_x - l\phi)(\overline{\tilde{\omega}_x - l\tilde{\phi}})dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}dx, \quad (3.48)
\end{aligned}$$

em que $W_2 = H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \times H_*^1(0,L)$.
Temos que $\widetilde{a}_2$ é contínua e coerciva no espaço de Hilbert $W_2 \times W_2$. Logo, pelo teorema de Lax-Milgram, existe única solução para o problema variacional

$$\widetilde{a}_2((\phi,\psi,\omega),(\tilde{\phi},\tilde{\psi},\tilde{\omega})) = \langle (f,g,h),(\tilde{\phi},\tilde{\psi},\tilde{\omega})\rangle, \quad \forall (\tilde{\phi},\tilde{\psi},\tilde{\omega}) \in W_2,$$

em que $(f,g,h) \in H^{-1}(0,L) \times H^{-1}(0,L) \times H^{-1}(0,L)$.
Logo, existe única $U \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$ tal que

$$-\widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F.$$

(ii) $-\widetilde{\mathcal{A}}_2$ é um operador limitado em $\mathcal{H}_2$.
Do produto de (3.40) por $\overline{\Psi}$ segue que

$$\int_0^L |\Psi|^2 dx \;\; \leq \;\; \widetilde{C}_{\epsilon_1} \int_0^L |f_3|^2 dx + C\epsilon_1 \int_0^L |\Psi|^2 dx, \quad \forall \epsilon_1 > 0.$$

Assim, tomando $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 dx \;\; \leq \;\; \hat{C}_1 \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Do produto de (3.39), (3.41), (3.43) por $\overline{\phi}$, $\overline{\psi}$ e $\overline{\omega}$, respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\int_0^L |S|^2 dx + \frac{1}{k_0}\int_0^L |N|^2 dx + b\int_0^L |\psi_x|^2 dx \;\; = \;\; & -\frac{\gamma_1'}{k}\int_0^L \Phi_x \overline{\phi_x} dx \\ & -\gamma_2' \int_0^L \Psi_x \overline{\psi}_x dx - \frac{\gamma_3'}{k_0}\int_0^L W_x \overline{\omega_x} dx \\ & +\rho_1 \int_0^L f_2 \overline{\phi} dx + \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{\psi} dx \\ & +\rho_1 \int_0^L f_6 \overline{\omega} dx.\end{aligned}$$

Logo, por (3.38), (3.40) e (3.42), segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\int_0^L |S|^2 dx + \frac{1}{k_0}\int_0^L |N|^2 dx + b\int_0^L |\psi_x|^2 dx \;\; \leq \;\; & \frac{\gamma_1'}{k}\int_0^L |f_{1x}||\overline{\phi_x}| dx \\ & +\gamma_2' \int_0^L |f_{3x}||\overline{\psi}_x| dx \\ & +\frac{\gamma_3'}{k_0}\int_0^L |f_{5x}||\overline{\omega_x}| dx + \rho_1 \int_0^L |f_2||\overline{\phi}| dx \\ & +\rho_2 \int_0^L |f_4||\overline{\psi}| dx + \rho_1 \int_0^L |f_6||\overline{\omega}| dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$k\int_0^L |\phi_x+\psi+l\omega|^2dx + b\int_0^L |\psi_x|^2dx + k_0\int_0^L |\omega_x - l\phi|^2dx \ \ \leq \ \ \hat{C}_2\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}.$$

Assim, mostramos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq K\|F\|_{\mathcal{H}_2},$$

para constante $K>0$ que independe de U. Portanto,

$$\|\widetilde{\mathcal{A}}_2^{-1}\| \leq K.$$

Como $0 \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, temos que $R(\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_2) = \mathcal{H}_2$, para λ pequeno. Portanto, pelo teorema de Lummer-Philips, $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$, para $\gamma_1' \geq 0$, $\gamma_2' \geq 0$ e $\gamma_3' \geq 0$.

□

Capítulo 4

Vigas de Bresse com três viscoelasticidades

Neste capítulo, vamos analisar o decaimento das soluções do sistema de Bresse viscoelástico em que o mecanismo dissipativo age efetivamente em todas as equações do sistema. Estudaremos o caso em que as viscoelasticidades são introduzidas nas leis constitutivas do modelo, ou seja, estudaremos o sistema

$$
\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_{xt} - \gamma_3 l(\omega_x - l\phi)_t &= 0\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi+l\omega) + \gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_t - \gamma_2\psi_{xxt} &= 0\\
\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x+\psi+l\omega) - \gamma_3(\omega_x - l\phi)_{xt} + l\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_t &= 0,
\end{aligned}
$$

com $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ e $\gamma_3 > 0$.

Também estudaremos o sistema obtido acrescentando-se as três dissipações viscoelásticas diretamente nas equações, que é dado por

$$
\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi+l\omega) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0\\
\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x+\psi+l\omega) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0,
\end{aligned}
$$

em que com $\gamma_1' > 0$, $\gamma_2' > 0$ e $\gamma_3' > 0$.

Já vimos, no capítulo anterior, que os operadores diferenciais associados aos sistemas dados acima são geradores infinitesimais de semigrupos C_0 de contrações sobre os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_2$. Portanto, os problemas estão bem postos.

Vamos mostrar que, neste caso, o efeito dissipativo produzido pelas três viscosidades elásticas é forte o suficiente para gerar um semigrupo analítico. Em particular, as soluções do sistema decaem exponencialmente.

Observamos que obtivemos o mesmo resultado quando também consideramos viscoelasticidades agindo efetivamente em todas as equações do sistema de Timoshenko.

4.1 Viscoelasticidades nas leis constitutivas

Vamos considerar o sistema de Bresse dado por

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} - \gamma_3 l(w_x - l\phi)_t &= 0\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t - \gamma_2\psi_{xxt} &= 0\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3(w_x - l\phi)_{xt} + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0,
\end{aligned}$$

sobre $(0, L) \times (0, \infty)$, com $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ e $\gamma_3 > 0$, e seu respectivo operador $\mathcal{A}_2$ dado em (3.16).

4.1.1 Analiticidade

Lema 9 *$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.*

Demonstração: Vamos supor que $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$. Como $0 \in \varrho(\mathcal{A}_2)$, temos pelo lema 3, que existe $w \in \mathbb{R}$ com $\| \mathcal{A}_2^{-1} \| \leq |w| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \rho(\mathcal{A}_2) \text{ e } sup\{\| (i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1} \|; |\beta| < |w|\} = \infty.$$

Segue então, que existem sequências $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to w$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |w|$ e $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ com $\| y_n \|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\| (i\beta_n I - \mathcal{A}_2)y_n \|_{\mathcal{H}_2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim, seguem as seguintes convergências em $L^2(0, L)$:

$$i\rho_1\beta_n\Phi^n - S^n_x - lN^n \to 0 \tag{4.1}$$
$$i\rho_2\beta_n\Psi^n - b\psi^n_{xx} - \gamma_2\Psi^n_{xx} + S^n \to 0 \tag{4.2}$$
$$i\rho_1\beta_n W^n + lS^n - N^n_x \to 0 \tag{4.3}$$
$$i\beta_n\psi^n_x - \Psi^n_x \to 0 \tag{4.4}$$
$$i\beta_n(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) - (\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n) \to 0 \tag{4.5}$$
$$i\beta_n(\omega^n_x - l\phi^n) - (W^n_x - l\Phi^n) \to 0 \tag{4.6}$$

com $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$, em que

$$S^n = k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) + \gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n),$$

e

$$N^n = k_0(\omega^n_x - l\phi^n) + \gamma_3(W^n_x - l\Phi^n).$$

Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)y_n$ por y_n, obtemos que

$$\begin{aligned} Re\langle i\beta_n I - \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} &= -Re\langle \mathcal{A}_j y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \gamma_1\|\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n\|_{L^2} + \gamma_2\|\Psi_x^n\|_{L^2}^2 + \gamma_3\|W_x^n - l\Phi^n\|_{L^2} \to 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{4.7}$$

$$W_x^n - l\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{4.8}$$

e,

$$\Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{4.9}$$

e portanto, pela desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{4.10}$$

Utilizando as últimas convergências em (4.4), (4.5) e (4.6), obtemos, respectivamente,

$$\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{4.11}$$

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{4.12}$$

e,

$$\omega_x^n - l\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{4.13}$$

De (4.1), segue que

$$i\rho_1\beta_n\|\Phi^n\|_{L^2}^2 + \int_0^L S^n\overline{\Phi_x}dx - l\int_0^L N^n\overline{\Phi_x}dx \to 0.$$

Logo, pelas convergências anteriores, temos que

$$\|\Phi^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Por (4.3), temos que

$$i\rho_1\beta_n\|W^n\|_{L^2}^2 + l\int_0^L S^n\overline{W^n}dx + \int_0^L N^n\overline{W_x^n}dx \to 0.$$

Logo,

$$\|W^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Portanto, $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$.
Logo, temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
□

Teorema 4.1.1 *O semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}_2$ dado em* (3.16)*, em que $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ e $\gamma_3 > 0$, é analítico.*

Demonstração: Pelo teorema 1.3.5, é suficiente mostrarmos que

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2) \tag{4.14}$$

e

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty}||\beta(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}|| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$, pelo lema (9).
Agora, devemos mostrar que

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty}\|\beta(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}\| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

De fato, se não vale (4.16),então existem sequências $(U_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$, $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \infty$ tais que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\beta_n^{-1}(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)U_n\right\|_{\mathcal{H}_2} \to 0. \tag{4.17}$$

Neste caso, valem em $L^2(0, L)$ as seguintes convergências:

$$\beta_n^{-1}\{i\rho_1\beta_n\Phi^n - S_x^n - lN^n\} \to 0 \tag{4.18}$$

$$\beta_n^{-1}\{i\rho_2\beta_n\Psi^n - b\psi_{xx}^n - \gamma_2\Psi_{xx}^n + S^n\} \to 0 \tag{4.19}$$

$$\beta_n^{-1}\{i\rho_1\beta_n W^n + lS^n - N_x^n\} \to 0 \tag{4.20}$$

$$\beta_n^{-1}\{i\beta_n\psi_x^n - \Psi_x^n\} \to 0 \tag{4.21}$$

$$\beta_n^{-1}\{i\beta_n(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - (\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n)\} \to 0 \tag{4.22}$$

$$\beta_n^{-1}\{i\beta_n(\omega_x^n - l\phi^n) - (W_x^n - l\Phi^n)\} \to 0 \tag{4.23}$$

com $U_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$, em que

$$S^n = k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) + \gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n)$$

e

$$N^n = k_0(\omega^n_x - l\phi^n) + \gamma_3(W^n_x - l\Phi^n).$$

Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $\beta_n^{-1}(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)U_n$ com U_n, obtemos que

$$\begin{aligned} Re\left\langle \beta_n^{-1} i\beta_n U_n - \beta_n^{-1}\mathcal{A}_2 U_n, U_n\right\rangle_{\mathcal{H}_2} &= -\beta_n^{-1} Re\langle \mathcal{A}_2 U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \gamma_1\|\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Phi^n_x + \Psi^n + lW)\|^2_{L^2} + \gamma_2\|\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi^n_x\|^2_{L^2} \\ &\quad +\gamma_3\|\beta_n^{-\frac{1}{2}}(W^n_x - l\Phi^n)\|^2_{L^2} \to 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}(\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{4.24}$$

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}(W^n_x - l\Phi^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{4.25}$$

e,

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{4.26}$$

Usando as três últimas convergências em (4.21), (4.22) e (4.23), obtemos, respectivamente, que

$$\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

$$\omega^n_x - l\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e,

$$\psi^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Da convergência (4.18) segue que

$$i\rho_1\|\Phi^n\|^2_{L^2} + \beta_n^{-\frac{1}{2}}\int_0^L S^n\overline{(\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Phi^n_x)}dx - l\beta_n^{-1}\int_0^L N^n\overline{\Phi^n}dx \to 0.$$

De (4.24) segue que $(\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Phi_x^n)_n$ é uma sequência uniformemente limitada em $L^2(0,L)$. Portanto, obtemos que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

De (4.19) obtemos que

$$i\rho_2\|\Psi^n\|_{L^2}^2 + b\int_0^L \beta_n^{-\frac{1}{2}}\psi_x^n\overline{(\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi_x)}dx + \beta_n^{-1}\gamma_2\|\Psi_x^n\|_{L^2}^2 + \beta_n^{-1}\int_0^L S^n\overline{\Psi}dx \to 0,$$

e portanto,

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Pela convergência (4.20), obtemos que

$$i\rho_1\|W^n\|_{L^2}^2 + l\beta_n^{-1}\int_0^L S^n\overline{W^n}dx + \beta_n^{-\frac{1}{2}}\int_0^L N(\beta_n^{-\frac{1}{2}}\overline{W_x^n})dx \to 0.$$

De (4.25) concluímos que a sequência $(\beta_n^{-\frac{1}{2}}W_x^n)_n$ é uniformemente limitada em $L^2(0,L)$. Portanto, temos que

$$W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Assim, mostramos que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$. Logo, temos que

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty}\|\beta(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}\| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{4.27}$$

Portanto, o semigrupo é analítico. □

Em particular, seguem os seguintes resultados:

Corolário 4.1.1.1 *O sistema é exponencialmente estável.*

Corolário 4.1.1.2 *O semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}_2$, dado em (3.16), com $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ e $\gamma_3 > 0$, possui a propriedade da estabilidade linear.*

4.2 Amortecimento viscoelástico no sistema

Aqui, vamos estudar o sistema de Bresse com três dissipações viscoelásticas adicionadas diretamente nas equações do sistema. Neste caso, obtemos o mesmo resultado da seção anterior: o semigrupo do sistema com três viscoelasticidades é analítico.

4.2.1 Analiticidade

Neste caso, vamos considerar o sistema

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3' w_{xxt} &= 0,
\end{aligned}$$

sobre $(0, L) \times (0, \infty)$, com $\gamma_1' > 0$, $\gamma_2' > 0$ e $\gamma_3' > 0$.

Lema 10 *Consideremos o operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ dado em* (3.35)*, para $\gamma_1' > 0$, $\gamma_2' > 0$ e $\gamma_3' > 0$. Então, temos que*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2).$$

Demonstração: Suponhamos que $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$. Então, como $0 \in \varrho(\mathcal{A}_2)$, segue do lema 3, que existe $w \in \mathbb{R}$ com $\| \widetilde{\mathcal{A}}_2^{-1} \| \leq |w| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2) \text{ e } sup\{\| (i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1} \|; |\beta| < |w|\} = \infty.$$

Segue então, que existem sequências $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to w$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |w|$ e $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$ com $\| y_n \|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\| (i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2) y_n \|_{\mathcal{H}_2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Neste caso, seguem as seguintes convergências em $L^2(0, L)$:

$$i\rho_1\beta_n\Phi^n - S_x^n - lN^n \to 0 \tag{4.28}$$

$$i\rho_2\beta_n\Psi^n - b\psi_{xx}^n - \gamma_2'\Psi_{xx}^n + S^n \to 0 \tag{4.29}$$

$$i\rho_1\beta_n W^n + lS^n - N_x^n \to 0 \tag{4.30}$$

$$i\beta_n\psi_x^n - \Psi_x^n \to 0 \tag{4.31}$$

$$i\beta_n(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - (\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n) \to 0 \tag{4.32}$$

$$i\beta_n(\omega_x^n - l\phi^n) - (W_x^n - l\Phi^n) \to 0 \tag{4.33}$$

com $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$, em que

$$S^n = k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \gamma_1'\Phi_x^n,$$

e

$$N^n = k_0(\omega_x^n - l\phi^n) + \gamma_3' W_x^n.$$

Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)y_n$ por y_n, obtemos que

$$\begin{aligned} Re\langle i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_j} &= -Re\langle \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \gamma_1'\|\Phi_x^n\|_{L^2} + \gamma_2'\|\Psi_x^n\|_{L^2}^2 + \gamma_3'\|W_x^n\|_{L^2} \to 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

$$W_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

e,

$$\Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e logo, pela desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

$$W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Assim, das convergências (4.31), (4.32) e (4.33) obtemos, respectivamente, que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

$$\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\omega_x^n - l\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Portanto, acabamos de mostrar que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$.

Logo, concluímos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
□

Teorema 4.2.1 *O semigrupo gerado pelo operador* $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ *dado em* (3.35)*, em que* $\gamma_1' > 0$*,* $\gamma_2' > 0$ *e* $\gamma_3' > 0$*, é analítico.*

Demonstração: Assim como no teorema anterior, faremos uso do teorema 1.3.5.
Pelo teorema 1.3.5, o semigrupo gerado pelo operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ é analítico se, e somente se,

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2) \tag{4.34}$$

e

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty} ||\beta(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}|| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{4.35}$$

Já mostramos, no lema anterior, que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Para completarmos a demonstração, devemos mostrar que

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty} \|\beta(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{4.36}$$

Vamos supor que (4.36) não seja verdade. Então, existem sequências $(U_n)_n \subset \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$, $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \infty$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \beta_n^{-1}(i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)U_n \right\|_{\mathcal{H}_2} \to 0. \tag{4.37}$$

Assim, valem as seguintes convergências em $L^2(0, L)$:

$$\beta_n^{-1}\{i\rho_1\beta_n\Phi^n - S_x^n - lN^n\} \to 0 \tag{4.38}$$

$$\beta_n^{-1}\{i\rho_2\beta_n\Psi^n - b\psi_{xx}^n - \gamma_2'\Psi_{xx}^n + S^n\} \to 0 \tag{4.39}$$

$$\beta_n^{-1}\{i\rho_1\beta_n W^n + lS^n - N_x^n\} \to 0 \tag{4.40}$$

$$\beta_n^{-1}\{i\beta_n\psi_x^n - \Psi_x^n\} \to 0 \tag{4.41}$$

$$\beta_n^{-1}\{i\beta_n(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - (\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n)\} \to 0 \tag{4.42}$$

$$\beta_n^{-1}\{i\beta_n(\omega_x^n - l\phi^n) - (W_x^n - l\Phi^n)\} \to 0 \tag{4.43}$$

com $U_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$, em que novamente

$$S^n = k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \gamma_1'\Phi_x^n$$

e

$$N^n = k_0(\omega_x^n - l\phi^n) + \gamma_3' W_x^n.$$

Do produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $\beta_n^{-1}(i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)U_n$ com U_n, segue que

$$\begin{aligned} Re\Big\langle \beta_n^{-1} i\beta_n U_n - \beta_n^{-1}\widetilde{\mathcal{A}}_2 U_n, U_n \Big\rangle_{\mathcal{H}_2} &= -\beta_n^{-1} Re\Big\langle \widetilde{\mathcal{A}}_2 U_n, U_n \Big\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \gamma_1' \|\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Phi_x^n\|_{L^2}^2 + \gamma_2'\|\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi_x^n\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \gamma_3'\|\beta_n^{-\frac{1}{2}} W_x^n\|_{L^2}^2 \to 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{4.44}$$

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}} W_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{4.45}$$

e,

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{4.46}$$

Assim, da desigualdade de Poincaré, resulta que

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}} W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e,

$$\beta_n^{-\frac{1}{2}}\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Usando as convergências acima em (4.41), (4.42) e (4.43), concluímos que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

$$\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\omega_x^n - l\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Da convergência (4.38) segue que

$$i\rho_1\|\Phi^n\|_{L^2}^2 + \beta_n^{-\frac{1}{2}}\int_0^L S^n(\beta_n^{-\frac{1}{2}}\overline{\Phi_x^n})dx - l\beta_n^{-1}\int_0^L N^n\overline{\Phi^n}dx \to 0,$$

logo,

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Já da convergência (4.39), obtemos que

$$i\rho_2\|\Psi^n\|_{L^2}^2 + b\beta_n^{-\frac{1}{2}}\int_0^L \psi_x^n(\beta_n^{-\frac{1}{2}}\overline{\Psi_x^n})dx + \gamma_2'\beta_n^{-1}\int_0^L \|\Psi_x^n\|^2 + \beta_n^{-1}\int_0^L S^n\overline{\Psi^n}dx \to 0,$$

de onde segue que

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Por (4.40), temos que

$$i\rho_1\|W^n\|_{L^2}^2 + l\beta_n^{-1}\int_0^L S^n\overline{W^n}dx + \beta_n^{-\frac{1}{2}}\int_0^L N^n(\beta_n^{-\frac{1}{2}}\overline{W_x^n})dx \to 0,$$

e logo,

$$W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Assim, mostramos que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que é uma contradição, já que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$, para todo n.
Portanto, temos que

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty}\|\beta(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Logo, o semigrupo é analítico. $\square$

Corolário 4.2.1.1 *O sistema é exponencialmente estável.*

Corolário 4.2.1.2 *O semigrupo gerado pelo operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, dado em (3.35), com $\gamma_1' > 0$, $\gamma_2' > 0$ e $\gamma_3' > 0$, possui a propriedade da estabilidade linear.*

Capítulo 5

Vigas de Bresse com duas viscoelasticidades

Vamos investigar, neste capítulo, o comportamento assintótico das soluções do sistema de vigas de Bresse com duas viscosidades elásticas agindo sobre o sistema.
Assim como no capítulo anterior, vamos analisar o sistema com dissipações introduzidas no problemas através das leis constituivas do modelo, bem como introduzidas diretamente nas equações.
Portanto, vamos estudar os sistemas de Bresse viscoelásticos dados por

$$
\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_{xt} - \gamma_3 l(\omega_x - l\phi)_t &= 0\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi+l\omega) + \gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_t - \gamma_2\psi_{xxt} &= 0\\
\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x+\psi+l\omega) - \gamma_3(\omega_x - l\phi)_{xt} + l\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_t &= 0,
\end{aligned}
$$

em que $\gamma_i > 0$, $\gamma_j > 0$ e $\gamma_k = 0$, para $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ distintos, e também os sistemas

$$
\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi+l\omega) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0\\
\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x+\psi+l\omega) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0,
\end{aligned}
$$

com $\gamma_i' > 0$, $\gamma_j' > 0$ e $\gamma_k' = 0$, para $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ distintos.
Pelos teoremas 3.1.1 e 3.1.3, temos que os operadores $\mathcal{A}_2$ e $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, associados aos sistemas acima, dados respectivamente, por (3.16) e (3.35) são geradores infinitesimais de semigrupos C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$.
Vamos provar que o sistema com duas dissipações, independentemente sobre quais equações agem efetivamente, nunca decai de forma exponencial. Mostraremos também, que neste caso, o mecanismo dissipativo será capaz de produzir decaimento polinomial com taxa ótima igual a $\tau = \dfrac{1}{2}$ em todos os casos.

5.1 Viscoelasticidade sobre estresse cortante e momento fletor

Esta seção trata-se do estudo do comportamento assintótico do sistema de Bresse sob a ação de duas viscosidades elásticas que agem efetivamente no estresse cortante e no momento fletor.

5.1.1 Viscoelasticidades nas leis constitutivas

Vamos analisar o efeito dissipativo causado por duas viscosidades elásticas inseridas no sistema de vigas de Bresse através das leis constitutivas do modelo, considerando as dissipações agindo sobre o estresse por corte e no momento fletor.
Vamos estudar então, o sistema

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} = 0 \tag{5.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t - \gamma_2\psi_{xxt} = 0 \tag{5.2}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t = 0, \tag{5.3}$$

em $(0, L) \times (0, \infty)$, em que $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$.

Falta de estabilidade exponencial

Teorema 5.1.1 *Seja (ϕ, ψ, ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse (5.1)–(5.3) com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann, e condições iniciais* (3.7)*. Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L \psi_0 dx = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L \omega_0 dx = \int_0^L \omega_1 dx = 0$, então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}_2$, dado em* (3.16) *com $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ e $\gamma_3 = 0$, não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Vamos mostrar a existência de uma sequência numérica $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset D(\mathcal{A}_2)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n - \mathcal{A}_2)U_n = F_n \tag{5.4}$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1 \in H_0^1(0,L), \quad (5.5)\\
i\lambda_n\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega)_x - \frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x+\Psi+lW)_x - l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) &= f_2 \in L^2(0,L), \quad (5.6)\\
i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3 \in H_*^1(0,L), \quad (5.7)\\
i\lambda_n\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi+l\omega) + \frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi_x+\Psi+lW) &= f_4 \in L_*^2(0,L), \quad (5.8)\\
i\lambda_n\omega - W &= f_5 \in H_*^1(0,L), \quad (5.9)\\
i\lambda_n W + l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega) + l\frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x+\Psi+lW) - \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x &= f_6 \in L_*^2(0,L). \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Escolhemos

$$F_n = (0, \alpha\rho_1^{-1}\sin(\beta_n x), 0, \mu\rho_2^{-1}\cos(\beta_n x), 0, \nu\rho_1^{-1}\cos(\beta_n x))^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.
A sequência $(F_n)_n$ escolhida limitada em $\mathcal{H}_2$.
De fato,

$$||F_n||_{\mathcal{H}_2}^2 = \left(\frac{\alpha^2}{\rho_1} + \frac{\mu^2}{\rho_2} + \frac{\nu^2}{\rho_1}\right)\frac{L}{2}.$$

De (5.5), (5.7) e (5.9), obtemos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n\omega.$$

Substituindo as igualdades acima em (5.6), (5.8) e (5.10), obtemos

$$\begin{aligned}
-\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - i\lambda_n\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= \alpha\sin(\beta_n x) \quad (5.11)\\
-\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x+\psi+l\omega) + i\lambda_n\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega) - (b+i\lambda_n\gamma_2)\psi_{xx} &= \mu\cos(\beta_n x) \quad (5.12)\\
-\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x+\psi+l\omega) + i\lambda_n\gamma_1 l(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= \nu\cos(\beta_n x). \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Devido as condições de contorno que estamos considerando, vamos supor que

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n\sin(\beta_n x),\\
\psi_n &= B_n\cos(\beta_n x),\\
\omega_n &= C_n\cos(\beta_n x).
\end{aligned}$$

Assim, ϕ_n, ψ_n e ω_n satisfazem o sistema (5.11) - (5.13) se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_1\beta_n^2 + l^2k_0) + B_n(k\beta_n + i\lambda_n\gamma_1\beta_n) + C_n(lk\beta_n + i\lambda\gamma_1 l\beta_n + lk_0\beta_n) = \alpha$$
$$A_n(k\beta_n + i\lambda_n\gamma_1\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + i\lambda_n\gamma_1 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2) + C_n(kl + i\lambda_n\gamma_1 l) = \mu$$
$$A_n(lk\beta_n + i\lambda_n\gamma_1 l\beta_n + k_0 l\beta_n) + B_n(lk + i\lambda_n\gamma_1 l) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + i\lambda_n\gamma_1 l^2 + k_0\beta_n^2) = \nu$$

Vamos denotar

$$p_1 := -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0,$$

$$p_2 := -\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2,$$

$$p_3 := -\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2$$

e

$$q := k + i\lambda\gamma_1.$$

Com essas notações, o sistema acima pode ser reescrito por

$$M\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}, \tag{5.14}$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} p_1 + q\beta_n^2 & q\beta_n & ql\beta_n + lk_0\beta_n \\ q\beta_n & p_2 + q + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2 & ql \\ ql\beta_n + lk_0\beta_n & ql & p_3 + ql^2 \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \det\{M\} &= (p_1 + q\beta_n^2)(p_2 + q + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2)(p_3 + ql^2) + 2l^2\beta_n^2q^2(q + k_0) \\ &\quad -l^2\beta_n^2(q + k_0)^2(p_2 + q + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2) - \beta_n^2q^2(p_3 + ql^2) - l^2q^2(p_1 + q\beta_n^2) \\ &= (p_2 + q + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2)[p_1p_3 + q(l^2p_1 + \beta_n^2p_3 - 2k_0l^2\beta_n^2) - l^2\beta_n^2k_0^2] \\ &\quad +2k_0l^2\beta_n^2q^2 - \beta_nq^2p_3 - l2q^2p_1. \end{aligned}$$

Escolhemos λ_n tal que

$$p_3 = 3l^2k_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_n^2\rho_1 = k_0\beta_n^2 - 3l^2k_0.$$

Neste caso,

$$l^2 p_1 + \beta_n^2 p_3 - 2k_0 l^2 \beta_n^2 = 4l^4 k_0,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \det\{M\} &= (p_2 + q + i\lambda_n \gamma_2 \beta_n^2)[3l^2 k_0(-k_0\beta_n^2 + 4l^2 k_0) + 4l^4 k_0 q - l^2 \beta_n^2 k_0^2] \\ &\quad + 2k_0 l^2 \beta_n^2 q^2 - \beta_n q^2 p_3 - l2q^2 p_1 \\ &\approx -i4l^2 k_0^2 \lambda_n \gamma_2 \beta_n^4. \end{aligned}$$

Tomamos $\alpha = \mu = 0$ e $\nu = 1$.
Calculando os valores de A_n, B_n e C_n, encontramos

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(p_1 + \beta_n^2 q)(p_2 + q + i\lambda_n \gamma_2 \beta_n^2) - \beta_n^2 q^2}{\det\{M\}} \\ &\approx -\frac{ik_0 \gamma_1 \gamma_2 \beta_n^6}{4\rho_1 l^2 k_0^2 \lambda_n \gamma_2 \beta_n^4} \\ &= -iK\beta_n, \qquad K > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1 \|W\|_{L^2}^2 \\ &= \rho_1 \|i\lambda_n C_n \cos(\beta_n x)\|_{L^2}^2 \\ &\approx \hat{C}\beta_n^4, \qquad \hat{C} > 0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Calculando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Logo, o sistema não possui decaimento exponencial.
□

Estabilidade polinomial

Lema 11 *Seja $\mathcal{A}_2$ o operador linear do sistema*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} &= 0 \ \textit{em}\ (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t - \gamma_2\psi_{xt} &= 0 \ \textit{em}\ (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \ \textit{em}\ (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

dado em (3.16), com $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ *e* $\gamma_3 = 0$.
Então

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2).$$

Demonstração: Vamos supor, por contradição, que $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$, então, pelo lema 3, existe $\mu \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}_2^{-1}\| \leq |\mu| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |\mu|\} \subset \rho(\mathcal{A}_2) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}\|; |\beta| < |\mu|\} = \infty.$$

Logo, existem sequência $(\beta_n) \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \mu$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |\mu|$ e sequência $(y_n) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

Da equivalência entre a norma induzida pela energia $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$ e a norma usual de $\mathcal{H}_2$ $\|.\|_2$, seguem as seguintes convergências em $L^2(0, L)$:

$$i\lambda_n\phi^n - \Phi^n \to 0 \quad (5.17)$$
$$i\lambda_n\phi^n_x - \Phi^n_x \to 0 \quad (5.18)$$
$$i\lambda_n\psi^n - \Psi^n \to 0 \quad (5.19)$$
$$i\lambda_n\psi^n_x - \Psi^n_x \to 0 \quad (5.20)$$
$$i\lambda_n\omega^n - W^n \to 0 \quad (5.21)$$
$$i\lambda_n\omega^n_x - W^n_x \to 0 \quad (5.22)$$
$$i\rho_1\lambda_n\Phi^n - k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n)_x - \gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n)_x - lk_0(\omega^n_x - l\phi^n) \to 0 \quad (5.23)$$
$$i\rho_2\lambda_n\Psi^n - b\psi^n_{xx} - \gamma_2\Psi^n_{xx} + k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) + \gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n) \to 0 \quad (5.24)$$
$$i\rho_1\lambda_n W^n + lk(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) + l\gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n) - k_0(\omega^n_x - l\phi^n)_x \to 0, \quad (5.25)$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$.
Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)y_n$ por y_n, e depois tomando a parte real, temos que

$$Re\langle i\lambda_n I - \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = -Re\langle \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = \gamma_1\|\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n\|_{L^2} + \gamma_2\|\Psi^n_x\|^2_{L^2} \to 0,$$

ou seja,

$$\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (5.26)$$

e,

$$\Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{5.27}$$

o que implica, por Poincaré,

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{5.28}$$

Usando as convergências (5.18), (5.19), (5.21) e (5.26), obtemos

$$\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.29}$$

Agora, usando (5.27), (5.28) em (5.19) e (5.20), respectivamente, obtemos

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{5.30}$$

e

$$\psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.31}$$

As convergências acima implicam, em (5.25), que

$$i\rho_1\lambda_n W^n - k_0(\omega_x^n - l\phi^n)_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.32}$$

A convergência (5.23) implica que

$$(S_n)_n := (k[\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n]_x + \gamma_1[\Phi_x^n + \Psi^n + lW_x^]_n$$

é uma sequência uniformemente limitada em $L^2(0,L)$.
Tomando em $L^2(0,L)$ o produto interno de S_n por

$$i\rho_1\lambda_n\Phi^n - S_n - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n),$$

obtemos, por (5.23), que

$$\begin{aligned}
&-i\rho_1\lambda_n \int_0^L \Phi_x^n\overline{[k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \gamma_1(\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n)]}dx \\
&- \quad \|S_n\|_{L^2}^2 \\
&+ \quad lk_0 \int_0^L (\omega_x^n - l\phi^n)_x\overline{(k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \gamma_1(\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n))}dx \to 0.
\end{aligned}$$

Pelas convergências (5.26) e (5.25) temos que as sequências (Φ_x^n) e $([\omega_x^n - l\phi^n]_x)$ são uniformemente limitadas em $L^2(0, L)$, logo,

$$\|S_n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

e portanto, de (5.23), obtemos também que

$$i\rho_1\lambda_n\Phi^n - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n) \to 0 \text{ em } L^2(0, L). \tag{5.33}$$

Tomando o produto interno em $L^2(0, L)$ de

$$i\rho_1\lambda_n W^n - k_0(\omega_x^n - l\phi^n)_x$$

por $l\omega^n$, e de

$$i\rho_1\lambda_n\Phi^n - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n)$$

por ω_x^n, obtemos por (5.32) e (5.33), respectivamente,

$$i\rho_1\lambda_n l\int_0^L W^n\overline{\omega^n}dx + k_0 l\int_0^L(\omega_x^n - l\phi^n)\overline{\omega_x^n}dx \to 0 \tag{5.34}$$

e

$$i\rho_1\int_0^L \lambda_n\Phi^n\overline{\omega_x^n}dx - lk_0\int_0^L(\omega_x^n - l\phi^n)\overline{\omega_x^n}dx \to 0, \tag{5.35}$$

logo,

$$i\rho_1\lambda_n l\int_0^L W^n\left[\overline{\omega^n - \frac{1}{i\lambda_n}W^n + \frac{1}{i\lambda_n}W^n}\right]dx + k_0 l\int_0^L(\omega_x^n - l\phi^n)\overline{\omega_x^n}dx \to 0 \tag{5.36}$$

e

$$i\rho_1\int_0^L \lambda_n\Phi^n\left[\overline{\omega_x^n - \frac{1}{i\lambda_n}W_x^n + \frac{1}{i\lambda_n}W_x^n}\right]dx - lk_0\int_0^L(\omega_x^n - l\phi^n)\overline{\omega_x^n}dx \to 0, \tag{5.37}$$

e logo, por (5.21) e (5.21),

$$-\rho_1 l\|W^n\|_{L^2}^2dx + k_0 l\int_0^L(\omega_x^n - l\phi^n)\overline{\omega_x^n}dx \to 0 \tag{5.38}$$

e

$$-\rho_1\int_0^L \Phi\overline{W_x^n}dx - lk_0\int_0^L(\omega_x^n - l\phi^n)\overline{\omega_x^n}dx \to 0.$$

Somando as duas últimas convergências, obtemos

$$-\rho_1 l\|W^n\|_{L^2}^2 dx - \rho_1 \int_0^L \Phi \overline{W_x^n} dx \to 0,$$

que implica

$$-\rho_1 l\|W^n\|_{L^2}^2 + \rho_1 \int_0^L (\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n)\overline{W^n} dx - \rho_1 \int_0^L (\Psi^n + lW^n)\overline{W^n} dx \to 0. \quad (5.39)$$

Como

$$\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

temos que

$$\|W^n\|_{L^2}^2 \to 0. \quad (5.40)$$

Logo, por (5.32),

$$(\omega_x^n - l\phi^n)_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Assim, da desigualdade de Poincaré, segue que

$$\omega_x^n - l\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Como

$$i\rho_1\lambda_n\Phi^n - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

obtemos que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Assim, mostramos que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$, o que é uma contradição, já que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$. Portanto, temos que $i\mathbb{R} \in \varrho(\mathcal{A}_2)$.

