UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

SUBESPAÇOS INVARIANTES
E
TRANSFORMAÇÕES DE CLASSE $\mathcal{C}$

Aleksandro de Mello

Rio de Janeiro, 2014.

SUBESPAÇOS INVARIANTES E TRANSFORMAÇÕES DE CLASSE $\mathcal{C}$

ALEKSANDRO DE MELLO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Carlos S. Kubrusly.

Rio de Janeiro,
30 de junho de 2014

M527s

Mello, Aleksandro de.

Subespaços Invariantes e Transformações de Classe $\mathcal{C}$/ Aleksandro de Mello. - - Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2014.

x, 78 f.

Orientador: Carlos S. Kubrusly.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

Referências Bibliográficas: f. 73-78.

1. Subespaços Invariantes/Invariant Subspace. 2. Transformações de Classe $\mathcal{C}$. 3. Teoria de Operadores/Operator Theory. 4. Espaços de Hilbert/Hilbert Spaces. 5. Problema do Subespaço Invariante/Invariant Subspace Problem. I. Kubrusly, Carlos S., orient. II. Título.

ALEKSANDRO DE MELLO

SUBESPAÇOS INVARIANTES E TRANSFORMAÇÕES DE CLASSE $\mathcal{C}$

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 30/06/2014

Banca Examinadora

Prof. Nílson da Costa Bernardes Júnior - UFRJ
(*Presidente/Co-orientador*)

Prof. Carlos S. Kubrusly - PUC (*Orientador*)

Profa. Antônio Roberto da Silva - UFRJ

Prof. Dinamérico P. Pombo - UFF

Prof. Paulo César M. Vieira - LNCC

Prof. Gladson O. Antunes - UNIRIO

Rio de Janeiro,
30 de junho de 2014

Aos meus exemplos de vida - meus queridos pais: Hilda Maria de Mello e Prudêncio Frederico de Mello.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela graça da vida e pelo brilhante apoio espiritual durante essa jornada.

Ao meu orientador, professor Carlos S. Kubrusly, por todas as suas sugestões, pela paciência, compreensão, incentivo e apoio durante todo esse trabalho.

Aos meus queridos pais, Dêncio e Maria, por toda dedicação, amor e carinho incondicionais.

A minha querida irmã, Cristiane, grande amiga e conselheira, por todo apoio e motivação.

A minha noiva, Anyelle, fiel companheira, por todo amor, carinho, apoio, paciência, incentivo, compreensão e pelos momentos de alegria que me levantaram nas horas mais difíceis.

À minha querida família Mattos, especialmente Osmar e Isabel, pelo carinho, apoio e incentivo em todos os momentos.

Aos professores Nílson da Costa Bernardes Júnior e Paulo César M. Vieira, por todas as sugestões.

Enfim, agradeço a todos, amigos e colegas que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

Sumário

RESUMO

Um dos principais problemas em aberto na Teoria de Operadores em espaços de Hilbert é o *Problema do Subespaço Invariante*, que questiona o seguinte: *"Todo operador atuando sobre um espaço de Hilbert complexo, separável de dimensão infinita, possui um subespaço invariante não-trivial?"* Muitos matemáticos trabalharam nesse problema ao longo de décadas e encontraram respostas parciais afirmativas para várias classes de operadores. O objetivo desse trabalho é apresentar uma nova classe cujos operadores também admitem subespaços invariantes não-triviais. Tais operadores estão associados a uma nova classe de transformações, que denominamos transformações de classe $\mathcal{C}$. Com esta nova classe, mostramos nesse trabalho que é possível obter respostas parciais afirmativas para cinco perguntas em aberto na teoria de operadores (que são perguntas particulares do Problema do Subespaço Invariante), além de respostas parciais interessantes envolvendo apenas essa nova classe.

ABSTRACT

One of the main open problems in the theory of operators in Hilbert spaces is the *Invariant Subspace Problem*, which asks the following: *"Every operator acting on a Hilbert space complex, separable, with infinite dimensional, has a nontrivial invariant subspace?"* Many mathematicians have worked on this problem for decades and found partial affirmative answers to several classes of operators. The aim of this paper is to present a new class whose operators also admit nontrivial invariant subspaces. Such operators are associated with a new class of transformations, which we call *transformations of class* $\mathcal{C}$. With this new class, we show in this work it is possible to obtain partial affirmative answers to five questions in the theory of operators (which are particular questions of the Invariant Subspace Problem), plus interesting partial answers involving only this new class.

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi motivado pelos resultados obtidos, até o presente momento, na teoria de operadores com relação à existência de subespaços invariantes não-triviais para classes de operadores atuando em espaços de Hilbert complexos, separáveis e de dimensão infinita. Várias respostas parciais afirmativas foram encontradas ao longo desses anos para classes particulares de operadores (como, por exemplo, para os operadores compactos, os operadores normais e as contrações de classe C_{11}). No entanto, a pergunta geral em espaços de Hilbert, conhecida como *Problema do Subespaço Invariante*, ainda permanece em aberta, a qual questiona o seguinte: *"Todo operador atuando em um espaço de Hilbert complexo, separável e de dimensão infinita possui algum subespaço invariante não-trivial?"*

O objetivo principal dessa tese é apresentar alguns resultados que fornecerão condições suficientes para garantirmos a existência de subespaços invariantes não-triviais para classes de operadores atuando em espaços de Hilbert. Tais condições foram motivadas, principalmente, pelos resultados contidos em [KUB1, Capítulo 4], no qual foi verificado que, sob certas condições, a densidade e a dimensão dos subespaços lineares de um espaço de Hilbert nos fornecem respostas afirmativas para casos particulares do *Problema do Subespaço Invariante*.

Desse modo, dividimos esse trabalho em quatro capítulos. O primeiro capítulo contém conceitos gerais e resultados básicos da teoria de operadores em espaços de Hilbert, que serão necessários no decorrer do texto. No segundo capítulo, expomos um pouco da história das perguntas que serão analisadas no decorrer do texto. Como todas as perguntas são casos particulares do Problema do Subespaço Invariante, dividimos esse capítulo em duas seções. Na primeira seção, apresentamos um pouco da história e alguns dos resultados no contexto geral dos problemas da teoria de operadores. Já na segunda seção, expomos um pouco da história dos problemas que serão trabalhados ao longo dessa tese, juntamente com algumas das respostas parciais obtidas ao longo dessas últimas décadas. No terceiro capítulo, apresentamos os principais conceitos e afirmações que motivaram os questionamentos que originaram esse trabalho. No quarto capítulo, que é o principal dessa tese, apresentamos uma classe de transformações que, juntamente com os resultados citados nos capítulos anteriores, nos fornece resultados que garantem a existência de subespaços invariantes não-triviais para algumas classes de operadores. Para tal objetivo, dividimos esse capítulo em quatro seções.

Na primeira seção, mostramos exemplos de casos particulares que respondem alguns dos questionamentos apresentados no Capítulo 3. Já na segunda seção, consideramos o conceito de transformações de classe $\mathcal{C}$, juntamente com algumas das suas propriedades e aplicações. Na terceira seção, mostramos como essa classe fornece respostas parciais e afirmativas para cinco perguntas que estão em aberto na teoria de operadores em espaços de Hilbert. E na quarta e última seção, finalizamos nosso trabalho com alguns resultados adicionais relevantes para o contexto da teoria de operadores.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Nesse capítulo, apresentaremos alguns conceitos básicos e alguns resultados conhecidos sobre existência de subespaços invariantes para operadores atuando em espaços de Hilbert que serão utilizados no texto. Em todo o texto, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ denotarão espaços de Hilbert complexos, separáveis e de dimensão infinita, a menos de especificação contrária. Iniciaremos nossa apresentação com alguns conceitos que serão necessários ao longo do trabalho. Tais definições são baseadas em [KUB1].

Definição 1.1 *Um* ***subespaço linear*** $\mathcal{M}$ *em* $\mathcal{H}$ *é um subconjunto não-vazio de* $\mathcal{H}$ *que satisfaz as seguintes propriedades com relação às operações de adição vetorial e multiplicação por escalar:*

(i) *Para todos* $x, y \in \mathcal{M}$, *tem-se* $x + y \in \mathcal{M}$;

(ii) *Para todo* $x \in \mathcal{M}$ *e todo* $\alpha \in \mathbb{C}$, *tem-se* $\alpha . x \in \mathcal{M}$.

Definição 1.2 *Um* ***subespaço*** *de* $\mathcal{H}$ *é um subespaço linear que é fechado na topologia da norma.*

Definição 1.3 *Seja* $\mathcal{M}$ *um subconjunto de* $\mathcal{H}$. *O* ***span*** $\mathcal{M}$ *é o subespaço linear formado por todas as combinações lineares finitas de elementos de* $\mathcal{M}$.

Definição 1.4 *Considere uma transformação linear e limitada (isto é, linear e contínua)* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$. *Como* $\mathcal{K}$ *é completo, o conjunto dessas transformações é um espaço de Banach e será denotado por* $B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$. *Quando* $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, *dizemos que* T *é um* ***operador sobre*** $\mathcal{H}$ *e denotaremos* $B[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ *apenas por* $B[\mathcal{H}]$.

Na observação abaixo, apresentaremos uma notação que será adotada para todo espaço de Hilbert durante esse trabalho.

Observação 1.5 *Em todo contexto, o produto interno em um espaço de Hilbert será denotado por* $\langle \, . \, , \, . \, \rangle$.

Outro conceito importante que será necessário, principalmente no Capítulo 4, é o conceito de adjunto, como veremos abaixo.

Definição 1.6 *Seja* $T \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$*. O* ***adjunto*** T^* *de* T *é a aplicação*

$$T^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$$

tal que para todo $x \in \mathcal{H}$ *e todo* $y \in \mathcal{K}$*, vale*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \, .$$

Observação 1.7 *Pode-se mostrar que* T^* *existe e é único para todo* T*. Além disso,* $T^* \in B[\mathcal{K}, \mathcal{H}]$*, ou seja,* T^* *é uma transformação linear e limitada,* $T^{**} = T$ *e* $\|T^*\| = \|T\|$ *(ver, por exemplo, [KRE, p. 196]).*

Até agora, apresentamos conceitos básicos da teoria de operadores em espaços de Hilbert que serão utilizados ao longo desse trabalho. Os próximos conceitos são, de fato, os de maior importância para o decorrer do texto.

Definição 1.8 *Um subespaço linear* $\mathcal{M}$ *de* $\mathcal{H}$ *é* ***invariante*** *para o operador* $T \in B[\mathcal{H}]$*, também chamado de um* ***subespaço linear T-invariante****, se* $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$*. Dizemos que* $\mathcal{M}$ *é* ***não-trivial*** *se* $\mathcal{M} \notin \{\{0\}, \mathcal{H}\}$ *.*

Observação 1.9 *Se* $\mathcal{M}$ *é um subconjunto de* $\mathcal{H}$*, então o conjunto dos pontos aderentes à* $\mathcal{M}$ *será denotado por* $\mathcal{M}^-$ *e é chamado de* ***fecho de*** $\mathcal{M}$***.***

Observação 1.10 *Segue da continuidade do operador* $T \in B[\mathcal{H}]$ *que se* $\mathcal{M}$ *é um* ***subespaço linear*** T***-invariante****, então* $\mathcal{M}^-$ *é um* ***subespaço*** T***-invariante*** *(ver, por exemplo, [KUB5, p. 2 e 7]).*

Outra definição tão importante quanto a de subespaço invariante é a noção de subespaço redutor, que apresentamos abaixo.

Definição 1.11 *Seja $\mathcal{M}$ um subespaço de $\mathcal{H}$. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um **subespaço redutor** para um operador $T \in B[\mathcal{H}]$ se $\mathcal{M}$ e o seu complemento ortogonal $\mathcal{M}^{\perp} = \{y \in \mathcal{H};\ \langle x, y\rangle = 0,\ \forall x \in \mathcal{M}\}$ (que também é um subespaço de $\mathcal{H}$) são T-invariantes. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{M}$ **reduz** T ou que $\mathcal{M}$ é um subespaço T**-redutor**.*

É relevante destacar que existem operadores que, mesmo quando possuem subespaços invariantes não-triviais, podem não possuir subespaços redutores não-triviais (ver, por exemplo, [KUB1, Observação 2.8]). Quando um operador possui um subespaço redutor não-trivial, ele recebe um nome especial, o qual definimos abaixo.

Definição 1.12 *Seja $T \in B[\mathcal{H}]$. Dizemos que T é um **operador redutível** se existe um subespaço T-redutor não-trivial $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$.*

A próxima definição nos fornece dois subconjuntos importantes em espaços de Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ que estão associados a cada transformação $T \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$.

Definição 1.13 *Seja $T \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$. O **núcleo** e a **imagem** de T são, respectivamente, os conjuntos*

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{H};\ Tx = 0\} \ \subseteq\ \mathcal{H}$$

$$e$$

$$\mathcal{R}(T) = \{Tx;\ x \in \mathcal{H}\} \ \subseteq\ \mathcal{K}.$$

Observação 1.14 *Para todo $T \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, temos que $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço de $\mathcal{H}$ e que $\mathcal{R}(T)$ é um subespaço linear de $\mathcal{K}$ que não é necessariamente fechado (ver, por exemplo, [KUB1, p. 2]).*

No decorrer do texto, precisaremos de alguns resultados sobre subespaços lineares $\mathcal{M}$ e seus complementos ortogonais $\mathcal{M}^{\perp}$ e $\mathcal{M}^{\perp\perp}$. Para apresentá-los, serão necessárias as seguintes proposições (cujas demonstrações podem ser encontradas em [KUB7]).

Proposição 1.15 *([KUB7, Proposição 5.12]) O complemento ortogonal $\mathcal{M}^{\perp}$ de todo subconjunto $\mathcal{M}$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um subespaço de $\mathcal{H}$. Além disso,*

$$\mathcal{M}^{\perp} = (\mathcal{M}^{-})^{\perp} = (\mathcal{M}^{\perp})^{-} = (span\, \mathcal{M})^{\perp}$$

e se $\mathcal{M}^{-} = \mathcal{H}$, então $\mathcal{M}^{\perp} = \{0\}$.

Proposição 1.16 *([KUB7, Teorema 5.13]) Seja x um vetor arbitrário de $\mathcal{H}$.*

(a) *Se $\mathcal{M}$ é um subconjunto fechado, convexo (isto é, para todos $y, z \in \mathcal{M}$, vale que $ty + (1-t)z \in \mathcal{M}$, para todo $t \in [0,1]$) e não-vazio de $\mathcal{H}$, então existe um único vetor $u_x \in \mathcal{M}$ tal que*

$$\|x - u_x\| = d(x, \mathcal{M}) := inf\, \{\|x - y\|\, ;\, y \in \mathcal{M}\}.$$

(b) *Se $\mathcal{M}$ é um subespaço de $\mathcal{H}$, então o único vetor $u_x \in \mathcal{M}$ para o qual $\|x - u_x\| = d(x, \mathcal{M})$ é o único vetor em $\mathcal{M}$ tal que a diferença $x - u_x$ está no ortogonal de $\mathcal{M}$, ou seja, tal que*

$$x - u_x \in \mathcal{M}^{\perp}.$$

Com as duas proposições acima, pode-se mostrar o seguinte resultado que será utilizado ao longo desse trabalho (para detalhes da demonstração, ver [KUB7]).

Proposição 1.17 *([KUB7, Proposição 5.15]) Se $\mathcal{M}$ um subespaço linear de $\mathcal{H}$, então $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}^{-}$ e*

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^{-} = \mathcal{H}.$$

Em particular, se $\mathcal{M}$ é um subespaço, então $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$.

Agora, com a proposição acima, juntamente com os conceitos vistos até o momento, pode-se mostrar os seguintes resultados que serão necessários nos próximos capítulos (que podem ser encontrados também em [KUB5, p. 35] ou [HAL1, p. 40]).

Proposição 1.18 *([KUB5, p.35 e 39]) Sejam $\mathcal{M}$ um subespaço de $\mathcal{H}$ e $T \in B[\mathcal{H}]$. Então $\mathcal{M}$ é T-invariante se, e somente se, $\mathcal{M}^{\perp}$ é T^*-invariante.*

Como consequência, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.19 *([KUB5, p.35 e 37]) Sejam $\mathcal{M}$ um subespaço de $\mathcal{H}$ e $T \in B[\mathcal{H}]$. Então $\mathcal{M}$ reduz T se, e somente se, $\mathcal{M}$ é invariante para T e para T^*.*

Note que as proposições acima garantem que um operador atuando sobre um espaço de Hilbert possui subespaço invariante não-trivial se, e só se, o seu adjunto possui subespaço invariante não-trivial, e que um operador tem subespaço redutor não-trivial se, e só se, o seu adjunto tem subespaço redutor não-trivial. Desse modo, garantir a existência de um subespaço invariante (respectivamente, redutor) para um operador T é equivalente a garantir a existência de um subespaço invariante (respectivamente, redutor) para o adjunto T^* de T.

Para os próximos capítulos, precisaremos da notação de ortogonalidade dada na observação abaixo.

Observação 1.20 *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ subconjuntos de $\mathcal{H}$. A notação $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ significa que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são ortogonais, o que é definido como*

$$\langle x, y \rangle = 0, \ \ \forall\, x \in \mathcal{M} \ \ e \ \forall\, y \in \mathcal{N}.$$

Outros conceitos necessários para o decorrer desse trabalho são os seguintes.

Definição 1.21 *Seja $\mathcal{M}$ um subespaço de $\mathcal{H}$. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um **subespaço hiperinvariante** para um operador $T \in B[\mathcal{H}]$ se $\mathcal{M}$ é um subespaço invariante para todo operador que comuta com T, ou seja, $\mathcal{M}$ é invariante para todo operador $L \in B[\mathcal{H}]$ tal que $TL = LT$. Nesse caso, escreveremos: $\mathcal{M}$ é T-**hiperinvariante.***

Definição 1.22 *Uma transformação $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ é **quaseafim** (também chamada **quaseinvertível**) se X é injetiva e tem imagem densa em $\mathcal{K}$, ou seja, se o núcleo de X é $\mathcal{N}(X) = \{0\}$ e a imagem de X é tal que $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$. A transformação $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ é dita **invertível** se $\mathcal{N}(X) = \{0\}$ e $\mathcal{R}(X) = \mathcal{K}$ (equivalentemente, se existe uma transformação Y, chamada de **inversa** de X, tal que $XY = I_{\mathcal{K}}$, $YX = I_{\mathcal{H}}$ e $Y \in B[\mathcal{K}, \mathcal{H}]$, onde $I_{\mathcal{H}}$ e $I_{\mathcal{K}}$ são os operadores identidade em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$, respectivamente - ver, por exemplo, [KUB1, p.3]).*

Definição 1.23 *Seja $T \in B[\mathcal{H}]$. O **espectro** de T, denotado por $\sigma(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $T - \lambda.I$ não é invertível, isto é,*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\, \mathcal{N}(T - \lambda.I) \neq \{0\} \ \ ou \ \mathcal{R}(T - \lambda.I) \neq \mathcal{H}\}.$$

*O **raio espectral** de T é dado por*

$$r(T) = max\{|\lambda|\,;\ \lambda \in \sigma(T)\}\,,$$

e também pode ser escrito como

$$r(T) = lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}\,,$$

onde esta igualdade é a fórmula de Gelfand-Beurling para o raio espectral (ver, por exemplo, [KUB1, p. 6]).

Pode-se mostrar que o espectro de todo operador é um conjunto não-vazio e compacto em $\mathbb{C}$ (ver, por exemplo, [BEA, Capítulo II, Proposição 1.4]). Além disso, veremos no próximo capítulo que o espectro de um operador também pode garantir a existência de subespaços invariantes não-triviais, caso satisfaça algumas condições.

Em todas as classes de operadores (atuando em espaços de Hilbert) conhecidas, existem operadores que possuem subespaços invariantes não-triviais, por exemplo, a classe dos operadores normais, como veremos abaixo. Mas para apresentarmos os próximos resultados, precisaremos da seguinte definição.

Definição 1.24 *Um **operador** $T \in B[\mathcal{H}]$ é:*

1. ***auto-adjunto** quando $T = T^*$.*
2. ***normal** quando T comuta com o seu operador adjunto $T^* \in B[\mathcal{H}]$, ou seja, quando*

   $$TT^* = T^*T.$$

3. ***escalar** quando T é um múltiplo do operador identidade $I \in B[\mathcal{H}]$, ou seja, quando*

   $$T = \lambda I,\ \ \textit{para algum}\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

   *Caso contrário, dizemos que T é **não-escalar.***

4. ***unitário** quando T é invertível e $T^* = T^{-1}$, ou seja, quando*

   $$TT^* = T^*T = I.$$

5. ***não-negativo** (notação $T \geq O$) quando é auto-adjunto e*

   $$0 \leq \langle Tx, x\rangle\,,\ \ \textit{para todo}\ x \in \mathcal{H}.$$

6. *uma* ***isometria*** *quando*

$$T^*T = I.$$

7. ***hiponormal*** *se*

$$T^*T - TT^* \geq O.$$

8. ***compacto*** *se*

$$\{Tx \in \mathcal{H};\ x \in \mathcal{H}\ \text{ e }\ \|x\| \leq 1\}^-$$

   é um conjunto compacto em $\mathcal{H}$.

9. ***polinomialmente compacto*** *se existe um polinômio não-nulo* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que* $p(T)$ *é compacto.*

10. ***polinomialmente limitado*** *se existe uma constante* k *tal que*

$$\|p(T)\| \leq k.\|p\|$$

   para todo polinômio $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, onde* $\|p\| = sup\{|p(z)|;\ |z| \leq 1\}$.

11. ***quasenilpotente*** *se o raio espectral* $r(T) = 0$.

12. ***idempotente*** *se* $T^2 = T$.

Desse modo, pode-se mostrar o seguinte resultado (que, de fato, é consequência do Teorema Espectral - ver, por exemplo, [KUB1, p. 21]) que será utilizado no decorrer desse trabalho.

Proposição 1.25 *Se* $dim\mathcal{H} > 1$*, então todo operador normal não-escalar tem um subespaço hiperinvariante não-trivial que reduz todo operador que comuta com ele.*

Em outras palavras, a proposição acima garante que todo operador normal T não-escalar possui um subespaço redutor não-trivial que também é redutor para todo operador que comuta com T. Claramente, se T é escalar, então T é normal e, além disso, possui subespaço redutor não-trivial. Logo,

Todo operador normal possui subespaço redutor não-trivial, ou seja, é redutível.

Esse resultado será importante no Capítulo 4.

Outro conceito importante que será necessário no decorrer do texto é o seguinte.

Definição 1.26 *Dizemos que dois operadores $T \in B[\mathcal{H}]$ e $L \in B[\mathcal{K}]$ são* ***quasesimilares*** *se existem duas transformações quaseafins $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ e $Y \in B[\mathcal{K}, \mathcal{H}]$ tais que*

$$XT = LX \ \ e \ \ TY = YL.$$

Com os conceitos vistos até o momento, pode-se mostrar o seguinte resultado (que pode ser encontrado em [RAD1, Teorema 6.19], [KUB1, Lema 4.7 e Corolário 4.8], [BER, Lema 2.1] ou [HOO, Teorema 2.1]).

Teorema 1.27 *Se dois operadores são quasesimilares e um deles possui um subespaço hiperinvariante não-trivial, então o outro possui um subespaço hiperinvariante não-trivial.*

A ideia da demonstração será apresentada no Teorema 4.29. Nesse caminho, é interessante destacar uma das perguntas que permanece em aberto com relação a esses conceitos, a qual pode ser encontrada em [RAD1, p.194] e em [KUB1, p.68]:

"Quasesimilaridade preserva subespaços invariantes não-triviais?"

Em outras palavras,

"Se dois operadores são quasesimilares e um deles possui um subespaço invariante não-trivial, então o outro operador possui um subespaço invariante não-trivial?"

