



TESE DE DOUTORADO

**A dinâmica de trajetórias magnéticas
fechadas sob condições pinçantes**

por

Felipe de Medeiros Sales

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Instituto de Matemática

2013

Tese de Doutorado

**A dinâmica de trajetórias magnéticas
fechadas sob condições pinçantes**

Felipe de Medeiros Sales

Trabalho apresentado ao Programa de Doutorado em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Leonardo Magalhães Macarini

FICHA CATALOGRÁFICA

S163d Sales, Felipe de Medeiros.

A dinâmica de trajetórias magnéticas fechadas sob condições pinçantes / Felipe de Medeiros Sales. - Rio de Janeiro, 2013.

vii, 100 f.: il.; 30 cm.

Orientador: Leonardo Macarini

Tese (doutorado) - UFRJ / Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, 2013.

Referências: f.

1. Geometria diferencial. 2. Física matemática - Tese. I. Macarini, Leonardo (Orient.) II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática. III. A dinâmica de trajetórias magnéticas fechadas sob condições pinçantes.

CDD 516.36

Agradecimentos

Antes de tudo agradeço ao bom Deus pela inexplicável benevolência com que tem agraciado minha vida.

Agradeço ao meu professor e orientador Leonardo Macarini pela apoio e incentivo desde do primeiro ano de doutorado. Sua maturidade e diligência matemáticas me permitiram uma visão científica mais ampla. Seus conselhos, dedicação e exemplo contribuíram de modo decisivo à minha formação acadêmica e pessoal.

Aos professores Humberto Hryniewicz e Cesar Niche, pelas sugestões e discussões, antes e depois da defesa. Aos demais integrantes da banca Pedro Salomão e Clodoaldo Ragazzo, pelas importantes observações e comentários.

Agradeço à minha família pelo inestimável apoio que me acompanhou nestes anos. Aos meus amados pais, Renato e Ana, zelosos em todos os momentos.

À minha doce noiva Edlane pela cumplicidade. Sua paciência e ternura me permitiram sonhar mais alto.

À minha irmã Fabiana que, firme e forte, sempre me apoiou.

Ao meu cunhado e irmão Fábio, parceiro de conversas, almoços, PES e MK do PS2.

Aos professores Nedir do Espírito Santo e Rolci Cipolatti que me ajudaram nos primeiros passos rumo à pós-graduação.

Agradeço aos amigos que me acompanharam nos últimos dez anos. Aos companheiros do IMPA: Vinícius Albani, Alan Prata e Guilherme de Jesus, estudiosos desde a graduação. Aos amigos da UFRJ: Wellington Cordeiro, Marcelo Tavares, Tatiana Soderó, Sara Campos, André Junqueira, Mariana Pinheiro, Raquel Ribeiro, Rômulo Maia e Raphael Santos, cujas amizades e parcerias foram e são uma alegria e um incentivo.

Aos camaradas da secretaria da pós-graduação da UFRJ Cristiano, Alan e Cláudio, sempre solícitos.

Ao CNPq e à Cappes pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que, ainda que não citados aqui, direta ou indiretamente me influenciaram na elaboração desta obra e me felicitaram com sua amizade.

“Muitos julgam que basta crer na moral do Cristo para ser cristão. Não é a moral do Cristo, não é o ensinamento do Cristo que salvarão o mundo, mas a fé no fato de que o Verbo se fez carne. Essa fé não é apenas o reconhecimento da superioridade de sua mensagem. Mas um impulso direto. É preciso crer de maneira precisa que o Verbo encarnado - Deus encarnado - é o ideal definitivo do homem.”

Dostoiévski

Resumo

Neste trabalho fazemos uma análise do comportamento dinâmico do fluxo magnético através da teoria de índices de caminhos de simplectomorfismos lineares. A partir de uma condição pinçante sobre a curvatura seccional e a intensidade da força Lorentz estimamos a evolução do índice simplético do fluxo magnético linearizado ao longo de trajetórias periódicas. Utilizando da chamada fórmula de Bott para índices de caminhos simpléticos, inferimos sobre a dinâmica do fluxo magnético para trajetórias magnéticas fechadas que possuam determinados índice e período e da condição pinçante, concluímos que o fluxo magnético é não-hiperbólico ou ainda elíptico-parabólico.

Como aplicação reobtemos um teorema de [5] para geodésicas fechadas em variedades de curvatura positiva e descrevemos uma versão deste resultado para campos magnéticos exatos em níveis elevados de energia.

Palavras-chave: Fluxo geodésico twisted, trajetórias magnéticas fechadas, condição pinçante, índice de caminhos simpléticos, teorema de comparação de Sturm.

Abstract

In this work we study the dynamical behavior of a magnetic flow using the index theory for symplectic paths. Under a pinching condition on the sectional curvature and the Lorentz force we estimate the index of iterates of a periodic orbit. Using these estimates and Bott's formula we obtain results on the spectrum of the linearized Poincaré map. In particular, we get conditions to ensure that the periodic orbit is non-hyperbolic or elliptic-parabolic.

As an application, we prove the existence of closed magnetic orbits of certain dynamical type on sufficiently high energy levels, provided that the magnetic field is exact and the Riemannian metric satisfies some pinching conditions. This generalizes classical results due to Ballmann-Thorbergsson-Ziller concerning the existence of non-hyperbolic closed geodesics on positively curved manifolds.

Key Words: Twisted geodesic flow, closed magnetic trajectory, pinching condition, index for symplectic paths, Sturm comparison theorem.

Sumário

1	Preliminares	8
1.1	Fluxos Magnéticos	8
1.2	Trivialização do fibrado ao longo de uma trajetória	11
1.3	Redução isotrópica	15
2	Índices de caminhos simpléticos	23
2.1	Índice de Long	23
2.2	Fórmulas de Bott e caminhos iterados	27
2.3	Caminhos simpléticos e autovalores	32
2.4	Fator de correção	36
2.5	Caminho simplético reduzido	48
3	Índice de Robbin-Salamon e Teorema de Sturm	55
3.1	Índice de Maslov	55
3.2	Índice de Conley-Zehnder	57
3.3	Relação entre os índices de Robbin-Salamon e de Long	61
3.4	Teorema de Sturm	64
4	Dinâmica de trajetórias magnéticas	70
4.1	Trajetoária magnética em \mathbb{R}^{2n}	70
4.2	Cálculo do índice num caso particular	77
4.3	Dinâmica de trajetórias magnéticas	83
4.4	O caso geodésico	89
4.5	Fluxo magnético exato em níveis altos de energia	90

Introdução

Uma trajetória magnética é definida como uma órbita do fluxo geodésico twisted. Ou seja, numa variedade riemanniana M equipada com uma métrica g , se Ω_0 denota a forma simplética em TM obtida pelo *pull-back* da forma canônica de T^*M via g e $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica, o fluxo magnético ou fluxo geodésico twisted é o fluxo hamiltoniano em TM da hamiltoniana

$$E : TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|^2$$

com respeito à forma simplética $\Omega = \Omega_0 - \pi^*\omega$ para alguma 2-forma fechada $\omega \in \Omega^2(M)$. Para $\omega = 0$, trata-se do caso geodésico.

É um resultado bem conhecido que o fluxo geodésico em variedades de curvatura seccional negativa é hiperbólico (cf. por exemplo [2]). Por outro lado, quando a curvatura é positiva é possível concluir em alguns casos a existência de geodésica não-hiperbólica ou mesmo elíptico-parabólica, o que significa que todos os autovalores do mapa de retorno de Poincaré linearizado estão no círculo unitário. Mais precisamente, se a curvatura seccional K de uma variedade riemanniana compacta for limitada inferior e superiormente por constantes positivas - e a menos de uma normalização na métrica podemos escrever $0 < \delta \leq K \leq 1$ - um resultado de Ballmann, Thorbergsson e Ziller [5] nos diz que sempre há geodésicas não-hiperbólicas em variedades homeomorfas à esfera tais que $\delta \geq 1/4$. Além disso, a partir do valor de δ estima-se um número mínimo de autovalores unitários do mapa de Poincaré linearizado P , concluindo que todos têm módulo 1 quando $\delta \geq 9/16$, o que significa que a geodésica é elíptico-parabólica. Ou seja, quanto menor for o intervalo $[\delta, 1]$ que contém os valores assumidos pela curvatura K , menos hiperbólica é a geodésica.

Em [5] as conclusões são obtidas a partir de uma análise do índice geodésico de uma trajetória c e de seus iterados. Por um lado, uma condição pinçante δ sobre a curvatura e o valor do período τ da trajetória implicam numa estimativa do índice geodésico pelo teorema de comparação Morse-Schoenberg. Por outro lado, os trabalhos de Bott em [7] relacionam o índice dos iterados c^q da geodésica c com a linearização P do mapa de Poincaré e seus autovalores. Uma vez que a variedade é homeomorfa à esfera, via teoria de Morse observa-se que M sempre admite uma geodésica com determinado índice e além disso o seu período pode ser controlado a partir da estimativa do raio de injetividade. Assim, o resultado principal pode ser expresso da seguinte forma: Se c é uma geodésica fechada com certas condições sobre seu índice e período (a saber, índice $< \dim M$ e período $\geq 2\pi$), a dinâmica ao longo de c pode ser expressa a partir da condição pinçante sobre a curvatura.

Sempre existe uma geodésica nestas condições se a variedade for homeomorfa à esfera e tiver curvatura entre $1/4$ e 1 .

No presente trabalho nos propomos a obter conclusões análogas para trajetórias magnéticas. Ocorre, no entanto, do fluxo magnético diferir do geodésico em diversos aspectos. Primeiramente, no caso geodésico o funcional de ação definido no espaço de curvas fechadas dado pela energia cinética total de uma trajetória é sempre limitado inferiormente e satisfaz a chamada condição de Palais-Smale, o que nos permite definir o índice de pontos críticos do funcional de ação, estabelecendo assim o índice geodésico, e recorrer à teoria de Morse a fim de obter a existência de geodésicas fechadas e com determinados índices. No entanto, para campos magnéticos que não são exatos (monopolos magnéticos) não podemos considerar um funcional da mesma maneira. No caso exato o fluxo magnético pode ser obtido como um fluxo de Euler-Lagrange. Ainda assim o funcional de ação associado pode ser ilimitado inferiormente ou ainda não satisfazer a condição de Palais-Smale (cf. [11]). Outra importante diferença reside no fato do fluxo geodésico ser homogêneo e assim sua dinâmica ser essencialmente a mesma em todos os níveis de energia. Por sua vez o fluxo magnético assume em geral um comportamento dinâmico que depende do nível de energia considerado (vide por exemplo o fluxo horociclo em superfícies, [17]). Dessa forma, os métodos utilizados por Ballmann, Thorbergsson e Ziller precisam ser reconsiderados. Recorremos então à teoria de índices de caminhos simpléticos. Tais índices são invariantes homotópicos associados a caminhos de simplectomorfismo lineares que partem da identidade, desenvolvidos nos trabalhos de Ekeland, Conley, Zehnder, Robbin, Salamon, Long, Viterbo, entre outros (cf. [14], [15], [23], [24], [29], [33]).

A relação entre os índices dos iterados de uma trajetória com os autovalores do mapa de Poincaré linearizado P é baseado nos trabalhos de Bott em [7]. Bott estende o índice de Morse para uma família a um parâmetro ω no círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$ de tal forma que o índice do q -ésimo iterado de uma geodésica c é dado exatamente pela soma dos ω -índices de c para ω variando entre todas as q -ésimas raízes da unidade. Tal relação é chamada de fórmula de Bott. Além disso, para uma geodésica fechada c , a aplicação que associa a cada $\omega \in S^1$ o ω -índice de c é localmente constante no complementar do espectro de P no círculo. Isso significa que se uma tal função deixar de ser constante em algum ponto de S^1 então este deve ser um autovalor unitário de P . Esta propriedade é a principal ferramenta utilizado em [5] para estimar a interseção do espectro de P com S^1 . Long (cf. [21] e [23]) generaliza estas ideias para caminhos simpléticos $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ definindo, analogamente, uma família de índices $i_\omega(\gamma)$ com $\omega \in S^1$ de modo a satisfazer a fórmula de Bott e que as possíveis discontinuidades de $\omega \mapsto i_\omega(\gamma)$ ocorram na interseção do espectro de $\gamma(\tau)$ com S^1 .

Tomada uma trajetória fechada γ do fluxo magnético numa variedade riemanniana orientada, consideramos uma trivialização do fibrado tangente ao longo de γ e a partir desta descrevemos o fluxo linearizado em γ através de um caminho de simplectomorfismos lineares de \mathbb{R}^{2n} que parte da identidade e no qual aplicamos a teoria de índices.

O teorema de comparação de Morse-Schoenberg relaciona o índice de uma geodésica com o seu comprimento e com a curvatura seccional da variedade. Para

lidar com índices de caminhos simpléticos recorreremos a um resultado da teoria de Sturm (cf. [3]) que chamaremos de teorema de comparação de Sturm. Este teorema nos diz que se Φ^0 e Φ^1 são as soluções fundamentais do sistema hamiltoniano

$$\frac{d}{dt}\Phi^i = JS^i\Phi^i, \quad i = 0, 1,$$

onde S^i é um caminho de aplicações autadjuntas em \mathbb{R}^{2n} e J é a estrutura complexa de \mathbb{R}^{2n} , a evolução de um subespaço lagrangiano $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ ocorre mais rapidamente pelo fluxo Φ^1 do que por Φ^0 se a diferença $S^1 - S^0$ for não-negativa. A partir deste resultado é possível comparar o índice de Robbin-Salamon μ_{RS} de caminhos simpléticos (cf. [29]) que, de certa forma, é expresso pelo número de interseções do caminho lagrangiano $\Phi(L)$ com o lagrangiano fixado L . Assim, utilizando de comparações veremos que o valor do índice μ_{RS} do caminho simplético em \mathbb{R}^{2n} obtido a partir de uma trajetória magnética pode ser estimado pelos valores assumidos pela curvatura seccional, pelo comprimento da trajetória e ainda pela intensidade do campo magnético e de sua derivada. Estes elementos são os termos que ocorrem na chamada equação de Jacobi magnética, a partir da qual descrevemos o fluxo magnético linearizado.

Para utilizarmos o teorema de Sturm precisamos encontrar um fluxo Φ^0 que nos sirva de modelo de comparação e cujo índice saibamos calcular. Todavia podemos enfrentar dificuldades para definir Φ^0 devido à direção determinada pela trajetória. Por exemplo, em uma variedade de curvatura positiva se considerarmos a aplicação que num ponto da trajetória relaciona cada direção u à curvatura seccional determinada pelo plano gerado por u e pela direção v tangente à trajetória, então tal aplicação é sempre nula na direção de v e positiva fora desta. Então o fluxo modelo deve também de alguma maneira expressar esta propriedade, o que pode ser difícil estabelecer. Podemos contornar este ponto através de uma redução isotrópica do caminho simplético na direção determinada pela trajetória. Com isso induzimos um novo caminho simplético definido no espaço quociente - que chamamos simplesmente de caminho reduzido - em relação ao qual mais facilmente construímos um modelo que sirva de comparação para aplicarmos o teorema de Sturm. Em seguida descrevemos de que forma se relaciona o índice do caminho simplético com o índice do seu caminho reduzido.

No caso geodésico o fluxo G_t no fibrado TM deixa invariante o subespaço $E \oplus E \subset TTM$ onde E é o complemento ortogonal da direção da trajetória γ em T_pM . Com isso, basta nos restringirmos a este espaço para estudar a dinâmica de G_t . O mesmo pode não ocorrer no caso magnético. Além disso, para trajetórias não-degeneradas (o que significa que a multiplicidade geométrica do autovalor 1 de dG_τ é exatamente igual a 1) a direção de γ em TM compõe um subespaço simplético invariante bidimensional $F \subset T_{\gamma(0)}TM$ onde o fluxo linearizado pode ser escrito como $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (cf. [20]). Neste caso, podemos encontrar órbitas periódicas em todos os níveis de energia suficientemente próximos ao de γ e o termo c da componente nilpotente corresponde à taxa de variação dos períodos quando elevamos o nível de energia (cf. [26]). O sinal de c determina a contribuição do subespaço F no cálculo do índice de γ e este sinal é chamado de fator de correção. No caso

geodésico o fator de correção é sempre -1 o que, como veremos, significa que o fluxo no subespaço F não altera o cálculo do índice. Ocorre contudo do fator de correção poder ser positivo no caso magnético (ou mesmo 0 se estendermos a definição para o caso degenerado), o que modifica o estudo do índice e nos leva a enunciar nossos resultados levando em consideração este termo.

Para estudarmos as iterações γ^q de um caminho simplético $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ que parte da identidade, consideraremos o índice médio $\mu_m(\gamma)$ dado por

$$\mu_m(\gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mu_L(\gamma^k)}{k},$$

onde $\mu_L(\gamma)$ é o chamado índice de Long de γ . A fórmula de Bott nos diz que $\mu_L(\gamma^k)$ é a soma dos $i_\omega(\gamma)$ com ω variando sobre todas as k -raízes da unidade. Em particular, se não existirem autovalores unitários de $\gamma(\tau)$ então $\omega \mapsto i_\omega(\gamma)$ é uma função constante, portanto $\frac{\mu_L(\gamma^k)}{k} = \mu_L(\gamma)$ e assim $\mu_m(\gamma)$ e $\mu_L(\gamma)$ coincidem. Seguindo este raciocínio, o estudo da quantidade de autovalores unitários de $\gamma(\tau)$ em termos do índice médio pode então ser determinado por uma eventual distância entre os índices $\mu_L(\gamma)$ e $\mu_m(\gamma)$ de modo que quanto maior for a diferença, maior deve ser a interseção do espectro de $\gamma(\tau)$ com S^1 .

Nosso primeiro resultado é então uma estimativa para índices em termos do período e de uma condição pinçante, especialmente para o índice $\mu_m(\gamma)$. Ou seja, obtemos constantes positivas c_0 e c_1 tomadas a partir respectivamente do mínimo e do máximo da curvatura seccional e da força de Lorentz e sua derivada ao longo da trajetória magnética fechada γ de período $\tau > 0$ a partir das quais temos a relação (cf. teorema 4.1.3 e seu corolário, a seguir)

$$c_0 \frac{\tau}{2\pi} \leq \mu_m(\gamma) \leq c_1 \frac{\tau}{2\pi}.$$

Dessa forma, o resultado principal deste trabalho nos diz que quando tivermos uma das desigualdades

$$\mu_L(\gamma) < c_0 \frac{\tau}{2\pi} \quad \text{ou} \quad c_1 \frac{\tau}{2\pi} < \mu_L(\gamma), \quad (1)$$

começaremos a inferir sobre o número de autovalores unitários do fluxo magnético linearizado $d_\theta G_\tau$ ao longo γ e quanto mais estritas for a desigualdade, maior será este número.

O caso em que $\mu_L(\gamma) < c_0 \frac{\tau}{2\pi}$ pode ser enunciado mais precisamente da seguinte forma: Sejam Y a força de Lorentz, ∇Y sua derivada covariante e σ a curvatura seccional, $c_0 = (n-1)\sqrt{b_0^2 + 4a_0}$ para a_0 e b_0 duas constantes tais que

$$a_0 \|v'\|^2 \leq \sigma(\dot{\gamma}, v') k^2 \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y)v', \dot{\gamma} \rangle,$$

$$b_0 \|v\| \leq \|Yv\|,$$

para todos vetores v e v' tangentes a M ao longo da trajetória τ -periódica γ de velocidade $\|\dot{\gamma}\| = k$ com $v' \perp \dot{\gamma}$ e $b_0^2 + 4a_0 \geq 0$.

Teorema 1. *Se $\mu_L(\gamma) \leq d$ para algum $d > 0$ e $c_0 > d \frac{p+2}{p+1} \frac{2\pi}{\tau}$, onde $p \in \mathbb{N}$, então*

$$\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq \frac{2d}{p}.$$

Aqui $\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1$ denota a quantidade de autovalores unitários da diferencial do fluxo magnético no ponto $\gamma(\tau)$ contadas as multiplicidades algébricas. Este número é no mínimo 2 devido à direção da trajetória periódica, caso supere 2 a trajetória é não-hiperbólica e vale no máximo $2n$, o que significa que a trajetória é elíptico-parabólica, onde $n = \dim M$.

Veremos que o fator de correção ser -1 significa que não há interferência da direção da trajetória no cálculo do índice e portanto uma diferença entre os índices $\mu_L(\gamma)$ e $\mu_m(\gamma)$ deve ser atribuída necessariamente às demais direções. Neste caso o teorema acima pode ser melhorado:

Teorema 2. *Suponha que o fator de correção de γ seja -1 . Se $\mu_L(\gamma) \leq d$ para algum $d > 0$ e $c_0 > d \frac{p+2}{p+1} \frac{2\pi}{\tau}$, onde $p \in \mathbb{N}$, então γ é não-hiperbólica e*

$$\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq \frac{2d}{l} + 2.$$

Em particular, γ é elíptico-parabólica se

$$\mu_L(\gamma) \leq n - 1 \quad e \quad c_0 > \frac{3(n-1)}{2} \frac{2\pi}{\tau}.$$

Em outros termos, em nosso resultado principal partimos de uma trajetória fechada de índice $\mu_L(\gamma)$ e período τ e passamos a controlar c_0 a fim de aumentar a diferença $c_0 \frac{\tau}{2\pi} - \mu_L(\gamma)$ para concluir sobre a dinâmica ao longo de γ . Melhoramos as conclusões se o fator de correção for -1 . Observe que neste caso é conveniente que γ tenha um índice $\mu_L(\gamma)$ que não seja grande e um período τ que não seja pequeno. (Se analisarmos $\mu_L(\gamma) - c_1 \frac{\tau}{2\pi}$ as condições sobre o índice e o período devem ser opostas e a conclusão será melhorada se o fator de correção for diferente de -1). Dessa forma, se consideramos a condição pinçante c_0 e c_1 reduzimos a análise sobre o tipo dinâmico do fluxo magnético à existência de trajetórias fechadas com determinados período e índice.

Os resultados enunciados acima são tratados com mais abrangência a seguir, teoremas 4.3.2 e 4.3.3. A partir destes reobtemos como um caso particular o resultado de [5] sobre o fluxo geodésico em variedade de curvatura positiva.

O caso particular em que o fluxo magnético é exato pode ser estudado como um fluxo de Euler-Lagrange. Como foi mencionado acima, a dinâmica em um nível de energia $\{E = k\}$ depende de k . Sabemos que em níveis de energia acima do chamado valor crítico de Mañé $c(L)$ o fluxo magnético é próximo ao geodésico a menos de uma reparametrização (cf. [4], [11], [12]). Seguindo esta ideia, numa variedade completa m -dimensional M tal que $\pi_{n-1}(M) \neq 0$ utilizamos da teoria de Morse para obter em um nível de energia $k > c(L)$ uma trajetória magnética fechada com índice limitado por n . A medida que k se torna cada vez maior, mais nos aproximamos do caso geodésico e usamos da estimativa do raio de injetividade

para extrair informações sobre o período da trajetória. Dessa forma, obtemos um resultado análogo ao de [5] para o fluxo magnético exato em níveis de energia elevados.

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 1 definimos o fluxo magnético e consideramos uma trivialização do fibrado tangente ao longo de uma trajetória, o que fornece um caminho de simplectomorfismos munido das informações sobre o fluxo linearizado. Definimos o caminho reduzido obtido pela redução isotrópica na direção determinada pela trajetória. Além disso, o expressamos como uma família a 1-parâmetro de simplectomorfismos lineares de \mathbb{R}^{2n-2} de modo conveniente para que possamos mais facilmente aplicar o teorema de comparação de Sturm.

No segundo capítulo expomos a teoria de índices de caminhos simpléticos segundo Long [23]. Abordamos o estudo de índice de caminhos iterados através do índice médio. Enunciamos as fórmulas de Bott e então mostramos como as relações entre o índice de Long e o índice médio implicam na existência de autovalores unitários. Além disso, analisamos a interferência do fator de correção para o cálculo do índice e estabelecemos uma relação entre o caminho simplético e seu caminho reduzido.

No terceiro capítulo consideramos o índice de Robbin-Salamon segundo [29] a fim de estabelecer o teorema de comparação de Sturm. Apresentamos uma série de resultados de [22] que nos permitem relacioná-lo ao índice de Long. Por fim provamos o teorema de Sturm e o generalizamos para caminhos degenerados em termos do índice de Long.

Começamos o último capítulo considerando um caminho simplético como modelo: um caminho cujo índice possamos calcular facilmente e que esteja em condições adequadas para o compararmos com o caminho simplético obtido da trajetória magnética. Com isso, enunciamos o principal resultado deste trabalho: A partir de condições sobre a curvatura seccional e a intensidade do campo magnético ao longo de uma trajetória com determinados índice e período estimamos a quantidade de autovalores unitários para o fluxo linearizado. Em particular, definimos sob quais condições as trajetórias são necessariamente não-hiperbólicas ou mesmo elíptico-parabólicas. Ainda neste capítulo enunciamos e provamos um teorema de [5]. Por fim, como um exemplo simples onde aplicamos nosso teorema, analisamos fluxos magnéticos exatos em níveis altos de energia. Para isso seguimos como em [11] e tratamos o fluxo magnético como um fluxo de Euler-Lagrange. Assim como em [6], utilizamos da teoria de Morse para mostrar a existência de trajetórias fechadas com certo índice e generalizamos um teorema de [5] para um tal fluxo magnético.

Capítulo 1

Preliminares

Começamos nosso trabalho introduzindo o conceito de fluxo magnético em uma variedade como uma variação do fluxo geodésico. A fim de estudar o tipo dinâmico de uma trajetória fechada, consideramos uma trivialização do fibrado tangente ao longo da mesma e obtemos uma família a 1-parâmetro de simplectomorfismos no espaço euclidiano, que chamaremos apenas de caminho simplético. Como a trajetória é fechada, a extremidade de tal caminho sempre possui o autovalor 1 e o autovetor correspondente determina um subespaço isotrópico em relação ao qual podemos considerar uma redução e induzir o simplectomorfismo no quociente. Na seção 3 mostramos como expressar em \mathbb{R}^{2n-2} a aplicação induzida.

1.1 Fluxos Magnéticos

Sejam M^n uma variedade riemanniana completa suave orientada e $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção canônica. Denote por Ω_0 a forma simplética em TM obtida pela *pull-back* da forma simplética canônica $dp \wedge dq$ de T^*M via a métrica Riemanniana. Seja $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(p, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle.$$

O fluxo hamiltoniano de H com respeito a Ω_0 gera o fluxo geodésico de M . Considere ω uma 2-forma fechada em M e uma nova forma simplética Ω definida por

$$\Omega = \Omega_0 - \pi^* \omega. \tag{1.1}$$

Tal forma é chamada de *forma simplética twisted* e o fluxo hamiltoniano $G_t : TM \rightarrow TM$ de H com respeito a Ω é chamado de *fluxo magnético*. Ou seja, G_t satisfaz

$$\frac{d}{dt} G_t = X \circ G_t, \quad G_0 = I,$$

onde X é o campo vetorial em TM tal que

$$\Omega(X, \xi) = -dH \cdot \xi, \quad \forall \xi \in TTM.$$

O fluxo G_t modela o movimento de uma partícula de massa unitária sujeita a um campo magnético cuja força de Lorentz $Y : TM \rightarrow TM$ é a aplicação no

fibrado tangente unicamente determinada por

$$\omega_p(u, v) = \langle Y_p(u), v \rangle$$

para u e v em TM .

Considere na variedade riemanniana M o tensor curvatura R e o mapa de conexão $K : TTM \rightarrow TM$ definido por

$$K_\theta(\xi) = \frac{D}{dt}(\pi \circ Z)(0)$$

onde $Z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$ é uma curva suave tal que $Z(0) = \theta$, $Z'(0) = \xi$ e $\frac{D}{dt}(\pi \circ Z)$ é a derivada covariante do caminho $\pi \circ Z$.

Passemos à decomposição em subfibrados de TTM . Para $\theta \in TM$ o *subespaço vertical* em θ é definida por

$$V(\theta) = \ker d_\theta \pi$$

e o *subespaço horizontal* em θ é dada por

$$H(\theta) = \ker K_\theta.$$

Assim, $T_\theta TT$ pode ser identificado com $T_{\pi(\theta)}M \oplus T_{\pi(\theta)}M$ e escreveremos

$$\xi = (\xi_1, \xi_2)$$

onde $\xi_1 = d_\theta \pi(\xi) \in T_{\pi(\theta)}M$ e $\xi_2 = K_\theta(\xi) \in T_{\pi(\theta)}M$ para cada $\xi \in T_\theta TM$. Dessa forma a estrutura simplética Ω_0 em TM induzida pela métrica riemanniana se escreve

$$\begin{aligned} \Omega_0(\xi, \eta) &= \langle \xi_2, \eta_1 \rangle - \langle \xi_1, \eta_2 \rangle \\ &= \langle K(\xi), d\pi(\eta) \rangle - \langle d\pi(\xi), K(\eta) \rangle \end{aligned}$$

e a forma simplética twisted $\Omega = \Omega_0 - \pi^* \omega$ se escreve

$$\begin{aligned} \Omega(\xi, \eta) &= \langle \xi_2, \eta_1 \rangle - \langle \xi_1, \eta_2 \rangle - \langle Y(\xi_1), \eta_1 \rangle \\ &= \langle K(\xi), d\pi(\eta) \rangle - \langle d\pi(\xi), K(\eta) \rangle - \langle Y(d\pi(\xi)), d\pi(\eta) \rangle. \end{aligned}$$

Sendo $X : TM \rightarrow TTM$, $X(\theta) = (X_1(\theta), X_2(\theta))$ o campo hamiltoniano de H com respeito a Ω , a identidade

$$-d_\theta H(\xi) = \Omega_0(X(\theta), \xi) - \langle Y(d_\theta \pi(X(\theta))), d_\theta \pi(\xi) \rangle$$

vale para todo $\xi \in T_\theta TM$, logo

$$-\langle \xi_2, \theta \rangle = \langle X_2(\theta), \xi_1 \rangle - \langle X_1(\theta), \xi_2 \rangle - \langle Y(X_1(\theta)), \xi_1 \rangle$$

se verifica para todos $\xi_1, \xi_2 \in T_{\pi(\theta)}M$, donde

$$X(\theta) = (\theta, Y(\theta))$$

para todo θ em TM . Segue desta última equação que as trajetórias de X são as curvas da forma $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in TM$ e que satisfazem a equação

$$\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = Y(\dot{\gamma}).$$

No que segue, $\gamma : t \mapsto \gamma(t) \in M$ será chamada de *trajetória magnética*.

Seja $G_t : TM \rightarrow TM$ o fluxo gerado por X . Considere $Z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$ uma curva no fibrado tangente de M com condições iniciais $Z(0) = \theta$, $Z'(0) = \xi$ e $f(s, t) = \pi(G_t(Z(s)))$. Sendo $J_\xi(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ e $\gamma_s = f(s, t)$, temos

$$\frac{D}{dt}\dot{\gamma}_s = Y(\dot{\gamma}_s)$$

que junto com a identidade

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s} + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t}$$

fornece

$$J_\xi'' + R(\dot{\gamma}, J_\xi)\dot{\gamma} = \frac{D}{ds}Y(\dot{\gamma}_s),$$

onde $J_\xi' = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}J_\xi$ e ∇ é a conexão riemanniana induzida pela métrica. Tomando a derivada covariante de Y , obtemos

$$\frac{D}{ds}Y(\dot{\gamma}_s) = (\nabla_{J_\xi}Y)(\dot{\gamma}_s) + Y(J_\xi')$$

a partir da qual deduzimos a equação de Jacobi

$$J_\xi'' + R(\dot{\gamma}, J_\xi)\dot{\gamma} - Y(J_\xi') - (\nabla_{J_\xi}Y)(\dot{\gamma}) = 0. \quad (1.2)$$

Neste caso dizemos que J_ξ é um *campo de Jacobi*.

Por outro lado, observe que

$$d\pi_{G_t(\theta)} \cdot dG_t \cdot \xi = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = J_\xi(t)$$

e

$$K(dG_t \cdot \xi) = \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = J_\xi'(t),$$

logo a decomposição horizontal e vertical da diferencial do fluxo magnético é da forma

$$dG_t \cdot \xi = (J_\xi(t), J_\xi'(t))$$

sendo J_ξ o único campo de Jacobi ao longo da trajetória $t \mapsto \pi \circ G_t(v)$ com condições iniciais $(J_\xi(0), J_\xi'(0)) = \xi$.

Por fim, estabelecemos importantes equações satisfeitas pela força de Lorentz Y :

Proposição 1.1.1. *Para cada $p \in M$, o operador $Y = Y_p : T_pM \rightarrow T_pM$ é antissimétrico com respeito à métrica Riemanniana e valem as seguintes identidades*

para quaisquer u, v e w em T_pM :

$$\langle (\nabla_u Y)(v), w \rangle + \langle v, (\nabla_u Y)(w) \rangle = 0$$

e

$$\langle (\nabla_u Y)(v), w \rangle + \langle (\nabla_v Y)(w), u \rangle + \langle (\nabla_w Y)(u), v \rangle = 0.$$

Demonstração. Sejam U, V e W campos de vetores em M . A primeira igualdade é uma consequência imediata da antissimetria de Y :

$$\begin{aligned} 0 &= U(\langle YV, W \rangle + \langle V, YM \rangle) \\ &= \langle (\nabla_U Y)V, W \rangle + \langle Y(\nabla_U V), W \rangle + \langle YV, \nabla_U W \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_U V, YW \rangle + \langle V, (\nabla_U Y)W \rangle + \langle V, Y(\nabla_U W) \rangle \\ &= \langle (\nabla_U Y)V, W \rangle + \langle V, (\nabla_U Y)W \rangle. \end{aligned}$$

Uma vez que a 2-forma $\omega = \langle Y\cdot, \cdot \rangle$ é fechada, temos

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(U, V, W) \\ &= \nabla_U(\omega(V, W)) + \nabla_V(\omega(W, U)) + \nabla_W(\omega(U, V)) \\ &\quad + \omega([U, V], W) + \omega([V, W], U) + \omega([W, U], V). \end{aligned}$$

Usando identidades da forma

$$\nabla_U(\omega(V, W)) = \langle (\nabla_U Y)V, W \rangle + \langle Y(\nabla_U V), W \rangle + \langle YV, \nabla_U W \rangle,$$

$$\omega([U, V], W) = \langle YUV - YVU, W \rangle = \langle Y(\nabla_U V), W \rangle + \langle Y(\nabla_V U), W \rangle$$

e a antissimetria Y , provamos a segunda parte. \square

1.2 Trivialização do fibrado ao longo de uma trajetória

Sejam M^n uma variedade riemanniana completa orientada, $\Omega = \Omega_0 - \pi^*\omega$ uma forma simplética twisted e $Y : TM \rightarrow TM$ a força de Lorentz do campo magnético ω . Considere uma curva $t \mapsto \gamma(t)$ em M tal que $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ seja uma trajetória fechada do fluxo magnético de velocidade $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ e sejam $\tau > 0$ o seu período e $\theta = (\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$. Considere $X_1(t) = \dot{\gamma}(t)$ e X_2 um campo de vetores unitários ao longo de γ tal que

$$Y\dot{\gamma}(t) = b(t)X_2(t) \tag{1.3}$$

onde $b(t) \in \mathbb{R}$ varia continuamente com t . Sendo M orientada, podemos estender $\{X_1, X_2\}$ a uma família X_1, \dots, X_n de campos ao longo de γ de modo a formar uma base de $T_{\gamma(t)}M$, $\forall t \in [0, \tau]$, com $X_i(\tau) = X_i(0)$. Utilizando do processo de Gram-Schmidt e mantendo X_1 fixo, podemos admitir que $X_i(t)$ forme um conjunto ortonormal.

Sejam $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma(t)_{i,j}^k$ aplicações reais obtidas por

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k X_k.$$

A aplicação

$$A_t : \begin{array}{ccc} T_{\gamma(t)}M & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i(t) & \longmapsto & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{array} \quad (1.4)$$

define um isomorfismo linear entre cada fibra de γ^*TM e \mathbb{R}^n e que preserva a métrica com respeito ao produto interno canônico de \mathbb{R}^n .

Sejam R o tensor curvatura em M e Γ_1 a aplicação $X_i \mapsto \sum_{k=1}^n \Gamma_{1,i}^k X_k$. Passemos a representá-los segundo a trivialização A_t . Definimos as aplicações lineares R_t, Y_t, Y'_t e Γ em \mathbb{R}^n de modo que os seguintes diagramas comutem:

$$\begin{array}{ccc} T_{\gamma(t)}M & \xrightarrow{R(\dot{\gamma}(t), \cdot)\dot{\gamma}(t)} & T_{\gamma(t)}M \\ A_t \downarrow & & \downarrow A_t \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{R_t} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_{\gamma(t)}M & \xrightarrow{Y} & T_{\gamma(t)}M \\ A_t \downarrow & & \downarrow A_t \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Y_t} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T_{\gamma(t)}M & \xrightarrow{(\nabla \bullet Y)(\dot{\gamma}(t))} & T_{\gamma(t)}M \\ A_t \downarrow & & \downarrow A_t \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Y'_t} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_{\gamma(t)}M & \xrightarrow{\Gamma_1} & T_{\gamma(t)}M \\ A_t \downarrow & & \downarrow A_t \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Estas aplicações gozam das seguintes propriedades:

Proposição 1.2.1. (i) $e_1 \in \ker R_t$.

(ii) Y_t é antissimétrica.

(iii) $\langle Y'_t x, e_1 \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(iv) $\Gamma_{i,j}^k = -\Gamma_{i,k}^j$. Em particular, Γ é antissimétrica.

(v) $\Gamma e_1 = Y_t e_1$.

Demonstração. As três primeiras propriedades decorrem do fato de A_t ser uma isometria com $A_t(\dot{\gamma}) = e_1$ juntamente com a proposição 1.1.1. As duas últimas vêm de $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = Y \dot{\gamma}$ e de

$$0 = X_i \langle X_j, X_k \rangle = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_k \rangle + \langle X_j, \nabla_{X_i} X_k \rangle = \Gamma_{i,j}^k + \Gamma_{i,k}^j.$$

□

Daqui pra frente iremos denotar da mesma maneira as transformações lineares em \mathbb{R}^n ou \mathbb{R}^{2n} e suas matrizes na base canônica.

Passemos a descrever a equação de Jacobi segundo a trivialização A_t . Dado um campo J ao longo da trajetória $\gamma(t)$, seja $u(t) = A_t \cdot J(t) \in \mathbb{R}^n$ o campo J segundo

a trivialização A_t . O operador ∇ em \mathbb{R}^n , via A_t , passa a ser calculado como $\frac{d}{dt} + \Gamma$; isto é,

$$A_t J' = \dot{u} + \Gamma u,$$

onde \dot{u} denota a derivada $\frac{du}{dt}$ em \mathbb{R}^n . Daí

$$A_t J'' = \ddot{u} + 2\Gamma\dot{u} + (\Gamma^2 + \dot{\Gamma})u,$$

$$A_t Y J' = Y_t(\dot{u} + \Gamma u)$$

e a equação de Jacobi (1.2) assume a forma

$$\ddot{u} + (2\Gamma - Y_t)\dot{u} + (\Gamma^2 + \dot{\Gamma} + R_t - Y_t\Gamma - Y_t')u = 0. \quad (1.5)$$

Por abuso de notação ainda denotaremos por A_t a aplicação que trivializa o fibrado γ^*TM :

$$A_t : T_{G_t(\theta)}TM = T_{\gamma(t)}M \oplus T_{\gamma(t)}M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ \left(\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i X_i(t), \sum_{i=1}^{2n} \mu_i X_i(t) \right) \longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$$

Considere $B_t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$B_t = \begin{pmatrix} -\Gamma & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $A_t : (J, J') \mapsto (u, \dot{u} + \Gamma u)$ e a aplicação $\psi_t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ que expressa $d_\theta G_t$ segundo $B_t \circ A_t$

$$\begin{array}{ccc} T_\theta TM & \xrightarrow{d_\theta G_t} & T_{G_t(\theta)} TM \\ A_0 \downarrow & & \downarrow A_t \\ \mathbb{R}^{2n} & & \mathbb{R}^{2n} \\ B_0 \downarrow & & \downarrow B_t \\ \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\psi_t} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

é da forma $\psi_t : (x_0, y_0) \mapsto (\dot{u}(t), u(t))$, onde u satisfaz a equação de Jacobi (1.5) em \mathbb{R}^{2n} com condições iniciais $(\dot{u}(0), u(0)) = (x_0, y_0)$; ou seja, ψ_t é a solução fundamental da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}\psi_t = Z_t \circ \psi_t$$

onde Z_t é o campo tempo-dependente em \mathbb{R}^{2n} dado por

$$Z_t = \begin{pmatrix} Y_t - 2\Gamma & L \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

e $L = -\Gamma^2 - \dot{\Gamma} - R_t + Y_t\Gamma + Y_t'$.

Considere agora o isomorfismo linear $C_t : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dado por

$$C_t = \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}Y_t + \Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Sendo $\omega_0 : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \langle x_1, y_2 \rangle - \langle x_2, y_1 \rangle$ a forma simplética canônica de \mathbb{R}^{2n} , a composição $E_t = C_t \circ B_t \circ A_t$ define uma trivialização simplética do fibrado $\dot{\gamma}^*TM$ e um caminho simplético ϕ_t em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ dado segundo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_\theta TM & \xrightarrow{d_\theta G_t} & T_{G_t(\theta)} TM \\ \downarrow B_0 \circ A_0 & & \downarrow B_t \circ A_t \\ \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\psi_t} & \mathbb{R}^{2n} \\ \downarrow C_0 & & \downarrow C_t \\ \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\phi_t} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

Enunciamos este resultado através da seguinte

Proposição 1.2.2. *A aplicação composta $E_t = C_t \circ B_t \circ A_t : (T_{G_t(\theta)}TM, \Omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é um symplectomorfismo e transforma o subespaço lagrangiano vertical $V(G_t(\theta)) = \ker d_{G_t(\theta)}\pi$ de $T_{G_t(\theta)}TM$ no subespaço lagrangiano horizontal $\mathbb{R}^n \times 0$ de \mathbb{R}^{2n} .*

Demonstração. Considere as seguintes formas simplética em \mathbb{R}^{2n} :

$$\begin{aligned} \eta_t(x, y) &= \langle x_1, y_2 \rangle - \langle y_1, x_2 \rangle + \langle (2\Gamma - Y_t)x_2, y_2 \rangle \\ \bar{\omega}_t(x, y) &= \langle y_1, x_2 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle - \langle Y_t x_1, y_1 \rangle = \omega_0(x, y) - \langle Y_t x_1, y_1 \rangle. \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Um cálculo direto mostra que:

$$\begin{aligned} C_t^* \omega_0(x, y) &= \langle x_1 + (\Gamma - \frac{1}{2}Y_t)x_2, y_2 \rangle - \langle x_2, y_1 + (\Gamma - \frac{1}{2}Y_t)y_2 \rangle = \eta_t(x, y), \\ B_t^* \eta_t(x, y) &= \langle y_1, x_2 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle - \langle Y_t x_1, y_1 \rangle = \bar{\omega}_t(x, y), \\ A_t^* \bar{\omega}_t &= \Omega_{G_t(\theta)}. \end{aligned}$$

Ou seja, $(C_t B_t A_t)^* \omega_0 = \Omega$.