□

Teorema 5.1.2 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$. *Então, a solução do problema*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} &= 0 \ \textit{em} \ (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t - \gamma_2\psi_{xt} &= 0 \ \textit{em} \ (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \ \textit{em} \ (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}. \tag{5.41}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2^\alpha)$, *então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2^\alpha)}. \tag{5.42}$$

Demonstração: Pelo lema anterior, temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
Para completarmos a demonstração, consideremos a equação

$$i\beta U - \mathcal{A}_2 U = F,$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^t \in \mathcal{H}_2$ e $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$.
Em relação as componentes, temos que

$$\begin{aligned} i\beta\phi - \Phi &= f_1 && (5.43) \\ i\beta\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - \gamma_1(\Phi_x + \Psi + lW)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= \rho_1 f_2 && (5.44) \\ i\beta\psi - \Psi &= f_3 && (5.45) \\ i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} - \gamma_2\Psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) + \gamma_1(\Phi_x + \Psi + lW) &= \rho_2 f_4 && (5.46) \\ i\beta\omega - W &= f_5 && (5.47) \\ i\beta\rho_1 W + kl(\phi_x + \psi + l\omega) + \gamma_1 l(\Phi_x + \Psi + lW) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= \rho_1 f_6. && (5.48) \end{aligned}$$

Temos que $Re\{\langle \mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = -\gamma_1\|\Phi_x + \Psi + lW\|_{L^2}^2 - \gamma_2\|\Psi_x\|_{L^2}^2$, logo,

$$\gamma_1\|\Phi_x + \Psi + lW\|^2 \leq Re\{\langle -\mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta U - \mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.49}$$

e

$$\gamma_2\|\Psi_x\|_{L^2}^2 \leq Re\{\langle -\mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta_n U - \mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.50}$$

Pela desigualdade de Poincaré, a estimativa acima implica que

$$\gamma_2\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.51}$$

Temos que

$$i\beta\psi - \Psi = f_3,$$

e

$$i\beta(\phi_x + \psi + l\omega) - (\Phi_x + \Psi + lW) = f_{1x} + f_3 + lf_5,$$

portanto,

$$\beta^2\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq C\|\Psi_x\|_{L^2}^2 + C\|f_3\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2, \tag{5.52}$$

e

$$\begin{aligned} \beta^2\|\phi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 &\leq C\|\Phi_x + \Psi + lW\|_{L^2}^2 + \|f_{1x} + f_3 + lf_5\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de (5.153) por ϕ, e usando a identidade (5.152), obtemos que

$$\begin{aligned} \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 &= -\rho_1\int_0^L \Phi\overline{f_1}dx + k\int_0^L(\phi_x + \psi + l\omega)\overline{\phi_x}dx + \gamma_1\int_0^L(\Phi_x + \Psi + lW)\overline{\phi_x}dx \\ &\quad -lk_0\int_0^L(\omega_x - l\phi)\overline{\left[\frac{1}{i\beta}\Phi + \frac{1}{i\beta_n}f_1\right]}dx - \rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}dx, \end{aligned}$$

assim,

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 = C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \frac{C}{\beta_n^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2. \tag{5.54}$$

O produto interno de (5.153) por $(\omega_x - l\phi)$ implica em

$$\begin{aligned} lk_0\|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 &= i\beta\rho_1\int_0^L \Phi(\overline{\omega_x - l\phi})dx + k\int_0^L(\phi_x + \psi + l\omega)(\overline{\omega_x - l\phi})_x dx \\ &\quad +\gamma_1\int_0^L(\Phi_x + \Psi + lW)(\overline{\omega_x - l\phi})_x dx - \rho_1\int_0^L f_2(\overline{\omega_x - l\phi})dx. \end{aligned}$$

Logo, pelas igualdades $i\beta_n\phi - \Phi = f_1$, $i\beta_n\omega - W = f_5$ e (5.48), temos

$$\begin{aligned} lk_0\|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 &= -\rho_1 \int_0^L \Phi(\overline{W_x})dx - \rho_1 \int_0^L f_2(\overline{\omega_x - l\phi})dx + l\rho_1\|\Phi\|^2 \\ &\quad -\rho_1 \int_0^L \Phi\left(\overline{f_{5x} - lf_1}\right)dx + \frac{1}{k_0}\int_0^L S(\overline{i\beta W + lS - \rho_1 f_6})dx \end{aligned}$$

em que $S = k(\phi_x + \psi + l\omega) + \gamma_1(\Phi_x + \Psi + lW)$.
Temos que

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L \Phi(\overline{W_x})dx = -\rho_1 \int_0^L \Phi_x(\overline{W})dx &= -\rho_1 \int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)(\overline{W})dx \\ &\quad +\rho_1 \int_0^L \Psi(\overline{W})dx + l\rho_1\|W\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} l\rho_1\|W\|_{L^2}^2 + lk_0\|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|\Phi\|_{L^2}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\ &\quad +C\beta^2\|\Phi_x + \Psi + lW\|_{L^2}^2 + C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|\Phi\|_{L^2}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\ &\quad +C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Assim, acabamos de mostrar que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1. \tag{5.56}$$

Portanto, o sistema é polinomialmente estável e

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}. \tag{5.57}$$

□

Otimalidade

Teorema 5.1.3 *A taxa de decaimento polinomial encontrada no teorema* 5.1.2 *é a taxa ótima de decaimento.*

Demonstração: Na demonstração do teorema 6.1.1, mostramos que as funções

$$(U_n)_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \omega_n, W_n),$$

dadas por

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x), \\
\Phi_n &= i\lambda_n \phi, \\
\psi_n &= B_n \cos(\beta_n x), \\
\Psi_n &= i\lambda_n \psi, \\
\omega_n &= C_n \cos(\beta_n x), \\
W_n &= i\lambda_n \omega,
\end{aligned}$$

formam, para determinados valores de A_n, B_n e C_n, uma sequência de soluções da equação

$$i\lambda_n - \mathcal{A}_2 U_n = F_n,$$

em que $F_n = (0,0,0,0,0,\rho_1^{-1}\cos(\beta_n x))^t$, e $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, e valores de λ_n tais que

$$\lambda_n^2 \rho_1 = k_0 \beta_n^2 - 3l^2 k_0.$$

Nesses termos, obtivemos que

$$\begin{aligned}
C_n &\approx -\frac{ik_0\gamma_1\gamma_2\beta_n^6}{4\rho_1 l^2 k_0^2 \lambda_n \gamma_2 \beta_n^4} \\
&= -iK\beta_n, \qquad K > 0,
\end{aligned}$$

de onde segue a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1 \|W_n\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_1 \|i\lambda_n C_n \cos(\beta_n x)\|_{L^2}^2 \\
&\approx \hat{C}\beta_n^4, \qquad \hat{C} > 0.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Se a taxa de decaimento polinomial $\tau = \dfrac{1}{2}$, encontrada no teorema 5.1.2, puder ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, então, pelo teorema 1.3.4, então existe $\epsilon >$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}} \left\|(i\lambda I - \mathcal{A}_2)^{-1}\right\| \leq C_\epsilon, \ \forall |\lambda| \geq 1.$$

Contudo, da estimativa (5.58), obtemos que, para qualquer $\epsilon > 0$, vale

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq K\lambda_n^{2\epsilon}, \qquad K > 0.$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\|(i\lambda_n I-\mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2}\to\infty,\ \text{quando } n\to\infty,\quad \forall\epsilon>0.$$

E portanto, a taxa $\tau=\dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema.

□

5.1.2 viscoelasticidades no sistema

Nesta subseção iremos investigar o efeito dissipativo causado por duas viscoelasticidades agindo efetivamente sobre o estresse por corte e momento fletor do sistema de Bresse, em que as dissipações so adicionadas diretamente nas equações do modelo.
Assim, estudaremos o sistema de Bresse viscoelástico dado por

$$\rho_1\phi_{tt}-k(\phi_x+lw+\psi)_x-lk_0(w_x-l\phi)-\gamma_1'\phi_{xxt} = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \quad (5.59)$$
$$\rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\phi_x+lw+\psi)-\gamma_2'\psi_{xxt} = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \quad (5.60)$$
$$\rho_1 w_{tt}-k_0(w_x-l\phi)_x+kl(\phi_x+lw+\psi) = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \quad (5.61)$$

para $\gamma_1'>0$ e $\gamma_2'>0$. Veremos que as viscosidades elásticas adicionadas ao problema dessa forma causarão o mesmo efeito sobre o sistema de Bresse que no caso em que são inseridas no problema através das leis constitutivas.
Assim, veremos que, neste caso, o sistema não possui decaimento exponencial, independentemente dos coeficientes. Entretanto o sistema decai de forma polinomial, com taxa ótima igual a $\tau=\dfrac{1}{2}$.

Falta de estabilidade exponencial

Teorema 5.1.4 *Seja (ϕ,ψ,ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse (5.59)–(5.61) com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann dadas em* (3.8) *e condições iniciais* (3.7). *Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L\psi_0dx=\int_0^L\psi_1dx=\int_0^L\omega_0dx=\int_0^L\omega_1dx=0$, então o semigrupo gerado pelo operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, dado em* (3.35) *com $\gamma_1'>0$, $\gamma_2'>0$, $\gamma_3'=0$, não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Vamos mostrar a existência de uma sequência $(\lambda_n)_n\subset\mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$ e sequências $(U_n)_n\subset\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, $(F_n)_n\subset\mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n-\widetilde{\mathcal{A}}_2)U_n=F_n \quad (5.62)$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1 \in H_0^1(0,L), && (5.63)\\
i\lambda_n\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega)_x - \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\Phi_{xx} - l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) &= f_2 \in L^2(0,L), && (5.64)\\
i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3 \in H_*^1(0,L), && (5.65)\\
i\lambda_n\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\gamma_2'}{\rho_2}\Psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi+l\omega) &= f_4 \in L_*^2(0,L), && (5.66)\\
i\lambda_n\omega - W &= f_5 \in H_*^1(0,L), && (5.67)\\
i\lambda_n W + l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega) - \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x &= f_6 \in L_*^2(0,L). && (5.68)
\end{aligned}$$

Sejam

$$F_n = (0,0,0,0,0,\nu\rho_1^{-1}\cos(\beta_n x))^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.

A sequência $(F_n)_n$ apresentada limitada em $\mathcal{H}_2$. De fato, $\|F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \left(\dfrac{\nu^2}{\rho_1}\right)\dfrac{L}{2}$.

De (5.63), (5.65) e (5.67), obtemos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n\omega.$$

Substituindo as igualdades acima em (5.64), (5.66) e (5.68), obtemos

$$\begin{aligned}
-\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - i\lambda\gamma_1'\phi_{xx} &= 0 && (5.69)\\
-\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x+\psi+l\omega) - (b + i\lambda_n\gamma_2')\psi_{xx} &= 0 && (5.70)\\
-\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= \nu\cos(\beta_n x). && (5.71)
\end{aligned}$$

Como estamos considerando condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann, as funções

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n\sin(\beta_n x),\\
\psi_n &= B_n\cos(\beta_n x),\\
\omega_n &= C_n\cos(\beta_n x),
\end{aligned}$$

formam solução para o sistema acima, para valores apropriados de A_n, B_n e C_n. Neste caso, devemos ter

$$\begin{aligned} A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0 + i\lambda_n\gamma_1'\beta_n^2) + B_n(k\beta_n) + C_n(lk\beta_n + lk_0\beta_n) &= 0 \quad (5.72)\\ A_n(k\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2'\beta_n^2) + C_n(kl) &= 0 \quad (5.73)\\ A_n(lk\beta_n + k_0l\beta_n) + B_n(lk) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2) &= \nu. \quad (5.74) \end{aligned}$$

Denotando

$$\begin{aligned} p &:= -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2,\\ q_1 &:= k + i\lambda_n\gamma_1',\\ q_2 &:= b + i\lambda_n\gamma_2', \end{aligned}$$

o sistema acima pode ser reescrito pela equação

$$M\begin{bmatrix} A_n\\ B_n\\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \nu \end{bmatrix},$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + \beta_n^2 q_1 & k\beta_n & l\beta_n k + l\beta_n k_0\\ k\beta_n & -\lambda_n^2\rho_2 + k + \beta_n^2 q_2 & lk\\ l\beta_n k + l\beta_n k_0 & lk & p \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

Com as notações anteriores,

$$\begin{aligned} \det\{M\} &= (-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + \beta_n^2 q_1)(-\lambda_n^2\rho_2 + k + \beta_n^2 q_2)p\\ &\quad +2k^2 l\beta_n(l\beta_n k + l\beta_n k_0) - (l\beta_n k + l\beta_n k_0)^2(-\lambda_n^2\rho_2 + k + \beta_n^2 q_2)\\ &\quad -k^2\beta_n^2 p - k^2l^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + \beta_n^2 q_1). \end{aligned}$$

Tomamos λ_n tal que

$$p = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\det\{M\} &= 2k^2 l\beta_n(l\beta_n k + l\beta_n k_0) - (l\beta_n k + l\beta_n k_0)^2(-\lambda_n^2\rho_2 + k + \beta_n^2 q_2) \\
&\quad -k^2 l^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2 k_0 + \beta_n^2 q_1) \\
&\approx il^2(k+k_0)^2\gamma_2'\beta_n^4\lambda_n.
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para A_n, B_n e C_n, e escolhendo $\nu = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2 k_0 + \beta_n^2 q_1)(-\lambda_n^2\rho_2 + k + \beta_n^2 q_2) - k\beta_n(lk\beta_n + lk_0\beta_n)}{\det\{M\}} \\
&\approx \frac{-\gamma_1'\gamma_2'\beta_n^4\lambda_n^2}{il^2(k+k_0)^2\gamma_2\beta_n^4\lambda_n} \\
&= \frac{i\gamma_1'}{l^2(k+k_0)^2}\lambda_n.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1\|W\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_1\|i\lambda_n C_n\cos(\beta_n x)\|_{L^2}^2 \\
&\approx \hat{C}\beta_n^4. \qquad (5.76)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Portanto, o sistema de Bresse

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumannn, não é exponencialmente estável.

□

Estabilidade polinomial

Lema 12 *Seja $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ o operador diferencial do sistema*

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

dado em (3.35), com $\gamma_1' > 0$, $\gamma_2' > 0$ e $\gamma_3' = 0$.
Então

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2).$$

Demonstração: Supondo que $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, segue do lema 3 que existe $w \in \mathbb{R}$ com $\| \widetilde{\mathcal{A}}_2^{-1} \| \leq |\mu| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |\mu|\} \subset \rho(\widetilde{\mathcal{A}}_2) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\|; |\beta| < |\mu|\} = \infty.$$

Logo, existem sequência $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \mu$ quando $n \to \infty$, $|\lambda_n| < |\mu|$ e sequência $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

Portanto, relembrando a equivalência entre a norma induzida pela energia $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$ e a norma usual de $\mathcal{H}_2$ $\|.\|_2$, seguem as seguintes convergências em $L^2(0,L)$:

$$i\lambda_n\phi^n - \Phi^n \to 0 \tag{5.77}$$

$$i\lambda_n\phi^n_x - \Phi^n_x \to 0 \tag{5.78}$$

$$i\lambda_n\psi^n - \Psi^n \to 0 \tag{5.79}$$

$$i\lambda_n\psi_x - \Psi_x \to 0 \tag{5.80}$$

$$i\lambda_n\omega^n - W^n \to 0 \tag{5.81}$$

$$i\lambda_n\omega^n_x - W^n_x \to 0 \tag{5.82}$$

$$i\rho_1\lambda_n\Phi^n - k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n)_x - \gamma_1'\Phi^n_{xx} - lk_0(\omega^n_x - l\phi^n) \to 0 \tag{5.83}$$

$$i\rho_2\lambda_n\Psi^n - b\psi^n_{xx} - \gamma_2'\Psi^n_{xx} + k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) \to 0 \tag{5.84}$$

$$i\rho_1\lambda_n W^n + lk(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) - k_0(\omega^n_x - l\phi^n)_x \to 0, \tag{5.85}$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$.
Do produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)y_n$ por y_n, obtemos que

$$Re\langle i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = -Re\langle \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle \mathcal{H}_2 = \gamma_1' \|\Phi_x^n\|_{L^2} + \gamma_2' \|\Psi_x^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

assim,

$$\Phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{5.86}$$

e,

$$\Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{5.87}$$

e portanto, pela Desigualadade de Poincaré,

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{5.88}$$

e,

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L). \tag{5.89}$$

Por (5.78) e (5.80) temos também,

$$\phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{5.90}$$

e,

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L). \tag{5.91}$$

Observando a convergência (5.83), concluímos que

$$(S_n)_n := (k[\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n]_x + \gamma_1' \Phi_{xx})_n$$

é uma sequência uniformemente limitada em $L^2(0, L)$.
Como

$$i\rho_2\lambda_n \Psi^n - b\psi_{xx}^n - \gamma_2' \Psi_{xx}^n + k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \to 0 \text{ em } L^2(0, L),$$

temos que

$$
\begin{aligned}
i\rho_2\lambda_n \int_0^L \Psi^n\overline{[k(\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n)+\gamma_1'\Phi_x^n]}dx + b\int_0^L \psi_x^n\overline{S_n}dx + \gamma_2'\int_0^L \Psi_x^n\overline{S_n}dx \\
+k^2\|\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n\|_{L^2}^2 + k\gamma'1\int_0^L (\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n)\overline{\Phi_x^n}dx \to 0,
\end{aligned}
$$

e logo,

$$
k\|\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{5.92}
$$

Segue, então, que

$$
l\|\omega^n\|_{L^2} \quad \leq \quad \|\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n\|_{L^2} + \|\phi_x^n\|_{L^2} + \|\psi^n\|_{L^2} \to 0, \tag{5.93}
$$

logo, de (5.81), temos também que

$$
W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.94}
$$

Tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de $(\omega_x^n - l\phi^n)$ por

$$
i\rho_1\lambda_n\Phi^n - k(\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n)_x - \gamma_1'\Phi_{xx}^n - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n),
$$

obtemos, por (5.83),

$$
\begin{aligned}
i\rho_1\lambda_n \int_0^L \Phi^n\overline{(\omega_x^n - l\phi^n)}dx + k\int_0^L (\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n)\overline{(\omega_x^n - l\phi^n)_x}dx \\
+\gamma_1'\int_0^L \Phi_x^n\overline{(\omega_x^n - l\phi^n)_x}dx - lk_0\|\omega_x^n - l\phi^n\|_{L^2}^2 \to 0,
\end{aligned}
$$

e como,

$$
\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),
$$

$$
\Phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),
$$

$$
\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),
$$

e $([\omega_x^n - l\phi^n]_x)_n$ é uma sequência uniformemente limitada em $L^2(0,L)$ por (5.85), concluímos que,

$$
\|\omega_x^n - l\phi^n\|_{L^2}^2 \to 0.
$$

Acabamos de mostrar, assim, que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$.
Portanto, temos que $i\mathbb{R} \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
$\square$

Teorema 5.1.5 *Suponhamos que $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.*
Então, a solução do problema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned}$$

decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante $C > 0$ tal que

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)}. \tag{5.95}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_j^\alpha)$, então existe constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2^\alpha)}. \tag{5.96}$$

Demonstração: Já mostramos, no lema anterior, que $i\mathbb{R} \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Agora, devemos mostrar a existência de uma constante positiva C independente de $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \geq 1$ e $F \in \mathcal{H}_2$ tal que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\,\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1. \tag{5.97}$$

Consideremos a equação

$$i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_{\in}U = F,$$

em que $F=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)\in\mathcal{H}_2$ e $U\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Em relação as suas componentes, a equação $i\beta U-\widetilde{\mathcal{A}}_2U=F$ é dada por

$$\begin{aligned}
i\beta\phi-\Phi &= f_1 && (5.98)\\
i\beta\rho_1\Phi-k(\phi_x+\psi+l\omega)_x-lk_0(\omega_x-l\phi)-\gamma_1'\Phi_{xx} &= \rho_1f_2 && (5.99)\\
i\beta\psi-\Psi &= f_3 && (5.100)\\
i\beta\rho_2\Psi-b\psi_{xx}+k(\phi_x+\psi+l\omega)-\gamma_2'\Psi_{xx} &= \rho_2f_4 && (5.101)\\
i\beta\omega-W &= f_5 && (5.102)\\
i\beta\rho_1W+kl(\phi_x+\psi+l\omega)-k_0(\omega_x-l\phi)_x &= \rho_1f_6. && (5.103)
\end{aligned}$$

Temos que

$$Re\{\langle\widetilde{\mathcal{A}}_2U,U\rangle_{\mathcal{H}_2}\}=-\gamma_1'\|\Phi_x\|_{L^2}^2-\gamma_2'\|\Psi_x\|_{L^2}^2,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\gamma_1'\|\Phi_x\|_{L^2}^2+\gamma_2'\|\Psi_x\|_{L^2}^2 &= Re\{\langle-\widetilde{\mathcal{A}}_2U,U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} && (5.104)\\
&= Re\{\langle i\beta U-\widetilde{\mathcal{A}}_2U,U\rangle_{\mathcal{H}_2}\}\leq\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}, && (5.105)
\end{aligned}$$

o que implica, pela desigualdade de Poincaré,

$$\|\Phi\|_{L^2}^2\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \tag{5.106}$$

e

$$\|\Psi\|_{L^2}^2\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.107}$$

Das equações (5.99) e (5.100), obtemos, respectivamente,

$$\|\phi\|_{L^2}^2\leq\frac{C}{\beta^2}\|\Phi\|_{L^2}^2+\frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2, \tag{5.108}$$

e

$$\|\psi_x\|_{L^2}^2\leq\frac{C}{\beta^2}\|\Psi_x\|_{L^2}^2+\frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2, \tag{5.109}$$

pois $|\beta|\geq1$.
Segue, do produto interno em $L^2(0,L)$ de $S=k(\phi_x+\psi+l\omega)+\gamma_1'\Phi_x$ por (5.101), que

$$\begin{aligned}
i\beta\rho_2\int_0^L\Psi\overline{S}dx+\int_0^L[b\psi_x+\gamma_2'\Psi_x]\overline{S_x}dx+k^2\int_0^L\|\phi_x+\psi+l\omega\|^2\\
+k\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)[\overline{\gamma_1'\Phi_x}]dx=\rho_2\int_0^Lf_4\overline{S}dx,
\end{aligned}$$

e logo, por (5.99) e pelas desigualdades anteriores,

$$\|\phi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 \leq C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2. \tag{5.110}$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ da equação (5.103) por $S=k(\phi_x+\psi+l\omega)+\gamma_1'\Phi_x$, resulta

$$i\beta\rho_1\int_0^L W\overline{S}dx+kl\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)\overline{S}dx+k_0\int_0^L(\omega_x-l\phi)\overline{S_x}dx=\rho_1\int_0^L f_6\overline{S}dx,$$

e logo, por (5.99) e (5.102),

$$\begin{aligned}
&i\beta\rho_1\int_0^L W\left[k\left(\overline{\phi_x}+\overline{\psi}+l\left[\overline{\frac{1}{i\beta}}\overline{W}+\overline{\frac{1}{i\beta}}\rho_1\overline{f_5}\right]\right)+\gamma_1'\overline{\Phi_x}\right]dx\\
&+kl\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)[\overline{\gamma_1'\Phi_x}]dx+k^2l\|\phi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2\\
&+k_0\int_0^L(\omega_x-l\phi)[\overline{i\beta\rho_1\Phi-lk_0(\omega_x-l\phi)-\rho_1 f_2}]dx=\rho_1\int_0^L f_6\overline{S}dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho_1 l\|W\|_{L^2}^2+lk_0\|\omega_x-l\phi\|_{L^2}^2 &\leq C\|W\|\|\beta\phi_x\|_{L^2}+C\|W\|_{L^2}\|\beta\psi\|_{L^2}+C\|W\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}\\
&\quad+C\|W\|_{L^2}\|\beta\Phi_x\|_{L^2}+C\|\phi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2+C\|\Phi_x\|_{L^2}^2\\
&\quad+C\|\omega_x-l\phi\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}+C\|\omega_x-l\phi\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2\\
&\leq C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2. \qquad (5.111)
\end{aligned}$$

Acabamos de mostrar, portanto, que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I-\widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2}\leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2},\ \text{para todo } |\beta|\geq 1. \tag{5.112}$$

Portanto, o sistema

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt}-k(\phi_x+lw+\psi)_x-lk_0(w_x-l\phi)-\gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\phi_x+lw+\psi)-\gamma_2'\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt}-k_0(w_x-l\phi)_x+kl(\phi_x+lw+\psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

é polinomialmente estável e

$$\|e^{t\widetilde{\mathcal{A}}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2}\leq\frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)}.$$

□

Otimalidade

Teorema 5.1.6 *A taxa de decaimento polinomial encontrada no teorema 5.1.5 é a taxa ótima de decaimento.*

Demonstração: Se a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ de decaimento polinomial encontrada no teorema anterior puder ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, então, pelo teorema 1.3.4, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}} \left\| (i\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1} \right\| \le C_\epsilon, \ \forall |\lambda| \ge 1.$$

Entretanto, tomando $U_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \omega_n, W_n) \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, em que

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x), \\
\Phi_n &= i\lambda_n \phi, \\
\psi_n &= B_n \cos(\beta_n x), \\
\Psi_n &= i\lambda_n \psi, \\
\omega_n &= C_n \cos(\beta_n x), \\
W_n &= i\lambda_n \omega,
\end{aligned}$$

provamos na demonstração do teorema 5.1.4 que U_n é solução da equação

$$i\lambda_n U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F_n,$$

para

$$F_n = (0,0,0,0,0,\rho_1^{-1}\cos(\beta_n x))^t in \mathcal{H}_2$$

e λ_n tal que

$$-\lambda_n^2 \rho_1 + l^2 k + k_0 \beta_n^2 = 0,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, para valores apropriados de A_n, B_n e C_n.
Calculando os valores de A_n, B_n e C_n, obtemos que

$$C_n \approx \frac{i\gamma_1'}{l^2(k+k_0)^2}\lambda_n.$$

E portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\ge \rho_1 \|W_n\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_1 \|i\lambda_n C_n \cos(\beta_n x)\|_{L^2}^2 \\
&\approx \hat{C}\lambda_n^4,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_2} \;\; \geq \;\; K\lambda_n^{2\epsilon}, \qquad K>0,$$

para todo $\epsilon > 0$.
Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\|(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n\to\infty, \;\; \forall\epsilon>0.$$

E portanto, a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema.
□

5.2 Viscoelasticidades sobre estresse cortante e tensão longitudinal

Nesta seção mostramos que o mecanismo dissipativo produzido por duas viscosidade elásticas agindo sobre o estresse por corte e tensão logitudinal do sistema de Bresse não é capaz de estabilizá-lo de forma exponencial. Entretando, tal efeito dissipativo será forte o suficiente para gerar decaimento polinomial do sistema, com taxa ótima de $\tau = \dfrac{1}{2}$, a mesma encontrada na seção anterior, com viscosidades elásticas agindo somente sobre o estresse cortante e momento fletor.

5.2.1 Viscoelasticidades nas leis constitutivas

Vamos analisar o comportamento assintótico das soluções do sistema de Bresse viscoelástico dado por

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - kS_x - lk_0(w_x-l\phi) - \gamma_1 S_{xt} - l\gamma_3(w_x-l\phi)_t &= 0 &(5.113)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + kS + \gamma_1 S_t &= 0 &(5.114)\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x-l\phi)_x + klS - \gamma_3(w_x-l\phi)_{xt} + l\gamma_1 S_t &= 0, &(5.115)\end{aligned}$$

sobre $(0,L)\times(0,\infty)$, com $\gamma_1>0$ e $\gamma_3>0$, em que $S=\phi_x+lw+\psi$.

Falta de estabilidade exponencial

Teorema 5.2.1 *Seja (ϕ,ψ,ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse (5.113)–(5.115), com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann dadas* *em* (3.8) *e condições iniciais* (3.7)*. Se os dados iniciais satisfazem a condição* $\int_0^L \psi_0 dx = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L \omega_0 dx = \int_0^L \omega_1 dx = 0$*, então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}_2$*, dado em* (3.16) *com* $\gamma_1 > 0$*,* $\gamma_3 > 0$ *e* $\gamma_2 = 0$*, não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Vamos mostrar a existência de uma sequência numérica $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset D(\mathcal{A}_2)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n - \mathcal{A}_2)U_n = F_n \tag{5.116}$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1, && (5.117)\\
i\lambda_n\rho_1\Phi - S_x - lN &= \rho_1 f_2, && (5.118)\\
i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3, && (5.119)\\
i\lambda_n\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + S &= \rho_2 f_4, && (5.120)\\
i\lambda_n\omega - W &= f_5, && (5.121)\\
i\lambda_n\rho_1 W + lS - N_x &= \rho_1 f_6, && (5.122)
\end{aligned}$$

em que

$$S = k(\phi_x + \psi + \omega) + \gamma_1(\Phi_x + \Psi + \Omega)$$

e

$$N = k_0(\omega_x - l\phi) + \gamma_3(W_x - l\Phi).$$

Escolhemos

$$F_n = (0, \alpha\rho_1^{-1}\sin(\beta_n x), 0, \mu\rho_2^{-1}\cos(\beta_n x), 0, \nu\rho_1^{-1}\cos(\beta_n x))^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.
A sequência $(F_n)_n$ escolhida limitada em $\mathcal{H}_2$.
De fato,

$$\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} = \left(\frac{\alpha^2}{\rho_1} + \frac{\mu^2}{\rho_2} + \frac{\nu^2}{\rho_1}\right)\frac{L}{2}.$$

De (5.117), (5.119) e (5.121), obtemos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n \omega.$$

Substituindo as igualdades acima em (5.118), (5.120) e (5.122), obtemos

$$\begin{array}{rcl}
-\lambda_n^2\rho_1\phi - [k + i\lambda_n\gamma_1](\phi_x + \psi + l\omega)_x - [lk_0 + i\lambda_n l\gamma_3](\omega_x - l\phi) & = & \alpha \sin(\beta_n x) \\
-\lambda_n^2\rho_2\psi + [k + i\lambda_n\gamma_1](\phi_x + \psi + l\omega) - b\psi_{xx} & = & \mu \cos(\beta_n x) \\
-\lambda_n^2\rho_1\omega + [lk + i\lambda_n l\gamma_1](\phi_x + \psi + l\omega) - [k_0 + i\lambda_n\gamma_3](\omega_x - l\phi)_x & = & \nu \cos(\beta_n x).
\end{array}$$

Devido as condições de fronteira consideradas, vamos supor que

$$\begin{array}{rcl}
\phi_n & = & A_n \sin(\beta_n x), \\
\psi_n & = & B_n \cos(\beta_n x), \\
\omega_n & = & C_n \cos(\beta_n x).
\end{array}$$

Aqui é conveniente introduzir as seguintes notações:

$$p_2 \ := \ -\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2,$$

$$q_1 \ := \ k + i\lambda_n\gamma_1,$$

$$q_3 \ := \ k_0 + i\lambda_n\gamma_3.$$

Assim, ϕ_n, ψ_n e ω_n satisfazem o sistema acima se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$\begin{array}{rcl}
A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 q_1 + l^2 k q_3) + B_n(\beta_n q_1) + C_n(l\beta_n[q_1 + q_3]) & = & \alpha \\
A_n(\beta_n q_1) + B_n(p_2 + q_1) + C_n(lq_1) & = & \mu \\
A_n(l\beta_n[q_1 + q_3]) + B_n(lq_1) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2 k q_1 + beta_n^2 q_3) & = & \nu.
\end{array}$$

O sistema acima pode ser reescrito pela equação matricial

$$M \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}, \tag{5.123}$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 q_1 + l^2 q_3 & \beta_n q_1 & l\beta_n(q_1+q_3) \\ \\ \beta_n q_1 & p_2 + q_1 & lq_1 \\ \\ l\beta_n(q_1+q_3) & lq_1 & -\lambda_n^2\rho_1 + l^2 q_1 + \beta_n^2 q_3 \end{bmatrix}. \tag{5.124}$$

Calculando o determinante da matriz M, obtemos,

$$\begin{aligned} \det\{M\} &= (-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 q_1 + l^2 q_3)(p_2+q_1)(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2 q_1 + \beta_n^2 q_3) + 2l^2\beta_n^2 q_1^2 \\ &\quad -[l\beta_n(q_1+q_3)]^2(p_2+q_1) - l^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 q_1 + l^2 q_3) \\ &\quad -\beta_n^2 q_1^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2 q_1 + \beta_n^2 q_3) \\ &= (-\lambda_n^2\rho_1 + l^2 q_1 + \beta_n^2 q_3)[-\lambda_n^2\rho_1 p_2 + q_1\{-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 p_2\} + l^2 q_3 p_2 + l^2 q_3 q_1] \\ &\quad +2l^2\beta_n^2 q_1^2 - [l\beta_n(q_1+q_3)]^2(p_2+q_1) - l^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 q_1 + l^2 q_3). \end{aligned}$$

Vamos considerar λ_n tal que

$$p_2 = \frac{b\rho_1}{\rho_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_n^2 = \frac{b}{\rho_2}\beta_n^2 + \frac{b\rho_1}{\rho_2}.$$

Neste caso, temos que

$$-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 p_2 = \frac{b\rho_1^2}{\rho_2^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det\{M\} &= (-\lambda_n^2\rho_1 + l^2 q_1 + \beta_n^2 q_3)\left[-\lambda_n^2\frac{b\rho_1^2}{\rho_2} + \frac{b\rho_1^2}{\rho_2^2}q_1 + l^2 q_3\frac{b\rho_1}{\rho_2} + l^2 q_3 q_1\right] \\ &\quad +2l^2\beta_n^2 q_1^2 - [l\beta_n(q_1+q_3)]^2\left(\frac{b\rho_1}{\rho_2} + q_1\right) - l^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 q_1 + l^2 q_3) \\ &\approx -i\left[\gamma_3\frac{b}{\rho_2}\left(\frac{b\rho_1^2}{\rho_2} + l^2\gamma_1\gamma_3\right) + l^2\gamma_1\right]\lambda_n\beta_n^4. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para A_n, B_n e C_n, e considerando $\alpha = \nu = 0$ e $\mu = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{(-\lambda_n^2\rho_1 + \beta_n^2 q_1 + l^2 q_3)(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2 q_1 + \beta_n^2 q_3) - [l\beta_n(q_1+q_3)]^2}{det\{M\}} \\ &\approx i\tilde{C}\beta_n, \qquad \tilde{C} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|U\|^2_{\mathcal{H}_2} &\geq \rho_2 \|\Psi\|^2_{L^2} \\ &= \rho_2 \|i\lambda_n B_n \cos(\beta_n x)\|^2_{L^2} \\ &\approx \hat{C}\beta_n^4, \qquad \hat{C} > 0. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ na estimativa acima, obtemos que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty.$$

Portanto, o sistema não é exponencialmente estável. $\square$

Estabilidade polinomial

Lema 13 *O operador $\mathcal{A}_2$, dado em (3.16), com $\gamma_1 > 0$, $\gamma_3 > 0$ e $\gamma_2 = 0$, satisfaz*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2).$$

Demonstração: Novamente usaremos argumentos por contradição.
Vamos supor que $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$, então, pelo lema 3, existe $\mu \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}_2^{-1}\| \leq |\mu| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |\mu|\} \subset \rho(\mathcal{A}_2) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}\|; |\beta| < |\mu|\} = \infty.$$

Logo, existem sequência $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \mu$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |\mu|$ e sequência $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

