

**GRUPO DE UNIDADES DE ANÉIS DE
GRUPO INTEIROS DE 2-GRUPOS
EXTRA-ESPECIAIS**

CRISTIANE DE MELLO

2013



**GRUPO DE UNIDADES DE ANÉIS DE GRUPO INTEIROS DE
2-GRUPOS EXTRA-ESPECIAIS**

CRISTIANE DE MELLO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Guilherme Augusto de La Rocque Leal.

Rio de Janeiro,
12 de julho de 2013

M527g Mello, Cristiane de.

Grupo de Unidades de Anéis de Grupo Inteiros de 2-Grupos Extra-Especiais/Cristiane de Mello. - Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2013.

viii, 65f.: il.; 30 cm.

Orientador: Guilherme Augusto de La Rocque Leal.

Tese (doutorado) - UFRJ/IM/Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.

Referências Bibliográficas: f. 72-75.

1. Anéis de Grupo. 2. Unidades em Anéis de Grupo Inteiros. 3. O Grupo de Unidades de $\mathbb{Z}D_4$. 4. O Grupo de Unidades de $\mathbb{Z}G$, G 2-Grupo Extra-Especial. I. Leal, Guilherme Augusto de La Rocque. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 512.74

CRISTIANE DE MELLO

**GRUPO DE UNIDADES DE ANÉIS DE GRUPO INTEIROS DE
2-GRUPOS EXTRA-ESPECIAIS**

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 12/07/2013

Banca Examinadora

Prof. Guilherme Augusto de La Rocque Leal - UFRJ
(*Presidente, Orientador*)

Prof. Adilson Gonçalves - UFRJ

Profa. Ana Cristina Vieira - UFMG

Prof. Antônio Paques - UFRGS

Prof. Jairo Gonçalves - USP

**Rio de Janeiro,
12 de julho de 2013**

*Aos meus queridos e
amados pais: Hilda
Maria de Mello e
Prudêncio Frederico
de Mello.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela graça da vida e pelo ilustre apoio espiritual permitido constantemente em meu caminho.

Ao meu orientador, professor Guilherme Augusto de La Rocque Leal, pela atenção, paciência, compreensão e inestimável apoio ao longo de todo este trabalho.

Aos meus amados pais, Dêncio e Maria, pelo exemplo de amor e dedicação incondicionais.

Ao meu querido irmão, Aleksandro, grande amigo e, como outrora, fiel escudeiro.

Aos meus pequeninos, Lucas, Mariana, Pedro Paulo e Iago(Ciganinho), pelos momentos de alegria e encantamento que me levantaram nas horas mais difíceis.

À minha querida família Mattos, especialmente Osmar e Isabel, pelo carinho e paciência em todos os momentos

À minha colega e amiga Susan Wouters, que, com seu companherismo, sua amizade verdadeira e sua alegria de viver, tornou esses últimos anos mais divertidos e agradáveis.

Enfim, agradeço a todos, amigos e colegas, que acreditaram na realização deste trabalho.

Resumo

Um dos problemas da *Teoria de Anéis de Grupo* é determinar o grupo de unidades de um anel de grupo. Em 1972, *F. C. Polcino Milies* descreveu pela primeira vez o grupo de unidades do anel de grupo $\mathbb{Z}D_4$, onde D_4 denota o grupo diedral de ordem 8, e, mais recentemente, *E. Jespers* e *G. Leal* mostraram a importância das unidades bicíclicas e do complemento normal para descrever o mesmo. Neste trabalho, estendemos a ideia de *E. Jespers* e *G. Leal* e descrevemos completamente o grupo de unidades dos anéis de grupo inteiros de dois particulares 2-grupos extra-especiais: um de ordem 32, produto central de duas cópias de D_4 , e outro de ordem 128, produto central de três cópias de D_4 . Denotando $D \cong D^* \cong D^{**} \cong D_4$, onde $D_4 = \langle b, v \mid b^2 = 1, v^4 = 1 \text{ e } bvbv = 1 \rangle$, e $s = v^2$, construímos uma base matricial elementar sobre $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{Q}(D \times D^* / \{1, ss^*\})(1 - s/2) \cong M_4(\mathbb{Q})$ e $\mathbb{Q}(D \times D^* \times D^{**} / \{1, ss^*, ss^{**}, s^*s^{**}\})(1 - s/2) \cong M_8(\mathbb{Q})$, e determinamos o grupo de unidades de $\mathbb{Z}(D \times D^* / \{1, ss^*\})$ e $\mathbb{Z}(D \times D^* \times D^{**} / \{1, ss^*, ss^{**}, s^*s^{**}\})$.

Abstract

One of the problems of the *Theory of Rings Group* is to determine the group of units a ring group. In 1972, *F. C. Polcino Milies* first described the group of units of the group ring $\mathbb{Z}D_4$, where D_4 denotes the dihedral group of order 8, and more recentemente, *E. Jespers* and *G. Leal* showed the importance of the bicyclic unit and the normal complement to describe the same. In this paper, we extend the idea of *E. Jespers* and *G. Leal* and completely describe the group of units of group rings whole two particular 2-extra-special groups: one of order 32, central product of two copies of D_4 , and another order 128, central product of three copies of D_4 . Denoting $D \cong D^* \cong D^{**} \cong D_4$, with $D_4 = \langle b, v \mid b^2 = 1, v^4 = 1 \text{ e } bvbv = 1 \rangle$, and $s = v^2$, build a basic elementary matrix over $\mathbb{Q}$ to $\mathbb{Q}(D \times D^* / \{1, ss^*\})(1 - s/2) \cong M_4(\mathbb{Q})$ e $\mathbb{Q}(D \times D^* \times D^{**} / \{1, ss^*, ss^{**}, s^*s^{**}\})(1 - s/2) \cong M_8(\mathbb{Q})$, and we determine the group of units of $\mathbb{Z}(D \times D^* / \{1, ss^*\})$ and $\mathbb{Z}(D \times D^* \times D^{**} / \{1, ss^*, ss^{**}, s^*s^{**}\})$.

Sumário

RESUMO	4
ABSTRACT	5
SUMÁRIO	6
INTRODUÇÃO	7
1 RESULTADOS PRELIMINARES	11
1.1 Anéis de grupo	11
1.2 Semi-simplicidade e o Teorema de Maschke	17
2 UNIDADES EM ANÉIS DE GRUPO INTEIROS	24
2.1 Unidades de ordem finita	24
2.2 Unidades bicíclicas e unidades cíclicas de Bass	29
2.3 Unidades triviais e o Teorema de Higman	31
3 O GRUPO DE UNIDADES DE $\mathbb{Z}D_4$	36
3.1 Representações de grupos e a decomposição de $\mathbb{Q}D_4$	36
3.2 O grupo de unidades de $\mathbb{Z}D_4$	39
4 O GRUPO DE UNIDADES DE $\mathbb{Z}G$, G 2-GRUPO EXTRA-ESPECIAL	43
4.1 O grupo de unidades de $\mathbb{Z}G$, G 2-grupo extra-especial de ordem 32	43
4.2 O grupo de unidades de $\mathbb{Z}G$, G 2-grupo extra-especial de ordem 128	52
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72
A APÊNDICE	76

Introdução

Seja G um grupo e seja R um anel comutativo com identidade. O *Anel de Grupo* RG é um R -módulo livre com base G , cuja multiplicação é induzida pela multiplicação de G . O grupo de unidades do anel de grupo RG é denotado por $\mathcal{U}(RG)$, isto é,

$$\mathcal{U}(RG) = \{\gamma \in RG \mid \exists \mu \in RG \text{ tal que } \gamma\mu = \mu\gamma = 1\}.$$

O conceito de *Anel de Grupo* surgiu de forma implícita no artigo [7] de *A. Cayley* em 1854, o qual é considerado o primeiro trabalho na *Teoria de Grupos*, mas foi explicitamente definido por *T. Molien* em 1897. Mais tarde, os trabalhos de *E. Noether*, *R. Brauer* e *I. Schur* estabeleceram uma relação entre a *Teoria de Estrutura de Anéis e Álgebras* e a *Teoria de Representações de Grupos Finitos*, o que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da *Teoria de Anéis de Grupo*. A partir daí, os anéis de grupo tornaram-se objetos de pesquisa em várias áreas, tais como *Teoria de Grupos* e *Teoria dos Números*. Em particular, a *Teoria dos Números* desempenha um papel muito importante no estudo do grupo de unidades do anel de grupo inteiro $\mathbb{Z}G$.

Um dos grandes problemas da *Teoria de Anéis de Grupo* é descrever precisamente o grupo de unidades de um anel de grupo RG . O alto grau de complexidade deste ficou evidenciado na década de setenta, quando foi provado que o mesmo frequentemente contém um subgrupo livre não abeliano. Muitos pesquisadores, utilizando algumas técnicas da *Teoria de Representações* e da *Teoria dos Números Algébricos*, ou apresentam uma descrição explícita das unidades, ou a estrutura geral de $\mathcal{U}(RG)$ ou um subgrupo de $\mathcal{U}(RG)$ de índice finito. Citamos, por exemplo, *R. Z. Alev* [1], *R. Z. Alev* e *Z. Panina* [2], *A. K. Bhandari* e *I. S. Luthar* [3], *A. Bovdi* [4], *A. Bovdi* e *F. C. Polcino Milies* [5], *A. Bovdi* e *A. Szakács* [6], *N. Endo* [10], *R. A. Ferraz* [11], [12], *A. Giambruno* e *S. K. Sehgal* [13], *J. Z. Gonçalves* e *D. S. Passman* [14], [15], *J. Z. Gonçalves* e *A. Del Rio* [16], *J. Z. Gonçalves* e *P. M. Veloso* [17], *E. G. Goodaire* e *E. Jespers* [18], *G. Higman* [20], *E. Jespers* e *G. Leal* [21], [22], *E. Jespers* e *G. Leal* e *M. M. Parmenter* [23], *E. Jespers* e *G. Leal* e *F. C. Polcino* [24], *E. Jespers* [25], *E. Jespers* e *M. M. Parmenter* [26], *E. Jespers*

e *F. C. Polcino* [27], *M. M. Parmenter* [32], *F. C. Polcino* [34], [35], [37], *J. Ritter* e *S. K. Sehgal* [39], [40], [41], [42], *S. K. Sehgal* e *H. J. Zassenhaus* [43], *S. K. Sehgal* [45] e *A. Valenti* [47], dentre outros.

Uma técnica natural para descrever o grupo de unidades de um anel de grupo seria determinar uma família de geradores finita, o que pode ser resolvido, no momento, apenas para um pequeno número de casos. Por causa disso, a pesquisa atual tem se concentrado em determinar geradores para subgrupos de índice finito. Alguns dos resultados mais significativos nesta direção foram obtidos por *E. Jespers* e *G. Leal*.

F. C. Polcino Milies [34] descreveu pela primeira vez o grupo de unidades do anel de grupo inteiro $\mathbb{Z}D_4$, onde D_4 denota o grupo diedral de ordem 8, mas um resultado mais recente de *E. Jespers* e *G. Leal* [21] mostra a importância das unidades bicíclicas de $\mathbb{Z}D_4$ e do complemento normal de D_4 para a descrição completa do grupo de unidades de $\mathbb{Z}D_4$:

Teorema 0.1. (*Jespers-Leal*) *Seja $D_4 = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy = syx, s^2 = 1 \rangle$. Então, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}D_4) = \pm D_4 V$, onde V é um grupo livre de posto 3 gerado pelas unidades bicíclicas:*

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 + (y + xy)(1 - s) = \mu_{sx,y}^{-1}, \\ v_2 &= 1 + (x - xy)(1 - s) = \mu_{sy,x}^{-1} \quad e \\ v_3 &= 1 + (-y + xy)(1 - s) = \mu_{x,y}. \end{aligned}$$

Além disso, a função

$$\varphi : V \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 2\mathbb{Z} + 1 & 4\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 \end{array} \right]_{\overline{\det=1}}$$

definida por ($\alpha_i \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} &\varphi(1 + (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy)(1 - s)) = \\ &= \left[\begin{array}{cc} 2(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + 1 & 4(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 2(\alpha_1 + \alpha_3) & 2(\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

Como D_4 é um 2-grupo extra-especial de ordem finita 8, temos que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}D_4) = \pm D_4 V$, com $V \cong U_2/D_4'$ complemento normal de D_4 , onde U_2 é o subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}D_4)$ definido por

$$U_2 = \mathcal{U}(\mathbb{Z}D_4) \cap \left(\mathbb{Q}D_4 \left(\frac{1-s}{2} \right) + \left(\frac{1+s}{2} \right) \right)$$

e $D_4' = \{1, s\}$ é o subgrupo derivado de D_4 . Assim, a ideia de *E. Jespers* e *G. Leal* para obter a descrição completa de V e, conseqüentemente, do grupo de unidades de $\mathbb{Z}D_4$, foi descrever completamente o grupo U_2 e tomar o seu grupo quociente por D_4' . Para tal, *E. Jespers* e *G. Leal* construíram uma base matricial elementar para $\mathbb{Q}D_4 \left(\frac{1-s}{2} \right) \cong M_2(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$:

Proposição 0.2. *Seja $E = \frac{1-s}{2}$ e sejam $x, y \in D_4$ tais que:*

$$(i) \ xy = syx;$$

(ii) $\epsilon x^2 E = y^2 E = E$, onde ϵ é escolhido em $\{\pm 1\}$ de modo que as igualdades sejam verdadeiras.

Então, uma base matricial elementar para $\mathbb{Q}D_4\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_2(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ é:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{1+y}{2}\right) E & e_{12} &= \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) E \\ e_{21} &= \left(\frac{x+xy}{2}\right) E & e_{22} &= \left(\frac{1-y}{2}\right) E. \end{aligned}$$

Neste trabalho, estendemos a ideia de *E. Jespers* e *G. Leal* e descrevemos completamente o grupo de unidades dos anéis de grupo inteiros de dois particulares 2-grupos extra-especiais de ordem finita: um de ordem 32, produto central de duas cópias de D_4 , e outro de ordem 128, produto central de três cópias de D_4 .

A tese está apresentada da seguinte forma:

No primeiro capítulo, enunciamos os conceitos básicos da *Teoria de Anéis de Grupo*, fixamos algumas notações e apresentamos, sem demonstrações, alguns resultados que utilizamos no decorrer do texto. Além disso, caracterizamos os anéis de grupos RG , no caso em que G é um produto direto de grupos, e determinamos condições necessárias e suficientes sobre R e G para que RG seja um anel semi-simples.

No segundo capítulo, estudamos as unidades de um anel de grupo inteiro, juntamente com algumas de suas principais propriedades, definimos unidades triviais, unidades normalizadas, unidades bicíclicas e unidades cíclicas de *Bass*. Provamos, ainda, dois resultados importantes sobre unidades de ordem finita e unidades triviais: o *Teorema de Berman-Higman*, no caso de grupo finito, e o *Teorema de Higman*.

No terceiro capítulo, apresentamos a descrição completa do grupo de unidades de $\mathbb{Z}D_4$, juntamente com a base matricial elementar para

$$\mathbb{Q}D_4\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_2(\mathbb{Q}) \text{ sobre } \mathbb{Q},$$

dada por *E. Jespers* e *G. Leal* [21], fixamos mais algumas notações e estabelecemos resultados necessários para o último capítulo.

No quarto e último capítulo, se D , D^* e D^{**} são grupos isomorfos a D_4 , denotamos por $D \times D^*$ os elementos da forma xy^* , onde $x \in D$ e $y^* \in D^*$ é tal que seu correspondente em D é y , e por $D \times D^* \times D^{**}$ os elementos da forma xy^*z^{**} , onde $x \in D$, $y^* \in D^*$ é tal que seu correspondente em D é y e $z^{**} \in D^{**}$ é tal que seu correspondente em D é z . Assim, definimos, respectivamente, o 2-grupo extra-especial de ordem 32, produto central de duas cópias de D_4 , e o 2-grupo extra-especial de ordem 128, produto central de três cópias de D_4 :

$$\frac{D \times D^*}{\{1, ss^*\}} \quad \text{e} \quad \frac{D \times D^* \times D^{**}}{\{1, ss^*, ss^{**}, s^*s^{**}\}}.$$

Em seguida, apresentamos a decomposição dos anéis de grupo

$$\mathbb{Q}\left(\frac{D \times D^*}{\{1, ss^*\}}\right) \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}\left(\frac{D \times D^* \times D^{**}}{\{1, ss^*, ss^{**}, s^*s^{**}\}}\right),$$

e construímos uma base matricial elementar sobre $\mathbb{Q}$ para

$$\mathbb{Q}\left(\frac{D \times D^*}{\{1, ss^*\}}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_4(\mathbb{Q}) \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}\left(\frac{D \times D^* \times D^{**}}{\{1, ss^*, ss^{**}, s^*s^{**}\}}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_8(\mathbb{Q}),$$

respectivamente. Finalmente, estendendo a ideia dada por *E. Jespers* e *G. Leal* para 2-grupos extra-especiais de ordem finita, descrevemos completamente o grupo de unidades dos anéis de grupo inteiros:

$$\mathbb{Z}\left(\frac{D \times D^*}{\{1, ss^*\}}\right) \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}\left(\frac{D \times D^* \times D^{**}}{\{1, ss^*, ss^{**}, s^*s^{**}\}}\right).$$

Resultados Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentaremos alguns tópicos básicos da *Teoria de Anéis de Grupo*, fixaremos algumas notações e estabeleceremos alguns resultados que serão utilizados ao longo do texto.

1.1 Anéis de grupo

Nesta primeira seção, introduziremos a definição de um anel de grupo RG , onde G é um grupo e R é um anel comutativo com identidade, e apresentaremos algumas de suas principais propriedades. Além disso, caracterizaremos os anéis de grupo RG no caso em que G é um produto direto de grupos.

Seja G um grupo (não necessariamente finito) e seja R um anel comutativo com identidade. Denotaremos por RG o conjunto de todas as combinações lineares da forma

$$\lambda = \sum_{g \in G} \lambda_g g,$$

onde $\lambda_g \in R$, para todo $g \in G$, e $\lambda_g = 0$ quase sempre, isto é, somente um número finito de coeficientes são diferentes de 0 em cada uma dessas somas.

Definição 1.1. Dado um elemento $\lambda = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in RG$, definimos o **suporte de λ** como sendo o subconjunto dos elementos de G cujos coeficientes em λ são não nulos e o denotaremos por $\text{supp}(\lambda)$, isto é:

$$\text{supp}(\lambda) = \{g \in G; \lambda_g \neq 0\}.$$

Observação 1.2. Dados $\lambda, \mu \in RG$, $\lambda = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ e $\mu = \sum_{g \in G} \mu_g g$, temos $\lambda = \mu$ se, e somente se, $\lambda_g = \mu_g$, para todo $g \in G$.

Definição 1.3. Dados $\alpha \in R$ e $\lambda, \mu \in RG$, $\lambda = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ e $\mu = \sum_{g \in G} \mu_g g$, definimos a soma $\lambda + \mu$, o produto $\lambda\mu$ e o produto por escalar $\alpha \cdot \lambda$ por:

$$(i) \quad \lambda + \mu = \sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{g \in G} \mu_g g = \sum_{g \in G} (\lambda_g + \mu_g)g;$$

$$(ii) \quad \lambda\mu = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{g \in G} \mu_g g \right) = \sum_{g \in G} \nu_g g, \text{ onde}$$

$$\nu_g = \sum_{h \in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g} = \sum_{xy=g} \lambda_x \mu_y;$$

$$(iii) \quad \alpha \cdot \lambda = \alpha \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) = \sum_{g \in G} (\alpha \lambda_g)g.$$

Com as operações de soma e produto definidos acima, RG é um anel com identidade 1, a saber

$$1 = \sum_{g \in G} u_g g,$$

onde o coeficiente correspondente ao elemento identidade do grupo é igual a 1 e $u_g = 0$ para todo $g \in G$, $g \neq 1$. Em relação à soma e ao produto por escalar, RG é um R -módulo.

Podemos definir uma imersão $i : G \rightarrow RG$ associando a cada elemento $a \in G$ o elemento

$$i(a) = \sum_{g \in G} \gamma_g g \in RG$$

tal que $\gamma_a = 1$ e $\gamma_g = 0$, se $g \neq a$. Deste modo, consideramos G como um subconjunto de RG . Com esta identificação, podemos afirmar que RG é um R -módulo livre com base G .

Também podemos definir uma aplicação $v : R \rightarrow RG$ dada por

$$v(\alpha) = \sum_{g \in G} \eta_g g \in RG,$$

onde $\eta_1 = \alpha$ e $\eta_g = 0$ para todo $g \in G$, $g \neq 1$. Claramente, v é um monomorfismo de anéis e, desta maneira, podemos considerar R como um subanel de RG .

Com estas identificações, dados $\alpha \in R$ e $g \in G$, é claro que $\alpha g = g\alpha$ em RG . Portanto, denotando por $\mathcal{Z}(RG)$ o centro de RG , obtemos $R \subseteq \mathcal{Z}(RG)$.

Definição 1.4. O conjunto RG com as operações definidas anteriormente, é chamado **Anel de Grupo** de G sobre R .

Na sequência, apresentaremos uma descrição para o anel de grupo RG , no caso em que G é um grupo finito. Para tal, precisaremos da definição que segue.

Definição 1.5. *Sejam G um grupo finito e $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ o conjunto das classes de conjugação de G . Para cada índice $i \in I$, os elementos*

$$C_i = \sum_{x \in \mathcal{C}_i} x.$$

*são ditas **Somas de Classe** de G sobre R .*

Teorema 1.6. *Se G é um grupo finito, então o conjunto $\{C_i\}_{i \in I}$, de todas as somas de classe de G sobre R , é uma base do centro $\mathcal{Z}(RG)$ de RG sobre R . Em particular, $\mathcal{Z}(RG)$ é um R -módulo livre cujo posto é igual ao número de classes de conjugação de G .*

O resultado seguinte mostra que podemos considerar RG um anel com involução.

Proposição 1.7. *Seja $*$: $RG \rightarrow RG$ a aplicação definida por:*

$$\lambda^* = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right)^* = \sum_{g \in G} \lambda_g g^{-1}.$$

Então, para quaisquer $\lambda, \mu \in RG$ e $\alpha \in R$, $$ possui as seguintes propriedades:*

- (i) $(\lambda + \mu)^* = \lambda^* + \mu^*$;
- (ii) $(\lambda\mu)^* = \mu^* \lambda^*$;
- (iii) $(\lambda^*)^* = \lambda$;
- (iv) $(\alpha\lambda)^* = \alpha\lambda^*$.

Quando $R = \mathbb{Z}$, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.8. *Seja $\lambda \in \mathbb{Z}G$. Então, $\lambda\lambda^* = 1$ se, e somente se, $\lambda = \pm g$, $g \in G$.*

Nosso próximo passo será definir a *Aplicação de Aumento* e o *Ideal de Aumento* de RG .

Definição 1.9. *O homomorfismo $\varepsilon : RG \rightarrow R$ definido por*

$$\varepsilon \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) = \sum_{g \in G} \lambda_g \in R$$

*é chamado **Aplicação de Aumento** de RG . O núcleo de ε é chamado **Ideal de Aumento** de RG e será denotado por $\Delta(G)$.*

Observação 1.10. Dado um elemento $\lambda = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in \Delta(G)$, temos que

$$\varepsilon(\lambda) = \epsilon\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g \in G} \lambda_g = 0.$$

Daí, podemos escrever λ na forma

$$\lambda = \sum_{g \in G} \lambda_g g - \sum_{g \in G} \lambda_g = \sum_{g \in G} \lambda_g (g - 1).$$

É claro que $g - 1 \in \Delta(G)$, para todo $g \in G$. Logo, a igualdade acima mostra que $\{g - 1; g \in G, g \neq 1\}$ é um conjunto de geradores de $\Delta(G)$ sobre R . Além disso, como os elementos de G são linearmente independentes sobre R , segue que este conjunto é linearmente independente.

Proposição 1.11. O conjunto $\{g - 1; g \in G, g \neq 1\}$ é uma base de $\Delta(G)$ sobre R . Logo, podemos escrever

$$\Delta(G) = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g (g - 1); g \in G, g \neq 1, \lambda_g \in R \right\},$$

onde, como sempre, assumimos que somente um número finito de coeficientes λ_g são diferentes de 0. Em particular, se G é um grupo finito, então $\Delta(G)$ é um R -módulo livre de posto $|G| - 1$.

