



**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**  

---

**Universidade Federal do Rio de Janeiro**



**UFRJ**

**Dinâmica de Funções Genéricas do Espaço de Cantor**

**Jessica Yuneiri Lévano Mendoza**

Rio de Janeiro, Brasil  
13 de Março de 2023

# Dinâmica de Funções Genéricas do Espaço de Cantor

Jessica Yuneiri Levano Mendoza

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

Rio de Janeiro, Brasil  
13 de Março de 2023

# Resumo

Nesta dissertação de mestrado, apresentaremos as técnicas desenvolvidas por N. C. Bernardes Jr. e U. B. Darji (*Adv. Math.* **231** (2012), 1655–1680), através de grafos, para o estudo da dinâmica e da estrutura dos espaços  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , o espaço de todos os homeomorfismos e o espaço de todas as funções contínuas do espaço de Cantor, respectivamente. Tais técnicas possibilitaram a obtenção de caracterizações de quando duas funções contínuas do espaço de Cantor são conjugadas entre si. Este resultado é muito importante do ponto de vista da dinâmica, já que conjugação é a noção de isomorfismo em dinâmica topológica. No caso do espaço  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , ele também é muito importante do ponto de vista da álgebra, já que a relação de conjugação de um grupo está intimamente ligada à sua estrutura algébrica. Estas técnicas também possibilitaram uma abordagem unificadora ao estudo da dinâmica dos homeomorfismos genéricos e das funções contínuas genéricas do espaço de Cantor. Elas possibilitaram uma nova prova da existência de uma classe de conjugação residual em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , fornecendo uma descrição através de grafos para os seus elementos. Esta descrição é uma ferramenta muito poderosa para o estudo da dinâmica dos homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor, implicando várias propriedades dinâmicas antigas e novas sobre estes homeomorfismos. Por exemplo, veremos que os homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor não possuem um par Li-Yorke (o que implica o resultado de Glasner-Weiss de que tais homeomorfismos têm entropia topológica zero) e têm a propriedade de sobremaneto. No caso do espaço  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , estas técnicas implicaram um resultado surpreendente: existe um subconjunto residual de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que quaisquer dois de seus elementos são conjugados por um elemento de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Aqui a demonstração também forneceu uma descrição através de grafos dos elementos desse conjunto residual, que constitui uma ferramenta muito poderosa para o estudo da dinâmica das funções contínuas genéricas do espaço de Cantor, implicando várias propriedades dinâmicas antigas e novas sobre estas funções.

**Key words:** Espaço de Cantor, grafos dirigidos, relação de conjugação, caos Li-Yorke, propriedade de sobremaneto, recorrência.

# Abstract

In this master's thesis, we will present the graph theoretic techniques developed by N. C. Bernardes Jr. and U. B. Darji (Adv. Math. **231** (2012), 1655–1680) for the study of the dynamics and the structure of the spaces  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  and  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , the space of all homeomorphisms and the space of all continuous maps of the Cantor space, respectively. Such techniques made it possible to establish characterizations of when two continuous maps of the Cantor space are conjugate to each other. This result is very important from the point of view of dynamics, since conjugacy is the notion of isomorphism in topological dynamics. In the case of the space  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , it is also very important from the point of view of algebra, since the conjugacy relation on a group is intimately related to its algebraic structure. These techniques also enabled a unifying approach to the study of the dynamics of the generic homeomorphisms and of the generic continuous maps of the Cantor space. They provided a new proof of the existence of a residual conjugacy class in  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  by giving a graph theoretic description of its elements. This description is a very powerful tool for the study of the dynamics of the generic homeomorphisms of the Cantor space, implying many old and new dynamical properties of these homeomorphisms. For example, we will see that the generic homeomorphisms of the Cantor space have no Li-Yorke pair (which implies the Glasner-Weiss result that such homeomorphisms have topological entropy zero) and have the shadowing property. In the case of the space  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , these techniques imply a surprising result: there exists a residual subset of  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  such that any two of its elements are conjugate to each other by an element of  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Here the proof also gives a graph theoretic description of the elements of this residual subset, which furnishes a very powerful tool for the study of the dynamics of the generic continuous maps of the Cantor space, implying many old and new dynamical properties of these functions.

**Key words:** Cantor space, directed graphs, conjugacy relation, Li-Yorke chaos, shadowing property, recurrence.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>2</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>1 Estruturas de Grafos das Funções do Espaço de Cantor</b>	<b>9</b>
1.1 Introdução . . . . .	9
1.2 Espaço de Cantor . . . . .	10
1.3 Grafos dirigidos . . . . .	14
1.4 O grafo dirigido $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ . . . . .	19
1.5 Caracterizações da relação de conjugação . . . . .	24
<b>2 Dinâmica dos Homeomorfismos Genéricos do Espaço de Cantor</b>	<b>33</b>
2.1 Introdução . . . . .	33
2.2 Caracterização dos homeomorfismos genéricos . . . . .	34
2.3 Caos Li-Yorke e entropia topológica . . . . .	43
2.4 A propriedade de sombreamento . . . . .	45
2.5 Conjuntos limites e o odômetro universal . . . . .	47
2.6 Noções de recorrência . . . . .	50
2.7 Equicontinuidade e continuidade em cadeia . . . . .	53
<b>3 Dinâmica das Funções Contínuas Genéricas do Espaço de Cantor</b>	<b>56</b>
3.1 Introdução . . . . .	56
3.2 Caracterização das funções contínuas genéricas . . . . .	57
3.3 Caos Li-Yorke e entropia topológica . . . . .	61
3.4 Continuidade em cadeia . . . . .	62
3.5 Conjuntos limites e o odômetro universal . . . . .	62
3.6 Noções de recorrência . . . . .	64



# Introdução

Dada uma propriedade  $P$  sobre elementos de um espaço de Baire  $X$ , dizemos que os *elementos genéricos* de  $X$  possuem a propriedade  $P$  se o conjunto dos elementos de  $X$  que possuem a propriedade  $P$  é *residual* em  $X$ , ou seja, o seu complementar é de primeira categoria em  $X$ . Neste caso, também dizemos que  $P$  é uma *propriedade genérica*.

O estudo da dinâmica de sistemas genéricos é um tema de pesquisa clássico na área de sistemas dinâmicos, tendo a sua origem nos trabalhos pioneiros de J. C. Oxtoby e S. M. Ulam [29, 30] no contexto da teoria ergódica, sobre a genericidade da propriedade de ergodicidade no espaço dos homeomorfismos que preservam medida sobre certas variedades compactas.

No contexto da dinâmica topológica, um estudo sistemático da dinâmica de sistemas genéricos vem sendo desenvolvido durante as últimas cinco décadas. Veja os trabalhos [2, 5, 7, 8, 23, 24, 31, 34, 36, 39], onde referências adicionais podem ser encontradas.

Por outro lado, o famoso *espaço de Cantor* é um exemplo concreto de extrema importância na área de sistemas dinâmicos. Por exemplo, ele é o espaço de base na chamada *dinâmica simbólica*. Mesmo quando consideramos dinâmica sobre variedades (que são espaços totalmente diferentes do espaço de Cantor), é um fato que genericamente os conjuntos limite são espaços de Cantor. Além disso, diversos exemplos e contra-exemplos importantes são modelados sobre o espaço de Cantor. Assim, não é por acaso que a dinâmica de sistemas sobre o espaço de Cantor tem sido estudada por diversos autores em diferentes contextos.

A presente dissertação tem como tema o estudo da dinâmica dos homeomorfismos genéricos e das funções contínuas genéricas do espaço de Cantor.

E. Glasner e B. Weiss [22] provaram que o homeomorfismo genérico do espaço de Cantor tem entropia topológica zero. Aproximadamente na mesma época, E. Akin, M. Hurley e J. Kennedy [5] mostraram que o grupo  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  dos homeomorfismos do espaço de Cantor admite uma classe de conjugação densa, mas o problema da existência ou não de uma classe de conjugação residual permaneceu em aberto. Em um trabalho profundo, A. S. Kechris e C. Rosendal [26] estabeleceram alguns teoremas muito gerais em teoria dos modelos, dos quais segue uma resposta afirmativa a este problema, ou seja, o grupo  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  admite uma classe de conjugação residual. Este é um fato bastante singular. Do ponto de vista da dinâmica, significa que a dinâmica dos

homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor se reduz à dinâmica de um elemento dessa classe. Uma construção de um tal *homeomorfismo especial* do espaço de Cantor foi obtida por E. Akin, E. Glasner e B. Weiss [4]. Não obstante, o fato de se ter um método para construir uma certa função não significa que será fácil determinar as suas propriedades dinâmicas. Mesmo quando temos uma fórmula explícita extremamente simples para a função, pode ser muito difícil estabelecer as suas propriedades dinâmicas. Por exemplo, o conjunto de Julia de um polinômio quadrático  $f(z) = z^2 + c$  no plano complexo pode ser um fractal.

N. C. Bernardes Jr. e U. B. Darji [8] estabeleceram uma nova prova da existência da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  através de uma descrição geométrica, via grafos dirigidos, dos seus elementos. Uma vantagem desse método é que tal descrição é extremamente útil para se obter propriedades dinâmicas dos elementos da classe, ou seja, dos homeomorfismos genéricos. Além disso, de modo um tanto surpreendente, tal método também se aplica no caso das funções contínuas do espaço de Cantor, implicando a existência de um subconjunto residual de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que quaisquer dois de seus elementos são conjugados entre si. Dessa forma, o método desenvolvido em [8], através de grafos dirigidos, unificou o estudo da dinâmica das funções genéricas do espaço de Cantor, tanto homeomorfismos quanto funções contínuas. Além de implicar, com considerável facilidade, todas as propriedades dinâmicas que já eram conhecidas para tais funções genéricas, diversas novas propriedades foram estabelecidas, como, por exemplo, os fatos de que os homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor têm a propriedade de sombreamento e não têm um par Li-Yorke (em particular, não são Li-Yorke caóticos). Um outro fato notável em [8] é que foram obtidas caracterizações da relação de conjugação para funções contínuas do espaço de Cantor. Isto é de grande importância do ponto de vista da dinâmica, já que *conjugação* (ou *conjugação topológica*) é o conceito de isomorfismo em dinâmica topológica. No caso do grupo  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , tais caracterizações também têm importância do ponto de vista da álgebra, já que a relação de conjugação está intimamente relacionada com a estrutura do grupo.

O objetivo da presente dissertação é apresentar, em detalhes, os resultados contidos no artigo [8], tanto no caso de homeomorfismos quanto no caso de funções contínuas.

No Capítulo 1 vamos introduzir e estudar os grafos dirigidos  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ , que desempenharão um papel fundamental no trabalho. Estabeleceremos um teorema de aproximação e obteremos caracterizações da relação de conjugação em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e, em particular, em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

No Capítulo 2 provaremos a existência da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  através de uma descrição envolvendo os grafos dirigidos  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  e aplicaremos tal descrição para o estudo de propriedades dinâmicas dos homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor.

No Capítulo 3 provaremos a existência de um subconjunto residual de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que quaisquer dois de seus elementos são conjugados. Tal prova será feita através de uma descrição

dos elementos desse subconjunto envolvendo os grafos dirigidos  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ . Em seguida, aplicaremos tal descrição para o estudo de propriedades dinâmicas das funções contínuas genéricas do espaço de Cantor.

Mencionamos que N. C. Bernardes Jr. e R. M. Vermersch [9, 10] aplicaram o método desenvolvido em [8] para desenvolver um estudo detalhado da dinâmica coletiva e da dinâmica probabilística das funções genéricas do espaço de Cantor, comprovando novamente a potência do método desenvolvido em [8], mas tais resultados não serão apresentados no presente trabalho.

# Capítulo 1

## Estruturas de Grafos das Funções do Espaço de Cantor

### 1.1 Introdução

No presente capítulo vamos associar a cada função contínua  $f$  do espaço de Cantor e a cada partição  $\mathcal{P}$  do espaço de Cantor, um grafo dirigido  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ . Como ficará claro no decorrer deste e dos próximos capítulos, tais grafos constituem uma ferramenta bastante poderosa no estudo da relação de conjugação entre tais funções e no estudo da dinâmica das funções genéricas do espaço de Cantor. Neste capítulo estabeleceremos dois resultados principais. Primeiro, um teorema de aproximação (Teorema 1.4.6), que nos diz, falando de modo superficial, que podemos aproximar qualquer função contínua (resp. homeomorfismo)  $f$  do espaço de Cantor por um função contínua (resp. homeomorfismo)  $g$  do espaço de Cantor que admite grafos  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$  de um tipo muito especial. Segundo, algumas caracterizações da relação de conjugação entre funções contínuas do espaço de Cantor (Teoremas 1.5.7 e 1.5.12) através desses grafos dirigidos. Tais caracterizações são úteis do ponto de vista da dinâmica, já que funções conjugadas possuem a mesma dinâmica topológica. No caso do grupo dos homeomorfismos do espaço de Cantor, tais caracterizações também são interessantes do ponto de vista da álgebra, já que a relação de conjugação de um grupo está intimamente ligada à sua estrutura algébrica.

Na Seção 1.2 definiremos o conceito de *espaço de Cantor* e provaremos um teorema clássico, devido a L.E.J. Brouwer, que afirma que quaisquer dois espaços de Cantor são homeomorfos. Assim, do ponto de vista topológico, existe um único espaço de Cantor, mas ele pode ser representado de diferentes formas. Um modelo para o espaço de Cantor é o famoso *conjunto ternário de Cantor*, mas no presente trabalho adotaremos como modelo o espaço produto  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , onde  $\{0, 1\}$  está munido da topologia discreta. Também teceremos alguns comentários sobre o importante conceito de *partição* de um espaço de Cantor.

Na Seção 1.3 teceremos alguns comentários sobre grafos dirigidos e consideraremos alguns tipos particulares de grafos dirigidos (*caminhos*, *ciclos*, *balões* e *halteres*) que desempenharão um papel fundamental no desenvolvimento do trabalho.

Na Seção 1.4 vamos associar a cada função contínua  $f$  do espaço de Cantor e a cada partição  $\mathcal{P}$  do espaço de Cantor, um certo grafo dirigido  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ . Estabeleceremos alguns resultados básicos sobre esses grafos e um importante teorema de aproximação, que afirma que toda função contínua (resp. todo homeomorfismo)  $f$  do espaço de Cantor pode ser aproximado por funções contínuas (resp. homeomorfismos)  $g$  do espaço de Cantor que admitem grafos  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$ , com o diâmetro de  $\mathcal{P}$  tão pequeno quanto se queira, consistindo de uma união finita de balões (resp. halteres) disjuntos.

Na Seção 1.5 apresentaremos diversas caracterizações da relação de conjugação entre funções contínuas  $f, g$  do espaço de Cantor, através de relações entre os grafos dirigidos  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  e  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$ . Em particular, obteremos caracterizações da relação de conjugação do grupo dos homeomorfismos do espaço de Cantor.

## 1.2 Espaço de Cantor

**Definição 1.2.1.** Um *espaço de Cantor* é um espaço métrico compacto, não vazio, 0-dimensional e sem pontos isolados.

Lembramos que um espaço topológico é dito *0-dimensional* se existe uma base para a sua topologia formada por conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados.

O seguinte teorema nos permite caracterizar os espaços 0-dimensionais em certo contexto.

**Teorema 1.2.2.** *Um espaço de Hausdorff localmente compacto é 0-dimensional se e somente se é totalmente desconexo.*

**Demonstração:** Ver [38].

**Exemplo 1.2.3.** Consideremos o intervalo  $I = [0, 1]$ . Dividimos  $I$  em três intervalos de comprimentos iguais, com pontos extremos  $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ . Removemos o intervalo aberto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , chamado o *terço médio* de  $I$ , para obter  $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . Dividimos cada um dos dois intervalos fechados que compõem  $I_1$  em três intervalos de comprimentos iguais, com pontos extremos  $\{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}\}$  e  $\{\frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1\}$ , respectivamente. Removemos o terço médio de cada um dos intervalos fechados que compõem  $I_1$ , ou seja, removemos  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  e  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ , para obter  $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ . Indutivamente, construímos uma sequência de conjuntos  $I_n$  consistindo de  $2^n$  intervalos fechados disjuntos, cada um deles com comprimento  $\frac{1}{3^n}$ . O conjunto

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

é chamado o *conjunto ternário de Cantor* ou, simplesmente, o *conjunto de Cantor*. Se consideramos  $C$  como um subespaço de  $I$  com a métrica usual em  $I$ , então as seguintes propriedades se verificam:

- $C$  é não vazio:

Como cada  $I_n$  é compacto e não vazio, e como  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ , então

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

- $C$  é compacto:

Por construção, o conjunto de Cantor  $C$  é uma interseção de conjuntos fechados, donde é fechado. Além disso, como  $C \subset I$  e  $I$  é compacto, concluímos que  $C$  é compacto.

- $C$  é 0-dimensional:

Suponha que existe um conjunto  $A \subset C$  que é conexo, não vazio e tem pelo menos dois pontos  $x$  e  $y$  com  $x \neq y$ . Por construção,  $x, y \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $x \neq y$ , podemos encontrar  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{3^N} < |x - y|$ . Então,  $x$  e  $y$  pertencem a diferentes intervalos de  $I_N$ . Logo, existe pelo menos um intervalo entre  $x$  e  $y$  que não intercepta  $I_N$  e, portanto, não intercepta  $C$ . Seleccionamos um desses intervalos. Qualquer ponto  $z$  escolhido neste intervalo satisfaz que  $z$  está entre  $x$  e  $y$ , mas  $z \notin A$ . Como os únicos subconjuntos conexos e não vazios da reta são os intervalos,  $A$  é um intervalo. Logo, temos uma contradição. Assim, os únicos subconjuntos conexos de  $C$  são  $\{x\}$  para todo  $x \in C$ . Logo,  $C$  é totalmente desconexo. Além disso, todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff, e como  $C$  é compacto, então  $C$  é localmente compacto. Portanto, pelo Teorema 1.2.2,  $C$  é 0-dimensional.

- $C$  não tem pontos isolados:

Tome  $x \in C$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{3^N} < \varepsilon$ . Se  $[a_N, b_N]$  é o subintervalo de  $I_N$  que contém  $x$ , então  $[a_N, b_N] \subset B(x, \varepsilon)$ . Pela construção do conjunto de Cantor,  $a_N, b_N \in C$ . Portanto,  $a_N, b_N \in B(x, \varepsilon) \cap C$ . Como no máximo um dos pontos  $a_N, b_N$  pode ser igual a  $x$ , vemos que  $x$  não é um ponto isolado de  $C$ .

Daí concluímos que o conjunto de Cantor é um espaço de Cantor.

O fato principal desta seção será demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 1.2.4** (Brouwer). *Todo espaço topológico de Hausdorff  $X$ , não vazio, compacto, 0-dimensional, segundo contável e sem pontos isolados é homeomorfo ao espaço produto  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  (o espaço das seqüências que assumem apenas os valores 0 e 1), onde  $\{0, 1\}$  está munido da topologia discreta.*

**Demonstração:** Como primeiro passo, vamos mostrar que a topologia de  $X$  tem uma base enumerável consistindo de conjuntos simultaneamente abertos e fechados. De fato, como  $X$  é segundo contável, a topologia de  $X$  admite uma base enumerável  $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos o conjunto

$$J_n = \{m \in \mathbb{N} : \bar{U}_m \subset U_n\}.$$

Para cada  $m \in J_n$ , existe uma cobertura finita de  $\bar{U}_m$  formada por conjuntos simultaneamente abertos e fechados que estão contidos em  $U_n$  (pois  $X$  é 0-dimensional e  $\bar{U}_m$  é compacto), donde a união  $V_{nm}$  dos elementos dessa cobertura é um conjunto simultaneamente aberto e fechado satisfazendo

$$\bar{U}_m \subset V_{nm} \subset U_n.$$

Como  $X$  é um espaço de Hausdorff compacto,  $X$  é um espaço regular. Logo, se  $x \in U_n$ , então  $x \in \bar{U}_m \subset U_n$  para algum  $m \in J_n$ , donde  $x \in V_{nm} \subset U_n$ . Isto prova que

$$\{V_{nm} : n \in \mathbb{N}, m \in J_n\}$$

é uma base para a topologia de  $X$ , que é claramente enumerável.

Seja  $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma base enumerável para a topologia de  $X$  consistindo de conjuntos não vazios e simultaneamente abertos e fechados. Vamos construir conjuntos não vazios e simultaneamente abertos e fechados  $C_{i_1 \dots i_n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $i_k \in \{0, 1\}$ ) com as seguintes propriedades:

- a.  $X = C_0 \cup C_1$ , com união disjunta;
- b. para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ ,  $C_{i_1 \dots i_n} = C_{i_1 \dots i_n 0} \cup C_{i_1 \dots i_n 1}$ , com união disjunta;
- c. cada  $W_n$  é a união de alguns dos conjuntos  $C_{i_1 \dots i_n}$ ,  $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ .

A construção será feita por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , se  $W_1 \neq X$ , então tomamos  $C_0 = W_1$  e  $C_1 = X \setminus W_1$ . Caso contrário, tomamos qualquer subconjunto próprio  $C_0$  de  $X$  que seja não vazio e simultaneamente aberto e fechado, e definimos  $C_1 = X \setminus C_0$ . Para o passo indutivo, supomos que os conjuntos  $C_{i_1 \dots i_k}$  já foram definidos para quaisquer  $k \leq n$  e  $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$ . Para cada  $n$ -upla  $(i_1, \dots, i_n)$  de zeros e uns, se  $W_{n+1} \cap C_{i_1 \dots i_n}$  não é nem vazio nem todo o conjunto  $C_{i_1 \dots i_n}$ , então tomamos  $C_{i_1 \dots i_n 0} = W_{n+1} \cap C_{i_1 \dots i_n}$  e  $C_{i_1 \dots i_n 1} = C_{i_1 \dots i_n} \setminus W_{n+1}$ . Caso contrário, tomamos qualquer subconjunto próprio  $C_{i_1 \dots i_n 0}$  de  $C_{i_1 \dots i_n}$  que seja não vazio e simultaneamente aberto e fechado, e definimos  $C_{i_1 \dots i_n 1} = C_{i_1 \dots i_n} \setminus C_{i_1 \dots i_n 0}$ . Observe que tais conjuntos existem, pois  $C_{i_1 \dots i_n}$  não pode consistir de um único ponto, devido à suposição de que  $X$  não tem pontos isolados.

Para cada ponto  $\sigma = (i_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , como  $(C_{i_1 \dots i_n})_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência decrescente de conjuntos fechados e não vazios, segue da compacidade de  $X$  que existe um ponto

$$x_{\sigma} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{i_1 \dots i_n}.$$

Afirmamos que não existem outros pontos nessa interseção. De fato, tomemos qualquer ponto  $x \neq x_\sigma$  em  $X$ . Então, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x_\sigma \in W_n$  e  $x \notin W_n$ . Logo,  $C_{i_1 \dots i_n} \subset W_n$ , donde  $x \notin C_{i_1 \dots i_n}$ , provando a nossa afirmação. Por outro lado, como  $\{C_{i_1 \dots i_n} : i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}\}$  é uma partição de  $X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), temos que, para cada  $x \in X$ , existe um único  $\sigma = (i_n)_{n=1}^\infty \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$  tal que  $x \in \bigcap_{n=1}^\infty C_{i_1 \dots i_n}$ , ou seja,  $x = x_\sigma$ .

Agora, definimos uma aplicação  $f : \{0, 1\}^\mathbb{N} \rightarrow X$  por  $f(\sigma) = x_\sigma$ . Esta aplicação é uma bijeção pelo parágrafo anterior. Resta provar que  $f$  é um homeomorfismo. Para isso observe que  $\{C_{i_1 \dots i_n} : n \in \mathbb{N}, i_k \in \{0, 1\}\}$  é uma base para a topologia de  $X$ , já que cada  $W_n$  é a união de alguns  $C_{i_1 \dots i_n}$ . Por construção, temos que

$$f^{-1}(C_{i_1 \dots i_n}) = \{(j_m)_{m=1}^\infty \in \{0, 1\}^\mathbb{N} : j_1 = i_1, \dots, j_n = i_n\}.$$

Portanto,  $\{f^{-1}(C_{i_1 \dots i_n}) : n \in \mathbb{N}, i_k \in \{0, 1\}\}$  é uma base para a topologia produto em  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ . Isto mostra que  $f$  define uma bijeção entre bases para as topologias de  $X$  e de  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ , provando que  $f$  é um homeomorfismo.  $\square$

O Teorema de Brouwer garante que todo espaço de Cantor é homeomorfo a  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ , já que todo espaço métrico compacto é de Hausdorff e segundo contável. Em particular, o conjunto de Cantor é homeomorfo a  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ . Em geral, quaisquer dois espaços de Cantor são homeomorfos.

De agora em diante, denotaremos por  $[i_1 \dots i_n]$  o conjunto dos  $(j_m)_{m=1}^\infty \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$  com  $j_1 = i_1, \dots, j_n = i_n$ . Note que  $\{[i_1 \dots i_n] : n \in \mathbb{N}, i_k \in \{0, 1\}\}$  é uma base para a topologia produto em  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$  formada por conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados.

Definimos uma métrica  $d$  em  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$  da seguinte forma: se  $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^\infty, \tau = (\tau_i)_{i=1}^\infty \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ , então  $d(\sigma, \tau) = \frac{1}{n}$ , onde  $n$  é o menor inteiro positivo tal que  $\sigma_n \neq \tau_n$  se tal inteiro existe, e  $d(\sigma, \tau) = 0$ , caso contrário. Note que, se  $\sigma, \tau \in [i_1 \dots i_n]$ , então  $d(\sigma, \tau) < \frac{1}{n}$ . Além disso, se  $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^\infty \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $B(\sigma, \frac{1}{n}) = [\sigma_1 \dots \sigma_n]$ . Portanto, a métrica  $d$  gera a topologia produto em  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ .

No presente trabalho, o modelo principal do espaço de Cantor que usamos é  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$  munido da métrica  $d$  definida acima.

**Definição 1.2.5.** Uma *partição* de  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$  é uma coleção finita de subconjuntos simultaneamente abertos e fechados, não vazios e dois a dois disjuntos, cuja união é  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ .

**Definição 1.2.6.** Seja  $\mathcal{C}$  uma coleção finita de subconjuntos não vazios de  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ . O *diâmetro* de  $\mathcal{C}$  é definido por

$$\text{diam}(\mathcal{C}) = \max_{A \in \mathcal{C}} \text{diam}(A).$$

**Definição 1.2.7.** Sejam  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  partições de  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ . Uma *aplicação de refinamento* é uma aplicação  $\nu : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  tal que  $a \subset \nu(a)$  para todo  $a \in \mathcal{P}$ . Neste caso, dizemos que  $\mathcal{P}$  é um *refinamento* de  $\mathcal{Q}$ .