O segundo resultado é imediato pois $C_t \circ B_t \circ A_t : (X_i, X_j) \mapsto (e_j + (\Gamma - \frac{1}{2}Y_t)e_i, e_i)$. \square

Vamos agora obter uma expressão explícita do campo magnético nas coordenadas $E_t = C_t B_t A_t$ em \mathbb{R}^{2n} .

Temos $\frac{d}{dt}\psi_t = Z_t \circ \psi_t$ e $\phi_t = C_t \circ \psi_t \circ C_0^{-1}$ com

$$Z_t = \begin{pmatrix} Y_t - 2\Gamma & -\Gamma^2 - \dot{\Gamma} - R_t + Y_t \Gamma + Y_t' \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_t = \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}Y_t + \Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Um cálculo direto mostra que $\frac{d}{dt}\phi_t = X_t \circ \phi_t$ para

$$X_t = \frac{d}{dt}C_t \circ C_t^{-1} + C_t \circ Z_t \circ C_t^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Y_t - \Gamma & -\Lambda \\ I & \frac{1}{2}Y_t - \Gamma \end{pmatrix},$$

onde $-\Lambda = -\frac{1}{2}\dot{Y}_t + \frac{1}{2}(Y_t\Gamma - \Gamma Y_t) - R_t + Y_t' + \frac{1}{4}Y_t^2$.

Passemos ao cálculo de $\frac{d}{dt}Y_t$. Usaremos o símbolo $*$ para denotar a adjunta de uma aplicação linear.

Lema 1.2.3. $\frac{d}{dt}Y_t = Y_t' - Y_t'^* + Y_t\Gamma - \Gamma Y_t$.

Em consequência,

$$\Lambda = R_t - \frac{1}{4}Y_t^2 - \frac{1}{2}(Y_t' + Y_t'^*).$$

Demonstração. Sejam $V(t)$ e $W(t)$ campos ao longo da trajetória $\gamma(t)$ e $v = A_t \cdot V(t)$ e $w = A_t \cdot W(t)$. Temos $A_t \cdot V' = \dot{v} + \Gamma v$ e $A_t \cdot W' = \dot{w} + \Gamma w$.

Usando a proposição 1.1.1, vem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle YV, W \rangle &= \langle (\nabla_{\dot{\gamma}}Y)V, W \rangle + \langle YV', W \rangle + \langle YV, W' \rangle \\ &= -\langle (\nabla_V Y)W, \dot{\gamma} \rangle - \langle (\nabla_W Y)\dot{\gamma}, V \rangle + \langle YV', W \rangle + \langle YV, W' \rangle \\ &= \langle (\nabla_V Y)\dot{\gamma}, W \rangle - \langle (\nabla_W Y)\dot{\gamma}, V \rangle + \langle YV', W \rangle + \langle YV, W' \rangle \\ &= \langle Y_t'v, w \rangle - \langle Y_t'w, v \rangle + \langle Y_t(\dot{v} + \Gamma v), w \rangle + \langle Y_tv, \dot{w} + \Gamma w \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}\langle YV, W \rangle = \frac{d}{dt}\langle Y_tv, w \rangle = \langle \dot{Y}_tv, w \rangle + \langle Y_t\dot{v}, w \rangle + \langle Y_tv, \dot{w} \rangle,$$

e portanto

$$\langle \dot{Y}_tv, w \rangle = \langle (Y_t' - Y_t'^* + Y_t\Gamma + \Gamma^*Y_t)v, w \rangle.$$

Disto e da antissimetria de Γ segue a primeira parte do lema. A segunda parte é imediata. \square

Em resumo, a partir da trivialização $E_t = C_t \circ B_t \circ A_t$, obtemos um caminho simplético $\phi_t = E_t \cdot d_\theta G_t \cdot E_0^{-1}$ em \mathbb{R}^{2n} tal que

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_t \circ \phi_t, \quad X_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Y_t - \Gamma & -\Lambda \\ I & \frac{1}{2}Y_t - \Gamma \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

onde Λ é a aplicação linear tempo-dependente em \mathbb{R}^n dada por

$$\Lambda = R_t - \frac{1}{4}Y_t^2 - \frac{1}{2}(Y_t' + Y_t'^*).$$

1.3 Redução isotrópica

Nesta seção verificamos que a dinâmica de uma trajetória magnética fechada pode ser estudada a partir do caminho simplético obtido através da redução isotrópica do fluxo linearizado na direção da trajetória e o descreveremos em coordenadas de $(\mathbb{R}^{2n-2}, \omega_0)$.

Dada uma trajetória τ -periódica γ do fluxo magnético $G_t : (TM, \Omega) \rightarrow (TM, \Omega)$, podemos restringir G_t ao nível de energia $\mathbb{E}^{-1}(k)$ em que γ se encontra e considerar

uma seção N de $\mathbb{E}^{-1}(k)$ transversal a $\dot{\gamma}$ e o mapa de retorno de Poincaré $\mathcal{P} : N \rightarrow N$ de γ num ponto $\theta = (\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) \in TM$. A linearização de \mathcal{P} em θ é dada por

$$P = d_\theta \mathcal{P} : T_\theta N \longrightarrow T_\theta N \\ \xi \longmapsto (J_\xi(\tau), J'_\xi(\tau))$$

onde J é um campo de Jacobi magnético ao longo de γ com condições iniciais $(J_\xi(0), J'_\xi(0)) = \xi$.

A direção da trajetória magnética determina uma família de subespaços $V_t = \text{span}\{(\dot{\gamma}, Y\dot{\gamma})\} \subset T_{G_t(\theta)}TM$ que são Ω -isotrópicos e invariantes pelo fluxo. Além disso, o espaço tangente a $\mathbb{E}^{-1}(k)$ em θ é $T_\theta \mathbb{E}^{-1}(k) = V_0^\Omega = T_\theta N \oplus V_0$. Considerando o espaço quociente V_t^Ω/V_t , induzimos uma família de simplectomorfismos $\tilde{G}_t : V_0^\Omega/V_0 \rightarrow V_t^\Omega/V_t$ tal que $\pi_V \circ d_\theta G_t = \tilde{G}_t \circ \pi_V$, onde $\pi_V : V_t^\Omega \rightarrow V_t^\Omega/V_t$ é a projeção quociente. Assim, se $\iota : T_\theta N \rightarrow V_\tau^\Omega$ é a aplicação de inclusão, o mapa de Poincaré linearizado corresponde a \tilde{G}_τ pela composição $\iota \circ \pi_V$:

$$\begin{array}{ccc} T_\theta N & \xrightarrow{P} & T_\theta N \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ V_0^\Omega & \xrightarrow{d_\theta G_\tau} & V_\tau^\Omega \\ \pi_V \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ \frac{V_0^\Omega}{V_0} & \xrightarrow{\tilde{G}_\tau} & \frac{V_\tau^\Omega}{V_\tau} \end{array}$$

O espectro de P descreve a dinâmica do fluxo ao longo da trajetória γ e coincide com o espectro de \tilde{G}_τ com as mesmas multiplicidades algébrica e geométrica. Nosso objetivo nesta seção será expressar o caminho \tilde{G}_t como um caminho de simplectomorfismos lineares do espaço euclidiano com respeito à forma canônica.

Chamaremos uma quádrupla $(H_t, \omega_t, V_t, \phi_t)$ de *configuração isotrópica*, onde (H_t, ω_t) é um espaço vetorial simplético, V_t é um subespaço isotrópico de H_t , $\phi_t : (H_0, \omega_0) \rightarrow (H_t, \omega_t)$ é um simplectomorfismo linear, $\phi_t(V_0) = V_t$ e $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Toda configuração isotrópica $(H_t, \omega_t, V_t, \phi_t)$ gera uma família de simplectomorfismos $\tilde{\phi}_t : V_0^{\omega_0}/V_0 \rightarrow V_t^{\omega_t}/V_t$ entre espaços quocientes com a forma simplética induzida tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_0^{\omega_0} & \xrightarrow{\phi_t} & V_t^{\omega_t} \\ \pi_V \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ \frac{V_0^{\omega_0}}{V_0} & \xrightarrow{\tilde{\phi}_t} & \frac{V_t^{\omega_t}}{V_t} \end{array}$$

comuta, onde π_V denota a projeção quociente. O caminho $\tilde{\phi}_t$ será chamado simplesmente de *caminho reduzido*.

Para duas configurações isotrópicas $(F_t, \omega_t, V_t, \phi_t)$ e $(H_t, \eta_t, W_t, \psi_t)$, escreveremos

$$(F_t, \omega_t, V_t, \phi_t) \simeq_A (H_t, \eta_t, W_t, \psi_t)$$

quando existirem simplectomorfismos $A_t : (F_t, \omega_t) \rightarrow (H_t, \eta_t)$ tais que $A_t \phi_t = \psi_t A_t$

e $A_t V_t = W_t$. Neste caso, A_t induz simplectomorfismos $\tilde{A}_t : V_t^{\omega_t}/V_t \rightarrow W_t^{\eta_t}/W_t$ nos espaços quocientes de modo que vale a comutatividade em

$$\begin{array}{ccc} \frac{V_0^{\omega_0}}{V_0} & \xrightarrow{\tilde{\phi}_t} & \frac{V_t^{\omega_t}}{V_t} \\ \tilde{A}_0 \downarrow & & \downarrow \tilde{A}_t \\ \frac{W_0^{\eta_0}}{W_0} & \xrightarrow{\tilde{\psi}_t} & \frac{W_t^{\eta_t}}{W_t} \end{array}$$

Nestes termos, para γ uma trajetória magnética com $\|\dot{\gamma}\| = 1$, obtivemos na seção anterior as seguintes configurações isotrópicas:

- $G = (T_{G_t(\theta)}TM, \Omega, V_t, d_\theta G_t)$, onde $V_t = \text{span}\{(\dot{\gamma}, Y\dot{\gamma})\}$ e Ω é a forma simplética twisted dada em (1.1).
- $\Phi = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, W_t, \phi_t)$, onde ω_0 é a forma simplética canônica, $W_t = E_t(V_t)$, $\phi_t = E_t d_\theta G_t E_0^{-1}$ e E_t é como na proposição 1.2.2. O caminho simplético ϕ_t satisfaz (1.6).

Uma vez que $G \simeq_E \Phi$, podemos estudar o caminho reduzido de G a partir do caminho reduzido de Φ . Para isto consideraremos um caminho simplético $\hat{\phi}_t$ em \mathbb{R}^{2n-2} dado por

$$\begin{array}{ccc} \frac{W_0^{\omega_0}}{W_0} & \xrightarrow{\tilde{\phi}_t} & \frac{W_t^{\omega_t}}{W_t} \\ \hat{E}_0 \downarrow & & \downarrow \hat{E}_t \\ \mathbb{R}^{2n-2} & \xrightarrow{\hat{\phi}_t} & \mathbb{R}^{2n-2} \end{array}$$

onde $\hat{E}_t : W_t^{\omega_0}/W_t \rightarrow \mathbb{R}^{2n-2}$ é uma família de simplectomorfismos conveniente. Note que, se $E_\tau = E_0$, temos as igualdades entre espectros

$$\sigma(\hat{\phi}_\tau) = \sigma(\tilde{\phi}_\tau) = \sigma(\tilde{G}_\tau) = \sigma(P). \quad (1.7)$$

Antes de obtermos as aplicações \hat{E}_t , façamos mais uma consideração. Seja $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-1)^2}$ o operador que associa a cada matriz $n \times n$ a sua submatriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida eliminando sua primeira linha e sua primeira coluna. Escreveremos $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ para representar a matriz diagonal de elementos (a_1, \dots, a_n) .

Proposição 1.3.1. *Na notação acima, \hat{E}_t pode ser tomado de modo que $\hat{\phi}_t$ satisfaça*

$$\frac{d}{dt} \hat{\phi}_t = \hat{X} \circ \hat{\phi}_t, \quad \text{onde} \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\frac{1}{2}Y_t - \Gamma) & -\hat{\Lambda} \\ I_{n-1} & \mathcal{P}(\frac{1}{2}Y_t - \Gamma) \end{pmatrix},$$

$\hat{\Lambda} = \mathcal{P}\Lambda + \text{Diag}(b^2/4, 0, \dots, 0)$, $\Lambda = R_t - \frac{1}{4}Y_t^2 - \frac{1}{2}(Y_t' + Y_t'^*)$ e $b = b(t)$ é dado em (1.3).

Além disso, $\hat{E}_\tau = \hat{E}_0$ e $\hat{E}_t(\pi_W(W_t^{\omega_0} \cap (\mathbb{R}^n \times 0))) = \mathbb{R}^{n-1} \times 0$ é o subespaço lagrangiano horizontal de \mathbb{R}^{2n-2} .

Antes de demonstrarmos esta proposição, convém mencionar a sua aplicação para o caso particular de superfícies. Em dimensão 2 a força de Lorentz $Y : TM \rightarrow TM$ pode ser descrita por $Y = fJ$ onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real e $J : TM \rightarrow TM$ é a estrutura complexa da superfície M . Assim, a aplicação $A_t : T_{\gamma(t)}M \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada em (1.4) é simplesmente $\dot{\gamma} \mapsto e_1$ e $J\dot{\gamma} \mapsto e_2$ e com isso as aplicações $R_t, Y_t, \Gamma, Y'_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são expressas por

$$R_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad Y_t = \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y'_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}.$$

onde b, r, f_1 e f_2 são funções de t dadas por

$$b(t) = f(\gamma(t)), \quad r(t) = \langle R(\dot{\gamma}, J\dot{\gamma})\dot{\gamma}, J\dot{\gamma} \rangle,$$

$$f_1(t) = \langle \nabla f(\gamma), \dot{\gamma} \rangle \quad \text{e} \quad f_2(t) = \langle \nabla f(\gamma), J\dot{\gamma} \rangle.$$

Por (1.6), o fluxo magnético linearizado em coordenadas de \mathbb{R}^4 é dado por ϕ_t com $\frac{d}{dt}\phi_t = X_t \circ \phi_t$ e

$$X_t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & 0 & \frac{f_1}{2} \\ -\frac{b}{2} & 0 & \frac{f_1}{2} & -r - \frac{b^2}{4} - f_2 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

A proposição anterior nos diz que se restringirmos o fluxo magnético linearizado ao espaço tangente ao nível de energia e tomarmos o quociente pela direção da trajetória, obtemos um caminho simplético $\tilde{\phi}_t$ no espaço quociente que é conjugado ao caminho simplético $\hat{\phi}_t$ em \mathbb{R}^2 que satisfaz $\frac{d}{dt}\hat{\phi}_t = \hat{X}_t \circ \hat{\phi}_t$ para

$$\hat{X}_t = \begin{pmatrix} 0 & -r - \frac{b^2}{2} + f_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Seguindo a notação da seção anterior, a trivialização E_t de γ^*TM foi tomada a partir da composição $E_t = C_t B_t A_t$, onde as aplicações $B_t A_t$ e C_t são expressas pelas matrizes

$$B_t A_t = \begin{pmatrix} -\Gamma & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_t = \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}Y_t + \Gamma \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

escritas na base $\{(X_i, 0), (0, X_j)\}$ de $T_{G_t(\theta)}TM$ e na base canônica de \mathbb{R}^{2n} . Para estudarmos a redução de $\Phi = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, W_t, \phi_t)$, inicialmente consideraremos a redução de $\Psi = (\mathbb{R}^{2n}, \eta_t, U_t, \psi_t)$, onde

$$\eta_t((x, y), (x', y')) = \langle x, y' \rangle - \langle y, x' \rangle + \langle (2\Gamma - Y_t)y, y' \rangle,$$

$U_t = B_t A_t V_t$ e $\psi_t = B_t A_t d_\theta G_t A_0^{-1} B_0^{-1}$. Observe que

$$G \simeq_{BA} \Psi \quad \text{e} \quad \Psi \simeq \Phi.$$

Estas configurações isotrópicas possuem as seguintes propriedades:

(Ψ) O caminho ψ_t satisfaz

$$\frac{d}{dt}\psi_t = Z_t \circ \psi_t, \quad \text{onde} \quad Z_t = \begin{pmatrix} Y_t - 2\Gamma & L \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

e $L = -\Gamma^2 - \dot{\Gamma} - R_t + Y_t\Gamma + Y_t'$. Sendo $V_t = \text{span}\{(\dot{\gamma}, Y\dot{\gamma})\}$, o subespaço isotrópico $U_t = B_t A_t(V_t)$ e seu ortogonal simplético são dados por

$$U_t = \text{span}\{(0, e_1)\}, \quad U_t^{\eta_t} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \langle x + Y_t y, e_1 \rangle = 0\}.$$

Ademais, $U_t \subset \ker Z_t$.

(Φ) O caminho ϕ_t satisfaz

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_t \circ \phi_t, \quad \text{onde} \quad X_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Y_t - \Gamma & -\Lambda \\ I & \frac{1}{2}Y_t - \Gamma \end{pmatrix}$$

e $\Lambda = R - \frac{1}{4}Y_t^2 - \frac{1}{2}(Y_t' + Y_t'^*)$. O subespaço isotrópico $W_t = C_t B_t A_t(V_t)$ e seu ortogonal simplético são dados por

$$W_t = \text{span}\{(1/2 Y_t e_1, e_1)\}, \quad W_t^{\omega_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \langle x + 1/2 Y_t y, e_1 \rangle = 0\}.$$

Ademais, $W_t \subset \ker X_t$.

Determinemos uma expressão em \mathbb{R}^{2n-2} para o caminho reduzido de Ψ .

Seja $\mathbf{p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, x_2, \dots, x_n)$. Observe que

$$Z_t(x, y) = Z_t(x, \mathbf{p}y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2n},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & (\mathbf{p} - I)Y_t \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}x \\ y \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y) \in U_t^{\eta_t}.$$

Isto decorre de $(0, e_1) \in \ker Z_t$ e de

$$(x, y) \in U_t^{\eta_t} \Leftrightarrow \langle x + Y_t y, e_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{p}x + (\mathbf{p} - I)Y_t y.$$

Se $\psi_t = (x(t), y(t))$, sob a condição $\psi_0 = (x(0), y(0)) \in U_0^{\eta_0}$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{p}y \end{pmatrix} &= Z_t \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{p}y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_t - 2\Gamma & L \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (\mathbf{p} - I)Y_t \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}x \\ \mathbf{p}y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_t - 2\Gamma & (Y_t - 2\Gamma)(\mathbf{p} - I)Y_t + L \\ I & (\mathbf{p} - I)Y_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}x \\ \mathbf{p}y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então para \mathcal{P} o operador do enunciado da proposição, $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$ e $\bar{y} =$

(y_2, \dots, y_n) , teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{P}(Y_t - 2\Gamma) & \mathcal{P}((Y_t - 2\Gamma)(\mathbf{p} - I)Y_t + L) \\ \mathcal{P}I & \mathcal{P}((\mathbf{p} - I)Y_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{P}(Y_t - 2\Gamma) & \mathcal{P}L \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

já que \mathcal{P} é linear, $\mathcal{P}((Y_t - 2\Gamma)(\mathbf{p} - I)) = 0$ e $\mathcal{P}(\mathbf{p} - I) = 0$, pois $\mathbf{p} - I = \text{Diag}(-1, 0, \dots, 0)$ e $\Gamma e_1 = Y_t e_1 = b(t)e_2$ pela proposição 1.2.1.v.

Sejam $\tilde{\psi}_t : U_0^{\eta_0}/U_0 \rightarrow U_t^{\eta_t}/U_t$ o caminho reduzido de Ψ e $\tilde{\eta}_t$ a forma simplética induzida no quociente. É fácil verificar que aplicação $\hat{F}_t : (U_t^{\eta_t}/U_t, \tilde{\eta}_t) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n-2}, \hat{\eta}_t)$ dada por

$$\hat{F}_t : [(x, y)] \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) = (x_2, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n),$$

está bem definida e é um symplectomorfismo, onde $\hat{\eta}_t$ é a forma simplética

$$\hat{\eta}_t((x, y), (x', y')) = \langle x, y' \rangle - \langle y, x' \rangle + \langle (\mathcal{P}(2\Gamma - Y_t))y, y' \rangle.$$

Com isso o caminho simplético $\hat{\psi}_t$ em $(\mathbb{R}^{2n-2}, \hat{\eta}_t)$ dado por

$$\begin{array}{ccc} \frac{W_0^{\eta_0}}{W_0} & \xrightarrow{\tilde{\psi}_t} & \frac{W_t^{\eta_t}}{W_t} \\ \hat{F}_0 \downarrow & & \downarrow \hat{F}_t \\ \mathbb{R}^{2n-2} & \xrightarrow{\hat{\psi}_t} & \mathbb{R}^{2n-2} \end{array}$$

satisfaz a equação diferencial $\frac{d}{dt}\hat{\psi}_t = \hat{Z}_t \circ \hat{\psi}_t$, onde

$$\hat{Z}_t = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(Y_t - 2\Gamma) & \mathcal{P}L \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Agora vamos obter uma expressão do caminho reduzido de Φ em \mathbb{R}^{2n-2} . Para isto, basta utilizar da relação $\Psi \simeq_C \Phi$, considerar um symplectomorfismo entre $(\mathbb{R}^{2n-2}, \hat{\eta}_t)$ e $(\mathbb{R}^{2n-2}, \omega_0)$ e tomar as composições correspondentes. De fato, podemos verificar facilmente que

$$\hat{C}_t = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathcal{P}(-\frac{1}{2}Y_t + \Gamma) \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

é um symplectomorfismo de \mathbb{R}^{2n-2} tal que $\hat{C}_t^* \omega_0 = \hat{\eta}_t$. Assim obtemos o caminho simplético $\hat{\phi}_t = \hat{C}_t \hat{\psi}_t \hat{C}_0^{-1}$ em $(\mathbb{R}^{2n-2}, \omega)$ tomando $\hat{E}_t = \hat{C}_t \hat{F}_t \tilde{C}_0^{-1}$.

$$\begin{array}{ccccccc} (\frac{W_0^{\omega_0}}{W_0}, \tilde{\omega}_0) & \xleftarrow{\tilde{C}_0} & (\frac{U_0^{\eta_0}}{U_0}, \tilde{\eta}_0) & \xrightarrow{\hat{F}_0} & (\mathbb{R}^{2n-2}, \hat{\eta}_0) & \xrightarrow{\hat{C}_0} & (\mathbb{R}^{2n-2}, \omega_0) \\ \tilde{\phi}_t \downarrow & & \tilde{\psi}_t \downarrow & & \hat{\psi}_t \downarrow & & \hat{\phi}_t \downarrow \\ (\frac{W_t^{\omega_0}}{W_t}, \tilde{\omega}_0) & \xleftarrow{\tilde{C}_t} & (\frac{U_t^{\eta_t}}{U_t}, \tilde{\eta}_t) & \xrightarrow{\hat{F}_t} & (\mathbb{R}^{2n-2}, \hat{\eta}_t) & \xrightarrow{\hat{C}_t} & (\mathbb{R}^{2n-2}, \omega_0) \end{array}$$

Observe que $\hat{E}_\tau = \hat{E}_0$ e $\hat{E}_t(\pi_W(W_t^{\omega_0} \cap (\mathbb{R}^n \times 0)))$ é o subespaço lagrangiano

horizontal de \mathbb{R}^{2n-2} :

$$\begin{aligned}
\hat{E}_t(\pi_W(W_t^{\omega_0} \cap (\mathbb{R}^n \times 0))) &= \hat{C}_t \hat{F}_t \tilde{C}_0^{-1}(\pi_W(W_t^{\omega_0} \cap (\mathbb{R}^n \times 0))) \\
&= \hat{C}_t \hat{F}_t \pi_U(U_t^{\eta_0} \cap (\mathbb{R}^n \times 0)) \\
&= \hat{C}_t(\mathbb{R}^{n-1} \times 0) \\
&= \mathbb{R}^{n-1} \times 0.
\end{aligned}$$

Por fim, vamos determinar o campo \hat{X}_t tal que $\frac{d}{dt}\hat{\phi}_t = \hat{X}_t \circ \hat{\phi}_t$, ou seja,

$$\hat{X}_t = \frac{d}{dt}\hat{C}_t \cdot \hat{C}_t^{-1} + \hat{C}_t \cdot \hat{Z}_t \cdot \hat{C}_t^{-1},$$

onde \hat{Z}_t e \hat{C}_t são dadas em (1.8) e (1.9). Denote $D = \mathcal{P}(\Gamma - \frac{1}{2}Y_t)$. Uma conta direta mostra que

$$\hat{X}_t = \begin{pmatrix} -D & \dot{D} + D^2 + \mathcal{P}L \\ I & -D \end{pmatrix},$$

onde $L = -\Gamma^2 - \dot{\Gamma} - R_t + Y_t\Gamma + Y_t'$. Usando que $\dot{Y}_t = Y_t' - Y_t'^* + Y_t\Gamma - \Gamma Y_t$ pela proposição 1.2.3, temos

$$\begin{aligned}
\dot{D} + \mathcal{P}L &= \mathcal{P}\left(\dot{\Gamma} - \frac{1}{2}\dot{Y}_t + L\right) \\
&= \mathcal{P}\left(-R_t + \frac{1}{2}(Y_t' + Y_t'^*) + \frac{1}{2}(Y_t\Gamma + \Gamma Y_t) - \Gamma^2\right) \\
&= -\mathcal{P}\Lambda - \mathcal{P}\left(\frac{1}{4}Y_t^2 - \frac{1}{2}(Y_t\Gamma + \Gamma Y_t) + \Gamma^2\right),
\end{aligned}$$

onde $\Lambda = R_t - \frac{1}{4}Y_t^2 - \frac{1}{2}(Y_t' + Y_t'^*)$. Se denotarmos $\mathcal{Q}(A, B) = \mathcal{P}A\mathcal{P}B - \mathcal{P}(AB)$ para A e B duas matrizes $n \times n$ quaisquer, teremos

$$\begin{aligned}
D^2 &= \mathcal{P}\left(\Gamma - \frac{1}{2}Y_t\right)\mathcal{P}\left(\Gamma - \frac{1}{2}Y_t\right) \\
&= \frac{1}{4}(\mathcal{P}Y_t)^2 - \frac{1}{2}(\mathcal{P}Y_t\mathcal{P}\Gamma + \mathcal{P}\Gamma\mathcal{P}Y_t) + (\mathcal{P}\Gamma)^2. \\
&= \mathcal{P}\left(\frac{1}{4}Y_t^2 - \frac{1}{2}(Y_t\Gamma + \Gamma Y_t) + \Gamma^2\right) + \\
&\quad + \frac{1}{4}\mathcal{Q}(Y_t, Y_t) - \frac{1}{2}(\mathcal{Q}(Y_t, \Gamma) + \mathcal{Q}(\Gamma, Y_t)) + \mathcal{Q}(\Gamma, \Gamma)
\end{aligned}$$

Segue que $\dot{D} + \mathcal{P}L + D^2 = -\mathcal{P}(\Lambda) + \beta$, onde

$$\beta = \frac{1}{4}\mathcal{Q}(Y_t, Y_t) - \frac{1}{2}\mathcal{Q}(Y_t, \Gamma) - \frac{1}{2}\mathcal{Q}(\Gamma, Y_t) + \mathcal{Q}(\Gamma, \Gamma),$$

cujo valor passamos a calcular. Se representarmos uma matriz A por $[a_{i,j}]$ para

$i, j \in \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{P}A = [a_{i+1, j+1}]$ para $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$. Assim,

$$\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}([a_{i,j}][b_{i,j}]) = \mathcal{P}\left(\left[\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right]\right) = \left[\sum_{k=1}^{n-1} a_{i+1,k}b_{k,j+1}\right]$$

e

$$\mathcal{P}A\mathcal{P}B = [a_{i+1, j+1}][b_{i+1, j+1}] = \left[\sum_{k=1}^{n-1} a_{i+1, k+1}b_{k+1, j+1}\right] = [a_{i+1, 1}b_{1, j+1}] + \mathcal{P}(AB),$$

ou seja, $\mathcal{Q}(A, B) = [a_{i+1, 1}b_{1, j+1}]$. Uma vez que $\Gamma e_1 = Y_t e_1 = b e_2$ e tanto Γ quanto Y_t são antissimétricas, temos $[a_{i+1, 1}b_{1, j+1}] = \text{Diag}(-b^2, 0, \dots, 0)$, sempre que $A, B \in \{\Gamma, Y_t\}$. Dessa forma o termo β é dado por $\beta = \frac{1}{4}\text{Diag}(-b^2, 0, \dots, 0)$ e concluímos que

$$\hat{X}_t = \begin{pmatrix} -D & \dot{D} + D^2 + \mathcal{P}L \\ I & -D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\frac{1}{2}Y_t - \Gamma) & -\mathcal{P}\Lambda + \beta \\ I & \mathcal{P}(\frac{1}{2}Y_t - \Gamma) \end{pmatrix}.$$

□

Capítulo 2

Índices de caminhos simpléticos

Neste capítulo tratamos de índices de caminhos simpléticos em \mathbb{R}^{2n} seguindo o trabalho de Long desenvolvido em [23] (ou, alternativamente, em [21]). Começamos considerando uma família a 1-parâmetro $\omega \in S^1$ de índices i_ω para caminhos simpléticos e descrevemos alguns fatos básicos. Na segunda seção estabelecemos a fórmula de Bott que consiste em expressar o índice do iterado de um caminho a partir de seus ω -índices e consideramos o índice μ_m que expressa o valor médio dos ω -índices. Na terceira seção vemos que a medida que a função $\omega \mapsto i_\omega$ varia, maior se torna a interseção do espectro de $\gamma(\tau)$ com o círculo unitário em \mathbb{C} , onde $\gamma(\tau)$ é uma das extremidades do caminho simplético. Quando $\gamma(\tau)$ admitir um plano simplético invariante E_u restrito ao qual seja escrito da forma $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, associaremos um número χ a um autovetor de 1 que nos auxiliará no estudo das descontinuidades de $\omega \mapsto i_\omega$. Trataremos casos mais gerais em que E_u possui dimensão maior do que 2 e verificamos χ em alguns exemplos. Na última seção associamos aos chamados caminhos simpléticos degenerados um novo caminho que chamamos de reduzido e, de certa forma, é obtido pela redução do anterior na direção em que este se degenera. A partir da dimensão de E_τ e do valor de χ , relacionamos um tal caminho com o seu caminho reduzido.

2.1 Índice de Long

Nesta seção apresentamos o ω -índice de um caminho simplético para $\omega \in S^1 \subset \mathbb{C}$, sendo o caso particular 1-índice chamado de índice de Long. Para cada caminho γ consideraremos uma família γ_s que chamaremos de perturbação rotacional de γ e que nos ajudará a tratar de caminhos degenerados. As principais referências que utilizarmos nesta seção e na seção seguinte são [21] e [23].

Considere o conjunto dos symplectomorfismos lineares de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ dado por

$$\mathrm{Sp}(2n) = \{M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) : M^T J M = J\},$$

onde $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, I_n é a matriz identidade em \mathbb{R}^n , M^T denota a transposta de M visto como uma matriz na base canônica. Tomaremos em $\mathrm{Sp}(2n)$ a topologia

induzida de \mathbb{R}^{4n^2} .

Para cada $\tau > 0$, seja

$$\mathcal{P}_\tau(2n) = \{\gamma : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n) \text{ cont\u00ednua}; \gamma(0) = I_{2n}\}.$$

Denotaremos por $S^1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ o conjunto dos n\u00fameros complexos unit\u00e1rios. Para cada $\omega \in S^1$, definimos

$$\mathcal{P}_{\tau,\omega}^*(2n) = \{\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n); \ker(\gamma(\tau) - \omega I) = 0\},$$

$$\mathcal{P}_{\tau,\omega}^0(2n) = \mathcal{P}_{\tau,\omega}(2n) \setminus \mathcal{P}_{\tau,\omega}^*(2n) \text{ e}$$

$$\nu_{\tau,\omega}(\gamma) = \dim_{\mathbb{C}} \ker_{\mathbb{C}}(\gamma(\tau) - \omega I).$$

Caminhos $\gamma \in \mathcal{P}_{\tau,1}^*(2n)$ s\u00e3o chamados de *n\u00e3o-degenerados*. Quando a dimens\u00e3o envolvida estiver clara, escreveremos apenas \mathcal{P}_τ , $\mathcal{P}_{\tau,\omega}^0$ e $\mathcal{P}_{\tau,\omega}^*$.

A topologia de $\mathcal{P}_\tau(2n)$ \u00e9 definida pela $C^0([0, \tau], \text{Sp}(2n))$ -topologia induzida pela topologia de $\text{Sp}(2n)$.

Defini\u00e7\u00e3o 2.1.1. Sejam $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2n')$ e $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2n'')$. Definimos o \diamond -produto entre A e B por

$$A \diamond B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 \\ A_3 & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 & B_4 \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2n' + 2n'').$$

Naturalmente se define $\gamma_0 \diamond \gamma_1 \in \mathcal{P}_\tau(2n_0 + 2n_1)$ quando $\gamma_i \in \mathcal{P}_\tau(2n_i)$, $i = 0, 1$. \u00c9 f\u00e1cil verificar que \diamond \u00e9 associativo e ent\u00e3o podemos escrever sem ambiguidade $A \diamond B \diamond C$ ou $\diamond \gamma_i = \diamond_{i=1}^n \gamma_i = \gamma_1 \diamond \cdots \diamond \gamma_n$. Pomos ainda $A^{\diamond n} = \diamond_{i=1}^n A$.

Cada aplica\u00e7\u00e3o $M \in \text{Sp}(2n)$ possui uma \u00fanica decomposi\u00e7\u00e3o polar $M = AU$ onde $A = (MM)^{1/2}$ \u00e9 sim\u00e9trica, positiva e simpl\u00e9tica e U \u00e9 ortogonal e simpl\u00e9tica.

Assim, U tem a forma $\begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}$, onde $u = u_1 + iu_2$ \u00e9 uma matriz unit\u00e1ria e

$i = \sqrt{-1}$. Dessa maneira, para cada caminho $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ podemos associar um caminho $u : [0, \tau] \rightarrow U(n)$ no grupo das matrizes unit\u00e1rias $U(n)$. Se $\Delta(t)$ \u00e9 uma fun\u00e7\u00e3o real cont\u00ednua satisfazendo $\text{Det } u(t) = \exp(i\Delta(t))$, a diferen\u00e7a $\Delta(\tau) - \Delta(0)$ depende apenas de γ e n\u00e3o da escolha da fun\u00e7\u00e3o $\Delta(t)$. Podemos portanto definir o *n\u00famero de rota\u00e7\u00e3o* de γ em $[0, \tau]$ por

$$\Delta_\tau(\gamma) = \Delta(\tau) - \Delta(0) \in \mathbb{R}.$$

Sendo $D(\pm 2) = \pm \text{diag}(2, 1/2) \in \text{Sp}(2)$, sejam $M_n^+ = D(2)^{\diamond n}$ e $M_n^- = D(-2) \diamond D(2)^{\diamond(n-1)}$ matrizes $2n \times 2n$ diagonais. Pelo teorema 2.4.1 de [23] (teorema 7.1 em [21]), o conjunto $\text{Sp}(2n)_\omega^*$ das matrizes simpl\u00e9ticas que n\u00e3o t\u00eam ω por autovalor possui exatamente duas componentes conexas, cada uma das quais contendo M_n^+ e M_n^- . Assim, para todo caminho $\gamma \in \mathcal{P}_{\tau,\omega}^*(2n)$ sempre podemos conectar sua

extremidade $\gamma(\tau)$ a M_n^+ ou a M_n^- por um caminho β inteiramente contido em $\text{Sp}(2n)_\omega^*$. Tomado o caminho justaposto

$$\beta * \gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ \beta(2t - \tau) & \text{se } \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau \end{cases},$$

o número $\frac{1}{\pi}\Delta_\tau(\beta * \gamma)$ é um inteiro e independe da escolha do caminho β (cf. lema 5.2.6 de [23] ou teorema 1.3 de [21]).

Definição 2.1.2. Seguindo a notação acima, definimos o ω -índice de um caminho de simplectomorfismos partindo da identidade da seguinte forma:

- Caso não-degenerado: Se $\gamma \in \mathcal{P}_{\tau,\omega}^*$, definimos como o número inteiro

$$i_{\tau,\omega}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\Delta_\tau(\beta * \gamma).$$

- Caso degenerado: Para $\gamma \in \mathcal{P}_{\tau,\omega}^0$, seu ω -índice é dado por

$$i_{\tau,\omega}(\gamma) = \inf\{i_{\tau,\omega}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{P}_\tau^*(2n) \text{ está } C^0\text{-próximo o suficiente de } \gamma\}. \quad (2.1)$$

Em alguns casos denotaremos o ω -índice apenas por $i_\omega(\gamma)$. Para $\omega = 1$, tal índice será chamado de *índice de Long* e escreveremos

$$\mu_L(\gamma) = i_{\tau,1}(\gamma).$$

A noção de caminho C^0 -próximo é proveniente da topologia de $\mathcal{P}_\tau(2n)$, que é a induzida de $C^0([0, \tau], \text{Sp}(2n))$. Equivalentemente podemos definir o ω -índice de um caminho degenerado γ por

$$i_{\tau,\omega}(\gamma) = \sup_{U \in \mathcal{N}(\gamma)} \inf\{i_{\tau,\omega}(\beta) : \beta \in U \cap \mathcal{P}_{\tau,\omega}^*(2n)\},$$

onde $\mathcal{N}(\gamma)$ é o conjunto de todas as vizinhanças de γ em $\mathcal{P}_\tau(2n)$.

Dados $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ e $t_0 \in (0, \tau)$ próximo de τ , utilizando de pequenas perturbações rotacionais do caminho γ próximo à extremidade $t = \tau$, Long mostra em [21] e [23] que é possível construir caminhos γ_s para $s \in [-1, 1]$ com as seguintes propriedades:

P1. $\gamma_0 = \gamma$;

P2. $\gamma_s|_{[0,t_0]} = \gamma|_{[0,t_0]}$, $\forall s \in [-1, 1]$;

P3. $\gamma_s \in \mathcal{P}_{\tau,\omega}^*(2n)$ para $s \neq 0$;

P4. $\gamma_s \rightarrow \gamma$, quando $s \rightarrow 0$;

P5. $i_{\tau,\omega}(\gamma_1) - i_{\tau,\omega}(\gamma_{-1}) = \nu_{\tau,\omega}(\gamma)$;

P6. $i_{\tau,\omega}(\gamma) = i_{\tau,\omega}(\gamma_{-s})$, $\forall 0 < s \leq 1$.

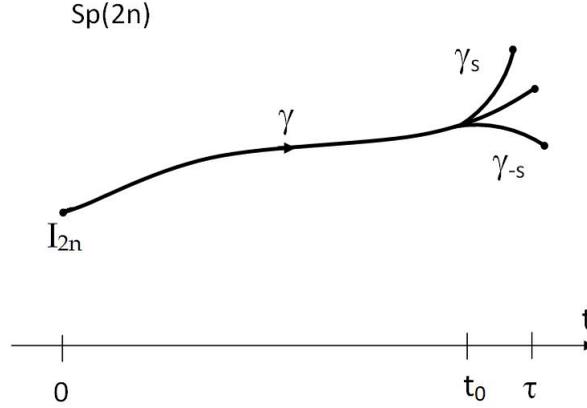


Figura 2.1: Perturbação rotacional de um caminho $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$.

As propriedades acima nos dizem que γ_s é uma variação contínua de γ (P1 e P4), idêntica a γ para $t \in [0, t_0]$ (P2) e formada por caminhos não-degenerados (P3) que em $s = 1$ atinge o maior dos índices entre os caminhos não-degenerados C^0 -próximos de γ (cf. teorema 6.1.8 de [23] ou teorema 2.6 de [21]) (P5) e em $s < 0$ atinge o menor (P6), ou seja, é exatamente o índice de γ (cf. corolário 6.1.9 de [23]).

Portanto o ínfimo dos índices de caminhos não-degenerados em (2.1) é efetivamente atingido e isto pode ser feito apenas tomando uma pequena perturbação na proximidade de um dos extremos de γ . No que segue, o índice de um caminho qualquer $\gamma \in \mathcal{P}_{\tau, \omega}$ (degenerado ou não) é igual ao índice do caminho não-degenerado γ_{-s} com $\gamma_{-s} \rightarrow \gamma$ quando $s \rightarrow 0^+$. Chamaremos os caminhos γ_s , $s \in [-1, 1]$, simplesmente de *perturbações rotacionais de γ* . Estes resultados são estabelecidos em [23], teorema 5.4.1 e corolário 6.1.12 e também em [21], teorema 2.5 e corolário 2.7.