Para finalizarmos esta seção, caracterizaremos os anéis de grupo RG no caso em que G é um produto direto de grupos.

Proposição 1.12. Sejam G e H grupos e seja R um anel comutativo com identidade. Então,

$$R(G \times H) \cong (RG)H \cong RG \otimes_R RH.$$

Demonstração. Primeiramente, observamos que, dados $g \in G$ e $h \in H$, gh é uma unidade do anel $(RG)H$: $ghg^{-1}h^{-1} = gg^{-1}hh^{-1} = 1$.

Agora, consideramos a aplicação $\bar{\varphi}$ do grupo $G \times H$ no grupo de unidades do anel $(RG)H$ definida por $\bar{\varphi}(g, h) = gh$.

Afirmamos que $\bar{\varphi}$ é um homomorfismo de grupos injetor.

De fato, dados $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$, temos que:

- $\bar{\varphi}((g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2)) = \bar{\varphi}(g_1 g_2, h_1 h_2) = g_1 g_2 h_1 h_2 = g_1 h_1 g_2 h_2 = \bar{\varphi}(g_1, h_1) \cdot \bar{\varphi}(g_2, h_2);$
- $\bar{\varphi}(g_1, h_1) = \bar{\varphi}(g_2, h_2) \Rightarrow g_1 h_1 = g_2 h_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \text{ e } h_1 = h_2 \Rightarrow (g_1, h_1) = (g_2, h_2).$

Logo, $\bar{\varphi}$ é um homomorfismo de grupos injetor.

Vamos estender $\overline{\varphi}$ linearmente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varphi : R(G \times H) &\longrightarrow (RG)H \\ \sum_{g \in G, h \in H} \lambda_{gh}(g, h) &\longmapsto \sum_{h \in H} \left(\sum_{g \in G} \lambda_{gh}g \right) h. \end{aligned}$$

Afirmamos que φ é um isomorfismo de anéis de grupo.

De fato, sejam $\lambda, \mu, \gamma \in R(G \times H)$, onde $\lambda = \sum_{g \in G, h \in H} \lambda_{gh}(g, h)$, $\mu = \sum_{j \in G, k \in H} \mu_{jk}(j, k)$ e $\gamma = \sum_{g \in G, h \in H} \gamma_{gh}(g, h)$, e seja $\alpha \in R$, então:

$$\begin{aligned} \bullet \varphi(\lambda \cdot \mu) &= \varphi\left(\sum \lambda_{gh}\mu_{jk}(gj, hk)\right) = \sum_{h, k \in H} \left(\sum_{g, j \in G} \lambda_{gh}\mu_{jk}gj \right) hk = \\ &= \sum_{h \in H} \left(\sum_{g \in G} \lambda_{gh}g \right) h \cdot \sum_{k \in H} \left(\sum_{j \in G} \mu_{jk}j \right) k = \\ &= \varphi\left(\sum_{g \in G, h \in H} \lambda_{gh}(g, h)\right) \cdot \varphi\left(\sum_{j \in G, k \in H} \mu_{jk}(j, k)\right) = \varphi(\lambda) \cdot \varphi(\mu); \\ \bullet \varphi(\lambda + \gamma) &= \varphi\left(\sum_{g \in G, h \in H} (\lambda_{gh} + \gamma_{gh})(g, h)\right) = \sum_{h \in H} \left(\sum_{g \in G} (\lambda_{gh} + \gamma_{gh})g \right) h = \\ &= \sum_{h \in H} \left(\sum_{g \in G} \lambda_{gh}g \right) h + \sum_{h \in H} \left(\sum_{g \in G} \gamma_{gh}g \right) h = \varphi(\lambda) + \varphi(\gamma); \end{aligned}$$

Logo, φ é um homomorfismo de anéis de grupo. Resta mostrar que φ é bijetor.

Sejam $\lambda, \gamma \in R(G \times H)$, onde $\lambda = \sum_{g \in G, h \in H} \lambda_{gh}(g, h)$ e $\gamma = \sum_{g \in G, h \in H} \gamma_{gh}(g, h)$, então:

$$\begin{aligned} \bullet \varphi(\lambda) = \varphi(\gamma) &\Rightarrow \sum_{h \in H} \left(\sum_{g \in G} \lambda_{gh}g \right) h = \sum_{h \in H} \left(\sum_{g \in G} \gamma_{gh}g \right) h \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{h \in H} \left(\sum_{g \in G} \lambda_{gh}g \right) h - \sum_{h \in H} \left(\sum_{g \in G} \gamma_{gh}g \right) h = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{h \in H} \left(\sum_{g \in G} (\lambda_{gh} - \gamma_{gh})g \right) h = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{g \in G} (\lambda_{gh} - \gamma_{gh})g = 0 \Rightarrow \lambda_{gh} = \gamma_{gh}, \forall g \in G \text{ e } \forall h \in H \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda = \gamma. \end{aligned}$$

Segue que φ é injetor.

Por outro lado, temos que $GH \subseteq \text{Im}(\overline{\varphi}) \subseteq \text{Im}(\varphi)$ e GH gera $(RG)H$ sobre R . Daí, $(RG)H \subseteq \text{Im}(\varphi)$ e φ é sobrejetor.

Portanto, φ é um isomorfismo de anéis de grupo e $R(G \times H) \cong (RG)H$.

Agora vamos utilizar a *Propriedade Universal do Produto Tensorial* para mostrar que $R(G \times H) \cong RG \otimes_R RH$.

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 RG \times RH & \longrightarrow & RG \otimes_R RH \\
 & \searrow \phi & \downarrow \psi \\
 & & R(G \times H)
 \end{array}$$

Seja $\phi : RG \times RH \rightarrow R(G \times H)$ definida por:

$$\phi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i g_i, \sum_{j=0}^m \beta_j h_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (g_i, h_j).$$

Afirmamos que ϕ é uma aplicação balanceada.

De fato, dados $\alpha \in R$, $\lambda, \mu \in RG$ e $\gamma, \eta \in RH$, onde $\lambda = \sum \alpha_i g_i$, $\mu = \sum \beta_i g_i$, $\gamma = \sum r_j h_j$ e $\eta = \sum s_j h_j$, temos que:

- $\phi(\lambda + \mu, \gamma) = \phi(\sum(\alpha_i + \beta_i)g_i, \sum r_j h_j) = \sum(\alpha_i + \beta_i)r_j(g_i, h_j) = \sum \alpha_i r_j(g_i, h_j) + \sum \beta_i r_j(g_i, h_j) = \phi(\lambda, \gamma) + \phi(\mu, \gamma);$
- $\phi(\lambda, \gamma + \eta) = \phi(\sum \alpha_i g_i, \sum(r_j + s_j)h_j) = \sum \alpha_i(r_j + s_j)(g_i, h_j) = \sum \alpha_i r_j(g_i, h_j) + \sum \alpha_i s_j(g_i, h_j) = \phi(\lambda, \gamma) + \phi(\lambda, \eta);$
- $\phi(\alpha \cdot \lambda, \gamma) = \phi(\sum \alpha \alpha_i g_i, \sum r_j h_j) = \sum \alpha \alpha_i r_j(g_i, h_j) = \alpha \sum \alpha_i r_j(g_i, h_j) = \alpha \phi(\lambda, \gamma);$
- $\phi(\lambda, \alpha \cdot \gamma) = \phi(\sum \alpha_i g_i, \sum \alpha r_j h_j) = \sum \alpha_i \alpha r_j(g_i, h_j) = \alpha \sum \alpha_i r_j(g_i, h_j) = \alpha \phi(\lambda, \gamma).$

Logo, ϕ é uma aplicação balanceada.

Pela *Propriedade Universal do Produto Tensorial*, segue que existe um único homomorfismo $\psi : RG \otimes_R RH \rightarrow R(G \times H)$ definido por

$$\psi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i g_i \otimes \sum_{j=0}^m \beta_j h_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (g_i, h_j)$$

que faz o diagrama acima comutar.

Afirmamos que ψ é bijetor.

De fato, seja $\tilde{\psi} : R(G \times H) \rightarrow RG \otimes_R RH$ definida por $\tilde{\psi}(\sum \alpha_{ij}(g_i, h_j)) = \sum \alpha_{ij} g_i \otimes h_j$. Temos que:

- $\psi(\tilde{\psi}(\sum \alpha_{ij}(g_i, h_j))) = \psi(\sum \alpha_{ij} g_i \otimes h_j) = \sum \alpha_{ij}(g_i, h_j);$
- $\tilde{\psi}(\psi(\sum \alpha_i g_i \otimes \sum \beta_j h_j)) = \tilde{\psi}(\sum \alpha_i \beta_j (g_i, h_j)) = \sum \alpha_i \beta_j g_i \otimes h_j = \sum \alpha_i g_i \otimes \beta_j h_j.$

Daí, ψ e $\tilde{\psi}$ são aplicações inversas uma da outra e ψ é bijetor.

Portanto, ψ é um isomorfismo de anéis de grupo e $R(G \times H) \cong RG \otimes_R RH$. $\square$

1.2 Semi-simplicidade e o Teorema de Maschke

Nesta seção apresentaremos condições sobre o anel R e o grupo G que nos permitam decompor o anel RG em uma soma direta de anéis simples. Nesta direção, nosso interesse principal é determinar condições necessárias e suficientes sobre R e G para que RG seja um anel semi-simples. Iniciaremos estudando algumas relações entre os subgrupos de G e ideais de RG . Estas relações são muito importantes no estudo de muitos problemas que envolvem a estrutura de RG .

Dados um grupo G e um anel R comutativo com identidade, denotaremos por $\mathcal{S}(G)$ o conjunto de todos os subgrupos de G e por $\mathcal{I}(RG)$ o conjunto de todos os ideais à esquerda de RG .

Definição 1.13. *Dado um subgrupo $H \in \mathcal{S}(G)$, denotaremos por $\Delta_R(G, H)$ o ideal à esquerda de RG gerado pelo conjunto $\{h - 1; h \in H\}$, isto é,*

$$\Delta_R(G, H) = \left\{ \sum_{h \in H} \alpha_h (h - 1); \alpha_h \in RG \right\}.$$

Para um anel R fixo, omitiremos o subscrito e denotaremos $\Delta_R(G, H)$ simplesmente por $\Delta(G, H)$. Observamos que $\Delta(G, G) = \Delta(G)$.

Lema 1.14. *Seja H um subgrupo de G e seja S um conjunto de geradores de H . Então, o conjunto $\{s - 1; s \in S\}$ é um conjunto de geradores de $\Delta(G, H)$ como um ideal à esquerda de RG .*

Para uma melhor descrição de $\Delta(G, H)$, denotamos por $\mathcal{T} = \{q_i\}_{i \in I}$ um conjunto completo de representantes das classes laterais à esquerda de H em G , isto é, uma *transversal* de H em G , e vamos escolher, como representante da classe H em $\mathcal{T}$, o elemento identidade de G . Pela definição de transversal, todo elemento $g \in G$ pode ser escrito de maneira única na forma $g = q_i h_j$, onde $q_i \in \mathcal{T}$ e $h_j \in H$.

Proposição 1.15. *O conjunto $B_H = \{q(h - 1); q \in \mathcal{T}, h \in H, h \neq 1\}$ é uma base de $\Delta_R(G, H)$ sobre R .*

Se H é um subgrupo normal de G , o homomorfismo canônico $\omega : G \rightarrow G/H$ pode ser estendido ao epimorfismo $\omega^* : RG \rightarrow R(G/H)$ tal que:

$$\omega^* \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) = \sum_{g \in G} \lambda_g \omega(g).$$

Neste caso, $\Delta(G, H)$ é o núcleo do epimorfismo ω^* :

Proposição 1.16. *Seja H um subgrupo normal de G . Então, com a notação acima, $\text{Ker}(\omega^*) = \Delta(G, H)$. Em particular, $\Delta(G)$ é o núcleo do epimorfismo ε induzido pela aplicação trivial*

$$G \rightarrow G/G = \{1\}.$$

Corolário 1.17. *Seja H um subgrupo normal de G . Então, $\Delta(G, H)$ é um ideal bilateral de RG e*

$$\frac{RG}{\Delta(G, H)} \cong R(G/H).$$

Assim, podemos definir uma aplicação de $\mathcal{S}(G)$ sobre $\mathcal{I}(RG)$ de modo que os subgrupos normais de G são levados em ideais bilaterais de RG . Por outro lado, dado um ideal à esquerda $I \in \mathcal{I}(RG)$, consideramos o conjunto

$$\nabla(I) = \{g \in G; g - 1 \in I\}$$

isto é,

$$\nabla(I) = G \cap (1 + I).$$

Afirmamos que $\nabla(I)$ é um subgrupo de G .

De fato, dados $g, h \in \nabla(I)$, temos que $gh - 1 = g(h - 1) + g - 1 \in I$. Daí, $gh \in \nabla(I)$. Ainda, se $g \in \nabla(I)$, então $g^{-1} - 1 = -g^{-1}(g - 1) \in I$. Logo, $g^{-1} \in \nabla(I)$. Portanto, $\nabla(I)$ é um subgrupo de G .

Se I é um ideal bilateral de RG , é fácil verificar que $\nabla(I)$ é um subgrupo normal de G .

A relação entre essas duas funções é dada da seguinte maneira:

Proposição 1.18. *Se $H \in \mathcal{S}(G)$, então $\nabla(\Delta(G, H)) = H$.*

Observação 1.19. *As aplicações Δ e ∇ , ao contrário do que parece, não são inversas uma da outra.*

De fato, dado um ideal $I \in \mathcal{I}(RG)$, é fácil ver que $\Delta(G, \nabla(I)) \subset I$. Mas a igualdade pode não ser verdadeira: se $I = RG$, então $\nabla(RG) = \{g \in G; g - 1 \in RG\} = G$. No entanto, $\Delta(G, \nabla(RG)) = \Delta(G) \neq RG$.

Nosso próximo passo será apresentar condições sobre o anel R e o grupo G para que RG possa ser decomposto em uma soma direta de anéis simples.

Definição 1.20. *Sejam RG um anel de grupo e A um subconjunto finito de G . Então, $\hat{A}$ denota o elemento de RG dado por:*

$$\hat{A} = \sum_{a \in A} a.$$

Lema 1.21. *Se H é um subgrupo de G e $|H|$ é invertível em R , então $e_H = \frac{1}{|H|} \hat{H}$ é um idempotente de RG . Além disso, se $H \triangleleft G$, então e_H é central.*

Definição 1.22. *Se G é finito e $|G|$ é invertível em R , então o idempotente $e_G = \frac{1}{|G|} \hat{G}$ é denominado **idempotente principal** de RG .*

Proposição 1.23. *Seja H um subgrupo normal de G tal que $|H|$ é invertível em R . Então, tomando $e_H = \frac{1}{|H|} \hat{H}$, temos a soma direta de anéis*

$$RG \cong RGe_H \oplus RG(1 - e_H),$$

onde $RGe_H \cong R(G/H)$ e $RG(1 - e_H) \cong \Delta(G, H)$.

Corolário 1.24. *Se G é finito e $|G|$ é invertível em R , então podemos decompor RG em uma soma direta de anéis*

$$RG \cong R \oplus \Delta(G).$$

Lema 1.25. *Se I é um ideal do anel de grupo RG , então o anel quociente RG/I é comutativo se, e somente se, $\Delta(G, G') \subset I$, onde G' denota o subgrupo derivado de G .*

Proposição 1.26. *Seja RG um anel de grupo semi-simples tal que $|G'|$ é invertível em R . Então,*

$$RG \cong RGe_{G'} \oplus \Delta(G, G'),$$

onde $RGe_{G'} \cong R(G/G')$ é a soma de todas as componentes simples comutativas de RG e $\Delta(G, G')$ é a soma de todas as outras.

Agora vamos determinar condições necessárias e suficientes sobre R e G para que RG seja um anel semi-simples. Para tal, precisaremos de alguns resultados sobre anuladores.

Definição 1.27. *Seja X um subconjunto do anel de grupo RG . O **anulador à esquerda** de X é o conjunto*

$$Ann_l(X) = \{\lambda \in RG; \lambda x = 0, \forall x \in X\}.$$

Analogamente, O **anulador à direita** de X é o conjunto

$$Ann_r(X) = \{\lambda \in RG; x\lambda = 0, \forall x \in X\}.$$

Lema 1.28. *Se H é um subgrupo de G , então $Ann_r(\Delta(G, H)) \neq 0$ se, e somente se, H é finito. Neste caso, temos*

$$Ann_r(\Delta(G, H)) = \hat{H} \cdot RG.$$

Além disso, se $H \triangleleft G$, então o elemento $\widehat{H}$ é central em RG e

$$\text{Ann}_r(\Delta(G, H)) = \text{Ann}_l(\Delta(G, H)) = RG \cdot \widehat{H}.$$

Corolário 1.29. *Seja G um grupo finito. Então,*

- (1) $\text{Ann}_r(\Delta(G)) = \text{Ann}_l(\Delta(G)) = R \cdot \widehat{G}$;
- (2) $\text{Ann}_r(\Delta(G)) \cap \Delta(G) = \left\{ a\widehat{G}; a \in R, a|G| = 0 \right\}$.

Lema 1.30. *Seja I um ideal de R e suponhamos que exista um ideal J de R tal que $R = I \oplus J$. Então, $J \subset \text{Ann}_r(I)$.*

Lema 1.31. *Se o ideal aumento $\Delta(G)$ é um somando direto de RG , como um RG -módulo, então G é finito e $|G|$ é invertível em R .*

Demonstração. Suponhamos que $\Delta(G)$ é um somando direto de RG , como RG -módulo. Então, pelo lema anterior, $\text{Ann}_r(\Delta(G)) \neq 0$. Daí, pelo Lema 1.28 e pelo Corolário 1.29, G é finito e

$$\text{Ann}_r(\Delta(G)) = R \cdot \widehat{G}.$$

Escrevendo $RG = \Delta(G) \oplus J$, obtemos $1 = e_1 + e_2$, onde $e_1 \in \Delta(G)$ e $e_2 \in J$. Daí, $1 = \epsilon(e_1) + \epsilon(e_2) = \epsilon(e_2)$. Como $J \subset \text{Ann}_r(\Delta(G))$, pelo lema anterior, segue que $e_2 = \alpha\widehat{G}$, para algum $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Logo, $1 = \alpha\epsilon(\widehat{G}) = \alpha|G|$. Portanto, $|G|^{-1} = \alpha$ e $|G|$ é invertível em R . $\square$

O resultado que segue determina condições necessárias e suficientes sobre R e G para que RG seja um anel semi-simples.

Teorema 1.32. (Teorema de Maschke) *O anel de grupo RG é semi-simples se, e somente se, as seguintes condições são verdadeiras:*

- (i) R é um anel semi-simples.
- (ii) G é um grupo finito.
- (iii) $|G|$ é invertível em R .

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que RG é um anel semi-simples. Pelo Corolário 1.17, temos que $R \cong RG/\Delta(G)$. Como RG é semi-simples, segue que seu quociente também o é. Daí, a condição (i) é verdadeira. Ainda, como a semi-simplicidade de RG implica que $\Delta(G)$ é um somando direto de RG , o Lema 1.31 mostra que as condições (ii) e (iii) também são verdadeiras.

Reciprocamente, suponhamos que as condições (i), (ii) e (iii) são verdadeiras.

Seja M um RG -submódulo de RG . Como R é semi-simples, temos que RG é semi-simples como R -módulo. Daí, existe um R -submódulo N de RG tal que

$$RG = M \oplus N.$$

Seja $\pi : RG \rightarrow M$ a projeção canônica associada a esta soma direta. Definimos $\pi^* : RG \rightarrow M$ como a média

$$\pi^*(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \pi(gx), \text{ para todo } x \in RG.$$

Se provarmos que π^* é um RG -homomorfismo tal que $(\pi^*)^2 = \pi^*$ e $Im(\pi^*) = M$, então teremos que $Ker(\pi^*)$ é um RG -submódulo de RG tal que $RG = M \oplus Ker(\pi^*)$ e o teorema estará provado.

Como π^* é um R -homomorfismo, para mostrar que ele também é um RG -homomorfismo é suficiente mostrar que

$$\pi^*(ax) = a\pi^*(x), \text{ para todo } x \in G \text{ e para todo } a \in G.$$

Temos que

$$\pi^*(ax) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \pi(gax) = \frac{a}{|G|} \sum_{g \in G} (ga)^{-1} \pi((ga)x).$$

Quando g percorre todos os elementos de G , o produto ga também percorre todos os elementos de G . Daí,

$$\pi^*(ax) = a \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t^{-1} \pi(tx) = a\pi^*(x).$$

Como π é uma projeção sobre M , sabemos que $\pi(m) = m$, para todo $m \in M$. Além disso, como M é um RG -módulo, temos que $gm \in M$, para todo $g \in G$. Logo,

$$\pi^*(m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \pi(gm) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} gm = m.$$

Portanto, $M \subset Im(\pi^*)$. Por outro lado, dado um elemento $x \in RG$, temos que $\pi(gx) \in M$, para todo $g \in G$. Daí, $\pi^*(x) \in M$ e $Im(\pi^*) \subset M$. Consequentemente,

$$\pi^*(\pi^*(x)) = \pi^*(x), \text{ para todo } x \in RG, \text{ ou seja, } (\pi^*)^2 = \pi^*.$$

□

Um caso particularmente importante é aquele em que $R = K$ é um corpo. Neste caso, K é semi-simples e $|G|$ é invertível em K se, e somente se, $|G| \neq 0$ em K , isto é, se, e somente se, a característica de K não divide a ordem de G .

Corolário 1.33. *Sejam G um grupo finito e K um corpo. Então, KG é semi-simples se, e somente se, a característica de K não divide a ordem de G .*

Ainda neste caso, traduzimos fielmente o *Teorema de Wedderburn* e obtemos várias informações a respeito da estrutura do anel de grupo KG :

Teorema 1.34. *Sejam G um grupo finito e K um corpo tal que a característica de K não divide a ordem de G . Então:*

- (i) *KG é uma soma direta de ideais bilaterais minimais $\{B_i\}_{1 \leq i \leq r}$, as componentes simples de KG .*
- (ii) *Todo ideal bilateral de KG é uma soma direta de alguns membros da família $\{B_i\}_{1 \leq i \leq r}$.*
- (iii) *Cada componente simples B_i é isomorfa a um anel de matrizes $M_{n_i}(D_i)$, onde D_i é um anel de divisão contendo uma cópia de K em seu centro, e o isomorfismo*

$$KG \cong \oplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i).$$

é um isomorfismo de K -álgebras.

- (iv) *Em cada matriz $M_{n_i}(D_i)$, o conjunto*

$$I_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ x_{n_i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} ; x_1, x_2, \dots, x_{n_i} \in D_i \right\}$$

é um ideal minimal à esquerda de KG .

Corolário 1.35. *Sejam G um grupo finito e K um corpo algebricamente fechado tal que a característica de K não divide a ordem de G . Então,*

$$KG \cong \oplus_{i=1}^r M_{n_i}(K),$$

$$\text{e } |G| = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_r^2.$$

Utilizando a estrutura intrínseca do grupo G , é possível determinarmos o número de componentes simples de KG . É disso que trata o resultado a seguir.

Teorema 1.36. *Sejam G um grupo finito e K um corpo algebricamente fechado tal que a característica de K não divide a ordem de G . Então, o número de componentes simples de KG é igual ao número de classes de conjugação de G .*

Finalizaremos esta seção, apresentando uma caracterização dos anéis de grupos KG , no caso em que G é um grupo abeliano finito e K é um corpo tal que a característica de K não divide a ordem de G . Tal caracterização foi dada por *S. Perlis* e *G. Walker*.

Teorema 1.37. (Perlis-Walker) *Seja G um grupo abeliano finito de ordem n e seja K um corpo tal que a característica de K não divide a ordem de G . Então,*

$$KG \cong \oplus_{d|n} a_d K(\zeta_d),$$

onde ζ_d denota uma raiz primitiva da unidade de ordem d e $a_d = \frac{n_d}{[K(\zeta_d) : K]}$. Nesta fórmula, n_d denota o número de elementos de ordem d em G .

Corolário 1.38. *Seja G um grupo abeliano finito de ordem n e seja K um corpo tal que a característica de K não divide a ordem de G . Se K contém uma raiz primitiva da unidade de ordem n , então*

$$KG \cong \underbrace{K \oplus \cdots \oplus K}_n.$$

Corolário 1.39. *Seja G um grupo abeliano finito de ordem n . Então,*

$$\mathbb{Q}G \cong \oplus_{d|n} a_d \mathbb{Q}(\zeta_d),$$

onde ζ_d denota uma raiz primitiva da unidade de ordem d e a_d é o número de subgrupos cíclicos de ordem d de G .