**Observação 1.2.8.** Uma aplicação de refinamento é necessariamente sobrejetiva. De fato, suponha que existe  $b \in \mathcal{Q}$  tal que  $\nu(a) \neq b$  para todo  $a \in \mathcal{P}$ . Então

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{a \in \mathcal{P}} a \subset \bigcup_{a \in \mathcal{P}} \nu(a) \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus b,$$

o que é uma contradição.

**Exemplo 1.2.9.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos  $\mathcal{B}_n = \{[\sigma_1 \dots \sigma_n] : \sigma_k \in \{0, 1\}\}$ . Note que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

- $\mathcal{B}_n$  é uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .
- $\mathcal{B}_{n+1}$  é um refinamento de  $\mathcal{B}_n$ .
- $\text{diam}(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{n+1}$  (logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{B}_n) = 0$ ).

Usamos  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  para denotar o espaço de todas as funções contínuas e de todos os homeomorfismos do espaço de Cantor, respectivamente, dotados da seguinte métrica:

$$\tilde{d}(f, g) = \max_{\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}} d(f(\sigma), g(\sigma)).$$

Se  $f, g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $\mathcal{P}$  é uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , então definimos a relação de equivalência  $f \sim_{\mathcal{P}} g$  que significa que, para cada  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , existe  $a \in \mathcal{P}$  de modo que  $f(\sigma), g(\sigma) \in a$ . Podemos ver que se  $f \sim_{\mathcal{P}} g$ , então

$$\tilde{d}(f, g) \leq \text{diam}(\mathcal{P}).$$

**Observação 1.2.10.** Cada classe de equivalência segundo  $\sim_{\mathcal{P}}$  é aberta em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . De fato, seja  $[f]$  uma classe de equivalência e  $g \in [f]$ . Como  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é compacto e  $a \in \mathcal{P}$  é simultaneamente aberto e fechado, então  $d(a, a^c) > 0$ . Escolhemos  $\varepsilon = \min\{d(a, a^c) : a \in \mathcal{P}\}$ . Seja  $h \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que  $\tilde{d}(h, g) < \varepsilon$ . Logo, se existe algum  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que  $h(x)$  e  $g(x)$  não pertencem a um mesmo elemento de  $\mathcal{P}$ , então  $d(h(x), g(x)) \geq \varepsilon$ , o que é uma contradição. Assim,  $h \sim_{\mathcal{P}} g$ . Pela transitividade de  $\sim_{\mathcal{P}}$ , se tem que  $h \in [f]$ .

### 1.3 Grafos dirigidos

A noção de *grafo dirigido* é fundamental para este trabalho.

**Definição 1.3.1.** Um *grafo dirigido*  $G$  consiste de um conjunto finito  $V(G)$ , cujos elementos são chamados de *vértices*, junto com um subconjunto  $E(G)$  de  $V(G) \times V(G)$ , cujos elementos são chamados de *arestas (dirigidas)*.

Neste contexto, um par ordenado  $(u, v) \in V(G) \times V(G)$  é chamado a *aresta (dirigida) de u a v* e é denotado por  $\vec{uv}$ .

**Definição 1.3.2.** Um *subgrafo* de um grafo dirigido  $G$ , é um grafo dirigido  $H$  tal que

$$V(H) \subset V(G) \quad \text{e} \quad E(H) \subset E(G).$$

**Definição 1.3.3.** Uma *extremidade esquerda* (resp. *extremidade direita*) de um grafo dirigido  $G$  é um vértice  $v$  de  $G$  tal que não existe uma aresta da forma  $\vec{uv}$  (resp.  $\vec{v\bar{u}}$ ) em  $G$ . Dizemos que  $G$  é um *grafo dirigido sem extremidades direitas* se  $G$  não tem extremidades direitas e  $G$  é um *grafo dirigido sem extremidades* se  $G$  não tem extremidades esquerdas e nem extremidades direitas.

Para o nosso estudo, classificamos certos grafos dirigidos de acordo com as suas estruturas, em *caminhos*, *ciclos*, *balões* e *halteres*.

**Definição 1.3.4.** Um grafo dirigido  $p$  é dito um *caminho de comprimento  $n$*  se o conjunto dos vértices de  $p$  é  $\{v_1, \dots, v_n\}$  e as arestas de  $p$  são  $\vec{v_i v_{i+1}}$  para  $1 \leq i < n$ .



Figura 1.1: Caminho de comprimento  $n$ .

**Definição 1.3.5.** Um grafo dirigido  $l$  é dito um *ciclo de comprimento  $n$*  se o conjunto dos vértices de  $l$  é  $\{v_1, \dots, v_n\}$  e as arestas de  $l$  são  $\vec{v_n v_1}$  e  $\vec{v_i v_{i+1}}$  para  $1 \leq i < n$ .

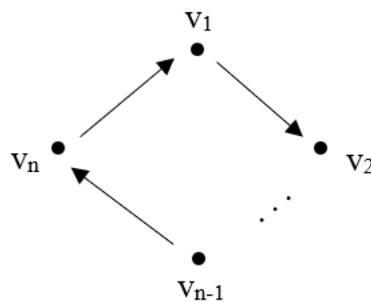


Figura 1.2: Ciclo de comprimento  $n$ .

**Definição 1.3.6.** Um grafo dirigido  $B$  é dito um *balão de tipo  $(s, t)$*  se o conjunto dos vértices de  $B$  é a união de dois conjuntos disjuntos  $p = \{v_1, \dots, v_s\}$  e  $l = \{w_1, \dots, w_t\}$ , e as arestas de  $B$  são

- as arestas do caminho formado por  $p$ ,
- as arestas do ciclo formado por  $l$ , e
- $\overrightarrow{v_s w_1}$ .

Neste caso, chamamos  $v_1$  o *vértice inicial de  $B$* .

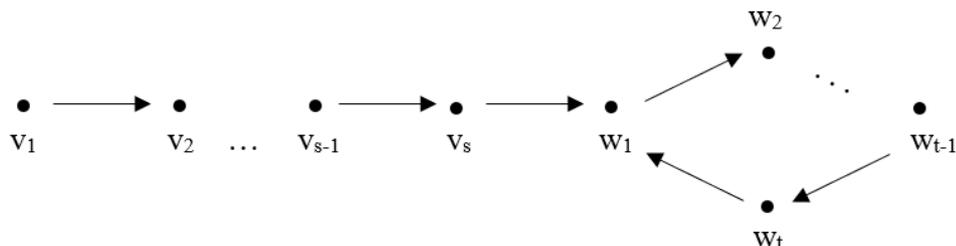


Figura 1.3: Balão de tipo  $(s, t)$ .

Sempre que escrevemos um balão  $B$  simplesmente como

$$B = \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_t\},$$

assumimos implicitamente que tal balão é o descrito acima.

**Definição 1.3.7.** Um grafo dirigido  $D$  é dito um *haltere de tipo  $(r, s, t)$*  se o conjunto dos vértices de  $D$  é a união de três conjuntos disjuntos  $l_1 = \{u_1, \dots, u_r\}$ ,  $p = \{v_1, \dots, v_s\}$  e  $l_2 = \{w_1, \dots, w_t\}$ , e as arestas de  $D$  são

- as arestas dos ciclos formados por  $l_1$  e  $l_2$ ,
- as arestas do caminho formado por  $p$ , e
- $\overrightarrow{u_1 v_1}$ ,  $\overrightarrow{v_s w_1}$ .

Neste caso, dizemos que  $s$  é o *comprimento da barra* do haltere. Se  $r = t$ , então dizemos que o haltere está *balanceado com peso de placa  $r$* .

Sempre que escrevemos um haltere  $D$  simplesmente como

$$D = \{u_1, \dots, u_r\} \cup \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_t\},$$

assumimos implicitamente que tal haltere é o descrito acima.

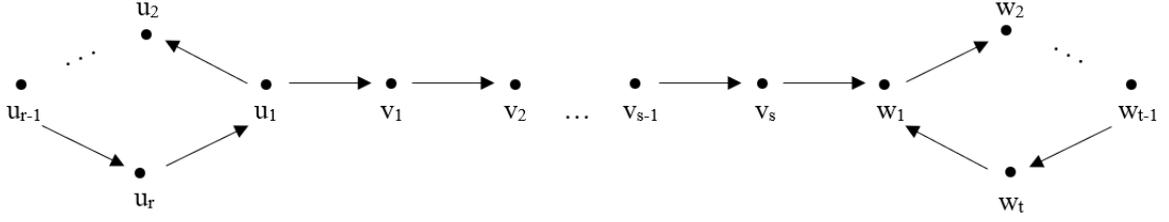


Figura 1.4: Haltere de tipo  $(r, s, t)$ .

**Definição 1.3.8.** Sejam  $G$  e  $H$  grafos dirigidos. Uma *aplicação de grafos dirigidos*  $\phi : H \rightarrow G$  é uma aplicação do conjunto de vértices de  $H$  no conjunto de vértices de  $G$  tal que se  $\overrightarrow{uv}$  é uma aresta de  $H$ , então  $\overrightarrow{\phi(u)\phi(v)}$  é uma aresta de  $G$ . Dizemos que uma tal  $\phi$  é *sobrejetiva* se é uma sobrejeção entre os conjuntos de vértices, mas não precisa ser sobrejetiva entre os conjuntos de arestas. Dizemos que uma tal  $\phi$  é um *isomorfismo* se é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de tal forma que  $\overrightarrow{uv}$  é uma aresta de  $H$  se e somente se  $\overrightarrow{\phi(u)\phi(v)}$  é uma aresta de  $G$ .

**Definição 1.3.9.** Uma *componente* de um grafo dirigido  $G$  é um subgrafo maximal (em vértices e em arestas)  $H$  de  $G$  com a propriedade de que dados quaisquer dois vértices distintos  $a, b$  em  $H$ , existem vértices  $a_1, \dots, a_n$  em  $H$  com  $a_1 = a$ ,  $a_n = b$  e, para cada  $1 \leq i < n$ ,  $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$  ou  $\overrightarrow{a_{i+1} a_i}$  é uma aresta de  $H$ .

**Lema 1.3.10.** Temos os seguintes fatos:

- (a) Seja  $G$  um grafo dirigido sem extremidades direitas. Para cada aresta  $e = \overrightarrow{uv}$  de  $G$ , existem inteiros positivos  $S$  e  $M$  tais que se  $s \geq S$  e  $m$  é um múltiplo inteiro positivo de  $M$ , então existe um balão  $B$  de tipo  $(s, m)$  que admite uma aplicação de grafos dirigidos  $\phi : B \rightarrow G$  tal que  $u$  é a imagem do vértice inicial do balão.
- (b) Seja  $G$  um grafo dirigido sem extremidades. Para cada aresta  $e = \overrightarrow{uv}$  de  $G$ , existem inteiros positivos  $N$ ,  $S$  e  $M$  tais que se  $s \geq S$  e  $n, m$  são múltiplos inteiros positivos de  $N, M$ , respectivamente, então existe um haltere  $D$  de tipo  $(n, s, m)$  que admite uma aplicação de grafos dirigidos  $\phi : D \rightarrow G$  tal que  $e$  é a imagem de uma aresta da barra do haltere.

**Demonstração:**

- (a) Como  $G$  é um grafo dirigido sem extremidades direitas (isto é, todos os seus vértices têm arestas de saída), podemos começar com a aresta  $e$  e continuar um caminho em  $G$  pela direita um número arbitrário de passos. Como existe apenas um número finito de vértices, obtemos um *pseudo-balão* em  $G$ , isto é, um caminho

$$u = u_1, v = u_2, \dots, u_S, u_{S+1}, \dots, u_{S+M}, u_{S+M+1},$$

com  $u_{S+M+1} = u_{S+1}$ . Isto é chamado um *pseudo-balão* porque os vértices  $u_1, \dots, u_{S+M}$  não precisam ser distintos. Se  $s \geq S$  e  $m$  é um múltiplo inteiro positivo de  $M$ , então podemos estender o comprimento da corda de  $S$  para  $s$  movendo-se para o *pseudo-ciclo*  $u_{S+1}, \dots, u_{S+M}$  e continuando em torno dele o quanto for necessário. Então podemos ir ao redor do pseudo-ciclo quantas vezes quisermos para obter um pseudo-ciclo de comprimento  $m$ . Desta forma obtemos um pseudo-balão em  $G$  da forma

$$u = v_1, v = v_2, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_{s+m}, v_{s+m+1} = v_{s+1}.$$

Agora, seja  $w_i = (v_i, i)$  para  $i = 1, \dots, s + m$ , e considere o balão

$$B = \{w_1, \dots, w_s\} \cup \{w_{s+1}, \dots, w_{s+m}\}.$$

A projeção  $\phi : w_i \in B \rightarrow v_i \in G$  é a aplicação de grafos dirigidos requerida.

- (b) Como  $G$  é um grafo dirigido sem extremidades (isto é, todos os seus vértices têm simultaneamente arestas de entrada e de saída), podemos aplicar o mesmo procedimento do item (a) também à esquerda. Desta forma obtemos um *pseudo-haltere* em  $G$ , isto é, um caminho

$$u_0, u_1, \dots, u_N, u_{N+1}, \dots, u_{N+S}, u_{N+S+1}, \dots, u_{N+S+M}, u_{N+S+M+1}$$

com  $u_N = u_0$  e  $u_{N+S+M+1} = u_{N+S+1}$ , de modo que a aresta original  $e = \overrightarrow{uv}$  está em algum lugar ao longo da barra. Continuando com o mesmo argumento do caso (a), obtemos o resultado.  $\square$

Vamos agora estabelecer o nosso principal resultado teórico de grafos.

**Teorema 1.3.11.** *Temos os seguintes fatos:*

- (a) *Dado um grafo dirigido  $G$  sem extremidades direitas, existem inteiros positivos  $K, S$  e  $M$  tais que se  $k \geq K, s \geq S$  e  $m$  é um múltiplo inteiro positivo de  $M$ , então existe um grafo dirigido  $H$ , formado por  $k$  balões disjuntos de tipo  $(s, m)$ , que admite uma aplicação de grafos dirigidos sobrejetiva  $\phi : H \rightarrow G$ .*
- (b) *Dado um grafo dirigido  $G$  sem extremidades, existem inteiros positivos  $K, N, S$  e  $M$  tais que se  $k \geq K, s \geq S$  e  $n, m$  são múltiplos inteiros positivos de  $N, M$ , respectivamente, então existe um grafo dirigido  $H$ , formado por  $k$  halteres disjuntos de tipo  $(n, s, m)$ , que admite uma aplicação de grafos dirigidos sobrejetiva  $\phi : H \rightarrow G$ .*

**Demonstração:** Vamos provar apenas o caso (b), já que o caso (a) é análogo. Sejam  $e_1, \dots, e_K$  as arestas de  $G$ . Para cada  $i = 1, \dots, K$ , o lema anterior associa a aresta  $e_i$  com inteiros positivos  $N_i, S_i$  e  $M_i$ . Sejam  $N$  e  $M$  o mínimo múltiplo comum de todos os  $N_i$  e todos os  $M_i$ ,

respectivamente, e seja  $S$  o máximo dos  $S_i$ . Se  $n, m$  são múltiplos de  $N, M$ , respectivamente, e  $s \geq S$ , então o lema anterior garante a existência de uma aplicação de grafos dirigidos  $\phi_i$  de um haltere  $D_i$  de tipo  $(n, s, m)$  em  $G$  tal que  $e_i = \phi_i(u_i)$  para alguma aresta  $u_i$  da barra do haltere  $D_i$  ( $i = 1, \dots, K$ ). Claramente, podemos assumir que os  $D_i$  são dois a dois disjuntos. Assim, a união  $H$  dos  $D_i$  admite uma aplicação de grafos dirigidos  $\phi : H \rightarrow G$  tal que  $\phi|_{D_i} = \phi_i$  para todo  $i = 1, \dots, K$ . Como  $\phi(u_i) = \phi_i(u_i) = e_i$  para todo  $i = 1, \dots, K$ , temos que  $\phi$  é sobrejetiva. Finalmente, se queremos que  $H$  consista de mais que  $K$  halteres, basta adicionar a  $H$  tantas copias disjuntas de  $D_1$  (ou de qualquer outro haltere  $D_i$ ) quantas desejadas.  $\square$

## 1.4 O grafo dirigido $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$

**Definição 1.4.1.** A cada  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e cada partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , associamos o grafo dirigido  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ , cujos vértices são os elementos de  $\mathcal{P}$  e, para  $a, b \in \mathcal{P}$ ,  $\overrightarrow{ab}$  é uma aresta de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  se e somente se  $f(a) \cap b \neq \emptyset$ .

Note que  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  é sempre um grafo dirigido sem extremidades direitas. De fato, se  $a \in \mathcal{P}$  não tem aresta de saída, então  $f(a) \cap b = \emptyset$  para todo  $b \in \mathcal{P}$ , o que é uma contradição.

Também podemos ver que se  $f$  é sobrejetiva, então  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  é um grafo dirigido sem extremidades. De fato, se  $b \in \mathcal{P}$  não tem aresta de entrada, então  $f(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus b$ , o que contradiz a sobrejetividade de  $f$ .

**Observação 1.4.2.** Se  $\nu : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  é uma aplicação de refinamento, então

$$\nu : \text{Gr}(f, \mathcal{P}) \rightarrow \text{Gr}(f, \mathcal{Q})$$

é uma aplicação de grafos dirigidos sobrejetiva; neste caso, ela é sobrejetiva nas arestas também.

De fato, é claro que a aplicação de grafos dirigidos  $\nu$  é sobrejetiva, pela sobrejetividade da aplicação de refinamento  $\nu$ . Mais ainda, se  $\overrightarrow{ab}$  é uma aresta de  $\text{Gr}(f, \mathcal{Q})$ , ou seja,  $a, b \in \mathcal{Q}$  e  $f(a) \cap b \neq \emptyset$ , então existe  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que

$$\sigma \in a \quad \text{e} \quad f(\sigma) \in b.$$

Como  $\mathcal{P}$  é uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , existem  $a_0, b_0 \in \mathcal{P}$  tais que

$$\sigma \in a_0 \quad \text{e} \quad f(\sigma) \in b_0.$$

Como  $\mathcal{P}$  é um refinamento de  $\mathcal{Q}$ ,  $\nu(a_0) = a$  e  $\nu(b_0) = b$ . Logo,  $\overrightarrow{a_0 b_0}$  é uma aresta de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  e

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{\nu(a_0)\nu(b_0)},$$

provando que  $\nu$  também é sobrejetiva nas arestas.

Tecnicamente falando, a observação anterior nos diz que

$$\mathcal{P} \rightarrow \text{Gr}(f, \mathcal{P})$$

é um functor da categoria das partições do espaço de Cantor (cujos morfismos são as aplicações de refinamento) para a categoria dos grafos dirigidos (cujos morfismos são as aplicações de grafos dirigidos).

**Observação 1.4.3.** Se  $f \sim_{\mathcal{P}} g$ , então  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}) = \text{Gr}(g, \mathcal{P})$ .

De fato,  $\vec{ab} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P})$  se e somente se  $f(a) \cap b \neq \emptyset$ , isto é, existe  $\sigma \in a$  tal que  $f(\sigma) \in b$ . Além disso,  $f \sim_{\mathcal{P}} g$  nos diz que  $f(\sigma) \in b$  se e somente se  $g(\sigma) \in b$ . Logo,  $\vec{ab} \in \text{Gr}(g, \mathcal{P})$ .

**Teorema 1.4.4.** *Seja  $G$  um grafo dirigido sem extremidades direitas cujo conjunto de vértices  $\mathcal{P}$  é uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Defina*

$$X = \bigcup \{a \in \mathcal{P} : a \text{ é uma extremidade esquerda de } G\}.$$

*Então, existe um homeomorfismo  $f$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sobre  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus X$  tal que*

$$\text{Gr}(f, \mathcal{P}) = G.$$

*Em particular, se  $G$  é um grafo dirigido sem extremidades, então  $f \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .*

**Demonstração:** Para cada  $a \in \mathcal{P}$ , seja  $O_a$  uma partição de  $a$  cuja cardinalidade é igual ao número de arestas de  $G$  saindo de  $a$ . Para cada  $b \in \mathcal{P}$  que não é uma extremidade esquerda de  $G$ , seja  $I_b$  uma partição de  $b$  cuja cardinalidade é igual ao número de arestas de  $G$  entrando em  $b$ . A cada aresta  $e = \vec{ab}$  em  $G$ , vamos associar um par ordenado  $(x_e, y_e)$  de modo que:

- (i)  $x_e \in O_a$  e  $y_e \in I_b$ .
- (ii) Se  $e$  e  $e'$  são duas arestas distintas em  $G$ , então  $x_e \neq x_{e'}$  e  $y_e \neq y_{e'}$ .

Note que é possível fazer uma tal associação, tendo em vista a escolha das cardinalidades de  $O_a$  e de  $I_b$ . Note também que o item (ii) implica que

$$x_e \cap x_{e'} = \emptyset \text{ e } y_e \cap y_{e'} = \emptyset \text{ sempre que } e \neq e'.$$

**AFIRMAÇÃO 1:** Todo subconjunto não vazio e simultaneamente aberto e fechado do espaço de Cantor é também um espaço de Cantor.

De fato, seja  $a$  um subconjunto não vazio e simultaneamente aberto e fechado do espaço de Cantor. Então ele é compacto, já que é um subconjunto fechado de um espaço compacto. Se  $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  é uma base para a topologia do espaço de Cantor formada por conjuntos simultaneamente abertos e fechados, então  $\{W_i \cap a\}_{i \in \mathbb{N}}$  é uma base para a topologia induzida em  $a$  formada

por conjuntos simultaneamente abertos e fechados em  $a$ . Assim,  $a$  é 0-dimensional. Além disso,  $a$  não tem pontos isolados, já que é um subconjunto aberto de um espaço sem pontos isolados.

Segue da Afirmação 1 que todos os elementos de uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  são espaços de Cantor. Logo, para cada aresta  $e = \overrightarrow{ab}$  em  $G$ , temos que  $x_e \in O_a$  e  $y_e \in I_b$  também são espaços de Cantor, e o Teorema de Brouwer garante a existência de um homeomorfismo  $f_e : x_e \rightarrow y_e$ .

**AFIRMAÇÃO 2:** Sejam  $X, Y$  espaços métricos e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Suponha que  $X = A \cup B$ , onde  $A$  e  $B$  são conjuntos fechados e disjuntos em  $X$ . Se as restrições  $f|_A : A \rightarrow Y$  e  $f|_B : B \rightarrow Y$  são contínuas, então  $f$  é contínua.

De fato, sejam  $y \in X$  e  $\varepsilon > 0$ . Para mostrar que  $f$  é contínua em  $y$ , temos dois casos. No primeiro,  $y \in A$ . Então, como  $f|_A$  é contínua no ponto  $y$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $x \in A \cap B(y, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in B(f(y), \varepsilon)$ . Como  $B$  é fechado e  $y \notin B$ , podemos obter  $\delta_2 > 0$  tal que  $B(y, \delta_2) \cap B = \emptyset$ . Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Então,  $x \in B(y, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(y), \varepsilon)$ . No segundo caso,  $y \in B$  e argumentamos de modo análogo ao caso anterior. Em qualquer caso,  $f$  é contínua no ponto  $y$ .

Agora, seja  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus X$  a única função satisfazendo

$$f|_{x_e} = f_e \text{ para toda aresta } e \text{ em } G.$$

Por construção,

$$\text{Gr}(f, \mathcal{P}) = G.$$

Além disso, dado  $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus X$ , existe uma única aresta  $e$  de  $G$  tal que  $y \in y_e$ . Como  $f_e$  é bijetiva, existe um único  $x \in x_e$  tal que  $f(x) = f_e(x) = y$ . Logo,  $f$  é bijetiva. Resta provar que  $f$  e  $f^{-1}$  são contínuas. A Afirmação 2 é válida quando se tem um número finito de conjuntos fechados dois a dois disjuntos. Como cada  $x_e$  é fechado (pois pertence a uma partição de algum  $a \in \mathcal{P}$ ), o conjunto dos  $x_e$  é finito (já que  $G$  tem um número finito de arestas) e  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é a união dos  $x_e$ , concluímos que  $f$  é contínua. Da mesma forma, é possível provar que  $f^{-1}$  é contínua.  $\square$

**Teorema 1.4.5.** *Sejam  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $\mathcal{Q}$  uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Suponha que  $G$  é um grafo dirigido sem extremidades direitas e que  $\phi : G \rightarrow \text{Gr}(f, \mathcal{Q})$  é uma aplicação de grafos dirigidos sobrejetiva. As seguintes propriedades se verificam:*

(a) *Existem uma aplicação de refinamento  $\nu : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  e uma bijeção  $\psi : \mathcal{P} \rightarrow V(G)$  tais que*

$$\nu = \phi \circ \psi.$$

(b) *Existe  $g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que  $\psi : \text{Gr}(g, \mathcal{P}) \rightarrow G$  é um isomorfismo de grafos dirigidos. Além disso, se  $G$  é um grafo dirigido sem extremidades, então podemos escolher uma tal  $g$  em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .*

(c) Para qualquer  $g$  como em (b),

$$\tilde{d}(f, g) \leq \text{diam}(\mathcal{Q}) + \text{diam}(f(\mathcal{Q})),$$

onde  $f(\mathcal{Q}) = \{f(a) : a \in \mathcal{Q}\}$ .

**Demonstração:**

(a) Para cada  $a \in \mathcal{Q}$ , escolhamos uma partição  $\mathcal{P}_a$  de  $a$  com a mesma cardinalidade de  $\phi^{-1}(a)$ , que é um subconjunto de  $V(G)$ . Podemos então escolher uma bijeção  $\psi_a : \mathcal{P}_a \rightarrow \phi^{-1}(a)$ . Note que  $\phi^{-1}(a) \cap \phi^{-1}(a') = \emptyset$  sempre que  $a$  e  $a'$  são dois elementos distintos de  $\mathcal{Q}$ . Consideremos a partição

$$\mathcal{P} = \bigcup_{a \in \mathcal{Q}} \mathcal{P}_a$$

de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e seja  $\psi : \mathcal{P} \rightarrow V(G)$  a única função satisfazendo

$$\psi|_{\mathcal{P}_a} = \psi_a \quad \text{para todo } a \in \mathcal{Q}.$$

Então,  $\psi$  é uma bijeção. Seja  $\nu = \phi \circ \psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ . Dado  $b \in \mathcal{P}$ , existe um único  $a \in \mathcal{Q}$  tal que  $b \in \mathcal{P}_a$ . Logo,  $\psi_a(b) \in \phi^{-1}(a)$ , donde  $\nu(b) = \phi(\psi(b)) = \phi(\psi_a(b)) = a$ . Como  $\mathcal{P}_a$  é uma partição de  $a$ , obtemos  $b \subset a = \nu(b)$ . Assim,  $\nu$  é uma aplicação de refinamento.

