

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**FORMALISMO TERMODINÂMICO E ESTABILIDADE ESTATÍSTICA
NO DESDOBRAMENTO DE TANGÊNCIA HOMOCLÍNICA**

Eduardo Barbosa Pinheiro



UFRJ

**FORMALISMO TERMODINÂMICO E ESTABILIDADE ESTATÍSTICA
NO DESDOBRAMENTO DE TANGÊNCIA HOMOCLÍNICA**

Eduardo Barbosa Pinheiro

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Samuel Anton Senti

Rio de Janeiro

Janeiro - 2013

Pinheiro, Eduardo Barbosa.

Formalismo termodinâmico e estabilidade estatística no desdobramento de tangência homoclínica/ Eduardo Barbosa Pinheiro. – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2013.

v, 100f.: il.; 29,7cm

Orientador: Samuel Anton Senti.

Tese (doutorado) – UFRJ/ Instituto de Matemática/ Programa de Pós-graduação em Matemática, 2013

Referências Bibliográficas: f. 93-95.

1. Introdução. 2. Noções preliminares. 3. Desdobramento da tangência homoclínica. 4. Propriedades de f_ε para $\varepsilon \in \partial I_n$. 5. Estabilidade estatística. I. Senti, Samuel Anton. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática. III. Título.

FORMALISMO TERMODINÂMICO E ESTABILIDADE ESTATÍSTICA NO
DESDOBRAMENTO DE TANGÊNCIA HOMOCLÍNICA

Eduardo Barbosa Pinheiro

Orientador: Samuel Anton Senti

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Samuel Anton Senti
Doutor - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. André Salles de Carvalho
Doutor - Universidade de São Paulo

Prof^a. Isabel Lugão Rios
Doutora - Universidade Federal Fluminense

Prof. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza
Doutor - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof^a. Katrin Grit Gelfert
Doutora - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro
Janeiro - 2013

Resumo

Nesse trabalho fazemos o estudo do desdobramento de uma tangência homoclínica acumulada por pontos periódicos contida na ferradura com três faixas que foi introduzida por [Ki96] e estudada por [Ri01]. Mais precisamente, iremos mostrar que depois de desdobrar a tangência, não apenas temos hiperbolicidade frequente (existência de intervalos abertos de parâmetros onde há hiperbolicidade e que se acumulam em zero, c.f. [Ri01]), como também outros resultados obtidos no caso da tangência continuam valendo para os difeomorfismos no bordo desses intervalos de parâmetros; com certa frequência (arbitrariamente próximo da primeira bifurcação, há parâmetros exibindo tangências - homoclínicas e heteroclínicas - nos quais) obtemos as seguintes propriedades: existência de variedades estáveis e instáveis; toda medida invariante tem expoente de Lyapunov não-nulo; estados de equilíbrio únicos para potenciais Hölder-contínuos e estado de equilíbrio para $-t \log J^u$, $t \geq 0$; e estabilidade estatística.

Palavras-chave: Hiperbolicidade não-uniforme, tangência homoclínica, estados de equilíbrio, estabilidade estatística.

Abstract

In this work we study the unfolding of a homoclinic tangency accumulated by periodic points contained in horseshoe with three bands that was introduced by [Ki96] and studied by [Ri01]. More precisely, we show that after unfolding the tangency not only do we have frequent hyperbolicity (existence of open intervals of parameters where there hyperbolic that goes to zero, as [Ri01]) but other results in the case of tangency remain valid for diffeomorphisms on the border of these intervals; frequently (arbitrarily close to the first bifurcation, there are parameters showing tangencies - homoclinic and heteroclinic - at which) we get the following properties: existence of stable and unstable manifolds; every invariant measure has non zero Lyapunov exponent; unique equilibrium measures for Hölder-continuous potential and existence of equilibrium state for $-t \log J^u$, $t \geq 0$; and statistical stability.

Keywords: Non-uniform hyperbolicity, homoclinic tangency, equilibrium states, statistical stability.

Agradecimentos

A Deus, por toda força, luz e sabedoria. Obrigado por todos os espíritos de luz que colocastes em meu caminho!

A minha amiga, companheira e esposa Lilia Candella de Oliveira Pinheiro, por todo amor, incentivo, apoio e carinho. Sem você não conseguiria chegar tão longe.

Aos meus pais, minha família e meus amigos, pelo amor, compreensão e presença. Com o apoio de vocês consegui vencer muitos obstáculos.

Ao meu orientador Samuel Anton Senti, pela compreensão, compromisso, atenção e zelo.

À professora Isabel Lugão Rios, pelas aulas, trocas de idéias e ajuda constante, que enriqueceram ainda mais o meu trabalho.

A minha amiga e eterna professora Ana Maria Martensen Roland Kaleff, pelos conselhos, companheirismo e confiança. Obrigado por sempre acreditar em mim.

À CAPES e ao CNPq, pelas bolsas de estudo que me foram concedidas, indispensáveis para que eu pudesse viver esse momento de aprendizado e realizar este trabalho.

Conteúdo

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 2 |
| 1 Noções preliminares | 6 |
| 1.1 Definições e conceitos básicos | 6 |
| 1.2 Elementos de teoria ergódica | 9 |
| 1.3 Shifts e subshifts de tipo finito | 12 |
| 1.4 Pressão topológica e Estados de equilíbrio | 14 |
| 2 Desdobramento da tangência homoclínica | 16 |
| 2.1 A aplicação ferradura f | 16 |
| 2.1.1 Propriedades de f | 18 |
| 2.2 Perturbação de f | 21 |
| 2.3 A família de perturbações para $\varepsilon < 0$ | 23 |
| 2.4 O caso $\varepsilon > 0$ | 26 |
| 2.4.1 Intervalos de hiperbolicidade | 30 |
| 2.4.2 Estados de equilíbrio para $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in I_n}$ | 37 |
| 3 Propriedades de f_ε para $\varepsilon \in \partial I_n$ | 41 |
| 3.1 Campos de cones hiperbólicos | 42 |
| 3.2 Expoentes de Lyapunov não-nulos | 48 |
| 3.3 Cartas locais e aplicação induzida | 56 |
| 3.3.1 Bolas poligonais | 57 |
| 3.3.2 Propriedades de F e cartas k -ergódicas | 60 |
| 3.4 Variedades estáveis e instáveis locais | 63 |
| 3.5 Semiconjugação e estados de equilíbrio | 67 |
| 3.6 O potencial $-t \log J_\varepsilon^u$ | 72 |
| 4 Estabilidade estatística | 80 |
| 4.1 Teorema Principal | 80 |
| 4.2 Os Teoremas G , H , I e J | 90 |
| Bibliografia | 93 |

Introdução

O tema que se propõe neste estudo “formalismo termodinâmico e estabilidade estatística no desdobramento de tangência homoclínica”, mostra-se relevante na atualidade, tendo em vista que é bem conhecido que os desdobramentos de órbitas homoclínicas não-transversais de difeomorfismos podem originar sistemas incrivelmente ricos em comportamentos complexos. Um programa foi proposto por Palis [PT93], que visa compreender todas as complexidades dinâmicas além da hiperbolicidade uniforme através do estudo de bifurcações homoclínicas.

Este programa tem origem no trabalho de Newhouse e Palis [NP76], sobre a frequência de conjuntos de bifurcação no desdobramento de tangências homoclínicas. Nesse artigo, difeomorfismos antes da primeira bifurcação são Morse-Smale. Palis e Takens [PT85, PT93], inspirados pelos trabalhos de Newhouse, estudaram a prevalência de hiperbolicidade uniforme em arcos de difeomorfismos para os quais o conjunto não-errante do difeomorfismo na bifurcação é a união de um conjunto básico não-trivial do tipo sela e uma órbita de tangência. A frequência de não-hiperbolicidade foi estudada por Palis e Yoccoz [PY94, PY09].

Teoremas que mostram a abundância de hiperbolicidade não-uniforme, ou de atratores caóticos, foram obtidos por Jakobson [Ja81] para transformações em dimensão um com pontos críticos e por Benedicks e Carleson [BC91] para a aplicação de Hénon. Mora e Viana [MV93], Díaz, Rocha e Viana [DRV96] foram além e provaram a existência de atratores caóticos em bifurcações globais bastante gerais de difeomorfismos. Veja Wang e Young [WY01] para propriedades mais avançadas destes atratores. Para outros desenvolvimentos subseqüentes na teoria de dinâmicas não uniformemente hiperbólicas para aplicações tipo-Hénon, veja [BV01, BV06, BY93, BY00, Vi93, WY08].

Nesse trabalho fazemos o estudo da família $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})}$ de desdobramento de uma tangência homoclínica acumulada por pontos periódicos contida na ferradura com três faixas f_0 que foi introduzida em [Ki96] e estudada em [Ri01].

Rios [Ri01] demonstrou que a família $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})}$ é formada por difeomorfismos hiperbólicos quando $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$ e, para os parâmetros $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, mostrou que frequentemente há tanto hiperbolicidade uniforme como também a presença de tangência.

Também em [Ri01], foi provado que a ferradura f_0 pertence a fronteira do conjunto de sistemas uniformemente hiperbólicos e foi construída uma decomposição hiperbólica para os pontos fora da órbita de tangência. Em [CLR06] os autores mostram que toda medida f_0 -invariante tem expoente de Lyapunov não-nulo. Leplaideur e Rios [LR06] fazem a construção de variedades estáveis e instáveis para f_0 e mostram a existência e unicidade de estados de equilíbrio associados a potenciais Hölder-continuos. Mais tarde, os mesmos autores em [LR09] apresentam a existência e unicidade de estados de equilíbrio para o potencial $-t \log J^u$, onde J^u é o jacobiano da aplicação na direção instável E^u . Ainda para a aplicação f_0 , Leplaideur em [Le11] provou a analiticidade das funções pressão em todo conjunto \mathbb{R} e, com isso, mostrou a ausência de transições

de fase.

Aqui, iremos mostrar que depois de desdobrar a tangência, encontramos intervalos abertos de parâmetros acumulando em zero onde há hiperbolicidade (c.f. [Ri01]) e, além disso, o bordo desses intervalos é formado por difeomorfismos exibindo tangências homoclínicas ou heteroclínicas. Para estas aplicações provamos resultados similares aos da aplicação f_0 , tais como: a existência de uma decomposição hiperbólica e de variedades estáveis e instáveis para os pontos fora das órbitas de tangência, o fato que toda medida invariante tem expoente de Lyapunov não-nulo, a existência e unicidade de estados de equilíbrio associados a potenciais Hölder-continuos e a existência de estados de equilíbrio para o potencial $-t \log J^u$.

Demonstramos também que em cada um destes intervalos de parâmetros a família $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})}$ é estatisticamente estável, no sentido que todo ponto limite fraco* de estados de equilíbrio para difeomorfismos no interior do intervalo é um estado de equilíbrio para um difeomorfismo no bordo do intervalo.

Agora vamos exibir alguns motivos pelos quais fazemos o estudo de estados de equilíbrio associados a $-t \log J^u$. Primeiramente, note que devido à presença de órbitas de tangência, o jacobiano instável dos sistemas nos bordos dos intervalos de parâmetros deixa de ser contínuo e, por isso, é necessário uma atenção especial. Para qualquer $t \neq 0$, o estado de equilíbrio associado ao potencial $-t \log J^u$ é usualmente referenciado como medida t -conforme. Na dinâmica hiperbólica, esta família de medidas é muito significativa e carrega bastante informação. De fato, quando a medida SRB existe, ela tem que ser a medida 1-conforme. Além disso, no caso de codimensão um, se $P(t)$ denota a pressão da medida t -conforme, existe um valor especial t_0 tal que a aplicação $t \mapsto P(t)$ satisfaz $P(t_0) = 0$; este t_0 é a dimensão Hausdorff do conjunto hiperbólico na direção instável. Estes resultados são bastante gerais e valem para várias classes de sistemas dinâmicos hiperbólicos.

Em [MM83], as medidas t -conforme foram estudadas para o caso Axioma A . Elas também foram estudadas no contexto da dinâmica complexa (ver, por exemplo, [DU91]). Existe uma grande literatura a respeito dessas medidas para os casos unidimensional e não-uniformemente hiperbólico (por exemplo, em [DNU95, BK98]). Em [PS08], Pesin e Senti estudam o caso unidimensional e uma classe de sistemas multi-dimensionais admitindo torres de Young.

Gostaríamos de ressaltar que até onde sabemos, não existe uma teoria geral para lidar com as diferentes causas de perda de hiperbolicidade uniforme. A maioria dos resultados existentes baseiam-se em exemplos ou modelos. Embora o modelo com que estudamos representa uma situação de certo modo simplificada, ele ilustra muitas das dificuldades que aparecem no cenário geral.

Resultados obtidos

Apresentaremos aqui os resultados que desenvolvemos com o estudo da família $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})}$ de desdobramento da tangência homoclínica.

Em [Ri01], podemos encontrar condições suficientes que garantem a existência de intervalos de parâmetros ε se acumulando em 0, onde o conjunto limite de f_ε é hiperbólico. Mas era um questionamento em aberto que intervalos seriam estes. Assim, com o objetivo de responder esta pergunta, concluímos o Teorema A , onde conseguimos dar uma resposta parcial sobre esses intervalos e também sobre os sistemas cujos parâmetros pertencem ao bordo destes intervalos.

Teorema A. *Existe uma sequência de intervalos abertos e limitados $(I_n)_{n \geq 3}$ de parâmetros tal que f_ε é um difeomorfismo hiperbólico e transitivo para todo $\varepsilon \in I_n$. Além disso, os intervalos I_n se acumulam em 0 quando $n \rightarrow +\infty$ e, para cada $n \geq 3$, no bordo de $I_n := (\varepsilon_-(n), \varepsilon_+(n))$ existe um difeomorfismo com a presença de uma órbita de tangência homoclínica (em $\varepsilon_-(n)$) e um difeomorfismo com a presença de uma órbita de tangência heteroclínica (em $\varepsilon_+(n)$).*

Nos Teoremas *B – D* demonstraremos algumas propriedades para as aplicações $f_{\varepsilon_+(n)}$ com $n \geq 3$ cujo parâmetro $\varepsilon_+(n)$ pertence ao bordo do intervalo I_n dado pelo Teorema A. Tais resultados são similares as propriedades da aplicação f apresentadas em [CLR06, LR06, LR09, Ri01]. Denotaremos o conjunto limite de $f_{\varepsilon_+(n)}$ por $\Lambda_{\varepsilon_+(n)}$, onde existe uma órbita de tangência que passa pelo ponto $(0, r)$ e se acumula nos pontos fixos hiperbólicos $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Teorema B. *Seja $n \geq 3$. Para todo ponto $X \notin \mathcal{O}(0, r)$, $\Lambda_{\varepsilon_+(n)}$ admite a decomposição invariante $T_X \Lambda_{\varepsilon_+(n)} = E^s(X) \oplus E^u(X)$ do espaço tangente nas direções estável e instável.*

Teorema C. *Para todo $n \geq 3$, todos os expoentes de Lyapunov de todas as probabilidades $f_{\varepsilon_+(n)}$ -invariantes são uniformemente afastados de zero.*

Teorema D. *Seja $n \geq 3$. Para todo $X \notin \mathcal{O}(0, r)$, existem variedades estável e instável $W^s(X)$ e $W^u(X)$. Além disso, as variedades locais $W_{loc}^s(X)$ e $W_{loc}^u(X)$ são localmente o gráfico de aplicações de $E^{s,u}(X)$ em $E^{u,s}(X)$, respectivamente.*

Nos Teoremas *E* e *F* discutiremos a existência e unicidade de estados de equilíbrio para $f_{\varepsilon_+(n)}$ associados a potenciais Hölder-contínuos e a existência de estados de equilíbrio associados ao potencial $-t \log J_{\varepsilon_+(n)}^u$, respectivamente.

Teorema E. *Para todo $n \geq 3$, dado qualquer potencial Hölder-contínuo $\varphi : \Lambda_{\varepsilon_+(n)} \rightarrow \mathbb{R}$, existe um único estado de equilíbrio ergódico μ para $f_{\varepsilon_+(n)}$ associado ao potencial φ .*

Teorema F. *Sejam $n \geq 3$ e $t > 0$ tal que $\mathcal{P}(t) > -t \frac{1}{2} \log \rho$, onde $\mathcal{P}(t)$ denota a pressão do potencial $-t \log J_{\varepsilon_+(n)}^u$. Então, existe um estado de equilíbrio $\mu_{t, \varepsilon_+(n)}$ de $f_{\varepsilon_+(n)}$ associado ao potencial $-t \log J_{\varepsilon_+(n)}^u$.*

Nos Teoremas *G – J*, apresentaremos as hipóteses necessárias para garantir a estabilidade estatística para a família $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})}$. Mas, primeiramente, precisamos definir o que entendemos por estabilidade estatística.

Iremos dizer que um difeomorfismo g é estatisticamente estável quando existe um aberto \mathcal{V} tal que $g \in \partial \mathcal{V}$ e para qualquer sequência $(g_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ nessa vizinhança tal que $g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g$, todo ponto limite fraco* de uma sequência $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de estados de equilíbrios de g_ε associados a um potencial φ_ε é um estado de equilíbrio de g associado a um potencial φ tal que $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi$.

Teorema G. *Existe uma vizinhança aberta \mathcal{V}^- de $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)}$ tal que $f_0 := f \in \partial \mathcal{V}^-$, onde f é estatisticamente estável para potenciais Hölder-contínuos.*

Teorema H. *Para cada $n \geq 3$, existe uma vizinhança aberta $\mathcal{V}^+(n)$ de $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (\varepsilon_-(n), \varepsilon_+(n))}$ tal que $f_{\varepsilon_+(n)} \in \partial \mathcal{V}^+(n)$, onde $f_{\varepsilon_+(n)}$ é estatisticamente estável para potenciais Hölder-contínuos.*

Teorema I. *Na vizinhança \mathcal{V}^- , f é estatisticamente estável para o potencial $-t \log J^u$ com $t > 0$, desde que a pressão associada a esse potencial seja maior que $-t \frac{1}{2} \log \rho$.*

Teorema J. *Seja $n \geq 3$. Na vizinhança $\mathcal{V}^+(n)$, $f_{\varepsilon_+(n)}$ é estatisticamente estável para o potencial $-t \log J_{\varepsilon_+(n)}^u$ com $t > 0$, desde que a pressão associada a esse potencial seja maior que $-t \frac{1}{2} \log \rho$.*

Estrutura da tese

No Capítulo 1 iremos estabelecer algumas noções preliminares e apresentar resultados da teoria clássica de sistemas dinâmicos que utilizaremos ao longo do texto.

No Capítulo 2 introduziremos a aplicação ferradura e família de perturbações com as quais iremos trabalhar. Para esta família a um parâmetro mostraremos a existência de intervalos de parâmetros onde as aplicações possuem propriedades que irão garantir a existência e unicidade de estados de equilíbrio associados a potenciais Hölder-contínuos.

No Capítulo 3 o objetivo é mostrar que as aplicações no bordo dos intervalos encontrados no Capítulo 2 possuem certas propriedades que a aplicação ferradura também possui para podermos concluir a existência e unicidade de estados de equilíbrio.

No Capítulo 4 demonstraremos a estabilidade estatística para a família de desdobramento da tangência homoclínica definida no Capítulo 2.

Capítulo 1

Noções preliminares

Neste capítulo serão estabelecidas algumas noções preliminares e apresentados alguns resultados da teoria clássica de sistemas dinâmicos que utilizaremos ao longo do texto.

1.1 Definições e conceitos básicos

Seja \mathbf{M} uma variedade Riemanniana compacta e sem bordo, onde dist denotará a métrica em \mathbf{M} .

Iremos considerar $\|\cdot\|$ como a norma euclidiana em \mathbb{R}^n para $n \geq 2$ e $|\cdot|$ indicará a distância em \mathbb{R} .

Denotaremos por

$$\text{Diff}^r(\mathbf{M}) := \text{o espaço dos difeomorfismos de classe } C^r \text{ em } \mathbf{M}$$

e por

$$C^0(\mathbf{M}, \mathbb{R}) := \{\varphi : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ é contínua}\}$$

o espaço das funções contínuas em \mathbf{M} .

Definição 1.1. *Seja $f \in \text{Diff}^r(\mathbf{M})$ e tome $\Lambda \subset \mathbf{M}$ um conjunto compacto. Dizemos que Λ é hiperbólico se $f(\Lambda) = \Lambda$ e cada espaço tangente $T_X\mathbf{M}$ com $X \in \Lambda$ pode ser escrito como uma soma direta*

$$T_X\mathbf{M} = E^s(X) \oplus E^u(X)$$

de subespaços que satisfazem:

(i) $Df(X)E^s(X) = E^s(f(X))$ e $Df(X)E^u(X) = E^u(f(X))$;

(ii) existem constantes $c > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$\|Df^n(X)v\| \leq c\lambda^n\|v\| \text{ e } \|Df^{-n}(X)w\| \leq c\lambda^{-n}\|w\|,$$

para todo $n \geq 0$, todo $v \in E^s(X)$ e todo $w \in E^u(X)$.

Chamaremos $E^s(X)$ de espaço estável de X e $E^u(X)$ de espaço instável de X .

Proposição 1.2. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para o difeomorfismo f . Então, as dimensões dos espaços $E^s(X)$ e $E^u(X)$ são localmente constantes e estes espaços variam continuamente com X .*

Demonstração. A prova segue da Proposição 6.4.4 em [KH95]. □

Para cada $X \in \mathbf{M}$, iremos considerar

$$\begin{aligned} W^s(X) &:= \{Y \in \mathbf{M} \mid \text{dist}(f^n(X), f^n(Y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\} \\ W_\epsilon^s(X) &:= \{Y \in \mathbf{M} \mid \text{dist}(f^n(X), f^n(Y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\} \\ W^u(X) &:= \{Y \in \mathbf{M} \mid \text{dist}(f^{-n}(X), f^{-n}(Y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\} \\ W_\epsilon^u(X) &:= \{Y \in \mathbf{M} \mid \text{dist}(f^{-n}(X), f^{-n}(Y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\} \end{aligned}$$

que chamaremos de variedade estável de X , variedade estável local de X , variedade instável de X e variedade instável local de X , respectivamente.

Teorema 1.3. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para $f \in \text{Diff}^r(\mathbf{M})$. Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então:*

- (i) *para cada $X \in \Lambda$, $W_\epsilon^s(X)$ e $W_\epsilon^u(X)$ são discos C^r , $T_X W_\epsilon^s(X) = E^s(X)$ e $T_X W_\epsilon^u(X) = E^u(X)$ e $f(W_\epsilon^s(X)) \subset W_\epsilon^s(f(X))$ e $f^{-1}(W_\epsilon^u(X)) \subset W_\epsilon^u(f^{-1}(X))$;*
- (ii) *$\text{dist}(f^n(X), f^n(Y)) \leq c\lambda^n \text{dist}(X, Y)$, $\forall Y \in W_\epsilon^s(X)$ e $\text{dist}(f^{-n}(X), f^{-n}(Y)) \leq c\lambda^n \text{dist}(X, Y)$, $\forall Y \in W_\epsilon^u(X)$;*
- (iii) *$W_\epsilon^s(X)$ e $W_\epsilon^u(X)$ variam continuamente com X .*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [KH95] ou [Ro95]. □

Definição 1.4. *Um homeomorfismo $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ é dito expansivo quando existe uma constante $\epsilon_0 > 0$ (chamada constante de expansividade) tal que dados $x, y \in \mathbf{M}$ com $x \neq y$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon_0.$$

Seja $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ um homeomorfismo. Para cada $X \in \mathbf{M}$, denotaremos por

- $\mathcal{O}(X) := \{f^n(X) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ a órbita de X ;
- $\mathcal{O}^+(X) := \{f^n(X) \mid n \geq 0\}$ a órbita positiva de X ;
- $\mathcal{O}^-(X) := \{f^{-n}(X) \mid n \geq 0\}$ a órbita negativa de X ;

Definição 1.5. *Seja $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ um homeomorfismo. Dizemos que f é topologicamente transitivo quando existe $X \in \mathbf{M}$ cuja órbita é densa em \mathbf{M} .*

Lema 1.6. *A aplicação f é topologicamente transitiva se e somente se para quaisquer conjuntos abertos não-vazios $U, V \subset \mathbf{M}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Demonstração. Este lema segue do Lema 1.4.2 em [KH95]. □

Definição 1.7. *Seja $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ um homeomorfismo. Dizemos que f é topologicamente misturador (topologicamente mixing) quando para quaisquer conjuntos abertos não-vazios $U, V \subset \mathbf{M}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$*

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Claramente, toda aplicação topologicamente mixing é topologicamente transitiva.

Definição 1.8. Um ponto $X \in \mathbf{M}$ é chamado ponto não-errante de f quando para toda vizinhança \mathcal{U} de X , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Denotaremos por

$$\Omega(f) := \{X \in \mathbf{M} \mid X \text{ é não-errante}\}.$$

o conjunto dos pontos não-errantes de f .

Denotaremos por

$$\text{Per}(f) := \{X \in \mathbf{M} \mid \exists n \in \mathbb{N}; f^n(X) = X\}$$

o conjunto dos pontos periódicos de f . Claramente, $\overline{\text{Per}(f)} \subset \Omega(f)$.

Proposição 1.9. Se Λ é um conjunto hiperbólico para $f \in \text{Diff}^r(\mathbf{M})$, então

$$\Omega(f|_\Lambda) = \overline{\text{Per}(f|_\Lambda)}.$$

Demonstração. Veja [BS02], Teorema 5.3.3. □

Definição 1.10. Dizemos que $f \in \text{Diff}^r(\mathbf{M})$ é axioma A quando $\Omega(f)$ é hiperbólico e $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$.

Os difeomorfismos axioma A possuem uma decomposição de $\Omega(f)$ em subconjuntos que chamaremos de peças básicas, satisfazendo algumas propriedades. Tal decomposição é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 1.11 (Decomposição Espectral). *Seja f um difeomorfismo axioma A . Então, existe uma decomposição*

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_s,$$

onde:

- $(\Omega_i)_{i=1}^s$ são conjuntos fechados e dois a dois disjuntos;
- $f(\Omega_i) = \Omega_i$ e $f|_{\Omega_i}$ é topologicamente transitiva.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [Bo75] (Teorema 3.5). □

No Teorema acima, cada elemento Ω_i é chamado de conjunto básico.

Destacaremos outras duas propriedades dos difeomorfismos axioma A .

Proposição 1.12. *Seja f um difeomorfismo axioma A e Λ um conjunto básico. Então, Λ admite uma partição de Markov com diâmetro arbitrariamente pequeno.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Bo75], Teorema 3.12. □

Proposição 1.13. *Seja f um difeomorfismo axioma A . Se Λ é um conjunto básico C^2 , então a aplicação $\Psi_t : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\Psi_t(X) := -t \log \|Df(X)|_{E^u(X)}\|$$

é Hölder-contínua para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Esta proposição segue do Lema 4.6 em [Bo75]. □

O último teorema desta seção mostrará a persistência de conjuntos hiperbólicos para pequenas perturbações.

Teorema 1.14 (Continuação Hiperbólica). *Seja $\Lambda \subset \mathbf{M}$ um conjunto hiperbólico para $f \in \text{Diff}^r(\mathbf{M})$. Então, para todo difeomorfismo g que é C^r -próximo a f , existe uma única conjugação Θ entre g e f tal que $\Lambda(g) := \Theta(\Lambda)$ é um conjunto hiperbólico para g . Além disso, Θ é Hölder-contínua.*

Demonstração. Este teorema segue do Teorema 3 do apêndice 1 em [PT93]. □

1.2 Elementos de teoria ergódica

Seja \mathcal{S} um espaço métrico compacto. Denotaremos por \mathcal{B} a σ -álgebra de Borel de \mathcal{S} .

Definição 1.15. Dizemos que $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ é uma transformação mensurável quando $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Definição 1.16. Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ uma transformação mensurável. Dizemos que $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma probabilidade f -invariante quando:

$$\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)), \text{ para todo } B \in \mathcal{B}.$$

Denotaremos por

$$\mathcal{M}_1(f) := \text{o espaço das probabilidades } f\text{-invariantes}$$

e, iremos dizer que uma propriedade vale para μ -quase todo ponto quando o conjunto dos pontos onde a propriedade é verdadeira tem probabilidade μ igual a 1.

Segue imediatamente da Definição 1.16 o seguinte lema.

Lema 1.17. Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ uma transformação mensurável. São equivalentes:

- $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$; e
- $\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu$, para toda função integrável $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 1.18. Sejam $f_1 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$ e $f_2 : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ transformações mensuráveis nos espaços métricos compactos \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . Dizemos que $\Phi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ é uma conjugação entre f_1 e f_2 quando

- (i) Φ é uma bijeção mensurável;
- (ii) $\Phi \circ f_1 = f_2 \circ \Phi$.

Lema 1.19. Sejam $f_1 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$ e $f_2 : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ transformações mensuráveis nos espaços métricos compactos \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , e seja $\Phi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ uma conjugação entre f_1 e f_2 . Então, existe μ_1 uma probabilidade f_1 -invariante se, e somente se, existe μ_2 uma probabilidade f_2 -invariante.

Demonstração. Seja μ_1 uma probabilidade f_1 -invariante. Então, pelo Lema 1.17,

$$\int \varphi_1 d\mu_1 = \int \varphi_1 \circ f_1 d\mu_1,$$

para toda função integrável $\varphi_1 : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Daí, tomando $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \Phi^{-1}$ e $\mu_2 = \Phi^* \mu_1$ (onde $\Phi^* \mu_1(B) := \mu_1(\Phi^{-1}B)$ para todo B na σ -álgebra de \mathcal{S}_2) obtemos

$$\int \varphi_1 d\mu_1 = \int \varphi_2 \circ \Phi d\mu_1 = \int \varphi_2 d\Phi^* \mu_1 = \int \varphi_2 d\mu_2.$$

Por outro lado, como $\Phi \circ f_1 = f_2 \circ \Phi$,

$$\int \varphi_1 \circ f_1 d\mu_1 = \int (\varphi_1 \circ \Phi^{-1}) \circ f_2 \circ \Phi d\mu_1 = \int \varphi_2 \circ f_2 d\Phi^* \mu_1 = \int \varphi_2 \circ f_2 d\mu_2.$$

Logo,

$$\int \varphi_2 d\mu_2 = \int \varphi_2 \circ f_2 d\mu_2,$$

Para completar a demonstração, observe que como Φ é uma conjugação entre \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , existe uma correspondência biunívoca entre as funções integráveis em \mathcal{S}_1 e em \mathcal{S}_2 .

Quando supomos que μ_2 é uma probabilidade f_2 -invariante, a demonstração é análoga; basta tomar $\mu_1 = (\Phi^{-1})^* \mu_2$ e $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \Phi$. \square

O próximo resultado relaciona a o limite da integral de uma sequência de funções com a integral do limite desta sequência.

Teorema 1.20 (Convergência Dominada). *Seja μ uma probabilidade em \mathbf{M} . Considere $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis e $\phi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função μ -integrável tal que $|\varphi_n(X)| \leq |\phi(X)|$ para μ -quase todo $X \in \mathbf{M}$. Se para μ -quase todo $X \in \mathbf{M}$ $\varphi_n(X) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(X)$, então φ é uma função μ -integrável e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi_n d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Demonstração. O resultado segue do Corolário 0.9.1 em [Wa82]. \square

Na definição abaixo, apresentaremos o conceito de convergência no espaço $\mathcal{M}_1(f)$.

Definição 1.21. *Seja $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{M}_1(f)$. Dizemos que μ_n converge para $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$ na topologia fraca* e escrevemos $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu$ quando*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi d\mu_n = \int \varphi d\mu, \text{ para toda } \varphi \in C^0(\mathcal{S}, \mathbb{R}).$$

Proposição 1.22. *Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ uma transformação contínua. Então, o conjunto $\mathcal{M}_1(f)$ munido da topologia fraca* é compacto, metrizável e não-vazio.*

Demonstração. Veja os Teorema 6.4 e 6.5 em [Wa82]. \square

A seguir, enunciaremos o Teorema Ergódico de Birkhoff.

Teorema 1.23 (Teorema de Birkhoff). *Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ uma transformação mensurável e $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$. Dada qualquer função integrável $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\varphi}(X) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(X))$$

existe em μ -quase todo ponto $X \in \mathcal{S}$. Além disso,

$$\int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Wa82], Teorema 1.14. \square

Definição 1.24. *Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ uma transformação mensurável. Uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$ diz-se ergódica quando*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(X)) = \int \varphi d\mu,$$

para toda função integrável $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ e μ -quase todo ponto $X \in \mathcal{S}$.

Apresentaremos agora o conceito de entropia métrica.

Definição 1.25. *Sejam $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ uma transformação mensurável e $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$. Dada uma partição \mathcal{P} enumerável de \mathcal{S} , definimos*

$$H_\mu(\mathcal{P}) := - \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P),$$

onde se convencionou que $0 \log 0 = 0$.

Considerando

$$\mathcal{P}^n := \bigvee_{i=0}^n f^{-i}(\mathcal{P}) := \{P_0 \cap P_1 \cap \dots \cap P_{n-1} \mid P_i \in f^{-i}(\mathcal{P})\},$$

definimos a entropia da partição \mathcal{P} com respeito a f e μ por

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_\mu(\mathcal{P}^n)}{n}$$

e, finalmente, a entropia de f com respeito a μ é dada por

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathcal{P}} \{h_\mu(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partição finita de } \mathcal{S}\}.$$

Observação 1.26. O limite na definição acima existe, já que

$$H_\mu(\mathcal{P}^{m+n}) \leq H_\mu(\mathcal{P}^m) + H_\mu(\mathcal{P}^n)$$

e, se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R} satisfaz $x_{m+n} \leq x_m + x_n$ e $x_n \geq 0$, então o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$ existe e é igual a $\inf \frac{x_n}{n}$.

Definição 1.27. *Para cada $i = 1, 2$, seja $f_i : \mathcal{S}_i \rightarrow \mathcal{S}_i$ uma transformação mensurável no espaço métrico compacto \mathcal{S}_i e considere $\mu_i \in \mathcal{M}_1(f_i)$. Dizemos que os sistemas (f_1, μ_1) e (f_2, μ_2) são ergodicamente equivalentes quando existem conjuntos $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{S}_1$ e $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{S}_2$ com*

$$\mu_1(\mathcal{S}_1 - \mathcal{A}_1) = 0 \quad \text{e} \quad \mu_2(\mathcal{S}_2 - \mathcal{A}_2) = 0,$$

e uma bijeção mensurável $\Phi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ tal que

- $\mu_1(\Phi^{-1}(B)) = \mu_2(B)$ para todo $B \subset \mathcal{A}_2$ mensurável; e
- $\Phi \circ f_1 = f_2 \circ \Phi$.

Proposição 1.28. *Se (f_1, μ_1) e (f_2, μ_2) são ergodicamente equivalentes, então*

$$h_{\mu_1}(f_1) = h_{\mu_2}(f_2).$$

Demonstração. Esta proposição segue da Proposição 4.11 em [Wa82]. □

1.3 Shifts e subshifts de tipo finito

Nesta seção, iremos abordar a aplicação deslocamento (*shift*) e algumas de suas características.

Definição 1.29. Dado $m \in \mathbb{N}$, considere o conjunto de m símbolos $\{1, 2, \dots, m\}$. Seja

$$\Sigma_m := \{1, 2, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$$

o espaço das seqüências bi-infinitas cujos elementos denotaremos por

$$\underline{x} := (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} := (\dots x_{-1} \dot{x}_0 x_1 x_2 \dots),$$

onde $x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. O ponto sobre o elemento x_0 em \underline{x} indica o elemento central da seqüência.

O espaço Σ_m definido acima é um espaço topológico compacto na topologia produto. Além disso, essa topologia possui uma base formada pelos conjuntos

$$C(i) := \{\underline{x} \in \Sigma_m \mid x_0 = i\}$$

que chamaremos de cilindros.

Definição 1.30. Para cada $\underline{x} \in \Sigma_m$ e cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o n -cilindro de \underline{x} por

$$C_n(\underline{x}) := \{\underline{y} \in \Sigma_m \mid x_i = y_i, \forall |i| \leq n\}.$$

Em Σ_m iremos considerar a métrica $d : \Sigma_m \times \Sigma_m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \frac{1}{2^n},$$

onde $n := \min\{|i| \mid x_i \neq y_i\}$. Tal métrica gera a topologia produto sobre Σ_m .

Definição 1.31. Definimos a aplicação shift à esquerda $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ por $\sigma(\underline{x}) := \underline{y}$, onde

$$y_i := x_{i+1} \text{ para todo } i \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$\sigma(\dots x_{-1} \dot{x}_0 x_1 x_2 \dots) := (\dots x_{-1} x_0 \dot{x}_1 x_2 \dots).$$

A seguir, daremos algumas propriedades da aplicação σ cujas demonstrações podem ser encontradas em [DGS76], [KH95], [PM78] e [Wa82].

Propriedade 1.32. Considere o sistema (Σ_m, σ) . Então:

- (i) a aplicação σ é um homeomorfismo;
- (ii) para cada $n \in \mathbb{N}$, σ^n tem exatamente m^n pontos fixos;
- (iii) o conjunto $\text{Per}(\sigma)$ é denso em Σ_m ;
- (iv) σ é topologicamente transitiva;
- (v) σ é topologicamente mixing;
- (vi) para todo $\underline{x} \in \Sigma_m$, $W^{u,s}(\underline{x})$ são densas em Σ_m ;

(vii) σ é expansivo.

Agora, descreveremos uma classe de subconjuntos fechados e σ -invariantes contidos em Σ_m .

Definição 1.33. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times m$ tal que $a_{ij} = 0$ ou 1 . Denotaremos por $\Sigma_A \subset \Sigma_m$ o conjunto*

$$\Sigma_A := \{\underline{x} \in \Sigma_m \mid a_{x_i x_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

que chamaremos de *subshift de tipo finito*. Neste caso, dizemos que A é a *matriz de transição* de Σ_A .

O conjunto Σ_A é um subespaço topológico compacto de Σ_m e, além disso, $\sigma(\Sigma_A) = \Sigma_A$. Denotaremos por σ_A a restrição de σ ao conjunto Σ_A , ou seja,

$$\sigma_A = \sigma|_{\Sigma_A}.$$

Um subshift Σ_A é dito *topologicamente transitivo* (respectivamente, *topologicamente mixing*) quando σ_A é topologicamente transitivo (respectivamente, topologicamente mixing).

Propriedade 1.34. *Seja $\Sigma_A \subset \Sigma_m$ um subshift do tipo finito e sejam $a_{ij}^{(n)}$ as entradas da matriz A^n , $m \geq 1$. Então:*

- (i) $\#\text{Fix}(\sigma_A^n) = \text{tr}(A^n)$;
- (ii) Σ_A é transitivo se, e somente se, para todos $1 \leq i, j \leq m$ existe $n \geq 1$ tal que $a_{ij}^{(n)} > 0$;
- (iii) Σ_A é topologicamente mixing se, e somente se, para todos $1 \leq i, j \leq m$ existe $n \geq 1$ tal que $a_{ij}^{(l)} > 0$ para todo $l \geq n$ (se, e somente se, existe $n \geq 1$ tal que $A^n > 0$).

Demonstração. Veja Proposição 11.6 em [PM78]. □

Para finalizar a seção, destacaremos duas relações entre os subshifts de tipo finito e os difeomorfismos axioma A .

Proposição 1.35. *Seja f um difeomorfismo axioma A e Λ um conjunto básico. Então, existe uma semiconjugação Φ entre (Λ, f) e um subshift de tipo finito (Σ_A, σ_A) , onde A é a matriz de transição. Além disso, Φ é injetiva sobre o conjunto residual*

$$\Lambda \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f^j(\partial^s \mathcal{P} \cup \partial^u \mathcal{P}),$$

onde $\partial^s \mathcal{P}$ e $\partial^u \mathcal{P}$ são os bordos estável e instável (respectivamente) da partição \mathcal{P} dada pela Proposição 1.12.

Demonstração. A prova segue do Teorema 3.18 em [Bo75]. □

Proposição 1.36. *Seja Λ um conjunto hiperbólico totalmente desconexo e localmente maximal para o difeomorfismo f . Então, $f|_{\Lambda}$ é topologicamente conjugado a um subshift de tipo finito (Σ_A, σ_A) , onde A é a matriz de transição.*

Demonstração. Esta proposição segue do Teorema 18.7.8 em [KH95]. □

1.4 Pressão topológica e Estados de equilíbrio

Seja \mathcal{S} um espaço métrico compacto.

Definição 1.37. *Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ uma aplicação contínua. Definimos a função pressão $P_f : C^0(\mathcal{S}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$P_f(\varphi) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\mu(f) + \int \varphi d\mu \right\},$$

onde $h_\mu(f)$ é a entropia de f com respeito a medida μ . Chamaremos a função contínua $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ de potencial.