Apresentaremos agora mais alguns resultados conhecidos sobre subespaços invariantes, que serão necessários neste trabalho, que referem-se às **contrações**. Para apresentá-los, precisamos dos seguintes conceitos.

Definição 1.28 *Dizemos que uma sequência $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $B[\mathcal{H}]$* ***converge fortemente*** *para um operador $T \in B[\mathcal{H}]$ se*

$$\|(T_n - T)x\| \to 0 \quad quando \ n \to \infty, \quad para \ todo \ x \in \mathcal{H}.$$

Nesse caso, denotamos $T_n \xrightarrow{s} T$.

Definição 1.29 *Um operador $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma* ***contração*** *se $\|T\| \leq 1$, onde*

$$\|T\| = \ sup \{\|Tx\| \, ; \, x \in \mathcal{H} \ \ e \ \ \|x\| = 1\}.$$

Observação 1.30 *Pode-se mostrar (ver por exemplo [KUB1, Capítulo 3]) que a cada contração $T \in B[\mathcal{H}]$, associa-se uma contração não-negativa $A \in B[\mathcal{H}]$ e uma isometria linear $V : \mathcal{R}(A)^- \to \mathcal{R}(A)^-$ tais que*

$$T^{*n}T^n \xrightarrow{s} A$$
$$e$$
$$A^{1/2}T = VA^{1/2}.$$

Além disso, $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{H};\ T^n x \to 0\}$, o qual sempre é um subespaço T-invariante (ver, por exemplo, [KUB1, Proposição 3.1(i)]). Agora, como T é uma contração se, e somente se, T^* é uma contração, então para cada contração T também temos outros dois operadores associados, a saber, uma contração não-negativa $A_* \in B[\mathcal{H}]$ e uma isometria linear $V_* : \mathcal{R}(A_*)^- \to \mathcal{R}(A_*)^-$ tais que

$$T^nT^{*n} \xrightarrow{s} A_*$$
$$e$$
$$A_*^{1/2}T^* = V_*A_*^{1/2}.$$

Observação 1.31 *Com a notação da observação acima, note que*

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^{1/2}),\ \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A^{1/2})$$

e que

$$\mathcal{R}(A)^- = \mathcal{R}(A^{1/2})^- = \mathcal{N}(A^{1/2})^\perp = \mathcal{N}(A)^\perp,$$

pois A é não-negativo (ver, por exemplo, [KUB1, p. 55] ou [KUB7, Proposição 5.86]).

Definição 1.32 *Um operador $T \in B[\mathcal{H}]$ é **fortemente estável** se $\{T^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge fortemente para o operador nulo, ou seja, se*

$$\|T^n x\| \to 0, \quad quando \quad n \to \infty, \ \ \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Em todo nosso trabalho, consideraremos as seguintes classes de contrações $T \in B[\mathcal{H}]$, as clássicas classificações de Nagy-Foias (ver, por exemplo, [SNA, p. 72]):

- $C_{0\cdot}$ representa a classe das contrações fortemente estáveis.
- $C_{\cdot 0}$ representa a classe das contrações T tais que T^* é fortemente estável.

- $C_{1\cdot}$ representa a classe das contrações T tais que $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ não converge para zero, para todo $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$.

- $C_{\cdot 1}$ representa a classe das contrações T tais que $\{T^{*n} x\}_{n=0}^{\infty}$ não converge para zero, para todo $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$.

Observação 1.33 *Todas as combinações são possíveis e portanto, temos as classes:* C_{00}, C_{01}, C_{10} *e* C_{11}*. Além disso, pode-se mostrar (ver, por exemplo, [KUB1, p. 68], ou [KUB4, p. 2]) que se* $T \in B[\mathcal{H}]$ *é uma contração, então:*

$$T \in C_{00} \Longleftrightarrow A = A_* = O,$$

$$T \in C_{01} \Longleftrightarrow A = O \ \text{e} \ \mathcal{N}(A_*) = \{0\},$$

$$T \in C_{10} \Longleftrightarrow \mathcal{N}(A) = \{0\} \ \text{e} \ A_* = O,$$

$$T \in C_{11} \Longleftrightarrow \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_*) = \{0\}.$$

É importante destacar que existem contrações que não pertencem à união $C_{00} \cup C_{01} \cup C_{10} \cup C_{11}$*. Um exemplo trivial seria:*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

em $B[\mathbb{C}^2]$*, que é tal que* $\|T\| = 1$ *(ou seja,* T *é uma contração) e, além disso:*

- $T^* = T$ *e* $T^n = T$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

- $T^{*n}T^n = T = A$, $T^nT^{*n} = T = A_* \;\Rightarrow\; A = A_* = T \neq O \Rightarrow T \notin C_{00} \cup C_{01} \cup C_{10}$.

- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_*) = \mathcal{N}(T) = \mathbb{C} \times \{0\} \neq \{(0,0)\} \;\Rightarrow\; T \notin C_{11}$.

Com essas observações, finalizaremos esse capítulo com mais dois resultados sobre a existência de subespaços invariantes, a saber, a Proposição 1.36 e a Proposição 1.37. Para tal objetivo, vamos utilizar a seguinte proposição (cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [KUB1]).

Proposição 1.34 *([KUB1, Teorema 4.10]) Toda contração de classe* C_{11} *é quasesimilar a um operador unitário.*

Observação 1.35 *Na prova da proposição acima, mostra-se que quando a contração $T \in C_{11}$, então a isometria V associada a T, definida na Observação 1.30, é o operador unitário ao qual T é quasesimilar. Além disso, lembramos que no caso em que $T \in C_{11}$, temos $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^{1/2}) = \{0\}$ (ver Observação 1.31 e Observação 1.33). Essas informações serão relevantes na demonstração da Proposição 1.36 abaixo.*

Agora estamos em condições de apresentar os resultados sobre existência de subespaços invariantes não-triviais para contrações que serão utilizados no decorrer do texto.

Proposição 1.36 *([KUB1, Corolário 4.11]) Se $dim(\mathcal{H}) > 1$, então toda contração T de classe C_{11} tem subespaço invariante não-trivial.*

Demonstração:
Como $T \in C_{11}$, pela Proposição 1.34 e pela Observação 1.35 acima sabemos que T é quase-similar ao operador unitário V associado a T. Vamos analisar dois casos:
1º caso: V não-escalar.
Como operadores normais não-escalares (em particular, operadores unitários não-escalares) possuem um subespaço hiperinvariante não-trivial (ver Proposição 1.25) e como T é quase-similar ao operador unitário V, então segue do Teorema 1.27 que T possui um subespaço hiperinvariante não-trivial.
2º caso: V escalar:
Se V é escalar, digamos $V = \lambda.I$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$ (pois V é unitário), então segue da igualdade

$$A^{1/2}T = VA^{1/2} = \lambda.A^{1/2}$$

que $T = \lambda.I$, pois $\mathcal{N}(A^{1/2}) = \{0\}$ (ver Observação 1.35 acima). Logo, T é um operador escalar unitário e portanto, T possui um subespaço invariante não-trivial (pois estamos assumindo que $dim(\mathcal{H}) > 1$). Portanto, em qualquer caso, T possui subespaço invariante não-trivial.

□

Outro resultado importante para as contrações é o seguinte (que pode ser encontrado também em [KUB10, Corolário 2]).

Proposição 1.37 *([KUB1, Corolário 4.13]) Se uma contração $T \in B[\mathcal{H}]$ não tem subespaço invariante não-trivial, então $T \in C_{00} \cup C_{10} \cup C_{01}$.*

Demonstração:
Seja T uma contração sobre $\mathcal{H}$. Se $\{0\} \neq \mathcal{N}(A) \neq \mathcal{H}$, então $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço T-invariante não-trivial (ver Observação 1.30). Similarmente, se $\{0\} \neq \mathcal{N}(A_*) \neq \mathcal{H}$, então $\mathcal{N}(A_*)$ é um subespaço T^*-invariante não-trivial. Logo, pela Proposição 1.18, $\mathcal{N}(A_*)^\perp$ é um subespaço T-invariante não-trivial.
Portanto, se T não possui subespaço invariante não-trivial, então deve ocorrer:

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_*) = \{0\}$$

ou

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_*) = \mathcal{H}$$

ou

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{H} \;\; e \;\; \mathcal{N}(A_*) = \{0\}$$

ou

$$\mathcal{N}(A) = \{0\} \;\; e \;\; \mathcal{N}(A_*) = \mathcal{H}.$$

Mas se $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_*) = \{0\}$, segue da Observação 1.33 que $T \in C_{11}$ e, nesse caso, a Proposição 1.36 garante que T possui subespaço invariante não-trivial. Logo, se T não possui subespaço invariante não-trival, então deve ocorrer um dos três casos abaixo:

1º caso: "$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_*) = \mathcal{H}$". Nesse caso, temos que $A = A_* = O$. Logo, a Observação 1.33 garante que $T \in C_{00}$.

2º caso: "$\mathcal{N}(A) = \mathcal{H}$ e $\mathcal{N}(A_*) = \{0\}$". Nesse caso, segue que $A = O$ e $\mathcal{N}(A_*) = \{0\}$. Assim, pela Observação 1.33 temos que $T \in C_{01}$.

3º caso: "$\mathcal{N}(A) = \{0\}$ e $\mathcal{N}(A_*) = \mathcal{H}$". Nesse caso, temos que $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ e $A_* = O$. Logo, a Observação 1.33 garante que $T \in C_{10}$.
Portanto, se T é uma contração que não possui subespaço invariante não-trivial, então $T \in C_{00} \cup C_{10} \cup C_{01}$.

□

Nesse momento, baseado nos resultados acima, também é relevante destacarmos uma pergunta clássica que permanece em aberto com relação às contrações (que pode ser encontrada em [KUB1, p. 72]), que é a seguinte:

"Se uma contração $T \in B[\mathcal{H}]$ não tem subespaço invariante não-trivial, então $T \in C_{00}$?"

Equivalentemente,

"Se $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma contração e $T \notin C_{00}$, então T possui subespaço invariante não-trivial?"

Para mais detalhes sobre condições que garantem a existência de subespaços invariantes não-triviais para contrações, sugerimos por exemplo [BER], [CHE, Seção 4], [KER1,2 e 3], [HAL1, p. 249-259], [HAL3, Capítulo 1-3] e [KUB1, Capítulo 3].

Nesse capítulo, apresentamos os conceitos e alguns dos resultados básicos que serão necessários nessa tese, com relação aos problemas que serão trabalhados no decorrer do texto. No próximo capítulo, vamos expor um pouco da história das principais perguntas em aberto existentes, e que analisaremos durante esse trabalho, juntamente com algumas das suas respostas parciais que motivaram o desenvolvimento dessa tese.

Capítulo 2

RESULTADOS ANTERIORES

Nesse capítulo, apresentaremos um pouco da história do *Problema do Subespaço Invariante* e dos problemas que estão em aberto em espaços de Hilbert que serão analisados no decorrer deste trabalho, juntamente com algumas das suas principais respostas parciais. O mais famoso desses problemas refere-se às contrações, como comentamos no final capítulo anterior, a saber,

Pergunta 2.1 *"Se $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma contração e $T \notin C_{00}$, então T possui subespaço invariante não-trivial?"*

Veremos ao longo do texto que essa pergunta está relacionada diretamente com as seguintes perguntas também em aberto da teoria de operadores em espaços de Hilbert (o conceito de tranformada quaseafim, que aparece nas perguntas abaixo, será apresentado com detalhes no próximo capítulo):

Pergunta 2.2 *"Uma transformada quaseafim de um operador redutível possui subespaço invariante não-trivial?"*

Pergunta 2.3 *"Uma transformada quaseafim de um operador normal possui subespaço invariante não-trivial?"*

Pergunta 2.4 *"Uma transformada quaseafim de um operador unitário possui subespaço invariante não-trivial?"*

Pergunta 2.5 *"Quasesimilaridade preserva subespaços invariantes não-triviais?"*

Todas essas perguntas são casos muito particulares de um dos principais problemas que estão em aberto na teoria de operadores, a saber, o *Problema do Subespaço Invariante*. Desse modo, dividimos esse capítulo em duas seções. Na primeira seção, expomos um pouco do contexto histórico geral do Problema do Subespaço Invariante com alguns dos principais resultados obtidos desde 1930, e na segunda seção apresentamos algumas das principais respostas parciais obtidas para as cinco perguntas em aberto que foram listadas acima, as quais serão analisadas com mais detalhes no decorrer do texto.

2.1 Respostas Parciais para o Problema do Subespaço Invariante

O *Problema do Subespaço Invariante* questiona a existência de um subespaço invariante não-trivial para operadores atuando em espaços de Banach complexos, separáveis e de dimensão infinita. A questão da existência de subespaços invariantes não-triviais para operadores atuando sobre o espaço de Hilbert ℓ^2 (das sequências quadrado somáveis, ver por exemplo, [KUB1, p.2]) foi considerada por von Neumann na década de 30 (1930-1940), o qual apresentou uma resposta afirmativa para operadores compactos em espaços de Hilbert, mas esse resultado nunca foi publicado.

Em 1950, Aronszajn descobriu independentemente a mesma prova e, em 1954, ele e Smith generalizaram esse resultado de von Neumann para espaços de Banach, ou seja, provaram que todo operador compacto atuando sobre um espaço de Banach admite um subespaço invariante não-trivial (ver [ARO]). Muitos anos se passaram até se obter uma extensão desse resultado para operadores polinomialmente compactos. A primeira demonstração foi apresentada por Bernstein e Robinson em 1966. Eles provaram que todo operador polinomialmente compacto admite um subespaço invariante não-trivial (ver [ROB]). Nesse mesmo ano, Halmos trabalhou nessa prova e, fazendo pequenas modificações apropriadas, publicou esse mesmo resultado apresentando uma demonstração mais simples (ver [HAL2]).

Mais resultados parciais foram obtidos logo após essa extensão. Por exemplo, combinando dois resultados em [SNA] (Teoremas VI.5.2 e III.6.5) temos que: se $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma contração de classe C_{00} tal que as dimensões de $\mathcal{R}((I-T^*T)^{1/2})^-$ e de $\mathcal{R}((I-TT^*)^{1/2})^-$ são finitas, então T possui subespaço invariante não-trivial. Esses resultados são de 1967 (na edição em francês de [SNA]).

Embora essas respostas particulares sejam importantes, um dos principais resultados gerais conhecidos para operadores que possuem subespaço invariante não-trivial foi obtido por Lomonosov em 1973 (ver [LOM1]). Ele provou que um operador atuando sobre um espaço de Banach possui um subespaço invariante não-trivial se ele comuta com um operador não-escalar que comuta com um operador compacto não-nulo. Esse resultado é conhecido como Teorema de Lomonosov (também chamado de Teorema do Subespaço Invariante de Lomonosov). Para provar esse teorema, Lomonosov utilizou vários resultados importantes da teoria de operadores, a saber, o Teorema de Mazur, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder e o Lema de Lomonosov, para enfim provar o Teorema de Lomonosov. Para detalhes da demonstração desses resultados, ver por exemplo [CON, Seção VI.4], [KUB6], [KUB5, Capítulo 12], [PEA1, Capítulo 7] ou [RAD1, p. 156-158].

Desse modo, tendo em vista a complexidade da argumentação na demonstração de Lomonosov, ainda em 1973, H. M. Hilden simplificou a demonstração desse teorema. Utilizando resultados com noções elementares, a saber, a Alternativa de Fredholm (que afirma que todo elemento do espectro de um operador compacto, exceto o zero, é um autovalor) e a Fórmula de Gelfand-Beurling (apresentada na Definição 1.23). Essa prova simplificada de Hilden para o Teorema de Lomonosov pode ser encontrada em [KUB6] ou [MIC]. Apesar da grande generalidade desse teorema, em 1980 foi mostrado em [RAD3] que existem operadores que não satisfazem as hipóteses do Teorema de Lomonosov.

Logo após, em 1974, Pearcy, Ringrose e Salinas obtiveram novas reformulações para o Problema do Subespaço Invariante em espaços de Hilbert. Uma delas garante que um operador T possui subespaço invariante não-trivial se, e só se, existe um operador compacto K tal que $p(T)K$ é quasenilpotente para todo polinômio p. Tais reformulações podem ser encontradas com detalhes em [PEA2, Teorema 1.1 e Corolário 1.2].

Em 1975 surgiu a primeira extensão do Teorema de Lomonosov. Nesse ano, mostrou-se que se T é um operador atuando sobre um espaço de Banach complexo e existe um operador compacto K tal que a dimensão da imagem de $TK - KT$ é menor ou igual a 1, então o operador T possui um subespaço invariante não-trivial. Esse teorema e sua demonstração podem ser encontradas em [DAU2, Teorema], [PEA3], [PEA4, Teorema A] e [KUB5, p. 134]. Também nesse período, Daughtry prova que existem classes de operadores (que ele denomina "approximately idempotent") atuando em espaços de Banach que admitem subespaço hiperinvariante não-trivial e essa classe contém, em particular, a classe dos operadores idempotentes (ver [DAU1, Teorema 1]).

Ainda em 1975, foi apresentado um dos principais resultados para a teoria de operadores atuando em espaços de Banach. Nesse ano, Enflo construiu um espaço de Banach no qual existe um operador que não possui um subespaço invariante não-trivial (ver [ENF1]). No entanto, o artigo final (com aproximadamente 100 páginas) só foi publicado em 1987 (em [ENF2]). Alguns anos após essa construção de Enflo, mais contra-exemplos foram apresentados por Read. O primeiro foi publicado em 1984 [REA1]. Nesse artigo, Read também construiu um espaço de Banach que possui um operador que não admite subespaço invariante não-trivial.

De 1985 à 1988, Read refinou seus métodos e provou que existem mais classes de espaços de Banach, incluindo o espaço ℓ^1 (ver [REA2]), que possuem operadores que não admitem subespaços invariantes não-triviais. Mais do que isso, Read provou que existem espaços de Banach que possuem operadores com uma propriedade mais forte, a saber, operadores que não possuem subconjunto fechado invariante não-trivial (ver [REA3]). É relevante destacar que todos esses contra-exemplos são em espaços de Banach que não são espaços de Hilbert, e o *Problema do Subespaço Invariante* permanece *sem resposta* para operadores atuando em espaços de Hilbert.

Mesmo com essas respostas negativas para operadores atuando em espaços de Banach obtidas a partir de 1975, em espaços de Hilbert foram encontradas mais respostas afirmativas para algumas classes particulares de operadores (além das respostas afirmativas envolvendo operadores compactos vistas anteriormente). Por exemplo, em 1978, S. Brown provou que todo operador subnormal T (que é um operador que é parte de um operador normal, ou seja, se T é a restrição de um operador normal a algum subespaço invariante) atuando sobre um espaço de Hilbert separável, admite um subespaço invariante não-trivial (ver [BRO1, Corolário 4.8]). Já em 1987, S. Brown provou em [BRO2] que todo operador hiponormal atuando sobre um espaço de Hilbert complexo, separável de dimensão infinita, cujo espectro tem interior não-vazio, possui subespaço invariante não-trivial.

Outro resultado importante utilizando espectro de operadores foi dado por Riesz. Ele provou que se o espectro de um operador atuando sobre um espaço de Banach pode ser decomposto como uma união de dois subconjuntos fechados e disjuntos, então o operador admite subespaço hiperinvariante não-trivial. Tal resultado pode ser encontrado em [BEA, Capítulo II - Teorema 3.1].

Já em 1994, Abramovich, Aliprantis e Burkinshaw desenvolveram novos teoremas de subespaços invariantes não-triviais para operadores positivos em espaços de Banach em [ABR1, Teorema 4.1, 4.2 e 4.4] e no ano seguinte apresentaram em [ABR2] uma caracterização do problema do subespaço invariante para operadores atuando sobre um espaço de Banach complexo. Logo após, em 1996, Simonič obteve um resultado que generalizou essa caracterização de [ABR2] para espaços de Banach reais e complexos. Tal resultado pode ser encontrado em [SIM1, Teorema 3.2] (não descrevemos as caracterizações citadas pois elas fogem do contexto ao qual a tese será trabalhada).

Ainda em 1996, Simonič estendeu para operadores não compactos as técnicas de Lomonosov e provou um resultado para uma classe de operadores (envolvendo operadores auto-adjuntos) atuando sobre um espaço de Hilbert complexo de dimensão infinita (para mais detalhes, ver [SIM2, Proposição 2.2.1 e Corolário 2.2.2]). Nesse mesmo período, Prunaru apresenta mais um resultado no qual o espectro pode garantir a existência de subespaços invariantes não-trivias para adjuntos de operadores atuando sobre um espaço de Banach (ver [PRU1, Teorema 2.1]) e também mostra que todo operador polinomialmente hiponormal T (que significa que $p(T)$ é hiponormal para todo polinômio p) atuando sobre um espaço de Hilbert admite um subespaço invariante não-trivial (ver [PRU2, Corolário 1]).

Em 1997, Read apresentou mais exemplos de operadores atuando em espaços de Banach que não possuem subespaço invariante não-trivial. Na verdade, Read construiu em [REA4] operadores quasenilpotentes atuando no espaço de Banach ℓ^1 que não admitem subespaço invariante não-trivial.

No período de 1997 à 2003 também foram obtidas várias respostas parciais para casos particulares do Problema do Subespaço Invariante como, por exemplo, em [KER4, 5 e 7], [KUB1, Capítulo 4] e [KUB5, Capítulos 1, 4 e 7]. Como a maioria das respostas que envolvem o contexto em que estamos trabalhando são com respeito às cinco perguntas em aberto que listamos no início desse capítulo, optamos por apresentá-las na próxima seção, juntamente com as demais respostas parciais para as Perguntas 2.1 a 2.5.

Em 2004, Ambrozie e Müller provaram que se T, atuando sobre um espaço de Banach, é um operador polinomialmente limitado tal que o seu espectro contém o círculo unitário, então o adjunto de T possui um subespaço invariante não-trivial (ver [MUL, Teorema A], generalizando parte dos resultados já obtidos em espaços de Hilbert por [BRO3]). Em particular, se T é um operador polinomialmente limitado atuando sobre um espaço de Hilbert e é tal que o seu espectro contém o círculo unitário, então T possui um subespaço invariante não-trivial (pela Proposição 1.18). Nesse mesmo período, Atzmon, Godefroy e Kalton apresentaram um resultado que garante a existência de subespaços invariantes não-triviais para operadores atuando sobre um espaço de Banach real, utilizando aplicações exponenciais (ver [ATZ, Teorema 1]).

Outro resultado importante obtido para o *Problema do Subespaço Invariante* é a recente construção (de 2011) de Argyros e Haydon em [ARG, Teorema 7.4]. Nesse artigo, eles construíram um espaço de Banach de dimensão infinita tal que todo operador atuando nesse espaço é a soma de um operador compacto e um múltiplo da identidade. Desse modo, em particular, todo operador nesse espaço possui subespaço invariante não-trivial.

Mais recentemente, Kim e Lee apresentaram alguns resultados que garantem a existência de subespaços invariantes não-triviais para algumas classes de operadores atuando em espaços de Hilbert, como por exemplo, para operadores de classe θ, que são operadores T tais que T^*T e $T+T^*$ comutam. Em todos esses resultados, é necessário que o espectro dos operadores envolvidos satisfaça alguma condição para poder garantir a existência de subespaços invariantes, como o leitor pode conferir em [KIM1, Teorema 2.2], [KIM2, Teorema 2.1] e [KIM3, Teorema 2.5].

Essas são algumas das respostas obtidas desde 1930 com respeito ao Problema do Subespaço Invariante e suas versões para classes particulares de operadores. Para mais detalhes com relação à história e às respostas parciais do Problema do Subespaço Invariante e seus casos particulares, sugerimos por exemplo [BRO1], [HAL3 e 4], [KUB1, 2, 5 e 6], [LOM2 e 3], [NOR] e [RAD1 e 2].