Portanto, relembrando a equivalência entre a norma induzida pela energia $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$ e a norma usual de $\mathcal{H}_2$ $\|.\|_2$, seguem as seguintes convergências em $L^2(0, L)$:

$$
\begin{aligned}
i\lambda_n\phi^n - \Phi^n &\to 0 &(5.125)\\
i\lambda_n\phi_x^n - \Phi_x^n &\to 0 &(5.126)\\
i\lambda_n\psi^n - \Psi^n &\to 0 &(5.127)\\
i\lambda_n\psi_x^n - \Psi_x^n &\to 0 &(5.128)\\
i\lambda_n\omega^n - W^n &\to 0 &(5.129)\\
i\lambda_n\omega_x^n - W_x^n &\to 0 &(5.130)\\
i\rho_1\lambda_n\Phi^n - S_x^n - lN^n &\to 0 &(5.131)\\
i\rho_2\lambda_n\Psi^n - b\psi_{xx}^n + S^n &\to 0 &(5.132)\\
i\rho_1\lambda_n W + lS^n - N_x^n &\to 0, &(5.133)
\end{aligned}
$$

para $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, \Omega^n)^t$, em que

$$S^n = k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + l\gamma_1(\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n),$$

$$N^n = k_0(\omega_x^n - l\phi^n) + \gamma_3(W_x^n - l\Phi^n).$$

Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)y_n$ por y_n, temos que

$$
\begin{aligned}
Re\langle i\lambda_n I - \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} &= -Re\langle \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2}\\
&= \gamma_1\|\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n\|_{L^2} + \gamma_3\|W_x^n - l\Phi^n\|_{L^2}^2 \to 0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{5.134}$$

e,

$$W_x^n - l\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.135}$$

Usando as convergências (5.126), (5.127), (5.129) e (5.134), obtemos

$$\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.136}$$

Agora, de (5.130), (5.125) e (5.135), segue que

$$\omega_x^n - l\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.137}$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ de $i\rho_1\lambda_n\Phi^n - S_x^n - lN^n$ por Φ^n, e do produto interno de $i\rho_1\lambda_n W^n + lS^n - N_x^n$ por W^n, obtemos

$$i\rho_1\lambda_n\|\Phi^n\|_{L^2}^2 + i\rho_1\lambda_n\|W^n\|_{L^2}^2 + \int_0^L S^n\overline{(\Phi_x^n + lW^n)}dx + \int_0^L N^n\overline{(W_x^n - l\Phi^n)}dx \to 0,$$

e logo, pelas convergências anteriores,

$$\rho_1\lambda_n\|\Phi^n\|_{L^2}^2 + \rho_1\lambda_n\|W^n\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{5.138}$$

Já vimos que

$$\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

logo,

$$-\int_0^l \Phi^n\overline{\Psi_x^n}dx + \|\Psi^n\|_{L^2}^2 + l\int_0^l W^n\overline{\Psi^n}dx \to 0,$$

e portanto,

$$\|\Psi^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Considerando esta última convergência em (5.132), obtemos que

$$\|\psi_x^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Acabamos de mostrar que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$.
Logo, $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
□

Teorema 5.2.2 *Suponhamos que $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$. Então, a solução do problema*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} - l\gamma_3(w_x - l\phi)_t &= 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t - \gamma_3(w_x - l\phi)_{xt} &= 0, \end{aligned}$$

em $(0,L)\times(0,\infty)$, decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante $C > 0$ tal que

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \le \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}. \tag{5.139}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2^\alpha)$, então existe constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2^\alpha)}. \tag{5.140}$$

Demonstração: Pelo lema acima, temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
Para completar a prova do teorema, devemos provar a existência de uma constante positiva C independente de $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \geq 1$ e $F \in \mathcal{H}_2$ tais que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1. \tag{5.141}$$

Consideremos a equação

$$i\beta U - \mathcal{A}_2 U = F,$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^t \in \mathcal{H}_2$ e $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$,
que em relação as componentes se apresenta como

$$i\beta\phi - \Phi = f_1 \tag{5.142}$$
$$i\beta\rho_1\Phi - S_x - lN = \rho_1 f_2 \tag{5.143}$$
$$i\beta\psi - \Psi = f_3 \tag{5.144}$$
$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + S = \rho_2 f_4 \tag{5.145}$$
$$i\beta\omega - W = f_5 \tag{5.146}$$
$$i\beta\rho_1 W + lS - N_x = \rho_1 f_6, \tag{5.147}$$

em que

$$S = k(\phi_x + \psi + l\omega) + \gamma_1 l(\Phi_x + \Psi + lW)$$

e

$$N = k_0(\omega_x - l\phi) + \gamma_3(W_x - l\Phi).$$

Temos que

$$Re\{\langle\mathcal{A}_2U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = -\gamma_1\|\Phi_x + \Psi + lW\|_{L^2}^2 + \gamma_3\|W_x - l\Phi\|_{L^2}^2,$$

logo,

$$\gamma_1\|\Phi_x + \Psi + lW\|_{L^2}^2 \leq Re\{\langle -\mathcal{A}_2U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta U - \mathcal{A}_2U, U\rangle\}_{\mathcal{H}_2} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \tag{5.148}$$

e

$$\gamma_3\|W_x - l\Phi\|_{L^2}^2 \leq Re\{\langle -\mathcal{A}_2U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta U - \mathcal{A}_2U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.149}$$

Das equações (5.142), (5.144) e (5.146), obtemos

$$i\beta(\phi_x + \psi + l\omega) - (\Phi_x + \Psi + lW) = f_{1x} + f_3 + lf_5,$$

e

$$i\beta(\omega_x - l\phi) - (W_x - l\Phi) = f_{5x} - f_1,$$

portanto, temos que

$$\beta^2\|\phi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2, \tag{5.150}$$

e

$$\beta^2\|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2. \tag{5.151}$$

A soma do produto interno em $L^2(0,L)$ de (5.143) por $\overline{\phi}$, com o produto interno de (5.147) por $\overline{\omega}$ resulta em

$$\begin{aligned} i\beta\rho_1\int_0^L \Phi\overline{\phi}dx + i\beta_n\rho_1\int_0^L W\overline{\omega}dx &= -\int_0^L S(\overline{\phi_x + \omega})dx - \int_0^L N(\overline{\omega_x - l\phi})dx \\ &+\rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}dx + \rho_2\int_0^L f_5\overline{\omega}dx, \end{aligned}$$

o que implica, por (5.142) e (5.146),

$$\begin{aligned} \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_1|W\|^2 &= -\rho_1\int_0^L \Phi\overline{f_1}dx - \rho_1\int_0^L W\overline{f_5}dx + \int_0^L S(\overline{\phi_x + \omega})dx \\ &+ \int_0^L N(\overline{\omega_x - l\phi})dx - \rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}dx - \rho_2\int_0^L f_5\overline{\omega}dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_1|W\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2. \tag{5.152}$$

Das igualdades apresentadas em (5.142), (5.144) e (5.146), obtemos que

$$\int_0^L \Psi dx = i\beta\int_0^L (\phi_x + \psi + l\omega)dx - \int_0^L \Phi_x dx - \int_0^L lW dx - \int_0^L (f_{1x} + f_3 + lf_5)dx,$$

assim,

$$\left|\int_0^L \Psi dx\right| \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{2}} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.153}$$

Integrando a igualdade (5.145) de 0 a L, obtemos que

$$|\psi_x(x)| \;\; \leq \;\; \left| i\beta \int_0^L \Psi dx \right| + C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}^{\frac{1}{2}} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2},$$

logo,

$$\|\psi_x(x)\|_{L^2}^2 \;\; \leq \;\; C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\beta^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2. \tag{5.154}$$

Acabamos de mostrar, então, que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1. \tag{5.155}$$

Portanto, o sistema é polinomialmente estável e

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}. \tag{5.156}$$

□

Otimalidade

Teorema 5.2.3 *A taxa de decaimento polinomial encontrada no Teorema* 5.2.2 *é a taxa ótima.*

Demonstração: Sejam $F_n = (0,0,0,\rho_1^{-1}\cos(\beta_n x),0,0)^t$, em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.

Na demonstração do teorema 5.2.1, provamos que as funções $U_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \psi_n, \omega_n, W_n)^t$, dadas por

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x), \\
\Phi_n &= i\lambda_n \phi, \\
\psi_n &= B_n \cos(\beta_n x), \\
\Psi_n &= i\lambda_n \psi, \\
\omega_n &= C_n \cos(\beta_n x), \\
W_n &= i\lambda_n \omega,
\end{aligned}$$

satisfazem a equação

$$i\lambda_n U_n - \mathcal{A}_2 U_n = F_n,$$

para valores apropriados de A_n, B_n e C_n, em que λ_n é dado por

$$\lambda_n^2\rho_2 = b\beta_n^2 + \frac{b\rho_1}{\rho_2}.$$

Neste caso, resolvendo o sistema para A_n, B_n e C_n, obtivemos que

$$B_n \;\approx\; i\tilde{C}\beta_n, \qquad \tilde{C} \neq 0.$$

Temos, pelo teorema 1.3.4, que se a taxa de decaimento polinomial $\tau = \dfrac{1}{2}$, puder ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, então existe $\epsilon >$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}}\left\|(i\lambda I - \mathcal{A}_2)^{-1}\right\| \leq C_\epsilon, \;\forall|\lambda| \geq 1.$$

Porém, para as funções $U_n = (\phi, \Phi, \psi, \psi, \omega, W)^t \in \mathcal{A}_2$ dadas acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_2\|\Psi_n\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_2\|i\lambda_n B_n\cos(\beta_n x)\|_{L^2}^2 \\
&\approx \hat{C}\beta_n^4, \qquad \hat{C} > 0.
\end{aligned}$$

Logo, para qualquer $\epsilon > 0$, temos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \;\geq\; K\lambda_n^{2\epsilon}, \qquad K > 0.$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\|(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall\epsilon > 0.$$

E portanto, a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema.

$\square$

5.2.2 Viscoelasticidades no sistema

Assim como nas seções anteriores, vamos comparar os resultados obtidos sobre o mecanismo dissipativo adquirido pelo sistema de Bresse com viscosidade elástica introduzida no sistema através das leis contitutivas do modelo, com o problema resultante da adição das viscoelasticidades diretamente nas equações.

Portanto, nesta subseção, vamos estudar o sistema de Bresse viscoelástico

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) & (5.157)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) & (5.158)\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), & (5.159)\end{aligned}$$

para $\gamma_1' > 0$ e $\gamma_3' > 0$.
Neste caso, obtemos exatamente os mesmos resultados do problema equivalente com dissipações inseridas nas leis constitutivas.

Falta de estabilidade exponencial

Teorema 5.2.4 *Seja (ϕ, ψ, ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse viscoelástico (5.157)–(5.159), com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann e condições iniciais* (3.7). *Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L \psi_0 dx = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L \omega_0 dx = \int_0^L \omega_1 dx = 0$, então o semigrupo gerado pelo operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, dado em* (3.35) *com $\gamma_1' > 0$, $\gamma_3' > 0$, $\gamma_2' = 0$, não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Assim como nas seções anteriores, mostraremos a existência de uma sequência $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset D(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n - \widetilde{\mathcal{A}}_2)U_n = F_n \tag{5.160}$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1 \in H_0^1(0,L), & (5.161)\\ i\lambda_n\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega)_x - \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\Phi_{xx} - l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) &= f_2 \in L^2(0,L), & (5.162)\\ i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3 \in H_*^1(0,L), & (5.163)\\ i\lambda_n\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi + l\omega) &= f_4 \in L_*^2(0,L), & (5.164)\\ i\lambda_n\omega - W &= f_5 \in H_*^1(0,L), & (5.165)\\ i\lambda_n W + l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega) - \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x - \frac{\gamma_3'}{\rho_1}W_{xx} &= f_6 \in L_*^2(0,L). & (5.166)\end{aligned}$$

Escolhemos

$$F_n = (0, 0, 0, \mu\rho_2^{-1}\cos(\beta_n x), 0, 0)^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.
A sequência $(F_n)_n$ escolhida é limitada em $\mathcal{H}_2$, pois, $\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} = \left(\dfrac{\nu^2}{\rho_1}\right)\dfrac{L}{2}$.
De (5.161), (5.163) e (5.165), temos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n\omega,$$

que substituídas em (5.162), (5.164) e (5.166), fornece

$$\begin{aligned} -\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - i\lambda\gamma_1'\phi_{xx} &= 0 && (5.167)\\ -\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x+\psi+l\omega) - b\psi_{xx} &= \mu\cos(\beta_n x) && (5.168)\\ -\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - i\lambda\gamma_3'\omega_{xx} &= 0. && (5.169)\end{aligned}$$

Como estamos considerando condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann, as funções

$$\begin{aligned}\phi_n &= A_n\sin(\beta_n x),\\ \psi_n &= B_n\cos(\beta_n x),\\ \omega_n &= C_n\cos(\beta_n x),\end{aligned}$$

resolvem o sistema acima, para valores apropriados de A_n, B_n e C_n. Neste caso, devemos ter

$$\begin{aligned} A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0 + i\lambda_n\gamma_1'\beta_n^2) + B_n(k\beta_n) + C_n(lk\beta_n + lk_0\beta_n) &= 0 && (5.170)\\ A_n(k\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2) + C_n(kl) &= \mu && (5.171)\\ A_n(lk\beta_n + k_0 l\beta_n) + B_n(lk) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_3'\beta_n^2) &= 0, && (5.172)\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$M\begin{bmatrix} A_n\\ B_n\\ C_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ \mu\\ 0\end{bmatrix},$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + \beta_n^2 q_1 & k\beta_n & l\beta_n k + l\beta_n k_0 \\ & & \\ k\beta_n & p_2 & lk \\ & & \\ l\beta_n k + l\beta_n k_0 & lk & -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + \beta_n^2 q_3 \end{bmatrix}, \tag{5.173}$$

e, $p_2 := -\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2$, $q_1 := k + i\lambda_n\gamma_1'$ e $q_3 := k_0 + i\lambda_n\gamma_3'$. Temos, então, que

$$\begin{aligned} \det\{M\} &= (-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + \beta_n^2 q_1)(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + \beta_n^2 q_3)p_2 \\ &\quad +2k^2 l\beta_n(l\beta_n k + l\beta_n k_0) - (l\beta_n k + l\beta_n k_0)^2 p_2 \\ &\quad -k^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + \beta_n^2 q_3) - k^2 l^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + \beta_n^2 q_1). \end{aligned}$$

Tomamos λ_n tal que

$$p_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_n^2 = \frac{k}{\rho_2} + \frac{b}{\rho_2}\beta_n^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det\{M\} &= 2k^2 l\beta_n(l\beta_n k + l\beta_n k_0) - k^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + \beta_n^2 q_3) \\ &\quad -k^2 l^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + \beta_n^2 q_1) \\ &\approx -ik^2\gamma_3'\beta_n^4\lambda_n. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para A_n, B_n e C_n, e tomando $\mu = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + \beta_n^2 q_1)(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + \beta_n^2 q_3) - (lk\beta_n + lk_0\beta_n)^2}{\det M} \\ &\approx \frac{-\gamma_1'\gamma_3'\beta_n^4\lambda_n^2}{-ik^2\gamma_3'\beta_n^4\lambda_n} \\ &= -\frac{i\gamma_1'}{k^2}\lambda_n. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 \\ &= \rho_2\|i\lambda_n B_n\cos(\beta_n x)\|_{L^2}^2 \\ &\approx \hat{C}\beta_n^4, \quad \hat{C} > 0. \end{aligned} \tag{5.174}$$

Concluímos, então, que

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Portanto, o sistema de Bresse

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumannn, não é exponencialmente estável.

$\square$

Estabilidade polinomial

Lema 14 *O operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, dado em (3.35), com $\gamma_1' > 0$, $\gamma_3' > 0$ e $\gamma_2' = 0$, é tal que*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2).$$

Demonstração: Suponhamos que $i\mathbb{R} \nsubseteq \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$. Como $0 \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, temos pelo lema 3, que existe $w \in \mathbb{R}$ com $\| \widetilde{\mathcal{A}}_2^{-1} \| \leq |\mu| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |\mu|\} \subset \rho(\widetilde{\mathcal{A}}_2) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\|; |\beta| < |\mu|\} = \infty.$$

Logo, existem sequência $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \mu$ quando $n \to \infty$, $|\lambda_n| < |\mu|$ e sequência $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)y_n\|_{\mathcal{H}_j} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

Portanto, relembrando a equivalência entre a norma induzida pela energia $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$ e a norma usual de $\mathcal{H}_2$ $\|.\|_2$, seguem as seguintes convergências em $L^2(0,L)$:

$$i\lambda_n\phi^n - \Phi^n \to 0 \tag{5.175}$$
$$i\lambda_n\phi_x^n - \Phi_x^n \to 0 \tag{5.176}$$
$$i\lambda_n\psi^n - \Psi^n \to 0 \tag{5.177}$$
$$i\lambda_n\psi_x^n - \Psi_x^n \to 0 \tag{5.178}$$
$$i\lambda_n\omega^n - W^n \to 0 \tag{5.179}$$
$$i\lambda_n\omega_x^n - W_x^n \to 0 \tag{5.180}$$
$$i\rho_1\lambda_n\Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x - \gamma_1'\Phi_{xx}^n - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n) \to 0 \tag{5.181}$$
$$i\rho_2\lambda_n\Psi^n - b\psi_{xx}^n + k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \to 0 \tag{5.182}$$
$$i\rho_1\lambda_n W^n + lk(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - k_0(\omega_x^n - l\phi^n)_x - \gamma_3' W_{xx}^n \to 0, \tag{5.183}$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$.
Do produto interno em $\mathcal{H}_j$ de $(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_j)y_n$ por y_n, obtemos que

$$Re\langle i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = -Re\langle \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = \gamma_1'\|\Phi_x^n\|_{L^2} + \gamma_3'\|W_x^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

assim,

$$\Phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{5.184}$$

e,

$$W_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{5.185}$$

e portanto, pela desigualadade de Poincaré,

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{5.186}$$

e,

$$W^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L). \tag{5.187}$$

Como

$$i\lambda_n\phi^n - \Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L),$$

e

$$i\lambda_n\omega_x^n - W_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L),$$

temos, também, que

$$\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\omega_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e logo,

$$\omega_x^n - l\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Vamos denotar $S^n = k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \gamma_1'\Phi_x^n$.
De (5.183) segue que

$$i\rho_1\lambda_n \int_0^L W^n\overline{S^n}dx + lk^2\|\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n\|_{L^2}^2 + lk\int_0^L (\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)[\overline{\gamma_1'\Phi_x^n}]dx$$
$$+k_0\int_0^L (\omega_x^n - l\phi^n)\overline{S_x^n}dx + \gamma_3'\int_0^L W_x^n\overline{S_x^n}dx \to 0.$$

Observando as convergências anteriores e o fato de $(S_x^n)_n$ ser uma sequência uniformemente limitada em $L^(0,L)$, por (5.181), concluímos que

$$\|\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{5.188}$$

E logo,

$$\|\psi^n\|_{L^2} \leq \|\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n\|_{L^2} + \|\phi_x^n\|_{L^2} + l\|\omega^n\|_{L^2} \to 0, \tag{5.189}$$

o que implica, por (5.177),

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.190}$$

Finalmente, da convergência (5.182) e do produto interno em $L^2(0,L)$ de ψ^n por

$$i\rho_2\lambda_n\Psi^n - b\psi_{xx}^n + k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n),$$

obtemos que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Acabamos de mostrar, portanto, que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$.

Assim sendo, temos que $i\mathbb{R} \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
$\square$

Teorema 5.2.5 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$. *Então, a solução do problema*

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)}. \tag{5.191}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2^{\alpha})$, *então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2^{\alpha})}. \tag{5.192}$$

Demonstração: Mostramos, no lema anterior, que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Portanto, basta mostrarmos a existência de uma constante positiva C independente de $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \geq 1$ e $F \in \mathcal{H}_2$ tal que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\,\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1. \tag{5.193}$$

Consideremos a equação

$$i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}U = F,$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}_2$ e $U \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$. Em relação as suas componentes, a equação $i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F$ é dada por

$$i\beta\phi - \Phi = f_1 \tag{5.194}$$
$$i\beta\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - \gamma_1'\Phi_{xx} = \rho_1 f_2 \tag{5.195}$$
$$i\beta\psi - \Psi = f_3 \tag{5.196}$$
$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) = \rho_2 f_4 \tag{5.197}$$
$$i\beta\omega - W = f_5 \tag{5.198}$$
$$i\beta\rho_1 W + kl(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - \gamma_3'W_{xx} = \rho_1 f_6. \tag{5.199}$$

Temos que $Re\{\langle\widetilde{\mathcal{A}}_2U,U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = -\gamma_1'\|\Phi_x\|_{L^2}^2 - \gamma_3'\|W_x\|_{L^2}^2$, logo,

$$\begin{aligned}\gamma_1'\|\Phi_x\|_{L^2}^2 + \gamma_3'\|W_x\|_{L^2}^2 &= Re\{\langle i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_2U,U\rangle_{\mathcal{H}_2}\}\\ &\leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2},\end{aligned} \tag{5.200}$$

o que implica, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \tag{5.201}$$

e

$$\|W\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.202}$$

Das equações (5.194) e (5.198), obtemos, respectivamente,

$$\|\phi\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\beta^2}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2, \tag{5.203}$$

e

$$\|\omega_x\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\beta^2}\|W_x\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2, \tag{5.204}$$

pois $|\beta| \geq 1$.
Logo,

$$\|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 \leq C\|\omega_x\|_{L^2}^2 + C\|\phi\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de $k(\phi_x+\psi+l\omega)+\gamma_1'\Phi_x$ por

$$i\beta\rho_1 W + kl(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - \gamma_3' W_{xx},$$

obtemos, pelas equações (5.199) e (5.195),

$$\begin{aligned}\|\phi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 &\leq \|i\beta\rho_1 W\|_{L^2}\|k(\phi_x+\psi+l\omega)+\gamma_1'\Phi_x\|_{L^2} + C\|\Phi_x\|_{L^2}^2\\ &\quad + C\|k_0(\omega_x - l\phi)+\gamma_3'W_x\|_{L^2}\|i\beta\Phi - lk_0(\omega_x - l\phi) - \rho_1 f_2\|_{L^2}\\ &\leq C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.\end{aligned}$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ de ψ_x por (5.195), temos que

$$\begin{aligned}i\beta\rho_1\int_0^L \Phi\overline{\psi_x}dx + \int_0^L (k\phi_x + \gamma_1'\Phi_x)\overline{\psi_{xx}}dx - k\|\psi_x\|_{L^2}^2 - kl\int_0^L \omega_x\overline{\psi_x}dx&\\ -lk_0\int_0^L(\omega_x - l\phi)\overline{\psi_x}dx = \rho_1\int_0^L f_2\overline{\psi_x}dx,&\end{aligned}$$

logo, por (5.197),

$$\begin{aligned}
\|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq C\|i\beta\rho_1\Phi\|_{L^2}^2 + C\|k\phi_x + \gamma_1'\Phi_x\|_{L^2}\|i\beta\rho_2\Psi + k(\phi_x + \psi + l\omega) - \rho_2 f_4\|_{L^2} \\
&\quad + C\|\omega_x\|_{L^2}^2 + C\|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 + C\|f_2\|_{L^2}^2 \\
&\leq C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.
\end{aligned}$$

Assim, de

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) = \rho_2 f_4,$$

segue que

$$\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Portanto, temos que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\,\|F\|_{\mathcal{H}_2}\,, \text{ para todo } |\beta| \geq 1.$$

Logo, o sistema

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

é polinomialmente estável e

$$\|e^{t\widetilde{\mathcal{A}}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)}.$$

□

Otimalidade

Teorema 5.2.6 *A taxa de decaimento polinomial encontrada no teorema 5.2.5 é a taxa ótima de decaimento.*

Demonstração: Pelo teorema 1.3.4, se a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ de decaimento polinomial encontrada no teorema 5.2.5 puder ser melhorada sobre o domínio $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}}\left\|(i\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\right\| \leq C_\epsilon,\ \forall|\lambda| \geq 1.$$

Seja $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$.
Consideremos as funções $U_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \omega_n, W_n) \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, em que

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x),\\
\Phi_n &= i\lambda_n \phi,\\
\psi_n &= B_n \cos(\beta_n x),\\
\Psi_n &= i\lambda_n \psi,\\
\omega_n &= C_n \cos(\beta_n x),\\
W_n &= i\lambda_n \omega.
\end{aligned}$$

Provamos na demonstração do teorema 5.2.4 que U_n é solução da equação

$$i\lambda_n U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F_n,$$

em que

$$F_n = (0,0,0,\rho_2^{-1}\cos(\beta_n x),0,0)^t in \mathcal{H}_2$$

e λ_n satisfaz

$$\lambda_n^2 = \frac{k}{\rho_2} + \frac{b}{\rho_2}\beta_n^2,$$

para valores apropriados de A_n, B_n e C_n.
Calculando os valores de A_n, B_n e C_n, obtemos que

$$B_n \;\approx\; -\frac{i\gamma_1'}{k^2}\lambda_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2\\
&= \rho_2 \|i\lambda_n B_n \cos(\beta_n x)\|_{L^2}^2\\
&\approx \hat{C}\lambda_n^4, \quad \hat{C} > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, temos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \;\geq\; K\lambda_n^{2\epsilon}, \qquad K > 0.$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}} \|(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \;\; \forall \epsilon > 0.$$

E portanto, a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema.
$\square$

5.3 Viscoelasticidades sobre momento fletor e tensão longitudinal

Considerando viscoelasticidades agindo efetivamente somente sobre o momento fletor e tensão longitudinal do sistema de vigas de Bresse, obtemos um sistema que não possui estabilidade exponecial, assim como nos casos em que consideramos as viscoelasticidades somente no estresse por corte e momento fletor, ou somente sobre o estresse cortante e tensão longitudinal. Em todos os casos, a dissipação é capaz de estabilizar o sistema de forma polinomial, com taxa ótima de $\tau = \dfrac{1}{2}$.

5.3.1 Viscoelasticidades nas leis constitutivas

Nesta seção vamos estudar o comportamento assintótico do sistema de Bresse com duas viscoelasticidades agindo o momento fletor e tensão longitudinal, através das leis contitutivas do modelos.

Falta de estabilidade exponencial

Teorema 5.3.1 *Seja (ϕ,ψ,ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - l\gamma_3(w_x - l\phi)_t &= 0 && (5.205)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} &= 0 && (5.206)\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3(w_x - l\phi)_{xt} &= 0, && (5.207) \end{aligned}$$

em $(0,L)\times(0,\infty)$, com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann dadas em (3.8) e condições iniciais (3.7). Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L \psi_0 dx = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L \omega_0 dx = \int_0^L \omega_1 dx = 0$, então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}_2$, dado em (3.16) com $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$ e $\gamma_1 = 0$, não é exponencialmente estável.

Demonstração: Vamos mostrar a existência de uma sequência numérica $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset D(\mathcal{A}_2)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n - \mathcal{A}_2)U_n = F_n \qquad (5.208)$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1, & (5.209)\\
i\lambda_n\Phi - [\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega)_x + l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) + l\frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi)] &= f_2, & (5.210)\\
i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3, & (5.211)\\
i\lambda_n\Psi - [\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi+l\omega)] &= f_4, & (5.212)\\
i\lambda_n\omega - W &= f_5, & (5.213)\\
i\lambda_n W - [-l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+\omega) + \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x + \frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi)_x] &= f_6. & (5.214)
\end{aligned}$$

Escolhemos

$$F_n = (0, \alpha\rho_1^{-1}\sin(\beta_n x), 0, \mu\rho_2^{-1}\cos(\beta_n x), 0, \nu\rho_1^{-1}\cos(\beta_n x))^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.

A sequência $(F_n)_n$ escolhida é limitada em $\mathcal{H}_2$. De fato, $||F_n||^2_{\mathcal{H}_2} = \left(\dfrac{\alpha^2}{\rho_1} + \dfrac{\mu^2}{\rho_2} + \dfrac{\nu^2}{\rho_1}\right)\dfrac{L}{2}$.

De (5.209), (5.211) e (5.213), obtemos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n\omega.$$

Substituindo as igualdades acima em (5.210), (5.212) e (5.214), obtemos

$$\begin{aligned}
-\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - i\lambda_n l\gamma_3(\omega_x - l\phi) &= \alpha\sin(\beta_n x) & (5.215)\\
-\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x+\psi+l\omega) - i\lambda_n\gamma_2\psi_{xx} - b\psi_{xx} &= \mu\cos(\beta_n x) & (5.216)\\
-\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - i\lambda_n\gamma_3(\omega_x - l\phi)_x &= \nu\cos(\beta_n x). & (5.217)
\end{aligned}$$

Devido as condições de fronteira consideradas, vamos supor que

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n\sin(\beta_n x),\\
\psi_n &= B_n\cos(\beta_n x),\\
\omega_n &= C_n\cos(\beta_n x).
\end{aligned}$$

Assim, ϕ_n, ψ_n e ω_n satisfazem o sistema (5.215) - (5.217) se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$\begin{aligned}
A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0 + i\lambda_n\gamma_3 l^2) + B_n(k\beta_n) + C_n(l\beta_n(k+k_0) + i\lambda_n l\beta_n\gamma_3) &= \alpha \\
A_n(k\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2) + C_n(lk) &= \mu \\
A_n(l\beta_n(k+k_0) + i\lambda_n\gamma_3 l\beta_n) + B_n(lk) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_3\beta_n^2) &= \nu.
\end{aligned}$$

Denotando

$$\begin{aligned}
p_1 &:= -\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2, \\
p_2 &:= -\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 + k, \\
p_3 &:= -\lambda_n^2\rho_1 + kl^2, \\
q_3 &:= k_0 + i\lambda_n\gamma_3,
\end{aligned}$$

o sistema acima pode ser reescrito pela equação matricial

$$M \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix},$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} p_1 + l^2q_3 & k\beta_n & l\beta_n k + l\beta_n q_3 \\ k\beta_n & p_2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2 & lk \\ l\beta_n k + l\beta_n q_3 & lk & p_3 + \beta_n^2 q_3 \end{bmatrix}. \tag{5.218}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\det\{M\} &= (p_1 + l^2q_3)(p_2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2)(p_3 + \beta_n^2q_3) \\
&\quad + 2k^2l^2\beta_n^2(k+q_3) - (l\beta_n k + l\beta_n q_3)^2(p_2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2) \\
&\quad - k^2\beta_n^2(p_3 + \beta_n^2q_3) - k^2l^2(p_1 + l^2q_3) \\
&= (p_2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2)[p_1p_3 - l^2\beta_n^2k^2 + q_3\{\beta_n^2p_1 + l^2p_3 - 2l^2\beta_n^2k\}] \\
&\quad + 2k^2l^2\beta_n^2(k+q_3) - k^2\beta_n^2(p_3 + \beta_n^2q_3) - k^2l^2(p_1 + l^2q_3).
\end{aligned}$$

Escolhemos λ_n de forma que

$$p_1 = 3l^2k \qquad \Leftrightarrow \qquad -\lambda_n^2\rho_1 = 3l^2k - k\beta_n^2.$$

Neste caso,

$$\beta_n^2 p_1 + l^2 p_3 - 2l^2\beta_n^2 k = 4l^4 k.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\det\{M\} &= (p_2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2)[3l^2kp_3 - l^2\beta_n^2k^2 + 4l^4kq_3] \\
&\quad +2k^2l^2\beta_n^2(k+q_3) - k^2\beta_n^2(p_3+\beta_n^2q_3) - k^2l^2(3l^2k + l^2q_3) \\
&\approx -i(4l^2k^2\gamma_2 + k^2\gamma_3)\beta_n^4\lambda_n.
\end{aligned}$$

Escolhemos $\alpha = 1$ e $\mu = \nu = 0$.
Determinando os valores de A_n, B_n e C_n, obtemos que

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{(p_2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2)(p_3 + \beta_n^2q_3) - k^2l^2}{\det\{M\}} \\
&\approx \frac{\gamma_2\gamma_3\beta_n^4\lambda_n^2}{i(4l^2k^2\gamma_2 + k^2\gamma_3)\beta_n^4\lambda_n} \\
&= -i\tilde{C}\beta_n, \qquad \tilde{C} > 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_1\|i\lambda_nA_n\sin(\beta_nx)\|^2 \\
&\approx \hat{C}\beta_n^4, \qquad \hat{C} > 0.
\end{aligned}$$

Calculando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Portanto, o sistema não possui decaimento exponencial.
□

Estabilidade polinomial

Lema 15 *Seja $\mathcal{A}_2$ o operador diferencial do sistema de Bresse*

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - l\gamma_3(w_x - l\phi)_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2\psi_{xt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\
\rho_1w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3(\omega_x - l\phi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

para condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann, em que $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$ *e* $\gamma_1 = 0$. *Então*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2).$$

Demonstração: Suponhamos $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$. Então, pelo lema 3, existe $w \in \mathbb{R}$ com $\| \mathcal{A}_2^{-1} \| \leq |w| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \rho(\mathcal{A}_2) \text{ e } sup\{\| (i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1} \|; |\beta| < |w|\} = \infty.$$

Logo, existem sequência $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to w$ quando $n \to \infty$, $|\lambda_n| < |w|$ e sequência $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ com $\| y_n \|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\| (i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)y_n \|_{\mathcal{H}_2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

Portanto, relembrando a equivalência entre a norma induzida pela energia $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$ e a norma usual de $\mathcal{H}_2$ $\|.\|_2$, seguem as seguintes convergências em $L^2(0, L)$:

$$i\lambda_n\phi^n - \Phi^n \to 0 \tag{5.219}$$

$$i\lambda_n\phi_x^n - \Phi_x^n \to 0 \tag{5.220}$$

$$i\lambda_n\psi - \Psi \to 0 \tag{5.221}$$

$$i\lambda_n\psi_x^n - \Psi_x^n \to 0 \tag{5.222}$$

$$i\lambda_n\omega^n - W^n \to 0 \tag{5.223}$$

$$i\lambda_n\omega_x^n - W_x^n \to 0 \tag{5.224}$$

$$i\rho_1\lambda_n\Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x - l\gamma_3(W_x^n - l\Phi^n) - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n) \to 0 \tag{5.225}$$

$$i\rho_2\lambda_n\Psi^n - b\psi_{xx}^n - \gamma_2\Psi_{xx}^n + k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \to 0 \tag{5.226}$$

$$i\rho_1\lambda_n W^n + lk(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - \gamma_3(W_x^n - l\Phi^n)_x - k_0(\omega_x^n - l\phi^n)_x \to 0, \tag{5.227}$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$.
Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)y_n$ por y_n, obtemos que

$$Re\langle i\lambda_n I - \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = -Re\langle \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_j} = \gamma_3\|W_x^n - l\Phi^n\|_{L^2} + \gamma_2\|\Psi_x^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

ou seja,

$$W_x^n - l\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{5.228}$$

e,

$$\Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{5.229}$$

e logo, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{5.230}$$

Das convergências (5.219), (5.224) e (5.228), obtemos que

$$\omega_x^n - l\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.231}$$

Agora, usando (5.229), (5.230) em (5.221) e (5.222), respectivamente, obtemos

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{5.232}$$

e

$$\psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.233}$$

De (5.226) segue que

$$\begin{aligned} i\rho_2\lambda_n \int_0^L \Psi^n \overline{(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)} dx + b \int_0^L \psi_x^n \overline{(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x} dx \\ + \gamma_2 \int_0^L \Psi_x^n \overline{(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x} dx + k \|\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n\|_{L^2}^2 \to 0. \end{aligned}$$

Observando a convergência dada em (5.225), concluímos que a sequência $([\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n]_x)_n$ é limitada uniformemente em $L^2(0,L)$, logo, temos que

$$\|\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ de (5.227) por W, e das convergências encontradas, segue que

$$W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Finalmente, toamndo o produto interno de (5.225) por Φ, concluímos que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.234}$$

Logo, acabamos de mostrar que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$. Portanto, $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.

