



INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro



UFRJ

Sobre Algumas Variações do Processo de Contato

Vinícius Grijó

Rio de Janeiro, Brasil

26 de outubro de 2022

Sobre Algumas Variações do Processo de Contato

Vinícius Grijó

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Maria Eulalia Vares

Coorientador: Daniel Ungaretti

Rio de Janeiro, Brasil

26 de outubro de 2022

CIP - Catalogação na Publicação

G732s Grijó, Vinícius
Sobre Algumas Variações do Processo de Contato /
Vinícius Grijó. -- Rio de Janeiro, 2022.
68 f.

Orientadora: Maria Eulalia Vares.
Coorientador: Daniel Ungaretti.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, 2022.

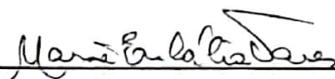
1. Probabilidade. 2. Sistemas de Partículas. 3.
Processo de Contato sob Renovações. 4. Processo de
Contato. 5. Processo de Renovação. I. Vares, Maria
Eulalia, orient. II. Ungaretti, Daniel, coorient.
III. Título.

Vinícius Grijó

Sobre Algumas Variações do Processo de Contato

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado por



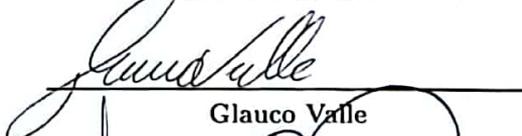
Maria Eulalia Vares
Orientadora



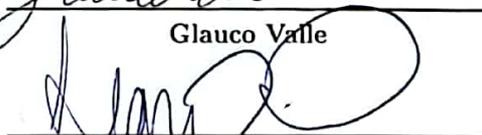
Daniel Ungaretti
Coorientador



Carlos Tadeu Zanini



Glauco Valle



Leandro Pinto Rodrigues Pimentel

Rio de Janeiro, Brasil
26 de outubro de 2022

Agradecimentos

Primeiramente eu gostaria de agradecer pela dádiva da vida concedida por Deus e por todo o apoio que sempre recebi de minha família. Além disso, também gostaria de mencionar diversas pessoas que ao longo de minha jornada no Mestrado em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro passaram pela minha vida e contribuíram de uma forma ou de outra nessa caminhada.

Gostaria de começar agradecendo ao Ricardo Ivanov, Althayr Santos e Victor Pessanha pelas longas conversas, inúmeros desabafos e muitos conselhos recebidos. Também agradeço ao meu instrutor de Krav Maga Hyrlann Souza por me ensinar conceitos que vão além da defesa pessoal e me inspirar a ir sempre além.

Também faço menção ao Anselmo Pontes e ao Walter Brito pelo suporte e atenção desde o meu primeiro período da graduação, ao Everton Lima pelo acompanhamento físico e à Virgínia Cardoso por me fazer pensar sempre de forma mais calma e clara.

Agradeço também aos meus companheiros de treino Alline, Arley, Ronald, Pedro, Vitor, Luiz, Alexandre e a dupla de Lucas por alegrar minhas sextas-feiras e me ajudar em minhas preparações para exames, avaliações e apresentações.

Gostaria também de mencionar Maria, Daria, Ludmila e Ekaterina por terem cuidado de mim em uma terra distante e agradecer ao Iuri, Maksim, Artem, Andrei e Piotr pela paciência.

Evidencio a gratidão em poder ter participado da Segunda Olimpíada Internacional pela Segurança Financeira organizada pelo Serviço de Monitoramento Financeiro da Federação Russa e pela Universidade Russa da Amizade dos Povos numa experiência única que pôde ser proporcionada graças ao Professor Fábio Krykhtine.

Também menciono Pedro Pinto, Allan Amorim, Eduardo Vianna, Matheus Gerstner, Vinicius Mendes, Rogério Garber, Mirlene Oliveira, Arthur Newlands, João Vitor Cordeiro de Brito, Caroline de Portugal, Gabriel Barruci, Juan Mongez, Eduardo Pedrosa, Miguelito, Juan, Ricardo Didonet, Graccyela Salcedo, Júlia Baruque, Professor Nei Rocha, Professor João Batista, Professora Katrin Gelfert e Professora Maria José Pacífico.

Agradeço também a todos os integrantes do Instituto de Matemática por contribuir para o seu funcionamento, bem como aos funcionários da Biblioteca Leopoldo Nachbin, aos seguranças e às senhoritas da limpeza, que sempre foram muito atenciosas e dispostas. Também faço um agradecimento ao Betão, Dilcinha Lanches e Batista e a todos seus

funcionários.

Por último mas não menos importante agradeço à minha Orientadora Professora Maria Eulália Vares e ao meu coorientador Professor Daniel Ungaretti, sem os quais a escrita do presente trabalho não teria sido possível.

Я хотел сказать только, что все мысли, которые имеют огромные последствия, — всегда просты. Вся моя мысль в том, что ежели люди порочные связаны между собой и составляют силу, то людям честным надо сделать только то же самое. Ведь так просто.

Лев Николаевич Толстой, Война и мир

Вероятно, в практической работе математика нужно проявлять должную широту. Несомненно, что математики должны, это их долг, заниматься всеми теми вопросами, которые настоятельно навязываются вопросами практики.

Если смежные вопросы, пусть сразу применений не имеющие, являются привлекательными хотя бы в силу красоты и естественности возникающих задач, ими, конечно, тоже нужно заниматься.

A cidade está alegre, cheia de sol. “Os dias da Bahia parecem dias de festa”, pensa Pedro Bala, que se sente invadido também pela alegria. Assovia com força, bate risonhamente no ombro de Professor. E os dois riem, e logo a risada se transforma em gargalhada. No entanto, não têm mais que uns poucos níqueis no bolso, vão vestidos de farrapos, não sabem o que comerão. Mas estão cheios da beleza do dia e da liberdade de andar pelas ruas da cidade.

Jorge Amado, Capitães da Areia

Resumo

A capacidade de explicação, descrição e previsão de um processo infeccioso, geralmente simbolizando a transmissão de uma doença, faz-se cada vez mais importante ao passo que a economia avança e a mobilidade entre países aumenta. A matemática provê ferramentas diversas para a formulação de diferentes dinâmicas infecciosas e o alcance de resultados relevantes para a sociedade. Nessa linha serão estudadas propriedades de uma variação do clássico *Processo de Contato* que permite a satisfação de teoremas clássicos. Além disso, também serão estudadas condições suficientes para extinção e a caracterização de uma medida limite para uma outra variação do processo. Por fim será explorada uma condição para extinção de uma terceira variação do modelo infeccioso.

Palavras-chave: Processo de Contato, Processo de Renovação, Sistema de Partículas, Processo de Contato sob Renovações.