Dizemos que $\mu \in \mathcal{M}_1(f)$ é um estado de equilíbrio de f associado ao potencial φ quando

$$P_f(\varphi) = h_\mu(f) + \int \varphi d\mu,$$

isto é, quando μ é um máximo para a função

$$\nu \in \mathcal{M}_1(f) \mapsto h_\nu(f) + \int \varphi d\nu.$$

A função pressão satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 1.38. *Para $i = 1, 2$, seja $f_i : \mathcal{S}_i \rightarrow \mathcal{S}_i$ uma aplicação contínua no espaço métrico compacto \mathcal{S}_i . Se existe uma semiconjugação $\Phi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$, então*

$$P_{f_2}(\varphi) \leq P_{f_1}(\varphi \circ \Phi), \quad \forall \varphi \in C^0(\mathcal{S}_2, \mathbb{R}).$$

Se Φ é uma conjugação, então

$$P_{f_2}(\varphi) = P_{f_1}(\varphi \circ \Phi), \quad \forall \varphi \in C^0(\mathcal{S}_2, \mathbb{R}).$$

Demonstração. A demonstração segue do Teorema 9.8 em [Wa82]. □

Proposição 1.39. *Sejam $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ uma aplicação contínua no espaço métrico compacto \mathcal{S} e $\varphi_1, \varphi_2 \in C^0(\mathcal{S}, \mathbb{R})$. Se $P_f(\cdot) < +\infty$, então*

$$|P_f(\varphi_1) - P_f(\varphi_2)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\text{sup}},$$

onde $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\text{sup}} := \sup_{X \in \mathcal{S}} \{|\varphi_1(X) - \varphi_2(X)|\}$.

Demonstração. Esta proposição segue do item (iv) do Teorema 9.7 em [Wa82]. □

Agora, apresentaremos alguns resultados sobre a existência e unicidade de estados de equilíbrio.

Proposição 1.40. *Se $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ um homeomorfismo expansivo, então para toda $\varphi \in C^0(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ existe um estado de equilíbrio de f associado a φ .*

Demonstração. A demonstração desta proposição segue do Teorema 20.2.10 em [KH95]. □

Proposição 1.41. *Se $f|_\Lambda$ é um difeomorfismo axioma A e $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial Hölder-contínuo, então existe um único estado de equilíbrio μ de f associado a φ . Além disso, μ é ergódica.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [Bo75] (Teorema 4.1). \square

Antes de enunciar o próximo resultado, apresentaremos a definição de medida de Gibbs.

Definição 1.42. *Seja $\phi : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial Hölder-contínuo. Dizemos que $\nu_\phi \in \mathcal{M}_1(\sigma_A)$ é a medida de Gibbs quando existem constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ e $P \in \mathbb{R}$ tais que*

$$c_1 \leq \frac{\nu_\phi\{\underline{y} \mid y_i = x_i \forall i = 0, \dots, k-1\}}{\exp\left(-Pk + \sum_{j=0}^{k-1} \phi(\sigma_A^j(\underline{x}))\right)} \leq c_2$$

para todo $\underline{x} \in \Sigma_A$ e $k > 0$.

Proposição 1.43. *Sejam $\phi : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial Hölder-contínuo e ν_ϕ a medida de Gibbs de ϕ . Se (Σ_A, σ_A) é mixing então ν_ϕ é o único estado de equilíbrio de σ_A associado a ϕ .*

Demonstração. A demonstração segue do Teorema 1.22 em [Bo75]. \square

Teorema 1.44. *Dado qualquer potencial Hölder-contínuo φ em Σ_m , existe um único estado de equilíbrio ergódico ν para σ , associado ao potencial φ .*

Demonstração. Sabemos que Σ_m é um espaço métrico compacto e que σ é uma transformação expansiva. Além disso, todo *shift* definido sobre um espaço métrico compacto satisfaz a propriedade de especificação ([DGS76], Proposição 21.2).

Portanto, dado um potencial Hölder-contínuo $\varphi : \Sigma_m \rightarrow \mathbb{R}$, existe um único estado de equilíbrio ergódico $\nu \in \mathcal{M}_1(\sigma)$ para σ associado a φ ([KH95], Teorema 20.3.7). \square

Para finalizar esta seção, daremos o conceito de medida conforme.

Definição 1.45. *Sejam $f \in \text{Diff}^r(\mathbf{M})$ e $\Lambda \subset \mathbf{M}$ um conjunto hiperbólico. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos o potencial $\Psi_t : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\Psi_t(X) := -t \log J^u(X),$$

onde $J^u(X) = \|Df(X)|_{E^u(X)}\|$ é o jacobiano instável de f no ponto $X \in \Lambda$.

Chamaremos de medida conforme o estado de equilíbrio de f associado ao potencial Ψ_t .

Capítulo 2

Desdobramento da tangência homoclínica

Introduziremos nesse capítulo a aplicação ferradura e família de perturbações com as quais iremos trabalhar. Para esta família a um parâmetro mostraremos a existência de intervalos de parâmetros onde as aplicações possuem propriedades que irão garantir a existência e unicidade de estados de equilíbrio associados a potenciais Hölder-contínuos.

2.1 A aplicação ferradura f

Consideremos $\mathcal{Q} = [0, 1] \times [0, 1]$ e seja $f : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo C^∞ dependendo dos parâmetros λ (contração), ρ (expansão) e c (constante). Para cada escolha destes parâmetros satisfazendo certas condições, a aplicação f é transitiva e possui uma tangência homoclínica em $(q, 0)$ que está associada ao ponto de sela hiperbólica $(0, 0)$. Além disso, $(q, 0)$ é acumulado por pontos periódicos (tangência interna). Além destes três parâmetros, utilizaremos $\bar{\varepsilon}$ para o controle da família de perturbações de f que definiremos na próxima seção.

Iremos considerar $\lambda < \frac{1}{3}$, $\rho > 3$, $c > 0$ suficientemente grande e $\bar{\varepsilon} > 0$. Condições mais precisas para estas constantes serão estabelecidas ao longo do texto. A aplicação ferradura f será construída satisfazendo as seguintes condições (figura 2.1):

(i) Para os pontos na região $R_1 = \{(x, y) \in \mathcal{Q} \mid 0 \leq y \leq \rho^{-1}\}$,

$$f(x, y) = (\lambda x, \rho y).$$

(ii) Para os pontos na região $R_5 = \{(x, y) \in \mathcal{Q} \mid 1 - \frac{2}{3}\rho^{-1} \leq y \leq 1\}$,

$$f(x, y) = (\lambda x + (1 - \lambda), \rho y - (\rho - 1)).$$

(iii) Existe uma faixa horizontal, denotada por região R_3 , contida em $[0, 1] \times [\frac{1}{3}, 1]$ e dependendo da constante c , que é levada de forma afim a uma faixa vertical, paralela a imagem da região R_5 . A derivada de f nos pontos desta região é

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}.$$

(iv) Denotaremos por R_2 a região dos pontos de \mathcal{Q} que estão entre R_1 e R_3 . Esta região é mapeada por f fora de \mathcal{Q} .

(v) Entre as regiões R_3 e R_5 existe uma região (denotada por R_4), limitada por duas curvas disjuntas da forma $\{y = \psi(x) \mid x \in [0, 1]\}$, na qual f não é afim. Nesta região temos que:

1. Os lados superior e inferior de R_4 são levados em R_2 , fora da imagem de R_1 , com distância maior que $\bar{\varepsilon} > 0$ de $[0, 1] \times \{\rho^{-1}\}$.
2. $f(\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cap R_4)$ está contido no gráfico da aplicação $g_0(x) = c(x - q)^2$, com $\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) \right\| \geq \rho$, onde $q \in (\frac{2}{3}, 1)$.
3. Para todo $x_0 \in [0, 1]$, $f(\{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cap R_4)$ está contido no gráfico da aplicação $g_{x_0}(x) = c(x - q)^2 - \lambda x_0$, com

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right\rangle = 0 \text{ e } \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(f^{-1}(q, 0)) \right\| = \lambda.$$

Além disso, queremos que a imagem de $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cap R_4$ não intersecte o lado direito de \mathcal{Q} .

(vi) Pontos entre as regiões R_3 e R_5 que estão fora de R_4 são levados dentro da região R_2 com segunda coordenada maior que $\rho^{-1} + \bar{\varepsilon}$. Nestes pontos pedimos que a aplicação f seja suave e globalmente um para um.

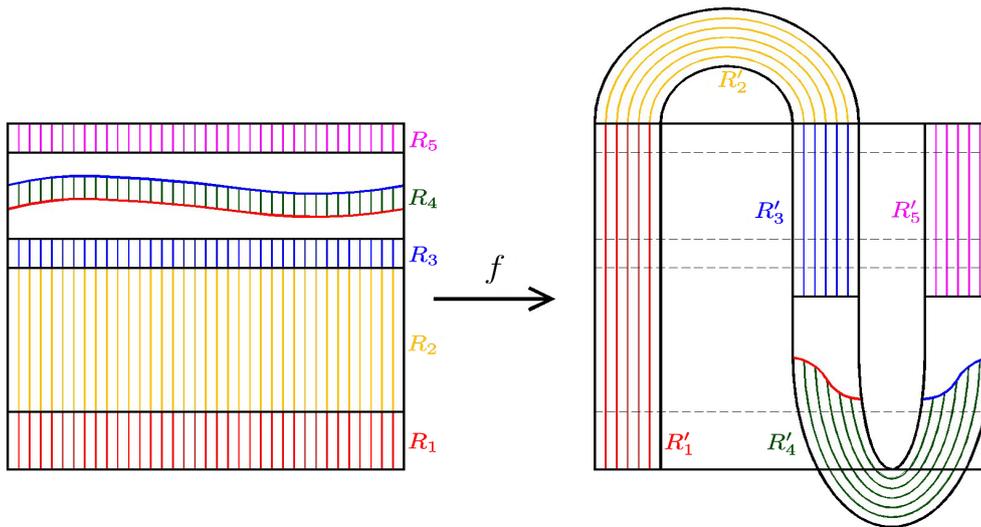


Figura 2.1: Aplicação f

Na figura 2.1, $f(R_i) = R'_i$, para $i = 1, \dots, 5$. Observe que f pode ser estendida a \mathbb{R}^2 de maneira que o ponto $(0, 0)$ é um ponto fixo hiperbólico. Neste caso, o lado esquerdo e o lado inferior de \mathcal{Q} estão contidos, respectivamente, nas variedades instável e estável deste ponto. Note que o ponto $(q, 0)$ é um ponto de tangência homoclínica de $(0, 0)$ cuja pré-imagem denotaremos por

$$f^{-1}(q, 0) = (0, r).$$

Assumiremos também que

$$q, r \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right].$$

Observação 2.1. Considere uma folheação \mathcal{F} de $f(\mathcal{Q})$ cujas folhas são imagens de linhas verticais em \mathcal{Q} pela aplicação f . Então, as folhas de \mathcal{F} são verticais nas regiões R'_1 , R'_3 e R'_5 e parabólicas na região R'_4 .

2.1.1 Propriedades de f

O objetivo principal desta seção será o estudo dos estados de equilíbrio para a aplicação ferradura f . Com esse propósito, exibiremos uma série de propriedades de f .

Seja

$$\Lambda := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mathcal{Q}).$$

Para obtermos boas propriedades hiperbólicas para (f, Λ) iremos considerar que as constantes λ e ρ satisfazem

$$\frac{1}{b} < -\frac{\log \lambda}{\log \rho} < b \quad (2.1)$$

para alguma constante $b > 1$. Então, segue de [LR06] o seguinte resultado:

Propriedade 2.2 (Lema 2.1). *Para todo ponto $X \notin \mathcal{O}(q, 0)$, Λ admite a decomposição invariante contínua $T_X \Lambda = E^s(X) \oplus E^u(X)$ do espaço tangente nas direções estável e instável.*

Note que caso a aplicação f fosse expansiva, dado qualquer pontencial $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ contínuo, como a função

$$\mu \mapsto P_\mu(\varphi, f) = h_\mu(f) + \int \varphi d\mu$$

é semicontínua superiormente ([LR09, Lema 2.1]) e, como o espaço $\mathcal{M}_1(f)$ é compacto, esta função admite um máximo que seria o estado de equilíbrio procurado (Proposição 1.40). Mas o resultado abaixo garante que a aplicação f não goza desta propriedade.

Propriedade 2.3. *f não é expansiva.*

Demonstração. De fato, seja $\delta > 0$ e tome dois pontos $X, Y \in R'_4 \cap R_1$ próximos e em lados opostos do ponto de tangência $(q, 0)$ tais que $Y \in W_\delta^s(X) \cap W_\delta^u(X)$ (figura 2.2). Tal Y existe pois, localmente em $R'_4 \cap R_1$, as variedades instáveis são C^2 -próximas a parábolas e existem variedades estáveis que são retas horizontais. Escolhendo X e Y suficientemente próximos a $(q, 0)$ teremos que $X \neq Y$ e $d(f^n(X), f^n(Y)) \leq \delta, \forall n \in \mathbb{Z}$, donde concluímos a não-expansividade. \square

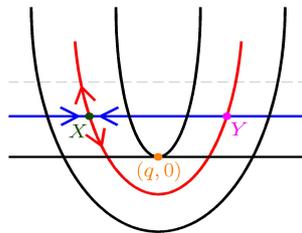


Figura 2.2: Não-expansividade

Para mostrar a existência e unicidade de estados de equilíbrio associados a um pontencial Hölder-contínuo, os autores em [LR06] demonstram a existência de uma semi-conjugação entre a ferradura e o *shift* completo de três símbolos. A seguir, destacaremos alguns dos resultados obtidos em [LR06].

Propriedade 2.4 (Partição de Markov). *Para cada $n \in \mathbb{N}$, definiremos a partição degenerada \mathcal{P}_n da seguinte maneira. Sejam R_n^i com $i \in \{1, 2, \dots, 3^{2n}\}$ as componentes conexas de $f^n(\mathcal{Q}^*) \cap f^{-n}(\mathcal{Q}^*)$, onde $\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \setminus \{(x, y) \in \mathcal{Q} \mid xy = 0\}$. Então, definimos a partição de Markov (figura 2.3) por $\mathcal{P}_n := \{\overline{R_n^i}; i = 1, 2, \dots, 3^{2n}\}$.*

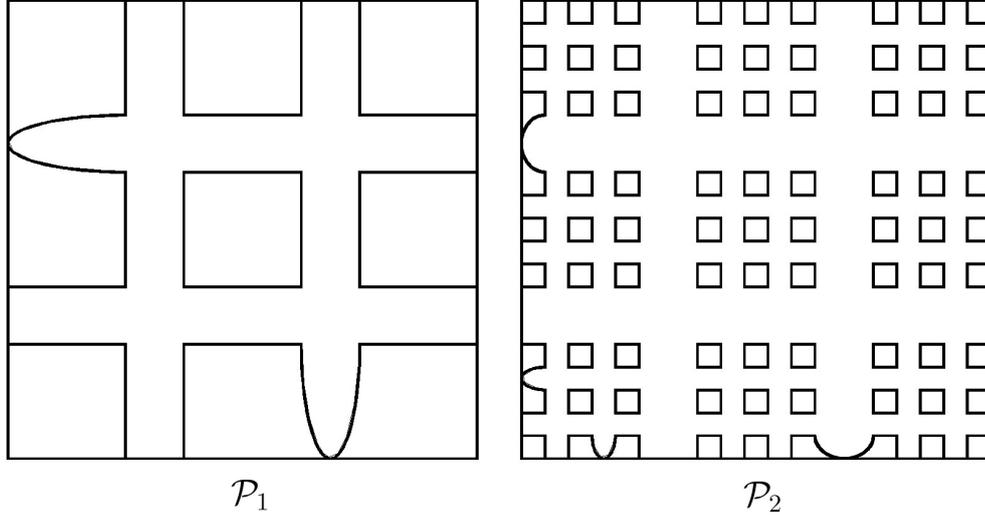


Figura 2.3: Partições de Markov

Para simplificar a notação iremos considerar que os átomos de \mathcal{P}_n são escritos da forma R_n^i e, por conveniência, R_n^1 será o elemento de \mathcal{P}_n que contém $(0, 0)$.

A partição \mathcal{P}_n satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Cada átomo R_n^i é limitado por arcos das variedades estável e instável de $(0, 0)$ e $(1, 1)$.
- (ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $i \in \{1, 2, \dots, 3^{2n}\}$, $f^n(R_n^i)$ é uma faixa cruzando \mathcal{Q} de baixo para cima e $f^{-n}(R_n^i)$ é uma faixa cruzando \mathcal{Q} da esquerda para direita.
- (iii) Existem $2n$ pares de átomos que não são disjuntos: eles se intersectam nos pontos da órbita da tangência $(q, 0)$.
- (iv) Cada átomo R_{n+1}^i de \mathcal{P}_{n+1} pode ser obtido como $f^{-1}(f(R_n^j) \cap R_n^l) \cap f(f^{-1}(R_n^j) \cap R_n^k)$, onde $R_{n+1}^i \subset R_n^j$. Daí, para cada $-n + 1 \leq k \leq n - 1$, a imagem f^k de pontos no mesmo elemento de \mathcal{P}_n pertencem ao mesmo elemento de \mathcal{P}_1 .

Note que pelo item (iii) as partições \mathcal{P}_n não são realmente partições. Além disso, o bordo dos átomos de \mathcal{P}_n satisfazem a seguinte propriedade:

Propriedade 2.5 (Proposição 6.1 em [LR06]). *Existe uma constante $K > 0$ tal que o comprimento de ∂R_n^i é menor do que $K(\lambda^{\frac{n}{2}} + \rho^{-\frac{n}{2}})$.*

Então, segue o seguinte resultado:

Propriedade 2.6 (Proposição 6.2 em [LR06]). *Existe uma semiconjugação Φ Hölder-contínua, finita-para-um e sobrejetiva entre (Σ_3, σ) e (Λ, f) .*

Na Propriedade 2.6 as hipóteses garantem que a semiconjugação Φ é injetiva em um conjunto de medida total. Isto será suficiente para garantir o próximo resultado que é o objetivo principal desta seção.

Teorema 2.7 (Teorema B em [LR06]). *Dado qualquer potencial Hölder-contínuo φ em \mathcal{Q} , existe um único estado de equilíbrio ergódico μ para f , associado ao potencial φ .*

Para finalizar a seção, apresentaremos o resultado de [LR09] que garante a existência e unicidade de medidas conformes. Para isso, precisaremos da seguinte definição.

Definição 2.8. *Seja $t \in \mathbb{R}$. Definimos o potencial $\Psi_t : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\Psi_t(X) = -t \log J^u(X),$$

onde J^u é o jacobiano instável de f , isto é,

$$J^u(X) = \|Df(X)|_{E^u(X)}\|.$$

Iremos destacar duas propriedades deste potencial.

Propriedade 2.9. *O potencial Ψ_t não é contínuo em $\{(0, 0)\}$.*

Demonstração. Primeiramente, note que pela Propriedade 2.2, existem $E^s(Y)$ e $E^u(Y)$ para todo $Y \notin \mathcal{O}(q, 0)$. Além disso, como a órbita positiva de $(q, 0)$ satisfaz

$$\mathcal{O}^+(q, 0) \subset W_{loc}^s(0, 0) := [0, 1] \times \{0\},$$

podemos definir $E^s(X)$ para cada $X \in \mathcal{O}(q, 0)$ como o subespaço gerado pelo vetor $(\overrightarrow{1}, \overrightarrow{0})$. Daí, $E^s(X) = E^s(0, 0)$.

Por outro lado, como $\mathcal{O}(q, 0)$ é uma órbita de tangência, $E^u(X) = E^s(X)$ para todo $X \in \mathcal{O}(q, 0)$, donde concluímos que os subespaços $E^u(X)$ e $E^s(X)$ são gerados pelo vetor $(\overrightarrow{1}, \overrightarrow{0})$ para todo $X \in \mathcal{O}^+(q, 0)$.

Afirmção 2.10. *A aplicação $X \mapsto E^u(X)$ não é contínua em $(0, 0)$.*

Prova da Afirmção. De fato, suponha por absurdo que $X \mapsto E^u(X)$ é contínuo em $(0, 0)$. Do fato que $(q, 0) \in W^s(0, 0)$, temos que $X_n := f^n(q, 0) \rightarrow (0, 0)$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então, por continuidade,

$$E^u(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E^u(0, 0).$$

Mas, o espaço instável $E^u(0, 0)$ é gerado pelo vetor $(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1})$ e $E^u(X_n)$ é gerado pelo vetor $(\overrightarrow{1}, \overrightarrow{0})$ para todo $n \geq 0$, o que é um absurdo. \square_{Af} \square

Segue desta propriedade que Ψ_t não é Hölder-contínuo.

Propriedade 2.11. *Ψ_t é limitado.*

Demonstração. Segue de [CLR06] que para qualquer probabilidade ergódica μ ,

$$\frac{1}{2} \log \rho \leq \int \log J^u d\mu \leq \log(2\rho),$$

ou seja,

$$-t \log(2\rho) \leq \int \Psi_t d\mu \leq -t \frac{1}{2} \log \rho. \quad (2.2)$$

\square

Agora, daremos uma condição suficiente para a existência e unicidade da medida conforme μ_t que está associada a Ψ_t .

Teorema 2.12 (Teorema A em [LR09]). *Seja $t \geq 0$. Se $P_f(\Psi_t) > -t\frac{1}{2}\log\rho$, então existe um único estado de equilíbrio μ_t para f associado a Ψ_t .*

Observação 2.13. Maiores detalhes sobre a aplicação f , os parâmetros λ, ρ, c e também sobre os resultados apresentados nesta seção, podem ser encontrados em [Ri01], [CLR06], [LR06] e [LR06].

2.2 Perturbação de f

Agora, iremos apresentar a família de perturbações da aplicação f com a qual iremos trabalhar ao longo do texto.

Definição 2.14. *Seja $\bar{\varepsilon} > 0$. Definimos a família a um parâmetro $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})}$ de difeomorfismos C^2 de \mathcal{Q} por*

$$f_\varepsilon := T_\varepsilon \circ f : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

onde $T_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo C^2 satisfazendo:

- (i) T_0 é a identidade;
- (ii) $T_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} (x, y) & , (x, y) \in R'_1 \cup R'_3 \cup R'_5 \\ (x, y + \varepsilon) & , (x, y) \in R'_4 \end{cases} ; e$
- (iii) $\|T_\varepsilon - Id\|_{C^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

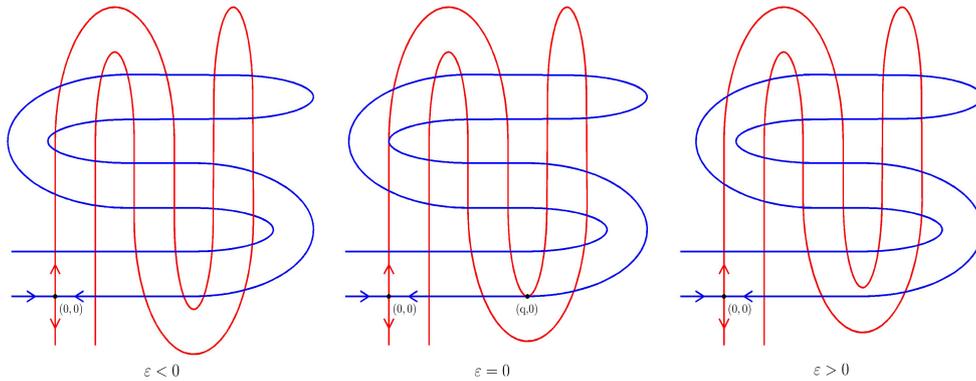


Figura 2.4: Perturbação f_ε

Segue imediatamente da definição acima que $f_0 = f$ e $\|f_\varepsilon - f\|_{C^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Além disso, segue por construção da aplicação f que:

- para todo $X = (x, y) \in R_4$, $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(X)$ é tangente à parábola

$$\mathbf{P} := \{(z, c(z - q)^2 - \lambda x + \varepsilon) \mid z \in \mathbb{R}\}. \quad (2.3)$$

Nesse caso, o valor absoluto da inclinação de $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(X)$ é $2\sqrt{c(\lambda x + y' - \varepsilon)}$, onde $f_\varepsilon(X) = (x', y')$.

- a família $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})}$ desdobra a tangência homoclínica $(q, 0)$, que ocorre quando $\varepsilon = 0$.

Observação 2.15. Apesar da família de perturbações definidas acima parecer bastante restrita, nos Teoremas $G - J$ no Capítulo 4 iremos apresentar perturbações mais gerais.

A seguir, apresentaremos outras propriedades da família $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})}$.

Lema 2.16. *Se $\bar{\varepsilon} > 0$ é suficientemente pequeno, então $Df_\varepsilon(X) = Df(X)$ para todo $X \in \Lambda_\varepsilon$ e para todo $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$.*

Demonstração. Quando $X \in R_1 \cup R_3 \cup R_5$, $T_\varepsilon(X) = X$ e, daí, o resultado é imediato. Quando $X \in R_2$ temos que $f(X) \notin \mathcal{Q}$, ou seja, $f_\varepsilon(X) \notin \mathcal{Q}$. Então, basta analisar quando $X \in R_4$. Neste caso, para $\bar{\varepsilon} > 0$ suficientemente pequeno, como $f_\varepsilon(X) = T_\varepsilon \circ f(X)$, $f(X) \in R'_4$ e T_ε é uma translação na região R'_4 , obtemos

$$Df_\varepsilon(X) = DT_\varepsilon(f(X)).Df(X) = Id.Df(X) = Df(X),$$

o que conclui o lema. □

Definição 2.17. *Para cada $X = (x, y) \in f_\varepsilon(R_4) \cap R_1$, denotaremos por*

$$\text{Inc}(X) := 2\sqrt{c(\lambda\tilde{x} + y - \varepsilon)}$$

o valor absoluto da inclinação da reta tangente a parábola \mathbf{P} dada por (2.3), onde $f_\varepsilon^{-1}(X) = (\tilde{x}, \tilde{y})$.

Lema 2.18. *Se $\bar{\varepsilon} > 0$ é suficientemente pequeno, então*

$$\max\{\text{Inc}(X) \mid X \in f_\varepsilon(R_4) \cap R_1\} = 2\sqrt{c(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)}$$

Demonstração. Segue da Definição 2.17 que quando $X = (x, y) \in f_\varepsilon(R_4) \cap R_1$, $\text{Inc}(X) = 2\sqrt{c(\lambda\tilde{x} + y - \varepsilon)}$, onde $f_\varepsilon^{-1}(X) = (\tilde{x}, \tilde{y})$. Iremos considerar $\bar{\varepsilon} < \lambda$ para garantir que $\lambda\tilde{x} + y - \varepsilon > 0$ para todo $y \in [0, \rho^{-1}]$ e todo $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$.

Agora, basta observar que a maior inclinação que $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(X)$ pode atingir na região $f_\varepsilon(R_4) \cap R_1$ é obtida nos pontos dados pela interseção entre a parábola mais baixa em $f_\varepsilon(R_4)$ (que ocorre quando $\tilde{x} = 1$, ou seja, $\mathbf{P} := \{(z, c(z - q)^2 - \lambda + \varepsilon) \mid z \in \mathbb{R}\}$) e a reta $\{(z, \rho^{-1}) \mid z \in [0, 1]\}$ (que é o bordo superior de R_1).

Logo,

$$\rho^{-1} = c(z - q)^2 - \lambda + \varepsilon \implies z = q \pm \sqrt{c^{-1}(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)}$$

e as coordenadas dos dois pontos de interseção são

$$X_1 = (q + \sqrt{c^{-1}(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)}, \rho^{-1}) \quad \text{e} \quad X_2 = (q - \sqrt{c^{-1}(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)}, \rho^{-1}).$$

Portanto, se $X \in \{X_1, X_2\}$, então $\text{Inc}(X)$ é máxima. Além disso, como a reta tangente a \mathbf{P} tem inclinação $2c(z - q)$, obtemos

$$\text{Inc}(X) = 2c\sqrt{c^{-1}(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)} = 2\sqrt{c(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)}.$$

□

Lema 2.19. *Se $X \in R_1 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5$ então $\|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(X)\| \leq \lambda$ e $\|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(X)\| \geq \rho$.*

Demonstração. Segue do Lema 2.16 que

$$Df_\varepsilon|_{R_1} = Df|_{R_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = Df|_{R_5} = Df_\varepsilon|_{R_5}$$

$$\text{e } Df_\varepsilon|_{R_3} = Df|_{R_3} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}.$$

Então, se $X \in R_1 \cup R_3 \cup R_5$,

$$\left\| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(X) \right\| = \lambda \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(X) \right\| = \rho.$$

Vamos analisar agora os pontos X na região R_4 . Observe que por construção da aplicação f , o maior valor de $\left\| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(X) \right\|$ em R_4 é atingido nos pontos $f_\varepsilon(q, 0) + (x, 0)$ para $x \in [0, 1]$, onde pelo item (v) da construção de f ,

$$\lambda = \left\| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(f_\varepsilon(q, 0) + (x, 0)) \right\| \leq \left\| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(X) \right\|.$$

Por outro lado, o valor mínimo de $\left\| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(X) \right\|$ em R_4 é atingido nos pontos que estão sobre o eixo y . Daí e pelo item (v) da construção de f segue que se $X \in R_4$,

$$\rho \leq \left\| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(0, y) \right\| \leq \left\| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(X) \right\|.$$

□

No próximo capítulo daremos uma estimativa mais precisa para $\bar{\varepsilon} > 0$.

2.3 A família de perturbações para $\varepsilon < 0$

Nesta seção iremos mostrar que quando $\varepsilon < 0$, a aplicação f_ε é um difeomorfismo axioma A. Além disso, utilizaremos os resultados clássicos da teoria de sistemas dinâmicos para demonstrar algumas propriedades de f_ε com as quais concluiremos a existência e unicidade de estados de equilíbrio para potenciais Hölder-contínuos. Discutiremos também sobre o potencial $-t \log \|Df_\varepsilon(X)|_{E_X^u}\|$ e a medida conforme $\mu_{\varepsilon,t}$.

Seja $\varepsilon < 0$ e considere o conjunto

$$\Lambda_\varepsilon := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_\varepsilon^n(\mathcal{Q}).$$

Observação 2.20. Iremos denotar $f_\varepsilon(R_i) = R'_i$, para $i = 1, \dots, 5$, utilizando a mesma notação da aplicação f . Quando for necessário distinguir as imagens de f e f_ε deixaremos claro no texto, sem permitir ambiguidades.

A primeira propriedade do sistema $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$ que iremos apresentar é a hiperbolicidade de Λ_ε .

Proposição 2.21. *Existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$, o conjunto Λ_ε é hiperbólico e transitivo.*

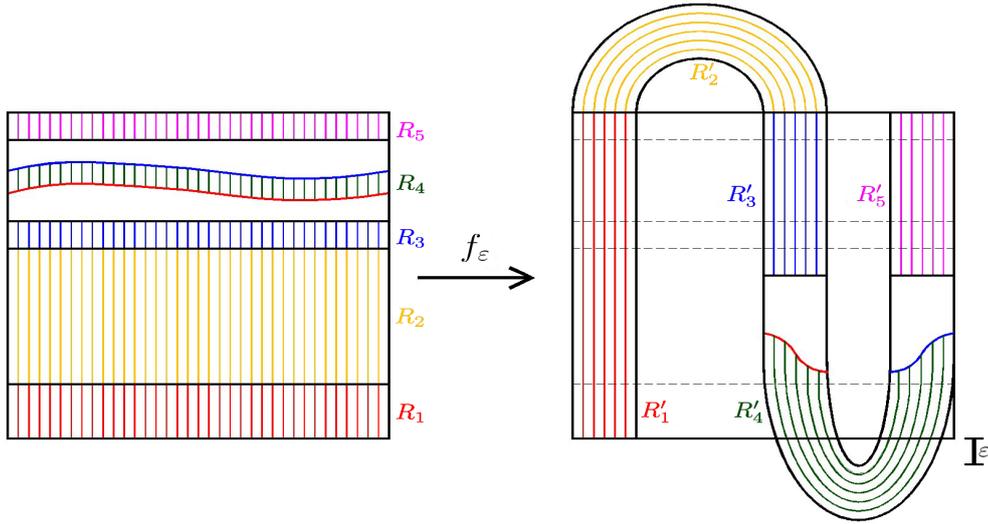


Figura 2.5: A aplicação f_ε com $\varepsilon < 0$

Demonstração. Seja $\bar{\varepsilon} > 0$ suficientemente pequeno tal que a imagem dos lados superior e inferior de R_4 ainda estejam contidas em R_2 . Então, segue de [Ri01, Teorema 2.2] que se a constante c é suficientemente grande, então Λ_ε é hiperbólico e transitivo. \square

Segue desta proposição o seguinte corolário.

Corolário 2.22. *Para todo $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$, a aplicação f_ε é um difeomorfismo axioma A.*

Demonstração. Seja $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$. Pela Proposição 2.21 temos que Λ_ε é hiperbólico. Então, segue da Proposição 1.9 que

$$\Omega(f_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon}) = \overline{\text{Per}(f_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon})}.$$

Mas, como $\Lambda_\varepsilon = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_\varepsilon^n(\mathcal{Q})$, concluímos que $\overline{\text{Per}(f_\varepsilon)} \subset \Omega(f_\varepsilon) \subset \Lambda_\varepsilon$. Portanto,

$$\Omega(f_\varepsilon) = \Omega(f_\varepsilon|_{\Lambda}) = \overline{\text{Per}(f_\varepsilon|_{\Lambda})} = \overline{\text{Per}(f_\varepsilon)},$$

ou seja, f_ε é um difeomorfismo axioma A. \square

A seguir, vamos construir uma conjugação entre f_ε e o *shift* de três símbolos.

Observe que da mesma forma que fizemos para a aplicação f , podemos definir para cada $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$ e cada $n \in \mathbb{N}$, uma partição de Markov $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ para o sistema $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$ com o comprimento do bordo de cada átomo R_n^ε indo para zero exponencialmente com n . Mas existe uma diferença importante entre as partições $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ e \mathcal{P}_n : como não existe ponto de tangência em Λ_ε , temos que os átomos de $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ são 2 a 2 disjuntos, ou seja, para todo $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$ e todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ é realmente uma partição.

Conseqüentemente, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.23. *Para cada $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$, existe uma conjugação Φ_ε Hölder-contínua entre os sistemas (Σ_3, σ) e $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$.*

Demonstração. Fixe $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$. Associaremos os números 0, 1 e 2 com as componentes de $f_\varepsilon(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{Q}$ da seguinte maneira: atribuiremos 0 para R'_1 , 1 para a componente conexa que contém R'_3 e 2 para a componente conexa que contém R'_5 (figura 2.5).

Como consequência do item (iv) da construção da partição $\mathcal{P}_n^\varepsilon$, as imagens por f_ε^k de todos os pontos nos átomos R_n^ε pertencem a mesma componente conexa $s_k = 0, 1, 2$ para todo $-n \leq k \leq n$. Daí, iremos associar à R_n^ε a palavra $[s_{-n}, \dots, s_n]$ de tamanho $2n + 1$. Observe que átomos distintos de $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ definem palavras diferentes, já que os átomos de $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ são 2 a 2 disjuntos.

Seja $\Phi_\varepsilon : \Sigma_3 \rightarrow \Lambda_\varepsilon$ a aplicação tal que para cada sequência $\underline{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_3$,

$$\Phi_\varepsilon(\underline{x}) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Phi_\varepsilon(C_n(\underline{x})),$$

onde $C_n(\underline{x}) = \{y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_3 \mid y_k = x_k, \forall -n \leq k \leq n\}$ (n -cilindro definido pela palavra central de \underline{x} de tamanho $2n + 1$) está associado ao único elemento R_n^ε de $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ que possui a mesma palavra central de $C_n(\underline{x})$.

Segue por construção que $\Phi_\varepsilon \circ \sigma = f_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$. Além disso, como para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ é realmente uma partição, a aplicação Φ_ε é injetiva.

Note que Φ_ε é sobrejetiva. De fato, para qualquer ponto $X \in \Lambda_\varepsilon$ podemos construir uma sequência \underline{x} da seguinte maneira: para cada $k \in \mathbb{Z}$, x_k é o número da única faixa vertical que contém $f_\varepsilon^k(X)$. Isto define uma sequência bi-infinita $\underline{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ em Σ_3 tal que $\Phi_\varepsilon(\underline{x}) = X$.

Afirmção 2.24. Φ_ε é Hölder-contínua

Prova da Afirmção. Para mostrar que Φ_ε é Hölder-contínua utilizaremos argumentos baseados no decaimento exponencial do diâmetro dos átomos de $\mathcal{P}_n^\varepsilon$. Como para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\underline{x} \in \Sigma_3$, $\Phi_\varepsilon(C_n(\underline{x})) = R_n^\varepsilon$, segue por construção de $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ e da proposição 2.5 que $\Phi_\varepsilon(C_n(\underline{x}))$ tem diâmetro menor que $K(\lambda^{\frac{n}{2}} + \rho^{-\frac{n}{2}})$, onde K é uma constante positiva.

Se $\underline{y} \in C_n(\underline{x})$, mas $\underline{y} \notin C_{n+1}(\underline{x})$, então $d(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2^n}$ e $\Phi_\varepsilon(\underline{x})$ e $\Phi_\varepsilon(\underline{y})$ pertencem ao mesmo átomo de $\mathcal{P}_n^\varepsilon$. Logo,

$$\|\Phi_\varepsilon(\underline{x}) - \Phi_\varepsilon(\underline{y})\| \leq K(\lambda^{\frac{n}{2}} + \rho^{-\frac{n}{2}}).$$

Tomando $\gamma = \min\{-\frac{\log \sqrt{\lambda}}{\log 2}, \frac{\log \sqrt{\rho}}{\log 2}\}$, temos que

$$\gamma \leq -\frac{\log \sqrt{\lambda}}{\log 2} \iff 2^\gamma \leq \lambda^{-\frac{1}{2}} \iff \lambda^{\frac{1}{2}} \leq 2^{-\gamma} \quad \text{e}$$

$$\gamma \leq \frac{\log \sqrt{\rho}}{\log 2} \iff 2^\gamma \leq \rho^{\frac{1}{2}} \iff \rho^{-\frac{1}{2}} \leq 2^{-\gamma},$$

ou seja, $\lambda^{\frac{n}{2}} \leq 2^{-n\gamma}$ e $\rho^{-\frac{n}{2}} \leq 2^{-n\gamma}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\|\Phi_\varepsilon(\underline{x}) - \Phi_\varepsilon(\underline{y})\| \leq K(2^{-n\gamma} + 2^{-n\gamma}) = 2K(2^{-n})^\gamma = 2K(d(\underline{x}, \underline{y}))^\gamma,$$

donde concluímos que Φ_ε é γ -Hölder contínua. \square Af.

A Afirmção 2.24 conclui a proposição. \square

Agora, vamos a existência e unicidade de estados de equilíbrio.

Teorema 2.25. Dado qualquer potencial Hölder-contínuo $\varphi : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$, existe um único estado de equilíbrio ergódico μ_ε para f_ε associado ao potencial φ .

Demonstração. Fixe $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$. Vimos na Proposição 2.21 e no Corolário 2.22 que a aplicação $f_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon}$ é um difeomorfismo axioma A transitivo. Logo, pela Proposição 1.41 segue que para todo potencial Hölder-contínuo $\varphi : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único estado de equilíbrio ergódico μ_ε para f_ε associado ao potencial φ . \square

O último resultado desta seção será sobre o formalismo termodinâmico para a aplicação f_ε . Começaremos com a definição do potencial $-t \log J_\varepsilon^u$ e em seguida apresentaremos as propriedades desta função.

Definição 2.26. *Sejam $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$ e $t \in \mathbb{R}$. Definimos o potencial $\Psi_{t,\varepsilon} : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\Psi_{t,\varepsilon}(X) = -t \log J_\varepsilon^u(X),$$

onde $J_\varepsilon^u(X) = \|Df_\varepsilon(X)|_{E_X^u}\|$ é o jacobiano instável de f_ε no ponto X .

Proposição 2.27. *Se $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$, então $\Psi_{t,\varepsilon}$ é Hölder-contínuo para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$. Como $f_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon}$ é um difeomorfismo axioma A, segue da Proposição 1.13 que $\Psi_{t,\varepsilon}$ é Hölder-contínuo para todo $t \in \mathbb{R}$. \square

Para concluir a seção, mostraremos a existência e unicidade da medida conforme $\mu_{t,\varepsilon}$.

Teorema 2.28. *Sejam $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$ e $t \in \mathbb{R}$. Então, existe um único estado de equilíbrio ergódico $\mu_{t,\varepsilon}$ de f_ε associado ao potencial $\Psi_{t,\varepsilon}$.*

Demonstração. A existência e a unicidade do estado de equilíbrio $\mu_{t,\varepsilon}$ seguem da Proposição 2.27 e do Teorema 2.25. \square

2.4 O caso $\varepsilon > 0$

Seja $\varepsilon > 0$ e consideremos $\Lambda_\varepsilon = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_\varepsilon^n(Q)$. Nosso objetivo nessa seção é encontrar

parâmetros $\varepsilon > 0$ que garantam boas propriedades para o sistema $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$, tais como hiperbolicidade, transitividade, existência e unicidade de estados de equilíbrio e de medidas conformes.

Vale ressaltar que o comportamento do sistema $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$ pode ser bastante complicado quando desdobramos a tangência $(q, 0)$ para cima. Como um exemplo destas dificuldades, em [KKY92] podemos encontrar o seguinte resultado:

Teorema 2.29 (Antimonotonicidade). *Em qualquer vizinhança de um valor de parâmetro onde há tangência homoclínica não-degenerada para uma família a um parâmetro de difeomorfismos C^3 dissipativos do plano, deve haver infinitos parâmetros onde há tanto criação quanto aniquilação de órbitas periódicas.*

Por outro lado, em [Ri01], podemos encontrar condições suficientes para a hiperbolicidade e transitividade de Λ_ε quando $\varepsilon > 0$. Apresentaremos estas hipóteses na Proposição ???. Além disso,

Teorema 2.30 (Teorema B em [Ri01]). *O parâmetro $\varepsilon = 0$ é um ponto de densidade de Lebesgue total para o conjunto de parâmetros $\varepsilon > 0$ para os quais Λ_ε é hiperbólico.*

Logo, podemos concluir que existem intervalos de parâmetros $\varepsilon > 0$ se acumulando em 0, onde Λ_ε é hiperbólico.