Convém observar que a convergência na propriedade (P4) pode ser tomada da topologia C^1 . De fato, a equação (5.4.6) de [23] (ou (2.6) em [21]) fornece uma expressão explícita para a perturbação rotacional:

$$\gamma_s(t) = \gamma(t)P^{-1}R_{m_1}(s\rho(t)\theta_0) \cdots R_{m_p+2q}(s\rho(t)\theta_0)P.$$

Aqui $R_k(\theta) = I_{2k-2} \diamond R(\theta) \diamond I_{2n-2k}$ é um \diamond -produto entre aplicações identidade $I_{2k} \in \text{Sp}(2k)$ e a rotação $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $P \in \text{Sp}(2n)$ é uma matriz de mudança de base para uma base simplética conveniente, os índices m_1, \dots, m_{p+2q} somam $2n$, θ é um número no intervalo $(0, \frac{\pi}{8n})$ e $\rho: [0, \tau] \rightarrow [0, 1]$ é uma função de classe C^2 que se anula em $[0, t_0]$, possui derivada $\dot{\rho} \geq 0$ e na extremidade $t = \tau$ satisfaz $\rho(\tau) = 1$ e $\dot{\rho}(\tau) = 0$ (cf. seção 5.4 de [23] ou capítulo 2 de [21]). Desta forma, temos também a seguinte propriedade:

P4'. Se $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n) \cap C^1([0, \tau], \text{Sp}(2n))$ então γ_s é um caminho de classe C^1 e $\gamma_s \rightarrow \gamma$ quando $s \rightarrow 0$ na topologia $C^1([0, \tau], \text{Sp}(2n))$.

Definição 2.1.3. Para $\tau > 0$ e $\omega \in S^1$, dados dois caminhos γ_0 e $\gamma_1 \in \mathcal{P}_\tau(2n)$, se existir uma aplicação contínua $\delta : [0, 1] \times [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ tal que $\delta(0, \cdot) = \gamma_0(\cdot)$, $\delta(1, \cdot) = \gamma_1(\cdot)$, $\delta(s, 0) = I$ e $\nu_{\tau, \omega}(\delta(s, \cdot))$ é constante para $0 \leq s \leq 1$, então γ_0 e γ_1 são chamados de ω -homotópicos em $[0, \tau]$ e escrevemos $\gamma_0 \sim_\omega \gamma_1$. Se $\gamma_0 \sim_\omega \gamma_1$ em $[0, \tau]$ para todo $\omega \in S^1$ então γ_0 e γ_1 são homotópicos em $[0, \tau]$.

O ω -índice é aditivo com respeito ao \diamond -produto e é invariante por homotopia e pelo conjugado de ω :

Teorema 2.1.4 (Lema 5.3.1¹ e Teorema 6.2.7 de [23], teorema 2.11 de [21]). *Para todos $\tau > 0$ e $\omega \in S^1$, $i_{\tau, \omega}$ satisfaz:*

(i) (Invariância pelo conjugado) $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$, \Rightarrow

$$i_{\tau, \bar{\omega}}(\gamma) = i_{\tau, \omega}(\gamma).$$

(ii) (Invariância homotópica) $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{P}_\tau(2n)$.

$$\gamma_0 \sim_\omega \gamma_1 \quad \Rightarrow \quad i_{\tau, \omega}(\gamma_0) = i_{\tau, \omega}(\gamma_1).$$

(iii) (Aditividade simplética) $\gamma_i \in \mathcal{P}_\tau(2n_i)$, $i = 0, 1 \quad \Rightarrow$

$$i_{\tau, \omega}(\gamma_0 \diamond \gamma_1) = i_{\tau, \omega}(\gamma_0) + i_{\tau, \omega}(\gamma_1).$$

Note que da invariância homotópica se vê que o índice de Long é também invariante por pequenas perturbações que mantenham os extremos fixos.

2.2 Fórmulas de Bott e caminhos iterados

Nesta seção fazemos um estudo da função $\omega \in S^1 \mapsto i_\omega(\gamma)$ para um caminho $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$. A partir de quatro resultados de [23] (ou [21]) que apenas enunciaremos, veremos que esta é uma função localmente constante no círculo unitário S^1 cujos saltos de descontinuidade são dados pelos chamados *splitting numbers* e ocorrem precisamente nos autovalores de $\gamma(\tau)$ (cf. lema 2.2.4) e portanto em um número finito. A seguir introduzimos um índice que exprime a média dos ω -índices quando ω varia no círculo unitário. A partir de comparações entre o índice médio e o índice de Long, poderemos concluir sobre os autovalores de uma das extremidades do caminho simplético.

O teorema abaixo nos diz que os saltos de descontinuidade de $\omega \mapsto i_\omega(\gamma)$ dependem apenas da extremidade $t = \tau$ de γ .

Teorema 2.2.1 (Lema 9.1.5 de [23], lema 4.5 de [21]). *Sejam $M \in \text{Sp}(2n)$ e $\omega \in S^1$. Tomados um número $\tau > 0$ e um caminho $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ tal que $\gamma(\tau) = M$, definimos*

$$S_M^\pm(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^\pm} i_{\tau, \exp(\epsilon\sqrt{-1})\omega}(\gamma) - i_{\tau, \omega}(\gamma).$$

¹Apesar deste lema ser enunciado apenas para caminhos não-degenerados, obtemos o resultado para o caso geral simplesmente tomando uma perturbação rotacional.

Estes números serão chamados de *splitting numbers* de M em ω e não dependem da escolha do caminho γ .

Os *splitting numbers* são aditivos com respeito ao \diamond -produto e se alternam pelo conjugado de ω , conforme o lema a seguir:

Lema 2.2.2 (Lema 9.1.6 de [23], lema 4.6 de [21]). *Para $M \in Sp(2n)$ e $\omega \in S^1$,*

$$S_M^\pm(\bar{\omega}) = S_M^\mp(\omega).$$

Além disso, para todo $M_i \in Sp(2n_i)$, $i = 0, 1$, vale

$$S_{M_0 \diamond M_1}^\pm(\omega) = S_{M_0}^\pm(\omega) + S_{M_1}^\pm(\omega), \quad \forall \omega \in S^1.$$

Para um caminho simplético $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$, definimos sua extensão ao intervalo $[0, +\infty)$ através da expressão

$$\gamma(t) = \gamma(t - j\tau)\gamma^j, \quad \forall j\tau \leq t \leq (j+1)\tau, j \in \mathbb{N}.$$

A m -ésima iteração γ^m de γ é definida por

$$\gamma^m = \gamma|_{[0, m\tau]}.$$

O próximo teorema fornece duas identidades. A primeira relaciona o índice de Long dos iterados de um caminho simplético com os ω -índices do caminho e a segunda diz o mesmo em termos das multiplicidades geométricas $\nu_{\tau, \omega}(\gamma) = \dim_{\mathbb{C}} \ker_{\mathbb{C}}(\gamma(\tau) - \omega I)$ das extremidades desses caminhos, como definido na seção anterior. Tais identidades são conhecidas como *fórmulas de Bott*.

Teorema 2.2.3 (Fórmulas de Bott – Teorema 9.2.1 de [23], teorema 1.4 de [21]). *Para todos $\tau > 0$, $\gamma \in \mathcal{P}(2n)$ e $k \in \mathbb{N}$, valem*

$$\mu_L(\gamma^k) = \sum_{\omega^k=1} i_{\tau, \omega}(\gamma),$$

$$\nu_{k\tau, 1}(\gamma^k) = \sum_{\omega^k=1} \nu_{\tau, \omega}(\gamma).$$

Escreveremos $\sigma(A)$ para denotar o conjunto de autovalores de uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Lema 2.2.4 (Lema 9.1.1 de [23], lema 4.1 de [21]). *Fixado um caminho $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$, a aplicação definida no círculo $\omega \mapsto i_{\tau, \omega}(\gamma)$ é localmente constante em $S^1 \setminus \sigma(\gamma(\tau))$ e portanto constante em cada uma de suas componentes conexas. Além disso, $\nu_{\tau, \omega}(\gamma) = 0$ para ω em $S^1 \setminus \sigma(\gamma(\tau))$.*

Observe que este lema nos fornece um mecanismo de detecção de autovalores unitários da extremidade $\gamma(\tau)$ do caminho γ : Sempre que ocorrer uma descontinuidade na aplicação $\omega \mapsto i_{\tau, \omega}(\gamma)$, necessariamente haverá uma interseção entre $\sigma(\gamma(\tau))$ e o círculo unitário S^1 , dada exatamente no ponto de descontinuidade.

Reciprocamente, se $\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1$ for vazio então $\omega \mapsto i_{\tau, \omega}(\gamma)$ é contínua e portanto é constante:

Corolário 2.2.5. *Se a extremidade $\gamma(\tau)$ de um caminho $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ não tiver autovalores em S^1 então a função $\omega \mapsto i_\omega(\gamma)$ é constante no círculo unitário e*

$$\mu_L(\gamma^k) = k \mu_L(\gamma)$$

para todo k inteiro

Demonstração. De fato, não havendo autovalores em S^1 , não há descontinuidade para $\omega \mapsto i_\omega(\gamma)$ que é uma função constante. Pela fórmula de Bott,

$$\mu_L(\gamma^k) = \sum_{\omega^k=1} i_{\tau,\omega}(\gamma) = \sum_{\omega^k=1} \mu_L(\gamma) = k \mu_L(\gamma).$$

□

Passemos à definição de índice médio (cf. [23], definição 8.0.1, ou [21], teorema 1.5):

Definição 2.2.6. Para todos $\tau > 0$ e $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$, definimos o *índice médio* (mean index) como o limite

$$\mu_m(\gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mu_L(\gamma^k)}{k}.$$

Proposição 2.2.7. *Para todos $\tau > 0$ e $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$,*

$$\mu_m(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_{e^{i\theta}}(\gamma) d\theta.$$

Segue que o limite acima sempre existe, é um número real finito e se justifica a nomenclatura adotada.

Demonstração. Pelo teorema 2.2.3,

$$\frac{\mu_L(\gamma)}{k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\omega^k=1} i_\omega(\gamma) \frac{2\pi}{k}.$$

Do lema 2.2.4, a função $\omega \mapsto i_\omega(\gamma)$ é localmente constante exceto numa quantidade finita de pontos. Assim, o lado direito da igualdade acima é uma soma de Riemann e converge para a integral correspondente quando $k \rightarrow \infty$. □

Segue de imediato da definição de índice médio e da fórmula de Bott que para um caminho $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ fixado, se a função $\omega \mapsto i_\omega(\gamma)$ for constante, o índice médio será igual ao índice de Long. Portanto uma diferença entre os índices implica numa descontinuidade desta função, como estimado no teorema a seguir. Na seção seguinte utilizaremos deste resultado para inferirmos sobre a cardinalidade de $\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1$.

Teorema 2.2.8. *Sejam $\tau > 0$ e $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ um caminho simplético. Se $\mu_L(\gamma) \neq \mu_m(\gamma)$ então para qualquer $d > 0$ e para algum $z_0 = e^{i\alpha} \in S^1$ com $\alpha \in (0, \pi]$, valem as seguintes implicações:*

(i) Se $\mu_L(\gamma) \leq d < \mu_m(\gamma)$, sejam $l_1 = \sup \left\{ p \geq 0 \text{ inteiro} : p < 2 \frac{\mu_m(\gamma) - d}{d} \right\}$ e $l_2 = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{p+2}{p+1} < \frac{\mu_m(\gamma)}{d} \right\}$ inteiros. Então

$$i_{z_0}(\gamma) - i_1(\gamma) \geq d \sup \left\{ l_1, \frac{1}{l_2} \right\}.$$

(ii) Se $\mu_m(\gamma) < d \leq \mu_L(\gamma)$, seja $l = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : p > \frac{\mu_m(\gamma)}{d - \mu_m(\gamma)} \right\}$. Então

$$i_1(\gamma) - i_{z_0}(\gamma) \geq \frac{d}{l}.$$

Antes de provarmos este teorema, precisamos do seguinte lema técnico:

Lema 2.2.9. Denote $\lfloor x \rfloor = \sup \{ y \text{ inteiro} : y \leq x \}$ e $\lceil x \rceil = \inf \{ y \text{ inteiro} : y \geq x \}$.

(i) Se $\theta > 1$ então

$$\sup \left\{ \frac{p-q}{q-1} : p, q \in \mathbb{N}, 1 < \frac{p}{q} \leq \theta \right\} \geq \lfloor 2\theta - 2 \rfloor.$$

(ii) Se $1 < \theta < 2$ então

$$\sup \left\{ \frac{p-q}{q-1} : p, q \in \mathbb{N}, 1 < \frac{p}{q} \leq \theta \right\} = \frac{1}{\lceil \frac{2-\theta}{\theta-1} \rceil}.$$

(iii) Se $0 < \theta < 1$ então

$$\sup \left\{ \frac{q-p}{q-1} : p, q \in \mathbb{N}, \theta \leq \frac{p}{q} < 1 \right\} = \frac{1}{\lceil \frac{\theta}{1-\theta} \rceil}.$$

Demonstração. Suponha $\theta > 1$ e considere para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$A_n = \left\{ \frac{n}{q-1} : q \in \mathbb{N}, 1 < 1 + \frac{n}{q} \leq \theta \right\} = \left\{ \frac{n}{q-1} : q \in \mathbb{N}, \theta' \leq \frac{q}{n} \right\},$$

onde $\theta' = \frac{1}{\theta-1}$. Observe que $n = \frac{n}{2-1} \in A_n \Leftrightarrow \frac{n}{2} \leq \theta - 1 \Leftrightarrow n \leq \lfloor 2\theta - 2 \rfloor$ e neste caso $\sup A_n = n$. Portanto $\sup \left\{ \frac{p-q}{q-1} : p, q \in \mathbb{N}, 1 < \frac{p}{q} < \theta \right\} = \sup \cup A_n \leq \lfloor 2\theta - 2 \rfloor$, o que prova o primeiro item.

No item (ii), $1 < \theta < 2$ e $\theta' = \frac{1}{\theta-1} > 1$. Temos que $\sup A_n = \frac{n}{\lceil n\theta' \rceil - 1}$ pois $\lceil n\theta' \rceil = \inf \{ q \in \mathbb{N} : \theta' \leq \frac{q}{n} \}$ e assim

$$\sup \left\{ \frac{p-q}{q-1} : p, q \in \mathbb{N}, 1 < \frac{p}{q} < \theta \right\} = \sup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \sup_n \left\{ \frac{n}{\lceil n\theta' \rceil - 1} \right\}.$$

Escreva $\theta' = \lceil \theta' \rceil - \rho$ com $\rho \in [0, 1)$ e observe que $\lceil n\theta' \rceil = n \lceil \theta' \rceil + \lceil -n\rho \rceil$ e

$\inf_n \left\{ \frac{\lceil -n\rho \rceil - 1}{n} \right\} = -1 =$ primeiro termo da sequência, pois

$$0 < \rho < 1 \Rightarrow -n < -n\rho \Rightarrow -n + 1 \leq \lceil -n\rho \rceil \Rightarrow -1 \leq \frac{\lceil -n\rho \rceil - 1}{n}$$

e para $\rho = 0$ é evidente. Dessa forma,

$$\inf_n \left\{ \frac{\lceil n\theta' \rceil - 1}{n} \right\} = \lceil \theta' \rceil + \inf_n \left\{ \frac{\lceil -n\rho \rceil - 1}{n} \right\} = \lceil \theta' \rceil - 1,$$

e portanto

$$\sup_n \frac{n}{\lceil n\theta' \rceil - 1} = \frac{1}{\inf_n \left\{ \frac{\lceil n\theta' \rceil - 1}{n} \right\}} = \frac{1}{\lceil \theta' \rceil - 1} = \frac{1}{\lceil \frac{1}{\theta - 1} \rceil - 1} = \frac{1}{\lceil \frac{2 - \theta}{\theta - 1} \rceil}.$$

A prova do terceiro item é análoga. Seja $0 < \theta < 1$ e tome para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$B_n = \left\{ \frac{n}{n + p - 1} : p \in \mathbb{N}, \theta \leq \frac{p}{n + p} < 1 \right\} = \left\{ \frac{n}{n + p - 1} : p \in \mathbb{N}, \frac{p}{n} \geq \theta' \right\},$$

onde $\theta' = \frac{\theta}{1 - \theta}$. Temos $\sup B_n = \frac{n}{n - 1 + \lceil n\theta' \rceil}$ pois $\lceil n\theta' \rceil = \inf \{ p \in \mathbb{N} : \frac{p}{n} \geq \theta' \}$. Escrevendo $\theta' = \lceil \theta' \rceil - \rho$ com $\rho \in [0, 1)$, vemos, assim como no caso anterior, que $\lceil n\theta' \rceil = n \lceil \theta' \rceil + \lceil -n\rho \rceil$ e $\inf_n \left\{ \frac{\lceil -n\rho \rceil - 1}{n} \right\} = -1$ e portanto

$$\sup_n \left\{ \frac{q - p}{q - 1} : p, q \in \mathbb{N}, \theta \leq \frac{p}{q} < 1 \right\} = \sup_n \left\{ \frac{n}{n - 1 + \lceil n\theta' \rceil} \right\} = \frac{1}{\lceil \theta' \rceil}.$$

□

Demonstração do teorema 2.2.8. Considere ϵ tal que $0 < \epsilon < \mu_m(\gamma) - d$. Pela definição de índice médio, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \in \mathbb{N}, k \geq N \Rightarrow \left| \frac{\mu_L(\gamma^k)}{k} - \mu_m(\gamma) \right| < \epsilon.$$

Sendo $\theta' = \frac{\mu_m(\gamma) - \epsilon}{d} > 1$, tome $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $1 < \frac{p}{q} \leq \frac{\mu_m(\gamma) - \epsilon}{d}$ com $q \geq N$. Então

$$\mu_L(\gamma^q) > q(\mu_m(\gamma) - \epsilon) \geq pd.$$

Usando a fórmula de Bott dada pelo teorema 2.2.3 temos

$$\sum_{\substack{z^q=1 \\ z \neq 1}} i_z(\gamma) = \mu_L(\gamma^q) - \mu_L(\gamma) > pd - d.$$

Dessa desigualdade concluímos que deve existir algum $z_0 \in S^1 \setminus \{1\}$ tal que $i_{z_0}(\gamma) >$

$\frac{pd-d}{q-1}$ (e podemos supor que $\text{Im}(z_0) \geq 0$, pois $i_z(\gamma) = i_{\bar{z}}(\gamma), \forall z \in S^1$) e portanto

$$i_{z_0}(\gamma) - i_1(\gamma) > d \frac{p-1}{q-1} - d = d \frac{p-q}{q-1}.$$

Como $l_1 < 2 \frac{\mu_m(\gamma)-d}{d}$, podemos admitir que $\epsilon > 0$ seja tomado de modo que $\epsilon < \frac{d}{2} (2 \frac{\mu_m(\gamma)-d}{d} - l_1)$ e assim $l_1 < 2(\theta' - 1)$. Usando o item (i) do lema anterior concluiremos que

$$i_{z_0}(\gamma) - i_1(\gamma) \geq d \lfloor 2\theta' - 2 \rfloor \geq dl_1.$$

Vamos mostrar que também vale $i_{z_0}(\gamma) - i_1(\gamma) \geq \frac{d}{l_2}$. Se $\frac{\mu_m(\gamma)}{d} > \frac{3}{2}$, podemos assumir que $\theta' > \frac{3}{2}$ se $\epsilon > 0$ for pequeno, logo $\lfloor 2\theta' - 2 \rfloor > 1 \geq \frac{1}{l_2}$. Suponha que $\frac{\mu_m(\gamma)}{d} \leq \frac{3}{2}$. Sendo $\frac{l_2+2}{l_2+1} < \frac{\mu_m(\gamma)}{d}$, também vale $\frac{l_2+2}{l_2+1} < \theta'$ se $\epsilon > 0$ for pequeno. Assim $\frac{2-\theta'}{\theta'-1} < l_2$ e $\lceil \frac{2-\theta'}{\theta'-1} \rceil \leq l_2$. Agora usando o item (ii) do lema anterior vemos que

$$i_{z_0}(\gamma) - i_1(\gamma) \geq \frac{d}{\lceil \frac{2-\theta'}{\theta'-1} \rceil} \geq \frac{d}{l_2}.$$

A demonstração do item (ii) é inteiramente análoga. Tome $0 < \epsilon < d - \mu_m(\gamma)$, $N \in \mathbb{N}$ grande o bastante para que

$$k \in \mathbb{N}, k \geq N \Rightarrow \left| \frac{\mu_L(\gamma^k)}{k} - \mu_m(\gamma) \right| < \epsilon$$

e p e q inteiros positivos tais que $0 < \frac{\mu_m(\gamma)+\epsilon}{d} \leq \frac{p}{q} < 1$ com $q \geq N$. Então $\mu_L(\gamma^q) < q(\epsilon + \mu_m(\gamma)) \leq pd$,

$$\sum_{\substack{z^q=1 \\ z \neq 1}} i_z(\gamma) = \mu_L(\gamma^q) - \mu_L(\gamma) < pd - d$$

e para algum z_0 (com $\text{Im}(z_0) \geq 0$) vale

$$i_1(\gamma) - i_{z_0}(\gamma) > d \frac{q-p}{q-1}.$$

Sendo $l > \frac{\mu_m(\gamma)}{d - \mu_m(\gamma)}$, temos $\frac{l}{l+1} > \frac{\mu_m(\gamma)}{d}$. Podemos tomar $\epsilon > 0$ de modo que $\epsilon < d(\frac{l}{l+1} - \frac{\mu_m(\gamma)}{d})$. Com isso $\theta' \leq \frac{l}{l+1}$ e $\lceil \frac{\theta'}{1-\theta'} \rceil \leq l$. Usando o item (iii) do último lema concluímos que

$$i_1(\gamma) - i_{z_0}(\gamma) \geq \frac{1}{\lceil \frac{\theta'}{1-\theta'} \rceil} \geq \frac{1}{l}.$$

□

2.3 Caminhos simpléticos e autovalores

Nesta seção mostramos como o ω -índice de Long pode ser utilizado para concluirmos sobre a posição dos autovalores em relação ao círculo unitário da extremidade

de um caminho de symplectomorfismos.

Escreveremos, como antes, $\sigma(M)$ para indicar o conjunto de autovalores de uma aplicação $M \in \text{Sp}(2n)$ e $\#A$ para a cardinalidade de um conjunto A . No caso particular em que $A \subset \sigma(M)$, a menos que mencionado o contrário, ao escrevermos $\#A$ estaremos nos referindo à quantidade de autovalores de M em A contadas as multiplicidades algébricas.

O teorema a seguir justifica nosso interesse em aumentarmos a diferença $i_\omega(\gamma) - i_1(\gamma)$ ou $i_1(\gamma) - i_\omega(\gamma)$ (cf. teorema 2.2.8): Na medida em que $i_\omega(\gamma)$ se afasta de $i_1(\gamma)$, aumenta a interseção de $\sigma(\gamma(\tau))$ com S^1 .

Teorema 2.3.1. *Sejam $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ um caminho simplético partindo da identidade e $i_\omega(\gamma)$ seu ω -índice. Para todo $\omega \in S^1$ com $\omega \neq 1$, vale*

$$\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq 2(i_\omega(\gamma) - i_1(\gamma))$$

e

$$\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq 2(i_1(\gamma) - i_\omega(\gamma)) + 4S^+(1)$$

contadas as multiplicidades algébricas. Em particular,

$$i_\omega(\gamma) - i_1(\gamma) \leq n \quad e \quad i_1(\gamma) - i_\omega(\gamma) \leq n - 2S^+(1)$$

e se em alguma valer a igualdade então $\sigma(\gamma(\tau)) \subset S^1$.

Passemos às definições necessárias a fim de estabelecer este resultado. Uma apresentação completa dos objetos abaixo pode ser encontrada em [21] e em [23].

Sejam $M \in \text{Sp}(2n)$ uma aplicação simplética e $\lambda \in S^1$. Considere

$$E_\lambda(M) = \bigcup_{k \geq 1} \ker_{\mathbb{C}}(M - \lambda I)^k \subset \mathbb{C}^{2n}$$

o autoespaço generalizado de M com respeito a λ . A *multiplicidade algébrica* de λ é igual a $\dim_{\mathbb{C}} E_\lambda(M)$.

Seja G o automorfismo em \mathbb{C}^{2n} dado por

$$G = iJ,$$

onde $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. O operador G é autoadjunto e pelo corolário 1.3.4 de [23], $G|_{E_\lambda(M)}$ é não-degenerada sempre que $\lambda \in \sigma(M) \cap S^1$. Nestas condições, definimos o *Krein type number* de $\lambda \in \sigma(M) \cap S^1$ como o par

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = (m^+(G|_{E_\lambda(M)}), m^-(G|_{E_\lambda(M)})),$$

onde $m^\pm(S) = \sup\{\dim K : K \subset \mathbb{C}^{2n}, \pm S|_K > 0\}$ para um operador simétrico $S : \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$. Evidentemente, $\dim E_\lambda(M) = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$.

Para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, as seguintes matrizes são chamadas de *formas normais básicas* de λ :

$$\begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{para } \lambda \notin S^1;$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{para } \lambda = \pm 1, \text{ onde } b = \pm 1, 0;$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & b_1 & b_2 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

para $\lambda = e^{i\theta} \neq \pm 1$, onde $b_i \in \mathbb{R}, b_2 \neq b_3$.

Uma forma normal básica M é dita *trivial* se para $\alpha > 0$ pequeno, $MR((t-1)\alpha)^{\circ n}$ não tiver autovalores em S^1 para $t \in [0, 1)$, e é dita *não-trivial* caso contrário.

Para uma forma normal básica M de $\lambda \in S^1$, definimos seu *ultimate type* e denotamos por (p, q) como sendo seu Krein type number se M for não-trivial e sendo $(0, 0)$ se M for trivial.

Segundo o teorema 1.8.10 de [23] (teorema 7.8 de [21]), para todo simplectomorfismo $M \in \text{Sp}(2n)$ sempre existe um caminho $f : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ com imagem contida no conjunto $\Omega(M)$ dado por

$$\{N \in \text{Sp}(2n) : \sigma(N) \cap S^1 = \sigma(M) \cap S^1, \nu_\lambda(N) = \nu_\lambda(M), \forall \lambda \in \sigma(M) \cap S^1\}$$

e que liga M a uma matriz da forma

$$M_1(\omega_1) \diamond \cdots \diamond M_k(\omega_k) \diamond M_0,$$

onde $M_i(\omega_i)$ é uma forma normal básica de $\omega_i \in S^1$ para $1 \leq i \leq k$ e M_0 satisfaz $\sigma(M_0) \cap S^1 = \emptyset$.

Assim, o *ultimate type* de uma matriz M é definido como (p, q) , onde $p = \sum_{i=1}^k p_i$, $q = \sum_{i=1}^k q_i$ e (p_i, q_i) é o ultimate type da forma normal básica $M_i(\omega_i)$. A proposição 1.8.13 de [23] (proposição 4.9 de [21]) garante que (p, q) está bem definido.

Em resumo, para cada matriz simplética M e $\lambda \in S^1$ definimos o Krein type number de M em λ como um par de inteiros não-negativos $(\mathfrak{p}(\lambda), \mathfrak{q}(\lambda))$ cuja soma $\mathfrak{p}(\lambda) + \mathfrak{q}(\lambda) = \dim E_\lambda(M)$ é a multiplicidade algébrica de λ e consideramos o ultimate type de M em λ como um par de inteiros $(p(\lambda), q(\lambda))$ de modo que

$$0 \leq p(\lambda) \leq \mathfrak{p}(\lambda) \quad \text{e} \quad 0 \leq q(\lambda) \leq \mathfrak{q}(\lambda).$$

O papel do ultimate type no estudo do índice de caminhos simpléticos é expresso no seguinte

Teorema 2.3.2 (Teorema 9.1.7 de [23], teorema 4.11 de [21]). *Para todos $\omega \in S^1$ e $M \in \text{Sp}(2n)$,*

$$S_M^+(\omega) = p \quad \text{e} \quad S_M^-(\omega) = q,$$

onde (p, q) é o ultimate type de ω para M .

Corolário 2.3.3. *A soma dos splitting numbers em ω não supera a multiplicidade*

algébrica de ω :

$$S^+(\omega) + S^-(\omega) \leq \dim \bigcup_{k \geq 1} \ker_{\mathbb{C}}(M - \omega I)^k.$$

Demonstração. $\dim E_{\omega}(M) = \mathbf{p}(\omega) + \mathbf{q}(\omega) \geq p(\omega) + q(\omega) = S^+(\omega) + S^-(\omega)$. \square

Passemos agora à demonstração do teorema 2.3.1.

Demonstração do teorema 2.3.1. Escreveremos simplesmente $\#\sigma \cap S^1$ para indicar $\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1$, $E_{\lambda} = E_{\lambda}(\gamma(\tau))$ e $S^{\pm}(\lambda) = S_{\gamma(\tau)}^{\pm}(\lambda)$. Tome $\omega = e^{i\mu}$. Como $i_{\omega}(\gamma) = i_{\bar{\omega}}(\gamma)$, podemos admitir que $\mu \in (0, \pi]$.

Sejam $(\mathbf{p}(\lambda), \mathbf{q}(\lambda))$ o krein type number e $(p(\lambda), q(\lambda))$ o ultimate type de $\lambda \in S^1$ para $\gamma(\tau)$. Temos

$$\dim E_{\bar{\lambda}} = \mathbf{p}(\bar{\lambda}) + \mathbf{q}(\bar{\lambda}) = \mathbf{q}(\lambda) + \mathbf{p}(\lambda) = \dim E_{\lambda}$$

e

$$\dim E_1 = 2\mathbf{p}(1) = 2\mathbf{q}(1) \quad \text{e} \quad \dim E_{-1} = 2\mathbf{p}(-1) = 2\mathbf{q}(-1).$$

Dessas igualdades e do lema 2.2.2 teremos

$$\begin{aligned} \#\sigma \cap S^1 &= \sum_{\lambda \in S^1} \dim E_{\lambda} \\ &= \dim E_1 + \dim E_{-1} + \sum_{\theta \in (0, \pi)} (\dim E_{e^{i\theta}} + \dim E_{e^{-i\theta}}) \\ &= 2\mathbf{p}(1) + 2\mathbf{p}(-1) + 2 \sum_{\theta \in (0, \pi)} (\mathbf{p}(e^{i\theta}) + \mathbf{q}(e^{i\theta})) \\ &\geq 2\mathbf{p}(1) + 2 \sum_{\theta \in (0, \mu)} (\mathbf{p}(e^{i\theta}) + \mathbf{q}(e^{i\theta})) \\ &\geq 2p(1) + 2 \sum_{\theta \in (0, \mu)} p(e^{i\theta}) \\ &= 2S^+(1) + 2 \sum_{\theta \in (0, \mu)} S^+(e^{i\theta}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \#\sigma \cap S^1 &= 2\mathbf{p}(1) + 2\mathbf{p}(-1) + 2 \sum_{\theta \in (0, \pi)} (\mathbf{p}(e^{i\theta}) + \mathbf{q}(e^{i\theta})) \\ &\geq 2p(1) + 2 \sum_{\theta \in (0, \mu]} q(e^{i\theta}) \\ &= 2S^+(1) + 2 \sum_{\theta \in (0, \mu]} S^-(e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Por outro lado, segue da definição de splitting numbers e do lema 2.2.4 que

$$i_{e^{i\mu}}(\gamma) = i_1(\gamma) + S^+(1) + \sum_{\theta \in (0, \mu)} (S^+(e^{i\theta}) - S^-(e^{i\theta})) - S^-(e^{i\mu})$$

logo

$$i_1(\gamma) + S^+(1) - \sum_{\theta \in (0, \mu]} S^-(e^{i\theta}) \leq i_{e^{i\mu}}(\gamma) \leq i_1(\gamma) + S^+(1) + \sum_{\theta \in (0, \mu)} S^+(e^{i\theta}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \#\sigma \cap S^1 &\geq 2(S^+(1) + \sum_{\theta \in (0, \mu)} S^+(e^{i\theta})) \\ &\geq 2(i_{e^{i\mu}}(\gamma) - i_1(\gamma)) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \#\sigma \cap S^1 &\geq 2S^+(1) + 2 \sum_{\theta \in (0, \mu]} S^-(e^{i\theta}) \\ &\geq 2S^+(1) + 2(i_1(\gamma) - i_{e^{i\mu}}(\gamma) + S^+(1)) \\ &= 2(i_1(\gamma) - i_{e^{i\mu}}(\gamma)) + 4S^+(1). \end{aligned}$$

As desigualdades $i_\omega(\gamma) - i_1(\gamma) \leq n$ e $i_1(\gamma) - i_\omega(\gamma) \leq n - 2S^+(1)$ decorrem de $\#\sigma \cap S^1 \leq 2n$ e se em alguma ocorrer igualdade, significa que $\#\sigma \cap S^1 = 2n$, isto é, $\sigma \subset S^1$. □

2.4 Fator de correção

Os caminhos simpléticos ϕ com que lidaremos são aqueles obtidos a partir do fluxo magnético linearizado ao longo órbitas τ -periódicas e portanto a extremidade ϕ_τ possui sempre 1 como autovalor e com um autovetor definido pela direção da trajetória. Em alguns casos especiais este autovetor está contido em um plano simplético invariante onde ϕ_τ possui a expressão $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nestes casos chamamos o sinal de c de fator de correção e o denotamos por $\chi \in \{-1, 0, 1\}$. Este termo nos permitirá determinar cotas inferior ou superior para o splitting number de ϕ_τ no autovalor em 1. Mais geralmente, dada uma matriz $M \in \text{Sp}(2n)$ e uma direção $u \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $Mu = u$, sempre podemos tomar um subespaço simplético M -invariante E_u que contém u e associar um valor χ que expresse a interferência da componente nilpotente de $M|_{E_u}$ no cálculo do splitting number de M . A fim de estabelecer este termo, fazemos algumas considerações preliminares.

Seguindo [21] e [23], uma *forma normal* para o autovalor 1 é uma matriz

$$N_k(1, b) = \begin{pmatrix} A_k & B_k(b) \\ 0 & C_k \end{pmatrix},$$

$k \geq 1$ e $b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$, formada pelos blocos $k \times k$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_k = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & -b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_3 & -b_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ b_{k-1} & -b_{k-1} & b_{k-1} & \dots & (-1)^{k-2}b_{k-1} & 0 \\ b_k & -b_k & b_k & \dots & (-1)^{k-2}b_k & (-1)^{k-1}b_k \end{pmatrix}$$

e

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ -(-1)^{k-1} & -(-1)^{k-2} & -(-1)^{k-3} & \dots & 1 & 0 \\ -(-1)^k & -(-1)^{k-1} & -(-1)^{k-2} & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma verificação mostra que 1 é o único autovalor de uma forma normal $N_k(1, b)$ e sua multiplicidade geométrica é

$$\dim \ker(N_k(1, b) - I_{2k}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } b_k \neq 0 \\ 2 & , \text{ se } b_k = 0 \end{cases}.$$

Pelo teorema a seguir, a menos de uma mudança de base simplética, toda matriz simplética é um \diamond -produto de formas normais de 1 com uma matriz que não possui 1 como autovalor. Assim podemos entender tais matrizes como uma versão simplética de blocos de Jordan associados ao autovalor 1.

Teorema 2.4.1 (Teorema 1.4.1 de [23], teorema 7.6 de [21]). *Suponha que 1 seja autovalor de $M \in Sp(2n)$. Então existem $P \in Sp(2n)$ e $M_i \in Sp(2k_i)$ tais que*

$$P^{-1} M P = M_1 \diamond \dots \diamond M_m \diamond M_0, \quad (2.3)$$

onde $M_i = N_{k_i}(1, b^i)$ ($i = 1, \dots, m$) é uma forma normal de 1 e $1 \notin \sigma(M_0)$.

Para $M \in Sp(2n)$, considere como antes o conjunto $\Omega(M)$ dado por

$$\{N \in Sp(2n) : \sigma(N) \cap S^1 = \sigma(M) \cap S^1, \nu_\lambda(N) = \nu_\lambda(M), \forall \lambda \in \sigma(M) \cap S^1\}$$

e o conjunto $\Omega^0(M)$ definido por

$$\Omega^0(M) = \text{componente conexa de } \Omega(M) \text{ que contém } M \quad (2.4)$$

que será chamado de *componente homotópica* de M . Ou seja, $\Omega^0(M)$ é a componente conexa das matrizes que têm seus autovalores unitários e suas respectivas multiplicidades geométricas (mas não necessariamente as multiplicidades algébricas) iguais aos de M .

Se M for uma forma normal de 1, então M sempre pode ser deformada dentro de sua componente homotópica $\Omega^0(M)$ em um \diamond -produto de uma forma normal *básica*

$$N(1, c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2), \quad c \in \{-1, 0, 1\},$$

com uma matriz que não possua autovalores em S^1 , (cf. teorema 1.8.10 de [23] ou teorema 7.6 de [21]). Além disso, pela Lista 9.1.12 de [23], o splitting number de $N(1, c)$ é dado por

$$S^\pm(1) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } c = 1 \text{ ou } 0 \\ 0 & , \text{ se } c = -1 \end{cases}.$$

Lema 2.4.2 (Lema 9.1.5 de [23], teorema 4.11 de [21]). *Fixado $\omega \in S^1$, o splitting number $S^\pm(\omega)$ é constante em $\Omega^0(M)$. Isto é,*

$$S_N^\pm(\omega) = S_M^\pm(\omega), \quad \forall N \in \Omega^0(M).$$

Seguindo este lema, toda forma normal $M \in \text{Sp}(2n)$ de 1 é conectada por um caminho $f : [0, 1] \rightarrow \Omega^0(M)$ a um produto $N(1, c) \diamond N$ tal que $1 \notin \sigma(N)$. Assim, $S_N^\pm(1) = 0$ e $S_M^\pm(1) = S_{N(1,c)}^\pm(1)$, que é determinado pelo valor de c . Nestas condições, o procedimento para o cálculo de $S_M^\pm(1)$ segue os seguintes passos:

1. Pelo teorema 2.4.1, para algum $P \in \text{Sp}(2n)$, $P^{-1}MP$ é um produto de formas básicas $M_1 \diamond \cdots \diamond M_m \diamond M_0$ de 1, com exceção de M_0 que não tem 1 como autovalor.
2. Como $P^{-1}MP \in \Omega^0(M)$ e pela aditividade de S^\pm (lema 2.2.2), vale

$$S_M^\pm(1) = S_{P^{-1}MP}^\pm(1) = \sum_{i=1}^m S_{M_i}^\pm(1).$$

3. Cada forma básica M_i é deformada dentro de $\Omega^0(M_i)$ em uma matriz $N(1, c_i) \diamond N_i$ com $1 \notin \sigma(N_i)$, logo a parcela $S_{M_i}^\pm(1)$ é determinada pelo valor de c_i .

Seja M uma matriz simplética cuja fatoração dada pelo teorema 2.4.1 fornece apenas uma forma normal M_1 . Podemos deformar M_1 dentro da componente homotópica $\Omega^0(M)$ num \diamond -produto entre uma forma normal básica $N(1, c) \in \text{Sp}(2)$ e uma matriz N_0 tal que $1 \notin \sigma(N_0)$. O termo c é o que chamaremos de fator de correção. Do que vimos acima segue que o par $(S_M^\pm(1), \nu_M(1))$ composto pelos splitting numbers e pela multiplicidade geométrica de M em 1 é dado por $(1, 1)$, $(1, 2)$ ou $(0, 1)$ conforme c seja 1, 0 ou -1 , respectivamente. Com isso o termo c está associado à matriz M sem ambiguidade pois as funções $N \mapsto S_N^\pm(1)$ e $N \mapsto \nu_1(N)$ são funções constantes na componente homotópica $\Omega^0(M)$. Além disso, se duas

matrizes M e M' em $\text{Sp}(2n)$ estiverem associadas respectivamente a c e c' e satisfizerem

$$S_M^\pm(1) = S_{M'}^\pm(1) \quad \text{e} \quad \nu_M(1) = \nu_{M'}(1)$$

então necessariamente $c = c'$. Passemos agora a uma formulação mais geral para o fator de correção.

Sejam $M : (E, \omega) \rightarrow (E, \omega)$ um simplectomorfismo num espaço vetorial simplético (E, ω) e $u \in E$ um vetor não-nulo tal que $Mu = u$. Consideraremos um subespaço simplético E_u que contém u , é invariante por M e tem dimensão mínima. Para isso, tome uma sequência de subespaços encaixados em $\bigcup_k \ker(M - I)^k \subset E$ e com estas propriedades:

$$\bigcup_k \ker(M - I)^k \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \tag{2.5}$$

tal que E_i é simplético, M -invariante e $u \in E_i$.

Admitindo que as inclusões acima sejam próprias, uma tal sequência deve ser finita e denotaremos seu último termo por E_u . Diremos que E_u é um *menor* subespaço simplético M -invariante que contém u . Considere a matriz

$$M_u = Q^{-1} M|_{E_u} Q,$$

onde $Q : (\mathbb{R}^{2l}, \omega_0) \rightarrow (E_u, \omega|_{E_u})$ é um simplectomorfismo linear entre E_u e o espaço euclidiano com a forma canônica. Ou seja, M_u é uma maneira de escrever em coordenadas euclidianas a aplicação M restrita a E_u .

Proposição 2.4.3. *Toda decomposição de M_u em um \diamond -produto de formas normais como em (2.3) fornece apenas um fator:*

$$P^{-1} M_u P = M_1.$$

Além disso, $\dim E_u$, $S_{M_u}^\pm(1)$ e $\nu_{M_u}(1)$ dependem apenas de M e u .

Deixaremos a demonstração desta proposição para o final da seção.

Definição 2.4.4. Seja M um simplectomorfismo num espaço vetorial simplético (E, ω) tal que $Mu = u$, para algum $u \in E$, $u \neq 0$. À direção u está associado um número $c \in \{-1, 0, 1\}$ obtido da seguinte forma:

1. Considere M_u como acima a restrição de M ao subespaço invariante E_u escrita em coordenadas euclidianas.
2. Pela proposição acima, escreva $P^{-1} M|_{E_u} P = M_1$ forma básica do autovalor 1.
3. Conecte a forma normal M_1 a uma matriz $N(1, c) \diamond N_0$ por um caminho contido em $\Omega_0(M_1)$ com $1 \notin \sigma(N_0)$.

O número c será chamado de *fator de correção de M em u* e será denotado por $\chi(M, u)$, ou apenas $\chi(M)$ se u estiver clara no contexto.

Segue da proposição anterior que para $M'_u = Q'^{-1}M|_{E'_u}Q'$ onde E'_u é o último termo de uma sequência encaixada de subespaços próprios que satisfaz (2.5) e $Q : \text{Sp}(2l') \rightarrow E'_u$ é um simplectomorfismo linear, M_u e M'_u têm os mesmos splitting numbers e mesma multiplicidade geométrica em 1. Assim, se M'_u estiver conectado a $N(1, c') \diamond N'_0$ dentro de sua componente homotópica, $c = c'$ e portanto o fator de correção c está bem definido.