Corolário 1.40. *Seja $G = \langle a \rangle$ um grupo cíclico finito de ordem n . Então,*

$$\mathbb{Q}\langle a \rangle \cong \oplus_{d|n} \mathbb{Q}(\zeta_d),$$

onde ζ_d denota uma raiz primitiva da unidade de ordem d .

Unidades em Anéis de Grupo Inteiros

Neste capítulo, apresentaremos as unidades de um anel de grupo inteiro, juntamente com algumas de suas principais propriedades, definiremos unidades triviais, unidades normalizadas, unidades bicíclicas e unidades cíclicas de *Bass*. Provaremos, ainda, dois importantes resultados: o *Teorema de Berman-Higman*, que identifica, sob certas condições, as unidades de ordem finita e as unidades triviais do anel de grupo $\mathbb{Z}G$, onde G é um grupo finito, e o *Teorema de Higman*, que caracteriza os grupos finitos G tais que o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ possui somente unidades triviais.

2.1 Unidades de ordem finita

Nesta seção, estudaremos as unidades de ordem finita de um anel de grupo inteiro e fixaremos algumas notações que serão utilizadas no decorrer do texto. Definiremos unidades triviais e unidades normalizadas e provaremos o *Teorema de Berman-Higman*, caso finito, que relaciona as unidades ordem finita e as unidades triviais.

Seja RG um anel de grupo. Denotaremos por $\mathcal{U}(R)$ o grupo de unidades do anel R e por $\mathcal{U}(RG)$ o grupo de unidades do anel de grupo RG , isto é,

$$\mathcal{U}(R) = \{\alpha \in R \mid \exists \beta \in R \text{ tal que } \alpha\beta = \beta\alpha = 1\}$$

e

$$\mathcal{U}(RG) = \{\gamma \in RG \mid \exists \mu \in RG \text{ tal que } \gamma\mu = \mu\gamma = 1\}.$$

Definição 2.1. Se $\gamma \in \mathcal{U}(RG)$ é tal que $\gamma = \alpha g$, com $\alpha \in \mathcal{U}(R)$ e $g \in G$, dizemos que γ é uma **Unidade Trivial** de RG .

Em particular, as unidades triviais de $\mathbb{Z}G$ são elementos da forma $\pm g$, com $g \in G$.

Definição 2.2. Se $\gamma \in \mathcal{U}(RG)$ tem aumento um, isto é, $\varepsilon(\gamma) = 1$, dizemos que γ é uma **Unidade Normalizada** de RG . Ainda, o conjunto das unidades normalizadas de RG será denotado por $\mathcal{U}_1(RG)$, isto é

$$\mathcal{U}_1(RG) = \{\gamma \in \mathcal{U}(RG) \mid \varepsilon(\gamma) = 1\}.$$

Observação 2.3. Seja $\gamma \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Então, $\varepsilon(\gamma) = \pm 1$. Ainda, $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G) \triangleleft \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Portanto, podemos escrever

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G).$$

Definição 2.4. Um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ -álgebras, $\psi : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$, é dito um **Isomorfismo Normalizado** se, para todo $\lambda \in \mathbb{Z}G$, tem-se $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(\psi(\lambda))$ ou, equivalentemente, se, para todo $g \in G$, tem-se $\varepsilon(\psi(g)) = 1$.

Observação 2.5. Se existe um isomorfismo $\phi : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$, então existe também um isomorfismo normalizado $\psi : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$. De fato, dado $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \in \mathbb{Z}G$, definimos ψ do seguinte modo

$$\psi(\lambda) = \sum_{i=1}^n \varepsilon(\phi(g_i))^{-1} \lambda_i \phi(g_i).$$

As unidades triviais e as unidades de ordem finita estão, em alguns casos excepcionais, intrinsecamente relacionadas, como mostra o resultado que segue. O mesmo também é verdadeiro para grupos infinitos. Para tal, veja [43].

Proposição 2.6. (Berman-Higman) Seja G um grupo de ordem finita n e $\gamma = \sum_{g \in G} \gamma_g g$ uma unidade de ordem finita m de $\mathbb{Z}G$. Se $\gamma_1 \neq 0$, então $\gamma = \pm 1$.

Demonstração. Sejam $T : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ a representação regular de G sobre o corpo dos números complexos e $T^* : \mathbb{C}G \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ a extensão de T a $\mathbb{C}G$ dada por

$$T^*(\mu) = T^*\left(\sum_{g \in G} \mu_g g\right) = \sum_{g \in G} \mu_g T(g).$$

É claro que T^* é um homomorfismo de álgebras e, em particular,

$$T^*(\gamma) = \sum_{g \in G} \gamma_g T(g).$$

Como $T(g)$ é uma matriz de permutação, temos que

$$\text{tr}(T(g)) = \begin{cases} 0, & \text{se } g \neq 1, \\ |G|, & \text{se } g = 1. \end{cases}$$

Assim, se $g = 1$, $\text{tr}(T^*(\gamma)) = n\gamma_1$. Como $\gamma^m = 1$, temos que $T^*(\gamma)^m = 1$ e, daí, $T^*(\gamma)$ é raiz do polinômio $x^m - 1$. Logo, o polinômio minimal será então um divisor de $x^m - 1$ e, conseqüentemente, se decompõe em $\mathbb{C}[X]$ como um produto de fatores distintos. Portanto, $T^*(\gamma)$ é diagonalizável e sua matriz é semelhante a uma matriz da forma

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_n \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$I = A^m = \begin{pmatrix} \epsilon_1^m & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_n^m \end{pmatrix},$$

onde os ϵ_i , $1 \leq i \leq n$, são raízes m -ésimas da unidade. Daí,

$$n \gamma_1 = \text{tr}(T^*(\gamma)) = \text{tr}(A) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\gamma_1| = \frac{\left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i \right|}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n |\epsilon_i|}{n} \leq 1.$$

Como $\gamma \neq 1$, obtemos a igualdade e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \cdots = \epsilon_n$.

Logo, $\epsilon_1 = \gamma_1 = \pm 1$, o polinômio característico de $T^*(\gamma)$ é $(x - \epsilon_1)^n$ e o polinômio minimal é um divisor comum entre $x^m - 1$ e $(x - \epsilon_1)^n$, ou seja, o polinômio minimal é $m(x) = x - \epsilon_1$. Portanto,

$$0 = m(T^*(\gamma)) = T^*(\gamma) - \epsilon_1 I \Rightarrow T^*(\gamma) = \epsilon_1 I = \pm I.$$

Como T^* é injetora, segue que $\gamma = \pm 1$. □

Corolário 2.7. *Seja G um grupo finito e seja $\gamma \in \mathbb{Z}G$, $\gamma^n = 1$. Se $\gamma \neq \pm 1$, então $\gamma_1 = 0$.*

Corolário 2.8. *Seja G um grupo finito e seja $\gamma = \sum_{g \in G} \gamma_g g$ uma unidade central de ordem finita m em $\mathbb{Z}G$. Então, $\gamma = \pm g$, para algum $g \in \mathcal{Z}(G)$, onde $\mathcal{Z}(G)$ denota o centro de G .*

Demonstração. Suponhamos que $\gamma_{g_0} \neq 0$, para algum $g_0 \in G$. Então, γg_0^{-1} também é uma unidade de ordem finita em $\mathbb{Z}G$. Além disso, temos que o coeficiente de 1 na expressão de γg_0^{-1} é $\gamma_{g_0} \neq 0$. Pela proposição anterior, obtemos $\gamma g_0^{-1} = \pm 1$. Portanto, $\gamma = \pm g_0$. □

Corolário 2.9. *Seja G um grupo abeliano finito e seja $\gamma = \sum_{g \in G} \gamma_g g$ uma unidade de ordem finita m em $\mathbb{Z}G$. Então, $\gamma = \pm g$, para algum $g \in G$.*

Utilizando este último resultado, Higman apresentou uma prova simples para o *Problema do Isomorfismo* no caso em que G é um grupo abeliano finito e H é outro grupo:

Teorema 2.10. *Sejam G um grupo abeliano finito e H outro grupo. Se $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$, então $G \cong H$.*

Demonstração. Seja $\psi : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$ um isomorfismo que leva unidades normalizadas em unidades normalizadas. Como G é abeliano, temos que o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ é comutativo e, daí, H também é abeliano. Ainda, como o posto de um módulo livre sobre $\mathbb{Z}$ é invariante, segue imediatamente que H também é finito e $|H| = |G|$.

Para cada elemento $g \in G$, temos que $\psi(g)$ é uma unidade normalizada de ordem finita em H . Pelo corolário anterior, segue que $\psi(g) \in \pm H$ e, como $\psi(g)$ é uma unidade normalizada, obtemos $\psi(g) \in H$. Logo, $\psi(G) \subset H$ e, como $|G| = |H|$, $\psi(G) = H$. Em outras palavras, a restrição de ψ a G estabelece um isomorfismo entre G e H . $\square$

A proposição seguinte, juntamente com o *Corolário 2.7*, nos fornece um resultado análogo ao *Teorema de Lagrange da Teoria de Grupos*. A demonstração da mesma pode ser encontrada em [42].

Proposição 2.11. *Sejam G um grupo finito e K um corpo de característica zero. Se $e = \sum_{g \in G} e_g g$ é um idempotente não-trivial do anel de grupo KG , então*

$$(i) \quad e_1 \in \mathbb{Q};$$

$$(ii) \quad |G| e_1 \in \mathbb{Z};$$

$$(iii) \quad 0 < e_1 < 1.$$

Teorema 2.12. *Seja G um grupo finito e seja $\gamma = \sum_{g \in G} \gamma_g g$ uma unidade de ordem finita n em $\mathbb{Z}G$. Se γ é uma unidade normalizada, isto é, $\varepsilon(\gamma) = 1$, então n é um divisor da ordem do grupo G .*

Demonstração. Tomando

$$e = \frac{1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{n-1}}{n},$$

temos que $e^2 = e$ e

$$e_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_1^i.$$

Como γ tem ordem n , $\gamma^i \neq \pm 1$, para todo i , $1 \leq i < n$. Pelo *Corolário 2.7*, segue que $\gamma_1^i = 0$, para todo i , $1 \leq i < n$. Daí, $e_1 = \frac{1}{n}$. Por outro lado, pela proposição anterior, temos que $e_1 = \frac{k}{|G|}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, $|G| = kn$ e o resultado segue. $\square$

Para finalizar esta seção, apresentaremos alguns resultados referentes a um subgrupo finito de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

Lema 2.13. *Se H é um subgrupo finito de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$, então H é um conjunto linearmente independente.*

Demonstração. Suponhamos que $H = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ e $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_n\gamma_n = 0$, com $c_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$. Então,

$$c_1 + c_2(\gamma_2\gamma_1^{-1}) + \dots + c_n(\gamma_n\gamma_1^{-1}) = 0.$$

Como H é finito, $\gamma_i\gamma_1^{-1} = \mu_i \in H$, $1 \leq i \leq n$, também tem ordem finita e

$$c_1 + c_2\mu_2 + \dots + c_n\mu_n = 0.$$

Para cada i , $1 \leq i \leq n$, escrevemos

$$\mu_i = \sum_{g \in G} \mu_{ig}g,$$

e, daí, $\mu_i \neq 0$, para todo i , $1 \leq i \leq n$. Pelo Corolário 2.7, segue que $\mu_{i1} = 0$, para todo i , $1 \leq i \leq n$. Logo, $c_1 = 0$. Analogamente, provamos que $c_2 = \dots = c_n = 0$. $\square$

Corolário 2.14. *Qualquer subgrupo finito H de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ tem ordem no máximo igual a ordem do grupo G .*

Lema 2.15. *A ordem de qualquer subgrupo H de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ divide a ordem do grupo G .*

Demonstração. Seja $|H| = n$ e consideremos o idempotente

$$e_H = \frac{1}{|H|} \hat{H} = \frac{1}{n} \sum_{h \in H} h.$$

Tomando o traço da representação regular T de $\mathbb{Q}G$, obtemos $\text{tr}(T(e_H)) = s = \frac{1}{n} |G|$, onde s denota o posto de $T(e_H)$. Logo, n é um divisor da ordem de G . $\square$

Lema 2.16. *Seja H um subgrupo finito de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ tal que $|H| = |G|$. Então, $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}H$.*

Demonstração. É claro que $\mathbb{Z}H \subset \mathbb{Z}G$. Pelo Lema 2.13, H é linearmente independente. Daí, $\mathbb{Q}G = \mathbb{Q}H$. Logo, $n\mathbb{Z}G \subset \mathbb{Z}H$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, dado $g \in G$, temos que

$$ng = \sum z_i h_i, \text{ com } z_i \in \mathbb{Z} \text{ e } h_i \in H.$$

Afirmamos que cada z_i é múltiplo de n .

De fato, como

$$ngh_i^{-1} = z_i + \sum_{j \neq i} z_j(h_j h_i^{-1}) \quad \text{e} \quad h_j h_i^{-1} \neq \pm 1,$$

temos, pelo Corolário 2.7, que $(h_j h_i^{-1})_1 = 0$. Daí,

$$(ngh_i^{-1})_1 = z_i.$$

Logo, z_i é um múltiplo de n . $\square$

2.2 Unidades bicíclicas e unidades cíclicas de Bass

Nesta seção, definiremos dois tipos especiais de unidades: unidades bicíclicas e unidades cíclicas de *Bass*. Tais unidades possuem propriedades que são de grande importância no estudo de muitos problemas da *Teoria dos Anéis de Grupo*. Apresentaremos aqui alguns resultados relacionados às mesmas que serão necessários para a prova do *Teorema de Higman* na próxima seção.

Seja $\mathbb{Z}G$ um anel de grupo inteiro e seja $g \in G$ um elemento de ordem finita n . Denotando $\widehat{g} = 1 + g + g^2 + \cdots + g^{n-1} \in \mathbb{Z}G$, temos que $(1 - g)\widehat{g} = 0$. Daí, dado $h \in G$, podemos construir a unidade

$$\mu_{g,h} = 1 + (1 - g)h\widehat{g},$$

cujos inverso é $1 - (1 - g)h\widehat{g}$. Em particular, se g e h comutam, então $\mu_{g,h} = 1$.

Definição 2.17. *Seja G um grupo e sejam $g, h \in G$, com $o(g) = n < \infty$. A unidade $\mu_{g,h}$ construída acima é chamada **Unidade Bicíclica** de $\mathbb{Z}G$.*

Denotaremos por $\mathcal{B}_2$ o subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ gerado por todas as unidades bicíclicas de $\mathbb{Z}G$.

Observação 2.18. *Todas unidades bicíclicas de $\mathbb{Z}G$ são unidades normalizadas:*

$$\varepsilon(\mu_{g,h}) = \varepsilon(1 + (1 - g)h\widehat{g}) = \varepsilon(1) = 1.$$

O resultado a seguir caracteriza as unidades bicíclicas triviais.

Proposição 2.19. *Seja G um grupo e sejam $g, h \in G$, com $o(g) = n < \infty$. Então, a unidade bicíclica $\mu_{g,h}$ é trivial se, e somente se, h normaliza $\langle g \rangle$. Neste caso, $\mu_{g,h} = 1$.*

Demonstração. Suponhamos que h normaliza $\langle g \rangle$. Então, $h^{-1}gh = g^j$, para algum inteiro positivo j . Daí, $gh = hg^j$ e, como $g^j\widehat{g} = \widehat{g}$, temos que $gh\widehat{g} = h\widehat{g}$. Logo, $\mu_{g,h} = 1$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mu_{g,h}$ é trivial. Como $\varepsilon(\mu_{g,h}) = 1$, existe $x \in G$ tal que $\mu_{g,h} = x$, ou seja, $1 + (1 - g)h\widehat{g} = x$. Daí,

$$1 + h(1 + g + g^2 + \cdots + g^{n-1}) = x + gh(1 + g + g^2 + \cdots + g^{n-1}).$$

Se $x = 1$, então $h = ghg^i$, para algum inteiro positivo i e, daí, $h^{-1}gh = g^{-i}$. Por outro lado, se $x \neq 1$, então $h \notin \langle g \rangle$. Como 1 aparece no lado esquerdo da equação, ele também deve aparecer do lado direito da mesma e, assim, existe um inteiro positivo i tal que $1 = ghg^i$. Daí, $h = g^{-(i+1)} \in \langle g \rangle$, um absurdo. $\square$

Corolário 2.20. *Seja G um grupo finito. Então, o grupo $\mathcal{B}_2$ é trivial se, e somente se, todo subgrupo de G é normal.*

O próximo resultado garante que toda unidade bicíclica não-trivial de $\mathbb{Z}G$ possui ordem infinita.

Proposição 2.21. *Toda unidade bicíclica $\mu_{g,h}$ de $\mathbb{Z}G$, $\mu_{g,h} \neq 1$, tem ordem infinita.*

Demonstração. Dada $\mu_{g,h} = 1 + (1 - g)h\widehat{g} \in \mathbb{Z}G$, temos que

$$\mu_{g,h}^s = (1 + (1 - g)h\widehat{g})^s = 1 + s(1 - g)h\widehat{g}.$$

Daí, $\mu_{g,h}^s = 1$ se, e somente se, $(1 - g)h\widehat{g} = 0$, ou seja, se, e somente se, $\mu_{g,h} = 1$. $\square$

Utilizaremos, agora, a função ϕ de *Euler* para definir outro tipo de unidade de $\mathbb{Z}G$: dado um inteiro positivo n , escrevemos n como um produto de fatores primos, a saber, $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$. Daí,

$$\phi(n) = p_1^{n_1-1}(p_1 - 1)p_2^{n_2-1}(p_2 - 1) \cdots p_t^{n_t-1}(p_t - 1).$$

Lembramos, ainda, que uma propriedade importante dessa função é dada pelo chamado *Teorema de Euler*: se i e n são inteiros relativamente primos, então

$$i^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Definição 2.22. *Seja G um grupo e seja $g \in G$ um elemento de ordem finita n . Uma **Unidade Cíclica de Bass** é um elemento de $\mathbb{Z}G$ da forma:*

$$\mu_i = (1 + g + \cdots + g^{i-1})^{\phi(n)} + \frac{1 - i^{\phi(n)}}{n} \widehat{g},$$

onde i é um inteiro tal que $1 < i < n - 1$ e $(i, n) = 1$.

O subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ gerado por todas as unidades cíclicas de Bass é denotado por $\mathcal{B}_1$.

Observação 2.23. *É possível verificar que μ_i é de fato uma unidade de $\mathbb{Z}G$ e que sua inversa é*

$$\mu_i^{-1} = (1 + g^i + \cdots + g^{i(k-1)})^{\phi(n)} + \frac{1 - k^{\phi(n)}}{n} \widehat{g},$$

onde k é qualquer inteiro tal que $ik \equiv 1 \pmod{n}$. Ainda, $\varepsilon(\mu_i) = 1$, ou seja, μ_i é uma unidade normalizada.

O último resultado dessa seção afirma que as unidades cíclicas de Bass de $\mathbb{Z}G$ não são triviais.

Proposição 2.24. *Sejam G um grupo, $g \in G$ um elemento de ordem finita n e s um inteiro tal que $1 < s < n - 1$ e $(s, n) = 1$. Então, a unidade cíclica de Bass*

$$\mu_s = (1 + g + \cdots + g^{s-1})^{\phi(n)} + \frac{1 - s^{\phi(n)}}{n} \widehat{g}$$

é de ordem infinita.

Demonstração. Sabemos que

$$\mathbb{Q}\langle g \rangle \cong \mathbb{Q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}(\zeta^d) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}(\zeta),$$

onde ζ é numa raiz primitiva n -ésima da unidade e os expoentes d são divisores de n . Além disso, nesse isomorfismo, temos que

$$g \longmapsto (1, \dots, \zeta^d, \dots, \zeta).$$

Vamos mostrar que a projeção $\mu_s(\zeta)$ de μ_s na última componente, ou seja,

$$\mu_s(\zeta) = (1 + \zeta + \cdots + \zeta^{s-1})^{\phi(n)},$$

é de ordem infinita.

Suponhamos, por absurdo, que tal projeção é de ordem finita. Então, $1 + \zeta + \cdots + \zeta^{s-1}$ deverá ser de ordem finita. Como o conjunto $\{\pm \zeta^t; 0 \leq t \leq n-1\}$ contém todas as raízes da unidade de $\mathbb{Q}(\zeta)$, segue que

$$1 + \zeta + \cdots + \zeta^{s-1} = \pm \zeta^t,$$

para algum inteiro positivo t . Multiplicando ambos os lados dessa equação por $1 - \zeta$, obtemos $1 - \zeta^s = \pm \zeta^t(1 - \zeta)$. Daí, $|1 - \zeta^s| = |1 - \zeta|$. Escrevendo $\zeta = \cos \theta + i \sin \theta$, com $i = \sqrt{-1}$, segue que $\zeta^s = \cos(s\theta) + i \sin(s\theta)$. Ainda,

$$|1 - \zeta|^2 = |1 - (\cos \theta + i \sin \theta)|^2 = 2(1 - \cos \theta) \quad \text{e}$$

$$|1 - \zeta^s|^2 = |1 - (\cos(s\theta) + i \sin(s\theta))|^2 = 2(1 - \cos(s\theta)).$$

Logo, $\cos \theta = \cos(s\theta)$ e $s\theta = \theta$ ou $s\theta = 2\pi - \theta$. Portanto, $\zeta^s = \zeta$ ou $\zeta^s = \zeta^{s-1}$, o que é um absurdo. $\square$

2.3 Unidades triviais e o Teorema de Higman

Com as unidades especiais introduzidas na seção anterior, temos condições de caracterizar os grupos finitos G tais que o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ tem apenas unidades triviais. Nesta direção, iniciamos com um lema muito simples mas de grande importância para o nosso objetivo.

Lema 2.25. *Seja G um grupo finito tal que todas as unidades de $\mathbb{Z}G$ são triviais. Então, todo subgrupo de G é normal.*

Demonstração. Para demonstrar tal afirmação, basta mostrarmos que todo subgrupo cíclico de G é normal. Suponhamos, por absurdo, que existe um subgrupo cíclico $\langle g \rangle$ de G que não é normal. Então, existe $h \in G$ tal que $h^{-1}gh \notin \langle g \rangle$. Pela *Proposição 2.19*, a unidade bicíclica $\mu_{g,h} = 1 + (1 - g)h\hat{g}$ não é trivial. O que é um absurdo, visto que todas as unidades de $\mathbb{Z}G$ são triviais. $\square$

É claro que, se G é um grupo abeliano, então todos os subgrupos de G são normais. Por outro lado, se G é um grupo não-abeliano tal que todos seus subgrupos são normais, então lembramos que G é chamado *Grupo Hamiltoniano*. Em particular, se G é um grupo finito Hamiltoniano, então pode-se provar que G é da forma

$$G = \mathcal{Q}_8 \times E \times A,$$

onde E é um 2-grupo abeliano elementar (isto é, todo elemento $x \neq 1$ de E é de ordem 2), A é um grupo abeliano cujos elementos são todos de ordem ímpar e $\mathcal{Q}_8$ é o grupo dos quatérnios de ordem 8, ou seja, o grupo

$$\mathcal{Q}_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2 \text{ e } bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Proposição 2.26. *Seja G um grupo finito tal que todas as unidades de $\mathbb{Z}G$ são triviais. Então, ou G é um grupo abeliano, de expoente igual a 1, 2, 3, 4 ou 6, ou G é um 2-grupo Hamiltoniano.*

Demonstração. Pelo lema anterior, temos que ou G é abeliano ou G é Hamiltoniano. Suponhamos, primeiramente, que G é abeliano. Se G tem expoente diferente de 1, 2, 3, 4 ou 6, então existe um elemento em G de ordem n tal que $n = 5$ ou $n > 6$. Em ambos os casos, a *Proposição 2.24* garante que G contém uma unidade cíclica de Bass que não é trivial.