□

Teorema 5.3.2 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$. *Então, a solução do problema*

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - l\gamma_3(w_x - l\phi)_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2\psi_{xt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3(\omega_x - l\phi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}. \tag{5.235}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{\alpha}{}_2)$, *então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\alpha}{}_2)}. \tag{5.236}$$

Demonstração: Já mostramos, no lema acima, que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
Consideremos, agora, a equação

$$i\beta U - \mathcal{A}_2 U = F,$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^t \in \mathcal{H}_2$ e $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$,
que em relação as componentes se apresenta como

$$\begin{aligned}
i\beta\phi - \Phi &= f_1 &(5.237)\\
i\beta\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - l\gamma_3(W_x - l\Phi) &= \rho_1 f_2 &(5.238)\\
i\beta\psi - \Psi &= f_3 &(5.239)\\
i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} - \gamma_2\Psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) &= \rho_2 f_4 &(5.240)\\
i\beta\omega - W &= f_5 &(5.241)\\
i\beta\rho_1 W + kl(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - \gamma_3(W_x - l\Phi)_x &= \rho_1 f_6. &(5.242)
\end{aligned}$$

Temos que

$$Re\{\langle \mathcal{A}_j U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = -\gamma_2\|\Psi_x\|^2_{L^2} - \gamma_3\|W_x - l\Phi\|^2_{L^2},$$

o que implica,

$$\gamma_2\|\Psi_x\|^2_{L^2} \leq Re\{\langle -\mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta U - \mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \tag{5.243}$$

e,

$$\gamma_3\|W_x - l\Phi\|^2_{L^2} \leq Re\{\langle -\mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta U - \mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.244}$$

Da desigualdade encontrada em (5.243) e pela Desigualdade de Poincaré, temos que

$$\gamma_2\|\Psi\|^2_{L^2} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.245}$$

Temos que

$$i\beta\psi - \Psi = f_3,$$

e

$$i\beta(w_x - l\phi) - (W_x - l\Phi) = f_{5x} - lf_1,$$

portanto,

$$\begin{aligned} \beta^2\|\psi_x\|^2_{L^2} &\leq C\|\Psi_x\|^2_{L^2} + C\|f_3\|^2_{L^2} \\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}, \end{aligned} \tag{5.246}$$

e

$$\begin{aligned} \beta^2\|w_x - l\phi\|^2_{L^2} &\leq C\|W_x - l\Phi\|^2_{L^2} + \|f_{5x} - lf_1\|^2_{L^2} \\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned} \tag{5.247}$$

Do produto de (5.242) por $\overline{\omega}$ segue que

$$\begin{aligned} \rho_1\|W\|^2 &= -\rho_1\int_0^L W\overline{f_5}dx + kl\int_0^L(\phi_x + \psi + l\omega)\overline{\omega}dx \\ &\quad + \int_0^L N\overline{\omega_x}dx - \rho_1\int_0^L f_6\overline{\omega}dx, \end{aligned}$$

em que $N = k_0(\omega_x - l\phi) + \gamma_3(W_x - l\Phi)$. Logo,

$$\begin{aligned} \rho_1\|W\|^2_{L^2} &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2} + C\|\phi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}\frac{1}{\beta}\|W\|_{L^2} + C\epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} \\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2} + \frac{C}{\beta^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + C\epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned} \tag{5.248}$$

Do produto de (5.240) por $\overline{\phi_x + \psi + l\omega}$, obtemos que

$$\begin{aligned} +k\|\phi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 &= -i\beta\rho_2\int_0^L \Psi\overline{(\phi_x+\psi+l\omega)}dx - b\int_0^L \psi_x\overline{(\phi_x+\psi+l\omega)_x}dx \\ &\quad -\gamma_2\int_0^L \Psi_x\overline{(\phi_x+\psi+l\omega)_x}dx + \rho_2\int_0^L f_4\overline{(\phi_x+\psi+l\omega)}dx, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} k\|\phi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 &= \rho_2\int_0^L \Psi\left[\overline{(\Phi_x+\Psi+lW)+(f_{1x}+f_3+lf_5)}\right]dx \\ &\quad -\int_0^L (b\psi_x+\gamma_2\Psi_x)\frac{1}{k}\left[\overline{i\beta\rho_1\Phi - lN - \rho_1 f_2}\right]dx \\ &\quad +\rho_2\int_0^L f_4\overline{(\phi_x+\psi+l\omega)}dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$k\|\phi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Tomando o produto interno de (5.238) por ϕ, obtemos que

$$\begin{aligned} \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 &= -\rho_1\int_0^L \Phi\overline{f_1}dx - k\int_0^L (\phi_x+\psi+l\omega)\overline{\phi_x}dx - lk_0\int_0^L (\omega_x - l\phi)\overline{\phi}dx \\ &\quad -l\gamma_3\int_0^L (W_x - l\Phi)\overline{\phi}dx - \rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Assim, acabamos de mostrar que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1. \tag{5.249}$$

Logo, o sistema possui decaimento polinomial, e

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}. \tag{5.250}$$

$\square$

Otimalidade

Teorema 5.3.3 *A taxa de decaimento polinomial encontrada no Teorema* 5.3.2 *é a taxa ótima de decaimento do sistema.*

Demonstração: Se a taxa de decaimento polinomial $\tau = \dfrac{1}{2}$, encontrada no teorema 5.3.2, puder ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, então, pelo teorema 1.3.4, existe $\epsilon >$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}} \left\|(i\lambda I - \mathcal{A}_2)^{-1}\right\| \leq C_\epsilon, \ \forall |\lambda| \geq 1.$$

Contudo, provamos no teorema 5.3.1 que as funções $U_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \omega_n, W_n)^t \in \mathcal{D}\mathcal{A}_2$, dadas por

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x), \\
\Phi_n &= i\lambda_n \phi, \\
\psi_n &= B_n \cos(\beta_n x), \\
\Psi_n &= i\lambda_n \psi, \\
\omega_n &= C_n \cos(\beta_n x), \\
W_n &= i\lambda_n \omega,
\end{aligned}$$

formam, para determinados valores de A_n, B_n e C_n, uma sequência de soluções da equação

$$i\lambda_n - \mathcal{A}_2 U_n = F_n,$$

em que $F_n = (0, \rho_1^{-1} \sin(\beta_n x), 0, 0, 0, 0)^t$, e $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, e valores de λ_n tais que

$$\lambda_n^2 \rho_1 = -3l^2 k + k\beta_n^2.$$

Calculando os valores de A_n, B_n e C_n, obtemos que

$$\begin{aligned}
A_n &\approx \frac{\gamma_2\gamma_3\beta_n^4\lambda_n^2}{i(4l^2k^2\gamma_2 + k^2\gamma_3)\beta_n^4\lambda_n} \\
&= -i\tilde{C}\beta_n, \qquad \tilde{C} > 0.
\end{aligned}$$

Logo, neste caso,

$$\begin{aligned}
\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1 \|\Phi_n\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_1 \|i\lambda_n A_n \sin(\beta_n x)\|^2 \\
&\approx \hat{C}\beta_n^4, \qquad \hat{C} > 0.
\end{aligned}$$

Assim, para qualquer $\epsilon > 0$, temos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_2} \quad \geq \quad K\lambda_n^{2\epsilon}, \qquad K > 0.$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\|(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

E portanto, a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema.

□

5.3.2 Viscoelasticidades no sistema

Aqui, vamos investigar o sistema de Bresse sob ação de duas viscoelasticidades agindo no momento fletor e tensão longitudal adicionadas diretamente nas equações do modelo. Observamos o mesmo comportamento assintótico das soluções do sistema com dissipações equivalentes, introduzidas no modelo através de suas leis coonstitutivas, estudado na subseção anterior.

Falta de estabilidade exponencial

Teorema 5.3.4 *Seja (ϕ, ψ, ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse viscoelástico*

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) \;=\; 0 \;\; em \; (0,L)\times(0,\infty) \quad (5.251)$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} \;=\; 0 \;\; em \; (0,L)\times(0,\infty) \quad (5.252)$$
$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} \;=\; 0 \;\; em \; (0,L)\times(0,\infty), \quad (5.253)$$

com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann e condições iniciais (3.7). *Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L \psi_0 dx = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L \omega_0 dx = \int_0^L \omega_1 dx = 0$, então o semigrupo gerado pelo operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, dado em* (3.35) *com $\gamma_1' = 0$, $\gamma_2' > 0$, $\gamma_3' > 0$, não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Mostraremos a existência de uma sequência $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset D(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n - \widetilde{\mathcal{A}}_2)U_n = F_n \qquad (5.254)$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1 \in H_0^1(0,L), && (5.255)\\
i\lambda_n\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega)_x - l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) &= f_2 \in L^2(0,L), && (5.256)\\
i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3 \in H_*^1(0,L), && (5.257)\\
i\lambda_n\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi+l\omega) - \frac{\gamma_2'}{\rho_2}\Psi_{xx} &= f_4 \in L_*^2(0,L), && (5.258)\\
i\lambda_n\omega - W &= f_5 \in H_*^1(0,L), && (5.259)\\
i\lambda_n W + l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega) - \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x - \frac{\gamma_3'}{\rho_1}W_{xx} &= f_6 \in L_*^2(0,L). && (5.260)
\end{aligned}$$

Escolhemos

$$F_n = (0, \alpha\rho_1^{-1}\sin(\beta_n x), 0, 0, 0, 0)^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.

A sequência $(F_n)_n$ escolhidada limitada em $\mathcal{H}_2$, pois, $\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} = \left(\dfrac{\alpha^2}{\rho_1}\right)\dfrac{L}{2}$.

Por (5.255), (5.257) e (5.259), temos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n\omega,$$

que substituídas em (5.256), (5.258) e (5.260), implicam que

$$\begin{aligned}
-\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= \alpha\sin(\beta_n x) && (5.261)\\
-\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x+\psi+l\omega) - b\psi_{xx} - i\lambda\gamma_2'\psi_{xx} &= 0 && (5.262)\\
-\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - i\lambda\gamma_3'\omega_{xx} &= 0. && (5.263)
\end{aligned}$$

Devido as condições de contorno consideradas, temos que as funções

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n\sin(\beta_n x),\\
\psi_n &= B_n\cos(\beta_n x),\\
\omega_n &= C_n\cos(\beta_n x),
\end{aligned}$$

são solução do sistema acima se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$\begin{aligned}
A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0) + B_n(k\beta_n) + C_n(lk\beta_n + lk_0\beta_n) &= \alpha \quad (5.264)\\
A_n(k\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2'\beta_n^2) + C_n(kl) &= 0 \quad (5.265)\\
A_n(lk\beta_n + k_0l\beta_n) + B_n(lk) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_3'\beta_n^2) &= 0, \quad (5.266)
\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$M\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} p_1 & k\beta_n & l\beta_nk + l\beta_nk_0 \\ k\beta_n & -\lambda_n^2\rho_2 + k + \beta_n^2q_2 & lk \\ l\beta_nk + l\beta_nk_0 & lk & -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + \beta_n^2q_3 \end{bmatrix}, \tag{5.267}$$

e,

$$\begin{aligned}
p_1 &:= -\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0,\\
q_2 &:= b + i\lambda_n\gamma_2',\\
q_3 &:= k_0 + i\lambda_n\gamma_3'.
\end{aligned}$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned}
\det\{M\} &= p_1(-\lambda_n^2\rho_2 + k + \beta_n^2q_2)(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + \beta_n^2q_3)\\
&\quad +2k^2l\beta_n(l\beta_nk + l\beta_nk_0) - (l\beta_nk + l\beta_nk_0)^2(-\lambda_n^2\rho_2 + k + \beta_n^2q_2)\\
&\quad -k^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + \beta_n^2q_3) - k^2l^2p_1.
\end{aligned}$$

Escolhemos λ_n tal que

$$p_1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_n^2\rho_1 = k\beta_n^2 + l^2k_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\det\{M\} &= 2k^2l\beta_n(l\beta_nk + l\beta_nk_0) - (l\beta_nk + l\beta_nk_0)^2(-\lambda_n^2\rho_2 + k + \beta_n^2q_2)\\
&\quad -k^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + \beta_n^2q_3)\\
&\approx -i(k^2\gamma_3' + l^2[k + k_0]^2\gamma_2')\beta_n^4\lambda_n.
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para A_n, B_n e C_n, e considerando $\alpha = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(-\lambda_n^2\rho_2 + k + \beta_n^2 q_2)(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + \beta_n^2 q_3) - l^2k^2}{\det M} \\ &\approx \frac{-\gamma_2'\gamma_3'\beta_n^4\lambda_n^2}{-i(k^2\gamma_3' + l^2[k+k_0]^2\gamma_2')\beta_n^4\lambda_n} \\ &= -\frac{i\gamma_2'\gamma_3'}{k^2\gamma_3' + l^2[k+k_0]^2\gamma_2'}\lambda_n. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 \\ &= \rho_1\|i\lambda_n A_n \sin(\beta_n x)\|_{L^2}^2 \\ &\approx \hat{C}\beta_n^4, \quad \hat{C} > 0. \end{aligned} \tag{5.268}$$

Logo, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Acabamos de mostrar, então, que o sistema de Bresse viscoelástico dado por

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned}$$

com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann, não é exponencialmente estável.

□

Estabilidade polinomial

Lema 16 *Seja $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ o operador diferencial associado ao sistema de Bresse viscoelástico*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned}$$

para condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann, em que $\gamma_2' > 0$, $\gamma_3' > 0$ *e* $\gamma_1' = 0$. *Então*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2).$$

Demonstração: Se $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, então, pelo lema 3, existe $w \in \mathbb{R}$ com $\| \widetilde{\mathcal{A}}_2^{-1} \| \leq |\mu| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |\mu|\} \subset \rho(\widetilde{\mathcal{A}}_2) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\|; |\beta| < |\mu|\} = \infty.$$

Logo, existem sequência $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \mu$ quando $n \to \infty$, $|\lambda_n| < |\mu|$ e sequência $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

Como a norma induzida pela energia $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$ e a norma usual de $\mathcal{H}_2$ $\|.\|_2$ são equivalentes, seguem as seguintes convergências em $L^2(0, L)$:

$$i\lambda_n \phi^n - \Phi^n \to 0 \tag{5.269}$$
$$i\lambda_n \phi_x^n - \Phi_x^n \to 0 \tag{5.270}$$
$$i\lambda_n \psi^n - \Psi^n \to 0 \tag{5.271}$$
$$i\lambda_n \psi_x^n - \Psi_x^n \to 0 \tag{5.272}$$
$$i\lambda_n \omega^n - W^n \to 0 \tag{5.273}$$
$$i\lambda_n \omega_x^n - W_x^n \to 0 \tag{5.274}$$
$$i\rho_1\lambda_n \Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n) \to 0 \tag{5.275}$$
$$i\rho_2\lambda_n \Psi^n - b\psi_{xx}^n + k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - \gamma_2'\Psi_{xx}^n \to 0 \tag{5.276}$$
$$i\rho_1\lambda_n W^n + lk(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - k_0(\omega_x^n - l\phi^n)_x - \gamma_3' W_{xx}^n \to 0, \tag{5.277}$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$.
Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)y_n$ por y_n, temos que

$$Re\langle i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = -Re\langle \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = \gamma_2'\|\Psi_x^n\|_{L^2} + \gamma_3'\|W_x^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

logo,

$$\Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{5.278}$$

e,

$$W_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.279}$$

Da desigualadade de Poincaré, segue que

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{5.280}$$

e,

$$W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{5.281}$$

Das convergências (5.272) e (5.274), obtemos que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\omega_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Novamente, por Poincaré, temos também que

$$\psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ de $(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)$ por

$$i\rho_2\lambda_n\Psi^n - b\psi_{xx}^n + k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - \gamma_2'\Psi_{xx}^n,$$

obtemos, por (5.276), que

$$i\rho_2\lambda_n\int_0^L \Psi^n\overline{(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)}dx + \int_0^L (b\psi_x^n + \gamma_2'\Psi_x^n)[\overline{(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)}]_x dx$$
$$+k\|\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Temos, por (5.275), que a sequência de funções $([\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n]_x)_n$ é limitada uniformemente em $L^2(0,L)$, logo, a convergência acima implica que

$$\|\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{5.282}$$

Assim,

$$\|\phi_x^n\|_{L^2} \leq \|\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n\|_{L^2} + \|\psi^n\|_{L^2} + l\|\omega^n\|_{L^2} \to 0, \tag{5.283}$$

e por Poincaré,

$$\|\phi^n\|_{L^2} \to 0. \tag{5.284}$$

De (5.269) e (5.284) obtemos que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Finalmente,

$$\|\omega_x^n - l\phi^n\|_{L^2} \leq \|\omega_x^n\|_{L^2} + l\|\phi^n\|_{L^2} \to 0.$$

Portanto, temos que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$. Logo, concluímos que $i\mathbb{R} \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
□

Teorema 5.3.5 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Então, a solução do problema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned}$$

decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)}. \tag{5.285}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2^\alpha)$*, então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2^\alpha)}. \tag{5.286}$$

Demonstração: Pelo lema anterior temos que $i\mathbb{R} \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Agora, vamos mostrar que existe uma constante positiva C independente de $\beta \in \mathbb{R}$ com

$|\beta| \geq 1$ e $F \in \mathcal{H}_2$ tal que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1.$$

Consideremos a equação

$$i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F,$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^t \in \mathcal{H}_2$ e $U \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Em relação as suas componentes, a equação $i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F$ é dada por

$$\begin{aligned}
i\beta\phi - \Phi &= f_1 && (5.287)\\
i\beta\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= \rho_1 f_2 && (5.288)\\
i\beta\psi - \Psi &= f_3 && (5.289)\\
i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) - \gamma_2'\Psi_{xx} &= \rho_2 f_4 && (5.290)\\
i\beta\omega - W &= f_5 && (5.291)\\
i\beta\rho_1 W + kl(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - \gamma_3' W_{xx} &= \rho_1 f_6. && (5.292)
\end{aligned}$$

Temos que $Re\{\langle\widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = -\gamma_2'\|\Psi_x\|_{L^2}^2 - \gamma_3'\|W_x\|_{L^2}^2$, então,

$$\gamma_2'\|\Psi_x\|_{L^2}^2 + \gamma_3'\|W_x\|_{L^2}^2 = Re\{\langle -\widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Assim, pela desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2},$$

e

$$\|W\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Seguem das equações (5.289) e (5.291), respectivamente, que

$$\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\beta^2}\|\Psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2,$$

e

$$\|\omega_x\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\beta^2}\|W_x\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2, \tag{5.293}$$

para $|\beta| \geq 1$.

Do produto interno em $L^2(0, L)$ da equação (5.290) por $(\phi_x + \psi + l\omega)$, segue que

$$\begin{aligned} k\|\phi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 &= -i\beta\rho_2 \int_0^L \Psi\overline{(\phi_x + \psi + l\omega)}dx \\ &\quad - \int_0^L (b\psi_x + \gamma_2'\Psi_x)\overline{(\phi_x + \psi + l\omega)_x}dx + \rho_2 f_4 \int_0^L \overline{(\phi_x + \psi + l\omega)}dx. \end{aligned}$$

Logo, por (5.288), obtemos que

$$\begin{aligned} \|\phi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 &\leq C\|i\beta\rho_2\Psi\|_{L^2}^2 + C\|f_4\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C\|b\psi_x + \gamma_2'\Psi_x\|_{L^2}\|i\beta\rho_1\Phi - lk_0(\omega_x - l\phi) - \rho_1 f_2\|_{L^2} \\ &\leq C(1 + \beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2. \end{aligned}$$

Temos então, que

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^2}^2 &\leq C\|\phi_x\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\|\phi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + C\|\psi\|_{L^2}^2 + C\|\omega\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(1 + \beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 &\leq C\|\omega_x\|_{L^2}^2 + C\|\phi\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(1 + \beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2. \end{aligned} \tag{5.294}$$

Tomando o produto interno em $L^2(0, L)$ de ϕ pela equação (5.288), obtemos

$$-\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 - \rho_1 \int_0^L \Phi\overline{f_2} + k \int_0^L (\phi_x + \psi + l\omega)\overline{\phi_x}dx - lk_0 \int_0^L (\omega_x - l\phi)\overline{\phi}dx = \rho_1 \int_0^L f_2\overline{\phi}dx.$$

Logo, pelas desigualdades encontradas anteriormente, concluímos que

$$\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq C(1 + \beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Portanto, temos que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1. \tag{5.295}$$

Assim, o sistema de Bresse, dado por

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

possui decaimento polinomial, e

$$\|e^{t\widetilde{\mathcal{A}}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)}.$$

□

Otimalidade

Teorema 5.3.6 *A taxa de decaimento polinomial encontrada no teorema 5.3.5 é a taxa ótima de decaimento.*

Demonstração: Pelo teorema 1.3.4, se a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ de decaimento polinomial encontrada no teorema anterior puder ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}}\left\|(i\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\right\| \leq C_\epsilon, \ \forall|\lambda| \geq 1.$$

Consideremos $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$.

Seja $U_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \omega_n, W_n) \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, tal que

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x),\\
\Phi_n &= i\lambda_n\phi,\\
\psi_n &= B_n\cos(\beta_n x),\\
\Psi_n &= i\lambda_n\psi,\\
\omega_n &= C_n\cos(\beta_n x),\\
W_n &= i\lambda_n\omega.
\end{aligned}$$

Na demonstração do teorema 5.3.4 provamos que, para determinados valores de A_n, B_n e C_n, a função U_n é solução da equação

$$i\lambda_n U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F_n,$$

em que

$$F_n = (0, \rho_1^{-1} \sin(\beta_n x), 0, 0, 0, 0)^t in \mathcal{H}_2$$

e λ_n satisfaz

$$\lambda_n^2 \rho_1 = k\beta_n^2 + l^2 k_0.$$

Neste caso, calculando os valores de A_n, B_n e C_n, obtemos que

$$A_n \approx -\frac{i\gamma_2' \gamma_3'}{k^2\gamma_3' + l^2[k+k_0]^2\gamma_2'}\lambda_n.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1 \|\Phi_n\|_{L^2}^2 \\ &= \rho_1 \|i\lambda_n A_n \sin(\beta_n x)\|_{L^2}^2 \\ &\approx \hat{C}\lambda_n^4, \quad \hat{C} > 0. \end{aligned} \tag{5.296}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, temos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq K\lambda_n^{2\epsilon}, \qquad K > 0.$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}} \|(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Logo, concluímos que a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema.
□

Capítulo 6

Vigas de Bresse com uma viscoelasticidade

Neste capítulo analisamos o efeito dissipativo adquirido pelo sistema de Bresse viscoelástico, supondo que apenas uma viscosidade age sobre o sistema. Assim como nos capítulos anteriores, a viscosidade elástica é introduzida no modelo de duas formas diferentes: primeiramente analisamos o modelo com única viscosidade elástica introduzida no problema através das leis constitutivas, em seguida, analisamos o problema com a dissipação adicionada diretamente em uma das equações do sistema.
Portanto, neste capítulo, estamos interessados no comportamento assistótico das soluções do sistema

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_{xt} - \gamma_3 l(\omega_x - l\phi)_t &= 0\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi+l\omega) + \gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_t - \gamma_2\psi_{xxt} &= 0\\
\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x+\psi+l\omega) - \gamma_3(\omega_x - l\phi)_{xt} + l\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_t &= 0,
\end{aligned} \tag{6.1}$$

nos casos em que $\gamma_n > 0$, para algum $n \in \{1,2,3\}$, e $\gamma_k = 0$, para $k \neq n$; bem como do sistema

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi+l\omega) - \gamma_2'\psi_{xxt} &= 0\\
\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x+\psi+l\omega) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

em que $\gamma_n' > 0$, para algum $n \in \{1,2,3\}$, e $\gamma_k' = 0$, para $k \neq n$; com condições iniciais

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x),\\
w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x) \text{ em } (0,L).
\end{aligned}$$

Já foi provado, no capítulo 3, que os operadores diferenciais $\mathcal{A}_2$ e $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, associados aos sistema (6.1) e (6.2), respectivamente, são geradores infinitesimais de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}_2 := H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L),$$

para condições de contorno mistas do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann. Portanto, o problema está bem posto.

Veremos que os sistemas de Bresse viscoelásticos acima, sob a ação de uma única viscosidade elástica, não possuem decaimento exponencial, independentemente dos coeficientes do sistema. Porém, a dissipação é forte o suficiente para estabilizar os sistemas de forma polinomial em todos os casos, desde que os coeficientas de sistema satisfaçam certas condições. Nos casos em que os sistemas são polinomialmente estáveis, analisamos também a otimalidade das taxas de decaimento encontradas. Mostramos que $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento em todos os casos em que houve decaimento polinomial. Essa taxa ótima coincide com a melhor taxa encontrada no capítulo anterior, para o sistema de Bresse sob a ação de duas viscosidades elásticas, bem como com a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema de Timoshenko com apenas uma viscoelasticidade.

6.1 Viscoelasticidade somente sobre o estresse cortante

6.1.1 Viscoelasticidade nas leis constitutivas do modelo

Nesta subseção, investigaremos o efeito dissipativo adquirido pelo sistema de vigas de Bresse com uma viscosidade elástica agindo efetivamente somente sobre o estresse cortante, inserida nas leis constitutivas do modelo.

Estudaremos, então, o sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} &= 0 && (6.3)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 && (6.4)\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0, && (6.5) \end{aligned}$$

em $(0,L) \times (0,\infty)$, para $\gamma_1 > 0$.

Vamos mostrar que, para condições de contorno

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0 \text{ em } (0,\infty), \qquad (6.6)$$

o sistema não é exponencialmente estável, independentemente dos coeficientes do sistema. Quando os coeficientes do sistema satisafazem

$$\left(\frac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) < 0,$$

então o sistema possui decaimento polinomial em normas não uniformes, ou seja, mostramos que, sob estas condições, se $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, então, existe $C > 0$ tal que

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} \|U_0\|^2_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}.$$

Além disso, mostramos que a taxa de decaimento polinomial encontrada não pode ser melhorada sobre $D(\mathcal{A}_2)$, para condições de contorno (6.6).

Falta de estabilidade exponencial

Teorema 6.1.1 *Seja (ϕ, ψ, ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse*

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} = 0 \tag{6.7}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t = 0 \tag{6.8}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t = 0, \tag{6.9}$$

em $(0, L) \times (0, \infty)$, com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann e condições iniciais

$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x),$$
$$w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x) \ \textit{em} \ (0,L).$$

Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L \psi_0 dx = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L \omega_0 dx = \int_0^L \omega_1 dx = 0$, então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}_2$, dado em (3.16) com $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ e $\gamma_1 > 0$, não é exponencialmente estável.

Demonstração: Vamos mostrar a existência de uma sequência numérica $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n - \mathcal{A}_2)U_n = F_n$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\phi-\Phi &= f_1\in H^1_0(0,L), &(6.10)\\
i\lambda_n\Phi-\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega)_x-\frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x+\Psi+lW)_x-l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x-l\phi) &= f_2\in L^2(0,L), &(6.11)\\
i\lambda_n\psi-\Psi &= f_3\in H^1_*(0,L), &(6.12)\\
i\lambda_n\Psi-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi+l\omega)+\frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi_x+\Psi+lW) &= f_4\in L^2_*(0,L), &(6.13)\\
i\lambda_n\omega-W &= f_5\in H^1_*(0,L), &(6.14)\\
i\lambda_nW+l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega)+l\frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x+\Psi+lW)-\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x-l\phi)_x &= f_6\in L^2_*(0,L). &(6.15)
\end{aligned}$$

Escolhemos

$$F_n=(0,0,0,\cos(\beta_nx),0,0)^t,$$

em que $\beta_n=\dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.

A sequência $(F_n)_n$ escolhida limitada em $\mathcal{H}_2$. De fato, $\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2}=\rho_2\dfrac{L}{2}$.

De (6.10), (6.12) e (6.14), obtemos que

$$\Phi=i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi=i\lambda_n\psi,$$

$$W=i\lambda_n\omega.$$

Substituindo as igualdades acima em (6.11), (6.13) e (6.15), obtemos

$$\begin{aligned}
-\lambda_n^2\rho_1\phi-k(\phi_x+\psi+l\omega)_x-i\lambda_n\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)_x-lk_0(\omega_x-l\phi) &= 0 &(6.16)\\
-\lambda_n^2\rho_2\psi+k(\phi_x+\psi+l\omega)+i\lambda_n\gamma_1(\phi_x+\psi+l\omega)-b\psi_{xx} &= \rho_2\cos(\beta_nx) &(6.17)\\
-\lambda_n^2\rho_1\omega+lk(\phi_x+\psi+l\omega)+i\lambda_n\gamma_1 l(\phi_x+\psi+l\omega)-k_0(\omega_x-l\phi)_x &= 0. &(6.18)
\end{aligned}$$

Devido as condições de contorno que estamos considerando, vamos supor que

$$\phi_n=A_n\sin(\beta_nx),$$

$$\psi_n=B_n\cos(\beta_nx),$$

$$\omega_n=C_n\cos(\beta_nx).$$

Assim, ϕ_n, ψ_n e ω_n satisfazem o sistema (6.16) - (6.18) se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_1\beta_n^2 + l^2k_0) + B_n(k\beta_n + i\lambda_n\gamma_1\beta_n) + C_n(l[k+k_0]\beta_n + i\lambda\gamma_1 l\beta_n) = 0 \quad (6.19)$$

$$A_n(k\beta_n + i\lambda_n\gamma_1\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + i\lambda_n\gamma_1 + k + b\beta_n^2) + C_n(kl + i\lambda_n\gamma_1 l) = \rho_2 \quad (6.20)$$

$$A_n(l[k+k_0]\beta_n + i\lambda_n\gamma_1 l\beta_n) + B_n(lk + i\lambda_n\gamma_1 l) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + i\lambda_n\gamma_1 l^2 + k_0\beta_n^2) = 0 \quad (6.21)$$

Vamos tomar $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $-\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 = 0$.
Neste caso, fazendo (6.19)-(6.20)β_n e (6.21)-(6.20)l, obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0) + C_n(lk_0\beta_n) &= -\rho_2\beta_n && (6.22)\\ A_n(k_0 l\beta_n) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2) &= -\rho_2 l, && (6.23)\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 & lk_0\beta_n \\ k_0 l\beta_n & -\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ C_n \end{bmatrix} = -\rho_2 \begin{bmatrix} \beta_n \\ l \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Se $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{k_0}{b}$, então $-\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 = 0$, e assim

$$\begin{bmatrix} A_n \\ C_n \end{bmatrix} = \frac{\rho_2}{k_0^2 l^2\beta_n^2} \begin{bmatrix} 0 & -lk_0\beta_n \\ -k_0 l\beta_n & -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n \\ l \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Portanto,

$$A_n = -\frac{\rho_2}{k_0\beta_n}, \quad (6.26)$$

e

$$C_n = -\frac{\rho_2}{lk_0} - \frac{b\rho_1}{lk_0^2} + \frac{\rho_2 l}{k_0\beta_n^2}. \quad (6.27)$$

Substituindo os valores de A_n e C_n encontrados em (6.20), temos

$$-\frac{\rho_2}{k_0\beta_n}\beta_n + B_n + \left[-\frac{\rho_2}{lk_0} - \frac{b\rho_1}{lk_0^2} + \frac{\rho_2 l}{k_0\beta_n^2}\right] l = \frac{\rho_2}{k + i\lambda_n\gamma_1}$$

e logo,

$$B_n \to 2\frac{\rho_2}{k_0} + \frac{\rho_1}{k_0^2} \text{ quando } n \to \infty. \tag{6.28}$$

Agora, suponhamos que $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} \neq \dfrac{k_0}{b}$. Seja $c = \dfrac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0 \neq 0$, então

$$D = \det \begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + l^2 k_0 & lk_0\beta_n \\ & \\ k_0 l\beta_n & -\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 \end{bmatrix} = \beta_n^4 \frac{b\rho_1}{\rho_2} c - \beta_n^2 \frac{b\rho_1}{\rho_2} k_0 l^2 \tag{6.29}$$

e

$$\begin{bmatrix} A_n \\ \\ C_n \end{bmatrix} = \frac{-\rho_2}{D} \begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 & -lk_0\beta_n \\ & \\ -k_0 l\beta_n & -\lambda_n^2\rho_1 + l^2 k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \\ l \end{bmatrix}, \tag{6.30}$$

e portanto,

$$A_n = \frac{-\rho_2}{D}\left[-\lambda_n^2\rho_1\beta_n + k_0\beta_n^3 - l^2 k_0\beta_n\right] \tag{6.31}$$

e

$$C_n = \frac{-\rho_2}{D}\left[-lk_0\beta_n^2 - \lambda^2\rho_1 l + l^3 k_0\right]. \tag{6.32}$$

Logo,

$$A_n\beta_n \to \frac{\rho_2^2}{b\rho_1} \text{ quando } n \to \infty \tag{6.33}$$

e

$$C_n l \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{6.34}$$

Finalmente, de (6.20) temos que

$$B_n \to -\frac{\rho_2^2}{b\rho_1} \text{ quando } n \to \infty. \tag{6.35}$$

Assim

$$\begin{aligned} \|U_n\|^2_{\mathcal{H}_2} &\geq \rho_2 \|\Psi^n\|^2_{L^2} \\ &= \rho_2 |i\lambda_n B_n|^2 \|\cos\beta_n x\|^2_{L^2} \\ &= \rho_2 |\lambda_n B_n|^2 \frac{L}{2} \end{aligned}$$

Calculando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty,$$

e portanto, pelo teorema 1.3.2, o sistema não posssui decaimento exponencial. $\square$

Estabilidade polinomial

Lema 17

Seja $\mathcal{A}_2$ o operador associado ao sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} &= 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0, \end{aligned}$$

com condições de contorno mitas do tipo Dirichlet, Neumann-Neumann.
Se os coeficientes do sistema satisfazem

$$\left(\frac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) \leq 0,$$

então

$$i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$$

Demonstração: Vamos supor, por contradição, que $i\mathbb{R} \nsubseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$. Segue, então, pelo lema 3, que existe $\mu \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}_2^{-1}\| \leq |\mu| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |\mu|\} \subset \rho(\mathcal{A}_2) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}\|; |\beta| < |\mu|\} = \infty.$$

Logo, existem sequência $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \mu$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |\mu|$ e sequência $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)y_n\|_{\mathcal{H}_j} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Lembrando que a norma $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$ é equivalente a norma usual em $\mathcal{H}_2$, obtemos as seguintes convergências em $L^2(0,L)$:

$$i\beta_n\phi^n - \Phi^n \to 0 \quad (6.36)$$
$$i\beta_n\phi^n_x - \Phi^n_x \to 0 \quad (6.37)$$
$$i\beta_n\psi^n - \Psi^n \to 0 \quad (6.38)$$
$$i\beta_n\psi^n_x - \Psi^n_x \to 0 \quad (6.39)$$
$$i\beta_n\omega - W^n \to 0 \quad (6.40)$$
$$i\beta_n\omega^n_x - W^n_x \to 0 \quad (6.41)$$
$$i\rho_1\beta_n\Phi^n - k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n)_x - \gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n)_x - lk_0(\omega^n_x - l\phi^n) \to 0 \quad (6.42)$$
$$i\rho_2\beta_n\Psi^n - b\psi^n_{xx} + k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) + \gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n) \to 0 \quad (6.43)$$
$$i\rho_1\beta_n W^n + lk(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) + l\gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n) - k_0(\omega^n_x - l\phi^n)_x \to 0, \quad (6.44)$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$.
Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)y_n$ por y_n, obtemos, devido a propriedade dissipativa do sistema,

$$Re\langle i\beta_n I - \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = -Re\langle \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = \gamma_1\|\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n\|^2_{L^2} \to 0, \quad (6.45)$$

o que implica, pelas convergências (6.37), (6.38) e (6.40),

$$\|\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n\|^2_{L^2} \to 0. \quad (6.46)$$

Por questão de simplicidade, vamos denotar $S = k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) + \gamma_1(\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n)$. Com a notação acima, por (6.42), temos

$$i\rho_2\beta_n\Phi^n - S_x - lk_0(\omega^n_x - l\phi^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Multiplicando $i\rho_2\beta_n\Phi^n - S_x - lk_0(\omega^n_x - l\phi^n)$ por $\overline{S_x}$, segue, da convergência acima, que

$$-i\rho_1\beta_n\int_0^L \Phi^n_x\overline{S}\,dx - \|S_x\|^2_{L^2} + lk_0\int_0^L(\omega^n_x - l\phi^n)_x\overline{S}\,dx \to 0.$$