Sumário

1	INTRODUÇÃO.	15
2	SOBRE O PROCESSO DE CONTATO NO GRAFO COMPLETO.	21
2.1	Descrição do modelo.	21
2.2	Lei Forte dos Grandes Números.	23
2.3	Teorema Central do Limite.	26
3	SOBRE O PROCESSO DE CONTATO SOB RENOVAÇÕES.	29
3.1	Sobre uma construção através de um Processo de Poisson.	32
3.1.1	Construção.	32
3.1.2	Fenômeno de crescimento.	33
3.1.3	Desigualdade FKG.	34
3.1.4	Desigualdade FKG sob Renovações.	36
3.1.5	Acoplamento de processos de renovação com início em diferentes instantes.	37
3.1.6	Dominação entre processos de renovação.	39
3.2	Sobre a convergência em lei do processo.	42
3.2.1	Descrição e hipóteses.	42
3.2.2	Definições e construções.	43
3.2.3	Demonstração do teorema.	50
3.3	Sobre a positividade do parâmetro crítico.	51
3.3.1	Definições e construções.	51
3.3.2	Algumas observações e desigualdades.	53
3.3.3	Relações entre escalas sucessivas temporais.	54
3.3.4	Relações entre escalas sucessivas espaciais.	57
3.3.5	Demonstração do teorema.	59
3.4	Sobre o Processo de Contato sob Renovações <i>à la</i> SIS.	62
3.4.1	Sobre a positividade do parâmetro crítico.	62
4	CONCLUSÕES.	65
	Referências	67

1 Introdução.

Para muitos o objetivo de se estudar matemática pode ser expresso na aquisição de habilidades que permitam uma compreensão melhor da realidade. Com efeito, através de modelos matemáticos do mundo real é possível que seu usuário descubra informações e propriedades inerentes a algum processo natural modelado.

O presente trabalho consiste no estudo de alguns modelos epidemiológicos, os quais podem ser vistos, a partir de um certo ponto de vista, como derivados de um modelo base - o *processo de contato*.

O modelo recebeu por parte da comunidade científica grande atenção desde sua introdução em 1974 por Harris[11]. Em geral considera-se o modelo definido em $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}_+$, onde \mathbb{Z}^d indica o espaço d -dimensional em que ocorre a evolução da infecção, com cada sítio representando um indivíduo, e \mathbb{R}_+ indica simplesmente o tempo.

A dinâmica ocorre a partir de um subconjunto $\xi_0^A = A$ de \mathbb{Z}^d de sítios inicialmente infectados. O sobrescrito denota o conjunto inicial, sendo que quando ele não for mencionado, assume-se que ele é igual a $\{0\}$.

A quantidade ξ_t indica, portanto, o conjunto aleatório dos indivíduos infectados no instante t obtido através da evolução de um processo que começou com apenas a origem $\{0\}$ infectada. Uma vez fixado uma realização ω , a quantidade $\xi_t(\omega)(\cdot)$ se torna uma função indicadora que avalia qual sítio está infectado ou não durante o instante t , condições representadas respectivamente por $\xi_t(\omega)(x) = 1$ e $\xi_t(\omega)(x) = 0$, onde o sítio x é um ponto de \mathbb{Z}^d .

A evolução da infecção ao longo dos sítios ocorre da seguinte forma. A taxa com que um sítio x saudável se torna infectado é proporcional ao seu número de vizinhos infectados no instante em questão, conceito determinado a partir de seus vizinhos mais próximos, isto é, os pontos y tais que $|x - y|_1 = 1$. A constante utilizada na proporcionalidade representa a infecciosidade do processo, que por sua vez é denotada por λ . Por outro lado, um sítio x infectado se torna saudável a uma taxa constante igual a 1 que independe da condição de seus vizinhos.

Naturalmente, a menção do conceito de *taxas* sugere que o modelo possa ser expresso através de *Processos de Poisson* independentes. De fato, o comprimento do intervalo entre marcas de curas pode ser dado por variáveis exponenciais de parâmetro 1, enquanto que um elo entre dois sítios possui o intervalo entre suas marcas de infecções exponencialmente

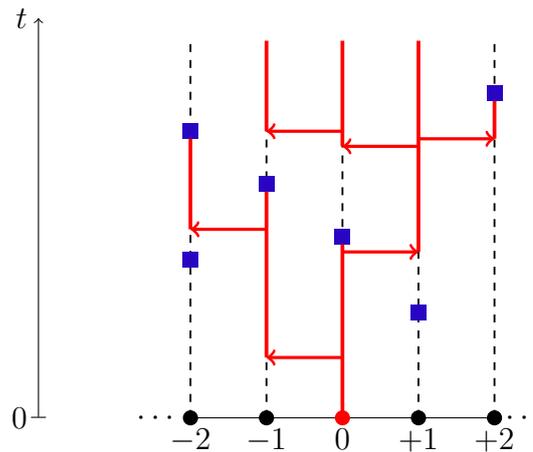


Figura 1 – Diagrama de Harris.

distribuído com parâmetro λ .

Harris através dessa descrição mostrou, no mesmo artigo de 1974, uma associação entre o processo de contato e um modelo de percolação orientada. Tal relação provou-se particularmente útil para o estabelecimento de resultados referentes ao processo, uma vez que uma ponte que o ligou à teoria da percolação, já dotada de diversas ferramentas, foi construída. No caso unidimensional essa associação recebe o nome de *diagrama de Harris*, cuja representação pode ser visualizada na *figura 1*, referente a uma realização do processo de contato. As setas horizontais vermelhas representam infecções, enquanto que as marcas em azul representam os instantes de cura, realizações de Processos de Poisson independentes em ambos os casos.

Diz-se que existe um caminho de (y, s) até (x, t) quando existe um sequência de arestas do diagrama que conduz (y, s) à (x, t) sem passar por nenhuma marca de cura, isto é, nenhum quadrado azul.

Essas definições permitem inserir o processo numa classe bastante abrangente de processos denominada *Sistemas de Partículas*, amplamente estudada por físicos e probabilistas numa área localizada na interseção entre Física e Matemática chamada de *Mecânica Estatística*.

Um fenômeno que recebe grande atenção e ocupa um lugar de destaque na agenda daqueles que estudam sistemas de partículas é o de *transição de fase*, que consiste na alteração do aspecto qualitativo do modelo em função da alteração de seus parâmetros.

No caso do Processo de Contato a taxa de infecção λ é o parâmetro variável e a transição de fase poderia ser descrita através de uma dicotomia no comportamento qualitativo do modelo. Ou o modelo apresenta extinção completa da infecção, isto é,

situação em que o número de indivíduos do conjunto ξ_t dos infecciosos no instante t tende à 0 ao passo que o tempo avança; ou o modelo apresenta probabilidade positiva de que a infecção se perpetue, isto é, existe probabilidade positiva do conjunto aleatório dos infecciosos nunca ser vazio. Vale ressaltar que mesmo λ sendo arbitrariamente grande, o modelo sempre apresenta probabilidade positiva de extinção, se o conjunto inicialmente infectado for finito.

Essas ideias podem ser expressas através de símbolos da seguinte forma. A quantidade que diz respeito à transição de fase λ_c é definida como

$$\lambda_c := \inf\{\lambda \geq 0 : \text{a probabilidade de perpetuação da infecção é } > 0\}. \quad (1.1)$$

É observado que essa quantidade está sempre bem definida, não necessitando ser nem finita nem estritamente positiva. O caso em que $\lambda_c = \infty$ reflete o cenário em que o modelo sempre é extinto com probabilidade 1, enquanto que o caso em que $\lambda_c = 0$, o caso em que o modelo pode nunca ser extinto, isto é, para todos os valores de λ a infecção possui probabilidade positiva de ser perpétua.