(b) Definimos um grafo dirigido  $H$  colocando

$$V(H) = \mathcal{P} \quad \text{e} \quad E(H) = \{\overrightarrow{\psi^{-1}(a)\psi^{-1}(b)} : \overrightarrow{ab} \in G\}.$$

Claramente,  $H$  é o único grafo dirigido que tem  $\mathcal{P}$  como conjunto de vértices para o qual  $\psi : H \rightarrow G$  é um isomorfismo de grafos dirigidos. Como  $H$  é um grafo dirigido sem extremidades direitas, o Teorema 1.4.4 nos dá  $g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que

$$\text{Gr}(g, \mathcal{P}) = H.$$

No caso em que  $H$  (ou equivalentemente  $G$ ) é um grafo dirigido sem extremidades, o Teorema 1.4.4 garante que  $g \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

(c) Fixemos  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Sejam  $a, b \in \mathcal{P}$  tais que  $\sigma \in a \subset \nu(a)$  e  $g(\sigma) \in b \subset \nu(b)$ . Então  $\overrightarrow{ab}$  é uma aresta de  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$ . Como  $\phi$  e  $\psi$  são aplicações de grafos dirigidos,  $\phi \circ \psi$  também o é. Por conseguinte,

$$\overrightarrow{\nu(a)\nu(b)} = \overrightarrow{\phi(\psi(a))\phi(\psi(b))} \quad \text{é uma aresta de } \text{Gr}(f, \mathcal{Q}).$$

Logo, existe  $\tau \in \nu(a)$  tal que  $f(\tau) \in \nu(b)$ . Como  $f(\tau), g(\sigma) \in \nu(b)$ , temos que

$$d(f(\tau), g(\sigma)) \leq \text{diam}(\mathcal{Q}).$$

Da mesma forma, como  $\sigma, \tau \in \nu(a)$ ,

$$d(f(\sigma), f(\tau)) \leq \text{diam}(f(\mathcal{Q})).$$

Pela desigualdade triangular, temos que

$$d(f(\sigma), g(\sigma)) \leq \text{diam}(\mathcal{Q}) + \text{diam}(f(\mathcal{Q})).$$

Como  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é arbitrário, concluímos que

$$\tilde{d}(f, g) \leq \text{diam}(\mathcal{Q}) + \text{diam}(f(\mathcal{Q})).$$

Isto completa a demonstração. □

Vamos agora estabelecer o nosso *teorema de aproximação*.

**Teorema 1.4.6.** *Temos os seguintes fatos:*

- (a) *Dados  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $\varepsilon > 0$ , existem inteiros positivos  $K, S$  e  $M$  de modo que se  $k \geq K$ ,  $s \geq S$  e  $m$  é um múltiplo inteiro positivo de  $M$ , então existem  $g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com*

$$\tilde{d}(f, g) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \text{diam}(\mathcal{P}) < \varepsilon,$$

*tais que o grafo dirigido  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$  consiste de exatamente  $k$  balões disjuntos de tipo  $(s, m)$ .*

- (b) *Dados  $f \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $\varepsilon > 0$ , existem inteiros positivos  $K, N, S$  e  $M$  de modo que se  $k \geq K$ ,  $s \geq S$  e  $n, m$  são múltiplos inteiros positivos de  $N, M$ , respectivamente, então existem  $g \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com*

$$\tilde{d}(f, g) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \text{diam}(\mathcal{P}) < \varepsilon,$$

*tais que o grafo dirigido  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$  consiste de exatamente  $k$  halteres disjuntos de tipo  $(n, s, m)$ .*

**Demonstração:** Vamos provar apenas o caso (a), uma vez que o caso (b) é análogo. Fixamos  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  está definida em um espaço métrico compacto, então  $f$  é uniformemente contínua. Logo, podemos escolher uma partição  $\mathcal{Q}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que

$$\text{diam}(\mathcal{Q}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \text{diam}(f(\mathcal{Q})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como  $\text{Gr}(f, \mathcal{Q})$  é um grafo dirigido sem extremidades direitas, o item (a) do Teorema 1.3.11 nos diz que podemos associar a  $\text{Gr}(f, \mathcal{Q})$ , inteiros positivos  $K, S$  e  $M$  de modo que se  $k \geq K$ ,  $s \geq S$  e  $m$  é um múltiplo inteiro positivo de  $M$ , então existe uma aplicação de grafos dirigidos sobrejetiva  $\phi$  de um grafo dirigido  $G$ , formado por  $k$  balões disjuntos de tipo  $(s, m)$ , em  $\text{Gr}(f, \mathcal{Q})$ . Pelo Teorema 1.4.5, existem um refinamento  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{Q}$  e uma função  $g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tais que  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$  é isomorfo a  $G$ ; além disso,

$$\tilde{d}(f, g) \leq \text{diam}(\mathcal{Q}) + \text{diam}(f(\mathcal{Q})) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \text{diam}(\mathcal{P}) \leq \text{diam}(\mathcal{Q}) < \varepsilon,$$

o que completa a demonstração. □

## 1.5 Caracterizações da relação de conjugação

Nesta seção apresentaremos algumas caracterizações de quando duas funções contínuas do espaço de Cantor são conjugadas. Em particular, podemos aplicar essas caracterizações a homeomorfismos do espaço de Cantor.

**Definição 1.5.1.** Sejam  $X, Y$  espaços métricos e  $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$  funções. Dizemos que  $f$  e  $g$  são (*topologicamente*) *conjugadas* se existe um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

Note que conjugação (topológica) é uma relação de equivalência.

**Definição 1.5.2.** Seja  $(\mathcal{P}_n)$  uma sequência de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Dizemos que  $(\mathcal{P}_n)$  é uma *sequência nula* quando  $\text{diam}(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$ , e que  $(\mathcal{P}_n)$  é uma *sequência decrescente* quando  $\mathcal{P}_{n+1}$  é um refinamento de  $\mathcal{P}_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Note que toda sequência nula de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  possui uma subsequência que é decrescente e nula.

**Definição 1.5.3.** Sejam  $f, g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ ,  $(\mathcal{P}_n), (\mathcal{Q}_n)$  sequências decrescentes e nulas de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , e  $(\nu_n)$  uma sequência de isomorfismos de grafos dirigidos

$$\nu_n : \text{Gr}(f, \mathcal{P}_n) \rightarrow \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_n).$$

Para cada  $a \in \mathcal{P}_n$ , definimos

$$\nu_m(a) = \bigcup \{ \nu_m(b) : b \in \mathcal{P}_m \text{ e } b \subset a \} \quad (m \geq n)$$

e

$$\tilde{\nu}_n(a) = \bigcup_{m \geq n} \nu_m(a).$$

Dizemos que a sequência  $(\nu_n)$  *comuta com refinamentos* se os diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_n & \xrightarrow{\nu_n} & \mathcal{Q}_n \\ \uparrow i_n & & \uparrow j_n \\ \mathcal{P}_{n+1} & \xrightarrow{\nu_{n+1}} & \mathcal{Q}_{n+1} \end{array}$$

são comutativos, onde  $i_n$  e  $j_n$  denotam as aplicações de refinamento.

Note que se  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos, então segue da bijetividade dos  $\nu_n$  que  $(\nu_n^{-1})$  também comuta com refinamentos.

Apresentamos as seguintes caracterizações deste conceito.

**Proposição 1.5.4.** *Com as notações acima, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos;
- (ii)  $\nu_m(a) = \nu_n(a)$  sempre que  $m \geq n$  e  $a \in \mathcal{P}_n$ ;
- (iii)  $\tilde{\nu}_n(a) = \nu_n(a)$  para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$  e  $a \in \mathcal{P}_n$ .

**Demonstração:**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Suponha  $m \geq n$  e  $a \in \mathcal{P}_n$ . Como  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}_n & \xrightarrow{\nu_n} & \mathcal{Q}_n \\
 \uparrow i & & \uparrow j \\
 \mathcal{P}_m & \xrightarrow{\nu_m} & \mathcal{Q}_m
 \end{array}$$

é comutativo, onde as setas para cima indicam as aplicações de refinamento. Se  $b \in \mathcal{P}_m$  e  $b \subset a$ , então  $i(b) = a$ . Logo,

$$\nu_m(b) \subset j(\nu_m(b)) = \nu_n(i(b)) = \nu_n(a).$$

Consequentemente,

$$\nu_m(a) \subset \nu_n(a).$$

Por outro lado, tome  $\sigma \in \nu_n(a)$  e seja  $c \in \mathcal{Q}_m$  tal que  $\sigma \in c$ . Como  $\nu_m$  é sobrejetivo, existe  $b \in \mathcal{P}_m$  tal que  $\nu_m(b) = c$ . Seja  $a' \in \mathcal{P}_n$  tal que  $b \subset a'$ . Pelo o que acabamos de ver,  $\nu_m(a') \subset \nu_n(a')$ . Portanto,

$$\sigma \in c = \nu_m(b) \subset \nu_m(a') \subset \nu_n(a').$$

Logo,  $\sigma \in \nu_n(a') \cap \nu_n(a)$ , donde  $\nu_n(a') = \nu_n(a)$ . Como  $\nu_n$  é injetiva, temos que  $a' = a$ , o que implica que  $\sigma \in \nu_m(a)$ . Isto prova que  $\nu_n(a) \subset \nu_m(a)$ . Portanto,  $\nu_m(a) = \nu_n(a)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Óbvio.

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Seja  $b \in \mathcal{P}_{n+1}$  e coloquemos  $a = i_n(b) \in \mathcal{P}_n$ . Então

$$\nu_{n+1}(b) \subset \nu_{n+1}(a) \subset \tilde{\nu}_n(a) = \nu_n(a) \in \mathcal{Q}_n,$$

por hipótese. Além disso,  $\nu_{n+1}(b) \subset j_n(\nu_{n+1}(b)) \in \mathcal{Q}_n$ . Portanto,

$$j_n(\nu_{n+1}(b)) = \nu_n(a) = \nu_n(i_n(b)),$$

como era para ser mostrado. □

**Definição 1.5.5.** Dizemos que a sequência  $(\nu_n)$  *comuta assintoticamente com refinamentos* se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\{\tilde{\nu}_n(a) : a \in \mathcal{P}_n\}) = 0.$$

**Observação 1.5.6.** Segue da proposição anterior que se  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos, então  $(\nu_n)$  e  $(\nu_n^{-1})$  comutam assintoticamente com refinamentos. De fato, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\{\tilde{\nu}_n(a) : a \in \mathcal{P}_n\} = \{\nu_n(a) : a \in \mathcal{P}_n\} = \mathcal{Q}_n,$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\{\tilde{\nu}_n(a) : a \in \mathcal{P}_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{Q}_n) = 0.$$

Analogamente mostra-se para  $(\nu_n^{-1})$ .

**Teorema 1.5.7.** *Sejam  $f, g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $f$  e  $g$  são conjugadas;
- (ii) existem sequências decrescentes e nulas  $(\mathcal{P}_n)$  e  $(\mathcal{Q}_n)$  de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e isomorfismos de grafos dirigidos

$$\nu_n : \text{Gr}(f, \mathcal{P}_n) \rightarrow \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_n)$$

tais que a sequência  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos;

- (iii) existem sequências decrescentes e nulas  $(\mathcal{P}_n)$  e  $(\mathcal{Q}_n)$  de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e isomorfismos de grafos dirigidos

$$\nu_n : \text{Gr}(f, \mathcal{P}_n) \rightarrow \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_n)$$

tais que as sequências  $(\nu_n)$  e  $(\nu_n^{-1})$  comutam assintoticamente com refinamentos.

**Demonstração:**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Suponha  $f = h^{-1} \circ g \circ h$  para algum  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sejam

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{B}_n \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_n = \{h(a) : a \in \mathcal{B}_n\},$$

onde  $\mathcal{B}_n$  foi definido no Exemplo 1.2.9. Afirmamos que  $(\mathcal{P}_n)$  e  $(\mathcal{Q}_n)$  são sequências decrescentes e nulas. Com efeito, pelo Exemplo 1.2.9,  $(\mathcal{P}_n)$  é uma sequência decrescente e nula. Logo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma aplicação de refinamento  $i_n : \mathcal{P}_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n$ . Consideremos a aplicação sobrejetiva  $j_n = h \circ i_n \circ h^{-1} : \mathcal{Q}_{n+1} \rightarrow \mathcal{Q}_n$ . Dado  $b \in \mathcal{Q}_{n+1}$ , existe  $a \in \mathcal{P}_{n+1}$  tal que  $b = h(a)$ . Portanto,

$$j_n(b) = h(i_n(h^{-1}(b))) = h(i_n(a)) \supset h(a) = b,$$

mostrando que  $j_n$  é uma aplicação de refinamento, para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,  $(\mathcal{Q}_n)$  é uma sequência decrescente. Além disso, usando a continuidade uniforme de  $h$ , vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{Q}_n) = 0, \quad \text{já que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{P}_n) = 0.$$

Isto prova a nossa afirmação. Agora, notemos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_n)$  é isomorfo a  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_n)$  pela aplicação  $\nu_n : a \in \mathcal{P}_n \mapsto h(a) \in \mathcal{Q}_n$ . De fato,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ab} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}_n) &\Leftrightarrow f(a) \cap b \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow h(f(a)) \cap h(b) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow g(h(a)) \cap h(b) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{h(a)h(b)} \in \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_n). \end{aligned}$$

Além disso, como  $h \circ i_n = j_n \circ h$ , segue das definições de  $\nu_n$  e de  $\nu_{n+1}$  que  $\nu_n \circ i_n = j_n \circ \nu_{n+1}$ . Portanto, a sequência  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Segue da Observação 1.5.6.

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Dado  $n \in \mathbb{N}$ , como  $a \in \mathcal{P}_n$  e  $\nu_n(a) \in \mathcal{Q}_n$  são espaços de Cantor, o Teorema de Brouwer garante a existência de um homeomorfismo  $h_n^a : a \rightarrow \nu_n(a)$ . Seguindo o mesmo processo feito na demonstração do Teorema 1.4.4, obtemos  $h_n \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que

$$h_n|_a = h_n^a \text{ para todo } a \in \mathcal{P}_n.$$

Em particular,

$$h_n(a) = \nu_n(a) \text{ para todo } a \in \mathcal{P}_n,$$

donde

$$h_n^{-1}(c) = \nu_n^{-1}(c) \text{ para todo } c \in \mathcal{Q}_n.$$

Vamos provar que  $(h_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Para tal, fixemos  $\varepsilon > 0$ . Como  $(\nu_n)$  comuta assintoticamente com refinamentos, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{diam}(\{\tilde{\nu}_n(a) : a \in \mathcal{P}_n\}) < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Tomemos  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $m \geq n \geq n_0$ . Sejam  $a \in \mathcal{P}_n$  e  $b \in \mathcal{P}_m$  tais que  $\sigma \in a$  e  $\sigma \in b$  (note que  $b \subset a$ , pois  $\mathcal{P}_m$  é um refinamento de  $\mathcal{P}_n$ ). Então,

$$h_m(\sigma) \in \nu_n(a) \subset \tilde{\nu}_n(a) \quad \text{e} \quad h_m(\sigma) \in \nu_m(b) \subset \nu_m(a) \subset \tilde{\nu}_n(a),$$

donde

$$d(h_m(\sigma), h_n(\sigma)) \leq \text{diam}(\tilde{\nu}_n(a)) < \varepsilon.$$

Logo,

$$\tilde{d}(h_m, h_n) < \varepsilon \text{ sempre que } m \geq n \geq n_0.$$

Pela completude de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , a sequência  $(h_n)$  deve convergir para uma função  $h$  em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Como  $(\nu_n^{-1})$  também comuta assintoticamente com refinamentos, podemos aplicar o mesmo argumento à sequência  $(h_n^{-1})$  e concluir que esta sequência converge para uma função  $t$  em

$\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Como  $h_n \circ h_n^{-1} = h_n^{-1} \circ h_n = I$  (a aplicação identidade de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue que  $h \circ t = t \circ h = I$ . Assim,  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

Agora, dados  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , sejam  $a, b \in \mathcal{P}_n$  tais que  $\sigma \in a$  e  $f(\sigma) \in b$ . Então,  $\overrightarrow{ab}$  é uma aresta de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_n)$ , implicando que  $\overrightarrow{\nu_n(a)\nu_n(b)}$  é uma aresta de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_n)$ , ou seja,

$$g(\nu_n(a)) \cap \nu_n(b) \neq \emptyset.$$

Como  $h_n(f(\sigma)) \in \nu_n(b) \in \mathcal{Q}_n$  e  $g(h_n(\sigma)) \in g(\nu_n(a)) \in g(\mathcal{Q}_n)$ , obtemos

$$d(h_n(f(\sigma)), g(h_n(\sigma))) \leq \text{diam}(\nu_n(b)) + \text{diam}(g(\nu_n(a))) \leq \text{diam}(\mathcal{Q}_n) + \text{diam}(g(\mathcal{Q}_n)).$$

Portanto, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , concluímos que  $h \circ f = g \circ h$ , isto é,  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ .  $\square$

**Definição 1.5.8.** Sejam  $f, g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ ,  $(\mathcal{P}_n), (\mathcal{Q}_n)$  sequências decrescentes e nulas de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , e  $(\nu_n)$  uma sequência de aplicações de grafos dirigidos sobrejetivas com

$$\nu_n : \text{Gr}(f, \mathcal{P}_n) \rightarrow \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_n) \quad \text{para } n \text{ ímpar, e}$$

$$\nu_n : \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_n) \rightarrow \text{Gr}(f, \mathcal{P}_n) \quad \text{para } n \text{ par.}$$

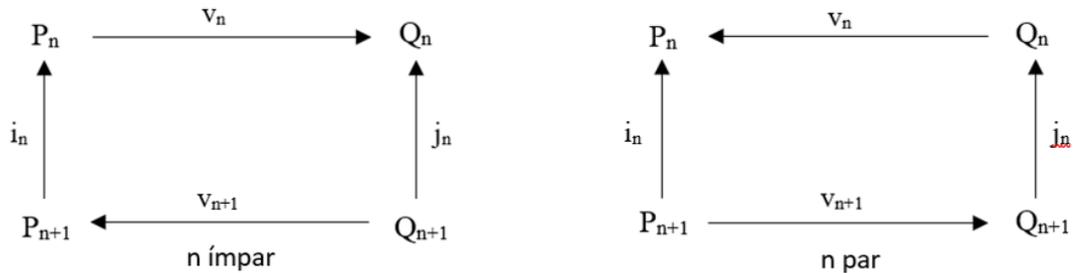
Para cada  $n$  ímpar e cada  $a \in \mathcal{P}_n$ , definimos

$$\nu_m(a) = \bigcup \{ \nu_m(b) : b \in \mathcal{P}_m \text{ e } b \subset a \} \quad (m \geq n, m \text{ ímpar}),$$

$$\nu_m^{-1}(a) = \bigcup \{ c : c \in \mathcal{Q}_m \text{ e } \nu_m(c) \subset a \} \quad (m > n, m \text{ par}),$$

$$\bar{\nu}_n(a) = \bigcup \{ \nu_m(a) : m \geq n, m \text{ ímpar} \} \cup \bigcup \{ \nu_m^{-1}(a) : m > n, m \text{ par} \}.$$

Analogamente, definimos  $\nu_m(c)$  ( $m \geq n, m$  par),  $\nu_m^{-1}(c)$  ( $m > n, m$  ímpar) e  $\bar{\nu}_n(c)$  para  $n$  par e  $c \in \mathcal{Q}_n$ . Dizemos que a sequência  $(\nu_n)$  *comuta com refinamentos* se os diagramas



são comutativos, onde  $i_n$  e  $j_n$  denotam as aplicações de refinamento.

Apresentamos as seguintes caracterizações deste conceito.

**Proposição 1.5.9.** *Com as notações acima, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos.

(ii) As seguintes inclusões são válidas:

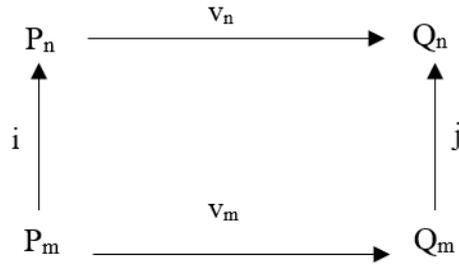
- $\nu_m(a) \subset \nu_n(a)$  sempre que  $n$  é ímpar,  $m$  é ímpar,  $m \geq n$  e  $a \in \mathcal{P}_n$ .
- $\nu_m^{-1}(a) \subset \nu_n(a)$  sempre que  $n$  é ímpar,  $m$  é par,  $m > n$  e  $a \in \mathcal{P}_n$ .
- $\nu_m(c) \subset \nu_n(c)$  sempre que  $n$  é par,  $m$  é par,  $m \geq n$  e  $c \in \mathcal{Q}_n$ .
- $\nu_m^{-1}(c) \subset \nu_n(c)$  sempre que  $n$  é par,  $m$  é ímpar,  $m > n$  e  $c \in \mathcal{Q}_n$ .

(iii) As seguintes igualdades são válidas:

- $\bar{\nu}_n(a) = \nu_n(a)$  sempre que  $n$  é ímpar e  $a \in \mathcal{P}_n$ .
- $\bar{\nu}_n(c) = \nu_n(c)$  sempre que  $n$  é par e  $c \in \mathcal{Q}_n$ .

**Demonstração:**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Sejam  $n, m \in \mathbb{N}$  tais que  $n$  e  $m$  são ímpares e  $m \geq n$ . Como  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos, o diagrama



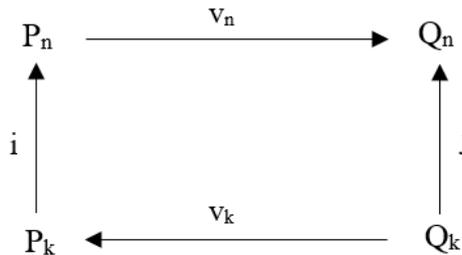
é comutativo, onde as setas para cima indicam as aplicações de refinamento. Dado  $a \in \mathcal{P}_n$ , seja  $b \in \mathcal{P}_m$  tal que  $b \subset a$ . Então  $i(b) = a$ , donde

$$\nu_m(b) \subset j(\nu_m(b)) = \nu_n(i(b)) = \nu_n(a).$$

Logo,

$$\nu_m(a) \subset \nu_n(a).$$

De maneira semelhante se prova a terceira inclusão. Por outro lado, sejam  $n, k \in \mathbb{N}$  tais que  $n$  é ímpar,  $k$  é par e  $k > n$ . Como  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos, o diagrama



é comutativo, onde as setas para cima indicam as aplicações de refinamento. Dado  $a \in \mathcal{P}_n$ , seja  $c \in \mathcal{Q}_k$  tal que  $\nu_k(c) \subset a$ . Então  $i(\nu_k(c)) = a$ , donde

$$c \subset j(c) = \nu_n(i(\nu_k(c))) = \nu_n(a).$$

Logo,

$$\nu_k^{-1}(a) \subset \nu_n(a).$$

De maneira semelhante se prova a quarta inclusão.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Óbvio.

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Suponha  $n$  ímpar e  $c \in \mathcal{Q}_{n+1}$ . Logo,  $\nu_{n+1}(c) \in \mathcal{P}_{n+1}$ , e colocamos  $a = i_n(\nu_{n+1}(c)) \in \mathcal{P}_n$ . Como  $n+1$  é par e  $\nu_{n+1}(c) \subset a$ , temos que

$$c \subset (\nu_{n+1})^{-1}(a) \subset \bar{\nu}_n(a) = \nu_n(a) \in \mathcal{Q}_n,$$

por hipótese. Além disso,  $c \subset j_n(c) \in \mathcal{Q}_n$ . Assim,

$$j_n(c) = \nu_n(a) = \nu_n(i_n(\nu_{n+1}(c))).$$

Para  $n$  par a prova é análoga. □

**Definição 1.5.10.** Dizemos que a sequência  $(\nu_n)$  *comuta assintoticamente com refinamentos* se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\{\bar{\nu}_{2n-1}(a) : a \in \mathcal{P}_{2n-1}\}) = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\{\bar{\nu}_{2n}(c) : c \in \mathcal{Q}_{2n}\}) = 0.$$

**Observação 1.5.11.** Segue da proposição anterior que se  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos, então  $(\nu_n)$  comuta assintoticamente com refinamentos. De fato, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\{\bar{\nu}_{2n-1}(a) : a \in \mathcal{P}_{2n-1}\} = \{\nu_{2n-1}(a) : a \in \mathcal{P}_{2n-1}\} = \mathcal{Q}_{2n-1}$$

e

$$\{\bar{\nu}_{2n}(c) : c \in \mathcal{Q}_{2n}\} = \{\nu_{2n}(c) : c \in \mathcal{Q}_{2n}\} = \mathcal{P}_{2n}.$$

Como  $(\mathcal{P}_{2n})$  e  $(\mathcal{Q}_{2n-1})$  são subsequências de  $(\mathcal{P}_n)$  e  $(\mathcal{Q}_n)$ , respectivamente, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\{\bar{\nu}_{2n-1}(a) : a \in \mathcal{P}_{2n-1}\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{Q}_{2n-1}) = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\{\bar{\nu}_{2n}(c) : c \in \mathcal{Q}_{2n}\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{P}_{2n}) = 0.$$

**Teorema 1.5.12.** *Sejam  $f, g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  *$f$  e  $g$  são conjugadas;*

(ii) *existem seqüências decrescentes e nulas  $(\mathcal{P}_n)$  e  $(\mathcal{Q}_n)$  de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e aplicações de grafos dirigidos sobrejetivas*

$$\nu_{2n-1} : \text{Gr}(f, \mathcal{P}_{2n-1}) \rightarrow \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_{2n-1}) \quad e \quad \nu_{2n} : \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_{2n}) \rightarrow \text{Gr}(f, \mathcal{P}_{2n})$$

*tais que a seqüência  $(\nu_n)$  comuta com refinamentos;*

(iii) *existem seqüências decrescentes e nulas  $(\mathcal{P}_n)$  e  $(\mathcal{Q}_n)$  de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e aplicações de grafos dirigidos sobrejetivas*

$$\nu_{2n-1} : \text{Gr}(f, \mathcal{P}_{2n-1}) \rightarrow \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_{2n-1}) \quad e \quad \nu_{2n} : \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_{2n}) \rightarrow \text{Gr}(f, \mathcal{P}_{2n})$$

*tais que a seqüência  $(\nu_n)$  comuta assintoticamente com refinamentos.*

**Demonstração:**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Pela implicação (i)  $\Rightarrow$  (ii) no Teorema 1.5.7, existem seqüências decrescentes e nulas  $(\mathcal{P}_n)$  e  $(\mathcal{Q}_n)$  de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e isomorfismos de grafos dirigidos  $\theta_n : \text{Gr}(f, \mathcal{P}_n) \rightarrow \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_n)$  tais que a seqüência  $(\theta_n)$  comuta com refinamentos. Assim, é suficiente definir  $\nu_n = \theta_n$  para  $n$  ímpar e  $\nu_n = \theta_n^{-1}$  para  $n$  par.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Segue da Observação 1.5.11.