Proposição 2.4.5. *O fator de correção $\chi(M, u)$ possui as seguintes propriedades:*

- (i) $\chi(M, \lambda u) = \chi(M, u), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$
- (ii) $\chi(M^{-1}, u) = -\chi(M, u).$
- (iii) $\chi(P M P^{-1}, Pu) = \chi(M, u),$ para todo simplectomorfismo linear $P : E \rightarrow F.$
- (iv) Se $Mu = u$ e $Mv = \lambda u + v$ para algum $v \in E$ tal que $\omega(u, v) = 1$, então $\chi(u) = \text{sign}\lambda$, ou $\chi(u) = 0$ se $\lambda = 0.$

A proposição acima nos diz que o fator de correção depende somente da direção determinada pelo vetor u , inverte de sinal sob a inversão de M , é invariante por conjugações e se u compuser um plano simplético $\text{span}\{u, v\}$ com $\omega(u, v) = 1$ restrito ao qual M é da forma $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ então o fator de correção é o sinal de λ (sendo $c = \lambda$ no caso nulo).

Demonstração. (i) Imediato de $E_u = E_{\lambda u}.$

- (ii) Basta observar que $N(1, c)^{-1} = N(1, -c)$ e que se f conecta M_u a $N(1, c) \diamond N_0$ em $\Omega^0(M_u)$ então $g(t) = f(t)^{-1}$ conecta M_u^{-1} a $N(1, c)^{-1} \diamond N_0^{-1}$ em $\Omega^0(M_u^{-1}).$
- (iii) Denote $N = P M P^{-1}$ e $v = Pu.$ Se verifica facilmente que $F_v = P E_u$ é o último termo de uma sequência encaixada de subespaços simpléticos próprios N -invariantes e que contém $v.$ Se $Q : E_u \rightarrow \mathbb{R}^{2l}$ é um simplectomorfismo e $M_u = Q^{-1}M|_{E_u}Q$ então tome $K = Q(P|_{E_u})^{-1} : F_v \rightarrow \mathbb{R}^{2l}$ e $N_v = K^{-1}N|_{F_v}K$ para concluir que $\chi(M, u) = \chi(N, v).$
- (iv) Sob tais hipóteses podemos tomar $E_u = \text{span}\{u, v\}.$ Então a matriz M_u se escreve nesta base como $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ que claramente é deformada em $\Omega^0(M_u)$ em $N(1, \text{sign}\lambda).$ □

Uma vez estabelecido o fator de correção, teremos informações prévias sobre o splitting number no autovalor 1 de uma matriz, como nos diz o próximo resultado.

Proposição 2.4.6. *Se $M \in \text{Sp}(2n),$ $(\mathfrak{p}(1), \mathfrak{q}(1))$ é o seu Krein type number em 1 e $Mu = u$ para algum $u \in \mathbb{R}^{2n}$ então*

- (i)
$$\chi(M, u) = -1 \Rightarrow S_M^\pm(1) \leq \mathfrak{p}(1) - 1.$$
- (ii)
$$\chi(M, u) = 0 \text{ ou } 1 \Rightarrow S_M^\pm(1) \geq 1.$$

Demonstração. Considere como acima o subespaço simplético e M -invariante E_u que contém u . Aplicando o teorema 2.4.1 às restrições de M a cada um dos subespaços da decomposição $\mathbb{R}^{2n} = E_u \oplus E_u^{\omega_0}$ onde $E_u^{\omega_0}$ denota o ortogonal simplético de E_u , obteremos uma aplicação $P \in \text{Sp}(2n)$ tal que

$$P^{-1}MP = M_1 \diamond \cdots \diamond M_m \diamond M_0$$

onde $M_i \in \text{Sp}(2k_i)$ é uma forma normal de 1 para $i = 1, \dots, m$, $1 \notin \sigma(M_0)$, $E_u = P(\mathbb{R}^{2k_1} \oplus 0)$ e $M|_{E_u}$ corresponde a M_1 via P . Pela aditividade de S_M^\pm temos

$$S_{M_1}^+(1) + \cdots + S_{M_m}^+(1) = S_M^+(1) \leq \mathfrak{p}(1).$$

Assim, a condição $\chi(M, u) = -1$ significa que a parcela $S_{M_1}^+(1)$ se anula, logo a desigualdade deve ser estrita e portanto $S_M^\pm(1) \leq \mathfrak{p}(1) - 1$. Por outro lado, se valer $\chi(M, u) = 1$ ou 0 então $S_{M_1}^+(1) = 1$, logo $S_M^+(1) \geq 1$. □

Sob a condição $\chi(M, u) = -1$ melhoramos o teorema 2.3.1 e o corolário 2.2.5:

Corolário 2.4.7. *Seja $\phi \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ tal que $\chi(\phi_\tau, u) = -1$ para algum $u \in \mathbb{R}^{2n}$. Então*

(i)

$$\#\sigma(\phi_\tau) \cap S^1 \geq 2(i_\omega(\phi) - i_1(\phi)) + 2, \quad \forall \omega \in S^1.$$

(ii) *Se o único autovalor de ϕ_τ que está no círculo é 1 e com multiplicidade algébrica 2, então $\omega \mapsto i_\omega(\phi)$ é uma função constante e*

$$\mu_L(\phi^k) = k\mu_L(\phi), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Como vimos, $\mathfrak{p}(1) \geq S^+(1) + 1 = p(1) + 1$ se $\chi(\phi_\tau, u) = -1$. A demonstração do item (i) é a mesma do teorema 2.3.1 apenas substituindo a expressão em (2.2) por

$$2p(1) + 2 + 2 \sum_{\theta \in (0, \mu)} p(e^{i\theta}).$$

No item (ii), por hipótese, $2 = \dim E_1 = \mathfrak{p}(1) + \mathfrak{q}(1) = 2\mathfrak{p}(1)$, logo $0 \leq S^+(1) \leq \mathfrak{p}(1) - 1 = 0$ e assim $\omega \mapsto i_\omega(\phi)$ não possui descontinuidade em $\omega = 1$. Como não há outros autovalores de $\phi(\tau)$ em S^1 , esta função é constante e o resultado segue agora da fórmula de Bott. □

Exemplo 2.4.8 (Fluxos hamiltonianos não-degenerados). Para um fluxo hamiltoniano ao longo de uma órbita periódica γ , se o fluxo for transversalmente não-degenerado então o termo $\chi(\dot{\gamma})$ é determinado pelo crescimento ou decrescimento dos períodos das órbitas em níveis de energia próximos quando variamos a energia.

Mais precisamente, seguindo o trabalho de Merry e Paternain em [26], considere uma hamiltoniana H numa variedade simplética M e sejam X o campo hamiltoniano associado, Φ_t seu fluxo e γ_k uma órbita periódica de período $\tau = \tau(k)$, onde $k = E(\gamma)$ é o nível de energia em que se encontra a órbita. Dizemos que γ_k admite

um *cilindro de órbitas* se existirem um $\epsilon > 0$ e uma família (suave em s) γ_{k+s} de órbitas periódicas com $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ e

$$\gamma_{k+s} : S^1 \rightarrow TM, \quad \text{de energia } H(\gamma_{k+s}) = k + s.$$

Uma condição suficiente para que $\gamma = \gamma_k$ admita um cilindro de órbitas é que o autovalor 1 do fluxo linearizado $d_{\gamma(0)}\Phi_\tau$ tenha multiplicidade geométrica exatamente igual a 1 (cf. [20], proposição 4.2). Neste caso, o cilindro de órbitas é fortemente não-degenerado, o que significa que a função $\gamma_{k+s} \mapsto \tau(k+s)$ que associa a cada órbita ao seu período satisfaz $\tau'(k) \neq 0$. Se N denota a seção em $H^{-1}(k)$ que é transversal a $\dot{\gamma}(0)$ e tal que seu espaço tangente $T_{\gamma(0)}N$ seja igual ao ortogonal simplético ao autoespaço bidimensional associado ao autovalor 1 e se P_γ denota o mapa de Poincaré em $\gamma(0)$ então obtemos uma decomposição simplética de $T_{\gamma(0)}M$ tal que $d_{\gamma(0)}\Phi_\tau$ é escrito da forma²

$$d_{\gamma(0)}\Phi_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \tau'(k) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_{\gamma(0)}P_\gamma \end{pmatrix},$$

com $d_{\gamma(0)}P_\gamma$ restrito a $T_{\gamma(0)}N$ e $\ker(d_{\gamma(0)}P - I) = 0$. Portanto

$$\chi(\Phi_\tau, \gamma) = \text{sign}(\tau'(k)).$$

Exemplo 2.4.9 (Caso geodésico). No caso particular do fluxo geodésico $G_t : TM \rightarrow TM$ temos que $\chi(G_t) = -1$ na direção de uma geodésica γ τ -periódica. De fato, sendo $\dot{\gamma}(t)$ e $t\dot{\gamma}(t)$ campos de Jacobi cujos levantamentos $(\dot{\gamma}, 0)$ e $(t\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ em $T_{G_t(\theta)}TM$ formam uma base Ω_0 -simplética, temos

$$d_\theta G_\tau \cdot (\dot{\gamma}(0), 0) = (\dot{\gamma}(\tau), 0) \quad \text{e} \quad d_\theta G_\tau \cdot (0, \dot{\gamma}(0)) = \tau(\dot{\gamma}(\tau), 0) + (0, \dot{\gamma}(\tau)).$$

Denotando $u = (\dot{\gamma}, 0)$ e $v = (t\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$, temos que $d_\theta G_\tau$ é da forma $u \mapsto u$, $v \mapsto \tau u + v$. Contudo, $\Omega(u, v) = -1$, logo $d_\theta G_\tau$ na base simplética $\{u, -v\}$ é dado por $\begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, pela proposição 2.4.5.iv,

$$\chi(\gamma) = \text{sign}(-\tau) = -1.$$

Exemplo 2.4.10 (Fluxo magnético com χ nulo). Considere \mathbb{T}^2 o toro flat de dimensão 2 e $\omega = \langle J \cdot, \cdot \rangle$ a forma de área. Então o fluxo magnético G_t com respeito a ω possui força de Lorentz $Y = J$ tal que $\nabla Y = 0$ e a equação de Jacobi (1.2) ao longo de uma trajetória τ -periódica γ se escreve

$$V'' - JV' = 0.$$

²Convém mencionar que em [20] ocorre um equívoco na expressão da matriz $d_{\gamma(0)}\Phi_\tau$. O bloco $\begin{pmatrix} 1 & -\tau'(k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (cf. equação (1.5), pg 4) deveria ser $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau'(k) & 1 \end{pmatrix}$ (cf. seção 2.5, pg 16), o que corresponde, via uma mudança de base simplética, a $\begin{pmatrix} 1 & \tau'(k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim, $\dot{\gamma}$ e $J\dot{\gamma}$ são campos de Jacobi que geram um subespaço simplético e

$$d_{\theta}G_{\tau} \cdot (\dot{\gamma}(0), 0) = (\dot{\gamma}(\tau), 0) \quad \text{e} \quad d_{\theta}G_{\tau} \cdot (J\dot{\gamma}(0), 0) = (J\dot{\gamma}(\tau), 0),$$

ou seja, $d_{\theta}G_{\tau}$ é da forma $u \mapsto u$, $v \mapsto v$ com $\Omega(u, v) = 1$. Portanto

$$\chi(\gamma) = 0.$$

Exemplo 2.4.11 (Fluxo magnético com χ positivo, [26]). Usaremos do exemplo 2.4.8 para mostrar um caso de trajetórias magnéticas em que $\chi = 1$. A ideia será considerar uma força de Lorentz em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ cuja intensidade seja uma função radial decrescente e as trajetórias sejam circulares com período τ inversamente proporcional a esta intensidade. Com isso teremos $\chi = \text{sign}(\tau') = 1$.

Sejam \mathbf{i} a estrutura complexa em \mathbb{R}^2 , $\omega_0 = dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta = \langle \mathbf{i}, \cdot \rangle$ a forma de área canônica, $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, $\omega = F(r)\omega_0 = \frac{f'(r)}{r}\omega_0$ uma forma fechada, $Y = F\mathbf{i}$ a força de Lorentz associada ao campo ω -magnético e $\gamma_k : [0, \tau(k)] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uma trajetória $\tau(k)$ -periódica de energia $E(\dot{\gamma}) = k$.

Escreva $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$. Então $\dot{\gamma} = \dot{r}e^{i\theta} + r\dot{\theta}ie^{i\theta}$, $\ddot{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e^{i\theta} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})ie^{i\theta}$ e $Y\dot{\gamma} = -Fr\dot{\theta}e^{i\theta} + F\dot{r}ie^{i\theta}$, logo

$$\gamma = re^{i\theta} \text{ é trajetória} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -Fr\dot{\theta} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = F\dot{r} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{r} = \dot{\theta}(r\dot{\theta} - f') \\ (r^2\dot{\theta} - f)' = 0 \end{cases}.$$

Seja $\zeta(t)$ um campo de vetores ao longo de γ . Como $\{\dot{\gamma}, \mathbf{i}\dot{\gamma}\}$ forma uma base para $\dot{\gamma}^*T(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, existem funções reais x e y tais que

$$\zeta(t) = x(t)\dot{\gamma}(t) + y(t)\mathbf{i}\dot{\gamma}(t)$$

e estas são unicamente determinadas. A equação de Jacobi (1.2) se escreve $J'' - F\mathbf{i}J' - \langle \nabla F, J \rangle \mathbf{i}\dot{\gamma} = 0$, logo

$$\zeta \text{ é um campo de Jacobi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} - y\dot{F} - \dot{y}F = 0 \\ \ddot{y} + \dot{x}F - \langle \nabla F, \mathbf{i}\dot{\gamma} \rangle y = 0 \end{cases}.$$

Como

$$dG_t \cdot (\zeta, \zeta') = (x\dot{\gamma} + y\mathbf{i}\dot{\gamma}, (\dot{x} - Fy)\dot{\gamma} + (\dot{y} + Fx)\mathbf{i}\dot{\gamma}) \in E^{-1}(k) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x} - Fy = 0,$$

temos que

$$\zeta \text{ é um campo de Jacobi no nível } k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} - yF = 0 \\ \ddot{y} + Ky = 0 \end{cases},$$

onde $K(t) = F(r(t))^2 - \langle \nabla F(r(t)), \mathbf{i}\dot{\gamma}(t) \rangle$.

Admitindo que $K(t)$ seja constante e positiva, vemos que ζ é periódico com período $\frac{\sqrt{K}}{2\pi}$. Se o período $\tau(k)$ de γ não for um múltiplo de $\frac{\sqrt{K}}{2\pi}$, então o fluxo magnético G_t é transversalmente não-degenerado e, pelo exemplo 2.4.8, $\chi(\dot{\gamma}) = \text{sign}(-\frac{d\tau}{dk})$.

Estudem os trajetórias $\gamma_k(t) = \rho(k)e^{ia(k)t}$ no nível k com $a(k) > 0$ e $\rho(k) \in (0, 4)$. Do que vimos acima e pelos valores da energia e do período, temos

$$\rho(k)a(k) - f'(\rho(k)) = 0, \quad k = \frac{1}{2}a(k)^2\rho(k)^2 \quad \text{e} \quad \tau(k) = \frac{2\pi}{a(k)},$$

logo o período $\tau(k) = 2\pi \frac{\rho(k)}{f'(\rho(k))}$ tem derivada em relação a k dada por

$$\tau'(k) = 2\pi \frac{\rho'(k)f'(\rho(k)) - \rho(k)f''(\rho(k))\rho'(k)}{f'(\rho(k))^2}$$

e o termo K sobre campos de Jacobi ao longo de γ_k é

$$\begin{aligned} K &= F(\rho(k))^2 - \langle \nabla F(\rho(k)), -\rho(k)a(k)e^{ia(k)t} \rangle \\ &= F(\rho(k))^2 + F'(\rho(k))\rho(k)a(k) \\ &= a(k)f''(\rho(k)). \end{aligned}$$

Vamos agora nos restringir ao nível $k = \frac{1}{2}$. Ponha $\rho(\frac{1}{2}) = 2$ e $f'(\rho(\frac{1}{2})) = f'(2) = 1$. Então $a(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ e

$$\tau'(1/2) = 2\pi\rho'(1/2)(1 - 2f''(2)).$$

Este valor é positivo se tivermos $\rho'(\frac{1}{2}) > 0$ e $f''(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$. Além disso, K é constante positiva se $f''(\frac{1}{2}) > 0$. Ou seja, obtemos $\tau'(1/2) > 0$ tomando uma função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- (i) $f'(2) = 1$;
- (ii) $0 < f''(2) < \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{\sqrt{2f''(2)}} \notin \mathbb{N}$,

o que conclui o nosso exemplo.

Observe que este exemplo pode ser considerado numa variedade compacta. Para isto, tome f com a condição adicional $f|_{(0,1] \cup [3,\infty)} \equiv 0$ e um mergulho $\phi : D \hookrightarrow S^2$ do anel $D = \{z \in \mathbb{R}^2 : 1 < |z| < 3\}$ na esfera S^2 . Assim $\phi_*\omega$ se estende de modo nulo a S^2 . Por fim tome em S^2 uma métrica g que seja uma extensão da métrica induzida por ϕ em $\phi(D)$.

É possível mostrar que neste caso o chamado nível crítico de Mañé (cf. seção 4.6 a seguir) é menor do que $1/2$ (cf. exemplo 3 de [26]) e portanto temos $\chi = 1$ para órbitas acima de um tal nível. Como o fluxo magnético exato³ é uma reparametrização de um fluxo geodésico de alguma métrica Finsler (cf. corolário 2 de [11]), este exemplo ainda mostra que uma tal reparametrização pode não preservar o fator de correção.

Concluiremos esta seção com a demonstração da proposição 2.4.3. Precisaremos de dois lemas.

Lema 2.4.12. *Sejam M um simplectomorfismo linear num espaço vetorial simplético*

³Um fluxo magnético é dito exato quando a forma simplética twisted $\Omega = \Omega_0 - \pi^*\omega$ de (1.1) é considerada com $\omega \in \Omega^2(M)$ uma forma exata.

(E, ω) e $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ e $\{\xi'_1, \dots, \xi'_{p'}\}$ dois subconjuntos de E tais que

$$M\xi_i = \xi_i + \xi_{i-1}, \quad M\xi'_j = \xi'_j + \xi'_{j-1} \quad \text{onde } \xi_0 = \xi'_0 = 0.$$

Então para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ valem

- (i) $\omega(\xi_i, \xi'_{j-1}) + \omega(\xi_{i-1}, \xi'_j) + \omega(\xi_{i-1}, \xi'_{j-1}) = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, p'\};$
- (ii) $\omega(\xi_i, \xi'_j) = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, p' - i\};$
- (iii) se $p = p'$ então $\omega(\xi_{p-i+1}, \xi'_i) = (-1)^{i+1}\omega(\xi_p, \xi'_1).$

Em particular,

- (iv) $\omega(\xi_i, \xi_{j-1}) + \omega(\xi_{i-1}, \xi_j) + \omega(\xi_{i-1}, \xi_{j-1}) = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, p\};$
- (v) $\omega(\xi_i, \xi_j) = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, p - i\};$
- (vi) $\omega(\xi_{p-i+1}, \xi_i) = (-1)^{i+1}\omega(\xi_p, \xi_1).$

Demonstração. O item (i) é uma consequência de

$$\omega(\xi_i, \xi'_j) = \omega(M\xi_i, M\xi'_j) = \omega(\xi_i, \xi'_j) + \omega(\xi_i, \xi'_{j-1}) + \omega(\xi_{i-1}, \xi'_j) + \omega(\xi_{i-1}, \xi'_{j-1}).$$

O segundo item decorre de um argumento de indução em i : Para $i = 1$ e $j \in \{1, \dots, p' - 1\}$, o resultado segue de (i); supondo (ii) válido para $i \in \{1, \dots, p - 1\}$ e todo $j \in \{1, \dots, p' - i\}$,

$$0 = \omega(\xi_{i+1}, \xi'_j) + \omega(\xi_i, \xi'_{j+1}) + \omega(\xi_i, \xi'_j) = \omega(\xi_{i+1}, \xi'_j),$$

o que prova (ii).

Para (iii) também utilizamos de indução. Para $i = 1$ é imediato. Supondo $\omega(\xi_{p-i+1}, \xi'_i) = (-1)^{i+1}\omega(\xi_p, \xi'_1)$, temos $\omega(\xi_{p-i}, \xi'_{i+1}) + \omega(\xi_{p-i+1}, \xi'_i) + \omega(\xi_{p-i}, \xi'_i) = 0$ por (i) e $\omega(\xi_{p-i}, \xi'_i) = 0$ por (ii), logo

$$\omega(\xi_{p-i}, \xi'_{i+1}) = (-1)^{i+2}\omega(\xi_p, \xi'_1).$$

□

Lema 2.4.13. *Sejam $M \in Sp(2n)$, $M' \in Sp(2n')$ e bases $\{\xi_1, \dots, \xi_{2n}\}$ e $\{\xi'_1, \dots, \xi'_{2n'}\}$ de \mathbb{R}^{2n} e $\mathbb{R}^{2n'}$ tais que*

$$M\xi_i = \xi_i + \xi_{i-1} \quad e \quad M'\xi'_i = \xi'_i + \xi'_{i-1}, \quad \xi_0 = \xi'_0 = 0.$$

Se $sign(\omega_0(\xi_n, \xi_{n+1})) = sign(\omega_0(\xi'_{n'}, \xi'_{n'+1}))$, então

$$S_M^\pm(1) = S_{M'}^\pm(1) \quad e \quad \chi(M, \xi_1) = \chi(M', \xi'_1).$$

Demonstração. Observe que a multiplicidade geométrica de autovalor 1 é igual 1 para M e para M' . Nesta condições, como discutido no início da seção, teremos $S_M^\pm(1) = S_{M'}^\pm(1)$ se e só se $\chi(M, \xi_1) = \chi(M', \xi'_1)$. Verificaremos a igualdade para o splitting number como definido e calculado em [5] (cf. nesta referência o teorema 2.1 e as observações que seguem o teorema 2.7 e o lema 2.10). Neste caso para um symplectomorfismo $P \in Sp(2n)$, seu splitting number S_M^\pm em 1 é definido

observando-se separadamente o valor de \mathcal{S}_M^\pm obtido em cada restrição $M|_{J(1,p,\sigma)}$ onde $J(1,p,\sigma)$ é um subespaço de \mathbb{R}^{2n} de dimensão p restrito ao qual P se escreve como um bloco de Jordan e $\sigma \in \{0, 1\}$ é um número obtido a partir do sinal

$$\text{sign } \omega_0(N_1^l X, N_1^{l-1} X),$$

para $N_1 = M - I$, l dado por $p = 2l$ ou $p = 2l - 1$ e X um vetor tal que $\text{span}\{X, N_1 X, \dots, N_1^{p-1} X\} = J(1,p,\sigma)$ (cf. *Normal forms for symplectic mappings*, pg 220 de [5]). Pelo teorema 2.13 de [5], sendo p par, o splitting number \mathcal{S}_M^\pm em $J(1,p,\sigma)$ é 1 ou 0 conforme $\sigma = 1$ ou 0, respectivamente. Em nosso contexto temos $J(1, 2n, \sigma) = \mathbb{R}^{2n}$, $X = \xi_{2n}$ e o valor de $\mathcal{S}_M^\pm(1)$ fica então determinado pelo sinal de

$$\omega_0(N_1^l X, N_1^{l-1} X) = \omega_0(\xi_n, \xi_{n+1}).$$

No entanto, segundo o corolário 12.2.4 de [23], ambas definições de splitting numbers coincidem:

$$\mathcal{S}_M^\pm(1) = S_M^\pm(1).$$

Assim, teremos $S_M^\pm(1) = S_{M'}^\pm(1)$ se e só se $\omega_0(\xi_n, \xi_{n+1}) = \omega_0(\xi_{n'}, \xi_{n'+1})$. \square

Demonstração da proposição 2.4.3. Seja $P^{-1}M_u P = M_1 \diamond \dots \diamond M_m \diamond M_0$ uma decomposição como em (2.3) para M_u . Primeiramente observamos que podemos admitir que P seja tomado de modo que $Pu = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. De fato, a demonstração do teorema 2.4.1 (teorema 1.4.1 de [23]) consiste primeiramente em decompor \mathbb{R}^{2n} em subespaços simpléticos invariantes F_1, \dots, F_m tais que $M|_{F_i}$ se escreve como um ou dois blocos de Jordan associados ao autovalor 1 e em seguida obter uma base simplética para F_i de modo que a restrição $M|_{F_i}$ seja uma forma normal. Uma vez que $Mu = u$ e $M_1 e_1 = e_1$, basta notar que a decomposição F_i de \mathbb{R}^{2n} pode ser tomada de modo que $u \in F_1$ e assim $Pu = e_1$.

Agora mostremos que $m = 1$. Sendo $M_1 \in \text{Sp}(2k_1)$ uma forma normal, temos que $QP(\text{span}\{e_1, \dots, e_{2k_1}\}) \subset E_u$ é um subespaço simplético M -invariante que contém u , logo da minimalidade de E_u devemos ter $E_u = QP(\text{span}\{e_1, \dots, e_{2k_1}\})$ e portanto $P^{-1}M_u P = M_1$, o que prova a primeira parte.

A segunda parte da proposição consiste em mostrar que se E'_u é o último termo de uma sequência encaixada de subespaços próprios $E'_1 \supset E'_2 \supset \dots$ que satisfaz (2.5) e $M'_u = Q'^{-1}M|_{E'_u}Q'$ onde $Q : \text{Sp}(2l') \rightarrow E'_u$ é um symplectomorfismo linear, então

$$\dim E_u = \dim E'_u, \quad S_{M_u}^\pm = S_{M'_u}^\pm \quad \text{e} \quad \nu_{M_u} = \nu_{M'_u},$$

onde S^\pm e ν são calculados em $1 \in S^1$. A prova deste fato será feita em três etapas:

(I) Seja $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ um bloco de Jordan. Então só há duas possi-

bilidades para a forma canônica de Jordan de $M|_{E_u}$:

(I.1) Existe uma base $\{\xi_1, \dots, \xi_p\} \subset E$ de E_u tal que $\xi_1 = u$, $\omega(\xi_1, \xi_p) \neq 0$ e

$$M\xi_i = \xi_i + \xi_{i-1}, \quad \xi_0 = 0,$$

ou seja, $M|_{E_u}$ é expresso nesta base por B .

(I.2) Existe uma base $\{\xi_1, \dots, \xi_p, \eta_1, \dots, \eta_p\} \subset E$ de E_u tal que $\xi_1 = u$, $\omega(\xi_1, \eta_p) \neq 0$ e

$$M\xi_i = \xi_i + \xi_{i-1}, \quad M\eta_i = \eta_i + \eta_{i-1}, \quad \xi_0 = \eta_0 = 0,$$

ou seja, $M|_{E_u}$ é expresso nesta base por $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

(II) E_u e E'_u satisfazem simultaneamente (I.1) ou (I.2).

(III) E_u e E'_u têm dimensões iguais, $S_{M_u}^\pm = S_{M'_u}^\pm$ e $\nu_{M_u} = \nu_{M'_u}$.

No que segue, as indicações (i) a (vi) referem-se ao lema 2.4.12.

Provemos o item (I). A primeira parte da proposição estabelece que a menos de uma mudança de base simplética, M_u é uma forma normal. Em particular, $\nu_{M_u} = \dim \ker(M_u - I)$ é igual a 1 ou 2. Segue daí que $M|_{E_u}$ escrito na forma canônica de Jordan não admite três ou mais blocos, pois cada bloco contribui em uma unidade para a multiplicidade geométrica de 1. Se tivermos apenas um bloco, então vale (I.1) faltando apenas verificar que $\omega(\xi_1, \xi_p) \neq 0$. Ora, por (v), $\omega(\xi_1, \xi_j) = 0$, $\forall j \in \{1, \dots, p-1\}$, logo $\omega(\xi_1, \xi_p)$ deve ser não-nulo pois E_u é simplético.

Suponha que $M|_{E_u}$ seja dado por dois blocos de Jordan para alguma base $\{\xi_1, \dots, \xi_p, \eta_1, \dots, \eta_{p'}\}$ de E_u com $\xi_1 = u$, ou seja, $M\xi_i = \xi_i + \xi_{i-1}$, $M\eta_j = \eta_j + \eta_{j-1}$, $\xi_0 = \eta_0 = 0$. Mostraremos que $p = p'$ e $\omega(\xi_1, \eta_{p'}) \neq 0$. Admita inicialmente que $\omega(\xi_1, \xi_p) = 0$.

($p = p'$) Suponha $p \leq p'$. Por (ii), (v) e de $\omega(\xi_1, \xi_p) = 0$ temos $\omega(\xi_1, \xi') = 0$, $\forall \xi' \in \{\xi_1, \dots, \xi_p, \eta_1, \dots, \eta_{p'-1}\}$. Além disso, por (ii),

$$p < p' \Rightarrow \omega(\xi_i, \eta_1) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\},$$

e também de (ii), $\omega(\eta_1, \eta_j) = 0$, $\forall j \in \{1, \dots, p'-1\}$. Assim, o ortogonal simplético de $\{\xi_1, \dots, \xi_p, \eta_1, \dots, \eta_{p'-1}\}$ em E_u contém ξ_1 e η_1 , o que é um absurdo pois este deve ser um subespaço unidimensional. Portanto $p = p'$. Chegaremos a mesma conclusão se supusermos $p' \leq p$.

($\omega(\xi_1, \eta_{p'}) \neq 0$) Sob a condição $\omega(\xi_1, \xi_p) = 0$ temos $\omega(\xi_1, \xi_j) = 0$, $\forall j \in \{1, \dots, p\}$ por (v) e por (ii). Além disso também temos $\omega(\xi_1, \eta_j) = 0$, $\forall j \in \{1, \dots, p'-1\}$, donde $\omega(\xi_1, \eta_{p'}) \neq 0$ pois E_u é simplético.

Finalmente, verifiquemos que $\omega(\xi_1, \xi_p)$ se anula. Suponha por contradição que $\omega(\xi_1, \xi_p) \neq 0$ e sejam $F = \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ e F^ω o ortogonal simplético de F em E_u . Caso fosse $F^\omega \neq 0$, então para algum $i \in \{1, \dots, p\}$ deveríamos ter $\omega(\xi_i, \xi_{p-i+1}) = 0$ e $\omega(\xi_1, \xi_p)$ seria nulo por (vi). Então F^ω deve ser igual a $\{0\}$ e assim F é um subespaço simplético próprio M -invariante de E_u e que contém u , o que contradiz a minimalidade de E_u . Com isso concluímos (I).

Passemos agora ao item (II). Suponha que $\{\xi_1, \dots, \xi_p, \eta_1, \dots, \eta_p\}$ seja uma base para E_u como em (I.2) e E'_u admita uma base $\{\xi'_1, \dots, \xi'_{p'}\}$ como em (I.1) com

$\xi_1 = \xi'_1 = u$. Temos os seguintes casos:

$$\begin{aligned} p' < p &\Rightarrow \omega(\xi'_i, \xi_1) = 0, \forall i \in \{1, \dots, p'\}, \text{ por (ii).} \\ p < p' &\Rightarrow \omega(\eta_i, \xi'_1) = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{ por (ii).} \\ p = p' &\Rightarrow \omega(\xi_1, \xi'_p) = (-1)^{p+1}\omega(\xi_p, \xi'_1), \text{ por (iii).} \end{aligned}$$

Todos esses casos geram um absurdo. No primeiro por $\omega(\xi'_{p'}, \xi'_1) \neq 0$, no segundo por $\omega(\xi_1, \eta_p) \neq 0$ e no terceiro devido ao membro da esquerda da igualdade ser $\omega(\xi'_1, \xi'_p) \neq 0$ e o da direita ser $(-1)^{p+1}\omega(\xi_p, \xi_1) = 0$ por (v). Ou seja, E_u e E'_u não podem ser descritos por diferentes casos entre (I.1) e (I.2).

Analisemos o último item. Suponha que E_u e E'_u satisfaçam (I.2) e sejam $N(1, c)$ e $N(1, c')$ suas respectivas matrizes associadas como na definição do fator de correção. Havendo dois blocos de Jordan para M_u e M'_u , temos que $\dim \ker(M_u - I) = \dim \ker(M'_u - I) = 2$ e portanto necessariamente $c = c' = 0$, pois nos demais casos a multiplicidade geométrica do autovalor 1 é igual a 1. Como os splitting numbers em 1 de $N(1, 0)$ são $S^\pm = 1$, concluímos que $S_{M_u}^\pm = S_{M'_u}^\pm = 1$ e $\nu_{M_u} = \nu_{M'_u} = 2$. Para ver que $\dim E_u = \dim E'_u$ basta considerar bases $\{\xi_1, \dots, \xi_p, \eta_1, \dots, \eta_p\}$ e $\{\xi'_1, \dots, \xi'_{p'}, \eta'_1, \dots, \eta'_{p'}\}$ como (I.2) e observar que se $p < p'$, podemos utilizar (ii) e $\xi_1 = \xi'_1$ para contradizer $\omega(\xi_1, \eta_p) \neq 0$.

Por fim, suponha que $E_u = \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ e $E'_u = \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_{p'}\}$ satisfaçam (I.1). Se $p < p'$ então $\omega(\xi_i, \xi'_1) = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}$ por (ii), um absurdo com $\omega(\xi_1, \xi_p) \neq 0$. Pela mesma razão não podemos $p > p'$ e portanto $p = p'$. Evidentemente p é um número par, pois E_u é um subespaço simplético. Temos que $\dim \ker(M_u - I) = \dim \ker(M'_u - I) = 1$ e falta apenas verificar que os splitting numbers são os mesmos.

Sejam $\zeta_i = Q\xi_i$ e $\zeta'_i = Q'\xi'_i$ vetores de (\mathbb{R}^p, ω_0) , onde Q e Q' são os simplectomorfismos lineares tais que $M_u = Q^{-1}M|_{E_u}Q$ e $M'_u = Q'^{-1}M|_{E'_u}Q'$. Temos que $\{\zeta_1, \dots, \zeta_p\}$ e $\{\zeta'_1, \dots, \zeta'_p\}$ são bases de \mathbb{R}^p e

$$M_u \zeta_i = \zeta_i + \zeta_{i-1}, \quad M'_u \zeta'_i = \zeta'_i + \zeta'_{i-1}, \quad \zeta_0 = \zeta'_0 = 0.$$

Seja $2l = p$. Pelo lema 2.4.13, vale $S_{M_u}^\pm = S_{M'_u}^\pm$ se $\omega_0(\zeta_l, \zeta_{l+1}) = \omega_0(\zeta'_l, \zeta'_{l+1})$, e esta última igualdade equivale a $\omega_0(\zeta_1, \zeta_p) = \omega_0(\zeta'_1, \zeta'_p)$ devido ao item (vi). Mas de (iii) e da paridade de p temos

$$\omega_0(\zeta'_1, \zeta'_p) = \omega(\xi_1, \xi'_p) = (-1)^{p+1}\omega(\xi_p, \xi'_1) = (-1)^{p+2}\omega(\xi_1, \xi_p) = \omega_0(\zeta_1, \zeta_p),$$

o que conclui a demonstração. □

2.5 Caminho simplético reduzido

Nesta seção estudaremos a relação entre os índices $\mu_L(\phi)$ e $\mu_L(\hat{\phi})$ onde $\phi \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ é um caminho simplético tal que $\phi_\tau(u) = u$ para algum vetor não-nulo u e $\hat{\phi} \in \mathcal{P}_\tau(2n-2)$ é o caminho induzido por ϕ na redução isotrópica $\text{span}\{u\}^{\omega_0}/\text{span}\{u\}$ e descrito em \mathbb{R}^{2n-2} . Veremos que seus índices μ_L são iguais ou diferem em uma unidade dependendo do valor do fator de correção $\chi(\phi_\tau, u)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$

usaremos a mesma notação ω_0 para denotar a forma simplética canônica de \mathbb{R}^{2n} .

Seja $\phi \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ um caminho simplético tal que $\phi_\tau(u) = u$, para algum $u \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$. Sejam $W_t = \phi_t(\text{span}\{u\})$, $W_t^{\omega_0}/W_t$ o espaço quociente com a forma simplética induzida $\tilde{\omega}_t$, $\pi_W : W_t^{\omega_0} \rightarrow W_t^{\omega_0}/W_t$ a projeção canônica e $\tilde{\phi} : W_0^{\omega_0}/W_0 \rightarrow W_t^{\omega_0}/W_t$ simplectomorfismo linear induzido por ϕ_t . Considere $E_t : (W_t^{\omega_0}/W_t, \tilde{\omega}_t) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n-2}, \omega_0)$ uma família de simplectomorfismos lineares e $\hat{\phi} \in \mathcal{P}_\tau(2n-2)$ o caminho simplético dado por

$$\hat{\phi}_t = E_t \cdot \tilde{\phi}_t \cdot E_0^{-1} \in \text{Sp}(2n-2). \quad (2.6)$$

$$\begin{array}{ccc} (W_0^{\omega_0}, \omega_0) & \xrightarrow{\phi_t} & (W_t^{\omega_0}, \omega_0) \\ \pi_{W_0} \downarrow & & \downarrow \pi_{W_t} \\ \left(\frac{W_0^{\omega_0}}{W_0}, \tilde{\omega}_0\right) & \xrightarrow{\tilde{\phi}_t} & \left(\frac{W_t^{\omega_0}}{W_t}, \tilde{\omega}_t\right) \\ \hat{E}_0 \downarrow & & \downarrow \hat{E}_t \\ (\mathbb{R}^{2n-2}, \omega_0) & \xrightarrow{\hat{\phi}_t} & (\mathbb{R}^{2n-2}, \omega_0) \end{array}$$

Veremos mais à frente (proposição 4.1.1) que o índice de $\hat{\phi}$ não depende da escolha das aplicações \hat{E}_t se estas satisfizerem as condições

$$E_0 = E_\tau \quad \text{e} \quad \hat{E}_t(\pi_W(W_t^{\omega_0} \cap (\mathbb{R}^n \times 0))) = \mathbb{R}^{n-1} \times 0. \quad (2.7)$$

Definição 2.5.1. Seja E_τ um menor subespaço simplético ϕ_τ -invariante que contém a direção u , isto é, E_τ é o último termo de uma sequência encaixada

$$\mathbb{R}^{2n} \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$$

onde E_i é um subespaço simplético ϕ_τ -invariante tal que $u \in E_i$ e as inclusões acima são próprias, conforme (2.5). O número $\dim E_\tau$ será chamado de *grau de degenerescência* de ϕ em u e será denotado por $g(\phi_\tau, u)$.

Como vimos na proposição 2.4.3, $\dim E_\tau$ depende apenas de ϕ_τ e do vetor u e portanto está bem definido. Seguindo a notação das seções anteriores, para cada $t \in \mathbb{R}$, $N(1, t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_1^\pm = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 1/2 \end{pmatrix}$. O objetivo desta seção é estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 2.5.2. *Seja $\phi \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ um caminho simplético tal que para algum vetor não nulo u vale $\phi_\tau(u) = u$. Então existe uma homotopia (cf. definição 2.1.3)*

$$\phi \sim \hat{\phi} \diamond \xi,$$

onde $\hat{\phi} \in \mathcal{P}_\tau(2n-2)$ é expresso em (2.6) e $\xi \in \mathcal{P}_\tau(2)$ é o caminho dado da seguinte forma:

- (i) Se o grau de degenerescência for $g(\phi_\tau, u) = 2$ então $\xi(t) = N(1, t\chi(\phi_\tau, u))$, onde $\chi(\phi_\tau, u)$ é o fator de correção (cf. definição 2.4.4).
- (ii) Se o grau de degenerescência for $g(\phi_\tau, u) > 2$ então $\xi(t) = (1-t/\tau)I_2 + t/\tau M_1^+$.

Em particular,

$$\mu_L(\hat{\phi}) = \begin{cases} \mu_L(\phi) + 1 & , \text{ se } g(\phi_\tau, u) = 2 \text{ e } \chi(\phi_\tau, u) = 0 \text{ ou } 1, \\ \mu_L(\phi) & , \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\mu_m(\hat{\phi}) = \mu_m(\phi).$$

A ideia da demonstração da primeira parte do teorema consiste em construir um simpletorfismo entre \mathbb{R}^{2n} e $W_t^{\omega_0}/W_t \oplus E_\tau$ tal que em cada componente ϕ_t é dada por $\hat{\phi}_t$ e ξ como acima. Na segunda parte a ideia será considerar deformações de ϕ_τ e de $\hat{\phi}_\tau$ em produtos $N(1, \chi(\phi_\tau)) \diamond N_0$ e $N(1, \chi(\hat{\phi}_\tau)) \diamond N'_0$ dentro de suas respectivas componentes homotópicas e mostrar que $\chi(\phi_\tau) = \chi(\hat{\phi}_\tau)$, concluindo daí que N_0 e $N'_0 \diamond M_1^+$ devem estar na mesma componente homotópica. Precisaremos de mais alguns conceitos como definidos em [23].

Definição 2.5.3. Seja $M \in \text{Sp}(2n)$. O índice hiperbólico $\alpha(M)$ de M é definido como o (mod 2) número de autovalores reais de M menores do que -1 contadas as multiplicidades algébricas.