Na próxima seção, vamos centralizar nossa atenção nas respostas parciais obtidas para as cinco perguntas listadas no início desse capítulo.

2.2 Resultados para Contrações em Espaços de Hilbert

Inicialmente, observemos que o Problema do Subespaço Invariante é invariante por multiplicação escalar, pois T e αT possuem os mesmos subespaços invariantes, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ não-nulo. Logo, temos a seguinte equivalência: *todo operador atuando sobre um espaço de Hilbert possui subespaço invariante não-trivial se, e somente se, toda contração atuando sobre um espaço de Hilbert possui um subespaço invariante não-trivial.* Desse modo, podemos analisar o Problema do Subespaço Invariante para operadores que são contrações, caso seja conveniente.

Notemos também que uma resposta afirmativa para a Pergunta 2.2 implica em respostas afirmativas para as Perguntas 2.3 e 2.4, pois todo operador normal é redutível, ou seja, possui subespaço redutor não-trivial (ver Proposição 1.25) e todo operador unitário é normal. O objetivo dessa seção é expor alguns dos principais resultados obtidos nas últimas décadas para casos particulares das Perguntas 2.1 a 2.5, principalmente os casos envolvendo contrações. Embora muitos desses resultados não sejam utilizados no decorrer do texto, eles contribuíram diretamente para a busca de uma nova direção de pesquisa e questionamentos que foram de fundamental importância para o desenvolvimento desse trabalho.

Como vimos na seção anterior, alguns resultados envolvendo contrações já existiam desde 1967 em [SNA] e tais resultados envolviam-se diretamente com a finitude da dimensão das imagens dos operadores $(I - TT^*)^{1/2}$ e $(I - T^*T)^{1/2}$, onde T é uma contração. Desse modo, nota-se que a existência ou não de subespaços invariantes para determinadas classes de operadores pode depender, de alguma maneira, da dimensão de alguns subespaços lineares.

Em 1973 já existia um resultado importante relacionado à Pergunta 2.5 em [RAD1, Teorema 6.19], o qual garante que se dois operadores são quasesimilares e um deles possui subespaço hiperinvariante não-trivial, então o outro operador também possui um subespaço hiperinvariante não-trivial. Essa é uma das respostas mais gerais envolvendo quasesimilaridade e subespaços invariantes para operadores atuando em espaços de Hilbert.

No período de 1975 à 1987, como apresentado na seção anterior, foi o auge das construções de contra-exemplos para o Problema do Subespaço Invariante em espaços de Banach gerais. No entanto, nesse período também foram obtidos resultados com respeito às perguntas listadas, como por exemplo, com relação aos subespaços invariantes para contrações T de classe C_{11} que possuem a propriedade (P) (que significa que: todo operador injetivo X que comuta com T é quaseafim - para mais detalhes, ver [KER1]). Para mais resultados envolvendo contrações nesse período, sugerimos [WU1 e 2].

Em 1987, Kérchy trabalhou com contrações de classe $C_{1\cdot}$ completamente não-unitárias (isto é, contrações tais que não existe subespaço $\mathcal{M}$ que é T-invariante não-trivial e tal que $T|_{\mathcal{M}}$ é unitário). Nessa classe de contrações, ele constrói uma extensão de T tal que, se essa extensão possui uma determinada condição, então T possui subespaço invariante não-trivial e no caso de T ser de classe C_{11}, então T possui muitos subespaços hiperinvariantes não-triviais. Para detalhes, ver [KER2, Teorema 1 e 2] ou [KER3, Seções 6 e 7].

Logo após, em 1988, Brown, Chevreau e Pearcy mostraram em [BRO3] que toda contração cujo espectro contém o círculo unitário possui um subespaço invariante não-trivial. Esse resultado pode ser encontrado também em [BER, Teorema 1.9] e em [KUB3, Lema 2]. Assim, temos mais um caso em que o espectro pode garantir se uma contração possui um subespaço invariante não-trivial. Em 1990, Takahashi caracteriza as contrações que não possuem subespaços invariantes (não-zero) disjuntos, no seguinte sentido: dois subespaços $\mathcal{M} \neq \{0\}$ e $\mathcal{M}' \neq \{0\}$ são ditos subespaços disjuntos se $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \{0\}$ (para mais detalhes, ver [TAK, Teorema]).

Já em 1997, Kubrusly apresentou algumas respostas parciais para as perguntas apresentadas no início desse capítulo. Por exemplo, em [KUB1, Observação 1.5] foi mostrado que se trocarmos "subespaço invariante" por "subespaço redutor" na Pergunta 2.5, ou seja, se questionarmos: "*Quasesimilaridade preserva subespaços redutores não-triviais?*", a resposta é negativa, ou seja, quasesimilaridade não preserva subespaços redutores não-triviais.

Ainda em [KUB1, Corolário 4.4], foi mostrado que se $T \in B[\mathcal{H}]$ está entrelaçado densamente à $L \in B[\mathcal{K}]$ (tal conceito será apresentado no próximo capítulo) e L possui um subespaço redutor não-trivial de dimensão finita, então T possui subespaço invariante não-trivial. Essa é uma resposta afirmativa para um caso particular da Pergunta 2.2 e este foi um dos resultados principais que contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento dessa tese. Esse mesmo resultado também nos fornece uma resposta afirmativa e imediata para um caso particular da Pergunta 2.5, a saber, temos que se $T \in B[\mathcal{H}]$ e $L \in B[\mathcal{K}]$ são quasesimilares e se L possui um subespaço redutor não-trivial de dimensão finita, então T possui subespaço invariante não-trivial.

Também em [KUB1, Corolário 5.9] foi obtido um resultado referente a um caso particular da Pergunta 2.1, no qual mostrou-se que se $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma contração e T não possui subespaço invariante não-trivial, então ou T é um contração de classe C_{00}, ou uma contração de classe C_{01} tal que $\|A_* x\| < \|x\|$, para todo $x \in \mathcal{H}$ não-nulo, ou uma contração de classe C_{10} tal que $\|Ax\| < \|x\|$, para todo $x \in \mathcal{H}$ não-nulo (onde A e A_* são os operadores definidos na Observação 1.30). Nesse mesmo período, Kubrusly também mostrou que a Pergunta 2.1 é equivalente às seguintes perguntas:

- *Pergunta 2.1': Uma contração, que é uma transformada quaseafim de um operador unitário, tem subespaço invariante não-trivial?*

- *Pergunta 2.1": Uma contração que está entrelaçada a uma contração de classe $C_{1\cdot}$ possui subespaço invariante não-trivial?*

Tais equivalências podem ser encontradas em [KUB1, p.72-74] e em [KUB2], e ambas as perguntas acima também permanecem em aberto. Além disso, pode-se notar facilmente que, com essas equivalências, para o caso particular das contrações temos que as Perguntas 2.1' e 2.4 também são equivalentes. Desse modo, uma resposta afirmativa para a Pergunta 2.4 (que é um caso particular das Perguntas 2.2 e 2.3) nos fornece uma resposta também afirmativa para a Pergunta 2.1.

Logo após, em 1999, provou-se em [KUB3, Teorema 1] que se T é uma contração de classe $C_{1\cdot}$, então o espectro de T contém o espectro da isometria V (definida na Observação 1.30). Além disso, se o espectro da extensão unitária de T é o círculo unitário, então T possui um subespaço invariante não-trivial. Essa é uma resposta afirmativa para um caso particular da Pergunta 2.1 e nos mostra mais um exemplo de um resultado no qual o espectro pode nos fornecer condições para obter subespaços invariantes não-triviais.

Em 2001, Kubrusly e Levan provaram um resultado sobre contrações hiponormais que não possuem subespaço invariante não-trivial (ver [KUB9, Teorema 2]). Desse teorema, segue como consequência imediata que se uma contração hiponormal T não é uma contração própria (isto é, não vale $\|Tx\| < \|x\|$ para todo $x \neq 0$), então T possui subespaço invariante não-trivial.

Já em 2003, Kérchy também obteve uma resposta afirmativa para um caso particular da Pergunta 2.1 utilizando operadores quasenilpotentes. No artigo [KER7, Teorema 1] ele mostrou que se $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma contração de classe $C_{1\cdot}$ que comuta com um operador quasenilpotente não-nulo, então T possui subespaço invariante não-trivial.

De 2003 a 2005, foram apresentadas outras respostas afirmativas com relação às contrações. Nesse período, Duggal, Jeon, Kubrusly e Levan mostraram que algumas classes particulares de contrações possuem subespaços invariantes não-triviais (para detalhes dessas classes, ver [DUG2, Teorema 2.2], [DUG3, Teorema 1] e [DUG4, Teorema 1]). Em todos esses casos, assim como no resultado de contrações hiponormais de 2001 comentado acima, as contrações têm uma característica comum, que é o fato de não serem contrações próprias.

Entre 2012 e 2013, Duggal, Jeon, Kim, Gao e Li apresentaram mais resultados contendo algumas propriedades de classes particulares de contrações que possuem subespaço invariante não-trivial (ver [DUG1, Teorema 2.2] e [GAO, Teorema 2.2]). Assim como nos casos apresentados em [DUG2, 3 e 4] (de 2003 a 2005), a condição dessas classes específicas de contrações possuirem um subespaço invariante não-trivial também está ligada ao fato da contração ser ou não uma contração própria. Desse modo, nota-se que as contrações próprias possuem algumas particularidades que devem ser analisadas com maior cuidado.

Mais recentemente, Kubrusly apresentou mais alguns caminhos para responder a Pergunta 2.1. No artigo [KUB8], ele mostra que se algumas perguntas envolvendo classes particulares de contrações (por exemplo, contrações biquasetriangulares e contrações que estão no fecho do conjunto dos operadores nilpotentes N - que são operadores N tais que alguma potência positiva N^n é o operador nulo O) tem resposta afirmativa, então a Pergunta 2.1 também possui uma resposta afirmativa (para mais detalhes dessas classes, ver [KUB8]).

Essas são algumas das respostas parciais obtidas ao longo dessas últimas décadas com relação às perguntas em aberto citadas no início desse capítulo, que utilizam os conceitos que serão trabalhados no decorrer dessa tese. Para mais detalhes sobre a história desses problemas e alguns resultados parciais, sugerimos [HAL3], [KER6], [KUB6], [YAD] e [RAD2], juntamente com as suas referências.

Vimos ao longo desse capítulo que vários caminhos foram utilizados para obter respostas parciais para as perguntas apresentadas, como por exemplo, utilizando operadores quase-nilpotentes, espectro, os operadores A e A_* associados a uma contração T, a finitude da dimensão da imagem dos operadores $(I-TT^*)^{1/2}$ e $(I-T^*T)^{1/2}$ associados a uma contração T, e operadores compactos. O que veremos nos próximos capítulos é outra direção para a busca de respostas para aquelas perguntas. Esse outro caminho, juntamente com alguns resultados já existentes, nos conduzirá para respostas parciais afirmativas para as cinco perguntas citadas acima (Perguntas 2.1 a 2.5). Apesar da grande abrangência que essa outra direção nos fornece, esse caminho envolve conceitos elementares e resultados relacionados com a dimensão dos subespaços e com a densidade de subespaços lineares em espaços de Hilbert complexos, separáveis e de dimensão infinita, como veremos explicitamente no Capítulo 4.

Capítulo 3

SUBESPAÇOS INVARIANTES

Diferentemente do primeiro capítulo, que continha resultados gerais em teoria de operadores que serão utilizados ao longo do texto, nesse capítulo apresentaremos os principais conceitos e afirmações que foram as motivações para os resultados que serão desenvolvidos no Capítulo 4. Como veremos abaixo, a maioria dos resultados para existência de subespaços invariantes, de algumas classes de operadores, está diretamente ligada à dimensão de subespaços específicos. Todas as definições e resultados deste capítulo são baseados em [KUB1].

Definição 3.1 *Uma transformação $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$* ***entrelaça*** *o operador $T \in B[\mathcal{H}]$ ao operador $L \in B[\mathcal{K}]$ se*

$$XT = LX,$$

e nesse caso dizemos que T está ***entrelaçado*** *ao operador L. Se $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$, dizemos que X* ***entrelaça densamente*** *o operador T ao operador L e que T está* ***densamente entrelaçado*** *ao operador L.*

Definição 3.2 *Um operador $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma* ***transformada quaseafim*** *de um operador $L \in B[\mathcal{K}]$ se existe uma transformação quaseafim (isto é, uma transformação quaseinvertível) $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ que entrelaça T à L, ou seja, tal que*

$$XT = LX.$$

Definição 3.3 *Dois operadores $T \in B[\mathcal{H}]$ e $L \in B[\mathcal{K}]$ são ditos* ***similares*** *se existe uma transformação invertível $W \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tal que*

$$WT = LW.$$

Com esses conceitos, estamos em condições de apresentar os principais resultados que motivaram esse trabalho (que podem ser encontrados em [KUB1]). Iniciaremos apresentando um lema que é uma das principais ferramentas que precisaremos no próximo capítulo.

Lema 3.4 *([KUB1, Lema 4.1]) Sejam $T \in B[\mathcal{H}]$, $L \in B[\mathcal{K}]$ e $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tais que*

$$XT = LX.$$

Suponha que $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ é um subespaço L-invariante não-trivial. Se

$$\mathcal{R}(X)^{-} = \mathcal{K} \;\; e \;\; \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\},$$

então $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço T-invariante não-trivial.

Demonstração:
Como $X : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ é linear e contínua, então $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço de $\mathcal{H}$. Além disso, como $X[X^{-1}(\mathcal{M})] \subseteq \mathcal{M}$, temos que $LXX^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq L(\mathcal{M})$. Logo, $LXX^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ (pois $L(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$). Então, como $XT = LX$, segue que

$$XTX^{-1}(\mathcal{M}) = LXX^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$$

e portanto,

$$X^{-1}XTX^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq X^{-1}(\mathcal{M}). \qquad (I)$$

Agora, como $\mathcal{N} \subseteq X^{-1}X(\mathcal{N})$ para todo subconjunto $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$, então

$$TX^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq X^{-1}XTX^{-1}(\mathcal{M}). \qquad (II)$$

De (I) e (II), temos que

$$TX^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq X^{-1}(\mathcal{M}),$$

ou seja, $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço T-invariante. Resta agora mostrar que $X^{-1}(\mathcal{M})$ é não-trivial.

Primeiramente, mostraremos que $X^{-1}(\mathcal{M}) \neq \{0\}$. De fato, seja $y \in \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}$. Então existe $u \in \mathcal{H}$ tal que $y = Xu$. Se $X^{-1}(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{H}; Xx \in \mathcal{M}\} = \{0\}$, então $u = 0$ e portanto $y = 0$ (pois X é linear). Logo,

$$X^{-1}(\mathcal{M}) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} = \{0\}.$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\} \Rightarrow X^{-1}(\mathcal{M}) \neq \{0\}.$$

Agora mostraremos que $X^{-1}(\mathcal{M}) \neq \mathcal{H}$. De fato, se $X^{-1}(\mathcal{M}) = \mathcal{H}$, então $\mathcal{R}(X) = X(\mathcal{H}) = X[X^{-1}(\mathcal{M})]$. No entanto, como $X[X^{-1}(\mathcal{M})] \subseteq \mathcal{M}$, teremos que

$$\mathcal{R}(X)^{-} \subseteq \mathcal{M}^{-} = \mathcal{M} \neq \mathcal{K}.$$

Portanto,

$$X^{-1}(\mathcal{M}) = \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{R}(X)^{-} \neq \mathcal{K}.$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{R}(X)^{-} = \mathcal{K} \Rightarrow X^{-1}(\mathcal{M}) \neq \mathcal{H}.$$

Portanto, $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço T-invariante não-trivial, o que conclui a demonstração do lema.

$\square$

Segue como uma consequência imediata do lema acima o seguinte resultado.

Corolário 3.5 *([KUB1, Corolário 4.2]) Se $T \in B[\mathcal{H}]$ e $L \in B[\mathcal{K}]$ são similares e um deles possui um subespaço invariante não-trivial, então o outro possui um subespaço invariante não-trivial.*

Observação 3.6 *É importante notarmos que a hipótese $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ no enunciado do Lema 3.4 não é redundante. Existe exemplo em que $\mathcal{M}$ é um subespaço de dimensão 1 e $\mathcal{M}$ não satisfaz a condição acima (ver, por exemplo, [KUB5, p.5]).*

De fato, seja $\mathcal{R}$ um subespaço linear arbitrário de $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{R}^{-} = \mathcal{K}$, onde $\mathcal{K}$ é um espaço normado arbitrário de dimensão maior do que 1. Se $dim(\mathcal{R}) < \infty$, então $\mathcal{R}^{-} = \mathcal{K}$ implica que $\mathcal{R} = \mathcal{K}$ (pois subespaços lineares de dimensão finita são fechados). Logo, $\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \mathcal{K} \cap \mathcal{M} = \mathcal{M} \neq \{0\}$ sempre que $\mathcal{M}$ é um subconjunto de $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{M} \neq \{0\}$. No entanto, se $dim(\mathcal{R}) = \infty$ e $\mathcal{R}^{-} = \mathcal{K}$, então, claro, pode ocorrer que $\mathcal{R} \neq \mathcal{K}$. Nesse caso, existe $y \in \mathcal{K}$ tal que $y \notin \mathcal{R}$ (e portanto, $y \neq 0$). Tomando $\mathcal{M} = span\,\{y\}$, temos que $\mathcal{M}$ é um subespaço não-trivial de $\mathcal{K}$ com dimensão 1. Agora, como $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}$ é um subespaço linear (pois interseção de subespaços lineares é um subespaço linear), segue que: se $\mathcal{R} \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$, então $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ (pois $dim(\mathcal{M}) = 1$) o que implicaria que $y \in \mathcal{R}$, contradizendo o fato de $y \notin \mathcal{R}$. Portanto, $\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\}$.

Outro resultado importante de [KUB1] que utilizaremos no decorrer do trabalho é a seguinte proposição (que pode ser encontrada também em [WEI, p.34]).

Proposição 3.7 *([KUB1, Proposição 4.3]) Seja $\mathcal{M}$ um subespaço de dimensão finita do espaço de Hilbert $\mathcal{K}$ e seja $\mathcal{R}$ um subespaço linear de $\mathcal{K}$. Se $\mathcal{R}^- = \mathcal{K}$, então*

$$(\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^\perp)^- = \mathcal{M}^\perp.$$

E, portanto, se $dim(\mathcal{K}) = \infty$, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$.

Demonstração:

Se $\mathcal{K}$ é um espaço de Hilbert de dimensão finita, o resultado vale trivialmente pois, nesse caso, $\mathcal{R} = \mathcal{K}$ e portanto

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^\perp = \mathcal{K} \cap \mathcal{M}^\perp = \mathcal{M}^\perp.$$

O resultado também vale trivialmente se $dim(\mathcal{M}) = 0$, pois nesse caso temos que $\mathcal{M} = \{0\}$, o que implica que $\mathcal{M}^\perp = \mathcal{K}$ e temos que $(\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^\perp)^- = (\mathcal{R} \cap \mathcal{K})^- = \mathcal{R}^- = \mathcal{K} = \mathcal{M}^\perp$.

Vamos assumir agora que $\mathcal{K}$ é um espaço de Hilbert de dimensão infinita e que $dim(\mathcal{M}) \geq 1$. Seja $m = dim(\mathcal{M})$. A prova é feita por indução sobre m.
Primeiramente, vamos mostrar que o resultado vale para $m = 1$.
Se $dim(\mathcal{M}) = 1$, então existe $e \in \mathcal{K}$, $e \neq 0$, tal que $\mathcal{M} = span\{e\}$. Como $\mathcal{R}$ é denso em $\mathcal{K}$, então existe $x \in \mathcal{R}$ tal que

$$\langle e, x \rangle \neq 0,$$

(de fato, se $\langle e, x \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$, então $e \in \mathcal{R}^\perp = \{0\}$, pois $\mathcal{R}^- = \mathcal{K}$).
Tomando $z \in \mathcal{M}^\perp$ arbitrário, como $\mathcal{R}^- = \mathcal{K}$ e $z \in \mathcal{K}$, então existe uma sequência $(z_j)_{j \geq 1}$ em $\mathcal{R}$ tal que

$$z_j \to z \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Para cada $j \geq 1$, defina

$$y_j = z_j - \frac{\langle z_j, e \rangle}{\langle x, e \rangle} x.$$

Como $x, z_j \in \mathcal{R}$, para todo $j \geq 1$, e como $\mathcal{R}$ é um subespaço linear, então

$$y_j \in \mathcal{R}, \quad \text{para todo} \quad j \geq 1.$$

Além disso,

$$y_j \in \mathcal{M}^\perp, \quad \text{para todo} \quad j \geq 1,$$

pois

$$\langle e, y_j \rangle = \langle e, z_j \rangle - \left\langle e, \frac{\langle z_j, e \rangle}{\langle x, e \rangle} x \right\rangle = \langle e, z_j \rangle - \frac{\langle e, z_j \rangle}{\langle e, x \rangle} \langle e, x \rangle = 0,$$

e

$$y_j \to z,$$

pois $z_j \to z$ e $\langle e, z \rangle = 0$.
Logo, para cada $z \in \mathcal{M}^\perp$, existe uma sequência $(y_j)_{j \geq 1}$ em $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^\perp$ tal que $y_j \to z$. Portanto,

$\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^{\perp}$ é denso em $\mathcal{M}^{\perp}$, o que prova que o resultado vale para $m = 1$.
Suponhamos agora que o resultado vale para algum $m \geq 1$, ou seja, suponha que

$$(\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^{\perp})^{-} = \mathcal{M}^{\perp} \qquad (*)$$

para qualquer subespaço $\mathcal{M}$ de $\mathcal{K}$ tal que $dim(\mathcal{M}) = m$.
Seja $\mathcal{N}$ um subespaço de $\mathcal{K}$ arbitrário tal que $dim(\mathcal{N}) = m + 1$. Tome uma base ortonormal para $\mathcal{N}$, digamos $\{e_i;\ 0 \leq i \leq m\}$, ou seja,

$$\mathcal{N} = span\,\{e_i;\ 0 \leq i \leq m\}\,.$$

Para cada $k \in \{0, 1, ..., m\}$, defina

$$\mathcal{M}_k = span\,\{e_i;\ 0 \leq i \leq m \ \text{ e } \ i \neq k\}\,.$$

Desse modo, para cada $k \in \{0, 1, ..., m\}$, temos que $dim(\mathcal{M}_k) = m$ e de $(*)$ segue que

$$(\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_k^{\perp})^{-} = \mathcal{M}_k^{\perp}.$$

Note que, para cada $k \in \{0, 1, ..., m\}$, existe $x_k \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_k^{\perp}$ tal que

$$\langle e_k, x_k \rangle \neq 0,$$

(de fato, se $\langle e_k, x \rangle = 0$, para todo $x \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_k^{\perp}$, então $e_k \in (\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_k^{\perp})^{\perp} = ((\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_k^{\perp})^{-})^{\perp} = \mathcal{M}_k^{\perp\perp} = \mathcal{M}_k^{-} = \mathcal{M}_k$, o que contradiz o fato de $e_k \perp \mathcal{M}_k$).
Tome $z \in \mathcal{N}^{\perp}$ arbitrário. Como $\mathcal{R}^{-} = \mathcal{K}$ e $z \in \mathcal{K}$, então existe uma sequência $(z_j)_{j \geq 1}$ em $\mathcal{R}$ tal que

$$z_j \to z \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Para cada $j \geq 1$, defina

$$y_j = z_j - \sum_{k=0}^{m} \frac{\langle z_j, e_k \rangle}{\langle x_k, e_k \rangle} x_k.$$

Como $x_k, z_j \in \mathcal{R}$, para todo $0 \leq k \leq m$ e todo $j \geq 1$, e como $\mathcal{R}$ é um subespaço linear, então

$$y_j \in \mathcal{R}, \quad \text{para todo} \quad j \geq 1.$$

Além disso,

$$y_j \in \mathcal{M}^{\perp}, \quad \text{para todo} \quad j \geq 1.$$

De fato, como $x_k \in \mathcal{M}_k^{\perp} \subseteq (span\,\{e_n\})^{\perp}$, para todo $n \neq k$, onde $n \in \{0, 1, ..., m\}$, então

$$\langle e_i, x_k \rangle = 0 \ \text{ para todo } \ i \neq k, \text{ onde } i \in \{0, 1, ..., m\}\,.$$

Portanto, para todo $j \geq 1$ e para todo $i \in \{0, 1, ..., m\}$,

$$\langle e_i, y_j \rangle = \langle e_i, z_j \rangle - \left\langle e_i, \sum_{k=0}^{m} \frac{\langle z_j, e_k \rangle}{\langle x_k, e_k \rangle} x_k \right\rangle = \langle e_i, z_j \rangle - \sum_{k=0}^{m} \frac{\langle e_k, z_j \rangle}{\langle e_k, x_k \rangle} \langle e_i, x_k \rangle = 0,$$

ou seja, $y_j \in \mathcal{N}^\perp$, para todo $j \geq 1$. Além disso, temos que

$$y_j \to z \quad \text{quando} \quad j \to \infty$$

pois quando $j \to \infty$, temos $\langle e_k, z_j\rangle \to \langle e_k, z\rangle = 0$ (pois $z \in \mathcal{N}^\perp$).
Logo, para cada $z \in \mathcal{N}^\perp$ arbitrário, existe uma sequência $(y_j)_{j\geq 1}$ em $\mathcal{R} \cap \mathcal{N}^\perp$ convergindo para z. Portanto, $\mathcal{R} \cap \mathcal{N}^\perp$ é denso em $\mathcal{N}^\perp$, ou seja,

$$(\mathcal{R} \cap \mathcal{N}^\perp)^- = \mathcal{N}^\perp.$$

Conclusão: o resultado vale para $m + 1$ sempre que o resultado vale para m, o que completa a prova por indução.