Com esta conclusão, nos fizemos os seguintes questionamentos: Que intervalos são estes? É possível determinar quais são os sistemas quando o parâmetro pertence ao bordo destes intervalos? Existem parâmetros no bordo destes intervalos onde o sistema possui órbitas de tangências?

Conseguimos responder alguns destes questionamentos através do resultado abaixo, onde mostramos a existência de intervalos de parâmetros cujo bordo é formado por sistemas que possuem um número finito de tangências homoclínicas e heteroclínicas.

Teorema A. *Existem intervalos abertos e limitados $(I_n)_{n \geq 3} \subset (0, +\infty)$ de parâmetros tais que $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$ é um sistema hiperbólico e transitivo para todo $\varepsilon \in I_n$. Além disso, os intervalos I_n se acumulam em 0 quando $n \rightarrow +\infty$ e, para cada $n \geq 3$, no bordo de I_n , $\partial I_n = \{\varepsilon_-(n), \varepsilon_+(n)\}$, é tal que $(\Lambda_{\varepsilon_-(n)}, f_{\varepsilon_-(n)})$ possui uma órbita de tangência homoclínica e $(\Lambda_{\varepsilon_+(n)}, f_{\varepsilon_+(n)})$ possui uma órbita de tangência heteroclínica.*

Observação 2.31. No Teorema A, a hipótese $n \geq 3$ é devido ao fato que o bordo de I_n irá depender λ^{n-1} e do fato que iremos assumir que os parâmetros $\varepsilon > 0$ satisfazem $\varepsilon < \lambda^2$.

Apresentaremos a prova deste resultado na próxima subseção. Agora, daremos algumas definições e propriedades da aplicação f_ε .

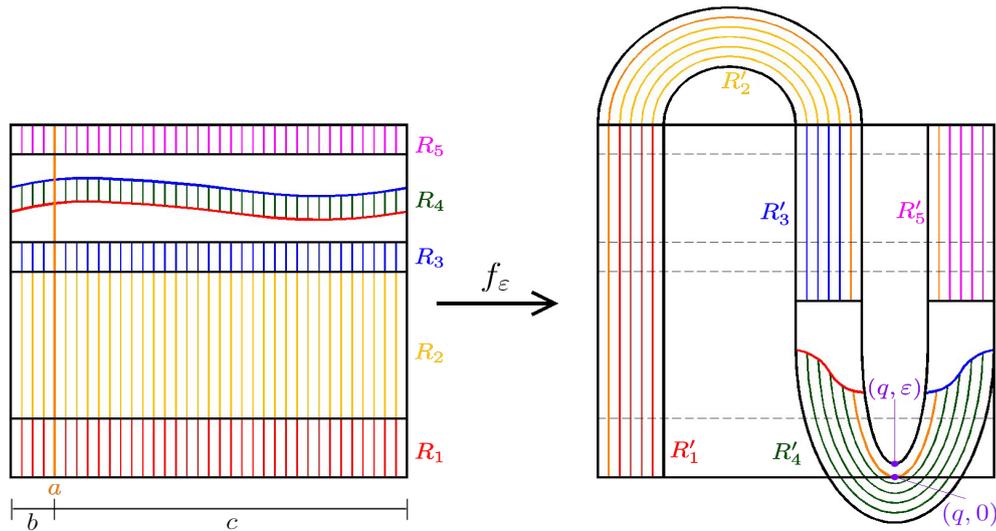


Figura 2.6: A aplicação f_ε com $\varepsilon > 0$.

(a) Existem subconjuntos R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 de \mathcal{Q} exatamente como para a aplicação f (figura 2.6). Apenas a imagem do conjunto R_4 é transladada para cima em ε unidades, isto é, para cada $x_0 \in [0, 1]$,

$$f_\varepsilon(\{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cap R_4) \subset \{(x, g_{x_0}(x)) \mid g_{x_0}(x) = c(x - q)^2 - \lambda x_0 + \varepsilon\}.$$

Além disso, para os números q e r (lembre que $f(0, r) = (q, 0)$ e $(0, r)$ e $(q, 0)$ são pontos da órbita de tangência de f) temos que

$$f_\varepsilon(0, r) = (q, \varepsilon).$$

Iremos considerar $f_\varepsilon(R_i) = R'_i$ para cada $i = 1, \dots, 5$.

(b) Segue de [Ri01, Pag. 435] que a aplicação que descreve f_ε em R_4 é dada por

$$(x, y) \in R_4 \longmapsto (\rho(y - r)e^{2cs} + q, c\rho^2(y - r)^2 - s), \quad (2.4)$$

onde s é tal que

$$\lambda x = c(\rho(y - r)e^{2cs})^2 - c\rho^2(y - r)^2 + s + \varepsilon. \quad (2.5)$$

Lema 2.32. $f_\varepsilon([0, 1] \times \{r\}) = \{q\} \times [\varepsilon - \lambda, \varepsilon]$, onde

$$f_\varepsilon(1, r) = (q, \varepsilon - \lambda) \text{ e } f_\varepsilon(\lambda^{-1}\varepsilon, r) = (q, 0).$$

Demonstração. Sejam $x \in [0, 1]$ e $y = r$. Então, pela equação (2.4) temos que $f_\varepsilon(x, y) = (q, -s)$ e, pela equação (2.5), $\lambda x = s + \varepsilon$, ou seja, $s \in [-\varepsilon, \lambda - \varepsilon]$. Logo, $f_\varepsilon(x, y) \in \{q\} \times [\varepsilon - \lambda, \varepsilon]$. Além disso,

- quando $x = 1$, $s = \lambda - \varepsilon$. Daí, $f_\varepsilon(1, r) = (q, \varepsilon - \lambda)$; e
- quando $x = \lambda^{-1}\varepsilon$, $s = 0$. Portanto, $f_\varepsilon(\lambda^{-1}\varepsilon, r) = (q, 0)$,

o que conclui o lema. □

(c) Considere uma folheação \mathcal{F} de $f_\varepsilon(R_4) = R'_4$ cujas folhas são imagens de linhas verticais em R_4 pela aplicação f_ε . Então, as folhas de \mathcal{F} são parabólicas na região R'_4 . Seja $\mathbf{P}_{x_0} \in \mathcal{F}$ a parábola que contém o ponto $(q, \varepsilon - \lambda x_0)$. Daí,

$$\mathbf{P}_{x_0} \subset \{(x, g_{x_0}(x)) \mid g_{x_0}(x) = c(x - q)^2 - \lambda x_0 + \varepsilon\}, \quad (2.6)$$

onde $x_0 \in [0, 1]$. Logo, segue do Lema 2.32 que

- quando $x_0 = \lambda^{-1}\varepsilon$, $([0, 1] \times \{0\}) \cap \mathbf{P}_{x_0} = \{(q, 0)\}$ (a na Figura 2.6);
- para todo $x_0 \in [0, \lambda^{-1}\varepsilon)$, $([0, 1] \times \{0\}) \cap \mathbf{P}_{x_0} = \emptyset$ (b na Figura 2.6);
- para todo $x_0 \in (\lambda^{-1}\varepsilon, 1]$, $([0, 1] \times \{0\}) \cap \mathbf{P}_{x_0} = \{X, Y\}$ (c na Figura 2.6), onde

$$X = (q - \sqrt{c^{-1}(\lambda x_0 - \varepsilon)}, 0) \text{ e } Y = (q + \sqrt{c^{-1}(\lambda x_0 - \varepsilon)}, 0);$$

- $\{(x, y) \mid x < q, y = \rho^{-1}\} \cap R'_4 = [x_1, x_2] \times \{\rho^{-1}\}$ (d na Figura 2.7), onde

$$x_1 = q - \sqrt{c^{-1}(\rho^{-1} + \lambda - \varepsilon)} \text{ e } x_2 = q - \sqrt{c^{-1}(\rho^{-1} - \varepsilon)}, \quad (2.7)$$

já que $(x_1, \rho^{-1}) \in \mathbf{P}_1$ e $(x_2, \rho^{-1}) \in \mathbf{P}_0$;

- $\{(x, y) \mid x > q, y = \rho^{-1}\} \cap R'_4 = [x_3, x_4] \times \{\rho^{-1}\}$ (e na Figura 2.7), onde

$$x_3 = q + \sqrt{c^{-1}(\rho^{-1} - \varepsilon)} \text{ e } x_4 = q + \sqrt{c^{-1}(\rho^{-1} + \lambda - \varepsilon)}, \quad (2.8)$$

já que $(x_3, \rho^{-1}) \in \mathbf{P}_0$ e $(x_4, \rho^{-1}) \in \mathbf{P}_1$;

- $\{(x, y) \mid y = 0\} \cap R'_4 = [x_5, x_6] \times \{0\}$ (f na Figura 2.7), onde

$$x_5 = q - \sqrt{c^{-1}(\lambda - \varepsilon)} \text{ e } x_6 = q + \sqrt{c^{-1}(\lambda - \varepsilon)},$$

já que $(x_5, 0), (x_6, 0) \in \mathbf{P}_1$.

(d) Seja $\alpha \in (\rho^{-1}, r)$ tal que

$$[0, 1] \times \{\alpha\} := \overline{R_2} \cap R_3. \quad (2.9)$$

Para propósitos futuros, iremos considerar

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}. \quad (2.10)$$

Como $R_2 \cap \Lambda_\varepsilon = \emptyset$, podemos descrever o conjunto

$$\mathcal{Q} \cap f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{Q} \setminus R_2) = f_\varepsilon^{-1}(f_\varepsilon(\mathcal{Q}) \cap (\mathcal{Q} \setminus R_2))$$

da seguinte maneira (figura 2.7):

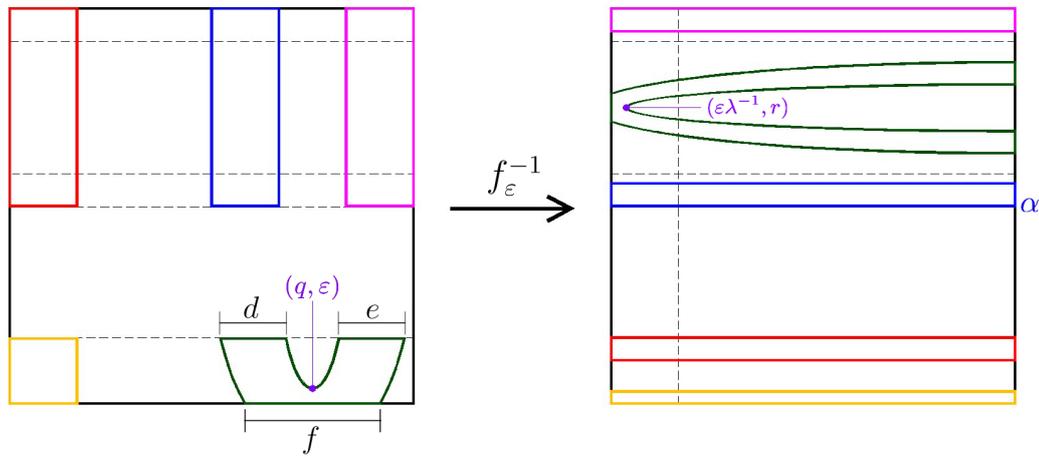


Figura 2.7: Os conjuntos $f_\varepsilon(\mathcal{Q}) \cap (\mathcal{Q} \setminus R_2)$ e $\mathcal{Q} \cap f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{Q} \setminus R_2)$.

- existem duas faixas horizontais contidas em R_1 :

$$[0, 1] \times [0, \rho^{-2}] \text{ e } [0, 1] \times [\rho^{-1}\alpha, \rho^{-1}],$$

onde $[0, 1] \times (\rho^{-2}, \rho^{-1}\alpha) \subset f_\varepsilon^{-1}(R_2)$. Note que para os pontos na região $R'_1 = \{(x, y) \in \mathcal{Q} \mid x \leq \lambda\}$,

$$f_\varepsilon^{-1}(x, y) = (\lambda^{-1}x, \rho^{-1}y);$$

- existe uma faixa horizontal em R_3 contendo $[0, 1] \times \{\alpha\}$ que é pré-imagem de $R'_3 \setminus R_2$. Denotaremos esta faixa por

$$[0, 1] \times [\alpha, \alpha + \varsigma], \quad (2.11)$$

onde $\varsigma > 0$ é dado por

$$\varsigma := (1 - \alpha)\rho^{-1}; \quad (2.12)$$

- existe uma faixa horizontal em R_5 contendo $[0, 1] \times \{1\}$ que é pré-imagem de $R'_5 \setminus R_2$. Denotaremos esta faixa por

$$[0, 1] \times [1 - \varsigma, 1];$$

- a pré-imagem de $R'_4 \setminus R_2$ é a região contida em \mathcal{Q} e limitada pelas curvas

$$f_\varepsilon^{-1}([x_1, x_2] \times \{\rho^{-1}\}), \quad f_\varepsilon^{-1}([x_3, x_4] \times \{\rho^{-1}\}) \quad \text{e} \quad f_\varepsilon^{-1}([x_5, x_6] \times \{0\}).$$

Observação 2.33. Para cada $y_0 \in [0, \rho^{-1}]$, segue das propriedades (c) e (d) e das equações (2.4) e (2.5) que (figura 2.8):

- $\{f_\varepsilon^{-1}(R'_4 \cap ([0, 1] \times \{y_0\})) \mid y_0 \in [0, \varepsilon]\}$ é uma família de curvas tal que para todo $y_0 \in [0, \varepsilon]$, $f_\varepsilon^{-1}(R'_4 \cap ([0, 1] \times \{y_0\}))$ é tangente ao segmento $\{\lambda^{-1}(\varepsilon - y_0)\} \times [0, 1]$ no ponto $(\lambda^{-1}(\varepsilon - y_0), r)$;
- $\{f_\varepsilon^{-1}(R'_4 \cap ([0, q] \times \{y_0\})) \mid y_0 \in (\varepsilon, \rho^{-1}]\}$ é uma família de curvas que estão abaixo da reta $\{y = r\}$ e cruzam \mathcal{Q} ;
- $\{f_\varepsilon^{-1}(R'_4 \cap ([q, 1] \times \{y_0\})) \mid y_0 \in (\varepsilon, \rho^{-1}]\}$ é uma família de curvas que estão acima da reta $\{y = r\}$ e cruzam \mathcal{Q} ;

Em particular, quando $y_0 = \rho^{-1}$, $f_\varepsilon^{-1}([x_1, x_2] \times \{\rho^{-1}\})$ e $f_\varepsilon^{-1}([x_3, x_4] \times \{\rho^{-1}\})$ são curvas ligando $\{0\} \times [0, 1]$ a $\{1\} \times [0, 1]$. E, quando $y_0 = 0$, a curva $f_\varepsilon^{-1}([x_5, x_6] \times \{0\})$ é tangente ao segmento $\{\lambda^{-1}\varepsilon\} \times [0, 1]$ no ponto $(\lambda^{-1}\varepsilon, r)$ e liga dois pontos de $\{1\} \times [0, 1]$.

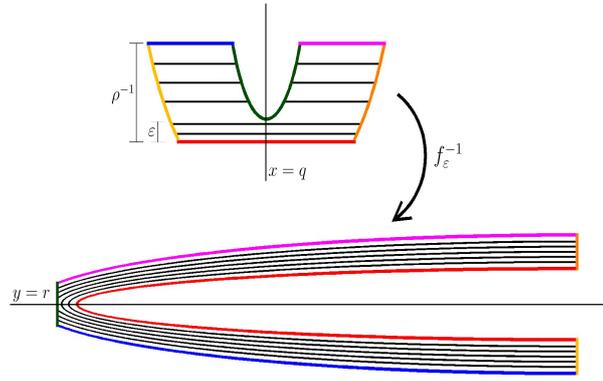


Figura 2.8: Folheação em $f_\varepsilon^{-1}(R'_4 \setminus R_2)$.

2.4.1 Intervalos de hiperbolicidade

Definição 2.34. Seja $n \geq 3$ e considere a seguinte equação:

$$\mathbf{P}(x) = c(x - q)^2 + \lambda^{n-1}x - \lambda - \rho^{-n+2}r. \quad (2.13)$$

Definimos β como sendo o menor número real tal que $\mathbf{P}(\beta) = 0$.

Observação 2.35. Note que o polinômio $\mathbf{P}(x)$ da equação 2.13 é dado pela interseção da curva $f_\varepsilon^{-n}([x_5, x_6] \times \{0\})$ e a parábola (mais baixa de R'_4)

$$\mathbf{P}_1 \subset \{(x, g_1(x)) \mid g_1(x) = c(x - q)^2 - \lambda + \varepsilon\}.$$

Assim, o número β será utilizado para garantir que a órbita passada do ponto crítico $(q, 0)$ pertença ao *gap* entre R'_1 e R'_4 (Figura 2.9(b)).

Quando $\varepsilon := \lambda^{n-1}\beta$, segue da Definição 2.34 que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{P}(\beta) = \mathbf{P}(\lambda^{-n+1}\varepsilon) = c(\lambda^{-n+1}\varepsilon - q)^2 + \varepsilon - \lambda - \rho^{-n+2}r \\ \iff &\rho^{-n+2}r = c(\lambda^{-n+1}\varepsilon - q)^2 + \varepsilon - \lambda, \end{aligned}$$

ou seja, o ponto $(\lambda^{-n+1}\varepsilon, \rho^{-n+2}r) = (\beta, \rho^{-n+2}r)$ pertence a parábola \mathbf{P}_1 , onde

$$\mathbf{P}_1 \subset \{(x, g_1(x)) \mid g_1(x) = c(x - q)^2 - \lambda + \varepsilon\}.$$

Além disso, como $f_\varepsilon^{-1}(q, 0) = (\lambda^{-1}\varepsilon, r) \in R'_1$, quando $\varepsilon := \lambda^{n-1}\beta$ temos que $f_\varepsilon^{-k}(q, 0) \in R'_1$ para todo $k = 1, 2, \dots, n - 2$. Logo, do fato que $f_\varepsilon^{-1}|_{R'_1}(x, y) = (\lambda^{-1}x, \rho^{-1}y)$, obtemos

$$f_\varepsilon^{-n+2}(q, 0) = (\lambda^{-n+2}\varepsilon, \rho^{-n+3}r) \in R'_1$$

e, portanto,

$$f_\varepsilon^{-n+1}(q, 0) = (\lambda^{-n+1}\varepsilon, \rho^{-n+2}r) = (\beta, \rho^{-n+2}r).$$

Assim, quando $\varepsilon := \lambda^{n-1}\beta$, concluímos que $f_\varepsilon^{-n+1}(q, 0) \in \mathbf{P}_1$ (Figura 2.9(a)).

Por outro lado, note que se $\varepsilon < \lambda^{n-1}\beta$ (Figura 2.9(b)), então

$$\lambda^{-n+1}\varepsilon < x_7,$$

onde $(x_7, \rho^{-n+2}r) \in \mathbf{P}_1$ é dado por

$$x_7 := q - \sqrt{c^{-1}(\rho^{-n+2}r + \lambda - \varepsilon)}.$$

Logo, $f_\varepsilon^{n-2}(x_7, \rho^{-n+2}r) = (\lambda^{n-2}x_7, r) \in R_4$ e, pelo Lema 2.32,

$$f_\varepsilon^{n-1}(x_7, \rho^{-n+2}r) = (q, \varepsilon - \lambda^{n-1}x_7).$$

Como $\lambda^{-n+1}\varepsilon < x_7$ e $f_\varepsilon^{n-1}(\lambda^{-n+1}\varepsilon, \rho^{-n+2}r) = (q, 0)$, obtemos

$$\varepsilon - \lambda^{n-1}x_7 < 0.$$

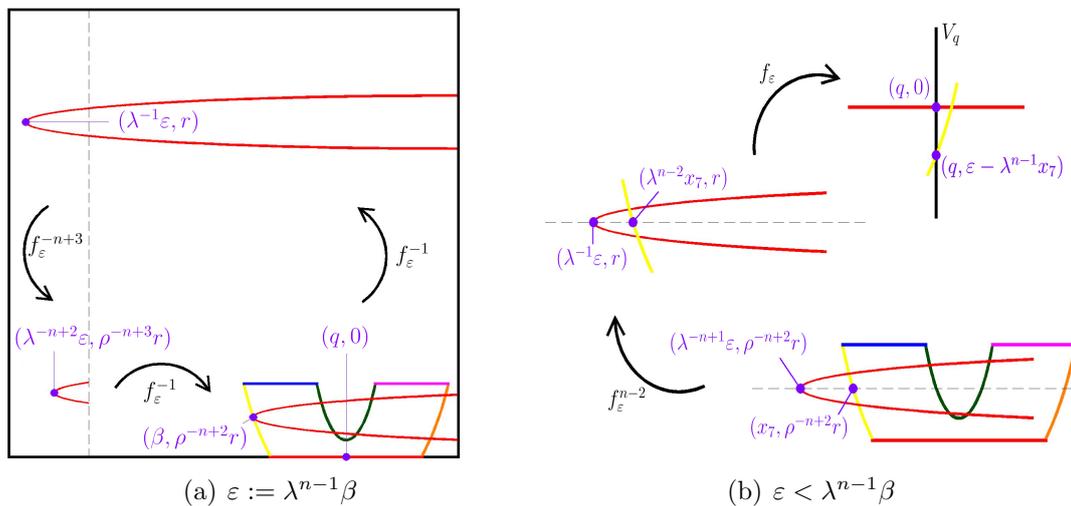


Figura 2.9: O número real β .

Lema 2.36. Para $c > 0$ suficientemente grande, o número β está bem definido. Além disso, $0 < \beta < q$.

Demonstração. Primeiramente, observe que o discriminante da equação $\mathbf{P}(x) = 0$ é positivo. De fato,

$$\begin{aligned}\Delta &= (\lambda^{n-1} - 2cq)^2 - 4c(cq^2 - \lambda - \rho^{-n+2}r) \\ &= \lambda^{2n-2} - 4cq\lambda^{n-1} + 4c^2q^2 - 4c^2q^2 + 4c\lambda + 4c\rho^{-n+2}r \\ &= \lambda^{2n-2} + 4c(-q\lambda^{n-1} + \lambda + \rho^{-n+2}r)\end{aligned}$$

e, como $q \in [\frac{2}{3}, 1]$ e $\lambda \in (0, \frac{1}{3})$, obtemos

$$q < \lambda^{-1} \stackrel{n \geq 3}{\leq} \lambda^{-n+2} \iff q\lambda^{n-1} < \lambda,$$

donde concluímos que $\Delta > 0$.

Sejam β_1 e β_2 as soluções da equação (2.13) tais que $\beta_1 < \beta_2$. Então,

$$\beta_1 + \beta_2 = -\frac{\lambda^{n-1} - 2cq}{c} \quad \text{e} \quad \beta_1\beta_2 = \frac{cq^2 - \lambda - \rho^{-n+2}r}{c}.$$

Como $q, r \in [\frac{2}{3}, 1]$ e $\lambda, \rho^{-1} \in (0, \frac{1}{3})$ temos que para $c > 1$,

$$\lambda^{n-1} < \frac{1}{3} < q < 2cq$$

e, se $c > \frac{3}{2}$,

$$\lambda + \rho^{-n+2}r \stackrel{n \geq 3}{<} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} < cq^2,$$

ou seja, para $c > 0$ suficientemente grande, $\beta_1 + \beta_2 > 0$ e $\beta_1\beta_2 > 0$. Logo, basta definir $\beta := \beta_1 > 0$.

Por outro lado, como a derivada segunda de \mathbf{P} satisfaz

$$\mathbf{P}''(x) = 2c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e, além disso,

$$\mathbf{P}(q) = \lambda^{n-1}q - \lambda - \rho^{-n+2}r \stackrel{0 < \lambda, q < 1}{<} -\rho^{-n+2}r < 0,$$

concluimos que $\beta = \beta_1 < q < \beta_2$. □

Seja α dado pela equação (2.9). Dado $n \geq 3$, iremos escolher $\lambda < \frac{1}{3}$, $\rho > 3$ e $\alpha \in (\rho^{-1}, r)$ tal que

$$\alpha < (\lambda\rho)^{n-1}\beta. \tag{2.14}$$

O Teorema A será consequência do próximo resultado.

Teorema 2.37. *Seja $n \geq 3$ e considere α satisfazendo (2.14). Se $\varepsilon > 0$ é tal que*

$$\lambda^n + \rho^{-n} < \varepsilon < \rho^{-n+1}\alpha, \tag{2.15}$$

então $(f_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon)$ é um sistema hiperbólico e transitivo. Senão, quando:

- (i) $\varepsilon = \varepsilon_- := \lambda^n + \rho^{-n}$, $(f_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon)$ possui uma órbita de tangência homoclínica externa associada ao ponto fixo hiperbólico $(1, 1)$;
- (ii) $\varepsilon = \varepsilon_+ := \rho^{-n+1}\alpha$, $(f_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon)$ possui uma órbita de tangência heteroclínica interna que passa pelo ponto $(0, r) \in W^u(0, 0) \cap W^s(1, 1)$.

Demonstração. Seja

$$V_q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = q\}$$

a reta vertical sobre $(q, 0)$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, considere

$$\Lambda_{\varepsilon, k}^+ = \bigcap_{j=1}^k f_\varepsilon^j(\mathcal{Q}), \quad \Lambda_{\varepsilon, k}^- = \bigcap_{j=0}^k f_\varepsilon^{-j}(\mathcal{Q}) \quad \text{e} \quad \Lambda_{\varepsilon, k} = \Lambda_{\varepsilon, k}^+ \cap \Lambda_{\varepsilon, k}^-.$$

Segue do Lema 2.32 que

$$V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, k}^+ \subset \{q\} \times [\varepsilon - \lambda, \varepsilon] \quad (2.16)$$

para todo $k \geq 1$. Além disso, como $[0, 1] \times \{\rho^{-k+l+1}r\} \subset R_1$ para todo $l = 0, 1, \dots, k-2$, temos que

$$f_\varepsilon^{k-1}([0, 1] \times \{\rho^{-k+1}r\}) = [0, \lambda^{k-1}] \times \{r\}$$

e, novamente pelo Lema 2.32,

$$f_\varepsilon^k([0, 1] \times \{\rho^{-k+1}r\}) = \{q\} \times [\varepsilon - \lambda^k, \varepsilon],$$

ou seja,

$$\{q\} \times [\varepsilon - \lambda^k, \varepsilon] \subset V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, k}^+ \quad (2.17)$$

para todo $k \geq 2$.

Fixe $n \geq 3$ e seja $\varepsilon > 0$ satisfazendo a equação (2.15). Daí,

$$\varepsilon < \rho^{-n+1}\alpha \stackrel{(2.14)}{<} \lambda^{n-1}\beta \stackrel{\beta < q}{<} \lambda^{n-1}q \stackrel{q < 1}{<} \lambda^{n-1} \quad (2.18)$$

e, então, segue das equações (2.16) e (2.17) que $\{q\} \times [\varepsilon - \lambda^{n-1}, \varepsilon]$ é a única componente de $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, n-1}^+$ que tem interseção não vazia com \mathcal{Q} . Como $(V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, k}^+)_{k \geq 1}$ é uma seqüência encaixada, basta analisarmos o que acontece no intervalo $\{q\} \times [\varepsilon - \lambda^{n-1}, \varepsilon]$.

Gostaríamos de ressaltar que como $\varepsilon < \lambda^{n-1}\beta$ (equação (2.18)), segue da Observação 2.35 que

$$f_\varepsilon^{-n+1}(q, 0) = (\lambda^{-n+1}\varepsilon, \rho^{-n+2}r) \in R_1 \setminus (R'_1 \cup R'_4)$$

e, portanto, $\mathcal{O}(q, 0) \cap \Lambda_\varepsilon = \emptyset$.

Afirmção 2.38. *O conjunto $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, n}^+$ possui três intervalos compactos disjuntos contidos em $\{q\} \times [\varepsilon - \lambda^{n-1}, \varepsilon]$.*

Prova da Afirmção. Seja o conjunto

$$([0, 1] \times \{\rho^{-n+2}r\}) \cap f_\varepsilon(\mathcal{Q}) \subset R'_1 \cup R'_4,$$

onde $R'_1 \cup R'_4 \subset \Lambda_{\varepsilon, 1}^+$ (Figura 2.10). Como

$$\varepsilon < \rho^{-n+1}\alpha < \rho^{-n+1}r \stackrel{\rho^{-1} < 1}{<} \rho^{-n+2}r,$$

concluimos que

$$([0, 1] \times \{\rho^{-n+2}r\}) \cap f_\varepsilon(\mathcal{Q}) = ([0, \lambda] \cup [\bar{x}_1, \bar{x}_2] \cup [\bar{x}_3, \bar{x}_4]) \times \{\rho^{-n+2}r\}$$

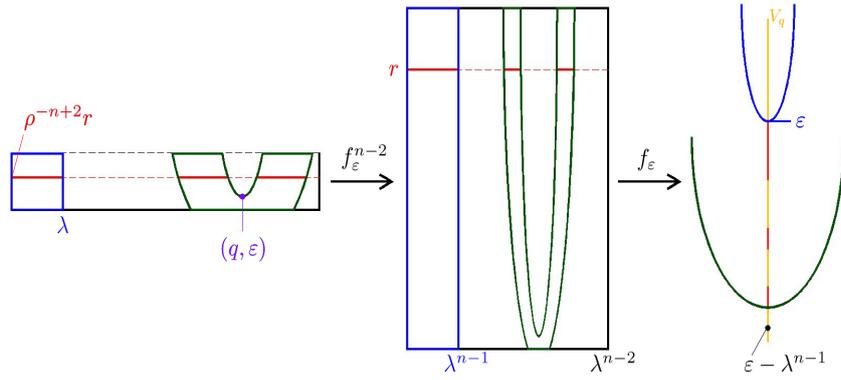


Figura 2.10: O conjunto $([0, 1] \times \{\rho^{-n+2}r\}) \cap f_\varepsilon(\mathcal{Q})$.

com

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= q - \sqrt{c^{-1}(\rho^{-n+2}r + \lambda - \varepsilon)}, & \bar{x}_2 &= q - \sqrt{c^{-1}(\rho^{-n+2}r - \varepsilon)}, \\ \bar{x}_3 &= q + \sqrt{c^{-1}(\rho^{-n+2}r - \varepsilon)} & \text{e } \bar{x}_4 &= q + \sqrt{c^{-1}(\rho^{-n+2}r + \lambda - \varepsilon)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Logo, do fato que $[0, 1] \times \{\rho^{-n+2+k}r\} \subset R_1$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-3$, temos que

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^{n-2} \left(([0, 1] \times \{\rho^{-n+2}r\}) \cap f_\varepsilon(\mathcal{Q}) \right) &= \\ &= ([0, \lambda^{n-1}] \cup [\bar{x}_1\lambda^{n-2}, \bar{x}_2\lambda^{n-2}] \cup [\bar{x}_3\lambda^{n-2}, \bar{x}_4\lambda^{n-2}]) \times \{r\} \\ &\subset [0, \lambda^{n-2}] \times \{r\} \subset R_4 \end{aligned}$$

e, portanto, segue do Lema 2.32 que

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^{n-1} \left(([0, 1] \times \{\rho^{-n+2}r\}) \cap f_\varepsilon(\mathcal{Q}) \right) &= \\ &= \{q\} \times ([\varepsilon - \bar{x}_4\lambda^{n-1}, \varepsilon - \bar{x}_3\lambda^{n-1}] \cup [\varepsilon - \bar{x}_2\lambda^{n-1}, \varepsilon - \bar{x}_1\lambda^{n-1}] \cup [\varepsilon - \lambda^n, \varepsilon]) \\ &\subset \{q\} \times [\varepsilon - \lambda^{n-1}, \varepsilon], \end{aligned} \quad (2.20)$$

ou seja, $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, n}^+$ possui três intervalos compactos disjuntos contidos em $[\varepsilon - \lambda^{n-1}, \varepsilon]$, o que conclui a afirmação. \square_{Af} .

Afirmação 2.39. A única componente de $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, n}^+$ que intersecta \mathcal{Q} é o intervalo $\{q\} \times [\varepsilon - \lambda^n, \varepsilon]$.

Prova da Afirmação. De fato, segue da equação (2.15) que $\varepsilon - \lambda^n > \rho^{-n} > 0$, isto é,

$$\{q\} \times [\varepsilon - \lambda^n, \varepsilon] \subset \mathcal{Q}.$$

Além disso, a equação (2.18) garante que $\varepsilon\lambda^{-n+1} < \beta < q$. Daí, pela equação (2.13) e pelo Lema 2.36,

$$\begin{aligned} 0 &< \mathbf{P}(\varepsilon\lambda^{-n+1}) = c(\varepsilon\lambda^{-n+1} - q)^2 + \varepsilon - \lambda - \rho^{-n+2}r \\ &\iff (q - \varepsilon\lambda^{-n+1})^2 > c^{-1}(\rho^{-n+2}r + \lambda - \varepsilon) > 0 \\ &\iff \varepsilon\lambda^{-n+1} < q - \sqrt{c^{-1}(\rho^{-n+2}r + \lambda - \varepsilon)} \stackrel{(2.19)}{=} \bar{x}_1 \\ &\iff \varepsilon - \bar{x}_1\lambda^{n-1} < 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3 < \bar{x}_4$, a equação (2.20) nos dá

$$\left(\{q\} \times ([\varepsilon - \bar{x}_4\lambda^{n-1}, \varepsilon - \bar{x}_3\lambda^{n-1}] \cup [\varepsilon - \bar{x}_2\lambda^{n-1}, \varepsilon - \bar{x}_1\lambda^{n-1}]) \right) \cap \mathcal{Q} = \emptyset.$$

Logo, pela Afirmação 2.38, $\{q\} \times [\varepsilon - \lambda^n, \varepsilon]$ é o único subconjunto de $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, n}^+$ que intersecta \mathcal{Q} . \square_{Af}

Afirmação 2.40. *O intervalo $\{q\} \times [\varepsilon - \lambda^n, \varepsilon]$ não intersecta $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, n}^-$.*

Prova da Afirmação. Com efeito, observe que

$$([0, 1] \times (\rho^{-n}, \rho^{-n+1}\alpha)) \cap (V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, n}^-) = \emptyset,$$

já que por construção de f_ε ,

$$[0, 1] \times (\rho^{-n}, \rho^{-n+1}\alpha) = f_\varepsilon^{-n+1}([0, \lambda^{n-1}] \times (\rho^{-1}, \alpha)),$$

$[0, \lambda^{n-1}] \times (\rho^{-1}, \alpha) \subset R_2$ e $f_\varepsilon(R_2) \cap \mathcal{Q} = \emptyset$.

Por outro lado, segue de (2.15) que

$$[\varepsilon - \lambda^n, \varepsilon] \subset (\rho^{-n}, \rho^{-n+1}\alpha),$$

o que conclui a afirmação (Figura 2.11). \square_{Af}

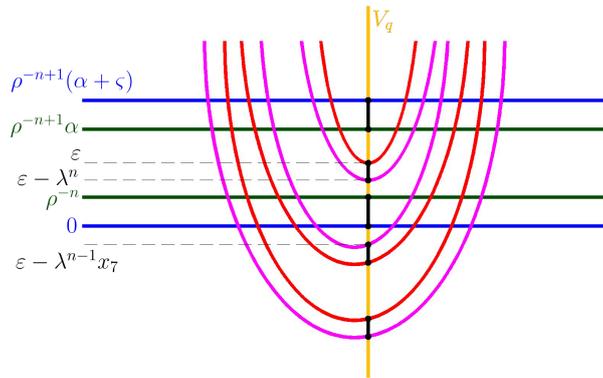


Figura 2.11: Os conjuntos $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, n}^+$ e $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon, n}^-$.

Afirmação 2.41. Λ_ε é hiperbólico e transitivo para todo $\varepsilon \in I_n$.

Prova da Afirmação. A prova desta afirmação seguirá da construção de um campo de cones que será realizada no Capítulo 3 (Proposição 3.9 e Observação 3.13). \square_{Af}

Agora, vamos provar os itens (i) e (ii). Primeiramente, note que as faixas

$$[0, 1] \times [0, \rho^{-n}], \quad [0, 1] \times [\rho^{-n+1}\alpha, \rho^{-n+1}(\alpha + \varsigma)] \quad \text{e} \quad [0, 1] \times [\rho^{-n+1}(1 - \varsigma), \rho^{-n+1}],$$

estão contidas em $\Lambda_{\varepsilon, n}^-$, já que

$$[0, 1] \times [0, \rho^{-n}] = f_\varepsilon^{-n+1}([0, \lambda^{n-1}] \times [0, \rho^{-1}]),$$

$$[0, 1] \times [\rho^{-n+1}\alpha, \rho^{-n+1}(\alpha + \varsigma)] = f_\varepsilon^{-n+1}([0, \lambda^{n-1}] \times [\alpha, \alpha + \varsigma]) \quad \text{e}$$

$$[0, 1] \times [\rho^{-n+1}(1 - \varsigma), \rho^{-n+1}] = f_\varepsilon^{-n+1}([0, \lambda^{n-1}] \times [1 - \varsigma, 1]),$$

onde $[0, \lambda^{n-1}] \times [0, \rho^{-1}]$, $[0, \lambda^{n-1}] \times [\alpha, \alpha + \varsigma]$ e $[0, \lambda^{n-1}] \times [1 - \varsigma, 1]$ estão contidos em $f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{Q}) \cap R'_1$ (Propriedade (d)).

Prova de (i). Quando $\varepsilon := \lambda^n + \rho^{-n}$, temos que $\varepsilon - \lambda^n = \rho^{-n}$. Daí, os intervalos

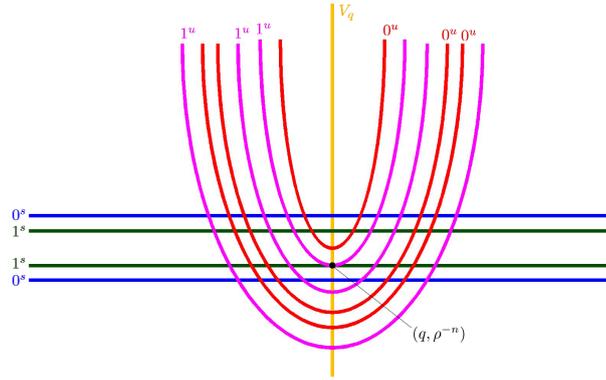


Figura 2.12: Caso (i). Na figura, $0^{s,u} := W^{s,u}(0,0)$ e $1^{s,u} := W^{s,u}(1,1)$.

$\{q\} \times [\varepsilon - \lambda^n, \varepsilon]$ e $\{q\} \times [0, \rho^{-n}]$ (de $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon,n}^+$ e $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon,n}^-$, respectivamente) se intersectam no ponto $(q, \varepsilon - \lambda^n) = (q, \rho^{-n})$.

Note que (q, ρ^{-n}) é um ponto de tangência homoclínica (figura 2.12), já que é a interseção entre o segmento

$$[0, 1] \times \{\rho^{-n}\} = f_\varepsilon^{-n}([0, \lambda^n] \times \{1\}) \subset f_\varepsilon^{-n}(W^s(1, 1)) = W^s(1, 1)$$

e o vértice da parábola $g_{\lambda^{n-1}}(x) = c(x - q)^2 - \lambda^n - \varepsilon$ cujo gráfico contém o conjunto

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\left(\{\lambda^{n-1}\} \times [0, 1]\right) \cap R_4) &= f_\varepsilon\left(\left(f_\varepsilon^{n-1}(\{1\} \times [0, \rho^{-n+1}]) \cap R_4\right)\right) \\ &\subset f_\varepsilon^n(W^u(1, 1)) = W^u(1, 1). \end{aligned}$$

É importante ressaltar que como não há pontos de $R'_4 \cap \Lambda_\varepsilon$ que estão suficientemente próximos a (q, ρ^{-n}) , a órbita de (q, ρ^{-n}) é uma órbita de tangência homoclínica externa a Λ_ε .

Para concluir o item (i), basta observar que por construção, (q, ρ^{-n}) é o único ponto de $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon,n}$ que pertence a Λ_ε . Daí, pela linearidade de f_ε em R_1 , R_3 e R_5 e pela equação (2.15) concluímos que $\mathcal{O}(q, \rho^{-n})$ é a única órbita de tangência em Λ_ε . $\square_{(i)}$

Prova de (ii). Se $\varepsilon := \rho^{-n+1}\alpha$, os intervalos $\{q\} \times [\varepsilon - \lambda^n, \varepsilon]$ e $\{q\} \times [\rho^{-n+1}\alpha, \rho^{-n+1}(\alpha + \zeta)]$ (de $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon,n}^+$ e $V_q \cap \Lambda_{\varepsilon,n}^-$, respectivamente) se intersectam no ponto $(q, \varepsilon) = (q, \rho^{-n+1}\alpha)$ que é um ponto de tangência heteroclínica (figura 2.13), já que é a interseção entre o conjunto

$$f_\varepsilon^{-n}(\left([0, 1] \times \{1\}\right) \cap R'_3) \subset f_\varepsilon^{-n}(W^s(1, 1)) = W^s(1, 1)$$

e o vértice da parábola $g_0(x) = c(x - q)^2 + \varepsilon$ cujo gráfico contém o conjunto

$$f_\varepsilon(\left(\{0\} \times [0, 1]\right) \cap R_4) \subset f_\varepsilon(W^u(0, 0)) = W^u(0, 0).$$

Podemos notar também que os pontos do gráfico da parábola $g_0(x)$ que estão próximos a (q, ε) pertencem ao conjunto $\Lambda_{\varepsilon,n}$, ou seja, a órbita de (q, ε) é uma órbita de tangência heteroclínica interna a Λ_ε . Além disso, como $f_\varepsilon(0, r) = (q, \varepsilon)$, $\mathcal{O}(q, \varepsilon) = \mathcal{O}(0, r)$.