Consideraremos para cada $n \in \mathbb{N}$ uma aplicação contínua

$$\rho_n : \text{Sp}(2n) \rightarrow S^1$$

que possui as seguintes propriedades:

- (i) $\rho_n(B^{-1}AB) = \rho_n(A)$, $\forall A, B \in \text{Sp}(2n)$,
- (ii) $\rho_n(A \diamond B) = \rho_k(A)\rho_h(B)$, $\forall A \in \text{Sp}(2k)$, $B \in \text{Sp}(2h)$, $k + h = n$,
- (iii) $\rho_n(M) = (-1)^{\alpha(M)}$, se $\sigma(M) \cap S^1 = \emptyset$, $M \in \text{Sp}(2n)$,
- (iv) $\rho_1(R(\theta)) = e^{i\theta}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, onde $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Segundo os lemas 2.4.3, 2.4.4 e 2.4.7 de [23], existe uma única aplicação ρ_n com as propriedades acima. Tal aplicação induz um isomorfismo entre grupos fundamentais

$$(\rho_n)_* : \pi_1(\text{Sp}(2n)) \rightarrow \pi_1(S^1).$$

Sua expressão explícita é dada por

$$\rho_n(M) = \begin{cases} (-1)^{m_0(M)+\alpha(M)} \prod_{\lambda \in \sigma(M) \cap (S^1 \setminus \{\pm 1\})} \lambda^{\mathfrak{q}_\lambda(M)} & , \text{ se } \sigma_{-,1}(M) \neq \emptyset, \\ 1 & , \text{ se } \sigma_{-,1}(M) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $(\mathfrak{p}_\lambda(M), \mathfrak{q}_\lambda(M))$ é o Krein type number de M em relação a $\lambda \in \sigma(M) \cap S^1$, $2m_0(M)$ é multiplicidade algébrica do autovalor -1 de M e $\sigma_{-,1}(M)$ denota o conjunto $\sigma(M) \cap ((-\infty, 0) \cup (S^1 \setminus \{1\}))$.

Proposição 2.5.4. Sejam $M \in \text{Sp}(2n)$ e $\Omega^0(M)$ sua componente homotópica definida em (2.4). As restrições de $\alpha : N \mapsto \alpha(N)$ e ρ_n ao conjunto $\Omega^0(M)$ são funções constantes.

Demonstração. Considere um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega^0(M)$. Uma vez que o espectro $\sigma(\gamma(t))$ varia continuamente com $t \in [0, 1]$, tome um caminho $\lambda : [0, 1] \rightarrow \sigma(\gamma(t))$. Para provar que α em $\Omega^0(M)$ é constante, basta mostrar que se $t_0 \in [0, 1]$, $\lambda(t_0) \in (-\infty, -1)$ e $t \in [0, 1]$ está próximo de t_0 , então (mod 2) as multiplicidades algébricas de $\lambda(t)$ e $\lambda(t_0)$ são iguais. De fato, isso significa que a contribuição de $\lambda(t)$ no cálculo de $\alpha(\gamma(t))$ é a mesma de $\lambda(t_0)$ para $\alpha(\gamma(t_0))$ e portanto $\alpha(\gamma(t)) = \alpha(\gamma(t_0))$. Dessa forma a função $\alpha \circ \gamma$ é localmente constante e portanto é constante.

Se $\lambda(t) \in (-\infty, -1)$ o resultado é imediato. Suponha $\lambda(t) \notin (-\infty, -1)$. Para t próximo de t_0 temos $\lambda(t) \notin S^1$ e portanto $\lambda(t) \in \{\omega, \bar{\omega}, \omega^{-1}, \bar{\omega}^{-1}\} \subset \sigma(\gamma(t)) \setminus (S^1 \cup \mathbb{R})$ tem por multiplicidade algébrica um múltiplo de 4. Isso implica que a multiplicidade algébrica de $\lambda(t_0)$, que é a mesma de $\lambda(t_0)^{-1}$, deve ser um número par.

Analisemos agora a função $\rho_n \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$. Como $\sigma(\gamma(t)) \cap S^1$ não depende de t , segue da definição de ρ_n que só há um quantidade finita de valores possíveis para $\rho_n(\gamma(t))$ quando t varia em $[0, 1]$. Mas $\rho_n \circ \gamma$ é contínua e portanto esta função deve ser constante. \square

Dividiremos a demonstração do teorema 2.5.2 em alguns lemas.

Lema 2.5.5. $\hat{\phi}_\tau \diamond N(1, \chi(\phi_\tau, u)) \in \Omega^0(\phi_\tau)$, se $g(\phi_\tau, u) = 2$.

Demonstração. O subespaço E_τ define uma decomposição $E_\tau^{\omega_0} \oplus E_\tau = \mathbb{R}^{2n}$ em subespaços simpléticos tal que

- (i) $P(\phi_\tau|_{E_\tau})P^{-1} = N(1, \chi(\phi_\tau, u))$ e
- (ii) $Q(\phi_\tau|_{E_\tau^{\omega_0}})Q^{-1} = \hat{\phi}_\tau$

para dois simplectomorfismos P e Q convenientes. O item (i) segue do fato de $\phi_\tau(u) = u$ e das definições de E_τ e do fator de correção. No item (ii) basta considerar Q como a restrição de $\hat{E}_t \cdot \pi_{W_\tau}$ ao subespaço $E_\tau^{\omega_0} \subset W_\tau^{\omega_0}$. Disto se conclui que $\hat{\phi}_\tau \diamond N(1, \chi(\phi_\tau, u)) \in \Omega^0(\phi_\tau)$. \square

Lema 2.5.6. $\hat{\phi}_\tau \diamond M_1^+ \in \Omega^0(\phi_\tau)$, se $g(\phi_\tau, u) > 2$.

Demonstração. O subespaço simplético E_τ define uma decomposição $E_\tau \oplus E_\tau^{\omega_0}$ de \mathbb{R}^{2n} . Como $W_\tau \subset E_\tau$, a demonstração consiste primeiramente em notar que o quociente $W_\tau^{\omega_0}/W_\tau$ é isomorfo a $\tilde{E}_\tau \oplus E_\tau^{\omega_0}$ onde $\tilde{E}_\tau = (E_\tau \cap W_\tau^{\omega_0})/W_\tau$. Isto é, para tomar o quociente basta analisar o termo E_τ da decomposição $E_\tau \oplus E_\tau^{\omega_0} = \mathbb{R}^{2n}$. Então passamos a estudar a relação entre as restrições

$$M = \phi_\tau|_{E_\tau}, \quad \tilde{M} = \hat{\phi}_\tau|_{\tilde{E}_\tau}.$$

Seja $2k = \dim E_\tau > 2$. A menos de uma mudança de base simplética, podemos considerar $M \in \text{Sp}(2k)$ com $M(e_1) = e_1$ e $\chi(M, e_1) = \chi(\phi_\tau, u)$ e $\tilde{M} \in \text{Sp}(2k - 2)$ com $\tilde{M}(e_1) = e_1$ já que \tilde{M} possui o autovalor 1. Sendo E_τ um menor subespaço simplético ϕ_τ -invariante, podemos conectar M ao produto $N(1, \chi(M, e_1)) \diamond N_0$ dentro de sua componente homotópica $\Omega^0(M)$ para algum $N_0 \in \text{Sp}(2k - 2)$ tal que $1 \notin \sigma(N_0)$. Analogamente, \tilde{M} pode ser conectada em $\Omega^0(\tilde{M})$ no produto $N(1, \chi(\tilde{M}, e_1)) \diamond N'_0$ com $1 \notin \sigma(N'_0)$. Mostraremos que $\chi(M, e_1) = \chi(\tilde{M}, e_1)$ e $N'_0 \diamond M_1^+ \in \Omega(N_0)$, donde se conclui que $\hat{\phi}_\tau \diamond M_1^+ \in \Omega^0(\phi_\tau)$.

Provemos inicialmente que $N'_0 \diamond M_1^+ \in \Omega^0(N_0)$ ou $N'_0 \diamond M_1^- \in \Omega^0(N_0)$ e a igualdade entre os fatores de correção. Suponha que $\chi(\phi_\tau, u)$ seja nulo. Pela proposição 2.4.3, a restrição de ϕ_τ a E_τ pode ser escrita, a menos de uma mudança de base simplética, como uma forma normal $M = \begin{pmatrix} A_k & B_k(b) \\ 0 & C_k \end{pmatrix}$, onde $A_k, B_k(b), C_k$ são as matrizes definidas na seção anterior e $b \in \mathbb{R}^k$. Nesta base a redução isotrópica consiste em restringirmos M a $0 \times \mathbb{R}^{2k-1}$ e tomarmos o quociente na direção de e_{k+1} . Assim, a aplicação \tilde{M} é dada por $\begin{pmatrix} A_{k-1} & B_{k-1}(\tilde{b}) \\ 0 & C_{k-1} \end{pmatrix}$, onde $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{k-1}) = (b_2, \dots, b_k)$ para $b = (b_1, \dots, b_k)$. Sendo $\chi(M, e_1) = \chi(\phi_\tau, u) = 0$, temos $b_k = 0$ e portanto $\tilde{b}_{k-1} = 0$. Segue que a multiplicidade geométrica do autovalor 1 de \tilde{M} é 2 e seu fator de correção é $\chi(\tilde{M}, e_1) = 0$. Assim, conectando \tilde{M} dentro de $\Omega^0(\tilde{M})$ a um produto $N(1, 0) \diamond N'_0$ tal que $N'_0 \in \text{Sp}(2n-4)$, $1 \notin \sigma(N'_0)$, temos que N'_0 satisfaz $N'_0 \diamond M_1^+ \in \Omega^0(N_0)$ ou $N'_0 \diamond M_1^- \in \Omega^0(N_0)$.

Suponha agora que o fator de correção seja não-nulo. Neste caso ao invés de considerar M escrita como uma forma normal de 1, a expressaremos na forma canônica de Jordan. Denote por M a restrição de ϕ_τ a E_τ . Sendo $\chi(M, e_1) \neq 0$, a multiplicidade geométrica $\nu_M(1)$ é 1 e M pode ser escrita como um único bloco de Jordan, isto é, existe um base $\{\xi_1, \dots, \xi_{2k}\}$ de E_τ tal que $M(\xi_i) = \xi_i + \xi_{i-1}$, $\xi_0 = 0$ (cf. item (I) da demonstração da proposição 2.4.3). Como $M(\xi_1) = \xi_1$, necessariamente $\xi_1 = e_1$. Pelo lema 2.4.12, $\omega_0(\xi_1, \xi_j) = 0$, $\forall j \in \{1, \dots, 2k-1\}$. Sendo $\tilde{\xi}_i = \pi(\xi_i)$, onde π é a projeção no espaço quociente, \tilde{M} é dada por $\tilde{\xi}_i \mapsto \tilde{\xi}_i + \tilde{\xi}_{i-1}$. Em outras palavras, tanto M quanto \tilde{M} são expressas como um bloco de Jordan quando escritas respectivamente nas bases $\{\xi_1, \dots, \xi_{2k}\}$ e $\{\tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_{2k-1}\}$. Como vimos na seção anterior, os fatores de correção $\chi(M, \xi_1)$ e $\chi(\tilde{M}, \tilde{\xi}_2)$ são determinados respectivamente pelos pares $(\nu_M(1), S_M^\pm(1))$ e $(\nu_{\tilde{M}}(1), S_{\tilde{M}}^\pm(1))$. Contudo, $\nu_M(1) = \nu_{\tilde{M}}(1) = 1$ e $S_M^\pm(1) = S_{\tilde{M}}^\pm(1)$. De fato, esta última igualdade decorre do lema 2.4.13: Sendo $\tilde{\omega}$ a forma simplética induzida no quociente, os splitting numbers $S_M^\pm(1)$ e $S_{\tilde{M}}^\pm(1)$ serão iguais se $\omega_0(\xi_k, \xi_{k+1}) = \tilde{\omega}(\tilde{\xi}_k, \tilde{\xi}_{k+1})$, o que segue da definição de $\tilde{\omega}$. Portanto $\chi(M, \xi_1) = \chi(\tilde{M}, \tilde{\xi}_2)$. Uma vez que M e \tilde{M} têm apenas o autovalor 1 e com a mesma multiplicidade geométrica, necessariamente ocorre

$$N'_0 \diamond M_1^+ \in \Omega^0(N_0) \quad \text{ou} \quad N'_0 \diamond M_1^- \in \Omega^0(N_0).$$

Por fim, provemos que $N'_0 \diamond M_1^- \notin \Omega^0(N_0)$, o que concluirá a demonstração. Com efeito, no caso contrário teremos $\hat{\phi}_\tau \diamond M_2^- \in \Omega^0(\phi_\tau)$. Observe que o espectro de $\hat{\phi}_\tau$ é o mesmo de $\tilde{\phi}_\tau$ com as mesmas multiplicidades, que por sua vez é o mesmo de ϕ_τ , com exceção do autovalor 1. Segue então da definição de índice hiperbólico que $\alpha(\hat{\phi}_\tau) = \alpha(\phi_\tau)$. Usando a proposição 2.5.4 vemos que $\alpha(\hat{\phi}_\tau) + \alpha(M_2^-) = \alpha(\hat{\phi}_\tau \diamond M_2^-) = \alpha(N(1, \chi) \diamond N'_0 \diamond M_2^-) = \alpha(N(1, \chi) \diamond N_0) = \alpha(\phi_\tau) = \alpha(\hat{\phi}_\tau)$, o que é um absurdo pois $\alpha(M_2^-) = 1$. \square

Lema 2.5.7. *Sejam $N^\pm \in \mathcal{P}_\tau(2)$ dado por $N^\pm(t) = N(1, \pm t)$ e I o caminho constante igual a identidade I_2 . Então*

$$\mu_L(N^+) = \mu_L(I) = -1 \quad \text{e} \quad \mu_L(N^-) = 0.$$

Demonstração. A demonstração de $\mu_L(I) = -1$ será feita mais à frente, lema 4.2.8. Por simplicidade, vamos supor $\tau = 1$. Considere $c \in \{-1, 1\}$, $\delta(s, t) = \begin{pmatrix} 1+s & (1-s)tc \\ 0 & 1-s/2 \end{pmatrix}$, $s, t \in [0, 1]$. Como $\text{Det}(\delta(s, 1) - I_2) = -s^2/2$, $\delta(\cdot, 1)$ não possui 1 como autovalor e δ define uma homotopia entre $\delta(\epsilon, \cdot)$ e $\lambda = \delta(1, \cdot)$ para $\epsilon \in (0, 1)$. O caminho λ satisfaz $\lambda(1) = M_1^+$ e possui um número de rotação $\Delta_1(\lambda) = 0$, logo $\mu_L(\lambda) = 0$. Assim, $\delta(\epsilon, \cdot)$ é um caminho arbitrariamente próximo de $\delta(0, \cdot) = N^\pm$ tal que

$$\mu_L(\delta(\epsilon, \cdot)) = 0.$$

Considere agora $\gamma(s, t) = N(1, (1-s)ct)R(-cst)$, $s, t \in [0, 1]$, onde $R(\theta)$ é a matriz $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. É fácil verificar que $\text{Det}(\gamma(s, 1) - I_2) = -(1-s)c \sin(-cs) - 2 \cos(-cs) + 2 > -(1-s)c \sin(-cs) > 0$, se $0 < s < \pi/2$, e assim γ define uma homotopia entre $\gamma(\epsilon, \cdot)$ e $\gamma(1, \cdot)$ para $\epsilon \in (0, 1)$. Assumiremos que o índice μ_L da rotação $\gamma(1, \cdot) = R(-ct)$ seja -1 ou 1 conforme $c > 0$ ou < 0 , respectivamente. Este fato será estabelecido no lema 4.2.8. Dessa forma $\gamma(\epsilon, \cdot)$ é um caminho arbitrariamente próximo de $\gamma(0, \cdot) = N^\pm$ de índice

$$\mu_L(\gamma(\epsilon, \cdot)) = \begin{cases} -1 & , \text{ se } c = 1 \\ 1 & , \text{ se } c = -1 \end{cases}.$$

O teorema 6.1.8 de [23] garante que todos caminhos não-degenerados $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1^*(2)$ que estiverem C^0 -próximos de N devem satisfazer

$$|\mu_L(\beta) - \mu_L(\alpha)| \leq \dim \ker(N(1, c) - I_2) = 1.$$

Como o índice de um caminho degenerado é dado pelo ínfimo dos índices de caminhos não-degenerados suficientemente próximos, segue da desigualdade acima e dos valores de $\mu_L(\delta(\epsilon, \cdot))$ e de $\mu_L(\gamma(\epsilon, \cdot))$ que $\mu_L(N^+) = -1$ e $\mu_L(N^-) = 0$. \square

Demonstração do teorema 2.5.2. Pelos lemas 2.5.5 e 2.5.6, $\hat{\phi}_\tau \diamond \xi_\tau \in \Omega^0(\phi_\tau)$, onde $\xi_t = \begin{pmatrix} 1 & t\chi(\phi_\tau, e_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\xi_t = \begin{pmatrix} 1+t/\tau & 0 \\ 0 & 1-t/2\tau \end{pmatrix}$ conforme $g(\phi_\tau, e_1)$ seja 2 ou > 2 , respectivamente. Considere $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \Omega^0(\phi_\tau)$ tal que $\gamma(0) = \phi_\tau$ e $\gamma(\tau) = \hat{\phi}_\tau \diamond \xi_\tau$ e η o caminho $\hat{\phi} \diamond \xi$ percorrido no sentido contrário.

Afirmamos que o caminho $\eta * \gamma * \phi$ é contrátil. Para provar esta afirmação observe que

$$\rho_n((\hat{\phi} \diamond \xi)(t)) = \rho_{n-1}(\hat{\phi}(t))\rho_1(\xi(t)) = \rho_{n-1}(\hat{\phi}(t)) = \rho_n(\phi(t)).$$

A primeira igualdade é uma propriedade da função ρ_n , na segunda usamos que $\rho_1(\xi(t)) = 1$, como se verifica facilmente, e na última igualdade recorreremos ao fato de, com exceção do autovalor 1, os espectros de ϕ_t e $\hat{\phi}_t$ serem iguais e terem autovalores com as mesmas multiplicidades algébrica e geométrica e mesmo Krein type number, em vista da definição de ρ_n . Pela proposição 2.5.4, $\rho_1(\gamma(t))$ não depende de t . Assim, $(\rho_n)_*([\eta * \gamma * \phi])$ consiste num caminho em S^1 que começa em

1, torna-se constante e retorna a 1 pelo mesmo trajeto, logo é igual a $[1] \in \pi_1(S^1)$.

Sendo $\eta * \gamma * \phi$ um caminho contrátil, $\gamma * \phi$ e $\hat{\phi} \diamond \xi$ são homotópicos com extremos fixos. Como o caminho γ está contido em $\Omega^0(\phi_\tau)$, a multiplicidade geométrica dos autovalores unitários de $\gamma(t)$ não depende de t e portanto $\phi \sim_\omega \gamma * \phi \sim_\omega \hat{\phi} \diamond \xi$, $\forall \omega \in S^1$. Assim,

$$\mu_L(\phi) = \mu_L(\hat{\phi}) + \mu_L(\xi)$$

e agora falta apenas determinar $\mu_L(\xi)$. O caso $g(\phi_\tau, e_1) = 2$ já foi calculado no lema 2.5.7. Se $g(\phi_\tau, e_1) > 2$ então $\mu_L(\xi) = 0$, pois ξ é um caminho não-degenerado cujo número de rotação $\Delta_\tau(\xi)$ é zero. \square

Capítulo 3

Índice de Robbin-Salamon e Teorema de Sturm

Neste capítulo fazemos uma exposição do índice de Robbin-Salamon para caminhos simpléticos reais e complexos. Começamos definindo o índice de Maslov para caminhos lagrangianos. Prosseguimos tratando de índice de caminhos simpléticos que partem da identidade seguindo as linhas de [29], o que descreve o índice de Conley-Zehnder no caso não-degenerado. Na terceira seção mostramos que os índices de Long e de Conley-Zehnder coincidem neste caso particular. Por fim apresentamos o teorema de comparação de Sturm que fornece condições suficientes para compararmos os índices de dois fluxos hamiltonianos.

No que segue, denotamos $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ a estrutura complexa padrão em \mathbb{R}^{2n} e $\text{Sp}(2n)$ o conjunto de simplectomorfismos lineares em \mathbb{R}^{2n} com a estrutura simplética canônica $\omega_0 = \langle J\cdot, \cdot \rangle$.

3.1 Índice de Maslov

Nesta seção recapitulamos a definição de índices para caminhos lagrangianos conforme Robbin e Salamon, [29].

Denote por $\mathcal{L}(n)$ a variedade diferenciável suave $\frac{1}{2}n(n+1)$ -dimensional dada pelos subespaços lagrangianos de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ e por $S^2(V)$ o espaço das formas quadráticas definidas num subespaço V de \mathbb{R}^{2n} . Para cada $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$ definimos um isomorfismo Q que identifica vetores tangentes a $L(n)$ em Λ com as formas quadráticas em Λ :

$$\begin{aligned} Q : T_\Lambda L(n) &\longrightarrow S^2(\Lambda) \\ \hat{\Lambda} &\longmapsto Q(\Lambda, \hat{\Lambda}) : \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \\ &v \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega_0(v, w(t)) \end{aligned}$$

onde $w(t)$ é tomado da seguinte forma: Seja $\Lambda(t)$ um caminho em $\mathcal{L}(n)$ tal que $\Lambda(0) = \Lambda$ e $\hat{\Lambda}(0) = \hat{\Lambda}$. Para $W \in \mathcal{L}(n)$ um complemento lagrangiano de Λ , $w(t) \in W$ é tomado de modo que $v + w(t) \in \Lambda(t)$. Pelo Teorema 1.1 de [29], Q não depende da escolha de W e possui as seguintes propriedades:

- Para $\Lambda(t) = (X(t), Y(t)) \cdot \mathbb{R}^n \in \mathcal{L}(n)$, tem-se $Q(\Lambda(0), \dot{\Lambda}(0))(v) = \langle X(0)u, \dot{Y}(0)u \rangle - \langle Y(0)u, \dot{X}(0)u \rangle$, onde $v = (X(0), Y(0))u$.
- A aplicação Q é natural no sentido de

$$Q(\Psi\Lambda, \Psi\hat{\Lambda}) \circ \Psi = Q(\Lambda, \hat{\Lambda})$$

para qualquer aplicação simplética Ψ de \mathbb{R}^{2n} .

Cada subespaço lagrangiano $V \in \mathcal{L}(n)$ determina uma decomposição do espaço de subespaços lagrangianos como uma união disjunta

$$\mathcal{L}(n) = \bigcup_{k=0}^n \Sigma_k(V)$$

onde $\Sigma_k(V)$ é a subvariedade formada pelos subespaços lagrangianos cuja interseção com V é um subespaço de dimensão k . O *Ciclo de Maslov* determinado por V é a variedade algébrica

$$\Sigma(V) = \overline{\Sigma_1(V)} = \bigcup_{k=1}^n \Sigma_k(V).$$

O espaço tangente a $\Sigma_k(V)$ num ponto $\Lambda \in \Sigma_k(V)$ é dado por

$$T_\Lambda \Sigma_k(V) = \{\hat{\Lambda} \in T_\Lambda \mathcal{L}(n) : Q(\Lambda, \hat{\Lambda})|_{\Lambda \cap V} = 0\}.$$

Seja $\Lambda : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(n)$ uma curva suave de subespaços lagrangianos. Um *crossing* para Λ é um número $t \in [a, b]$ para o qual $\Lambda(t)$ intersecta V não-trivialmente, i.e., para o qual $\Lambda(t) \in \Sigma(V)$. O conjunto dos crossings é compacto. Para cada crossing $t \in [a, b]$ definimos o *crossing form* em t por

$$\Gamma(\Lambda, V, t) = Q(\Lambda(t), \dot{\Lambda}(t))|_{\Lambda(t) \cap V}.$$

Uma curva $\Lambda : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(n)$ é tangente a $\Sigma_k(V)$ num crossing t se e só se $\Lambda(t) \in \Sigma_k(V)$ e a crossing form $\Gamma(\Lambda, V, t) = 0$. Um crossing t é chamado de *regular* se o crossing form $\Gamma(\Lambda, V, t)$ é não-singular. Para uma curva cujos crossings são todos regulares definimos o *Índice de Maslov* do caminho $\Lambda(t)$ em relação ao lagrangiano V como sendo o seminteiro

$$\mu_V(\Lambda) = \frac{1}{2} \text{sign} \Gamma(\Lambda, V, a) + \sum_{a < t < b} \text{sign} \Gamma(\Lambda, V, t) + \frac{1}{2} \text{sign} \Gamma(\Lambda, V, b)$$

onde o somatório é feito sobre todos os crossings de t e sign é a assinatura da forma quadrática.

Caminhos lagrangianos possuem as seguintes propriedades:

Lema 3.1.1 (Lema 2.1 de [29]). *Sejam $\Lambda_0, \Lambda_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(n)$ caminhos com extremos fixos, $\Lambda_0(a) = \Lambda_1(a)$ e $\Lambda_0(b) = \Lambda_1(b)$. Se Λ_0 e Λ_1 são homotópicos com extremos fixos, então possuem o mesmo índice de Maslov.*

Lema 3.1.2 (Lema 2.2 de [29]). *Todo caminho lagrangiano $\Lambda : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(n)$ é homotópico com extremos fixos a um caminho que possui apenas crossings regulares.*

Os lemas permitem que definamos o índice de Maslov de um caminho langrangiano contínuo via homotopia.

O índice de Maslov possui as seguintes propriedades:

Teorema 3.1.3 (Teorema 2.3 de [29]). 1. (**Naturalidade**) Para $\Psi \in Sp(2n)$,

$$\mu_{\Psi V}(\Psi\Lambda) = \mu_V(\Lambda)$$

2. (**Concatenação**) Se $\Lambda_0, \Lambda_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(n)$ são dois caminhos tais que $\Lambda_0(1) = \Lambda_1(0)$, então o caminho $\Lambda_0 \wedge \Lambda_1 : [0, 2] \rightarrow \mathcal{L}(n)$ dado por

$$\Lambda_0 \wedge \Lambda_1(t) = \begin{cases} \Lambda_0(t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \Lambda_1(t-1), & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \end{cases},$$

satisfaz $\mu_V(\Lambda_0 \wedge \Lambda_1) = \mu_V(\Lambda_0) + \mu_V(\Lambda_1)$.

3. (**Produto**) Se $n' + n'' = n$ e identificamos $\mathcal{L}(n') \times \mathcal{L}(n'')$ como uma subvariedade de $\mathcal{L}(n)$ do modo usual, então

$$\mu_{V' \oplus V''}(\Lambda' \oplus \Lambda'') = \mu_{V'}(\Lambda') + \mu_{V''}(\Lambda'').$$

4. (**Localização**) Se $V = \mathbb{R}^n \times 0$ e $\Lambda(t) = \text{gráf}(A(t))$ então o índice de Maslov de Λ é dado pelo fluxo espectral

$$\mu_V(\Lambda) = \frac{1}{2} \text{sign}A(b) - \frac{1}{2} \text{sign}A(a).$$

5. (**Homotopia**) Dois caminhos $\Lambda_0, \Lambda_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(n)$ com $\Lambda_0(a) = \Lambda_1(a)$ e $\Lambda_0(b) = \Lambda_1(b)$ são homotópicos com extremos fixos se e somente se eles têm o mesmo índice de Robbin-Salamon.

6. (**Zero**) Todo caminho $\Lambda : [a, b] \rightarrow \Sigma_k(V)$ possui índice de Maslov $\mu_V(\Lambda) = 0$.

3.2 Índice de Conley-Zehnder

Considere o espaço vetorial simplético $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, \bar{\omega})$ com $\bar{\omega} = (-\omega_0) \times \omega_0$. O gráfico

$$\text{gráf } \phi = \{(x, \phi x) : x \in \mathbb{R}^{2n}\}$$

de qualquer symplectomorfismo linear $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é um subespaço lagrangiano de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$. Um caso particular de subespaço lagrangiano é a diagonal

$$\Delta = \text{gráf } I = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$

Definição 3.2.1. O índice de Robbin-Salamon de um caminho simplético $\phi : [a, b] \rightarrow Sp(\mathbb{R}^{2n})$ é definido como sendo o índice de Maslov do caminho lagran-

giano gráf $\phi : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(2n)$ em relação ao lagrangiano diagonal:

$$\mu_{RS}(\phi) = \mu_{\Delta}(\text{gráf}(\phi)).$$

Teorema 3.2.2. *O índice de Robbin-Salamon possui as seguintes propriedades:*

1. (**Naturalidade**) Para $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow Sp(2n)$ dois caminhos simpléticos, vale

$$\mu_{RS}(\psi\phi\psi^{-1}) = \mu_{RS}(\phi).$$

2. (**Concatenação**) Se $\phi_0, \phi_1 : [a, b] \rightarrow Sp(2n)$ são dois caminhos tais que $\phi_0(b) = \phi_1(a)$, então o caminho $\phi_0 \wedge \phi_1 : [a, 2b - a] \rightarrow Sp(2n)$ dado por

$$\phi_0 \wedge \phi_1(t) = \begin{cases} \phi_0(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ \phi_1(t - 1) & \text{se } b \leq t \leq 2b - a \end{cases}$$

satisfaz

$$\mu_V(\Lambda_0 \wedge \Lambda_1) = \mu_V(\Lambda_0) + \mu_V(\Lambda_1).$$

3. (**Produto**) Se $n' + n'' = n$ e identificamos $Sp(n') \times Sp(n'')$ como uma subvariedade de $Sp(n)$ do modo usual, então

$$\mu_{RS}(\phi' \oplus \phi'') = \mu_{RS}(\phi') + \mu_{RS}(\phi'').$$

4. (**Homotopia**) Dois caminhos $\phi_0, \phi_1 : [a, b] \rightarrow Sp(2n)$ com $\phi_0(a) = \phi_1(a)$ e $\phi_0(b) = \phi_1(b)$ são homotópicos com extremos fixos se e somente se eles têm o mesmo índice de Maslov.

5. (**Zero**) Se $\phi : [a, b] \rightarrow Sp(2n)$ é um caminho simplético com $\dim \ker(\phi(t) - I) = k$ para todo $t \in [a, b]$, então $\mu_{RS}(\phi) = 0$.

Demonstração. As propriedades de homotopia, concatenação e produto são imediatas das propriedades equivalentes para caminhos lagrangianos conforme enunciado no último teorema. Para a propriedade zero, basta observar que $\text{gráf } \phi_t \cap \Delta = \{u \in \mathbb{R}^{2n} : \phi_t u = u\}$, logo $\dim(\text{gráf } \phi_t \cap \Delta) = k$ se e só se $\dim \ker(\phi_t - I) = k$.

Para estabelecer a naturalidade, observe que $\text{gráf } (\psi\phi\psi^{-1}) = \{(x, \psi\phi\psi^{-1}x) : x \in \mathbb{R}^{2n}\} = \{(\psi y, \psi\phi y) : y \in \mathbb{R}^{2n}\} = (\psi \times \psi)\text{gráf } \phi$ e que $(\psi \times \psi)\Delta = \Delta$, logo $t_0 \in [a, b]$ é um crossing para $\text{gráf } \phi$ se e só se t_0 for um crossing para $\psi\phi\psi^{-1}$. Por homotopia com extremos fixos podemos supor que todos os crossings de $\text{gráf } \psi$ sejam regulares e que este caminho lagrangiano seja constante ao redor dos crossings de $\text{gráf } \phi$. Assim, $\frac{d}{dt}(\psi\phi\psi^{-1})(t_0) = \psi \frac{d\phi}{dt} \psi^{-1} |_{t_0}$ e o crossing form fica

$$\begin{aligned} \Gamma(\text{gráf } \psi\phi\psi^{-1}, \Delta, t_0) &= Q(\text{gráf } \psi\phi\psi^{-1}, \frac{d}{dt}(\text{gráf } \psi\phi\psi^{-1}))|_{\text{gráf } (\psi\phi\psi^{-1}) \cap \Delta} \\ &= Q((\psi \times \psi)\text{gráf } \phi, \frac{d}{dt}\text{gráf } \phi)|_{(\psi \times \psi)\text{gráf } \phi \cap \Delta} \\ &= Q(\text{gráf } \phi, \frac{d}{dt}\text{gráf } \phi)|_{\text{gráf } \phi \cap \Delta} \\ &= \Gamma(\text{gráf } \phi, \Delta, t_0), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade se deve à naturalidade do isomorfismo $Q : T_\Lambda L(2n) \rightarrow S^2(\Lambda)$ como feito na seção anterior. Isso prova que $\mu_{RS}(\psi\phi\psi^{-1}) = \mu_{RS}(\phi)$. \square

Diremos que os *crossings* e os *crossing forms* de um caminho simplético ϕ serão os correspondentes crossings e crossing forms do caminho lagrangiano gráf ϕ .

Convém notar que caminhos simpléticos $\phi(t)$ em \mathbb{R}^{2n} de classe C^1 satisfazem a equação

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = JS(t)\phi(t)$$

onde $S(t)$ é um caminho de aplicações lineares autoadjuntas. Ainda denotando por $S(t)$ as formas quadráticas associadas, tais aplicações restritas ao autoespaço associado ao autovalor 1 de $\phi(t)$ coincide com os crossing forms de ϕ , conforme a

Proposição 3.2.3. *Para $\frac{d}{dt}\phi(t) = JS(t)\phi(t)$ e t um crossing regular, tem-se*

$$\Gamma(\text{gráf}\phi, \Delta, t) = S(t)|_{\ker(\phi(t)-I)}.$$

Em particular, se os crossings forem todos regulares, então

$$\mu_{RS}(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{t=a,b} \text{sign}S(t)|_{\ker(\phi(t)-I)} + \sum_{\substack{t \text{ crossing} \\ a < t < b}} \text{sign}S(t)|_{\ker(\phi(t)-I)}.$$

Demonstração. É um cálculo direto. Seja t_0 um crossing. Temos $v \mapsto (v, \phi(t_0)v)$ um isomorfismo entre $\ker(\phi(t_0)-I)$ e $\text{gráf}(\phi(t_0)) \cap \Delta$. Se $(v, \phi(t_0)v) \in \text{gráf}(\phi(t_0)) \cap \Delta$ então $(v, \phi(t)v) \in \text{gráf}(\phi(t))$ para t próximo de t_0 , logo

$$\begin{aligned} \Gamma(\text{gráf}(\phi), \Delta, t_0)(v, \phi(t_0)v) &= \frac{d}{dt}|_{t_0} \bar{\omega}((v, \phi(t_0)v), (v, \phi(t)v)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t_0} (-\omega(v, v) + \omega(\phi(t_0)v, \phi(t)v)) \\ &= \omega(\phi(t_0)v, \frac{d}{dt}\phi(t_0)v) \\ &= \omega(\phi(t_0)v, JS(t_0)\phi(t_0)v) \\ &= \langle S(t_0)\phi(t_0)v, \phi(t_0)v \rangle \\ &= \langle S(t_0)v, v \rangle. \end{aligned}$$

\square

Proposição 3.2.4. *Caminhos simpléticos de \mathbb{R}^{2n} que preservam o subespaço lagrangiano vertical $0 \times \mathbb{R}^n$ ou o subespaço lagrangiano horizontal $\mathbb{R}^n \times 0$ têm índice de Robbin-Salamon nulo.*

Demonstração. Se $\alpha(t)$ é um caminho que preserva o lagrangiano vertical então $\alpha(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ B(t) & (A(t)^*)^{-1} \end{pmatrix}$ com A^*B matriz $n \times n$ simétrica. Tomando $\alpha(s, t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ sB(t) & (A(t)^*)^{-1} \end{pmatrix}$ com $s \in [0, 1]$, obtemos uma homotopia com extremos fixos

entre $\alpha(\cdot, 0) \wedge \alpha(1, \cdot)$ e $\alpha(0, \cdot) \wedge \alpha(\cdot, \tau)$, logo por homotopia e concatenação

$$\mu_{RS}(\alpha(\cdot, 0)) + \mu_{RS}(\alpha(1, \cdot)) = \mu_{RS}(\alpha(0, \cdot)) + \mu_{RS}(\alpha(\cdot, \tau)).$$

Como $\dim \ker(\alpha(s, 0)) = \dim \ker(\alpha(s, \tau)) = 0$ para todo $s \in [0, 1]$, $\mu_{RS}(\alpha(\cdot, 0)) = \mu_{RS}(\alpha(\cdot, \tau)) = 0$ e $\alpha(t) = \alpha(1, \cdot)$ e $\tilde{\alpha} = \alpha(0, \cdot)$ têm o mesmo índice. Falta apenas mostrar que o caminho $\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix}$ tem índice zero.

Perturbando a aplicação A se necessário, podemos supor que os crossings de $\tilde{\alpha}$ são todos regulares. O caminho $\tilde{\alpha}$ satisfaz

$$\frac{d}{dt} \tilde{\alpha} = JS\tilde{\alpha}, \quad \text{onde } S = \begin{pmatrix} 0 & -X_A^* \\ -X_A & 0 \end{pmatrix}$$

e $X_A = \dot{A}A^{-1}$, logo seus crossing forms são as restrições a $\ker(\tilde{\alpha} - I)$ da aplicação $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto -2 \langle X_A x, y \rangle = -\frac{1}{2} \|X_A x + y\|^2 + \frac{1}{2} \|X_A x - y\|^2$ cuja assinatura é zero. Basta então mostrar que tomada a restrição a assinatura permanece nula. Ora, \mathbb{R}^{2n} se decompõe nos subespaços $S^\pm = \{(\mp X_A y, y) : y \in (\ker X_A)^\perp\}$ e $S^0 = \{(x, y) : \langle X_A x, y \rangle = 0\}$ tais que $S|_{S^i}$ é positiva, negativa ou nula conforme $i = +, -$ ou 0 , respectivamente. Como $\dim S^+ \cap \ker(\tilde{\alpha} - I) = \dim S^- \cap \ker(\tilde{\alpha} - I)$, concluímos que $\text{sign} S|_{\ker(\tilde{\alpha} - I)} = 0$.

Se β é um caminho que preserva o lagrangiano horizontal então basta considerar $\alpha = K \beta K^{-1}$ onde $K = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Temos $\mu_{RS}(\beta) = \mu_{RS}(\alpha)$ por naturalidade (teorema 3.2.2) e $\mu_{RS}(\alpha) = 0$ pois α preserva o lagrangiano vertical. \square

A definição que fizemos do índice de Robbin-Salamon para caminhos simpléticos pode ser naturalmente estendida para o caso complexo. Escreveremos ainda $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\omega = \langle J \cdot, \cdot \rangle$ para denotar a estrutura complexa, o produto interno hermitiano canônico e a estrutura simplética de \mathbb{C}^{2n} , respectivamente. Considere

$$\text{Sp}(2n, \mathbb{C}) = \{M \in \text{Gl}(2n, \mathbb{C}) : M^* J M = J\}$$

o conjunto dos isomorfismos \mathbb{C} -lineares que deixam ω invariante. De modo inteiramente análogo ao feito acima, podemos tomar o Ciclo de Maslov determinado por um subespaço lagrangiano de $(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$, crossings e crossing forms para um caminho lagrangiano $\Gamma(t)$, definindo seu índice de Maslov. Para um caminho simplético $\phi : [a, b] \rightarrow \text{Sp}(2n, \mathbb{C})$, faz sentido, pois, considerar seu índice de Robbin-Salamon. Todo symplectomorfismo M em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ pode ser naturalmente estendido para $(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ via $M \cdot i = i \cdot M$. Com isso, o índice de Robbin-Salamon é o mesmo seja tomado em \mathbb{R}^{2n} ou em \mathbb{C}^{2n} . Este é o conteúdo da proposição seguinte.

Proposição 3.2.5. *Se $\phi : [a, b] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ for um caminho de symplectomorfismo em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ e $\tilde{\phi} : [a, b] \rightarrow \text{Sp}(2n, \mathbb{C})$ sua extensão para os números complexos por $\tilde{\phi}(t) \cdot i = i \cdot \phi(t)$, então $\mu_{RS}(\phi) = \mu_{RS}(\tilde{\phi})$.*

Demonstração. Tomando um caminho simplético C^1 suficientemente próximo de ϕ e com extremos fixos, se necessário, podemos supor que ϕ é de classe C^1 e

que seus crossings são todos regulares. Temos que ϕ e $\tilde{\phi}$ possuem os mesmos crossings, $\dim_{\mathbb{R}} \ker(\phi(t) - I) = \dim_{\mathbb{C}} \ker(\tilde{\phi}(t) - I)$ e satisfazem as equações $\frac{d}{dt}\phi(t) = JS(t)\phi(t)$ e $\frac{d}{dt}\tilde{\phi}(t) = J\tilde{S}(t)\tilde{\phi}(t)$ para aplicações autoadjuntas $S(t)$ e $\tilde{S}(t)$ tais que $\tilde{S}(t)(u + iv) = S(t)u + iS(t)v$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}$. Assim, seus crossing forms possuem as mesmas assinaturas e o resultado segue da proposição 3.2.3. \square

Terminamos esta seção com a definição do índice de Conley-Zehnder para caminhos não-degenerados.

Definição 3.2.6. Seja $\phi \in \mathcal{P}_{\tau,1}^*(2n)$ um caminho não-degenerado, i.e., ϕ é uma aplicação contínua $[0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ de simplectomorfismos em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ tal que $\phi(0) = I$ e $\ker(\phi(\tau) - I) = 0$. O *índice de Conley-Zehnder* $\mu_{CZ}(\phi)$ de ϕ é simplesmente o índice de Robbin-Salamon de tal caminho:

$$\mu_{CZ}(\phi) = \mu_{RS}(\phi).$$

3.3 Relação entre os índices de Robbin-Salamon e de Long

Nesta seção relacionamos os índices de caminhos simpléticos segundo [21] e estabelecemos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.1. *Se $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ é um caminho simplético partindo da identidade, então*

$$\mu_L(\gamma) = \mu_{RS}(\gamma) - \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \ker(\gamma(\tau) - I).$$

Em particular, se γ for não-degenerado, então

$$\mu_L(\gamma) = \mu_{CZ}(\gamma).$$

Provaremos este teorema introduzindo mais duas noções de índices associados a caminhos simpléticos em \mathbb{C}^{2n} . Em ambas definições consideraremos o fluxo espectral de um caminho de operadores Fredholm autodjuntos. Enunciaremos os resultados que os relacionam e obteremos o teorema acima. Todas as demonstrações encontram-se em [8], [21], [22] e [29].

Inicialmente retomemos a definição de fluxo espectral como exposto em [26] e [30]. Considere W e H espaços de Hilbert separáveis com $W \subset H = H^* \subset W^*$ e tais que a inclusão $W \hookrightarrow H$ seja compacta com imagem densa. Denote por $S(W, H)$ o conjunto de operadores lineares $W \rightarrow H$ limitados e autoadjuntos (considerados como operadores ilimitados em H com domínio W denso).