Esforços foram realizados para mostrar que no caso do Processo de Contato o parâmetro crítico λ_c é, de fato, positivo e finito para qualquer dimensão d . Mais precisamente, há a seguinte estimativa para o seu valor em função da dimensão[13]:

$$\frac{1}{2d-1} \leq \lambda_c(d) \leq \frac{2}{d}. \quad (1.2)$$

Uma vez realizada essa caracterização é possível se perguntar a respeito do comportamento do modelo quando $\lambda = \lambda_c$, já que por enquanto nada pode ser dito a respeito desse cenário. Com efeito, foi mostrado em 1990 por Bezuidenhout e Grimmett[2] que o processo é extinto quase certamente na criticalidade em dimensão $d \geq 1$.

Ademais também foi estabelecido no mesmo artigo pelos mesmos autores a validade do *Teorema da Convergência Total* pelo Processo no caso supercrítico, isto é, quando $\lambda > \lambda_c$. Denotando por ν o limite no sentido fraco da distribuição limite do Processo de Contato começando com todos os sítios de \mathbb{Z}^d infectados, o teorema expressa que ξ_t^A converge fracamente para a combinação convexa de ν e o conjunto vazio, onde os pesos são, respectivamente, a probabilidade de perpetuidade e a probabilidade de extinção da infecção.

Além disso, também foram realizadas pesquisas a respeito da validade de resultados clássicos pelo processo. Em 1980 Durrett [3] provou uma *Lei Fraca dos Grandes Números* a respeito da quantidade de sítios infectados no instante t , isto é, $|\xi_t|$. Três anos mais tarde, em 1983, com a colaboração de Griffeath, a dupla de pesquisadores foi além provando uma

Lei Forte [4], isto é, convertendo a convergência em probabilidade para a convergência quase certa.

O estudo dessas propriedades clássicas feitas por Durrett o levaram a conjecturar nas décadas de 1980 e 1990 a respeito da satisfação pela quantidade de sítios infectados $|\xi_t|$ de um *Teorema Central do Limite*. A resposta foi dada em 2018 por Achillefs Tzioufas [14], um matemático grego que então trabalhava na *Universidade Estadual de São Paulo (USP)*, de forma positiva para o processo em dimensão 1.

No capítulo seguinte serão abordados alguns resultados sobre Processos de Contato definidos no Grafo Completo. A estrutura do grafo permite a demonstração de alguns resultados na linha de um Teorema Central do Limite e de uma Lei Forte dos Grandes Números.

Posteriormente, na primeira seção do capítulo *Sobre o Processo de Contato sob Renovações*, será discutida uma construção de um Processo de Renovação a partir de um Processo Pontual de Poisson. Tal construção possibilita o desenvolvimento de alguns argumentos úteis, como a desigualdade *FKG*, por exemplo[6].

Em seguida é demonstrado tanto um teorema sobre a convergência em lei do processo cuja medida de renovação possui certa regularidade e cauda pesada; quanto sobre a positividade do parâmetro crítico, quantidade que ainda será definida, para processos cuja medida de renovação possui cauda mais leve.

Por fim, em *Sobre o Processo de Contato sob Renovações à la SIS* é abordado o modelo *SIS* referente a um *Processo de Contato sob Renovações*. Vale ressaltar que a nomenclatura *SIS* é utilizada no contexto de epidemiologia para caracterizar sistemas nos quais a condição de saúde de um indivíduo pode ser apenas ou saudável ou infectada. Essa classe de modelos se diferencia daqueles conhecidos como *SIR*, saudáveis, infectados e removidos do sistema. Neste paradigma não há reinfeção. Os indivíduos removidos do sistema são aqueles que foram infectados mas seu período infeccioso terminou. No contexto imunológico isso é interpretado através do conceito de imunidade.

Evidentemente o processo de contato usual também é um modelo do tipo *SIS*, embora não seja assim frequentemente chamado.

Essa observação é feita pois os modelos não coincidem quando a distribuição não é exponencial. Com efeito, ao definir o *Processo de Contato sob Renovações* o processo de curas de um dado sítio segue um processo de renovação independente do processo de infecção, fazendo com que o intervalo entre curas seja independente das infecções do sítio em questão. Em contrapartida, ao se definir o modelo *SIS* com uma distribuição não exponencial, a duração da infecção começa a contar a partir do exato instante em que a

infecção ocorre e não está relacionada às ocorrências de curas anteriores.

2 Sobre o Processo de Contato no Grafo Completo.

Neste capítulo serão apresentadas algumas propriedades referentes a um Processo de Contato definido no grafo completo. Mais especificamente, serão demonstrados uma *Lei Forte dos Grandes Números* e um *Teorema Central do Limite* para uma sequência de Processos de Contato definidos no Grafo Completo. As ideias desenvolvidas podem ser encontradas com maior grau de detalhamento em [1].

2.1 Descrição do modelo.

Será estudado o caso em que o grafo G em questão é o Grafo Completo com n elementos, denotado por $G = K_n$. Isso significa que há n vértices no grafo e cada um possui como vizinhos os outros $(n - 1)$ vértices do grafo, de modo que o número de arestas do grafo seja de $\frac{n(n-1)}{2}$. Mais precisamente, os resultados provados conterão informações sobre o comportamento do limite de uma sequência de processos infecciosos ao passo que o número n de vértices do grafo fica arbitrariamente grande. Evidentemente, os resultados tomam a forma de uma *Lei Forte dos Grandes Números* e de um *Teorema Central do Limite*.

O processo infeccioso ocorre da seguinte forma. Para cada grafo K_n será denotado por $Y_n(t)$ a quantidade de sítios infectados no instante t , com valor inicial $Y_n(0) = m_n$. Suponha que $Y_n(t) = i$, então o número i de infecciosos avança para $i + 1$ a uma taxa de $\frac{\lambda}{n}(n - i)i$ no tempo e recua com taxa δi .

A fim de que a definição anterior faça sentido, não há outra opção para duração da infecção a não ser seguir uma variável exponencial de parâmetro δ , enquanto que o instante até a transmissão da doença deve seguir também uma variável exponencial, mas de parâmetro $\frac{\lambda}{n}$.

A interpretabilidade da taxa infecciosa é exatamente aquela que deve ser. A taxa em que a doença é transmitida de um indivíduo infeccioso fixado para um indivíduo saudável também fixado é de $\frac{\lambda}{n}$. Considerando, agora uma configuração arbitrária, basta analisar que cada um dos i infecciosos dessa configuração podem infectar cada um dos $(n - i)$ saudáveis, que resulta, através do fato da variável entre infecções ser exponencial, na taxa previamente mencionada.

De modo análogo, a taxa de cura do modelo, isto é, a taxa com que o número i de infecciosos é subtraído a $i - 1$ é simplesmente o mínimo entre as i exponenciais de parâmetro δ .