$\square$

Desse modo, combinando o Lema 3.4 com a Proposição 3.7, temos a seguinte consequência.

Corolário 3.8 *([KUB1, Corolário 4.4]) Sejam $T \in B[\mathcal{H}]$, $L \in B[\mathcal{K}]$ e $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tais que*

$$XT = LX.$$

Se $\mathcal{M}$ é um subespaço L-redutor não-trivial de dimensão finita e $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$, então $X^{-1}(\mathcal{M}^\perp)$ é um subespaço T-invariante não-trivial.

Demonstração: Como $\mathcal{M}$ é um subespaço de dimensão finita e $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$, então a Proposição 3.7 garante que

$$(\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}^\perp)^- = \mathcal{M}^\perp.$$

Sendo $\mathcal{M}$ um subespaço não-trivial, então $\mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$ e, em particular,

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}^\perp \neq \{0\}. \quad (*)$$

Agora, como $\mathcal{M}$ é um subespaço L-redutor não-trivial, então

$$\mathcal{M}^\perp \text{ é } L\text{-invariante não-trivial.} \quad (**)$$

Pelo Lema 3.4, de $(*)$ e $(**)$ segue que $X^{-1}(\mathcal{M}^\perp)$ é um subespaço T-invariante não-trivial, como queríamos demonstrar.

$\square$

Em outras palavras, o Corolário 3.8 nos garante que:

*Se T está densamente entrelaçado à L e se L tem subespaço redutor não-trivial de **dimensão finita**, então T possui subespaço invariante não-trivial.*

Note que essa afirmação é uma resposta afirmativa para um caso particular da Pergunta 2.2 (apresentada no capítulo anterior) quando L possui um subespaço redutor não-trivial de dimensão finita, pois se T é uma transformada quaseafim de L, então claramente T está densamente entrelaçado à L. Desse modo, temos como caso particular do Corolário 3.8 o seguinte resultado.

Corolário 3.9 *([KUB1, Corolário 4.5]) Se um operador $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma transformada quaseafim de um operador $L \in B[\mathcal{K}]$ e L tem um subespaço redutor de dimensão finita não-trivial, então T possui um subespaço invariante não-trivial.*

Isso nos motiva a fazer os seguintes questionamentos (que são cruciais nesse trabalho):

Pergunta 3.10 *Será que os Corolários 3.8 e 3.9 continuam valendo sem a hipótese da finitude da dimensão?*

Isto é,

Pergunta 3.11 *Será que se $T \in B[\mathcal{H}]$ está densamente entrelaçado à $L \in B[\mathcal{K}]$ e se L tem um subespaço redutor (de dimensão arbitrária), então T possui subespaço invariante não-trivial?*

É importante destacarmos que o Corolário 3.8 segue diretamente do Lema 3.4 e da Proposição 3.7, sendo que a densidade da interseção $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}^{\perp}$ em $\mathcal{M}^{\perp}$ dada pela Proposição 3.7 só foi utilizada para garantir que $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\}$, para podermos aplicar o Lema 3.4. Desse modo, poderíamos questionar:

Pergunta 3.12 *A condição $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ dada no Lema 3.4 é necessária para a conclusão do lema?*

Resposta Parcial: Se $dim(\mathcal{M}) = 1$, a resposta é: sim, é necessária. De fato, vimos na Observação 3.6 que a condição $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ pode não ser satisfeita se $dim(\mathcal{M}) = 1$.

Assim, poderíamos questionar:

Pergunta 3.13 *Se $dim(\mathcal{M}) = n > 1$, onde $n \in \mathbb{N}$, então a condição $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ dada no Lema 3.4 é necessária para a conclusão do lema?*

Estas são as questões centrais desta tese. Veremos no próximo capítulo que a condição $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ dada no Lema 3.4 é necessária também no caso em que $dim(\mathcal{M}) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, veremos que a interseção $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ pode não ser satisfeita mesmo se $\mathcal{M}$ possuir dimensão finita maior do que 1 arbitrária, a saber, no Exemplo 4.2 - esse exemplo estende a resposta parcial acima para subespaços de dimensão finita (maior do que 1). Além disso, vamos obter condições sob as quais poderemos estender os Corolários 3.8 e 3.9 para o caso geral (incluindo o caso de dimensão infinita) e portanto, responderemos afirmativamente às perguntas que estavam em aberto (que foram colocadas acima).

Capítulo 4

TRANSFORMAÇÕES DE CLASSE $\mathcal{C}$ E RESULTADOS PRINCIPAIS

Este capítulo contém os resultados originais desta tese e, portanto, é o capítulo principal desse trabalho. Aqui respondemos as perguntas levantadas no final do Capítulo 3, estendendo os resultados dos Corolários 3.8 e 3.9 para subespaços de dimensão arbitrária para uma determinada classe de operadores e desenvolvemos algumas consequências importantes.

Para tais objetivos, dividimos esse capítulo em quatro seções. Na primeira, apresentamos alguns exemplos particulares que respondem a Pergunta 3.13. Na segunda seção, definimos uma classe de transformações, juntamente com algumas das suas propriedades. Na terceira seção, mostramos como essa classe pode fornecer respostas parciais importantes para diversas perguntas em aberto na teoria de operadores. E na quarta e última seção, finalizamos nosso trabalho com alguns resultados adicionais importantes.

4.1 Exemplos Particulares

Nessa seção, veremos que a hipótese $dim(\mathcal{M}) = n > 1$ é relevante na Pergunta 3.13, bem como a hipótese sobre o fechamento de $\mathcal{M}$. Como vimos na Observação 3.6, no caso em que $dim(\mathcal{M}) = 1$, pode ocorrer que: $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} = \{0\}$.

Mostraremos no Exemplo 4.2 abaixo que

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} = \{0\}$$

pode ocorrer para um caso *mais geral*, a saber, quando $\mathcal{M}$ tem dimensão finita *qualquer*. Para provarmos o exemplo citado, lembraremos alguns resultados importantes (que podem ser encontrados, por exemplo, em [KUB7, p.92-94, 193]).

Observação 4.1 *A coleção de todas as classes de equivalência das funções escalares* $x : [0,1] \to \mathbb{C}$ *tais que*

$$\int_0^1 |x(t)|^2 \, dt < \infty,$$

(onde a integral é a integral de Lebesgue) é um espaço de Hilbert complexo, separável e de dimensão infinita que é denotado por $L^2[0,1]$, *onde o produto interno e a norma são, respectivamente, para* $x, y \in L^2[0,1]$,

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t).\bar{y}(t)dt \quad e \quad \|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

As classes de equivalência são definidas da seguinte maneira (ver, por exemplo, [KUB7, Exemplo 3.E, p.94-95]): $x, y \in L^2[0,1]$ *estão na mesma classe de equivalência se*

$$\int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 \, dt = 0.$$

Além disso, o conjunto $C[0,1] = \{y : [0,1] \to \mathbb{C};\ y \text{ é contínua}\}$ *(que é definido em termos das classes de equivalência) é um subespaço linear não fechado de* $L^2[0,1]$, *que é denso em* $L^2[0,1]$ *(ver, por exemplo, [KUB7, p. 193]).*

Agora estamos em condições de apresentar nosso primeiro exemplo original. Este exemplo ***estende*** a afirmação em [KUB5, p.5] (desenvolvida na Observação 3.6) *de dimensão 1 para dimensão* n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.2 *Existe um espaço de Hilbert separável, complexo e de dimensão infinita* $\mathcal{K}$ *e existe um subespaço linear* $\mathcal{R}$ *próprio e denso em* $\mathcal{K}$ *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$, *existe um subespaço* $\mathcal{M}_n$ *de dimensão* n *satisfazendo*

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_n = \{0\}.$$

De fato, consideremos $\mathcal{K} = L^2[0,1]$ e $\mathcal{R} = C[0,1]$. Sabemos que $\mathcal{R}$ é um subespaço linear (não fechado, logo, próprio) de $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{R}^- = \mathcal{K}$ (ver Observação 4.1).
Dado $n \in \mathbb{N}$, vamos construir subespaços $\mathcal{M}_n$ de dimensão n tais que $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_n = \{0\}$.

1º caso: $n = 1$.
Seja $y_1 \in \mathcal{K}$ dado por

$$y_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \\ 0, & \text{se } t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Note que y_1 é descontínua em $t = 1/2$ e é fácil verificar que y_1 não pertence a classe de uma função contínua (basta notar que os limites à esquerda e à direita no ponto de descontinuidade existem mas são diferentes). Logo, $y_1 \notin \mathcal{R}$.

Afirmação 1: Se $\mathcal{M}_1 = span\{y_1\} = \{\alpha.y_1;\ \alpha \in \mathbb{C}\}$, temos que $\mathcal{M}_1$ é um subespaço de dimensão 1 tal que $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_1 = \{0\}$.

Prova da Afirmação 1: De fato, todo elemento $y \in \mathcal{M}_1$ é da forma $y = \alpha y_1$, para algum $\alpha \in \mathbb{C}$. Se $\alpha \neq 0$, então y é uma função descontínua da forma $y = \alpha y_1$ onde os limites à esquerda e à direita no ponto de descontinuidade existem mas são diferentes. Portanto, y não pertence a classe de uma função contínua. Logo,

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow y = \alpha y_1 \notin \mathcal{R},$$

donde segue que

$$y = \alpha y_1 \in \mathcal{R} \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Logo, $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_1 = \{0\}$, o que conclui a Afirmação 1. $\square$

2º caso: $n = 2$.
Tome $y_1, y_2 \in \mathcal{K}$ tais que:

$$y_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \\ 0, & \text{se } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

e

$$y_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [0, 1/4] \\ \\ 0, & \text{se } t \in (1/4, 1]. \end{cases}$$

Claramente as funções acima são linearmente independentes e (pela mesma razão do 1º caso) elas não pertencem a classe de uma função contínua (portanto, não pertencem a $\mathcal{R}$). Assim, tomando

$$\mathcal{M}_2 = span\{y_1, y_2\} = \{\alpha.y_1 + \beta.y_2;\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

temos que $\mathcal{M}_2$ é um subespaço de dimensão 2.

Afirmação 2: $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$.

Prova da Afirmação 2: Suponha que $y \in \mathcal{M}_2$. Então $y = \alpha.y_1 + \beta.y_2$, onde α, $\beta \in \mathbb{C}$. Temos 4 casos a considerar:
(I) Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$, então $y = \alpha.y_1$ e portanto, y não pertence a classe de uma função contínua (pela mesma razão do 1ºcaso). Logo, $y \notin \mathcal{R}$.
(II) Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, então $y = \beta.y_2$ e portanto, y não pertence a classe de uma função

contínua (pela mesma razão do 1ºcaso). Logo, $y \notin \mathcal{R}$.
(III) Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, então

$$y(x) = \begin{cases} \alpha + \beta, & \text{se } t \in [0, 1/4] \\ \\ \alpha, & \text{se } t \in (1/4, 1/2] \\ \\ 0, & \text{se } t \in (1/2, 1] \\ \end{cases}$$

Logo, y é descontínua da forma acima e é fácil verificar que y não pertence a classe de uma função contínua (pelo mesmo argumento utilizado nos pontos de descontinuidade do 1º caso). Portanto, $y \notin \mathcal{R}$.
(IV) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, então $y = 0$.
Portanto, de (I)-(IV) segue que $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$, o que prova a Afirmação 2. $\square$

Caso geral:
Para cada número inteiro $i \geq 1$, defina

$$y_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [0, 1/2^i] \\ \\ 0, & \text{se } t \in (1/2^i, 1]. \end{cases}$$

Pode-se mostrar que essas funções são linearmente independentes (tais que elas não pertencem a classe de uma função contínua). Observemos inicialmente que o argumento utilizado no 2º caso vale de maneira geral com y_{i_1} e y_{i_2}, com números inteiros positivos $i_1 \neq i_2$. De fato, suponhamos sem perda de generalidade que $i_1 < i_2$. Desse modo, definindo

$$\mathcal{M}_2 = span\,\{y_{i_1}, y_{i_2}\} = \{\alpha.y_{i_1} + \beta.y_{i_2};\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

temos que um elemento $y \in \mathcal{M}_2$ é da forma

$$y(x) = \begin{cases} \alpha + \beta, & \text{se } t \in [0, 1/2^{i_2}] \\ \\ \alpha, & \text{se } t \in (1/2^{i_2}, 1/2^{i_1}] \\ \\ 0, & \text{se } t \in (1/2^{i_1}, 1] \end{cases}$$

Logo, o mesmo argumento utilizado no 2º caso (sobre os limites laterais nos pontos de descontinuidade) mostra que $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$.
Agora, dado $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, definimos

$$\mathcal{M}_n = span\,\{y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n}\} = \{\alpha_1.y_{i_1} + \alpha_2.y_{i_2} + ... + \alpha_n.y_{i_n};\ \ \alpha_j \in \mathbb{C}, \forall\, 1 \leq j \leq n\} \quad (\Delta)$$

com $i_1 < i_2 < ... < i_n \in \mathbb{N}$. Como essas funções y_{i_j} são linearmente independentes, $\mathcal{M}_n$ é um subespaço de dimensão finita n.
Vamos mostrar que $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_n = \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para qualquer subespaço $\mathcal{M}_n$ que tem a forma (Δ) acima. Para tal objetivo, precisaremos da seguinte afirmação.

Afirmação 3: Se $y = \alpha_1.y_{i_1} + \alpha_2.y_{i_2} + ... + \alpha_n.y_{i_n} \in \mathcal{M}_n$ *é uma combinação linear não-nula (isto é, existe* $1 \leq j \leq n$ *tal que* $\alpha_j \neq 0$*), então* y *é descontínua nos pontos do conjunto não-vazio* $\{1/2^{i_j};\ 1 \leq j \leq n \ \text{ e } \ \alpha_j \neq 0\}$ *e como, além disso, o limite à esquerda e o limite à direita nos pontos de descontinuidade existem e são diferentes, então* y *não pertence a classe de uma função contínua (pelo mesmo motivo dos casos anteriores).*

Prova da Afirmação 3: Provaremos fazendo indução sobre n. Já vimos nos casos anteriores que a afirmação é verdadeira para os casos $n = 1$ e $n = 2$.
Tome $n \in \mathbb{N}$ arbitrário tal que $n \geq 2$.
Suponhamos que a afirmação $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_k = \{0\}$ seja verdadeira para todo subespaço $\mathcal{M}_k$ (da forma (Δ)) de dimensão $k \leq n$. Tome um subespaço arbitrário M_{n+1} da forma (Δ) de dimensão $n + 1$, ou seja,

$$\mathcal{M}_{n+1} = span\left\{y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_{n+1}}\right\} = \left\{\alpha_1.y_{i_1} + \alpha_2.y_{i_2} + ... + \alpha_{n+1}.y_{i_{n+1}};\ \ \alpha_j \in \mathbb{C}, \forall\, 1 \leq j \leq n+1\right\},$$

com $i_1 < i_2 < ... < i_{n+1} \in \mathbb{N}$.
Tome $y \in \mathcal{M}_{n+1}$ arbitrário, ou seja,

$$y = \alpha_1.y_{i_1} + \alpha_2.y_{i_2} + ... + \alpha_{n+1}.y_{i_{n+1}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.y_{i_j} + \alpha_{n+1}.y_{i_{n+1}}.$$

Se algum dos escalares em $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n+1}$ for zero, então $y \in \mathcal{M}_n$ para um subespaço $\mathcal{M}_n$ (da forma (Δ)) de dimensão n e o problema está resolvido (pois supomos que $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_n = \{0\}$).
Então suponhamos que $\alpha_j \neq 0$ para todo $j = 1, ..., n+1$. Desse modo, teremos que

$$y(x) = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n+1}, & \text{se } t \in [0, 1/2^{i_{n+1}}] \\ \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, & \text{se } t \in (1/2^{i_{n+1}}, 1/2^{i_n}] \\ ... & \\ \alpha_1, & \text{se } t \in (1/2^{i_2}, 1/2^{i_1}] \\ 0, & \text{se } t \in (1/2^{i_1}, 1] \end{cases}$$

Pelo mesmo argumento utilizado no 2º caso, obtemos que se $y \neq 0$, então $y \notin \mathcal{R}$, o que conclui a indução e prova a Afirmação 3. $\square$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem subespaços $\mathcal{M}_n$ de dimensão finita n (logo, fechados) tais que $\mathcal{R} \cap \mathcal{M}_n = \{0\}$, o que conclui o Exemplo 4.2. $\square$

Observação 4.3 *É importante destacar que o exemplo acima é um caso particular de um resultado de [ERD] no espaço de Hilbert ℓ^2, que abordaremos com mais detalhes na Seção 4.4 (pois L^2 e ℓ^2 são isomorfos - existe uma transformação invertível de L^2 sobre ℓ^2, com inversa contínua, que preserva o produto interno - na verdade: "Dois espaços de Hilbert são isomorfos se, e só se, suas dimensões são iguais" - ver, por exemplo, [DOU, Teorema 3.32]).*

Com o Exemplo 4.2 *estendemos para subespaços de dimensão n* (para qualquer $n \in \mathbb{N}$) o exemplo de dimensão 1 em [KUB5, p.5] que foi desenvolvido na Observação 3.6. Além disso, esse exemplo responde na **afirmativa** a Pergunta 3.13 apresentada no capítulo anterior ("Se $dim(\mathcal{M}) = n > 1$, onde $n \in \mathbb{N}$, então a condição $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ dada no Lema 3.4 é necessária para a conclusão do lema?").

Desse modo, poderíamos questionar:

Pergunta 4.4 *É possível obter um subespaço $\mathcal{M}$ de dimensão infinita tal que $\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\}$, onde $\mathcal{R}$ é um subespaço linear denso em $\mathcal{K}$?*

Como vimos no Exemplo 4.2 acima, se considerarmos $\mathcal{M}$ na Pergunta 4.4 com dimensão finita, a resposta é **afirmativa**. Veremos com mais detalhes na Seção 4.4 (no Exemplo 4.51) que a pergunta acima tem resposta ***afirmativa***. No entanto, inicialmente apresentamos alguns exemplos originais referentes a essa pergunta. Aqui notaremos que a hipótese de que $\mathcal{M}$ seja **fechado** na Pergunta 4.4 é ***importante***.

Exemplo 4.5 *Sejam $\mathcal{K} = L^2[0,1]$ e $\mathcal{R} = C[0,1]$. Consideremos as funções y_i definidas como no Exemplo 4.2, para $i \geq 1$, ou seja,*

$$y_i(t) = \begin{cases} 1, & se\ t \in [0, 1/2^i] \\ \\ 0, & se\ t \in (1/2^i, 1] \end{cases}$$

e defina o seguinte subespaço linear de $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{N} = span\,\{y_i;\ i \geq 1\}\,.$$

Então $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}\,.$

De fato, note que $\mathcal{N}$ é um subespaço linear de dimensão **infinita**, pois o conjunto de funções geradoras $\{y_i;\ i \geq 1\}$ é um conjunto linearmente independente. Além disso, $\mathcal{N}$ **não é fechado**, pois tomando a sequência $(z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{2^i})_{n\geq 1}$ em $\mathcal{N}$, temos que

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} \notin \mathcal{N} \text{ (pois a soma é infinita) com } \quad z_n \to y$$

e $y \in L^2[0,1]$ pois

$$\int_0^1 y^2(t)dt \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2 < \infty.$$

Logo, $y \in \mathcal{N}^-$ mas $y \notin \mathcal{N}$.

Afirmação: $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}$.

De fato, seja $y \in \mathcal{R} \cap \mathcal{N}$. Como $y \in \mathcal{N}$, temos que y é uma combinação linear finita de $y_i s$. Tomando n_0 como sendo o maior índice i dos y_i que aparecem na expressão de y, teremos que

$$y \in span\,\{y_1, ..., y_{n_0}\}.$$

Mas $\mathcal{M}_{n_0} = span\,\{y_1, ..., y_{n_0}\}$ é um subespaço de $\mathcal{K}$ da forma (Δ) do Exemplo 4.2.

Logo,

$$y \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_{n_0}$$

e pela demonstração realizada no Exemplo 4.2, temos que:

$$y \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}_{n_0} \Rightarrow y = 0.$$

Como $y \in \mathcal{R} \cap \mathcal{N}$ foi escolhido arbitrariamente, temos que $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}$, o que conclui a prova da afirmação. $\square$

Esse exemplo nos mostra que:

*"Existe espaço de Hilbert complexo, separável e de dimensão infinita $\mathcal{K}$ tal que existe um subespaço linear próprio $\mathcal{R}$ que é denso em $\mathcal{K}$ e existe um subespaço linear $\mathcal{N}$ **não fechado** de dimensão infinita em $\mathcal{K}$ tais que $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}$."*

Isso nos motiva a fazer o seguinte questionamento:

Pergunta 4.6 *Sejam $\mathcal{K}$ um espaço de Hilbert separável, complexo e de dimensão infinita e $\mathcal{R}$ um subespaço linear de $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{R}^- = \mathcal{K}$. Se considerarmos agora $\mathcal{M} = \mathcal{N}^-$, onde $\mathcal{N}$ é um subespaço linear não fechado de dimensão infinita tal que $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}$, teremos que $\mathcal{M}$ é um subespaço (fechado) de dimensão infinita. Vale*

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\}?$$

Apresentaremos agora um exemplo que mostra que a pergunta acima tem resposta **negativa**, ou seja, existem $\mathcal{K}, \mathcal{R}$ e $\mathcal{N}$ como na pergunta acima tais que $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}$ mas $\mathcal{R} \cap \mathcal{N}^{-} \neq \{0\}$.