Sejam $\mathcal{A}(W, H)$ o conjunto de aplicações $\mathbb{R} \rightarrow S(W, H)$ contínuas (com a topologia da norma) tais que existem os limites

$$A^{\pm} = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} A(s)$$

e pertencem a $S(W, H)$. Denote por $\mathcal{A}_0(W, H)$ o subconjunto composto pelos elementos de $A \in \mathcal{A}(W, H)$ cujos operadores limite A^\pm são bijetivos sobre W . O *fluxo espectral* é uma aplicação

$$\mu_{SF} : \mathcal{A}_0(W, H) \rightarrow \mathbb{Z}$$

caracterizada pelas seguintes propriedades:

- (i) μ_{SF} é constante em cada componente conexa de $\mathcal{A}_0(W, H)$.
- (ii) Se $A(s) : W \rightarrow H$ não depende de s então $\mu_{SF} = 0$.
- (iii) $\mu_{SF}(A_0 \oplus A_1) = \mu_{SF}(A_0) + \mu_{SF}(A_1)$.
- (iv) Se $W = H$ e são de dimensão finita então

$$\mu_{SF}(A) = \frac{1}{2}\text{sign}(A^+) - \frac{1}{2}\text{sign}(A^-),$$

onde $\text{sign}(C)$ é a assitura de C .

Toda matriz complexa $M \in \text{Sp}(2n, \mathbb{C})$ está associada a um operador de Fredholm autoadjunto $D(M)$ definido da seguinte forma:

Lema 3.3.2 (Lema 2.1 de [22]). *Considere os conjuntos $W^{1,2}([0, 1]; M)$ o completamento de Sobolev de*

$$\{\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{2n} \text{ suave} : \phi(1) = M\phi(0)\}$$

com a norma de Sobolev $\|\phi\|_{W^{1,2}}^2 = \int_0^1 ((\phi, \phi) + (\frac{d\phi}{dt}, \frac{d\phi}{dt}))dt$ e

$$L^2([0, 1]; \mathbb{C}^{2n}) = L^2\text{-completamento de } \{\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^{2n} \text{ suave}\}.$$

Então

- (i) $-J\frac{d}{dt}$ define um operador complexo autoadjunto

$$D(M) : W^{1,2}([0, 1]; M) \rightarrow L^2([0, 1]; \mathbb{C}^{2n})$$

que é ilimitado, Fredholm e seu espectro não admite pontos de acumulação.

- (ii) O núcleo de $D(M)$ é dado pelo espaço das aplicações constantes $\phi : [0, 1] \rightarrow \ker_{\mathbb{C}}(M - I)$; em particular, é isomorfo a $\ker_{\mathbb{C}}(M - I)$.

Desta forma, para todo caminho complexo $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{Sp}(2n, \mathbb{C})$ podemos considerar o caminho $D : t \mapsto D(\gamma(t))$ de operadores Fredholm autoadjuntos e tomar seu fluxo espectral $\mu_{SF}\{D(\gamma(t)) : t \in [a, b]\}$.

Definição 3.3.3 ([22], definição 2.2). Para um caminho complexo $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{Sp}(2n, \mathbb{C})$, definimos seu *índice analítico* $i_{an}(\gamma)$ por

$$i_{an}(\gamma) = -\mu_{SF}\{-D(\gamma(t)) : t \in [a, b]\}.$$

Considere uma família $B(t)$ de operadores em \mathbb{C}^{2n} autoadjuntos com $t \in \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$ e o sistema linear Hamiltoniano

$$\dot{x} = JB(t)x, \quad x \in \mathbb{C}^{2n}. \quad (3.1)$$

Denote

$$L_\tau = L^2([0, \tau], \mathbb{C}^{2n}) \quad \text{e} \quad E_{\tau, \omega} = \{x \in W^{1,2}([0, \tau], \mathbb{C}^{2n}) : x(\tau) = \omega x(0)\}.$$

Temos dois operadores A e B autoadjuntos em L_τ definidos pelas formas bilineares

$$\langle Ax, y \rangle = \int_0^\tau \langle -J\dot{x}, y \rangle dt \quad \text{e} \quad \langle Bx, y \rangle = \int_0^\tau \langle B(t)x, y \rangle dt,$$

para todos $x, y \in E_{\tau, \omega}$.

Definição 3.3.4. Sejam γ a solução fundamental de (3.1) e $\omega \in S^1$. Definimos ω -índice complexo $\tilde{i}_{\tau, \omega}(\gamma)$ de γ por

$$\tilde{i}_{\tau, \omega}(\gamma) = -\mu_{SF}\{A + B_s\},$$

onde B_s , $s \in [0, 1]$, é uma curva de operadores Fredholm autoadjuntos tal que $B_0 = 0$ e $B_1 = -B$.

No caso em que γ satisfaz (3.1) para J e $S(t)$ operadores em \mathbb{R}^{2n} , isto é, γ é um caminho simplético real, tomamos J e $S(t)$ em \mathbb{C}^{2n} via comutação com i e $\tilde{\gamma}$ a solução fundamental da equação hamiltoniana correspondente. Podemos então

$$\tilde{i}_{\tau, \omega}(\gamma) = \tilde{i}_{\tau, \omega}(\tilde{\gamma}).$$

Passemos agora aos resultados que relacionam as quatro definições de índice que fizemos até então.

Lema 3.3.5 (Corolário 2.2 de [22]). *Seja $\gamma : [0, \tau] \rightarrow Sp(2n, \mathbb{C})$ um caminho simplético de classe C^1 tal que $\gamma(0) = I$. Então*

$$\tilde{i}_{\tau, \omega}(\gamma) = i_{an}(\bar{\omega}\gamma).$$

Lema 3.3.6 (Corolário 2.1 de [22]). *Seja $\gamma : [0, \tau] \rightarrow Sp(2n)$ um caminho simplético em \mathbb{R}^{2n} tal que $\gamma(0) = I$. Então*

$$i_{\tau, \omega}(\gamma) = \tilde{i}_{\tau, \omega}(\gamma) - n\delta_{\omega, 1},$$

onde

$$\delta_{\omega, 1} = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Lema 3.3.7 (Corolário 3.1 de [22]). *Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow Sp(2n, \mathbb{C})$ um caminho simplético e $\nu(t) = \dim_{\mathbb{C}} \ker(\gamma(t) - I)$. Então*

$$\mu_{RS}(\gamma) = i_{an}(\gamma) + \frac{1}{2}(\nu(b) - \nu(a)).$$

Estes lemas relacionam \tilde{i} com i_{an} , μ_L com \tilde{i} e μ_{RS} com i_{an} , nesta ordem. Daí relacionaremos os índices μ_L e μ_{RS} , provando o teorema 3.3.1.

Demonstração do Teorema 3.3.1. Seja $\gamma \in \mathcal{P}_\tau$. Como os índices de Long e de Robbin-Salamon são invariantes por pequenas perturbações que mantenham os extremos fixos, podemos supor que γ seja de classe C^1 . Denote por $\tilde{\gamma}$ o caminho simplético complexificado de γ . Dos três lemas anteriores temos

$$\mu_L(\gamma) = i_{\tau,1}(\gamma) = \tilde{i}_{\tau,1}(\gamma) - n = \tilde{i}_{\tau,1}(\tilde{\gamma}) - n = i_{an}(\tilde{\gamma}) - n$$

e

$$\begin{aligned} i_{an}(\tilde{\gamma}) &= \mu_{RS}(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{C}} \ker(\tilde{\gamma}(\tau) - I) - 2n) \\ &= \mu_{RS}(\gamma) - \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \ker(\gamma(\tau) - I) + n, \end{aligned}$$

logo

$$\mu_L(\gamma) = \mu_{RS}(\gamma) - \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \ker(\gamma(\tau) - I).$$

O caso particular é imediato. □

3.4 Teorema de Sturm

Nesta seção provaremos o teorema de comparação de Sturm para o índice de Long.

Para uma aplicação simétrica $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotaremos ainda por S sua forma quadrática associada. Retomemos algumas notações sobre formas quadráticas:

$$m^+(S) = \sup\{\dim W : W \subset \mathbb{R}^n, S|_W > 0\},$$

$$m^-(S) = \sup\{\dim W : W \subset \mathbb{R}^n, S|_W < 0\},$$

$$m^0(S) = \dim \ker S \text{ e}$$

$$\text{sign}(S) = m^+(S) - m^-(S).$$

Um importante passo na demonstração do Teorema de Sturm é estabelecido no seguinte resultado:

Proposição 3.4.1. *Seja $t \in [t_0, t_1) \mapsto S(t)$ uma curva de classe C^1 de aplicações simétricas tal que $\dot{S}(t_0)|_{\ker S(t_0)}$ é não-degenerada. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$ a aplicação $S(t)$ é não-degenerada e valem*

$$m^+(S(t)) = m^+(S(t_0)) + m^+(\dot{S}(t_0)|_{\ker S(t_0)}),$$

$$m^-(S(t)) = m^-(S(t_0)) + m^-(\dot{S}(t_0)|_{\ker S(t_0)}).$$

Demonstração. Consideraremos a norma de $S(t)$ dada por

$$\|S(t)\| = \sup_{|v|=1} S(t)(v, v).$$

Suponha inicialmente que $S(t_0)$ seja não-negativa e $\dot{S}(t_0)|_{\ker S(t_0)}$ seja positiva. Sejam $N = \ker S(t_0)$ e W um subespaço complementar a N . Temos

$$\begin{aligned} S(t_0)|_W > 0 &\Rightarrow c_0 = \inf\{S(t_0)(w, w) : w \in W, |w| = 1\} > 0, \\ \dot{S}(t_0)|_N > 0 &\Rightarrow c_1 = \inf\{S(t_0)(n, n) : n \in N, |n| = 1\} > 0, \end{aligned}$$

Como S é contínua,

$$\exists \epsilon > 0; \inf\{S(t)(w, w) : w \in W, |w| = 1\} \geq \frac{c_0}{2} > 0, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \epsilon).$$

Seja $r(t)$ tal que $S(t) = S(t_0) + (t - t_0)\dot{S}(t_0) + r(t)$. Sendo S diferenciável em t_0 , temos $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{r(t)}{t - t_0} = 0$ e, diminuindo ϵ se necessário,

$$\|r(t)\| \leq \frac{c_1}{2}(t - t_0), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \epsilon).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \inf\{S(t)|_N(n, n) : |n| = 1\} &= \inf\{[0 + (t - t_0)\dot{S}(t_0) + r(t)]|_N(n, n) : |n| = 1\} \\ &\geq (t - t_0)c_1 - \frac{c_1}{2}(t - t_0) \\ &= \frac{c_1}{2}(t - t_0) \\ &> 0 \end{aligned}$$

e portanto

$$t \in (t_0, t_0 + \epsilon) \Rightarrow S(t)|_N > 0 \text{ e } S(t)|_W > 0.$$

Agora vamos mostrar que $S(t)|_{N \oplus W} > 0$. Para isto, considere $c_3 = \|\dot{S}(t_0)\| + \frac{c_1}{2}$. Temos $\forall w \in W, n \in N$ com $|w| = |n| = 1$,

$$|S(t)(w, n)| \leq (t - t_0) \left| \dot{S}(t_0)(w, n) \right| + |r(t)(w, n)| \leq (t - t_0)c_3.$$

Supondo $0 < \epsilon < \frac{c_0 c_1}{4c_3^2}$, obtemos $\forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon), w \in W, n \in N, |w| = |n| = 1$,

$$\begin{aligned} S(t)(w, n)^2 &\leq (t - t_0)^2 c_3^2 \\ &< (t - t_0) \epsilon c_3^2 \\ &< (t - t_0) \frac{c_0}{2} \frac{c_1}{2} \\ &\leq S(t)(w, w) S(t)(n, n), \end{aligned}$$

Assim, se $w \in W$ e $n \in N$ não são nulos, então

$$\begin{aligned} S(t)(w - n, w - n) &= S(t)(w, w) - 2S(t)(w, n) + S(t)(n, n) \\ &> S(t)(w, w) - 2\sqrt{S(t)(w, w) S(t)(n, n)} + S(t)(n, n) \\ &= (\sqrt{S(t)(w, w)} - \sqrt{S(t)(n, n)})^2 \\ &\geq 0, \quad \forall w \in W, n \in N, \end{aligned}$$

o que mostra que $S(t) > 0$ em $V = W \oplus N$ e prova a proposição no caso particular em que $S(t_0) > 0$ e $\dot{S}(t_0)|_{\ker S(t_0)} \geq 0$.

Consideremos agora o caso geral. A forma $S(t_0)$ determina uma decomposição $\mathbb{R}^n = V^+ \oplus V^- \oplus N$ em subespaços onde $S(t_0)$ é respectivamente positiva, negativa e nula em V^+ , V^- e N . Por outro lado, $\dot{S}(t_0)$ é não degenerada em N , o que define uma decomposição $N = N^+ \oplus N^-$ tal que $\dot{S}(t_0)$ é positiva em N^+ e negativa em N^- . Terminamos a demonstração se para algum $\epsilon > 0$ valer

$$t \in (t_0, t_0 + \epsilon) \Rightarrow \begin{cases} m^+(S(t)) = \dim V^+ + \dim N^+, \\ m^-(S(t)) = \dim V^- + \dim N^-. \end{cases}$$

Para isto, basta aplicar o que já provamos nas restrições $S(t)|_{V^+ \oplus N^+}$ e $-S(t)|_{V^- \oplus N^-}$. \square

Dadas S^0 e S^1 duas aplicações simétricas de \mathbb{R}^n , escreveremos $S^1 \geq S^0$ quando a forma quadrática $S^1 - S^0$ for não-negativa. Escreveremos ainda $S^1 > S^0$ se $S^1 - S^0$ for positiva.

Se $S(t) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é um caminho de aplicações simétricas definido no intervalo $[0, \tau]$, chamaremos *fluxo hamiltoniano associado a $S(t)$* ao caminho simplético $t \mapsto \Phi(t)$ que é solução fundamental de

$$\dot{\Phi}(t) = JS\Phi(t).$$

Teorema 3.4.2 (Teorema de comparação de Sturm). *Sejam $S^i = S^i(t) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ aplicações simétricas tempo-dependentes e Φ^i os fluxos hamiltonianos associados, $i = 0, 1$.*

$$S^1 \geq S^0 \quad \Rightarrow \quad \mu_L(\Phi^1) \geq \mu_L(\Phi^0).$$

Demonstração. Começaremos supondo os caminhos não-degenerados - caso em que os índices de Long e Robbin-Salamon coincidem.

Sejam $S^s(t) = (1-s)S^0(t) + sS^1(t)$, $s \in [0, 1]$, $t \in [0, \tau]$ e $\Phi^s(t)$ o fluxo hamiltoniano associado a $S^s(t)$. Considere, para cada $t \in [0, \tau]$, o caminho $\Psi^t : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ dado por $\Psi^t(s) = \Phi^s(t)$. Como se vê facilmente, Φ^1 e $\Phi^0 \wedge \Psi^\tau$ são homotópicos com extremos fixos, logo da propriedade de concatenação de μ_{RS} , basta mostrar que $\mu_{RS}(\Psi^\tau) \geq 0$.

Podemos supor que S^0 e S^1 sejam de classe C^1 satisfazendo $S^1 - S^0 > 0$. De fato, perturbando-os se necessário obtemos, para cada $i = 0, 1$ um caminho de classe C^1 de aplicações simétricas \tilde{S}^i e fluxo hamiltoniano associado $\tilde{\Phi}^i$ tais que $\tilde{S}^1 - \tilde{S}^0 > 0$ e $\tilde{\Phi}^i$ está próximo de Φ^i de modo que estes caminhos têm a extremidade em $t = \tau$ na mesma componente conexa de $\text{Sp}^*(2n)$. Tomando um caminho $\alpha^i : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}^*(2n)$ ligando $\tilde{\Phi}^i(\tau)$ a $\Phi^i(\tau)$, temos Φ^i e $\tilde{\Phi}^i \wedge \alpha^i$ homotópicos com extremos fixos e portanto

$$\mu_{RS}(\Phi^i) = \mu_{RS}(\tilde{\Phi}^i \wedge \alpha^i) = \mu_{RS}(\tilde{\Phi}^i) + \mu_{RS}(\alpha^i) = \mu_{RS}(\tilde{\Phi}^i),$$

onde na última igualdade usamos a propriedade do zero de μ_{RS} .

Seja $K^t(s)$ a aplicação linear autoadjunta tal que $\frac{d}{ds}\Psi^t(s) = JK^t(s)\Psi^t(s)$. Admitindo que os crossings de $\mu_{CZ}(\Psi^\tau)$ sejam todos regulares, para que $\mu_{CZ}(\Psi^\tau(s)) \geq$

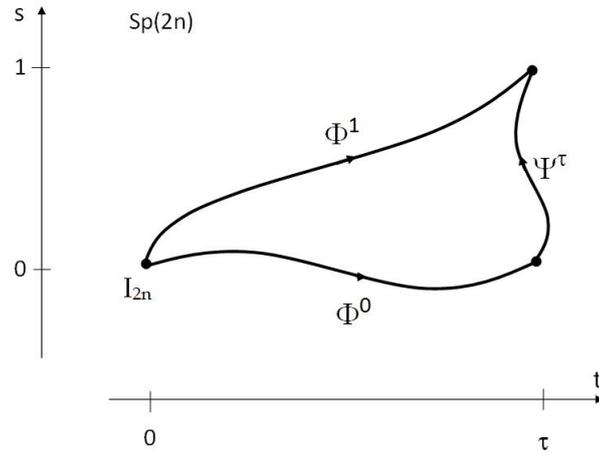


Figura 3.1: Caminhos simpléticos.

0, basta que $K^\tau(s) > 0$, $\forall s \in [0, 1]$, conforme a proposição 3.2.3.

Fixe $s \in [0, 1]$ e examinemos o caminho $t \in [0, \tau] \mapsto K^t(s)$. Observe que $K^0(s) = 0$, pois $\Psi^0(s) = \Phi^s(0) = I, \forall s \in [0, 1]$. Podemos supor que $\{t \in [0, \tau] : \ker K^t(s) \neq 0\}$ é finito, digamos, igual a $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k\}$. Se provarmos que $\frac{d}{dt}|_{t_i} K^t(s)|_{\ker K^{t_i}(s)} > 0$ para um t_i arbitrário então pela proposição anterior teremos $m^+(K^t(s)) = m^+(K^{t_i}(s)) + \dim \ker K^{t_i}(s)$ para todo t perto e à direita de t_i . Mas como $\ker K^0(s) = \mathbb{R}^{2n}$, concluiremos que $K^t(s) > 0$, para todo $t \in (0, \tau]$.

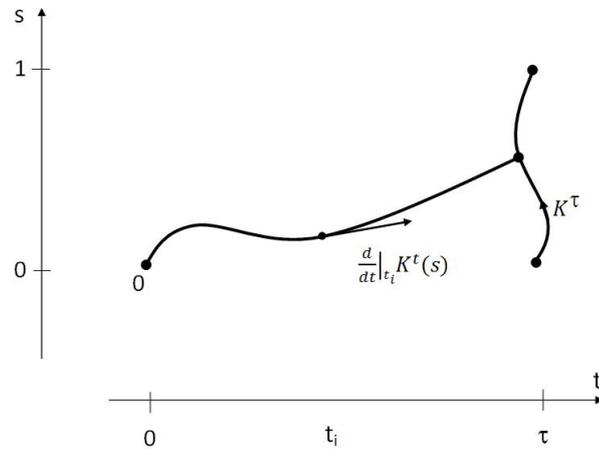


Figura 3.2: Caminhos de aplicações simétricas.

Denote $\partial_t = \frac{d}{dt}$ e $\partial_s = \frac{d}{ds}$. Derivando $\partial_t \Phi^s(t) = JS^s(t)\Phi^s(t)$ em relação a s obtemos

$$\begin{aligned} \partial_s \partial_t \Phi^s(t) &= J \partial_s S^s(t) \Phi^s(t) + JS^s(t) \partial_s \Phi^s(t) \\ &= J(S^1(t) - S^0(t)) \Phi^s(t) + JS^s(t) (JK^t(s) \Phi^s(t)) \\ &= J[(S^1(t) - S^0(t) + S^s(t) JK^t(s))] \Phi^s(t) \end{aligned}$$

Agora derivando $\partial_s \Psi^t(s) = JK^t(s)\Psi^t(s)$ em relação a t obtemos

$$\begin{aligned}\partial_t \partial_s \Psi^t(s) &= J\partial_t K^t(s)\Psi^t(s) + JK^t(s)\partial_t \Psi^t(s) \\ &= J\partial_t K^t(s)\Psi^t(s) + JK^t(s)JS^s(t)\Psi^t(s) \\ &= J[\partial_t K^t(s) + K^t(s)JS^s(t)]\Psi^t(s)\end{aligned}$$

De $\partial_s \partial_t \Phi^s(t) = \partial_t \partial_s \Psi^t(s)$ vem

$$\partial_t K^t(s) = S^1(t) - S^0(t) + S^s(t)JK^t(s) - K^t(s)JS^s(t).$$

Como $x \mapsto \langle (S^s(t)JK^t(s) - K^t(s)JS^s(t))x, x \rangle = 2\langle JK^t(s)x, S^s(t)x \rangle$ e sendo $S^s(t)$ e $K^t(s)$ autoadjuntas, temos que $\partial_t K^t(s)|_{\ker K^{t_i}(s)} = (S^1(t) - S^0(t))|_{\ker K^{t_i}(s)} > 0$, o que conclui a demonstração no caso não-degenerado.

Passemos ao caso geral.

Por simplicidade denotaremos apenas $\Phi^1 \geq \Phi^0$ para dizer que $S^1 \geq S^0$ e também $\Phi^1 > \Phi^0$ para $S^1 > S^0$. Conforme a notação da seção 2.1, seja $\mathcal{P}_\tau^* = \mathcal{P}_\tau^*(2n) = \{\alpha \in C^0([0, \tau], \text{Sp}(2n)) : \alpha(0) = I \text{ e } \ker(\alpha(\tau) - I) = 0\}$.

Suponha inicialmente que $\Phi^1 > \Phi^0$.

Tomemos $\beta \in \mathcal{P}_\tau^*$ um caminho de classe C^1 que esteja C^1 -próximo de Φ^0 e tal que $\Phi^1 > \beta$. Considere os conjuntos

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in \mathcal{P}_\tau^* : \alpha \text{ está } C^0\text{-próximo de } \Phi^1\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{P}_\tau^* \cap C^1([0, \tau], \text{Sp}(2n)) : \alpha \text{ está } C^1\text{-próximo de } \Phi^1 \text{ com } \alpha > \beta\}.$$

Observe que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ e

$$\inf\{\mu_L(\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\} \leq \inf\{\mu_L(\alpha) : \alpha \in \mathcal{B}\},$$

sendo que valerá a igualdade se mostrarmos que existe $\delta \in \mathcal{B}$ tal que $\mu_L(\delta) = \mu_L(\Phi^1)$, pois $\inf\{\mu_L(\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\} = \mu_L(\Phi^1)$. Mas para isto basta considerar $\delta = \Phi_{-s}^1$ uma perturbação rotacional de Φ^1 como feito na página 25. Assim, $\mu_L(\delta) = \mu_L(\Phi^1)$ pela propriedade P6 e, se $s > 0$ for tomado suficientemente pequeno, pela propriedade P4' teremos $\delta > \beta$ e portanto $\Phi_{-s}^1 \in \mathcal{B}$. Isso mostra que $\mu_L(\Phi^1) = \inf\{\mu_L(\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\} = \inf\{\mu_L(\alpha) : \alpha \in \mathcal{B}\}$.

Pela primeira parte já provada,

$$\mu_L(\beta) = \mu_{CZ}(\beta) \leq \mu_{CZ}(\alpha) = \mu_L(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathcal{B},$$

donde $\mu_L(\beta)$ é uma cota inferior de $\{\mu_L(\alpha) : \alpha \in \mathcal{B}\}$ e $\mu_L(\beta) \leq \inf\{\mu_L(\alpha) : \alpha \in \mathcal{B}\} = \mu_L(\Phi^1)$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\mu_L(\Phi^0) &= \inf\{\mu_L(\alpha) : \alpha \in \mathcal{P}_\tau^* \text{ está } C^0\text{-próximo de } \Phi^0\} \\ &\leq \mu_L(\beta) \\ &\leq \mu_L(\Phi^1),\end{aligned}$$

o que conclui o caso $\Phi^1 > \Phi^0$.

Considere agora o caso em que $\Phi^1 \geq \Phi^0$. Tome $\beta \in \mathcal{P}_\tau^* \cap C^1([0, \tau], \text{Sp}(2n))$ um caminho C^1 -próximo de Φ^0 tal que $\Phi^1 \geq \Phi^0 > \beta$. Temos $\mu_L(\Phi^0) \leq \mu_L(\beta)$ por definição e $\mu_L(\beta) \leq \mu_L(\Phi^1)$ pelo o que acabamos de provar. Concluimos então que $\mu_L(\Phi^0) \leq \mu_L(\Phi^1)$.

□

Capítulo 4

Dinâmica de trajetórias magnéticas

Neste capítulo fazemos um estudo do índice de trajetórias magnéticas fechadas. A ideia será tomar o caminho simplético em \mathbb{R}^{2n} como feito no capítulo 1 e estimar seu índice via o teorema de comparação de Sturm. Para isso, consideramos um novo caminho simplético que servirá de modelo para a comparação e cujo índice estimamos na seção 2. Assim, obtemos uma relação entre o índice da trajetória magnética e o seu período e, em particular, uma relação para o índice médio. Utilizando dos resultados desenvolvidos no capítulo 2, inferimos sobre a posição dos autovalores da linearização do mapa de Poincaré em relação ao círculo unitário e portanto concluímos sobre o comportamento dinâmico ao longo da trajetória.

Uma hipótese chave que faremos, além das limitações sobre a curvatura da variedade e a intensidade da força de Lorentz, será a existência de uma trajetória magnética fechada com índice que não seja grande e período não seja pequeno. Com isso reduzimos a análise do tipo dinâmico à existência de tais trajetórias.

4.1 Trajetória magnética em \mathbb{R}^{2n}

Como desenvolvido no capítulo 1, consideremos M uma variedade riemanniana suave completa orientada e $G_t : TM \rightarrow TM$ o fluxo magnético tomado a partir da forma simplética twisted $\Omega = \Omega_0 - \pi^*\omega$.

A uma trajetória fechada γ do fluxo magnético associaremos o índice de Robbin-Salamon da seguinte forma: Seja $\theta = (\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) \in TM$ e tome $E_t : (T_{G_t(\theta)}TM, \Omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ uma trivialização qualquer do fibrado $\dot{\gamma}^*TM$ que transforma o lagrangiano vertical $V(G_t(\theta)) = \ker d_{G_t(\theta)}\pi$ no lagrangiano horizontal $\mathbb{R}^n \times 0$. Considere o caminho de simplectomorfismos $\phi(t) = E_t \cdot d_\theta G_t \cdot E_0^{-1}$.

Definimos o *índice de Robbin-Salamon* de γ como sendo

$$\mu_{RS}(\gamma) = \mu_{RS}(\phi).$$

De modo análogo definimos o *índice de Long* e o *índice médio* de γ por

$$\mu_L(\gamma) = \mu_L(\phi) \quad \text{e} \quad \mu_m(\gamma) = \mu_m(\phi). \quad (4.1)$$

Diremos que o *fator de correção* e o *grau de degenerescência* γ são

$$\chi(\gamma) = \chi(\phi_\tau, u) \quad \text{e} \quad g(\gamma) = g(\phi_\tau, u), \quad (4.2)$$

onde $u = E_t(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$ e χ e g são introduzidos nas definições 2.4.4 e 2.5.1. As proposições 2.4.5.iii e 2.4.3 asseguram que $\chi(\gamma)$ e $g(\gamma)$ não dependem da escolha de E_t .

Como visto nas seções 1.3 e 2.5, além do caminho $\phi \in \mathcal{P}_\tau(2n)$, a trajetória γ define um caminho simplético $\hat{\phi} \in \mathcal{P}_\tau(2n-2)$ obtido via a redução isotrópica do fluxo magnético linearizado na direção de γ , cuja extremidade $\hat{\phi}_\tau$ possui um espectro que coincide com o espectro do mapa de Poincaré linearizado e portanto determina a dinâmica de G_t ao longo de γ . Mais precisamente, sejam $V_t = \text{span}\{(\dot{\gamma}, Y\dot{\gamma})\}$ o subespaço Ω -isotrópico da direção da trajetória e

$$\tilde{\gamma}_t : V_0^\Omega/V_0 \rightarrow V_t^\Omega/V_t \quad (4.3)$$

a família de simplectomorfismos induzida por $d_\theta G_t$ no espaço quociente, que chamamos de *caminho reduzido* de γ . A fim de descrever $\tilde{\gamma}_t$ em \mathbb{R}^{2n-2} , considere E_t a trivialização e o caminho ϕ como acima, os subespaços ω_0 -isotrópicos $W_t = E_t(V_t) \subset \mathbb{R}^{2n}$ e as aplicações $\tilde{\phi}_t$ induzidas por ϕ_t

$$\tilde{\phi}_t : (W_0^{\omega_0}/W_0, \tilde{\omega}_0) \rightarrow (W_t^{\omega_0}/W_t, \tilde{\omega}_t).$$

Tome simplectomorfismos $\hat{E}_t : (W_t^{\omega_0}/W_t, \tilde{\omega}_t) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n-2}, \omega_0)$ tais que $E_\tau = E_0$ e $\hat{E}_t(\pi_W(W_t^{\tilde{\omega}_0} \cap (\mathbb{R}^n \times 0))) = \mathbb{R}^{n-1} \times 0$ e seja $\hat{\phi}_t = \hat{E}_t \tilde{\phi}_t \hat{E}_0^{-1}$ o caminho simplético em \mathbb{R}^{2n-2} .

$$\begin{array}{ccc} \frac{W_0^{\omega_0}}{W_0} & \xrightarrow{\tilde{\phi}_t} & \frac{W_t^{\omega_0}}{W_t} \\ \hat{E}_0 \downarrow & & \downarrow \hat{E}_t \\ \mathbb{R}^{2n-2} & \xrightarrow{\hat{\phi}_t} & \mathbb{R}^{2n-2} \end{array}$$

Definimos o *índice* de Robbin-Salamon *do caminho reduzido* $\tilde{\gamma}$ por

$$\mu_{RS}(\tilde{\gamma}) = \mu_{RS}(\hat{\phi}). \quad (4.4)$$

De modo análogo definimos respectivamente o *índice* de Long e o índice médio *do caminho reduzido* $\tilde{\gamma}$ por

$$\mu_L(\tilde{\gamma}) = \mu_L(\hat{\phi}) \quad \text{e} \quad \mu_m(\tilde{\gamma}) = \mu_m(\hat{\phi}).$$

Proposição 4.1.1. *Sejam $\xi \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ e $A : [0, \tau] \rightarrow Sp(2n)$ tal que $A(\tau) = A(0)$ e $A(t)(\mathbb{R}^n \times 0) = \mathbb{R}^n \times 0$, $\forall t \in [0, \tau]$. Se $\eta(t) = A(t) \cdot \xi(t) \cdot A(0)^{-1}$, então*

$$\mu_{RS}(\xi) = \mu_{RS}(\eta), \quad \mu_L(\xi) = \mu_L(\eta) \quad \text{e} \quad \mu_m(\xi) = \mu_m(\eta).$$

Esta proposição garante que as definições de índices de γ e $\tilde{\gamma}$ não dependem da

escolha dos simplectomorfismos E_t e \hat{E}_t que satisfazem

$$E_\tau = E_0, \quad E_t(\ker d_{G_t(\theta)}\pi) = \mathbb{R}^n \times 0, \quad (4.5)$$

$$\hat{E}_\tau = \hat{E}_0, \quad \hat{E}_t(\pi_W(W_t^{\tilde{\omega}_0} \cap (\mathbb{R}^n \times 0))) = \mathbb{R}^{n-1} \times 0. \quad (4.6)$$

De fato, se $E'_t : T_\theta TM \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ satisfaz $E'_\tau = E'_0$ e $E'_t(\ker d_{G_t(\theta)}\pi) = \mathbb{R}^n \times 0$ e ϕ' é o caminho em $\text{Sp}(2n)$ dado por $\phi'_t = E'_t \cdot d_\theta G_t \cdot E_0^{-1}$, então $\phi'_t = A_t \phi_t A_0^{-1}$ para $A_t = F_t \cdot E_t^{-1}$, que satisfaz as condições da proposição e portanto os índices de ϕ e ϕ' são os mesmos. De modo análogo se verifica esta propriedade para $\hat{\phi}$.

Demonstração. A aplicação

$$\begin{aligned} \delta : [0, 1] \times [0, \tau] &\longrightarrow \text{Sp}(2n) \\ (s, t) &\longmapsto A(t) \xi(st) A(0)^{-1} \end{aligned}$$

define uma homotopia com extremos fixos entre os caminhos $\delta(\cdot, 0) \wedge \delta(1, \cdot)$ e $\delta(0, \cdot) \wedge \delta(\cdot, \tau)$. Pelas propriedades de homotopia e concatenação, temos

$$\mu_{RS}(\delta(\cdot, 0)) + \mu_{RS}(\delta(1, \cdot)) = \mu_{RS}(\delta(0, \cdot)) + \mu_{RS}(\delta(\cdot, \tau)).$$

- $\delta(\cdot, 0) = A(0) \xi(0) A(0)^{-1}$ é um caminho constante, logo $\mu_{RS}(\delta(\cdot, 0)) = 0$ pela propriedade zero.
- $\delta(1, \cdot) = A \xi A(0)^{-1} = \eta$.
- $\delta(0, \cdot) = A A(0)$ é um caminho que preserva $\mathbb{R}^n \times 0$, logo seu índice é zero pela proposição 3.2.4.
- $\delta(\cdot, \tau)$ é uma reparametrização de $A(\tau) \xi A(0) = A(0) \xi A(0)$, cujo índice é igual a $\mu_{RS}(\xi)$ pela naturalidade de μ_{RS} .

Concluimos que $\mu_{RS}(\xi) = \mu_{RS}(\eta)$.

Para as demais igualdades, basta invocar o teorema 3.3.1 e notar que $\ker(\eta(\tau) - I) = \ker(A(\tau) \xi(\tau) A(0)^{-1} - I) = \ker(\xi(\tau) - I)$, portanto

$$\begin{aligned} \mu_L(\eta) &= \mu_{RS}(\eta) - \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \ker(\eta(\tau) - I) \\ &= \mu_{RS}(\xi) - \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \ker(\xi(\tau) - I) \\ &= \mu_L(\xi). \end{aligned}$$

A igualdade $\mu_m(\xi) = \mu_m(\eta)$ é então imediata. \square

Nas seções 1.2 e 1.3, obtivemos uma trivialização E_t de $\dot{\gamma}^* TM$ e aplicações \hat{E}_t que satisfazem as condições (4.5) e (4.6). Daqui pra frente iremos estudar o índice de γ a partir destas aplicações.

As aplicações E_t e \hat{E}_t induzem caminhos simpléticos ϕ em $\text{Sp}(2n)$ e $\hat{\phi}_t$ em $\text{Sp}(2n - 2)$ que, segundo (1.6) e a proposição 1.3.1, satisfazem

$$\frac{d}{dt} \phi_t = X_t \circ \phi_t, \quad \text{para} \quad X_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} Y_t - \Gamma & -\Lambda \\ I & \frac{1}{2} Y_t - \Gamma \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

e

$$\frac{d}{dt}\hat{\phi}_t = \hat{X}_t \circ \hat{\phi}_t, \quad \text{para } \hat{X}_t = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\frac{1}{2}Y_t - \Gamma) & -\hat{\Lambda} \\ I & \mathcal{P}(\frac{1}{2}Y_t - \Gamma) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

onde

$$\Lambda = R_t - \frac{1}{4}Y_t^2 - \frac{1}{2}(Y_t' + Y_t'^*), \quad \hat{\Lambda} = \mathcal{P}(\Lambda) + \beta, \quad (4.9)$$

$\beta = \text{Diag}(b^2/4, 0, \dots, 0)$, b é dado em (1.3) e $\mathcal{P}A$ é a matriz obtida de A retirando sua primeira linha e primeira coluna. Dessa forma,

$$\mu_{RS}(\gamma) = \mu_{RS}(\phi), \quad \mu_L(\gamma) = \mu_L(\phi), \quad \mu_m(\gamma) = \mu_m(\phi), \quad (4.10)$$

$$\mu_{RS}(\tilde{\gamma}) = \mu_{RS}(\hat{\phi}), \quad \mu_L(\tilde{\gamma}) = \mu_L(\hat{\phi}), \quad \mu_m(\tilde{\gamma}) = \mu_m(\hat{\phi}) \quad (4.11)$$

e, como vimos em (1.7), o espectro do mapa de Poincaré linearizado coincide com o de $\hat{\phi}_\tau$. Ademais, pelo teorema 2.5.2,

$$\mu_L(\hat{\phi}) = \begin{cases} \mu_L(\phi) + 1 & , \text{ se } g(\phi_\tau, e_1) = 2 \text{ e } \chi(\gamma) = 0 \text{ ou } 1, \\ \mu_L(\phi) & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (4.12)$$

e

$$\mu_m(\hat{\phi}) = \mu_m(\phi), \quad (4.13)$$

onde $g(\phi_\tau, e_1) = 2$ é o grau de degenerescência da definição 2.5.1.

Para estimar o índice de $\hat{\phi}_t$ a ideia será compará-lo, via o teorema de Sturm, com o índice de um caminho ψ_t tal que

$$\frac{d}{dt}\psi_t = Z_t \circ \psi_t, \quad Z_t = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\frac{1}{2}Y_t - \Gamma) & -\lambda^2 I_{n-1} \\ I_{n-1} & \mathcal{P}(\frac{1}{2}Y_t - \Gamma) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

para algum escalar $\lambda > 0$. De fato, sendo $S = -JX_t$ e $T = -JZ_t$, temos $S - T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda} - \lambda^2 I_{n-1} \end{pmatrix}$. Assim, o teorema de comparação de Sturm nos dirá que

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Lambda}x, x \rangle \geq \lambda^2 \langle x, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n & \Rightarrow \mu_L(\hat{\phi}) \geq \mu_L(\psi), \\ \langle \hat{\Lambda}x, x \rangle \leq \lambda^2 \langle x, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n & \Rightarrow \mu_L(\hat{\phi}) \leq \mu_L(\psi). \end{aligned}$$

O teorema a seguir fornece uma estimativa para o índice de ψ_t . Deixaremos sua demonstração para a próxima seção.

Teorema 4.1.2. *Seja $\psi \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ um caminho tal que $\frac{d}{dt}\psi_t = Z_t \circ \psi_t$ para $Z_t = \begin{pmatrix} A & -\lambda^2 I \\ I & A \end{pmatrix}$, $A = A(t)$ uma matriz $n \times n$ antissimétrica e λ uma constante positiva. Então*

$$\left| \mu_L(\psi) - n \left(2 \left[\lambda \frac{\tau}{2\pi} \right] - 1 \right) \right| \leq 2n,$$

onde $[x] = \inf\{y \text{ inteiro} : y \geq x\}$. Ademais, se $A(t) = 0$ então

$$\mu_L(\psi) = 2n \left[\lambda \frac{\tau}{2\pi} \right] - n.$$

Munido deste teorema podemos estimar o índice de Long do caminho reduzido $\hat{\phi}$ obtido pelo fluxo magnético trivializado. Para isso basta comparar a aplicação $\hat{\Lambda} = \Lambda + \beta$ dada em (4.9) com um múltiplo da identidade, o que pode ser feito a partir de uma condição pinçante (*pinching*) sobre a curvatura, a intensidade do campo magnético e sua derivada, o que faremos agora.

Admitimos inicialmente que a trajetória tenha velocidade $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$. Sejam v' a componente perpendicular a $\dot{\gamma}(t)$ de um vetor $v \in T_{\gamma(t)}M$, $x = E_t(v) \in \mathbb{R}^n$ e $x' = E_t(v')$, $x' \perp e_1$. Então

$$\begin{aligned} \langle \Lambda x, x \rangle &= \left\langle \left(R_t - \frac{1}{4} Y_t^2 - \frac{1}{2} (Y_t' + Y_t'^*) \right) x, x \right\rangle \\ &= \langle R_t x', x' \rangle + \frac{1}{4} \langle Y_t x, Y_t x \rangle - \langle Y_t' x', x' \rangle \\ &= \langle R(\dot{\gamma}(t), v') \dot{\gamma}(t), v' \rangle + \frac{1}{4} \|Yv\|^2 - \langle (\nabla_{v'} Y) \dot{\gamma}(t), v' \rangle \\ &= \frac{1}{4} \|Yv\|^2 + \sigma(\dot{\gamma}(t), v') \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y) v', \dot{\gamma}(t) \rangle, \end{aligned}$$

onde $\sigma(u, v)$ representa a curvatura seccional do plano gerado pelos vetores u e v e na segunda igualdade usamos a proposição 1.2.1.

Dessa forma, se a curvatura seccional de M junto com a força de Lorentz Y e sua derivada covariante satisfizerem

$$\begin{aligned} \sigma(\dot{\gamma}, v') \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y) v', \dot{\gamma} \rangle &\geq a_0 \|v'\|^2, \\ \|Yv\| &\geq b_0 \|v\| \end{aligned}$$

para duas constantes $b_0 \geq 0$ e a_0 com $b_0^2 + 4a_0 \geq 0$, então

$$\begin{aligned} \langle \Lambda x, x \rangle &= \frac{1}{4} \|Yv\|^2 + \sigma(\dot{\gamma}, v') k^2 \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y) v', \dot{\gamma} \rangle \\ &\geq \frac{1}{4} b_0^2 \|v\|^2 + a_0 \|v'\|^2 \\ &= \frac{1}{4} b_0^2 \|x\|^2 + a_0 \|x'\|^2 \\ &= \langle \Lambda_0 x, x \rangle, \end{aligned}$$

onde Λ_0 é a matriz $\text{Diag}(b_0^2/4, b_0^2/4 + a_0, \dots, b_0^2/4 + a_0)$. Em relação ao caminho reduzido temos

$$\hat{\Lambda} = \mathcal{P}\Lambda + \beta \geq \mathcal{P}\Lambda_0 = (b_0^2/4 + a_0)I_{n-1}$$

e do teorema 3.4.2 comparamos os índices de $\hat{\phi}$ e do caminho ψ dado em (4.14) com $\lambda = \sqrt{b_0^2/4 + a_0}$, obtendo

$$\mu_L(\hat{\phi}) \geq \mu_L(\psi) \geq 2(n-1) \left[\sqrt{b_0^2 + 4a_0} \frac{\tau}{4\pi} \right] - 3(n-1),$$

onde na segunda desigualdade usamos o teorema 4.1.2.