A construção do modelo no grafo completo é particularmente útil, uma vez que ela permite a obtenção de resultados clássicos. Com base em certas hipóteses, serão mencionados dois deles: a *Lei Forte dos Grandes Números* e o *Teorema Central do Limite*.

2.2 Lei Forte dos Grandes Números.

Será considerada uma coleção de processos infecciosos $\{Y_n\}_n$, onde cada processo componente da família terá taxas de “recuo” e “avanço” definidas como anteriormente na *Seção 2.1*.

Evidentemente, ao passo que n cresce, o modelo representa uma população com cada vez mais elementos. Tendo isso em mente, a sequência de processos candidata à *Lei Forte dos Grandes Números* é formada pelos processos $\bar{Y}_n := \frac{Y_n}{n}$, que representam a proporção de indivíduos infectados, enquanto que o limite será uma certa função determinística $y = y(t)$.

O argumento consiste na descrição das taxas $q_{y,y+l}^{(n)}$ de salto de l quantidades a partir do sítio y do n -ésimo processo em termos de uma função geral de taxa β_l , que corresponde à taxa de um salto de l , de modo que seja satisfeita a relação

$$q_{y,y+l}^{(n)} = n\beta_l(n^{-1}y). \quad (2.1)$$

Essa relação permitirá incluir a coleção de processos em questão na família dos processos markovianos densidade-dependentes de salto, já que ela já satisfaz a condição de possuir apenas um número finito de possíveis saltos, tornando possível a demonstração do resultado.

Para o modelo só há duas possibilidades de salto: $+1$ com taxa $\beta_1(y) = \lambda y(1 - y)$ e -1 , com taxa $\beta_{-1} = \delta y$.

Com essas quantidades, é possível construir a *função de drift*, que será responsável pela caracterização da função alvo y . Em geral, essa quantidade é definida como

$$F(y) := \sum_l l\beta_l(y). \quad (2.2)$$

Portanto, a *função de drift* procurada é dada por

$$F(y) = \lambda y(1 - y) - \delta y. \quad (2.3)$$

Por conseguinte, denotando por $y_0 := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Y_n(0)}{n}$, a função alvo y é aquela que unicamente satisfaz a equação

$$y(t) = y_0 + \int_0^t F(y(s)) ds. \quad (2.4)$$

A inspiração desse resultado pode ser apreciada a partir da caracterização do processo Y_n como uma soma de processos de Poisson propriamente reescalados e manipulados.

A descrição do processo infeccioso após esse procedimento é precisamente a seguinte:

$$Y_n(t) = Y_n(0) + \sum_l l X_l \left(n \int_0^t \beta_l(n^{-1} Y_n(s)) ds \right). \quad (2.5)$$

Sendo cada $X_l(t)$ um processo de Poisson de taxa 1, essa fórmula fornece, supondo $Y_n(t) = y$, que a taxa de um salto de comprimento l é simplesmente $n\beta_l(n^{-1}y)$, que é exatamente a desejada.

Quanto à manipulação, centrando o processo de Poisson, isto é, subtraindo-o de seu valor esperado e denotando essa nova quantidade por \hat{X}_l , bem como realizando a divisão por n , a equação obtida é

$$\frac{Y_n(t)}{n} = \frac{Y_n(0)}{n} + n^{-1} \sum_l l \hat{X}_l \left(n \int_0^t \beta_l(n^{-1} Y_n(s)) ds \right) + \sum_l \int_0^t l \beta_l(n^{-1} Y_n(s)) ds. \quad (2.6)$$

Lembrando da hipótese feita sobre a convergência de $\frac{Y_n(0)}{n}$, aplicando a *Lei Forte dos Grandes Números* ao processo de Poisson reescalado e notando que o último termo à direita é nada mais nada menos que a própria *função de drift*, a satisfação da equação integral pelo processo limite se torna sugestiva. Sua convergência é justificada a partir do *Teorema 5.2* de [1], enunciado a seguir.

Teorema 1. *Suponha que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Y}_n(0) = z_0$ e que para todo compacto K de \mathcal{R}^d existe uma constante $M_K > 0$ tal que $|F(x) - F(x')| \leq M_K |x - x'|$, para todo x e x' em K .*

Então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{s \leq t} |\bar{Y}_n(s) - y(s)| = 0$ quase certamente, onde $y(t)$ é a solução única da equação associada à função de drift da coleção de processos de markov densidade-dependente de salto $\{Y_n\}_n$.

A função alvo $y(t)$ pode ser obtida explicitamente através da expressão seguinte, quando $\lambda \neq \delta$,

$$y(t) = \frac{\left(1 - \frac{\delta}{\lambda}\right) y_0 e^{(\lambda - \delta)t}}{1 - \frac{\delta}{\lambda} + y_0 \left(e^{(\lambda - \delta)t} - 1\right)}. \quad (2.7)$$

Por outro lado, quando $\lambda = \delta$ a expressão assume uma forma breve, dada por

$$y(t) = \frac{y_0}{1 + \lambda y_0 t}. \quad (2.8)$$

Uma observação se faz necessária. A quantidade $\frac{\lambda}{\delta}$, também conhecida como *número básico de reprodução* possui influência no comportamento assintótico do modelo, fazendo com que ele convirja à 0 se $\frac{\lambda}{\delta} \leq 1$ e convergindo à $\hat{y} := 1 - \frac{\delta}{\lambda}$, se $\frac{\lambda}{\delta} > 1$.

O valor \hat{y} é usado para definir o que se conhece na literatura epidemiológica como o *nível endêmico do processo*. Dessa forma, o nível endêmico do processo $Y_n(t)$ é dado por $n\hat{y}$.

2.3 Teorema Central do Limite.

Uma vez estabelecido qual é o limite, no sentido de uma *Lei Forte dos Grandes Números*, da coleção de processos é natural se indagar a respeito das flutuações ao longo dessa quantidade.

O interesse residirá, portanto, na caracterização do processo $V_n(t) := \sqrt{n}(\bar{Y}_n(t) - y(t))$. Usando a notação anterior, o processo é descrito por

$$V_n(t) = v_n(0) + \sum_l l W_l^{(n)} \left(\int_0^t \beta_l(\bar{Y}_n(s)) ds \right) + \int_0^t \sqrt{n} (F(\bar{Y}_n(s)) - F(y(s))) ds. \quad (2.9)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade é simplesmente a diferença entre os valores iniciais - o qual, por suposição, é não aleatório - multiplicada por \sqrt{n} , isto é,

$$v_n(0) = \sqrt{n}(\bar{Y}_n(0) - y(0)). \quad (2.10)$$

O segundo termo denota a diferença entre o processo de Poisson e seu valor esperado, mas agora dividido por \sqrt{n} , já que houve uma multiplicação de \sqrt{n} no termo $\frac{1}{n}$.

$$W_l^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{X}_l \left(n \int_0^t \beta_l(n^{-1} Y_n(s)) ds \right) \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[X_l \left(n \int_0^t \beta_l(n^{-1} Y_n(s)) ds \right) - n \int_0^t \beta_l(n^{-1} Y_n(s)) ds \right]. \quad (2.12)$$

Evidentemente, pelo *Teorema de Donsker*, essa quantidade converge a um *movimento browniano padrão* $W_l(t)$.