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Seja  $n$  ímpar. Para cada  $c \in \mathcal{Q}_n$ , escolhemos uma partição  $\mathcal{Q}_n^c$  de  $c$  com a mesma cardinalidade de  $\nu_n^{-1}(c)$ . Podemos então definir uma bijeção  $\psi_n^c$  de  $\nu_n^{-1}(c)$  sobre  $\mathcal{Q}_n^c$ . Seja

$$\tilde{\mathcal{Q}}_n = \bigcup_{c \in \mathcal{Q}_n} \mathcal{Q}_n^c,$$

que é um refinamento de  $\mathcal{Q}_n$ , e consideremos a bijeção  $\psi_n$  de  $\mathcal{P}_n$  sobre  $\tilde{\mathcal{Q}}_n$  definida por  $\psi_n|_{\nu_n^{-1}(c)} = \psi_n^c$  para todo  $c \in \mathcal{Q}_n$ . Para cada  $a \in \mathcal{P}_n$ , como  $a \in \mathcal{P}_n$  e  $\psi_n(a) \in \tilde{\mathcal{Q}}_n$  são espaços de Cantor, o Teorema de Brouwer nos dá um homeomorfismo  $h_n^a : a \rightarrow \psi_n(a)$ . Seguindo o mesmo processo feito na demonstração do Teorema 1.4.4, definimos  $h_n \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  colocando  $h_n|_a = h_n^a$  para todo  $a \in \mathcal{P}_n$ . Então,

$$\bigcup_{a \in \nu_n^{-1}(c)} h_n(a) = c \quad \text{para todo } c \in \mathcal{Q}_n.$$

Segue que,

$$h_n(a) \subset \nu_n(a) \quad \text{para todo } a \in \mathcal{P}_n.$$

Por outro lado, fixemos  $\varepsilon > 0$ . Como  $(\nu_n)$  comuta assintoticamente com refinamentos, existe  $n_0$  ímpar tal que

$$\text{diam}(\{\bar{\nu}_n(a) : a \in \mathcal{P}_n\}) < \varepsilon \quad \text{sempre que } n \geq n_0, n \text{ ímpar.}$$

Tomamos  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $m \geq n \geq n_0$  com  $m$  e  $n$  ímpares. Sejam  $a \in \mathcal{P}_n$  e  $b \in \mathcal{P}_m$  tais que  $\sigma \in a$  e  $\sigma \in b$  (note que  $b \subset a$ , pois  $\mathcal{P}_m$  é um refinamento de  $\mathcal{P}_n$ ). Então,

$$h_m(\sigma) \in \nu_n(a) \subset \bar{\nu}_n(a) \quad \text{e} \quad h_m(\sigma) \in \nu_m(b) \subset \nu_m(a) \subset \bar{\nu}_n(a),$$

donde

$$d(h_m(\sigma), h_n(\sigma)) \leq \text{diam}(\bar{\nu}_n(a)) < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\tilde{d}(h_m, h_n) < \varepsilon \quad \text{sempre que } m \geq n \geq n_0.$$

Isto prova que  $(h_n)_{n \text{ ímpar}}$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Pela completitude de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , a sequência  $(h_n)_{n \text{ ímpar}}$  converge para um certo  $h \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Da mesma forma, para cada  $m$  par, escolhemos  $t_m \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que

$$\bigcup_{c \in \nu_m^{-1}(a)} t_m(c) = a \quad \text{para todo } a \in \mathcal{P}_m.$$

Então,

$$t_m(c) \subset \nu_m(c) \quad \text{para todo } c \in \mathcal{Q}_m.$$

Argumentando como antes, vemos que  $(t_m)_{m \text{ par}}$  converge para um certo  $t \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

Agora, sejam  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $n$  ímpar. Sejam  $c \in \mathcal{Q}_{n+1}$  e  $a \in \mathcal{P}_n$  tais que  $\sigma \in c$  e  $t_{n+1}(\sigma) \in a$ . Como  $t_{n+1}(\sigma) \in t_{n+1}(c) \subset \nu_{n+1}(c) \in \mathcal{P}_{n+1}$  e  $t_{n+1}(\sigma) \in a \in \mathcal{P}_n$ , temos que  $\nu_{n+1}(c) \subset a$ . Logo,

$$\sigma \in c \subset \nu_{n+1}^{-1}(a) \subset \bar{\nu}_n(a).$$

Além disso,

$$h_n(t_{n+1}(\sigma)) \in h_n(a) \subset \nu_n(a) \subset \bar{\nu}_n(a).$$

Portanto,

$$d(h_n(t_{n+1}(\sigma)), \sigma) \leq \text{diam}(\{\bar{\nu}_n(a) : a \in \mathcal{P}_n\}).$$

Isto implica que  $(h_n \circ t_{n+1})_{n \text{ ímpar}} \rightarrow I$ , onde  $I$  é a aplicação identidade de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Analogamente,  $(t_m \circ h_{m+1})_{m \text{ par}} \rightarrow I$ . Daí,  $h \circ t = t \circ h = I$  e, assim,  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

Finalmente, dados  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $n$  ímpar, sejam  $a, b \in \mathcal{P}_n$  tais que  $\sigma \in a$  e  $f(\sigma) \in b$ . Então,  $\overrightarrow{ab} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}_n)$ , o que implica que  $\overrightarrow{\nu_n(a)\nu_n(b)} \in \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_n)$ , isto é,

$$g(\nu_n(a)) \cap \nu_n(b) \neq \emptyset.$$

Como  $h_n(f(\sigma)) \in \nu_n(b) \in \mathcal{Q}_n$  e  $g(h_n(\sigma)) \in g(\nu_n(a)) \in g(\mathcal{Q}_n)$ , obtemos

$$d(h_n(f(\sigma)), g(h_n(\sigma))) \leq \text{diam}(\nu_n(b)) + \text{diam}(g(\nu_n(a))) \leq \text{diam}(\mathcal{Q}_n) + \text{diam}(g(\mathcal{Q}_n)).$$

Portanto, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , concluímos que  $h \circ f = g \circ h$ , isto é,  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ .  $\square$

## Capítulo 2

# Dinâmica dos Homeomorfismos Genéricos do Espaço de Cantor

### 2.1 Introdução

No presente capítulo estabeleceremos um resultado principal que oferece uma descrição geométrica e teórica de grafos dos homeomorfismos da classe de conjugação residual do grupo dos homeomorfismos do espaço de Cantor (Teorema 2.2.6), que nos diz, de maneira vaga, que para cada homeomorfismo  $h$  desta classe existe uma partição  $\mathcal{P}$  do espaço de Cantor com diâmetro tão pequeno quanto se queira de modo que o grafo  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  é de um tipo especial. Como ficará claro no decorrer deste capítulo, tal descrição é muito fácil de usar e bastante útil para estabelecer propriedades dinâmicas dos homeomorfismos da classe de conjugação residual. Neste capítulo apresentaremos diversas aplicações da descrição desta classe, entre elas provaremos que todo homeomorfismo desta classe não tem um par Li-Yorke, mas tem a propriedade de sombreamento. Provaremos também que para todo homeomorfismo  $h$  desta classe, a restrição a cada um de seus conjuntos  $\omega$ -limite é topologicamente conjugada ao sistema dinâmico conhecido como odômetro universal e que o conjunto de pontos recorrentes de  $h$  é igual ao conjunto de pontos recorrentes em cadeia de  $h$ . Além disso,  $h$  é contínuo em cadeia num conjunto aberto e denso do espaço de Cantor, mas não é equicontínuo em cada ponto de um conjunto não-enumerável.

Na Seção 2.2 apresentaremos uma descrição geométrica e teórica de grafos dos homeomorfismos da classe de conjugação residual do grupo dos homeomorfismos do espaço de Cantor, que afirma que para cada homeomorfismo  $h$  desta classe existe uma partição  $\mathcal{P}$  do espaço de Cantor com diâmetro tão pequeno quanto se queira de modo que o grafo  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  consiste de uma união finita de halteres disjuntos, cada um com as mesmas características.

Na Seção 2.3 teceremos alguns comentários sobre caos Li-Yorke e entropia topológica. Provaremos que nenhum elemento da classe de conjugação residual tem um par Li-Yorke e vamos

concluir que todo elemento desta classe tem entropia topológica zero.

Na Seção 2.4 teceremos alguns comentários sobre as propriedades de sombreamento e sombreamento fraco. Além disso, provaremos que todo elemento da classe de conjugação residual tem a propriedade de sombreamento.

Na Seção 2.5 definiremos os conceitos de odômetro e odômetro universal. Apresentaremos uma caracterização da relação de conjugação entre odômetros e outra entre uma função contínua de um espaço topológico compacto e um odômetro. Também provaremos que a restrição de cada homeomorfismo da classe de conjugação residual a cada um de seus conjuntos  $\omega$ -limite é topologicamente conjugada ao odômetro universal.

Na Seção 2.6 estabeleceremos alguns resultados importantes sobre as noções de recorrência de cada homeomorfismo  $h$  da classe de conjugação residual. Provaremos que o conjunto de pontos periódicos de  $h$  é vazio. Além disso, provaremos que o conjunto de pontos recorrentes de  $h$  é um espaço de Cantor e é igual ao conjunto de pontos recorrentes em cadeia de  $h$ .

Na Seção 2.7 provaremos que cada homeomorfismo  $h$  da classe de conjugação residual é contínuo em cadeia num conjunto aberto e denso do espaço de Cantor, mas não é equicontínuo em cada ponto de um conjunto não-enumerável.

## 2.2 Caracterização dos homeomorfismos genéricos

Sejam  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ ,  $\mathcal{P}$  uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $D$  uma componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  que seja um haltere. Escrevemos

$$D = \{u_1, \dots, u_r\} \cup \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_t\}.$$

**Definição 2.2.1.** Dizemos que  $D$  contém um *ciclo esquerdo de  $h$*  (resp. um *ciclo direito de  $h$* ) se existe um subconjunto não-vazio e simultaneamente aberto e fechado  $a$  de  $u_1$  (resp. de  $w_1$ ) tal que  $h^r(a) = a$  (resp.  $h^t(a) = a$ ).

Seguindo as notações acima, começamos descrevendo dois métodos que permitem aumentar o comprimento da barra do haltere  $D$ .

Da definição de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$ , temos que  $u_1 = h^{-1}(u_2) \cup h^{-1}(v_1)$ , onde  $h^{-1}(u_2)$  e  $h^{-1}(v_1)$  são subconjuntos não-vazios, simultaneamente abertos e fechados, e disjuntos de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Se substituirmos o conjunto  $u_1$  pelos conjuntos  $h^{-1}(u_2)$  e  $h^{-1}(v_1)$ , obteremos um refinamento  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  tal que  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}')$  tem o seguinte haltere como uma componente:

$$D' = \{u_r, h^{-1}(u_2), u_2, \dots, u_{r-1}\} \cup \{h^{-1}(v_1), v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_t\}.$$

Chamamos este procedimento o *método de aumentar a barra do haltere para a esquerda*.

De forma similar, temos que  $w_1 = h(v_s) \cup h(w_t)$ , onde  $h(v_s)$  e  $h(w_t)$  são subconjuntos não-vazios, simultaneamente abertos e fechados, e disjuntos de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Se substituirmos o conjunto  $w_1$  pelos conjuntos  $h(v_s)$  e  $h(w_t)$ , obteremos um refinamento  $\mathcal{P}''$  de  $\mathcal{P}$  tal que  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}'')$  tem o seguinte haltere como uma componente:

$$D'' = \{u_1, \dots, u_r\} \cup \{v_1, \dots, v_s, h(v_s)\} \cup \{w_2, \dots, w_t, h(w_t)\}.$$

Chamamos este procedimento o *método de aumentar a barra do haltere para a direita*.

Observe que esses métodos não alteram os pesos das placas, mas aumentam o comprimento da barra em 1. Assim, aplicando esses métodos repetidamente, podemos fazer com que a barra do haltere  $D$  aumente à esquerda e/ou à direita o quanto se queira.

Além disso, se  $a \subset u_1$  e  $b \subset w_1$  são subconjuntos não-vazios e simultaneamente abertos e fechados tais que  $h^r(a) = a$  e  $h^t(b) = b$ , então  $h^{-1}(a) \subset u_r$  e  $h(b) \subset w_2$  também são subconjuntos não-vazios e simultaneamente abertos e fechados tais que  $h^r(h^{-1}(a)) = h^{-1}(a)$  e  $h^t(h(b)) = h(b)$ . Assim, se  $D$  contém um ciclo esquerdo de  $h$  (resp. um ciclo direito de  $h$ ), então  $D'$  contém um ciclo esquerdo de  $h$  (resp.  $D''$  contém um ciclo direito de  $h$ ).

A seguir apresentamos a definição de uma partição  $h$ -regular e estudamos as relações que existem entre os grafos associados a essas partições.

**Definição 2.2.2.** Seja  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é  $h$ -regular se cada componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  é um haltere balanceado que contém um ciclo esquerdo e um ciclo direito de  $h$  e todas as componentes de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  têm o mesmo peso de placa (denotado por  $w(h, \mathcal{P})$ ).

**Observação 2.2.3.** Os métodos para aumentar a barra do haltere transformam partições  $h$ -regulares em partições  $h$ -regulares.

Dadas duas partições  $h$ -regulares  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  tais que  $\mathcal{P}'$  é um refinamento de  $\mathcal{P}$ , é possível encontrar uma relação entre as componentes de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  e  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}')$ . Mais ainda, também existe uma relação entre  $w(h, \mathcal{P})$  e  $w(h, \mathcal{P}')$  como veremos a seguir.

- i. Cada componente  $D'$  de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}')$  deve estar contida em alguma componente  $D$  de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$ , no sentido de que a união de todos os vértices de  $D'$  está contida na união de todos os vértices de  $D$ . De fato, existe uma aplicação de refinamento  $\nu : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ . Logo, se  $\overrightarrow{ab} \in \text{Gr}(h, \mathcal{P}')$ , então  $\overrightarrow{\nu(a)\nu(b)} \in \text{Gr}(h, \mathcal{P})$ . Seja  $D'$  uma componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}')$ . Suponha que  $a, b$  são vértices de  $D'$  tais que  $\nu(a) \in D$  e  $\nu(b) \in \tilde{D}$ , onde  $D$  e  $\tilde{D}$  são componentes diferentes de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$ . Logo, existem  $a_1 = a, a_2, \dots, a_n = b$  vértices de  $D'$  tais que  $\overrightarrow{a_{i+1}a_i}$  ou  $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$  é uma aresta de  $D'$  para cada  $1 \leq i < n$ . Então,  $\overrightarrow{\nu(a_{i+1})\nu(a_i)}$  ou  $\overrightarrow{\nu(a_i)\nu(a_{i+1})} \in \text{Gr}(h, \mathcal{P})$  para cada  $1 \leq i < n$ , isto é,  $\nu(a)$  e  $\nu(b)$  pertencem a uma mesma componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$ , o que é uma contradição.

Concluimos que, para cada componente  $D'$  de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}')$ , existe uma componente  $D$  de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  tal que cada vértice de  $D'$  está contido num vértice de  $D$ .

- ii.  $w(h, \mathcal{P}')$  é necessariamente um múltiplo de  $w(h, \mathcal{P})$ . De fato, se uma componente  $D'$  de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}')$  está contida numa componente  $D$  de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$ , então cada um dos ciclos de  $D'$  deve estar contido num dos ciclos de  $D$ . Logo,  $w(h, \mathcal{P}')$  é um múltiplo de  $w(h, \mathcal{P})$ .

Consideremos duas partições  $h$ -regulares  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  tais que  $\mathcal{P}'$  é um refinamento de  $\mathcal{P}$ . Seja  $D'$  uma componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}')$  que está contida numa componente  $D$  de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$ . Escrevemos

$$D = \{u_1, \dots, u_q\} \cup \{v_1, \dots, v_l\} \cup \{w_1, \dots, w_q\}$$

e

$$D' = \{u'_1, \dots, u'_{q'}\} \cup \{v'_1, \dots, v'_{l'}\} \cup \{w'_1, \dots, w'_{q'}\}.$$

Com as notações acima, introduzimos a seguinte classificação.

- (1) Se  $\bigcup\{a : a \in D'\} \subset u_1 \cup \dots \cup u_q$  e  $u'_1, w'_1 \subset u_1$ , dizemos que  $D'$  é um *subhaltere de  $D$  de tipo 1*.
- (2) Se  $\bigcup\{a : a \in D'\} \subset w_1 \cup \dots \cup w_q$  e  $u'_1, w'_1 \subset w_1$ , dizemos que  $D'$  é um *subhaltere de  $D$  de tipo 2*.
- (3) Se  $\bigcup\{a : a \in D'\}$  intercepta  $v_1 \cup \dots \cup v_l$ ,  $u'_1 \subset u_1$ ,  $w'_1 \subset w_1$  e  $v'_{r+1} \subset v_1, \dots, v'_{r+l} \subset v_l$  para algum inteiro  $r \geq 0$  tal que  $r = l' - l - r$ , dizemos que  $D'$  é um *subhaltere de  $D$  de tipo 3*. Geometricamente,  $v'_{r+1}, \dots, v'_{r+l}$  estão no centro da barra de  $D'$ .

No caso em que  $D'$  não seja um subhaltere de  $D$  de tipo 1 (resp. tipo 2, tipo 3), aplicando os métodos de aumento de barra em  $D'$  é possível obter uma partição  $h$ -regular  $\mathcal{P}''$  tal que  $\mathcal{P}''$  é um refinamento de  $\mathcal{P}$  e  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}'')$  tem uma componente  $D''$  que é um subhaltere de  $D$  de tipo 1 (resp. tipo 2, tipo 3). De fato:

- Se  $\bigcup\{a : a \in D'\} \subset u_1 \cup \dots \cup u_q$  e  $u'_1 \subset u_s$  para algum  $1 < s \leq q$ , então aplicamos em  $D'$  o método de aumentar a barra do haltere para a esquerda  $s - 1$  vezes. Analogamente, se  $w'_1 \subset u_t$  para algum  $1 < t \leq q$ , então aplicamos em  $D'$  o método de aumentar a barra do haltere para a direita  $q - t + 1$  vezes. Assim, obteremos o haltere desejado  $D''$  e, portanto, a partição  $h$ -regular  $\mathcal{P}''$ .
- Se  $\bigcup\{a : a \in D'\} \subset w_1 \cup \dots \cup w_q$  e  $u'_1 \subset w_s$  e/ou  $w'_1 \subset w_t$  com  $1 < s, t \leq q$ , então raciocinamos como no caso anterior.
- Se  $\bigcup\{a : a \in D'\}$  intercepta  $v_1 \cup \dots \cup v_l$ , pelos casos anteriores podemos supor que  $u'_1 \subset u_1$  e  $w'_1 \subset w_1$ . Neste caso, deve existir um inteiro  $r \geq 0$  tal que

$$\begin{aligned} v'_{r+1} \subset v_1, v'_{r+2} \subset v_2, \dots, v'_{r+l} \subset v_l, \\ u'_1 \cup \dots \cup u'_{q'} \cup v'_1 \cup \dots \cup v'_r \subset u_1 \cup \dots \cup u_q \end{aligned}$$

e

$$v'_{r+l+1} \cup \dots \cup v'_{l'} \cup w'_1 \cup \dots \cup w'_{q'} \subset w_1 \cup \dots \cup w_q.$$

Logo,  $v'_1 \subset u_2, \dots, v'_r \subset u_1$ , então  $r$  é um múltiplo de  $q$ . Além disso, temos que  $r+l = l'$  ou  $r+l \neq l'$ . Se  $r+l \neq l'$ , então  $v'_{r+l+1} \subset w_1, \dots, v'_{l'} \subset w_q$ . Logo, em ambos casos  $l' - l - r$  é um múltiplo de  $q$ . Se  $r > l' - l - r$ , então aplicamos  $2r - l' + l$  vezes o método de aumentar a barra para a direita em  $D'$ . Se  $r < l' - l - r$ , então aplicamos  $l' - l - 2r$  vezes o método de aumentar a barra para a esquerda em  $D'$ . Assim, conseguimos o que queríamos.

A discussão anterior sugere a seguinte definição.

**Definição 2.2.4.** Sejam  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  partições  $h$ -regulares. Dizemos que  $\mathcal{P}'$  é uma  $h$ -subpartição de  $\mathcal{P}$  se  $\mathcal{P}'$  é um refinamento de  $\mathcal{P}$  e cada componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}')$  é um subhaltere (de tipo 1, 2 ou 3) de uma componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$ .

**Observação 2.2.5.** Se  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  são partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $\text{diam } \mathcal{Q}$  é suficientemente pequeno, então  $\mathcal{Q}$  é necessariamente um refinamento de  $\mathcal{P}$ . De fato, se  $a, b \in \mathcal{P}$  e  $a \neq b$ , então  $d(a, b) > 0$  já que  $a$  e  $b$  são conjuntos fechados e disjuntos num espaço compacto. Se  $\text{diam } \mathcal{Q}$  é menor que  $\varepsilon = \min\{d(a, b) : a, b \in \mathcal{P}, a \neq b\}$ , então cada  $c \in \mathcal{Q}$  tem que estar contido em algum  $a \in \mathcal{P}$ . De fato, caso contrário, existiriam  $x, y \in c \in \mathcal{Q}$  e  $a, b \in \mathcal{P}$  distintos tais que  $x \in a$  e  $y \in b$ , donde  $\text{diam } c \geq d(x, y) \geq \varepsilon$ , o que seria uma contradição. Assim,  $\mathcal{Q}$  é um refinamento de  $\mathcal{P}$ .

Segue da Definição 2.2.4 que se  $\mathcal{P}'$  é uma  $h$ -subpartição de  $\mathcal{P}$  com  $\text{diam } \mathcal{P}'$  suficientemente pequeno e  $D$  é uma componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$ , então  $D$  pode ser pensado como a união de seus subhalteres em relação a  $\mathcal{P}'$ . Claramente, deve existir pelo menos um subhaltere de  $D$  de tipo 3. Além disso, existem elementos de  $\mathcal{P}'$  contidos no ciclo esquerdo (resp. ciclo direito) de  $h$  em  $D$ , donde devem existir subhalteres de  $D$  de tipo 1 (resp. de tipo 2). Mais precisamente, podemos fazer o número de subhalteres de  $D$  de tipo 1 (resp. tipo 2, tipo 3) tão grande quanto se queira escolhendo  $\mathcal{P}'$  com diâmetro suficientemente pequeno.

Seja  $X$  um espaço topológico. Lembramos que um conjunto  $A \subset X$  se diz *magro* ou de *primeira categoria* em  $X$  se puder ser escrito como uma união enumerável de conjuntos nunca densos em  $X$ , isto é,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{onde } \text{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, se  $B \subset X$  e  $X \setminus B$  é um conjunto magro, se diz que  $B$  é um conjunto *residual* em  $X$ .

Agora estamos prontos para demonstrar o seguinte teorema, que é o fato principal desta seção. Este teorema dá uma descrição geométrica simples, através de grafos, da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

**Teorema 2.2.6.** *Seja  $S$  o conjunto de todos os  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  com a seguinte propriedade.*

(P) *Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existem uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{m}$  e um múltiplo  $q \in \mathbb{N}$  de  $m$  tal que cada componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  é um haltere balanceado com peso de placa  $q!$  que contém um ciclo esquerdo e um ciclo direito de  $h$ .*

*Então,  $S$  é uma classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .*

**Demonstração:** Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , seja  $S_m$  o conjunto de todos os  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  que satisfazem a propriedade contida em (P) para este  $m$  particular.

**AFIRMAÇÃO 1:** Se  $a$  é um subconjunto próprio e simultaneamente aberto e fechado de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , então o conjunto  $A = \{f \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) : f^n(a) = a\}$  é aberto em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

De fato, seja  $f \in A$ , então  $f^n(a) = a$  e  $f^n(\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus a) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus a$ . Como  $a$  e  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus a$  são disjuntos e fechados num compacto, então  $\varepsilon = d(a, \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus a) > 0$ . Usando o fato que a aplicação  $f \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) \mapsto f^m \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  é contínua para todo  $m \in \mathbb{N}$ , obtemos um  $\delta > 0$  tal que  $\tilde{d}(f^n, g^n) < \varepsilon$  para todo  $g \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  com  $\tilde{d}(f, g) < \delta$ . Tomamos  $g \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que  $\tilde{d}(f, g) < \delta$ . Se  $x \in a$ , então  $g^n(x) \notin \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus a$ . Logo  $g^n(a) \subset a$ . De forma similar, se  $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus a$ , então  $g^n(y) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus a$ , isto é,  $g^n(\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus a) \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus a$ . Como  $g$  é um homeomorfismo, temos que  $g^n(\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus a) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus g^n(a)$ , o que implica que  $a \subset g^n(a)$ . Assim,  $g^n(a) = a$ . Portanto,  $A$  é aberto em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

Vamos mostrar que  $S_m$  é aberto em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Seja  $h \in S_m$ , então existem uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{m}$ , um múltiplo  $q \in \mathbb{N}$  de  $m$  e um  $k$  inteiro positivo tal que  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  consiste de  $k$  halteres balanceados  $D_1, \dots, D_k$  com peso de placa  $q!$ . Para cada  $1 \leq i \leq k$ , escrevemos

$$D_i = \{u_1^i, \dots, u_{q!}^i\} \cup \{v_1^i, \dots, v_{s_i}^i\} \cup \{w_1^i, \dots, w_{q!}^i\}.$$

Além disso, existem  $a_i \subset u_1^i$  e  $b_i \subset w_1^i$  não-vazios e simultaneamente abertos e fechados tais que  $h^{q!}(a_i) = a_i$  e  $h^{q!}(b_i) = b_i$  para cada  $1 \leq i \leq k$ . Pela afirmação anterior, os conjuntos  $A_i = \{f \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) : f^{q!}(a_i) = a_i\}$  e  $B_i = \{f \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) : f^{q!}(b_i) = b_i\}$  são abertos em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  para cada  $1 \leq i \leq k$ . Logo,  $X = \bigcap_{i=1}^k (A_i \cap B_i)$  é aberto em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $h \in X$ .

Como  $h \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , pela Observação 1.2.10 temos que  $[h]$  é aberta em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Então, existe  $V$  aberto em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  contendo  $h$  tal que  $V \subset X \cap [h] \cap \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Se  $f \in V$ , então  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}) = \text{Gr}(h, \mathcal{P})$  (pela Observação 1.4.3) e  $f^{q!}(a_i) = a_i$ ,  $f^{q!}(b_i) = b_i$  para cada  $1 \leq i \leq k$ , isto é,  $f \in S_m$ . Portanto,  $S_m$  é aberto em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

Vamos provar que cada  $S_m$  também é denso em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Para isso, fixamos  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $\varepsilon > 0$ . Aplicando o teorema de aproximação (Teorema 1.4.6 (b)) com  $\min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{m}\right\}$  no lugar de  $\varepsilon$ , obtemos inteiros positivos  $K, N, S$  e  $M$  com as propriedades descritas no teorema. Escolhemos um múltiplo  $q \geq 2$  de  $m$  tal que  $q!$  é um múltiplo de  $N$  e  $M$ . Então, para  $k = K$ ,  $s = S$  e  $n = m = q!$ , o Teorema 1.4.6 (b) nos dá um  $g \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

com

$$\tilde{d}(f, g) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \text{diam } \mathcal{P} < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{m} \right\},$$

tal que  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$  é um grafo dirigido cujas componentes são halteres balanceados com peso de placa  $q!$ .