Exemplo 4.7 *Sejam* $\mathcal{K} = L^2[0,1]$ *e* $\mathcal{R} = C[0,1]$. *Seja* $\mathcal{N} = span\{x_i;\ i \geq 1\}$, *onde para cada natural* $i \geq 1$, *definimos*

$$x_i(t) = \begin{cases} 0, & se\ t \in [0, 1/2^i) \\ \\ 1, & se\ t \in [1/2^i, 1]. \end{cases}$$

Então, $\mathcal{N}$ *é um subespaço linear de dimensão infinita que não é fechado e é tal que*

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\} \quad mas \quad \mathcal{R} \cap \mathcal{N}^{-} \neq \{0\}.$$

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\mathcal{N}_n = span\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}\} = \{\alpha_1.x_{i_1} + \alpha_2.x_{i_2} + ... + \alpha_n.x_{i_n};\ \ \alpha_j \in \mathbb{C}, \forall\, 1 \leq j \leq n\}$$

com $i_1 < i_2 < ... < i_n \in \mathbb{N}$.
Pode-se mostrar que o conjunto $\{x_i;\ i \geq 1\}$ é um conjunto linearmente independente (tal que nenhum dos x_i pertence a classe de uma função contínua, de maneira similar ao argumento utilizado no Exemplo 4.2) e, portanto, que cada conjunto $\mathcal{N}_n$ é, na verdade, um subespaço de dimensão n. De maneira similar à Afirmação 3 do Exemplo 4.2, pode-se mostrar que:
"Se $x = \alpha_1.x_{i_1} + \alpha_2.x_{i_2} + ... + \alpha_n.x_{i_n} \in \mathcal{N}_n$ é uma combinação linear não-nula (isto é, existe $1 \leq j \leq n$ tal que $\alpha_j \neq 0$), então x é descontínua nos pontos do conjunto não-vazio $\{1/2^{i_j};\ 1 \leq j \leq n\ \ e\ \ \alpha_j \neq 0\}$ e como, além disso, o limite à esquerda e o limite à direita nos pontos de descontinuidade existem e são diferentes, então x não pertence a classe de uma função contínua."
Desse modo, podemos concluir que

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{N}_n = \{0\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando agora

$$\mathcal{N} = span\{x_i;\ i \geq 1\},$$

temos que $\mathcal{N}$ é um subespaço linear de dimensão infinita (pois o conjunto de funções geradoras $\{x_i;\ i \geq 1\}$ é um conjunto linearmente independente) e, de maneira similar ao desenvolvido na Afirmação do Exemplo 4.5, obtemos que

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}.$$

Resta mostrar que $\mathcal{N}$ não é fechado e que $\mathcal{R} \cap \mathcal{N}^- \neq \{0\}$.
Tomando a sequência das funções geradoras $(x_n)_{n\geq 1}$ em $\mathcal{N}$, temos que

$$x_n \to x,$$

onde

$$x(t) = 1, \text{ para todo } t \in (0,1] \ \ e \ \ x(0) = 0.$$

Logo, $x \in \mathcal{N}^-$ e $x \neq 0$.

Afirmação: $x \notin \mathcal{N}$ mas $x \in \mathcal{R} \cap \mathcal{N}^-$.
De fato, claramente temos que $x \in \mathcal{R}$ pois x está na classe de $y \in \mathcal{R}$ dada por $y(t) = 1$, para todo $t \in [0,1]$. Desse modo, se $x \in \mathcal{N}$, então $x \in \mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}$, o que é um absurdo.
Logo, $x \in \mathcal{N}^-$ mas $x \notin \mathcal{N}$.
Portanto, $\mathcal{N}$ não é fechado e

$$x \in \mathcal{R} \cap \mathcal{N}^- \neq \{0\},$$

o que conclui o exemplo. □

Com esse exemplo, temos que:

"Existe espaço de Hilbert complexo, separável e de dimensão infinita $\mathcal{K}$ tal que existe um subespaço linear próprio $\mathcal{R}$ que é denso em $\mathcal{K}$ e existe um subespaço linear $\mathcal{N}$ não fechado de dimensão infinita em $\mathcal{K}$ tais que $\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}$ mas $\mathcal{R} \cap \mathcal{N}^- \neq \{0\}$."

Observação 4.8 *Também é interessante destacar aqui que a Proposição 3.7 também nos fornece mais alguns exemplos onde a interseção $\mathcal{R} \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ é verdadeira, que ocorre nos casos em que o subespaço $\mathcal{M}$ tem dimensão infinita e o seu complemento ortogonal $\mathcal{M}^\perp$ seja um subespaço de dimensão finita.*

De fato, se $\mathcal{K}$ é um espaço de Hilbert separável, complexo e de dimensão infinita, $\mathcal{R}$ é um subespaço linear de $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{R}^- = \mathcal{K}$ e $\mathcal{M}$ é um subespaço de $\mathcal{K}$ de dimensão infinita tal que o seu complemento ortogonal $\mathcal{M}^\perp$ tem dimensão finita, então

$$(\mathcal{R} \cap \mathcal{M})^- = (\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^{\perp\perp})^- = \mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M},$$

onde a primeira e a última igualdade seguem da Proposição 1.17 e a igualdade intermediária é devida à Proposição 3.7. Consequentemente, como $\mathcal{M} \neq \{0\}$ (pois $\mathcal{M}$ tem dimensão infinita), então

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} \neq \{0\}.$$

Desse modo, os exemplos e a observação acima nos motivaram a considerar uma nova classe de transformações, que denominaremos de classe $\mathcal{C}$. Como veremos nas próximas seções, essa classe será uma ferramenta muito útil para se trabalhar no contexto da teoria de operadores em espaços de Hilbert complexos, separáveis e de dimensão infinita.

4.2 Transformações de Classe $\mathcal{C}$

Nessa seção, apresentaremos o conceito de transformações de classe $\mathcal{C}$, juntamente com algumas das suas propriedades e aplicações no contexto da teoria de operadores. Veremos também nessa seção, que algumas das perguntas em aberto listadas no Capítulo 2 possuem respostas afirmativas se trocarmos as transformações "quaseafins" envolvidas por transformações de "classe $\mathcal{C}$."

Definição 4.9 *Seja $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$. Dizemos que X é de* ***classe*** *$\mathcal{C}$ se para* ***todo*** *subespaço $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$ com $dim(\mathcal{M}) = \infty$ vale*

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}\,.$$

Nesse caso, denotaremos: $X \in \mathcal{C}$.

Abaixo apresentamos um exemplo trivial de uma sub-classe contida em $\mathcal{C}$.

Exemplo 4.10 *Todas as transformações sobrejetivas de $B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, em particular as invertíveis, pertencem à classe $\mathcal{C}$.*

Veremos ao longo do texto mais alguns exemplos importantes dessa classe de transformações (a saber, Exemplo 4.35 e Proposição 4.37). Apresentaremos agora uma propriedade natural da definição de transformações de classe $\mathcal{C}$.

Proposição 4.11 *Se $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ é de classe $\mathcal{C}$, então $dim(\mathcal{R}(X)) = \infty$.*

Demonstração: Vamos fazer a contrapositiva, ou seja, vamos mostrar que:

$$dim(\mathcal{R}(X)) < \infty \quad \Rightarrow \quad X \notin \mathcal{C},$$

o que é equivalente a

$$X \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad dim(\mathcal{R}(X)) = \infty.$$

Suponha que $dim(\mathcal{R}(X)) < \infty$ (logo, $\mathcal{R}(X)$ é fechado). Como $\mathcal{K} = \mathcal{R}(\mathcal{X}) + \mathcal{R}(\mathcal{X})^{\perp}$ (ver, por exemplo, Teorema 5.20 em [KUB7]) e $\mathcal{K}$ tem dimensão infinita, então $dim(\mathcal{R}(X)^{\perp}) = \infty$, ou seja, $\mathcal{R}(X)^{\perp}$ é um subespaço de $\mathcal{K}$ com dimensão infinita tal que

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{R}(X)^{\perp} = \{0\},$$

o que implica que $X \notin \mathcal{C}$, como queríamos demonstrar.

□

Desse modo, temos em particular um exemplo de transformações que não pertencem à classe $\mathcal{C}$.

Exemplo 4.12 *Se $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tem imagem de dimensão finita, então $X \notin \mathcal{C}$.*

Outro conceito importante e necessário no decorrer do texto é o seguinte.

Definição 4.13 *Considere $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, $T \in B[\mathcal{H}]$ e $L \in B[\mathcal{K}]$. Dizemos que X $\mathcal{C}-$* ***entrelaça*** *o operador T ao operador L se X é de classe $\mathcal{C}$ e*

$$XT = LX.$$

*Nesse caso, dizemos que T e L estão $\mathcal{C}-$**entrelaçados.***

Observação 4.14 *É importante destacarmos que o conjunto formado pelos operadores que são $\mathcal{C}$-entrelaçados é não-vazio, pois como vimos no Exemplo 4.10, transformações invertíveis são de classe $\mathcal{C}$, e dois operadores serem entrelaçados por uma transformação invertível quer dizer que eles são similares (ver Definição 3.3). Outro exemplo de transformação de classe $\mathcal{C}$ que é importante em diversas situações é o operador shift que apresentaremos no Exemplo 4.35 (para mais detalhes sobre shifts, ver por exemplo [KUB1, Capítulo 2]).*

Com esse novo conceito, poderíamos questionar a existência de subespaços invariantes não-triviais para operadores que satisfazem a relação $XT = LX$ de maneira semelhante à Pergunta 2.3 trocando "transformada quaseafim" por "$\mathcal{C}$-entrelaçado", ou seja, poderíamos questionar:

Pergunta 4.15 *Se $T \in B[\mathcal{H}]$ está $\mathcal{C}$-entrelaçado a um operador normal $N \in B[\mathcal{K}]$, então T possui subespaço invariante não-trivial?*

Note que o questionamento acima foi motivado pela pergunta em aberto que listamos no Capítulo 2:

"Pergunta 2.3: Uma transformada quaseafim de um operador normal possui subespaço invariante não-trivial?".

É importante observar que a Pergunta 2.3 requer a densidade da imagem da transformação que entrelaça os operadores envolvidos (como na Definição 3.2). Já a Pergunta 4.15 não requer densidade mas, em contrapartida, necessita de transformações de classe $\mathcal{C}$ e, conforme veremos no Exemplo 4.35, nem toda transformação de classe $\mathcal{C}$ tem imagem densa.

Veremos agora que a Pergunta 4.15 tem resposta *afirmativa* e que decorre como uma consequência do seguinte resultado.

Teorema 4.16 *Sejam $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ de classe $\mathcal{C}$ e $N \in B[\mathcal{K}]$ normal. Então existe um subespaço N-redutor não-trivial $\mathcal{M}$ de $dim(\mathcal{M}) = \infty$ tal que $\mathcal{R}(X) \not\subseteq \mathcal{M}$.*

Demonstração: Seja $N \in B[\mathcal{K}]$ normal arbitrário. Faremos a prova por absurdo, ou seja, vamos supor que: para todo subespaço N-redutor não-trivial $\mathcal{M}$ de $dim(\mathcal{M}) = \infty$, vale

$$\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{M} \qquad (*)$$

e vamos chegar em uma contradição.

Afirmação 1: Como N é normal e $\mathcal{K}$ tem dimensão infinita, então existe um subespaço N-redutor não-trivial $\mathcal{M}_1$ com $dim(\mathcal{M}_1) = \infty$.

Prova da Afirmação 1: De fato, pela Proposição 1.25, o operador normal N possui subespaço redutor não-trivial $\mathcal{M}$. Logo, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^{\perp}$ são N-redutores não-triviais e pelo menos um deles tem dimensão infinita, já que $\mathcal{K} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^{\perp}$ (pelo Teorema 5.20 em [KUB7]) e $\mathcal{K}$ tem dimensão infinita, o que conclui a prova da Afirmação 1. $\square$

Por $(*)$, temos que $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{M}_1$. O que implica que

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}_1^{\perp} = \{0\}\,.$$

Como $X \in \mathcal{C}$, então a igualdade acima garante que $dim(\mathcal{M}_1^{\perp}) = n_1 < \infty$. Logo, existe uma base ortonormal finita para $\mathcal{M}_1^{\perp}$, digamos

$$\mathcal{M}_1^{\perp} = span\,\{e_i;\ 1 \leq i \leq n_1\}\,.$$

Agora, como $\mathcal{M}_1$ é um subespaço N-redutor, então $(N|_{\mathcal{M}_1})^* = N^*|_{\mathcal{M}_1} : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1$ (ver [KUB7, Corolário 5.75]). Logo, $N_1 := N|_{\mathcal{M}_1} : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1$ é normal. Desse modo, pela Afirmação 1, como N_1 é normal e $dim(\mathcal{M}_1) = \infty$, existe um subespaço N_1-redutor não-trivial $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$ (logo, N-redutor) com $dim(\mathcal{M}_2) = \infty$.
Novamente por $(*)$, temos que $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{M}_2$. Logo,

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}_2^{\perp} = \{0\}.$$

Como $X \in \mathcal{C}$, isso implica que $\mathcal{M}_2^{\perp}$ tem dimensão finita. Desse modo, como

$$\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \mathcal{M}_2^{\perp} \supset \mathcal{M}_1^{\perp},$$

podemos estender a base de $\mathcal{M}_1^{\perp}$ para obter uma base ortonormal para $\mathcal{M}_2^{\perp}$, digamos:

$$\mathcal{M}_2^{\perp} = span\{e_i;\ 1 \leq i \leq n_2\},$$

com $n_1 < n_2$.
Como $\mathcal{M}_2$ é subespaço N-redutor não-trivial, então $(N|_{\mathcal{M}_2})^* = N^*|_{\mathcal{M}_2} : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ (ver [KUB7, Corolário 5.75]). Logo, $N_2 := N|_{\mathcal{M}_2} : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ é normal, com $dim(\mathcal{M}_2) = \infty$.
Assim, obtemos por uma indução simples que, para todo $k \geq 1$, existe um subespaço N-redutor não-trivial $\mathcal{M}_k$ tal que:

1. $dim(M_k) = \infty$;
2. $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{M}_k$;
3. $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}_k^{\perp} = \{0\}$;
4. $\mathcal{M}_k^{\perp} = span\{e_i;\ 1 \leq i \leq n_k\}$, com $n_1 < n_2 < ....$

Prova por indução: Já vimos anteriormente que para $k = 1$, temos que $\mathcal{M}_1$ é um subespaço N-redutor não-trivial que satisfaz as quatro propriedades acima. Vamos mostrar agora que: se as quatro propriedades acima valem para o subespaço N-redutor não-trivial $\mathcal{M}_k$, para algum $k \geq 1$, então as quatro propriedades continuam valendo para um subespaço N-redutor não-trivial M_{k+1}.
De fato, como $\mathcal{M}_k$ é um subespaço N-redutor não-trivial, então$(N|_{\mathcal{M}_k})^* = N^*|_{\mathcal{M}_k} : \mathcal{M}_k \to \mathcal{M}_k$ (ver [KUB7, Corolário 5.75]). Logo,

$$N_k := N|_{\mathcal{M}_k} : \mathcal{M}_k \to \mathcal{M}_k$$

é normal. Desse modo, pela Afirmação 1, como N_k é normal e $dim(\mathcal{M}_k) = \infty$, existe um subespaço N_k-redutor não-trivial $\mathcal{M}_{k+1} \subset \mathcal{M}_k$ (logo, N-redutor) com

$$dim(\mathcal{M}_{k+1}) = \infty, \quad \text{o que satisfaz 1.}$$

Novamente por $(*)$, temos que

$$\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{M}_{k+1}, \quad \text{o que satisfaz 2.}$$

Logo,

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}_{k+1}^{\perp} = \{0\}\,, \quad \text{o que satisfaz 3.}$$

Como $X \in \mathcal{C}$, isso implica que $\mathcal{M}_{k+1}^{\perp}$ tem dimensão finita. Desse modo, como

$$\mathcal{M}_{k+1} \subset \mathcal{M}_k \Leftrightarrow \mathcal{M}_{k+1}^{\perp} \supset \mathcal{M}_k^{\perp},$$

podemos estender a base de $\mathcal{M}_k^{\perp}$ para obter uma base ortonormal para $\mathcal{M}_{k+1}^{\perp}$, digamos:

$$\mathcal{M}_{k+1}^{\perp} = span\,\{e_i;\ 1 \leq i \leq n_{k+1}\}\,,$$

com $n_k < n_{k+1}$, o que satisfaz 4, como queríamos demonstrar. Isso conclui a prova por indução. $\square$

Considere agora o subespaço

$$\mathcal{M}' := span\,\{e_i;\ i \geq 1\}^{-} \subset \mathcal{K}.$$

Afirmação 2: $dim(\mathcal{M}') = \infty$ e $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}' = \{0\}$.
De fato, claramente $dim(\mathcal{M}') = \infty$ pois o conjunto gerador $\{e_i;\ i \geq 1\}$ é ortonormal. Resta mostrar que $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}' = \{0\}$.
Primeiramente, note que todo $y \in \mathcal{M}'$ pode ser representado de maneira única (pelo Teorema da Série de Fourier em [KUB7, Teorema 5.48]) como

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \langle y, e_i \rangle\, e_i.$$

Se existir $y_0 \in \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}'$ com $y_0 \neq 0$, então existe $i_0 \geq 1$ tal que

$$\langle y_0, e_{i_0} \rangle \neq 0. \quad (\Delta)$$

Por outro lado, pela definição dos $e_i's$ (ver (4)), existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $e_{i_0} \in \mathcal{M}_{k_0}^{\perp}$. Logo, por (2), temos que $y_0 \in \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{M}_{k_0}$ e portanto,

$$\langle y_0, e_{i_0} \rangle = 0. \quad (\Delta\Delta)$$

Desse modo, (Δ) e $(\Delta\Delta)$ nos levam a um absurdo, que decorreu do fato de supormos que $y_0 \in \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}'$ com $y_0 \neq 0$. Logo, $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}' = \{0\}$, o que conclui a prova da Afirmação 2. $\square$

No entanto, com essa afirmação, temos:

$$dim(\mathcal{M}') = \infty \;\; e \;\; \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}' = \{0\} \;\; \Rightarrow \;\; X \notin \mathcal{C}$$

o que contradiz nossa hipótese e conclui a demonstração do teorema. $\square$

Como uma consequência desse teorema, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.17 *Sejam $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, $T \in B[\mathcal{H}]$ e $N \in B[\mathcal{K}]$ tais que*

$$XT = NX.$$

Se $X \in \mathcal{C}$ e N é normal, então T possui subespaço invariante não-trivial.

Demonstração: Pelo Teorema 4.16, sabemos que existe um subespaço N-redutor não-trivial $\mathcal{M}$ com $dim(M) = \infty$ tal que

$$\mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}. \quad (*)$$

Afirmação: $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço T-invariante não-trivial.
De fato, como visto na demonstração do Lema 3.4, sabemos que $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço T-invariante. Resta mostrar que é não-trivial, ou seja, temos que mostrar que $X^{-1}(\mathcal{M}) \neq \{0\}$ e $X^{-1}(\mathcal{M}) \neq \mathcal{H}$.
Como $X \in \mathcal{C}$ e $dim(\mathcal{M}) = \infty$, então $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$. Pelo mesmo argumento utilizado no Lema 3.4, temos que

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\} \Rightarrow X^{-1}(\mathcal{M}) \neq \{0\}.$$

Por outro lado, também vale que $X^{-1}(\mathcal{M}) \neq \mathcal{H}$, pois em caso contrário, teríamos que

$$\mathcal{R}(X) = X(\mathcal{H}) = X(X^{-1}(\mathcal{M})) \subseteq \mathcal{M},$$

o que contradiz a hipótese $(*)$.
Logo, $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço T-invariante não-trivial.

$\square$

Esse corolário responde de maneira **afirmativa** a Pergunta 4.15 apresentada acima. Em particular, esse corolário também responde na **afirmativa** a seguinte pergunta (que é motivada pela Pergunta 2.4 trocando "transformada quaseafim" por "$\mathcal{C}$-entrelaçado"):

Pergunta 4.18 *Se um operador T está $\mathcal{C}$-entrelaçado a um operador unitário, então T possui subespaço invariante não-trivial?*

Como as Perguntas 4.16 e 4.19 (que foram motivadas pelas Perguntas 2.3 e 2.4, respectivamente) possuem respostas afirmativas quando utilizamos "transformações de classe $\mathcal{C}$" em lugar de "transformações com imagem densa", é natural questionar se é possível obter respostas afirmativas para casos particulares utilizando "transformações de classe $\mathcal{C}$" em lugar de "transformações com imagem densa", motivados pelas Perguntas 2.1, 2.2 e 2.5. Assim como foi comentado anteriormente, as Perguntas 2.1, 2.2 e 2.5 requerem densidade da imagem das transformações envolvidas, enquanto que as transfomações de classe $\mathcal{C}$ não necessitam da densidade da imagem, mas, em contrapartida, nem toda transformação de classe $\mathcal{C}$ tem imagem densa, como veremos no Exemplo 4.35.

Veremos agora que respostas afirmativas podem ser dadas para casos particulares. Para tanto, precisaremos de alguns conceitos e resultados que apresentaremos abaixo.

Definição 4.19 *Sejam $T \in B[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{M}$ um subespaço de $\mathcal{H}$. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um subespaço T-**hiperredutor** se $\mathcal{M}$ é um subespaço T-hiperinvariante que reduz todo operador que comuta com T.*

Pela Proposição 1.25, todo operador normal não escalar possui um subespaço hiperredutor não-trivial (se a dimensão do espaço em que ele atua é maior do que 1).

Observação 4.20 *Segue diretamente da definição acima, da definição de subespaço redutor e da definição de subespaço hiperinvariante (pelas Proposições 1.18 e 1.19) que:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \text{ é } T\text{-hiperedutor} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ e } \mathcal{M}^{\perp} \text{ são } T\text{-hiperredutores} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ e } \mathcal{M}^{\perp} \text{ são } T\text{-hiperinvariantes.} \end{aligned}$$

Com este conceito, podemos obter um resultado semelhante ao Teorema 4.16 com subespaço "hiperredutor" em lugar de subespaço "redutor". Na verdade, a mesma demonstração do Teorema 4.16 vale se adicionarmos uma condição extra sobre o operador normal, como apresentamos abaixo. Para tanto, vamos utilizar o seguinte conceito.

Definição 4.21 *Um operador $T \in B[\mathcal{H}]$ **não possui parte escalar** se não existe subespaço invariante $\mathcal{M}$ para T tal que $T|_{\mathcal{M}}$ é escalar. Em particular, T não é escalar.*

Agora temos condições de enunciar outro resultado importante que decorre do Teorema 4.16 e da definição acima.

Teorema 4.22 *Sejam $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ e $N \in B[\mathcal{K}]$. Se $X \in \mathcal{C}$ e N é um operador normal que não possui parte escalar, então existe um subespaço N-hiperredutor não-trivial $\mathcal{M}$ tal que $dim(\mathcal{M}) = \infty$ e $\mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}$.*

A demonstração é idêntica à do Teorema 4.16, a hipótese de que N não possui parte escalar é para garantir a existência de subespaços $\mathcal{M}_k$ que são hiperredutores não-triviais. Em particular, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.23 *Sejam $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ e $N \in B[\mathcal{K}]$. Se $X \in \mathcal{C}$ e N é um operador normal que não possui parte escalar, então existe um subespaço N-hiperinvariante não-trivial $\mathcal{M}$ tal que $dim(\mathcal{M}) = \infty$ e $\mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}$.*

Agora apresentaremos mais um conceito e um resultado necessários para as próximas propriedades dos operadores de classe $\mathcal{C}$, que serão baseados em [KUB1].