Quanto ao último termo, ele significa simplesmente a diferença entre as *funções de drift*. Através de uma expansão de Taylor e denotando por ∂F a matriz de derivadas primeiras da *função de drift*, a seguinte relação é válida.

$$\sqrt{n}(F(\bar{Y}_n(s)) - F(y(s))) = \sqrt{n} \partial F(y(s)) (\bar{Y}_n(s) - y(s)) + O(\sqrt{n} |\bar{Y}_n(s) - y(s)|^2) \quad (2.13)$$

$$= \partial F(y(s)) V_n(s) + O(|\bar{Y}_n(s) - y(s)|) V_n(s). \quad (2.14)$$

Combinando os termos junto aos seus respectivos limites, é sugestivo que o limite do processo $V_n(t)$ seja o processo $V(t)$ dado por

$$V(t) = v_0 + \sum_l l W_l \left(\int_0^t \beta_l(y(s)) ds \right) + \int_0^t \partial F(y(s)) V(s) ds. \quad (2.15)$$

Denotando por $G(x)$ a quantidade $\sum_l l l^T \beta_l(x)$ e por $\Phi(s, t)$ a única solução de

$$\partial_2 \Phi(t, s) = -\Phi(t, s) \partial F(y(s)), \quad \Phi(s, s) = I, \quad (2.16)$$

a convergência pode ser justificada através do *Teorema 5.3* de [1], enunciado a seguir.

Teorema 2. *Suponha ∂F contínua e que $\lim_n v_n(0) = v_0$ seja constante. Então $V_n \implies V$, onde V é dado por 2.15. Esse processo é um vetor gaussiano com matriz de covariância*

$$Cov(V(t), V(r)) = \int_0^{r \wedge t} \Phi(t, s) G(y(s)) (\Phi(r, s))^T ds. \quad (2.17)$$

Aplicando o resultado na coleção de processos infecciosos do tipo *SIS*, o resultado obtido é

$$\partial F(\hat{y}) = -(\lambda - \delta), \quad (2.18)$$

$$G(\hat{y}) = \frac{2\delta}{\lambda} (\lambda - \delta), \quad (2.19)$$

$$\Phi(t, s) = e^{-(\lambda - \delta)(t - s)}. \quad (2.20)$$

Esse resultado é válido tendo sido feita a suposição de que $\frac{\lambda}{\delta} > 1$ e de que o processo é iniciado próximo ao nível endêmico, isto é, $\bar{Y}_n(0) \rightarrow 1 - \frac{\delta}{\lambda}$ em probabilidade.

A função de covariância é, portanto, dada por

$$Cov(V(t), V(r)) = \frac{\delta}{\lambda} (1 - e^{-(\lambda - \delta)(r \wedge t)}). \quad (2.21)$$

As fórmulas se tornam bem complexas tanto para o caso em que o número básico de reprodução é menor do que 1 quanto para o caso em que o processo começa longe do equilíbrio.

3 Sobre o Processo de Contato sob Renovações.

Anteriormente, no *capítulo 2*, o Processo de Contato foi descrito através de duas coleções, cada uma composta por variáveis independentes e identicamente distribuídas. A primeira coleção podia ser obtida através da distribuição do *intervalo entre curas*, já a segunda, através da distribuição do *intervalo entre infecções*, ambas exponencialmente distribuídas, embora cada uma gozasse de seu próprio parâmetro.

Neste capítulo será considerada uma variação introduzida por Fontes, Marchetti, Mountford e Vares [7]. O modelo em questão será definido mantendo a distribuição exponencial no *intervalo entre marcas de infecções*, mas será considerada uma distribuição de outra natureza para o *intervalo entre marcas de curas*.

É imediatamente feita uma pausa no desenvolvimento do capítulo para se observar que será feito um abuso de terminologia. Será dito *intervalo entre curas* para se referir ao termo mais adequado *intervalo entre marcas de curas*. O análogo vale para um *intervalo entre marcas de infecções*.

Essa nova generalização do modelo faz com que o processo definido através dos instantes em que as curas ocorrem seja um processo de renovação. Dessa forma, o modelo é chamado de *Renewal Contact Process* ou de Processo de Contato sob Renovações.

Mais precisamente, o ambiente espacial será \mathbb{Z}^d , munido da norma l_1 . Dados dois pontos x e y nesse ambiente, considera-se que há um processo de infecção $N_{x,y,\lambda}$ caso $|x - y| = 1$. Tal processo será um processo de Poisson, sob a hipótese dos intervalos entre infecções serem exponencialmente distribuídos, com o subscrito λ se referindo à taxa de infecção.

Para cada ponto x do ambiente \mathbb{Z}^d será considerado um processo de renovação \mathcal{R}_x . A construção de tal processo será feita a seguir. Será denotada por μ a distribuição das variáveis da coleção $\{T_{i,x}\}_{i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d}$, que representam o comprimento de um intervalo entre curas. Dessa forma, o n -ésimo instante de cura do ponto x é dado por $S_{x,n} := \sum_{j=1}^n T_{x,j}$. Finalmente, o processo \mathcal{R}_x é definido como a coleção $\{S_{x,n} : n \geq 1\}$.

Tanto os intervalos entre curas quanto os intervalos entre infecções em questão são considerados independentes entre si.

Usando a inspiração do *diagrama de Harris* também é possível construir uma

representação geométrica do Processo de Contato sob Renovações que para o caso $d = 1$ pode ser visualmente expressa. Para tal construção, será fundamental a definição de um *caminho*.

Sejam x e y dois pontos em \mathbb{Z}^d . Diz-se que $\gamma : [s, t] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ é um caminho γ de x até y definido no intervalo $[s, t]$ quando γ for contínuo à direita com limite à esquerda – cadlag, no jargão francês – e ligar ambos pontos x e y através de infecções, não cruzando as curvas dos processos de renovação dos sítios pelos quais passa. Mais precisamente, $\gamma(s) = x$ e $\gamma(t) = y$.

Tendo sido feita a definição de caminho, é possível deduzir algumas propriedades básicas. Primeiramente, $\gamma(u)$ não pertencer a \mathcal{R}_u para nenhum $u \in [s, t]$ garante que o caminho não passe por curvas. Além disso, $\gamma(u^-) \neq \gamma(u)$ se e somente se $u \in N_{\gamma(u^-), \gamma(u)}$, assegurando que o caminho só se mova quando houver uma infecção.

Uma vez feitas as principais definições matemáticas do processo, será apresentada sua interpretação como um sistema de partículas. Defina

$$\xi_t^A := \{y : \text{existe um caminho de } (x, 0) \text{ até } (y, t), \text{ para algum } x \text{ em } A\}. \quad (3.1)$$

Dessa forma, uma típica configuração ξ de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ pode ser vista como um subconjunto de \mathbb{Z}^d através de $\{x \in \mathbb{Z}^d : \xi(x) = 1\}$. Aos sítios infectados é atribuída a quantidade 1, enquanto que aos saudáveis, 0.