Observando as convergências apresentadas em (6.37) e (6.44), podemos concluir que as sequências de funções $(\Phi^n_x)_n$ e $([\omega^n_x - l\phi^n]_x)_n$ são uniformemente limitadas em $L^2(0,L)$, logo, temos

$$\|S_x\|^2_{L^2} \to 0,$$

de onde segue que

$$i\rho_1\beta_n\Phi^n - lk_0(\omega^n_x - l\phi^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Denotando $F_n = i\rho_1\beta_n\Phi^n - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n)$, da convergência (6.44), temos que

$$i\rho_1\beta_n(\Phi_x^n - lW^n) - l^2S - (F_n)_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

o que implica,

$$i\rho_1\beta_n([\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n] - \Psi^n - 2lW^n) - l^2S - (F_n)_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e então,

$$-i\rho_1\beta_n(\Psi^n + 2lW^n) - l^2S - (F_n)_x + i\rho_1\beta_n[\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n] \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \quad (6.47)$$

Multiplicando $\overline{(\psi^n + 2l\omega^n)}$ por

$$-i\rho_1\beta_n(\Psi^n + 2lW^n) - l^2S - (F_n)_x + i\rho_1\beta_n[\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n],$$

resulta, da última convergência,

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Psi^n + 2lW^n\|_{L^2}^2 - l^2\int_0^L S\overline{(\psi^n + 2l\omega^n)}\,dx + \int_0^L (F_n)\overline{(\psi^n + 2l\omega^n)_x}\,dx \\ +i\rho_1\beta_n\int_0^L (\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n)\overline{(\psi^n + 2l\omega^n)}\,dx \to 0.\end{aligned}$$

Como $S \to 0$ em $L^2(0,L)$ e $F_n \to 0$ em $L^2(0,L)$, concluímos que

$$\|\Psi^n + 2lW^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

e logo, pelas convergências (6.38) e (6.40), temos, também, que

$$\|\psi^n + 2l\omega^n\|_{L^2}^2 \to 0. \quad (6.48)$$

Assim, pela convergência (6.47), podemos concluir, também, que

$$(F_n)_x = i\rho_1\beta_n\Phi_x^n - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n)_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \quad (6.49)$$

Usando (6.43) e (6.44) temos que

$$\psi_{xx}^n + 2l\omega_{xx}^n - i\beta_n\left(\frac{\rho_2}{b}\Psi^n + 2l\frac{\rho_1}{k_0}W^n\right) - 2l^2\phi_x^n - \left(\frac{2l^2}{k_0} + \frac{1}{b}\right)S \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

que multiplicada por $\overline{\psi^n + 2l\omega^n}$ implica, usando (6.38) e (6.40),

$$\int_0^L |\psi_x^n + 2l\omega_x^n|^2 \, dx - \int_0^L [\frac{\rho_2}{b}\Psi^n + 2l\frac{\rho_1}{k}W^n][\overline{\Psi^n + 2lW^n}] \, dx$$
$$+2l^2 \int_0^L \phi_x^n \left[\overline{\frac{1}{i\beta_n}(\Psi^n + 2lW^n)}\right] \, dx + \left(\frac{2l^2}{k_0} + \frac{1}{b}\right) S[\overline{\psi^n + 2l\omega^n}] \, dx \to 0,$$

de onde segue que

$$\|\psi_x^n + 2l\omega_x^n\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{6.50}$$

Tomando o produto de (6.49) e (6.44) por $\overline{\omega}$, obtemos que

$$-\rho_1 \int_0^L (\Phi_x^n + lW^n) \, \overline{W^n} \, dx + 2lk_0\|\omega_x^n\|^2 + 2l^2 k_0 \int_0^L \phi_x^n \overline{\omega^n} \, dx \to 0,$$

de onde segue que

$$-\rho_1 \int_0^L (\Phi_x^n + \Psi^n + lW^n) \, \overline{W^n} \, dx + \rho_1 \int_0^L \Psi^n \overline{W^n} \, dx + 2lk_0\|\omega_x^n\|^2$$
$$+2l^2 k_0 \int_0^L (\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)\overline{\omega^n} \, dx - 2l^2 k_0 \int_0^L (\psi^n + 2l\omega^n)\overline{\omega^n} \, dx + 2l^3 k_0 \|\omega^n\|^2 \to 0. \tag{6.51}$$

Do produto de $\overline{\omega}$ por (6.43), segue que

$$-\rho_2 \int_0^L \Psi^n \overline{W^n} \, dx + b \int_0^L (\psi_x^n + 2l\omega_x^n - 2l\omega_x^n)\overline{\omega_x^n} \, dx \to 0,$$

e como $\psi_x^n + 2l\omega_x^n \to 0$ em $L^2(0, L)$, temos que

$$-\rho_2 \int_0^L \Psi^n \overline{W^n} \, dx - 2lb \int_0^L |\omega_x^n|^2 \, dx \to 0.$$

Logo, de (6.51) e das convergências já encontradas, obtemos que,

$$-2l \left(\frac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) \int_0^L |\omega_x^n|^2 \, dx + 2l^3 k_0 \|\omega^n\|^2 \to 0. \tag{6.52}$$

Assumindo que $\left(\frac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) \leq 0$, temos

$$\int_0^L |\omega^n|^2 \, dx \to 0,$$

e logo, por (6.40),

$$\int_0^L |W^n|^2 \, dx \to 0.$$

Da convergência (6.48), segue que

$$\int_0^L |\psi^n|^2 \, dx \to 0,$$

e portanto, de (6.38), obtemos que

$$\int_0^L |\Psi^n|^2 \, dx \to 0.$$

Tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de ψ^n por $i\rho_2\beta_n\Psi^n - b\psi^n_{xx} + S$, obtemos, por (6.43), que

$$\int_0^L |\psi^n_x|^2 \, dx \to 0. \tag{6.53}$$

Como $\|\Phi^n_x + \Psi^n + lW^n\|^2_{L^2} \to 0$ e $\|\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n\|^2_{L^2} \to 0$, as convergências acima implicam que

$$\int_0^L |\Phi^n_x|^2 \, dx \to 0,$$

e

$$\int_0^L |\phi^n_x|^2 \, dx \to 0,$$

e logo, pela desigualdade de Poincaré,

$$\int_0^L |\Phi^n|^2 \, dx \to 0,$$

e

$$\int_0^L |\phi^n|^2 \, dx \to 0.$$

Finalmente, as convergêcnias (6.50) e (6.53) implicam que

$$\int_0^L |\omega^n_x|^2 \, dx \to 0.$$

Assim, mostramos que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$.
Portanto, temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$, para o caso em que os coeficientes do sistema satisfazem $\left(\dfrac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) \leq 0$.
□

Teorema 6.1.2 *Suponhamos que $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$. Se os coeficien-*

tes do sistema de Bresse viscoelástico

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} &= 0 \qquad (6.54) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \qquad (6.55) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0, \qquad (6.56) \end{aligned}$$

em $(0, L) \times (0, \infty)$, *satisfazem*

$$\left(\frac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) < 0,$$

então, a solução do problema decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}.$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2^\alpha)$, *então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2^\alpha)}.$$

Demonstração: Pelo teorema 1.3.4, devemos mostar que

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2),$$

e

$$\sup_{|\beta|\geq 1} \frac{1}{\beta^2}\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}\| \leq C, \text{ para alguma constante } C > 0.$$

Pelo lema anterior, temos que $i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$, se $\left(\frac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) \leq 0$.
Para completar a demonstração, devemos verificar a existência de constante positiva C, independente de $\beta \in \mathbb{R}$, com $|\beta| \geq 1$, e $F \in \mathcal{H}_2$ tais que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1.$$

Sejam $F \in \mathcal{H}_2$ e $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W)^t \in \mathcal{A}_2$, tais que

$$i\beta U - \mathcal{A}_2 U = F,$$

que em relação às suas componentes, é dada por

$$
\begin{aligned}
i\beta\phi - \Phi &= f_1 && (6.57)\\
i\rho_1\beta\Phi - S_x - lN &= f_2 && (6.58)\\
i\lambda\psi - \Psi &= f_3 && (6.59)\\
i\rho_1\beta\Psi - \frac{\rho_1}{\rho_2}M_x + \frac{\rho_1}{\rho_2}S &= f_4 && (6.60)\\
i\beta\omega - W &= f_5 && (6.61)\\
i\rho_1\beta W - N_x + lS &= f_6 && (6.62)
\end{aligned}
$$

em que

$$S = k(\phi_x + \psi + l\omega) + \gamma_1(\Phi_x + \Psi + lW), \quad M = b\psi_x, \quad N = k_0(\omega_x - l\phi).$$

Observe que, devido a propriedade dissipativa do sistema, temos que

$$\gamma_1\|\Phi_x + \Psi + lW\|_{L^2}^2 \le \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Multiplicando a equação (6.58) por $\overline{\omega}_x$ temos

$$i\rho_1\beta\int_0^L \Phi\overline{\omega}_x\,dx - \int_0^L S_x\overline{\omega}_x\,dx - l\int_0^L N\overline{\omega}_x\,dx = \int_0^l f_2\overline{\omega}_x\,dx,$$

de onde segue que

$$
\begin{aligned}
-i\rho_1\beta\int_0^L \Phi_x\overline{\omega}\,dx - \int_0^L S_x\overline{\omega}_x\,dx - k_0 l\int_0^L |\omega_x|^2\,dx &\\
+k_0 l^2\int_0^L \phi\overline{\omega}_x\,dx &= \int_0^L f_2\overline{\omega}_x\,dx. && (6.63)
\end{aligned}
$$

Multiplicando as equações (6.60), (6.62) por $\overline{\omega}$, temos que

$$
\begin{aligned}
-i\rho_1\beta\int_0^L \Psi\overline{\omega}\,dx - \frac{\rho_1 b}{\rho_2}\int_0^L \psi_x\overline{\omega}_x\,dx - \frac{\rho_1}{\rho_2}\int_0^L S\overline{\omega}\,dx &= -\int_0^L f_4\overline{\omega}\,dx && (6.64)\\
-i\rho_1 l\beta\int_0^L W\overline{\omega}\,dx - k_0 l\int_0^L |\omega_x|^2\,dx + k_0 l^2\int_0^L \phi\overline{\omega_x}\,dx - l^2\int_0^L S\overline{\omega}\,dx &= -l\int_0^L f_6\overline{\omega}\,dx && (6.65)
\end{aligned}
$$

Somando as identidades (6.63)-(6.65), obtemos que

$$
\begin{aligned}
-i\rho_1\beta\int_0^L S\overline{\omega}\,dx - 2k_0 l\int_0^L |\omega_x|^2\,dx + 2k_0 l^2\int_0^L \phi\overline{\omega_x}\,dx - \frac{\rho_1}{\rho_2}b\int_0^L \psi_x\overline{\omega}_x\,dx &\\
= (\frac{\rho_1}{\rho_2} + l^2)\int_0^L S\overline{\omega}\,dx + R, && (6.66)
\end{aligned}
$$

em que R é tal que

$$|R| \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}.$$

De (6.58) e (6.62) obtemos

$$i\rho_1\beta(\Phi_x - lW) - S_{xx} - l^2 S = f_{2,x} - lf_6,$$

o que implica que

$$i\rho_1\beta([\Phi_x + \Psi + lW] - \Psi - 2lW) - S_{xx} - l^2 S = f_{2,x} - lf_6.$$

Então, temos que

$$-i\rho_1\beta(\Psi + 2lW) - S_{xx} - l^2 S = f_{2,x} - lf_6 - i\rho_1\beta[\Phi_x + \Psi + lW].$$

Multiplicando a equação acima por $\overline{(\psi + 2l\omega)}$, nós temos

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L |\Psi + 2lW|^2\,dx - \int_0^L S\overline{(\psi + 2l\omega)}_{xx}\,dx - l^2\int_0^L S\overline{(\psi + 2l\omega)}\,dx \\ = \int_0^L [f_{2,x} - lf_6 - i\rho_1\beta(\Phi_x + \Psi + lW)]\overline{(\psi + 2l\omega)}\,dx.\end{aligned}$$

Usando (6.58) e (6.62) mais uma vez, concluímos que

$$\rho_1\int_0^L |\Psi + 2lW|^2\,dx \leq C|\beta|\int_0^L |S|(|\Psi| + |W|)\,dx + R,$$

em que

$$|R| \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Assim, temos que para cada $\epsilon > 0$ existe C_ϵ tal que

$$\rho_1\int_0^L |\Psi + 2lW|^2\,dx \leq C_\epsilon|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}.$$

Usando (6.60) e (6.62), obtemos que

$$\psi_{xx} + 2l\omega_{xx} = i\beta\left(\frac{\rho_2}{b}\Psi + 2l\frac{\rho_1}{k_0}W\right) + 2k_0 l^2\phi_x + \frac{1}{b}f_4 + \frac{2l}{k_0}f_6 + \left(\frac{2l^2}{k_0} + \frac{1}{b}\right)S,$$

que multiplicada por $\overline{\psi + 2l\omega}$ resulta em

$$\int_0^L |\psi_x + 2l\omega_x|^2\,dx \leq \int_0^L |\frac{\rho_2}{b}\Psi + 2l\frac{\rho_1}{k_0}W||\Psi + 2lW|\,dx + \int_0^l \phi\overline{(\psi_x + 2l\omega_x)}\,dx + R,$$

de onde segue que

$$\int_0^L |\psi_x + 2l\omega_x|^2\,dx \le \int_0^L |\frac{\rho_2}{b}\Psi + 2l\frac{\rho_1}{k_0}W||\Psi + 2lW|\,dx + \int_0^l \phi\overline{(\psi_x + 2l\omega_x)}\,dx + R.$$

Portanto, para cada $\epsilon > 0$ existe C_ϵ tal que

$$\int_0^L |\psi_x + 2l\omega_x|^2\,dx \le C_\epsilon|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}.$$

Denotando $B = \psi + 2l\omega$ obtemos, por (6.66), que

$$\begin{aligned}-2l(k_0 - \frac{\rho_1 b}{\rho_2})\int_0^L |\omega_x|^2\,dx + 2k_0l^2\int_0^L \phi\overline{\omega_x}\,dx - \frac{\rho_1 b}{\rho_2}\int_0^L B_x\overline{\omega}_x\,dx \\ = i\rho_1\beta\int_0^L S\overline{\omega}\,dx + (\frac{\rho_1}{\rho_2} + l^2)\int_0^L S\overline{\omega}\,dx + R.\end{aligned} \tag{6.67}$$

Assumindo que $k_0 - \dfrac{\rho_1 b}{\rho_2} \neq 0$, obtemos que

$$\int_0^l |\omega_x|^2\,dx \le C_\epsilon|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}.$$

Assim, concluímos que

$$\int_0^l |\psi_x|^2\,dx \le C_\epsilon|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}.$$

Usando a desigualdade de dissipação, concluímos que

$$\int_0^l |\phi_x|^2\,dx \le C_\epsilon|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}.$$

Logo, por (6.58), (6.60) e (6.62), concluímos, respectivamente, que

$$\int_0^l |\Phi|^2\,dx \le C_\epsilon|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2},$$

$$\int_0^l |\Psi|^2\,dx \le C_\epsilon|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2},$$

e

$$\int_0^l |W|^2\,dx \le C_\epsilon|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}.$$

Portanto, temos que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} \le C_\epsilon|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2},$$

o que implica

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C_\epsilon |\beta|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Portanto, se

$$\left(\frac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) < 0,$$

então o sistema

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty),
\end{aligned}$$

com $\gamma_1 > 0$, é polinomialmente estável. □

Vimos que se $\left(\dfrac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) \leq 0$, então $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
Para o caso em que $\left(\dfrac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) > 0$, existem coeficientes para os quais $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$.

Teorema 6.1.3 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$*, e suponha que os coeficientes do sistema satisfazem*

$$\frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{k_0\rho_2 l^2}{b\rho_1 - k_0\rho_2}} \in \mathbb{N}.$$

Então, a solução do problema

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} &= 0 \textit{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \textit{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \textit{ em } (0, L) \times (0, \infty),
\end{aligned}$$

com $\gamma_1 > 0$*, não decai polinomialmente.*

Demonstração: Mostraremos que, neste caso, $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$, com condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann.
Consideremos, inicialmente, a equação

$$i\lambda_n U - \mathcal{A}_2 U = 0,$$

que nas suas componentes é dada por

$$\begin{aligned} i\lambda_n\phi - \Phi &= 0 & (6.68)\\ i\lambda_n\rho_1\Phi - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - \gamma_1(\Phi_x+\Psi+lW)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= 0 & (6.69)\\ i\lambda_n\psi - \Psi &= 0 & (6.70)\\ i\lambda_n\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi+l\omega) + \gamma_1(\Phi_x+\Psi+lW) &= 0 & (6.71)\\ i\lambda_n\omega - W &= 0 & (6.72)\\ i\lambda_n\rho_1 W + kl(\phi_x+\psi+l\omega) + \gamma_1 l(\Phi_x+\Psi+lW) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= 0. & (6.73) \end{aligned}$$

Temos então que,

$$\begin{aligned} i\lambda_n\phi &= \Phi,\\ i\lambda_n\psi &= \Psi,\\ i\lambda_n\omega &= W. \end{aligned}$$

Substituindo as igualdades acima em (6.69), (6.71) e (6.73), obtemos

$$\begin{aligned} -\lambda_n^2\rho_1\phi - (k+i\lambda_n\gamma_1)(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= 0 & (6.74)\\ -\lambda_n^2\rho_2\psi - b\psi_{xx} + (k+i\lambda_n\gamma_1)(\phi_x+\psi+l\omega) &= 0 & (6.75)\\ -\lambda_n^2\rho_1\omega + l(k+i\lambda_n\gamma_1)(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= 0. & (6.76) \end{aligned}$$

Derivando a expressão (6.76) em relação a x, e subtraindo do resultado o produto de 6.76, obtemos

$$(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0)(\omega_x - l\phi) - k_0(\omega_x - l\phi)_{xx} = 0. \tag{6.77}$$

Escolhemos $\lambda_n \in \mathbb{R}$ por

$$\lambda_n^2\rho_1 = k_0(\beta_n^2 + l^2), \tag{6.78}$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}$. Consideremos

$$\begin{aligned} \phi &= A\sin(\beta_n x)\\ \psi &= B\cos(\beta_n x)\\ \omega &= C\cos(\beta_n x), \end{aligned}$$

então o sistema (6.74) − (6.76) pode ser reescrito por

$$
\begin{aligned}
A(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_1\beta_n^2 + l^2k_0) + B(k\beta_n + i\lambda_n\gamma_1\beta_n) + C(lk\beta_n + i\lambda\gamma_1 l\beta_n + lk_0\beta_n) &= 0 \\
A(k\beta_n + i\lambda_n\gamma_1\beta_n) + B(-\lambda_n^2\rho_2 + i\lambda_n\gamma_1 + k + b\beta_n^2) + C(kl + i\lambda_n\gamma_1 l) &= \rho_2 \qquad (6.79) \\
A(lk\beta_n + i\lambda_n\gamma_1 l\beta_n + k_0 l\beta_n) + B(lk + i\lambda_n\gamma_1 l) + C(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + i\lambda_n\gamma_1 l^2 + k_0\beta_n^2) &= 0.
\end{aligned}
$$

Resolvendo a sistema para A e C, obtemos

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{B}{2\beta_n} \\
C &= -\frac{B}{2l}.
\end{aligned}
$$

Substituindo os valores de A e C encontrados na equação (6.79), obtemos

$$B\left(-\frac{k_0\rho_2}{\rho_1}(\beta_n^2 + l^2) + b\beta_n^2\right) = 0.$$

Portanto, se os coeficientes satisfazem

$$-\frac{k_0\rho_2}{\rho_1}(\beta_n^2 + l^2) + b\beta_n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k_0\rho_2 l^2}{b\rho_1 - k_0\rho_2} = \beta_n^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{k_0\rho_2 l^2}{b\rho_1 - k_0\rho_2}} \in \mathbb{N},$$

então, tomando $B \neq 0$, temos que

$$
\begin{aligned}
\phi &= -\frac{B}{2\beta_n}\sin(\beta_n x), \\
\omega &= -\frac{B}{2l}\cos(\beta_n x), \\
\psi &= B\cos(\beta_n x), \\
\Phi &= i\lambda_n\phi, \\
\Psi &= i\lambda_n\psi, \\
W &= i\lambda_n\omega.
\end{aligned}
$$

formam solução não nula de

$$i\lambda_n U - \mathcal{A}_2 U = 0,$$

e logo, $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_2)$, o que implica $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$.
Portanto, se

$$\frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{k_0\rho_2 l^2}{b\rho_1 - k_0\rho_2}} \in \mathbb{N},$$

então, a solução do problema viscoelástico

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

com $\gamma_1 > 0$, não possui decaimento polinomial. $\square$

Otimalidade

Na subseção anterior, mostramos que, sob certa condição entre os coeficientes, o sistemas de vigas de Bresse com viscosidade parcial presente apenas no estresse por corte, através das leis constitutivas do modelo, decai polinomialmente a uma taxa de $t^{-\frac{1}{2}}$, isto é, mostramos que, se

$$\left(\frac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) < 0,$$

então o semigrupo $e^{t\mathcal{A}_2}$ associado ao sistema satisfaz

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \le \frac{C}{t^{1/2}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}, \tag{6.80}$$

para constante positiva C e $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$.
Nesta seção vamos mostrar que a taxa de decaimento polinomial encontrada não pode ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$.
A demonstração de tal fato será decorrente da relação (ii)$\Rightarrow$(i) do teorema 1.3.4, ou seja, mostraremos a existência de uma sequência de números complexos $|\lambda_n| > 1$, e sequências $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ e $(U_n)_n \subset \mathcal{A}_2$, tais que

$$\lambda_n U_n - \mathcal{A}_2 U_n = F_n, \text{ e}$$

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\|(\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Observamos que, diferentemente do problema de vigas viscoelásticas de Timoshenko, a sequência de funções encontrada para a demonstração da falta de decaimento exponencial não prova a otimalidade da taxa de decaimento polinomial, pois a estimativa encontrada com tal sequência de funções é da forma

$$\|(\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \ge C|\lambda_n|.$$

Teorema 6.1.4 *Seja $\gamma_1 > 0$. Suponha que os coeficientes do sistema*

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) + \gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) + l\gamma_1(\phi_x + lw + \psi)_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

satisfazem a condição

$$\left(\frac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right) < 0.$$

Então, a taxa de decaimento polinomial encontrada no teorema 6.1.1 *é a taxa ótima.*

Demonstração: Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1 \in H_0^1(0,L), && (6.81)\\
i\lambda_n\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega)_x - \frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x + \Psi + lW)_x - l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) &= f_2 \in L^2(0,L), && (6.82)\\
i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3 \in H_*^1(0,L), && (6.83)\\
i\lambda_n\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi + l\omega) + \frac{\gamma_1}{\rho_2}(\Phi_x + \Psi + lW) &= f_4 \in L_*^2(0,L), && (6.84)\\
i\lambda_n\omega - W &= f_5 \in H_*^1(0,L), && (6.85)\\
i\lambda_n W + l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega) + l\frac{\gamma_1}{\rho_1}(\Phi_x + \Psi + lW) - \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x &= f_6 \in L_*^2(0,L). && (6.86)
\end{aligned}$$

Escolhemos $F_n = (0,0,0,0,0,\rho_1^{-1}\cos(\beta_n x))^t$, em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.
A sequência (F_n) escolhida limitada em $\mathcal{H}_2$. De fato, $\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} = \dfrac{L}{2\rho_1}$.
De (6.81), (6.83) e (6.85), obtemos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n\omega.$$

Substituindo as identidades acima em (6.82), (6.84) e (6.86), segue que

$$\begin{aligned}
-\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - i\lambda_n\gamma_1(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= 0 && (6.87)\\
-\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x + \psi + l\omega) + i\lambda_n\gamma_1(\phi_x + \psi + l\omega) - b\psi_{xx} &= 0 && (6.88)\\
-\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x + \psi + l\omega) + i\lambda_n\gamma_1 l(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= \cos(\beta_n x). && (6.89)
\end{aligned}$$

Devido as condições de contorno que estamos considerando, vamos supor que

$$\phi_n = A_n \sin(\beta_n x),$$

$$\psi_n = B_n \cos(\beta_n x),$$

$$\omega_n = C_n \cos(\beta_n x).$$

Assim, ϕ_n, ψ_n e ω_n satisfazem o sistema (6.87) - (6.89) se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$\begin{array}{rcl} A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_1\beta_n^2 + l^2k_0) + B_n(k\beta_n + i\lambda_n\gamma_1\beta_n) + C_n(lk\beta_n + i\lambda\gamma_1 l\beta_n + lk_0\beta_n) & = & 0 \\ A_n(k\beta_n + i\lambda_n\gamma_1\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + i\lambda_n\gamma_1 + k + b\beta_n^2) + C_n(kl + i\lambda_n\gamma_1 l) & = & 0 \\ A_n(lk\beta_n + i\lambda_n\gamma_1 l\beta_n + k_0 l\beta_n) + B_n(lk + i\lambda_n\gamma_1 l) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + i\lambda_n\gamma_1 l^2 + k_0\beta_n^2) & = & 1, \end{array}$$

que um sistema equivalente a

$$\begin{array}{rcl} A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0) + B_n(\lambda_n^2\rho_2\beta_n - b\beta_n^3) + C_n(lk_0\beta_n) & = & 0 \ (6.90) \\ A_n(k\beta_n + i\lambda_n\gamma_1\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + i\lambda_n\gamma_1 + k + b\beta_n^2) + C_n(kl + i\lambda_n\gamma_1 l) & = & 0 \ (6.91) \\ A_n(k_0 l\beta_n) + B_n(\lambda_n^2\rho_2 l - b\beta_n^2 l) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2) & = & 1.(6.92) \end{array}$$

Para simplificar, vamos denotar $q = k + i\lambda_n\gamma_1$, $p_2 = -\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2$ e $p_3 = -\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2$. Com as notações acima, o sistema linear anterior pode ser reescrito matricialmente por

$$M \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 & -\beta_n p_2 & l\beta_n k_0 \\ \beta_n q & p_2 + q & lq \\ l\beta_n k_0 & -lp_2 & p_3 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{array}{rcl} \det\{M\} & = & (-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0)(p_2+q)p_3 - 2l^2\beta_n^2k_0qp_2 \\ & & -l^2\beta_n^2k_0^2(p_2+q) + \beta_n^2p_2qp_3 + l^2p_2q(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0) \\ & = & p_2q[-2l^2\beta_n^2k_0 + \beta_n^2p_3 + l^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0)] \\ & & +(p_2+q)[(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0)p_3 - l^2\beta_n^2k_0^2]. \end{array}$$

Escolhemos λ_n tal que

$$-2l^2\beta_n^2k_0 + \beta_n^2p_3 + l^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0) = 0$$

isto é, tal que

$$\lambda_n^2 = \frac{k_0(\beta_n^2 - l^2)^2}{\rho_1(\beta_n^2 + l^2)}.$$

Com essa escollha, temos que

$$p_3 = \frac{3k_0l^2\beta_n^2 - k_0l^4}{\beta_n^2 + l^2} \approx 3k_0l^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det\{M\} &= (p_2+q)[(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0)p_3 - l^2\beta_n^2k_0^2] \\ &\approx \left[\left(-\frac{k_0\rho_2}{\rho_1} + b\right)\beta_n^2 + \frac{2k_0l^2\rho_2}{\rho_1} + q\right][-4l^2k_0^2\beta_n^2 + 3k_0^2l^4]. \end{aligned}$$

Se $-k_0\rho_2 + b\rho_1 < 0$, temos que

$$\det\{M\} \approx -4l^2k_0^2\left[\left(-\frac{k_0\rho_2}{\rho_1} + b\right)\right]\beta_n^4.$$

Resolvendo o sistema, obtemos que

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0)(p_2+q) + \beta_n^2qp_2}{\det\{M\}} \\ &\approx \frac{i\gamma_1\lambda_n\beta_n^2\left[\left(-\frac{k_0\rho_2}{\rho_1} + b\right)\beta_n^2\right]}{-4l^2k_0^2\left[\left(-\frac{k_0\rho_2}{\rho_1} + b\right)\right]\beta_n^4} \\ &\approx i\widehat{K}\beta_n, \end{aligned}$$

em que $\widehat{K} \neq 0$.
Portanto, para $-k_0\rho_2 + b\rho_1 < 0$, temos que

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1\|W_n\|^2 \\ &= \frac{L}{2}\rho_1|i\lambda_nC_n|^2 \\ &\approx \widetilde{C}\beta_n^4. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq K_\epsilon\beta_n^{2\epsilon},$$

em que K_ϵ é uma constante positiva que depende de ϵ.
Portanto, segue que

$$\frac{1}{|\lambda|^{4-2\epsilon}}\|(\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} \geq \frac{1}{|\lambda|^{4-2\epsilon}}\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Assim, mostramos que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}}\|(\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Isto significa que a taxa de decaimento polinomial $t^{-1/2}$ não pode ser melhorada sobre o domínio $D(\mathcal{A}_2)$, se os coeficientes do sistema satifazem a condição $-k_0\rho_2 + b\rho_1 < 0$.

□

6.1.2 Viscoelasticidade no sistema

Nesta subseção, estudaremos o comportamento assintótico das soluções do problema determinado pelo sistema de Bresse viscoelástico

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 && (6.93)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 && (6.94)\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) &= 0, && (6.95)\end{aligned}$$

em $(0, L) \times (0, \infty)$, com $\gamma_1' > 0$.
Neste caso, mostraremos que o sistema nunca decai exponencialmente.
Veremos também que o sistema possui estabilidade polinomial desde que seus coeficientes satisfaçam certa condição, assim como ocorreu na seção anterior, em que tamb´m consideramos a viscoelasticidade agindo efetivamente somente no estreese cortante, porém inserida no problema através das leis constitutivas do modelo.
Para os casos em que foi provada a estabilidade polinomial, encontramos estimativativa

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)},$$

para uma constante positiva C e todo $U_0 \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Além disso, mostramos que a taxa de decaimento polinomial encontrada $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima.

Falta de estabilidade exponencial

Teorema 6.1.5 *Seja (ϕ, ψ, ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse*

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \quad (6.96)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \quad (6.97)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) &= 0, \quad (6.98)
\end{aligned}$$

em $(0, L)\times(0, \infty)$, com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann dadas em (3.8) e condições iniciais (3.7). Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L \psi_0 dx = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L \omega_0 dx = \int_0^L \omega_1 dx = 0$, então o semigrupo gerado pelo operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, dado em (3.35) com $\gamma_2' = \gamma_3' = 0$ e $\gamma_1' > 0$, não é exponencialmente estável.

Demonstração: Vamos mostrar a existência de uma sequência numérica $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset D(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n - \widetilde{\mathcal{A}}_2)U_n = F_n \quad (6.99)$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1 \in H_0^1(0, L), \quad (6.100)\\
i\lambda_n\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega)_x - \frac{\gamma_1'}{\rho_1}\Phi_{xx} - l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) &= f_2 \in L^2(0, L), \quad (6.101)\\
i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3 \in H_*^1(0, L), \quad (6.102)\\
i\lambda_n\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi + l\omega) &= f_4 \in L_*^2(0, L), \quad (6.103)\\
i\lambda_n\omega - W &= f_5 \in H_*^1(0, L), \quad (6.104)\\
i\lambda_n W + l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega) - \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x &= f_6 \in L_*^2(0, L). \quad (6.105)
\end{aligned}$$

Escolhemos

$$F_n = (0, 0, 0, \cos(\beta_n x), 0, 0)^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.

A sequência $(F_n)_n$ escolhida limitada em $\mathcal{H}_2$. De fato, $\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} = \rho_2\dfrac{L}{2}$.

De (6.10), (6.12) e (6.14), obtemos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n\omega.$$

Substituindo as igualdades acima em (6.101), (6.103) e (6.105), obtemos

$$\begin{aligned}
-\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - i\lambda_n\gamma_1'\phi_{xx} - lk_0(\omega_x - l\phi) &= 0 && (6.106)\\
-\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x+\psi+l\omega) - b\psi_{xx} &= \rho_2\cos(\beta_n x) && (6.107)\\
-\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= 0. && (6.108)
\end{aligned}$$

Devido as condições de contorno que estamos considerando, vamos supor que

$$\phi_n = A_n\sin(\beta_n x),$$

$$\psi_n = B_n\cos(\beta_n x),$$

$$\omega_n = C_n\cos(\beta_n x).$$

Assim, ϕ_n, ψ_n e ω_n satisfazem o sistema (6.106) - (6.108) se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$\begin{aligned}
A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_1\beta_n^2 + l^2k_0) + B_n(k\beta_n) + C_n(lk\beta_n + lk_0\beta_n) &= 0\\
A_n(k\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2) + C_n(kl) &= \rho_2\\
A_n(lk\beta_n + k_0l\beta_n) + B_n(lk) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2) &= 0.
\end{aligned}$$

O sistema acima pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + i\lambda_n\gamma_1'\beta_n^2 & k\beta_n & l\beta_n^{(}k+k_0)\\ k\beta_n & -\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 + k & kl\\ kl\beta_n(k+k_0) & kl & -\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 + l^2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_n\\ B_n\\ C_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ \rho_2\\ 0\end{bmatrix}.$$

Se $\dfrac{b}{\rho_2} \neq \dfrac{k_0}{\rho_1}$, então escolhemos λ_n tal que

$$-\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 + k = 0.$$

Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}
\det\{M\} &= 2k^2l^2\beta_n^2(k+k_0) - k^2l^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + i\lambda_n\gamma_1'\beta_n^2) - k^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 + l^2k)\\
&\approx k^2\left\{\frac{b\rho_1}{\rho_2} - k_0\right\}\beta_n^4.
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + i\lambda_n\gamma_1'\beta_n^2)(-\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 + l^2k) - l^2\beta_n^2(k+k_0)^2}{\det M} \\ &\approx -i\frac{\gamma_1'}{k^2}\sqrt{\frac{b}{\rho_2}}\beta_n. \end{aligned}$$

Agora, se $\dfrac{b}{\rho_2} = \dfrac{k_0}{\rho_1}$, então escolhemos λ_n tal que

$$-\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 = 0.$$

Sob estas condições, obtemos que

$$\begin{aligned} \det\{M\} &= (-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + i\lambda_n\gamma_1'\beta_n^2)k^2l^2 + 2k^2l^2\beta_n^2(k+k_0) - kl^2\beta_n^2(k+k_0)^2 \\ &\quad -k^2l^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + i\lambda_n\gamma_1'\beta_n^2) - k^2\beta_n^2(l^2k) \\ &= -l^2kk_0^2\beta_n^2. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + i\lambda_n\gamma_1'\beta_n^2)(l^2k) - l^2\beta_n^2(k+k_0)^2}{\det M} \\ &\approx -i\gamma_1'\frac{\sqrt{b}}{k_0^2\sqrt{\rho_2}}\beta_n. \end{aligned}$$

Logo, para ambos os casos, temos que

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_2\|\Psi^n\|_{L^2}^2 \\ &= \rho_2|i\lambda_nB_n|^2\|\cos\beta_nx\|_{L^2}^2 \\ &= K\beta_n^4, \qquad K>0. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Portanto, o sistema não é exponencialmente estável.

□

Estabilidade polinomial

Lema 18 *O operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ dado em (2.30), para $\gamma_1' > 0$ e $\gamma_2' = \gamma_2' = 0$ satisfaz*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2),$$

se $\rho_2 k_0 - \rho_1 b \leq 0$.