Suponhamos, agora, que G é Hamiltoniano. Se G não é um 2-grupo, então G contém um elemento $a \in A$ de ordem $p > 2$. Daí, o elemento $g = xa$, onde $x \in \mathcal{Q}_8$ tem ordem 4, é de ordem $n = 4p$. Daí, novamente, a *Proposição 2.24* garante que G contém uma unidade cíclica de Bass que não é trivial. $\square$

O *Teorema de Higman* afirma que a condição dada na proposição acima é suficiente para garantir que todas as unidades de $\mathbb{Z}G$ sejam triviais. Para a demonstração do mesmo, precisaremos dos resultados que seguem.

Lema 2.27. *Seja G um grupo finito tal que todas as unidades de $\mathbb{Z}G$ são triviais e seja C_2 um grupo cíclico de ordem 2. Então, todas unidades de $\mathbb{Z}(G \times C_2)$ também são triviais.*

Demonstração. Seja $C_2 = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$. Como, pela *Proposição 1.12*, $\mathbb{Z}(G \times C_2) \cong (\mathbb{Z}G)C_2$, dado um elemento $u \in \mathbb{Z}(G \times C_2)$, podemos escrever $u = \alpha + \beta a$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}G$. Se u é uma unidade, então existe outro elemento $u^{-1} = \gamma + \delta a$ tal que

$$1 = (\alpha + \beta a)(\gamma + \delta a) = (\alpha\gamma + \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)a.$$

Daí, $\alpha\gamma + \beta\delta = 1$ e $\alpha\delta + \beta\gamma = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) &= \alpha\gamma + \beta\delta + \alpha\delta + \beta\gamma = 1 \quad \text{e} \\ (\alpha - \beta)(\gamma - \delta) &= \alpha\gamma + \beta\delta - (\alpha\delta + \beta\gamma) = 1, \end{aligned}$$

o que mostra que $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$ são unidades em $\mathbb{Z}G$ e, portanto, triviais. Assim, existem $g_1, g_2 \in G$ tais que $\alpha + \beta = \pm g_1$ e $\alpha - \beta = \pm g_2$. Portanto, $\alpha = \frac{1}{2}(\pm g_1 \pm g_2)$. Como os coeficientes de α são inteiros, segue que $g_1 = g_2$ e $\alpha = \pm g_1$. Assim,

$$\alpha + \beta = \alpha - \beta = \pm g_1 \quad \text{ou} \quad \alpha + \beta = -(\alpha - \beta) = \pm g_1.$$

No primeiro caso, $\alpha = \pm g_1$ e $\beta = 0$ e, no segundo, $\alpha = 0$ e $\beta = \pm g_1$. Em ambos os casos, u é trivial. $\square$

Lema 2.28. *As unidades do anel de grupo $\mathbb{Z}\mathcal{Q}_8$ são triviais.*

Demonstração. Como $\mathcal{Q}_8 = \{1, a, b, ab, a^2, a^3, a^2b, ab^3\}$, todo elemento $\alpha \in \mathcal{Q}_8$ é da forma

$$\alpha = x_0 + x_1a + x_2b + x_3ab + y_0a^2 + y_1a^3 + y_2a^2b + y_3ab^3.$$

Consideremos, agora, o anel H dos quaternions, isto é:

$$H = \{m_0 + m_1i + m_2j + m_3k \mid m_0, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

Sabemos que as unidades de H são $\pm 1, \pm i, \pm j$ e $\pm k$. Definimos, então, o epimorfismo $\varphi : \mathbb{Z}\mathcal{Q}_8 \rightarrow H$ por

$$\varphi(\alpha) = (x_0 - y_0) + (x_1 - y_1)i + (x_2 - y_2)j + (x_3 - y_3)k.$$

Assim, se α é uma unidade de $\mathbb{Z}\mathcal{Q}_8$, então $\varphi(\alpha)$ é uma unidade de H . Daí, para algum índice r , $0 \leq r \leq 3$, temos que

$$x_r - y_r = \pm 1 \quad \text{e} \quad x_s - y_s = 0, \text{ se } s \neq r.$$

Por outro lado, podemos ver que a^2 é central e $\mathcal{Q}_8 / \langle a^2 \rangle \cong C_2 \times C_2$. Denotando por $\bar{g}$ a classe de um elemento $g \in \mathcal{Q}_8$ no grupo quociente e por $\psi : \mathbb{Z}\mathcal{Q}_8 \rightarrow \mathbb{Z}(\mathcal{Q}_8 / \langle a^2 \rangle)$ a extensão da projeção canônica $\mathcal{Q}_8 \mapsto \mathcal{Q}_8 / \langle a^2 \rangle$, obtemos:

$$\psi(\alpha) = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)\bar{a} + (x_2 + y_2)\bar{b} + (x_3 + y_3)\bar{ab}.$$

Do lema anterior temos que as unidades de $\mathbb{Z}(C_2 \times C_2)$ são triviais. Logo, para algum índice h , $0 \leq h \leq 3$, temos

$$x_h + y_h = \pm 1 \quad \text{e} \quad x_k + y_k = 0, \text{ se } k \neq h.$$

Como os coeficientes são inteiros, comparando os sistemas de equações obtidos acima, segue que $h = r$ e

$$x_r = \pm 1, y_r = 0 \quad \text{e} \quad x_s = y_s = 0, \text{ se } s \neq r$$

ou

$$x_r = 0, y_r = \pm 1 \quad \text{e} \quad x_s = y_s = 0, \text{ se } s \neq r.$$

Em ambos os casos, α é uma unidade trivial de $\mathbb{Z}Q_8$. $\square$

Lema 2.29. *Seja ζ uma raiz primitiva da unidade de ordem 3 ou 4. Então, as unidades do anel ciclotômico $\mathbb{Z}[\zeta]$ são $\{\pm\zeta^i\}$.*

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que ζ é uma raiz cúbica primitiva da unidade. Sabemos que $X^2 + X + 1$ é o polinômio minimal de ζ . Logo, todo elemento $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta]$ é da forma $\alpha = a + b\zeta$. Se α é uma unidade de $\mathbb{Z}[\zeta]$, consideramos a aplicação $f : \mathbb{Z}[\zeta] \rightarrow \mathbb{Z}[\zeta]$ definida por $f(x + y\zeta) = x + y\zeta^2$. Como f é um automorfismo de $\mathbb{Z}[\zeta]$, segue que $\beta = f(\alpha) = a + b\zeta^2$ é também uma unidade. Logo,

$$\alpha\beta = (a + b\zeta)(a + b\zeta^2) = a^2 + b^2 + ab(\zeta + \zeta^2) = a^2 + b^2 - ab$$

é ainda uma unidade. Como $\alpha\beta \in \mathbb{Z}$, segue que $a^2 + b^2 - ab = \pm 1$. Suponhamos que $|a| \geq |b|$. Se $b \neq 0, 1$, então $a^2 + b^2 > ab \pm 1$, o que é uma contradição. Se $b = 0$, então $\alpha = a \in \mathbb{Z}$ é uma unidade e, daí, $\alpha = \pm 1$ e, se $b = 1$, temos $a^2 + 1 = a \pm 1$ o que implica que ou $a^2 = a$ ou $a^2 - a + 2 = 0$. No primeiro caso, temos que ou $a = 0$ ou $a = 1$ e, no segundo, a equação não possui solução inteira. Se $a = 0$, temos que $\alpha = b\zeta$ e, como $|\alpha| = 1$, $\alpha = \pm\zeta$. Finalmente, se $a = 1 = b$, então $\alpha = 1 + \zeta = -\zeta^2$. O caso $|a| \leq |b|$ é similar.

Suponhamos, agora que ζ é uma raiz primitiva da unidade de ordem 4. Neste caso, podemos considerar, $\zeta = i$, onde $i = \sqrt{-1}$. Assim, os elementos de $\mathbb{Z}[i]$ são da forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ é uma unidade, então $|\alpha| = a^2 + b^2 = 1$. Como $a, b \in \mathbb{Z}$, segue que ou $a = \pm 1$ e $b = 0$ ou $a = 0$ e $b = \pm 1$. Em qualquer caso, α é trivial. $\square$

Finalmente, temos condições de provar o *Teorema de Higman*:

Teorema 2.30. (Higman) *Seja G um grupo finito. Então, todas as unidades do anel de grupo $\mathbb{Z}G$ são triviais se, e somente se, G é um grupo abeliano, de expoente igual a 1, 2, 3, 4 ou 6, ou G é um 2-grupo Hamiltoniano.*

Demonstração. Se todas as unidades de $\mathbb{Z}G$ são triviais, então G é um grupo abeliano, de expoente igual a 1, 2, 3, 4 ou 6, ou G é um 2-grupo Hamiltoniano pela *Proposição 2.26*.

Se G é um 2-grupo Hamiltoniano, então todas as unidades de $\mathbb{Z}G$ são triviais pelos *Lemas 2.27 e 2.28*.

Suponhamos, finalmente, que G é um grupo abeliano, de expoente igual a 1, 2, 3, 4 ou 6. Neste caso, a decomposição de G com produto direto de grupos cíclicos deve ser de uma das seguintes formas:

$$G \cong C_2 \times \cdots \times C_2,$$

$$G \cong C_3 \times \cdots \times C_3,$$

$$G \cong C_4 \times \cdots \times C_4,$$

$$G \cong C_2 \times \cdots C_2 \times C_3 \times \cdots \times C_3.$$

Em todos os casos, os *Lemas 2.27* e *2.29* garantem que as unidades de $\mathbb{Z}G$ são triviais.

□

O Grupo de Unidades de $\mathbb{Z}D_4$

Neste capítulo, apresentaremos a descrição completa do grupo de unidades de $\mathbb{Z}D_4$, onde D_4 denota o grupo diedral de ordem 8, dada por *E. Jespers* e *G. Leal* [21]. Fixaremos algumas notações e estabeleceremos alguns resultados que serão de grande importância para o próximo capítulo. Iniciaremos com a decomposição do anel de grupo $\mathbb{Q}D_4$ em componentes simples.

3.1 Representações de grupos e a decomposição de $\mathbb{Q}D_4$

A teoria dos módulos se transformou em uma ferramenta muito importante em Álgebra, devido especialmente aos trabalhos de *Emmy Noether*. Em particular, no artigo [31] de 1929, ela observou que este conceito poderia ser usado para relacionar duas teorias que, até então, tinham se desenvolvido separadamente: as representações lineares de grupos e o estudo da estrutura de álgebras. Inaugurou, assim, um novo estágio do desenvolvimento destas teorias.

Nesta seção, utilizaremos a teoria das representações lineares de um grupo para descrever a decomposição do anel de grupo $\mathbb{Q}D_4$. Tal decomposição é de extrema importância para o estudo do grupo de unidades de $\mathbb{Z}D_4$.

Proposição 3.1. *Sejam G um grupo e R um anel comutativo com identidade. Então, existe uma correspondência bijetora entre as representações de G e os RG -módulos de posto finito sobre R .*

Demonstração. Seja V um módulo livre de posto finito sobre R e seja $GL(V)$ o grupo dos R -automorfismos de V . A cada representação $T : G \rightarrow GL(V)$ de G sobre R podemos associar um módulo dando a V a estrutura de RG -módulo. Para tal, dados $\lambda = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in RG$ e $x \in V$, definimos o produto λx do seguinte modo:

$$\lambda x = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) x = \sum_{g \in G} \lambda_g T_g(x).$$

Reciprocamente, se M é um RG -módulo de posto finito sobre R , definimos a representação $T : G \rightarrow GL(M)$ associando a cada elemento $g \in G$ a função R -linear $T_g : M \rightarrow M$ definida por:

$$T_g(x) = gx, \text{ para todo } x \in M.$$

É fácil verificar que as correspondências assim definidas são inversas uma da outra. $\square$

A proposição que segue, de simples demonstração, estabelece relações entre propriedades de módulos e propriedades das representações correspondentes.

Proposição 3.2. *Sejam G um grupo e K um corpo. Então,*

- (i) *Duas representações T e T' de G sobre K são equivalentes se, e somente se, os KG -módulos correspondentes são isomorfos.*
- (ii) *Uma representação é irredutível se, e somente se, o KG -módulo correspondente é simples.*
- (iii) *Seja M um KG -módulo que admite uma decomposição em soma direta de submódulos*

$$M = \oplus_{i=1}^t M_i$$

e sejam T, T_i as representações associadas aos módulos M e M_i , $1 \leq i \leq t$, respectivamente. Então,

$$T = \oplus_{i=1}^t T_i.$$

(iv) *Uma representação de G sobre K é completamente redutível se, e somente se, o KG -módulo correspondente é semi-simples.*

Segue deste último resultado que todas as representações de um grupo finito G sobre um corpo K serão completamente redutíveis se, e somente se, todos os KG -módulos forem semi-simples, o que acontece se, e somente se, KG é um anel semi-simples. Do *Teorema de Maschke*, este último acontece se, e somente se, a característica de K não divide a ordem de G .

Outras consequências interessantes podem ser obtidas. No caso semi-simples, sabemos que todo módulo é soma direta de submódulos simples; em termos de representações, isto significa que toda representação é soma direta de representações irredutíveis. Assim, para

conhecer todas as representações de G sobre K é suficiente conhecer todas as representações irredutíveis. Como todas as representações irredutíveis estão em correspondência bijetora com os módulos simples e estes estão determinados, a menos de isomorfismos, pelos ideais minimais à esquerda de KG , segue que determinar representações irredutíveis não-equivalentes se traduz em determinar os ideais minimais à esquerda não isomorfos de KG . Em particular, lembramos que o número de classes de isomorfismo é igual ao número de componentes simples de KG .

Dada uma componente simples $M_{n_i}(D_i)$, onde D_i denota um anel de divisão contendo uma cópia de K , qualquer ideal minimal à esquerda contido nela será um representante da classe de módulos simples. Conforme o *Teorema 1.34*, tal ideal é dado por

$$I_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ x_{n_i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} ; x_1, x_2, \dots, x_{n_i} \in D_i \right\}$$

Se T_i é a representação de G associada, temos que o grau de T_i é igual a dimensão de I_i como espaço vetorial sobre K , isto é:

$$\text{grau}(T_i) = n_i \dim_K(D_i). \quad (*)$$

Agora, temos condições de apresentar a decomposição do anel de grupo $\mathbb{Q}D_4$, onde

$$D_4 = \langle b, v \mid b^2 = 1, v^4 = 1 \text{ e } bvbv = 1 \rangle.$$

Consideremos a representação T de D_4 sobre $\mathbb{Q}$ dada por:

$$T_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que esta representação é irredutível. Ainda, podemos determinar quatro representações não-equivalentes de grau 1 de D_4 sobre $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} R_b &= 1 & \text{e} & R_v = 1, \\ R'_b &= -1 & \text{e} & R'_v = 1, \\ S_b &= 1 & \text{e} & S_v = -1, \\ S'_b &= -1 & \text{e} & S'_v = -1. \end{aligned}$$

A representação T corresponderá a um somando direto da forma $M_n(D)$ e, de $(*)$,

$$\text{grau}(T) = n \dim_{\mathbb{Q}}(D).$$

Logo, $n = 1$ e $\dim_{\mathbb{Q}}(D) = 2$ ou $n = 2$ e $\dim_{\mathbb{Q}}(D) = 1$. Como $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}D_4) = 8$ e haverá quatro somandos iguais a $\mathbb{Q}$ correspondentes às representações de grau 1, se $n = 1$ e $\dim_{\mathbb{Q}}(D) = 2$, então a decomposição do anel de grupo é:

$$\mathbb{Q}D_4 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus D \oplus D',$$

onde D' é também um anel com divisão tal que $\dim_{\mathbb{Q}}(D') = 2$. Daí, como toda extensão de grau 2 sobre $\mathbb{Q}$ é comutativa, o anel de grupo $\mathbb{Q}D_4$ também o é, o que é um absurdo. Portanto, $n = 2$ e $\dim_{\mathbb{Q}}(D) = 1$, ou seja,

$$\mathbb{Q}D_4 \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus M_2(\mathbb{Q}).$$

3.2 O grupo de unidades de $\mathbb{Z}D_4$

E. Jespers e *G. Leal* [21] nos fornecem uma descrição completa do grupo de unidades do anel de grupo $\mathbb{Z}D_4$. Nesta seção, iremos apresentar tal descrição bem como os conceitos e resultados utilizados para a realização da mesma. Para as respectivas provas, veja [21].

Seja G um 2-grupo finito extra-especial, com $G' = \mathcal{Z}(G) = \{1, s\}$, onde, novamente, G' denota o subgrupo derivado de G e $\mathcal{Z}(G)$ denota o centro de G .

Definição 3.3. U_2 é o subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ definido por:

$$U_2 = \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) \cap \left(\mathbb{Q}G \left(\frac{1-s}{2} \right) + \left(\frac{1+s}{2} \right) \right).$$

O resultado que segue nos fornece propriedades importantes do subgrupo U_2 de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$.

Proposição 3.4. Com as notações acima, temos que:

- (i) $U_2 = \{u = 1 + \alpha(1-s) \mid u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G), \alpha \in \mathbb{Z}G\}$;
- (ii) $V = \{u = 1 + \alpha(1-s) \mid u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G), \alpha \in \mathbb{Z}G \text{ e } \varepsilon(\alpha) \text{ é par}\}$ é um subgrupo livre de torsão de U_2 e $V \cong U_2/G'$.

Na proposição seguinte, obtemos uma descrição do grupo de unidades do anel de grupo $\mathbb{Z}G$, no caso em que G é um 2-grupo finito extra-especial.

Proposição 3.5. Seja G um 2-grupo finito extra-especial, com $G' = \mathcal{Z}(G) = \{1, s\}$. Então, com as notações anteriores,

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm GV.$$

Como D_4 é um 2-grupo extra-especial de ordem 8, com $D_4' = \mathcal{Z}(D_4) = \{1, s\}$, segue da *Proposição 3.5* que

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}D_4) = \pm D_4 V,$$

onde $V \cong U_2/D_4'$ e

$$U_2 = \mathcal{U}(\mathbb{Z}D_4) \cap \left(\mathbb{Q}D_4 \left(\frac{1-s}{2} \right) + \left(\frac{1+s}{2} \right) \right).$$

Portanto, para descrever completamente o grupo de unidades de $\mathbb{Z}D_4$, precisamos descrever completamente o subgrupo livre de torsão $V \cong U_2/D_4'$ de U_2 , ou seja, precisamos descrever completamente o subgrupo U_2 de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}D_4)$ e tomar o seu grupo quociente por D_4' . Para isto, vamos obter uma base para $\mathbb{Q}D_4 \left(\frac{1-s}{2} \right)$ sobre $\mathbb{Q}$. Nesta direção, precisaremos da decomposição do anel de grupo $\mathbb{Q}D_4$:

Proposição 3.6. *O anel de grupo $\mathbb{Q}D_4$ admite a seguinte decomposição:*

$$\mathbb{Q}D_4 = \mathbb{Q}D_4 \left(\frac{1+s}{2} \right) \oplus \mathbb{Q}D_4 \left(\frac{1-s}{2} \right),$$

onde $\mathbb{Q}G \left(\frac{1+s}{2} \right) \cong \oplus^4 \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}D_4 \left(\frac{1-s}{2} \right) \cong M_2(\mathbb{Q})$.

Assim, vamos obter uma base matricial elementar para $\mathbb{Q}D_4 \left(\frac{1-s}{2} \right) \cong M_2(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$. Este é o próximo resultado:

Proposição 3.7. *Seja $E = \frac{1-s}{2}$ e sejam $x, y \in D_4$ tais que:*

- (i) $xy = syx$;
- (ii) $\epsilon x^2 E = y^2 E = E$, onde ϵ é escolhido em $\{\pm 1\}$ de modo que as igualdades sejam verdadeiras.

Então, uma base matricial elementar para $\mathbb{Q}D_4 \left(\frac{1-s}{2} \right) \cong M_2(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ é:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{1+y}{2} \right) E & e_{12} &= \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2} \right) E \\ e_{21} &= \left(\frac{x+xy}{2} \right) E & e_{22} &= \left(\frac{1-y}{2} \right) E. \end{aligned}$$

Utilizando esta base matricial elementar, *E. Jespers* e *G. Leal* descreveram completamente subgrupo U_2 de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}D_4)$ e, conseqüentemente, o subgrupo livre de torsão $V \cong U_2/D_4'$ de U_2 . Para apresentar tal resultado, precisaremos fixar algumas notações.

Sejam R um domínio e $GL_n(R)$ o grupo das matrizes invertíveis de ordem n sobre R . Se S é um subconjunto de $GL_n(R)$, então $S_{det=1}$ denota o conjunto de todos elementos de S com determinante 1. Ainda, se I_d denota a matriz identidade em $GL_n(R)$, então $S_{det=1}$ é um grupo multiplicativo de $GL_n(R)$ e denotaremos

$$S_{\overline{\det=1}} = S_{\det=1}/(\{I_d, -I_d\} \cap S_{\det=1}).$$

Analogamente,

$$S_{\overline{\det=\pm 1}} = S_{\det=\pm 1}/(\{I_d, -I_d\} \cap S_{\det=\pm 1}).$$

Agora, temos, finalmente, condições de apresentar a descrição completa do grupo de unidades do anel de grupo $\mathbb{Z}D_4$, dada por *E. Jespers* e *G. Leal*:

Teorema 3.8. (*Jespers-Leal*) *Seja $D_4 = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy = syx, s^2 = 1 \rangle$. Então, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}D_4) = \pm D_4 V$, onde V é um grupo livre de posto 3 gerado pelas unidades bicíclicas:*

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 + (y + xy)(1 - s) = \mu_{sx,y}^{-1}, \\ v_2 &= 1 + (x - xy)(1 - s) = \mu_{sy,x}^{-1} \quad e \\ v_3 &= 1 + (-y + xy)(1 - s) = \mu_{x,y}. \end{aligned}$$

Além disso, a função

$$\varphi : V \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 2\mathbb{Z} + 1 & 4\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 \end{array} \right]_{\overline{\det=1}}$$

definida por $(\alpha_i \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} &\varphi(1 + (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy)(1 - s)) = \\ &= \left[\begin{array}{cc} 2(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + 1 & 4(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 2(\alpha_1 + \alpha_3) & 2(\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

Para finalizarmos esta seção, provaremos um resultado que será necessário para o decorrer do texto.

Proposição 3.9. *Seja G um 2-grupo finito extra-especial, com $G' = \mathcal{Z}(G) = \{1, s\}$. Então, $\mathbb{Q}G(E)$ é simples, onde $E = \left(\frac{1-s}{2}\right)$.*

Demonstração. Seja G um 2-grupo finito extra-especial, com $G' = \mathcal{Z}(G) = \{1, s\}$. Queremos mostrar que $\mathbb{Q}G(E)$ é simples, onde $E = \left(\frac{1-s}{2}\right)$. Para tal, seja e um idempotente central de $\mathbb{Q}G(E)$. Então,

$$e = \sum_{g \in \mathcal{Z}(G)} \alpha_g g + \sum_{g \notin \mathcal{Z}(G)} \alpha_g C_g, \quad (*)$$

onde $C_g = \sum_{x \in \mathcal{C}_g} x$.

Como $G' = \{1, s\}$, se $g \in G$ não é central, então $\mathcal{C}_g = \{g, gs\}$. Daí, de $(*)$, obtemos

$$e = \sum_{g \in \mathcal{Z}(G)} \alpha_g g + \sum_{g \notin \mathcal{Z}(G)} \alpha_g (g + gs) = \sum_{g \in \mathcal{Z}(G)} \alpha_g g + (1 + s) \sum_{g \notin \mathcal{Z}(G)} \alpha_g g.$$

Como e é um idempotente de $\mathbb{Q}G(E)$, temos que $eE = e$. Ainda, $(1 + s)E = 0$. Logo,

$$e = \left(\sum_{g \in \mathcal{Z}(G)} \alpha_g g \right) E$$

e $e \in \mathbb{Q}(\mathcal{Z}(G))$. Como $\mathcal{Z}(G) = \{1, s\}$, as únicas possibilidades são

$$0, 1, \frac{1+s}{2} \text{ e } \frac{1-s}{2}.$$

Portanto, $e = E$ e $\mathbb{Q}G(E)$ é simples, como queríamos provar. □

O Grupo de Unidades de $\mathbb{Z}G$, G 2-Grupo Extra-Especial

Neste último capítulo, iremos descrever completamente o grupo de unidades dos anéis de grupo inteiros de dois particulares 2-grupos extra-especiais, um de ordem 32 e outro de ordem 128. A estrutura muito particular de tais grupos extra-especiais nos permite estender a ideia utilizada por *E. Jespers* e *G. Leal* [21] para descrever completamente o grupo de unidades de $\mathbb{Z}D_4$, onde D_4 denota o grupo diedral de ordem 8. Mais detalhes a respeito de tal estrutura podem ser encontrados em [19]. As contas apresentadas neste capítulo foram realizadas com a ajuda do software *Maple*.