Definição 4.24 *Seja $T \in B[\mathcal{H}]$. O **comutante** de T, denotado por $\{T\}'$, é o conjunto de todos operadores $C \in B[\mathcal{H}]$ que comutam com T, isto é,*

$$\{T\}' = \{C \in B[\mathcal{H}];\ CT = TC\}.$$

Observação 4.25 *É fácil verificar (ver por exemplo, [KUB1, p. 66]) que $\{T\}'$ é um subespaço linear em $B[\mathcal{H}]$, isto é,*

$$\forall\ C_1, C_2 \in \{T\}', \forall \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow C_1 + C_2, \alpha.C_1 \in \{T\}'.$$

Proposição 4.26 *([KUB1, Proposição 4.6]) Consideremos $T \in B[\mathcal{H}]$, $x \in \mathcal{H}$ e $\mathcal{M}_x := \big\{Cx;\ C \in \{T\}'\big\}$. Então $\mathcal{M}_x$ é um subespaço linear em $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{M}_x^-$ é um subespaço T-hiperinvariante.*

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que $\mathcal{M}_x$ é um subespaço linear em $\mathcal{H}$. Sejam $y_1, y_2 \in \mathcal{M}_x$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então existem $C_1, C_2 \in \{T\}'$ tais que $y_1 = C_1x$ e $y_2 = C_2x$. Logo,

$$y_1 + y_2 = (C_1 + C_2)x \ \in\ \mathcal{M}_x \quad e$$

$$\alpha.y_1 = \alpha.C_1x \ \in\ \mathcal{M}_x,$$

pois $C_1 + C_2, \alpha.C_1 \in \{T\}'$. Segue daí que $\mathcal{M}_x$ é um subespaço linear, o que implica que $\mathcal{M}_x^-$ é um subespaço de $\mathcal{H}$.
Resta mostrar que $\mathcal{M}_x^-$ é T-hiperinvariante.
Seja $C \in \{T\}'$ arbitrário. Se $y \in \mathcal{M}_x$, então existe $C_0 \in \{T\}'$ tal que $y = C_0x$. Logo,

$$Cy = CC_0x \ \in \ \mathcal{M}_x, \ \text{ pois } \ CC_0 \in \{T\}'.$$

Segue daí que $C(\mathcal{M}_x) \subseteq \mathcal{M}_x$ e, pela continuidade dos operadores, obtemos

$$C(\mathcal{M}_x^-) \subseteq \mathcal{M}_x^-.$$

Como $C \in \{T\}'$ é arbitrário, segue que $\mathcal{M}_x^-$ é um subespaço T-hiperinvariante.

□

Agora estamos em condições de apresentar alguns resultados relacionados a casos particulares motivados pela Pergunta 2.5, ou seja, casos relacionados com a seguinte pergunta:

Pergunta 4.27 *Se existem operadores $T \in B[\mathcal{H}]$, $L \in B[\mathcal{K}]$, $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ e $Y \in B[\mathcal{K}, \mathcal{H}]$ tais que $XT = LX$, $TY = YL$ e L possui subespaço hiperinvariante (respectivamente, invariante) não-trivial $\mathcal{M}$, que condições devemos impor às transformações envolvidas (X ou Y) para garantir a existência de um subespaço T-hiperinvariante (respectivamente, T-invariante) não-trivial?*

No primeiro resultado abaixo, apresentamos uma resposta parcial para a Pergunta 4.27 no caso em que o operador $L \in B[\mathcal{K}]$ é normal sem parte escalar. A ideia é baseada na demonstração do Lema 4.7 de [KUB7].

Teorema 4.28 *Sejam $T \in B[\mathcal{H}]$, $N \in B[\mathcal{K}]$, $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ e $Y \in B[\mathcal{K}, \mathcal{H}]$ tais que*

$$XT = NX \ \text{ e } TY = YN.$$

Suponha que $X \in \mathcal{C}$ e que N é normal sem parte escalar. Se Y é injetivo, então T possui subespaço hiperinvariante não-trivial.

Demonstração: Pelo Corolário 4.23, sabemos que existe um subespaço N-hiperinvariante não-trivial $\mathcal{M}$ tal que $dim(\mathcal{M}) = \infty$ e

$$\mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}. \qquad (*)$$

Pela Proposição 4.26, sabemos que

$$\mathcal{M}_x^- = \left\{Cx;\ C \in \{T\}'\right\}^-$$

é T-hiperinvariante para cada $x \in \mathcal{H}$. Vamos mostrar que $\mathcal{M}_x^-$ é não-trivial para cada $x \in Y(\mathcal{M})$ com $x \neq 0$.

Como Y é injetivo e $\mathcal{M}$ é não-trivial, existe $x \neq 0$ em $Y(\mathcal{M})$. Portanto, segue diretamente da definição de $\mathcal{M}_x$ que

$$\mathcal{M}_x^- \neq \{0\}\,,$$

pois $I \in \{T\}'$ e $0 \neq x = Ix \in \mathcal{M}_x$. Resta mostrar que

$$\mathcal{M}_x^- \neq \mathcal{H}.$$

Primeiramente, note que $XCY \in \{N\}'$ para todo $C \in \{T\}'$, pois

$$(XCY)N = XC(YN) = XC(TY) = X(CT)Y = (XT)CY = N(XCY).$$

Como $\mathcal{M}$ é N-hiperinvariante, segue que $\mathcal{M}$ é XCY-invariante, para todo $C \in \{T\}'$. Agora tome $x \in Y(\mathcal{M}) - \{0\}$, isto é, tome $u \in \mathcal{M}$ tal que $x = Yu \neq 0$.

Se $y \in \mathcal{M}_x$, então existe $C \in \{T\}'$ tal que $y = Cx = CYu$. Segue daí que

$$Xy = (XCY)u \in \mathcal{M}$$

pois $u \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{M}$ é XCY-invariante. Logo,

$$X(\mathcal{M}_x) \subseteq \mathcal{M}$$

e pela continuidade de X, temos que

$$X(\mathcal{M}_x^-) \subseteq \mathcal{M}.$$

Como, por $(*)$, $X(\mathcal{H}) = \mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}$, a inclusão acima garante que

$$\mathcal{M}_x^- \neq \mathcal{H}$$

como queríamos.

$\square$

Observação 4.29 *Note que na demonstração do teorema acima, o Corolário 4.23 foi utilizado para garantir que o subespaço $\mathcal{M}$ que estávamos utilizando não continha $\mathcal{R}(X)$. Desse modo, se tivermos que $XT = LX$, $TY = YL$ e $\mathcal{M}$ é um subespaço L-hiperinvariante que é não-trivial tal que $Y(\mathcal{M}) \neq \{0\}$ e $\mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}$, então a mesma demonstração anterior garante que $\mathcal{M}_x^-$ é um subespaço T-hiperinvariante não-trivial, para todo $x \in Y(\mathcal{M}) - \{0\}$. É importante observar também que em [KUB1] é utilizado "densidade" da imagem das transformações envolvidas para provar os resultados semelhantes aos apresentados acima, pois, obviamente, não são utilizadas transformações de classe $\mathcal{C}$ em [KUB1].*

Desse modo, temos os seguintes resultados relacionados à Pergunta 4.27.

Teorema 4.30 *Sejam* $T \in B[\mathcal{H}]$, $L \in B[\mathcal{K}]$, $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ *e* $Y \in B[\mathcal{K}, \mathcal{H}]$ *tais que*

$$XT = LX \ \text{ e } TY = YL.$$

Suponha que $X \in \mathcal{C}$, Y *é injetivo e que* $\mathcal{M}$ *é um subespaço* L*-hiperredutor não-trivial. Então* T *possui subespaço hiperinvariante não-trivial.*

Demonstração: Como $\mathcal{M}$ é L-hiperredutor não-trivial, então

$$\mathcal{M} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{\perp} \qquad (*)$$

são L-hiperinvariantes não-triviais (ver Observação 4.20). Sem perda de generalidade, podemos supor que $dim(\mathcal{M}) = \infty$ (pois $\mathcal{K} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^{\perp}$ e $dim(\mathcal{K}) = \infty$). Vamos analisar 2 casos:

1º caso: $dim(\mathcal{M}^{\perp}) = \infty$.
Nesse caso, como $X \in \mathcal{C}$, então $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\}$, o que implica que

$$\mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}.$$

Como Y é injetivo, então $Y(\mathcal{M}) \neq \{0\}$. Como $\mathcal{M}$ é L-hiperinvariante (ver $(*)$), a Observação 4.29 garante que

$$\mathcal{M}_x^{-} = \left\{Cx;\ C \in \{T\}'\right\}^{-}$$

é T-hiperinvariante não-trivial, para todo $x \in Y(\mathcal{M}) - \{0\}$.

2º caso: $dim(\mathcal{M}^{\perp}) < \infty$.
Nesse caso, temos que $\mathcal{M}^{\perp}$ é um subespaço L-hiperinvariante não-trivial tal que $Y(\mathcal{M}^{\perp}) \neq \{0\}$ (pois Y é injetivo) e $\mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}^{\perp}$, pois $dim(\mathcal{M}^{\perp}) < \infty$ e a Proposição 4.11 garante que

$$X \in \mathcal{C} \Rightarrow dim(\mathcal{R}(X)) = \infty.$$

Agora, como $\mathcal{M}^{\perp}$ é L-hiperinvariante não-trivial (ver $(*)$), a Observação 4.29 com $\mathcal{M}^{\perp}$ em lugar de $\mathcal{M}$, garante que $\mathcal{M}_x^{-}$ é T-hiperinvariante não-trivial, para todo $x \in Y(\mathcal{M}^{\perp}) - \{0\}$.

Portanto, em qualquer caso, T possui subespaço hiperinvariante não-trivial.

$\square$

Como consequência imediata das idéias apresentadas, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.31 *Sejam $T \in B[\mathcal{H}]$, $L \in B[\mathcal{K}]$, $X \in B[\mathcal{H},\mathcal{K}]$ e $Y \in B[\mathcal{K},\mathcal{H}]$ tais que*

$$XT = LX \text{ e } TY = YL,$$

e $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ um subespaço L-hiperinvariante não-trivial tal que $Y(\mathcal{M}) \neq \{0\}$. Se $X \in \mathcal{C}$ e $dim(\mathcal{M}^{\perp}) = \infty$, então T possui subespaço hiperinvariante não-trivial.

Demonstração: Como $dim(\mathcal{M}^{\perp}) = \infty$ e $X \in \mathcal{C}$, então

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\}\,.$$

Mas isso implica que

$$\mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}.$$

Como $Y(\mathcal{M}) \neq \{0\}$ e $\mathcal{M}$ é L-hiperinvariante não-trivial, segue da Observação 4.29 que T possui subespaço hiperinvariante não-trivial.

□

Outro resultado que é consequência do Lema 3.4 e das transformações de classe $\mathcal{C}$ é o seguinte corolário.

Corolário 4.32 *Sejam $T \in B[\mathcal{H}]$, $L \in B[\mathcal{K}]$ e $X \in B[\mathcal{H},\mathcal{K}]$ tais que*

$$XT = LX.$$

Se $X \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ é um subespaço L-invariante não-trivial tal que $dim(\mathcal{M}) = \infty$ e $dim(\mathcal{M}^{\perp}) = \infty$, então T possui subespaço invariante não-trivial.

Demonstração: Pelo Lema 3.4, sabemos que $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço T-invariante. Resta mostrar que $X^{-1}(\mathcal{M})$ é não-trivial.
Como $X \in \mathcal{C}$, então:

- $dim(\mathcal{M}) = \infty \;\Rightarrow\; \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\} \;\Rightarrow\; X^{-1}(\mathcal{M}) \neq \{0\}\,;$
- $dim(\mathcal{M}^{\perp}) = \infty \;\Rightarrow\; \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\} \;\Rightarrow\; X(\mathcal{H}) = \mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M} \;\Rightarrow\; X^{-1}(\mathcal{M}) \neq \mathcal{H}$, (pois $X(X^{-1}(\mathcal{M})) \subseteq \mathcal{M}$).

Portanto, $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço T-invariante não-trivial.

□

Note que a hipótese $dim(\mathcal{M}^{\perp}) = \infty$ no Corolário 4.32 foi utilizada apenas para garantir que $\mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}$. Portanto, temos o seguinte caso mais geral:

Corolário 4.33 *Sejam* $T \in B[\mathcal{H}]$, $L \in B[\mathcal{K}]$ *e* $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ *tais que*

$$XT = LX.$$

Se $X \in \mathcal{C}$ *e* $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ *é um subespaço L-invariante não-trivial tal que* $dim(\mathcal{M}) = \infty$ *e* $\mathcal{R}(X) \not\subset \mathcal{M}$*, então* T *possui subespaço invariante não-trivial.*

Como vimos até o momento, algumas perguntas em aberto relacionadas a "transformações com imagem densa" possuem respostas afirmativas se considerarmos as "transformações de classe $\mathcal{C}$" em lugar de "transformações com imagem densa". Desse modo, é relevante perguntarmos:

Pergunta 4.34 *Será que toda transformação de classe* $\mathcal{C}$ *tem imagem densa?*

A resposta para essa pergunta é **negativa**, como mostraremos no próximo exemplo, ou seja, existem transformações de classe $\mathcal{C}$ que não possuem imagem densa.

Exemplo 4.35 *Existe uma transformação de classe* $\mathcal{C}$ *que não tem imagem densa. Consideremos o espaço de Hilbert* ℓ^2 *das sequências de números complexos que são quadrado-somáveis, ou seja,*

$$\ell^2 = \left\{ (\alpha_n)_{n=1}^{\infty};\ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \right\}.$$

Considere o operador $S_+ : \ell^2 \to \ell^2$ *definido por*

$$S_+(\alpha_1, \alpha_2, ...) := (0, \alpha_1, \alpha_2, ...),$$

chamado de shift unilateral à direita. Afirmamos que S_+ *não tem imagem densa mas é uma transformação de classe* $\mathcal{C}$.

De fato, seja $\{e_1, e_2, ...\}$ a base canônica unitária de ℓ^2. Claramente, temos que

$$\mathcal{R}(S_+) = span\,\{e_i;\ i \geq 2\}^-$$

e portanto, S_+ não tem imagem densa (pois $\mathcal{R}(S_+)$ é um subespaço fechado e $e_1 \notin \mathcal{R}(S_+)$).
Por outro lado, S_+ é uma transformação de classe $\mathcal{C}$, como mostraremos agora.
Suponha, por absurdo, que $S_+ \notin \mathcal{C}$. Então existe um subespaço $\mathcal{M}$ com dimensão infinita tal

$$\mathcal{R}(S_+) \cap \mathcal{M} = \{0\}. \quad (*)$$

Pelo Teorema da Série de Fourier (ver Teorema 5.48 em [KUB7]), sabemos que todo $x \in \ell^2$ pode ser escrito de maneira única como

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n . e_n = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Como vale $(*)$, então dados dois elementos distintos $x = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}, y \in (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$, temos que $\alpha_1 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$. Como $dim(\mathcal{M}) > 1$, podemos supor que x e y são linearmente independentes (LI). Desse modo, temos que:

- $0 \neq x - \frac{\alpha_1}{\beta_1} y \in \mathcal{M}$, pois x e y são LI e $\mathcal{M}$ é um subespaço; e
- $0 \neq x - \frac{\alpha_1}{\beta_1} y = (\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{R}(S_+)$, pois $\gamma_1 = \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} . \beta_1 = 0$,

o que contradiz $(*)$.
Portanto, S_+ é uma transformação de classe $\mathcal{C}$ que não tem imagem densa, o que finaliza o exemplo. $\square$

De maneira similar, poderíamos perguntar se a recíproca é verdaderia, ou seja:

Pergunta 4.36 *Será que toda transformação com imagem densa é de classe $\mathcal{C}$?*

Essa pergunta será analisada com mais detalhes na Seção 4.4.

Continuando com as transformações de classe $\mathcal{C}$, e baseado na ideia utilizada no Exemplo 4.35, apresentaremos agora um resultado que nos fornece uma condição necessária e suficiente para uma transformação (com imagem fechada) pertencer à classe $\mathcal{C}$.

Proposição 4.37 *Seja $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$. Então*

(a) *Se $X \in \mathcal{C}$, então $dim(\mathcal{R}(X)^{\perp}) < \infty$.*
(b) *Se $\mathcal{R}(X)^{-} = \mathcal{R}(X)$ e $dim(\mathcal{R}(X)^{\perp}) < \infty$, então $X \in \mathcal{C}$.*

Demonstração:
Prova de (a): Se $X \in \mathcal{C}$, então $dim(\mathcal{R}(X)^{\perp}) < \infty$, pois em caso contrário, $\mathcal{R}(X)^{\perp}$ seria um subespaço de $\mathcal{K}$ com dimensão infinita tal que

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{R}(X)^{\perp} = \{0\},$$

o que contradiz o fato de $X \in \mathcal{C}$.

Prova de (b): Suponhamos agora que $dim(\mathcal{R}(X)^{\perp}) < \infty$ e que $\mathcal{R}(X)$ é fechado. Vamos mostrar que $X \in \mathcal{C}$.
Se $dim(\mathcal{R}(X)^{\perp}) = 0$, então $\mathcal{R}(X)^{\perp} = \{0\}$ o que implica que

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X)^{-} = \mathcal{K},$$

ou seja, X é sobrejetivo e portanto $X \in \mathcal{C}$.
Suponhamos então que $dim(\mathcal{R}(X)^{\perp}) = n \geq 1$. Seja $\mathcal{M}$ um subespaço arbitrário de $\mathcal{K}$ com dimensão infinita. Temos que mostrar que

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}.$$

Tome $n+1$ vetores linearmente independentes $z_1, ..., z_{n+1} \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K} = \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(X)^{\perp}$ (pelo Teorema 5.20 em [KUB7] e $\mathcal{R}(X)^{-} = \mathcal{R}(X)$), então existem $x_1, ..., x_{n+1} \in \mathcal{R}(X)$ e $y_1, ..., y_{n+1} \in \mathcal{R}(X)^{\perp}$ tais que

$$z_i = x_i + y_i, \ \ \forall\, i = 1, 2, ..., n+1. \ \ (*)$$

Como $dim(\mathcal{R}(X)^{\perp}) = n$, então o conjunto $\{y_i;\ i = 1, ..., n+1\}$ é linearmente dependente, ou seja, existem escalares não todos nulos $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i . y_i = 0. \quad (**)$$

Agora, como $\{z_i;\ i = 1, ..., n+1\}$ é um subconjunto de $\mathcal{M}$ linearmente independente e $\{\alpha_i;\ i = 1, ..., n+1\} \neq \{0\}$, então:

1. $0 \neq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i . z_i \in \mathcal{M}$, e
2. $0 \neq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i . z_i \overbrace{=}^{por\ (*)} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i . x_i + \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i . y_i \overbrace{=}^{por\ (**)} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i . x_i \in \mathcal{R}(X)$.

Logo,

$$0 \neq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i . z_i \in \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M},$$

como queríamos demonstrar. Portanto, $X \in \mathcal{C}$.

$\square$

Observação 4.38 *Lembrando que a codimensão de um subespaço $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$, denotado por codim$(\mathcal{M})$, é a dimensão de qualquer complemento algébrico de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{K}$ (complemento algébrico de $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$ é um subespaço $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$ e $\mathcal{K} = \mathcal{M} + \mathcal{N}$), então o que a proposição acima nos mostra é que:*

(a) *Se* $X \in \mathcal{C}$*, então* $dim(\mathcal{R}(X)^{\perp}) < \infty$.

(b) *Se* $\mathcal{R}(X)$ *é fechado de codimensão finita, então* $X \in \mathcal{C}$.

E isso nos mostra que a hipótese $X \in \mathcal{C}$ *é forte.*

Finalizaremos essa seção com um resultado que nos fornece uma caracterização dos operadores de classe $\mathcal{C}$.

Teorema 4.39 *Seja* $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$ *para todo subespaço* $\mathcal{M}$ *de dimensão infinita em* $\mathcal{K}$*, isto é,* $X \in \mathcal{C}$.
(ii) $dim(\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}) = \infty$ *para todo subespaço* $\mathcal{M}$ *de dimensão infinita em* $\mathcal{K}$.

Demonstração: Trivialmente $(ii) \Rightarrow (i)$.
Mostremos que $(i) \Rightarrow (ii)$. Faremos a prova por absurdo: provaremos que (i) e a negação de (ii) nos levam a um absurdo. Suponha a negação de (ii), isto é, suponha que existe um subespaço $\mathcal{M}$ de $\mathcal{K}$ tal que $dim(\mathcal{M}) = \infty$ e $dim(\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}) = n < \infty$.
Suponha que (i) seja verdade. Então

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\},$$

logo $dim(\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}) = n \geq 1$. Como $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}$ é um subespaço linear (pois é a interseção de subespaços lineares) que é fechado (pois tem dimensão finita), então existe uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ para $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}$, ou seja,

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} = span\,\{e_1, ..., e_n\}.$$

Agora, como $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}$ é um subespaço contido no subespaço $\mathcal{M}$ e $dim(\mathcal{M}) = \infty$, então podemos estender essa base de $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}$ para uma base ortonormal $\{e_i; i \geq 1\}$ para $\mathcal{M}$, isto é,

$$\mathcal{M} = span\,\{e_i; i \geq 1\}^{-}.$$

Considere o subespaço

$$\mathcal{M}' = span\,\{e_i; i \geq n+1\}^{-}.$$

Claramente, $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ é um subespaço de dimensão infinita de $\mathcal{K}$. Logo, por (i), existe

$$x \in \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}' \text{ com } x \neq 0.$$

Como $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, então

$$x \in \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}' \subseteq \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} = span\,\{e_1, ..., e_n\},$$

o que é um absurdo pois

$$x \neq 0$$

e

$$x \in \mathcal{M}' = \overline{span}\{e_i; i \geq n+1\},$$

que é ortogonal à $span\{e_1, ..., e_n\}$. Essa contradição conclui a prova do teorema.

$\square$

Combinando os resultados até então apresentados, mostraremos na próxima seção que todas as perguntas em aberto listadas no Capítulo 2 possuem respostas *afirmativas se supusermos o caso particular onde as transformações envolvidas pertençam à classe $\mathcal{C}$.*

4.3 Subespaços Invariantes e Transformações de Classe $\mathcal{C}$

Nessa seção, veremos como as transformações de classe $\mathcal{C}$ podem colaborar positivamente para a busca de respostas parciais para problemas em aberto existentes na teoria de operadores em espaços de Hilbert complexos, separáveis e de dimensão infinita. Iniciaremos apresentando um teorema que resulta da combinação do Lema 3.4, do Corolário 3.8 e da Definição 4.9, do qual temos uma extensão do Corolário 3.8.

Teorema 4.40 *Suponha que $T \in B[\mathcal{H}]$ está densamente entrelaçado à $L \in B[\mathcal{K}]$, ou seja, existe $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tal que $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ e $XT = LX$. Se L possui um subespaço redutor não-trivial e $X \in \mathcal{C}$, então T possui subespaço invariante não-trivial.*

Demonstração: Seja $\mathcal{M}$ é um subespaço não-trivial de $\mathcal{K}$ que é L-redutor. Temos dois casos a considerar:

1º caso: Se $dim(\mathcal{M}) < \infty$, então o Corolário 3.8 garante que $X^{-1}(\mathcal{M}^{\perp})$ é um subespaço invariante não-trivial para T.

2º caso: Se $dim(\mathcal{M}) = \infty$, como $X \in \mathcal{C}$, então

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}.$$

Logo, como $\mathcal{M}$ é L-invariante não-trivial e $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$, segue do Lema 3.4 que $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço T-invariante não-trivial.

Portanto, em qualquer caso, T possui subespaço invariante não-trivial.

$\square$

Segue diretamente do 2º caso da demonstração do Teorema 4.40 o seguinte corolário.

Corolário 4.41 *Suponha que $T \in B[\mathcal{H}]$ está densamente entrelaçado à $L \in B[\mathcal{K}]$, ou seja, existe $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tal que $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ e $XT = LX$. Se L tem um subespaço invariante não-trivial $\mathcal{M}$ de dimensão infinita e $X \in \mathcal{C}$, então existe um subespaço invariante não-trivial para T.*

Como caso particular do Teorema 4.40, temos também o seguinte resultado (que generaliza o Corolário 3.9).