Agora, vamos definir  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  da seguinte forma: para cada componente (haltere)

$$D = \{u_1, \dots, u_{q!}\} \cup \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_{q!}\}$$

de  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$ , escolhamos subconjuntos próprios, não-vazios e simultaneamente abertos e fechados  $a$  de  $g^{-1}(u_2)$  e  $b$  de  $g(w_{q!})$ . Pela Afirmação 1 na demonstração do Teorema 1.4.4, os conjuntos  $a, b, u_1 \setminus a, g^{q!-1}(a), g^{q!-1}(b), u_{q!} \setminus g^{q!-1}(a), w_{q!} \setminus g^{q!-1}(b)$  e  $g(w_{q!}) \setminus b$  são espaços de Cantor. Logo, pelo Teorema de Brouwer (Teorema 1.2.4), existem homeomorfismos

$$\begin{aligned} h_1 &: g^{q!-1}(a) \rightarrow a, \\ h_2 &: u_{q!} \setminus g^{q!-1}(a) \rightarrow u_1 \setminus a, \\ h_3 &: g^{q!-1}(b) \rightarrow b \quad \text{e} \\ h_4 &: w_{q!} \setminus g^{q!-1}(b) \rightarrow g(w_{q!}) \setminus b. \end{aligned}$$

A partir desses homeomorfismos, definimos  $h|_{u_{q!}} : u_{q!} \rightarrow u_1$  por

$$h(g^{q!-1}(a)) = a \quad \text{e} \quad h(u_{q!} \setminus g^{q!-1}(a)) = u_1 \setminus a,$$

e definimos  $h|_{w_{q!}} : w_{q!} \rightarrow g(w_{q!})$  por

$$h(g^{q!-1}(b)) = b \quad \text{e} \quad h(w_{q!} \setminus g^{q!-1}(b)) = g(w_{q!}) \setminus b.$$

Além disso, nos vértices restantes de  $D$  definimos  $h = g$ . Por construção, temos que  $h(c) = g(c)$  para todo vértice  $c$  de  $D$ , donde  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}) = \text{Gr}(g, \mathcal{P})$ . Além disso, como  $h = g$  em todo vértice de  $D$  exceto  $u_{q!}$  e  $w_{q!}$ , e como  $g(u_i) = u_{i+1}$  para  $1 < i < q!$ , então  $h^{q!-1}(a) = g^{q!-1}(a)$ . Logo,  $h^{q!}(a) = h(g^{q!-1}(a)) = a$ . De forma similar, se cumpre que  $g(w_i) = w_{i+1}$  para  $1 \leq i < q!$ , então  $h^{q!-1}(b) = g^{q!-1}(b)$ . Logo,  $h^{q!}(b) = h(g^{q!-1}(b)) = b$ . Portanto, cada componente (haltere) de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  contém um ciclo direito e um ciclo esquerdo de  $h$ , o que mostra que  $h \in S_m$ . Pela definição de  $h$ , temos que  $\tilde{d}(g, h) < \text{diam } \mathcal{P}$ , isto é,  $\tilde{d}(g, h) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Portanto,  $\tilde{d}(f, h) < \varepsilon$ , provando que  $S_m$  é denso em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Assim,  $S = \bigcap S_m$  é um subconjunto residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

Observe que uma outra maneira de definir o conjunto  $S$  é a seguinte:  $S$  é o conjunto de todos os  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tais que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existem uma partição  $h$ -regular  $\mathcal{P}$  e um múltiplo  $q \in \mathbb{N}$  de  $m$  tais que  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{m}$  e  $w(h, \mathcal{P}) = q!$ . Segue que se  $h \in S$ , é possível encontrar partições  $h$ -regulares  $\mathcal{P}$  com diâmetro tão pequeno quanto se queira e  $w(h, \mathcal{P})$  um múltiplo de qualquer inteiro positivo que se queira.

Além disso, se  $h \in S$  e  $\mathcal{P}$  é uma partição  $h$ -regular, então pela observação anterior e pela Observação 2.2.5, existem  $h$ -subpartições  $\mathcal{P}'$  tais que  $\text{diam } \mathcal{P}'$  é tão pequeno quanto se queira e  $w(h, \mathcal{P}')$  é um múltiplo de qualquer inteiro positivo que se queira.

Estamos agora em posição de provar que  $S$  é uma classe de conjugação.

Se  $f \in S$  e  $g \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  é conjugado a  $f$ , então  $g \in S$ . De fato, existe  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que  $f = h^{-1}gh$ . Fixemos  $m \in \mathbb{N}$ . Pela continuidade uniforme de  $h$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d(h(x), h(y)) < \frac{1}{m}$  sempre que  $d(x, y) < \delta$  ( $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ). Escolhemos  $k \in \mathbb{N}$  múltiplo de  $m$  tal que  $\frac{1}{k} < \delta$ . Como  $f \in S$ , existem uma partição  $f$ -regular  $\mathcal{P}$  e um múltiplo  $q \in \mathbb{N}$  de  $k$  tais que  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{k}$  e  $w(f, \mathcal{P}) = q!$ . Definimos a partição  $\mathcal{Q} = \{h(c) : c \in \mathcal{P}\}$ . Pela continuidade uniforme de  $h$ , temos que  $\text{diam } \mathcal{Q} < \frac{1}{m}$ . Logo,

$$\overrightarrow{ab} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{h(a)h(b)} \in \text{Gr}(g, \mathcal{Q}),$$

o que significa que o haltere

$$D = \{u_1, \dots, u_{q!}\} \cup \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_{q!}\}$$

é uma componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  se e somente se o haltere

$$\tilde{D} = \{h(u_1), \dots, h(u_{q!})\} \cup \{h(v_1), \dots, h(v_s)\} \cup \{h(w_1), \dots, h(w_{q!})\}$$

é uma componente de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q})$ . Além disso, existem  $a \subset u_1$  e  $b \subset w_1$  não-vazios e simultaneamente abertos e fechados tais que  $f^{q!}(a) = a$  e  $f^{q!}(b) = b$ . Logo,  $h(a) \subset h(u_1)$  e  $h(b) \subset h(w_1)$  também são simultaneamente abertos e fechados. Como  $hf^{q!} = g^{q!}h$ , então  $g^{q!}(h(a)) = h(a)$  e  $g^{q!}(h(b)) = h(b)$ . Assim,  $g \in S$ .

Sejam  $f, g \in S$ . Resta provar que  $f$  e  $g$  são conjugados. Em vista do Teorema 1.5.12, é suficiente construir sequências  $(\mathcal{P}_n)$ ,  $(\mathcal{Q}_n)$  e  $(\nu_n)$  com as propriedades descritas na parte (ii) do teorema.

Para construir  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{Q}_1$  e  $\nu_1$ , começamos tomando uma partição  $g$ -regular  $\mathcal{Q}_1$  com  $\text{diam } \mathcal{Q}_1 < 1$ . Logo, tomamos uma partição  $f$ -regular  $\mathcal{P}_1$  tal que  $\text{diam } \mathcal{P}_1 < 1$ ,  $w(f, \mathcal{P}_1)$  é um múltiplo de  $w(g, \mathcal{Q}_1)$  e o conjunto  $A$  de todas as componentes de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$  tem cardinalidade maior ou igual à cardinalidade do conjunto  $B$  de todas as componentes de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$ . Aplicando os métodos de aumentar as barras dos halteres, podemos supor que todos os halteres em  $A \cup B$  têm o mesmo comprimento de barra. Escolha uma sobrejeção  $\phi : A \rightarrow B$ . Para cada  $D \in A$ , definimos  $\nu_1$  em  $D$  como a única sobrejeção de  $D$  em  $\phi(D)$  que envia a barra de  $D$  na barra de  $\phi(D)$  e satisfaz a relação

$$\overrightarrow{ab} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}_1) \Rightarrow \overrightarrow{\nu_1(a)\nu_1(b)} \in \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1) \quad (a, b \in D).$$

Desta forma, obtemos uma aplicação de grafos sobrejetiva  $\nu_1 : \text{Gr}(f, \mathcal{P}_1) \rightarrow \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$ .

Para construir  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{Q}_2$  e  $\nu_2$ , começamos tomando uma  $f$ -subpartição  $\mathcal{P}_2$  de  $\mathcal{P}_1$  tal que  $\text{diam } \mathcal{P}_2 < \frac{1}{2}$  e cada componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$  tem subhalteres de tipos 1, 2 e 3 em relação a  $\mathcal{P}_2$ . Logo, tomamos uma  $g$ -subpartição  $\mathcal{Q}_2$  de  $\mathcal{Q}_1$  tal que  $\text{diam } \mathcal{Q}_2 < \frac{1}{2}$ ,  $w(g, \mathcal{Q}_2)$  é um múltiplo de  $w(f, \mathcal{P}_2)$  e cada componente de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$  tem subhalteres de tipos 1, 2 e 3 em relação a  $\mathcal{Q}_2$ . Fixemos uma componente  $D$  de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$  e seja  $\{D_1, \dots, D_r\}$  o conjunto de todas as componentes  $D_j$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$  tais que  $\nu_1(D_j) = D$ . Podemos dividir o conjunto de todos os subhalteres  $D'$  de  $D$  em relação a  $\mathcal{Q}_2$  em três conjuntos disjuntos  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , de acordo com se  $D'$  é de tipo 1, 2 ou 3, respectivamente. Similarmente, para cada  $1 \leq j \leq r$ , o conjunto de todos os subhalteres de  $D_j$  em relação a  $\mathcal{P}_2$  é dividido nos conjuntos  $B_{j,1}$ ,  $B_{j,2}$  e  $B_{j,3}$ , de acordo com se eles são de tipo 1, 2 ou 3, respectivamente. Podemos supor que  $\mathcal{Q}_2$  foi escolhida de modo que

$$\text{Card } A_i \geq \text{Card}(B_{1,i} \cup \dots \cup B_{r,i}) \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Assim, podemos escolher uma sobrejeção  $\phi_i : A_i \rightarrow B_{1,i} \cup \dots \cup B_{r,i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Além disso, usando os fatos que os halteres  $D, D_1, \dots, D_r$  têm o mesmo comprimento de barra e que cada número na sequência finita  $w(g, \mathcal{Q}_2)$ ,  $w(f, \mathcal{P}_2)$ ,  $w(f, \mathcal{P}_1)$ ,  $w(g, \mathcal{Q}_1)$  é um múltiplo de seu sucessor, e aplicando os métodos de aumentar as barras dos halteres, podemos supor que todos os halteres em  $A_i \cup B_{1,i} \cup \dots \cup B_{r,i}$  têm o mesmo comprimento de barra (mas o comprimento da barra pode depender de  $i$ ). Agora, para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  e cada  $D' \in A_i$ , definimos  $\nu_2$  em  $D'$  como a única sobrejeção de  $D'$  em  $\phi_i(D')$  que envia a barra de  $D'$  na barra de  $\phi_i(D')$  e satisfaz a relação

$$\overrightarrow{ab} \in \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_2) \Rightarrow \overrightarrow{\nu_2(a)\nu_2(b)} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}_2) \quad (a, b \in D').$$

Definindo  $\nu_2$  desta forma para cada componente  $D$  de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$ , obtemos uma aplicação de grafos sobrejetiva  $\nu_2 : \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_2) \rightarrow \text{Gr}(f, \mathcal{P}_2)$ .

**AFIRMAÇÃO 2:** Se cumpre

$$(*) \quad j_1(a) = \nu_1(i_1(\nu_2(a))) \quad \text{para todo } a \in D',$$

onde  $i_1 : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$  e  $j_1 : \mathcal{Q}_2 \rightarrow \mathcal{Q}_1$  são as aplicações de refinamento.

De fato, sejam  $w(g, \mathcal{Q}_1) = m_1$ ,  $w(f, \mathcal{P}_1) = n_1$ ,  $w(f, \mathcal{P}_2) = n_2$  e  $w(g, \mathcal{Q}_2) = m_2$  tais que  $n_1 = \hat{m}_1 n_2$ ,  $n_2 = \hat{n}_1 n_1$  e  $m_2 = \hat{n}_2 m_1$ , onde  $m = \hat{n} n$  significa que  $m$  é um múltiplo inteiro positivo de  $n$ .

Seja  $D'$  um subhaltere de tipo  $i$  ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ) de uma componente  $D$  de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$ . Sejam

$$\begin{aligned} D &= \{u_1, \dots, u_{m_1}\} \cup \{v_1, \dots, v_l\} \cup \{w_1, \dots, w_{m_1}\} \text{ e} \\ D' &= \{u'_1, \dots, u'_{m_2}\} \cup \{v'_1, \dots, v'_s\} \cup \{w'_1, \dots, w'_{m_2}\}. \end{aligned}$$

Como cada vértice  $c \in D'$  está contido num vértice de  $D$ , então  $j_1(c)$  é um vértice de  $D$ . A imagem de  $c \in D'$  pela aplicação de refinamento  $j_1$  vai depender de acordo com se  $D'$  é um subhaltere de  $D$  de tipo 1, 2 ou 3.

- Se  $D'$  é um subhaltere de  $D$  de tipo 1, então  $j_1(u'_{\hat{m}_1+i}) = u_i$ ,  $j_1(v'_{\hat{m}_1+i-1}) = u_i$  e  $j_1(w'_{\hat{m}_1+i}) = u_i$ , onde  $1 \leq i \leq m_1$ .
- Se  $D'$  é um subhaltere de  $D$  de tipo 2, então  $j_1(u'_{\hat{m}_1+i}) = w_i$ ,  $j_1(v'_{\hat{m}_1+i-1}) = w_i$  e  $j_1(w'_{\hat{m}_1+i}) = w_i$ , onde  $1 \leq i \leq m_1$ .
- Se  $D'$  é um subhaltere de  $D$  de tipo 3, então  $j_1(u'_{\hat{m}_1+i}) = u_i$  e  $j_1(w'_{\hat{m}_1+i}) = w_i$ . Para  $j_1(v'_k)$  temos 3 casos. Seja  $r = (s-l)/2$  ( $r = \hat{m}_1$ ), se  $1 \leq k \leq r$ , então  $j_1(v'_{\hat{m}_1+i-1}) = u_i$ ; se  $r+1 \leq k \leq r+l$ , então  $j_1(v'_k) = v_{k-r}$ ; se  $r+l+1 \leq k \leq s$ , então  $j_1(v'_{\hat{m}_1+l+i}) = w_i$ , onde  $1 \leq i \leq m_1$ .

Considere  $\phi_i$  definido como acima. Escrevemos

$$\phi_i(D') = \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{n_2}\} \cup \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s\} \cup \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{n_2}\}.$$

Logo, da definição de  $\nu_2$ , se tem que  $\nu_2(u'_{\hat{n}_2+i}) = \tilde{u}_i$ ,  $\nu_2(v'_k) = \tilde{v}_k$  e  $\nu_2(w'_{\hat{n}_2+i}) = \tilde{w}_i$ , onde  $1 \leq i \leq n_2$ .

Por construção,  $\phi_i(D')$  é um subhaltere de tipo  $i$  ( $i = 1, 2$  ou  $3$ ) para alguma componente  $D_j$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$ . Logo, para cada vértice  $c \in \phi_i(D')$ , se tem que  $i_1(c)$  é um vértice de  $D_j$ . A imagem de  $c \in \phi_i(D')$  pela aplicação de refinamento  $i_1$  vai depender de acordo com se  $\phi_i(D')$  é um subhaltere de  $D_j$  de tipo 1, 2 ou 3. Escrevemos

$$D_j = \{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{n_1}\} \cup \{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_l\} \cup \{\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{n_1}\}.$$

- Se  $\phi_1(D')$  é um subhaltere de  $D_j$  de tipo 1, então  $i_1(\tilde{u}_{\hat{n}_1+i}) = \hat{u}_i$ ,  $i_1(\tilde{v}_{\hat{n}_1+i-1}) = \hat{u}_i$  e  $i_1(\tilde{w}_{\hat{n}_1+i}) = \hat{u}_i$ , onde  $1 \leq i \leq n_1$ .
- Se  $\phi_2(D')$  é um subhaltere de  $D_j$  de tipo 2, então  $i_1(\tilde{u}_{\hat{n}_1+i}) = \hat{w}_i$ ,  $i_1(\tilde{v}_{\hat{n}_1+i-1}) = \hat{w}_i$  e  $i_1(\tilde{w}_{\hat{n}_1+i}) = \hat{w}_i$ , onde  $1 \leq i \leq n_1$ .
- Se  $\phi_3(D')$  é um subhaltere de  $D_j$  de tipo 3, então  $i_1(\tilde{u}_{\hat{n}_1+i}) = \hat{u}_i$  e  $i_1(\tilde{w}_{\hat{n}_1+i}) = \hat{w}_i$ . Para  $i_1(\tilde{v}_k)$  temos 3 casos. Seja  $r = (s-l)/2$  ( $r = \hat{n}_1$ ), se  $1 \leq k \leq r$ , então  $i_1(\tilde{v}_{\hat{n}_1+i-1}) = \hat{u}_i$ ; se  $r+1 \leq k \leq r+l$ , então  $i_1(\tilde{v}_k) = \hat{v}_{k-r}$ ; se  $r+l+1 \leq k \leq s$ , então  $i_1(\tilde{v}_{\hat{n}_1+l+i}) = \hat{w}_i$ , onde  $1 \leq i \leq n_1$ .

Além disso,  $\nu_1(D_j) = D$ . Então, da definição de  $\nu_1$ , se tem que  $\nu_1(\hat{u}_{\hat{m}_1+i}) = u_i$ ,  $\nu_1(\hat{v}_k) = v_k$  e  $\nu_1(\hat{w}_{\hat{m}_1+i}) = w_i$ , onde  $1 \leq i \leq m_1$ .

Pelo exposto, é fácil verificar que  $j_1(a) = \nu_1(i_1(\nu_2(a)))$  para cada  $a \in D'$ . Portanto,

$$j_1 = \nu_1 \circ i_1 \circ \nu_2.$$

Agora, aplicamos exatamente o mesmo procedimento para construir  $\mathcal{P}_3$ ,  $\mathcal{Q}_3$  e  $\nu_3$  (mas com  $\mathcal{P}_3$  e  $\mathcal{Q}_3$  em lugar de  $\mathcal{Q}_2$  e  $\mathcal{P}_2$ , respectivamente), e assim por diante. Isso completa a prova de que  $f$  e  $g$  são conjugados.  $\square$

No restante deste capítulo vamos mostrar como a descrição da classe conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$  dada pelo Teorema 2.2.6, pode ser usada para estabelecer com pouco esforço propriedades muito precisas dos homeomorfismos desta classe. Assim, ficará claro que esta descrição é bastante útil e muito fácil de usar. Outro fato importante é que qualquer propriedade genérica de um elemento de  $\mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$  é automaticamente satisfeita por todos os elementos da classe de conjugação residual.

### 2.3 Caos Li-Yorke e entropia topológica

**Definição 2.3.1.** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Um par  $(x, y) \in X \times X$  é dito um *par Li-Yorke* para  $f$  se

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

A função  $f$  é dita *Li-Yorke caótica* se existe um conjunto não-enumerável  $S \subset X$  tal que  $(x, y)$  é um par Li-Yorke para  $f$  sempre que  $x$  e  $y$  são pontos distintos em  $S$ .

**Definição 2.3.2.** Sejam  $X$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Dadas coberturas  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$  de  $X$ , seja

$$\mathcal{U}_1 \vee \dots \vee \mathcal{U}_n = \{U_1 \cap \dots \cap U_n : U_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_n\}.$$

A *entropia* de uma cobertura aberta  $\mathcal{U}$  de  $X$  é definida por

$$H(\mathcal{U}) = \log N(\mathcal{U}),$$

onde  $N(\mathcal{U})$  denota a cardinalidade mínima de uma subcobertura de  $\mathcal{U}$  e  $\log$  se refere ao logaritmo em base 2. A *entropia topológica de  $f$  com respeito a  $\mathcal{U}$*  é definida por

$$h_{top}(f, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{U}^{n-1}),$$

onde  $\mathcal{U}^{n-1} = \mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{U})$ . Finalmente, a *entropia topológica de  $f$*  é dada por

$$h_{top}(f) = \sup_{\mathcal{U}} h_{top}(f, \mathcal{U}),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as coberturas abertas de  $X$ .

O conceito de entropia topológica foi introduzido por R. L. Adler, A. G. Konheim e M. H. McAndrew [1] e é um dos conceitos mais importantes em dinâmica topológica.

O conceito de caos Li-Yorke foi introduzido por T. Y. Li e J. A. Yorke [27] no contexto de aplicações do intervalo. Foi o primeiro conceito de caos a aparecer explicitamente na literatura matemática e se tornou muito popular. Dentre os conceitos mais conhecidos de comportamentos

caóticos na dinâmica topológica sobre espaços métricos compactos, caos Li-Yorke é o mais fraco. Por exemplo, F. Blanchard et al. [11] provaram que *caos topológico* (ou seja, entropia topológica positiva) implica caos Li-Yorke para funções contínuas sobre espaços métricos compactos.

E. Glasner e B. Weiss [22] provaram que o conjunto dos homeomorfismos em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  que têm entropia topológica zero é residual em  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Em outras palavras, os homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor não são topologicamente caóticos. Contudo, isto não elimina a possibilidade de que tais homeomorfismos possam ser Li-Yorke caóticos. O próximo teorema mostra que este não é o caso. Na verdade, ele contém uma conclusão ainda muito mais forte.

**Teorema 2.3.3.** *Nenhum elemento da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tem um par Li-Yorke.*

**Demonstração:** Seja  $h$  um elemento da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Então,  $h$  satisfaz a propriedade (P) do Teorema 2.2.6. Suponha que  $(\sigma, \tau)$  é um par Li-Yorke para  $h$  e tome  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{m} < \limsup_{n \rightarrow \infty} d(h^n(\sigma), h^n(\tau)).$$

Então, existe uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com diâmetro  $< \frac{1}{m}$  tal que cada componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  é um haltere balanceado. Pela nossa escolha de  $m$ , devem existir infinitos  $n$ 's tais que  $d(h^n(\sigma), h^n(\tau)) > \frac{1}{m}$ , donde  $h^n(\sigma)$  e  $h^n(\tau)$  estão em diferentes conjuntos de  $\mathcal{P}$ . Por outro lado, como

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(h^n(\sigma), h^n(\tau)) = 0,$$

devem existir infinitos  $n$ 's tais que  $d(h^n(\sigma), h^n(\tau))$  é tão pequena que, necessariamente,  $h^n(\sigma)$  e  $h^n(\tau)$  têm que estar no mesmo conjunto de  $\mathcal{P}$ .

Está claro que  $\sigma$  e  $\tau$  estão numa mesma componente  $D$  de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$ . Escrevemos

$$D = \{u_1, \dots, u_r\} \cup \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_r\}.$$

Como  $D$  é um haltere, observe que o único vértice de  $D$  onde dois pontos podem ser levados em vértices diferentes é  $u_1$ . Além disso, o único vértice que pode receber dois pontos provenientes de vértices diferentes é  $w_1$ .

Se  $\sigma$  e  $\tau$  pertencem a um mesmo vértice de  $D$ , escolhemos o menor inteiro positivo  $k$  tal que  $h^k(\sigma)$  e  $h^k(\tau)$  estão em vértices diferentes. Então  $h^{k-1}(\sigma), h^{k-1}(\tau) \in u_1$ . Logo, temos dois possíveis casos:

- $h^{k+n}(\sigma)$  e  $h^{k+n}(\tau)$  estão em vértices diferentes de  $D$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto contradiz o fato de que existem infinitos  $i$ 's tais que  $h^i(\sigma)$  e  $h^i(\tau)$  pertencem a um mesmo conjunto de  $\mathcal{P}$ .

- Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $h^{k+N}(\sigma), h^{k+N}(\tau) \in w_1$ . Então  $h^{k+N+n}(\sigma)$  e  $h^{k+N+n}(\tau)$  pertencem ao mesmo vértice de  $D$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o que contradiz o fato de que existem infinitos  $i$ 's tais que  $h^i(\sigma)$  e  $h^i(\tau)$  pertencem a diferentes conjuntos de  $\mathcal{P}$ .

De forma similar, se  $\sigma$  e  $\tau$  pertencem a vértices diferentes de  $D$ , escolhemos o menor inteiro positivo  $k$  tal que  $h^k(\sigma), h^k(\tau) \in w_1$ , o que é uma contradição como no caso anterior.

Portanto, não existe um par Li-Yorke para nenhum elemento da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .  $\square$

**Corolário 2.3.4.** *Os elementos da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  têm entropia topológica zero.*

## 2.4 A propriedade de sombreamento

**Definição 2.4.1.** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $h : X \rightarrow X$  um homeomorfismo. Dado  $\delta > 0$ , uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  é dita uma  $\delta$ -pseudotrajetória de  $h$  se

$$d(h(x_n), x_{n+1}) \leq \delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Dizemos que  $h$  tem a *propriedade de sombreamento* (ou a *propriedade de rastreamento de pseudo-órbitas*) se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que toda  $\delta$ -pseudotrajetória  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $h$  é  $\varepsilon$ -sombreada por uma trajetória real de  $h$ , ou seja, existe  $x \in X$  tal que

$$d(x_n, h^n(x)) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

A noção de pseudotrajetória e a propriedade de sombreamento surgiram com trabalhos de R. Bowen, C. Conley e Ja. G. Sinaï no início da década de 1970, motivados por trabalhos de D. V. Anosov do final da década de 1960. Estes conceitos desempenham um papel fundamental na teoria qualitativa de sistemas dinâmicos e equações diferenciais, e têm sido exaustivamente estudados por diversos autores em muitos contextos diferentes. Referenciamos o leitor aos artigos originais [13, 14, 16, 17, 18, 35] e aos livros [25, 32, 33].

O conceito de sombreamento possui muitas variações. Nesta seção, também consideraremos a chamada propriedade de sombreamento fraco [19]:

**Definição 2.4.2.** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $h : X \rightarrow X$  um homeomorfismo. Dizemos que  $h$  tem a *propriedade de sombreamento fraco* se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda  $\delta$ -pseudotrajetória  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $h$ , existe  $x \in X$  tal que o conjunto  $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$  está contido na  $\varepsilon$ -vizinhança da órbita  $\{h^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ .

É claro que a propriedade de sombreamento fraco é muito mais fraca do que a propriedade de sombreamento. A sua conclusão é que, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , existe  $j \in \mathbb{Z}$  tal que  $d(x_n, h^j(x)) < \varepsilon$ .