Para concluir a prova do item (ii), note que $(V_q \cap \Lambda_{\varepsilon,n}) \cap \Lambda_\varepsilon = \{(q, \varepsilon)\}$, f_ε é linear em R_1 , R_3 e R_5 e a equação (2.15) garantem que existe apenas uma órbita de tangência. $\square_{(ii)}$ \square

Agora, vamos a demonstração do Teorema A.

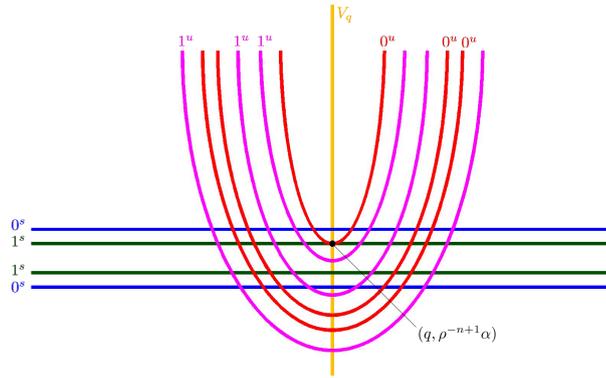


Figura 2.13: Caso (ii). Na figura, $0^{s,u} := W^{s,u}(0,0)$ e $1^{s,u} := W^{s,u}(1,1)$.

Demonstração do Teorema A. O Teorema A segue do Teorema 2.37 e de (2.14). Basta considerar o intervalo de parâmetros I_n como o intervalo aberto

$$I_n := (\varepsilon_-(n), \varepsilon_+(n))$$

onde

$$\varepsilon_-(n) := \lambda^n + \rho^{-n} \quad \text{e} \quad \varepsilon_+(n) := \rho^{-n+1}\alpha.$$

□

2.4.2 Estados de equilíbrio para $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in I_n}$

A seguir, daremos algumas propriedades do sistema $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$ para $\varepsilon \in I_n$ e finalizaremos o capítulo com os resultados que irão garantir a existência e unicidade de estados de equilíbrio associados a potenciais Hölder-contínuos.

Lema 2.42. *Seja $n \geq 3$. Para todo $\varepsilon \in I_n$, a aplicação f_ε é um difeomorfismo axioma A.*

Demonstração. Se $\varepsilon \in I_n$, segue do Teorema A que Λ_ε é hiperbólico. Então, podemos proceder como no Corolário 2.22 para concluir que f_ε é um difeomorfismo axioma A. □

Seja $n \geq 3$. Segue do Teorema A e do Lema 2.42 que f_ε é um difeomorfismo axioma A transitivo, para todo $\varepsilon \in I_n$. Logo, a Proposição 1.12 nos garante que para todo $\varepsilon \in I_n$, existe uma partição de Markov para Λ_ε com diâmetro arbitrariamente pequeno.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, iremos construir uma partição \mathcal{P}_k da seguinte maneira. Sejam R_k^i as componentes conexas de

$$f_\varepsilon^k(\text{int } \mathcal{Q}) \cap f_\varepsilon^{-k}(\text{int } \mathcal{Q}),$$

onde $i < 3^{2k}$ e $\text{int } \mathcal{Q} := \mathcal{Q} \setminus \partial \mathcal{Q}$. Então, definimos $\mathcal{P}_k := \{\overline{R_k^i}\}$ (figura 2.14).

Observação 2.43. Note que \mathcal{P}_k satisfaz:

- Quando $k \leq n - 2$, existem $2k$ componentes conexas que contêm os segmentos $\{\lambda^{j-1}q\} \times [0, \rho^{j-1}\varepsilon]$ e $[0, \lambda^{-j}\varepsilon] \times \{\rho^{-j+1}r\}$ para $j = 1, 2, \dots, k$. Observe que

$$(\lambda^{j-1}q, \rho^{j-1}\varepsilon) = f_\varepsilon^j(0, q) \quad \text{e} \quad (\lambda^{-j}\varepsilon, \rho^{-j+1}r) = f_\varepsilon^{-j}(q, 0),$$

para todo $j = 1, 2, \dots, k$; e

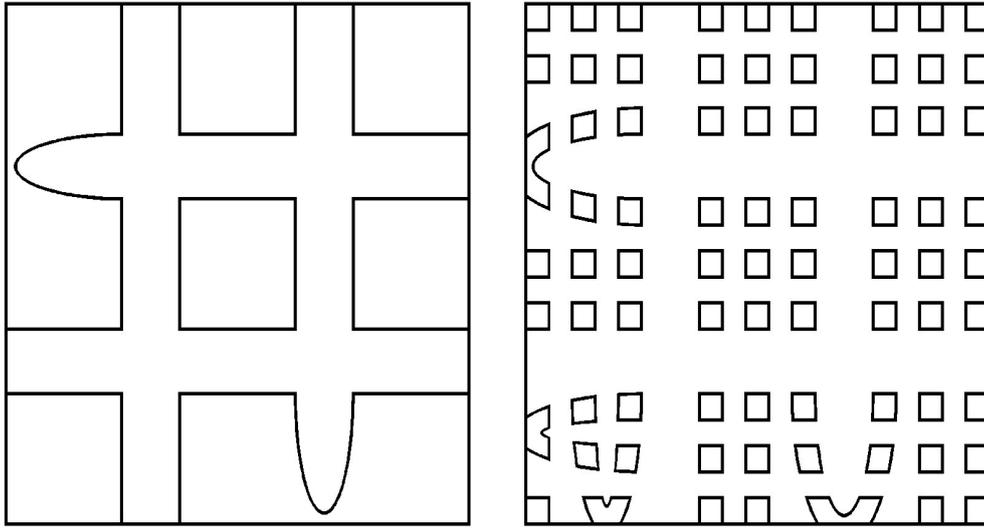


Figura 2.14: \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 .

- Quando $k = n - 1$, existem $n - 1$ componentes conexas que contêm o segmento $\{\lambda^{j-1}q\} \times [0, \rho^{j-1}\varepsilon]$ para $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Lema 2.44. *Seja $n \geq 3$. Então, para todo $k \geq n$, \mathcal{P}_k é uma partição de Markov para Λ_ε com diâmetro arbitrariamente pequeno.*

Demonstração. Seja $n \geq 3$ e considere $k \geq n$. Claramente,

$$\Lambda_\varepsilon = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f_\varepsilon^i(\mathcal{Q}) \subset \overline{f_\varepsilon^k(\text{int } \mathcal{Q})} \cap \overline{f_\varepsilon^{-k}(\text{int } \mathcal{Q})} = \bigcup_i \overline{R_k^i}.$$

Além disso, note que quando $k \geq n$, os átomos de \mathcal{P}_k não contêm os segmentos de pontos críticos da Observação 2.43.

Por outro lado, considere $\partial \mathcal{Q} = \partial^s \mathcal{Q} \cup \partial^u \mathcal{Q}$, onde

$$\begin{aligned} \partial^s \mathcal{Q} &:= \bigcup_{j=0,1} [0, 1] \times \{j\} = W_{loc}^s(0, 0) \cup W_{loc}^s(1, 1) \quad \text{e} \\ \partial^u \mathcal{Q} &:= \bigcup_{j=0,1} \{j\} \times [0, 1] = W_{loc}^u(0, 0) \cup W_{loc}^u(1, 1) \end{aligned} \quad (2.22)$$

e $\overline{\partial R_k^i} = \partial^s \overline{R_k^i} \cup \partial^u \overline{R_k^i}$, onde

$$\partial^s \overline{R_k^i} := \overline{R_k^i} \cap f_\varepsilon^{-k}(\partial^s \mathcal{Q}) \quad \text{e} \quad \partial^u \overline{R_k^i} := \overline{R_k^i} \cap f_\varepsilon^k(\partial^u \mathcal{Q}). \quad (2.23)$$

Note que

$$f_\varepsilon^{-k}(\partial^s \mathcal{Q}) \supset \bigcup_i \partial^s \overline{R_k^i} \quad \text{e} \quad f_\varepsilon^k(\partial^u \mathcal{Q}) \supset \bigcup_i \partial^u \overline{R_k^i}.$$

Logo, segue das equações (2.22) e (2.23) que o bordo dos átomos de \mathcal{P}_k é formado por arcos das variedades estável e instável de $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Daí,

$$f_\varepsilon \left(\bigcup_i \partial^s \overline{R_k^i} \right) \subset \bigcup_i \partial^s \overline{R_k^i} \quad \text{e} \quad f_\varepsilon^{-1} \left(\bigcup_i \partial^u \overline{R_k^i} \right) \subset \bigcup_i \partial^u \overline{R_k^i},$$

ou seja,

$$f_\varepsilon(\partial^s \overline{R_k^i}) \subset \bigcup_j \partial^s \overline{R_k^j} \quad \text{e} \quad f_\varepsilon^{-1}(\partial^u \overline{R_k^i}) \subset \bigcup_j \partial^u \overline{R_k^j}.$$

Portanto, para cada $k \geq n$, \mathcal{P}_k é uma partição de Markov e, como para todo i o bordo de $\overline{R_k^i}$ é formado por arcos das variedades estável e instável de $(0,0)$ e $(1,1)$, concluímos que o comprimento de ∂R_k^i tende a zero exponencialmente com k . \square

Proposição 2.45. *Seja $n \geq 3$. Se $\varepsilon \in I_n$, então existe uma conjugação Hölder-contínua entre $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$ e um subshift de tipo finito $(\Sigma_{A(n)}, \sigma_{A(n)})$, onde $A(n)$ é a matriz de transição que só depende de n (não depende de ε).*

Demonstração. Fixe $n \geq 3$ e tome $\varepsilon \in I_n$. O Teorema 2.37 nos garante que Λ_ε é hiperbólico e transitivo. Pelos lemas 2.44 e 2.42 e do fato que Λ_ε é totalmente desconexo, a Proposição 1.36 garante que existem um subshift de tipo finito $\Sigma_{A(n,\varepsilon)}$ e uma conjugação Φ_ε entre os sistemas $(\Sigma_{A(n,\varepsilon)}, \sigma_{A(n,\varepsilon)})$ e $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$, onde $A(n,\varepsilon)$ é a matriz de transição do subshift, tais que para $\underline{x} \in \Sigma_{A(n,\varepsilon)}$:

- se $k \geq n$, cada k -cilindro de \underline{x} dado por

$$C_k(\underline{x}) = \{y \mid x_i = y_i, |i| \leq k\}$$

está associado ao único átomo R_k da partição \mathcal{P}_k que possui a mesma palavra central de $C_k(\underline{x})$; e

- $\Phi_\varepsilon(\underline{x}) := \bigcap_{k \geq n} \Phi_\varepsilon(C_k(\underline{x}))$ define um único elemento $x \in \Lambda_\varepsilon$, já que $(\Phi_\varepsilon(C_k(\underline{x})))_{k \geq n}$ é uma seqüência encaixada de compactos não-vazios com diâmetro indo para zero exponencialmente com k .

Por outro lado, segue da Definição 2.14 que a família $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in I_n}$ varia continuamente com o parâmetro ε . Daí e pela continuação hiperbólica (Teorema 1.14) temos que $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon \in I_n}$ é uma família de aplicações duas a duas conjugadas, donde concluímos que para cada $n \geq 3$, existe uma matriz de transição $A(n)$ tal que $\Sigma_{A(n,\varepsilon)} = \Sigma_{A(n)}$ para todo $\varepsilon \in I_n$.

Podemos proceder como na Afirmação 2.24 para concluir que a conjugação Φ_ε dada acima é Hölder-contínua. \square

Observação 2.46. Segue da Proposição 2.45 que para cada $n \geq 3$, $\Sigma_{A(n)} \subsetneq \Sigma_{3^n}$, pois $\Lambda_{\varepsilon,n}^+$ é formado por menos de 3^n faixas verticais disjuntas.

Teorema 2.47. *Seja $n \geq 3$. Dado qualquer potencial Hölder-contínuo $\varphi : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon \in I_n$, existe um único estado de equilíbrio ergódico μ_ε para f_ε associado ao potencial φ .*

Demonstração. Se $\varepsilon \in I_n$, temos pelo Lema 2.42 e pelo Teorema A que a aplicação $f_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon}$ é um difeomorfismo axioma A transitivo. Portanto, da Proposição 1.41 segue que para todo potencial Hölder-contínuo $\varphi : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único estado de equilíbrio ergódico μ_ε para f_ε associado ao potencial φ . \square

Para finalizar o capítulo, discutiremos sobre o formalismo termodinâmico para a aplicação f_ε , quando $\varepsilon \in I_n$. Primeiramente, vamos relembrar a definição do pontencial $-t \log J_\varepsilon^u$.

Definição 2.48. *Seja $n \geq 3$. Para cada $\varepsilon \in I_n$ e $t \in \mathbb{R}$, o potencial $\Psi_{t,\varepsilon} : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por*

$$\Psi_{t,\varepsilon}(X) = -t \log J_\varepsilon^u(X),$$

onde $J_\varepsilon^u(X) = \|Df_\varepsilon(X)|_{E^u(X)}\|$ é o jacobiano instável de f_ε no ponto X .

Proposição 2.49. *Seja $n \geq 3$. Se $\varepsilon \in I_n$, então $\Psi_{t,\varepsilon}$ é Hölder-contínuo para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon \in I_n$. Como $f_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon}$ é um difeomorfismo axioma A , segue da Proposição 1.13 que $\Psi_{t,\varepsilon}$ é Hölder-contínuo para todo $t \in \mathbb{R}$. \square

Agora, podemos concluir a existência e unicidade da medida conforme $\mu_{t,\varepsilon}$.

Corolário 2.50. *Sejam $n \geq 3$, $\varepsilon \in I_n$ e $t \in \mathbb{R}$. Então, existe um único estado de equilíbrio ergódico $\mu_{t,\varepsilon}$ de f_ε associado ao potencial $\Psi_{t,\varepsilon}$.*

Demonstração. A existência e a unicidade do estado de equilíbrio $\mu_{t,\varepsilon}$ seguem da Proposição 2.49 e do Teorema 2.47. \square

Capítulo 3

Propriedades de f_ε para $\varepsilon \in \partial I_n$

No Teorema A do capítulo anterior, vimos que para cada $n \geq 3$, se α satisfaz $\alpha < (\lambda\rho)^{n-1}\beta$ (equação (2.14)) e

$$\varepsilon_+(n) := \rho^{-n+1}\alpha,$$

o sistema $(f_{\varepsilon_+(n)}, \Lambda_{\varepsilon_+(n)})$ possui uma órbita de tangência heteroclínica associada aos pontos fixos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, onde $\Lambda_{\varepsilon_+(n)} := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f_{\varepsilon_+(n)}^k(\mathcal{Q})$. O objetivo nas seções abaixo é mostrar que para todo $n \geq 3$ a aplicação $f_{\varepsilon_+(n)}$ goza de certas propriedades que a aplicação f (quando $\varepsilon = 0$) também possui.

Em todo o capítulo iremos considerar $n \geq 3$ e fixar

$$\varepsilon := \rho^{-n+1}\alpha, \quad (3.1)$$

onde α satisfaz (2.14).

Aqui vale relembrar que $\lambda < \frac{1}{3}$, $\rho > 3$ e $c > 0$ são os parâmetros de contração, de expansão e constante, respectivamente, dados pela definição da aplicação ferradura f na Seção 2.1.

Observação 3.1. Ao longo do capítulo, todas estimativas para as constantes λ e ρ deverão manter α satisfazendo (2.14).

Definição 3.2. Seja $\Lambda_\varepsilon^* \subset \Lambda_\varepsilon$ o conjunto definido por

$$\Lambda_\varepsilon^* := \Lambda_\varepsilon \setminus \mathcal{O}(0, r).$$

Note que como $f_\varepsilon(0, r) = (q, \varepsilon)$, segue da equação (3.1) que

$$f_\varepsilon^k(q, \varepsilon) \in \begin{cases} R_1 & , \quad \forall 0 \leq k \leq n-2 \\ R_3 & , \quad k = n-1 \\ R_5 & , \quad \forall k \geq n \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde

$$f_\varepsilon^n(q, \varepsilon) \in [0, 1] \times \{1\} \subset R_5.$$

Definição 3.3. Seja $\bar{q} \in [0, 1]$ tal que

$$f_\varepsilon^n(q, \varepsilon) := (\bar{q}, 1).$$

Observação 3.4. Vale ressaltar que quando

$$\varepsilon := \varepsilon_-(n) = \lambda^n + \rho^{-n}, \quad n \geq 3$$

temos que

$$\Lambda_\varepsilon = \Lambda'_\varepsilon \cup \mathcal{O}(q, \rho^{-n}),$$

onde Λ'_ε é um conjunto hiperbólico e

$$\mathcal{O}(q, \rho^{-n}) \cap \overline{\text{Per}(f_\varepsilon)} = \emptyset,$$

ou seja, a dinâmica da órbita de tangência está separada da dinâmica em Λ'_ε .

3.1 Campos de cones hiperbólicos

Considere uma folheação \mathcal{F} de $f_\varepsilon(\mathcal{Q})$ cujas folhas são imagens pela aplicação f_ε de linhas verticais em \mathcal{Q} . Então, segue da Observação 2.1 que as folhas de \mathcal{F} são verticais nas regiões R'_1 , R'_3 e R'_5 e parabólicas na região R'_4 .

Definição 3.5. Para cada $X \in R'_4$, defina $E_{\mathbf{P}}(X)$ como sendo a reta tangente em X à parábola \mathbf{P} que contém X cuja equação é dada por $y = c(x - q)^2 - \lambda\tilde{x} + \varepsilon$, onde $f_\varepsilon^{-1}(X) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ (equação (2.3)).

Observação 3.6. Segue do Lema 2.18 que o maior valor absoluto que a inclinação de $E_{\mathbf{P}}(X)$ pode atingir na região $R'_4 \cap R_1$ é $2\sqrt{c(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)}$. Além disso, esta inclinação é obtida pela interseção entre $y = c(x - q)^2 - \lambda + \varepsilon$ (parábola mais baixa em R'_4) e a reta $\{(x, \rho^{-1}) \mid x \in [0, 1]\}$ e segue das equações (2.7) e (2.8) que a distância entre os pontos desta interseção é dada por

$$x_4 - x_1 = 2\sqrt{c^{-1}(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)}.$$

Note que estamos supondo $\varepsilon < \lambda^2$ e $\lambda < \frac{1}{3}$, ou seja, a raiz dada acima está bem definida, pois $\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon > \rho^{-1} > 0$.

Como f_ε é linear nas regiões R_1 , R_3 e R_5 , as possíveis dificuldades em construir campos de cones hiperbólicos aparecem em R'_4 próximas aos pontos de tangência. Com o objetivo de abordar a dificuldade principal, iremos considerar que

$$2\sqrt{c(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)} < \tan\left(\frac{\pi}{10}\right), \quad (3.3)$$

isto é, o ângulo entre $E_{\mathbf{P}}(X)$ e uma reta horizontal é menor que $\frac{\pi}{10}$ para todo $X \in R'_4 \cap R_1$. Observe que fixado $\varepsilon > 0$, podemos escolher λ e ρ^{-1} suficientemente pequenos e $c > 0$ suficientemente grande para que a equação (3.3) seja verdadeira.

Agora, faremos a construção dos campos de cones em uma vizinhança de (q, ε) e depois apresentaremos uma idéia de como estender os campos para o conjunto Λ_ε^* .

Definição 3.7. Denotaremos por

$$\mathcal{U} := (R'_4 \cap R_1) \setminus (\{q\} \times [0, \varepsilon])$$

a vizinhança do ponto de tangência (q, ε) .

Note que pela Afirmação 2.40 do Teorema 2.37,

$$\Lambda_\varepsilon \cap (\{q\} \times [0, \varepsilon]) = \{(q, \varepsilon)\}. \quad (3.4)$$

A seguir, definiremos os campos de cones em \mathcal{U} .

Definição 3.8. Para cada $X = (x, y) \in \mathcal{U}$, definimos o cone instável $C^u(X)$ contido no espaço tangente a \mathbb{R}^2 em X por

$$C^u(X) := \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \leq \frac{4}{2c|x-q|} \right\},$$

e definimos o cone estável $C^s(X)$ contido no espaço tangente a \mathbb{R}^2 em X como

$$C^s(X) := \overline{\mathbb{R}^2 \setminus C^u(X)}.$$

O cone instável acima está bem definido, já que para $X = (x, y) \in \mathcal{U}$ o ângulo $\theta(X)$ entre $E_{\mathbf{P}}(X)$ e a reta horizontal satisfaz

$$\tan \theta(X) = 2c(x - q) \quad (3.5)$$

Além disso, $C^u(X)$ está centrado na direção vertical e contém a reta $E_{\mathbf{P}}(X)$.

Proposição 3.9. Seja $X \in \mathcal{U} \cap \Lambda_\varepsilon^*$ e tome k o primeiro inteiro positivo tal que $f_\varepsilon^k(X) = X' \in \mathcal{U}$. Então,

$$Df_\varepsilon^k(X)C^u(X) \subset C^u(X') \quad \text{e} \quad \|Df_\varepsilon^k(X)v\| \geq \rho^{\frac{k}{2}}\|v\|$$

para todo $v \in C^u(X)$. Além disso, $\|Df_\varepsilon^{-k}(X)w\| \geq \lambda^{-\frac{k}{2}}\|w\|$ para todo $w \in C^s(X)$.

Demonstração. Sejam $X = (x, y)$ e $X' = (x', y')$. Primeiramente, note que por (3.2), existe $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ a componente conexa de $f_\varepsilon^{-n}(R'_3 \cap R_5) \cap \mathcal{U}$ que contém (q, ε) (veja Figuras 3.1 e 3.3).

Afirmção 3.10. O primeiro tempo de retorno k satisfaz

$$k \geq \max \left\{ \frac{\log \left(\frac{2}{9c(x'-q)^2} \right)}{\log \lambda^{-1}}, \frac{\log \left(\frac{2}{9c(x-q)^2} \right)}{\log \rho} \right\}.$$

Prova da Afirmção. De fato, daremos uma estimativa do tempo de retorno k para os pontos em \mathcal{U}_0 (que estão suficientemente próximos de (q, ε)) e para os pontos em $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0$.

Quando $X \in \mathcal{U}_0$ temos que $f_\varepsilon^n(X) \in R_5$ e, como os iterados de X precisam sair da região $[0, 1] \times [1 - \frac{2}{9}, 1]$ para retornar em \mathcal{U} , existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $n < j < k$ e $\rho^j(y - \varepsilon) \geq \frac{2}{9}$. Então,

$$\rho^k c(x - q)^2 \stackrel{\lambda x_0 \geq 0}{\geq} \rho^k (c(x - q)^2 - \lambda x_0) \stackrel{X \in \mathcal{U}}{=} \rho^k (y - \varepsilon) > \rho^j (y - \varepsilon) \geq \frac{2}{9}. \quad (3.6)$$

Do fato que k é o primeiro tempo de retorno de X em \mathcal{U} e pela equação (3.2) concluímos que $f_\varepsilon^i(X) \in R_3 \cup R_5$ para todo $n \leq i < k - 1$. Daí, $f_\varepsilon^{-1}(X') = f_\varepsilon^{k-1}(X) \in (R'_3 \cup R'_5) \cap R_4$ (já que $f_\varepsilon^{-k}(X') \in \mathcal{U}$), ou seja, $x'_0 > \lambda$, onde x'_0 é a primeira coordenada de $f_\varepsilon^{-1}(X')$ e $R'_1 = [0, \lambda] \times [0, 1]$. Como $\lambda^{-1}\varepsilon < \lambda$ temos que $x'_0 > \lambda^{-1}\varepsilon$.

Iremos tomar λ suficientemente pequeno para garantir que a distância entre R'_1 e R'_3 seja maior que λ (aqui vale ressaltar que precisaremos novamente escolher ρ^{-1} suficientemente pequeno e $c > 0$ suficientemente grande para que a equação (3.3) continue sendo verdadeira). Logo, $x'_0 - \lambda^{-1}\varepsilon > \lambda$, isto é, $\lambda x'_0 - \varepsilon > \lambda^2$, donde concluímos que

$$\lambda^{-n}(\lambda x'_0 - \varepsilon) > \lambda^{-n+2} \stackrel{n \geq 3}{>} \frac{2}{9}.$$

Assim,

$$\lambda^{-k}c(x' - q)^2 \stackrel{X' \in \mathcal{U}}{=} \lambda^{-k}(y' + \lambda x'_0 - \varepsilon) \stackrel{y \geq 0}{\geq} \lambda^{-k}(\lambda x'_0 - \varepsilon) > \lambda^{-n}(\lambda x'_0 - \varepsilon) > \frac{2}{9}, \quad (3.7)$$

onde na penúltima desigualdade usamos $k > n$ e $\lambda^{-1} > 1$.

Portanto, segue de (3.6) e (3.7) que se $X \in \mathcal{U}_0$,

$$k \geq \max \left\{ \frac{\log \left(\frac{2}{9c(x'-q)^2} \right)}{\log \lambda^{-1}}, \frac{\log \left(\frac{2}{9c(x-q)^2} \right)}{\log \rho} \right\}. \quad (3.8)$$

Por outro lado, se $X \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0$, temos que $y = c(x - q)^2 - \lambda x_0 + \varepsilon$ e, daí,

$$\rho^k c(x - q)^2 = \rho^k(\lambda x_0 + y - \varepsilon) > \frac{2}{9}, \quad (3.9)$$

onde na última desigualdade:

- se $y - \varepsilon > 0$ (Figura 3.1(a)) então

$$\rho^{n-1}(y - \varepsilon) = \rho^{n-1}y - \alpha > \varsigma,$$

onde $\varepsilon = \rho^{-n+1}\alpha$ (equação (3.1)), ς é dado por (2.11) e $\rho^{n-1}y > \alpha + \varsigma$, pois $y > \varepsilon$ e $X \notin \mathcal{U}_0$. Logo,

$$\rho^k(\lambda x_0 + y - \varepsilon) \stackrel{\lambda x_0 \geq 0}{\geq} \rho^k(y - \varepsilon) \stackrel{k \geq n}{>} \rho \varsigma \stackrel{(2.12)}{=} 1 - \alpha > \frac{1}{3} > \frac{2}{9},$$

onde na penúltima desigualdade usamos o fato que $\alpha < \frac{2}{3}$ (equação (2.10)).

- se $y - \varepsilon < 0$ (Figura 3.1(b)), como $X \notin \mathcal{U}_0$, existe $j < k$ tal que $\rho^j y \geq \frac{1}{3}$, já que para retornar em \mathcal{U} os iterados de X precisam sair da região $[0, 1] \times [0, \frac{1}{3}]$. Além disso, segue da Afirmação 2.40 que $y \leq \rho^{-n}$. Daí e pelo fato que $X \in \Lambda_\varepsilon^*$, temos que X está fora da região determinada pela parábola

$$\mathbf{P}_{\lambda^{-1}\varepsilon} \subset \{(x, g_{\lambda^{-1}\varepsilon}(x)) \mid g_{\lambda^{-1}\varepsilon}(x) = c(x - q)^2\},$$

donde concluimos que $x_0 > \lambda^{-1}\varepsilon$ (ver equação (2.6)), ou seja, $\lambda x_0 - \varepsilon > 0$. Logo,

$$\rho^k(\lambda x_0 + y - \varepsilon) > \rho^k y \stackrel{k > j}{>} \rho^j y \geq \frac{1}{3} > \frac{2}{9}.$$

Além disso, como $f_\varepsilon^{-k}(X') \in \mathcal{U}$, podemos concluir de modo análogo ao caso anterior que

$$\lambda^{-k}(c(x' - q)^2) = \lambda^{-k}(\lambda x'_0 + y' - \varepsilon) > \frac{2}{9}, \quad (3.10)$$

onde x'_0 é a primeira coordenada de $f_\varepsilon^{-1}(X')$.

Logo, segue de (3.9) e (3.10) que se $X \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0$,

$$k \geq \max \left\{ \frac{\log \left(\frac{2}{9c(x'-q)^2} \right)}{\log \lambda^{-1}}, \frac{\log \left(\frac{2}{9c(x-q)^2} \right)}{\log \rho} \right\}. \quad (3.11)$$

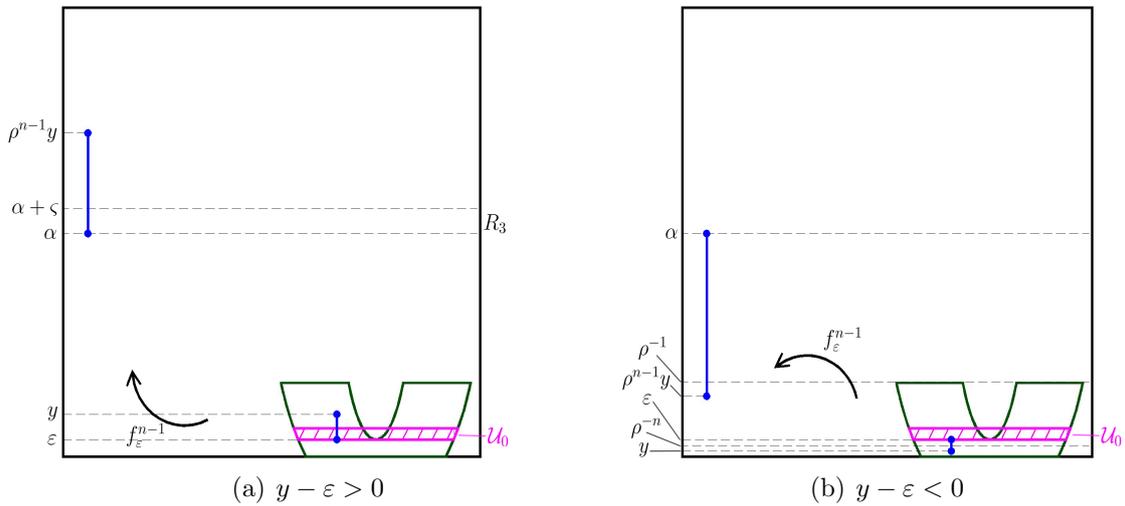


Figura 3.1: Vizinhança \mathcal{U}_0 .

A afirmação segue das equações (3.8) e (3.11). \square_{Af} .

Agora, vamos mostrar que $Df_\epsilon^k(X)C^u(X) \subset C^u(X')$ para todo $v \in C^u(X)$. Note que como f_ϵ é linear nos primeiros $k - 1$ iterados obtemos

$$Df_\epsilon^{k-1}(X)C^u(X) = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \leq \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{k-1} \frac{2}{c|x-q|} \right\}$$

que é um cone centrado na direção vertical e está contido $T_{f_\epsilon^{-1}(X')} \mathbb{R}^2$. Daí e pela definição de f_ϵ em R_4 temos que $Df_\epsilon^k(X)C^u(X)$ é um cone centrado em $E_{\mathbf{P}}(X')$ (Figura 3.2) tal que o ângulo orientado $\gamma(X')$ entre as linhas do bordo de $Df_\epsilon^k(X)C^u(X)$ e $E_{\mathbf{P}}(X')$ satisfaz

$$|\tan \gamma(X')| < \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^k \frac{2}{c|x-q|}. \tag{3.12}$$

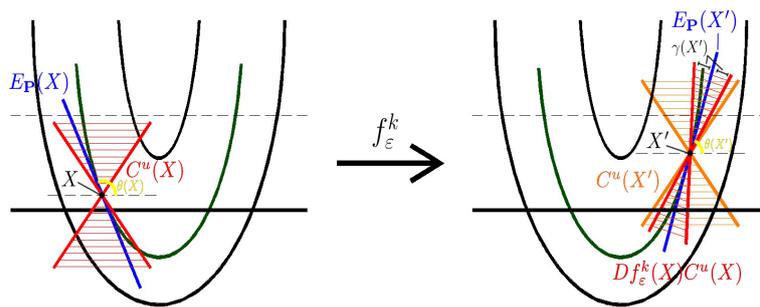


Figura 3.2: Cones instáveis em \mathcal{U} .

Considere

$$\delta(X') := \arctan \left(\frac{2c|x-q|}{4} \right)$$

a largura do cone estável $C^s(X')$. Então, segue de (3.5) que

$$\tan \delta(X') = \frac{1}{4} |\tan \theta(X')|.$$

Para obtermos boas propriedades geométricas para a aplicação f_ε iremos mostrar que $\gamma(X')$ é suficientemente pequeno, não somente para garantir que $Df_\varepsilon^k(X)C^u(X) \subset C^u(X')$, mas também garantir que

$$\begin{aligned} \tan \delta(X') &= \frac{1}{4} |\tan \theta(X')| \leq \frac{3}{4} |\tan \theta(X')| \leq \tan(\theta(X') - \gamma(X')) \\ &\leq \tan(\theta(X') + \gamma(X')) \leq \frac{6}{5} \tan |\theta(X')| \end{aligned} \quad (3.13)$$

e

$$\tan(|\theta(X')| - |\gamma(X')| - |\delta(X')|) \geq \frac{1}{2} |\tan \theta(X')|. \quad (3.14)$$

Observe que para as equações (3.13) e (3.14) serem verdadeiras, basta provar que

$$|\gamma(X')| < \arctan\left(\frac{6 \tan |\theta(X')|}{5}\right) - |\theta(X')|. \quad (3.15)$$

Como estamos considerando $|\tan \theta(Y)| < \frac{\pi}{10}$ para todo $Y \in \mathcal{U}$ (equação (3.3)), temos que existe uma constante $C > 0$ tal que (3.15) é verdadeira se

$$\tan |\gamma(X')| < C \tan |\theta(X')|. \quad (3.16)$$

Para obtermos (3.16), segue por (3.12) que é suficiente garantirmos que

$$\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^k \frac{2}{c|x-q|} < C \tan |\theta(X')| = C(2c|x'-q|),$$

ou seja,

$$\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^k < Cc^2|x'-q||x-q| \quad (3.17)$$

seja verdadeiro.

Afirmção 3.11. *A equação (3.17) é verdadeira.*

Prova da Afirmção. Com efeito, segue da Afirmção 3.10 que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^k &\leq \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{\frac{-\log \frac{9}{2}c(x'-q)^2}{-\log \lambda}} = e^{\frac{\log \frac{9}{2}c(x'-q)^2}{\log \lambda} \log\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)} = e^{\log\left(\frac{9}{2}c(x'-q)^2\right) \frac{\log \lambda - \log \rho}{\log \lambda}} \\ &= \left(\frac{9}{2}c(x'-q)^2\right)^{1 - \frac{\log \rho}{\log \lambda}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^k &\leq \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{\frac{-\log \frac{9}{2}c(x-q)^2}{\log \rho}} = e^{\frac{-\log \frac{9}{2}c(x-q)^2}{\log \rho} \log\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)} = e^{\log\left(\frac{9}{2}c(x-q)^2\right) \frac{-(\log \lambda - \log \rho)}{\log \rho}} \\ &= \left(\frac{9}{2}c(x-q)^2\right)^{1 - \frac{\log \lambda}{\log \rho}}, \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade de cada equação usamos o fato que $0 < \frac{\lambda}{\rho} < 1$.

Considerando que $\frac{1}{b} < -\frac{\log \lambda}{\log \rho} < b$ (equação (2.1)), assumindo $c > 1$ e analisando os casos $|x'-q| < |x-q|$ e $|x'-q| \geq |x-q|$, concluímos que a equação (3.17) é verdadeira se

$$\left(\frac{9}{2}c(x-q)^2\right)^{1+\frac{1}{b}} < Cc^2(x-q)^2, \text{ para todo } x \text{ tal que } 0 < |x-q| < \lambda. \quad (3.18)$$

Como $1 + \frac{1}{b} < 2$ temos que (3.18) é verdadeira tomando c suficientemente grande, o que conclui a afirmação. \square_{Af} .

Falta apenas mostrar que a norma dos vetores de $C^u(X)$ cresce, através da ação de $Df_\varepsilon^k(X)$, por um fator de pelo menos $\rho^{\frac{k}{2}}$. Seja $v = (v_1, v_2) \in C^u(X)$. Daí,

$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} \leq |v_2| \sqrt{\left(\frac{2}{c|x-q|}\right)^2 + 1} = |v_2| \sqrt{\frac{4 + c^2(x-q)^2}{c^2(x-q)^2}}$$

e pelo Lema 2.19 temos que $\|Df_\varepsilon^k(X)v\| \geq \rho^k |v_2|$. Logo,

$$\frac{\|Df_\varepsilon^k(X)v\|}{\|v\|} \geq \rho^k \sqrt{\frac{c^2(x-q)^2}{4 + c^2(x-q)^2}} = \rho^{\frac{k}{2}} \sqrt{c} \sqrt{\frac{\rho^k c(x-q)^2}{4 + c^2(x-q)^2}} > \rho^{\frac{k}{2}} \sqrt{c} \frac{1}{6} > \rho^{\frac{k}{2}},$$

onde na última desigualdade tomamos c suficientemente grande (mais precisamente, $c > 36$) e na penúltima desigualdade consideramos:

- $\rho^k c(x-q)^2 > \frac{2}{9}$ para qualquer $X \in \mathcal{U}$ (equações (3.9) e (3.6));
- pela Observação 3.6 temos que $|x-q| \leq \sqrt{c^{-1}(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)}$. Por outro lado, a equação (3.3) garante que

$$2\sqrt{c(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)} < \tan\left(\frac{\pi}{10}\right) < \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 < 4,$$

ou seja, $\sqrt{c^{-1}(\lambda + \rho^{-1} - \varepsilon)} < 2c^{-1}$. Logo, $|x-q| < 2c^{-1}$ e, portanto,

$$4 + c^2(x-q)^2 < 8;$$

- assim,

$$\frac{\rho^k c(x-q)^2}{4 + c^2(x-q)^2} > \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36}.$$

As contas para os vetores em $C^s(X)$ seguem de modo análogo. \square

Observação 3.12. Podemos estender os campos de cones para o conjunto Λ_ε^* da mesma maneira que em [LR06], considerando

$$C^u(X) = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

e $C^s(X)$ como sendo o fecho do complementar de $C^u(X)$ em \mathbb{R}^2 , e analisando o conjunto

$$I(X) = \{k_i \in \mathbb{Z} \mid f_\varepsilon^{k_i}(X) \in \mathcal{U}\}$$

de visitas em \mathcal{U} .

Os campos de cones definidos acima nos garantem o teorema abaixo.

Teorema B. *Para todo ponto $X \notin \mathcal{O}(0, r)$, Λ_ε admite a decomposição invariante e contínua $T_X \Lambda_\varepsilon = E^s(X) \oplus E^u(X)$ do espaço tangente nas direções estável e instável.*

Demonstração do Teorema B. A construção dos campos de cones realizada na Proposição 3.9 e na Observação 3.12, nos garante direções instáveis $E^u(X)$ para todo ponto X cujos iterados para trás estão sempre em \mathcal{Q} e direções estáveis $E^s(X)$ para todo ponto X cujos iterados para frente estão sempre em \mathcal{Q} , lembrando que não há campos de cones na órbita de tangência.

Logo, $E^u(\cdot)$ nunca é horizontal e $E^s(\cdot)$ nunca é vertical, donde concluímos que existem dois campos de vetores unitários $e^u(\cdot)$ e $e^s(\cdot)$ tais que $\langle e^u(\cdot), (0, 1) \rangle > 0$ e $\langle e^s(\cdot), (1, 0) \rangle > 0$. Logo, $Df_\varepsilon^k(X)e^u(X)$ é paralelo a $e^u(f_\varepsilon^k(X))$ e $Df_\varepsilon^{-k}(X)e^s(X)$ é paralelo a $e^s(f_\varepsilon^{-k}(X))$. \square

Observação 3.13. Vamos apresentar a demonstração da Afirmação 2.41 do Teorema 2.37 (Capítulo 2). Para isso basta observar que a decomposição dada pelo Teorema B pode ser estendida para todos os parâmetros do intervalo I_n . De fato, como a única órbita de tangência $\mathcal{O}(0, r)$ de $\Lambda_{\varepsilon_+(n)}$ desaparece para os parâmetros $\varepsilon \in I_n$, podemos repetir a construção dos campos de cones realizada na Proposição 3.9 e na Observação 3.12. Isso irá garantir que se $\varepsilon \in I_n$ então para todo $X \in \Lambda_\varepsilon$, Λ_ε admite a decomposição invariante e contínua $T_X\Lambda_\varepsilon = E^s(X) \oplus E^u(X)$ do espaço tangente nas direções estável e instável, donde concluímos que Λ_ε é hiperbólico para todo $\varepsilon \in I_n$.

3.2 Expoentes de Lyapunov não-nulos

Começaremos esta seção definindo os expoentes de Lyapunov.

Para cada $X \in \Lambda_\varepsilon^*$ e $v \in T_X\Lambda_\varepsilon$, $v \neq \mathbf{0}$, seja

$$\chi(X, v) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log \|Df_\varepsilon^k(X)v\|.$$

sempre que o limite existir. O Teorema de Oseledet ([Wa82, Teorema 10.2]) garante que para toda $\mu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$ o limite acima existe para μ -quase todo $X \in \Lambda_\varepsilon^*$ e é chamado de expoente de Lyapunov.