Algumas propriedades podem ser imediatamente extraídas do modelo. Uma, em particular, será enunciada.

$$\xi_t^A = \bigcup_{x \in A} \xi_t^x. \quad (3.2)$$

Essa propriedade recebe um nome especial levando em consideração a literatura existente sobre sistemas de partículas: *aditividade*. Portanto, o modelo introduzido é um modelo *aditivo*.

Além da monotonicidade o modelo introduzido também satisfaz outra propriedade fundamental. Considerando um Processo de Contato sob Renovações, a distribuição μ que caracteriza os processos de renovação estará fixada. Além disso, será tratada como parâmetro a quantidade λ , isto é, a intensidade da infecção.

Supondo $\lambda < \lambda'$ é possível realizar a construção conjunta de processos $N_{x,y,\lambda}$ e $N_{x,y,\lambda'}$ de modo que cada infecção do primeiro esteja presente como uma infecção no segundo. Essa relação é denotada por

$$N_{x,y,\lambda} \subset N_{x,y,\lambda'}. \quad (3.3)$$

Nesse caso, há uma relação entre ambos sistemas de partículas, um construído a partir das infecções com taxa λ e o outro, com aqueles de taxa λ' . Para todo A subconjunto de \mathbb{Z}^d vale que

$$\xi_t^{A,\lambda}(x) \leq \xi_t^{A,\lambda'}(x), \quad (3.4)$$

para todo x em \mathbb{Z}^d . Nesse caso o processo é dito *monótono*.

Portanto, possuindo o processo a propriedade de *monotonicidade* é possível definir o *parâmetro crítico*, denotado por λ_c , através de

$$\lambda_c := \inf\{\lambda : \mathbb{P}(\tau^0 = +\infty) > 0\}. \quad (3.5)$$

A quantidade τ^A é definida como sendo o $\inf\{t : \xi_t^A = \emptyset\}$. Dessa forma, a quantidade $\tau^0 := \tau^{\{0\}}$ se refere ao instante de extinção do processo tendo começado com apenas a origem infectada.

Por fim, é feita uma observação sobre a especificação de que a infecção se inicia com apenas um sítio infectado. Não há perda de generalidade, uma vez que $\lambda < \lambda_c$ implica que $\mathbb{P}(\tau^A = +\infty) = 0$, supondo que o conjunto inicial A seja finito. A justificativa é a seguinte.

$$\mathbb{P}(\tau^A = +\infty) = \mathbb{P}\left(\max_{x \in A} \tau^x = +\infty\right) \quad (3.6)$$

$$\leq \sum_{x \in A} \mathbb{P}(\tau^x = +\infty) \quad (3.7)$$

$$= 0. \quad (3.8)$$

Por outro lado, pode ser observado que se $\lambda > \lambda_c$, então há probabilidade positiva da infecção nunca acabar, isto é, ela se perpetua.

Caso a quantidade λ_c seja finita e não nula, então diz-se que o modelo apresenta *transição de fase*.

3.1 Sobre uma construção através de um Processo de Poisson.

O capítulo conta com uma construção que permite a obtenção de um Processo de Renovação a partir de um Processo Pontual de Poisson. Em seguida é feita a observação de que essa construção satisfaz uma certa propriedade de crescimento. Posteriormente é abordada a desigualdade FKG , tanto no seu contexto histórico inicial quanto no cenário de processos de contato sob renovações. O acoplamento de processos de renovação começando em instantes diferentes bem como a dominação entre processos de renovação pode ser realizada com base na construção apresentada, tarefa que será conduzida nessa mesma ordem nas duas últimas seções deste capítulo.

3.1.1 Construção.

A construção de um processo de renovação a partir de um Processo Pontual de Poisson será realizada ao longo dessa subseção.

Dado um processo de renovação com medida μ , é feita a suposição de que essa medida possui uma densidade g . Sua Função de Distribuição Acumulada será sugestivamente denotada por G .

No contexto de Processos de Renovações há uma quantidade que é útil em diferentes cenários: trata-se da *hazard rate function*, também chamada de função taxa de falha. Evidentemente, ela também será útil no atual contexto. Denotando essa função por h e supondo que o processo se inicia em $t_0 = 0$, ela assume a seguinte forma:

$$h(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)}. \quad (3.9)$$

Caso o Processo de Renovação se inicie em um instante t_0 diferente de 0, é possível adaptar a definição. Dessa forma, a expressão da *hazard rate function* pode ser descrita por

$$h(t - t_0) = \frac{g(t - t_0)}{1 - G(t - t_0)}. \quad (3.10)$$

Não coincidentemente será considerado um Processo Pontual de Poisson η de intensidade 1 tomando valores em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, isto é, no mesmo conjunto no qual o gráfico da função taxa de falha se encontra.

Tendo em mente o cenário previamente descrito, os pontos do processo pontual podem ou não cair abaixo do gráfico de h . Observando que a área sob a curva h é dada por

$$\int_0^t h(s) ds = -\log(1 - G(t)), \quad (3.11)$$

é possível concluir que há finitos pontos do Processo Pontual de Poisson sob seu gráfico em $[0, t]$, enquanto $G(t)$ for menor do que 1, já que a área sob o gráfico de h será finita nesse intervalo. Além disso, o fato de $G(t)$ tende a 1 ao passo que t cresce garante que há infinitos pontos sob a curva, com probabilidade 1.

Assim, é possível selecionar o ponto “mais a esquerda”, isto é, aquele com menor primeira coordenada. Esse ponto está bem definido e será denotado por (t_1, u_1) .

Dessa forma, é possível se perguntar: qual a probabilidade de que se demore pelo menos s unidades de tempo, partir do instante t , até a ocorrência desse primeiro ponto abaixo do gráfico de h ? Contata-se que a ocorrência desse evento é análoga à ocorrência de nenhuma realização do processo pontual no conjunto dado por

$$\{(t, u) : 0 \leq u \leq h(t), t_0 \leq t \leq t_0 + s\}, \quad (3.12)$$

cuja probabilidade é dada por

$$e^{-\int_0^s h(v)dv} = 1 - G(t). \quad (3.13)$$

Portanto, o que acaba de ser mostrado é que a densidade da variável *comprimento do intervalo temporal entre dois pontos* do processo pontual de Poisson que determinam instantes de renovação consecutivos possui densidade g .

Repetindo o argumento iterativamente, o processo formado pelos pontos t_1, t_2, \dots – ou seja, t_i sendo o i -ésimo gerado a partir do processo pontual de Poisson que se localiza abaixo do gráfico de h deslocado a cada etapa –, é uma realização do Processo de Renovação obtido através de uma medida com densidade g .

3.1.2 Fenômeno de crescimento.

A partir da construção do processo de renovação apresentada na *subseção 3.1.1* decorre a propriedade que o Processo de Renovação obtido é uma função crescente do Processo Pontual de Poisson caso uma certa hipótese seja satisfeita. Essa afirmação se tornará mais precisa ao longo dessa subseção.

Será assumido que a função taxa de falha h é decrescente. Em particular, isso implica que $G(t)$ é estritamente menor do que 1, para todo t positivo.

A partir dessa seção será feita a suposição de que a função h satisfaça a hipótese de decrescimento, a não ser que o oposto seja dito.