4.1 O grupo de unidades de $\mathbb{Z}G$, G 2-grupo extra-especial de ordem 32

Nesta seção, vamos descrever completamente o grupo de unidades do anel de grupo inteiro de um 2-grupo extra-especial G de ordem 32. Para isso, definiremos, primeiramente, tal grupo G e fixaremos a notação dos elementos de D_4 , que será utilizada também na próxima seção. Como G é um 2-grupo extra-especial de ordem 32, com $G' = \mathcal{Z}(G) = \{1, s\}$, utilizaremos a *Proposição 3.5* para obter

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm GV,$$

onde $V \cong U_2/G'$ e

$$U_2 = \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) \cap \left(\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) + \left(\frac{1+s}{2}\right) \right).$$

Assim, para descrever completamente $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, precisaremos descrever completamente o subgrupo $V \cong U_2/G'$ de U_2 , ou seja, precisaremos descrever completamente o subgrupo U_2 de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ e tomar o seu grupo quociente por G' . Para tal, vamos obter uma base para $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right)$ sobre $\mathbb{Q}$. Nesta direção, precisaremos da decomposição do anel de grupo $\mathbb{Q}G$.

Seja D_4 o grupo diedral de ordem 8, isto é,

$$D_4 = \langle b, v \mid b^2 = 1, v^4 = 1 \text{ e } bvbv = 1 \rangle.$$

Vamos adotar a seguinte notação para os elementos de D_4 :

$1 = b^2 = v^4$	$a = bv^2$	b	$s = v^2$
$t = bv$	$u = vb$	v	$w = v^3$

Sejam D e D^* grupos isomorfos a D_4 . Denotaremos por $D \times D^*$ os elementos da forma xy^* , onde $x \in D$ e $y^* \in D^*$ é tal que seu correspondente em D é y . Assim, definimos o grupo

$$G \cong \frac{D \times D^*}{I},$$

onde $I = \{1, ss^*\}$.

Os elementos de G serão denotados do seguinte modo:

1	a	b	s
t	u	v	w
a^*	b^*	t^*	u^*
v^*	w^*	ba^*	bb^*
bt^*	bu^*	bv^*	bw^*
ua^*	ub^*	ut^*	uu^*
uv^*	uw^*	va^*	vb^*
vt^*	vu^*	vv^*	vw^*

Então, G é um 2-grupo extra-especial de ordem 32, produto central de duas cópias de D_4 , e $G' = \mathcal{Z}(G) = \{1, s\}$. Ainda, os elementos de G/G' serão denotados do seguinte modo:

$\bar{1}$	$\bar{b}$	$\bar{u}$	$\bar{v}$
$\bar{b}^*$	$\bar{u}^*$	$\bar{v}^*$	$\bar{bb}^*$
$\bar{bu}^*$	$\bar{bv}^*$	$\bar{ub}^*$	$\bar{uu}^*$
$\bar{uv}^*$	$\bar{vb}^*$	$\bar{vu}^*$	$\bar{vv}^*$

Na sequência, apresentamos a decomposição do anel de grupo $\mathbb{Q}G$.

Proposição 4.1. *O anel de grupo $\mathbb{Q}G$ admite a seguinte decomposição:*

$$\mathbb{Q}G = \mathbb{Q}G\left(\frac{1+s}{2}\right) \oplus \mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right),$$

onde $\mathbb{Q}G\left(\frac{1+s}{2}\right) \cong \oplus^{16} \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_4(\mathbb{Q})$.

Demonstração. A primeira igualdade segue da *Proposição 1.23*, visto que $e_{G'} = \frac{1+s}{2}$. Para os isomorfismos, a *proposição 1.26* nos diz que $\mathbb{Q}G\left(\frac{1+s}{2}\right) \cong \mathbb{Q}(G/G')$ é a soma de todas as componentes simples comutativas de $\mathbb{Q}G$ e $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right)$ é a soma de todas as outras. Daí, a decomposição de $\mathbb{Q}D_4$, apresentada no capítulo anterior, juntamente com a *Proposição 1.12* e a *Proposição 3.9*, nos fornecem o desejado. $\square$

Utilizando o software *Maple*, é fácil verificar a proposição seguinte, que nos fornece uma base matricial elementar para

$$\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_4(\mathbb{Q})$$

sobre $\mathbb{Q}$.

Proposição 4.2. *Seja $E = \frac{1-s}{2}$ e sejam $x, y \in D$ tais que:*

- (i) $xy = syx$;
- (ii) $\epsilon x^2 E = y^2 E = E$, onde ϵ é escolhido em $\{\pm 1\}$ de modo que as igualdades sejam verdadeiras.

Então, uma base matricial elementar para $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_4(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ é:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{1+y}{2}\right) \left(\frac{1+y^*}{2}\right) E & e_{12} &= \left(\frac{1+y}{2}\right) \left(\frac{-\epsilon x^* y^* + \epsilon x^*}{2}\right) E \\ e_{13} &= \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{1+y^*}{2}\right) E & e_{14} &= \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{-\epsilon x^* y^* + \epsilon x^*}{2}\right) E \\ e_{21} &= \left(\frac{1+y}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) E & e_{22} &= \left(\frac{1+y}{2}\right) \left(\frac{1-y^*}{2}\right) E \\ e_{23} &= \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) E & e_{24} &= \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{1-y^*}{2}\right) E \\ e_{31} &= \left(\frac{x+xy}{2}\right) \left(\frac{1+y^*}{2}\right) E & e_{32} &= \left(\frac{x+xy}{2}\right) \left(\frac{-\epsilon x^* y^* + \epsilon x^*}{2}\right) E \\ e_{33} &= \left(\frac{1-y}{2}\right) \left(\frac{1+y^*}{2}\right) E & e_{34} &= \left(\frac{1-y}{2}\right) \left(\frac{-\epsilon x^* y^* + \epsilon x^*}{2}\right) E \\ e_{41} &= \left(\frac{x+xy}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) E & e_{42} &= \left(\frac{x+xy}{2}\right) \left(\frac{1-y^*}{2}\right) E \\ e_{43} &= \left(\frac{1-y}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) E & e_{44} &= \left(\frac{1-y}{2}\right) \left(\frac{1-y^*}{2}\right) E. \end{aligned}$$

A seguir, apresentaremos dois exemplos de bases matriciais elementares para

$$\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_4(\mathbb{Q})$$

sobre $\mathbb{Q}$.

Exemplo 4.3. Tomando $x = t$ e $y = a$ na proposição anterior, obtemos $\epsilon = 1$ e, daí, uma base matricial elementar para $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_4(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ é:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{1+a}{2}\right)\left(\frac{1+a^*}{2}\right)E & e_{12} &= \left(\frac{1+a}{2}\right)\left(\frac{-t^*a^*+t^*}{2}\right)E \\ e_{13} &= \left(\frac{-ta+t}{2}\right)\left(\frac{1+a^*}{2}\right)E & e_{14} &= \left(\frac{-ta+t}{2}\right)\left(\frac{-t^*a^*+t^*}{2}\right)E \\ e_{21} &= \left(\frac{1+a}{2}\right)\left(\frac{t^*+t^*a^*}{2}\right)E & e_{22} &= \left(\frac{1+a}{2}\right)\left(\frac{1-a^*}{2}\right)E \\ e_{23} &= \left(\frac{-ta+t}{2}\right)\left(\frac{t^*+t^*a^*}{2}\right)E & e_{24} &= \left(\frac{-ta+t}{2}\right)\left(\frac{1-a^*}{2}\right)E \\ e_{31} &= \left(\frac{t+ta}{2}\right)\left(\frac{1+a^*}{2}\right)E & e_{32} &= \left(\frac{t+ta}{2}\right)\left(\frac{-t^*a^*+t^*}{2}\right)E \\ e_{33} &= \left(\frac{1-a}{2}\right)\left(\frac{1+a^*}{2}\right)E & e_{34} &= \left(\frac{1-a}{2}\right)\left(\frac{-t^*a^*+t^*}{2}\right)E \\ e_{41} &= \left(\frac{t+ta}{2}\right)\left(\frac{t^*+t^*a^*}{2}\right)E & e_{42} &= \left(\frac{t+ta}{2}\right)\left(\frac{1-a^*}{2}\right)E \\ e_{43} &= \left(\frac{1-a}{2}\right)\left(\frac{t^*+t^*a^*}{2}\right)E & e_{44} &= \left(\frac{1-a}{2}\right)\left(\frac{1-a^*}{2}\right)E. \end{aligned}$$

Exemplo 4.4. Tomando $x = v$ e $y = b$ na proposição anterior, obtemos $\epsilon = -1$ e, daí, uma base matricial elementar para $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_4(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ é:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)E & e_{12} &= \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)E \\ e_{13} &= \left(\frac{vb-v}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)E & e_{14} &= \left(\frac{vb-v}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)E \\ e_{21} &= \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)E & e_{22} &= \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)E \\ e_{23} &= \left(\frac{vb-v}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)E & e_{24} &= \left(\frac{vb-v}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)E \\ e_{31} &= \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)E & e_{32} &= \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)E \\ e_{33} &= \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)E & e_{34} &= \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)E \\ e_{41} &= \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)E & e_{42} &= \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)E \\ e_{43} &= \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)E & e_{44} &= \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)E. \end{aligned}$$

Agora, utilizando a base matricial elementar para $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_4(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ apresentada no *Exemplo 4.4* acima, determinamos, através de um cálculo minucioso, utilizando o software *Maple*, as representações de todos os elementos de G em $M_4(\mathbb{Q})$:

$$1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$s \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$t \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a^* \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b^* \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$t^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ba^* \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$bb^* \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$bt^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$bu^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$bv^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$bw^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ua^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ub^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ut^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$uu^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$uv^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$uw^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$va^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$vb^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$vt^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$vu^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$vv^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad vw^* \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, temos condições de apresentar a descrição completa do grupo de unidades do anel de grupo inteiro $\mathbb{Z}G$:

Teorema 4.5. *Seja $G \cong \frac{D \times D^*}{I}$ um 2-grupo extra-especial de ordem 32, produto central de duas cópias de D_4 , com $G' = \mathcal{Z}(G) = \{1, s\}$. Então,*

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm GV \text{ e}$$

$$V \cong \left\{ \begin{bmatrix} 2A+1 & 2B & 2C & 2D \\ 2E & 2F+1 & 2G & 2H \\ 2I & 2J & 2K+1 & 2L \\ 2M & 2N & 2O & 2P+1 \end{bmatrix} \right\}_{\det=1} \quad | \text{ para cada } i, 1 \leq i \leq 4, \text{ os inteiros}$$

X_i, Y_i, Z_i e W_i , com $\{X_i, Y_i, Z_i, W_i\} = \mathfrak{D}_i$, têm a mesma paridade e estão, aos pares, na mesma classe módulo 4}, onde

$$\mathfrak{D}_1 = \{A, F, K, P\}, \quad \mathfrak{D}_2 = \{B, E, L, O\}, \quad \mathfrak{D}_3 = \{C, H, I, N\} \text{ e } \mathfrak{D}_4 = \{D, G, J, M\}.$$

Demonstração. Pela *Proposição 3.5*, obtemos $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm GV$, onde $V \cong U_2/G'$ e

$$U_2 = \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) \cap \left(\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) + \left(\frac{1+s}{2}\right) \right).$$

Assim, para descrever completamente $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, precisamos descrever completamente o subgrupo $V \cong U_2/G'$ de U_2 , ou seja, precisamos descrever completamente o subgrupo U_2 de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ e tomar o seu grupo quociente por G' .

Seja $u \in U_2$. Então, pela *Proposição 3.4*,

$$u = 1 + \alpha(1-s) = 1 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 b + \alpha_3 v + \alpha_4 b^* + \alpha_5 v^* + \alpha_6 u + \alpha_7 u^* + \alpha_8 bb^* + \alpha_9 bu^* + \alpha_{10} bv^* + \alpha_{11} ub^* + \alpha_{12} uu^* + \alpha_{13} uv^* + \alpha_{14} vb^* + \alpha_{15} vu^* + \alpha_{16} vv^*)E,$$

onde $E = \frac{1-s}{2}$. Ainda, pela *Proposição 4.1*, temos que $\mathbb{Q}G(E) \cong M_4(\mathbb{Q})$. Assim, utilizando a base matricial elementar apresentada no *Exemplo 4.4*, juntamente com as respectivas representações de G em $M_4(\mathbb{Q})$, segue que:

$$u = \left(\frac{1+s}{2}\right) + 2[\alpha_1(e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44}) + \alpha_2(e_{11} + e_{22} - e_{33} - e_{44}) + \alpha_3(-e_{13} - e_{24} + e_{31} + e_{42}) + \alpha_4(e_{11} - e_{22} + e_{33} - e_{44}) + \alpha_5(-e_{12} + e_{21} - e_{34} + e_{43}) + \alpha_6(e_{13} + e_{24} + e_{31} + e_{42}) + \alpha_7(e_{12} + e_{21} + e_{34} + e_{43}) + \alpha_8(e_{11} - e_{22} - e_{33} + e_{44}) + \alpha_9(e_{12} + e_{21} - e_{34} - e_{43}) + \alpha_{10}(-e_{12} + e_{21} + e_{34} - e_{43}) + \alpha_{11}(e_{13} - e_{24} + e_{31} - e_{42}) + \alpha_{12}(e_{14} + e_{23} + e_{32} + e_{41}) + \alpha_{13}(-e_{14} + e_{23} - e_{32} + e_{41}) + \alpha_{14}(-e_{13} + e_{24} + e_{31} - e_{42}) + \alpha_{15}(-e_{14} - e_{23} + e_{32} + e_{41}) + \alpha_{16}(e_{14} - e_{23} - e_{32} + e_{41})] + e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} =$$

$$= \left(\frac{1+s}{2}\right) + [2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_8) + 1]e_{11} + 2(-\alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 - \alpha_{10})e_{12} + 2(-\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_{11} - \alpha_{14})e_{13} + 2(\alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{15} + \alpha_{16})e_{14} + 2(\alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{10})e_{21} + [2(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_8) + 1]e_{22} + 2(\alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{15} - \alpha_{16})e_{23} + 2(-\alpha_3 + \alpha_6 - \alpha_{11} + \alpha_{14})e_{24} + 2(\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_{11} + \alpha_{14})e_{31} + 2(\alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{15} - \alpha_{16})e_{32} + [2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_8) + 1]e_{33} + 2(-\alpha_5 + \alpha_7 - \alpha_9 + \alpha_{10})e_{34} + 2(\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{16})e_{41} + 2(\alpha_3 + \alpha_6 - \alpha_{11} - \alpha_{14})e_{42} + 2(\alpha_5 + \alpha_7 - \alpha_9 - \alpha_{10})e_{43} + [2(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_8) + 1]e_{44}$$

Daí, u pode ser escrito como uma matriz invertível inteira

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$u_{11} = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_8) + 1$	$u_{12} = 2(-\alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 - \alpha_{10})$
$u_{13} = 2(-\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_{11} - \alpha_{14})$	$u_{14} = 2(\alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{15} + \alpha_{16})$
$u_{21} = 2(\alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{10})$	$u_{22} = 2(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_8) + 1$
$u_{23} = 2(\alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{15} - \alpha_{16})$	$u_{24} = 2(-\alpha_3 + \alpha_6 - \alpha_{11} + \alpha_{14})$
$u_{31} = 2(\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_{11} + \alpha_{14})$	$u_{32} = 2(\alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{15} - \alpha_{16})$
$u_{33} = 2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_8) + 1$	$u_{34} = 2(-\alpha_5 + \alpha_7 - \alpha_9 + \alpha_{10})$
$u_{41} = 2(\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{16})$	$u_{42} = 2(\alpha_3 + \alpha_6 - \alpha_{11} - \alpha_{14})$
$u_{43} = 2(\alpha_5 + \alpha_7 - \alpha_9 - \alpha_{10})$	$u_{44} = 2(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_8) + 1$

Assim, produzimos o monomorfismo

$$\varphi : U_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2\mathbb{Z} + 1 & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 & 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 \end{bmatrix}_{\det=\pm 1}$$

definido por

$$\varphi(u) = \begin{bmatrix} 2A + 1 & 2B & 2C & 2D \\ 2E & 2F + 1 & 2G & 2H \\ 2I & 2J & 2K + 1 & 2L \\ 2M & 2N & 2O & 2P + 1 \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_8$	$B = -\alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 - \alpha_{10}$
$C = -\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_{11} - \alpha_{14}$	$D = \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{15} + \alpha_{16}$
$E = \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{10}$	$F = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_8$
$G = \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{15} - \alpha_{16}$	$H = -\alpha_3 + \alpha_6 - \alpha_{11} + \alpha_{14}$
$I = \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_{11} + \alpha_{14}$	$J = \alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{15} - \alpha_{16}$
$K = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_8$	$L = -\alpha_5 + \alpha_7 - \alpha_9 + \alpha_{10}$
$M = \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{16}$	$N = \alpha_3 + \alpha_6 - \alpha_{11} - \alpha_{14}$
$O = \alpha_5 + \alpha_7 - \alpha_9 - \alpha_{10}$	$P = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_8$

Seja

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 2A+1 & 2B & 2C & 2D \\ 2E & 2F+1 & 2G & 2H \\ 2I & 2J & 2K+1 & 2L \\ 2M & 2N & 2O & 2P+1 \end{bmatrix},$$

com $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P \in \mathbb{Z}$. Temos que:

$$\det \mathcal{A} = 1 + 2\beta_1 + 4\beta_2 + 8\beta_3 + 16\beta_4,$$

onde $\beta_r \in \mathbb{Z}$, $1 \leq r \leq 4$. Em particular,

$$\beta_1 = A + F + K + P.$$

Para a sequência, consideramos os seguintes subconjuntos de inteiros:

$$\mathfrak{D}_1 = \{A, F, K, P\}, \quad \mathfrak{D}_2 = \{B, E, L, O\}, \quad \mathfrak{D}_3 = \{C, H, I, N\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{D}_4 = \{D, G, J, M\}.$$

Afirmção: $\mathcal{A} \in \varphi(U_2)$ se, e somente se, $\det \mathcal{A} = 1$ e, para cada i , $1 \leq i \leq 4$, os inteiros X_i, Y_i, Z_i e W_i , com $\{X_i, Y_i, Z_i, W_i\} = \mathfrak{D}_i$, têm a mesma paridade e estão, aos pares, na mesma classe módulo 4.

De fato, $\mathcal{A} \in \varphi(U_2)$ se, e somente se, $\det \mathcal{A} = \pm 1$ e, para cada i , $1 \leq i \leq 4$, $2|(X_i + Y_i)$, $2|(X_i + Z_i)$, $2|(X_i + W_i)$, $2|(Y_i + Z_i)$, $2|(Y_i + W_i)$, $2|(Z_i + W_i)$ e $4|(X_i + Y_i + Z_i + W_i)$. Em particular, como $4|(A + F + K + P)$, obtemos $\det \mathcal{A} = 1$. Daí, $\mathcal{A} \in \varphi(U_2)$ se, e somente se, $\det \mathcal{A} = 1$ e, para cada i , $1 \leq i \leq 4$, os inteiros X_i, Y_i, Z_i e W_i têm a mesma paridade e estão, aos pares, na mesma classe módulo 4.

Segue imediatamente desta afirmação, que:

$$\varphi(U_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 2A+1 & 2B & 2C & 2D \\ 2E & 2F+1 & 2G & 2H \\ 2I & 2J & 2K+1 & 2L \\ 2M & 2N & 2O & 2P+1 \end{bmatrix} \right\}_{\det=1} \quad | \text{ para cada } i, 1 \leq i \leq 4, \text{ os inteiros}$$

X_i, Y_i, Z_i e W_i , com $\{X_i, Y_i, Z_i, W_i\} = \mathfrak{D}_i$, têm a mesma paridade e estão, aos pares, na mesma classe módulo 4}.

$$\text{Como } \varphi(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ segue que } \varphi \text{ induz um isomorfismo}$$

$$V \cong \left\{ \begin{bmatrix} 2A+1 & 2B & 2C & 2D \\ 2E & 2F+1 & 2G & 2H \\ 2I & 2J & 2K+1 & 2L \\ 2M & 2N & 2O & 2P+1 \end{bmatrix} \right\}_{\det=1} \quad | \text{ para cada } i, 1 \leq i \leq 4, \text{ os inteiros}$$

X_i, Y_i, Z_i e W_i , com $\{X_i, Y_i, Z_i, W_i\} = \mathfrak{D}_i$, têm a mesma paridade e estão, aos pares, na mesma classe módulo 4}. □

4.2 O grupo de unidades de $\mathbb{Z}G$, G 2-grupo extra-especial de ordem 128

Nesta seção, vamos descrever completamente o grupo de unidades do anel de grupo inteiro de um 2-grupo extra-especial G de ordem 128. A ideia utilizada é a mesma da seção anterior: definiremos, primeiramente, tal grupo G , adotando a mesma notação da seção anterior para os elementos de D_4 , e utilizaremos, novamente, a *Proposição 3.5* para obter

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm GV,$$

onde $V \cong U_2/G'$ e

$$U_2 = \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) \cap \left(\mathbb{Q}G \left(\frac{1-s}{2} \right) + \left(\frac{1+s}{2} \right) \right).$$

Assim, como na seção anterior, para descrever completamente $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, vamos descrever completamente o subgrupo $V \cong U_2/G'$ de U_2 , ou seja, vamos descrever completamente o subgrupo U_2 de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ e tomar o seu grupo quociente por G' . Para tal, vamos obter uma base para $\mathbb{Q}G \left(\frac{1-s}{2} \right)$ sobre $\mathbb{Q}$. Nesta direção, precisaremos, mais uma vez, da decomposição do anel de grupo $\mathbb{Q}G$.

Sejam D , D^* e D^{**} grupos isomorfos a D_4 . Denotaremos por $D \times D^* \times D$ os elementos da forma xy^*z^{**} , onde $x \in D$, $y^* \in D^*$ é tal que seu correspondente em D é y e $z^{**} \in D^{**}$ é tal que seu correspondente em D é z . Assim, definimos o grupo

$$G \cong \frac{D \times D^* \times D^{**}}{I},$$

onde $I = \{1, ss^*, ss^{**}, s^*s^{**}\}$. Então, G é um 2-grupo extra-especial de ordem 128, produto central de três cópias de D_4 , e $G' = \mathcal{Z}(G) = \{1, s\}$. Ainda, os elementos de G/G' serão denotados do seguinte modo:

$\bar{1}$	$\bar{b}$	$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\bar{b}^*$	$\bar{u}^*$	$\bar{v}^*$	$\bar{bb}^*$
$\overline{bu^*}$	$\overline{bv^*}$	$\overline{ub^*}$	$\overline{uv^*}$	$\overline{uv^*}$	$\overline{vb^*}$	$\overline{vu^*}$	$\overline{vv^*}$
$\overline{b^{**}}$	$\overline{u^{**}}$	$\overline{v^{**}}$	$\overline{bb^{**}}$	$\overline{bu^{**}}$	$\overline{bv^{**}}$	$\overline{ub^{**}}$	$\overline{uu^{**}}$
$\overline{uv^{**}}$	$\overline{vb^{**}}$	$\overline{vu^{**}}$	$\overline{vv^{**}}$	$\overline{b^*b^{**}}$	$\overline{b^*u^{**}}$	$\overline{b^*v^{**}}$	$\overline{u^*b^{**}}$
$\overline{u^*u^{**}}$	$\overline{u^*v^{**}}$	$\overline{v^*b^{**}}$	$\overline{v^*u^{**}}$	$\overline{v^*v^{**}}$	$\overline{bb^*b^{**}}$	$\overline{bb^*u^{**}}$	$\overline{bb^*v^{**}}$
$\overline{bu^*b^{**}}$	$\overline{bu^*u^{**}}$	$\overline{bu^*v^{**}}$	$\overline{bv^*b^{**}}$	$\overline{bv^*u^{**}}$	$\overline{bv^*v^{**}}$	$\overline{ub^*b^{**}}$	$\overline{ub^*u^{**}}$
$\overline{ub^*v^{**}}$	$\overline{uu^*b^{**}}$	$\overline{uu^*u^{**}}$	$\overline{uu^*v^{**}}$	$\overline{uv^*b^{**}}$	$\overline{uv^*u^{**}}$	$\overline{uv^*v^{**}}$	$\overline{vb^*b^{**}}$
$\overline{vb^*u^{**}}$	$\overline{vb^*v^{**}}$	$\overline{vu^*b^{**}}$	$\overline{vu^*u^{**}}$	$\overline{vu^*v^{**}}$	$\overline{vv^*b^{**}}$	$\overline{vv^*u^{**}}$	$\overline{vv^*v^{**}}$

Na sequência, apresentamos a decomposição do anel de grupo $\mathbb{Q}G$.