Corolário 4.42 *Suponha que $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma transformada quaseafim de $L \in B[\mathcal{K}]$, ou seja, existe $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ quaseafim tal que $XT = LX$. Se L tem um subespaço redutor não-trivial e $X \in \mathcal{C}$, então T possui um subespaço invariante não-trivial.*

Esse corolário responde de maneira **parcial e afirmativa**, para o caso particular de transformações de classe $\mathcal{C}$, a seguinte pergunta em [KUB1, p. 68], que foi apresentada no Capítulo 2:

Pergunta 2.2: "Uma tranformada quaseafim de um operador redutível tem subespaço invariante não-trivial?"

Em [RAD1, p. 194] e em [KUB1, p. 68] existe a seguinte questão (que também foi exposta no Capítulo 2):

Pergunta 2.3: "Uma tranformada quaseafim de um operador normal possui um subespaço invariante não trivial?"

Vimos que a Pergunta 2.2 acima tem resposta parcial afirmativa para o caso particular de transformações de classe $\mathcal{C}$ pelo Corolário 4.42. A Pergunta 2.3 acima é um caso particular da Pergunta 2.2, pois todo operador normal é redutível (isto é, tem subespaço redutor não-trivial, caso atue em espaço de dimensão maior do que 1, (ver Proposição 1.25)). Desse modo, para o caso particular de transformações de classe $\mathcal{C}$, obtemos como consequência o Teorema 4.40 e respondemos de maneira parcial, mas afirmativamente, a Pergunta 2.2 e, em particular, respondemos parcialmente também a Pergunta 2.3, tudo para o caso particular de transformações de classe $\mathcal{C}$. Ambas as perguntas no caso geral permanecem em aberto.

Desse modo, temos mais um caso particular imediato do Teorema 4.40.

Corolário 4.43 *Suponha que $T \in B[\mathcal{H}]$ está densamente entrelaçado a um operador normal $N \in B[\mathcal{K}]$, ou seja, existe $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tal que $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ e $XT = NX$. Se $X \in \mathcal{C}$, então T possui um subespaço invariante não-trivial.*

Observação 4.44 *Note que o Corolário 4.43 também é um caso particular do Corolário 4.17. De fato, observe que a hipótese $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ no enunciado do corolário acima é desnecessária pelo Corolário 4.17.*

Apresentaremos agora mais uma consequência imediata dos resultados acima. Para tal objetivo, lembremos que: como todo operador unitário é normal (isso segue da própria definição), e como respondemos a Pergunta 2.2 de maneira parcial afirmativa (claro, supondo transformações de classe $\mathcal{C}$), então segue como um caso particular imediato da Pergunta 2.2 a seguinte afirmação:

Se $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma transformada quaseafim de um operador unitário $U \in B[\mathcal{K}]$, ou seja, se existe $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ injetivo tal que $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ e $XT = UX$, e se $X \in \mathcal{C}$, então T possui um subespaço invariante não-trivial.

Note que essa afirmação responde de maneira **parcial afirmativa** a Pergunta 2.4 apresentada no Capítulo 2, para o caso particular de transformações de classe $\mathcal{C}$:

Pergunta 2.4: "Uma transformada quaseafim de um operador unitário possui subespaço invariante não-trivial?"

Portanto, temos o seguinte caso particular para contrações:

Se uma contração $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma transformada quaseafim de um operador unitário $U \in B[\mathcal{K}]$, ou seja, se existe $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ injetivo tal que $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ e $XT = UX$, e se $X \in \mathcal{C}$, então T possui um subespaço invariante não-trivial.

Claro, como caso particular, isso também responde de maneira **parcial afirmativa,** para transformações de classe $\mathcal{C}$, a seguinte pergunta de [KUB1, p. 73, Pergunta 2] que apresentamos no segundo capítulo desse trabalho:

Pergunta 2.1': "Uma contração que é uma transformada quaseafim de um operador unitário, possui subespaço invariante não-trivial?"

No entanto, essa pergunta é **equivalente** a seguinte pergunta de [KUB1, p.72, Pergunta 1] e [KUB2] que foi exposta no Capítulo 2:

Pergunta 2.1: "Uma contração** $T \notin C_{00}$ **tem subespaço invariante não-trivial?"

*Como respondemos de forma parcial, para o caso particular de transformações de classe $\mathcal{C}$, e afirmativamente a Pergunta 2.1', e as Perguntas 2.1' e 2.1 são equivalentes, então temos também uma resposta **parcial afirmativa** para a Pergunta 2.1.*

Finalizaremos essa seção com mais duas consequências dos resultados vistos até o momento, a saber, o Teorema 4.48 e o Teorema 4.49. Como caso particular e imediato do Corolário 4.42, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.45 *Suponha que $T \in B[\mathcal{H}]$ e $L \in B[\mathcal{K}]$ são quasesimilares, ou seja, se existem transformações quaseafins $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ e $Y \in B[\mathcal{K}, \mathcal{H}]$ tais que*

$$XT = LX \quad e \quad TY = YL.$$

Se $X \in \mathcal{C}$ (respectivamente, $Y \in \mathcal{C}$) e L (respectivamente, T) possui um subespaço redutor não-trivial, então T (respectivamente, L) possui um subespaço invariante não-trivial.

Na verdade, vale um resultado mais geral, a saber, o Teorema 4.48 abaixo. Para provar tal teorema, precisamos da seguinte proposição que pode ser encontrada em [KUB7, Proposição 5.76].

Proposição 4.46 *Se $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, então:*
(a) $\mathcal{N}(X) = \mathcal{R}(X^*)^\perp = \mathcal{N}(X^*X)$.
(b) $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{N}(X^*)^\perp = \mathcal{R}(XX^*)^-$.
(a*) $\mathcal{N}(X^*) = \mathcal{R}(X)^\perp = \mathcal{N}(XX^*)$.
(b*) $\mathcal{R}(X^*)^- = \mathcal{N}(X)^\perp = \mathcal{R}(X^*X)^-$.

Observação 4.47 *Seja* $X \in B[\mathcal{H},\mathcal{K}]$. X *é injetiva se, e somente se,* $\mathcal{N}(X) = \{0\}$. *Além disso, a Proposição 4.46 garante que:*

$$\mathcal{R}(X^*)^- = \mathcal{N}(X)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}.$$

Portanto,

$$X \ \textit{injetiva} \Rightarrow X^* \ \textit{tem imagem densa.}$$

Agora estamos em condições de apresentar outra consequência envolvendo transformações de classe $\mathcal{C}$.

Teorema 4.48 *Suponha que* $T \in B[\mathcal{H}]$ *e* $L \in B[\mathcal{K}]$ *são quasesimilares, ou seja, se existem transformações quaseafins* $X \in B[\mathcal{H},\mathcal{K}]$ *e* $Y \in B[\mathcal{K},\mathcal{H}]$ *tais que*

$$XT = LX \ \ e \ \ TY = YL.$$

Se $X \in \mathcal{C}$ *e* $\mathcal{M}$ *é um subespaço de* $\mathcal{K}$ *que é* L*-invariante não-trivial, então* T *possui um subespaço invariante não-trivial.*

Demonstração: Temos dois casos a considerar:

1º caso: Se $dim(\mathcal{M}) = \infty$, como $X \in \mathcal{C}$, então

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}\,.$$

Como $XT = LX$, $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ e $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$, o Lema 3.4 garante que $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço invariante não-trivial para T.

2º caso: Suponha $dim(\mathcal{M}) < \infty$.
Como Y é injetiva, segue da Observação 4.47 que Y^* tem imagem densa, ou seja,

$$\mathcal{R}(Y^*)^- = \mathcal{K}. \quad (I)$$

Pela Proposição 3.7, como $dim(\mathcal{M}) < \infty$, temos que

$$\mathcal{R}(Y^*) \cap \mathcal{M}^\perp \neq \{0\}\,. \quad (II)$$

Agora, como $TY = YL$, então (ver, por exemplo, [KRE, Teorema 3.9-4])

$$Y^*T^* = L^*Y^*. \quad (III)$$

Além disso, como $\mathcal{M}$ é L-invariante não-trivial, então segue da Proposição 1.18 que $\mathcal{M}^\perp$ é um subespaço L^*- invariante não-trivial.
Desse modo, de $(I), (II)$ e (III), juntamente com o Lema 3.4, obtemos que

$$Y^{*-1}(\mathcal{M}^\perp)$$

é um subespaço T^*-invariante não-trivial. Portanto, segue da Proposição 1.18 que T possui um subespaço invariante não-trivial, a saber,

$$[Y^{*-1}(\mathcal{M}^{\perp})]^{\perp}.$$

Logo, em qualquer caso, T possui subespaço invariante não-trivial. $\square$

Com esse resultado, mostramos que:

Se $T \in B[\mathcal{H}]$ e $L \in B[\mathcal{K}]$ são quasesimilares, $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ é quaseafim e de classe $\mathcal{C}$, tal que $XT = LX$, e L possui subespaço invariante não-trivial, então T admite um subespaço invariante não-trivial,

o que responde de maneira **parcial**, para transformações de classe $\mathcal{C}$, e **afirmativa** a Pergunta 2.5, que pode ser encontrada em [RAD1, p. 194] e em [KUB1, p. 68], que apresentamos no Capítulo 2:

Pergunta 2.5: "Quasesimilaridade preserva subespaços invariantes não-triviais?"

Note que na demonstração do Teorema 4.48 *não* utilizamos a injetividade do operador X. Além disso, a injetividade do operador Y foi utilizada apenas para garantir que $\mathcal{R}(Y^*)^- = \mathcal{K}$, e a densidade da imagem de Y *não* foi utilizada.

Desse modo, a mesma demonstração do Teorema 4.48 vale para um resultado mais geral, a saber, o Teorema 4.49 abaixo.

Teorema 4.49 *Sejam $T \in B[\mathcal{H}], L \in B[\mathcal{K}], X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ e $Y \in B[\mathcal{K}, \mathcal{H}]$ tais que*

$$XT = LX \quad e \quad TY = YL.$$

Se $\mathcal{M}$ é um subespaço de $\mathcal{K}$ que é invariante não-trivial para L, então:

1. *Se $dim(\mathcal{M}) = \infty$, basta que $X \in \mathcal{C}$ para obtermos que $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço invariante não-trivial para T.*

2. *Se $dim(\mathcal{M}) < \infty$, basta que $\mathcal{R}(Y^*)^- = \mathcal{K}$ para garantirmos que $[Y^{*-1}(\mathcal{M}^{\perp})]^{\perp}$ é um subespaço invariante não-trivial para T.*

Estas são as principais consequências encontradas utilizando transformações de classe $\mathcal{C}$, juntamente com os resultados vistos nos capítulos anteriores. Como comentamos anteriormente, combinando os resultados existentes com essa nova classe, obtemos *respostas parciais afirmativas* para todas as cinco perguntas em aberto na teoria de operadores em espaços de Hilbert que enunciamos anteriormente, para o caso particular de transformação de classe $\mathcal{C}$.

Na próxima seção veremos mais alguns resultados com respostas parciais para as perguntas listadas nos Capítulos 2 e 3, além de analisarmos o caso em que a imagem das transformações envolvidas satisfaz uma determinada condição.

4.4 Resultados Adicionais

Nessa seção, finalizaremos esse capítulo apresentando alguns resultados parciais com relação às perguntas em aberto listadas anteriormente, que foram motivados pela Pergunta 4.36 (Será que toda transformação com imagem densa é de classe $\mathcal{C}$?). Tal pergunta é um caso particular da seguinte questão:

Pergunta 4.50 *Se $\mathcal{R}$ é um subespaço linear denso em $\mathcal{K}$ e $\mathcal{M}$ é um subespaço de dimensão infinita em $\mathcal{K}$, vale que*

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} \neq \{0\}?$$

Essa pergunta possui resposta **negativa**, como apresentaremos agora. De fato, se

$$\mathcal{R} = c_{00} := \{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty};\ \alpha_n \neq 0 \text{ somente para finitos } n's\}$$

(o espaço vetorial das sequências com apenas um número finito de coordenadas não-nulas), então sabemos que $\mathcal{R}$ é denso em

$$\ell^p = \left\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty};\ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < \infty\right\}$$

para todo $1 \leq p < \infty$. Em 1964, foi construído em [ERD, Corolário do Teorema 4] um subespaço $\mathcal{M} \subset \ell^2$ tal que $dim(\mathcal{M}) = \infty$ e

$$\ell^p \cap \mathcal{M} = \{0\},$$

para todo $p < 2$. Em particular,

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\},$$

o que responde a Pergunta 4.50 na **negativa**, já que ℓ^2 é um espaço de Hilbert e $\mathcal{M}$ é um subespaço de dimensão infinita de ℓ^2. A referência [ERD] nos foi encaminhada por Paulo

César M. Vieira. Apresentaremos abaixo uma simplificação do exemplo de [ERD] que nos foi sugerida por Nílson da Costa Bernardes Júnior (N. C. Bernardes Jr.).

Exemplo 4.51 *Consideremos* $\mathcal{K} = \ell^2$*,* $\mathcal{R} = c_{00}$ *e* $\{N_1, N_2, ...\}$ *uma partição infinita de* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ *em subconjuntos infinitos e dois a dois disjuntos. Para cada* $m \in \mathbb{N}$*, defina*

$$x^{(m)} := (x_j^{(m)}),$$

onde $x_j^{(m)} = 0$ *para* $j \notin N_m$*, e* $x_j^{(m)} = \frac{1}{2^j}$ *para* $j \in N_m$*.*

É fácil verificar que $x^{(m)} \in \ell^2$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e que

$$\left\langle x^{(m)}, x^{(n)} \right\rangle = 0$$

sempre que $m \neq n$. Desse modo, o conjunto $\left\{x^{(m)};\ m = 1, 2, ...\right\}$ é ortogonal em $\mathcal{K}$ e, portanto, o conjunto

$$\left\{f^{(m)};\ m = 1, 2, ...\right\}$$

é ortonormal, onde $f^{(m)} := \frac{x^{(m)}}{\left\|x^{(m)}\right\|}$ ($\|.\|$ representa a norma usual de ℓ^2). Considere agora

$$\mathcal{M} := span\left\{f^{(m)};\ m = 1, 2, ...\right\}^{-}.$$

Claramente, $\mathcal{M}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{K}$ com dimensão infinita.

Afirmação: $\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\}$.
De fato, dado $y \in \mathcal{M}$, como $\left\{f^{(m)};\ m = 1, 2, ...\right\}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{M}$, pelo Teorema da Série de Fourier aplicado ao espaço de Hilbert $\mathcal{M}$, podemos escrever y de maneira única como

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle y, f^{(m)} \right\rangle f^{(m)}.$$

Se $y \neq 0$, então existe ao menos um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\langle y, f^{(m_0)} \right\rangle \neq 0.$$

Como os $f^{(m)}$ foram construídos a partir de uma partição de $\mathbb{N}$, nenhuma das coordenadas de y associadas ao termo $\left\langle y, f^{(m_0)} \right\rangle f^{(m_0)}$ pode ser anulada pelos demais termos da série acima. Logo, como cada $f^{(m)}$ possui infinitas coordenadas não-nulas, então y possui infinitas coordenadas não-nulas, ou seja, $y \notin \mathcal{R}$. Portanto,

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\},$$

o que prova a Afirmação e conclui o exemplo. $\square$

Fazendo pequenas modificações, o mesmo argumento acima pode ser utilizado na construção realizada em [ERD] para concluir que

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\}\,.$$

Desse modo, como comentado na Seção 4.1, esse exemplo responde na **afirmativa** a Pergunta 4.4. Além disso, esses exemplos nos levam a intuir a possibilidade da Pergunta 4.36 ("Será que toda transformação com imagem densa é de classe $\mathcal{C}$?") possuir resposta negativa. No entanto, não conseguimos responder a essa pergunta.

Como vimos acima, a Pergunta 4.50 possui resposta negativa. O que aconteceria se enfraquecermos um pouco as hipóteses sobre o subespaço $\mathcal{M}$ naquela pergunta, no seguinte sentido:

Pergunta 4.52 *Se $\mathcal{R}$ é um subespaço linear denso em $\mathcal{K}$ e $\mathcal{M}$ é um subespaço arbitrário em $\mathcal{K}$, vale que*

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} \neq \{0\} \quad \textit{ou} \ \mathcal{R} \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\}?$$

A Proposição 3.7 apresentada anteriormente garante que essa pergunta (Pergunta 4.52) tem resposta *afirmativa* nos casos em que $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{M}^{\perp}$ tem dimensão *finita*. Desse modo, a principal questão é:

Pergunta 4.53 *A Pergunta 4.52 tem resposta afirmativa quando os subespaços $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^{\perp}$ têm dimensão infinita?*

Mostraremos no exemplo abaixo que, além dos casos em que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^{\perp}$ tem dimensão finita (como comentado acima), temos mais um caso afirmativo para a Pergunta 4.52, que será baseado no Exemplo 4.51.

Exemplo 4.54 *Consideremos $\mathcal{K} = \ell^2$, $\mathcal{R} = c_{00}$ e $\{N_1, N_2, ...\}$ uma partição infinita de $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ em subconjuntos infinitos e dois a dois disjuntos. Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina*

$$x^{(m)} := (x_j^{(m)}),$$

onde $x_j^{(m)} = 0$ para $j \notin N_m$, e $x_j^{(m)} = \frac{1}{2^j}$ para $j \in N_m$.

Como vimos no Exemplo 4.51, temos que

$$\mathcal{M} := span\left\{f^{(m)};\ m = 1, 2, ...\right\}^{-},$$

onde $f^{(m)} := \frac{x^{(m)}}{\|x^{(m)}\|}$, é um subespaço fechado de $\mathcal{K}$ com dimensão infinita tal que

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\}.$$

Vamos mostrar que $dim(\mathcal{M}^{\perp}) = \infty$ e que

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\}.$$

Como $\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\}$, segue da Proposição 3.7 que

$$dim(\mathcal{M}^{\perp}) = \infty.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $N_1 = \{1 < j_1 < j_2, ...\}$, ou seja,

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, 0, ..., 0, \frac{1}{2^{j_1}}, 0, ..., 0, \frac{1}{2^{j_2}}, 0, ...\right).$$

Considerando a sequência $y := (y_n)_{n \geq 1}$ tal que

$$y_1 := \frac{1}{2^{j_1}},\ \ y_{j_1} := -\frac{1}{2}\ \ e\ \ y_n = 0 \ \ \text{para todo}\ \ n \neq 1, j_1,$$

ou seja,

$$y := (y_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{2^{j_1}}, 0, ..., 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, ...\right) \in c_{00} = R,$$

vemos facilmente que

$$\left\langle f^{(1)}, y\right\rangle = \frac{1}{\|x^{(1)}\|}\left\langle x^{(1)}, y\right\rangle = 0. \qquad (I)$$

Além disso, para todo $m \geq 2$ (pela definição dos $f^{(m)}$) segue que

$$\left\langle f^{(m)}, y\right\rangle = 0. \qquad (II)$$

Como $\left\{f^{(m)};\ m = 1, 2, ...\right\}$ é uma base para $\mathcal{M}$, segue de (I) e (II) que

$$y \in \mathcal{M}^{\perp}.$$

Logo, $0 \neq y \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}^{\perp}$, o que conclui o exemplo, isto é

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\}.$$

Fazendo pequenas modificações, o mesmo argumento acima pode ser utilizado na construção realizada em [ERD] para concluir que

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\} \ \ \text{mas} \ \ \mathcal{R} \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\}.$$

Note que o Exemplo 4.51 (assim como o resultado em [ERD]) exibe uma situação em que

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\}\,,$$

e mostramos no exemplo acima que nesses casos, vale que

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\}\,.$$

No entanto, N. C. Bernardes Jr., em comunicação pessoal, nos sugeriu um exemplo que mostra que as Perguntas 4.52 e 4.53 possuem respostas ***negativas***. Na verdade, ele sugeriu um resultado mais geral, como apresentaremos no exemplo abaixo.

Exemplo 4.55 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach separável e sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ subespaços de $\mathcal{X}$ de codimensão infinita. Então existe um subespaço linear $\mathcal{R}$ que é denso em $\mathcal{X}$ tal que*

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\} \text{ e } \mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}.$$

Para a demonstração, necessitamos das seguintes afirmações:

Afirmação 1: Se $\mathcal{M}$ é um subespaço próprio de $\mathcal{X}$, então interior de $\mathcal{M}$ (que denotaremos por $int(\mathcal{M})$) é vazio.

Prova da Afirmação 1: Se existisse $x_0 \in int(\mathcal{M})$, então existiria $\epsilon > 0$ tal que

$$B(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathcal{X};\ \|x - x_0\| < \epsilon\} \subseteq \mathcal{M}.$$

Como $\mathcal{M}$ é um subespaço, então teríamos que

$$B(0, \epsilon) = B(x_0, \epsilon) - \{x_0\} = \{x - x_0;\ x \in B(x_0, \epsilon)\} \subseteq \mathcal{M}.$$

Mas seguiria daí que

$$nB(0, \epsilon) \subseteq \mathcal{M},\ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

o que implicaria que

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M},$$

pois todo $x \in \mathcal{X}$ pertence a algum $nB(0, \epsilon)$. Assim, teríamos que $\mathcal{X} = \mathcal{M}$, o que é um absurdo. Portanto, $int(\mathcal{M}) = \emptyset$, o que conclui a prova da Afirmação 1. $\square$

Afirmação 2: Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são subespaços lineares próprios de $\mathcal{X}$, então $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ tem interior vazio.

Prova da Afirmação 2: Se $\mathcal{M}$ é um subespaço contido propriamente em $\mathcal{N}$, então $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \mathcal{N}$ e a Afirmação 1 nos garante que

$$int(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = int(\mathcal{N}) = \emptyset.$$

O caso em que $\mathcal{N}$ é um subespaço contido propriamente em $\mathcal{M}$ é análogo. Logo, podemos supor que

$$\mathcal{M} \not\subset \mathcal{N} \ \ e \ \ \mathcal{N} \not\subset \mathcal{M}. \quad (I)$$

Suponhamos que exista $x_0 \in int(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(x_0, \epsilon) \subset \mathcal{M} \cup \mathcal{N}.$$

Temos 3 casos a considerar:

1º caso: Suponhamos $x_0 \in \mathcal{M}$ mas $x_0 \notin \mathcal{N}$.
Tomando $y_0 \in \mathcal{N}$, com $y_0 \notin \mathcal{M}$ (tal y_0 existe por (I)), temos que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$x_n = x_0 + \frac{1}{n} y_0, \ \ \forall n \geq 1$$

é uma sequência em $\mathcal{X}$ tal que

$$x_n \notin \mathcal{M} \cup \mathcal{N}, \text{ para todo } n \geq 1. \quad \text{(II)}$$

Note que $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$. Logo, existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$x_n \in B(x_0, \epsilon) \subset \mathcal{M} \cup \mathcal{N}, \ \ \forall \ n \geq n_0,$$

o que contradiz (II). Logo, esse caso não pode ocorrer.

2º caso: Se supusermos que $x_0 \in \mathcal{N}$ mas $x_0 \notin \mathcal{M}$, temos um caso análogo ao anterior.