Definição 3.14. Para cada $\mu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$, definimos o conjunto

$$\chi(\mu) := \{\chi(X, v) \mid \chi(X, v) \text{ existe para } \mu\text{-quase todo } X \in \Lambda_\varepsilon^*\}$$

de todos os expoentes de Lyapunov associados a probabilidade μ .

Nosso objetivo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema C. Existe $\xi > 0$ tal que

$$\min\{|\sup \chi(\mu)|, |\inf \chi(\mu)|\} \geq \xi$$

para toda $\mu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$.

Vale ressaltar que em [CLR06] os autores provaram o mesmo resultado para a aplicação ferradura f , isto é, quando $\varepsilon = 0$.

A prova do Teorema C será consequência de três lemas que apresentaremos ao longo da seção.

Primeiramente, seja

$$\widetilde{W}_1 := \{(x, y) \in \mathcal{Q} \mid \max\{|x - \bar{q}|, |y - 1|\} < 1/c\} \quad (3.19)$$

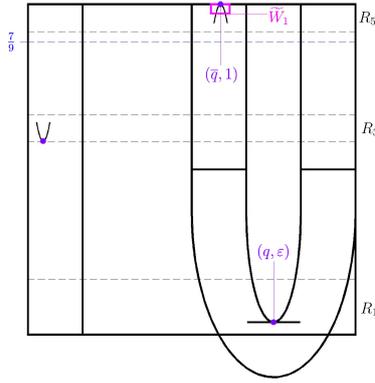


Figura 3.3: Vizinhança \widetilde{W}_1 .

uma vizinhança de $(\bar{q}, 1)$ (Definição 3.3), onde $c > 0$ é a constante da construção de f (Figura 3.3). Considere também

$$V_1 := [0, 1] \times (7/9, 1] \quad \text{e} \quad W_1 := \widetilde{W}_1 \cap \Lambda_\varepsilon.$$

Observe que quando $c > 0$ é suficientemente grande $\widetilde{W}_1 \subset R_5 \subset V_1$.

Definição 3.15. Para cada $X \in W_1 \setminus ([0, 1] \times \{1\})$ definimos o tempo de fuga $\tau(X)$ de X da vizinhança V_1 por

$$\tau(X) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^k(X) \notin V_1\}.$$

Antes de enunciar o próximo lema, iremos considerar para cada $X = (x, y)$ suficientemente próximo de um ponto de órbita de tangência, o seguinte cone instável:

$$C^u(X) := \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \leq \frac{1}{2\sqrt{c(y + \lambda\tilde{x})}} \right\}, \quad (3.20)$$

onde $(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_\varepsilon^{-1}(X)$.

Observação 3.16. Note que o cone instável definido acima está contido no cone instável dado pela Definição 3.8, já que para $X = (x, y) \in \mathcal{U}$,

$$\frac{1}{2\sqrt{c(y + \lambda\tilde{x})}} < \frac{4}{2\sqrt{c(y + \lambda\tilde{x} - \varepsilon)}} = \frac{4}{2c|x - q|}.$$

Lema 3.17. Se c e ρ são suficientemente grandes, então

$$\frac{\|Df_\varepsilon^{\tau(X)}(X)v\|}{\|v\|} \geq \rho^{\frac{\tau(X)}{2}},$$

para todo $X \in W_1 \setminus ([0, 1] \times \{1\})$ e todo $v \in C^u(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$, onde $\mathbf{0} := (0, 0)$.

Demonstração. Seja $X = (x, y) \in W_1 \setminus ([0, 1] \times \{1\})$ e considere $\tau := \tau(X)$ o tempo de fuga de V_1 (Definição 3.15). Começaremos a demonstração dando uma estimativa para τ .

Afirmção 3.18. $\tau \geq \frac{\log \frac{16}{9y}}{\log \rho}$.

Prova da Afirmção. Segue por construção que para todo $(x, y) \in R_5$,

$$f_\varepsilon(x, y) = (\lambda x + (1 - \lambda), \rho y - (\rho - 1)).$$

Logo, como o tempo de fuga de V_1 implica no tempo de fuga de R_5 e $f_\varepsilon(V_1 \setminus R_5) \subset R_2$, segue que

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^j(X) &\in R_5 \subset V_1, \quad \forall j = 0, \dots, \tau - 1, \quad \text{e} \\ f_\varepsilon^\tau(X) &= (\lambda^\tau x + (1 - \lambda^\tau), \rho^\tau y - (\rho^\tau - 1)) \notin V_1, \end{aligned} \quad (3.21)$$

isto é,

$$\rho^\tau y - (\rho^\tau - 1) \leq \frac{7}{9} \implies \rho^\tau \geq \frac{2}{9(1-y)} \stackrel{(*)}{\geq} \frac{16}{9y} \implies \tau \geq \frac{\log \frac{16}{9y}}{\log \rho},$$

onde na desigualdade (*) usamos o fato que

$$\frac{8}{9} \leq 1 - \frac{2}{3} \rho^{-1} \stackrel{X \in R_5}{\leq} y,$$

para ρ suficientemente grande (mais precisamente, $\rho \geq 6$). \square_{Af} .

Agora, para todo $v = (v_1, v_2) \in C^u(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$ temos a seguinte afirmação:

Afirmção 3.19. $\|Df_\varepsilon^\tau(X)v\| \geq \rho^\tau |v_2|$.

Prova da Afirmção. Com efeito, segue por construção que f_ε é linear em R_5 e que

$$Df_\varepsilon|_{R_5} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Então, pela equação (3.21) obtemos

$$Df_\varepsilon^\tau(X) = \begin{pmatrix} \lambda^\tau & 0 \\ 0 & \rho^\tau \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\|Df_\varepsilon^\tau(X)v\| \geq \|(\lambda^\tau v_1, \rho^\tau v_2)\| \geq \rho^\tau |v_2|,$$

o que conclui a afirmação. \square_{Af} .

Assim, para todo $v = (v_1, v_2) \in C^u(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} \leq |v_2| \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{cy}}\right)^2 + 1}$$

e pela Afirmção 3.19 obtemos

$$\frac{\|Df_\varepsilon^\tau(X)v\|}{\|v\|} \geq \frac{\rho^\tau}{\sqrt{\frac{1}{4cy} + 1}} = \frac{2\rho^\tau \sqrt{cy}}{\sqrt{1 + 4cy}}.$$

Como $\rho^{\frac{\tau}{2}} \geq \frac{4}{3\sqrt{y}}$ (Afirmação 3.18), temos que

$$\frac{\|Df_\varepsilon^\tau(X)v\|}{\|v\|} \geq \frac{8\rho^{\frac{\tau}{2}}\sqrt{c}}{3\sqrt{1+4cy}}.$$

Do fato que $X \in W_1 \subset \widetilde{W}_1$ e por (3.19), obtemos

$$|y-1| < 1/c \implies cy < 1+c \implies 1+4cy < 5+4c$$

e, então,

$$\frac{\|Df_\varepsilon^\tau(X)v\|}{\|v\|} \geq \frac{8\rho^{\frac{\tau}{2}}\sqrt{c}}{3\sqrt{5+4c}}.$$

Tomando c suficientemente grande (mais precisamente, $c > \frac{45}{28}$) concluímos que

$$\frac{\|Df_\varepsilon^\tau(X)v\|}{\|v\|} \geq \rho^{\frac{\tau}{2}}.$$

□

Definição 3.20. Seja $\widetilde{W}_1(j)$ a componente conexa de

$$\begin{cases} f_\varepsilon^j(\widetilde{W}_1) \cap R_1 & , \quad \forall -n \leq j \leq -2 \\ f_\varepsilon^j(\widetilde{W}_1) \cap R_3 & , \quad j = -1 \\ f_\varepsilon^j(\widetilde{W}_1) \cap R_5 & , \quad \forall j \geq 0 \end{cases}$$

que contém $f_\varepsilon^j(q, \varepsilon)$, onde n é dado por (3.2) (Figura 3.4). Considere

$$W := \bigcup_{j \geq 0} \widetilde{W}_1(j-n).$$

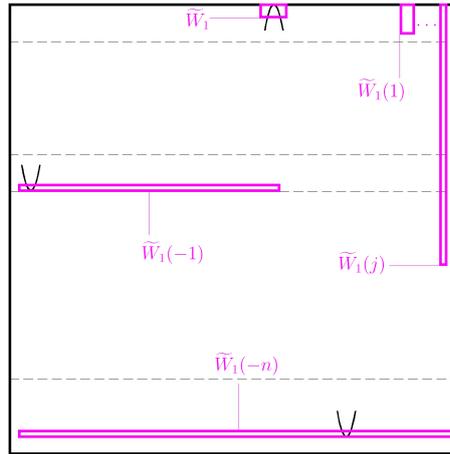


Figura 3.4: Os conjuntos $\widetilde{W}_1(j)$ com $j \geq -n$.

Observação 3.21. Observe que quando $j = 0$ segue de (3.2) que $\widetilde{W}_1(j-n) = \widetilde{W}_1(-n) \subset R_1$ e $(q, \varepsilon) \in \widetilde{W}_1(-n)$. Além disso, segue da linearidade da aplicação f_ε nas regiões R_1 , R_3 e R_5 que existe $\gamma > \rho^{-n}$ tal que

$$\widetilde{W}_1(-n) \subset [0, 1] \times \left[\varepsilon, \varepsilon + \frac{\gamma}{c} \right].$$

O próximo lema nos garante que fora do conjunto W também obtemos uma boa estimativa para o crescimento da norma dos vetores dos cones instáveis, sobre a ação de Df_ε .

Lema 3.22. *Existe $\rho_1 > 1$ tal que, se $X \in \Lambda_\varepsilon^* \setminus W$ e $v \in C^u(X) \setminus \{0\}$, então*

$$\|Df_\varepsilon(X)v\| > \rho_1 \|v\|.$$

Demonstração. Considere os conjuntos

$$\mathcal{C}_1 := \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \leq 2 \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2 := \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \leq \gamma^{-\frac{1}{2}} \right\},$$

onde $\gamma > 0$ é dado pela Observação 3.21. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por

$$T(x, y) = (\lambda x, \rho y).$$

Note que a cada iterado por T , a norma dos vetores em \mathcal{C}_1 crescem pelo menos por um fator constante $\tilde{\rho}_1 > 1$, onde $\tilde{\rho}_1$ é a taxa de crescimento da norma do vetor $(2, 1)$ e a norma dos vetores em \mathcal{C}_2 crescem pelo menos por um fator constante $\tilde{\rho}_2 > 1$, onde $\tilde{\rho}_2$ é a taxa de crescimento da norma do vetor $(\gamma^{-1/2}, 1)$. Seja

$$\rho_1 := \min\{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2\}.$$

A Afirmação 3.23 abaixo conclui a prova do lema, lembrando que pelo Lema 2.19,

$$\|Df_\varepsilon(X)e_1\| \leq \lambda \quad \text{e} \quad \|Df_\varepsilon(X)e_2\| \geq \rho,$$

para qualquer $X \in R_1 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5$.

Afirmação 3.23. *Para todo $X \in \Lambda_\varepsilon^* \setminus W$, $C^u(X) \subset \mathcal{C}_1$ ou $C^u(X) \subset \mathcal{C}_2$.*

Prova da Afirmação. Seja $X \in \Lambda_\varepsilon^* \setminus W$. Se $\mathcal{O}(X) \cap \mathcal{U} = \emptyset$, então segue da Observação 3.12 que o cone instável de X é dado por

$$C^u(X) = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \right\},$$

donde concluímos que $C^u(X) \subset \mathcal{C}_1$.

Por outro lado, se $\mathcal{O}(X) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, iremos assumir sem perda de generalidade que $X = (x, y) \in \mathcal{U}$. Analisaremos os possíveis casos de acordo com a localização de X em \mathcal{U} .

Quando $|x - q| \geq \frac{1}{c}$, segue da Definição 3.8 que

$$C^u(X) := \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \leq \frac{2}{c|x - q|} \right\}$$

e, daí, para todo $v = (v_1, v_2) \in C^u(X) \setminus \{0\}$ obtemos

$$\frac{|v_1|}{|v_2|} \leq \frac{2}{c|x - q|} \leq 2,$$

ou seja, $v \in \mathcal{C}_1$.

Agora, suponha que $|x - q| < \frac{1}{c}$. Segue de (3.4) que $(\{q\} \times [0, \varepsilon]) \cap \Lambda_\varepsilon = \emptyset$ e, pela Afirmação 2.40 do Teorema 2.37, existe $\delta > 0$ tal que

$$\{(\bar{x}, \bar{y}) \in \Lambda_\varepsilon \mid |\bar{x} - q| < \delta \text{ e } \bar{y} < \varepsilon\} \cap \mathcal{U} = \emptyset.$$

Daí, tomando $c > 0$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{c} < \delta$, temos que $y \geq \varepsilon$ e, pela Observação 3.21,

$$y > y - \varepsilon = |y - \varepsilon| > \frac{\gamma}{c}.$$

Além disso, segue de (3.20) que

$$C^u(X) := \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \leq \frac{1}{2\sqrt{c(y + \lambda\tilde{x})}} \right\},$$

onde $(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_\varepsilon^{-1}(X)$. Então, para todo $v = (v_1, v_2) \in C^u(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\frac{|v_1|}{|v_2|} \leq \frac{1}{2\sqrt{c(y + \lambda\tilde{x})}} \stackrel{\lambda\tilde{x} \geq 0}{\leq} \frac{1}{2\sqrt{cy}} < \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} < \gamma^{-\frac{1}{2}},$$

donde concluímos que $v \in \mathcal{C}_2$. \square_{Af} \square

Definição 3.24. *Seja $\rho_0 > 1$ a constante definida por*

$$\rho_0 := \min\{\rho^{1/2}, \rho_1\}.$$

O que vimos com os Lemas 3.17 e 3.22 é que tanto em $W \setminus \mathcal{O}(0, r)$ como em $\Lambda_\varepsilon^* \setminus W$ a norma dos vetores instáveis têm crescimento exponencial pelo fator ρ_0 , sobre a ação de Df_ε .

Para os vetores estáveis podemos fazer as mesmas estimativas obtidas nos lemas anteriores, observando que o campo de cones estáveis é definido no espaço tangente de cada $X \in \Lambda_\varepsilon^*$ como

$$C^s(X) := \overline{\mathbb{R}^2 \setminus C^u(X)}$$

e, a ação de Df_ε^{-1} sobre esse conjunto é dada por

$$Df_\varepsilon^{-1}(X)C^s(X) = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus Df_\varepsilon(X)C^u(f_\varepsilon^{-1}(X))}.$$

Daí, para $X = (x, y)$ suficientemente próximo dos pontos de tangência, o cone estável é dado por

$$C^s(X) := \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \geq 2\sqrt{c(y + \lambda\tilde{x})} \right\},$$

onde $(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_\varepsilon^{-1}(X)$ e, para os pontos suficientemente longe destas tangências o cone estável é dado por

$$C^s(X) := \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{|v_1|}{|v_2|} \geq \sqrt{3} \right\}.$$

Considerando a vizinhança

$$\widetilde{W}_0 := \{(x, y) \in \mathcal{Q} \mid \max\{|x|, |y - r|\} < 1/c\} \tag{3.22}$$

de $(0, r)$ e

$$V_0 := [0, 1/3] \times [0, 1] \text{ e } W_0 := \widetilde{W}_0 \cap \Lambda_\varepsilon,$$

temos que quando $c > 0$ é suficientemente grande, $\widetilde{W}_0 \subset R'_1 \subset V_0$.

Definição 3.25. Para cada $X \in W_0 \setminus (\{0\} \times [0, 1])$ definimos o tempo de fuga $\tau'(X)$ de X da vizinhança V_0 por

$$\tau'(X) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^{-k}(X) \notin V_0\}.$$

Então, de modo análogo ao Lema 3.17, temos que para todo $X \in W_0 \setminus \{0\} \times [0, 1]$,

$$\|Df_\varepsilon^{-\tau'(X)}(X)v\| \geq \lambda^{-\frac{\tau'(X)}{2}} \|v\|$$

para todo $v \in C^s(X) \setminus \{0\}$.

Além disso, se $\widetilde{W}_0(-j)$ é a componente conexa de $f_\varepsilon^{-j}(\widetilde{W}_0) \cap R'_1$ que contém $f_\varepsilon^{-j}(0, r)$, definimos

$$W' := \bigcup_{j \geq 0} \widetilde{W}_0(-j)$$

e, de modo análogo ao Lema 3.22, existe $\lambda_1 > 1$ tal que

$$\|Df_\varepsilon^{-1}(X)v\| > \lambda_1^{-1} \|v\|$$

para todo $X \in \Lambda_\varepsilon \setminus W'$ e todo $v \in C^s(X) \setminus \{0\}$.

Portanto, definindo a constante $\lambda_0 > 1$ por

$$\lambda_0 := \min\{\lambda^{1/2}, \lambda_1\},$$

iremos concluir que para todo $X \in \Lambda_\varepsilon^*$ a norma dos vetores estáveis tem crescimento exponencial pelo fator λ_0^{-1} , sobre a ação de Df_ε^{-1} .

Finalmente, o terceiro e último lema nos dará as estimativas para os expoentes de Lyapunov.

Lema 3.26. Se $X \in \Lambda_\varepsilon^*$, então existem uma constante $c(X) > 0$ e sequências $l_k \rightarrow +\infty$ e $j_k \rightarrow +\infty$ tais que para todo $v \in C^u(X) \setminus \{0\}$ e $w \in C^s(X) \setminus \{0\}$ temos que

$$\|Df_\varepsilon^{l_k}(X)v\| > c(X)\rho_0^{l_k} \|v\| \text{ e } \|Df_\varepsilon^{-j_k}(X)w\| > c(X)\lambda_0^{-j_k} \|w\|.$$

Em particular,

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log \|Df_\varepsilon^{l_k}(X)\|}{l_k} \geq \log \rho_0 \text{ e } \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log \|Df_\varepsilon^{j_k}(X)\|}{j_k} \leq \log \lambda_0.$$

Demonstração. Fixe $X \in \Lambda_\varepsilon^*$ e seja

$$n(X) = \{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^k(X) \in W_1\}.$$

Faremos a demonstração do lema para os vetores no cone instável, observando que com argumentos análogos podemos concluir o resultado para os vetores no cone estável considerando o conjunto

$$n'(X) = \{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^{-k}(X) \in W_0\}.$$

Iremos considerar as seguintes possibilidades para $n(X)$: vazio, finito ou infinito.

Caso 1. Quando $n(X)$ é vazio, temos três casos:

- se $\mathcal{O}(X) \cap W = \emptyset$, então pelo Lema 3.22,

$$\|Df_\varepsilon^k(X)v\| > \rho_1^k \|v\| \geq \rho_0^k \|v\|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$;

- se $X \in W$ e existe

$$k_0 := 1 + \max\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^k(X) \in W\},$$

então, segue dos Lemas 3.17 e 3.22 que

$$\|Df_\varepsilon^k(X)v\| > \rho_1^{k-k_0} \|Df_\varepsilon^{k_0}(X)v\| \geq \rho_0^{k-k_0} \|v\|$$

para todo $k > k_0$. Daí, tome $c(X) := \rho_0^{-k_0}$;

- se $\mathcal{O}^+(X) \subset W$, então $f_\varepsilon^k(X) \in R_5$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $X \in W_{loc}^s(1, 1) \setminus \mathcal{O}(0, r)$. Logo, se $v = (v_1, v_2) \in C^u(X) \setminus \{0\}$, temos que $v_2 \neq 0$ e, como

$$Df_\varepsilon|_{R_5} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

existe $k_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\|Df_\varepsilon^k(X)v\| > \rho_0^{k-k_1} \|v\|$$

para todo $k > k_1$. Logo, basta tomar $c(X) := \rho_0^{-k_1}$. \square Caso 1

Caso 2. Se $n(X)$ é finito, basta tomar $k_2 := \max\{n(X)\}$. Daí, utilizando os mesmo argumentos do Caso 1, obtemos

$$\|Df_\varepsilon^k(X)v\| > \rho_0^{k-k_2} \|Df_\varepsilon^{k_2}(X)v\|$$

para todo $k > k_2$. Assim, o lema é verdadeiro para X tomando

$$c(X) := \rho_0^{-k_2} \|Df_\varepsilon^{k_2}(X)\|_{\inf} > 0,$$

onde $\|\cdot\|_{\inf}$ é a norma do ínfimo sobre os vetores de norma 1. \square Caso 2

Caso 3. Quando $n(X)$ é infinito, considere $n(X) := \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$l_k := \min\{l > i_k \mid f_\varepsilon^l(X) \notin R_5\}$$

Daí, $i_k < l_k < i_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, como consequência dos lemas anteriores, obtemos

$$\|Df_\varepsilon^{i_{k+1}}(X)v\| \stackrel{\text{Lema 3.17}}{\geq} \rho_0^{i_{k+1}-l_k} \|Df_\varepsilon^{l_k}(X)v\| \text{ e } \|Df_\varepsilon^{l_k}(X)v\| \stackrel{\text{Lema 3.22}}{>} \rho_0^{l_k-i_k} \|Df_\varepsilon^{i_k}(X)v\|.$$

Portanto, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|Df_\varepsilon^{l_k}(X)v\| > \rho_0^{l_k-i_1} \|Df_\varepsilon^{i_1}(X)v\|$$

e, tomando $c(X) := \rho_0^{-i_1} \|Df_\varepsilon^{i_1}(X)\|_{\inf} > 0$, concluímos o lema para este caso. \square Caso 3 \square

Demonstração do Teorema C. Primeiramente, note que para toda probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$ com suporte em Λ_ε temos que $\mu(\Lambda_\varepsilon^*) = 1$. Isto segue do fato que a órbita de $(0, r)$ tem medida nula para toda probabilidade f_ε -invariante.

Seja $\mu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$ e tome $\overline{\Lambda}_\varepsilon$ o subconjunto de Λ_ε^* para o qual existem os expoentes de Lyapunov. Então, segue do Teorema de Oseledet ([Wa82, Teorema 10.2]) que $\mu(\overline{\Lambda}_\varepsilon) = 1$ e pelo Lema 3.26 que todos os expoentes de Lyapunov estão fora do intervalo $(\log \lambda_0, \log \rho_0)$ para todo $X \in \overline{\Lambda}_\varepsilon$.

Logo, basta tomar $\xi := \max\{|\log \lambda_0|, |\log \rho_0|\}$. \square

3.3 Cartas locais e aplicação induzida

Nosso próximo objetivo será mostrar a existência de variedades estáveis e instáveis locais para Λ_ε^* . A estratégia será a utilização de uma aplicação induzida para a qual construiremos variedades estáveis e instáveis que estenderemos para f_ε por iteração.

Além de definir a aplicação induzida F de f_ε , apresentaremos nessa seção a definição de um conjunto de cartas locais, denominadas cartas k -ergódicas (introduzidas em [LR06]). Tais cartas serão necessárias para a construção das variedades estáveis e instáveis para aplicação induzida F .

Definição 3.27. *Sejam \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 os conjuntos definidos por*

$$\mathcal{U}_1 := \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_2 \quad \text{e} \quad \mathcal{U}_2 := \mathcal{U} \cap \widetilde{W}_1(-n),$$

onde $\widetilde{W}_1(-n)$ é dado pela Definição 3.20 (Figura 3.5).

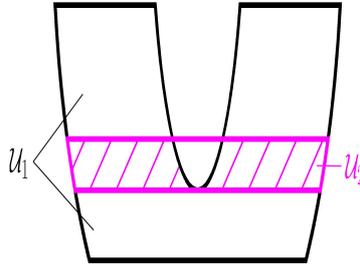


Figura 3.5: A vizinhança \mathcal{U} .

Claramente, $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$ e $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Além disso, segue de (3.2) que $(q, \varepsilon) \in \mathcal{U}_2$ e como

$$\widetilde{W}_1(0) := \widetilde{W}_1 = \{(x, y) \in \mathcal{Q} \mid \max\{|x - \bar{q}|, |y - 1|\} < 1/c\},$$

para c suficientemente grande, $\widetilde{W}_1 \subset R'_3 \cap R_5$.

Observação 3.28. Quando $X = (x, y) \in \mathcal{U}_1$, temos que para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^j y \leq \rho^{-1}$,

$$f_\varepsilon^j(X) = (\lambda^j x, \rho^j y) \in R_1.$$

Por outro lado, se $X \in \mathcal{U}_2$ então $f_\varepsilon^n(X) = (\bar{x}, \bar{y}) \in \widetilde{W}_1$ e, para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^j \bar{y} - (\rho^j - 1) \geq 1 - \frac{2}{3}\rho^{-1}$,

$$f_\varepsilon^{n+j}(X) = (\lambda^j \bar{x} + (1 - \lambda^j), \rho^j \bar{y} - (\rho^j - 1)) \in R_5.$$

Definição 3.29. *Para cada $X \in \mathcal{U}_1 \setminus ([0, 1] \times \{0\})$, definimos $\tau_1(X)$ o tempo de fuga de X da região R_1 por*

$$\tau_1(X) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^k(X) \notin R_1\}.$$

E, para cada $X \in \mathcal{U}_2 \setminus ([0, 1] \times \{\varepsilon\})$, definimos $\tau_2(X)$ o tempo de fuga de X da região R_5 por

$$\tau_2(X) := n + \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^{n+k}(X) \notin R_5\}.$$

Segue da Definição 3.29 e pela Observação 3.28 que se $X \in \mathcal{U}_1$,

$$f_\varepsilon^{\tau_1(X)}(X) \in R'_1 \cap (R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5) \quad \text{e} \quad f_\varepsilon^k(X) \in R_1, \quad \forall 0 \leq k \leq \tau_1(X) - 1$$

e, se $X \in \mathcal{U}_2$,

$$f_\varepsilon^{\tau_2(X)}(X) \in R'_5 \cap (R_2 \cup R_3 \cup R_4) \quad \text{e} \quad f_\varepsilon^k(X) \in R_5, \quad \forall n \leq k \leq \tau_2(X) - 1.$$

Agora, daremos a definição da aplicação induzida F de f_ε . Seja W a vizinhança de $\mathcal{O}^+(q, \varepsilon)$ dada pela Definição 3.20.

Definição 3.30. *Seja F a aplicação definida em*

$$\text{dom}(F) := \mathcal{U} \cup (R_4 \setminus f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{U})) \cup ((R_3 \cup R_5) \setminus W), \quad (3.23)$$

da seguinte maneira:

- quando $X \in (R_3 \cup R_5) \setminus W$, definimos $F(X) := f_\varepsilon(X)$;
- quando $X \in \mathcal{U}_1$, temos duas possibilidades:
 - se $f_\varepsilon^{\tau_1(X)}(X) \in (R_3 \cup R_5) \setminus W$, definimos $F(X) := f_\varepsilon^{\tau_1(X)}(X)$;
 - se $f_\varepsilon^{\tau_1(X)}(X) \in f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{U}) \subset R_4$, então $F(X) := f_\varepsilon^{\tau_1(X)+1}(X)$;
- quando $X \in \mathcal{U}_2$, temos duas possibilidades:
 - se $f_\varepsilon^{\tau_2(X)}(X) \in R_3 \setminus W$, definimos $F(X) := f_\varepsilon^{\tau_2(X)}(X)$;
 - se $f_\varepsilon^{\tau_2(X)}(X) \in f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{U}) \subset R_4$, então $F(X) := f_\varepsilon^{\tau_2(X)+1}(X)$;
- quando $X \in R_4 \setminus f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{U})$, definimos $F(X) := f_\varepsilon(X)$.

Note que a aplicação F não está definida em $[0, 1] \times \{0\} := W_{\text{loc}}^s(0, 0)$ e nem em $[0, 1] \times \{1\} := W_{\text{loc}}^s(1, 1)$, e a aplicação F^{-1} não está definida em $\{0\} \times [0, 1] := W_{\text{loc}}^u(0, 0)$ e nem em $\{1\} \times [0, 1] := W_{\text{loc}}^u(1, 1)$.

Denotaremos por Λ_F o conjunto

$$\Lambda_F := (\text{dom}(F) \cap \Lambda_\varepsilon^*) \setminus \partial \mathcal{Q}. \quad (3.24)$$

Observação 3.31. Com relação ao domínio de F dado em (3.23), mostraremos mais a frente (Afirmção 3.46) que todo ponto $X \in \Lambda_\varepsilon^* \setminus (\Lambda_F \cup \partial \mathcal{Q})$ satisfaz

$$\mathcal{O}^+(X) \cap \Lambda_F \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \mathcal{O}^-(X) \cap \Lambda_F \neq \emptyset.$$

3.3.1 Bolas poligonais

Definição 3.32. *Para cada $X \in \Lambda_\varepsilon^*$, seja $v = v_u e^u(X) + v_s e^s(X) \in T_X \Lambda_\varepsilon$, onde $e^u(\cdot)$ e $e^s(\cdot)$ são os campos de vetores unitários dados pelo Teorema B. Definimos a métrica $|\cdot|_X$ por*

$$|v|_X := \max\{|v_u|, |v_s|\}$$

e denotaremos por bola poligonal (Figura 3.6) o conjunto

$$B(X, \delta) := \{X + v \mid |v|_X < \delta\}.$$

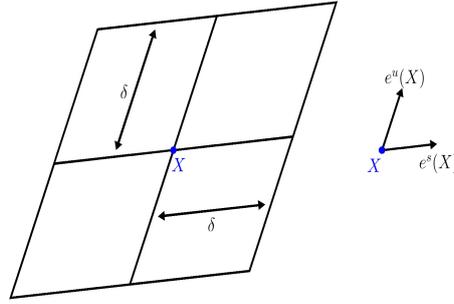


Figura 3.6: A bola poligonal $B(X, \delta)$.

Considere a função $\omega : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(X) := \begin{cases} |x - q| & , \text{ quando } X = (x, y) \in \mathcal{U} \\ \sup\{\omega(Y) \mid Y \in \mathcal{U}\} & , \text{ quando } X \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{U} \end{cases}$$

Então, segue do Lema 3.1 em [LR06] que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que para todo $X \in \mathcal{U}$,

$$C_1 \omega(X) |\cdot|_X \leq \|\cdot\| \leq 2 |\cdot|_X, \quad (3.25)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana.

Observação 3.33. Note que os lados direito e esquerdo de $B(X, \delta)$ são paralelos a $e^u(X)$. Daí, se δ é suficientemente pequeno, esses lados se aproximam da reta tangente a parábola que contém X (Figura 3.6).

Definição 3.34. Sejam $L_0(X, \delta)$ e $L_2(X, \delta)$ os lados inferior e superior de $B(X, \delta)$, respectivamente, e seja $L_1(X, \delta)$ a interseção entre $B(X, \delta)$ e a reta paralela a $E^s(X)$ que passa por X . Para cada $i = 0, 1, 2$ e $0 < \varsigma \leq 1$, denotaremos por $L_i(X, \delta)(\varsigma) \subset L_i(X, \delta)$ o segmento de raio $\varsigma\delta$ e mesmo centro que $L_i(X, \delta)$.

Apresentaremos agora três resultados cujas demonstrações são exatamente iguais as apresentadas em [LR06].

Observação 3.35. A idéia das demonstrações dos Lemas 3.36, 3.37 e 3.40 se baseiam no crescimento da norma dos vetores nos cones instáveis (que é exponencial pelos Lemas 3.17 e 3.22) e no controle da inclinação destes cones, levando em consideração a linearidade da aplicação f_ε nas regiões R_1 , R_3 e R_5 . Além disso, note que o primeiro retorno k a vizinhança \mathcal{U} necessariamente satisfaz $k > \tau$, onde τ é o tempo de fuga dado pela Definição 3.29.

Para cada constante $C_2 > 0$, iremos considerar

$$\tilde{\omega}(X, \delta) := \delta C_2 \omega(X)$$

para todo $X \in \mathcal{U}$ e todo $0 < \delta \leq 1$.

Lema 3.36 (Proposição 3.1 em [LR06]). *Existe uma constante $0 < C_2 \leq 1$ tal que para todo $X \in \mathcal{U}$ e todo $0 < \delta \leq 1$ temos que toda parábola $\mathbf{P} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{U}$ que atravessa o segmento $L_1(X, \tilde{\omega}(X, \delta))(1/4)$ também atravessa os segmentos $L_0(X, \tilde{\omega}(X, \delta))$ e $L_2(X, \tilde{\omega}(X, \delta))$.*

Neste caso, diremos que a parábola \mathbf{P} u -atravessa a bola $B(X, \tilde{\omega}(X, \delta))$.

Lema 3.37 (Proposição 3.2 em [LR06]). *Existe $0 < \delta_0 \leq 1$ uniforme em \mathcal{U} tal que se $Y \in B(X, \delta_0 \tilde{\omega}(X, \delta))$, então a parábola que contém Y u -atravessa a bola $B(X, \tilde{\omega}(X, \delta))$.*

Definição 3.38. *Tome $\delta > 0$. Para cada $X \in \mathcal{U}$, sejam $F_V(X, \delta)$ a menor faixa vertical tal que $F_V(X, \delta) \supset B(X, \delta)$ e $F_H(X, \delta)$ a menor faixa horizontal tal que $F_H(X, \delta) \supset B(X, \delta)$. Denotaremos por $R(X, \delta, \delta')$ o retângulo (Figura 3.7) dado por*

$$R(X, \delta, \delta') := \overline{F_V(X, \delta) \cap F_H(X, \delta')}.$$

Definição 3.39. *Tome $X \in \mathcal{U}$ e seja $k := \min\{l \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^l(X) \in \mathcal{U}\}$. Diremos que $f_\varepsilon^k(R(X, \delta, \delta'))$ u -atravessa a bola $B(X, \delta'')$ quando os lados da componente conexa de $f_\varepsilon^k(R(X, \delta, \delta')) \cap \mathcal{Q}$ que contém $f_\varepsilon^k(X)$ são parábolas que u -atravessam $B(X, \delta'')$ (Figura 3.7).*

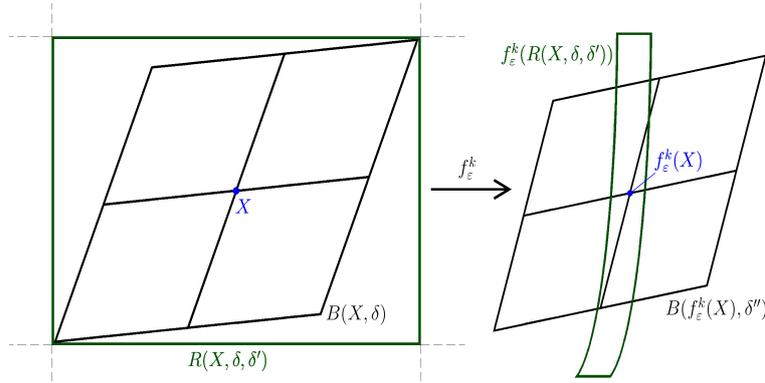


Figura 3.7: $B(X, \delta) \subset R(X, \delta, \delta')$ e $f_\varepsilon^k(R(X, \delta, \delta'))$.

Lema 3.40 (Corolário 3.1 em [LR06]). *Se λ e ρ^{-1} são suficientemente pequenos, então para todo $X \in \mathcal{U}$ e todo $0 < \delta \leq 1$, se $f_\varepsilon^k(X) = X'$ é o primeiro retorno de X em \mathcal{U} então $f_\varepsilon^k(R(X, \omega(X), \omega(X)))$ u -atravessa a bola $B(X', \delta C_2 \omega(X'))$.*

A seguir, iremos definir para cada $X \in \Lambda_\varepsilon$ e $0 < \delta < 1$ a bola poligonal estável/instável que denotaremos por $B^{us}(X, \delta)$ e escreveremos us -bola poligonal.

Definição 3.41. *Seja $0 < \delta < 1$. Para $X \in \mathcal{U}$, definimos a us -bola poligonal $B^{us}(X, \delta)$ por*

$$B^{us}(X, \delta) := B(X, \delta C_3 \omega(X))$$

onde $C_3 > 0$ é uma constante para a qual daremos uma estimativa mais a frente.

Quando $X \in \Lambda_\varepsilon \setminus \mathcal{U}$ e existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$k_1 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^{-k}(X) \in \mathcal{U}\} \text{ e}$$

$$k_2 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^k(X) \in \mathcal{U}\}$$

definimos

$$B^{us}(X, \delta) := (B(X, \delta C_3 t_u(X)) \cap E^u(X)) \times (B(X, \delta C_3 t_s(X)) \cap E^s(X)),$$

onde

$$t_u(X) := \min \left\{ \frac{1}{3}, \omega(f_\varepsilon^{-k_1}(X)) \| Df_\varepsilon^{k_1}(f_\varepsilon^{-k_1}(X)) e^u(f_\varepsilon^{-k_1}(X)) \| \right\} \text{ e}$$

$$t_s(X) := \min \left\{ \frac{1}{3}, \omega(f_\varepsilon^{k_2}(X)) \| Df_\varepsilon^{-k_2}(f_\varepsilon^{k_2}(X)) e^s(f_\varepsilon^{k_2}(X)) \| \right\}.$$

Quando $X \in \Lambda_\varepsilon \setminus \mathcal{U}$ com $f_\varepsilon^{-k}(X) \notin \mathcal{U}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k_2 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^k(X) \in \mathcal{U}\},$$

definimos

$$B^{us}(X, \delta) := \left(B(X, \frac{1}{3}\delta C_3) \cap E^u(X) \right) \times \left(B(X, \delta C_3 t_s(X)) \cap E^s(X) \right),$$

onde $t_s(X)$ é definido como acima.

Quando $X \in \Lambda_\varepsilon \setminus \mathcal{U}$ com $f_\varepsilon^k(X) \notin \mathcal{U}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k_1 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^{-k}(X) \in \mathcal{U}\},$$

definimos

$$B^{us}(X, \delta) := \left(B(X, \delta C_3 t_u(X)) \cap E^u(X) \right) \times \left(B(X, \frac{1}{3}\delta C_3) \cap E^s(X) \right),$$

onde $t_u(X)$ é definido como acima.

Finalmente, quando $X \in \Lambda_\varepsilon \setminus \mathcal{U}$ é tal que $f_\varepsilon^k(X) \notin \mathcal{U}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, definimos

$$B^{us}(X, \delta) := B\left(X, \frac{1}{3}\delta C_3\right).$$

Por conveniência, denotaremos

$$B^i(X, \delta) := B^{us}(X, \delta) \cap E^i(X), \quad \text{para } i = u, s.$$

3.3.2 Propriedades de F e cartas k -ergódicas

Seja F a aplicação induzida de f_ε dada pela Definição 3.30. Então, note que:

- (i) a aplicação F é localmente linear, exceto em R_4 . Daí, segue da Definição 3.41 que se $X \in (R_3 \cup R_5) \setminus W$, então $F(B^{us}(X, \delta))$ é uma bola poligonal que u -atravessa $B^{us}(F(X), \delta)$; aqui u -atravessar significa que $F(B^{us}(X, \delta))$ é da forma

$$\left(B(F(X), \delta C t'_u(F(X))) \cap E^u(F(X)) \right) \times \left(B(F(X), \delta C t'_s(F(X))) \cap E^s(F(X)) \right),$$

onde $t'_u(F(X)) \geq t_u(F(X))$ e $t'_s(F(X)) \leq t_s(F(X))$.

- (ii) analogamente, se $X \in \mathcal{U}$ é tal que $F(X) \in (R_3 \cup R_5) \setminus W$, então $F(B^{us}(X, \delta))$ é uma bola poligonal que também u -atravessa $B^{us}(F(X), \delta)$.
- (iii) se $X \in \mathcal{U}$ é tal que $F(X) \in \mathcal{U}$, o Lema 3.40 garante que para todo $C_3 \leq C_0$ e todo $0 < \delta < 1$, $F(B^{us}(X, \delta))$ u -atravessa $B^{us}(F(X), \delta)$.

Em (i) e (ii), segue da linearidade de F que $F = DF$.

Lema 3.42. *Seja $X \in \mathcal{U}$ tal que $F(X) \in \mathcal{U}$. Então, existe uma constante $C_4 > 0$ tal que para todo Y_1 e Y_2 na componente conexa de $B^{us}(X, \delta) \cap F^{-1}(B^{us}(F(X), \delta))$ que contém X , obtemos*

$$|DF(Y_1) \circ DF^{-1}(F(Y_2)) - Id|_{F(X)} \leq \frac{C_4}{\omega(F(X))} |F(Y_1) - F(Y_2)|_{F(X)},$$

onde Id é a aplicação identidade,

$$|DF(Y_1) - DF(Y_2)|_{F(X)} \leq \frac{C_4}{\omega(F(X))} |F(Y_1) - F(Y_2)|_{F(X)} \quad e$$

$$|DF^{-1}(F(Y_1)) - DF^{-1}(F(Y_2))|_X \leq \frac{C_4}{\omega(X)} |Y_1 - Y_2|_X.$$

Demonstração. Como a aplicação f_ε é de classe C^2 no compacto R_4 , temos que existe uma constante $C_5 > 0$ tal que $\|D^2 f_\varepsilon(Y)\| \leq C_5$, sendo $\|\cdot\|$ a norma euclidiana. Daí, Df_ε e Df_ε^{-1} são funções Lipschitz. Além disso, segue da Definição 3.30 que para todo Y na componente conexa de $B^{us}(X, \delta) \cap F^{-1}(B^{us}(F(X), \delta))$ que contém X ,

$$F(Y) = f_\varepsilon \circ f_\varepsilon^{-1}(F(Y)) = f_\varepsilon \circ T^{k-1}(Y),$$

onde $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a transformação linear dada por $T(x, y) = (\lambda x, \rho y)$ e $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|DF(Y_1) \circ DF^{-1}(F(Y_2)) - Id\| &= \\ &= \|Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_1))) \circ T^{k-1} \circ T^{-k+1} \circ Df_\varepsilon^{-1}(F(Y_2)) - Id\| \\ &= \|Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_1))) \circ Df_\varepsilon^{-1}(F(Y_2)) - Id\| \\ &= \|(Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_1))) - Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_2)))) \circ Df_\varepsilon^{-1}(F(Y_2))\| \\ &\leq \|Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_1))) - Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_2)))\| \cdot \|Df_\varepsilon^{-1}(F(Y_2))\| \\ &\leq C_6 \|F(Y_1) - F(Y_2)\|, \end{aligned}$$

onde C_6 é uma constante dependendo de C_5 .