Note que isto é automaticamente verdadeiro se a órbita  $\{h^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$  for densa em  $X$ . A propriedade de sombreamento exige que  $j$  tenha que ser igual a  $n$ , ou seja,  $d(x_n, h^n(x)) < \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

M. Mazur [28] provou que os homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor têm a propriedade de sombreamento fraco. Contudo, permaneceu em aberto se tais homeomorfismos têm a propriedade de sombreamento ou não. A resposta a este problema é dada pelo seguinte teorema.

**Teorema 2.4.3.** *Cada elemento da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tem a propriedade de sombreamento.*

**Demonstração:** Seja  $h$  um elemento da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Fixe  $\varepsilon > 0$  e escolha  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{m} < \varepsilon$ . Então, existe uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{m}$  tal que toda componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  é um haltere balanceado. Seja  $\delta$  a distância mínima entre dois elementos distintos de  $\mathcal{P}$ . Para cada sequência  $X = (\sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , associamos a sequência  $S(X) = (S_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$  em  $\mathcal{P}$  que satisfaz  $\sigma_n \in S_n(X)$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Seja  $W = (\tau_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  uma  $\delta$ -pseudotrajetória de  $h$ . Vamos provar que ela pode ser  $\varepsilon$ -sombreada por uma trajetória real de  $h$ . Temos que

$$d(h(\tau_n), \tau_{n+1}) \leq \delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Logo, pela escolha de  $\delta$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , temos que  $h(\tau_n)$  e  $\tau_{n+1}$  pertencem ao mesmo conjunto de  $\mathcal{P}$ . Logo, se  $a, b \in \mathcal{P}$ ,  $\tau_n \in a$  e  $\tau_{n+1} \in b$ , então  $\overrightarrow{ab} \in \text{Gr}(h, \mathcal{P})$ . Segue que  $W$  está contida numa componente  $D$  de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$ . Escrevemos

$$D = \{u_1, \dots, u_r\} \cup \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_r\}.$$

Logo, existem apenas três possibilidades para a sequência  $S(W)$ , a saber:

- (1)  $(\dots, u_1, \dots, u_r, u_1, \dots, u_r, u_1, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_r, w_1, \dots, w_r, \dots)$ , ou
- (2)  $(\dots, u_1, \dots, u_r, u_1, \dots, u_r, u_1, \dots, u_r, \dots)$ , ou
- (3)  $(\dots, w_1, \dots, w_r, w_1, \dots, w_r, w_1, \dots, w_r, \dots)$ .

Agora, vamos encontrar três trajetórias reais de tipo (1), (2) e (3), respectivamente.

Escolhemos algum  $x_0$  num vértice da barra de  $D$ . Definimos a trajetória real  $X_0 = (h^n(x_0))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Logo,  $S(X_0)$  é de tipo (1).

Para obter uma trajetória real que esteja contida em  $\bigcup_{i=1}^r u_i$ , observe que

$$u_1 \supset h^{-r}(u_1) \supset h^{-2r}(u_1) \supset \dots \supset h^{-nr}(u_1) \supset \dots$$

Segue que  $\bigcap_{n=0}^{\infty} h^{-nr}(u_1)$  é não-vazio. Logo, tomamos qualquer  $y_0$  nesta interseção e definimos a trajetória real  $Y_0 = (h^n(y_0))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Então,  $S(Y_0)$  é de tipo (2).

De forma similar, desde que

$$w_1 \setminus h(v_s) \supset h^r(w_1 \setminus h(v_s)) \supset h^{2r}(w_1 \setminus h(v_s)) \supset \cdots \supset h^{nr}(w_1 \setminus h(v_s)) \supset \cdots,$$

podemos tomar  $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{nr}(w_1 \setminus h(v_s))$ . Definimos a trajetória real  $Z_0 = (h^n(z_0))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Logo,  $S(Z_0)$  é de tipo (3).

Finalmente, se  $S(W)$  é de tipo (1) (resp. de tipo (2), de tipo (3)), escolhemos  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = h^{n_0}(x_0)$  (resp.  $y = h^{n_0}(y_0)$ ,  $z = h^{n_0}(z_0)$ ) pertence ao mesmo vértice de  $\tau_0$ . Consideramos a trajetória real  $X = (h^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$  (resp.  $Y = (h^n(y))_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $Z = (h^n(z))_{n \in \mathbb{Z}}$ ). Como  $\text{diam } \mathcal{P} < \varepsilon$ , então  $d(\tau_n, h^n(x)) < \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Portanto,  $h$  tem a propriedade de sombreamento.  $\square$

## 2.5 Conjuntos limites e o odômetro universal

Dado  $\alpha \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})^{\mathbb{N}}$ , considere o espaço produto

$$\Delta_\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{\alpha(i)},$$

onde  $\mathbb{Z}_k = \{0, \dots, k-1\}$  com a topologia discreta. Observe que  $\Delta_\alpha$  é homeomorfo ao espaço de Cantor. Definimos uma operação de adição em  $\Delta_\alpha$  da seguinte maneira: se  $(x_1, x_2, \dots)$  e  $(y_1, y_2, \dots)$  estão em  $\Delta_\alpha$ , então

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (z_1, z_2, \dots),$$

onde  $z_i = x_i + y_i + \varepsilon_{i-1} \pmod{\alpha(i)}$ , com  $\varepsilon_0 = 0$  e

$$\varepsilon_{i-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } x_{i-1} + y_{i-1} + \varepsilon_{i-2} < \alpha(i-1) \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (i \geq 2).$$

**Exemplo 2.5.1.** Seja  $\Delta_\alpha = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_4 \times \dots$ , onde  $\alpha = (2, 5, 7, 4, \dots)$ . Se  $x = (1, 3, 1, 2, \dots)$  e  $y = (1, 4, 3, 1, \dots)$ , então  $x + y = (z_1, z_2, z_3, z_4, \dots)$ , onde  $z_1 = 1 + 1 + 0 \pmod{2} = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ;  $z_2 = 3 + 4 + 1 \pmod{5} = 3$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ ;  $z_3 = 1 + 3 + 1 \pmod{7} = 5$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ ;  $z_4 = 2 + 1 + 0 \pmod{4} = 3$ ,  $\varepsilon_4 = 0$ ; etc.

Definimos a aplicação  $f_\alpha : \Delta_\alpha \rightarrow \Delta_\alpha$  como

$$f_\alpha(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots) + (1, 0, 0, \dots).$$

Dizemos que  $f_\alpha$  é a aplicação “+1”. O sistema dinâmico  $(\Delta_\alpha, f_\alpha)$  é conhecido como um *solenóide*, ou uma *máquina de somar* ou um *odômetro*. Também definimos uma função  $M_\alpha$  do conjunto dos números primos em  $\{0, 1, 2, \dots, \infty\}$  por

$$M_\alpha(p) = \sum_{i=1}^{\infty} n(i),$$

onde  $n(i)$  é o maior inteiro tal que  $p^{n(i)}$  divide  $\alpha(i)$ . O seguinte teorema provado em [15] caracteriza os odômetros topologicamente conjugados.

**Teorema 2.5.2.** *Sejam  $\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})^{\mathbb{N}}$ . Então  $f_\alpha$  e  $f_\beta$  são topologicamente conjugados se e somente se  $M_\alpha = M_\beta$ .*

Se  $M_\alpha(p) = \infty$  para todo  $p$ , dizemos que  $f_\alpha$  é um *odômetro universal*. Segue do Teorema 2.5.2 que quaisquer dois odômetros universais são topologicamente conjugados.

Também precisaremos do seguinte resultado de [12].

**Teorema 2.5.3.** *Sejam  $\alpha \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})^{\mathbb{N}}$  e  $m_i = \alpha(1)\alpha(2)\cdots\alpha(i)$  para cada  $i$ . Seja  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua de um espaço topológico compacto  $X$ . Então  $f$  é topologicamente conjugada a  $f_\alpha$  se e somente se (1), (2) e (3) valem.*

(1) *Para cada inteiro positivo  $i$ , existe uma cobertura  $\mathcal{P}_i$  de  $X$  consistindo de  $m_i$  conjuntos simultaneamente abertos e fechados, dois a dois disjuntos, não vazios e que são permutados ciclicamente por  $f$ .*

(2) *Para cada inteiro positivo  $i$ ,  $\mathcal{P}_{i+1}$  refina  $\mathcal{P}_i$ .*

(3) *Se  $W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \cdots$  é uma seqüência encaixada com  $W_i \in \mathcal{P}_i$  para cada  $i$ , então  $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$  consiste de um único ponto.*

Se  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo, onde  $X$  é um espaço topológico, lembramos que o conjunto  $\omega$ -limite de  $f$  em  $x \in X$  é dado por

$$\omega(x, f) = \left\{ y \in X : \exists \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \text{ tal que } \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y \right\}.$$

**Teorema 2.5.4.** *Seja  $h$  um elemento da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Então, a restrição de  $h$  a todo conjunto  $\omega$ -limite  $\omega(\sigma, h)$  é topologicamente conjugada ao odômetro universal.*

**Demonstração:** Como  $h$  satisfaz a propriedade (P), podemos tomar uma partição  $h$ -regular  $\mathcal{P}_1$  tal que  $\text{diam } \mathcal{P}_1 < 1$  e  $w(h, \mathcal{P}_1) = q_1!$ . Logo, tomamos uma  $h$ -subpartição  $\mathcal{P}_2$  de  $\mathcal{P}_1$  tal que  $\text{diam } \mathcal{P}_2 < \frac{1}{2}$  e  $w(h, \mathcal{P}_2) = q_2!$ , e podemos supor que  $q_2$  é múltiplo de  $q_1$ . Continuamos tomando uma  $h$ -subpartição  $\mathcal{P}_3$  de  $\mathcal{P}_2$  tal que  $\text{diam } \mathcal{P}_3 < \frac{1}{3}$  e  $w(h, \mathcal{P}_3) = q_3!$ , com  $q_3$  múltiplo de  $2q_2$ . Assim, indutivamente, construímos uma seqüência  $(\mathcal{P}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e uma seqüência  $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de números naturais de modo que as seguintes propriedades são válidas para todo  $m \in \mathbb{N}$ :

- $\text{diam}(\mathcal{P}_m) < \frac{1}{m}$ ;
- $\mathcal{P}_{m+1}$  refina  $\mathcal{P}_m$ ;

- $q_{m+1}$  é um múltiplo de  $m q_m$ ;
- toda componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}_m)$  é um haltere balanceado com peso de placa  $q_m!$ .

Seja  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Então  $\sigma$  pertence a um vértice de um certo haltere  $D_m$  em  $\text{Gr}(h, \mathcal{P}_m)$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Escrevemos

$$D_m = \{u_1, \dots, u_{q_m!}\} \cup \{v_1, \dots, v_{s_m}\} \cup \{w_1, \dots, w_{q_m!}\}.$$

Observe que se  $\sigma \in u_i$  para algum  $1 \leq i \leq q_m!$ , pode acontecer que  $\{h^n(\sigma)\}_{n \in \mathbb{N}}$  esteja contido no ciclo  $\{u_1, \dots, u_{q_m!}\}$  ou exista um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\{h^n(\sigma)\}_{n \geq n_0}$  esteja contido no ciclo  $\{w_1, \dots, w_{q_m!}\}$ . De forma similar, se  $\sigma \in v_i$  para algum  $1 \leq i \leq s_m$ , então existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\{h^n(\sigma)\}_{n \geq n_0}$  está contido no ciclo  $\{w_1, \dots, w_{q_m!}\}$  e se  $\sigma \in w_i$  para algum  $1 \leq i \leq q_m!$ , então  $\{h^n(\sigma)\}_{n \in \mathbb{N}}$  também está contido no ciclo  $\{w_1, \dots, w_{q_m!}\}$ . Então, o conjunto  $\omega$ -limite  $\omega(\sigma, h)$  deve estar contido em um dos ciclos de  $D_m$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Consideremos a coleção

$$Q_m = \{C_a = a \cap \omega(\sigma, h) : a \in \mathcal{P}_m \text{ e } a \cap \omega(\sigma, h) \neq \emptyset\}.$$

Além disso,  $\omega(\sigma, h)$  é um subespaço topológico de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com a topologia induzida e é invariante, donde  $h(\omega(\sigma, h)) = \omega(\sigma, h)$ .

Note que, para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $Q_m$  é uma cobertura de  $\omega(\sigma, h)$  consistindo de  $q_m!$  conjuntos simultaneamente abertos e fechados na topologia induzida, dois a dois disjuntos e não-vazios. Além disso,  $Q_{m+1}$  refina  $Q_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Os conjuntos de  $Q_m$  são permutados ciclicamente por  $h$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . De fato, para  $m \in \mathbb{N}$  fixo, se  $y \in C_a \in Q_m$  com  $a \in \mathcal{P}_m$ , então existe  $b \in \mathcal{P}_m$  tal que  $h(y) \in C_b$ . Logo,  $\vec{ab} \in \text{Gr}(h, \mathcal{P}_m)$  e  $h(C_a) \subset C_b$ . Além disso, se  $z \in C_b$ , então existe um  $c \in \mathcal{P}_m$  tal que  $h^{-1}(z) \in C_c$ . Logo,  $\vec{cb} \in \text{Gr}(h, \mathcal{P}_m)$ . Como todos os  $a \in \mathcal{P}_m$  tais que  $C_a \in Q_m$  formam um ciclo, segue que  $a = c$ . Assim,  $h(C_a) = C_b$  se  $\vec{ab} \in \text{Gr}(h, \mathcal{P}_m)$ . Finalmente, se  $Q_m = \{C_{a_i} : a_i \in \mathcal{P}_m \text{ com } 1 \leq i \leq q_m!\}$  tal que  $\{a_1, \dots, a_{q_m!}\}$  é um ciclo, então  $h(C_{a_i}) = C_{a_{i+1}}$  se  $1 \leq i < q_m!$  e  $h(C_{a_{q_m!}}) = C_{a_1}$ .

Finalmente, seja  $W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \dots$  uma sequência encaixada com  $W_i \in Q_i$  para todo  $i$ . Como  $\text{diam } Q_m \leq \text{diam } \mathcal{P}_m < \frac{1}{m}$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , então  $\text{diam } W_i \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Logo,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$  consiste de exatamente um ponto.

Assim, segue do Teorema 2.5.3 que  $h|_{\omega(\sigma, h)} : \omega(\sigma, h) \rightarrow \omega(\sigma, h)$  é topologicamente conjugado a  $f_\alpha$ , onde

$$\alpha = \left( q_1!, \frac{q_2!}{q_1!}, \frac{q_3!}{q_2!}, \frac{q_4!}{q_3!}, \dots \right).$$

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m!$  divide  $\alpha(m+1) = \frac{q_{m+1}!}{q_m!}$ , já que  $q_{m+1}$  é múltiplo de  $m q_m$ . Logo,  $m!$  divide  $\alpha(i)$  para todo  $i \geq m+1$ . Se  $p$  é primo, temos que  $n(i) \geq 1$  para todo  $i \geq p+1$ . Logo,  $M_\alpha(p) = \infty$  para todo  $p$  primo. Portanto,  $f_\alpha$  é um odômetro universal.  $\square$

## 2.6 Noções de recorrência

Sejam  $X$  um espaço métrico e  $h : X \rightarrow X$  um homeomorfismo. Lembramos que um ponto  $x \in X$  é chamado *periódico* se existe  $n \geq 1$  tal que  $h^n(x) = x$  e o menor inteiro positivo  $n$  que satisfaz a igualdade é chamado o *período* de  $x$ . Um ponto  $x \in X$  é chamado *recorrente* se  $x \in \omega(x, h)$  ou  $x \in \alpha(x, h)$ . Um ponto  $x \in X$  é chamado *não-errante* se para qualquer vizinhança  $V$  de  $x$  em  $X$ , existe  $n \geq 1$  tal que  $h^n(V) \cap V \neq \emptyset$ . Finalmente, por uma  $\varepsilon$ -cadeia de  $x$  a  $y$  queremos dizer uma sequência finita  $x_0, x_1, \dots, x_k$  com  $x_0 = x$  e  $x_k = y$  tal que  $d(h(x_n), x_{n+1}) \leq \varepsilon$  para todo  $n = 0, 1, \dots, k-1$ . Um ponto  $x \in X$  é dito *recorrente em cadeia* se, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe uma  $\varepsilon$ -cadeia de  $x$  a  $x$  [6, 37].

Denotamos o conjunto de todos os pontos periódicos (resp. pontos recorrentes, pontos não-errantes, pontos recorrentes em cadeia) de  $h$  por  $P(h)$  (resp.  $R(h)$ ,  $\Omega(h)$ ,  $CR(h)$ ).

**Proposição 2.6.1.** *Se cumpre o seguinte*

$$P(h) \subset R(h) \subset \Omega(h) \subset CR(h).$$

**Demonstração:** Como a primeira inclusão é óbvia, provemos a segunda. Sejam  $x \in R(h)$  e  $U$  um conjunto aberto contendo  $x$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que  $x \in \omega(x, h)$ . Então existem  $n_r > n_k$  tais que  $h^{n_r}(x), h^{n_k}(x) \in U$ . Logo,

$$h^{n_r}(x) = h^{n_r - n_k}(h^{n_k}(x)) \in U \cap h^{n_r - n_k}(U) \neq \emptyset.$$

Portanto,  $x \in \Omega(h)$ .

Agora vamos mostrar a terceira inclusão. Sejam  $x \in \Omega(h)$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $h$  é uniformemente contínua, existe  $0 < \delta < \varepsilon/2$  tal que se  $d(x, y) < \delta$  então  $d(h(x), h(y)) < \varepsilon/2$ . Seja  $U = B_{\delta/2}(x)$ . Como  $x$  é não-errante, existe  $n \geq 1$  tal que  $h^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Logo, existe  $y \in U$  tal que  $h^n(y) \in U$ . Se  $n = 1$ , considerando a sequência  $(x, x)$ , temos que

$$\begin{aligned} d(h(x), x) &\leq d(h(x), h(y)) + d(h(y), x) \\ &< \varepsilon/2 + \delta/2 \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

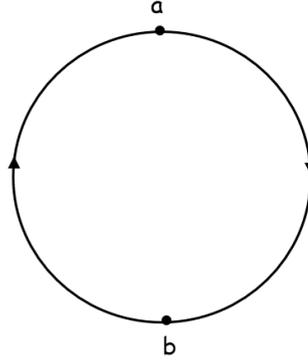
isto é,  $(x, x)$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia periódica. Por outro lado, se  $n > 1$ , considerando a sequência  $(x, h(y), h^2(y), \dots, h^{n-1}(y), x)$ , temos que

$$d(h(x), h(y)) < \varepsilon, \dots, d(h^n(y), x) < \varepsilon,$$

isto é,  $(x, h(y), h^2(y), \dots, h^{n-1}(y), x)$  é uma  $\varepsilon$ -cadeia periódica. Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrário, concluímos que  $x \in CR(h)$ .  $\square$

É importante ressaltar que as inclusões podem ser estritas. Por exemplo, considere o homeomorfismo do círculo dado na figura, onde  $a$  e  $b$  são pontos fixos.

Temos que  $\Omega(h) = \{a, b\}$ , mas  $CR(h) = \mathbb{S}^1$ .



**Teorema 2.6.2.** *Seja  $h$  um elemento da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ . Então, temos os seguintes fatos:*

- (a)  $P(h)$  é vazio.
- (b)  $R(h) = \Omega(h) = CR(h)$ .
- (c)  $R(h)$  é um espaço de Cantor com interior vazio em  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ .

**Demonstração:**

(a): Suponha que existe  $\sigma \in P(h)$  de período  $p$ . Seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  tal que cada componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  é um haltere com peso de placa  $q$ , onde  $q$  é um múltiplo de  $p$  maior do que  $p$ . Seja  $D$  o haltere de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  que contém  $\{\sigma, h(\sigma), \dots, h^p(\sigma)\}$ . Logo,  $\sigma$  e  $h^p(\sigma)$  estão contidos em vértices diferentes, o que é uma contradição.

(b): Como  $R(h) \subset \Omega(h) \subset CR(h)$ , vamos provar que  $CR(h) \subset R(h)$ . Para isso, suponha que existe  $\sigma \in CR(h)$  tal que  $\sigma \notin R(h)$ .

**AFIRMAÇÃO:** Existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que o conjunto  $A_m = \{n \in \mathbb{N} : d(h^n(\sigma), \sigma) < 1/m\}$  é finito.

De fato, suponha que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , o conjunto  $A_m$  é infinito. Logo, para cada  $m$ , escolhamos  $n_m \in A_m$  com a propriedade de que  $n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$ . Então,

$$d(h^{n_j}(\sigma), \sigma) < \frac{1}{j} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Logo, se  $j \rightarrow \infty$ , então  $n_j \rightarrow \infty$  e  $h^{n_j}(\sigma) \rightarrow \sigma$ . Assim,  $\sigma \in \omega(\sigma, h)$ , o que contradiz o fato de que  $\sigma \notin R(h)$ .

Seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  com  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{m}$  tal que cada componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  é um haltere balanceado. Seja  $D$  o haltere em  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  que contém um vértice contendo  $\sigma$  e escreva

$$D = \{u_1, \dots, u_r\} \cup \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_r\}.$$

Segue da afirmação que  $h^n(\sigma)$  e  $\sigma$  pertencem ao mesmo vértice para apenas finitos  $n$ 's. Então,  $\sigma$  deve pertencer à barra  $\{v_1, \dots, v_s\}$  ou ao ciclo  $\{u_1, \dots, u_r\}$  e, neste último caso, deve existir algum  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $h^{n_0}(\sigma)$  pertence também à barra. Como  $\sigma \in CR(h)$ , para um  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existem  $x_0 = \sigma, x_1, \dots, x_k = \sigma$  tais que  $d(h(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon$  para  $n = 0, 1, \dots, k-1$ , isto é,  $h(x_n)$  e  $x_{n+1}$  pertencem ao mesmo vértice de  $D$ . Para cada  $n = 0, 1, \dots, k-1$ , seja  $a_n \in \mathcal{P}$  tal que  $h(x_n), x_{n+1} \in a_n$ . Então,  $\{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$  é um ciclo. Logo, se  $\sigma$  pertence à barra, então  $a_{k-1}$  é um vértice da barra, o que é uma contradição. Além disso,  $CR(h)$  é invariante, então  $h^{n_0}(\sigma) \in CR(h)$ . Como  $h^{n_0}(\sigma)$  pertence à barra, se segue como no caso anterior. Portanto, ambas possibilidades implicam que  $\sigma \notin CR(h)$ . Assim,  $CR(h) \subset R(h)$ .

(c): Note que  $R(h)$  é um subespaço topológico de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com a topologia induzida, então  $R(h)$  é 0-dimensional. Foi provado em (b) que  $R(h) = \Omega(h)$ , que é compacto e não-vazio. Então, basta provar que  $R(h)$  não tem pontos isolados. Seja  $\tau \in R(h)$ , sem perda de generalidade, supomos que  $\tau \in \omega(\tau, h)$ . Do Teorema 2.5.4, existe um homeomorfismo entre  $\omega(\tau, h)$  e um espaço de Cantor. Então,  $\omega(\tau, h)$  é um espaço de Cantor. Além disso,  $\omega(\tau, h) \subset \Omega(h) = R(h)$ . Logo,  $\tau$  não é um ponto isolado de  $R(h)$ . Portanto,  $R(h)$  é um espaço de Cantor.

Finalmente, suponha que  $A$  é um conjunto aberto não-vazio de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  que está contido em  $R(h)$  e fixe  $\sigma \in A$ . Escolhemos um  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, de modo que existe uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que cada componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  é um haltere e que o conjunto  $v \in \mathcal{P}$  contendo  $\sigma$  esteja contido em  $A$ . Seja  $D$  o haltere de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  que contém  $v$ . Escrevemos  $D$  como na prova de (b). Seja a coleção

$$O = \{h^{-r}(v_1), \dots, h^{-2}(v_1), h^{-1}(v_1), v_1, \dots, v_s, h(v_s), h^2(v_s), \dots, h^r(v_s)\}.$$

Observe que todo vértice de  $D$  contém um conjunto da coleção  $O$ .

**AFIRMAÇÃO:** Todo ponto em cada conjunto da coleção  $O$  é não-recorrente.

De fato, para qualquer  $x$  que pertence a um vértice do haltere  $D$ , se tem que  $\omega(x, h)$  está contido num dos ciclos de  $D$ . Logo, se  $x$  está na barra de  $D$ , não pode acontecer que  $x \in \omega(x, h)$ . Além disso, se  $x \in h^{-i}(v_1)$  (resp.  $x \in h^i(v_s)$ ), então  $h^i(x) \in v_1$  (resp.  $h^{-i}(x) \in v_s$ ) para  $1 \leq i \leq r$ . Como  $\omega(x, h)$  é invariante, temos que se  $x \in \omega(x, h)$ , então  $h^i(x) \in \omega(x, h)$  (resp.  $h^{-i}(x) \in \omega(x, h)$ ), o que é uma contradição.

Assim, todo vértice de  $D$  contém um ponto não-recorrente, contrariando o fato de que  $v$  está contido em  $A$ . Isso prova que  $R(h)$  tem interior vazio.  $\square$

O fato de que os homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor não possuem pontos periódicos foi provado originalmente em [5].

## 2.7 Equicontinuidade e continuidade em cadeia

**Definição 2.7.1.** Uma aplicação  $f$  de um espaço métrico  $X$  em si mesmo é dita *equicontínua* em um ponto  $x \in X$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$y \in X \text{ e } d(y, x) < \delta \Rightarrow d(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq 0.$$

**Definição 2.7.2.** Uma aplicação  $f$  de um espaço métrico  $X$  em si mesmo é dita *contínua em cadeia* em um ponto  $x \in X$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para qualquer escolha de pontos

$$x_0 \in B(x; \delta), x_1 \in B(f(x_0); \delta), x_2 \in B(f(x_1); \delta), \dots,$$

temos que

$$d(x_n, f^n(x)) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq 0.$$

O conceito de equicontinuidade é clássico e o conceito de continuidade em cadeia pode ser encontrado em [3, 7]. É claro que continuidade em cadeia é uma propriedade muito mais forte do que equicontinuidade.

**Teorema 2.7.3.** *Seja  $h$  um elemento da classe de conjugação residual de  $\mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Então,  $h$  é contínuo em cadeia em todo ponto não-recorrente e, portanto, é contínuo em cadeia em todo ponto de um conjunto aberto e denso, mas não é equicontínuo em cada ponto de um conjunto não-enumerável.*

**Demonstração:** Seja  $\sigma$  um ponto não-recorrente de  $h$ . Então existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que o conjunto

$$A_{m_0} = \left\{ n \in \mathbb{N} : d(h^n(\sigma), \sigma) < \frac{1}{m_0} \right\}$$

é finito. Fixamos  $\varepsilon > 0$  e escolhemos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m \geq m_0$  e  $1/m < \varepsilon$ . Logo, o conjunto  $A_m$  também é finito. Seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{m}$  tal que toda componente de  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  é um haltere balanceado e seja

$$D = \{u_1, \dots, u_r\} \cup \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_r\}$$

o haltere em  $\text{Gr}(h, \mathcal{P})$  que contém um vértice contendo  $\sigma$ . Consideramos dois possíveis casos.