Demonstração: Primeiramente, iremos mostrar que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Vamos supor, por contradição, que $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, então, pelo lema 3, existe $\mu \in \mathbb{R}$ com $\| \widetilde{\mathcal{A}}_2^{-1} \| \leq |\mu| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |\mu|\} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\|; |\beta| < |\mu|\} = \infty.$$

Logo, existem sequência $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \mu$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |\mu|$ e sequência $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto,

$$i\beta_n\phi^n - \Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.109}$$
$$i\beta_n\phi^n_x - \Phi^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.110}$$
$$i\beta_n\psi^n - \Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.111}$$
$$i\beta_n\psi^n_x - \Psi^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.112}$$
$$i\beta_n\omega^n - W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.113}$$
$$i\beta_n\omega^n_x - W^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.114}$$
$$i\rho_1\beta_n\Phi^n - k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n)_x - \gamma_1'\Phi^n_{xx} - lk_0(\omega^n_x - l\phi^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.115}$$
$$i\rho_2\beta_n\Psi^n - b\psi^n_{xx} + k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.116}$$
$$i\rho_1\beta_n W^n + lk(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) - k_0(\omega^n_x - l\phi^n)_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{6.117}$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$.
Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)y_n$ por y_n, obtemos, devido a propriedade dissipativa do sistema,

$$Re\langle i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = -Re\langle \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = \gamma_1\|\Phi^n_x\|^2_{L^2} \to 0, \tag{6.118}$$

o que implica, pela convergência (6.110),

$$\|\phi^n_x\|^2_{L^2} \to 0, \tag{6.119}$$

e logo, pela desigualdade de Poincaré, concluímos que

$$\|\Phi^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

e

$$\|\phi^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Vamos denotar $S^n = k\phi_x^n + \gamma_1'\Phi_x^n$. Então, pela convergência (6.115), temos que (S_x^n) é uma sequência uniformentente limitada em $L^2(0,L)$.
Tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de S_x^n pela expressão

$$i\rho_1\beta_n\Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x - \gamma_1'\Phi_{xx}^n - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n),$$

obtemos, por (6.115),

$$-i\rho_1\beta_n\int_0^L \Phi_x^n\overline{S^n}\,dx + k\int_0^L(\psi^n + l\omega^n)_{xx}\overline{S^n}\,dx - \|S_x^n\|_{L^2}^2 + lk_0\int_0^L(\omega_x^n - l\phi^n)_x\overline{S^n}\,dx \to 0.$$

Como $S^n \to 0$ em $L^2(0,L)$, e $(\psi_{xx}^n + l\omega_{xx}^n)_n$ é uniformemente limitada $L^2(0,L)$, por (6.116) e (6.117), obtemos, da convergência acima, que

$$\|S_x^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Das convergências já encontradas, e de (6.115), segue que

$$k\psi_x^n + l(k+k_0)\omega_x^n \to 0 em L^2(0,L), \tag{6.120}$$

e logo, pela desigualdade de Poincaré, temos também que

$$k\psi^n + l(k+k_0)\omega^n \to 0 em L^2(0,L). \tag{6.121}$$

Do produto de $\overline{\omega^n}$ pelas expressões

$$i\rho_2\beta_n\Psi^n - b\psi_{xx}^n + k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)$$

e

$$i\rho_1\beta_n W^n + lk(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - k_0(\omega_x^n - l\phi^n)_x$$

segue, por (6.116) e (6.117), que

$$i\rho_2\beta_n\int_0^L \Psi^n\overline{\omega^n}\,dx + b\int_0^L \psi_x^n\overline{\omega_x^n}\,dx + k\int_0^L(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)\overline{\omega^n}\,dx \to 0,$$

e

$$i\rho_1\beta_n \int_0^L W^n\overline{\omega^n}\,dx + lk\int_0^L(\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n)\overline{\omega^n}\,dx + k_0\int_0^L(\omega_x^n-l\phi^n)\overline{\omega_x^n}\,dx \to 0.$$

Pelas convergências (6.120), (6.121), (6.111), (6.113) e também por $\phi_x^n \to 0$ em $L^2(0,L)$, obtemos que

$$\left\{\rho_2\beta_n^2 l\frac{(k+k_0)}{k} - lk_0\right\}\|\omega^n\|_{L^2}^2 + \left\{-bl\frac{(k+k_0)}{k}\right\}\|\omega_x^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

e

$$\left\{-\rho_1\beta_n^2 - l^2k_0\right\}\|\omega^n\|_{L^2}^2 + k_0\|\omega_x^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Logo, temos que

$$\left\{k_0\left[\rho_2\beta_n^2 l\frac{(k+k_0)}{k} - lk_0\right] + bl\frac{(k+k_0)}{k}[-\rho_1\beta_n^2 - l^2k_0]\right\}\|\omega^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

ou seja,

$$\left\{\beta_n^2(k+k_0)(\rho_2k_0-\rho_1b) - kk_0 - bl^2k_0(k+k_0)\right\}\|\omega^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Considerando que $(\rho_2k_0-\rho_1b) \le 0$, temos que

$$\left\{\beta_n^2(k+k_0)(\rho_2k_0-\rho_1b) - kk_0 - bl^2k_0(k+k_0)\right\} \nrightarrow 0,$$

e portanto, devemos ter

$$\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Logo,

$$\omega_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Assim, de (6.120) e (6.121), segue que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e de (6.111) e (6.113), temos que

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Logo, mostramos que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$, o que é uma contradição, pois, por hipótese, $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n.
Portanto, se $(\rho_2 k_0 - \rho_1 b) \leq 0$, então, $i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.

□

Teorema 6.1.6 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$. *Então, a solução do problema*

$$
\begin{aligned}
\rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1' \phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty),
\end{aligned}
$$

em que

$$\rho_2 k_0 - \rho_1 b < 0,$$

decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2} U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}. \tag{6.122}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2^{\alpha})$, *então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2} U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_{\in}^{\alpha})}. \tag{6.123}$$

Demonstração: Pelo lema (18), temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$ se os coeficientes do sistema satisfazem $(\rho_2 k_0 - \rho_1 b) \leq 0$.
Consideremos, agora, a equação

$$i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F,$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^t \in \mathcal{H}_2$ e $U \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$,
que em relação as componentes, é dada por

$$i\beta\phi - \Phi = f_1 \tag{6.124}$$
$$i\beta\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - \gamma_1'\Phi_{xx} = \rho_1 f_2 \tag{6.125}$$
$$i\beta\psi - \Psi = f_3 \tag{6.126}$$
$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) = \rho_2 f_4 \tag{6.127}$$
$$i\beta\omega - W = f_5 \tag{6.128}$$
$$i\beta\rho_1 W + kl(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x = \rho_1 f_6. \tag{6.129}$$

Temos que $Re\{\langle\widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = -\gamma_1'\|\Phi_x\|_{L^2}^2$, o que implica,

$$\gamma_1'\|\Phi_x\|_{L^2}^2 \leq Re\{\langle-\widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta_n U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \tag{6.130}$$

e logo, por (6.124), temos

$$\beta_n^2\|\phi_x\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2. \tag{6.131}$$

Da Desigualdade de Poincaré, obtemos também

$$\gamma_1'\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \tag{6.132}$$

e

$$\beta^2\|\phi\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2, \tag{6.133}$$

Tomando o produto interno em $L^2(0, L)$ de (6.125) por ϕ, obtemos

$$-\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + k\int_0^L(\phi_x + \psi + l\omega)\overline{(\phi_x + \psi + lw)}dx - k\int_0^L(\phi_x + \psi + l\omega)\overline{(\psi + lw)}dx$$
$$-lk_0\int_0^L(\omega_x - l\phi)\overline{\phi}dx + \gamma_1'\int_0^L\Phi_x\overline{\phi_x}dx = \rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}dx,$$

assim,

$$\begin{aligned} k\|\phi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + k\int_0^L(\phi_x + \psi + l\omega)\left[\overline{\frac{1}{\beta}\Psi + \frac{1}{\beta}f_3 + l\frac{1}{\beta}W + l\frac{1}{\beta}f_5}\right]dx \\ &\quad + lk_0\int_0^L(\omega_x - l\phi)\overline{\phi}dx - \gamma_1'\int_0^L\Phi_x\overline{\phi_x}dx + \rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}dx, \end{aligned}$$

e logo,

$$\|\phi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 \ \leq \ C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+\frac{C}{\beta^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Tomando o produto de (6.127) por $\overline{\omega}$, e o produto de (6.129) por $\overline{\psi}$, obtemos, respectivamente, que

$$-\int_0^L \Psi\overline{W}\,dx+\frac{b}{\rho_2}\int_0^L \psi_x\overline{\omega_x}\,dx+\frac{k}{\rho_2}\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)\overline{\omega}\,dx=\int_0^L f_4\overline{\omega}\,dx$$

$$\int_0^L \overline{W}\Psi\,dx-\frac{kl}{\rho_1}\int_0^L\overline{(\phi_x+\psi+l\omega)}\psi\,dx-\frac{k_0}{\rho_1}\int_0^L\overline{\omega_x}\psi_x\,dx-\frac{lk_0}{\rho_1}\int_0^L\overline{\phi_x}\psi\,dx=-\int_0^L\overline{f_6}\psi\,dx.$$

Somando as duas identidades acima, temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{\rho_2}-\frac{k_0}{\rho_1}\right)\int_0^L\psi_x\overline{\omega_x}\,dx \ &= \ -\frac{k}{\rho_2}\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)\overline{\omega}\,dx+\int_0^L f_4\overline{\omega}\,dx\\ &\quad+\frac{kl}{\rho_1}\int_0^L\overline{(\phi_x+\psi+l\omega)}\psi\,dx+\frac{lk_0}{\rho_1}\int_0^L\overline{\phi_x}\psi\,dx-\int_0^L\overline{f_6}\psi\,dx,\end{aligned}$$

logo, se $\dfrac{b}{\rho_2}-\dfrac{k_0}{\rho_1}\neq 0$, então

$$\left|\int_0^L\psi_x\overline{\omega_x}\,dx\right|\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2. \tag{6.134}$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ de (6.125) por ω_x segue que

$$\begin{aligned}-i\beta\rho_1\int_0^L\Phi_x\overline{\omega}\,dx+\int_0^L(k\phi_x+\gamma_1'\Phi_x)\overline{\omega_{xx}}\,dx-k\int_0^L\psi_x\overline{\omega_x}\,dx\\ -l(k+k_0)\|\omega_x\|_{L^2}^2+l^2k_0\int_0^L\phi\overline{\omega_x}\,dx=\rho_1\int_0^L f_2\overline{\omega_x}\,dx,\end{aligned}$$

e pela equação (6.129), obtemos que

$$\begin{aligned}l(k+k_0)\|\omega_x\|_{L^2}^2 \ &= \ -i\beta\rho_1\int_0^L\Phi_x\overline{\omega}\,dx-k\int_0^L\psi_x\overline{\omega_x}\,dx\\ &\quad+\int_0^L(k\phi_x+\gamma_1'\Phi_x)\overline{\left[\frac{i\beta\rho_1}{k_0}W+\frac{lk}{k_0}(\phi_x+\psi+l\omega)+\frac{lk_0}{k_0}\phi_x-\frac{1}{k_0}f_6\right]}\,dx\\ &\quad+l^2k_0\int_0^L\phi\overline{\omega_x}\,dx-\rho_1\int_0^L f_2\overline{\omega_x}\,dx,\end{aligned}$$

e portanto,

$$l(k+k_0)\|\omega_x\|_{L^2}^2\leq C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ de (6.125) por ψ_x segue que

$$-i\beta\rho_1\int_0^L \Phi_x\overline{\psi}\,dx+\int_0^L(k\phi_x+\gamma_1'\Phi_x)\overline{\psi_{xx}}\,dx-k\|\psi_x\|_{L^2}^2$$
$$-l(k+k_0)\int_0^L \omega_x\overline{\psi_x}\,dx+l^2k_0\int_0^L\phi\overline{\psi_x}\,dx=\rho_1\int_0^L f_2\overline{\psi_x}\,dx,$$

e pela equação (6.127), obtemos que

$$\begin{aligned}k\|\psi_x\|_{L^2}^2 &= -i\beta\rho_1\int_0^L \Phi_x\overline{\psi}\,dx+\int_0^L(k\phi_x+\gamma_1'\Phi_x)\overline{\left[\frac{i\beta\rho_2}{b}\Psi+\frac{k}{b}(\phi_x+\psi+l\omega)-\frac{1}{b}f_4\right]}\,dx\\ &\quad -l(k+k_0)\int_0^L \omega_x\overline{\psi_x}\,dx+l^2k_0\int_0^L\phi\overline{\psi_x}\,dx-\rho_1\int_0^L f_2\overline{\psi_x}\,dx,\end{aligned}$$

de onde segue que

$$k\|\psi_x\|_{L^2}^2\le C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Assim, tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de (6.127) por ψ, e de (6.129) por ω, obtemos, respectivamente, que

$$\|\Psi\|_{L^2}^2\le C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2,$$

e

$$\|W\|_{L^2}^2\le C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Portanto, se $\dfrac{b}{\rho_2}-\dfrac{k_0}{\rho_1}>0$, então

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2\le C\beta^4\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Portanto, neste caso, o sistema é polinomialmente estável.

□

Vimos que se $\dfrac{b}{\rho_2}-\dfrac{k_0}{\rho_1}\ge 0$ então $i\mathbb{R}\subseteq\varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$. Caso contrário, há coeficientes para os quais $i\mathbb{R}\nsubseteq\varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.

Teorema 6.1.7 *Suponhamos que* $U_0=(\phi_0,\phi_1,\phi_0,\psi_1,\omega_0,\omega_1)^t\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, *e suponha que os coeficientes do sistema satisfazem*

$$\sqrt{\frac{-l^2k_0[\rho_2(k+k_0)]-\rho_1kk_0}{(k+k_0)[b\rho_1-k_0\rho_2]}}\frac{L}{\pi}\in\mathbb{N}.$$

Então, a solução do problema

$$
\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_1'\phi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}
$$

com $\gamma_1' > 0$*, não decai polinomialmente.*

Demonstração: Mostraremos que, neste caso, $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$ (condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann).
Consideremos, inicialmente, a equação

$$i\lambda_n U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = 0,$$

que nas suas componentes é dada por

$$
\begin{aligned}
i\lambda_n\phi - \Phi &= 0 && (6.135)\\
i\lambda_n\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - \gamma_1'\Phi_{xx} - lk_0(\omega_x - l\phi) &= 0 && (6.136)\\
i\lambda_n\psi - \Psi &= 0 && (6.137)\\
i\lambda_n\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) &= 0 && (6.138)\\
i\lambda_n\omega - W &= 0 && (6.139)\\
i\lambda_n\rho_1 W + kl(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= 0. && (6.140)
\end{aligned}
$$

Temos então que,

$$
\begin{aligned}
i\lambda_n\phi &= \Phi,\\
i\lambda_n\psi &= \Psi,\\
i\lambda_n\omega &= W.
\end{aligned}
$$

Substituindo as igualdades acima em (6.136), (6.138) e (6.140), obtemos

$$
\begin{aligned}
-\lambda_n^2\rho_1\phi - (k + i\lambda_n\gamma_1')\phi_{xx} - k(\psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= 0 && (6.141)\\
-\lambda_n^2\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) &= 0 && (6.142)\\
-\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= 0. && (6.143)
\end{aligned}
$$

Observemos que, tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de (6.141), (6.142), (6.143) por ϕ, ψ e ω, respectivamente, obtemos que

$$-\lambda_n^2\rho_1\|\phi\|_{L^2}^2 + i\lambda_n\gamma_1'\|\phi_x\|_{L^2} - \lambda_n^2\rho_2\|\psi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\phi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2$$
$$-\lambda_n^2\rho_1\|\omega\|_{L^2}^2 + k_0\|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 = 0,$$

e portanto, para $\lambda_n \neq 0$, devemos ter $\|\phi_x\|_{L^2} = 0$.
Consideremos

$$\begin{aligned} \phi &= 0 \\ \psi &= B\cos(\beta_n x) \\ \omega &= C\cos(\beta_n x). \end{aligned}$$

Então, as funções $\phi = 0$, $\psi = B\cos(\beta_n x)$ e $\omega = C\cos(\beta_n x)$ satifazem o sistema (6.141) – (6.143) se, e somente se, B e C formam solução de

$$B(k\beta_n) + C(lk\beta_n + lk_0\beta_n) = 0 \tag{6.144}$$
$$B(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2) + C(kl) = 0 \tag{6.145}$$
$$B(lk) + C(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2) = 0. \tag{6.146}$$

Resolvendo a primeira equação, obtemos que

$$B = -\frac{l(k+k_0)}{k}C \tag{6.147}$$

e logo, da segunda equação segue que,

$$\lambda_n^2 = \frac{b\beta_n^2(k+k_0) + kk_0}{\rho_2(k+k_0)}.$$

Sustitutindo a igualdade (6.147) na terceira equação, obtemos que λ_n deve satisfazer também

$$\lambda_n^2 = \frac{k_0\beta_n^2 - l^2k_0}{\rho_1}.$$

Portanto, devemos ter

$$\rho_1[b\beta_n^2(k+k_0) + kk_0] = (k_0\beta_n^2 - l^2k_0)[\rho_2(k+k_0)],$$

ou seja,

$$\beta_n^2[b\rho_1(k+k_0) - k_0\rho_2(k+k_0)] = -l^2k_0[\rho_2(k+k_0)] - \rho_1kk_0.$$

Assim, se $b\rho_1 - k_0\rho_2 < 0$, a igualdade acima é satisfeita para determinados valores de ρ_1, ρ_2, b, k_0, k e l. De fato, ρ_1, ρ_2, b, k_0, k e l satisfazem a identidade acima quando

$$\sqrt{\frac{-l^2k_0[\rho_2(k+k_0)] - \rho_1 kk_0}{(k+k_0)[b\rho_1 - k_0\rho_2]}}\frac{L}{\pi} \in \mathbb{N}.$$

E para esses valores, $i\lambda_n$, dado por

$$\lambda_n^2 = \frac{k_0\beta_n^2 - l^2k_0}{\rho_1},$$

é autovalor do operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, e portanto, $i\lambda \in \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$. □

Otimalidade

Teorema 6.1.8 *A taxa de decaimento polinomial* $\tau = \dfrac{1}{2}$ *encontrada no teorema 6.1.6 é a taxa ótima do decaimento.*

Demonstração: Se a taxa de decaimento polinomial $\tau = \dfrac{1}{2}$ encontrada no teorema 6.1.6 não for a taxa ótima do decaimento, então, pelo teorema 1.3.4, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}}\left\|(i\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\right\| \leq C_\epsilon,\ \forall |\lambda| \geq 1.$$

Contudo, para

$$F_n = (0,0,0,0,0,\cos(\beta_n x))^t \in \mathcal{H}_2$$

temos, pelo teorema 6.1.5, que $U_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \omega_n, W_n) \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, dado por

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x),\\
\Phi_n &= i\lambda_n \phi,\\
\psi_n &= B_n \cos(\beta_n x),\\
\Psi_n &= i\lambda_n \psi,\\
\omega_n &= C_n \cos(\beta_n x),\\
W_n &= i\lambda_n \omega,
\end{aligned}$$

é solução da equação

$$i\lambda_n U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F_n,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, para valores apropriados de λ_n, A_n, B_n e C_n.
Para o caso em que $\dfrac{b}{\rho_2} \neq \dfrac{k_0}{\rho_1}$, escolhemos λ_n tal que

$$-\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 + k = 0.$$

Resolvendo o sistema para A_n, B_n e C_n com essa escolha, obtemos que

$$B_n \approx -i\frac{\gamma_1'}{k^2}\sqrt{\frac{b}{\rho_2}}\beta_n.$$

Portanto, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_2} &\geq \rho_2\|Psi_n\|^2_{L^2} \\
&= \rho_1\|i\lambda_n B_n\cos(\beta_n x)\|^2_{L^2} \\
&\approx \hat{C}\lambda_n^4, \quad \widehat{C} > 0.
\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_2} \geq K\lambda_n^{2\epsilon}, \qquad K > 0,$$

para todo $\epsilon > 0$.
Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\|(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Assim, a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema.

$\square$

6.2 Viscoelasticidade somente sobre a deformação por flexão

Vamos estudar, nesta seção, o sistema de Bresse com uma única viscoelasticidade, presente apenas no momento fletor. Neste caso, o sistema obtido introduzindo a dissipação nas leis contitutivas do modelo coincide com o sistema resultante da adição da dissipação diretamente na segunda equação. Veremos que o sistema nunca decai exponencialmente. Mostraremos também que o sistema é polinomialmente estável, se $k = k_0$, com taxa ótima de $\tau = \dfrac{1}{2}$. Observamos que a taxa ótima de decaimento polinomial encontrada neste caso, coincide com a taxa ótima encontrada em todos os casos em que foi constado decaimento polinomial, para os sistemas viscoelásticos de Bresse e Timoshenko, em que as viscosidades elásticas não agiam efetivamente em todas as equações.

6.2.1 Falta de estabilidade exponencial

Teorema 6.2.1 *Seja (ϕ, ψ, ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) && (6.148)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) && (6.149)\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), && (6.150)\end{aligned}$$

com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann dadas em (3.8) *e condições iniciais* (3.7)*. Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L \psi_0 dx = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L \omega_0 dx = \int_0^L \omega_1 dx = 0$, então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}_2$, dado em* (3.16) *com $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ e $\gamma_2 > 0$, não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Vamos mostrar que existe sequência numérica $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset D(\mathcal{A}_2)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n - \mathcal{A}_2)U_n = F_n$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1 \in H_0^1(0,L), && (6.151)\\ i\lambda_n\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega)_x - l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) &= f_2 \in L^2(0,L), && (6.152)\\ i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3 \in H_*^1(0,L), && (6.153)\\ i\lambda_n\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi + l\omega) - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi_{xx} &= f_4 \in L_*^2(0,L), && (6.154)\\ i\lambda_n\omega - W &= f_5 \in H_*^1(0,L), && (6.155)\\ i\lambda_n W + l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega) - \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x &= f_6 \in L_*^2(0,L). && (6.156)\end{aligned}$$

Escolhemos

$$F_n = (0, \alpha\rho_1^{-1}\sin(\beta_n x), 0, \mu\rho_2^{-1}\cos(\beta_n x), 0, \nu\rho_1^{-1}\cos(\beta_n x))^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$ e 0 representa a função nula.

A sequência $(F_n)_n$ escolhida é limitada em $\mathcal{H}_2$. De fato, $\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} = \left(\dfrac{\alpha^2}{\rho_1} + \dfrac{\mu^2}{\rho_2} + \dfrac{\nu^2}{\rho_1}\right)\dfrac{L}{2}$.
De (6.151), (6.153) e (6.155), obtemos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n\omega.$$

Substituindo as igualdades acima em (6.152), (6.154) e (6.156), obtemos

$$\begin{aligned}
-\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= \alpha \sin(\beta_n x) && (6.157)\\
-\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x + \psi + l\omega) - (b + i\lambda_n\gamma_2)\psi_{xx} &= \mu \cos(\beta_n x) && (6.158)\\
-\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= \nu \cos(\beta_n x). && (6.159)
\end{aligned}$$

Devido as condições de fronteira consideradas, vamos supor que

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x),\\
\psi_n &= B_n \cos(\beta_n x),\\
\omega_n &= C_n \cos(\beta_n x).
\end{aligned}$$

Assim, ϕ_n, ψ_n e ω_n satisfazem o sistema (6.157) - (6.159) se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$\begin{aligned}
A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0) + B_n(k\beta_n) + C_n(l\beta_n(k + k_0)) &= \alpha && (6.160)\\
A_n(k\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2) + C_n(lk) &= \mu && (6.161)\\
A_n(l\beta_n(k + k_0)) + B_n(lk) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2) &= \nu, && (6.162)
\end{aligned}$$

que pode ser reescrita matricialmente por

$$M\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix},$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0 & k\beta_n & l\beta_n(k+k_0) \\ k\beta_n & -\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2 & lk \\ l\beta_n(k+k_0) & lk & -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \det\{M\} &= [(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0)(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2) - l^2\beta_n^2(k+k_0)^2] \\ &\quad (-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2) + \\ &\quad +2k^2l^2\beta_n^2(k+k_0) - l^2k^2(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0) - k^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2). \end{aligned}$$

Para o caso em que $k \neq k_0$, escolhemos λ_n tal que

$$-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0 = 0.$$

Assim,

$$\det\{M\} \approx -i\lambda_n\gamma_2 l^2(k+k_0)^2\beta_n^4.$$

Temos que

$$M^{-1} = \frac{1}{\det\{M\}} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix},$$

em que

$$M_{11} = (-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2)(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2) - l^2k^2.$$

Assim, tomando $\alpha = 1$, $\mu = \nu = 0$, obtemos

$$A_n = \frac{(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2)(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2) - l^2k^2}{\det\{M\}},$$

ou seja,

$$A_n \approx -\frac{(k_0 - k)}{l^2(k+k_0)^2}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{6.163}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_2} &\geq \rho_1 \|\Phi^n\|^2_{L^2} \\
&= \rho_1 |i\lambda_n A_n|^2 \|\sin \beta_n x\|^2_{L^2} \\
&\approx \rho_1 \left| \lambda_n \frac{(k_0 - k)}{l^2(k+k_0)^2} \right|^2 \frac{L}{2} \\
&\approx \hat{C}\beta_n^2, \quad \hat{C} > 0. \qquad (6.164)
\end{aligned}$$

Calculando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Agora, vamos considerar $k = k_0$.
Neste caso,

$$\begin{aligned}
\det\{M\} = [(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k)^2 - 4l^2\beta_n^2k^2](-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2) + \\
+4k^2l^2\beta_n^2k - l^2k^2(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k) - k^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k\beta_n^2).
\end{aligned}$$

Escolhemos λ_n tal que

$$(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k)^2 - 4l^2\beta_n^2k^2 = 0$$

ou seja,

$$-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k = 2l\beta_nk.$$

Então, temos que

$$\det\{M\} \approx -2lk^3\beta_n^3.$$

Calculando os valores de A_n, B_n e C_n, e considerando novamente $\alpha = 1$, $\mu = \nu = 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 + i\lambda_n\gamma_2\beta_n^2)2kl\beta_n - l^2k^2}{\det M} \\
&\approx -i\frac{\gamma_2}{k^2}\lambda_n.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_2} &\geq \rho_1 \|\Phi^n\|^2_{L^2} \\ &= \rho_1 |i\lambda_n A_n|^2 \|\sin\beta_n x\|^2_{L^2} \\ &\approx \rho_1 \left|\frac{\gamma_2}{k^2}\lambda_n^2\right|^2 \frac{L}{2} \\ &\approx \hat{C}\beta_n^4, \quad \hat{C} > 0. \end{aligned} \tag{6.165}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Assim, provamos que o sistema não é exponencialmente estável. □

6.2.2 Estabilidade polinomial

Lema 19 *O operador $\mathcal{A}_2$, associado ao problema*

$$\begin{aligned}\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),\end{aligned}$$

com condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann, e $\gamma_2 > 0$, satisfaz

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2).$$

Demonstração: Vamos supor, por contradição, que $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$, Como $0 \in \varrho(\mathcal{A}_2)$, então pelo lema 3, existe $\mu \in \mathbb{R}$ com $\| \mathcal{A}_2^{-1} \| \leq |\mu| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |\mu|\} \subset \varrho(\mathcal{A}_2) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}\|; |\beta| < |\mu|\} = \infty.$$

Logo, existem sequência $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \mu$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |\mu|$ e sequência $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)y_n\|_{\mathcal{H}_j} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto,

$$i\lambda_n \phi^n - \Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.166}$$

$$i\lambda_n \phi_x^n - \Phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.167}$$

$$i\lambda_n \psi^n - \Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.168}$$

$$i\lambda_n \psi_x^n - \Psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.169}$$

$$i\lambda_n \omega^n - W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.170}$$

$$i\lambda_n \omega_x^n - W_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.171}$$

$$i\rho_1\lambda_n \Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.172}$$

$$i\rho_2\lambda_n \Psi^n - b\psi_{xx}^n - \gamma_2\Psi_{xx}^n + k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \tag{6.173}$$

$$i\rho_1\lambda_n W^n + lk(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - k_0(\omega_x^n - l\phi^n)_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \tag{6.174}$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$.
Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)y_n$ por y_n, temos que

$$Re\langle i\lambda_n I - \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = -Re\langle \mathcal{A}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = \gamma_2\|\Psi_x^n\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{6.175}$$

Assim, pela tesigualdade de Poincaré, temos que

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{6.176}$$

Usando a convergência (6.175) em (6.169), obtemos

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{6.177}$$

Temos, por (6.172), que a sequência $([\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n]_x)$ é limitada em $L^2(0,L)$. Assim, tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de (6.173) por $\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n$, e usando as convergências encontradas acima, obtemos, que

$$\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{6.178}$$

Como $\psi^n \to 0$ em $L^2(0,L)$, concluímos que

$$\phi_x^n + l\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{6.179}$$

Integrando o produto de (6.174) por $\overline{\phi_x^n}$, obtemos

$$i\rho_1\lambda_n \int_0^L W^n\overline{\phi_x^n}dx + lk\int_0^L (\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)\overline{\phi_x^n}dx - k_0\int_0^L (\omega_x^n - l\phi^n)_x\overline{\phi_x^n}dx \to 0,$$

o que implica

$$i\rho_1\lambda_n\int_0^L W^n(\overline{\phi_x^n+l\omega^n})dx - i\rho_1\lambda_n\int_0^L W^n\overline{l\omega^n}dx + lk\int_0^L(\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n)\overline{\phi_x^n}dx$$
$$-k_0\int_0^L(\omega_x^n-l\phi^n)_x[\overline{\phi_x^n+l\omega^n}]dx + k_0\int_0^L(\omega_x^n-l\phi^n)_x\overline{l\omega^n}dx \to 0,$$

e usando as convergências anteriores, obtemos

$$\rho_1 l\int_0^L W^n\overline{W^n}dx - k_0\int_0^L \omega_x^n\overline{l\omega_x^n}dx + l^3k_0\int_0^L \omega^n\overline{\omega^n}dx \to 0. \tag{6.180}$$

Agora, integrando o produto de (6.172) por $\overline{\omega_x^n}$, obtemos

$$-i\rho_1\lambda_n\int_0^L \Phi_x^n\overline{\omega^n}dx + k\int_0^L(\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n)\overline{\omega_{xx}^n}dx - lk_0\int_0^L(\omega_x^n-l\phi^n)\overline{\omega_x^n}dx \to 0$$

o que implica

$$-i\rho_1\lambda_n\int_0^L(\Phi_x^n+lW^n)\overline{\omega^n}dx + i\rho_1\lambda_n\int_0^L lW^n\overline{\omega^n}dx + k\int_0^L(\phi_x^n+\psi^n+l\omega^n)\overline{\omega_{xx}^n}dx$$
$$-lk_0\int_0^L\omega_x^n\overline{\omega_x^n}dx - l^2k_0\int_0^L(\phi_x^n+l\omega^n)\overline{\omega^n}dx + l^2k_0\int_0^L l\omega^n\overline{\omega^n}dx \to 0,$$

e assim, utilizando as convergências já encontradas, obtemos

$$-\rho_1\int_0^L lW^n\overline{W^n}dx - lk_0\int_0^L\omega_x^n\overline{\omega_x^n}dx + l^3k_0\int_0^L\omega^n\overline{\omega^n}dx \to 0, \tag{6.181}$$

Da diferença entre as convergências (6.180) e (6.181), concluímos que

$$\|W^n\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{6.182}$$

A última convergência e a convergência (6.178) em (6.174), implicam

$$(\omega_x^n - l\phi^n)_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e logo, por Poincaré,

$$\omega_x^n - l\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{6.183}$$

Tomando o produto em $L^2(0,L)$ de (6.172) por Φ^n, e usando as convergências (6.178) e (6.183), concluímos que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{6.184}$$

Assim, acabamos de mostrar que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$ quando $n \to \infty$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$.
Logo, temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
□

Teorema 6.2.2 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$. *Então, a solução do problema*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_2\psi_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), \end{aligned}$$

em que $k = k_0$, *decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}.$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2^\alpha)$, *então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2^\alpha)}.$$

Demonstração: Pelo lema acima, temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
Para completar a demonstração do teorema, devemos provar a existência de uma constante positiva C independente de $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \geq 1$ e $F \in \mathcal{H}_2$ tal que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\,\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1. \tag{6.185}$$

Consideremos a equação

$$i\beta U - \mathcal{A}_2 U = F,$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}_2$ e $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$.
A equação acima em relação as componentes se apresenta como

$$
\begin{aligned}
i\beta\phi - \Phi &= f_1 && (6.186)\\
i\beta\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= \rho_1 f_2 && (6.187)\\
i\beta\psi - \Psi &= f_3 && (6.188)\\
i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) - \gamma_2\Psi_{xx} &= \rho_2 f_4 && (6.189)\\
i\beta\omega - W &= f_5 && (6.190)\\
i\beta\rho_1 W + kl(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x &= \rho_1 f_6. && (6.191)
\end{aligned}
$$

Temos que $Re\{\langle \mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = -\gamma_2\|\Psi_x\|^2_{L^2}$, logo,

$$\gamma_2\|\Psi_x\|^2_{L^2} = Re\{\langle -\mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta U - \mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} \le \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \quad (6.192)$$

o que implica, pela desigualdade de Poincaré,

$$\|\Psi\|^2_{L^2} \le C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \quad (6.193)$$

Da equação (6.188), obtemos

$$\beta^2\|\psi_x\|^2_{L^2} \le C\|\Psi_x\|^2_{L^2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2} \le C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}. \quad (6.194)$$

Tomando o produto interno em $L^2(0, L)$ da equação (6.189) por $\phi_x + \psi + lw$, e usando (6.187), segue que

$$
\begin{aligned}
k\|\phi_x + \psi + lw\|^2_{L^2} &= -i\beta\int_0^L \Psi(\overline{\phi_x + \psi + lw})dx + \rho_2\int_0^L f_4(\overline{\phi_x + \psi + lw})dx\\
&\quad -\int_0^L (\gamma_2\Psi_x + b\psi_x)\left[\overline{i\beta\frac{\rho_1}{k}\Phi - \frac{lk_0}{k}(w_x - l\phi) - \frac{\rho_1}{k}f_2}\right]dx\\
&\le C_\epsilon\beta^2\|\Psi\|^2_{L^2} + C_\epsilon\beta^2\|\Psi_x\|^2_{L^2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} + C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}\\
&\le C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}. \quad (6.195)
\end{aligned}
$$

Já o produto interno em $L^2(0, L)$ de (6.187) por ϕ, e a equação (6.186), implicam que

$$
\begin{aligned}
\|\Phi\|^2_{L^2} &= -\int_0^L \Phi\overline{f_1}dx - \int_0^L f_2\overline{\phi}dx + C_1\|\phi_x + \psi + lw\|^2_{L^2}\\
&\quad -C_2\int_0^L (\phi_x + \psi + lw)\overline{(\psi + lw)}dx + \frac{C_3}{\beta}\int_0^L (w_x - l\phi)[\overline{\Phi + f_1}]dx\\
&\le C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} + \frac{C}{\beta^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}. \quad (6.196)
\end{aligned}
$$

Da equação (6.187), segue que

$$
\begin{aligned}
lk_0\|w_x - l\phi\|_{L^2}^2 &= k\int_0^L (\phi_x+\psi+lw)(\overline{w_x - l\phi})_x dx + i\beta\rho_1\int_0^L \Phi(\overline{w_x-l\phi})dx\\
&\quad -\rho_1\int_0^L f_2(\overline{w_x-l\phi})dx,
\end{aligned}
$$

o que implica, por (6.191),

$$
\begin{aligned}
lk_0\|w_x - l\phi\|_{L^2}^2 &= k\int_0^L (\phi_x+\psi+lw)\left[\overline{\frac{i\beta\rho_1}{k_0}W + \frac{lk}{k_0}(\phi_x+\psi+lw) - \frac{\rho_1}{k_0}f_6}\right]dx\\
&\quad +i\beta\rho_1\int_0^L \Phi(\overline{w_x-l\phi})dx - \rho_1\int_0^L f_2(\overline{w_x-l\phi})dx.
\end{aligned}
$$

Usando as equações (6.186), (6.188) e (6.190), na igualdade acima, obtemos que

$$
\begin{aligned}
lk_0\|w_x - l\phi\|^2 &= -k\frac{\rho_1}{k_0}\int_0^L (\Phi_x+\Psi+lW+f_{1x}+f_3+lf_5)\left[\overline{W}\right]dx\\
&\quad +C\int_0^L(\phi_x+\psi+lw)\left[\overline{\frac{lk}{k_0}(\phi_x+\psi+lw)-\frac{\rho_1}{k_0}f_6}\right]dx\\
&\quad -\rho_1\int_0^L \Phi(\overline{W_x - l\Phi + f_{5x} - lf_1})dx - \rho_1\int_0^L f_2(\overline{w_x-l\phi})dx.
\end{aligned}
$$

Considerando que $k=k_0$, temos que

$$
-\rho_1\int_0^L \Phi\overline{W_x}dx - k\frac{\rho_1}{k_0}\int_0^L \Phi_x\overline{W}dx = 0,
$$

e assim,

$$
\begin{aligned}
lk_0\|w_x - l\phi\|_{L^2}^2 &\le C\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2} - \rho_1 l\|W\|_{L^2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|\phi+\psi+lw\|_{L^2}^2\\
&\le -Cl\|W\|_{L^2}^2 + C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2, \quad (6.197)
\end{aligned}
$$

e logo,

$$
lk_0\|w_x - l\phi\|_{L^2}^2 + \rho_1 l\|W\|_{L^2}^2 \le C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \quad (6.198)
$$

Assim, acabamos de mostrar que

$$
\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \le C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta|\ge 1, j=1,2. \quad (6.199)
$$

Portanto, o sistema é polinomialmente estável e

$$
\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \le \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}.
$$

□

6.2.3 Otimalidade

Na seção anterior mostramos que o sistemas de vigas de Bresse com viscosidade parcial presente apenas no momento fletor decai polinomialmente a uma taxa de $t^{-\frac{1}{2}}$, se $k = k_0$, isto é, mostramos que, neste caso,

$$\|e^{\mathcal{A}_2 t}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}, \tag{6.200}$$

para constante positiva C e $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$.
Nesta seção vamos mostrar que a taxa de decaimento polinomial encontrada não pode ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$. A demonstração de tal fato será decorrente da relação (ii)⇒(i) do teorema 1.3.4, assim como na demonstração do teorema **??**, ou seja, mostraremos a existência de uma sequência de números complexos $|\lambda_n| > 1$, e sequências $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ e $(U_n)_n \subset \mathcal{A}_2$, tais que

$$\lambda_n U_n - \mathcal{A}_2 U_n = F_n, \text{ e}$$

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\|(\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Teorema 6.2.3 *A taxa de decaimento polinomial encontrada no teorema* 6.2.1 *é a taxa ótima.*

Demonstração: Na demonstração do teorema 6.2.1, mostramos que para $k = k_0$ as funções

$$(U_n)_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \omega_n, W_n),$$

dadas por

$$
\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x), \\
\Phi_n &= i\lambda_n \phi, \\
\psi_n &= B_n \cos(\beta_n x), \\
\Psi_n &= i\lambda_n \psi, \\
\omega_n &= C_n \cos(\beta_n x), \\
W_n &= i\lambda_n \omega,
\end{aligned}
$$

formam, para determinados valores de A_n, B_n e C_n, uma sequência de soluções da equação

$$i\lambda_n - \mathcal{A}_2 U_n = F_n,$$

em que $F_n = (0, \rho_1^{-1} \sin(\beta_n x), 0, 0, 0, 0)^t$, e $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, e valores de λ_n tais que

$$\lambda_n^2 \rho_1 = k\beta_n^2 - 2l\beta_n k + l^2 k.$$

Nesses termos, obtivemos que

$$A_n \approx -\frac{i\gamma_2}{k^2}\lambda_n,$$

de onde segue a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1 \|\Phi_n\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_1 \|i\lambda_n A_n \sin(\beta_n x)\|_{L^2}^2 \\
&\approx \hat{C}\beta_n^4, \qquad \hat{C} > 0.
\end{aligned} \tag{6.201}
$$

Se a taxa de decaimento polinomial $\tau = \dfrac{1}{2}$, puder ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, então, pelo teorema de Borichev e Tomilov, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}} \left\| (i\lambda I - \mathcal{A}_2)^{-1} \right\| \leq C_\epsilon, \ \forall |\lambda| \geq 1.$$

Contudo, da estimativa (6.201), obtemos que, para qualquer $\epsilon > 0$, vale

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq K\lambda_n^{2\epsilon}, \qquad K > 0.$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}} \|(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \ \text{quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

E portanto, a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema. $\square$

6.3 Viscoelasticidade somente sobre o estresse longitudinal

Nesta seção, investigaremos o sistema de Bresse sob a ação de uma única viscosidade elástica, que age efetivamente somente na tensão longitudinal.
Introduzindo a viscoelasticidade através das leis constitutivas do modelo, obtemos o sistema

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_3 l(w_x - l\phi)_t &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3(w_x - l\phi)_{xt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

para $\gamma_3 > 0$. Já no caso em que viscosidade elástica é adicionada diretamente no sistema, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3' w_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

para $\gamma_3' > 0$.
Em ambos os casos, mostraremos que o sistema não possui decaimento exponencial, independentemente dos coeficientes do sistema. Mostraremos também que a dissipação viscoelástica, presente apenas na tensão longitudinal, será forte o suficiente para estabilizar o sistema de forma polinomial, independentemente dos coeficientes, se a dissipação é inserida através das leis constitutivas, e para determinada condição sobre os coeficientes do sistema, se a viscoelasticidade é inserida diretamente na terceira equação do sistema. Além disso, provaremos que $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a melhor taxa de decaimento polinomial para o sistema. Esta taxa ótima coincide com a melhor taxa de decaimento polinomial encontrada em todos os outros casos estudados neste trabalho, onde foi verificado decaimento polinomial, com viscosidades elásticas agindo parcialmente sobre os sistemas de Timoshenko e de Bresse.