Temos também que

$$\begin{aligned} \|DF(Y_1) - DF(Y_2)\| &= \|Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_1))) \circ T^{k-1} - Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_2))) \circ T^{k-1}\| \\ &= \|(Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_1))) - Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_2)))) \circ T^{k-1}\| \\ &\leq \|Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_1))) - Df_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(F(Y_2)))\| \cdot \|T^{k-1}\| \\ &\leq C_7 \|F(Y_1) - F(Y_2)\|, \end{aligned}$$

onde C_7 é uma constante dependendo de C_5 .

Analogamente,

$$\|DF^{-1}(F(Y_1)) - DF^{-1}(F(Y_2))\| \leq C_8 \|Y_1 - Y_2\|,$$

onde C_8 é uma constante dependendo de C_5 .

Para concluir o lema, basta utilizar a equação 3.25 que relaciona as normas $\|\cdot\|$ e $|\cdot|_X$ e obteremos a constante C_4 dependendo das constantes C_1, C_6, C_7 e C_8 . \square

Daremos agora a definição das cartas k -ergódicas.

Definição 3.43. Definiremos as cartas k -ergódicas como a família de mergulhos

$$\Upsilon_X : B_X(\mathbf{0}, \delta) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

para $X \in \Lambda_F$ e $\mathbf{0} := (0, 0)$, satisfazendo:

(i) Υ_X é uma aplicação afim, $\Upsilon_X(\mathbf{0}) = X$ e

$$D\Upsilon_X(\mathbf{0})\mathbb{R}^u \subset E^u \quad \text{e} \quad D\Upsilon_X(\mathbf{0})\mathbb{R}^s \subset E^s,$$

onde $\mathbb{R}^u := \mathbb{R} \times \{0\}$ e $\mathbb{R}^s := \{0\} \times \mathbb{R}$. Se $v \in \mathbb{R}^u \cup \mathbb{R}^s$, então

$$|\Upsilon_X(v)|_X = \omega(X)\|v\|;$$

(ii) o conjunto $B_X(\mathbf{0}, \delta)$ é definido por

$$B_X(\mathbf{0}, \delta) := \Upsilon_X^{-1}(B^{us}(X, \delta))$$

e munido da norma do máximo $|\cdot|_{\max}$ dada por

$$\|v\|_{\max} := \max\{|v_1|, |v_2|\}, \quad \text{para } v = v_1(1, 0) + v_2(0, 1).$$

Chamaremos de aplicações k -ergódicas a família de aplicações

$$\hat{F}_X := \Upsilon_{F(X)}^{-1} \circ F \circ \Upsilon_X.$$

e, as aplicações

$$\hat{F}_X^{-1} := \Upsilon_{F^{-1}(X)}^{-1} \circ F^{-1} \circ \Upsilon_X,$$

serão chamadas de aplicações k -ergódicas inversas.

As aplicações e as cartas k -ergódicas satisfazem as seguintes propriedades:

1. para quaisquer $Y_1, Y_2 \in B_X(\mathbf{0}, \delta)$,

$$\frac{1}{2}\|\Upsilon_X(Y_1) - \Upsilon_X(Y_2)\| \leq |Y_1 - Y_2| \leq \frac{1}{C_1\omega(X)}\|\Upsilon_X(Y_1) - \Upsilon_X(Y_2)\|;$$

2. para cada $X \in \Lambda_F$:

- $\rho^{\frac{k}{2}}\|v\|_{\max} \leq \|D\hat{F}_X(\mathbf{0})v\|_{\max}$ para todo $v \in \mathbb{R}^u$, onde $F(X) = f_\varepsilon^k(X)$;
- $\lambda^{\frac{k}{2}}\|v\|_{\max} \geq \|D\hat{F}_X(\mathbf{0})v\|_{\max}$ para todo $v \in \mathbb{R}^s$, onde $F(X) = f_\varepsilon^k(X)$.

Para $X \notin \mathcal{U}$, $F = f_\varepsilon$ e as desigualdades acima seguem pela hiperbolicidade uniforme de f_ε longe das tangências. Quando $X \in \mathcal{U}$, as desigualdades acima seguem da Proposição 3.9;

3. para todo Y_1 e Y_2 na componente conexa de $B_X(\mathbf{0}, \delta) \cap \hat{F}_X^{-1}(B_{F(X)}(\mathbf{0}, \delta))$ que contém $\mathbf{0}$, segue que

$$\|\hat{F}_X(Y_1) - \hat{F}_X(Y_2) - D\hat{F}_X(\mathbf{0})(Y_1 - Y_2)\|_{\max} \leq C_3 \cdot C_4 \|D\hat{F}_X(\mathbf{0})(Y_1 - Y_2)\|_{\max}.$$

Esta desigualdade segue do Lema 3.42 e da estimativa abaixo:

$$\begin{aligned} & \|\hat{F}_X(Y_1) - \hat{F}_X(Y_2) - D\hat{F}_X(\mathbf{0})(Y_1 - Y_2)\|_{\max} = \\ & = \left| \int_0^1 \left(D\hat{F}_X(t(Y_1 - Y_2)) - D\hat{F}_X(\mathbf{0}) \right) \cdot (Y_1 - Y_2) dt \right| \\ & \leq \frac{C_4}{\omega(F(X))} \|D\hat{F}_X(\mathbf{0})(Y_1 - Y_2)\|_{\max} \cdot C_3 \omega(F(X)). \end{aligned}$$

Observação 3.44. Note que se $F(X) = f_\varepsilon^k(X)$, temos que f_ε é linear pelo menos em $k - 1$ iterados. Logo, qualquer possível distorção é devido apenas ao último iterado e, além disso, é uniformemente limitada.

3.4 Variedades estáveis e instáveis locais

Agora, iremos mostrar o seguinte resultado:

Teorema D. *Para todo $X \in \Lambda_\varepsilon^*$, existem variedades estável e instável $W^s(X)$ e $W^u(X)$. Além disso, as variedades locais $W_{loc}^s(X)$ e $W_{loc}^u(X)$ são localmente o gráfico de aplicações de $E^{s,u}(X)$ em $E^{u,s}(X)$, respectivamente.*

Conforme comentamos na seção anterior, a estratégia será a utilização da aplicação induzida F para a qual construiremos variedades estáveis e instáveis locais que estenderemos para f_ε por iteração.

Sejam C_2 a constante dada pelo Lema 3.36 e C_3 a constante dada pela definição 3.41 tal que $B^{us}(X, \delta) := B(X, \delta C_3 \omega(X))$.

Proposição 3.45. *Existe $0 < \delta_1 \leq 1$ tal que se $C_3 := \delta_1 C_2$, então para todo $X \in \Lambda_F$ e todo $0 < \delta \leq 1$, existe um único par de curvas, $W_\delta^u(X)$ e $W_\delta^s(X)$, satisfazendo:*

- $W_\delta^u(X)$ é tangente a $E^u(Y)$ para cada $Y \in W_\delta^u(X) \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^k(\text{dom}(F))$;
- $W_\delta^s(X)$ é tangente a $E^s(Y)$ para cada $Y \in W_\delta^s(X) \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^{-k}(\text{dom}(F))$;
- $W_\delta^{u,s}(X)$ é o gráfico de uma função $g_X^{u,s} : B^{u,s}(X, \delta) \rightarrow B^{s,u}(X, \delta)$ com constante de Lipschitz menor que $\frac{1}{3}$, onde

$$B^i(X, \delta) := B^{us}(X, \delta) \cap E^i(X) = B(X, \delta \delta_1 C_2 \omega(X)), \quad i = u, s;$$

- $F(W_\delta^u(X)) \supset W_\delta^u(F(X))$ e $F^{-1}(W_\delta^s(X)) \supset W_\delta^s(F^{-1}(X))$.

Demonstração. Como as aplicações e as cartas k -ergódicas satisfazem as propriedades 1, 2 e 3 (apresentadas no final da seção anterior), a demonstração segue exatamente como a prova em [LR06, Proposição 5.1]. \square

Definiremos as variedades estável e instável de X para F da maneira usual, isto é,

$$W^s(X, F) := \bigcup_{k \geq 0} F^{-k}(W_\delta^s(F^k(X))) \quad \text{e} \quad W^u(X, F) := \bigcup_{k \geq 0} F^k(W_\delta^u(F^{-k}(X))).$$

Como estas variedades herdam a estrutura Riemanniana de \mathbb{R}^2 , existem duas métricas que denotaremos por d^s e d^u de $W^s(X, F)$ e de $W^u(X, F)$, respectivamente.

Agora, vamos à prova do Teorema D.

Demonstração do Teorema D. Seja $X \in \Lambda_\varepsilon^* \setminus \partial \mathcal{Q}$ e tome $0 < \delta \leq 1$. Se $X \in \Lambda_F$, definimos as variedades estável e instável locais de X para f_ε por

$$W_\delta^s(X, f_\varepsilon) := W_\delta^s(X, F) \quad \text{e} \quad W_\delta^u(X, f_\varepsilon) := W_\delta^u(X, F)$$

e, portanto,

$$W^s(X, f_\varepsilon) = W^s(X, F) \quad \text{e} \quad W^u(X, f_\varepsilon) = W^u(X, F).$$

Afirmação 3.46. *Se $X \notin \Lambda_F$, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que*

$$k_1 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^{-k}(X) \in \Lambda_F\} \quad \text{e} \quad k_2 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^k(X) \in \Lambda_F\}.$$

Prova da Afirmação. De fato, se $X \notin \Lambda_F$, segue das equações (3.23) e (3.24) que

$$X \in (R_1 \setminus \mathcal{U}) \cup f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{U}) \cup ((R_3 \cup R_5) \cap W).$$

Mostraremos a existência de k_1 em cada uma das possibilidades acima; a prova da existência de k_2 é feita de modo análogo.

Se $X \in (R_1 \setminus \mathcal{U})$, então como $X \in \Lambda_\varepsilon^*$ temos que $X \in R_1 \cap R'_1$. Mas, note que por construção e pela linearidade de $f_\varepsilon|_{R_1}$,

$$(R_1 \cap R'_1) \cap \Lambda_\varepsilon^* \subset f_\varepsilon(\mathcal{U}) \cup \bigcap_{j=0}^2 f_\varepsilon^j(R_1).$$

Daí, temos duas possibilidades:

- se $X \in f_\varepsilon(\mathcal{U})$, $f_\varepsilon^{-1}(X) \in \mathcal{U}$. Logo, $f_\varepsilon^{-1}(X) \in \Lambda_F$; ou
- se $X \in \bigcap_{j=0}^2 f_\varepsilon^j(R_1)$, novamente, note que por construção e pela linearidade de $f_\varepsilon|_{R_1}$,

$$\bigcap_{j=0}^2 f_\varepsilon^j(R_1) \cap \Lambda_\varepsilon^* \subset f_\varepsilon^2(\mathcal{U}) \cup \bigcap_{j=0}^3 f_\varepsilon^j(R_1).$$

Logo, temos duas possibilidades: se $X \in f_\varepsilon^2(\mathcal{U})$, $f_\varepsilon^{-2}(X) \in \mathcal{U}$ e, portanto, $f_\varepsilon^{-2}(X) \in \Lambda_F$; senão, $X \in \bigcap_{j=0}^3 f_\varepsilon^j(R_1)$. Repetindo esse processo, iremos garantir que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X \in f_\varepsilon^k(\mathcal{U})$, já que

$$\bigcap_{j \geq 0} f_\varepsilon^j(R_1) = \{0\} \times [0, \rho^{-1}] \subset \partial \mathcal{Q}.$$

Quando $X \in f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{U})$, segue que $X \in R'_1 \cup R'_3 \cup R'_5$, já que $X \in \Lambda_\varepsilon^*$. Se $X \in R'_3 \cup R'_5$, como $f_\varepsilon(W) \cap f_\varepsilon^{-1}(\mathcal{U}) = \emptyset$ concluímos que $f_\varepsilon^{-1}(X) \in (R_3 \cup R_5) \setminus W$, ou seja, $f_\varepsilon^{-1}(X) \in \Lambda_F$. Por outro lado, se $X \in R'_1$, então $f_\varepsilon^{-1}(X) \in R_1$ e o resultado segue do primeiro caso.

Se $X \in (R_3 \cup R_5) \cap W$, segue da Definição 3.20 que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_\varepsilon^{-k}(X) \in R_1$ e, portanto, a afirmação segue do primeiro caso. \square_{Af}

Logo, pela Afirmção 3.46, definimos $W_\delta^u(X, f_\varepsilon)$ como a bola aberta de raio δ na variedade Riemanniana $f_\varepsilon^{k_1}(W^u(f_\varepsilon^{-k_1}(X)))$ (considerando a métrica d^u) e definimos $W_\delta^s(X, f_\varepsilon)$ como a bola aberta de raio δ na variedade Riemanniana $f_\varepsilon^{-k_2}(W^s(f_\varepsilon^{k_2}(X)))$ (considerando a métrica d^s). Neste caso,

$$W^u(X, f_\varepsilon) := \bigcup_{k \geq k_1} f_\varepsilon^k(W_\delta^u(f_\varepsilon^{-k}(X))) \quad \text{e} \quad W^s(X, f_\varepsilon) := \bigcup_{k \geq k_2} f_\varepsilon^{-k}(W_\delta^s(f_\varepsilon^k(X))).$$

Quando $X \in \partial \mathcal{Q} \setminus \mathcal{O}(0, r)$, definimos as variedades estáveis e instáveis da seguinte maneira:

- se $X \in [0, 1] \times \{0\}$, $W^s(X, f_\varepsilon) = W^s(0, 0)$;
- se $X \in \{0\} \times [0, 1] \setminus \mathcal{O}(0, r)$, $W^u(X, f_\varepsilon) = W^u(0, 0)$;
- se $X \in [0, 1] \times \{1\} \setminus \mathcal{O}(0, r)$, $W^s(X, f_\varepsilon) = W^s(1, 1)$;
- se $X \in \{1\} \times [0, 1]$, $W^u(X, f_\varepsilon) = W^u(1, 1)$.

□

Antes de finalizar esta seção, apresentaremos outras três propriedades da aplicação f_ε .

Definição 3.47. *Seja g uma curva de classe C^2 definida por*

$$s \longmapsto (g(s), s).$$

Dado $\eta > 0$, dizemos que a curva g é C^2 η -vertical quando

$$|g'(s)| < \eta \quad \text{e} \quad |g''(s)| < \eta, \quad \forall s \in \text{dom}(g),$$

Proposição 3.48. *Existem $\eta > 0$, $0 < \lambda < 1$ e $\rho > 1$ tais que se $(g(y), y)$ é uma curva C^2 η -vertical contida em R_4 e $l \in \mathbb{N}$ é tal que*

$$l := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^k(g(y), y) \cap R_4 \neq \emptyset\},$$

então qualquer curva C^2 $(\tilde{g}(y), y)$ contida em $f_\varepsilon^l(g(y), y) \cap R_4$ também é C^2 η -vertical.

Demonstração. Seja $(s, h(s))$ uma curva C^2 tal que $s \in [-1, 1]$, $h'(0) = 0$, $\varepsilon - \lambda < h(0) := y_0 \leq \varepsilon$ e $2c - 1 < h''(s) < 2c + 1$. Daí, h é uma curva convexa com um único ponto crítico em $s = 0$, donde concluímos que h admite dois ramos inversos: $g \circ h(s) = s \geq 0$ e $g \circ h(s) = s \leq 0$. Suponha que $g(y) = s \geq 0$, onde $y = h(s)$ (o caso $g(y) = s \leq 0$ segue de modo análogo).

Então, como $2c - 1 < h''(s) < 2c + 1$ e $h'(0) = 0$, obtemos

$$(2c - 1)s < h'(s) < (2c + 1)s \quad \text{e} \quad (2c - 1)\frac{s^2}{2} < h(s) - h(0) < (2c + 1)\frac{s^2}{2}.$$

Segue da última estimativa que

$$\sqrt{\frac{y - y_0}{2c + 1}} = \sqrt{\frac{h(s) - h(0)}{2c + 1}} < |s| < \sqrt{\frac{h(s) - h(0)}{2c - 1}} = \sqrt{\frac{y - y_0}{2c - 1}}.$$

Daremos agora estimativas para g' e g'' . Como $g(y) = s \geq 0$, segue do Teorema da Função Inversa que para todo $s > 0$,

$$|g'(y)| = \frac{1}{|h'(s)|} < \frac{1}{(2c - 1)s} < \frac{\sqrt{2c + 1}}{(2c - 1)\sqrt{y - y_0}} = \frac{K_1}{\sqrt{y - y_0}}, \quad (3.26)$$

onde $K_1 := \frac{\sqrt{2c+1}}{2c-1}$ é constante. Além disso,

$$\begin{aligned} g'(h(s)).h'(s) = 1 &\implies g''(h(s)).h'(s).h'(s) + g'(h(s)).h''(s) = 0 \\ &\implies g''(h(s)) = -\frac{g'(h(s)).h''(s)}{(h'(s))^2} \end{aligned}$$

e, portanto, segue da primeira igualdade em (3.26) que

$$|g''(y)| = |(g'(y))^3 \cdot h''(s)| < \frac{(K_1)^3(2c+1)}{\sqrt{(y-y_0)^3}} = \frac{K_2}{\sqrt{(y-y_0)^3}} \quad (3.27)$$

onde $K_2 := (K_1)^3(2c+1)$ é constante.

Considere a curva $(\lambda^k g(y), \rho^k y)$ para $y \in \text{dom}(g)$ e $\varsigma < \rho^k(y - y_0) < 1$, onde $\varsigma > 0$ é dado pela equação (2.11) e $0 < k \leq n-1$ (Figura 3.8). Note que como $y_0 \leq \varepsilon$,

$$\rho^k y_0 \stackrel{\rho > 1}{\leq} \rho^{n-1} y_0 \leq \rho^{n-1} \varepsilon \stackrel{(3.1)}{=} \alpha.$$

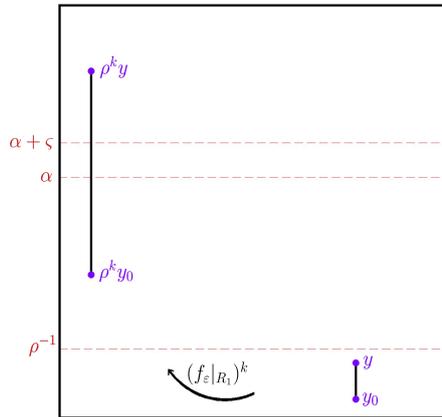


Figura 3.8: A estimativa $\varsigma < \rho^k(y - y_0) < 1$.

Além disso, esta curva é o gráfico da função

$$\Theta(y) := \lambda^k g(\rho^{-k} y), \quad \text{para } \varsigma < y - \rho^k y_0 < 1.$$

Daí e de (3.26) segue que

$$|\Theta'(y)| = |\lambda^k g'(\rho^{-k} y) \rho^{-k}| < \frac{K_1 \lambda^k}{\rho^k \sqrt{\rho^{-k} y - y_0}} = \frac{K_1 \lambda^k}{\rho^{k-\frac{k}{2}} \sqrt{y - \rho^k y_0}} < \frac{K_1 \lambda^k \varsigma^{-\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{k}{2}}}, \quad (3.28)$$

onde na última desigualdade usamos $y - \rho^k y_0 \geq \varsigma$.

Da mesma forma, pela equação (3.27) concluímos

$$\begin{aligned} |\Theta''(y)| &= |\lambda^k g''(\rho^{-k} y) \rho^{-2k}| < \frac{K_2 \lambda^k}{\rho^{2k} \sqrt{(\rho^{-k} y - y_0)^3}} \\ &= \frac{K_2 \lambda^k}{\rho^{2k-\frac{3k}{2}} \sqrt{(y - \rho^k y_0)^3}} < \frac{K_2 \lambda^k \varsigma^{-\frac{3}{2}}}{\rho^{\frac{k}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Antes de finalizar a demonstração, lembre que $f_\varepsilon|_{R_4}$ mapeia linhas verticais em parábolas de equação $y = c(x - q)^2 - \lambda x_0 + \varepsilon$. Iremos escolher $\eta > 0$ tal que a imagem de qualquer curva C^2 η -vertical em R_4 tenha imagem por $f_\varepsilon|_{R_4}$ contida em uma curva $(s, h(s))$ satisfazendo $2c - 1 < h''(s) < 2c + 1$. Tomaremos λ e ρ^{-1} suficientemente pequenos tais que os últimos termos em (3.28) e (3.29) sejam menores que η para $k = 1$.

Vamos concluir a prova da proposição. Seja $(g(y), y)$ uma curva C^2 η -vertical contida em R_4 e tome $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$l := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^k(g(y), y) \cap R_4 \neq \emptyset\}.$$

Como pelo parágrafo anterior $f_\varepsilon(g(y), y)$ está contido na curva $(s, h(s))$, podemos assumir (após uma mudança no parâmetro s) que o único ponto crítico de $h(s)$ ocorre em $s = 0$. Para finalizar, basta observar que como $f_\varepsilon|_{R_1}$ é linear, a imagem de qualquer curva C^2 η -vertical em R_1 continua sendo uma curva C^2 η -vertical. \square

Proposição 3.49. *Seja $\mathcal{V} \subset \mathcal{Q}$ um conjunto aberto tal que $\mathcal{V} \cap \Lambda_\varepsilon \neq \emptyset$. Então, existem $k_{\mathcal{V}}^+, k_{\mathcal{V}}^- \in \mathbb{N}$ tais que*

- (i) *existe $X_1 \in \Lambda_\varepsilon$ tal que $f_\varepsilon^{k_{\mathcal{V}}^+}(\mathcal{V}) \supset (W^u(X_1) \cap \mathcal{Q})$, onde $W^u(X_1) \cap ([0, 1] \times \{0\}) \neq \emptyset$ e $W^u(X_1) \cap ([0, 1] \times \{1\}) \neq \emptyset$;*
- (ii) *existe $X_2 \in \Lambda_\varepsilon$ tal que $f_\varepsilon^{-k_{\mathcal{V}}^-}(\mathcal{V}) \supset (W^s(X_2) \cap \mathcal{Q})$, onde $W^s(X_2) \cap (\{0\} \times [0, 1]) \neq \emptyset$ e $W^s(X_2) \cap (\{1\} \times [0, 1]) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Começaremos provando o item (i). Tome $Y \in \mathcal{V} \cap \Lambda_\varepsilon^*$ e considere $W^u(Y) \cap \mathcal{V}$. Enquanto a componente conexa dos iterados de $W^u(Y) \cap \mathcal{V}$ estiver contida em R_3 ou R_5 , seu comprimento cresce exponencialmente. Então, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f_\varepsilon^l(W^u(Y) \cap \mathcal{V})$ intersecta os bordos inferior e superior de R_3 ou de R_5 . Portanto, $f_\varepsilon^{l+1}(W^u(Y) \cap \mathcal{V})$ cruza a região $R_4 \cap R_3'$ ou a região $R_4 \cap R_5'$, donde concluímos que $f_\varepsilon^{l+2}(W^u(Y) \cap \mathcal{V})$ intersecta $\mathcal{U} \cap ([0, 1] \times \{0\})$ e $\mathcal{U} \cap ([0, 1] \times \{\rho^{-1}\})$. Assim, $f_\varepsilon^{l+3}(W^u(Y) \cap \mathcal{V})$ passa por R_1' e intersecta $[0, 1] \times \{0\}$ e $[0, 1] \times \{1\}$.

Se a componente conexa de $W^u(Y) \cap \mathcal{V}$ estiver contida em R_1 , basta iterá-la por f_ε para atingir a região $R_3 \cup R_5$ e proceder como acima. Quando a componente conexa de $W^u(Y) \cap \mathcal{V}$ estiver contida em R_4 , tome a componente conexa de $f_\varepsilon(W^u(Y) \cap \mathcal{V})$ contida em $\mathcal{U} \subset R_1$ e, então, itere por f_ε até atingir a região $R_3 \cup R_5$.

Para concluir o item (i) basta considerar $k_{\mathcal{V}}^+ := l + 3$ e $X \in f_\varepsilon^{l+3}(W^u(Y) \cap \mathcal{V})$. O item (ii) segue de modo análogo, considerando $f_\varepsilon^{-k}(\mathcal{V})$ e trocando as direções vertical e horizontal. \square

Corolário 3.50. *A aplicação f_ε é topologicamente misturadora.*

Demonstração. Sejam \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 conjuntos abertos contidos em \mathcal{Q} e considere $k_{\mathcal{V}_1}^+$ e $k_{\mathcal{V}_2}^-$ os inteiros positivos dados pela Proposição 3.49. Logo, para todo $k \geq k_{\mathcal{V}_1}^+ + k_{\mathcal{V}_2}^-$ temos que $f_\varepsilon^k(\mathcal{V}_1) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$, donde concluímos que f_ε é topologicamente misturadora. \square

Observação 3.51. Segue do Teorema D e da Proposição 3.45 que existe uma constante $K_0 > 0$ tal que o comprimento de $W_\delta^{u,s}(X)$ é menor que K_0 para todo $X \in \Lambda_\varepsilon \setminus \partial\mathcal{Q}$.

3.5 Semiconjugação e estados de equilíbrio

Apresentaremos a seguir a existência de uma semiconjugação entre Λ_ε e o *subshift* da Proposição 2.45. Isso será suficiente para demonstrar o seguinte resultado:

Teorema E. *Dado qualquer potencial Hölder-contínuo $\varphi : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, existe um único estado de equilíbrio ergódico μ para f_ε , associado ao potencial φ .*

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja \mathcal{P}_k uma partição degenerada definida da seguinte maneira. Sejam S_k^i com $i < 3^{2k}$ as componentes conexas de

$$f_\varepsilon^k(\text{int}(\mathcal{Q})) \cap f_\varepsilon^{-k}(\text{int}(\mathcal{Q})),$$

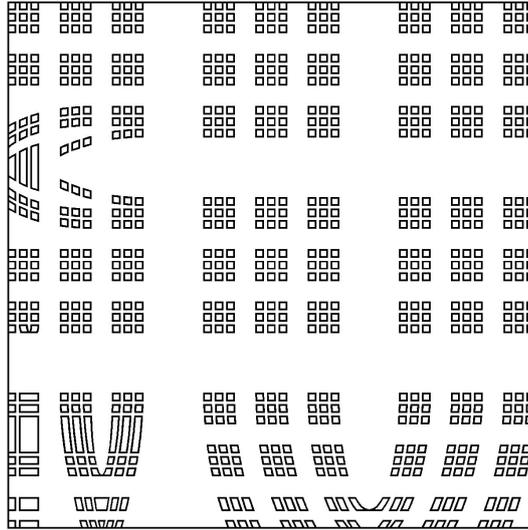


Figura 3.9: Partição degenerada \mathcal{P}_3 para $n = 3$.

onde $\text{int}(\mathcal{Q}) := \mathcal{Q} \setminus \partial\mathcal{Q}$. Então, definimos a partição (Figura 3.9) por $\mathcal{P}_k := \{\overline{S_k^i}\}$.

Por conveniência, iremos considerar que os átomos de \mathcal{P}_k são escritos da forma S_k^i e denotaremos por S_k^0 e S_k^1 os elementos de \mathcal{P}_k que contêm $(0, 0)$ e $(1, 1)$, respectivamente.

Observação 3.52. Note que:

- quando $k \leq n - 2$, existem $2k$ componentes conexas que contêm os segmentos $\{\lambda^{j-1}q\} \times [0, \rho^{j-1}\varepsilon]$ e $[0, \lambda^{-j}\varepsilon] \times \{\rho^{-j+1}r\}$ para $j = 1, 2, \dots, k$. Observe que

$$(\lambda^{j-1}q, \rho^{j-1}\varepsilon) = f_\varepsilon^j(0, q) \quad \text{e} \quad (\lambda^{-j}\varepsilon, \rho^{-j+1}r) = f_\varepsilon^{-j}(q, 0),$$

para todo $j = 1, 2, \dots, k$; e

- quando $k = n - 1$, existem: $n - 1$ componentes conexas que contêm o segmento $[0, \lambda^{-j}\varepsilon] \times \{\rho^{-j+1}r\}$ para $j = 1, 2, \dots, n - 1$; $n - 2$ pares de átomos que se intersectam nos pontos $(\lambda^j q, \rho^j \varepsilon)$ para $j = 2, 3, \dots, n - 1$; e uma componente conexa que contendo o segmento $\{q\} \times [0, \varepsilon]$.

Considere $k \geq n$. Então, a partição \mathcal{P}_k satisfaz:

- (i) cada átomo S_k^i é limitado por arcos das variedades estável e instável de $(0, 0)$ e $(1, 1)$;
- (ii) para cada $k \geq n$ e cada i , $f_\varepsilon^k(S_k^i)$ é uma faixa cruzando \mathcal{Q} de baixo para cima e $f_\varepsilon^{-k}(S_k^i)$ é uma faixa cruzando \mathcal{Q} da esquerda para direita (Proposição 3.49);
- (iii) Para $k \geq n$, existem $2k$ pares de átomos que não são disjuntos: suas interseções contêm os pontos $f_\varepsilon^j(0, r)$ com $j \in \{-k, \dots, k\}$ da órbita de tangência. Note que devido a este fato, as partições \mathcal{P}_k são partições degeneradas.
- (iv) Cada átomo S_{k+1}^i de \mathcal{P}_{k+1} pode ser obtido como

$$f_\varepsilon^{-1}(f_\varepsilon(S_k^j) \cap S_k^l) \cap f_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(S_k^j) \cap S_k^m),$$

onde $S_{k+1}^i \subset S_k^j$. Daí, para cada $-k + 1 \leq i \leq k - 1$, a imagem f_ε^i de pontos no mesmo elemento de \mathcal{P}_k pertencem ao mesmo elemento de \mathcal{P}_1 .

Proposição 3.53. *Se $k > n$, o comprimento do bordo de cada S_k^i tende a zero exponencialmente com k .*

Demonstração. Fixe $k > n$ e $i \in \mathbb{N}$ e seja $S := S_k^i \in \mathcal{P}_k$. Denotaremos por $\partial^s S$ e $\partial^u S$ as componentes estável e instável do bordo de S , respectivamente, cada uma contendo duas componentes conexas que denotaremos por

$$\partial^s S_-, \partial^s S_+ \subset \partial^s S \quad \text{e} \quad \partial^u S_-, \partial^u S_+ \subset \partial^u S.$$

Segue da propriedade (iv) acima que podemos definir o itinerário de S desde $-k+1$ até $k-1$. Observe que devido ao fato da órbita de tangência satisfazer

$$f_\varepsilon^j(0, r) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} (1, 1) \quad \text{e} \quad f_\varepsilon^{-j}(0, r) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} (0, 0),$$

as possíveis dificuldades para analisar o itinerário de S ocorrem quando existem valores $j_1, j_2 \in \{0, \dots, k-1\}$ tais que $f_\varepsilon^{j_1}(S) \subset S_1^1$ e $f_\varepsilon^{-j_2}(S) \subset S_1^0$. Nestes casos, definiremos as sequências $(k_{j,1})_{j \in \mathbb{N}}$ e $(k_{-j,0})_{j \in \mathbb{N}}$ de pré-entradas em S_1^1 e em S_1^0 , respectivamente, da seguinte maneira:

- seja $k_{1,1} := m_1 - 1$, onde

$$m_1 := \min\{i \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^i(S) \subset S_1^1\}$$

e, para $j \geq 2$, seja

$$k_{j,1} = \min\{i > k_{j-1,1} \mid f_\varepsilon^i(S) \cap S_1^1 = \emptyset \quad \text{e} \quad f_\varepsilon^{i+1}(S) \subset S_1^1\};$$

- seja $k_{-1,0} := -m_0 + 1$, onde

$$m_0 := \min\{i \in \mathbb{N} \mid f_\varepsilon^{-i}(S) \subset S_1^0\}$$

e, para $j \geq 2$, seja

$$k_{-j,0} = -\min\{i > -k_{-j+1,0} \mid f_\varepsilon^{-i}(S) \cap S_1^0 = \emptyset \quad \text{e} \quad f_\varepsilon^{-i-1}(S) \subset S_1^0\}.$$

Iremos considerar todos os casos possíveis para o itinerário de S . Primeiramente, abordaremos o caso em que

$$f_\varepsilon^{-k+1}(S) \cap S_1^0 = \emptyset, \quad f_\varepsilon^{k-1}(S) \cap S_1^1 = \emptyset,$$

$$-k+1 \neq k_{-j,0} \quad \text{e} \quad k-1 \neq k_{j,1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Então, segue por definição das sequências $(k_{j,1})_{j \in \mathbb{N}}$ e $(k_{-j,0})_{j \in \mathbb{N}}$ que

$$f_\varepsilon^j(S) \cap S_1^1 = \emptyset \quad \text{e} \quad f_\varepsilon^{-j}(S) \cap S_1^0 = \emptyset \quad \text{para todo } j \in \{0, \dots, k-1\},$$

donde concluímos que a norma de todos os vetores instáveis v_u (tangentes a $\partial^u S$) e todos os vetores estáveis v_s (tangentes a $\partial^s S$) tem crescimento exponencial por Df_ε^k e por Df_ε^{-k} , com fator $\rho^{1/2}$ e $\lambda^{1/2}$, respectivamente.

Logo,

$$\|Df_\varepsilon^k(X)v_u\| \geq \rho^{\frac{k}{2}} \quad \text{e} \quad \|Df_\varepsilon^{-k}(Y)v_s\| \geq \lambda^{-\frac{k}{2}},$$

para todo $X \in \partial^u S$ e todo $Y \in \partial^s S$. Como o comprimento das variedades estáveis e instáveis em \mathcal{Q} para f_ε é limitado por cima (Observação 3.51), existe uma constante $K_1 > 0$ tal que

$$\text{comp}(\partial^u S_i) < K_1 \rho^{-\frac{k}{2}} \quad \text{e} \quad \text{comp}(\partial^s S_i) < K_1 \lambda^{\frac{k}{2}}, \quad \text{para } i = -, +, \quad (3.30)$$

onde $\text{comp}(\cdot)$ denota o comprimento do conjunto.

Agora, daremos a prova da afirmação nos demais casos para $\partial^u S$, pois para $\partial^s S$ a demonstração será análoga.

Se $k_{j,1} = k - 1$, então $f_\varepsilon^{k-1}(S)$ está contido no átomo de \mathcal{P}_1 que contém o ponto $(\bar{q}, 1) = f_\varepsilon^n(q, \varepsilon)$, isto é, $f_\varepsilon^{k-1}(S) \subset R'_3 \cap R_5$. Seja $K_2 > 0$ tal que

$$\text{comp}(f_\varepsilon^{k-1}(\partial^u S)) < K_2.$$

Como as estimativas de crescimento em (3.30) são válidas até $k_{j,1} = k - 1$, obtemos

$$\text{comp}(\partial^u S) < K_2 \rho^{-\frac{k-1}{2}} = K_3 \rho^{-\frac{k}{2}},$$

onde $K_3 := K_2 \sqrt{\rho}$.

Quando $k_{j,1} < k - 1 < k_{j+1,1}$,

$$f_\varepsilon^i(S) \subset S_1^1 \quad \forall k_{j,1} < i \leq k - 1.$$

Do mesmo modo que vimos no caso anterior, as estimativas de crescimento em (3.30) são válidas até o iterado $k_{j,1}$. Por outro lado, segue do item (ii) da construção da partição \mathcal{P}_k que

$$f_\varepsilon^k(S) = f_\varepsilon^{k-k_{j,1}}(f_\varepsilon^{k_{j,1}}(S))$$

é uma faixa cruzando \mathcal{Q} de baixo para cima. Então, existe uma parte de $f_\varepsilon^{k_{j,1}}(\partial^u S)$ (de tamanho menor que uma constante $K_4 > 0$) que escapa de S_1^1 , para a qual as estimativas em (3.30) são válidas até o iterado k . A parte restante de $f_\varepsilon^{k_{j,1}}(\partial^u S)$ está contida na faixa horizontal $[0, 1] \times [1 - \rho^{-(k-k_{j,1})}, 1]$, onde pelo Teorema *D* o comprimento máximo da variedade instável é menor que $C \sqrt{\frac{\rho^{k-k_{j,1}}}{c}}$. Logo, existe uma constante $K_5 > 0$ tal que

$$\text{comp}(\partial^u S) < K_4 \rho^{-\frac{k}{2}} + C \sqrt{\frac{\rho^{k-k_{j,1}}}{c}} \rho^{-\frac{k_{j,1}}{2}} = K_5 \rho^{-\frac{k}{2}}.$$

□

Proposição 3.54. *Existe uma semiconjugação Φ_ε Hölder-contínua e finita-para-um entre $(f_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon)$ e o subshift de tipo finito $(\sigma_{A(n)}, \Sigma_{A(n)})$.*

Demonstração. Seja $\Phi_\varepsilon : \Sigma_{A(n)} \longrightarrow \Lambda_\varepsilon$ a aplicação definida por:

- se $k \geq n$, cada k -cilindro de \underline{x} dado por

$$C_k(\underline{x}) := \{\underline{y} \mid x_i = y_i, \ |i| \leq k\}$$

está associado ao único átomo S_k da partição \mathcal{P}_k que possui a mesma palavra central de $C_k(\underline{x})$, isto é,

$$\Phi_\varepsilon(C_k(\underline{x})) := S_k; \text{ e}$$

- $\Phi_\varepsilon(\underline{x}) := \bigcap_{k \geq n} \Phi_\varepsilon(C_k(\underline{x}))$ define um único elemento $x \in \Lambda_\varepsilon$, já que pela Proposição 3.53, $(\Phi_\varepsilon(C_k(\underline{x})))_{k \geq n}$ é uma sequência encaixada de compactos não-vazios com diâmetro indo para zero exponencialmente com k .

Segue por construção que $\Phi_\varepsilon \circ \sigma = f_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$. Além disso, Φ_ε é sobrejetiva, já que para qualquer $X \in \Lambda_\varepsilon$ podemos construir a seguinte sequência \underline{x} em $\Sigma_{A(n)}$: para cada $k \in \mathbb{Z}$, x_k é o símbolo de uma das faixas verticais em \mathcal{Q} que contém $f_\varepsilon^k(X)$; desta forma, obtemos pelo menos uma sequência $\underline{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tal que $\Phi_\varepsilon(\underline{x}) = X$.

Note também que Φ_ε é finita para um, pois para $k \geq n$, existem $2k$ pares de átomos de \mathcal{P}_k cujas interseções contêm os pontos $f_\varepsilon^j(0, r)$ com $j \in \{-k, \dots, k\}$ da órbita de tangência, ou seja, os pontos da órbita de $(0, r)$ possuem exatamente duas pré-imagens.

Para mostrar que a semiconjugação Φ_ε é Hölder-contínua, basta proceder da mesma forma que na Afirmação 2.24. \square

Demonstração do Teorema E. Seja Φ_ε a semiconjugação dada pela Proposição 3.54. Primeiramente, note que como $\mathcal{O}(0, r)$ é um conjunto enumerável infinito,

$$\mu(\mathcal{O}(0, r)) = 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon).$$

Além disso, segue do fato que a semiconjugação Φ_ε é finita para um que $\Phi_\varepsilon^{-1}(\mathcal{O}(0, r))$ também é enumerável infinito e, daí,

$$\nu(\Sigma_{A(n)} \setminus \Phi_\varepsilon^{-1}(\mathcal{O}(0, r))) = 1, \quad \forall \nu \in \mathcal{M}_1(\sigma_{A(n)}).$$

Portanto, se $\nu \in \mathcal{M}_1(\sigma_{A(n)})$ então

$$\Phi_\varepsilon^* \nu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon), \quad (3.31)$$

onde $\Phi_\varepsilon^* \nu(\cdot) := \nu(\Phi_\varepsilon^{-1}(\cdot))$.

Como φ e Φ_ε são aplicações Hölder-contínuas, temos que a aplicação $\phi_\varepsilon = \varphi \circ \Phi_\varepsilon : \Sigma_{A(n)} \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial Hölder-contínuo. Logo, segue da Proposição 1.43 que existe um único estado de equilíbrio ν (Gibbs) de $\sigma_{A(n)}$ associado ao potencial ϕ_ε .

Tome $\mu := \Phi_\varepsilon^* \nu$. Segue de (3.31) que $\mu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$.