3º caso: Suponhamos que $x_0 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.
Como $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são subespaços e $x_0 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, dado $y \in B(x_0, \epsilon) \subset \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$, temos que

$$y - x_0 \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}.$$

Mas isso implica que

$$B(0, \epsilon) = B(x_0, \epsilon) - \{x_0\} = \{y - x_0; \ y \in B(x_0, \epsilon)\} \subset \mathcal{M} \cup \mathcal{N}.$$

Como $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são subespaços e $B(0, \epsilon) \subset \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$, então

$$nB(0, \epsilon) \subset \mathcal{M} \cup \mathcal{N}, \ \forall n \geq 1,$$

o que implica que

$$\mathcal{X} = \mathcal{M} \cup \mathcal{N},$$

pois todo $x \in \mathcal{X}$ pertence a algum $nB(0, \epsilon)$. Mas isso é um absurdo pois como $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ satisfazem (I), existe $x \in \mathcal{M}$ com $x \notin \mathcal{N}$ e existe $y \in \mathcal{N}$ tal que $y \notin \mathcal{M}$ e daí segue que

$$x + y \in \mathcal{X} \text{ mas } x + y \notin \mathcal{M} \cup \mathcal{N}.$$

Logo, esse caso também não pode ocorrer.
Portanto, nenhum dos casos pode ocorrer e, desse modo, também não pode existir $x_0 \in int(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$, o que conclui a prova da Afirmação 2. $\square$

Agora estamos em condições de provar o exemplo. Como $\mathcal{X}$ é separável, então existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que é densa em $\mathcal{X}$. Agora, como $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ tem interior vazio, existe $y_1 \in B(x_1; 1)$ tal que

$$y_1 \notin \mathcal{M} \cup \mathcal{N}.$$

Sendo $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ subespaços de $\mathcal{X}$ de codimensão infinita, então $\mathcal{M} + span\{y_1\}$ e $\mathcal{N} + span\{y_1\}$ são subespaços lineares próprios de $\mathcal{X}$ e, pela Afirmação 2, sabemos que

$$int\left((\mathcal{M} + span\{y_1\}) \cup (\mathcal{N} + span\{y_1\})\right) = \emptyset,$$

donde existe $y_2 \in B(x_2; 1/2)$ tal que

$$y_2 \notin (\mathcal{M} + span\{y_1\}) \cup (\mathcal{N} + span\{y_1\}).$$

Novamente, utilizando o fato de que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são subespaços de $\mathcal{X}$ de codimensão infinita, então $int\left((\mathcal{M} + span\{y_1, y_2\}) \cup (\mathcal{N} + span\{y_1, y_2\})\right) = \emptyset$. Logo, existe $y_3 \in B(x_3; 1/3)$ tal que

$$y_3 \notin (\mathcal{M} + span\{y_1, y_2\}) \cup (\mathcal{N} + span\{y_1, y_2\}).$$

Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que tem as seguintes propriedades, para todo $n \geq 2$:

(1) $y_n \in B(x_n; 1/n)$;
(2) $y_n \notin (\mathcal{M} + span\{y_1, ..., y_{n-1}\}) \cup (\mathcal{N} + span\{y_1, ..., y_{n-1}\})$;
(3) e como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é densa em $\mathcal{X}$, então segue de (1) que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é densa em $\mathcal{X}$.
Logo, de (3) segue que

$$\mathcal{R} = span\{y_1, y_2, y_3, ...\}$$

é um subespaço linear que é denso em $\mathcal{X}$. Note também que $\mathcal{R} \neq \mathcal{X}$, pela seguinte afirmação.

Afirmação 3: Espaços de Banach de dimensão infinita não possuem base de Hamel enumerável.

Prova da Afirmação 3: Suponha que o espaço de Banach $\mathcal{X}$ de dimensão infinita tenha uma base de Hamel enumerável

$$\{e_1, e_2, ...\}.$$

Para cada inteiro $n > 0$, considere o subespaço linear

$$\mathcal{M}_n := span\{e_1, ..., e_n\}.$$

Como $\mathcal{M}_n$ tem dimensão finita, é fechado em $\mathcal{X}$. Agora, como $\mathcal{X}$ tem dimensão infinita, então $\mathcal{M}_n$ é um subespaço próprio de $\mathcal{X}$, donde tem interior vazio (pela Afirmação 1). Sendo $\{e_1, e_2, ...\}$ é uma base de Hamel de $\mathcal{X}$, temos que $\mathcal{X}$ é a união dos $\mathcal{M}_n' s$. Mas isto contradiz o Teorema de Baire (ver, por exemplo, [KUB7, Teorema 3.55]), o que conclui a prova da afirmação. $\square$

Afirmação 4: Pela forma como os $y_n' s$ foram construídos, temos

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\} \text{ e } \mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}.$$

Prova da Afirmação 4: De fato, se $y \in \mathcal{R} \cap \mathcal{M}$ e $y \neq 0$, então y é da forma

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \;\; \in \;\; \mathcal{R} \cap \mathcal{M}$$

com $\alpha_n \neq 0$. Mas isso implicaria que

$$y_n = \frac{1}{\alpha_n} y - \frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i \;\; \in \;\; \mathcal{M} + span\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\}$$

o que contradiz (2). Portanto,

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{M} = \{0\}.$$

Analogamente, mostra-se que

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \{0\}$$

o que conclui a prova da Afirmação 4 e finaliza o exemplo. $\square$

Esse exemplo nos mostra, em particular, que tomando $\mathcal{X} = \mathcal{H}$ um espaço Hilbert separável e $\mathcal{N} = \mathcal{M}^{\perp}$, onde $\mathcal{M}$ é um subespaço que tem dimensão e codimensão infinitas, temos o contra-exemplo para as Perguntas 4.52 e 4.53.

Conforme vimos acima, se pensarmos em subespaços lineares e densos de maneira geral, então Bernardes deu respostas para as Perguntas 4.52 e 4.53 na negativa. O que apresentaremos agora são algumas observações que obtemos se supormos que a transformação $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tem imagem densa em $\mathcal{K}$ e satisfaz as condições da Pergunta 4.52.

Observação 4.56 *Seja $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$. Diremos que $\mathcal{R}(X)$ satisfaz a Pergunta 4.52 se $\mathcal{R}(X)$ é densa em $\mathcal{K}$ e*

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\} \;\; \textit{ou} \;\; \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \{0\},$$

para todo subespaço $\mathcal{M}$ do espaço $\mathcal{K}$. Suponha que $T \in B[\mathcal{H}]$ está densamente entrelaçado à $L \in B[\mathcal{K}]$, ou seja, existe $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tal que $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ e $XT = LX$. Se L tem um subespaço redutor não-trivial e $\mathcal{R}(X)$ satisfaz a Pergunta 4.52, então T possui um subespaço invariante não-trivial.

De fato, seja $\mathcal{M}$ é um subespaço não-trivial de $\mathcal{K}$ que é L-redutor. Temos três casos a considerar:

1º caso: Se $dim(\mathcal{M}) < \infty$, então o Corolário 3.8 garante que $X^{-1}(\mathcal{M}^\perp)$ é um subespaço T-invariante não-trivial.
2º caso: Se $dim(\mathcal{M}^\perp) < \infty$, então o Corolário 3.8 aplicado a $\mathcal{M}^\perp$ garante que $X^{-1}(\mathcal{M})$ é um subespaço T-invariante não-trivial.
3º caso: Se $dim(\mathcal{M}) = \infty$ e $dim(M^\perp) = \infty$, como $\mathcal{R}(X)$ satisfaz a Pergunta 4.52 e $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$, então

$$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M} \neq \{0\} \quad \text{ou} \quad \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{M}^\perp \neq \{0\}\,.$$

Logo, pelo Lema 3.4, segue que

$$X^{-1}(\mathcal{M}) \quad \text{ou} \quad X^{-1}(\mathcal{M}^\perp)$$

é um subespaço T-invariante não-trivial.

Portanto, em qualquer caso, T possui subespaço invariante não-trivial.

□

Como casos particulares do caso acima, temos também as seguintes observações (a primeira abaixo generaliza o Corolário 3.9).

Observação 4.57 *Suponha que $T \in B[\mathcal{H}]$ é uma transformada quaseafim de $L \in B[\mathcal{K}]$, ou seja, existe $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ quaseafim tal que $XT = LX$. Considere o contexto da observação anterior, ou seja, suponha que X é tal que $\mathcal{R}(X)$ satisfaz a Pergunta 4.52. Se L tem um subespaço redutor não-trivial, então T possui um subespaço invariante não-trivial.*

Observação 4.58 *Suponha que $T \in B[\mathcal{H}]$ está densamente entrelaçado a um operador normal $N \in B[\mathcal{K}]$, ou seja, existe $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ tal que $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ e $XT = NX$. Considerando o contexto da Observação 4.56, ou seja, supondo que X é tal que $\mathcal{R}(X)$ satisfaz a Pergunta 4.52, temos que T possui um subespaço invariante não-trivial.*

Essas observações também respondem ***parcialmente***, para o caso particular de $\mathcal{R}(X)$ ser um subespaço linear denso como na Observação 4.56, na ***afirmativa*** as Perguntas 2.2 e 2.3, apresentadas anteriormente. Outros casos particulares das observações apresentadas acima são as seguintes:

Suponha que $T \in B[\mathcal{H}]$ ***é uma transformada quaseafim de um operador unitário*** $U \in B[\mathcal{K}]$***, ou seja, existe*** $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ ***tal que*** $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ ***e*** $XT = UX$***. Considere o contexto da Observação 4.56, ou seja, suponha que*** $\mathcal{R}(X)$ ***satisfaz a Pergunta 4.52. Então*** T ***possui um subespaço invariante não-trivial.***

Claro, também como caso particular, temos a seguinte afirmação:

Suponha que uma contração $T \in B[\mathcal{H}]$ ***é uma transformada quaseafim de um operador unitário*** $U \in B[\mathcal{K}]$***, ou seja, existe*** $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ ***tal que*** $\mathcal{R}(X)^- = \mathcal{K}$ ***e*** $XT = UX$***. Considere o contexto da Observação 4.56, ou seja, suponha que*** $\mathcal{R}(X)$ ***satisfaz a Pergunta 4.52. Então*** T ***possui um subespaço invariante não-trivial.***

Desse modo, analogamente ao que vimos na seção anterior, essas observações respondem também de maneira ***parcial***, para o caso particular em questão, ***mas afirmativa*** as Perguntas 2.4, 2.1' e 2.1 citadas nos capítulos anteriores. Essas são as respostas que obtivemos com relação às perguntas citadas no Capítulo 2 quando supomos o contexto de transformações de classe $\mathcal{C}$.

Assim, finalizamos esse trabalho observando que, nessa tese, analisamos basicamente as Perguntas 2.1 - 2.5 (juntamente com outras perguntas mais particulares) de forma que as hipóteses adicionais foram impostas nas transformações $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ que estavam envolvidas (as transformações que definimos como transformações de classe $\mathcal{C}$). O que pretendemos trabalhar posteriormente, é analisar novamente as perguntas apresentadas nessa tese mas agora sobre um outro ponto de vista, a saber, ao invés de impor condições nas transformações $X \in B[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ e $Y \in B[\mathcal{K}, \mathcal{H}]$ (como vimos nesse trabalho), vamos adicionar hipóteses apenas nos operadores $T \in B[\mathcal{H}]$ e $L \in B[\mathcal{K}]$ envolvidos.

Por exemplo, o que aconteceria se supormos que L pertence à classe dos operadores compactos? Ou se T ou L pertence à classe dos operadores hiponormais? Ou se T ou L pertence à classe dos operadores biquasetriangulares (para detalhes dessa classe, ver [KUB8])? Que resultados obteríamos?

Além destas perguntas, pretendemos voltar a analisar a Pergunta 4.36 ("Será que toda transformação com imagem densa é uma transformação de classe $\mathcal{C}$?") com base em resultados que se relacionam com uma classe de subespaços lineares chamados "*operator range*" (que são subespaços lineares $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ - que não são fechados necessariamente - tais que existe um operador $T \in B[\mathcal{H}]$ cuja imagem de T é $\mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{R}(T) = \mathcal{M}$). Conforme observamos logo após o Exemplo 4.55, se pensarmos em subespaços lineares e densos de maneira geral, então Bernardes deu respostas para as Perguntas 4.52 e 4.53 na negativa. No entanto, não sabemos se o mesmo ocorre quando os subespaços densos (que estão sendo considerados) são "*operator ranges*", ou seja, não sabemos o que ocorre quando os subespaços densos são imagens de alguma transformação linear limitada. Para mais detalhes sobre "*operator range*", ver por exemplo [FIL] e suas referências.

Estas são algumas das perguntas e caminhos que são motivações para futuras pesquisas no contexto apresentado no nosso trabalho, que se relacionam com os problemas de subespaços invariantes da teoria de operadores em espaços de Hilbert.

Referências Bibliográficas

[ABR1] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Invariant subspaces theorems for positive operators*, J. Funct. Anal. **124**, 95-111, 1994.

[ABR2] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Another characterization of the invariant subspace problem*, Operator Theory in Function Spaces and Banach Lattices, Operator Theory: Advances and Applications **75**, 15-31, Birkhäuser Verlag, 1995.

[ARG] S. A. Argyros and R. G. Haydon, *A hereditarily indecomposable L_∞-space that solves the scalar-plus-compact problem,* Acta Math. **206**(1), 1-54, 2011.

[ARO] N. Aronszajn and K. T. Smith, *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Ann. of Math. **60**, 345-350, 1954.

[ATZ] A. Atzmon, G. Godefroy and N. J. Kalton, *Invariant subspace and the exponential map*, Positivity **8**, 101-107, 2004.

[BEA] B. Beauzamy, *Introduction to operator theory and invariant subspaces*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[BER] H. Bercovici, *Notes on invariant subspaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **23**, 1-36, 1990.

[BRO1] S. W. Brown, *Some invariant subspaces for subnormal operators*, Integral Equations Operator Theory, **1/3**, 310-333, 1978.

[BRO2] S. W. Brown, *Hyponormal operators with thick spectra have invariant subspaces*, Ann. of Math. (2)**125**, 93-103, 1987.

[BRO3] S. W. Brown, B. Chevreau and C. Pearcy, *On the structure of contractions operators II,* J. Funct. Anal. **76**, 30-55, 1988.

[CHE] B. Chevreau and C. Pearcy, *On the structure of contraction operators with applications to invariant subspaces*, J. Funct. Anal. **67**, 360-379, 1986.

[CON] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, 2nd ed., Springer, New York, 1990.

[DAU1] J. Daughtry, *Hyperinvariant subspaces for approximately idempotent operator*, Proc. Amer. Math. Soc., **48**, 262-263, 1975.

[DAU2] J. Daughtry, *An invariant subspace problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **49**, 267-268, 1975.

[DOU] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, Academic Press, New York and London, 1972.

[DUG1] B. P. Duggal, I. H. Jeon and I. H. Kim, *On quasi-class $\mathcal{A}$-contractions*, Linear Algebra Appl. **436**, 3562-3567, 2012.

[DUG2] B. P. Duggal, C. S. Kubrusly, and I. H. Jeon, *Contractions satisfying the absolut value property* $|A|^2 \leq |A^2|$, Integral Equations Operator Theory **49**, 141-148, 2004.

[DUG3] B. P. Duggal, C. S. Kubrusly and N. Levan, *Paranormal contractions and invariant subspaces*, J. Korean Math. Soc. **40**, 933-942, 2003.

[DUG4] B. P. Duggal, C. S. Kubrusly and N. Levan, *Contraction of class $\mathcal{Q}$ and invariant subspaces*, Bull. Korean Math. Soc. **42**, 169-177, 2005.

[ENF1] P. Enflo, *On the invariant subspace problem in Banach spaces*, in: Seminaire Maurey-Schwartz (1975-1976) Espaces L^p, Applications Radonifiantes et gèomètrie des espaces de Banach, Exp. Nos. 14-15, Centre Math., École Polytech, Palaiseau, 7 pp., 1976.

[ENF2] P. Enflo, *On the invariant subspace problem for Banach spaces*, Acta Math. **158**, 213-313, 1987.

[ERD] P. Erdös, H. S. Shapiro and A. L. Shields, *Large and small subspaces of Hilbert spaces*, Michigan Math. J., **12**, 169-178, 1965.

[FIL] P. A. Filmore and J. P. Williams, *On operator ranges*, Adv. Math. **7**, 254-281, 1971.

[GAO] F. Gao, X. Li, *On *-class $\mathcal{A}$ contractions*, J. Inequal. Appl., **2013**, 2013.

[HAL1] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, 2nd. ed., Chelsea, New York, 1957.

[HAL2] P. R. Halmos, *Invariant subspaces of polynomially compact operators*, Pacific J. Math. **16**, 433-437, 1966.

[HAL3] P. R. Halmos, *Invariant subspaces*, 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1969.

[HAL4] P. R. Halmos, *Selecta research contributions*, Springer, New York, 1983.

[HOO] T. B. Hoover, *Hyperinvariant subspaces for n-normal operators,* Acta Sci. Math, **32**, 109-119, 1971.

[KER1] L. Kérchy, *On invariant subspace lattices of C_{11} -contractions*, Acta Sci. Math. (Szeged) **43**, 281-293, 1981.

[KER2] L. Kérchy, *Invariant subspaces of $C_{1.}$ - contractions with nonreductive unitary extensions*, Bull. London Math. Soc. **19**, 161-166, 1987.

[KER3] L. Kérchy, *On the residual parts of completely non-unitary contractions,* Acta Math. Hungar. **50**, 127-145, 1987.

[KER4] L. Kérchy, *Hyperinvariant subspaces of operators with non-vanishing orbits*, Proc. Amer. Math. Soc., **127**, 1363-1370, 1999.

[KER5] L. Kérchy, *Isometries with isomorphic invariant subspaces lattices,* J. Funct. Anal. **170**, 475-511, 2000.

[KER6] L. Kérchy, *Shift-type invariant subspaces of contractions*, J. Funct. Anal. **246**, 281-301, 2007.

[KER7] L. Kérchy and V. Q. Phong, *On invariant subspaces for power-bounded operators of class $C_{1.}$*, Taiwanese J. Math., **7**, 69-75, 2003.

[KIM1] J. Kim, *On invariant subspaces of operators in the class θ,* J. Math. Anal. Appl. **396**, 562-568, 2012.

[KIM2] J. Kim, *Invariant subspaces for operators whose polynomials satisfy the $(G_1)-$ condition,* J. Math. Anal. Appl. **401**, 554-559, 2013.

[KIM3] J. Kim and W. Y. Lee, *Invariant subspaces for operators whose spectra are Carathéodory regions,* J. Math. Anal. Appl. **371**, 184-189, 2010.

[KRE] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley, New York, 1989.

[KUB1] C. S. Kubrusly, *An introduction to models and decompositions in operator theory*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[KUB2] C. S. Kubrusly, *Equivalent invariant subspace problems*, J. Operator Theory **38**, 323-328, 1997.

[KUB3] C. S. Kubrusly, *Invariant subspaces for a class of $C_{1.}-$ contractions*, Adv. Math. Sci. Appl. **9**, 129-135, 1999.

[KUB4] C. S. Kubrusly, *Invariant subspaces and quasiaffine transforms of unitary operators*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **42**, 167-173, 2000.

[KUB5] C. S. Kubrusly, *Hilbert spaces operators - A problem solving approach*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[KUB6] C. S. Kubrusly, *Three decades of the Lomonosov invariant subspace theorem*, Adv. Math. Sci. Appl. **14**, 267-277, 2004.

[KUB7] C. S. Kubrusly, *The elements of operator theory*, 2nd ed., Birkhäuser, New York, 2011.

[KUB8] C. S. Kubrusly, *Contractions T for which A is a projection*, Acta Sci. Math. (Szeged), to appear, 2014.

[KUB9] C. S. Kubrusly and N. Levan, *Proper contractions and invariant subspaces*, Int. J. Math. Math. Sci. **28**, 223-230, 2001.

[KUB10] C. S. Kubrusly, P. C. M. Vieira, and D. O. Pinto, *A decomposition for a class of contractions*, Adv. Math. Sci. Appl. **6**, 523-530, 1996.

[LOM1] V. I. Lomonosov, *Invariant subspaces for operators commuting with compact operators*, Funkcional Anal. i. Prilozen **7**, 55-56 (Russian), 1973; Functional Anal. Appl. **7**, 213- 214 (English), 1973.

[LOM2] V. I. Lomonosov, *An extension of Burnside's theorem to infinite dimensional spaces*, Israel J. Math. **75**, 329-339, 1991.

[LOM3] V. I. Lomonosov, *On real invariant subspaces of bounded operators with compact imaginary part,* Proc. Amer. Math. Soc. **115**, No. 3, 775-777, 1992.

[MIC] A. J. Michaels, *Hilden's simple proof of Lomonosov's invariant subspace theorem*, Adv. Math. **25**, 56-58, 1977.

[MUL] V. Müller and C. Ambrozie, *Invariant subspaces for polynomially bounded operators*, J. Funct. Anal. **213**, 321-345, 2004.

[NOR] E. A. Nordgren, H. Radjavi and P. Rosenthal, *A geometric equivalent of the invariant subspace problem*, Proc. Amer. Math. Soc., **61**, 66-68, 1976.

[PEA1] C. M. Pearcy, *Some recent developments in operator theory*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics, No 36, American Mathematical Society, Providence, 1978.

[PEA2] C. Pearcy, J. R. Ringrose and N. Salinas, *Remarks on the invariant-subspace problem*, Michigan Math. J. **21**, 163-166, 1974.

[PEA3] C. Pearcy, A. L. Shields and H. W. Kim, *Rank-one commutators and hyperinvariant subspaces*, Michigan Math. J. **22**, 193-194, 1975.

[PEA4] C. Pearcy, A. L. Shields and H. W. Kim, *Sufficient conditions for rank-one commutators and hyperinvariant subspaces*, Michigan Math. J. **23**, 235-243, 1976.

[PRU1] B. Prunaru, *K-spectral sets and invariant subspaces*, Integral Equations Operator Theory, Vol. 26, 367-370, 1996.

[PRU2] B. Prunaru, *Invariant subspaces for polynomially hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **125**, 1689-1691, 1997.

[RAD1] H. Radjavi, and P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Springer-Verlag, New York, 1973.

[RAD2] H. Radjavi, and P. Rosenthal, *The invariant subspace problem*, Math. Intelligencer **4**, 33-37, 1982.

[RAD3] H. Radjavi,P. Rosenthal, D. Hadwin and E. Nordgren, *An operator not satisfying Lomonosov's hypothesis*, J. Funct. Anal. **38**, 410-415, 1980.

[REA1] C. J. Read, *A solution to the invariant subspace problem*, Bull. London Math. Soc. **16**, 337-401, 1984.

[REA2] C. J. Read, *A solution to the invariant subspace problem on the space* ℓ_1, Bull. London Math. Soc. **17**, 305-317, 1985.

[REA3] C. J. Read, *The invariant subspace problem for a class of Banach spaces, II. Hypercyclic operators*, Israel J. Math. **63**, 1-40, 1988.

[REA4] C. J. Read, *Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem*, J. London Math. Soc. **56**, 595-606, 1997.

[ROB] A. Robinson, A.R. Bernstein, *Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos*, Pacific J. Math. **16**, 421-431, 1966.

[SIM1] A. Simonič, *A construction of Lomonosov functions and applications to the invariant subspace problem*, Pacific J. Math., **175**, 257-270, 1996.

[SIM2] A. Simonič, *An extension of the Lomonosov techniques to non-compact operators,* Trans. Amer. Math. Soc. **348**, 975-995, 1996.

[SNA] B. Sz. - Nagy and C. Foias, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland, Amsterdam, 1970.

[TAK] K. Takahashi, *On contractions without disjoint invariant subspaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **110**, 935-937, 1990.

[WEI] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer, New York, 1980.

[WU1] P. Y. Wu, *Contractions with constant characteristic function are reflexive*, J. London Math. Soc., **29**, 533-544, 1984.

[WU2] P. Y. Wu, *Contractions with a unilateral shift summand are reflexive*, Integral Equations Operator Theory **7**, 899-904, 1984.

[YAD] B. S. Yadav, *The invariant subspace problem*, Nieuw Arch. Wiskd. **6**, 148-152, 2005.