Uma realização do Processo Pontual de Poisson será denotada por η . Por outro lado, denotando por \mathcal{R} o Processo de Renovação, será denotado por ρ uma realização e por $\rho(\eta)$ uma realização associada a η .

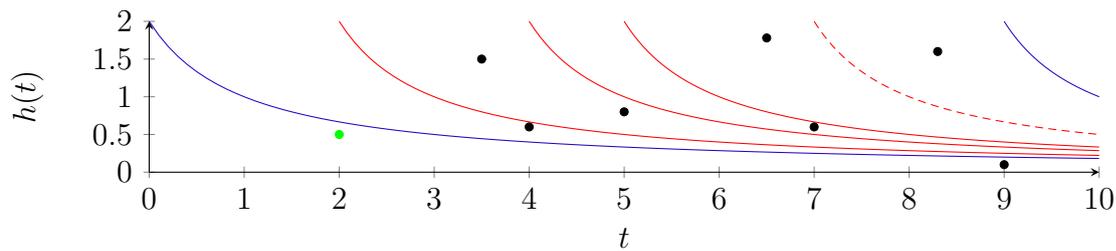


Figura 2

Dadas duas realizações η e η' do Processo Pontual de Poisson é dito que $\eta \leq \eta'$ quando η' possui pelo menos todos os pontos de η .

Reciprocamente, dadas duas realizações ρ e ρ' de um Processo de Renovação \mathcal{R} , é dito que $\rho \leq \rho'$ quando as renovações de ρ' são pelo menos aquelas de ρ .

A propriedade de crescimento implica que se $\eta \leq \eta'$, então $\rho(\eta) \subset \rho(\eta')$.

Essa propriedade faz com que o comportamento de \mathcal{R} possa variar bastante, mesmo com a adição de apenas 1 único ponto do Processo Pontual de Poisson.

Suponha uma *hazard rate function* dada por

$$h(t) = \frac{2}{(t+1)}. \quad (3.14)$$

Além disso, considere uma realização do Processo Pontual de Poisson com intensidade 1.

A *figura ??* ilustra o fenômeno de crescimento. Os pontos pretos representam uma realização η do Processo Pontual de Poisson, enquanto que a adição do ponto verde representa uma realização η' , de modo que $\eta \leq \eta'$. Dessa forma, as curvas em azul indicam os deslocamentos da *hazard rate function* em função dos pontos de η . Por outro lado, as curvas vermelhas indicam seu deslocamento em função dos pontos de η' , ou em outras palavras, através da adição do ponto verde. Pode ser visto que $\rho(\eta) \leq \rho(\eta')$. A linha vermelha tracejada indica apenas que ela é o “último deslocamento” provocado pela adição do ponto verde, já que o próximo ponto cai tanto abaixo dela quanto da primeira curva azul. Dessa forma, a próxima curva azul é comum a ambas as realizações.

3.1.3 Desigualdade FKG.

Harris utilizou em 1960 num artigo intitulado *A Lower Bound for the Critical Probability in a Certain Percolation Process* uma desigualdade que posteriormente viria a ser chamada de *desigualdade FKG*[10]. O principal resultado desse artigo é mostrar que o parâmetro crítico referente à percolação de elos de Bernoulli no plano é maior ou igual

a $\frac{1}{2}$. O parâmetro crítico indica o valor de p a partir do qual o processo possui probabilidade positiva de percolar, isto é, probabilidade positiva de que exista um conjunto infinito contendo um certo elo e . A definição do que é um conjunto infinito é feita após a introdução do modelo.

É feita a observação de que o parâmetro crítico foi definido a partir do ele e , isto é, $p_c = p_c(e)$. Isso não implica, imediatamente, que seu valor é o mesmo caso sua definição seja feita através de outro elo e' diferente da origem. Com efeito, ao final da subseção será apresentado um teorema que mostra que a escolha desse ponto não influencia em p_c .

Historicamente, a desigualdade foi primeiramente batizada de *desigualdade de Harris*. Posteriormente, através dos trabalhos de Fortuin, Kasteleyn e Ginibre em 1971 que culminaram no artigo *Correlation Inequalities on Some Partially Ordered Sets*[8], a desigualdade pôde ser generalizada e passou, desde então, a ser conhecida por *desigualdade FKG* em homenagem aos três cientistas.

A percolação de elos de Bernoulli será definida a seguir. Considerando \mathbb{Z}^d como o grafo em questão, será denotado por \mathbb{V} seu conjunto de vértices e por \mathbb{E} seu conjunto de elos.

Cada elo e estará em uma de duas possíveis configurações: aberta ou fechada. A configuração é $\omega(e)$ é dita aberta quando $\omega(e) = 1$, o que ocorre com probabilidade p . Reciprocamente, $\omega(e) = 0$ indica que a configuração $\omega(e)$ está fechada, o que ocorre com probabilidade complementar $1 - p$. Pressupõe-se que as variáveis $\omega(e)$, com e em \mathcal{E} são independentes.

Um *cluster* é definido como sendo uma das componentes conexas do subgrafo aleatório obtido através dos vértices e das arestas abertas do grafo.

O parâmetro crítico associado à aresta e para a percolação de elos de Bernoulli é exatamente o valor de p tal que a partir dele a probabilidade de que haja um *cluster* infinito contendo a aresta e seja positiva.

Um parênteses é realizado sobre a percolação de sítios de Bernoulli. O parâmetro crítico para esse modelo é definido de modo análogo à percolação de elos. A única diferença é que o termo *elo* deve ser substituído por *vértice*, e que a aleatoriedade agora se encontra no estado dos vértices, e não das arestas. De fato, a definição por ser feita a partir de qualquer vértice. Também será enunciado o teorema que garante que essa definição independe do sítio escolhido.

De volta à percolação de elos, o espaço amostral Ω é constituído a partir de todas as possíveis configurações que os elos podem assumir. Isto é, uma realização ω de Ω é um

elemento de $\mathbb{E}^{\{0,1\}}$. A σ -álgebra será aquela gerada a partir dos cilindros. A medida \mathbb{P}_p será a medida produto das variáveis Bernoulli de parâmetro p .

A enunciação da desigualdade *FKG* pode ser realizada num contexto um pouco mais geral do que o cenário de percolação de elos. A estrutura que o espaço de probabilidade deve ter é que Ω seja do tipo $\prod_{s \in S} \{0, 1\}$, onde S é um conjunto enumerável, a σ -álgebra é aquela gerada pelos cilindros finito-dimensionais de Ω e \mathbb{P} é uma medida produto de Bernoulli, onde a coleção de variáveis está indexada por cada ponto s de S .

Essa observação faz com que tal estrutura também seja satisfeita num cenário de percolação de sítios de Bernoulli. Dessa forma, será considerado a partir agora apenas a estrutura mais geral.

Evidentemente, é possível estabelecer uma relação de ordem parcial no espaço das configurações. Com efeito, duas configurações ω e ω' satisfazem a desigualdade $\omega \leq \omega'$ quando o conjunto dos elos abertos de ω' é pelo menos aquele de ω .

Um evento A mensurável é dito crescente quando $\omega \in A$ implica $\omega' \in A$, para todo par de configurações ω e ω' tais que $\omega \leq \omega'$.