Afirmação 3.55. μ é o estado de equilíbrio ergódico para f_ε associado ao potencial φ

Prova da Afirmação. Considere

$$\mathcal{A}_1 := \Sigma_{A(n)} \setminus \Phi_\varepsilon^{-1}(\mathcal{O}(0, r)) \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_2 := \Lambda_\varepsilon^*.$$

Daí,

$$\nu(\Sigma_{A(n)} \setminus \mathcal{A}_1) = \nu(\Phi_\varepsilon^{-1}(\mathcal{O}(0, r))) = 0 \quad \text{e} \quad \mu(\Lambda_\varepsilon \setminus \mathcal{A}_2) = \mu(\mathcal{O}(0, r)) = 0.$$

Além disso, como Φ_ε é uma bijeção entre \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , concluímos que $(\sigma_{A(n)}, \nu)$ e (f_ε, μ) são ergodicamente equivalentes. Então, $h_\nu(\sigma_{A(n)}) = h_\mu(f_\varepsilon)$ (Proposição 1.28). Por outro lado, do fato que Φ_ε é contínua e sobrejetiva, segue que $P_{f_\varepsilon}(\varphi) \leq P_{\sigma_{A(n)}}(\phi_\varepsilon) = P_{\sigma_{A(n)}}(\varphi \circ \Phi_\varepsilon)$ (Proposição 1.38). Portanto,

$$\begin{aligned} P_{f_\varepsilon}(\varphi) &\leq P_{\sigma_{A(n)}}(\varphi \circ \Phi_\varepsilon) = h_\nu(\sigma_{A(n)}) + \int (\varphi \circ \Phi_\varepsilon) d\nu \\ &= h_\mu(f_\varepsilon) + \int \varphi d\mu = P_{f_\varepsilon}(\varphi). \end{aligned}$$

Então, μ maximiza a pressão sobre Λ_ε , como queríamos demonstrar. \square Af. \square

3.6 O potencial $-t \log J_\varepsilon^u$

Seja $\Psi_{t,\varepsilon} : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ o potencial definido por

$$\Psi_{t,\varepsilon}(X) = -t \log J_\varepsilon^u(X),$$

onde $J_\varepsilon^u(X) = \|Df_\varepsilon(X)|_{E^u(X)}\|$ é o jacobiano instável de f_ε no ponto X . Denotaremos por $\mathcal{P}(t)$ a pressão de $\Psi_{t,\varepsilon}$.

O potencial $\Psi_{t,\varepsilon}$ satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 3.56. $\Psi_{t,\varepsilon}$ não é contínuo em $\{(1, 1)\}$.

Demonstração. A demonstração é análoga a feita para a aplicação f na Propriedade 2.9, observando que

$$f_\varepsilon^k(0, r) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (1, 1).$$

□

Claramente, segue desta propriedade que $\Psi_{t,\varepsilon}$ não é Hölder-contínuo.

Propriedade 3.57. $\Psi_{t,\varepsilon}$ é limitado.

Demonstração. A prova é análoga a da Propriedade 2.11 de f . Basta notar que pelo Teorema C,

$$\frac{1}{2} \log \rho \leq \int \log J_\varepsilon^u d\mu \leq \log 2\rho, \quad (3.32)$$

para todo $\mu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$ e, portanto, para todo $t \geq 0$

$$-t \log(2\rho) \leq \int \Psi_{t,\varepsilon} d\mu \leq -t \frac{1}{2} \log \rho.$$

□

Agora, daremos uma condição suficiente para existência de medidas conforme. Mais precisamente:

Teorema F. *Seja $t > 0$ tal que $\mathcal{P}(t) > -t \frac{1}{2} \log \rho$. Então, existe um estado de equilíbrio $\mu_{t,\varepsilon}$ de f_ε associado ao potencial $\Psi_{t,\varepsilon}$.*

Antes de provarmos o Teorema F, apresentaremos três lemas. O primeiro irá garantir a semicontinuidade superior da entropia de f_ε .

Lema 3.58. *A aplicação $\mu \mapsto h_\mu(f_\varepsilon)$ é semicontínua superiormente.*

Demonstração. Pela Proposição 3.54 segue que existe uma semiconjugação $\Phi_\varepsilon : \Sigma_{A(n)} \rightarrow \Lambda_\varepsilon$ Hölder-contínua e injetiva no conjunto de medida total $\Sigma_{A(n)} \setminus \Phi_\varepsilon^{-1}(\mathcal{O}(0, r))$. Além disso, segue da demonstração do Teorema E que:

- para toda $\mu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$, $h_\mu(f_\varepsilon) = h_{\Phi_\varepsilon^{-1}(\mu)}(\sigma_{A(n)})$; e
- para toda $\nu \in \mathcal{M}_1(\sigma_{A(n)})$, $h_\nu(\sigma_{A(n)}) = h_{\Phi_\varepsilon(\nu)}(f_\varepsilon)$.

Como a expansividade vale para $\Sigma_{A(n)}$, obtemos a semicontinuidade superior da entropia de $\sigma_{A(n)}$ e, conseqüentemente, para a aplicação $\mu \mapsto h_\mu(f_\varepsilon)$. □

Já que o Lema 3.58 garante a semicontinuidade superior da entropia, iremos destacar o seguinte resultado sobre a unicidade de estados de equilíbrio para potenciais contínuos.

Proposição 3.59 (Corolário 9.15.1, [Wa82]). *Seja $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto \mathcal{S} e suponha que a aplicação $\mu \mapsto h_\mu(T)$ é semicontínua superiormente. Então, existe um subconjunto denso \mathcal{W} de $C^0(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ tal que para cada pontencial $\varphi \in \mathcal{W}$ existe um único estado de equilíbrio μ de T associado a φ .*

Vimos na Propriedade 3.56 que a aplicação J_ε^u não é contínua. Daí, a convergência na topologia fraca* de uma sequência $\nu_k \rightarrow \nu$ não garante que $\int \log J_\varepsilon^u d\nu_k \rightarrow \int \log J_\varepsilon^u d\nu$. O próximo lema nos dará uma condição para que esta convergência seja satisfeita.

Lema 3.60. *Seja $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência que converge para ν na topologia fraca*. Se $\nu(\{(1, 1)\}) = 0$, então*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int \log J_\varepsilon^u d\nu_k = \int \log J_\varepsilon^u d\nu.$$

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja S_m^1 o átomo da partição \mathcal{P}_m (dada pela Proposição 3.54) que contém $(1, 1)$ e considere os conjuntos compactos

$$E_m(1) := S_m^1 \text{ e } E_m(2) := \Lambda_\varepsilon \setminus E_m(1).$$

Tome uma partição da unidade $\{\chi_{1,m}, \chi_{2,m}\}$ tal que $\chi_{i,m}|_{E_m(j)} = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ quando $i \neq j$.

Denotaremos por $\bar{L} \in \mathbb{R}$ e $\underline{L} \in \mathbb{R}$ o lim sup e o lim inf de $\int \log J_\varepsilon^u d\nu_k$, respectivamente. Tome a subsequência $(\nu_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\bar{L} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int \log J_\varepsilon^u d\nu_{k_i}$. Por simplicidade, assumiremos que a convergência ocorre para a sequência $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Então, para todo $k > 0$ e para todo $m > 0$ obtemos

$$\int \log J_\varepsilon^u d\nu_k = \int \chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u d\nu_k + \int \chi_{2,m} \log J_\varepsilon^u d\nu_k. \quad (3.33)$$

Como J_ε^u é contínuo em $\Lambda_\varepsilon \setminus \{(1, 1)\}$ (Propriedade 3.56) temos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int \chi_{2,m} \log J_\varepsilon^u d\nu_k = \int \chi_{2,m} \log J_\varepsilon^u d\nu,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Daí, como o lado esquerdo da igualdade em (3.33) converge para \bar{L} quando $k \rightarrow +\infty$, temos que $\int \chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u d\nu_k$ também converge quando $k \rightarrow +\infty$.

Além disso, segue de (3.32) que

$$\left| \int \chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u d\nu_k \right| \leq (\log 2\rho)\nu(E_m(1)),$$

já que $\nu_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \nu$ na topologia fraca*. Note que quando $m \rightarrow +\infty$, $\nu(E_m(1)) \rightarrow 0$, pois por hipótese, $\nu(\{(1, 1)\}) = 0$.

Por outro lado, segue do Teorema da Convergência Dominada (Teorema 1.20) e de $\nu(\{(1, 1)\}) = 0$ que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int \chi_{2,m} \log J_\varepsilon^u d\nu = \int \log J_\varepsilon^u d\nu.$$

Portanto, tomando primeiro o limite quando $k \rightarrow +\infty$ e em seguida o limite quando $m \rightarrow +\infty$ em (3.33), obtemos $\bar{L} = \int \log J_\varepsilon^u d\nu$.

Fazendo o mesmo para \underline{L} , também iremos obter $\underline{L} = \int \log J_\varepsilon^u d\nu$, o que conclui o lema. \square

Definição 3.61. Denotaremos por δ_1 a medida de Dirac no ponto fixo $(1, 1)$.

Lema 3.62. Seja $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$ de probabilidades ergódicas tal que

$$\mu_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a_1 \delta_1 + a_2 \nu$$

na topologia fraca*, onde $a_2 = 1 - a_1$ com $a_1 > 0$, $\nu(\{(1, 1)\}) = 0$ e $\nu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$ é ergódica. Então,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int \log J_\varepsilon^u d\mu_k \geq \frac{a_1}{2} \log \rho + a_2 \int \log J_\varepsilon^u d\nu.$$

Demonstração. Sejam $E_m(1)$, $E_m(2)$ e $\{\chi_{1,m}, \chi_{2,m}\}$ como no lema anterior. Daí, para todo $k > 0$ e todo $m > 0$, obtemos

$$\int \log J_\varepsilon^u d\mu_k = \int \chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u d\mu_k + \int \chi_{2,m} \log J_\varepsilon^u d\mu_k. \quad (3.34)$$

Por um lado, a continuidade de $\chi_{2,m} \log J_\varepsilon^u$ (Propriedade 3.56) nos garante que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int \chi_{2,m} \log J_\varepsilon^u d\mu_k = a_2 \int \chi_{2,m} \log J_\varepsilon^u d\nu, \quad (3.35)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Falta considerarmos a parte $\chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u$ de (3.34). Para isso, seja $\zeta > 0$ pequeno. Como por hipótese, $a_1 > 0$ e $\nu(\{(1, 1)\}) = 0$, temos que existe $m' > 0$ suficientemente grande tal que para todo $m > m'$,

$$\nu(S_m^1) < \frac{1}{2} a_1 \zeta.$$

Além disso, para todo $m > m'$

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \mu_k(S_m^1) \in \left[a_1, a_1 \left(1 + \frac{1}{2} \zeta \right) \right] \quad \text{e} \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mu_k(S_m^1) \geq a_1.$$

Daqui em diante, iremos considerar $m > m'$.

Portanto, podemos assumir k suficientemente grande tal que

$$(1 - \zeta) a_1 \leq \mu_k(S_{m+m^2}^1) \leq \mu_k(S_m^1) \leq (1 + \zeta) a_1 \quad (3.36)$$

onde $S_{m+m^2}^1$ é o átomo da partição \mathcal{P}_{m+m^2} que contém $(1, 1)$.

Observe que a aplicação $\chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u$ pertence a $L^1(\vartheta)$ para todo $\vartheta \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$, pois $\log J_\varepsilon^u$ é limitado (Propriedade 3.57). Logo, como μ_k é ergódica, segue do Teorema de Birkhoff que para μ_k quase todo ponto X ,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} (\chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u) \circ f_\varepsilon^i(X) = \int \chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u d\mu_k, \quad (3.37)$$

Seja X satisfazendo (3.37). Note que as possíveis dificuldades para estimar $\chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u$ ocorrem nos pontos cujas órbitas futuras estão suficientemente próximas da órbita futura de $(0, r)$. Assim, iremos considerar que $\mathcal{O}^+(X)$ está próxima de $\mathcal{O}^+(0, r)$ e analisaremos $\mathcal{O}^+(X)$ decompondo-a em intervalos de tempo onde há visita em S_m^1 .

Se $\mathcal{O}^+(X) \cap (S_m^1 \setminus [0, 1] \times \{1\}) \neq \emptyset$, existem $j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{Z}$, onde $j_1 < j_2 < j_3$, tais que pela equação (3.2) obtemos

- $f_\varepsilon^{j_1}(X) \in \mathcal{U} \subset R_1$ e $f_\varepsilon^{j_1}(X)$ está próximo de (q, ε) ;
- $f_\varepsilon^{j_1+n-1}(X) \in R_3 \cap R'_1$;
- $f_\varepsilon^{j_1+n}(X) \in R_5 \cap R'_3$ e $f_\varepsilon^{j_1+n}(X)$ está próximo de $(\bar{q}, 1) = f_\varepsilon^n(q, \varepsilon)$;
- $j_2 := \min\{j \geq j_1 + n \mid f_\varepsilon^j(X) \in S_m^1 \subset R_5 \cap R'_5\}$; e
- $j_3 := \min\{j \geq j_2 \mid f_\varepsilon^j(X) \in R_5 \cap R'_5 \text{ e } f_\varepsilon^{j+1}(X) \notin R_5\}$.

Pela equação (3.36), temos que

$$\mu_k(\mathcal{O}(X) \cap (S_m^1 \setminus S_{m+m^2}^1)) \leq 2a_1\zeta. \quad (3.38)$$

Portanto, como $\log J_\varepsilon^u$ é limitado (Propriedade 3.57), existe uma contante $C_9 > 0$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} (\chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u) \circ f_\varepsilon^i(Y) < C_9\zeta \quad (3.39)$$

para todo $Y \in \mathcal{O}(X) \cap (S_m^1 \setminus S_{m+m^2}^1)$.

Logo, precisamos apenas analisar quando $\mathcal{O}(X) \cap S_{m+m^2}^1 \neq \emptyset$; isto corresponde às órbitas que permanecem pelo menos m^2 iterados em S_m^1 .

Suponha que $\mathcal{O}(X) \cap S_{m+m^2}^1 \neq \emptyset$. Nesse caso, vimos acima que a órbita de X passará primeiro próximo de (q, ε) . Por simplicidade, iremos assumir que $X = (x+q, y) \in \mathcal{U}$ com $x \geq 0$ e, além disso, iremos supor que X pertence a faixa horizontal

$$F_h := \left\{ (x, y) \in \mathcal{Q} \mid \varepsilon + \frac{1}{\rho^{2m+2n+l+1}} \leq y \leq \varepsilon + \frac{1}{\rho^{2m+2n+l}} \right\},$$

para algum inteiro $l \geq m^2$, onde $f_\varepsilon^n(q, \varepsilon) = (\bar{q}, 1) \in R_5 \cap R'_3$. Daí,

$$F_h \cap R'_4 \subset f_\varepsilon^{-n}(R_5 \cap \bar{R}'_3) \subset R_1.$$

Seja $v^u \in E^u(X)$. Observe que, por construção, a inclinação de $E^u(X)$ (com respeito aos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$) é $(1, 2C_{10}cx)$, onde C_{10} é uma constante em $[\frac{1}{3}, 3]$. Então, iremos considerar v^u da forma

$$v^u := (1, 2C_{10}cx).$$

Daí, já que $X \in \mathcal{U}$ e a equação da parábola que contém X é $y = cx^2 - \lambda\tilde{x} + \varepsilon$, onde $(\tilde{x}, \tilde{y}) = f_\varepsilon^{-1}(X)$, obtemos

$$v^u = \left(1, 2C_{10}\sqrt{c}\sqrt{y - \varepsilon + K_{X,\lambda}} \right),$$

com $K_{X,\lambda} = \lambda\tilde{x}$. Como $X \in F_h$ temos que $\frac{1}{\rho^{2m+2n+l+1}} \leq y - \varepsilon$, ou seja, podemos tomar

$$v^u := \left(1, 2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\frac{1}{\rho^{2m+2n+l}} + K_{X,\lambda}} \right),$$

onde $C_{11} \in \left[\frac{1}{3\sqrt{\rho}}, 3 \right]$.

Segue da análise de $\mathcal{O}(X)$ que antes de sair de S_m^1 , a órbita positiva de X está contida na união $R_1 \cup R_3 \cup R_5$. Então, observando que apenas o trecho da órbita que está contido em S_m^1 é que irá influenciar no valor médio de $\chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u$, basta darmos uma estimativa para

$$\frac{\|Df_\varepsilon^{m+n+l}(X)v^u\|}{\|Df_\varepsilon^{m+n}(X)v^u\|},$$

que é a expansão da norma de v^u entre o $(m+n)$ -ésimo iterado e o $(m+n+l)$ -ésimo iterado.

Por construção, temos que

$$Df_\varepsilon|_{R_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = Df_\varepsilon|_{R_5} \text{ e } Df_\varepsilon|_{R_3} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Df_\varepsilon^{m+n}(X)v^u &= \left(-\lambda^{m+n}, -\rho^{m+n} 2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\frac{1}{\rho^{2m+2n+l}} + K_{X,\lambda}} \right) \\ &= \left(-\lambda^{m+n}, -2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\frac{1}{\rho^l} + \rho^{2m+2n}K_{X,\lambda}} \right) \end{aligned}$$

e, após l iterados,

$$Df_\varepsilon^{m+n+l}(X)v^u = \left(-\lambda^{m+n+l}, -2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\rho^l + \rho^{2m+2n+2l}K_{X,\lambda}} \right).$$

Note que $\sqrt{\rho^l + \rho^{2m+2n+2l}K_{X,\lambda}} \stackrel{K_{X,\lambda} \geq 0}{\geq} \sqrt{\rho^l} \geq \rho^{\frac{m}{2}}$, já que $l \geq m^2$, donde concluímos que para m suficientemente grande,

$$|\lambda^{m+n+l}| < \left| 2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\rho^l + \rho^{2m+2n+2l}K_{X,\lambda}} \right|.$$

Escolhendo a norma do máximo (já que em \mathbb{R}^2 as normas são equivalentes), temos que para m suficientemente grande,

$$\|Df_\varepsilon^{m+n+l}(X)v^u\|_{\max} = 2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\rho^l + \rho^{2m+2n+2l}K_{X,\lambda}}.$$

Afirmção 3.63. *Existe uma constante $C_{12} > 0$ tal que*

$$\frac{\|Df_\varepsilon^{m+n+l}(X)v^u\|_{\max}}{\|Df_\varepsilon^{m+n}(X)v^u\|_{\max}} > C_{12}\rho^{\frac{l}{2}}\lambda^{4\sqrt{l}}.$$

Prova da Afirmção. De fato, se $\|Df_\varepsilon^{m+n}(X)v^u\|_{\max} = \lambda^{m+n}$, para m suficientemente grande obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\|Df_\varepsilon^{m+n+l}(X)v^u\|_{\max}}{\|Df_\varepsilon^{m+n}(X)v^u\|_{\max}} &= \frac{2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\rho^l + \rho^{2m+2n+2l}K_{X,\lambda}}}{\lambda^{m+n}} \stackrel{K_{X,\lambda} \geq 0}{\geq} \frac{2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\rho^l}}{\lambda^{m+n}} \\ &> 2C_{11}\sqrt{c}\rho^{\frac{l}{2}}\lambda^{4\sqrt{l}}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade,

$$(\lambda^{m+n})^{-1} > 1 > \lambda^{4\sqrt{l}},$$

já que $m + n > 0$ e $\lambda < 1$.

Por outro lado, quando $\|Df_\varepsilon^{m+n}(X)v^u\|_{\max} = 2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\frac{1}{\rho^l} + \rho^{2m+2n}K_{X,\lambda}}$, para m suficientemente grande segue que

$$\begin{aligned} \frac{\|Df_\varepsilon^{m+n+l}(X)v^u\|_{\max}}{\|Df_\varepsilon^{m+n}(X)v^u\|_{\max}} &= \frac{2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\rho^l + \rho^{2m+2n+2l}K_{X,\lambda}}}{2C_{11}\sqrt{c}\sqrt{\frac{1}{\rho^l} + \rho^{2m+2n}K_{X,\lambda}}} \\ &\stackrel{K_{X,\lambda} \geq 0}{\geq} \frac{\sqrt{\rho^l}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^l} + \rho^{2m+2n}K_{X,\lambda}}} \stackrel{K_{X,\lambda} \leq 1}{\geq} \frac{\sqrt{\rho^l}}{\sqrt{\rho^{-l} + \rho^{2m+2n}}} \\ &\stackrel{l \geq m^2}{>} \frac{\sqrt{\rho^l}}{\sqrt{\rho^{-m^2} + \rho^{2m+2n}}} > \frac{\sqrt{\rho^l}}{\sqrt{2}\rho^{2m}} > \frac{\sqrt{2}}{2}\rho^{\frac{1}{2}}\lambda^{4\sqrt{l}}, \end{aligned}$$

onde:

- na penúltima desigualdade, note que

$$\rho^{-m^2} < 1 < \rho^{2m+2n},$$

já que $\rho > 3$ e, tomando $m > n$,

$$\sqrt{\rho^{-m^2} + \rho^{2m+2n}} < \sqrt{2\rho^{2m+2n}} < \sqrt{2\rho^{4m}} = \sqrt{2}\rho^{2m}; \text{ e}$$

- na última desigualdade, segue da equação (2.1) que $\frac{1}{b} < -\frac{\log \lambda}{\log \rho} < b$ e, considerando $b < 2$, obtemos $\rho^{\frac{1}{2}} < \lambda^{-1}$. Daí,

$$\rho^{2m} < \rho^{\frac{4m}{2}} < \lambda^{-4m} \stackrel{l \geq m^2}{\leq} \lambda^{-4\sqrt{l}}.$$

Para concluir a afirmação, basta tomar $C_{12} := \min\{2C_{11}\sqrt{c}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$. \square_{Af} .

Logo, como $f_\varepsilon^i(X) \notin S_m^1$ para $i = 0, 1, \dots, m+n$,

$$\sum_{i=0}^{m+n} (\chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u) \circ f_\varepsilon^i(X) = 0.$$

Então, segue da Afirmação 3.63 que

$$\sum_{i=0}^{m+n+l} (\chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u) \circ f_\varepsilon^i(X) \geq \log C_{12} + l\frac{1}{2} \log \rho + 4\sqrt{l} \log \lambda,$$

donde concluímos que para j suficientemente grande

$$\frac{1}{j} \sum_{i=0}^j (\chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u) \circ f_\varepsilon^i(X) + C_9\zeta \geq \frac{\ell_j}{j} \log C_{12} + \frac{\sum l_i \log \rho}{j} + \frac{4 \sum \sqrt{l_i}}{j} \log \lambda,$$

onde:

- ℓ_j é dado por

$$\{s_1, s_2, \dots, s_{\ell_j}\} := \{s \in [0, j] \mid f_\varepsilon^s(X) \in S_{m+m^2}^1 \text{ e } f_\varepsilon^{s-1}(X) \notin S_{m+m^2}^1\};$$

- l_i é tal que

$$f_\varepsilon^{s_i+k}(X) \in S_m^1 \text{ para todo } k = 0, 1, \dots, l_i - 1; \text{ e}$$

- $C_9\zeta$ segue de (3.39).

Como $l_i \geq m^2$ para todo $i = 1, \dots, \ell_j$, temos que

$$l_i \leq \frac{j}{\ell_j} \iff \frac{\ell_j}{j} \leq \frac{1}{l_i} \leq \frac{1}{m^2}.$$

Então, assumindo m grande o bastante tal que $|\frac{1}{m^2} \log C_{12}| < \zeta$, obtemos

$$\left| \frac{\ell_j}{j} \log C_{12} \right| \leq \left| \frac{1}{m^2} \log C_{12} \right| < \zeta.$$

Por outro lado, como $j > \sum l_i$ temos que

$$\frac{j}{m} > \frac{\sum l_i}{m} \stackrel{l_i \geq m^2}{\geq} \sum \frac{l_i}{\sqrt{l_i}} = \sum \sqrt{l_i} \iff \frac{4}{m} > 4 \frac{\sum \sqrt{l_i}}{j}$$

e, tomando m suficientemente grande,

$$0 > \frac{4 \sum \sqrt{l_i}}{j} \log \lambda > -\zeta.$$

Observe que quando j tende a $+\infty$,

$$\frac{\sum l_i}{j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \mu_k(S_{m+m^2}^1) = \mu_k(S_m^1) - \mu_k(S_m^1 \setminus S_{m+m^2}^1).$$

Então, segue de (3.36) e de (3.38) que

$$\frac{\sum l_i}{j} > a_1(1 - \zeta) - 2a_1\zeta = a_1(1 - 3\zeta).$$

Assim, fazendo $j \rightarrow +\infty$, temos para todo m suficientemente grande que

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{j} \sum_{i=0}^j (\chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u) \circ f_\varepsilon^i(X) \geq a_1(1 - 3\zeta) \frac{\log \rho}{2} - C_9\zeta - 2\zeta. \quad (3.40)$$

Logo, segue de (3.37) e (3.40) que para todo m e todo k suficientemente grandes (k em função de m)

$$\int \chi_{1,m} \log J_\varepsilon^u d\mu_k \geq a_1(1 - 3\zeta) \frac{\log \rho}{2} - C_9\zeta - 2\zeta.$$

Daí, por (3.34) e por (3.35), obtemos

$$\int \log J_\varepsilon^u d\mu_k \geq \frac{a_1}{2}(1 - 3\zeta) \log \rho - C_9\zeta + a_2 \int \chi_{2,m} \log J_\varepsilon^u d\nu - 3\zeta,$$

para todo m e todo k suficientemente grandes (k em função de m).

Portanto, tomando o limite quando $k \rightarrow +\infty$, em seguida o limite quando $m \rightarrow +\infty$ e, finalmente, fazendo $\zeta \rightarrow 0$, obtemos

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int \log J_\varepsilon^u d\mu_k \geq \frac{a_1}{2} \log \rho + a_2 \int \log J_\varepsilon^u d\nu.$$

□

Apresentaremos agora a prova do Teorema F .

Demonstração do Teorema F . Seja $\mathcal{P}(t)$ a pressão de f_ε associada ao potencial $\Psi_{t,\varepsilon}$ e considere uma sequência $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$h_{\mu_k}(f_\varepsilon) - t \int \log J_\varepsilon^u d\mu_k > \mathcal{P}(t) - \frac{1}{k}.$$

Tome $\mu \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$ tal que $\mu_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu$ na topologia fraca*.

Suponha que

$$\mu := a_1 \delta_1 + a_2 \nu,$$

onde $a_1, a_2 \geq 0$, $a_1 + a_2 = 1$ e $\nu(\{(1, 1)\}) = 0$. Note que $a_2 \neq 0$, pois caso contrário, $\mu = a_1 \delta_1$ e, pelo Lema 3.58,

$$h_{\mu_k}(f_\varepsilon) \rightarrow h_\mu(f_\varepsilon) = 0.$$

Daí, por hipótese e pela equação 3.32, obtemos

$$-t \frac{1}{2} \log \rho < \mathcal{P}(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} -t \int \log J_\varepsilon^u d\mu_k \leq -t \inf_{\vartheta \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)} \int \log J_\varepsilon^u d\vartheta \leq -t \frac{1}{2} \log \rho,$$

o que é uma contradição.

Agora, segue dos Lemas 3.58 e 3.62 que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(h_{\mu_k}(f_\varepsilon) - t \int \log J_\varepsilon^u d\mu_k \right) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} h_{\mu_k}(f_\varepsilon) - t \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int \log J_\varepsilon^u d\mu_k \\ &\leq h_\mu(f_\varepsilon) - t \left(\frac{a_1}{2} \log \rho + a_2 \int \log J_\varepsilon^u d\nu \right) \\ &= a_2 \left(h_\nu(f_\varepsilon) - t \int \log J_\varepsilon^u d\nu \right) - t \frac{a_1}{2} \log \rho \\ &\leq a_2 \left(h_\nu(f_\varepsilon) - t \int \log J_\varepsilon^u d\nu \right) + a_1 \mathcal{P}(t), \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde usamos a hipótese $\mathcal{P}(t) > -t \frac{1}{2} \log \rho$ na última desigualdade. Observe que quando $a_1 = 0$, a última desigualdade de (3.41) se torna uma igualdade. Do fato que $a_1 = 1 - a_2$ e $a_2 \neq 0$, temos que

$$\mathcal{P}(t) \leq \left(h_\nu(f_\varepsilon) - t \int \log J_\varepsilon^u d\nu \right).$$

Por outro lado, sabemos que $\mathcal{P}(t) \geq h_\vartheta(f_\varepsilon) - t \int \log J_\varepsilon^u d\vartheta$ para qualquer $\vartheta \in \mathcal{M}_1(f_\varepsilon)$. Portanto,

$$\mathcal{P}(t) = h_\nu(f_\varepsilon) - t \int \log J_\varepsilon^u d\nu,$$

donde concluímos que ν é um estado de equilíbrio de f_ε associado ao potencial $\Psi_{t,\varepsilon}$, $a_1 = 0$ e $\mu = \nu$. \square

Capítulo 4

Estabilidade estatística

Nosso objetivo aqui é de demonstrar a estabilidade estatística para a família de perturbações definida no Capítulo 2. Dividiremos o capítulo em duas partes, onde na primeira, apresentaremos um resultado que será a ferramenta principal para que na segunda parte, possamos concluir a estabilidade estatística para a família de desdobramento da tangência homoclínica.

Antes explicaremos o que estamos considerando por estabilidade estatística.

Definição 4.1. *Seja $g \in \text{Diff}^r(\mathbf{M})$. Dizemos que g é C^k -estatisticamente estável, $k \leq r$, (ou, simplesmente, estatisticamente estável) quando existe um aberto $\mathcal{V}(g) \subset \text{Diff}^k(\mathbf{M})$ tal que $g \in \partial\mathcal{V}(g)$ e para qualquer sequência $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ em $\mathcal{V}(g)$ tal que $g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g$, todo ponto de acumulação na topologia fraca* de uma sequência $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de estados de equilíbrios de g_ε associados a um potencial φ_ε é um estado de equilíbrio para g associado a um potencial φ tal que $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi$.*

4.1 Teorema Principal

Primeiramente, iremos apresentar as características gerais do conjunto de aplicações que satisfazem esse teorema.

(H1) *Seja $G : [0, 1] \times M \rightarrow M$ uma aplicação contínua, onde para cada $\varepsilon \in [0, 1]$, $g_\varepsilon(\cdot) := G(\varepsilon, \cdot)$ é um difeomorfismo C^2 definido em uma variedade Riemanniana compacta M .*

(H2) $\|g_\varepsilon - g_0\|_{C^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

(H3) *Para cada $\varepsilon > 0$, g_ε é um difeomorfismo Axioma A transitivo com conjunto hiperbólico $\Omega(f_\varepsilon) = \Lambda_\varepsilon$. E, para $\varepsilon = 0$, o difeomorfismo g_0 pertence a fronteira do aberto de difeomorfismos hiperbólicos.*

Lema 4.2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma semiconjugação Φ_ε entre $(\Lambda_\varepsilon, g_\varepsilon)$ e um subshift de tipo finito (Σ_A, σ_A) , onde A é a matriz de transição (que não depende de ε). Além disso, Φ_ε é injetiva sobre o conjunto residual*

$$\Lambda'_\varepsilon := \Lambda_\varepsilon \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} g_\varepsilon^j(\partial^u \mathcal{P} \cup \partial^s \mathcal{P}),$$

onde $\partial^s \mathcal{P}$ e $\partial^u \mathcal{P}$ são os bordos estável e instável (respectivamente) da partição \mathcal{P} dada pela Proposição 1.12.

Demonstração. Segue da hipótese (H3) e da Proposição 1.35 que para cada $\varepsilon > 0$ existem um subshift de tipo finito $(\Sigma_{A(\varepsilon)}, \sigma_{A(\varepsilon)})$ e uma semiconjugação $\Phi_\varepsilon : \Sigma_{A(\varepsilon)} \rightarrow \Lambda_\varepsilon$, onde $A(\varepsilon)$ é a matriz de transição do *subshift* e Φ_ε é injetiva sobre o conjunto residual $\Lambda'_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} g_\varepsilon^j(\partial^u \mathcal{P} \cup \partial^s \mathcal{P})$ (\mathcal{P} é a partição de Markov dada pela Proposição 1.12).

Além disso, como $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0,1]}$ varia continuamente com o parâmetro ε (hipótese (H1)), segue de (H2) e da continuação hiperbólica (Teorema 1.14) que $(g_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ é uma família de aplicações duas a duas conjugadas. Então, existe uma matriz de transição A (que não depende de ε) tal que $\Sigma_{A(\varepsilon)} := \Sigma_A$ para todo $\varepsilon > 0$. Assim, a restrição do *shift* ao espaço $\Sigma_{A(\varepsilon)}$ será dada por σ_A . \square

Lema 4.3. *A semiconjugação Φ_ε dada pelo Lema 4.2 é Hölder-contínua.*

Demonstração. A Proposição 1.12 garante a existência de uma partição de Markov $\mathcal{P} = \{R_1, \dots, R_m\}$ com diâmetro suficientemente pequeno, onde m é tal que $\Sigma_A \subset \Sigma_m$. Além disso, para $\underline{x} = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ tem-se que

$$\Phi_\varepsilon(\underline{x}) := \bigcap_{n \geq 0} C_n(\underline{x}), \text{ onde } C_n(\underline{x}) := \overline{\bigcap_{j=-n}^n g_\varepsilon^{-j}(\text{int } R_{x_j})}.$$

Por construção, temos que $\partial^u \mathcal{P}$ e $\partial^s \mathcal{P}$ são formados por variedades instáveis e estáveis, respectivamente. Daí, o comprimento do bordo de cada $C_n(\underline{x})$ vai para zero exponencialmente com n e, portanto, existem $K > 0$ e $\xi > 1$ tais que $\text{Diam } C_n(\underline{x}) \leq K\xi^{-n}$ para todo $n \geq 0$ e todo $\underline{x} \in \Sigma_A$.

Sejam $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma_A$ tais que $\Phi_\varepsilon(\underline{x}) = x \neq y = \Phi_\varepsilon(\underline{y})$ e seja $N \geq 0$ menor inteiro positivo tal que $y \in C_N(\underline{x})$, mas $y \notin C_{N+1}(\underline{x})$ (pois se $y \in C_n(\underline{x})$ para todo $n \geq 0$ então $x = y$). Logo,

$$(a) \quad x, y \in C_N(\underline{x}) \implies \|x - y\| \leq K\xi^{-N}; \text{ e}$$

$$(b) \quad x_i = y_i \text{ para todo } |i| \leq N \text{ e } x_{N+1} \neq y_{N+1} \text{ ou } x_{-N-1} \neq y_{-N-1} \implies d(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2^N},$$

onde d é a distância em Σ_m .

Seja $\gamma = \frac{\log \xi}{\log 2}$. Portanto,

$$\|\Phi_\varepsilon(\underline{x}) - \Phi_\varepsilon(\underline{y})\| = \|x - y\| \leq K\xi^{-N} = K(2^\gamma)^{-N} = K(2^{-N})^\gamma = Kd(\underline{x}, \underline{y})^\gamma,$$

ou seja, Φ_ε é γ -Hölder-contínua. \square

Observação 4.4. A Proposição 1.41 nos dá a existência e unicidade de estados de equilíbrio para a família $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ associados a um potencial Hölder-contínuo. Além disso, segue da Proposição 1.43 a existência e unicidade de estados de equilíbrio para o *subshift* de tipo finito σ_A associado a um potencial Hölder-contínuo.

Na demonstração do Teorema Principal, precisaremos identificar os estados de equilíbrio μ_ε da família $(g_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ com os estados de equilíbrio ν_ε do subshift de tipo finito (Σ_A, σ_A) . Usando a semiconjugação Φ_ε dada pelo Lema 4.2, mostraremos existe uma correspondência entre estes estados de equilíbrio.

Proposição 4.5. *Seja $\varepsilon > 0$ e tome $\varphi_\varepsilon : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial Hölder-contínuo. Sejam μ_ε e ν_ε os estados de equilíbrio de g_ε e σ_A associados aos potenciais φ_ε e $\phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$, respectivamente. Se $\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon(\Lambda'_\varepsilon) = 1$, então $\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon = \mu_\varepsilon$.*

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Primeiramente, como φ_ε e Φ_ε são aplicações Hölder-contínuas, a aplicação $\phi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$ é um potencial Hölder-contínuo. É importante ressaltar esse fato, pois ele garante a unicidade dos estados de equilíbrio tanto para g_ε quanto para σ_A .

Suponha que $\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon(\Lambda'_\varepsilon) = 1$. Note que $\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon := \bar{\mu}_\varepsilon$ é uma probabilidade g_ε -invariante, pois como $\Phi_\varepsilon \circ \sigma_A = g_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$ e ν_ε é σ_A -invariante, para qualquer boreliano E de Λ_ε temos que

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_\varepsilon(g_\varepsilon^{-1}(E)) &= \Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon(g_\varepsilon^{-1}(E)) = \nu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1} \circ g_\varepsilon^{-1}(E)) = \nu_\varepsilon(\sigma_A^{-1} \circ \Phi_\varepsilon^{-1}(E)) \\ &= \nu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1}(E)) = \bar{\mu}_\varepsilon(E). \end{aligned}$$

Agora, considere $\mathcal{A}_1 := \Phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda'_\varepsilon) \subset \Sigma_A$ e $\mathcal{A}_2 := \Lambda'_\varepsilon$. Como Λ'_ε é o subconjunto de Λ_ε sobre o qual Φ_ε é injetiva, Φ_ε é uma bijeção entre \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 . Além disso, $\bar{\mu}_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon \setminus \mathcal{A}_2) = 0$ e

$$\nu_\varepsilon(\Sigma_A \setminus \mathcal{A}_1) = 1 - \nu_\varepsilon(\mathcal{A}_1) = 1 - \nu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda'_\varepsilon)) = 1 - \bar{\mu}_\varepsilon(\Lambda'_\varepsilon) = 0,$$

ou seja, os sistemas $(g_\varepsilon, \bar{\mu}_\varepsilon)$ e $(\sigma_A, \nu_\varepsilon)$ são ergodicamente equivalentes. Logo, segue da Proposição 1.28 que $h_{\bar{\mu}_\varepsilon}(g_\varepsilon) = h_{\nu_\varepsilon}(\sigma_A)$.

Por outro lado, como Φ_ε é contínua e sobrejetiva, temos que $P_{g_\varepsilon}(\varphi_\varepsilon) \leq P_{\sigma_A}(\phi_\varepsilon) = P_{\sigma_A}(\varphi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon)$ (Proposição 1.38). Portanto,

$$\begin{aligned} P_{g_\varepsilon}(\varphi_\varepsilon) &\leq P_{\sigma_A}(\varphi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) = h_{\nu_\varepsilon}(\sigma_A) + \int (\varphi_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon) d\nu_\varepsilon \\ &= h_{\bar{\mu}_\varepsilon}(g_\varepsilon) + \int \varphi_\varepsilon d\bar{\mu}_\varepsilon \leq P_{g_\varepsilon}(\varphi_\varepsilon), \end{aligned} \tag{4.1}$$

isto é, $\bar{\mu}_\varepsilon$ é um estado de equilíbrio para g_ε associado ao potencial φ_ε .

Mas, do fato que φ_ε é um potencial Hölder-contínuo, o estado de equilíbrio de g_ε associado ao potencial φ_ε é único. Assim, $\bar{\mu}_\varepsilon = \mu_\varepsilon$ e $\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon = \mu_\varepsilon$. \square

Corolário 4.6. *Na Proposição 4.5, se trocarmos a hipótese $\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon(\Lambda'_\varepsilon) = 1$ por*

$$\Phi_\varepsilon \text{ é uma conjugação,}$$

então também concluímos que $\Phi_\varepsilon^ \nu_\varepsilon = \mu_\varepsilon$.*

Demonstração. Basta observar que se Φ_ε é uma conjugação, então $\Lambda'_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon$ e $\Phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda_\varepsilon) = \Sigma_A$. Portanto,

$$\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon(\Lambda'_\varepsilon) = \nu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda_\varepsilon)) = \nu_\varepsilon(\Sigma_A) = 1. \quad \square$$

Agora, daremos algumas hipóteses sobre a aplicação limite $g_0 := g$.

(H4) *A aplicação g é não-uniformemente hiperbólica com $\Omega(g) := \Lambda = \Lambda^* \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(Q^j)$,*

onde:

- *Para cada $X \in \Lambda^*$, o espaço $T_X \Lambda^*$ pode ser escrito como uma soma direta*

$$T_X \mathbf{M} = E^s(X) \oplus E^u(X)$$

de subespaços satisfazendo as condições (i) e (ii) da Definição 1.1; e

- $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ são pontos de tangência tais que $Q_j \notin \text{Per}(g)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{O}(Q_j)} \setminus \mathcal{O}(Q_j) = \{P_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{Per}(g).$$

(H5) Suponha que existe uma partição de Markov $\mathcal{P} := \{R_1, \dots, R_m\}$ para Λ com diâmetro arbitrariamente pequeno na qual

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(Q_j) \subset \mathcal{S}, \text{ onde } \mathcal{S} := \bigcup_{j,k=1}^m \overline{R_j} \cap \overline{R_k}.$$

(H6) Além disso, suponha que exista uma semiconjugação $\Phi : \Sigma_A \rightarrow \Lambda$ entre os sistemas (σ_A, Σ_A) e (g, Λ) dada por

$$\Phi(\underline{x}) := \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcap_{j=-n}^n g^{-j}(\text{int } R_{x_j})}$$

tal que

- Φ é injetiva sobre $\Lambda' := \Lambda \setminus \mathcal{S}$; e
- Φ é finita-para-um sobre $\Lambda' \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(Q_j)$.

Antes de enunciarmos o teorema central desta seção, daremos uma última ferramenta. Nessa proposição, iremos relacionar os pontos limite fraco* quando $\varepsilon \rightarrow 0$ da sequência $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ com os pontos limite fraco* quando $\varepsilon \rightarrow 0$ da sequência $(\nu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ (dada pela Proposição 4.5 ou pelo Corolário 4.6). Para isso, precisaremos de uma hipótese que relacione as semiconjugações das aplicações g_ε com a semiconjugação de g .