6.3.1 Viscoelasticidade nas leis constitutivas

Nesta subseção iremos estudar o comportamento assintótico do problema de vigas de Bresse viscoelástico, com viscoelasticidade agindo efetivamente somente sobre a tensão longitudinal, através das leis constitucionais do modelo.

Falta de estabilidade exponencial

Teorema 6.3.1 *Seja (ϕ, ψ, ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse*

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_3 l(\omega_x - l\phi)_t &= 0 \qquad (6.202)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \qquad (6.203)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3(\omega_x - l\phi)_{xt} &= 0, \qquad (6.204)
\end{aligned}$$

em $(0, L)\times(0, \infty)$, com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann dadas em (3.8) *e condições iniciais* (3.7)*. Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L \psi_0 dx = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L \omega_0 dx = \int_0^L \omega_1 dx = 0$, então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}_2$, dado em* (3.16) *com $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ e $\gamma_3 > 0$, não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Mostraremos a existência de sequência numérica $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset D(\mathcal{A}_2)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n - \mathcal{A}_2)U_n = F_n$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1 \in H_0^1(0, L), \quad (6.205)\\
i\lambda_n\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega)_x - l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) - l\frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi) &= f_2 \in L^2(0, L), \quad (6.206)\\
i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3 \in H_*^1(0, L), \quad (6.207)\\
i\lambda_n\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi + l\omega) &= f_4 \in L_*^2(0, L), \quad (6.208)\\
i\lambda_n\omega - W &= f_5 \in H_*^1(0, L), \quad (6.209)\\
i\lambda_n W + l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega) - \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x - \frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi)_x &= f_6 \in L_*^2(0, L). \quad (6.210)
\end{aligned}$$

Escolhemos

$$F_n = (0, \alpha\rho_1^{-1}\sin(\beta_n x), 0, \mu\rho_2^{-1}\cos(\beta_n x), 0, 0)^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, e 0 representa a função nula.
A sequência $(F_n)_n$ escolhida é limitada em $\mathcal{H}_2$. De fato, $\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} = \left(\dfrac{\alpha^2}{\rho_1} + \dfrac{\mu^2}{\rho_2}\right)\dfrac{L}{2}$.
De (6.205), (6.207) e (6.209), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\Phi &= i\lambda_n \phi,\\
\Psi &= i\lambda_n \psi,\\
W &= i\lambda_n \omega.
\end{aligned}
$$

Substituindo as igualdades acima em (6.206), (6.208) e (6.210), obtemos

$$
\begin{aligned}
-\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - l\gamma_3 i\lambda_n(\omega_x - l\phi) &= \alpha\sin(\beta_n x) \quad (6.211)\\
-\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x+\psi+l\omega) - b\psi_{xx} &= \mu\cos(\beta_n x) \quad (6.212)\\
-\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - \gamma_3 i\lambda_n(\omega_x - l\phi)_x &= 0. \quad (6.213)
\end{aligned}
$$

Devido as condições de fronteira consideradas, vamos supor que

$$
\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x),\\
\psi_n &= B_n \cos(\beta_n x),\\
\omega_n &= C_n \cos(\beta_n x).
\end{aligned}
$$

Então, temos que ϕ_n, ψ_n, e ω_n satisfazem o sistema (6.211) - (6.213) se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$
\begin{aligned}
A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0 + i\lambda_n l^2\gamma_3) + B_n(k\beta_n) + C_n(l\beta_n(k+k_0) + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n) &= \alpha \quad (6.214)\\
A_n(k\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2) + C_n(lk) &= \mu \quad (6.215)\\
A_n(l\beta_n(k+k_0) + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n) + B_n(lk) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3) &= 0 \quad (6.216)
\end{aligned}
$$

Vamos tomar $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $-\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 = 0$ e escolher $\alpha = \mu = 1$.
Assim, fazendo (6.214)-(6.215)β_n e (6.216)-(6.215)l, obtemos, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
A(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + i\lambda_n l^2\gamma_3) + C(lk_0\beta_n + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n) &= -\beta_n\\
A(k_0 l\beta_n + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n) + C(-\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3) &= -l,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{bmatrix}
-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + i\lambda_n l^2\gamma_3 & lk_0\beta_n + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n\\
k_0 l\beta_n + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n & -\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} A_n \\ C_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -\beta_n \\ -l \end{bmatrix}.
$$

Considere

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + i\lambda_n l^2\gamma_3 & lk_0\beta_n + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n \\ \\ k_0 l\beta_n + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n & -\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3 \end{bmatrix},$$

então,

$$\det\{M\} = \lambda_n^4\rho_1 - \lambda_n^2\rho_1 k_0(\beta_n^2 + l^2) - i\lambda_n^3\rho_1\gamma_3(\beta_n^2 + l^2) \neq 0,$$

assim,

$$\begin{bmatrix} A_n \\ \\ C_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det\{M\}} \begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3 & -lk_0\beta_n - i\lambda_n l\gamma_3\beta_n \\ \\ -k_0 l\beta_n - i\lambda_n l\gamma_3\beta_n & -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k_0 + i\lambda_n l^2\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta_n \\ \\ -l \end{bmatrix},$$

o que implica

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\det\{M\}}[\lambda_n^2\beta_n\rho_1 - k_0\beta_n^3 - \lambda_n\beta_n^3\gamma_3 + l^2k_0\beta_n + i\lambda_n\beta_n l^2\gamma_3], \text{ e} \\ C_n &= \frac{1}{\det\{M\}}[\beta_n^2 k_0 l + i\lambda_n\beta_n^2 l\gamma_3 + \lambda_n^2\rho_1 l - l^3k_0 - i\lambda_n l^3\gamma_3], \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} A_n(\beta_n) &\to \frac{-i\rho_2}{b\rho_1}, \text{ e} \\ C_n(\beta_n^2) &\to \frac{-l\rho_2}{b\rho_1}. \end{aligned}$$

Usando as convergências acima em (6.215), temos que

$$B_n \to \frac{1}{k} + \frac{i\rho_2}{b\rho_1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_2\|\Psi^n\|_{L^2}^2 \\ &= \rho_2|i\lambda_n B_n|^2\|\cos\beta_n x\|_{L^2}^2 \\ &= \rho_2|\lambda_n B_n|^2\frac{L}{2} \\ &= \left(\frac{1}{k^2} + \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2 b^2}\right)\frac{L}{2}b\beta_n^2. \end{aligned}$$

Calculando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Portanto, o sistema não possui decaimento exponencial. $\square$

Estabilidade polinomial

Lema 20 *Seja $\mathcal{A}_2$ o operador diferencial associado ao problema*

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_3 l(\omega_x - l\phi)_t &= 0\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3(\omega_x - l\phi)_{xt} &= 0,
\end{aligned}$$

em que $\gamma_3 > 0$ e condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann.
Então

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2).$$

Demonstração: Vamos supor que $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A}_2)$, então pelo lema 3 existe $\mu \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}_2^{-1}\| \leq |\mu| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |\mu|\} \subset \varrho(\mathcal{A}_2) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}\|; |\beta| < |\mu|\} = \infty.$$

Portanto, existem sequência $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lambda_n \to \mu$ quando $n \to \infty$, $|\lambda_n| < |\mu|$ e sequência $(U_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)U_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

que pode ser reescrita, utilizando a equivalência entre as normas $\|.\|_{\mathcal{H}_2}$ e $\|.\|_2$, por

$$i\lambda_n\phi^n - \Phi^n \to 0 \tag{6.217}$$
$$i\lambda_n\phi_x^n - \Phi_x^n \to 0 \tag{6.218}$$
$$i\lambda_n\psi - \Psi \to 0 \tag{6.219}$$
$$i\lambda_n\psi_x^n - \Psi_x^n \to 0 \tag{6.220}$$
$$i\lambda_n\omega^n - W^n \to 0 \tag{6.221}$$
$$i\lambda_n\omega_x^n - W_x^n \to 0 \tag{6.222}$$
$$i\rho_1\lambda_n\Phi^n - k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x - l\gamma_3(W_x^n - l\Phi^n) - lk_0(\omega_x^n - l\phi^n) \to 0 \tag{6.223}$$
$$i\rho_2\lambda_n\Psi^n - b\psi_{xx}^n + k(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \to 0 \tag{6.224}$$
$$i\rho_1\lambda_n W^n + lk(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - \gamma_3(W_x^n - l\Phi^n)_x - k_0(\omega_x^n - l\phi^n)_x \to 0, \tag{6.225}$$

em que todas as convergẽ acima são em $L^2(0, L)$, e $U_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$.
Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)U_n$ por U_n, temos que

$$Re\langle i\lambda_n I - \mathcal{A}_2 U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = -Re\langle \mathcal{A}_2 U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = \gamma_3\|W_x^n - l\Phi\|_{L^2}^2 \to 0,$$

e logo, por (6.222) e (6.217),

$$\omega_x^n - l\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Por praticidade, iremos denotar $N = \gamma_3[W_x^n - l\Phi^n] + k_0[\omega_x^n - l\phi^n]$.
Da convergência apresentada em (6.225), concluímos que a sequência de funções (N_x) é limitada em $L^2(0, L)$, logo, tomando o produto de (6.225) por (N_x), obtemos

$$-i\rho_1\lambda_n \int_0^L W_x^n \overline{N}\, dx - lk \int_0^L (\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x \overline{N}\, dx - \|N_x\|_{L^2}^2 \to 0.$$

As convergências (6.222) e (6.223) implicam que $(W_x^n)_n$ e $([\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n]_x)_n$ são sequências uniformemente limitadas em $L^2(0, L)$, e logo, da convergências acima, obtemos

$$\|N_x\|_{L^2}^2 \to 0,$$

e portanto, por (6.225), temos também que

$$i\rho_1\lambda_n W^n + lk(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \to 0 \text{ em } L^2(0, L).$$

Denotando $F_n = i\rho_1\lambda_n W^n + lk(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)$, temos que

$$i\rho_1\lambda_n(W_x^n - l\Phi^n) + i\rho_1\lambda_n l\Phi^n + lk(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x - (F_n)_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Do produto da expressão acima por $\overline{\Phi^n}$ segue que

$$\begin{aligned} & i\rho_1\lambda_n \int_0^L (W_x^n - l\Phi^n)\overline{\Phi^n}\, dx + i\rho_1\lambda_n l\|\Phi^n\|_{L^2}^2 \\ -lk & \int_0^L (\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)\overline{\Phi_x^n}\, dx + \int_0^L F_n\overline{\Phi_x^n}\, dx \to 0. \end{aligned} \tag{6.226}$$

Do produto de (6.223) por $\overline{\Phi^n}$ e do produto de (6.225) por $\overline{\Phi_x^n}$, obtemos que

$$-i\lambda_n\rho_1 \int_0^L (W_x^n - l\Phi^n)\overline{\Phi^n}\, dx + 2lk \int_0^L (\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)\overline{\Phi_x^n}\, dx \to 0,$$

de onde segue que,

$$\int_0^L (\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n)\overline{\Phi_x^n}\, dx \to 0.$$

Usando a convergência acima em (6.226), temos

$$\|\Phi^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Assim,

$$\|W_x^n\|_{L^2}^2 \le \|W_x^n - l\Phi^n\|_{L^2}^2 + \|l\Phi^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

o que implica, pela desigualdade de Poincaré,

$$W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Como

$$i\rho_1\lambda_n W^n + lk(\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

concluímos que,

$$\phi_x^n + \psi^n + l\omega^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Portanto,

$$-\int_0^L \phi^n\overline{\psi_x^n}dx + \|\psi\|_{L^2}^2 + l\int_0^L \omega^n\overline{\psi^n}dx \to 0,$$

e logo,

$$\|\psi^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

A última convergência implica, por (6.219), que

$$\|\Psi^n\|_{L^2}^2 \to 0,$$

e portanto, por (6.224),

$$\|\psi_x^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Assim, acabamos de mostrar que $\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$ quando $n \to \infty$, contradizendo o fato de $\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$.
Portanto, concluímos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
$\square$

Teorema 6.3.2 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$*. Então, para* $\gamma_3 > 0$*, a solução do problema*

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) - \gamma_3 l(\omega_x - l\phi)_t &= 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3(\omega_x - l\phi)_{xt} &= 0, \end{aligned}$$

sobre $(0, L) \times (0, \infty)$*, decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}. \tag{6.227}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2^\alpha)$*, então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2^\alpha)}. \tag{6.228}$$

Demonstração: Pelo lema anterior, temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$.
Assim, para completar a demonstração do teorema, devemos verificar se existe constante positiva C independente de $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \geq 1$ e $F \in \mathcal{H}_2$ tal que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1.$$

Consideremos a equação

$$i\beta U - \mathcal{A}_2 U = F,$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^t \in \mathcal{H}_2$ e $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$.
A equação acima pode ser reescrita por

$$i\beta\phi - \Phi = f_1 \tag{6.229}$$
$$i\beta\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - l\gamma_3(W_x - l\Phi) - lk_0(\omega_x - l\phi) = \rho_1 f_2 \tag{6.230}$$
$$i\beta\psi - \Psi = f_3 \tag{6.231}$$
$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) = \rho_2 f_4 \tag{6.232}$$
$$i\beta\omega - W = f_5 \tag{6.233}$$
$$i\beta\rho_1 W + kl(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - \gamma_3(W_x - l\Phi)_x = \rho_1 f_6. \tag{6.234}$$

Da propriedade dissipativa do sistema obtemos que

$$Re\{\langle \mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = -\gamma_3\|W_x - l\Phi\|_{L^2}^2.$$

Logo,

$$\gamma_3\|W_x - l\Phi\|_{L^2}^2 = Re\{\langle -\mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta U - \mathcal{A}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{6.235}$$

Das equações (6.229) e (6.233), obtemos que

$$\beta^2\|\omega_x - l\phi\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

A partir daqui, será conveniente denotar $N = k_0(\omega_x - l\phi) + \gamma_3(W_x - l\Phi)$.
Com a notação acima, derivando em relação a x a expressão (6.234), e multiplicando o resultado por $\overline{N}$, obtemos que

$$i\beta\rho_1\int_0^L (W_x - l\Phi)\overline{N}\,dx + i\beta\rho_1 l\int_0^L \Phi\overline{N}\,dx - lk\int_0^L(\phi+\psi+l\omega)\overline{N_x}\,dx + \|N_x\|_{L^2}^2 = \rho_1 f_6\int_0^L \overline{N_x}\,dx$$

de onde segue, por (6.232), que

$$\begin{aligned}\|N_x\|_{L^2}^2 &\leq C|\beta|\|W_x - l\Phi\|_{L^2}\|\overline{N}\|_{L^2} + C|\beta|\|\Phi\|_{L^2}\|\overline{N}\|_{L^2}\\ &\quad + C\|i\beta\rho_1\Phi - lN - \rho_1 f_4\|_{L^2}\|\overline{N}\|_{L^2} + C_\epsilon\|f_6\|_{L^2}^2\\ &\leq C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.\end{aligned} \tag{6.236}$$

Do produto de (6.230) por $\overline{\phi}$ e do produto de (6.234) por $\overline{\phi_x}$, segue que

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L (W_x - l\Phi)\overline{\Phi}\,dx + 2lk\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)\overline{\phi_x}\,dx - l\int_0^L N\overline{\phi}\,dx\\ + \int_0^L N\overline{\phi_{xx}}\,dx = \rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}\,dx + \rho_1\int_0^L f_6\overline{\phi_x}\,dx,\end{aligned}$$

o que implica, novamente por (6.230),

$$\begin{aligned}
&\rho_1\int_0^L (W_x - l\Phi)\overline{\Phi}\,dx + 2lk\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)\overline{\phi_x}\,dx - l\int_0^L N\overline{\phi}\,dx \\
&+\frac{1}{k}\int_0^L N\overline{[i\rho_1\beta\Phi - k\psi_x - kl\omega_x - lN - \rho_1 f_2]}\,dx = \rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}\,dx + \rho_1\int_0^L f_6\overline{\phi_x}\,dx,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left|\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)\overline{\phi_x}\,dx\right| \le C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2},$$

para todo $\epsilon > 0$.

Analisando, novamente, o produto de (6.230) por $\overline{\phi}$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} &\le \left|k\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)\overline{\phi_x}\,dx\right| + \left|l\int_0^L N\overline{\phi}\,dx\right| + \left|\rho_1\int_0^L f_2\overline{\phi}\,dx\right| \\
&\le C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}, \qquad (6.237)
\end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|W_x\|^2_{L^2} &\le C\|W_x - l\Phi\|^2_{L^2} + C\|l\Phi\|^2_{L^2} \\
&\le C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2},
\end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$, que nos permite concluir, pela desigualdade de Poincaré,

$$\|W\|^2_{L^2} \le C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}.$$

Do produto da expressão dada em (6.234) por $(\overline{\phi_x+\psi+l\omega})$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\rho_1\int_0^L W_x\overline{\Phi}\,dx - \rho_1\int_0^L W\overline{\Psi}\,dx - \rho_1 l\|W\|^2_{L^2} - \rho_1\int_0^L W\overline{[\rho_1 f_{1,x} + \rho_2 f_3 + l\rho_1 f_5]}\,dx \\
&+lk\|\phi_x+\psi+l\omega\|^2 + \int_0^L N(\overline{\phi_x+\psi+l\omega})_x\,dx = \rho_1\int_0^L f_6(\overline{\phi_x+\psi+l\omega})\,dx,
\end{aligned}$$

de onde segue, mais uma vez usando a equação (6.230),

$$\|\phi_x+\psi+l\omega\|^2_{L^2} \le C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_2},$$

para todo $\epsilon > 0$.
Assim, da equação (6.234), podemos concluir que

$$\begin{aligned}\beta^2\|W\|_{L^2}^2 &\leq C\|\phi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2+C\|N_x\|_{L^2}^2+C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2\\ &\leq C(1+\beta^2)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2+C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.\end{aligned} \tag{6.238}$$

Do produto interno, em $L^2(0,L)$, de (6.234) por ψ, segue que

$$i\beta\rho_1\int_0^L W\overline{\psi}\,dx+kl\int_0^L(\phi_x+\psi+l\omega)\overline{\psi}\,dx+\int_0^L N\overline{\psi_x}\,dx=\rho_1\int_0^1 f_6\overline{\psi}\,dx,$$

de onde segue, usando as estimativas (6.237) e (6.238),

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{L^2}^2 &\leq C\|W\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+C\|W\|_{L^2}\|f_3\|_{L^2}+C\|\phi\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}\\ &\quad +C\|l\omega\|\|\psi\|_{L^2}+C\|N\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}+C\|f_6\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}\\ &\leq C\|W\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+C\|W\|_{L^2}\|f_3\|_{L^2}+\frac{C}{|\beta|}\|\Phi+\rho_1f_1\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}\\ &\quad +\frac{C}{|\beta|}\|W+\rho_1f_5\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}+C\|N\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}+C\|f_6\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}\\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+\frac{\epsilon}{\beta^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2+C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2,\end{aligned} \tag{6.239}$$

e logo, por (6.231),

$$\begin{aligned}\|\Psi\|_{L^2}^2 &\leq C\beta^2\|\psi\|_{L^2}^2+C\|f_3\|_{L^2}^2\\ &\leq C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2+C\beta^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.\end{aligned}$$

Resulta da estimativa acima, juntamente com a equação (6.232), que

$$\|\psi_x\|_{L^2}^2\leq C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2+C\beta^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Portanto, mostramos que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I-\mathcal{A}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2}\leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2},\ \text{para todo } |\beta|\geq 1.$$

Logo, concluímos que o sistema é polinomialmente estável e

$$\|e^{\mathcal{A}_2t}U_0\|_{\mathcal{H}_2}\leq\frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}.$$

□

Otimalidade

Na seção anterior mostramos que o sistemas de vigas de Bresse com viscosidade parcial presente apenas na tensão longitudinal decai polinomialmente a uma taxa de $t^{-1/2}$, isto é, mostramos que

$$\|e^{t\mathcal{A}_j}U_0\|_{\mathcal{H}_j} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)},$$

para constante positiva C e $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$.
Nesta seção vamos mostrar que a taxa de decaimento polinomial encontrada não pode ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$. Assim como na demonstração dos teoremas anteriores envolvendo otimalidade do decaimento polinomial, mostraremos a existência de uma sequência de números complexos $|\lambda_n| > 1$, e sequências $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ e $(U_n)_n \subset \mathcal{A}_2$, tais que

$$\lambda_n U_n - \mathcal{A}_2 U_n = F_n, \text{ e}$$

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\|(\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Teorema 6.3.3 *A taxa de decaimento polinomial encontrada no teorema* 6.3.1 *é a taxa ótima.*

Demonstração: Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$i\lambda_n\phi - \Phi = f_1 \in H_0^1(0,L), \quad (6.240)$$
$$i\lambda_n\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega)_x - l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) - l\frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi) = f_2 \in L^2(0,L), \quad (6.241)$$
$$i\lambda_n\psi - \Psi = f_3 \in H_*^1(0,L), \quad (6.242)$$
$$i\lambda_n\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi + l\omega) = f_4 \in L_*^2(0,L), \quad (6.243)$$
$$i\lambda_n\omega - W = f_5 \in H_*^1(0,L), \quad (6.244)$$
$$i\lambda_n W + l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi + l\omega) - \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x - \frac{\gamma_3}{\rho_1}(W_x - l\Phi)_x = f_6 \in L_*^2(0,L). \quad (6.245)$$

Seja $F_n = (0, \alpha\rho_1^{-1}\sin(\beta_n x), 0, \mu\rho_2^{-1}\cos(\beta_n x), 0, 0)^t$, em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, e 0 representa a função nula.
A sequência $(F_n)_n$ é limitada em $\mathcal{H}_2$. De fato, $\|F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \left(\dfrac{\alpha^2}{\rho_1} + \dfrac{\mu^2}{\rho_2}\right)\dfrac{L}{2}$.
De (6.240), (6.242) e (6.244), obtemos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n\omega.$$

Substituindo as igualdades acima em (6.241), (6.243) e (6.245), obtemos

$$\begin{aligned} -\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) - l\gamma_3 i\lambda_n(\omega_x - l\phi) &= \alpha\sin(\beta_n x) \quad (6.246)\\ -\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x+\psi+l\omega) - b\psi_{xx} &= \mu\cos(\beta_n x) \quad (6.247)\\ -\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - \gamma_3 i\lambda_n(\omega_x - l\phi)_x &= 0. \quad (6.248)\end{aligned}$$

Devido as condições de fronteira consideradas, vamos supor que

$$\phi_n = A_n\sin(\beta_n x),$$

$$\psi_n = B_n\cos(\beta_n x),$$

$$\omega_n = C_n\cos(\beta_n x).$$

Então, temos que ϕ_n, ψ_n, e ω_n satisfazem o sistema (6.246) - (6.248) se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$\begin{aligned} A_n(p_1 + i\lambda_n l^2\gamma_3) + B_n(k\beta_n) + C_n(l\beta_n(k+k_0) + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n) &= \alpha \quad (6.249)\\ A_n(k\beta_n) + B_n(p_2) + C_n(lk) &= \mu \quad (6.250)\\ A_n(l\beta_n(k+k_0) + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n) + B_n(lk) + C_n(p_3 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3) &= 0, \quad (6.251)\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} p_1 &= -\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0,\\ p_2 &= -\lambda_n^2\rho_2 + b\beta_n^2 + k,\\ p_3 &= -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2.\end{aligned}$$

O sistema acima pode pode ser escrito matricialmente por

$$M\begin{bmatrix} A_n\\ B_n\\ C_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \mu\\ 0\end{bmatrix},$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} p_1 + i\lambda_n l^2\gamma_3 & k\beta_n & l\beta_n(k+k_0) + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n\\ k\beta_n & p_2 & kl\\ l\beta_n(k+k_0) + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n & lk & p_3 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3\end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\det\{M\} &= (p_1 + i\lambda_n l^2\gamma_3)(p_2)(p_3 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3) \\
&\quad +2k^2 l\beta_n[l\beta_n(k+k_0) + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n] \\
&\quad -p_2(l\beta_n[k+k_0] + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n)^2 - k^2\beta_n^2(p_3 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3) \\
&\quad -l^2k^2(p_1 + i\lambda_n l^2\gamma_3) \\
&= (p_1p_2 - k^2\beta_n^2)(p_3 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3) \\
&\quad +p_2\{i\lambda_n l^2\gamma_3(p_3 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3) - (l\beta_n[k+k_0] + i\lambda_n l\gamma_3\beta_n)^2\} \\
&\quad +2k^2l^2\beta_n^2[(k+k_0) + i\lambda_n\gamma_3] \\
&\quad -l^2k^2(p_1 + i\lambda_n l^2\gamma_3)
\end{aligned}$$

Escolhemos λ_n tal que

$$p_1p_2 - k^2\beta_n^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad p_2 = \frac{\rho_2[D_1\beta_n^2 + D_2] \pm \rho_2\sqrt{[-D_1\beta_n^2 - D_2]^2 + 4\frac{\rho_1}{\rho_2}k^2\beta_n^2}}{2\rho_1},$$

em que $D_1 = \dfrac{b\rho_1}{\rho_2} - k$ e $D_2 = \dfrac{k\rho_1}{\rho_2} - l^2k_0$.
Se $D_1 < 0$, escolhemos λ_n tal que

$$p_2 = \frac{\rho_2[D_1\beta_n^2 + D_2] + \rho_2\sqrt{[-D_1\beta_n^2 - D_2]^2 + 4\frac{\rho_1}{\rho_2}k^2\beta_n^2}}{2\rho_1},$$

o que implica

$$\lambda_n^2 \approx \frac{b}{\rho_2}\beta_n^2 + o(n).$$

Para o caso em que $D_1 > 0$, escolhemos λ_n tal que

$$p_2 = \frac{\rho_2[D_1\beta_n^2 + D_2] - \rho_2\sqrt{[-D_1\beta_n^2 - D_2]^2 + 4\frac{\rho_1}{\rho_2}k^2\beta_n^2}}{2\rho_1},$$

e neste caso, segue também que

$$\lambda_n^2 \approx \frac{b}{\rho_2}\beta_n^2 + o(n).$$

Assim, em ambos os caso, temos que

$$\begin{aligned}
\det\{M\} &= p_2\{i\lambda_n l^2\gamma_3 p_3 - l^2\beta_n^2[k+k_0]^2 - 2i\lambda_n l^2\gamma_3\beta_n^2[k+k_0]\} \\
&\quad +2k^2l^2\beta_n^2[(k+k_0)+i\lambda_n\gamma_3] \\
&\quad -l^2k^2(p_1+i\lambda_n l^2\gamma_3) \\
&\approx -i\lambda_n l^2\gamma_3\beta_n^2 p_2\left\{2k+k_0+\frac{b\rho_1}{\rho_2}\right\}
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, e tomando $\alpha = 0$ e $\mu = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{(p_1+i\lambda_n l^2\gamma_3)(p_3+i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3) - l^2\beta_n^2[(k+k_0)+i\lambda_n\gamma_3]^2}{\det\{M\}} \\
&\approx \frac{i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3(-\lambda_n^2\rho_1+k\beta_n^2)}{\det\{M\}} \\
&\approx \widehat{K}\beta_n, \quad \widehat{K}\neq 0,
\end{aligned}$$

já que, para nossas escolhas, $p_2 \approx o(n)$.
Agora, vamos supor que $\dfrac{b\rho_1}{\rho_2} - k = 0$.
Neste caso, temos que

$$p_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}p_2 + \left(l^2k_0 - \frac{k\rho_1}{\rho_2}\right),$$

e

$$p_3 = \frac{\rho_1}{\rho_2}p_2 + \left(l^2k + k_0\beta_n^2 - k\beta_n^2 - b\right).$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
\det\{M\} &= (p_1p_2 - k^2\beta_n^2)(p_3+i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3) \\
&\quad +p_2\{i\lambda_n l^2\gamma_3(p_3+i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3) - (l\beta_n[k+k_0]+i\lambda_n l\gamma_3\beta_n)^2\} \\
&\quad +2k^2l^2\beta_n^2[(k+k_0)+i\lambda_n\gamma_3] \\
&\quad -l^2k^2(p_1+i\lambda_n l^2\gamma_3) \\
&= i\lambda_n\gamma_3\{\beta_n^2p_1p_2 - k^2\beta_n^4 + p_3p_2l^2 - 2l^2\beta_n^2(k+k_0)p_2\} \\
&\quad +(p_1p_2-k^2\beta_n^2)p_3 - p_2(l\beta_n[k+k_0])^2 \\
&\quad +2k^2l^2\beta_n^2[(k+k_0)i\lambda_n\gamma_3] - l^2k^2(p_1+i\lambda_n l^2\gamma_3).
\end{aligned}$$

Neste caso, vamos escolher λ_n tal que

$$\beta_n^2p_1p_2 - k^2\beta_n^4 + p_3p_2l^2 - 2l^2\beta_n^2(k+k_0)p_2 = 0.$$

Igualdade acima é equivalente a

$$p_2^2\left\{\frac{\rho_1}{\rho_2}[\beta_n^2+l^2]\right\}+p_2\left\{-3l^2k\beta_n^2-b[\beta_n^2+l^2]+l^4k\right\}-k^2\beta_n^4=0.$$

Vamos denotar $\Gamma=-3l^2k\beta_n^2-b[\beta_n^2+l^2]+l^4k$.
Escolhemos

$$\begin{aligned}p_2 &= \frac{-\rho_2\Gamma+\rho_2\sqrt{\Gamma^2+4\frac{\rho_1}{\rho_2}[\beta_n^2+l^2]k^2\beta_n^4}}{2\rho_1(\beta_n^2+l^2)}\\ &\approx \frac{\rho_2}{\rho_1}\sqrt{kb}\beta_n.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\det\{M\} &= (p_1p_2-k^2\beta_n^2)p_3-p_2(l\beta_n[k+k_0])^2\\ &\quad +2k^2l^2\beta_n^2[(k+k_0)i\lambda_n\gamma_3]-l^2k^2(p_1+i\lambda_nl^2\gamma_3)\\ &\approx \left([l^2k_0-b]\frac{\rho_2}{\rho_1}\sqrt{kb}\right)\beta_np_3-\frac{\rho_2}{\rho_1}\sqrt{kb}\beta_n(l\beta_n[k+k_0])^2\\ &\quad +2k^2l^2\beta_n^2[(k+k_0)i\lambda_n\gamma_3]-l^2k^2(p_1+i\lambda_nl^2\gamma_3).\end{aligned}$$

Determinando os valores de A_n, B_n e C_n, com $\alpha=0$ e $\mu=1$, obtemos que

$$\begin{aligned}B_n &= \frac{(p_1+i\lambda_nl^2\gamma_3)(p_3+i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3)-l^2\beta_n^2[(k+k_0)+i\lambda_n\gamma_3]^2}{\det\{M\}}\\ &\approx \frac{i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3p_1-l^2\beta_n^2\lambda_n^2\gamma_3}{\det\{M\}}\\ &\approx \widehat{K}\beta_n,\quad \widehat{K}\neq 0.\end{aligned}$$

Pelo teorema 1.3.4, temos que se a taxa de decaimento polinomial $\tau=\dfrac{1}{2}$ puder ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, então existe $\epsilon>$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}}\left\|(i\lambda I-\mathcal{A}_2)^{-1}\right\|\leq C_\epsilon,\ \forall|\lambda|\geq 1.$$

Porém, para as funções $U_n=(\phi_n,\Phi_n,\psi_n,\psi_n,\omega_n,W_n)^t\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ dadas acima, obtemos que

$$\begin{aligned}\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_2\|\Psi_n\|_{L^2}^2\\ &= \rho_2\|i\lambda_nB_n\cos(\beta_nx)\|_{L^2}^2\\ &\approx \hat{C}\lambda_n^4,\qquad \hat{C}>0.\end{aligned}$$

Logo, para qualquer $\epsilon > 0$, temos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}}\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_2} \quad \geq \quad K\lambda_n^{2\epsilon}, \qquad K > 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}}\|(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Concluímos, então, que $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema.