Proposição 4.6. *O anel de grupo $\mathbb{Q}G$ admite a seguinte decomposição:*

$$\mathbb{Q}G = \mathbb{Q}G\left(\frac{1+s}{2}\right) \oplus \mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right),$$

$$\text{onde } \mathbb{Q}G\left(\frac{1+s}{2}\right) \cong \oplus^{64} \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_8(\mathbb{Q}).$$

Demonstração. A primeira igualdade segue da *Proposição 1.23*, visto que $e_{G'} = \frac{1+s}{2}$. Para os isomorfismos, a *proposição 1.26* nos diz que $\mathbb{Q}G\left(\frac{1+s}{2}\right) \cong \mathbb{Q}(G/G')$ é a soma de todas as componentes simples comutativas de $\mathbb{Q}G$ e $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right)$ é a soma de todas as outras. Daí, a decomposição de $\mathbb{Q}D_4$, apresentada no capítulo anterior, juntamente com a *Proposição 1.12* e a *Proposição 3.9*, nos fornecem o desejado. $\square$

Utilizando o software *Maple*, é possível verificar a proposição seguinte, que nos fornece uma base matricial elementar para

$$\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_8(\mathbb{Q})$$

sobre $\mathbb{Q}$.

Proposição 4.7. *Seja $E = \frac{1-s}{2}$ e sejam $x, y \in D$ tais que:*

(i) $xy = syx$;

(ii) $\epsilon x^2 E = y^2 E = E$, onde ϵ é escolhido em $\{\pm 1\}$ de modo que as igualdades sejam verdadeiras.

Então, uma base matricial elementar para $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_8(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ é:

$e_{11} = \left(\frac{1+y}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{12} = \left(\frac{1+y}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{13} = \left(\frac{1+y}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{14} = \left(\frac{1+y}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{15} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{16} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{17} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{18} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{21} = \left(\frac{1+y}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{22} = \left(\frac{1+y}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$
$e_{23} = \left(\frac{1+y}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{24} = \left(\frac{1+y}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$
$e_{25} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{26} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$

$e_{27} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{-\epsilon x^* y^* + \epsilon x^*}{2}\right) \left(\frac{x^{**} + x^{**} y^{**}}{2}\right) E$
$e_{28} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{-\epsilon x^* y^* + \epsilon x^*}{2}\right) \left(\frac{1 - y^{**}}{2}\right) E$
$e_{31} = \left(\frac{1 + y}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) \left(\frac{1 + y^{**}}{2}\right) E$
$e_{32} = \left(\frac{1 + y}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) \left(\frac{-\epsilon x^{**} y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right) E$
$e_{33} = \left(\frac{1 + y}{2}\right) \left(\frac{1 - y^*}{2}\right) \left(\frac{1 + y^{**}}{2}\right) E$
$e_{34} = \left(\frac{1 + y}{2}\right) \left(\frac{1 - y^*}{2}\right) \left(\frac{-\epsilon x^{**} y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right) E$
$e_{35} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) \left(\frac{1 + y^{**}}{2}\right) E$
$e_{36} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) \left(\frac{-\epsilon x^{**} y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right) E$
$e_{37} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{1 - y^*}{2}\right) \left(\frac{1 + y^{**}}{2}\right) E$
$e_{38} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{1 - y^*}{2}\right) \left(\frac{-\epsilon x^{**} y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right) E$
$e_{41} = \left(\frac{1 + y}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) \left(\frac{x^{**} + x^{**} y^{**}}{2}\right) E$
$e_{42} = \left(\frac{1 + y}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) \left(\frac{1 - y^{**}}{2}\right) E$
$e_{43} = \left(\frac{1 + y}{2}\right) \left(\frac{1 - y^*}{2}\right) \left(\frac{x^{**} + x^{**} y^{**}}{2}\right) E$
$e_{44} = \left(\frac{1 + y}{2}\right) \left(\frac{1 - y^*}{2}\right) \left(\frac{1 - y^{**}}{2}\right) E$
$e_{45} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) \left(\frac{x^{**} + x^{**} y^{**}}{2}\right) E$
$e_{46} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{x^* + x^* y^*}{2}\right) \left(\frac{1 - y^{**}}{2}\right) E$
$e_{47} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{1 - y^*}{2}\right) \left(\frac{x^{**} + x^{**} y^{**}}{2}\right) E$
$e_{48} = \left(\frac{-\epsilon xy + \epsilon x}{2}\right) \left(\frac{1 - y^*}{2}\right) \left(\frac{1 - y^{**}}{2}\right) E$
$e_{51} = \left(\frac{x + xy}{2}\right) \left(\frac{1 + y^*}{2}\right) \left(\frac{1 + y^{**}}{2}\right) E$

$e_{52} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{53} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{54} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{55} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{56} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{57} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{58} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{61} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{62} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$
$e_{63} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{64} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$
$e_{65} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{66} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{1+y^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$
$e_{67} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{68} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^*y^* + \epsilon x^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$
$e_{71} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{x^* + x^*y^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{72} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{x^* + x^*y^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{73} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{1-y^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{74} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{1-y^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$

$e_{75} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{x^* + x^*y^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{76} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{x^* + x^*y^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{77} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{1-y^*}{2}\right)\left(\frac{1+y^{**}}{2}\right)E$
$e_{78} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{1-y^*}{2}\right)\left(\frac{-\epsilon x^{**}y^{**} + \epsilon x^{**}}{2}\right)E$
$e_{81} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{x^* + x^*y^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{82} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{x^* + x^*y^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$
$e_{83} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{1-y^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{84} = \left(\frac{x+xy}{2}\right)\left(\frac{1-y^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$
$e_{85} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{x^* + x^*y^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{86} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{x^* + x^*y^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$
$e_{87} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{1-y^*}{2}\right)\left(\frac{x^{**} + x^{**}y^{**}}{2}\right)E$
$e_{88} = \left(\frac{1-y}{2}\right)\left(\frac{1-y^*}{2}\right)\left(\frac{1-y^{**}}{2}\right)E$

A seguir, apresentaremos um exemplo de uma base matricial elementar para

$$\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_8(\mathbb{Q})$$

sobre $\mathbb{Q}$.

Exemplo 4.8. Tomando $x = v$ e $y = b$ na proposição anterior, obtemos $\epsilon = -1$ e, daí, uma base matricial elementar para $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_8(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ é:

$e_{11} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{12} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**} - v^{**}}{2}\right)E$
$e_{13} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{v^*b^* - v^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$

$e_{14} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{v^*b^* - v^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**} - v^{**}}{2}\right)E$
$e_{15} = \left(\frac{vb - v}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{16} = \left(\frac{vb - v}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**} - v^{**}}{2}\right)E$
$e_{17} = \left(\frac{vb - v}{2}\right)\left(\frac{v^*b^* - v^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{18} = \left(\frac{vb - v}{2}\right)\left(\frac{v^*b^* - v^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**} - v^{**}}{2}\right)E$
$e_{21} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**} + v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{22} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{23} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{v^*b^* - v^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**} + v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{24} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{v^*b^* - v^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{25} = \left(\frac{vb - v}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**} + v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{26} = \left(\frac{vb - v}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{27} = \left(\frac{vb - v}{2}\right)\left(\frac{v^*b^* - v^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**} + v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{28} = \left(\frac{vb - v}{2}\right)\left(\frac{v^*b^* - v^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{31} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{v^* + v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{32} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{v^* + v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**} - v^{**}}{2}\right)E$
$e_{33} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{34} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**} - v^{**}}{2}\right)E$
$e_{35} = \left(\frac{vb - v}{2}\right)\left(\frac{v^* + v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{36} = \left(\frac{vb - v}{2}\right)\left(\frac{v^* + v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**} - v^{**}}{2}\right)E$

$e_{37} = \left(\frac{vb-v}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{38} = \left(\frac{vb-v}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**}-v^{**}}{2}\right)E$
$e_{41} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}+v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{42} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{43} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}+v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{44} = \left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{45} = \left(\frac{vb-v}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}+v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{46} = \left(\frac{vb-v}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{47} = \left(\frac{vb-v}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}+v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{48} = \left(\frac{vb-v}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{51} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{52} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**}-v^{**}}{2}\right)E$
$e_{53} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{54} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**}-v^{**}}{2}\right)E$
$e_{55} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{56} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**}-v^{**}}{2}\right)E$
$e_{57} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{58} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**}-v^{**}}{2}\right)E$
$e_{61} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}+v^{**}b^{**}}{2}\right)E$

$e_{62} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{63} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}+v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{64} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{65} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}+v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{66} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{1+b^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{67} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}+v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{68} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{v^*b^*-v^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{71} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{72} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**}-v^{**}}{2}\right)E$
$e_{73} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{74} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**}-v^{**}}{2}\right)E$
$e_{75} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{76} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**}-v^{**}}{2}\right)E$
$e_{77} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{1+b^{**}}{2}\right)E$
$e_{78} = \left(\frac{1-b}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}b^{**}-v^{**}}{2}\right)E$
$e_{81} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}+v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{82} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{v^*+v^*b^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$
$e_{83} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{v^{**}+v^{**}b^{**}}{2}\right)E$
$e_{84} = \left(\frac{v+vb}{2}\right)\left(\frac{1-b^*}{2}\right)\left(\frac{1-b^{**}}{2}\right)E$

$e_{85} = \left(\frac{1-b}{2}\right) \left(\frac{v^* + v^*b^*}{2}\right) \left(\frac{v^{**} + v^{**}b^{**}}{2}\right) E$
$e_{86} = \left(\frac{1-b}{2}\right) \left(\frac{v^* + v^*b^*}{2}\right) \left(\frac{1-b^{**}}{2}\right) E$
$e_{87} = \left(\frac{1-b}{2}\right) \left(\frac{1-b^*}{2}\right) \left(\frac{v^{**} + v^{**}b^{**}}{2}\right) E$
$e_{88} = \left(\frac{1-b}{2}\right) \left(\frac{1-b^*}{2}\right) \left(\frac{1-b^{**}}{2}\right) E$

Agora, utilizando a base matricial elementar para $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_8(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ apresentada no *Exemplo 4.8* acima, determinamos, através de um cálculo minucioso, utilizando o software *Maple*, as representações de todos os elementos de G em $M_8(\mathbb{Q})$. Listamos abaixo as representações dos geradores de G em $M_8(\mathbb{Q})$. As demais representações encontram-se no *Apêndice* deste texto.

$$b \longmapsto e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} - e_{55} - e_{66} - e_{77} - e_{88} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$v \longmapsto -e_{15} - e_{26} - e_{37} - e_{48} + e_{51} + e_{62} + e_{73} + e_{84} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b^* \longmapsto e_{11} + e_{22} - e_{33} - e_{44} + e_{55} + e_{66} - e_{77} - e_{88} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$v^* \longmapsto -e_{13} - e_{24} + e_{31} + e_{42} - e_{57} - e_{68} + e_{75} + e_{86} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b^{**} \longmapsto e_{11} - e_{22} + e_{33} - e_{44} + e_{55} - e_{66} + e_{77} - e_{88} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$v^{**} \longmapsto -e_{12} + e_{21} - e_{34} + e_{43} - e_{56} + e_{65} - e_{78} + e_{87} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para o próximo resultado, precisaremos das considerações que seguem.

Seja $\mathcal{A} = 2(x_{ij}) + \mathcal{I}_d$ uma matriz de ordem 8 tal que $x_{ij} \in \mathbb{Z}$, para todo i, j , com $1 \leq i, j \leq 8$. Vamos dividir os inteiros x_{ij} de $\mathcal{A}$ em 8 *blocos*, disjuntos dois a dois. Para tal, dizemos que

$$\mathfrak{B} = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq 8 \text{ e } j_i \neq j_{i'}, \text{ se } i \neq i'\}$$

é um *bloco* de $\mathcal{A}$ se, e somente se, $\mathfrak{B}$ possui as seguintes propriedades:

- ($\mathfrak{B}1$): Se $x_{ii} \in \mathfrak{B}$, para algum i , $1 \leq i \leq 8$, então $x_{ii} \in \mathfrak{B}$, para todo i , $1 \leq i \leq 8$;
- ($\mathfrak{B}2$): Se $x_{ij} \in \mathfrak{B}$, então $x_{ji} \in \mathfrak{B}$, para todo i, j , $1 \leq i, j \leq 8$;
- ($\mathfrak{B}3$): Se $j_1 = 1 + k$, $1 \leq k \leq 3$, então $j_5 = 5 + k$ e $1 \leq j_i \leq 4$, quando $2 \leq i \leq 4$;
- ($\mathfrak{B}4$): Se $j_1 = 1 + k$, $4 \leq k \leq 7$, então $j_4 = 12 - k$ e, se k é par, $j_2 = 2 + k$ e, se k é ímpar, $j_2 = k$.

Assim, os 8 *blocos* de $\mathcal{A}$ são:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_1 &= \{x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{44}, x_{55}, x_{66}, x_{77}, x_{88}\}; \\ \mathfrak{B}_2 &= \{x_{12}, x_{21}, x_{34}, x_{43}, x_{56}, x_{65}, x_{78}, x_{87}\}; \\ \mathfrak{B}_3 &= \{x_{13}, x_{24}, x_{31}, x_{42}, x_{57}, x_{68}, x_{75}, x_{86}\}; \\ \mathfrak{B}_4 &= \{x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{41}, x_{58}, x_{67}, x_{76}, x_{85}\}; \\ \mathfrak{B}_5 &= \{x_{15}, x_{26}, x_{37}, x_{48}, x_{51}, x_{62}, x_{73}, x_{84}\}; \\ \mathfrak{B}_6 &= \{x_{16}, x_{25}, x_{38}, x_{47}, x_{52}, x_{61}, x_{74}, x_{83}\}; \\ \mathfrak{B}_7 &= \{x_{17}, x_{28}, x_{35}, x_{46}, x_{53}, x_{64}, x_{71}, x_{82}\}; \\ \mathfrak{B}_8 &= \{x_{18}, x_{27}, x_{36}, x_{45}, x_{54}, x_{63}, x_{72}, x_{81}\}.\end{aligned}$$

Finalmente, temos condições de apresentar a descrição completa do grupo de unidades do anel de grupo inteiro $\mathbb{Z}G$:

Teorema 4.9. *Seja $G \cong \frac{D \times D^* \times D^{**}}{I}$ um 2-grupo extra-especial de ordem 128, produto central de três cópias de D_4 , com $G' = \mathcal{Z}(G) = \{1, s\}$. Então,*

$$\mathcal{U}\mathbb{Z}G = \pm GV$$

e V é isomorfo ao grupo das matrizes

$$[(2x_{ij}) + \mathcal{I}_d]_{\det=1}$$

de ordem 8, onde, para cada k , $1 \leq k \leq 8$, os inteiros $x_{ij_i} \in \mathfrak{B}_k$, $1 \leq i \leq 8$, satisfazem as seguintes condições:

- (1) Todos os inteiros x_{ij_i} , $1 \leq i \leq 8$, tem a mesma paridade;

- (2) Os inteiros x_{ij_i} , $1 \leq i \leq 4$ estão, aos pares, na mesma classe módulo 4, assim como os inteiros x_{ij_i} , $5 \leq i \leq 8$;
- (3) Se x_{1j_1} e $x_{(1+k)j_{(1+k)}}$, $1 \leq k \leq 3$, é um par, então x_{5j_5} e $x_{(5+k)j_{(5+k)}}$ também o é;
- (4) O número total de pares contidos em cada classe módulo 4 é par;
- (5) Se $x_{ij_i} = 4q_i + r_i$, $1 \leq i \leq 8$, então os q_i 's estão, aos pares, na mesma classe módulo 2.

Demonstração. Pela *Proposição 3.5*, obtemos $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm GV$, onde $V \cong U_2/G'$ e

$$U_2 = \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) \cap \left(\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) + \left(\frac{1+s}{2}\right) \right).$$

Assim, para descrever completamente $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, precisamos descrever completamente o subgrupo $V \cong U_2/G'$ de U_2 , ou seja, precisamos descrever completamente o subgrupo U_2 de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ e tomar o seu grupo quociente por G' .

Seja $u \in U_2$. Então, pela *Proposição 3.4*,

$$\begin{aligned} u = 1 + \alpha(1-s) = 1 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 b + \alpha_3 v + \alpha_4 b^* + \alpha_5 v^* + \alpha_6 b^{**} + \alpha_7 v^{**} + \alpha_8 u + \alpha_9 u^* + \\ + \alpha_{10} u^{**} + \alpha_{11} bb^* + \alpha_{12} bu^* + \alpha_{13} bv^* + \alpha_{14} ub^* + \alpha_{15} uu^* + \alpha_{16} uv^* + \alpha_{17} vb^* + \alpha_{18} vu^* + \alpha_{19} vv^* + \\ + \alpha_{20} bb^{**} + \alpha_{21} bu^{**} + \alpha_{22} bv^{**} + \alpha_{23} ub^{**} + \alpha_{24} uu^{**} + \alpha_{25} uv^{**} + \alpha_{26} vb^{**} + \alpha_{27} vu^{**} + \alpha_{28} vv^{**} + \\ + \alpha_{29} b^*b^{**} + \alpha_{30} b^*u^{**} + \alpha_{31} b^*v^{**} + \alpha_{32} u^*b^{**} + \alpha_{33} u^*u^{**} + \alpha_{34} u^*v^{**} + \alpha_{35} v^*b^{**} + \alpha_{36} v^*u^{**} + \\ + \alpha_{37} v^*v^{**} + \alpha_{38} bb^*b^{**} + \alpha_{39} bb^*u^{**} + \alpha_{40} bb^*v^{**} + \alpha_{41} bu^*b^{**} + \alpha_{42} bu^*u^{**} + \alpha_{43} bu^*v^{**} + \\ + \alpha_{44} bv^*b^{**} + \alpha_{45} bv^*u^{**} + \alpha_{46} bv^*v^{**} + \alpha_{47} ub^*b^{**} + \alpha_{48} ub^*u^{**} + \alpha_{49} ub^*v^{**} + \alpha_{50} uu^*b^{**} + \\ + \alpha_{51} uu^*u^{**} + \alpha_{52} uu^*v^{**} + \alpha_{53} uv^*b^{**} + \alpha_{54} uv^*u^{**} + \alpha_{55} uv^*v^{**} + \alpha_{56} vb^*b^{**} + \alpha_{57} vb^*u^{**} + \\ + \alpha_{58} vb^*v^{**} + \alpha_{59} vu^*b^{**} + \alpha_{60} vu^*u^{**} + \alpha_{61} vu^*v^{**} + \alpha_{62} vv^*b^{**} + \alpha_{63} vv^*u^{**} + \alpha_{64} vv^*v^{**})E, \end{aligned}$$

onde $E = \frac{1-s}{2}$. Ainda, pela *Proposição 4.6*, temos que $\mathbb{Q}G(E) \cong M_8(\mathbb{Q})$. Assim, utilizando a base matricial elementar apresentada no *Exemplo 4.8*, juntamente com as respectivas representações de G em $M_8(\mathbb{Q})$, segue que:

$$\begin{aligned} u = \left(\frac{1+s}{2}\right) + 2[\alpha_1(e_{11}+e_{22}+e_{33}+e_{44}+e_{55}+e_{66}+e_{77}+e_{88}) + \alpha_2(e_{11}+e_{22}+e_{33}+e_{44}-e_{55}- \\ -e_{66}-e_{77}-e_{88}) + \alpha_3(-e_{15}-e_{26}-e_{37}-e_{48}+e_{51}+e_{62}+e_{73}+e_{84}) + \alpha_4(e_{11}+e_{22}-e_{33}-e_{44}+e_{55}+ \\ +e_{66}-e_{77}-e_{88}) + \alpha_5(-e_{13}-e_{24}+e_{31}+e_{42}-e_{57}-e_{68}+e_{75}+e_{86}) + \alpha_6(e_{11}-e_{22}+e_{33}-e_{44}+e_{55}- \\ -e_{66}+e_{77}-e_{88}) + \alpha_7(-e_{12}+e_{21}-e_{34}+e_{43}-e_{56}+e_{65}-e_{78}+e_{87}) + \alpha_8(e_{15}+e_{26}+e_{37}+e_{48}+e_{51}+ \\ +e_{62}+e_{73}+e_{84}) + \alpha_9(e_{13}+e_{24}+e_{31}+e_{42}+e_{57}+e_{68}+e_{75}+e_{86}) + \alpha_{10}(e_{12}+e_{21}+e_{34}+e_{43}+e_{56}+ \\ +e_{65}+e_{78}+e_{87}) + \alpha_{11}(e_{11}+e_{22}-e_{33}-e_{44}-e_{55}-e_{66}+e_{77}+e_{88}) + \alpha_{12}(e_{13}+e_{24}+e_{31}+e_{42}-e_{57}- \\ -e_{68}-e_{75}-e_{86}) + \alpha_{13}(-e_{13}-e_{24}+e_{31}+e_{42}+e_{57}+e_{68}-e_{75}-e_{86}) + \alpha_{14}(e_{15}+e_{26}-e_{37}-e_{48}+e_{51}+ \\ +e_{62}-e_{73}-e_{84}) + \alpha_{15}(e_{17}+e_{28}+e_{35}+e_{46}+e_{53}+e_{64}+e_{71}+e_{82}) + \alpha_{16}(-e_{17}-e_{28}+e_{35}+e_{46}-e_{53}- \\ -e_{64}+e_{71}+e_{82}) + \alpha_{17}(-e_{15}-e_{26}+e_{37}+e_{48}+e_{51}+e_{62}-e_{73}-e_{84}) + \alpha_{18}(-e_{17}-e_{28}-e_{35}-e_{46}+ \\ +e_{53}+e_{64}+e_{71}+e_{82}) + \alpha_{19}(e_{17}+e_{28}-e_{35}-e_{46}-e_{53}-e_{64}+e_{71}+e_{82}) + \alpha_{20}(e_{11}-e_{22}+e_{33}-e_{44}- \\ -e_{55}+e_{66}-e_{77}+e_{88}) + \alpha_{21}(e_{12}+e_{21}+e_{34}+e_{43}-e_{56}-e_{65}-e_{78}-e_{87}) + \alpha_{22}(-e_{12}+e_{21}-e_{34}+e_{43}+ \\ +e_{56}-e_{65}+e_{78}-e_{87}) + \alpha_{23}(e_{15}-e_{26}+e_{37}-e_{48}+e_{51}-e_{62}+e_{73}-e_{84}) + \alpha_{24}(e_{16}+e_{25}+e_{38}+e_{47}+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e_{52} + e_{61} + e_{74} + e_{83}) + \alpha_{25}(-e_{16} + e_{25} - e_{38} + e_{47} - e_{52} + e_{61} - e_{74} + e_{83}) + \alpha_{26}(-e_{15} + e_{26} - e_{37} + \\
& e_{48} + e_{51} - e_{62} + e_{73} - e_{84}) + \alpha_{27}(-e_{16} - e_{25} - e_{38} - e_{47} + e_{52} + e_{61} + e_{74} + e_{83}) + \alpha_{28}(e_{16} - e_{25} + e_{38} - \\
& e_{47} - e_{52} + e_{61} - e_{74} + e_{83}) + \alpha_{29}(e_{11} - e_{22} - e_{33} + e_{44} + e_{55} - e_{66} - e_{77} + e_{88}) + \alpha_{30}(e_{12} + e_{21} - e_{34} - \\
& e_{43} + e_{56} + e_{65} - e_{78} - e_{87}) + \alpha_{31}(-e_{12} + e_{21} + e_{34} - e_{43} - e_{56} + e_{65} + e_{78} - e_{87}) + \alpha_{32}(e_{13} - e_{24} + e_{31} - \\
& e_{42} + e_{57} - e_{68} + e_{75} - e_{86}) + \alpha_{33}(e_{14} + e_{23} + e_{32} + e_{41} + e_{58} + e_{67} + e_{76} + e_{85}) + \alpha_{34}(-e_{14} + e_{23} - e_{32} + \\
& e_{41} - e_{58} + e_{67} - e_{76} + e_{85}) + \alpha_{35}(-e_{13} + e_{24} + e_{31} - e_{42} - e_{57} + e_{68} + e_{75} - e_{86}) + \alpha_{36}(-e_{14} - e_{23} + \\
& e_{32} + e_{41} - e_{58} - e_{67} + e_{76} + e_{85}) + \alpha_{37}(e_{14} - e_{23} - e_{32} + e_{41} + e_{58} - e_{67} - e_{76} + e_{85}) + \alpha_{38}(e_{11} - e_{22} - \\
& e_{33} + e_{44} - e_{55} + e_{66} + e_{77} - e_{88}) + \alpha_{39}(e_{12} + e_{21} - e_{34} - e_{43} - e_{56} - e_{65} + e_{78} + e_{87}) + \alpha_{40}(-e_{12} + e_{21} + \\
& e_{34} - e_{43} + e_{56} - e_{65} - e_{78} + e_{87}) + \alpha_{41}(e_{13} - e_{24} + e_{31} - e_{42} - e_{57} + e_{68} - e_{75} + e_{86}) + \alpha_{42}(e_{14} + e_{23} + \\
& e_{32} + e_{41} - e_{58} - e_{67} - e_{76} - e_{85}) + \alpha_{43}(-e_{14} + e_{23} - e_{32} + e_{41} + e_{58} - e_{67} + e_{76} - e_{85}) + \alpha_{44}(-e_{13} + \\
& e_{24} + e_{31} - e_{42} + e_{57} - e_{68} - e_{75} + e_{86}) + \alpha_{45}(-e_{14} - e_{23} + e_{32} + e_{41} + e_{58} + e_{67} - e_{76} - e_{85}) + \alpha_{46}(e_{14} - \\
& e_{23} - e_{32} + e_{41} - e_{58} + e_{67} + e_{76} - e_{85}) + \alpha_{47}(e_{15} - e_{26} - e_{37} + e_{48} + e_{51} - e_{62} - e_{73} + e_{84}) + \alpha_{48}(e_{16} + \\
& e_{25} - e_{38} - e_{47} + e_{52} + e_{61} - e_{74} - e_{83}) + \alpha_{49}(-e_{16} + e_{25} + e_{38} - e_{47} - e_{52} + e_{61} + e_{74} - e_{83}) + \alpha_{50}(e_{17} - \\
& e_{28} + e_{35} - e_{46} + e_{53} - e_{64} + e_{71} - e_{82}) + \alpha_{51}(e_{18} + e_{27} + e_{36} + e_{45} + e_{54} + e_{63} + e_{72} + e_{81}) + \alpha_{52}(-e_{18} + \\
& e_{27} - e_{36} + e_{45} - e_{54} + e_{63} - e_{72} + e_{81}) + \alpha_{53}(-e_{17} + e_{28} + e_{35} - e_{46} - e_{53} + e_{64} + e_{71} - e_{82}) + \alpha_{54}(-e_{18} - \\
& e_{27} + e_{36} + e_{45} - e_{54} - e_{63} + e_{72} + e_{81}) + \alpha_{55}(e_{18} - e_{27} - e_{36} + e_{45} + e_{54} - e_{63} - e_{72} + e_{81}) + \alpha_{56}(-e_{15} + \\
& e_{26} + e_{37} - e_{48} + e_{51} - e_{62} - e_{73} + e_{84}) + \alpha_{57}(-e_{16} - e_{25} + e_{38} + e_{47} + e_{52} + e_{61} - e_{74} - e_{83}) + \\
& \alpha_{58}(e_{16} - e_{25} - e_{38} + e_{47} - e_{52} + e_{61} + e_{74} - e_{83}) + \alpha_{59}(-e_{17} + e_{28} - e_{35} + e_{46} + e_{53} - e_{64} + e_{71} - e_{82}) + \\
& \alpha_{60}(-e_{18} - e_{27} - e_{36} - e_{45} + e_{54} + e_{63} + e_{72} + e_{81}) + \alpha_{61}(e_{18} - e_{27} + e_{36} - e_{45} - e_{54} + e_{63} - e_{72} + e_{81}) + \\
& \alpha_{62}(e_{17} - e_{28} - e_{35} + e_{46} - e_{53} + e_{64} + e_{71} - e_{82}) + \alpha_{63}(e_{18} + e_{27} - e_{36} - e_{45} - e_{54} - e_{63} + e_{72} + e_{81}) + \\
& \alpha_{64}(-e_{18} + e_{27} + e_{36} - e_{45} + e_{54} - e_{63} - e_{72} + e_{81})] + e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} + e_{55} + e_{66} + e_{77} + e_{88} = \\
& = \left(\frac{1+s}{2}\right) + [2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{11} + \alpha_{20} + \alpha_{29} + \alpha_{38}) + 1]e_{11} + 2(-\alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} - \\
& \alpha_{22} + \alpha_{30} - \alpha_{31} + \alpha_{39} - \alpha_{40})e_{12} + 2(-\alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{32} - \alpha_{35} + \alpha_{41} - \alpha_{44})e_{13} + 2(\alpha_{33} - \\
& \alpha_{34} - \alpha_{36} + \alpha_{37} + \alpha_{42} - \alpha_{43} - \alpha_{45} + \alpha_{46})e_{14} + 2(-\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} - \alpha_{17} + \alpha_{23} - \alpha_{26} + \alpha_{47} - \alpha_{56})e_{15} + \\
& 2(\alpha_{24} - \alpha_{25} - \alpha_{27} + \alpha_{28} + \alpha_{48} - \alpha_{49} - \alpha_{57} + \alpha_{58})e_{16} + 2(\alpha_{15} - \alpha_{16} - \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{50} - \alpha_{53} - \alpha_{59} + \\
& \alpha_{62})e_{17} + 2(\alpha_{51} - \alpha_{52} - \alpha_{54} + \alpha_{55} - \alpha_{60} + \alpha_{61} + \alpha_{63} - \alpha_{64})e_{18} + 2(\alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{30} + \\
& \alpha_{31} + \alpha_{39} + \alpha_{40})e_{21} + [2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 + \alpha_{11} - \alpha_{20} - \alpha_{29} - \alpha_{38}) + 1]e_{22} + 2(\alpha_{33} + \alpha_{34} - \alpha_{36} - \\
& \alpha_{37} + \alpha_{42} + \alpha_{43} - \alpha_{45} - \alpha_{46})e_{23} + 2(-\alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{32} + \alpha_{35} - \alpha_{41} + \alpha_{44})e_{24} + 2(\alpha_{24} + \\
& \alpha_{25} - \alpha_{27} - \alpha_{28} + \alpha_{48} + \alpha_{49} - \alpha_{57} - \alpha_{58})e_{25} + 2(-\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} - \alpha_{17} - \alpha_{23} + \alpha_{26} - \alpha_{47} + \alpha_{56})e_{26} + \\
& 2(\alpha_{51} + \alpha_{52} - \alpha_{54} - \alpha_{55} - \alpha_{60} - \alpha_{61} + \alpha_{63} + \alpha_{64})e_{27} + 2(\alpha_{15} - \alpha_{16} - \alpha_{18} + \alpha_{19} - \alpha_{50} + \alpha_{53} + \alpha_{59} - \\
& \alpha_{62})e_{28} + 2(\alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{32} + \alpha_{35} + \alpha_{41} + \alpha_{44})e_{31} + 2(\alpha_{33} - \alpha_{34} + \alpha_{36} - \alpha_{37} + \alpha_{42} - \alpha_{43} + \\
& \alpha_{45} - \alpha_{46})e_{32} + [2(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_6 - \alpha_{11} + \alpha_{20} - \alpha_{29} - \alpha_{38}) + 1]e_{33} + 2(-\alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} - \alpha_{22} - \\
& \alpha_{30} + \alpha_{31} - \alpha_{39} + \alpha_{40})e_{34} + 2(\alpha_{15} + \alpha_{16} - \alpha_{18} - \alpha_{19} + \alpha_{50} + \alpha_{53} - \alpha_{59} - \alpha_{62})e_{35} + 2(\alpha_{51} - \alpha_{52} + \alpha_{54} - \\
& \alpha_{55} - \alpha_{60} + \alpha_{61} - \alpha_{63} + \alpha_{64})e_{36} + 2(-\alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} + \alpha_{17} + \alpha_{23} - \alpha_{26} - \alpha_{47} + \alpha_{56})e_{37} + 2(\alpha_{24} - \alpha_{25} - \\
& \alpha_{27} + \alpha_{28} - \alpha_{48} + \alpha_{49} + \alpha_{57} - \alpha_{58})e_{38} + 2(\alpha_{33} + \alpha_{34} + \alpha_{36} + \alpha_{37} + \alpha_{42} + \alpha_{43} + \alpha_{45} + \alpha_{46})e_{41} + 2(\alpha_5 + \\
& \alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{32} - \alpha_{35} - \alpha_{41} - \alpha_{44})e_{42} + 2(\alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} + \alpha_{22} - \alpha_{30} - \alpha_{31} - \alpha_{39} - \alpha_{40})e_{43} + \\
& [2(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_{11} - \alpha_{20} + \alpha_{29} + \alpha_{38}) + 1]e_{44} + 2(\alpha_{51} + \alpha_{52} + \alpha_{54} + \alpha_{55} - \alpha_{60} - \alpha_{61} - \alpha_{63} - \\
& \alpha_{64})e_{45} + 2(\alpha_{15} + \alpha_{26} - \alpha_{18} - \alpha_{19} - \alpha_{50} - \alpha_{53} + \alpha_{59} + \alpha_{62})e_{46} + 2(\alpha_{24} + \alpha_{25} - \alpha_{27} - \alpha_{28} - \alpha_{48} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_{49} + \alpha_{57} + \alpha_{58})e_{47} + 2(-\alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} + \alpha_{17} - \alpha_{23} + \alpha_{26} + \alpha_{47} - \alpha_{56})e_{48} + 2(\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} + \alpha_{17} + \\
& \alpha_{23} + \alpha_{26} + \alpha_{47} + \alpha_{56})e_{51} + 2(\alpha_{24} - \alpha_{25} + \alpha_{27} - \alpha_{28} + \alpha_{48} - \alpha_{49} + \alpha_{57} - \alpha_{58})e_{52} + 2(\alpha_{15} - \alpha_{16} + \alpha_{18} - \\
& \alpha_{19} + \alpha_{50} - \alpha_{53} + \alpha_{59} - \alpha_{62})e_{53} + 2(\alpha_{51} - \alpha_{52} - \alpha_{54} + \alpha_{55} + \alpha_{60} - \alpha_{61} - \alpha_{63} + \alpha_{64})e_{54} + [2(\alpha_1 - \alpha_2 + \\
& \alpha_4 + \alpha_6 - \alpha_{11} - \alpha_{20} + \alpha_{29} - \alpha_{38}) + 1]e_{55} + 2(-\alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{30} - \alpha_{31} - \alpha_{39} + \alpha_{40})e_{56} + \\
& 2(-\alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{32} - \alpha_{35} - \alpha_{41} + \alpha_{44})e_{57} + 2(\alpha_{33} - \alpha_{34} - \alpha_{36} + \alpha_{37} - \alpha_{42} + \alpha_{43} + \alpha_{45} - \\
& \alpha_{46})e_{58} + 2(\alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{27} + \alpha_{28} + \alpha_{48} + \alpha_{49} + \alpha_{57} + \alpha_{58})e_{61} + 2(\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} + \alpha_{17} - \alpha_{23} - \alpha_{26} - \\
& \alpha_{47} - \alpha_{56})e_{62} + 2(\alpha_{51} + \alpha_{52} - \alpha_{54} - \alpha_{55} + \alpha_{60} + \alpha_{61} - \alpha_{63} - \alpha_{64})e_{63} + 2(\alpha_{15} - \alpha_{16} + \alpha_{18} - \alpha_{19} - \alpha_{50} + \\
& \alpha_{53} - \alpha_{59} + \alpha_{62})e_{64} + 2(\alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} - \alpha_{22} + \alpha_{30} + \alpha_{31} - \alpha_{39} - \alpha_{40})e_{65} + [2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 - \\
& \alpha_{11} + \alpha_{20} - \alpha_{29} + \alpha_{38}) + 1]e_{66} + 2(\alpha_{33} + \alpha_{34} - \alpha_{36} - \alpha_{37} - \alpha_{42} - \alpha_{43} + \alpha_{45} + \alpha_{46})e_{67} + 2(-\alpha_5 + \alpha_9 - \\
& \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{32} + \alpha_{35} + \alpha_{41} - \alpha_{44})e_{68} + 2(\alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{50} + \alpha_{53} + \alpha_{59} + \alpha_{62})e_{71} + 2(\alpha_{51} - \\
& \alpha_{52} + \alpha_{54} - \alpha_{55} + \alpha_{60} - \alpha_{61} + \alpha_{63} - \alpha_{64})e_{72} + 2(\alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} - \alpha_{17} + \alpha_{23} + \alpha_{26} - \alpha_{47} - \alpha_{56})e_{73} + \\
& 2(\alpha_{24} - \alpha_{25} + \alpha_{27} - \alpha_{28} - \alpha_{48} + \alpha_{49} - \alpha_{57} + \alpha_{58})e_{74} + 2(\alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{32} + \alpha_{35} - \alpha_{41} - \\
& \alpha_{44})e_{75} + 2(\alpha_{33} - \alpha_{34} + \alpha_{36} - \alpha_{37} - \alpha_{42} + \alpha_{43} - \alpha_{45} + \alpha_{46})e_{76} + [2(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{11} - \alpha_{20} - \\
& \alpha_{29} + \alpha_{38}) + 1]e_{77} + 2(-\alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} + \alpha_{22} - \alpha_{30} + \alpha_{31} + \alpha_{39} - \alpha_{40})e_{78} + 2(\alpha_{51} + \alpha_{52} + \alpha_{54} + \alpha_{55} + \\
& \alpha_{60} + \alpha_{61} + \alpha_{63} + \alpha_{64})e_{81} + 2(\alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{19} - \alpha_{50} - \alpha_{53} - \alpha_{59} - \alpha_{62})e_{82} + 2(\alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{27} + \\
& \alpha_{28} - \alpha_{48} - \alpha_{49} - \alpha_{57} - \alpha_{58})e_{83} + 2(\alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} - \alpha_{17} - \alpha_{23} - \alpha_{26} + \alpha_{47} + \alpha_{56})e_{84} + 2(\alpha_{33} + \alpha_{34} + \\
& \alpha_{36} + \alpha_{37} - \alpha_{42} - \alpha_{43} - \alpha_{45} - \alpha_{46})e_{85} + 2(\alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{32} - \alpha_{35} + \alpha_{41} + \alpha_{44})e_{86} + 2(\alpha_7 + \\
& \alpha_{10} - \alpha_{21} - \alpha_{22} - \alpha_{30} - \alpha_{31} + \alpha_{39} + \alpha_{40})e_{87} + [2(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_6 + \alpha_{11} + \alpha_{20} + \alpha_{29} - \alpha_{38}) + 1]e_{88}.
\end{aligned}$$

Dáí, u pode ser escrito como uma matriz invertível inteira

$$\mathcal{U} = (u_{ij}), 1 \leq i, j \leq 8, \text{ onde}$$

$u_{11} = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{11} + \alpha_{20} + \alpha_{29} + \alpha_{38}) + 1$
$u_{12} = 2(-\alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} - \alpha_{22} + \alpha_{30} - \alpha_{31} + \alpha_{39} - \alpha_{40})$
$u_{13} = 2(-\alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{32} - \alpha_{35} + \alpha_{41} - \alpha_{44})$
$u_{14} = 2(\alpha_{33} - \alpha_{34} - \alpha_{36} + \alpha_{37} + \alpha_{42} - \alpha_{43} - \alpha_{45} + \alpha_{46})$
$u_{15} = 2(-\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} - \alpha_{17} + \alpha_{23} - \alpha_{26} + \alpha_{47} - \alpha_{56})$
$u_{16} = 2(\alpha_{24} - \alpha_{25} - \alpha_{27} + \alpha_{28} + \alpha_{48} - \alpha_{49} - \alpha_{57} + \alpha_{58})$
$u_{17} = 2(\alpha_{15} - \alpha_{16} - \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{50} - \alpha_{53} - \alpha_{59} + \alpha_{62})$
$u_{18} = 2(\alpha_{51} - \alpha_{52} - \alpha_{54} + \alpha_{55} - \alpha_{60} + \alpha_{61} + \alpha_{63} - \alpha_{64})$
$u_{21} = 2(\alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{30} + \alpha_{31} + \alpha_{39} + \alpha_{40})$
$u_{22} = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 + \alpha_{11} - \alpha_{20} - \alpha_{29} - \alpha_{38}) + 1$
$u_{23} = 2(\alpha_{33} + \alpha_{34} - \alpha_{36} - \alpha_{37} + \alpha_{42} + \alpha_{43} - \alpha_{45} - \alpha_{46})$
$u_{24} = 2(-\alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{32} + \alpha_{35} - \alpha_{41} + \alpha_{44})$
$u_{25} = 2(\alpha_{24} + \alpha_{25} - \alpha_{27} - \alpha_{28} + \alpha_{48} + \alpha_{49} - \alpha_{57} - \alpha_{58})$

$u_{26} = 2(-\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} - \alpha_{17} - \alpha_{23} + \alpha_{26} - \alpha_{47} + \alpha_{56})$
$u_{27} = 2(\alpha_{51} + \alpha_{52} - \alpha_{54} - \alpha_{55} - \alpha_{60} - \alpha_{61} + \alpha_{63} + \alpha_{64})$
$u_{28} = 2(\alpha_{15} - \alpha_{16} - \alpha_{18} + \alpha_{19} - \alpha_{50} + \alpha_{53} + \alpha_{59} - \alpha_{62})$
$u_{31} = 2(\alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{32} + \alpha_{35} + \alpha_{41} + \alpha_{44})$
$u_{32} = 2(\alpha_{33} - \alpha_{34} + \alpha_{36} - \alpha_{37} + \alpha_{42} - \alpha_{43} + \alpha_{45} - \alpha_{46})$
$u_{33} = 2(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_6 - \alpha_{11} + \alpha_{20} - \alpha_{29} - \alpha_{38}) + 1$
$u_{34} = 2(-\alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} - \alpha_{22} - \alpha_{30} + \alpha_{31} - \alpha_{39} + \alpha_{40})$
$u_{35} = 2(\alpha_{15} + \alpha_{16} - \alpha_{18} - \alpha_{19} + \alpha_{50} + \alpha_{53} - \alpha_{59} - \alpha_{62})$
$u_{36} = 2(\alpha_{51} - \alpha_{52} + \alpha_{54} - \alpha_{55} - \alpha_{60} + \alpha_{61} - \alpha_{63} + \alpha_{64})$
$u_{37} = 2(-\alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} + \alpha_{17} + \alpha_{23} - \alpha_{26} - \alpha_{47} + \alpha_{56})$
$u_{38} = 2(\alpha_{24} - \alpha_{25} - \alpha_{27} + \alpha_{28} - \alpha_{48} + \alpha_{49} + \alpha_{57} - \alpha_{58})$
$u_{41} = 2(\alpha_{33} + \alpha_{34} + \alpha_{36} + \alpha_{37} + \alpha_{42} + \alpha_{43} + \alpha_{45} + \alpha_{46})$
$u_{42} = 2(\alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{32} - \alpha_{35} - \alpha_{41} - \alpha_{44})$
$u_{43} = 2(\alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} + \alpha_{22} - \alpha_{30} - \alpha_{31} - \alpha_{39} - \alpha_{40})$
$u_{44} = 2(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_{11} - \alpha_{20} + \alpha_{29} + \alpha_{38}) + 1$
$u_{45} = 2(\alpha_{51} + \alpha_{52} + \alpha_{54} + \alpha_{55} - \alpha_{60} - \alpha_{61} - \alpha_{63} - \alpha_{64})$
$u_{46} = 2(\alpha_{15} + \alpha_{26} - \alpha_{18} - \alpha_{19} - \alpha_{50} - \alpha_{53} + \alpha_{59} + \alpha_{62})$
$u_{47} = 2(\alpha_{24} + \alpha_{25} - \alpha_{27} - \alpha_{28} - \alpha_{48} - \alpha_{49} + \alpha_{57} + \alpha_{58})$
$u_{48} = 2(-\alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} + \alpha_{17} - \alpha_{23} + \alpha_{26} + \alpha_{47} - \alpha_{56})$
$u_{51} = 2(\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} + \alpha_{17} + \alpha_{23} + \alpha_{26} + \alpha_{47} + \alpha_{56})$
$u_{52} = 2(\alpha_{24} - \alpha_{25} + \alpha_{27} - \alpha_{28} + \alpha_{48} - \alpha_{49} + \alpha_{57} - \alpha_{58})$
$u_{53} = 2(\alpha_{15} - \alpha_{16} + \alpha_{18} - \alpha_{19} + \alpha_{50} - \alpha_{53} + \alpha_{59} - \alpha_{62})$
$u_{54} = 2(\alpha_{51} - \alpha_{52} - \alpha_{54} + \alpha_{55} + \alpha_{60} - \alpha_{61} - \alpha_{63} + \alpha_{64})$
$u_{55} = 2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 - \alpha_{11} - \alpha_{20} + \alpha_{29} - \alpha_{38}) + 1$
$u_{56} = 2(-\alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{30} - \alpha_{31} - \alpha_{39} + \alpha_{40})$
$u_{57} = 2(-\alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{32} - \alpha_{35} - \alpha_{41} + \alpha_{44})$
$u_{58} = 2(\alpha_{33} - \alpha_{34} - \alpha_{36} + \alpha_{37} - \alpha_{42} + \alpha_{43} + \alpha_{45} - \alpha_{46})$
$u_{61} = 2(\alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{27} + \alpha_{28} + \alpha_{48} + \alpha_{49} + \alpha_{57} + \alpha_{58})$
$u_{62} = 2(\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} + \alpha_{17} - \alpha_{23} - \alpha_{26} - \alpha_{47} - \alpha_{56})$
$u_{63} = 2(\alpha_{51} + \alpha_{52} - \alpha_{54} - \alpha_{55} + \alpha_{60} + \alpha_{61} - \alpha_{63} - \alpha_{64})$
$u_{64} = 2(\alpha_{15} - \alpha_{16} + \alpha_{18} - \alpha_{19} - \alpha_{50} + \alpha_{53} - \alpha_{59} + \alpha_{62})$

$u_{65} = 2(\alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} - \alpha_{22} + \alpha_{30} + \alpha_{31} - \alpha_{39} - \alpha_{40})$
$u_{66} = 2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_{11} + \alpha_{20} - \alpha_{29} + \alpha_{38}) + 1$
$u_{67} = 2(\alpha_{33} + \alpha_{34} - \alpha_{36} - \alpha_{37} - \alpha_{42} - \alpha_{43} + \alpha_{45} + \alpha_{46})$
$u_{68} = 2(-\alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{32} + \alpha_{35} + \alpha_{41} - \alpha_{44})$
$u_{71} = 2(\alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{50} + \alpha_{53} + \alpha_{59} + \alpha_{62})$
$u_{72} = 2(\alpha_{51} - \alpha_{52} + \alpha_{54} - \alpha_{55} + \alpha_{60} - \alpha_{61} + \alpha_{63} - \alpha_{64})$
$u_{73} = 2(\alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} - \alpha_{17} + \alpha_{23} + \alpha_{26} - \alpha_{47} - \alpha_{56})$
$u_{74} = 2(\alpha_{24} - \alpha_{25} + \alpha_{27} - \alpha_{28} - \alpha_{48} + \alpha_{49} - \alpha_{57} + \alpha_{58})$
$u_{75} = 2(\alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{32} + \alpha_{35} - \alpha_{41} - \alpha_{44})$
$u_{76} = 2(\alpha_{33} - \alpha_{34} + \alpha_{36} - \alpha_{37} - \alpha_{42} + \alpha_{43} - \alpha_{45} + \alpha_{46})$
$u_{77} = 2(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{11} - \alpha_{20} - \alpha_{29} + \alpha_{38}) + 1$
$u_{78} = 2(-\alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} + \alpha_{22} - \alpha_{30} + \alpha_{31} + \alpha_{39} - \alpha_{40})$
$u_{81} = 2(\alpha_{51} + \alpha_{52} + \alpha_{54} + \alpha_{55} + \alpha_{60} + \alpha_{61} + \alpha_{63} + \alpha_{64})$
$u_{82} = 2(\alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{19} - \alpha_{50} - \alpha_{53} - \alpha_{59} - \alpha_{62})$
$u_{83} = 2(\alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{27} + \alpha_{28} - \alpha_{48} - \alpha_{49} - \alpha_{57} - \alpha_{58})$
$u_{84} = 2(\alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} - \alpha_{17} - \alpha_{23} - \alpha_{26} + \alpha_{47} + \alpha_{56})$
$u_{85} = 2(\alpha_{33} + \alpha_{34} + \alpha_{36} + \alpha_{37} - \alpha_{42} - \alpha_{43} - \alpha_{45} - \alpha_{46})$
$u_{86} = 2(\alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{32} - \alpha_{35} + \alpha_{41} + \alpha_{44})$
$u_{87} = 2(\alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} - \alpha_{22} - \alpha_{30} - \alpha_{31} + \alpha_{39} + \alpha_{40})$
$u_{88} = 2(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_6 + \alpha_{11} + \alpha_{20} + \alpha_{29} - \alpha_{38}) + 1$