Analogamente valerá

$$\langle \Lambda x, x \rangle \leq \langle \Lambda_1 x, x \rangle$$

se

$$\begin{aligned} \|Yv\| &\leq b_1 \|v\|, \\ \sigma(\dot{\gamma}, v') k^2 \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y)v', \dot{\gamma} \rangle &\leq a_1 \|v'\|^2 \end{aligned}$$

e Λ_1 for dado por $\text{Diag}(b_1^2/4, b_1^2/4 + a_1, \dots, b_1^2/4 + a_1)$ para constantes $b_1 \geq 0$ e a_1 . Assim, $\beta = (b^2/4, 0, \dots, 0) \leq b_1^2/4 I_{n-1}$ e

$$\hat{\Lambda} = \mathcal{P}\Lambda + \beta \leq \mathcal{P}\Lambda_1 + b_1^2/4 I_{n-1} = (b_1^2/2 + a_1) I_{n-1}.$$

Se $2b_1^2 + 4a_1 \geq 0$, fazendo $\lambda = \sqrt{b_1^2/2 + a_1}$ concluímos que

$$\mu_L(\hat{\phi}) \leq 2(n-1) \left[\sqrt{2b_1^2 + 4a_1} \frac{\tau}{4\pi} \right] + (n-1).$$

Com isso estabeleceremos o seguinte teorema:

Teorema 4.1.3. *Sejam γ uma órbita τ -periódica do fluxo magnético em M com respeito à força de Lorentz Y de velocidade $\|\dot{\gamma}(t)\| = k$ e $\tilde{\gamma}$ o caminho simplético reduzido definido em (4.3). Valem as seguintes implicações:*

(i) *Se existirem constantes $b_0 \geq 0$ e a_0 tais que $b_0^2 + 4a_0 \geq 0$ e*

$$\begin{aligned} \sigma(\dot{\gamma}, v') k^2 \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y)v', \dot{\gamma} \rangle &\geq a_0 \|v'\|^2, \\ \|Yv\| &\geq b_0 \|v\|, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\forall v, v' \in T_{\gamma(t)}M, \quad v' \perp \dot{\gamma}(t), \quad t \in [0, \tau],$$

então

$$\mu_L(\tilde{\gamma}) \geq 2(n-1) \left[\sqrt{b_0^2 + 4a_0} \frac{\tau}{4\pi} \right] - 3(n-1).$$

(ii) *Analogamente, se existirem constantes $b_1 \geq 0$ e a_1 tais que $2b_1^2 + 4a_1 \geq 0$ e*

$$\begin{aligned} \sigma(\dot{\gamma}, v') k^2 \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y)v', \dot{\gamma} \rangle &\leq a_1 \|v'\|^2, \\ \|Yv\| &\leq b_1 \|v\|, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\forall v, v' \in T_{\gamma(t)}M, \quad v' \perp \dot{\gamma}(t), \quad t \in [0, \tau],$$

então

$$\mu_L(\tilde{\gamma}) \leq 2(n-1) \left[\sqrt{2b_1^2 + 4a_1} \frac{\tau}{4\pi} \right] + (n-1).$$

Demonstração. A argumentação feita acima prova este teorema no caso particular em que a velocidade de γ é $k = 1$ faltando apenas verificar o caso geral. Para isto, fixada a trajetória τ -periódica γ de velocidade $\|\dot{\gamma}\| = k$ tal que $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = Y\dot{\gamma}$, considere $\lambda(t) = \gamma(t/k)$. λ é um trajetória fechada de período $\tau' = k\tau$, velocidade $\|\dot{\lambda}\| = 1$ e tal que $\nabla_{\dot{\lambda}}\dot{\lambda} = Z\dot{\lambda}$, onde $Z = \frac{1}{k}Y$. Sejam $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\lambda}$ os caminhos reduzidos relativos a γ e λ . Tome $\hat{\phi} \in \mathcal{P}_{\tau}(2n-2)$ e $\hat{\psi} \in \mathcal{P}_{\tau'}(2n-2)$ os caminhos obtidos pela trivialização dos respectivos espaços quociente tais que $\mu_L(\tilde{\gamma}) = \mu_L(\hat{\phi})$ e $\mu_L(\tilde{\lambda}) = \mu_L(\hat{\psi})$, conforme (4.11). Como $\lambda : t \mapsto \lambda(t) = \gamma(t/k)$ se trata apenas de uma reparametrização de γ ,

$\hat{\psi}$ pode ser tomada satisfazendo $\hat{\psi}(t) = \hat{\phi}(t/k)$, isto é, como uma reparametrização de $\hat{\phi}$, e assim $\mu_L(\hat{\phi}) = \mu_L(\hat{\psi})$. Se

$$\begin{aligned} \sigma(\dot{\gamma}, v') k^2 \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y)v', \dot{\gamma} \rangle &\geq a_0 \|v'\|^2, \\ \|Yv\| &\geq b_0 \|v\|, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \sigma(\dot{\lambda}, v') \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Z)v', \dot{\lambda} \rangle &\geq a'_0 \|v'\|^2, \\ \|Zv\| &\geq b'_0 \|v\|, \end{aligned}$$

para $a'_0 = a_0/k^2$ e $b'_0 = b_0/k$, logo

$$\begin{aligned} \mu_L(\tilde{\gamma}) &= \mu_L(\tilde{\lambda}) \\ &\geq 2(n-1) \left[\sqrt{(b'_0)^2 + 4a'_0} \frac{\tau'}{4\pi} \right] - 3(n-1) \\ &= 2(n-1) \left[\sqrt{b_0^2 + 4a_0} \frac{\tau}{4\pi} \right] - 3(n-1), \end{aligned}$$

o que prova o item (i). Da mesma maneira obtemos o item (ii). \square

Usando as desigualdades $x \leq [x] < x + 1$ para todo número real x , a expressão

$$\mu_m(\gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mu_L(\gamma^k)}{k}$$

para o índice médio e a identidade

$$\mu_m(\gamma) = \mu_m(\tilde{\gamma})$$

proveniente de (4.10), (4.11) e (4.13), obtemos o seguinte corolário:

Corolário 4.1.4. *Nas condições do teorema anterior - valendo (4.15) e (4.16) - e denotando $c_0 = (n-1)\sqrt{b_0^2 + 4a_0}$ e $c_1 = (n-1)\sqrt{2b_1^2 + 4a_1}$, temos*

$$\begin{aligned} -3(n-1) + c_0 \frac{\tau}{2\pi} &\leq \mu_L(\tilde{\gamma}) < c_1 \frac{\tau}{2\pi} + 3(n-1), \\ c_0 \frac{\tau}{2\pi} &\leq \mu_m(\tilde{\gamma}) = \mu_m(\gamma) \leq c_1 \frac{\tau}{2\pi}. \end{aligned}$$

Para estabelecer o teorema 4.1.3 recorreremos ao teorema 4.1.2. Este último fornece um valor preciso para o índice no caso particular em que a matriz antisimétrica $A(t) = \mathcal{P}(\frac{1}{2}Y_t - \Gamma)$ é nula. Esta condição é satisfeita, por exemplo, quando o fluxo for geodésico¹ e no caso do fluxo magnético sobre superfícies. De fato, se $n = 2$ então $\frac{1}{2}Y_t - \Gamma$ é uma matriz antissimétrica 2×2 e portanto $\mathcal{P}(\frac{1}{2}Y_t - \Gamma) = 0$. Dessa maneira melhoramos o teorema no caso particular de superfícies:

¹Com efeito, para o fluxo geodésico temos $Y_t = 0$ e podemos tomar uma trivização do fibrado γ^*TM como feito no capítulo 1 a partir de campos X_i que sejam paralelos, logo $\Gamma = 0$.

que por sua vez se decompõe da forma $e(t) = C(\lambda)^{-1} \cdot r(\lambda, t) \cdot C(\lambda)$ para

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\lambda} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

e

$$r(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

a rotação em \mathbb{R}^2 em torno da origem no sentido anti-horário com velocidade angular λ .

Lema 4.2.1. $\psi = E \cdot H$.

Demonstração. É um cálculo direto. $\frac{d}{dt}(E \cdot H) \cdot (E \cdot H)^{-1} = \dot{E}E^{-1} + E\dot{H}H^{-1}E^{-1} = Z_1 + EZ_2E^{-1} = Z_1 + Z_2 = Z$. Aqui usamos o fato de E e Z_2 comutarem uma vez que Z_2 é antissimétrica e E é formado por 4 blocos $n \times n$ que são múltiplos da matriz identidade. \square

Retomemos a definição (segundo Long) de caminhos concatenados:

Definição 4.2.2. Sejam $\gamma_0, \gamma_1 : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ dois caminhos simpléticos. Se $\gamma_0(\tau) = \gamma_1(0)$, a concatenação de γ_0 e γ_1 é o caminho

$$\gamma_1 * \gamma_0(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & , \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ \gamma_1(2t - \tau) & , \text{ se } \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau. \end{cases}$$

Denote $E_\tau = E(\tau)$.

Lema 4.2.3. ψ e $E * (E_\tau H)$ são 1-homotópicos.

Demonstração. Considere $\delta : [0, 1] \times [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ dada por

$$\delta(s, t) = \begin{cases} E(2t) \cdot H(2ts) & , \quad t \in [0, \frac{\tau}{2}] \\ E(\tau) \cdot H(2(s-1)(\tau-t) + \tau) & , \quad t \in [\frac{\tau}{2}, \tau]. \end{cases}$$

- δ está bem definida: $\delta(s, \frac{\tau}{2}) = E(\tau) \cdot H(s\tau)$ por ambas expressões.
- δ é homotopia com extremos fixos: $\delta(\cdot, 0) = I$, $\delta(\cdot, \tau) = E(\tau)H(\tau)$.
- $\delta(0, \cdot) = E * [E_\tau H]$.
- $\delta(1, \cdot) = \psi(\tau) * \psi$.

Temos $E * (E_\tau H) = \delta(0, \cdot) \sim_1 \delta(1, \cdot) = \psi(\tau) * \psi \sim_1 \psi$. \square

Como μ_L não é aditivo com respeito à concatenação $*$ (pois está definido apenas para caminhos que partem da identidade), introduzimos um novo índice para caminhos simpléticos com extremos livres como desenvolvido em [23], definição 6.2.9.

Definição 4.2.4. Seja $f : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ um caminho simplético. Definimos

$$\bar{\mu}_L(f) = \mu_L(f * \alpha) - \mu_L(\alpha),$$

onde $\alpha \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ é um caminho conectando I a $f(0)$.

Estendemos a definição de homotopia para caminhos com extremos livres: Dois caminhos $f, g : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ serão chamados de homotópicos, e denotaremos $f \sim g$, se existir $\delta : [0, 1] \times [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ tal que $\delta(0, \cdot) = f$, $\delta(1, \cdot) = g$ e $\dim \ker(\delta(\cdot, 0) - I)$ e $\dim \ker(\delta(\cdot, \tau) - I)$ são constantes. Quando $f(0) = g(0) = I$, $f \sim g$ é o mesmo que $f \sim_1 g$ da definição 2.1.3.

Proposição 4.2.5. (i) A definição de $\bar{\mu}_L$ não depende do caminho α escolhido.

$$(ii) f \sim g \quad \Rightarrow \quad \bar{\mu}_L(f) = \bar{\mu}_L(g).$$

$$(iii) f(\tau) = g(0) \quad \Rightarrow \quad \bar{\mu}_L(g * f) = \bar{\mu}_L(f) + \bar{\mu}_L(g).$$

Nas demonstrações que seguem utilizaremos da notação $\alpha : A \triangleright B$ para dizer que α é um caminho $[0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ que liga A a B e escreveremos por simplicidade apenas $\Delta(\alpha)$ no lugar de $\Delta_\tau(\alpha)$.

Demonstração. γ_{-s} irá denotar a perturbação rotacional (como apresentado antes da definição 2.1.3) de um caminho $\gamma \in \mathcal{P}_\tau(2n)$.

(i) Sejam

$$\alpha : I \triangleright f(0), \quad \beta^s : f_{-s}(\tau) \triangleright M_n^\pm \quad \text{e} \quad \gamma^s : \alpha_{-s}(\tau) \triangleright M_n^\pm.$$

Então $\bar{\mu}_L(f) = \mu_L(f * \alpha) - \mu_L(\alpha) = \frac{1}{\pi}(\Delta(\beta^s * f_{-s} * \alpha) - \Delta(\gamma^s * \alpha_{-s})) = \frac{1}{\pi}(\Delta(\beta^s) + \Delta(f_{-s}) + \Delta(\alpha) - \Delta(\gamma^s) - \Delta(\alpha_{-s})) \rightarrow \frac{1}{\pi}(\Delta(\beta) + \Delta(f) - \Delta(\gamma))$, que não depende de α mas apenas de f (e seus extremos).

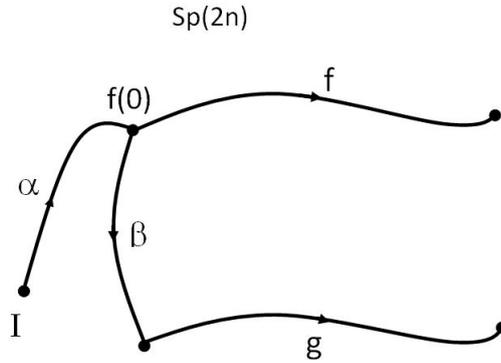


Figura 4.2: Demonstração da proposição 4.2.5.i.

(ii) Sejam $\delta : [0, 1] \times [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)$ a homotopia entre f e g , $\alpha : I \triangleright f(0)$ e $\beta(t) = \delta(\tau t, 0)$. Note que $\beta \sim f(0)$, logo $f * \alpha \sim f * f(0) * \alpha \sim g * \beta * \alpha$ e portanto $\bar{\mu}_L(g) = \mu_L(g * \beta * \alpha) - \mu_L(\beta * \alpha) = \mu_L(f * \alpha) - \mu_L(\alpha) = \bar{\mu}_L(f)$.

(iii) Tome $\alpha : I \triangleright f(0)$ e observe que $\bar{\mu}_L(f) + \bar{\mu}_L(g) = [\mu_L(f * \alpha) - \mu_L(\alpha)] + [\mu_L(g * f * \alpha) - \mu_L(f * \alpha)] = \mu_L(g * f * \alpha) - \mu_L(\alpha) = \bar{\mu}_L(f * g)$.

□

Lema 4.2.6. $|\bar{\mu}_L(E_\tau H)| \leq 2n$.

Precisaremos do resultado abaixo que nos diz que caminhos simpléticos γ inteiramente contidos em $\text{Sp}(2n)_\omega^*$ com uma extremidade em M_n^+ ou M_n^- possuem um número de rotação $\Delta_\tau(\gamma)$ (cf. seção 2.1) inferior a $n\pi$ em valores absolutos.

Proposição 4.2.7. *Sejam $\tau > 0$, $\omega \in S^1$ e $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \text{Sp}(2n)_\omega^*$ um caminho tal que $\gamma(\tau) = M_n^+$ ou M_n^- . Então*

$$|\Delta_\tau(\gamma)| < n\pi.$$

Demonstração. Este resultado encontra-se no corolário 2.4.8 em vista do lema 5.2.1 em [23]. \square

Demonstração da lema 4.2.6. Primeiramente observamos que

$$\bar{\mu}_L(E_\tau H) = \bar{\mu}_L(R_\tau H),$$

onde $R_\tau = r(\lambda, \tau) \diamond \cdots \diamond r(\lambda, \tau)$. De fato, como $E_\tau = e(\tau) \diamond \cdots \diamond e(\tau)$ e $e(\tau) = C(\lambda)^{-1} \cdot r(\lambda, \tau) \cdot C(\lambda)$, o caminho

$$\begin{aligned} \eta(s) = & [C((1-s)\lambda + s) \cdot r(\lambda, \tau) \cdot C((1-s)\lambda + s)^{-1}] \diamond \cdots \diamond \\ & [C((1-s)\lambda + s) \cdot r(\lambda, \tau) \cdot C((1-s)\lambda + s)^{-1}] \end{aligned}$$

conecta E_τ a R_τ e $\nu(\eta(s)) = \dim \ker(\eta(s) - I) = \dim \ker(R_\tau - I)$ não depende de s . Assim $\delta(s, t) = \eta(s)H(t)$ define uma homotopia entre $E_\tau H$ e $R_\tau H$ e portanto $\bar{\mu}_L(E_\tau H) = \bar{\mu}_L(R_\tau H)$.

Seja $h = h(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o caminho de aplicações tais que

$$\frac{d}{dt}h = Ah, \quad h(0) = I.$$

h é ortogonal pela antissimetria de A e $H = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$.

Como $R_\tau = \begin{pmatrix} R_{\tau,1} & -R_{\tau,2} \\ R_{\tau,2} & R_{\tau,1} \end{pmatrix}$ para $R_{\tau,1} = \text{Diag}(\cos(\lambda\tau), \dots, \cos(\lambda\tau))$ e $R_{\tau,2} = \text{Diag}(\sin(\lambda\tau), \dots, \sin(\lambda\tau))$, temos

$$R_\tau \cdot H = \begin{pmatrix} R_{\tau,1} & -R_{\tau,2} \\ R_{\tau,2} & R_{\tau,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{\tau,1}h & -R_{\tau,2}h \\ R_{\tau,2}h & R_{\tau,1}h \end{pmatrix}$$

e

$$\text{Det}(R_{\tau,1}h + \sqrt{-1}R_{\tau,2}h) = \text{Det}(R_{\tau,1} + \sqrt{-1}R_{\tau,2}) \cdot \text{Det}(h) = \text{Det}(R_{\tau,1} + \sqrt{-1}R_{\tau,2})$$

que não depende de t . Segue daí que $\Delta(R_\tau H) = 0$.

Denote $H' = R_\tau H$.

Considere, como na notação acima, $\alpha : I \triangleright H'(0)$ e H'_s e α_s perturbações rotacionais de H' e α . Tome $\gamma^s : \alpha_s(\tau) \triangleright M_n^\pm$ e $\beta^s : H'_s(\tau) \triangleright M_n^\pm$ caminhos

contidos em $\mathrm{Sp}(2n)^*$. Concluiremos que

$$\begin{aligned}
|\bar{\mu}_L(E_\tau H)| &= |\bar{\mu}_L(RH)| \\
&= |\bar{\mu}_L(H')| \\
&= |\mu_L(H' * \alpha) - \mu_L(\alpha)| \\
&= \frac{1}{\pi} |\Delta(\beta^s * H'_{-s} * \alpha) - \Delta(\gamma^s * \alpha_{-s})| \\
&= \frac{1}{\pi} |\Delta(\beta^s) + \Delta(H'_{-s}) + \Delta(\alpha) - \Delta(\gamma^s) - \Delta(\alpha_{-s})| \\
&\leq \frac{1}{\pi} (|\Delta(\beta^s)| + |\Delta(H'_{-s})| + |\Delta(\alpha) - \Delta(\alpha_{-s})| + |\Delta(\gamma^s)|) \\
&\leq \frac{1}{\pi} (n\pi + 0 + 0 + n\pi) \\
&= 2n,
\end{aligned}$$

e na última desigualdade usamos que $\Delta(H'_{-s}) \rightarrow \Delta(H') = 0$ e $\Delta(\alpha_{-s}) \rightarrow \Delta(\alpha)$ quando $s \rightarrow 0$ e o último lema. \square

Antes de calcular o índice de E , calculemos o índice para as rotações.

Proposição 4.2.8. *Seja $r_\lambda = r(\lambda, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathrm{Sp}(2)$ a rotação como em (4.18) dada por*

$$r(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix}.$$

A restrição $r_{\lambda, \tau}$ ao intervalo $[0, \tau]$ tem índice

$$\mu_L(r_{\lambda, \tau}) = 2 \left\lceil \frac{\lambda}{2\pi} \tau \right\rceil - 1,$$

onde $\lceil x \rceil = \inf\{y \text{ inteiro} : y \geq x\}$. Em particular, o caminho constante igual a identidade I_2 tem índice igual a -1 .

Demonstração. Suponha $\lambda \neq 0$. Temos que r_λ satisfaz

- $r_\lambda(\tau) \in \mathrm{Sp}(2)^* \Leftrightarrow \tau \neq \frac{2k\pi}{\lambda}, \quad k \in \mathbb{Z}$,
- $r_\lambda(\frac{k\pi}{\lambda}) = (-1)^k I_2, \quad k \in \mathbb{Z}$,
- $\Delta_\tau(r_{\lambda, \frac{\tau}{\lambda}}) = \tau$.

Suponha que τ não seja um múltiplo de $\frac{2\pi}{\lambda}$. Divida τ por $\frac{2\pi}{\lambda}$ obtendo $\tau = \frac{2\pi}{\lambda}k + \rho$ com $\rho \in (0, \frac{2\pi}{\lambda})$ e k inteiro e tome $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \mathrm{Sp}(2)^*$ o caminho que conecta $r_\lambda(\tau)$ a $-I_2$ ao longo de r_λ , i.e., $\gamma(t) = r_\lambda((1 - \frac{t}{\tau})\rho + \frac{t}{\tau}\frac{\pi}{\lambda})$. Então $\gamma * r_{\lambda, \tau}$ é uma reparametrização de $r_{\lambda, \frac{(2k+1)\pi}{\lambda}}$ e portanto $\Delta_\tau(\gamma * r_{\lambda, \tau}) = (2k+1)\pi$. Segue que

$$\mu_L(r_\lambda) = \frac{1}{\pi} \Delta_\tau(\beta * \gamma * r_\lambda) = \frac{1}{\pi} \Delta_\tau(\gamma * r_\lambda) + \frac{1}{\pi} \Delta_\tau(\beta) = (2k+1) + 0,$$

onde $\beta : [0, \tau] \rightarrow \mathrm{Sp}(2)^*$, $\beta(t) = \mathrm{Diag}(t-2, \frac{1}{t-2})$ é o caminho que conecta $-I_2$ a M_2^- com $\Delta_\tau(\beta) = 0$.

Antes de examinarmos o caso em que τ é múltiplo de $\frac{2\pi}{\lambda}$, vejamos o que ocorre quando $\lambda = 0$. Pelo teorema 6.1.8 de [23], todos os caminhos não-degenerados $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_\tau^*(2)$ que estiverem C^0 -próximos de um caminho degenerado $\gamma \in \mathcal{P}_\tau^0(2)$ satisfazem

$$|\mu_L(\beta) - \mu_L(\alpha)| \leq \nu_1(\gamma) = \dim \ker(\gamma(\tau) - I).$$

Tomando $\alpha(t) = r(-\epsilon, t)$ e $\beta(t) = r(\epsilon, t)$, cujos índices são respectivamente -1 e 1 para $\epsilon > 0$ pequeno, e observando que $\nu_1(I) = 2$, vemos que o índice de caminho identidade é $\mu_L(I) = \mu_L(r(0, \cdot)) = \inf\{\mu_L(\delta) : \delta \in \mathcal{P}_\tau^*(2n) \text{ e } C^0\text{-próximo } \gamma\} = \mu_L(\alpha) = -1$.

No caso em que $\tau = \frac{2k\pi}{\lambda}$, r_λ consiste em k voltas completas em torno da origem, logo $\Delta_\tau(r_\lambda) = 2k\pi$. Como r_λ termina na identidade, ficamos com $\mu_L(r_\lambda) = 2k - 1$.

Concluimos que $\mu_L(r_\lambda) = 2 \left\lceil \frac{\lambda}{2\pi} \tau \right\rceil - 1$. □

Para determinar o índice de E , basta observar que E é homotópico a um \diamond -produto de rotações, conforme o lema que segue:

Lema 4.2.9. *O caminho E é homotópico a $r_\lambda \diamond \cdots \diamond r_\lambda$. Em particular,*

$$\mu_L(E) = n \left(2 \left\lceil \frac{\lambda}{2\pi} \tau \right\rceil - 1 \right).$$

Demonstração. Temos $E(t) = e(t) \diamond \cdots \diamond e(t)$ e $e(t) = C(\lambda)^{-1} \cdot r(\lambda, t) \cdot C(\lambda)^{-1}$, onde $C(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\lambda} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \end{pmatrix}$ e $r(\lambda, t)$ é a rotação dada em (4.18). Então basta notar que $e(t)$ é homotópico a $C(1)^{-1} \cdot r_\lambda \cdot C(1) = r_\lambda$ pela homotopia

$$(s, t) \mapsto C((1-s)\lambda + s)^{-1} \cdot r_\lambda \cdot C((1-s)\lambda + s).$$

O resultado agora segue da aditividade simplética de μ_L . □

Demonstração do teorema 4.1.2. Basta reunir os resultados acima: Pelo lema 4.2.3 há uma homotopia entre $E * (E_\tau H)$ e ψ e das propriedades de homotopia e concatenação conforme a proposição 4.2.5, temos

$$\bar{\mu}_L(\psi) = \bar{\mu}_L(E) + \bar{\mu}_L(E_\tau H).$$

Os caminhos ψ e E partem da identidade, logo da definição de $\bar{\mu}_L$ tem-se

$$\bar{\mu}_L(\psi) = \mu_L(\psi) - \mu_L(I), \quad \bar{\mu}_L(E) = \mu_L(E) - \mu_L(I)$$

e portanto

$$\mu_L(\psi) = \mu_L(E) + \bar{\mu}_L(E_\tau H).$$

O resultado segue de $|\bar{\mu}_L(E_\tau H)| \leq 2n$ pelo Lema 4.2.6 e do valor de $\mu_L(E)$ calculado no Lema 4.2.9.

Para o caso particular em que $A(t) = 0$, temos $Z = Z_1$ e portanto $\psi_t = E(t)$. □

4.3 Dinâmica de trajetórias magnéticas

Nesta seção vamos apresentar o principal resultado deste trabalho que diz, a grosso modo, que caso exista numa variedade riemanniana orientada uma trajetória magnética periódica com índice não muito grande e período que não seja pequeno, podemos descrever o comportamento dinâmico do fluxo magnético a partir de limitações sobre a curvatura seccional e a força de Lorentz. Antes de apresentar este resultado, façamos mais uma definição.

Sejam M^n variedade riemanniana orientada sujeita a uma força de Lorentz Y , γ uma trajetória magnética τ -periódica, $\tau > 0$, e P a linearização do mapa de Poincaré de γ em $\theta = (\gamma, \dot{\gamma})(0) \in TM$ em relação ao fluxo magnético restrito ao nível de energia que contém γ .

Definição 4.3.1. Diremos que a trajetória γ é *hiperbólica* se P não possuir autovalores unitários. Se todos os autovalores de P estiverem em S^1 , diremos que γ é *elíptico-parabólica*.

Se denotarmos por $\sigma(\gamma(\tau))$ o espectro da linearização do fluxo magnético $G_\tau : TM \rightarrow TM$, então $\sigma(\gamma(\tau)) = \sigma(P) \cup \{1\}$ e

$$\#\sigma(\gamma(\tau)) = \#\sigma(P) + 2,$$

contadas as multiplicidades algébricas.

Como vimos na primeira seção deste capítulo, à trajetória γ podemos associar índices simpléticos $\mu_L(\gamma)$ e $\mu_m(\gamma)$. Para isto consideramos um caminho $\phi \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ obtido a partir de uma trivialização adequada de $\dot{\gamma}^*TM$ e pomos $\mu_L(\gamma) = \mu_L(\phi)$ e $\mu_m(\gamma) = \mu_m(\phi)$. Tal caminho possui a propriedade de ϕ_τ ter o mesmo espectro de $d_\theta G_\tau$ com as mesmas multiplicidades.

Uma maneira de inferir sobre a interseção do espectro de ϕ_τ com S^1 é analisar o comportamento de seus índices μ_L e μ_m . O corolário 4.1.4 nos diz como evolui o índice $\mu_m(\gamma) = \mu_m(\phi)$ com respeito ao período τ e a uma condição pinçante: se γ tiver velocidade $\|\dot{\gamma}\| = k$ e a força de Lorentz $Y : TM \rightarrow TM$ satisfizer junto com a curvatura seccional σ de M as desigualdades

$$\begin{aligned} b_0 \|v\| &\leq \|Yv\| \leq b_1 \|v\|, \\ a_0 \|v'\|^2 &\leq \sigma(\dot{\gamma}, v') k^2 \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y)v', \dot{\gamma} \rangle \leq a_1 \|v'\|^2, \end{aligned}$$

$\forall v, v' \in T_{\gamma(t)}M$, $v' \perp \dot{\gamma}(t)$, $t \in [0, \tau]$, com constantes a_i e b_i tais que $b_0^2 + 4a_0 \geq 0$ e $2b_1^2 + 4a_1 \geq 0$, então vale

$$c_0 \frac{\tau}{2\pi} \leq \mu_m(\phi) \leq c_1 \frac{\tau}{2\pi}, \quad (4.19)$$

onde $c_0 = b_0 + (n-1)\sqrt{b_0^2 + 4a_0}$ e $c_1 = (n-1)\sqrt{2b_1^2 + 4a_1}$.

Dessa forma, se $d > 0$ for uma constante tal que $\mu_L(\phi) \leq d$, conseguimos assegurar as hipóteses do teorema 2.2.8

$$\mu_L(\phi) \leq d < \mu_m(\phi)$$

se, por exemplo, valer $d \frac{2\pi}{\tau} < c_0$. Com isso concluiremos que

$$i_{z_0}(\phi) - i_1(\phi) \geq dl$$

para algum $z_0 \in S^1 \setminus \{1\}$, onde $l = \sup \left\{ l_1, \frac{1}{l_2} \right\}$ e l_1 e l_2 são os inteiros dados por $l_1 = \sup \left\{ p \geq 0 \text{ inteiro} : p < 2 \frac{\mu_m(\phi) - d}{d} \right\}$ e $l_2 = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{p+2}{p+1} < \frac{\mu_m(\phi)}{d} \right\}$. No entanto um salto como este na função $\omega \mapsto i_\omega(\phi)$ significa que existem autovalores de ϕ_τ em S^1 . Mais precisamente, pelo teorema 2.3.1,

$$\#\sigma(\phi_\tau) \cap S^1 \geq 2 \frac{d}{l}.$$

Podemos analisar de modo análogo desigualdades opostas: para $\mu_L(\phi) \geq d > 0$, teremos

$$\mu_m(\phi) < d \leq \mu_L(\phi)$$

se valer $c_1 < d \frac{2\pi}{\tau}$. Daí

$$i_1(\phi) - i_{z_0}(\phi) \geq \frac{d}{l},$$

para algum $z_0 \in S^1 \setminus \{1\}$ e para $l = \left\{ p \in \mathbb{N} : p > \frac{\mu_m(\phi)}{d - \mu_m(\phi)} \right\}$. Assim, pelo teorema 2.3.1,

$$\#\sigma(\phi_\tau) \cap S^1 \geq 2 \frac{d}{l} + 4S^+(1).$$

A discussão que fizemos nos leva ao principal teorema deste trabalho, enunciado abaixo.

Teorema 4.3.2. *Sejam γ uma trajetória magnética τ -periódica na variedade riemanniana orientada M^n com $\|\dot{\gamma}\| = k$ e tal que a força de Lorentz Y e a curvatura seccional σ satisfazem*

$$\begin{aligned} a_0 \|v'\|^2 &\leq \sigma(\dot{\gamma}, v') k^2 \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y)v', \dot{\gamma} \rangle &\leq a_1 \|v'\|^2, \\ b_0 \|v\| &\leq \|Yv\| &\leq b_1 \|v\|, \end{aligned}$$

$\forall v, v' \in T_{\gamma(t)}M$, $v' \perp \dot{\gamma}(t)$, $t \in [0, \tau]$,
para constantes a_i e b_i tais que $b_0^2 + 4a_0 \geq 0$, $2b_1^2 + 4a_1 \geq 0$.

Denote $c_0 = (n-1)\sqrt{b_0^2 + 4a_0}$ e $c_1 = (n-1)\sqrt{2b_1^2 + 4a_1}$. Então

$$c_0 \frac{\tau}{2\pi} \leq \mu_m(\gamma) \leq c_1 \frac{\tau}{2\pi}$$

e para todo $d > 0$ valem as seguintes implicações:

(i) Se $\mu_L(\gamma) \leq d$ e $c_0 > d \frac{2\pi}{\tau}$, então

$$\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq \frac{2d}{l},$$

onde $l = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{p+2}{p+1} < \frac{\tau}{2\pi} \frac{c_0}{d} \right\}$.

(ii) Se $\mu_L(\gamma) \leq d$ e $c_0 > d \frac{2\pi}{\tau} \left(1 + \frac{k}{2}\right)$, onde $k \in \mathbb{N}$, então

$$\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq 2kd.$$

(iii) Se $\mu_L(\gamma) \geq d$ e $c_1 < d \frac{2\pi}{\tau}$, então γ é não-hiperbólica e

$$\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq \frac{2d}{l} + 2,$$

$$\text{onde } l = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{1+p}{p} < \frac{2\pi}{\tau} \frac{d}{c_1} \right\}.$$

Este teorema pode ser melhorado se tivermos informações sobre o fator de correção $\chi(\gamma)$ ou o grau de degenerescência $g(\gamma)$ de γ definidos em (4.4) e (4.2). Assim poderemos concluir sobre a interseção do círculo unitário diretamente com o espectro do mapa de Poincaré linearizado P .

Teorema 4.3.3. *Nas condições e notações do teorema acima, para todo $d > 0$ valem as seguintes implicações:*

(I) Suponha $\chi(\gamma) = -1$ ou $g(\gamma) > 2$.

(i) Se $\mu_L(\gamma) \leq d$ e $c_0 > d \frac{2\pi}{\tau}$, então γ é não-hiperbólica e

$$\#\sigma(P) \cap S^1 \geq \frac{2d}{l},$$

$$\text{onde } l = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{p+2}{p+1} < \frac{\tau}{2\pi} \frac{c_0}{d} \right\}.$$

(ii) Se $\mu_L(\gamma) \leq d$ e $c_0 > d \frac{2\pi}{\tau} \left(1 + \frac{k}{2}\right)$, onde $k \in \mathbb{N}$, então γ é não-hiperbólica e

$$\#\sigma(P) \cap S^1 \geq 2kd.$$

Em particular, γ é elíptico-parabólica se

$$\mu_L(\gamma) \leq n-1 \quad \text{e} \quad c_0 > \frac{3(n-1)}{2} \frac{2\pi}{\tau}$$

ou

$$\mu_L(\gamma) \leq 1 \quad \text{e} \quad c_0 > \frac{n+1}{2} \frac{2\pi}{\tau}.$$

(II) Suponha $\chi(\gamma) \neq -1$.

(iii) Se $\mu_L(\gamma) \geq d$ e $c_1 < d \frac{2\pi}{\tau}$, então γ é não-hiperbólica e

$$\#\sigma(P) \cap S^1 \geq \frac{2d}{l} + 2,$$

$$\text{onde } l = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{1+p}{p} < \frac{2\pi}{\tau} \frac{d}{c_1} \right\}.$$

Em particular, P possui pelo menos $2d + 2$ autovalores unitários contadas as multiplicidades algébricas se

$$\mu_L(\gamma) \geq d \quad \text{e} \quad c_1 < \frac{d}{2} \frac{2\pi}{\tau}.$$

Os teoremas acima nos fornecem um método para inferirmos sobre a quantidade de autovalores unitários do fluxo magnético linearizado a partir da diferença entre o índice μ_L e o índice médio μ_m de γ . Partimos das informações c_0 ou c_1 sobre o mínimo e máximo atingidos pela curvatura e a intensidade do campo magnético ao longo da trajetória para, junto com o período τ , obter estimativas para μ_m .

Por um lado, para $\mu_m > \mu_L$, tomamos uma cota superior $d > 0$ para μ_L e observamos os valores de c_0 e τ a fim de determinar o crescimento do índice médio μ_m . Quanto maiores forem c_0 e τ , maior poderá ser a diferença $\mu_m - \mu_L$. Observe que é portanto desejável que a trajetória não seja “rápida”, isto é, τ não seja pequeno. Além disso, melhoramos a estimativa da quantidade de autovalores unitários se, por exemplo, a trajetória γ possuir o fator de correção igual a -1 . Uma maneira disto ocorrer é se em algum plano simplético que contém a direção de γ o fluxo linearizado é da forma $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ com $c < 0$. Assim, para uma trajetória com este fator de correção e com um índice que não seja grande - digamos, não supere $n - 1$ -, basta que c_0 ultrapasse $(n - 1)\frac{2\pi}{\tau}$ para concluir que a dinâmica ao longo de γ é não-hiperbólica; teremos que γ é elíptico-parabólica se c_0 superar $\frac{3}{2}$ de $(n - 1)\frac{2\pi}{\tau}$.

Por outro lado, teremos conclusões análogas quando $\mu_m < \mu_L$. Neste caso tomamos uma cota inferior $d > 0$ para o índice e analisamos c_1 e τ . Estes valores determinam um máximo para o índice médio μ_m e portanto nos permite inferir sobre a diferença entre os índices. É portanto desejável que a trajetória não seja “lenta”, isto é, que o período τ não seja grande. A estimativa para o número de autovalores unitários é melhorada no caso particular em que o fator de correção é $\neq -1$. Neste caso, se, por exemplo, o índice μ_L for positivo, quanto menor for $c_1 > 0$ em comparação com $\mu_L \frac{2\pi}{\tau}$, maior é a diferença $\mu_L - \mu_m$ e assim menos hiperbólica deve ser a trajetória.

Demonstração dos teoremas 4.3.2 e 4.3.3. Os índices μ_L e μ_m de γ são os mesmos do caminho simplético $\phi \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ obtido a partir de $d_\theta G_t$ via uma trivialização de $\hat{\gamma}^*TM$. Ou seja, $\mu_L(\gamma) = \mu_L(\phi)$ e $\mu_m(\gamma) = \mu_m(\phi)$, onde $\phi \in \mathcal{P}_\tau(2n)$ é o caminho simplético dado em (4.7). Além disso, $d_\theta G_\tau$ e ϕ_τ têm os mesmos autovalores e com as mesmas multiplicidades e por (4.2) o fator de correção de ϕ é $\chi(\phi_\tau) = \chi(\gamma)$. Em relação ao caminho reduzido $\tilde{\gamma}$ definido em (4.3), temos um caminho $\hat{\phi} \in \mathcal{P}_\tau(2n - 2)$ dado em (4.8) tal que $\mu_L(\tilde{\gamma}) = \mu_L(\hat{\phi})$ e $\mu_m(\tilde{\gamma}) = \mu_m(\hat{\phi})$. Ademais, por (4.12) e (2.5.2), $\mu_m(\phi) = \mu_m(\hat{\phi})$ e

$$\mu_L(\hat{\phi}) = \begin{cases} \mu_L(\phi) + 1 & , \text{ se } g(\gamma) = 2 \text{ e } \chi(\gamma) \neq -1, \\ \mu_L(\phi) & , \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

e pelo corolário 4.1.4, $c_0 \frac{\tau}{2\pi} \leq \mu_m(\phi) = \mu_m(\hat{\phi}) \leq c_1 \frac{\tau}{2\pi}$.

Provemos (i) e (ii). Nestes itens temos

$$\mu_L(\phi) \leq d < c_0 \frac{\tau}{2\pi} \leq \mu_m(\phi),$$

logo pelo teorema 2.2.8 existe $z_0 \in S^1 \setminus \{1\}$ tal que

$$i_{z_0}(\phi) - i_1(\phi) \geq d \sup \left\{ l_1, \frac{1}{l_2} \right\},$$

onde $l_1 = \sup \left\{ p \geq 0 \text{ inteiro} : p < 2 \frac{\mu_m(\phi) - d}{d} \right\}$ e $l_2 = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{p+2}{p+1} < \frac{\mu_m(\phi)}{d} \right\}$.
Pelo teorema 2.3.1, vale

$$\#\sigma(\phi(\tau)) \cap S^1 \geq 2(i_{z_0}(\phi) - i_1(\phi)).$$

Provamos o item (i) observando que de $\frac{\mu_m(\phi)}{d} \geq \frac{c_0}{d} \frac{\tau}{2\pi}$ vem

$$l_2 = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{p+2}{p+1} < \frac{\mu_m(\phi)}{d} \right\} \leq \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{p+2}{p+1} < \frac{c_0}{d} \frac{\tau}{2\pi} \right\} = l$$

e portanto

$$\#\sigma(\phi(\tau)) \cap S^1 \geq 2(i_{z_0}(\phi) - i_1(\phi)) \geq 2\frac{d}{l}.$$

No item (ii), se tivermos $c_0 > d \frac{2\pi}{\tau} (1 + \frac{k}{2})$ com $k \in \mathbb{N}$ então $2\frac{\mu_m(\phi) - d}{d} > k$ e assim $l_1 \geq k$. Dessa forma,

$$\#\sigma(\phi(\tau)) \cap S^1 \geq 2(i_{z_0}(\phi) - i_1(\phi)) \geq 2kd.$$

Em ambos itens, se $\chi(\gamma) = -1$ ou $g(\gamma) > 2$, temos $\mu_L(\hat{\phi}) = \mu_L(\phi)$ e $\mu_m(\hat{\phi}) = \mu_m(\phi)$, logo podemos repetir todos os passos anteriores apenas substituindo ϕ por $\hat{\phi}$ que obteremos as mesmas cotas inferiores para $\#\sigma(\hat{\phi}(\tau)) \cap S^1 = \#\sigma(P) \cap S^1$. Como tais cotas são positivas, em particular temos que γ não pode ser hiperbólica.