□

6.3.2 Viscosidade no sistema

Iremos investigar, nesta subseção, o comportamento assintótico das soluções do sistema de Bresse sob a ação dissipativa de uma viscosidade elástica presente somente na tensão longitudinal, adicionando-a diretamente no sistema.

Falta de estabilidade exponencial

Teorema 6.3.4 *Seja (ϕ, ψ, ω) a solução do problema determinado pelo sistema de Bresse*

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + l\omega + \psi)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) &(6.252)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + l\omega + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) &(6.253)\\
\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + l\omega + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty), &(6.254)
\end{aligned}$$

com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann dadas em (3.8) *e condições iniciais* (3.7). *Se os dados iniciais satisfazem a condição $\int_0^L \psi_0 dx = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L \omega_0 dx = \int_0^L \omega_1 dx = 0$, então o semigrupo gerado pelo operador $\widetilde{\mathcal{A}}_2$, dado em* (3.16) *com $\gamma_1' = \gamma_2' = 0$ e $\gamma_3' > 0$, não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Mostraremos a existência de sequência numérica $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty$ e sequências $(U_n)_n \subset D(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, $(F_n)_n \subset \mathcal{H}_2$ limitada em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$(i\lambda_n - \widetilde{\mathcal{A}}_2)U_n = F_n$$

e

$$\limsup_{n\to\infty}\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda_n\phi - \Phi &= f_1 \in H_0^1(0,L), & (6.255)\\ i\lambda_n\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega)_x - l\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi) &= f_2 \in L^2(0,L), & (6.256)\\ i\lambda_n\psi - \Psi &= f_3 \in H_*^1(0,L), & (6.257)\\ i\lambda_n\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi+l\omega) &= f_4 \in L_*^2(0,L), & (6.258)\\ i\lambda_n\omega - W &= f_5 \in H_*^1(0,L), & (6.259)\\ i\lambda_n W + l\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi+l\omega) - \frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\phi)_x - \frac{\gamma_3'}{\rho_1}W_{xx} &= f_6 \in L_*^2(0,L). & (6.260)\end{aligned}$$

Escolhemos

$$F_n = (0, \alpha\rho_1^{-1}\sin(\beta_n x), 0, \mu\rho_2^{-1}\cos(\beta_n x), 0, 0)^t,$$

em que $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, e 0 representa a função nula.

A sequência $(F_n)_n$ escolhida é limitada em $\mathcal{H}_2$. De fato, $\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} = \left(\dfrac{\alpha^2}{\rho_1} + \dfrac{\mu^2}{\rho_2}\right)\dfrac{L}{2}$.

De (6.205), (6.207) e (6.209), obtemos que

$$\Phi = i\lambda_n\phi,$$

$$\Psi = i\lambda_n\psi,$$

$$W = i\lambda_n\omega.$$

Substituindo as igualdades acima em (6.256), (6.258) e (6.260), obtemos

$$\begin{aligned} -\lambda_n^2\rho_1\phi - k(\phi_x+\psi+l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= \alpha\sin\beta_n x & (6.261)\\ -\lambda_n^2\rho_2\psi + k(\phi_x+\psi+l\omega) - b\psi_{xx} &= \mu\cos(\beta_n x) & (6.262)\\ -\lambda_n^2\rho_1\omega + lk(\phi_x+\psi+l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - \gamma_3' i\lambda_n\omega_{xx} &= 0. & (6.263)\end{aligned}$$

Devido as condições de fronteira consideradas, vamos supor que

$$\begin{aligned} \phi_n &= A_n\sin(\beta_n x),\\ \psi_n &= B_n\cos(\beta_n x),\\ \omega_n &= C_n\cos(\beta_n x).\end{aligned}$$

Então, temos que ϕ_n, ψ_n, e ω_n satisfazem o sistema (6.261) - (6.263) se, e somente se, A_n, B_n e C_n satisfazem

$$\begin{aligned} A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0) + B_n(k\beta_n) + C_n(l\beta_n[k+k_0]) &= \alpha \qquad (6.264)\\ A_n(k\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2) + C_n(lk) &= \mu \qquad (6.265)\\ A_n(l\beta_n[k+k_0]) + B_n(lk) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3') &= 0. \qquad (6.266) \end{aligned}$$

O sistema acima pode ser reescrito por

$$\begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0 & k\beta_n & l\beta_n(k+k_0) \\ k\beta_n & -\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 & lk \\ l\beta_n(k+k_0) & lk & -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mu \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denotando

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0 & k\beta_n & l\beta_n(k+k_0) \\ k\beta_n & -\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2 & lk \\ l\beta_n(k+k_0) & lk & -\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3' \end{bmatrix},$$

temos que,

$$\begin{aligned} \det\{M\} = \; & (-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0)(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2)(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3') \\ & + 2k^2l^2\beta_n^2(k+k_0) - l^2\beta_n^2(k+k_0)^2(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2) \\ & - k^2\beta_n^2(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3') - l^2k^2(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0). \end{aligned}$$

Observando que

$$(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0)(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2) - k^2\beta_n^2 = 0,$$

se, e somente se,

$$\lambda_n^2 = \frac{(\rho_1 b + \rho_2 k)\beta_n^2 + \sqrt{[(\rho_1 b - \rho_2 k)\beta_n^2 + (\rho_1 k - \rho_2 l^2 k_0)]^2 + 4\rho_1\rho_2 k\beta_n^2}}{2\rho_1\rho_2}$$

ou

$$\lambda_n^2 = \frac{(\rho_1 b + \rho_2 k)\beta_n^2 - \sqrt{[(\rho_1 b - \rho_2 k)\beta_n^2 + (\rho_1 k - \rho_2 l^2 k_0)]^2 + 4\rho_1\rho_2 k\beta_n^2}}{2\rho_1\rho_2}.$$

As duas expressões acima fazem sentido para β_n suficientemente grande. Se $\rho_1 b-\rho_2 k>0$, escolhemos λ_n tal que

$$\begin{aligned}\lambda_n^2 &= \frac{(\rho_1 b+\rho_2 k)\beta_n^2-\sqrt{[(\rho_1 b-\rho_2 k)\beta_n^2+(\rho_1 k-\rho_2 l^2 k_0)]^2+4\rho_1\rho_2 k\beta_n^2}}{2\rho_1\rho_2}\\ &\approx \frac{k}{\rho_1}\beta_n^2.\end{aligned}$$

No caso em que $\rho_1 b-\rho_2 k<0$, escolhemos λ_n tal que

$$\begin{aligned}\lambda_n^2 &= \frac{(\rho_1 b+\rho_2 k)\beta_n^2+\sqrt{[(\rho_1 b-\rho_2 k)\beta_n^2+(\rho_1 k-\rho_2 l^2 k_0)]^2+4\rho_1\rho_2 k\beta_n^2}}{2\rho_1\rho_2}\\ &\approx \frac{k}{\rho_1}\beta_n^2.\end{aligned}$$

vamos considerar $\alpha=1$ e $\mu=0$.
Nos dois casos, obtemos que

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{(-\lambda_n^2\rho_2+k+b\beta_n^2)(-\lambda_n^2\rho_1+l^2k+k_0\beta_n^2+i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3')-l^2k^2}{\det\{M\}}\\ &\approx \frac{-i\gamma_3'}{l^2(k+k_0)}\lambda_n\\ &\approx \frac{-i\sqrt{k}\gamma_3'}{l^2\sqrt{\rho_1}(k+k_0)}\beta_n.\end{aligned}$$

Agora, se $\rho_1 b-\rho_2 k=0$, tomamos λ_n tal que

$$\begin{aligned}\lambda_n^2 &= \frac{(\rho_1 b+\rho_2 k)\beta_n^2+\sqrt{(\rho_1 k-\rho_2 l^2 k_0)^2+4\rho_1\rho_2 k\beta_n^2}}{2\rho_1\rho_2}\\ &\approx \frac{(\rho_1 b+\rho_2 k)}{2\rho_1\rho_2}\beta_n^2,\end{aligned}$$

e logo, para este caso, temos que

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{(-\lambda_n^2\rho_2+k+b\beta_n^2)(-\lambda_n^2\rho_1+l^2k+k_0\beta_n^2+i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3')-l^2k^2}{\det\{M\}}\\ &\approx \frac{-i\gamma_3'}{l^2(k+k_0)^2}\lambda_n\\ &\approx \frac{-ik\gamma_3'\sqrt{\rho_1 b+\rho_2 k}}{\sqrt{2\rho_1\rho_2}l^2(k+k_0)^2}\beta_n.\end{aligned}$$

Portanto, independentemente do valor da expressão $\rho_1 b - \rho_2 k$, temos que

$$\begin{aligned}
\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1 \|\Phi^n\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_1 |i\lambda_n A_n|^2 \|\sin \beta_n x\|_{L^2}^2 \\
&= K \left|\lambda_n^2\right|^2 \frac{L}{2} \\
&= K\beta_n^4, \qquad K > 0.
\end{aligned}$$

E, calculando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Portanto, o sistema não possui decaimento exponencial. $\square$

Estabilidade polinomial

Lema 21 *Seja $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ o operador diferencial dado em (3.35), com $\gamma_3' > 0$ e $\gamma_1' = \gamma_2' = 0$. Então,*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2),$$

se $\dfrac{k}{\rho_2(k+k_0)} \geq \dfrac{l^2}{\rho_1}$

Demonstração: Suponhamos que os coeficientes do sistema satisfazem

$$\frac{k}{\rho_2(k+k_0)} \geq \frac{l^2}{\rho_1}.$$

Vamos supor, por contradição, que $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$. Como $0 \in \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, segue do lema 3 que existe $\mu \in \mathbb{R}$ com $\| \widetilde{\mathcal{A}}_2^{-1} \| \leq |\mu| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |\mu|\} \subset \rho(\mathcal{A}_2) \text{ e } sup\{\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\|; |\beta| < |\mu|\} = \infty.$$

Logo, existem sequência $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}$ com $\beta_n \to \mu$ quando $n \to \infty$, $|\beta_n| < |\mu|$ e sequência $(y_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ com $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ para todo n, tais que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto,

$$i\beta_n\phi^n - \Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \quad (6.267)$$
$$i\beta_n\phi^n_x - \Phi^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \quad (6.268)$$
$$i\beta_n\psi^n - \Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \quad (6.269)$$
$$i\beta_n\psi^n_x - \Psi^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \quad (6.270)$$
$$i\beta_n\omega^n - W^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \quad (6.271)$$
$$i\beta_n\omega^n_x - W^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \quad (6.272)$$
$$i\rho_1\beta_n\Phi^n - k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n)_x - lk_0(\omega^n_x - l\phi^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \quad (6.273)$$
$$i\rho_2\beta_n\Psi^n - b\psi^n_{xx} + k(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L) \quad (6.274)$$
$$i\rho_1\beta_n W^n + lk(\phi^n_x + \psi^n + l\omega^n) - k_0(\omega^n_x - l\phi^n)_x - \gamma_3' W^n_{xx} \to 0 \text{ em } L^2(0,L), \quad (6.275)$$

em que $y_n = (\phi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \omega^n, W^n)^t$.
Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_2$ de $(i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)y_n$ por y_n, obtemos, devido a propriedade dissipativa do sistema,

$$Re\langle i\beta_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = -Re\langle \widetilde{\mathcal{A}}_2 y_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} = \gamma_3'\|W^n_x\|^2_{L^2} \to 0, \quad (6.276)$$

o que implica, pela convergência (6.272),

$$\|\omega^n_x\|^2_{L^2} \to 0, \quad (6.277)$$

e logo, pela desigualdade de Poincaré, concluímos que

$$\|W^n\|^2_{L^2} \to 0,$$

e

$$\|\omega^n\|^2_{L^2} \to 0.$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ de (6.275) por $k_0\omega^n_{xx} - \gamma_3' W^n_{xx}$, obtemos que

$$k_0\omega^n_{xx} - \gamma_3' W^n_{xx} \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Logo, novamente por (6.275), otemos que

$$lk(\phi^n_x + \psi^n) + lk_0 phi^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \quad (6.278)$$

Tomando o produto interno de (6.273) por ϕ^n, obtemos, por (6.267), que

$$-\rho_1\beta_n^2\|\phi^n\|^2_{L^2} + k\|\phi^n_x\|^2_{L^2} - k\psi^n_x\overline{\phi^n}dx + l^2k_0\|l\phi^n\|^2_{L^2} \to 0.$$

Logo, por (6.278), segue que

$$(-\rho_1\beta_n^2 + l^2k_0)\|\phi^n\|_{L^2}^2 - k_0\|\phi_x^n\|_{L^2}^2. \tag{6.279}$$

Do produto interno de (6.274) por ψ^n, obtemos, por (6.269), que

$$-\rho_2\beta_n^2\|\psi^n\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x^n\|_{L^2}^2 + k\phi_x^n\overline{\psi^n}dx + k\|\psi^n\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Assim, de (6.278), obtemos que

$$\left(-\rho_2\beta_n^2 + \frac{kk_0}{k+k_0}\right)\|\psi^n\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x^n\|_{L^2}^2 \to 0. \tag{6.280}$$

Se $(-\rho_1\mu^2 + l^2k_0) > 0$ e $-\rho_2\mu^2 + \dfrac{kk_0}{k+k_0} < 0$, então,

$$\frac{kk_0}{\rho_2(k+k_0)} < \frac{l^2k_0}{\rho_1},$$

o que não ocorre, por hipótese.
Assim, devemos ter que $(-\rho_1\mu^2 + l^2k_0) \le 0$ ou $-\rho_2\mu^2 + \dfrac{kk_0}{k+k_0} \ge 0$.
Se $(-\rho_1\mu^2 + l^2k_0) \le 0$, então, de (6.279) segue que

$$\phi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e logo,

$$\phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Assim, de (6.273), (6.274) e (6.269) segue também que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Agora, se $-\rho_2\mu^2 + \dfrac{kk_0}{k+k_0} \ge 0$, então, de (6.280) obtemos que

$$\psi_x^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e logo,

$$\psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\phi^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Assim, de (6.273) e (6.269) segue também que

$$\Phi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L),$$

e

$$\Psi^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Portanto, mostramos que $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} \to 0$, o que contradiz o fato de $\|y_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$.
Portanto, temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_2)$, para o caso em que os coeficientes do sistema satisfazem $\dfrac{kk_0}{\rho_2(k+k_0)} \geq \dfrac{l^2k_0}{\rho_1}$.
□

Teorema 6.3.5 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$. *Então, a solução do problema*

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + l\omega + \psi)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + l\omega + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + l\omega + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

em que $\dfrac{k}{\rho_2(k+k_0)} \geq \dfrac{l^2}{\rho_1}$, *decai polinomialmente a zero, isto é, existe constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)}. \tag{6.281}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2^{\alpha})$, *então existe constante* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\|e^{t\mathcal{A}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2^{\alpha})}. \tag{6.282}$$

Demonstração: Mostramos, no lema anterior, que se $\dfrac{k}{\rho_2(k+k_0)} \geq \dfrac{l^2}{\rho_1}$, então $i\mathbb{R} \subset \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Agora, vamos mostrar que existe uma constante positiva C independente de $\beta \in \mathbb{R}$ com

$|\beta| \geq 1$ e $F \in \mathcal{H}_2$ tal que

$$\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\left\|F\right\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1.$$

Consideremos a equação

$$i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F,$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^t \in \mathcal{H}_2$ e $U \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Em relação as suas componentes, a equação $i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = F$ é dada por

$$\begin{aligned} i\beta\phi - \Phi &= f_1 && (6.283)\\ i\beta\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi + l\omega)_x - lk_0(\omega_x - l\phi) &= \rho_1 f_2 && (6.284)\\ i\beta\psi - \Psi &= f_3 && (6.285)\\ i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi + l\omega) &= \rho_2 f_4 && (6.286)\\ i\beta\omega - W &= f_5 && (6.287)\\ i\beta\rho_1 W + kl(\phi_x + \psi + l\omega) - k_0(\omega_x - l\phi)_x - \gamma_3' W_{xx} &= \rho_1 f_6. && (6.288)\end{aligned}$$

Temos que $Re\{\langle\widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = -\gamma_3'\|W_x\|_{L^2}^2$, então,

$$\gamma_3'\|W_x\|_{L^2}^2 = Re\{\langle -\widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} = Re\{\langle i\beta U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U, U\rangle_{\mathcal{H}_2}\} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Assim, pela desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$\|W\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Segue da equação (6.287), que

$$\|\omega_x\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\beta^2}\|W_x\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2, \tag{6.289}$$

para $|\beta| \geq 1$.
Vamos denotar $N = k_0\omega_x + \gamma_3' W_x$ e $S = \phi_x + \psi + l\omega$.
Tomando o produto interno em $L^2(0, L)$ de (6.288) por S, obtemos que

$$i\beta\rho_1\int_0^L W\overline{S}dx + kl\|S\|_{L^2} + lk_0\int_0^L \phi_x\overline{S}dx + \int_0^L N\overline{S_x}dx = \rho_1\int_0^L f_6\overline{S}dx.$$

Assim, das identidades (6.284), (6.285), segue que

$$
\begin{aligned}
i\beta\rho_1\int_0^L W\overline{S}dx + l(k+k_0)\|S\|_{L^2} - lk_0\int_0^L\left(\frac{1}{i\beta}\Psi + \frac{1}{i\beta}f_3 + l\omega\right)\overline{S}dx \\
+\frac{1}{k}\int_0^L N\overline{[i\beta\rho_1\Phi - lk_0(\omega_x - l\phi) - \rho_1 f_2]}dx = \rho_1\int_0^L f_6\overline{S}dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\|S\|_{L^2}^2 \leq C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \frac{C}{\beta^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.
$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ de (6.288) por ϕ_x, segue que

$$
\begin{aligned}
i\beta\rho_1\int_0^L W\overline{\phi_x}dx + kl\int_0^L S\overline{\phi_x}dx + lk_0\|\phi_x\|_{L^2}^2 \\
+\int_0^L N\overline{\phi_{xx}}dx = \rho_1\int_0^L f_6\overline{\phi_x}dx.
\end{aligned}
$$

Novamente por (6.284), temos que

$$
\begin{aligned}
i\beta\rho_1\int_0^L W\overline{\phi_x}dx + kl\int_0^L S\overline{\phi_x}dx + lk_0\|\phi_x\|_{L^2}^2 \\
+\frac{1}{k}\int_0^L N\overline{[i\beta\rho_1\Phi - k(\psi_x + l\omega_x) - lk_0(\omega_x - l\phi) - \rho_1 f_2]}dx = \rho_1\int_0^L f_6\overline{\phi_x}dx.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\|\phi_x\|_{L^2}^2 \leq C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \frac{C}{\beta^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.
$$

Portanto, temos também que

$$
\begin{aligned}
\|\psi\|_{L^2}^2 &\leq C\|\phi_x + \psi + l\omega\|_{L^2} + C\|\phi_x\|_{L^2} + C\|\omega\|_{L^2} \\
&\leq C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{\beta^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2.
\end{aligned}
$$

Do produto interno em $L^2(0,L)$ de (6.284) por ϕ, e por (6.283), obtemos que

$$
\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \frac{C}{\beta^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.
$$

Do produto de (6.288) por $\overline{\psi}$, obtemos

$$
i\beta\rho_1\int_0^L W\overline{\psi}dx + kl\int_0^L(\phi_x + \psi + l\omega)\overline{\psi}dx - lk_0\int_0^L \phi\overline{\psi_x}dx + \int_0^L N\overline{\psi_x}dx = \rho_1\int_0^L f_6\overline{\psi}dx.
$$

Usando a identidade (6.288), temos que

$$
\begin{array}{c}
-\rho_1 \int_0^L W[\overline{\Psi + f_3}]dx + kl \int_0^L \left(\frac{l}{i\beta} W + \frac{l}{i\beta} f_5 \right) \overline{\psi} dx + kl\|\psi\|_{L^2}^2 \\
-l(k+k_0) \int_0^L \left(\frac{1}{i\beta}\Phi + \frac{1}{i\beta} f_1 \right) \overline{\psi_x} dx + \int_0^L N\overline{\psi_x} dx = \rho_1 \int_0^L f_6 \overline{\psi} dx.
\end{array}
$$

Logo,

$$
\|\psi\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \frac{\epsilon}{\beta^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.
$$

Assim, do produto interno em $L^2(0,L)$ de (6.285) por ψ, obtemos que

$$
\begin{array}{rcl}
\|\Psi\|_{L^2}^2 & \leq & C\beta^2\|\psi\|_{L^2}^2 + \|f_3\|_{L^2}^2 \\
& \leq & C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\beta^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.
\end{array}
$$

Finalmente, tomando o produto interno em $L^2(0,L)$ de (6.286) por ψ, obtemos que

$$
\begin{array}{rcl}
\|\psi_x\|_{L^2} & \leq & C\|\Psi\|_{L^2}^2 + C\|\phi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} + \|f_4\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \\
& \leq & C\beta^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} + C\beta^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2.
\end{array}
$$

Portanto, mostramos que

$$
\frac{1}{\beta^2}\left\|(i\beta I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}F\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \text{ para todo } |\beta| \geq 1. \tag{6.290}
$$

Logo, o sistema

$$
\begin{array}{rcl}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) & = & 0 \text{ em } (0,L) \times (0,\infty) \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) & = & 0 \text{ em } (0,L) \times (0,\infty) \\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3'\omega_{xxt} & = & 0 \text{ em } (0,L) \times (0,\infty),
\end{array}
$$

em que $\dfrac{kk_0}{\rho_2(k+k_0)} \geq \dfrac{l^2k_0}{\rho_1}$, possui decaimento polinomial, e

$$
\|e^{t\widetilde{\mathcal{A}}_2}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)}.
$$

□

Teorema 6.3.6 *Suponhamos que* $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \phi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, *e suponha que* *os coeficientes do sistema satisfazem*

$$\frac{L}{\pi}\sqrt{\left(\frac{l^2}{\rho_1}-\frac{k}{\rho_2(k+k_0)}\right)\frac{k_0\rho_1\rho_2}{b\rho_1+k_0\rho_2}}\in\mathbb{N}.$$

Então, a solução do problema

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt}-k(\phi_x+lw+\psi)_x-lk_0(w_x-l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\phi_x+lw+\psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt}-k_0(w_x-l\phi)_x+kl(\phi_x+lw+\psi)-\gamma_3' w_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

com $\gamma_3'>0$, não decai polinomialmente.

Demonstração: Mostraremos que, neste caso, $i\mathbb{R}\not\subseteq\varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, com condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann.
Consideremos, inicialmente, a equação

$$i\lambda_n U-\widetilde{\mathcal{A}}_2 U=0,$$

que nas suas componentes é dada por

$$i\lambda_n\phi-\Phi = 0 \tag{6.291}$$
$$i\lambda_n\rho_1\Phi-k(\phi_x+\psi+l\omega)_x-lk_0(\omega_x-l\phi) = 0 \tag{6.292}$$
$$i\lambda_n\psi-\Psi = 0 \tag{6.293}$$
$$i\lambda_n\rho_2\Psi-b\psi_{xx}+k(\phi_x+\psi+l\omega) = 0 \tag{6.294}$$
$$i\lambda_n\omega-W = 0 \tag{6.295}$$
$$i\lambda_n\rho_1 W+kl(\phi_x+\psi+l\omega)-\gamma_3' W_{xx}-k_0(\omega_x-l\phi)_x = 0. \tag{6.296}$$

Temos então que,

$$\begin{aligned}
i\lambda_n\phi &= \Phi,\\
i\lambda_n\psi &= \Psi,\\
i\lambda_n\omega &= W.
\end{aligned}$$

Substituindo as igualdades acima em (6.292), (6.294) e (6.296), obtemos

$$-\lambda_n^2\rho_1\phi-k(\phi_x+\psi+l\omega)_x-lk_0(\omega_x-l\phi) = 0 \tag{6.297}$$
$$-\lambda_n^2\rho_2\psi-b\psi_{xx}+k(\phi_x+\psi+l\omega) = 0 \tag{6.298}$$
$$-\lambda_n^2\rho_1\omega+lk(\phi_x+\psi+l\omega)-k_0(\omega_x-l\phi)_x-\gamma_3' i\lambda_n\omega_{xx} = 0. \tag{6.299}$$

Seja $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}$.
Consideremos

$$\begin{aligned}
\phi &= A\sin(\beta_n x)\\
\psi &= B\cos(\beta_n x)\\
\omega &= C\cos(\beta_n x),
\end{aligned}$$

então o sistema (6.297) – (6.299) pode ser reescrito por

$$A_n(-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0) + B_n(k\beta_n) + C_n(l\beta_n[k+k_0]) = 0 \tag{6.300}$$
$$A_n(k\beta_n) + B_n(-\lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2) + C_n(lk) = 0 \tag{6.301}$$
$$A_n(l\beta_n[k+k_0]) + B_n(lk) + C_n(-\lambda_n^2\rho_1 + l^2k + k_0\beta_n^2 + i\lambda_n\beta_n^2\gamma_3') = 0. \tag{6.302}$$

Tomando $C = 0$, obtemos de (6.302) que

$$A = -B\left(\frac{k}{\beta_n(k+k_0)}\right).$$

Substituindo a expressão acima em (6.300) e (6.301), obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned}
B\left(-\frac{k}{\beta_n(k+k_0)}[-\lambda_n^2\rho_1 + k\beta_n^2 + l^2k_0] + k\beta_n\right) &= 0\\
B\left(-\frac{k^2}{(k+k_0)} - \lambda_n^2\rho_2 + k + b\beta_n^2\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, para $B \neq 0$, devemos ter

$$\begin{aligned}
\lambda_n^2 &= -\frac{k_0}{\rho_1}\beta_n^2 + \frac{l^2k_0}{\rho_1}\\
\lambda_n^2 &= \frac{k}{\rho_2} + \frac{b}{\rho_2}\beta_n^2 - \frac{k^2}{\rho_2(k+k_0)},
\end{aligned}$$

o que ocorre se, e somente se,

$$\frac{L}{\pi}\sqrt{\left(\frac{l^2}{\rho_1} - \frac{k}{\rho_2(k+k_0)}\right)\frac{k_0\rho_1\rho_2}{b\rho_1 + k_0\rho_2}} \in \mathbb{N}.$$

Portanto, tomando $B \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{Bk}{\beta_n(k+k_0)}\sin(\beta_n x),\\
\omega &= 0,\\
\psi &= B\cos(\beta_n x),\\
\Phi &= i\lambda_n\phi,\\
\Psi &= i\lambda_n\psi,\\
W &= 0.
\end{aligned}$$

formam solução não nula de

$$i\lambda_n U - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U = 0,$$

e logo, $i\lambda \in \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, o que implica $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$.
Portanto, se

$$\frac{L}{\pi}\sqrt{\left(\frac{l^2}{rho_1} - \frac{k}{\rho_2(k+k_0)}\right)\frac{k_0\rho_1\rho_2}{b\rho_1 + k_0\rho_2}} \in \mathbb{N}.$$

então, a solução do problema viscoelástico

$$\begin{aligned}
\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\phi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + lw + \psi) &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\phi)_x + kl(\phi_x + lw + \psi) - \gamma_3' w_{xxt} &= 0 \text{ em } (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned}$$

com $\gamma_3' > 0$, não possui decaimento polinomial. $\square$

Otimalidade

Teorema 6.3.7 *A taxa* $\tau = \dfrac{1}{2}$*, encontrada no teorema 6.3.5, é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema.*

Demonstração: Se a taxa de decaimento polinomial $\tau = \dfrac{1}{2}$, encontrada no teorema 6.3.5, puder ser melhorada sobre $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_2)$, segue do teorema 1.3.4, que existe $\epsilon >$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\epsilon}}\left\|(i\lambda I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1}\right\| \leq C_\epsilon,\ \forall|\lambda| \geq 1.$$

Porém, provamos no teorema 6.3.1 que as funções $U_n = (\phi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \omega_n, W_n)^t \in \mathcal{D}\widetilde{\mathcal{A}}_2$, dadas por

$$\begin{aligned}
\phi_n &= A_n \sin(\beta_n x), \\
\Phi_n &= i\lambda_n \phi, \\
\psi_n &= B_n \cos(\beta_n x), \\
\Psi_n &= i\lambda_n \psi, \\
\omega_n &= C_n \cos(\beta_n x), \\
W_n &= i\lambda_n \omega,
\end{aligned}$$

formam, para determinados valores de λ_n, A_n, B_n e C_n, uma sequência de soluções da equação

$$i\lambda_n - \widetilde{\mathcal{A}}_2 U_n = F_n,$$

em que $F_n = (0, \rho_1^{-1} \sin(\beta_n x), 0, 0, 0, 0)^t$ e $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$.
Para o caso em que $\rho_1 b - \rho_2 k \neq 0$, escolhemos λ_n conveniente tal que

$$\lambda_n^2 \approx \frac{k}{\rho_1}\beta_n^2.$$

Já para o caso $\rho_1 b - \rho_2 k = 0$, a escolha de λ_n foi feita de tal forma que

$$\lambda_n^2 \approx \frac{\rho_1 b + \rho_2 k}{2\rho_2\rho_1}\beta_n^2.$$

Em qualquer caso, resolvendo o sistema para A_n, B_n e C_n, obtemos que

$$A_n \approx -i\tilde{C}\beta_n, \qquad \tilde{C} > 0.$$

Portanto, neste caso, temos que

$$\begin{aligned}
\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\geq \rho_1 \|\Phi_n\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_1 \|i\lambda_n A_n \sin(\beta_n x)\|^2 \\
&\approx \hat{C}\lambda_n^4, \qquad \hat{C} > 0.
\end{aligned}$$

Logo, para qualquer $\epsilon > 0$, temos que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{4-2\epsilon}} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq K\lambda_n^{2\epsilon}, \qquad K > 0.$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito, obtemos

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\epsilon}} \|(i\lambda_n I - \widetilde{\mathcal{A}}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Portanto, a taxa $\tau = \dfrac{1}{2}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial do sistema.

$\square$

Conclusão

No trabalho apresentado, analizamos o efeito dissipativo produzido por mecanismo viscoelástico de Kelvin-Voight nos modelos para vigas de Timoshenko e de Bresse.
Mostramos que a energia associada aos sistemas de Timoshenko e Bresse decai exponencialmente somente no caso em que o mecanismo viscoelástico age efetivamente em todas as leis constitutivas dos modelos. Quando o amortecimento de Kelvin-Voight não age efetivamente em todas as leis constitutivas, mostramos que o sistema correspondente não possui decaimento exponencial, independentemente dos coeficientes. Este resultado possui um caráter excepcional, visto que não há na literatura resultado semelhante para os modelos de vigas de Timoshenko e de Bresse, investigados com outros mecanismos de dissipação, diferentes de Kelvin- Voight.
Apesar do efeito dissipativo da viscoelasticidade parcial presente no sistema de vigas de Timoshenko não ser forte o suficiente para estabilizar o sistema de forma exponencial, a dissipação é capaz de estabilizar polinomialmente o sistema. Verificamos o mesmo resultado para o modelo de Bresse com viscoelasticidade agindo em apenas duas leis constitutivas do modelo. No caso em que uma única dissipação viscoelástica age no modelo de Bresse, encontramos decaimento polinomial se os coeficientes do sistema satisfazem certas condições.
A estimativa para a estabilidade polinomial encontrada em todos os casos em que há esse tipo de decaimento foi

$$\|e^{\mathcal{A}_j t}U\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}\|U\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \qquad \forall \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

em que $e^{\mathcal{A}t}$ é o semigrupo associado aos sistemas, sobre o espaço de Hilbert H.
Além disso, mostramos que $t^{-\frac{1}{2}}$ é a taxa ótima de decaimento polinomial, em todos os casos, tanto para sistema de Timoshenko quanto de Bresse.

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York, 1975.

[2] Almeida Júnior, D. S., Boussouira, F. A., Muñoz Rivera, J. E., **Stability to weak dissipative Bresse system**, J. Math. Anal. Appl. 374, 481 - 498, 2011.

[3] Alves, M. O., Fatori, L. H., Jorge Silva, M. A., Monteiro, R. N., **Stability and optimality of decay rate for a weakly dissipative Bresse system**, Math. Meth. Appl. Sci., doi: 10.1002/mma.3115, 2014.

[4] Ammar Khodja, F., Benabdallah, A., Muñoz Rivera, J. E., e Racke R., **Energy decay for Timoshenko systems of memory type**, J. Diferential Equations, 194, 82–115, 2003.

[5] Brezis, H., **Analise Functionnelle, Théorie et Applications**, Masson, Paris, 1983.

[6] Borichev, A., Tomilov, Y., **Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups**, Math. Ann., 347, 455-478, 2010.

[7] Fatori, L. H., Garay, M. Z., Muñoz Rivera, J. E., **Differentiability, analiticy and optimal rates of decay for damped wave equations**, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012, N. 48, 1-13, 2012.

[8] Fatori, L. H., Muñoz Rivera, J. E., **Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system**, IMA Journal of Applied Mathematics 75, 881 - 904, 2010.

[9] Fernández Sare, H. D., Muñoz Rivera, J. E., **Exponential decay of Timoshenko systems with indefinite memory dissipation**, Advances in Differential Equations, V. 13, N. 7-8, p. 733 – 752, 2009.

[10] Fernández Sare, H. D., Muñoz Rivera, J. E., **Stability from Timoshenko systems with past history**, J. Mathematical Analysis and Applications, 339, 482–502, 2008.

[11] Jorge Silva, M. A. , Ma, T. F., Muñoz Rivera, J. E., **MindlinTimoshenko systems with KelvinVoigt: analyticity and optimal decay rates**, J. Math. Anal. Appl. 417, 164-179, 2014.

[12] Liu, Z., Rao, B., **Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system**, Z. angew. Math. Phys. 60, 54 - 69, 2009.

[13] Liu, Z., Zheng, S., **Semigroups Associated with Dissipative Systems**, 398 Research Notes in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, 1999.

[14] Meyers, M., Serrin, J., **H=M**, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, Vol. 51, pp 1055–1056, 1964.

[15] Muñoz Rivera, J. E., **Estabilização de Semigrupos e Aplicações**, Série de Métodos Matemáticos, Laboratório Nacional de Computação Científica e Universidade Federal do Rio de Janeiro , Rio de Janeiro, 2008.

[16] Muñoz Rivera, J. E., **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**, Série Textos Avançados, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, 1999.

[17] Muñoz Rivera, J. E., Racke, R., **Global stability for damped Timoshenko systems**, Discrete and Continuous Dynamical Systems, USA, v. 9, n.6, p. 1625–1639, 2003.

[18] Pazy, A., **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**, Applied Mathematical Sciences 44, Springer, 1983.

[19] Prüss, J., **On the spectum of C_0-semigroups**, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 284(2), 847–857, 1984.

[20] Raposo, C. A., **The transmission problem for Timoshenkos system of memory type**, International Journal of Modern Mathematics, USA, 3(3), 271–293, 2008.

[21] Soufyane, A., **Stabilisation de la poutre de Timoshenko**, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I 328, 731–734 1999.