Se  $\sigma \in v_1 \cup \dots \cup v_s \cup w_1 \cup \dots \cup w_r$ , basta escolher  $0 < \delta < \min\{\varepsilon, d\}$ , onde

$$d = \min\{d(a, b) : a, b \in \mathcal{P} \text{ e } a \neq b\}.$$

De fato, considere uma escolha de pontos

$$\sigma_0 \in B(\sigma; \delta), \sigma_1 \in B(h(\sigma_0); \delta), \sigma_2 \in B(h(\sigma_1); \delta), \dots$$

Pela nossa escolha de  $\delta$ , temos que  $\sigma_n$  e  $h^n(\sigma)$  têm que pertencer a um mesmo vértice de  $D$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $d(\sigma_n, h^n(\sigma)) < \varepsilon$  para todo  $n \geq 0$ .

Se  $\sigma$  está no ciclo  $\{u_1, \dots, u_r\}$ , nossa escolha de  $m$  implica que existe  $N \in \mathbb{N}$  com  $h^N(\sigma) \in v_1$ . Logo, para cada  $1 \leq i \leq r$ , se tem

$$u_{r+2-i} \supset h^{-i}(v_1) \supset h^{-i-r}(v_1) \supset h^{-i-2r}(v_1) \supset \dots \supset h^{-i-n_i r}(v_1),$$

com  $n_i \in \mathbb{N}$  tal que  $i + n_i r \leq N$ . Para cada  $1 \leq i \leq r$ , seja  $\mathcal{P}_i$  a partição de  $u_i$  definida por

$$\mathcal{P}_i = \{u_{r+2-i} \setminus h^{-i}(v_1), h^{-i}(v_1) \setminus h^{-i-r}(v_1), \dots, h^{-i-(n_i-1)r}(v_1) \setminus h^{-i-n_i r}(v_1)\}.$$

Definimos  $\tilde{\mathcal{P}}$ , um refinamento de  $\mathcal{P}$ , substituindo  $u_i$  pelos elementos de  $\mathcal{P}_i$  para cada  $1 \leq i \leq r$ . Seja  $\tilde{d} = \min\{d(a, b) : a, b \in \tilde{\mathcal{P}} \text{ e } a \neq b\}$ . Escolhemos  $0 < \delta < \min\{\varepsilon, \tilde{d}\}$ . Então, para uma escolha de pontos  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$  como no caso anterior, se tem que  $\sigma_n$  e  $f^n(\sigma)$  pertencem a um mesmo elemento de  $\tilde{\mathcal{P}}$ . Portanto,  $d(\sigma_n, h^n(\sigma)) < \varepsilon$  para todo  $n \geq 0$ .

Assim, provamos que  $h$  é contínua em cadeia em todo ponto do conjunto  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus R(h)$ . Pelo Teorema 2.6.2,  $R(h)$  é fechado e  $\text{int}(R(h)) = \emptyset$ , donde  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus R(h)$  é aberto e denso.

Vamos agora provar a última afirmação. Sejam  $\mathcal{P}$  e  $D$  como acima. Como  $u_1 \supset h^{-r}(u_1) \supset h^{-2r}(u_1) \supset \dots$ , o conjunto

$$Y = \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{-nr}(u_1)$$

é fechado e não-vazio. Além disso,

$$h^{-r}(Y) = \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{-(n+1)r}(u_1) = Y.$$

Portanto,  $h^r(Y) = Y$ . Se  $Y$  fosse aberto,  $h^{-nr}(u_1 \setminus Y)$  seria fechado para todo  $n \geq 0$ . Como  $u_1 \setminus Y \supset h^{-r}(u_1 \setminus Y) \supset h^{-2r}(u_1 \setminus Y) \supset \dots$ , obteríamos que a interseção

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} h^{-nr}(u_1 \setminus Y) = \bigcap_{n=0}^{\infty} h^{-nr}(u_1) \setminus Y$$

é não-vazia, o que seria uma contradição. Logo,  $Y$  não é aberto, donde  $\overline{u_1 \setminus Y} \not\subset u_1 \setminus Y$ . Como  $\overline{u_1 \setminus Y} \subset u_1$ , concluímos que o conjunto fechado

$$Z = \overline{u_1 \setminus Y} \cap Y$$

é não-vazio. Além disso,  $h^r(Z) = Z$ . De fato, como  $h$  é um homeomorfismo e  $h^r(Y) = Y$ ,

$$\begin{aligned} h^r(Z) &= h^r(\overline{u_1 \setminus Y}) \cap h^r(Y) \\ &= \overline{h^r(u_1 \setminus Y)} \cap Y \\ &= \overline{h^r(u_1) \setminus h^r(Y)} \cap Y \\ &= \overline{h^r(u_1) \setminus Y} \cap Y. \end{aligned}$$

Como  $u_1 \subset h^r(u_1)$ , então  $h^r(u_1) = u_1 \cup (h^r(u_1) \setminus u_1)$ . Além disso,

$$h^r(u_1) = h^{r-1}(u_2) \cup h^{r-1}(v_1) \subset u_1 \cup h^{r-1}(v_1),$$

donde  $h^r(u_1) \setminus u_1 \subset h^{r-1}(v_1)$ . Denotamos  $w = h^{r-1}(v_1)$ . Logo,  $w$  ou é um vértice da barra do haltere  $D$  ou é um vértice do ciclo direito do haltere  $D$ . Segue que

$$\overline{(h^r(u_1) \setminus u_1) \setminus Y} \cap Y \subset \overline{w \setminus Y} \cap Y \subset w \cap u_1 = \emptyset.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h^r(Z) &= \overline{h^r(u_1) \setminus Y} \cap Y \\ &= \overline{(u_1 \cup (h^r(u_1) \setminus u_1)) \setminus Y} \cap Y \\ &= \overline{(u_1 \setminus Y) \cup ((h^r(u_1) \setminus u_1) \setminus Y)} \cap Y \\ &= (\overline{u_1 \setminus Y} \cap Y) \cup (\overline{(h^r(u_1) \setminus u_1) \setminus Y} \cap Y) \\ &= Z. \end{aligned}$$

Suponhamos que  $h$  é equicontínuo em um ponto  $\sigma$  de  $Z$ . Seja

$$\varepsilon = \min\{d(a, b) : a, b \in \mathcal{P} \text{ e } a \neq b\} > 0.$$

Dado  $\delta > 0$ , como  $\sigma \in \overline{u_1 \setminus Y}$ , existem  $\sigma_0 \in u_1 \setminus Y$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que  $d(\sigma, \sigma_0) < \delta$  e  $h^{n_0}(\sigma_0)$  pertence a um vértice da barra do haltere  $D$ . Além disso, a trajetória de  $\sigma$  permanece no ciclo  $\{u_1, \dots, u_r\}$  para sempre (pois  $\sigma \in Y$ ). Logo,  $d(h^{n_0}(\sigma), h^{n_0}(\sigma_0)) \geq \varepsilon$ . Isto prova que  $h$  não é equicontínuo em nenhum ponto de  $Z$ .

De forma similar, vamos ver que  $h$  não é equicontínuo em nenhum ponto de  $h^j(Z)$ , para cada  $1 \leq j < r$ . De fato, fixemos  $1 \leq j < r$  e seja  $\sigma \in h^j(Z)$ . Então existe  $\tau \in Z$  tal que  $\sigma = h^j(\tau)$ . Consideremos o mesmo  $\varepsilon > 0$  de acima. Dado  $\delta > 0$ , pela continuidade uniforme de  $h$ , existe  $\delta_0 > 0$  tal que  $h^j(B_{\delta_0}(\tau)) \subset B_\delta(\sigma)$ . Logo, existe  $\tau_0 \in u_1 \setminus Y$  tal que  $d(\tau, \tau_0) < \delta_0$ , donde  $d(\sigma, h^j(\tau_0)) < \delta$ . Finalmente, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $h^{n_0}(\tau_0)$  pertence a um vértice da barra do haltere  $D$  e a trajetória de  $\tau$  permanece no ciclo  $\{u_1, \dots, u_r\}$  para sempre, donde  $d(h^{n_0-j}(\sigma), h^{n_0-j}(h^j(\tau_0))) \geq \varepsilon$ .

Assim,  $h$  não é equicontínuo em cada ponto do conjunto

$$W = Z \cup h(Z) \cup \dots \cup h^{r-1}(Z).$$

Como esse conjunto é fechado e invariante por  $h$ , então  $\omega(\sigma, h) \subset W$  para todo  $\sigma \in W$ . Logo, do Teorema 2.5.4, temos que  $\omega(\sigma, h)$  é um espaço de Cantor para todo  $\sigma \in W$ , isto é,  $\omega(\sigma, h)$  é não-enumerável. Portanto,  $W$  é não-enumerável.  $\square$

## Capítulo 3

# Dinâmica das Funções Contínuas Genéricas do Espaço de Cantor

### 3.1 Introdução

No presente capítulo apresentaremos o surpreendente resultado de que existe um conjunto residual do espaço das funções contínuas do espaço de Cantor tal que quaisquer dois elementos deste conjunto são conjugados entre si (Teorema 3.2.4). Usaremos a descrição deste conjunto para estabelecer algumas propriedades dinâmicas de seus elementos. Como ficará claro no decorrer deste capítulo, tal descrição é muito fácil de usar e bastante útil. Assim, provaremos para este conjunto residual propriedades dinâmicas análogas às da classe de conjugação residual do grupo dos homeomorfismos do espaço de Cantor.

Na Seção 3.2 provaremos que existe um conjunto residual do espaço das funções contínuas do espaço de Cantor tal que quaisquer dois elementos deste conjunto são conjugados entre si. Apresentaremos uma descrição geométrica e teórica de grafos dos elementos deste conjunto, que afirma que para cada função contínua  $f$  deste conjunto residual existe uma partição  $\mathcal{P}$  do espaço de Cantor com diâmetro tão pequeno quanto se queira de modo que o grafo  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  consiste de uma união finita de balões disjuntos, cada um com as mesmas características.

Na Seção 3.3 provaremos que nenhum elemento do conjunto residual tem um par Li-Yorke.

Na Seção 3.4 provaremos que cada função contínua  $f$  do conjunto residual é contínua em cadeia em todo ponto do espaço de Cantor.

Na Seção 3.5 provaremos que a restrição de cada função contínua do conjunto residual a cada um de seus conjuntos  $\omega$ -limite é topologicamente conjugada ao odômetro universal.

Na Seção 3.6 estabeleceremos alguns resultados importantes sobre as noções de recorrência de cada função contínua  $f$  do conjunto residual. Provaremos que o conjunto de pontos periódicos de  $f$  é vazio. Além disso, provaremos que o conjunto de pontos recorrentes de  $f$  é um espaço de

Cantor e é igual ao conjunto de pontos recorrentes em cadeia de  $f$ .

## 3.2 Caracterização das funciones contínuas genéricas

Sejam  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ ,  $\mathcal{P}$  uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $B$  uma componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  que é um balão. Escrevemos

$$B = \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_t\}.$$

**Definição 3.2.1.** Dizemos que  $B$  é *estrito em relação a  $f$*  se  $f(v_i) \subsetneq v_{i+1}$  para todo  $1 \leq i < s$ ,  $f(w_j) \subsetneq w_{j+1}$  para todo  $1 \leq j < t$ , e  $f(v_s) \cup f(w_t) \subsetneq w_1$ .

**Definição 3.2.2.** Seja  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é  *$f$ -admissível* se existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que cada componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  é um balão de tipo  $(k, k)$  que é estrito em relação a  $f$ . Neste caso, denotamos este número  $k$  por  $b(f, \mathcal{P})$ .

Dadas duas partições  $f$ -admissíveis  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  tais que  $\mathcal{P}'$  é um refinamento de  $\mathcal{P}$ , existe uma relação entre as componentes de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  e  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}')$  e uma relação entre  $b(f, \mathcal{P})$  e  $b(f, \mathcal{P}')$  como veremos a seguir.

- i. Cada componente  $B'$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}')$  deve estar contida em alguma componente  $B$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ , no sentido que a união de todos os vértices de  $B'$  está contida na união de todos os vértices de  $B$ . De fato, no capítulo anterior se provou que para cada componente  $B'$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}')$ , existe uma componente  $B$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  tal que cada vértice de  $B'$  está contido num vértice de  $B$ .
- ii.  $b(f, \mathcal{P}')$  é necessariamente um múltiplo de  $b(f, \mathcal{P})$ . De fato, se uma componente  $B'$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}')$  está contida numa componente  $B$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ , necessariamente o ciclo de  $B'$  deve estar contido no ciclo de  $B$ . Então,  $b(f, \mathcal{P}')$  é um múltiplo de  $b(f, \mathcal{P})$ .

**Definição 3.2.3.** Sejam  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  partições  $f$ -admissíveis tais que  $\mathcal{P}'$  é um refinamento de  $\mathcal{P}$ . Seja  $B$  uma componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ . Dizemos que uma componente  $B'$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}')$  é um *subbalão* de  $B$  de *tipo  $u$*  se o vértice inicial de  $B'$  está contido no vértice  $u$  de  $B$ .

Pela Observação 2.2.5, temos que se  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  são partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $\text{diam } \mathcal{Q}$  é suficientemente pequeno, então  $\mathcal{Q}$  é necessariamente um refinamento de  $\mathcal{P}$ . Segue da Definição 3.2.3 que se  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  são partições  $f$ -admissíveis com  $\text{diam } \mathcal{P}'$  suficientemente pequeno e  $B$  é uma componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ , então  $B$  pode ser pensada como a união de seus subbalões em relação a  $\mathcal{P}'$ . Como o balão  $B$  é estrito em relação a  $f$ , então devem existir subbalões de  $B$  de cada tipo  $u \in B$ . Mais precisamente, podemos fazer o número de subbalões de  $B$  de cada tipo  $u$  tão grande quanto se queira escolhendo  $\mathcal{P}'$  com diâmetro suficientemente pequeno.

Agora vamos demonstrar o teorema principal desta seção que é um fato surpreendente. Este teorema prova que existe um subconjunto residual de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que quaisquer dois elementos desse conjunto são conjugados entre si.

**Teorema 3.2.4.** *Seja  $S$  o conjunto de todas as  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  com a seguinte propriedade.*

(Q) *Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existem uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{m}$  e um múltiplo  $q \in \mathbb{N}$  de  $m$  tal que cada componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  é um balão de tipo  $(q!, q!)$  que é estrito em relação a  $f$ .*

*Então,  $S$  é um subconjunto residual de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que quaisquer dois de seus elementos são conjugados entre si.*

**Demonstração:** Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , seja  $S_m$  o conjunto de todas as  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  que satisfazem a propriedade contida em (Q) para este  $m$  particular.

AFIRMAÇÃO 1: Se  $a$  e  $b$  são subconjuntos simultaneamente abertos e fechados em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , então o conjunto  $A = \{g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) : g(a) \subsetneq b\}$  é aberto em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

De fato, suponha  $f \in A$  e escolha  $\sigma \in b \setminus f(a)$ . Então  $f(a) \subset b \setminus \{\sigma\}$ . Como  $f(a)$  é compacto e  $b \setminus \{\sigma\}$  é aberto em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(f(a)) \subset b \setminus \{\sigma\}$ . Seja  $g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  com  $\tilde{d}(f, g) < \varepsilon$ . Se  $x \in a$ , então  $g(x) \in B_\varepsilon(f(a))$ . Assim,  $g(a) \subset b \setminus \{\sigma\}$ , donde  $g \in A$ , provando que  $A$  é aberto em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

AFIRMAÇÃO 2: Se  $a, b$  e  $c$  são subconjuntos simultaneamente abertos e fechados em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , então o conjunto  $B = \{g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) : g(a) \cup g(b) \subsetneq c\}$  é aberto em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

De fato, suponha  $f \in B$  e escolha  $\sigma \in c \setminus (f(a) \cup f(b))$ . Então  $f(a) \subset c \setminus \{\sigma\}$  e  $f(b) \subset c \setminus \{\sigma\}$ . Como na afirmação anterior, existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $\tilde{d}(f, g) < \varepsilon$ , então  $g(a) \subset c \setminus \{\sigma\}$  e  $g(b) \subset c \setminus \{\sigma\}$ . Assim,  $g \in B$ , provando que  $B$  é aberto em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

Vamos mostrar que  $S_m$  é aberto em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Seja  $f \in S_m$ , então existem uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , um múltiplo  $q \in \mathbb{N}$  de  $m$  e um  $k$  inteiro positivo tal que  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  consiste de  $k$  balões  $B_1, \dots, B_k$  de tipo  $(q!, q!)$  que são estritos em relação a  $f$ . Para cada  $1 \leq i \leq k$ , escrevemos

$$B_i = \{v_1^i, \dots, v_{q!}^i\} \cup \{w_1^i, \dots, w_{q!}^i\}.$$

Além disso,  $f(v_j^i) \subsetneq v_{j+1}^i$  e  $f(w_j^i) \subsetneq w_{j+1}^i$  para cada  $1 \leq j < q!$ , e  $f(v_{q!}^i) \cup f(w_{q!}^i) \subsetneq w_1^i$ . Pelas afirmações anteriores, os conjuntos

$$A_j^i = \{g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) : g(v_j^i) \subsetneq v_{j+1}^i\},$$

$$B_j^i = \{g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) : g(w_j^i) \subsetneq w_{j+1}^i\} \text{ e}$$

$$C^i = \{g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) : g(v_{q!}^i) \cup g(w_{q!}^i) \subsetneq w_1^i\}$$

são abertos em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  para todo  $1 \leq i \leq k$  e  $1 \leq j < q!$ . Logo,

$$X = \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{j=1}^{q!-1} (A_j^i \cap B_j^i \cap C^i)$$

é aberto em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $f \in X$ . Se  $g \in X$ , então  $\text{Gr}(g, \mathcal{P}) = \text{Gr}(f, \mathcal{P})$  e cada componente (balão) de  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$  é estrito em relação a  $g$ . Logo,  $X \subset S_m$ . Portanto,  $S_m$  é aberto em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

Para provar que cada  $S_m$  também é denso em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , fixamos  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e  $\varepsilon > 0$ . Aplicando o Teorema 1.4.6(a) com  $\min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{m}\right\}$  no lugar de  $\varepsilon$ , obtemos inteiros positivos  $S$  e  $M$  de modo que se escolhermos um múltiplo  $q \geq 2$  de  $m$  tal que  $q! \geq S$  e  $q!$  é um múltiplo de  $M$ , então existem  $g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  e uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com

$$\tilde{d}(f, g) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \text{diam } \mathcal{P} < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{m}\right\},$$

tal que cada componente de  $\text{Gr}(g, \mathcal{P})$  é um balão de tipo  $(q!, q!)$ .

Para cada  $a \in \mathcal{P}$ , escolhemos um ponto  $x_a \in a$ . Definimos  $\psi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que  $\psi(a) = x_a$  para todo  $a \in \mathcal{P}$ , então  $\psi$  é contínua. Logo,  $\psi \circ g \sim_{\mathcal{P}} g$ , o que implica que  $\text{Gr}(\psi \circ g, \mathcal{P}) = \text{Gr}(g, \mathcal{P})$  pela Observação 1.4.3. Além disso,  $\tilde{d}(\psi \circ g, g) \leq \text{diam } \mathcal{P} < \frac{\varepsilon}{2}$ , donde  $\tilde{d}(\psi \circ g, f) < \varepsilon$ . Seja  $B$  uma componente de  $\text{Gr}(\psi \circ g, \mathcal{P})$  e escrevamos

$$B = \{v_1, \dots, v_{q!}\} \cup \{w_1, \dots, w_{q!}\}.$$

Se cumpre que  $\psi \circ g(v_i) \subset v_{i+1}$  e  $\psi \circ g(w_i) \subset w_{i+1}$  para todo  $1 \leq i < q!$ , e  $\psi \circ g(v_{q!}) \cup \psi \circ g(w_{q!}) \subset w_1$ . Como  $\psi \circ g$  tem imagem finita, então as inclusões acima são estritas. Logo,  $B$  é estrito em relação a  $\psi \circ g$ . Assim,  $\psi \circ g \in S_m$ , provando que  $S_m$  é denso em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Portanto,  $S = \bigcap S_m$  é um subconjunto residual de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

Observe que uma outra maneira de definir o conjunto  $S$  é a seguinte:  $S$  é o conjunto de todas as  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tais que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existem uma partição  $f$ -admissível  $\mathcal{P}$  e um múltiplo  $q \in \mathbb{N}$  de  $m$  tais que  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{m}$  e  $b(f, \mathcal{P}) = q!$ . Segue que se  $f \in S$ , é possível encontrar partições  $f$ -admissíveis  $\mathcal{P}$  com diâmetro tão pequeno quanto se queira e  $b(f, \mathcal{P})$  um múltiplo de qualquer inteiro positivo que se queira.

Se  $f \in S$  e  $g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  é conjugada a  $f$ , então  $g \in S$ . De fato, existe  $h \in \mathcal{H}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que  $f = h^{-1}gh$ . Fixemos  $m \in \mathbb{N}$ . Pela continuidade uniforme de  $h$ , existe um  $\delta > 0$  tal que  $d(h(x), h(y)) < \frac{1}{m}$  sempre que  $d(x, y) < \delta$  ( $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ). Escolhemos  $k \in \mathbb{N}$  múltiplo de  $m$  tal que  $\frac{1}{k} < \delta$ . Como  $f \in S$ , existem uma partição  $f$ -admissível  $\mathcal{P}$  e um múltiplo  $q \in \mathbb{N}$  de  $k$  tais que  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{k}$  e  $b(f, \mathcal{P}) = q!$ . Definimos a partição  $\mathcal{Q} = \{h(c) : c \in \mathcal{P}\}$ . Pela continuidade uniforme de  $h$ , temos que  $\text{diam } \mathcal{Q} < \frac{1}{m}$ . Logo,

$$\overrightarrow{ab} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{h(a)h(b)} \in \text{Gr}(g, \mathcal{Q}),$$

o que significa que o balão

$$B = \{v_1, \dots, v_{q!}\} \cup \{w_1, \dots, w_{q!}\}$$

é uma componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  se e somente se o balão

$$\tilde{B} = \{h(v_1), \dots, h(v_{q!})\} \cup \{h(w_1), \dots, h(w_{q!})\}$$

é uma componente de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q})$ . Além disso, se cumpre que  $f(v_i) \subsetneq v_{i+1}$  e  $f(w_i) \subsetneq w_{i+1}$  para todo  $1 \leq i < q!$ , e  $f(v_{q!}) \cup f(w_{q!}) \subsetneq w_1$ . Como  $hf = gh$ , então  $g(h(v_i)) \subsetneq h(v_{i+1})$  e  $g(h(w_i)) \subsetneq h(w_{i+1})$  para todo  $1 \leq i < q!$ , e  $g(h(v_{q!})) \cup g(h(w_{q!})) \subsetneq h(w_1)$ . Assim,  $g \in S$ .

Sejam  $f, g \in S$ . Resta provar que  $f$  e  $g$  são conjugadas. Basta construir sequências  $(\mathcal{P}_n)$ ,  $(\mathcal{Q}_n)$  e  $(\nu_n)$  com as propriedades descritas na parte (ii) do Teorema 1.5.12.

Para construir  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{Q}_1$  e  $\nu_1$ , começamos tomando uma partição  $g$ -admissível  $\mathcal{Q}_1$  com  $\text{diam } \mathcal{Q}_1 < 1$ . Logo, tomamos uma partição  $f$ -admissível  $\mathcal{P}_1$  tal que  $\text{diam } \mathcal{P}_1 < 1$ ,  $b(f, \mathcal{P}_1)$  é um múltiplo de  $b(g, \mathcal{Q}_1)$  e o conjunto  $X$  de todas as componentes de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$  tem cardinalidade maior ou igual à cardinalidade do conjunto  $Y$  de todas as componentes de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$ . Escolha uma sobrejeção  $\phi : X \rightarrow Y$ . Para cada  $B \in X$ , definimos  $\nu_1$  em  $B$  como a única sobrejeção de  $B$  em  $\phi(B)$  que envia o vértice inicial de  $B$  ao vértice inicial de  $\phi(B)$  e satisfaz a relação

$$\overrightarrow{ab} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}_1) \Rightarrow \overline{\nu_1(a)\nu_1(b)} \in \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1) \quad (a, b \in B).$$

Desta forma, obtemos uma aplicação de grafos sobrejetiva  $\nu_1 : \text{Gr}(f, \mathcal{P}_1) \rightarrow \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$ .

Para construir  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{Q}_2$  e  $\nu_2$ , começamos tomando uma partição  $f$ -admissível  $\mathcal{P}_2$  tal que  $\mathcal{P}_2$  é um refinamento de  $\mathcal{P}_1$ ,  $\text{diam } \mathcal{P}_2 < \frac{1}{2}$  e cada componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$  tem subbalões de cada tipo em relação a  $\mathcal{P}_2$ . Logo, tomamos uma partição  $g$ -admissível  $\mathcal{Q}_2$  tal que  $\mathcal{Q}_2$  é um refinamento de  $\mathcal{Q}_1$ ,  $\text{diam } \mathcal{Q}_2 < \frac{1}{2}$ ,  $b(g, \mathcal{Q}_2)$  é um múltiplo de  $b(f, \mathcal{P}_2)$  e cada componente de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$  tem subbalões de cada tipo em relação a  $\mathcal{Q}_2$ . Fixemos uma componente  $B$  de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$  e seja  $\{B_1, \dots, B_r\}$  o conjunto de todas as componentes  $B_k$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_1)$  tais que  $\nu_1(B_k) = B$ . Para cada  $u \in B$ , seja  $X_u$  o conjunto de todos os subbalões de  $B$  de tipo  $u$  em relação a  $\mathcal{Q}_2$ . Além disso, para cada  $1 \leq k \leq r$ , seja  $Y_{k,u}$  o conjunto de todos os subbalões de  $B_k$  de tipo  $v$  em relação a  $\mathcal{P}_2$  para algum  $v \in \nu_1^{-1}(\{u\})$ . Podemos supor que  $\mathcal{Q}_2$  foi escolhida de modo que

$$\text{Card}(X_u) \geq \text{Card}(Y_{1,u} \cup \dots \cup Y_{r,u}) \quad \text{para todo } u \in B.$$

Assim, podemos escolher uma sobrejeção  $\phi_u : X_u \rightarrow Y_{1,u} \cup \dots \cup Y_{r,u}$  ( $u \in B$ ). Finalmente, para cada  $u \in B$  e cada  $B' \in X_u$ , definimos  $\nu_2$  em  $B'$  como a única sobrejeção de  $B'$  em  $\phi_u(B')$  que envia o vértice inicial de  $B'$  ao vértice inicial de  $\phi_u(B')$  e satisfaz a relação

$$\overrightarrow{ab} \in \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_2) \Rightarrow \overline{\nu_2(a)\nu_2(b)} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}_2) \quad (a, b \in B').$$

Definindo  $\nu_2$  desta forma para cada componente  $B$  de  $\text{Gr}(g, \mathcal{Q}_1)$ , obtemos uma aplicação de grafos sobrejetiva  $\nu_2 : \text{Gr}(g, \mathcal{Q}_2) \rightarrow \text{Gr}(f, \mathcal{P}_2)$ .