Assim, produzimos o monomorfismo

$$\varphi : U_2 \rightarrow \mathcal{M},$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 2\mathbb{Z} + 1 & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 & 2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} + 1 \end{bmatrix}_{det=\pm 1},$$

definido por

$$\varphi(u) = 2(x_{ij}) + \mathcal{I}_d, \quad 1 \leq i, j \leq 8, \text{ onde}$$

$x_{11} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{11} + \alpha_{20} + \alpha_{29} + \alpha_{38}$
$x_{12} = -\alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} - \alpha_{22} + \alpha_{30} - \alpha_{31} + \alpha_{39} - \alpha_{40}$
$x_{13} = -\alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{32} - \alpha_{35} + \alpha_{41} - \alpha_{44}$
$x_{14} = \alpha_{33} - \alpha_{34} - \alpha_{36} + \alpha_{37} + \alpha_{42} - \alpha_{43} - \alpha_{45} + \alpha_{46}$
$x_{15} = -\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} - \alpha_{17} + \alpha_{23} - \alpha_{26} + \alpha_{47} - \alpha_{56}$
$x_{16} = \alpha_{24} - \alpha_{25} - \alpha_{27} + \alpha_{28} + \alpha_{48} - \alpha_{49} - \alpha_{57} + \alpha_{58}$
$x_{17} = \alpha_{15} - \alpha_{16} - \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{50} - \alpha_{53} - \alpha_{59} + \alpha_{62}$
$x_{18} = \alpha_{51} - \alpha_{52} - \alpha_{54} + \alpha_{55} - \alpha_{60} + \alpha_{61} + \alpha_{63} - \alpha_{64}$
$x_{21} = \alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{30} + \alpha_{31} + \alpha_{39} + \alpha_{40}$
$x_{22} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 + \alpha_{11} - \alpha_{20} - \alpha_{29} - \alpha_{38}$
$x_{23} = \alpha_{33} + \alpha_{34} - \alpha_{36} - \alpha_{37} + \alpha_{42} + \alpha_{43} - \alpha_{45} - \alpha_{46}$
$x_{24} = -\alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{32} + \alpha_{35} - \alpha_{41} + \alpha_{44}$
$x_{25} = \alpha_{24} + \alpha_{25} - \alpha_{27} - \alpha_{28} + \alpha_{48} + \alpha_{49} - \alpha_{57} - \alpha_{58}$
$x_{26} = -\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} - \alpha_{17} - \alpha_{23} + \alpha_{26} - \alpha_{47} + \alpha_{56}$
$x_{27} = \alpha_{51} + \alpha_{52} - \alpha_{54} - \alpha_{55} - \alpha_{60} - \alpha_{61} + \alpha_{63} + \alpha_{64}$
$x_{28} = \alpha_{15} - \alpha_{16} - \alpha_{18} + \alpha_{19} - \alpha_{50} + \alpha_{53} + \alpha_{59} - \alpha_{62}$
$x_{31} = \alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{32} + \alpha_{35} + \alpha_{41} + \alpha_{44}$
$x_{32} = \alpha_{33} - \alpha_{34} + \alpha_{36} - \alpha_{37} + \alpha_{42} - \alpha_{43} + \alpha_{45} - \alpha_{46}$
$x_{33} = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_6 - \alpha_{11} + \alpha_{20} - \alpha_{29} - \alpha_{38}$
$x_{34} = -\alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} - \alpha_{22} - \alpha_{30} + \alpha_{31} - \alpha_{39} + \alpha_{40})$
$x_{35} = \alpha_{15} + \alpha_{16} - \alpha_{18} - \alpha_{19} + \alpha_{50} + \alpha_{53} - \alpha_{59} - \alpha_{62}$
$x_{36} = \alpha_{51} - \alpha_{52} + \alpha_{54} - \alpha_{55} - \alpha_{60} + \alpha_{61} - \alpha_{63} + \alpha_{64}$
$x_{37} = -\alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} + \alpha_{17} + \alpha_{23} - \alpha_{26} - \alpha_{47} + \alpha_{56}$
$x_{38} = \alpha_{24} - \alpha_{25} - \alpha_{27} + \alpha_{28} - \alpha_{48} + \alpha_{49} + \alpha_{57} - \alpha_{58}$
$x_{41} = \alpha_{33} + \alpha_{34} + \alpha_{36} + \alpha_{37} + \alpha_{42} + \alpha_{43} + \alpha_{45} + \alpha_{46}$
$x_{42} = \alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{32} - \alpha_{35} - \alpha_{41} - \alpha_{44}$
$x_{43} = \alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{21} + \alpha_{22} - \alpha_{30} - \alpha_{31} - \alpha_{39} - \alpha_{40}$
$x_{44} = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_{11} - \alpha_{20} + \alpha_{29} + \alpha_{38}$
$x_{45} = \alpha_{51} + \alpha_{52} + \alpha_{54} + \alpha_{55} - \alpha_{60} - \alpha_{61} - \alpha_{63} - \alpha_{64}$
$x_{46} = \alpha_{15} + \alpha_{26} - \alpha_{18} - \alpha_{19} - \alpha_{50} - \alpha_{53} + \alpha_{59} + \alpha_{62}$
$x_{47} = \alpha_{24} + \alpha_{25} - \alpha_{27} - \alpha_{28} - \alpha_{48} - \alpha_{49} + \alpha_{57} + \alpha_{58}$
$x_{48} = -\alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} + \alpha_{17} - \alpha_{23} + \alpha_{26} + \alpha_{47} - \alpha_{56}$
$x_{51} = \alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} + \alpha_{17} + \alpha_{23} + \alpha_{26} + \alpha_{47} + \alpha_{56}$
$x_{52} = \alpha_{24} - \alpha_{25} + \alpha_{27} - \alpha_{28} + \alpha_{48} - \alpha_{49} + \alpha_{57} - \alpha_{58}$

$x_{53} = \alpha_{15} - \alpha_{16} + \alpha_{18} - \alpha_{19} + \alpha_{50} - \alpha_{53} + \alpha_{59} - \alpha_{62}$
$x_{54} = \alpha_{51} - \alpha_{52} - \alpha_{54} + \alpha_{55} + \alpha_{60} - \alpha_{61} - \alpha_{63} + \alpha_{64}$
$x_{55} = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 - \alpha_{11} - \alpha_{20} + \alpha_{29} - \alpha_{38}$
$x_{56} = -\alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{30} - \alpha_{31} - \alpha_{39} + \alpha_{40}$
$x_{57} = -\alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{32} - \alpha_{35} - \alpha_{41} + \alpha_{44}$
$x_{58} = \alpha_{33} - \alpha_{34} - \alpha_{36} + \alpha_{37} - \alpha_{42} + \alpha_{43} + \alpha_{45} - \alpha_{46}$
$x_{61} = \alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{27} + \alpha_{28} + \alpha_{48} + \alpha_{49} + \alpha_{57} + \alpha_{58}$
$x_{62} = \alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{14} + \alpha_{17} - \alpha_{23} - \alpha_{26} - \alpha_{47} - \alpha_{56}$
$x_{63} = \alpha_{51} + \alpha_{52} - \alpha_{54} - \alpha_{55} + \alpha_{60} + \alpha_{61} - \alpha_{63} - \alpha_{64}$
$x_{64} = \alpha_{15} - \alpha_{16} + \alpha_{18} - \alpha_{19} - \alpha_{50} + \alpha_{53} - \alpha_{59} + \alpha_{62}$
$x_{65} = \alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} - \alpha_{22} + \alpha_{30} + \alpha_{31} - \alpha_{39} - \alpha_{40}$
$x_{66} = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_{11} + \alpha_{20} - \alpha_{29} + \alpha_{38}$
$x_{67} = \alpha_{33} + \alpha_{34} - \alpha_{36} - \alpha_{37} - \alpha_{42} - \alpha_{43} + \alpha_{45} + \alpha_{46}$
$x_{68} = -\alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{32} + \alpha_{35} + \alpha_{41} - \alpha_{44}$
$x_{71} = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{50} + \alpha_{53} + \alpha_{59} + \alpha_{62}$
$x_{72} = \alpha_{51} - \alpha_{52} + \alpha_{54} - \alpha_{55} + \alpha_{60} - \alpha_{61} + \alpha_{63} - \alpha_{64}$
$x_{73} = \alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} - \alpha_{17} + \alpha_{23} + \alpha_{26} - \alpha_{47} - \alpha_{56}$
$x_{74} = \alpha_{24} - \alpha_{25} + \alpha_{27} - \alpha_{28} - \alpha_{48} + \alpha_{49} - \alpha_{57} + \alpha_{58}$
$x_{75} = \alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} - \alpha_{13} + \alpha_{32} + \alpha_{35} - \alpha_{41} - \alpha_{44}$
$x_{76} = \alpha_{33} - \alpha_{34} + \alpha_{36} - \alpha_{37} - \alpha_{42} + \alpha_{43} - \alpha_{45} + \alpha_{46}$
$x_{77} = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{11} - \alpha_{20} - \alpha_{29} + \alpha_{38}$
$x_{78} = -\alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} + \alpha_{22} - \alpha_{30} + \alpha_{31} + \alpha_{39} - \alpha_{40}$
$x_{81} = \alpha_{51} + \alpha_{52} + \alpha_{54} + \alpha_{55} + \alpha_{60} + \alpha_{61} + \alpha_{63} + \alpha_{64}$
$x_{82} = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{19} - \alpha_{50} - \alpha_{53} - \alpha_{59} - \alpha_{62}$
$x_{83} = \alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{27} + \alpha_{28} - \alpha_{48} - \alpha_{49} - \alpha_{57} - \alpha_{58}$
$x_{84} = \alpha_3 + \alpha_8 - \alpha_{14} - \alpha_{17} - \alpha_{23} - \alpha_{26} + \alpha_{47} + \alpha_{56}$
$x_{85} = \alpha_{33} + \alpha_{34} + \alpha_{36} + \alpha_{37} - \alpha_{42} - \alpha_{43} - \alpha_{45} - \alpha_{46}$
$x_{86} = \alpha_5 + \alpha_9 - \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{32} - \alpha_{35} + \alpha_{41} + \alpha_{44}$
$x_{87} = \alpha_7 + \alpha_{10} - \alpha_{21} - \alpha_{22} - \alpha_{30} - \alpha_{31} + \alpha_{39} + \alpha_{40}$
$x_{88} = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_6 + \alpha_{11} + \alpha_{20} + \alpha_{29} - \alpha_{38}$

Seja $\mathcal{A} = 2(x_{ij}) + \mathcal{I}_d$ uma matriz de ordem 8 tal que $x_{ij} \in \mathbb{Z}$, para todo i, j , com $1 \leq i, j \leq 8$. Temos que:

$$\det \mathcal{A} = 1 + 2\beta_1 + 4\beta_2 + 8\beta_3 + 16\beta_4 + 32\beta_5 + 64\beta_6 + 128\beta_7 + 256\beta_8,$$

onde $\beta_r \in \mathbb{Z}$, $1 \leq r \leq 8$. Em particular,

$$\beta_1 = x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44} + x_{55} + x_{66} + x_{77} + x_{88}.$$

Afirmção: $\mathcal{A} \in \varphi(U_2)$ se, e somente se, $\det \mathcal{A} = 1$ e, para cada k , $1 \leq k \leq 8$, os inteiros $x_{ij_i} \in \mathfrak{B}_k$, $1 \leq i \leq 8$, satisfazem as seguintes condições:

- (1) Todos os inteiros x_{ij_i} , $1 \leq i \leq 8$, tem a mesma paridade;
- (2) Os inteiros x_{ij_i} , $1 \leq i \leq 4$ estão, aos pares, na mesma classe módulo 4, assim como os inteiros x_{ij_i} , $5 \leq i \leq 8$;
- (3) Se x_{1j_1} e $x_{(1+k)j_{(1+k)}}$, $1 \leq k \leq 3$, é um par, então x_{5j_5} e $x_{(5+k)j_{(5+k)}}$ também o é;
- (4) O número total de pares contidos em cada classe módulo 4 é par;
- (5) Se $x_{ij_i} = 4q_i + r_i$, $1 \leq i \leq 8$, então os q_i estão, aos pares, na mesma classe módulo 2.

De fato, $\mathcal{A} \in \varphi(U_2)$ se, e somente se, $\det \mathcal{A} = \pm 1$ e, para cada k , $1 \leq k \leq 8$, os inteiros $x_{ij_i} \in \mathfrak{B}_k$, $1 \leq i \leq 8$, satisfazem as seguintes condições:

- (i) $8 | (x_{1j_1} + x_{2j_2} + x_{3j_3} + x_{4j_4} + x_{5j_5} + x_{6j_6} + x_{7j_7} + x_{8j_8})$;
- (ii) $2 | (x_{ij_i} + x_{i'j_{i'}})$, para todo $1 \leq i, i' \leq 8$;
- (iii) 4 divide as seguintes somas:
 - $x_{1j_1} + x_{2j_2} + x_{ij_i} + x_{(i+1)j_{(i+1)}}$, com $i \in \{3, 5, 7\}$;
 - $x_{1j_1} + x_{3j_3} + x_{ij_i} + x_{(i+2)j_{(i+2)}}$, com $i \in \{5, 6\}$;
 - $x_{1j_1} + x_{4j_4} + x_{5j_5} + x_{8j_8}$;
 - $x_{1j_1} + x_{4j_4} + x_{6j_6} + x_{7j_7}$;
 - $x_{2j_2} + x_{3j_3} + x_{5j_5} + x_{8j_8}$;
 - $x_{2j_2} + x_{3j_3} + x_{6j_6} + x_{7j_7}$;
 - $x_{2j_2} + x_{4j_4} + x_{ij_i} + x_{(i+2)j_{(i+2)}}$, com $i \in \{5, 6\}$;
 - $x_{3j_3} + x_{4j_4} + x_{ij_i} + x_{(i+1)j_{(i+1)}}$, com $i \in \{5, 7\}$;
 - $x_{5j_5} + x_{6j_6} + x_{7j_7} + x_{8j_8}$.

Ainda, como $8 | (x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44} + x_{55} + x_{66} + x_{77} + x_{88})$, obtemos $\det \mathcal{A} = 1$.

Portanto, como $\varphi(s) = -\mathcal{I}_d$, segue que φ induz o isomorfismo desejado. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Aleev, R.Z., HIGMAN'S CENTRAL UNIT THEOREM, UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS AND FIBONACCI NUMBERS. Int. J. of Alg. and Comp., 4, 3, 309-358, 1994.
- [2] Aleev, R.Z., Panina, Z., THE UNITS OF CYCLIC GROUPS OF ORDERS 7 AND 9. Russ. Math., 43, 80-83, 2000.
- [3] Bhandari, A.K., Luthar, I.S., TORSION UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS OF METACYCLIC GROUPS. J. Number Theory, 17, 170-183, 1983.
- [4] Bovdi, A., THE GROUP OF UNITS OF A GROUP ALGEBRAS OF CHARACTERISTIC p . Publ. Math. Debrecen, 52, 193-244, 1998.
- [5] Bovdi, A., Polcino Milies, F.C., NORMAL SUBGROUPS OF THE GROUP OF UNITS IN GROUP RINGS OF TORSION GROUPS. Publ. Math. Debrecen, 59, 235-242, 2001.
- [6] Bovdi, A., Szakács, A., UNITS OF COMMUTATIVE GROUP ALGEBRA WITH INVOLUTION. Publ. Math. Debrecen, 69, 291-296, 2006.
- [7] Cayley, A., ON THE THEORY OF GROUPS AS DEPENDING ON THE SYMBOLIC EQUATION $\theta^n = 1$. Phil. Mag., 7, 40-47, 1854.
- [8] Conh, J.A., Livingstone, D., ON THE STRUCTURE OF GROUP ALGEBRA. I. Can. J. Math., 17, 583-593, 1965.
- [9] Derek, J.S., Robinson, A. A COURSE IN THE THEORY OF GROUPS. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [10] Endo, N., ON THE UNIT GROUP OF THE GROPU RING $\mathbb{Z}G$. Tokio J. Math., 25, 2, 335-351, 2002.
- [11] Ferraz, R.A., GROUPS GENERATED BY A BASS CYCLIC UNIT AND A BICYCLIC UNIT IN THE UNITS OF $\mathbb{Z}G$. J. Group Theory, 7, 421-430, 2004.

- [12] Ferraz, R.A., UNITS OF $\mathbb{Z}C_p$, GROUPS, RINGS AND GROUP RINGS. Contemp. Math. - Amer. Math. Soc., Providence, RI, 499, 107-119, 2009.
- [13] Giambruno, A., Sehgal, S. K., GENERATORS OF LARGE SUBGROUPS OF UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS OF NILPOTENT GROUPS. J. of Algebra, 174, 150-156, 1995.
- [14] Gonçalves, J.Z., Passman, D.S., UNITARY UNITS IN GROUP ALGEBRAS. I. J. of Mathematics, 125, 131-155, 2001.
- [15] Gonçalves, J.Z., Passman, D.S., FREE UNIT GROUPS IN GROUP ALGEBRAS. J. of Algebra, 246, 226-252, 2001.
- [16] Gonçalves, J.Z., Del Rio, A., BICYCLIC UNITS, BASS CYCLIC UNITS AND FREE GROUPS. J. of Group Theory, 11, 247-265, 2008.
- [17] Gonçalves, J.Z., Veloso, P.M., SPECIAL UNITS, UNIPONTET UNITS AND FREE GROUPS IN GROUP ALGEBRAS. Contemp. Math. - Amer. Math. Soc., Print, 499, 127-140, 2009.
- [18] Goodaire, E.G., Jespers, E., DETERMINING UNITS IN SOME INTEGRAL GROUP RINGS. Canad. Math. Bull., 33, 2, 242-246, 1990.
- [19] Gorenstein, D., FINITE GROUPS. Harper and Row Publishers, New York, 1968.
- [20] Higman, G., UNITS OF GROUP RINGS. Proc. London Math. Soc., 46, 205-214, 1971.
- [21] Jespers, E., Leal, G., DESCRIBING UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS OF SOME 2-GROUPS. Comm. Algebra, 19, 6, 1809-1827, 1991.
- [22] Jespers, E., Leal, G., GENERATORS OF LARGE SUBGROUPS OF THE UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS. Manuscripta Math., 78, 303-315, 1993.
- [23] Jespers, E., Leal, G., Parmenter, M.M., BICYCLIC AND BASS CYCLIC UNITS IN GROUP RINGS. Canad. Math. Bull., 36, 2, 178-182, 1993.
- [24] Jespers, E., Leal, G., Polcino Milies, F.C., UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS OF SOME METACYCLIC GROUPS. Canad. Math. Bull., 37, 2, 228-237, 1994.
- [25] Jespers, E., BICYCLIC UNIT IN SOME INTEGRAL GROUP RINGS. Canada Math. Bull, 38, 80-86, 1995.
- [26] Jespers, E., Parmenter, M.M., Sehgal, K., CENTRAL UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS OF NILPOTENT GROUPS. Proc. Amer. Math Soc., 124, 1007-1012, 1996.

- [27] Jespers, E., Polcino Milies, F.C., UNITS OF GROUP RINGS. J. Pure And Appl. Algebra, 107, 233-251, 1996.
- [28] Keown, R., AN INTRODUCTION TO GROUP REPRESENTATION THEORY. Academic Press, New York, 1975.
- [29] Karpilovsky, G., UNIT GROUPS OF GROUP RINGS. Longman Scientific & Technical, 1989.
- [30] Newman, M., INTEGRAL MATRICES. Academic Press., New York, 1972.
- [31] Noether, E., HYPERKOMPLEXE GRÖSSEN UND DARSTELLUNGSTHEORIE. Math. Zeitsch., 30, 641-692, 1929.
- [32] Parmenter, M.M., TORSION FREE NORMAL COMPLEMENTS IN THE UNIT GROUP OF INTEGRAL GROUP RINGS. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 12, 113-118, 1990.
- [33] Passman, D., THE ALGEBRAIC STRUCTURE OF GROUP RINGS. Wiley & Sons, New York, 1977.
- [34] Polcino Milies, F.C., THE UNITS OF INTEGRAL GROUP RING $\mathbb{Z}D_4$. Bol. Soc. Brasileira De Mat., 4, 85-92, 1972.
- [35] Polcino Milies, F.C., INTEGRAL GROUP RINGS WITH NILPOTENT UNIT GROUPS. C. J. Math., 28, 954-960, 1976.
- [36] Polcino Milies, F.C., ANÉIS DE GRUPOS. IV Escola de Álgebra - SBM, São Paulo, 1976.
- [37] Polcino Milies, F.C., Sehgal, K., CENTRAL UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS. Comm. Algebra, 27, 6233-6241, 1999.
- [38] Polcino Milies, F.C., Sehgal, K., AN INTRODUCTION TO GROUP RINGS. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [39] Ritter, J., Sehgal, K., GENERATORS OF SUBGROUPS OF $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Contemp. Math., 93, 331-347, 1989.
- [40] Ritter, J., Sehgal, K., INTEGRAL GROUP RINGS WITH TRIVIAL CENTRAL UNITS. Proc. Amer. Math. Soc., 108, 327-329, 1990.
- [41] Ritter, J., Sehgal, K., CONSTRUCTION OF UNITS IN INTEGRAL GROUP RINGS OF FINITE NILPOTENT GROUPS. Trans. Amer. Math. Soc., 324, 602-621, 1991.

- [42] Ritter, J., Sehgal, K., CONSTRUCTION OF UNITS IN INTEGRAL GROUP RINGS OF MONOMIAL AND SYMMETRIC GROUPS. J. Algebra, 142, 511-526, 1991.
- [43] Sehgal, S.K., Zassenhaus, H.J, INTEGRAL GROUP RINGS WITH NILPOTENT UNIT GROUPS. Comm. Algebra, 12, 101-111, 1977.
- [44] Sehgal, S.K., TOPICS IN GROUP RINGS. Marcel Dekker, New York, 1978.
- [45] Sehgal, S.K., UNITS IN INTEGRAL GROUP RINGS. Longman Scientific & Technical, New York, 1993.
- [46] Sehgal, S.K., Polcino Milies, F.C., AN INTRODUCTION TO GROUP RINGS. Kluwer Academic Publishers, London, 2002.
- [47] Valenti, A., TORSION UNITS IN INTEGRAL OF GROUP RINGS. Proc. Amer. Math. Soc., 120, 1-4, 1994.

Apêndice

Seja $G \cong \frac{D \times D^* \times D^{**}}{I}$, onde $D \cong D^* \cong D^{**} \cong D_4$ e $I = \{1, ss^*, ss^{**}, s^*s^{**}\}$, um 2-grupo extra-especial de ordem 128, produto central de três cópias de D_4 . Então, utilizando a base matricial elementar para $\mathbb{Q}G\left(\frac{1-s}{2}\right) \cong M_8(\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$ apresentada no *Exemplo 4.8*, determinamos, através de um cálculo minucioso, utilizando o software *Maple*, as representações dos elementos de G em $M_8(\mathbb{Q})$:

$$1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, s \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$a \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, t \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
wv^{**} \mapsto & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad uv^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$u^*t^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, u^*u^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$v^*v^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v^*w^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$bv^*t^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, bv^*u^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$ub^*v^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, ub^*w^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$wv^*a^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, wv^*b^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$vv^*v^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad vv^*w^{**} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$