(H7) $\|\Phi_\varepsilon(\underline{x}) - \Phi(\underline{x})\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ para todo $\underline{x} \in \Sigma'_A := \Phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda'_\varepsilon) \cap \Phi^{-1}(\Lambda')$.

Observação 4.7. Note que a hipótese (H7) pode ser demonstrada quando para todo $\varepsilon \geq 0$ temos a mesma partição de Markov para cada Λ_ε . De fato, neste caso, basta observar que como $\|g_\varepsilon - g\|_{C^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ obtemos

$$\bigcap_{j=-n}^n g_\varepsilon^{-j}(\text{int } R_{x_j}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bigcap_{j=-n}^n g^{-j}(\text{int } R_{x_j}),$$

o que por construção implica na hipótese (H7).

Observação 4.8. Quando Φ_ε é uma conjugação e $\mathcal{S} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(Q_j)$, temos que $\nu_\varepsilon(\Sigma_A \setminus \Sigma'_A) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$. De fato, sob estas hipóteses, $\Lambda'_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon$,

$$\nu_\varepsilon(\Phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda'_\varepsilon)) = \Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon) = \mu_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon) = 1 \implies \nu_\varepsilon(\Sigma_A \setminus \Phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda'_\varepsilon)) = 0$$

e

$$\nu_\varepsilon(\Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\Lambda')) = \nu_\varepsilon(\Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\Lambda \setminus \mathcal{S})) \leq \nu_\varepsilon(\Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\Lambda)) + \nu_\varepsilon(\Phi^{-1}(\mathcal{S})) = 0,$$

já que $\Sigma_A = \Phi^{-1}(\Lambda)$ (Φ é sobrejetiva) e como Φ é finita-para-um sobre $\bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(Q_j^i)$, temos que $\Phi^{-1}(\mathcal{S})$ é uma coleção enumerável de órbitas não-periódicas em Σ_A , ou seja, tem medida nula para toda probabilidade σ_A -invariante.

Por outro lado, quando $\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon(\Lambda'_\varepsilon) = 1$ e $\nu_\varepsilon(\Phi^{-1}(\Lambda')) = 1$, segue imediatamente das contas acima que $\nu_\varepsilon(\Sigma_A \setminus \Sigma'_A) = 0$.

Proposição 4.9. *Para cada $\varepsilon > 0$, seja μ_ε uma probabilidade g_ε -invariante e tome ν_ε uma probabilidade σ_A -invariante tal que $\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon = \mu_\varepsilon$. Suponha que*

$$\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon(\Lambda'_\varepsilon) = 1 \quad \text{e} \quad \nu_\varepsilon(\Phi^{-1}(\Lambda')) = 1. \quad (4.2)$$

Se μ é um ponto limite fraco* da sequência $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, então μ é g -invariante e existe ν uma probabilidade σ_A -invariante tal que ν é um ponto limite fraco* da sequência $(\nu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ e $\Phi^* \nu = \mu$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que a probabilidade μ é g -invariante. De fato, como μ é um ponto limite fraco* da sequência $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, existe uma subsequência $(\varepsilon_k)_{k > 0}$ com $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ tal que $\mu_{\varepsilon_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu$ na topologia fraca*. Daí, dado $\zeta > 0$, existe $k_0 > 0$ tal que para todo $k > k_0$,

$$\left| \int \psi d\mu_{\varepsilon_k} - \int \psi d\mu \right| < \frac{\zeta}{2}$$

para toda função contínua $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Por outro lado, segue da hipótese (H2) que existe $k_1 > 0$ tal que $\|g_{\varepsilon_k} - g\| < \frac{\zeta}{2}$ para todo $k > k_1$. Logo, como $\psi \circ g : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, obtemos para todo $k > \max\{k_0, k_1\}$,

$$\begin{aligned} & \left| \int \psi \circ g_{\varepsilon_k} d\mu_{\varepsilon_k} - \int \psi \circ g d\mu \right| \leq \\ & \leq \left| \int \psi \circ g_{\varepsilon_k} d\mu_{\varepsilon_k} - \int \psi \circ g d\mu_{\varepsilon_k} \right| + \left| \int \psi \circ g d\mu_{\varepsilon_k} - \int \psi \circ g d\mu \right| \\ & < \int \|\psi \circ g_{\varepsilon_k} - \psi \circ g\| d\mu_{\varepsilon_k} + \frac{\zeta}{2} \leq \frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta}{2} = \zeta. \end{aligned}$$

Como $\mu_\varepsilon \in \mathcal{M}_1(g_\varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$, temos que $\int \psi d\mu_{\varepsilon_k} = \int \psi \circ g_{\varepsilon_k} d\mu_{\varepsilon_k}$ para todo $k > 0$ e, daí,

$$\int \psi d\mu = \int \psi \circ g d\mu$$

para toda função contínua $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$, donde concluímos que μ é g -invariante.

Agora, seja ν um ponto limite fraco* da sequência $(\nu_{\varepsilon_k})_{\varepsilon_k > 0}$. Claramente, ν é uma probabilidade σ_A -invariante, já que as probabilidades ν_{ε_k} são σ_A -invariantes para todo $k > 0$. Vamos mostrar que $\Phi^* \nu = \mu$.

Note que passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $\nu_{\varepsilon_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \nu$ na topologia fraca*, ou seja, dado $\zeta > 0$, existe $k_2 > 0$ tal que para todo $k > k_2$,

$$\left| \int \psi d\nu_{\varepsilon_k} - \int \psi d\nu \right| < \frac{\zeta}{2}$$

para toda função contínua $\psi : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso, segue de (H7) que existe $k_3 > 0$ tal que $\|\Phi_{\varepsilon_k} - \Phi\| < \frac{\zeta}{2}$ para todo $k > k_3$ em Σ'_A . Então, como por hipótese $\Phi_\varepsilon^* \nu_\varepsilon = \mu_\varepsilon$

para todo $\varepsilon > 0$, temos que para todo $k > \max\{k_2, k_3\}$

$$\begin{aligned} \left| \int \psi d\mu_{\varepsilon_k} - \int \psi d\Phi^*\nu \right| &= \left| \int \psi d\Phi_{\varepsilon_k}^* \nu_{\varepsilon_k} - \int \psi d\Phi^*\nu \right| = \left| \int \psi \circ \Phi_{\varepsilon_k} d\nu_{\varepsilon_k} - \int \psi \circ \Phi d\nu \right| \\ &\leq \left| \int \psi \circ \Phi_{\varepsilon_k} d\nu_{\varepsilon_k} - \int \psi \circ \Phi d\nu_{\varepsilon_k} \right| + \left| \int \psi \circ \Phi d\nu_{\varepsilon_k} - \int \psi \circ \Phi d\nu \right| \\ &< \int \|\psi \circ \Phi_{\varepsilon_k} - \psi \circ \Phi\| d\nu_{\varepsilon_k} + \frac{\zeta}{2} < \frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta}{2} = \zeta, \end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos o fato que $\psi \circ \Phi$ é uma função contínua e na última desigualdade usamos (4.2) e a Observação 4.8 para concluir que

$$\nu_{\varepsilon_k}(\Sigma_A \setminus \Sigma'_A) = 0, \quad \forall k > 0. \quad (4.3)$$

Portanto, segue da unicidade da convergência na topologia fraca* que $\Phi^*\nu = \mu$. Em particular, ν_ε converge na topologia fraca*. \square

Corolário 4.10. *Na Proposição 4.9, se trocarmos as hipóteses dadas na equação (4.2) por*

$$\Phi_\varepsilon \text{ é uma conjugação e } \mathcal{S} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(Q_j^i),$$

então também obtemos a mesma conclusão desta proposição.

Demonstração. Na demonstração da Proposição 4.9, só utilizamos a equação (4.2) para garantir que a equação (4.3) é verdadeira.

Mas, note que quando assumimos que Φ_ε é uma conjugação e $\mathcal{S} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(Q_j^i)$, a Observação 4.8 também nos garante a equação (4.3). \square

Para nossos propósitos ⁽¹⁾, iremos considerar que:

(H8) Φ_ε é uma conjugação para todo $\varepsilon > 0$.

(H9) $\mathcal{S} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(Q_j^i)$.

Observação 4.11. Ao final da demonstração do teorema principal, daremos os argumentos necessários para garantir que trocando as hipóteses (H8) e (H9), respectivamente, por

(H8') $\Phi_\varepsilon^*\nu(\Lambda'_\varepsilon) = 1$ para todo $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ e para toda probabilidade ν σ_A -invariante; e

(H9') $\Phi^*\nu(\Lambda') = 1$ para toda probabilidade ν σ_A -invariante,

o resultado continua sendo verdadeiro.

Finalmente, vamos a prova do Teorema Principal.

¹Nos capítulos 2 e 3, vimos que cada aplicação f_ε com $\varepsilon \in \overline{I_n}$, $n \geq 3$, ou é conjugada a um *subshift* de tipo finito ou existe uma semiconjugação finita-para-um com este *subshift*.

Teorema Principal. Para cada $\varepsilon > 0$, sejam $\varphi_\varepsilon : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial Hölder-contínuo e μ_ε o estado de equilíbrio de g_ε associado a este potencial. Seja $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial limitado em Λ e contínuo exceto em um subconjunto enumerável \mathcal{D} de Λ . Se existe uma subsequência $(\varepsilon_k)_{k>0}$ com $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ tal que

- (i) $\varphi_{\varepsilon_k} \circ \Phi_{\varepsilon_k}(\underline{x}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varphi \circ \Phi(\underline{x})$ para todo $\underline{x} \in \Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\mathcal{D})$;
- (ii) $P_{\sigma_A}(\varphi_{\varepsilon_k} \circ \Phi_{\varepsilon_k}) > P_{\sigma_A}(\varphi \circ \Phi) - \frac{1}{k}$ para todo $k > 0$; e
- (iii) μ é um ponto limite fraco* da sequência $(\mu_{\varepsilon_k})_{k>0}$ quando $k \rightarrow +\infty$ tal que $\mu(\{X\}) = 0 \forall X \in \mathcal{D}$,

então μ é um estado de equilíbrio para g associado a φ .

Demonstração. Sejam $\phi_k, \phi : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ os potenciais dados por $\phi_k = \varphi_{\varepsilon_k} \circ \Phi_{\varepsilon_k}$ e $\phi = \varphi \circ \Phi$. Como φ_{ε_k} e Φ_{ε_k} são Hölder-contínuos, ϕ_k é Hölder-contínuo para todo $k > 0$ e, do fato que Φ é contínuo e φ é descontínuo em \mathcal{D} temos que ϕ é descontínuo em $\Phi^{-1}(\mathcal{D})$. Pela hipótese (i), temos que

$$|\phi_k(\underline{x}) - \phi(\underline{x})| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\mathcal{D}). \quad (4.4)$$

Afirmção 4.12. Se \mathcal{M}_k é o máximo da função ϕ_k para cada $k > 0$, então existe $\mathcal{M} \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{M}_k \leq \mathcal{M}$.

Prova da Afirmção. Com efeito, como ϕ é limitada, existe $\mathcal{M}_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|\phi(\underline{x})| \leq \mathcal{M}_0$ para todo $\underline{x} \in \Sigma_A$. Por outro lado, dado $\underline{x} \in \Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\mathcal{D})$ segue de (4.4) que para todo $\zeta > 0$, existe $k_0 > 0$ tal que $|\phi_k(\underline{x}) - \phi(\underline{x})| < \zeta$ para todo $k > k_0$. Então,

$$|\phi_k(\underline{x})| \leq |\phi_k(\underline{x}) - \phi(\underline{x})| + |\phi(\underline{x})| < \zeta + \mathcal{M}_0, \quad \forall k > k_0.$$

Fixe $\zeta > 0$ e tome $C := \max \left\{ \zeta + \mathcal{M}_0, \max_{1 \leq k \leq k_0} \{|\phi_k(\underline{x})|; \underline{x} \in \Sigma_A\} \right\}$. Logo, para cada $\underline{x} \in \Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\mathcal{D})$, $|\phi_k(\underline{x})| < C$ para todo $k > 0$.

Agora, suponha que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{M}_k = +\infty$, isto é, para $\zeta > 0$ existe $k_1 > 0$ tal que $\mathcal{M}_k > \zeta + C$ para todo $k > k_1$. Além disso, como ϕ_k é uniformemente contínuo, existe $\delta > 0$ tal que $|\phi_k(\underline{x}) - \phi_k(\underline{y})| < \zeta$ para todos $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma_A$ tais que $d(\underline{x}, \underline{y}) < \delta$.

Para cada $k > 0$, seja $\underline{x}_k \in \Sigma_A$ tal que $|\phi_k(\underline{x}_k)| = \mathcal{M}_k$ e seja $\underline{y}_k \in \Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\mathcal{D})$ tal que $d(\underline{x}_k, \underline{y}_k) < \delta$. Portanto, se $k > k_1$,

$$\zeta + C < \mathcal{M}_k = |\phi_k(\underline{x}_k)| \leq |\phi_k(\underline{x}_k) - \phi_k(\underline{y}_k)| + |\phi_k(\underline{y}_k)| < \zeta + C,$$

o que é um absurdo. \square_{Af}

Para cada $k > 0$, seja ν_k o estado de equilíbrio de σ_A associado ao potencial ϕ_k . Então, segue do Corolário 4.6 que $\Phi_{\varepsilon_k}^* \nu_k = \mu_{\varepsilon_k}$ para todo $k > 0$. Além disso, segue do Corolário 4.10⁽²⁾ que existe ν um ponto limite fraco* da sequência $(\nu_k)_{k>0}$ tal que $\Phi^* \nu = \mu$. Daí, como $\mu(\{X\}) = 0$ para todo $X \in \mathcal{D}$, obtemos

$$\nu(\{\underline{x}\}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Phi^{-1}(\mathcal{D}). \quad (4.5)$$

Considere $(\nu_{k_j})_{j>0}$ a subsequência com $k_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$ tal que $\nu_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \nu$ na topologia fraca*.

²Aqui podemos assumir tanto as hipóteses (H8) e (H9) quanto as hipóteses (H8') e (H9') que obteremos a mesma conclusão. Basta trocar os Corolários 4.6 e 4.10 pelas Proposições 4.5 e 4.9, respectivamente.

Lema 4.13. $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int \phi_{k_j} d\nu_{k_j} = \int \phi d\nu$

Vamos deixar a prova deste lema para o final da demonstração do teorema.

Segue da hipótese (ii), do lema anterior e da continuidade superior da função entropia que

$$\begin{aligned} P_{\sigma_A}(\phi) &\leq \lim_{j \rightarrow +\infty} P_{\sigma_A}(\phi_{k_j}) \leq \limsup_{j \rightarrow +\infty} h_{\nu_{k_j}}(\sigma_A) + \limsup_{j \rightarrow +\infty} \int \phi_{k_j} d\nu_{k_j} \\ &\leq h_\nu(\sigma_A) + \int \phi d\nu \leq P_{\sigma_A}(\phi), \end{aligned}$$

donde concluímos que ν é um estado de equilíbrio para o *subshift* σ_A associado ao potencial $\phi = \varphi \circ \Phi$.

Logo, tomando $\mathcal{A}_1 = \Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\mathcal{S})$ e $\mathcal{A}_2 = \Lambda \setminus \mathcal{S}$, obtemos ⁽³⁾

$$\nu(\Sigma_A \setminus \mathcal{A}_1) = \nu(\Phi^{-1}(\mathcal{S})) = 0 \text{ e } \mu(\Lambda \setminus \mathcal{A}_2) = \mu(\mathcal{S}) = 0,$$

já que $\mathcal{S} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(Q_j)$ e $\Phi^{-1}(\mathcal{S})$ são coleções enumeráveis de órbitas não periódicas em Λ e Σ_A , respectivamente. Além disso, Φ é uma bijeção entre \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , donde concluímos que (σ_A, ν) e (g, μ) são ergodicamente equivalentes. Logo, $h_\nu(\sigma_A) = h_\mu(g)$ (Proposição 1.28). Note também que como Φ é contínua e sobrejetiva, $P_g(\varphi) \leq P_{\sigma_A}(\varphi \circ \Phi)$ (Proposição 1.38) e, portanto,

$$P_g(\varphi) \leq P_{\sigma_A}(\varphi \circ \Phi) = h_\nu(\sigma_A) + \int (\varphi \circ \Phi) d\nu = h_\mu(g) + \int \varphi d\mu \leq P_g(\varphi).$$

Então, μ maximiza a pressão sobre Λ , isto é, $\mu = \Phi^* \nu$ é um estado de equilíbrio para g associado a φ .

Agora, para concluir a demonstração do teorema, vamos provar o lema 4.13.

Prova do lema 4.13. Seja $\Phi^{-1}(\mathcal{D}) = \{\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja

$$C_m(\underline{x}^n) = \{\underline{y} \in \Sigma_A \mid y_i = (x^n)_i, \forall |i| \leq m\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

e considere os conjuntos $E_m(0) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_m(\underline{x}^n)$ e $E_m(1) = \Sigma_A \setminus E_m(0)$. Tome uma partição da unidade $\{\chi_{0,m}, \chi_{1,m}\}$ tal que $\chi_{i,m}|_{E_m(j)} = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ quando $i \neq j$.

Denotaremos por $\bar{L} \in \mathbb{R}$ e $\underline{L} \in \mathbb{R}$ o lim sup e o lim inf de $\int \phi_{k_j} d\nu_{k_j}$, respectivamente.

Podemos tomar uma subsequência $(k_{j_i})_{i>0}$ tal que $\bar{L} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int \phi_{k_{j_i}} d\nu_{k_{j_i}}$, mas por simplicidade, assumiremos que a convergência ocorre para a sequência $(k_j)_{j>0}$. Então, para todo $j > 0$ e para todo $m > 0$ obtemos

$$\int \phi_{k_j} d\nu_{k_j} = \int \chi_{1,m} \phi_{k_j} d\nu_{k_j} + \int \chi_{0,m} \phi_{k_j} d\nu_{k_j}. \quad (4.6)$$

³Estamos considerando as hipóteses (H8) e (H9). Ao final da demonstração daremos as alterações na prova quando assumimos as hipóteses (H8') e (H9').

Afirmação 4.14. $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int \chi_{1,m} \phi_{k_j} d\nu_{k_j} = \int \chi_{1,m} \phi d\nu$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Prova da Afirmação. De fato, dado $\zeta > 0$ temos por (4.4) e por $\chi_{1,m}|_{E_m(0)} = 0$ que existe $j_0 > 0$ tal que se $j > j_0$ então

$$|\chi_{1,m} \phi_{k_j}(\underline{x}) - \chi_{1,m} \phi(\underline{x})| < \frac{\zeta}{2}$$

para todo $\underline{x} \in \Sigma_A$ e para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disso, como ϕ é contínua em $\Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\mathcal{D})$ e $\nu_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \nu$ na topologia fraca*, existe $j_1 > 0$ tal que se $j > j_1$ então

$$\left| \int \chi_{1,m} \phi d\nu_{k_j} - \int \chi_{1,m} \phi d\nu \right| < \frac{\zeta}{2},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Daí, se $j > \max\{j_0, j_1\}$ então, para todo $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int \chi_{1,m} \phi_{k_j} d\nu_{k_j} - \int \chi_{1,m} \phi d\nu \right| &\leq \\ &\leq \left| \int \chi_{1,m} \phi_{k_j} d\nu_{k_j} - \int \chi_{1,m} \phi d\nu_{k_j} \right| + \left| \int \chi_{1,m} \phi d\nu_{k_j} - \int \chi_{1,m} \phi d\nu \right| \\ &< \frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta}{2} = \zeta, \end{aligned}$$

o que conclui a afirmação. \square_{Af} .

Logo, pela afirmação 4.14 e pelo fato que o lado esquerdo da igualdade em (4.6) converge para \bar{L} quando $j \rightarrow +\infty$ temos que $\int \chi_{0,m} \phi_{k_j} d\nu_{k_j}$ também converge quando $j \rightarrow +\infty$. Além disso, pela Afirmação (4.12) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \lim_{j \rightarrow +\infty} \int \chi_{0,m} \phi_{k_j} d\nu_{k_j} \right| &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \int \chi_{0,m} \phi_{k_j} d\nu_{k_j} \right| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \int_{E_m(0)} \phi_{k_j} d\nu_{k_j} \right| \\ &\leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{E_m(0)} |\phi_{k_j}| d\nu_{k_j} \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} M_{k_j} \nu_{k_j}(E_m(0)) \\ &\leq M \nu(E_m(0)), \end{aligned}$$

já que $\nu_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \nu$ na topologia fraca*. Segue de (4.5) que quando $m \rightarrow +\infty$, $\nu(E_m(0)) \rightarrow 0$.

Por outro lado, segue da equação (4.5) e do Teorema da Convergência Dominada (Teorema 1.20) que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int \chi_{1,m} \phi d\nu = \int \phi d\nu.$$

Portanto, tomando primeiro o limite quando $j \rightarrow +\infty$ e em seguida o limite quando $m \rightarrow +\infty$ em (4.6), obtemos $\bar{L} = \int \phi d\nu$.

Fazendo o mesmo para \underline{L} , também iremos obter $\underline{L} = \int \phi d\nu$, o que conclui o lema. \square

Observação 4.15. Note que pela Proposição 4.9 e pela Observação 4.8, o teorema continua sendo verdadeiro quando trocamos as hipóteses (H8) e (H9) pelas hipóteses (H8') e (H9'). Basta observar que os conjuntos $\mathcal{A}_1 = \Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\mathcal{S})$ e $\mathcal{A}_2 = \Lambda \setminus \mathcal{S}$ na demonstração do teorema ainda satisfazem

$$\nu(\Sigma_A \setminus \mathcal{A}_1) = \nu(\Phi^{-1}(\mathcal{S})) = 0 \text{ e } \mu(\Lambda \setminus \mathcal{A}_2) = \mu(\mathcal{S}) = 0,$$

já que pela hipótese (H9') e pelo fato que Φ é sobrejetiva,

$$\nu(\mathcal{A}_1) = \nu(\Sigma_A \setminus \Phi^{-1}(\mathcal{S})) = \nu(\Phi^{-1}(\Lambda) \setminus \Phi^{-1}(\mathcal{S})) = \Phi^* \nu(\Lambda \setminus \mathcal{S}) = \Phi^* \nu(\Lambda') = 1$$

e, como $\mu = \Phi^* \nu$ e $\mathcal{A}_1 = \Phi^{-1}(\mathcal{A}_2)$, segue que $\mu(\mathcal{A}_2) = 1$.

Como consequência deste resultado, obtemos os seguintes corolários.

Corolário 4.16. *Para cada $\varepsilon > 0$, seja $\varphi_\varepsilon : \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial Hölder-contínuo e seja μ_ε o estado de equilíbrio de g_ε associado a este potencial. Se existe uma subsequência $(\varepsilon_k)_{k>0}$ com $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ tal que*

$$(i) \quad \varphi_{\varepsilon_k} \circ \Phi_{\varepsilon_k}(\underline{x}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varphi \circ \Phi(\underline{x}) \text{ para todo } \underline{x} \in \Sigma_A \text{ e algum potencial contínuo } \varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}; \text{ e}$$

$$(ii) \quad \mu \text{ é um ponto limite fraco* da sequência } (\mu_{\varepsilon_k})_{k>0} \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

então μ é um estado de equilíbrio para g associado a φ .

Demonstração. Primeiramente, observe que como φ é contínua, $\mathcal{D} = \emptyset$. Daí, as hipóteses (i) e (ii) deste corolário implicam as hipóteses (i) e (iii) do teorema anterior, respectivamente. Além disso, como φ_{ε_k} e Φ_{ε_k} são Hölder-contínuos e Φ e φ são contínuos, temos que ϕ_k é Hölder-contínuo para todo $k > 0$ e ϕ é contínuo e, pela hipótese (i),

$$\|\phi_k - \phi\|_{\text{sup}} = \sup_{\underline{x} \in \Sigma_A} \{|\phi_k(\underline{x}) - \phi(\underline{x})|\} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

donde concluímos pela Proposição 1.39 que

$$|P_\sigma(\phi_k) - P_\sigma(\phi)| \leq \|\phi_k - \phi\|_{\text{sup}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Portanto, a hipótese (ii) do teorema anterior também é satisfeita. \square

Corolário 4.17. *Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial Hölder-contínuo e, para cada $\varepsilon > 0$, seja μ_ε o estado de equilíbrio de g_ε associado a este potencial. Se μ é um ponto limite fraco* da sequência $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, então μ é um estado de equilíbrio para g associado a φ .*

Demonstração. Basta verificar a hipótese (i) no corolário anterior. Note que a sequência φ_ε dada no corolário é constante e igual a φ . Por outro lado, como

$$\|g_\varepsilon(X) - g(X)\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ para todo } X \in \mathcal{Q},$$

segue por construção de Φ_ε e de Φ que

$$\|\Phi_\varepsilon(\underline{x}) - \Phi(\underline{x})\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ para todo } \underline{x} \in \Sigma_A.$$

Logo, como φ é Hölder-contínuo, existem $\gamma, K > 0$ tais que

$$|\varphi \circ \Phi_\varepsilon(\underline{x}) - \varphi \circ \Phi(\underline{x})| \leq K \|\Phi_\varepsilon(\underline{x}) - \Phi(\underline{x})\|^\gamma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

para todo $\underline{x} \in \Sigma_A$, donde concluímos que a hipótese (i) é satisfeita. \square

4.2 Os Teoremas G , H , I e J

Seja $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})}$ a família a um parâmetro de difeomorfismos C^2 dada pela Definição 2.14.

Tomando $\bar{\varepsilon} > 0$ dado pela Proposição 2.21, temos que $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)}$ é uma família de difeomorfismos axioma A tal que

$$\|f_\varepsilon - f\|_{C^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

onde $f = f_0$ é aplicação ferradura definida na Seção 2.1.

Então, segue da continuação hiperbólica (Teorema 1.14) que para cada $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)$, existe \mathcal{V}_ε uma vizinhança C^2 de f_ε tal que para qualquer aplicação $g \in \mathcal{V}_\varepsilon$ existe uma conjugação Θ_ε entre $(\Lambda(g), g)$ e $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$, onde $\Lambda(g) = \Theta_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon)$ é hiperbólico. Daí e pela proposição 2.23, os sistemas (Σ_3, σ) e $(\Lambda(g), g)$ também são conjugados, donde concluímos que $\Lambda(g) = \overline{\text{Per}}(g)$. Portanto, a aplicação $g|_{\Lambda(g)}$ é axioma A para todo $g \in \mathcal{V}_\varepsilon$. Seja

$$\mathcal{V}^- := \bigcup_{\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}, 0)} \mathcal{V}_\varepsilon.$$

Note que $f \in \partial\mathcal{V}^-$, pois $f \in \overline{\mathcal{V}^-} \setminus \mathcal{V}^-$. Iremos denotar por Φ a semiconjugação entre f e σ dada pela Propriedade 2.6.

Assim, para o conjunto aberto \mathcal{V}^- , segue o seguinte resultado:

Teorema G. *Sejam $(g_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ uma sequência em \mathcal{V}^- tal que $\|g_\varepsilon - f\|_{C^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, $\varphi_\varepsilon : \Lambda(g_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial Hölder-contínuo, μ_ε o estado de equilíbrio de g_ε associado a este potencial e considere Φ_ε a conjugação entre g_ε e σ . Se existe uma subsequência $(\varepsilon_k)_{k > 0}$ com $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ tal que*

$$(i) \quad \varphi_{\varepsilon_k} \circ \Phi_{\varepsilon_k}(\underline{x}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varphi \circ \Phi(\underline{x}) \text{ para todo } \underline{x} \in \Sigma_A \text{ e algum potencial contínuo } \varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}; e$$

$$(ii) \quad \mu \text{ é um ponto limite fraco* da sequência } (\mu_{\varepsilon_k})_{k > 0} \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

então μ é um estado de equilíbrio para f associado a φ . Além disso, se φ é Hölder-contínuo, então μ é único.

Demonstração do Teorema G. Como cada g_ε é um difeomorfismo axioma A e φ_ε é Hölder-contínuo, a Proposição 1.41 garante a existência e unicidade do estado de equilíbrio μ_ε . Daí, segue do Corolário 4.16 que μ é um estado de equilíbrio para f associado a φ . Se φ é Hölder-contínuo, o Teorema 2.7 garante a unicidade do estado de equilíbrio μ . \square

Agora, para cada $n \geq 3$, tome $I_n := (\varepsilon_-(n), \varepsilon_+(n))$ o intervalo de parâmetros dado pelo Teorema A. Logo, pelo Lema 2.42, temos que $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in I_n}$ é uma família de difeomorfismos axioma A tal que

$$\|f_\varepsilon - f_{\varepsilon_+(n)}\|_{C^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_+(n)} 0,$$

onde $f_{\varepsilon_+(n)}$ é aplicação estudada no Capítulo 3 com $\varepsilon_+(n) := \rho^{-n+1}\alpha$.

Portanto, para cada $n \geq 3$, temos novamente pela continuação hiperbólica (Teorema 1.14) que para todo $\varepsilon \in I_n$, existe $\mathcal{V}_\varepsilon(n)$ uma vizinhança C^2 de f_ε tal que para qualquer aplicação $g \in \mathcal{V}_\varepsilon(n)$ existe uma conjugação Θ_ε entre $(\Lambda(g), g)$ e $(\Lambda_\varepsilon, f_\varepsilon)$, onde $\Lambda(g) = \Theta_\varepsilon(\Lambda_\varepsilon)$ é hiperbólico. Daí e pela Proposição 2.45, os sistemas $(\Sigma_{A(n)}, \sigma_{A(n)})$ e

$(\Lambda(g), g)$ também são conjugados, donde concluímos que $\Lambda(g) = \overline{\text{Per}(g)}$. Portanto, a aplicação $g|_{\Lambda(g)}$ é axioma A para todo $g \in \mathcal{V}_\varepsilon(n)$. Para cada $n \geq 3$, seja

$$\mathcal{V}^+(n) := \bigcup_{\varepsilon \in I_n} \mathcal{V}_\varepsilon(n).$$

Note que $f_{\varepsilon_+(n)} \in \partial\mathcal{V}^+(n)$, pois $f_{\varepsilon_+(n)} \in \overline{\mathcal{V}^+(n)} \setminus \mathcal{V}^+(n)$. Denotaremos por $\Phi_{\varepsilon_+(n)}$ a semiconjugação entre $f_{\varepsilon_+(n)}$ e $\sigma_{A(n)}$ dada pela Proposição 3.54.

Logo, para cada $n \geq 3$, segue do 4.16 que o conjunto aberto $\mathcal{V}^+(n)$ satisfaz:

Teorema H. *Seja $n \geq 3$ e considere $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ uma seqüência em $\mathcal{V}^+(n)$ tal que $\|g_\varepsilon - f_{\varepsilon_+(n)}\|_{C^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_+(n)} 0$, $\varphi_\varepsilon : \Lambda(g_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial Hölder-contínuo, μ_ε o estado de equilíbrio de g_ε associado a este potencial e Φ_ε a conjugação entre g_ε e $\sigma_{A(n)}$. Se existe uma subsequência $(\varepsilon_k)_{k>0}$ com $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_+(n)$ tal que*

$$(i) \quad \varphi_{\varepsilon_k} \circ \Phi_{\varepsilon_k}(\underline{x}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varphi \circ \Phi_{\varepsilon_+(n)}(\underline{x}) \text{ para todo } \underline{x} \in \Sigma_{A(n)} \text{ e algum potencial contínuo } \varphi : \Lambda_{\varepsilon_+(n)} \rightarrow \mathbb{R}; \text{ e}$$

$$(ii) \quad \mu \text{ é um ponto limite fraco}^* \text{ da seqüência } (\mu_{\varepsilon_k})_{k>0} \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

então μ é um estado de equilíbrio para $f_{\varepsilon_+(n)}$ associado a φ . Além disso, se φ é Hölder-contínuo, então μ é único.

Demonstração do Teorema H. A prova é análoga a do Teorema G, substituindo o Teorema 2.7 pelo Teorema E. \square

Para finalizar a seção, exibiremos resultados análogos aos Teoremas G e H para medidas conforme. Para cada $t > 0$, consideremos $\Psi_t : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ o potencial dado por

$$\Psi_t(X) = -t \log J^u(X),$$

onde $J^u(X) = \|Df(X)|_{E^u(X)}\|$ (ver Teorema 2.12), e para cada $n \geq 3$, seja $\Psi_{t,\varepsilon} : \Lambda_{\varepsilon_+(n)} \rightarrow \mathbb{R}$ o potencial definido por

$$\Psi_{t,\varepsilon_+(n)}(X) = -t \log J_{\varepsilon_+(n)}^u(X),$$

onde $J_{\varepsilon_+(n)}^u(X) = \|Df_{\varepsilon_+(n)}(X)|_{E^u(X)}\|$ (ver Teorema F).

Teorema I. *Sejam $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ uma seqüência em \mathcal{V}^- tal que $\|g_\varepsilon - f\|_{C^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, $\Psi_{t,\varepsilon} : \Lambda(g_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ o potencial dado por $\Psi_{t,\varepsilon}(X) = -t \log \|Dg_\varepsilon(X)|_{E^u(X)}\|$, μ_ε o estado de equilíbrio de g_ε associado a este potencial e considere Φ_ε a conjugação entre g_ε e σ . Se existe uma subsequência $(\varepsilon_k)_{k>0}$ com $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ tal que*

$$(i) \quad P_f(\Psi_t) > -t \frac{1}{2} \log \rho;$$

$$(ii) \quad P_\sigma(\Psi_{t,\varepsilon_k} \circ \Phi_{\varepsilon_k}) > P_\sigma(\Psi_t \circ \Phi) - \frac{1}{k} \text{ para todo } k > 0; \text{ e}$$

$$(iii) \quad \mu \text{ é um ponto limite fraco}^* \text{ da seqüência } (\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

então μ é o estado de equilíbrio para f associado a Ψ_t .

Demonstração do Teorema I. Como cada g_ε é um difeomorfismo axioma A e, pela Proposição 2.27, $\Psi_{t,\varepsilon}$ é Hölder-contínuo, temos que a Proposição 1.41 garante a existência e unicidade do estado de equilíbrio μ_ε . Além disso, a Propriedade 2.11 garante que o potencial Ψ_t é limitado em Λ e a Propriedade 2.9 garante que Ψ_t é contínuo em $\Lambda \setminus \{(0,0)\}$. Logo, segue do Teorema Principal e do Teorema 2.12 que μ é o estado de equilíbrio para f associado a Ψ_t . \square

Teorema J. *Seja $n \geq 3$ e considere $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ uma sequência em $\mathcal{V}^+(n)$ tal que $\|g_\varepsilon - f_{\varepsilon_+(n)}\|_{C^1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_+(n)} 0$, $\Psi_{t,\varepsilon} : \Lambda(g_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ o potencial Hölder-contínuo dado por $\Psi_{t,\varepsilon}(X) = -t \log \|Dg_\varepsilon(X)|_{E^u(X)}\|$, μ_ε o estado de equilíbrio de g_ε associado a este potencial e Φ_ε a conjugação entre g_ε e $\sigma_{A(n)}$. Se existe uma subsequência $(\varepsilon_k)_{k>0}$ com $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_+(n)$ tal que*

$$(i) \quad P_{f_{\varepsilon_+(n)}}(\Psi_{t,\varepsilon_+(n)}) > -t \frac{1}{2} \log \rho;$$

$$(ii) \quad P_{\sigma_{A(n)}}(\Psi_{t,\varepsilon_k} \circ \Phi_{\varepsilon_k}) > P_{\sigma_{A(n)}}(\Psi_{t,\varepsilon_+(n)} \circ \Phi_{\varepsilon_+(n)}) - \frac{1}{k} \text{ para todo } k > 0; \text{ e}$$

$$(iii) \quad \mu \text{ é um ponto limite fraco* da sequência } (\mu_{\varepsilon_k})_{k>0} \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

então μ é um estado de equilíbrio para $f_{\varepsilon_+(n)}$ associado a $\Psi_{t,\varepsilon_+(n)}$.

Demonstração do Teorema J. A prova é análoga a do Teorema I, substituindo:

- a Proposição 2.27 pela Proposição 2.49;
- as Propriedades 2.11 e 2.9 pelas Propriedades 3.57 e 3.56, respectivamente; e
- o Teorema 2.12 pelo Teorema F .

\square

Bibliografia

- [BC91] M. Benedicks, L. Carleson, *The dynamics of the Hénon map*, Ann of Math. (2) 133 (1991), 73-169.
- [BK98] H. Bruin, G. Keller, *Equilibrium states for S-unimodal maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems 18 (1998), no. 4, 765-789.
- [Bo75] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, 470, Springer (1975).
- [BS02] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press (2002).
- [BV01] M. Benedicks, M. Viana, *Solution of the basin problem for Hénon-like attractors*, Invent math. 143 (2001), 375-434.
- [BV06] M. Benedicks, M. Viana, *Random perturbations and statistical properties of Hénon-like maps*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 23 (2006), no. 5, 713-752.
- [BY93] M. Benedicks, L.-S. Young, *Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Hénon maps*, Invent Math. 112 (1993), 541-576.
- [BY00] M. Benedicks, L.-S. Young, *Markov extensions and decay of correlations for certain Hénon maps*, Asterisque No. 261 (2000), xi, 13-56.
- [CLR06] Y. Cao, S. Luzzatto, I. L. Rios., *Some non-hyperbolic systems with strictly non-zero Lyapunov exponents for all invariant measures: horseshoes with internal tangencies*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 15(1) (2006), 61-71.
- [DGS76] M. Denker, C. Grillenberger, K. Sigmund, *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 527, Springer (1976).
- [DNU95] M. Denker, Z. Nitecki, M. Urbánski., *Conformal measures and S-unimodal maps*, In Dynamical systems and applications, vol. 4 of World Sci. Ser. Appl. Anal. (1995), 169-212, Ann. of Math. World Sci. Publ., River Edge, NJ.
- [DRV96] L. Díaz, J. Rocha, M. Viana, *Strange attractors in saddle-node cycles: prevalence and globality*, Invent Math. 125 (1996), no. 1, 37-74.
- [DU91] M. Denker, M. Urbánski., *Hausdorff and conformal measures on Julia sets with a rationally indifferent periodic point*, J. London Math. Soc. 2 (1991), no. 43(1), 107-118.
- [Ja81] M. Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm. Math. Phys. 81 (1981), 39-88.

- [KH95] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press (1995).
- [Ki96] S. Kiriki, *The Palis-Takens problem on the first homoclinic tangency inside the horseshoe*, Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. 6 (1996), 737-744.
- [KKY92] I. Kan, H. Koçak, J. A. Yorke, *Antimonotonicity: concurrent creation and annihilation of periodic orbits*. Ann. of Math. (2), 136, (1992), 219-252.
- [Le11] R. Leplaideur, *Thermodynamic formalism for a family of nonuniformly hyperbolic horseshoes and the unstable Jacobian* Ergodic Theory and Dynamical Systems 31 (2011), 423-447.
- [LR06] R. Leplaideur, I. L. Rios, *Invariant manifolds and equilibrium states for non-uniformly hyperbolic horseshoes*, Nonlinearity 19 (2006), 2667-2694.
- [LR09] R. Leplaideur, I. L. Rios, *On t -conformal measures and Hausdorff dimension for a family of non-uniformly hyperbolic horseshoes* Ergodic Theory and Dynamical Systems 29 (2009), 1917-1950.
- [MM83] H. McCluskey, A. Manning, *Hausdorff dimension for horseshoes*, Ergod th. & Dynam. Sys. 3 (1983), 251-260.
- [MV93] L. Mora, M. Viana, *Abundance of strange attractors*, Acta Math. 171 (1993), 1-71.
- [NP76] S. Newhouse, J. Palis, *Cycles and bifurcation theory*, Astérisque 31 (1976), 44-140.
- [PM78] J. Palis, W. Melo, *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Projeto Euclides, Impa (1978).
- [PS08] Ya. Pesin, S. Senti., *Equilibrium measures for maps with inducing schemes*. J. Mod. Dyn. 2 (2008), no. 3, 397-430.
- [PT85] J. Palis, F. Takens, *Cycles and measure of bifurcation sets for two-dimensional diffeomorphisms*. Invent. Math. 82 (1985), 397-422.
- [PT93] J. Palis, F. Takens, *Hyperbolicity & sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge studies in advanced mathematics, 35, Cambridge University Press (1993).
- [PY94] J. Palis, J.-C. Yoccoz, *Homoclinic tangencies for hyperbolic sets of large Hausdorff dimension*. Acta. Math. 172 (1994), 91-136.
- [PY09] J. Palis, J.-C. Yoccoz, *Non-uniformly hyperbolic horseshoes arising from bifurcations of Poincaré heteroclinic cycles*. Publ. Math. Inst. Hautes Étud Sci. 110 (2009), 1-217.
- [Ri01] I. L. Rios, *Unfolding homoclinic tangencies inside horseshoes: hyperbolicity, fractal dimensions and persistent tangencies*, Nonlinearity 14 (2001), 431-462.
- [Ro95] C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, second ed., CRC Press (1995).

- [Vi93] M. Viana, *Strange attractors in higher dimensions*, Bol. Soc. Brasil. Mat. 24 (1993), no. 1, 13-62.
- [Wa82] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 79, Springer (1982).
- [WY01] Q. D. Wang, L.-S. Young, *Strange attractors with one direction of instability*, Comm. Math. Phys. 218 (2001), 1-97.
- [WY08] Q. D. Wang, L.-S. Young, *Toward a theory of rank one attractors*, Ann. of Math. 167 (2008), 349-480.