AFIRMAÇÃO 3: Se cumpre

$$(*) \quad j_1(a) = \nu_1(i_1(\nu_2(a))) \quad \text{para todo } a \in B',$$

onde  $i_1 : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$  e  $j_1 : \mathcal{Q}_2 \rightarrow \mathcal{Q}_1$  são as aplicações de refinamento.

De fato, vamos considerar primeiro o vértice inicial  $c$  de  $B'$ . Como  $B' \in X_u$ , existe  $k \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $\phi_u(B') \in Y_{k,u}$ . Por definição, o vértice inicial de  $B'$  está contido em  $u$ , isto é,  $j_1(c) = u$ . Por construção,  $\nu_2(c)$  é o vértice inicial de  $\phi_u(B')$ , então  $i_1(\nu_2(c)) \in \nu_1^{-1}(\{u\})$ . Logo  $\nu_1(i_1(\nu_2(c))) = j_1(c)$ . Agora, suponhamos que um certo vértice  $a$  de  $B'$  satisfaz a igualdade em (\*). Seja  $b$  o único vértice de  $B'$  tal que  $\overrightarrow{ab} \in B'$ . Como  $B'$  é um subbalão de  $B$ , então

$$\overrightarrow{ab} \in B' \Rightarrow \overrightarrow{j_1(a)j_1(b)} \in B.$$

Além disso,  $\phi_u(B')$  é um subbalão de  $B_k$ ,  $\nu_1(B_k) = B$  e  $\nu_2(B') = \phi_u(B')$ , donde

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ab} \in B' &\Rightarrow \overrightarrow{\nu_2(a)\nu_2(b)} \in \phi_u(B') \\ &\Rightarrow \overrightarrow{i_1(\nu_2(a))i_1(\nu_2(b))} \in B_k \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\nu_1(i_1(\nu_2(a)))\nu_1(i_1(\nu_2(b)))} \in B. \end{aligned}$$

Como estamos assumindo que  $j_1(a) = \nu_1(i_1(\nu_2(a)))$ , segue que  $b$  também satisfaz a igualdade em (\*). Por indução, vemos que (\*) vale. Portanto,  $j_1 = \nu_1 \circ i_1 \circ \nu_2$ .

Agora, aplicamos exatamente o mesmo procedimento para construir  $\mathcal{P}_3$ ,  $\mathcal{Q}_3$  e  $\nu_3$  (mas com  $\mathcal{P}_3$  e  $\mathcal{Q}_3$  no lugar de  $\mathcal{Q}_2$  e  $\mathcal{P}_2$ , respectivamente), e assim por diante. Isso completa a prova.  $\square$

### 3.3 Caos Li-Yorke e entropia topológica

**Definição 3.3.1.** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $f : X \rightarrow X$  uma função.

- (1) Dizemos que  $f$  é *transitiva* se para todo par de conjuntos abertos não-vazios  $U$  e  $V$  de  $X$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .
- (2) Dizemos que  $f$  tem *dependência sensível nas condições iniciais* se existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in X$  e toda vizinhança  $W$  de  $x$ , existem  $y \in W$  e  $n \in \mathbb{N}$  tais que

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

**Definição 3.3.2.** Seja  $X$  um espaço métrico. Uma função contínua  $f : X \rightarrow X$  é *caótica no sentido de Devaney* se

- $f$  é transitiva,
- o conjunto de pontos periódicos de  $f$  é denso em  $X$ , e
- $f$  tem dependência sensível nas condições iniciais.

E. D'Aniello e U. B. Darji [20] provaram que o conjunto das funções contínuas em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  que têm entropia topológica zero e nenhum ponto periódico é residual em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Em outras

palavras, as funções contínuas genéricas do espaço de Cantor não são topologicamente caóticas e nem caóticas no sentido de Devaney. O próximo teorema contém um resultado muito mais forte.

**Teorema 3.3.3.** *Existe um subconjunto residual de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ , nenhum elemento do qual tem um par Li-Yorke.*

**Demonstração:** Seja  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  que satisfaz a propriedade (Q) do Teorema 3.2.4. Suponha que  $(\sigma, \tau)$  é um par Li-York para  $f$ . Então

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(\sigma), f^n(\tau)) = 0.$$

Fixamos  $\varepsilon > 0$  e escolhemos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{m} < \varepsilon$ . Logo, existe uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  de  $\text{diam} < \frac{1}{m}$  tal que cada componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  é um balão. Além disso, deve existir um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(f^{n_0}(\sigma), f^{n_0}(\tau))$  é suficientemente pequeno, isto é,  $f^{n_0}(\sigma)$  e  $f^{n_0}(\tau)$  estão num mesmo vértice  $a$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ . Seja  $B$  o componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  que contém  $a$ . Como  $B$  é um balão,  $f$  envia cada vértice de  $B$  num único vértice de  $B$ . Logo,  $f^n(\sigma)$  e  $f^n(\tau)$  estão no mesmo vértice de  $B$  para todo  $n \geq n_0$ . Assim,  $d(f^n(\sigma), f^n(\tau)) < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Isso prova que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(\sigma), f^n(\tau)) = 0,$$

e portanto  $(\sigma, \tau)$  não é um par Li-Yorke para  $f$ . □

### 3.4 Continuidade em cadeia

**Teorema 3.4.1.** *O conjunto das funções  $f$  de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que  $f$  é contínua em cadeia em todo ponto é residual em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .*

**Demonstração:** Seja  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  que satisfaz a propriedade (Q) do Teorema 3.2.4. Fixamos  $\varepsilon > 0$  e escolhemos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{m} < \varepsilon$ . Então, existe uma partição  $\mathcal{P}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com  $\text{diam} \mathcal{P} < \frac{1}{m}$  tal que toda componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  é um balão. Seja  $\delta$  a distância mínima entre dois elementos distintos de  $\mathcal{P}$ . Dado  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , seja  $B$  o componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  que contém um vértice contendo  $\sigma$ . Como  $B$  é um balão,  $f$  envia cada vértice de  $B$  num único vértice de  $B$ . Se escolhemos pontos  $\sigma_0 \in B(\sigma; \delta)$ ,  $\sigma_1 \in B(f(\sigma_0); \delta)$ ,  $\sigma_2 \in B(f(\sigma_1); \delta), \dots$ , então  $\sigma_n$  e  $f^n(\sigma)$  estão no mesmo vértice de  $B$  pela escolha de  $\delta$ . Assim,  $d(\sigma_n, f^n(\sigma)) < \varepsilon$  para todo  $n \geq 0$ . Portanto,  $f$  é contínua em cadeia em todo ponto. □

### 3.5 Conjuntos limites e o odômetro universal

E. D’Aniello, U. B. Darji e T. H. Steele [21] provaram que existe um subconjunto residual de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que cada função  $f$  neste conjunto tem a propriedade que a restrição de  $f$  ao

conjunto  $\omega$ -limite  $\omega(\sigma, f)$  é topologicamente conjugada ao odômetro universal para um conjunto residual de  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . O próximo resultado nos diz que isso realmente vale para todo  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

**Teorema 3.5.1.** *Existe um subconjunto residual de  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tal que cada  $f$  neste conjunto tem a seguinte propriedade. A restrição de  $f$  a cada conjunto  $\omega$ -limite  $\omega(\sigma, f)$  é topologicamente conjugado ao odômetro universal.*

**Demonstração:** Seja  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  que satisfaz a propriedade (Q) do Teorema 3.2.4. Então, podemos tomar uma partição  $f$ -admissível  $\mathcal{P}_1$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que  $\text{diam } \mathcal{P}_1 < 1$  e  $b(f, \mathcal{P}_1) = q_1!$ . Logo, tomamos uma partição  $f$ -admissível  $\mathcal{P}_2$  tal que  $\mathcal{P}_2$  refina  $\mathcal{P}_1$ ,  $\text{diam } \mathcal{P}_2 < \frac{1}{2}$  e  $b(f, \mathcal{P}_2) = q_2!$  com  $q_2$  múltiplo de  $q_1$ . Continuamos tomando de novo uma partição  $f$ -admissível  $\mathcal{P}_3$  tal que  $\mathcal{P}_3$  refina  $\mathcal{P}_2$ ,  $\text{diam } \mathcal{P}_3 < \frac{1}{3}$  e  $b(f, \mathcal{P}_3) = q_3!$  com  $q_3$  múltiplo de  $2q_2$ . Assim, indutivamente, construímos uma sequência  $(\mathcal{P}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de partições de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e uma sequência  $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$  de números naturais de modo que se cumpre o seguinte para todo  $m \in \mathbb{N}$ :

- $\text{diam } \mathcal{P}_m < \frac{1}{m}$ ;
- $\mathcal{P}_{m+1}$  refina  $\mathcal{P}_m$ ;
- $q_{m+1}$  é um múltiplo de  $m \cdot q_m$ ;
- toda componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_m)$  é um balão de tipo  $(q_m!, q_m!)$ .

Seja  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , então  $\sigma$  pertence a um vértice de um certo balão  $B_m$  em  $\text{Gr}(f, \mathcal{P}_m)$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Escrevemos

$$B_m = \{v_1, \dots, v_{q_m!}\} \cup \{w_1, \dots, w_{q_m!}\}.$$

Observe que se  $\sigma \in v_i$  para algum  $1 \leq i \leq q_m!$ , então existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\{f^n(\sigma)\}_{n \geq n_0}$  está contido no ciclo  $\{w_1, \dots, w_{q_m!}\}$  e se  $\sigma \in w_i$  para algum  $1 \leq i \leq q_m!$ , então  $\{f^n(\sigma)\}_{n \in \mathbb{N}}$  também está contido no ciclo  $\{w_1, \dots, w_{q_m!}\}$ . Logo, o conjunto  $\omega$ -limite  $\omega(\sigma, f)$  deve estar contido no ciclo do balão  $B_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Consideramos a coleção

$$R_m = \{C_a = a \cap \omega(\sigma, f) : a \in \mathcal{P}_m\}.$$

Além disso,  $\omega(\sigma, f)$  é um subespaço topológico de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com a topologia induzida e é invariante, então  $f(\omega(\sigma, f)) = \omega(\sigma, f)$ . Logo, para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $R_m$  é uma cobertura de  $\omega(\sigma, f)$  consistindo de  $q_m!$  conjuntos simultaneamente abertos e fechados na topologia induzida, dois a dois disjuntos e não vazios. Além disso,  $R_{m+1}$  refina  $R_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , os conjuntos de  $R_m$  são permutados ciclicamente por  $f$ . De fato, fixamos  $m \in \mathbb{N}$ , se  $y \in C_a \in R_m$  com  $a \in \mathcal{P}_m$ , então existe  $b \in \mathcal{P}_m$  tal que  $f(y) \in C_b$ . Logo,

$\vec{ab} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}_m)$  e  $f(C_a) \subset C_b$ . Além disso, se  $z \in C_b$ , então existe um  $c \in \mathcal{P}_m$  tal que  $f^{-1}(z) \in C_c$ . Logo,  $\vec{cb} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}_m)$ . Como todos os  $a \in \mathcal{P}_m$  tal que  $C_a \in R_m$  formam um ciclo, se segue que  $a = c$ . Assim, se  $C_a, C_b \in R_m$  tal que  $\vec{ab} \in \text{Gr}(f, \mathcal{P}_m)$ , então  $f(C_a) = C_b$ . Finalmente,  $R_m = \{C_{a_i} : a_i \in \mathcal{P}_m \text{ com } 1 \leq i \leq q_m!\}$  tal que  $\{a_1, \dots, a_{q_m!}\}$  é um ciclo, então  $f(C_{a_i}) = C_{a_{i+1}}$  se  $1 \leq i < q_m!$  e  $f(C_{a_{q_m!}}) = C_{a_1}$ .

Finalmente, seja  $W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \dots$  uma sequência encaixada com  $W_i \in R_i$  para todo  $i$ . Como  $\text{diam } R_m \leq \text{diam } \mathcal{P}_m < \frac{1}{m}$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , então  $\text{diam } W_i \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Logo,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$  consiste de exatamente um ponto.

Segue do Teorema 2.5.3 que  $h|_{\omega(\sigma, h)} : \omega(\sigma, h) \rightarrow \omega(\sigma, h)$  é topologicamente conjugado a  $f_\alpha$ , onde

$$\alpha = \left( q_1!, \frac{q_2!}{q_1!}, \frac{q_3!}{q_2!}, \frac{q_4!}{q_3!}, \dots \right).$$

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m!$  divide  $\alpha(m+1) = \frac{q_{m+1}!}{q_m!}$ , então  $m!$  divide  $\alpha(i)$  para todo  $i \geq m+1$ . Se  $p$  é primo, temos que  $n(i) \geq 1$  para todo  $i \geq p+1$ . Logo,  $M_\alpha(p) = \infty$  para todo  $p$  primo. Portanto,  $f_\alpha$  é um odômetro universal.  $\square$

### 3.6 Noções de recorrência

**Teorema 3.6.1.** *O conjunto de todas as  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  que satisfazem as seguintes propriedades é residual em  $\mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .*

- (a)  $P(f)$  é vazio.
- (b)  $R(f) = \Omega(f) = CR(f)$ .
- (c)  $R(f)$  é um espaço de Cantor com interior vazio em  $f(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .

**Demonstração:** Seja  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  que satisfaz a propriedade (Q) do Teorema 3.2.4.

- (a): Suponha que existe  $\sigma \in P(f)$  de período  $p$ . Seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que cada componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  é um balão de tipo  $(q, q)$ , onde  $q$  é um múltiplo de  $p$  maior que  $p$ . Seja  $B$  o balão de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  que contém  $\{\sigma, f(\sigma), \dots, f^p(\sigma)\}$ . Logo,  $\sigma$  e  $f^p(\sigma)$  pertencem sempre a vértices diferentes, o que é uma contradição.
- (b): Como  $R(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f)$ , vamos provar que  $CR(f) \subset R(f)$ . Seja  $\sigma \in CR(f)$ . Pelo Teorema 3.4.1, temos que  $f$  é contínua em cadeia em  $\sigma$ . Então, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $\delta_m > 0$  tal que para qualquer escolha de pontos

$$y_0 \in B(\sigma; \delta_m), \quad y_1 \in B(f(y_0); \delta_m), \quad y_2 \in B(f(y_1); \delta_m), \dots,$$

temos que

$$d(f^n(\sigma), y_n) < \frac{1}{m} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Como  $\sigma \in CR(f)$ , existem  $x_0 = \sigma, x_1, x_2, \dots, x_{k_m} = \sigma$  tal que

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta_m \text{ para } n = 0, 1, \dots, k_m - 1.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} y_0 &= \sigma, & y_1 &= x_1, & y_2 &= x_2, \dots, & y_{k_m-1} &= x_{k_m-1} \\ y_{k_m} &= \sigma, & y_{k_m+1} &= x_1, & y_{k_m+2} &= x_2, \dots, & y_{2k_m-1} &= x_{k_m-1} \\ y_{2k_m} &= \sigma, \dots \end{aligned}$$

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , definimos o conjunto  $a_m = \{n : n \text{ é um múltiplo inteiro positivo de } k_m\}$ , então

$$d(f^n(\sigma), \sigma) < \frac{1}{m} \text{ para todo } n \in a_m.$$

Logo, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , escolhemos  $n_i \in a_i$  tal que  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Assim,

$$d(f^{n_i}(\sigma), \sigma) < \frac{1}{i} \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Como  $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$  e  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(\sigma) = \sigma$ , então  $\sigma \in \omega(\sigma, f)$ . Portanto,  $\sigma \in R(f)$ .

(c): Note que  $R(f)$  é um subespaço topológico de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com a topologia induzida, donde  $R(f)$  é 0-dimensional. Foi provado em (b) que  $R(f) = \Omega(f)$ , que é compacto e não vazio. Então, basta provar que  $R(f)$  não tem pontos isolados. Seja  $\tau \in R(f)$ , então  $\tau \in \omega(\tau, f)$ . Do Teorema 3.5.1, existe um homeomorfismo entre  $\omega(\tau, f)$  e um espaço de Cantor, então  $\omega(\tau, f)$  é um espaço de Cantor. Além disso,  $\omega(\tau, f) \subset \Omega(f) = R(f)$ . Logo,  $\tau$  não é um ponto isolado de  $R(f)$ . Portanto,  $R(f)$  é um espaço de Cantor.

Suponha que  $U$  é um conjunto aberto não vazio de  $f(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  que está contido em  $R(f)$ . Então existe um conjunto aberto  $V$  em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que  $U = V \cap f(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ . Fixe  $\sigma \in U$  e seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que cada componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  é um balão e  $\text{diam } \mathcal{P}$  é tão pequeno que o vértice  $v$  de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  contendo  $\sigma$  deve estar contido em  $V$ . Seja

$$B = \{v_1, \dots, v_s\} \cup \{w_1, \dots, w_s\}$$

a componente (balão) de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  que contém o vértice  $v$ . Como  $\sigma \in R(f)$  e  $\omega(\sigma, f)$  está contido no ciclo  $\{w_1, \dots, w_s\}$ , então  $v = w_j$  para algum  $1 \leq j \leq s$ . Logo,

$$f^j(v_s) \subset w_j = v \subset V. \tag{3.1}$$

AFIRMAÇÃO 1: Se  $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$  tem a propriedade (Q) do Teorema 3.2.4, então  $f$  é injetiva.

De fato, suponha que existem  $\sigma, \tau \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tais que  $\sigma \neq \tau$  e  $f(\sigma) = f(\tau)$ . Escolha  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{m} < d(\sigma, \tau)$ . Seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com  $\text{diam } \mathcal{P} < \frac{1}{m}$  tal que toda componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  é um balão de tipo  $(k, k)$ . Como  $f(\sigma) = f(\tau)$ , temos que  $\sigma$  e  $\tau$  pertencem a uma mesma componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$ . Seja

$$B = \{v_1, \dots, v_k\} \cup \{w_1, \dots, w_k\}$$

a componente (balão) de  $\text{Gr}(f, \mathcal{P})$  que contém  $\sigma$  e  $\tau$ . Pela escolha de  $m$ ,  $\sigma$  e  $\tau$  têm que pertencer a vértices distintos de  $B$ . Logo, como  $f(\sigma) = f(\tau)$ , só há duas possibilidades:

$$“\sigma \in v_k \text{ e } \tau \in w_k” \text{ ou } “\sigma \in w_k \text{ e } \tau \in v_k”.$$

Agora, escolha  $n > m$  tal que

$$\frac{1}{n} < \min\{d(a, b) : a, b \in \mathcal{P} \text{ e } a \neq b\}.$$

Seja  $\mathcal{Q}$  uma partição de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  com  $\text{diam } \mathcal{Q} < \frac{1}{n}$  tal que toda componente de  $\text{Gr}(f, \mathcal{Q})$  é um balão de tipo  $(t, t)$ , onde  $t > k$ . Como antes, existe uma componente (balão)

$$B' = \{v'_1, \dots, v'_t\} \cup \{w'_1, \dots, w'_t\}$$

de  $\text{Gr}(f, \mathcal{Q})$  tal que

$$“\sigma \in v'_t \text{ e } \tau \in w'_t” \text{ ou } “\sigma \in w'_t \text{ e } \tau \in v'_t”.$$

Pela escolha de  $n$ ,  $\mathcal{Q}$  é necessariamente um refinamento de  $\mathcal{P}$ . Logo, segue que  $v'_t \subset v_k$  e  $w'_t \subset w_k$ . Daí,

$$v'_1 = f^{-(t-1)}(v'_t) \subset f^{-(t-1)}(v_k) = \emptyset,$$

já que  $t - 1 \geq k$ . Esta contradição prova a nossa afirmação.

AFIRMAÇÃO 2:  $f^j(v_s) \cap R(f) = \emptyset$ .

De fato, se tem que  $f^j(v_s)$  e  $f^j(w_s)$  estão contidos em  $w_j$ . Além disso,  $f^j(v_s) \cap f^j(w_s) = \emptyset$  já que  $f$  é injetiva pela afirmação 1. Logo, como  $f^j(w_s)$  é compacto e  $w_j$  é aberto, então  $w = w_j \setminus f^j(w_s)$  é um conjunto aberto. Observe que  $f^j(v_s) \subset w$ , isto é, que  $w$  é uma vizinhança para cada ponto de  $f^j(v_s)$ . Para todo  $k \geq 1$ , como

$$f^{ks}(w) = f^j(f^{(k-1)s}(f^{s-j}(w))) \subset f^j(f^{(k-1)s}(f^{s-j}(w_j))) \subset f^j(f^{(k-1)s}(w_s)) \subset f^j(w_s),$$

temos que  $f^{ks}(w) \cap w = \emptyset$ . Além disso, se  $n \in \mathbb{N}$  não é da forma  $ks$ , então  $f^n(w)$  e  $w$  estão contidos em vértices diferentes de  $\{w_1, \dots, w_s\}$ . Assim,  $f^n(w) \cap w = \emptyset$  para todo  $n \geq 1$ .

Suponha que existe  $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que  $\sigma \in f^j(v_s) \cap R(f)$ . Então, existem infinitos  $n$ 's tais que  $f^n(\sigma) \in w$ , o que contradiz o fato que  $f^n(w) \cap w = \emptyset$  para todo  $n \geq 1$ . Isso prova a afirmação.

Finalmente, da afirmação 2 e (3.1) obtemos que  $f^j(v_s) \subset U \setminus R(f) = \emptyset$ , o que é uma contradição. Portanto,  $R(f)$  tem interior vazio em  $f(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ .  $\square$

# Bibliografia

- [1] R. L. Adler, A. G. Konheim & M. H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 309–319.
- [2] S. J. Agronsky, A. M. Bruckner & M. Laczkovich, *Dynamics of typical continuous functions*, J. London Math. Soc. (2) **40** (1989), 227–243.
- [3] E. Akin, *On chain continuity*, Discrete Contin. Dynam. Systems **2** (1996), no. 1, 111–120.
- [4] E. Akin, E. Glasner & B. Weiss, *Generically there is but one self homeomorphism of the Cantor set*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 7, 3613–3630.
- [5] E. Akin, M. Hurley & J. Kennedy, *Dynamics of topologically generic homeomorphisms*, Mem. Amer. Math. Soc. **164** (2003), no. 783.
- [6] N. Aoki & K. Hiraide, *Topological Theory of Dynamical Systems - Recent Advances*, North-Holland, 1994.
- [7] N. C. Bernardes Jr., *On the predictability of discrete dynamical systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 7, 1983–1992.
- [8] N. C. Bernardes Jr. & U. B. Darji, *Graph theoretic structure of maps of the Cantor space*, Adv. Math. **231** (2012), no. 3-4, 1655–1680.
- [9] N. C. Bernardes Jr. & R. M. Vermersch, *Hyperspace dynamics of generic maps of the Cantor space*, Canad. J. Math. **67** (2015), no. 2, 330–349.
- [10] N. C. Bernardes Jr. & R. M. Vermersch, *On the dynamics of induced maps on the space of probability measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 11, 7703–7725.
- [11] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada & A. Maass, *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math. **547** (2002), 51–68.
- [12] L. Block & J. Keesling, *A characterization of adding machine maps*, Topology Appl. **140** (2004), no. 2-3, 151–161.

- [13] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics **470**, Springer-Verlag, 1975.
- [14] R. Bowen,  $\omega$ -limit sets for Axiom A diffeomorphisms, J. Differential Equations **18** (1975), no. 2, 333–339.
- [15] J. Buescu & I. Stewart, *Lyapunov stability and adding machines*, Ergodic Theory Dynam. Systems **15** (1995), 271–290.
- [16] C. Conley, *The gradient structure of a flow, I*, IBM Research, RC 3932 (#17806), July 17, 1972; reprinted in Ergodic Theory Dynam. Systems **8\*** (1988), 11–26.
- [17] C. Conley, *Some aspects of the qualitative theory of differential equations*, Dynamical Systems - An International Symposium, Vol. 1 (Cesari, Hale and LaSalle, editors), Academic Press, New York, 1976, 1–12.
- [18] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 38, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [19] R. M. Corless & S. Yu Pilyugin, *Approximate and real trajectories for generic dynamical systems*, J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), no. 2, 409–423.
- [20] E. D’Aniello & U. B. Darji, *Chaos among self-maps of the Cantor space*, J. Math. Anal. Appl. **381** (2011), no. 2, 781–788.
- [21] E. D’Aniello, U. B. Darji & T. H. Steele, *Ubiquity of odometers in topological dynamical systems*, Topology Appl. **156** (2008), no. 2, 240–245.
- [22] E. Glasner & B. Weiss, *The topological Rohlin property and topological entropy*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 6, 1055–1070.
- [23] M. Hurley, *On proofs of the  $C^0$  General Density Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1305–1309.
- [24] M. Hurley, *Properties of attractors of generic homeomorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), 1297–1310.
- [25] A. Katok & B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [26] A. S. Kechris & C. Rosendal, *Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures*, Proc. London Math. Soc. (3) **94** (2007), no. 2, 302–350.
- [27] T. Y. Li & J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), no. 10, 985–992.

- [28] M. Mazur, *Weak shadowing for discrete dynamical systems on nonsmooth manifolds*, J. Math. Anal. Appl. **281** (2003), no. 2, 657–662.
- [29] J. C. Oxtoby, *Note on transitive transformations*, Proc. Nat. Acad. USA **23** (1937), 443–446.
- [30] J. C. Oxtoby & S. M. Ulam, *Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 874–920.
- [31] J. Palis, C. Pugh, M. Shub & D. Sullivan, *Genericity theorems in topological dynamics*, in Dynamical Systems - Warwick 1974, Lecture Notes in Mathematics **486** (1975), Springer-Verlag, 241–250.
- [32] K. Palmer, *Shadowing in Dynamical Systems - Theory and Applications*, Mathematics and its Applications, vol. **501**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [33] S. Yu. Pilyugin, *Shadowing in Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1706**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [34] S. Yu. Pilyugin & O. B. Plamenevskaya, *Shadowing is generic*, Topology Appl. **97** (1999), 253–266.
- [35] Ja. G. Sinaĭ, *Gibbs measures in ergodic theory* (Russian), Uspehi Mat. Nauk **27** (1972), no. 4(166), 21–64.
- [36] F. Takens, *On Zeeman's tolerance stability conjecture*, in Manifolds - Amsterdam 1970, Lecture Notes in Mathematics **197** (1971), Springer-Verlag, 209–219.
- [37] L. Wen, *Differentiable Dynamical Systems: An Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity*, Graduate Studies in Mathematics, 173, American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.
- [38] S. Willard, *General Topology*, Dove Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.
- [39] K. Yano, *A remark on the topological entropy of homeomorphisms*, Invent. Math. **59** (1980), 215–220.