Em (iii), $\mu_L(\hat{\phi}) \geq \mu_L(\phi) \geq d$ e $c_1 < d \frac{2\pi}{\tau}$, logo

$$\mu_m(\hat{\phi}) \leq c_1 \frac{\tau}{2\pi} < d \leq \mu_L(\hat{\phi}).$$

Pelo teorema 2.2.8 existe $z_0 \in S^1 \setminus \{1\}$ tal que

$$i_1(\hat{\phi}) - i_{z_0}(\hat{\phi}) \geq \frac{d}{l'},$$

onde $l' = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : p > \frac{\mu_m(\hat{\phi})}{d - \mu_m(\hat{\phi})} \right\} = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{1+p}{p} < \frac{d}{\mu_m(\hat{\phi})} \right\}$. Como $\frac{d}{\mu_m(\hat{\phi})} \geq \frac{2\pi}{\tau} \frac{d}{c_1}$, temos $l' \leq \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{1+p}{p} < \frac{2\pi}{\tau} \frac{d}{c_1} \right\} = l$ e portanto $i_1(\hat{\phi}) - i_{z_0}(\hat{\phi}) \geq \frac{d}{l}$. Agora aplicando o teorema 2.3.1 concluímos que

$$\#\sigma(\hat{\phi}(\tau)) \cap S^1 \geq 2(i_1(\hat{\phi}) - i_{z_0}(\hat{\phi})) + 4S_{\hat{\phi}(\tau)}^+(1) \geq 2\frac{d}{l}.$$

Em particular,

$$\#\sigma(\phi(\tau)) \cap S^1 = \sigma(\hat{\phi}(\tau)) \cap S^1 + 2 \geq 2\frac{d}{l} + 2.$$

Já que $\mu_L(\phi) \geq d$, $c_1 < d \frac{2\pi}{\tau}$ e $\mu_L(\phi) \leq c_1 \frac{\tau}{2\pi}$, podemos repetir os mesmos passos acima para o caminho ϕ ao invés de $\hat{\phi}$, obtendo

$$\#\sigma(\phi(\tau)) \cap S^1 \geq 2(i_1(\hat{\phi}) - i_{z_0}(\hat{\phi})) + 4S_{\phi(\tau)}^+(1) \geq 2\frac{d}{l} + 4S_{\phi(\tau)}^+(1).$$

Sob a condição $\chi(\gamma) \neq -1$, pela proposição 2.4.6.ii, o splitting number $S^+(1)$ de $\phi(\tau)$ é no mínimo 1. Portanto

$$\begin{aligned} \#\sigma(P) \cap S^1 &= \#\sigma(\phi(\tau)) \cap S^1 - 2 \\ &\geq 2\frac{d}{l} + 4S_{\phi(\tau)}^+(1) - 2 \\ &\geq 2\frac{d}{l} + 2. \end{aligned}$$

As demais afirmações do enunciadas no teorema 4.3.3 são apenas casos particulares.

Suponha $\chi(\gamma) = -1$ ou $g(\gamma) > 2$. Se $\mu_L(\gamma) \leq n-1$ e $c_0 > \frac{3}{2}(n-1)\frac{2\pi}{\tau}$, temos $d = n-1$ e $l = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{p+2}{p+1} < \frac{\tau}{2\pi} \frac{c_0}{d} \right\} = 1$, logo por (i)

$$\#\sigma(P) \cap S^1 \geq \frac{2(n-1)}{1} = 2(n-1)$$

e γ é elíptico-parabólica.

Se $\mu_L(\gamma) \leq 1$ e $c_0 > \frac{n+1}{2}\frac{2\pi}{\tau}$, temos $d = 1$ e $c_0 > d \frac{2\pi}{\tau} (1 + \frac{k}{2})$ para $k = n-1$. Pelo item (ii),

$$\#\sigma(P) \cap S^1 \geq 2(n-1)$$

e γ é elíptico-parabólica.

Suponha agora que $\chi(\gamma) \neq -1$. Se $\mu_L(\gamma) \geq d$ e $c_1 < \frac{d}{2} \frac{2\pi}{\tau}$ então pelo item (iii)

$$\#\sigma(P) \cap S^1 \geq 2d + 2$$

uma vez que $\inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{1+p}{p} < \frac{2\pi}{\tau} \frac{d}{c_1} \right\} = 1$.

□

Observação: Note que na demonstração do item (I) do teorema 4.3.3 utilizamos a condição sobre o fator de correção ou grau de degenerescência apenas para passar de uma cota superior do índice de γ para o índice do caminho reduzido $\tilde{\gamma}$. Assim, vale o mesmo resultado se substituirmos a condição $\chi(\gamma) = -1$ ou $g(\gamma) > 2$ por $\mu_L(\tilde{\gamma}) \leq d$.

Terminamos esta seção observando que os teoremas 1 e 2 da introdução estão contidos nos dois últimos resultados. De fato, se $\mu_L(\gamma) \leq d$ e $c_0 > d \frac{p+2}{p+1} \frac{2\pi}{\tau}$, então $p \geq \inf \left\{ q \in \mathbb{N} : \frac{q+2}{q+1} < \frac{\tau}{2\pi} \frac{c_0}{d} \right\}$ e pelo teorema 4.3.2.i, tem-se $\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq \frac{2d}{p}$. Analogamente, se conclui do teorema 4.3.3.i que se $\mu_L(\gamma) \leq d$, $c_0 > d \frac{p+2}{p+1} \frac{2\pi}{\tau}$ e $\chi(\gamma) = -1$ então $\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq \frac{2d}{p} + 2$.

4.4 O caso geodésico

Nesta seção particularizamos para o caso geodésico os resultados que obtivemos acima. Assim reobtemos um teorema de Ballmann, Thobergsson e Ziller sobre geodésicas em variedades de curvatura positiva (cf. [5]).

Sejam M uma variedade riemanniana completa e orientada, ∇ a conexão de Levi-Civita, R o tensor curvatura e $\gamma : [0, \tau] \rightarrow M$ uma geodésica τ -periódica. O *índice geodésico* $\text{ind}(\gamma)$ é definido como sendo o índice da forma simétrica

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (V, W) &\mapsto \int_0^\tau \langle \nabla V, \nabla W \rangle - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, W \rangle dt, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{V} = \{V \text{ campo ao longo de } \gamma \text{ suave por partes} : V(0) = V(\tau)\}$.

Uma geodésica nada mais é do que uma trajetória do fluxo magnético com força de Lorentz Y nula. Para tais trajetórias associamos índices que podem ser calculados a partir de (4.10). A próxima proposição, que é apenas uma aplicação do teorema 7.2.1 de [23], nos diz que os índices $\text{ind}(\gamma)$ e $\mu_L(\gamma)$ são iguais.

Proposição 4.4.1. *O índice geodésico $\text{ind}(\gamma)$ de uma geodésica fechada γ coincide com o índice de Long $\mu_L(\gamma)$ dado em (4.1).*

Demonstração. Conforme desenvolvemos na seção 1.2, fazendo $Y = 0$ e tomando os campos X_1, \dots, X_n ao longo γ paralelos, temos $\Gamma = 0$, o fluxo dado em (4.7) se resume a

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_t \circ \phi_t, \quad X_t = \begin{pmatrix} 0 & -R_t \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

e, conforme (4.1), $\mu_L(\gamma) = \mu_L(\phi)$.

O índice da forma \mathcal{I} definida acima é igual ao índice da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\mapsto \int_0^\tau \langle \dot{p}, \dot{q} \rangle - \langle R_t p, q \rangle dt, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{H} = \{q : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ suave por partes} : q(0) = q(\tau)\}$ e $R_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a curvatura como obtivemos no capítulo 1. Pelo teorema 7.2.1 de [23], $\text{ind}(\mathcal{K}) = \mu_L(\phi)$, ou seja, $\text{ind}(\gamma) = \text{ind}(\mathcal{I}) = \text{ind}(\mathcal{K}) = \mu_L(\phi)$. □

Teorema 4.4.2 (Teorema 3.3 de [5]). *Seja M uma variedade riemanniana. Se M for homeomorfa a S^n , então existe uma geodésica fechada com índice $\leq n - 1$.*

Seja $G_t : TM \rightarrow TM$ o fluxo geodésico. Se a curvatura seccional σ de M satisfizer $\delta \leq \sigma \leq 1$ e se γ for uma geodésica fechada de velocidade 1 e índice $\leq n - 1$, então

- (i) $\delta \geq \frac{1}{4} \Rightarrow c$ é não-hiperbólica.
- (ii) $\delta \geq \frac{9}{16} \Rightarrow c$ é elíptico-parabólica.
- (iii) $\delta \geq \left(\frac{l+2}{2(l+1)}\right)^2$, $l \geq 1 \Rightarrow$ O mapa de Poincaré linearizado P possui ao menos $2 \lceil \frac{n-1}{l} \rceil$ autovalores unitários contadas as multiplicidades algébricas².

²Como antes, $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro $\geq x$.

Demonstração. A existência de uma geodésica de índice $\leq n-1$ é uma consequência da teoria de Morse em vista de $\pi_{n-1}(\Lambda(S^n), \Lambda^0(S^n)) \neq 0$ ³.

Podemos supor que o período τ seja maior do que 2π . De fato, sob as condições $\frac{1}{4} \leq \delta \leq 1$, pela estimativa do raio de injetividade temos $\tau \geq 2\pi$. Se $\tau = 2\pi$, a curvatura seccional σ deve ser constante igual a 1 (cf. Teorema A de [32])⁴.

Pelo exemplo 2.4.9, $\chi(\gamma) = -1$. Na notação do teorema 4.3.2, temos $\delta = 1$, $k = 1$, $b_0 = 0$, $a_0 = \delta$ e $c_0 = 2(n-1)\sqrt{\delta}$.

Então, pelo teorema 4.3.3,

- (i) $\delta \geq \frac{1}{4} \Rightarrow c_0 \geq n-1 > \mu_L(\gamma) \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow \gamma$ é não-hiperbólica.
- (ii) $\delta \geq \frac{9}{16} \Rightarrow c_0 \geq (n-1)\frac{3}{2} > (n-1)\frac{3}{2} \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow \gamma$ é elíptico-parabólica.
- (iii) $\delta \geq \left(\frac{l+2}{2(l+1)}\right)^2 \Rightarrow \frac{\tau}{2\pi} \frac{c_0}{n-1} \geq \frac{\tau}{2\pi} \frac{l+2}{l+1} > \frac{l+2}{l+1} \Rightarrow \#\sigma(P) \cap S^1 \geq 2\frac{n-1}{l}$. Como $\#\sigma(P) \cap S^1 \in \mathbb{N}$, vale $\#\sigma(P) \cap S^1 \geq 2 \lceil \frac{n-1}{l} \rceil$.

□

4.5 Fluxo magnético exato em níveis altos de energia

Nesta seção fazemos uma aplicação simples do teorema 4.3.2.

Na discussão que fizemos na seção 4.4 vimos que a partir de uma condição pinçante sobre o campo magnético e a curvatura seccional podemos inferir sobre a dinâmica do fluxo magnético ao longo de uma trajetória fechada, desde que esta trajetória não tenha índice grande e nem período pequeno. Assim, por exemplo, se existir uma trajetória fechada γ de índice inferior a n , período superior a 2π e além disso admitir um fator de correção -1 então γ é não-hiperbólica se $c_0 \geq n-1$ ou mesmo elíptico-parabólica se $c_0 > \frac{3}{2}(n-1)$, onde $c_0 = (n-1)\sqrt{b_0^2 + 4a_0}$ e a_0 e b_0 são constante escolhidas de modo a satisfazer as limitações dadas por (4.15) sobre o campo magnético e a curvatura seccional ao longo de γ . Mostraremos nesta seção que quando o fluxo for exato e M for uma variedade completa orientada tal que $\pi_n(M) \neq 0$ (por exemplo, $M = S^n$) então, assim como no caso geodésico, podemos obter uma trajetória fechada de índice $< n$ e período $> 2\pi$ se o nível de energia for suficientemente elevado.

É um fato bem conhecido que fluxos magnéticos exatos sempre possuem trajetórias fechadas em níveis altos de energia ou, mais precisamente, acima do chamado valor crítico de Mañé $c(L)$ (cf., por exemplo, [13]). De fato, podemos estudar o caso exato como pontos críticos para uma lagrangiana que em tais níveis satisfaz a chamada condição de Palais-Smale e é limitada inferiormente. Assim, podemos utilizar de teoria de Morse para encontrar órbitas periódicas e ainda obter informações sobre seu índice. Por outro lado sabemos também que fluxos magnéticos exatos são cada vez mais próximos de fluxos geodésicos em níveis de energia cada vez maiores (cf. por exemplo a discussão feita em [16]). Assim como podemos obter uma cota

³Discutiremos este fato mais detidamente na próxima seção.

⁴Observe que a demonstração será análoga para $\tau \geq 2\pi$ se as desigualdades envolvendo δ no enunciado forem estritas.

inferior para o período no caso geodésico via estimativa do raio de injetividade, o mesmo ocorrerá para o caso magnético em níveis de energia elevados. Contudo, não podemos garantir que o fator de correção seja -1 como ocorre no caso geodésico, ainda que o nível de energia seja maior do que $c(L)$ (cf. exemplo 2.4.11). Este fato pode ser compensado se remanejarmos a condição pinçante. Seguindo estas ideias estabeleceremos a seguinte versão magnética do teorema 4.4.2.

Corolário 4.5.1 (Campos magnéticos exatos em níveis altos de energia). *Seja M uma variedade riemanniana completa e orientada tal que $\pi_n(M) \neq 0$ sujeita a um fluxo magnético exato G_t e cuja curvatura seccional σ satisfaz $\frac{1}{4} < \delta \leq \sigma \leq 1$. Então em todo nível de energia suficientemente elevado existe uma trajetória fechada γ tal que valem as seguintes implicações:*

- (i) *Se $n > 2$ e $\delta \geq \left(\frac{n}{2n-2}\right)^2$ então γ é não-hiperbólica.*
- (ii) *Se $\delta \geq 9/16$ então G em γ possui ao menos $2n - 2$ autovalores unitários.*
- (iii) *Se $\delta \geq \left(\frac{p+2}{2p+2}\right)^2$ então G em γ possui ao menos $2 \left\lceil \frac{n-1}{p} \right\rceil$ autovalores unitários.*

Neste enunciado o número de autovalores é contado levando em consideração a multiplicidade algébrica. As conclusões acima podem ser melhoradas se tivermos informação sobre o fator de correção:

Corolário 4.5.2. *Nas mesmas condições do resultado acima, se em níveis altos de energia as trajetórias fechadas tiverem fator de correção igual a -1 então para alguma trajetória fechada γ valem conclusões análogas ao teorema 4.4.2 sobre geodésicas:*

- (i) $\delta > \frac{1}{4} \Rightarrow \gamma$ é não-hiperbólica.
- (ii) $\delta \geq \frac{9}{16} \Rightarrow \gamma$ é elíptico-parabólica.
- (iii) $\delta \geq \left(\frac{p+2}{2p+2}\right)^2, p \geq 1 \Rightarrow G$ em γ possui pelo menos $2 \left\lceil \frac{n-1}{p} \right\rceil + 2$ autovalores unitários.

A demonstração destes resultados segue as mesmas linhas do resultado correspondente para geodésicas riemannianas provado acima. A maior parte do trabalho fica por conta do problema da existência de uma trajetória magnética fechada sobre a qual tenhamos informações a respeito de três de seus atributos: índice, período e fator de correção. Para resolver este ponto, passaremos a estudar trajetórias magnéticas através de uma abordagem variacional como soluções da equação de Euler-Lagrange. Em níveis de energia acima do chamado nível crítico de Mañé teremos uma correspondência entre trajetórias fechadas e pontos críticos da ação do Lagrangiano e a partir daí buscaremos informação sobre o índice. A medida que o nível de energia se torna maior, compararemos com caso o geodésico e obteremos informação sobre o período. Com isso estabelecemos o primeiro corolário. No segundo deixamos a informação sobre o fator de correção como uma hipótese.

Sejam M^n uma variedade Riemannian compacta sujeita ao campo magnético exato $\omega = -d\theta \in \Omega^2(M)$ e $G_t : TM \rightarrow TM$ o fluxo magnético associado. Considere o Lagrangiano

$$L : TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|_x^2 + \theta_x(v).$$

Temos que L é estritamente convexo e superlinear (lagrangiano Tonelli), ou seja, satisfaz as condições

- (i) $d_{vv}L(x, v) > 0$, $\forall (x, v) \in TM$,
- (ii) $\lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|_x} = +\infty$.

Assim, a equação de Euler-Lagrange em coordenadas locais

$$\frac{d}{dt} (\partial_v L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))) = \partial_x L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$$

é sempre satisfeita e define um fluxo em TM dado exatamente pelo fluxo magnético $G_t : TM \rightarrow TM$.

A partir da transformada de Legendre

$$\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M, \quad (x, v) \mapsto \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \right) \quad (4.20)$$

retomamos a abordagem hamiltoniana. De fato, sendo

$$\mathbb{E} : TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, v) \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \cdot v - L(x, v)$$

o funcional de energia associado ao lagrangiano L , a hamiltoniana $\bar{H} = \mathbb{E} \circ \mathcal{L}^{-1} : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ induz um fluxo hamiltoniano \bar{G}_t em T^*M com a estrutura simplética canônica. Assim, $G_t : TM \rightarrow TM$ e $\bar{G}_t : T^*M \rightarrow T^*M$ são conjugados via $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{L}} & T^*M \\ G_t \downarrow & & \downarrow \bar{G}_t \\ TM & \xrightarrow{\mathcal{L}} & T^*M \\ & \searrow \mathbb{E} & \swarrow \bar{H} \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

Seja $\Lambda(M)$ o completamento de Sobolev do conjunto $C^\infty(S^1, M)$ composto pelas curvas suaves 1-periódicas em M com respeito à $W^{1,2}$ -norma de Sobolev. $\Lambda(M)$ é uma variedade de Hilbert com a $W^{1,2}$ -métrica definida por

$$\langle\langle \zeta, \zeta' \rangle\rangle = \int_0^1 \langle \zeta, \zeta' \rangle + \langle \nabla \zeta, \nabla \zeta' \rangle dt,$$

onde ∇ é a conexão riemanniana em M . Para $k \in \mathbb{R}$, considere o funcional $\mathcal{A}_{L+k} : \mathbb{R}^+ \times \Lambda(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{A}_{L+k}(b, x) = \int_0^1 bL(x(t), \dot{x}(t)/b) + bk dt.$$

O par (b, x) é um ponto crítico de \mathcal{A}_{L+k} se e só se $\gamma(t) = x(t/b)$ é uma solução da equação de Euler-Lagrange de L com energia k (cf. [12], [13]), isto é, γ é uma trajetória magnética b -periódica no nível de energia k .

O valor crítico de Mañé de L é definido por

$$c(L) = \inf \{k \in \mathbb{R} : \inf \mathcal{A}_{L+k} \geq 0\}.$$

Assim, se $k > c(L)$, o funcional \mathcal{A}_{L+k} é limitado inferiormente.

O índice de Morse $m^-(b, x)$ de um ponto crítico de \mathcal{A}_{L+k} é a dimensão máxima de um subespaço $W \subset W^{1,2}(S^1, x^*TM) \times \mathbb{R}$ no qual $d_{(b,x)}^2 \mathcal{A}_{L+k}(\cdot, \cdot)$ é negativo (cf. [25], [26]). Sendo L um lagrangiano Tonelli, $m^-(b, x)$ é sempre finito.

Proposição 4.5.3. *Se $\pi_n(M) \neq 0$ e $k > c(L)$ então \mathcal{A}_{L+k} possui um ponto crítico (b, x) de índice $m^-(b, x) < n$.*

Provaremos este fato seguindo as mesmas ideias utilizadas em [6] para provar a existência de geodésica fechada de índice $< n$. No caso geodésico basta aplicar a teoria Morse como em [27] seguindo as seguintes etapas:

- (i) (§16 de [27]) No espaço $\Lambda(p, q)$ de curvas suaves por partes em M conectando dois pontos p a q consideramos o subconjunto B composto por geodésicas quebradas que têm energia cinética $E < c$ e o equipamos com uma estrutura de variedade diferenciável. O conjunto B aproxima $\Lambda(p, q)$ no seguinte sentido: Todo ponto crítico de $E|_B$ é um ponto crítico de E (ou seja, é uma geodésica) e tem o mesmo índice de Morse. Ademais, B é um retrato de deformação de $\Lambda(p, q)$.
- (ii) (§1 de [6]) Existe um isomorfismo entre $\pi_n(M)$ e o grupo de homotopia relativo $\pi_{n-1}(\Lambda(M), \Lambda^0(M))$ onde $\Lambda(M)$ é o espaço das curvas fechadas e $\Lambda^0(M)$ é o espaço das curvas constantes.
- (iii) (Lema 22.5 de [27]): Seja $f : N \rightarrow [0, +\infty)$ uma função suave numa variedade N tal que $N^c = f^{-1}[0, c]$ é compacto para todo $c \in [0, +\infty)$. Se todo ponto crítico de f em $N \setminus N^0$ tiver índice $\geq \lambda$ então $\pi_\lambda(N, N^0) = 0$. Em particular, se $\pi_n(N) \neq 0$ então deve existir um ponto crítico de $f|_N$ de índice $< n$.

Para a caso magnético vamos fazer o mesmo substituindo a energia E pelo funcional $\mathcal{A}_{L+k} : \mathbb{R}^+ \times \Lambda(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definido acima, em vista do nível de energia k estar acima do nível crítico de Mañé.

Demonstração. Analisemos o primeiro passo descrito acima. Devemos mostrar que $\Lambda(M)$ pode ser “aproximado” por uma variedade diferenciável B no mesmo sentido de (i). Para isso, adaptaremos para o contexto lagrangiano as demonstrações dos lemas 16.1 e 16.2 de [27] através dos resultados estabelecidos em [10] e [12] para lagrangianos em níveis de energia k acima do valor crítico de Mañé $c(L)$. Por simplicidade, denotaremos \mathcal{A}_{L+k} apenas por \mathcal{A} .

Sendo G_t o fluxo magnético, definimos a aplicação exponencial de G_t

$$\exp_q : T_q M \rightarrow M$$

da seguinte forma: Se $v \in T_x M \setminus \{0\}$, então $\exp_q(v) = \pi(G_t(q, v/|v|))$ onde $t = |v|$ e $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica; $\exp_q(0) = q$. Esta é uma aplicação suave e $d\exp_q(0) = I$ (cf. [10]). O teorema D de [12], nos diz que se $k > c(L)$ e $q_0 \in M$

não tem pontos conjugados⁵ então para todo $q \in M$, existe uma única trajetória magnética de energia k que conecta q_0 a q . Assim, tomando uma bola fechada S em $T_{q_0}M$ centrada na origem e de raio suficientemente pequeno, todo ponto de $\exp_{q_0}(S)$ é conectado a q_0 por uma única geodésica magnética. Sendo $\exp_{q_0}(S)$ compacto e \exp_q um difeomorfismo local (cf. corolário 1.18 de [10]), existe $\epsilon > 0$ tal que se $p, q \in \exp_{q_0}(S)$ distam entre si menos que ϵ então há uma única geodésica magnética em $\exp_{q_0}(S)$ conectando p a q .

Como feito em [27], o espaço $\Lambda(p, q)$ das curvas suaves por partes que ligam dois pontos p a q de M pode ser “aproximado” pelo espaço de geodésicas magnéticas quebradas. Escolha uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = 1$ de $[0, 1]$ e um número $c \geq 0$ tal que $\mathcal{A}^{-1}(-\infty, c] \neq \emptyset$ e considere o conjunto $B \subset \mathbb{R}^+ \times \Lambda(p, q)$ das “curvas” (b, x) tais que $\mathcal{A}(b, x) \leq c$ e para $\gamma(t) = x(t/b)$, $\gamma|_{[bt_{i-1}, bt_i]}$ é solução da equação de Euler-Lagrange para a lagrangiana L , isto é, $\gamma|_{[bt_{i-1}, bt_i]}$ é uma trajetória magnética. Para uma partição suficientemente fina, $x|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é minimizante (isto é, minimiza a ação \mathcal{A} em relação às curvas que conectam suas extremidades), não admite pontos conjugados (cf. corolário 4.2 de [10]) e é única e suavemente determinada pelos seus extremos. Assim, os elementos (b, x) de B podem ser vistos como geodésicas magnéticas quebradas e a correspondência

$$(b, x) \in B \mapsto (\gamma(bt_1), \dots, \gamma(bt_{l-1})) \in M \times \dots \times M$$

define um homeomorfismo entre B e um certo aberto de $M \times \dots \times M$, o que induz uma estrutura de variedade diferenciável em B . Ademais, repetindo os passos de [27], vê-se que B é um retrato de deformação de $\Lambda(p, q)$.

Iremos agora verificar que se (b, x) for um ponto crítico de $\mathcal{A}|_B$ então será um ponto crítico de $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^+ \times \Lambda(p, q)}$. A fórmula da primeira variação de $\mathcal{A} : \mathbb{R}^+ \times \Lambda(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, a expressão de sua diferencial, é dada como segue (cf. lema 4 de [12]): Sejam $(b_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Lambda(p, q)$, $s \mapsto (b_s, x_s)$ uma variação suave partindo de (b_0, x_0) , $(\alpha, \xi(t)) = (\frac{\partial b_s}{\partial s}|_{s=0}, \frac{\partial x_s}{\partial s}|_{s=0}(t))$ e $g(s) = \mathcal{A}(b_s, x_s)$. Então

$$d_{(b,x)}\mathcal{A}(\alpha, \xi) = \alpha \int_0^1 k - \mathbb{E}(x, \dot{x}/b)dt + \int_0^1 bL_x(x, \dot{x}/b)\xi + L_v(x, \dot{x}/b)\dot{\xi}dt.$$

Desta expressão e da definição de B segue que se (b, x) for um ponto crítico de $\mathcal{A}|_B$ então (b, x) é um ponto crítico de $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^+ \times \Lambda(p, q)}$. Em particular, $\gamma(t) = x(t/b)$ é uma geodésica magnética, ou seja, é uma trajetória que não é quebrada. Falta apenas verificar que seu índice é o mesmo.

O espaço tangente $T_x\Lambda(p, q)$ para um ponto crítico (b, x) é composto pelos campos $\xi \in W^{1,2}([0, 1], x^*TM)$ tais que $\xi(0) = \xi(1) = 0$. Podemos decompor $T_x\Lambda(p, q)$ nos subespaços \mathcal{V}^+ dos campos V que se anulam em cada $t \in \{t_1, \dots, t_{l-1}\}$ e \mathcal{V}^- dado pelos campos ξ que são de Jacobi magnético em cada uma das restrições aos subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$. Desta forma, com respeito à hessiana de \mathcal{A} , \mathcal{V}^+ é positiva e \mathcal{V}^+ e \mathcal{V}^- são ortogonais. Isso decorre da fórmula da segunda variação de \mathcal{A} que na notação acima é expressa por (cf. lema 7 de [12]) ou mais geralmente a expressão

⁵Dois pontos $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in TM$ são ditos conjugados se $(x_2, v_2) = G_t(x_1, v_1)$ para algum $t \neq 0$ e $dG_t V(x_1, v_1)$ encontra $V(x_2, v_2)$ não trivialmente, onde V denota a fibra vertical $\ker d\pi$.

(5) de [10])

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial^2 x}(\xi, \xi) = \int_0^b \{\eta L_{xx}(\gamma, \dot{\gamma})\eta + \eta L_{xv}(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\eta} + \dot{\eta} L_{vx}(\gamma, \dot{\gamma})\eta + \dot{\eta} L_{vv}(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\eta}\} dt,$$

onde $\eta(t) = \xi(t/b)$ e $\gamma(t) = x(t/b)$. Podemos identificar o espaço tangente $T_{(b,x)}B$ num ponto crítico (b, x) com $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{V}^-$. Segue daí que o índice de Morse $m^-(b, x)$ de $\mathcal{A}|_{\mathbb{R}^+ \times \Lambda(p,q)}$ e $\mathcal{A}|_B$ são os mesmos, o que conclui a etapa (i).

Na etapa (ii), como no caso geodésico obtemos um isomorfismo $\pi_n(M) \simeq \pi_{n-1}(\Lambda(M), \Lambda^0(M))$ (cf. [6]). Sendo \mathbb{R}^+ contrátil, teremos $\pi_{n-1}(\Lambda(M), \Lambda^0(M)) \simeq \pi_{n-1}(\mathbb{R}^+ \times \Lambda(M), \mathbb{R}^+ \times \Lambda^0(M)) \simeq \pi_{n-1}(B, B^0)$, pois B pode ser tomado um retrato de deformação do espaço de curvas fechadas.

Sob a hipótese $\pi_n(M) \neq 0$, basta aplicar o resultado enunciado em (iii) para a restrição $\mathcal{A}|_B$ para concluir a existência de uma trajetória magnética fechada de índice $\leq n - 1$. \square

Considere agora $\Lambda_b(M)$ o completamento de Sobolev com respeito à $W^{1,2}$ -norma de $C^\infty(S_b^1, M)$ do conjunto das curvas suaves b -periódicas. Evidentemente, $\Lambda_1(M) = \Lambda(M)$. Considere também o funcional $A_{L+k} : \Lambda_b(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$A_{L+k}(\gamma) = \int_0^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + k dt$$

e defina o índice de Morse $m^-(\gamma)$ de um ponto crítico γ de modo análogo ao feito para o funcional \mathcal{A}_{L+k} . Para todo $(b, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Lambda(M)$ temos $\mathcal{A}_{L+k}(b, x) = A_{L+k}(\gamma)$ onde $\gamma(t) = x(t/b)$. Assim, vale a desigualdade $m^-(\gamma) \leq m^-(b, x)$ para índices de pontos críticos.

Como vimos no início da seção, se γ é uma trajetória do fluxo magnético $G_t : TM \rightarrow TM$, via a transformada de Legendre (4.20) γ corresponde a uma trajetória Γ em T^*M do fluxo hamiltoniano $\bar{G}_t : T^*M \rightarrow T^*M$. À trajetória Γ podemos associar o índice de Long $\mu_L(\Gamma)$ como feito em (4.1) como o índice μ_L de caminhos obtidos pela diferencial do fluxo \bar{G}_t ao longo de Γ via uma trivialização simplética de $\Gamma^*(T^*M)$ que leve o subfibrado vertical $\ker d_{\Gamma_t}\pi \subset T\Gamma^*(T^*M)$ em um subespaço lagrangiano fixado de \mathbb{R}^{2n} , onde $\pi : T^*M \rightarrow M$ é a projeção canônica. Pelo teorema 2.3.5⁶ de [25], este índice de Γ e o índice de Morse de γ coincidem:

$$\mu_L(\Gamma) = m^-(\gamma).$$

Uma vez que tenhamos definido o índice de Long para a trajetória γ em TM e os fluxos G_t e \bar{G}_t são conjugados pela transformada de Legendre, teremos

$$\mu_L(\gamma) = \mu_L(\Gamma) = m^-(\gamma).$$

Dessa forma, se (b, x) é ponto crítico de \mathcal{A}_{L+k} de índice $m^-(b, x) < n$ dado pela

⁶Em [25] o índice de Maslov de caminhos degenerados é definido na expressão (2.11) pelo infimo dos índices de caminhos não-degenerados suficientemente próximos. Usando o teorema 3.3.1 e a equação (2.1) deste trabalho, verifica-se que esta definição de [25] coincide com o índice de Long apresentado aqui.

proposição 4.5.3, para $\gamma(t) = x(t/b)$ teremos

$$\mu_L(\gamma) = m^-(\gamma) \leq m^-(b, x) < n.$$

Ou seja, em um nível de energia $k > c(L)$ para uma variedade completa M tal que $\pi_{n-1}(M) \neq 0$, sempre existe uma trajetória γ do fluxo magnético exato em M com índice $\mu_L(\gamma) < n$.

Munido deste fato, provamos os corolários enunciados no início desta seção.

Demonstração dos corolários 4.5.1 e 4.5.2. Pelo o que vimos, em todo nível de energia superior ao nível crítico de Mañé $c(L)$, obtemos uma trajetória magnética γ segundo a força de Lorentz Y com índice $\leq n - 1$. Sendo $k = \|\dot{\gamma}\|$ e η_k o caminho em M dado por $\eta_k(t) = \gamma(\frac{t}{k})$, verifica-se facilmente que η_k tem velocidade $\|\dot{\eta}_k\| = 1$ e é uma trajetória magnética fechada segundo a força de Lorentz $\frac{1}{k}Y$ cujo índice e dinâmica são os mesmos de γ , isto é, $\mu_L(\eta_k) = \mu_L(\gamma)$ e $\sigma(\eta_k(\tau_k)) \cap S^1 = \sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1$ com as mesmas multiplicidades. Vemos assim que estudar trajetórias em níveis de energia cada vez maiores é equivalente a examinar trajetórias no fibrado tangente unitário de M e progressivamente diminuir a força de Lorentz Y . Dessa forma consideraremos um parâmetro $\lambda \geq 0$ e γ uma trajetória magnética fechada com respeito à força de Lorentz λY que tenha velocidade $\|\dot{\gamma}\| = 1$, período $\tau > 0$ e índice $\mu_L(\gamma) \leq n - 1$ e examinaremos a interseção do espectro de γ com S^1 para $\lambda \rightarrow 0$.

Se $\lambda = 0$, a trajetória se trata de uma geodésica γ_0 de período τ_0 . Sob a condição $1/4 \leq \sigma \leq 1$ para a curvatura seccional, a estimativa do raio de injetividade implica em $\tau_0 \geq 2\pi$ e pelo teorema A de [32] vale a igualdade se e só se $\sigma = 1$. Para $\lambda \rightarrow 0$, o período τ de γ tende a $\tau_0 \geq 2\pi$.

No que segue, usaremos a notação do teorema 4.3.2. Uma cota inferior c_0 para γ segundo a força de Lorentz λY pode ser obtida da seguinte forma: Seja $h_0 \in \mathbb{R}$ uma constante tal que para v' variando em $T_{\gamma(t)}M$ com $v' \perp \dot{\gamma}(t)$, $t \in [0, \tau]$, tenhamos

$$h_0 \|v'\|^2 \leq \langle (\nabla_{v'} Y)v', \dot{\gamma} \rangle.$$

Então

$$(\delta + \lambda h_0) \|v'\|^2 \leq \sigma(\dot{\gamma}, v') \|v'\|^2 + \langle (\nabla_{v'} Y)v', \dot{\gamma} \rangle$$

e podemos tomar $c_0 \geq 2(n-1)\sqrt{\delta + \lambda h_0}$ e $d = n - 1$.

Quando $\lambda \rightarrow 0$ temos $\tau \rightarrow \tau_0 \geq 2\pi$ e $c_0 \rightarrow 2(n-1)\sqrt{\delta}$, logo $\frac{\tau}{2\pi} \frac{c_0}{n-1} \rightarrow 2\sqrt{\delta} \frac{\tau_0}{2\pi} > 1$, pois $\delta > 1/4$. Assim, o item (i) deste teorema nos diz que para $\lambda \geq 0$ pequeno, temos

$$\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq 2 \frac{n-1}{l},$$

onde $l = \inf \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{p+2}{p+1} < \frac{\tau}{2\pi} \frac{c_0}{n-1} \right\}$.

Suponha que $\tau_0 > 2\pi$. Então para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno podemos

admitir $\frac{\tau - c_0}{2\pi n-1} > 2\sqrt{\delta}$ e daí $l \leq \inf\{p \in \mathbb{N} : \frac{p+2}{p+1} \leq 2\sqrt{\delta}\}$. Dessa forma,

$$\delta \geq \left(\frac{p+2}{2p+2}\right)^2 \Rightarrow \#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq 2 \frac{n-1}{p}. \quad (4.21)$$

Se $\tau_0 = 2\pi$ então como foi mencionado acima a curvatura seccional deve ser $\delta = 1$. Neste caso $\frac{\tau - c_0}{2\pi n-1} \rightarrow 2$ quando $\lambda \rightarrow 0$ e portanto $l = 1$ e

$$\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq 2(n-1).$$

Em todo caso, a implicação em (4.21) é verdadeira.

Para que tenhamos o caso não-hiperbólico precisamos que $\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 > 2$, o que ocorre fazendo $p \leq n-2$, ou seja, $\delta \geq \left(\frac{n}{2n-2}\right)^2$ se $n > 2$. A melhor estimativa que (4.21) nos oferece se dá quando $p = 1$ e para isto basta ter $\delta \geq \frac{9}{16}$. Neste caso, $\#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq 2(n-1)$.

Observe que a partir da condição adicional $\chi(\gamma) = -1$ sobre o fator de correção chegaremos à conclusão

$$\delta \geq \left(\frac{p+2}{2p+2}\right)^2 \Rightarrow \#\sigma(\gamma(\tau)) \cap S^1 \geq 2 \frac{n-1}{p} + 2.$$

Sendo assim, γ é elíptico-parabólica se $\delta \geq \frac{9}{16}$. Sob a condição menos geral $\delta > 1/4$ o caso não-hiperbólico deve valer pois como vimos acima $\delta > 1/4$ implica em $\frac{\tau - c_0}{2\pi n-1} > 1$ e em particular $c_0 > \mu_L(\gamma) \frac{2\pi}{\tau}$. O resultado segue do teorema 4.3.3. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Adachi, T., *Kähler magnetic flows on a manifold of constant holomorphic sectional curvature*, Tokyo Journal of Mathematics 18 (1995), 473-483.
- [2] Anosov, D., Sinai, Y., *Some smooth ergodic systems*, Russian Mathematical Surveys 22 (1967), no. 5, 103-167.
- [3] Arnold, V.I., *Sturm theorems and symplectic geometry*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 19 (1985), 110.
- [4] Burns, K., Paternain, G. P., *Anosov magnetic flows, critical values and topological entropy*, Nonlinearity 15 (2002), no. 2, 281-314.
- [5] Ballmann, W., Thorbergsson, G., Ziller, W., *Closed geodesics on positively curved manifolds*. Ann. of Math. 116(1982), 213-247.
- [6] Ballmann, W., Thorbergsson, G., Ziller, W., *Some existence theorems for closed geodesics*. Comment. Math. Helvetici 58 (1983), 416-432.
- [7] Bott, R., *On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory*. Comm. pure Appl. Math. 9 (1956), 171-206.
- [8] Cappell, S. E., Lee, R., Miller, E. Y., *On the Maslov index*, Comm. Pure Appl. Math., 47(1994), 121-186.
- [9] Caponio, E., Masiello, A., Piccione, P., *Maslov index and Morse theory for the relativistic Lorentz force equation*. Manus. Math. 113, 471-506 (2004).
- [10] Contreras, G., Iturriaga, R., *Convex Hamiltonians without conjugate points*, Ergod. Th. and Dynam. Syst. 19 (1999), 901-952.
- [11] Contreras, G., Iturriaga R., Paternain G. P., M. Paternain, *Lagrangian graphs, minimizing measures and Mañé's critical values*, Geom. Funct. Anal. 8 (1998), no. 5, 788-809.
- [12] Contreras, G., Iturriaga R., Paternain G. P., M. Paternain, *The Palais-Smale condition and Mañé's critical values*, Ann. Henri Poincaré 1 (2000), no. 4, 655-684.
- [13] Contreras, G., Macarini, L. , Paternain, G., *Periodic orbits for exact magnetic flows on surfaces*, IMRN, 2005, no. 8, 362-387.
- [14] Conley, C., Zehnder, E., *Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations*. Comm. Pure Appl. Math. 37.(1984). 207-253.
- [15] Ekeland, I., *Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics*. Springer. Berlin. (1990).

- [16] Ginzburg, V.L., *A charge in a magnetic field: Arnold's problems 1981-9, 1982-24, 1984-4, 1994-14, 1996-17, and 1996-18*, in *Arnold's problems*, Ed.: V.I. Arnold, Springer-Verlag and Phasis, 2004; pp. 395401, 557558.
- [17] Ginzburg V. L., *On closed trajectories of a charge in a magnetic field. An application of symplectic geometry*, *Contact and Symplectic Geometry*, Publ. Newton Inst., vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, pp. 131-148.
- [18] Ginzburg, V., Gürel, B., *Periodic orbits of twisted geodesic flows and the Weinstein-Moser theorem*, *Comment. Math. Helv.*, 84 (2009), 865907.
- [19] Gutt, J., *The Conley-Zehnder index for a path of symplectic matrices*, 2012, arXiv:1201.3728v2.
- [20] Hofer, H., Zehnder, E., *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhäuser Verlag, 1994.
- [21] Long, Y., *Bott formula of the Maslov-type index theory*, *Pacific J. of Math.*, 187(1999), 113-149.
- [22] Long, Y., Zhu, C. *Maslov-type index theory for symplectic paths and spectral flow (II)*. *Chinese Ann. of Math.* 21B:1 (2000). 89-108.
- [23] Long, Y., *Index Theory for Symplectic Paths with Applications*, *Progress in Math.* 207, Birkhäuser. Basel. 2002.
- [24] Long, Y., Zehnder E., *Morse theory for forced oscillations of asymptotically linear Hamiltonian systems*. In *Stoc. Proc. Phys. and Geom.*, S. Albeverio et al. ed. World Sci. (1990). 528-563.
- [25] Mazzucchelli, M., *Critical point theory for Lagrangian systems*, *Progress in Mathematics*, vol. 293, Birkhäuser Verlag, 2012.
- [26] Merry, W. J., Paternain, G. P., *Index computations in Rabinowitz Floer Homology*, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 10 (2011), No. 1, 88-111.
- [27] Milnor, J., *Morse Theory*, *Ann. of Math. Stud.*, vol. 51, Princeton University Press, 1963.
- [28] Piccione, P., Tausk, D., *A student's Guide to Symplectic Spaces, Grassmannians and Maslov Index*. *Publicações Matemáticas do IMPA*, Rio de Janeiro, 2008.
- [29] Robbin, J., Salamon, D., *Maslov index theory for paths*, *Topology*, 32(1993), 827-844.
- [30] Robbin, J., Salamon, D., *The spectral flow and the Maslov index*, *Bull. London Math. Soc.*, 27(1995),1-33.
- [31] Salamon, D. A., *Lectures on Floer homology*, in *Symplectic Geometry and Topology*, Eds: Y. Eliashberg and L. Traynor, IAS/Park City Mathematics series, 7, 1999, pp. 143-230.
- [32] Tsukamoto, Y., *Closed geodesics on certain Riemannian manifolds of positive curvature*, *Tohoku Math. J.* 18 (1966), 138-143.

- [33] Viterbo, C., *Equivariant Morse theory for starshaped Hamiltonian systems*.
Trans. Amer. Math. Soc. 311 (1989) 621-655.