Intuitivamente, para o caso da percolação de elos, um evento A é crescente quando sua ocorrência é mais provável quando há informação de que mais elos estão abertos.

A *desigualdade FKG* afirma que se A e B são eventos crescentes, então

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B). \quad (3.15)$$

O teorema a seguir apresenta uma aplicação do resultado tanto para a percolação de elos de Bernoulli quanto para a percolação de sítios. Esse teorema pode ser encontrado em [9].

Teorema 3. *Seja G um grafo conexo com um número enumerável de arestas. O valor do parâmetro crítico tanto da percolação de elos de Bernoulli quanto da percolação de sítios independem do sítio/elo inicial cujo cluster é observado.*

3.1.4 Desigualdade FKG sob Renovações.

Nesta subseção será apresentada a *desigualdade FKG* para Processos de Contato sob Renovações. Esse resultado foi originalmente mostrado em [6].

Serão considerados eventos que dependem apenas de um retângulo espaço-temporal finito $[0, L] \times [0, T]$. Uma realização do Processo de Contato sob Renovações será denotada por ω . É feita a observação que uma tal realização compreende tanto a realização de um

processo de renovação \mathcal{R} para cada sítio x quanto a de um processo de Poisson infeccioso de taxa λ para cada par de vizinhos x e y . Como os eventos serão enunciado dentro da caixa $[0, L] \times [0, T]$ a medida \mathbb{P} é a medida produto dos processos infecciosos de Poisson em cada elo da caixa e dos processos de renovação em cada sítios da caixa.

Um evento A é dito *crescente com respeito ao processo infeccioso* quando $\omega \in A$ implica $\omega' \in A$, sempre que ω' possui pelo menos os mesmos pontos de infecção que ω .

Um evento A é dito *decrecente com respeito ao processo de renovação* quando $\omega \in A$ implica $\omega' \in A$, sempre que o processo de renovação de ω' possui no máximo as mesmas renovações de ω .

Finalmente, evento A é dito *crescente* quando é simultaneamente *crescente com respeito ao processo infeccioso* e *decrecente com respeito ao processo de renovação*.

A desigualdade FKG já pode ser enunciada. Se A e B eventos crescentes, então

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \quad (3.16)$$

É através desse resultado que é possível demonstrar o principal teorema de [6] enunciado a seguir.

Teorema 4. *Suponha que a função taxa de falha associada à medida μ seja decrescente e que para algum $\alpha > 1$*

$$\int_0^\infty t^\alpha \mu(dt) < \infty. \quad (3.17)$$

Então o Processo de Contato sob Renovações em \mathbb{Z} possui parâmetro crítico positivo.

3.1.5 Acoplamento de processos de renovação com início em diferentes instantes.

A primeira aplicação da hipótese de decrescimento da função taxa de falha consiste na possibilidade de comparação entre dois processos de renovação com uma mesma distribuição, mas começando em instantes diferentes de modo que a partir de um certo instante, o conjunto formado a partir de todos os pontos de renovação de um deles estará contido no conjunto de pontos do outro.

Suponha que \mathcal{R} e $\tilde{\mathcal{R}}$ sejam ambos processos de renovação com distribuição entre curas seguindo uma lei comum μ , mas o primeiro começa no instante 0 e o segundo, no instante $t_0 > 0$.

Com efeito, seja n tal que a n -ésimo renovação de \mathcal{R} ocorra antes de t_0 e a $n + 1$ -ésima renovação após t_0 . O fato do $n + 1$ -ésimo ponto de renovação cair abaixo da curva

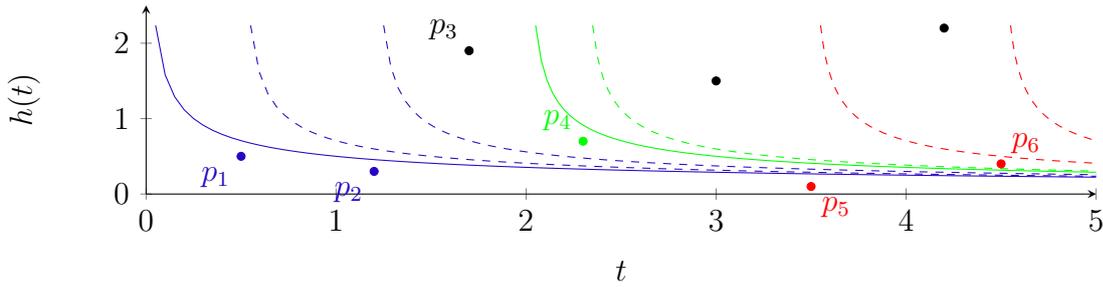


Figura 3

$h(t - t_n)$ faz com que ele também caia abaixo da curva $h(t - t_0)$ de modo que esse ponto representará uma certa m -ésima renovação de $\tilde{\mathcal{R}}$. A partir desse ponto os instantes de renovação de ambos processos coincidem.

A partir desse argumento é possível concluir que a partir de t_0 todos os instantes de renovação de \mathcal{R} também indicam renovações de $\tilde{\mathcal{R}}$.

Vale enfatizar a importância da hipótese de decrescimento de h . Caso ela não fosse satisfeita, a conclusão do parágrafo anterior não seria verdadeira.

Para ilustrar o caso, suponha que g siga a lei de *Weibull*. Essa distribuição recebe o nome em homenagem ao matemático sueco Waloddi Weibull, que a estudou com detalhes em 1951. Além disso ela é frequentemente empregada tanto na teoria da confiabilidade, estudada pela engenharia quanto na teoria da sobrevivência, estudada nas ciências atuariais.

Essa lei é caracterizada por 2 parâmetros, o valor de k é responsável pela *forma* da distribuição, enquanto que θ , pela intensidade. Sua expressão geral é dada por

$$g(t) = \frac{k}{\theta} \left(\frac{t}{\theta} \right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^k}, t \geq 0. \quad (3.18)$$

Além disso, sua função de densidade acumulada e *hazard rate function* podem ser expressas, respectivamente, através das expressões

$$G(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^k}, \quad (3.19)$$

e

$$h(t) = \frac{k}{\theta} \left(\frac{t}{\theta} \right)^{k-1}. \quad (3.20)$$

O valor de $k > 1$ garante que a *hazard rate function* seja crescente. Em contrapartida, para $k < 1$ a função é decrescente. Para o caso $k = 1$ ela é constante, fato que pode ser deduzido através de sua lei, que se iguala à de uma exponencial.

Mais precisamente, considere uma distribuição de Weibull com parâmetros $k = \frac{1}{2}$ e $\theta = 1$. Sua função de densidade é dada por

$$f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}. \quad (3.21)$$

Além disso, sua *hazard rate function* é dada por

$$h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (3.22)$$

Na *figura 3* podem ser vistos alguns pontos dispersos no gráfico. Os pontos dizem respeito a uma realização de um Processo Pontual de Poisson que são usados para a construção do acoplamento.

A curva contínua em azul indica a *hazard rate function* e as retas azuis pontilhadas indicam seu deslocamento através da representação gráfica do Processo Pontual de Poisson. Mais precisamente, o primeiro ponto $p_1 = (t_1, u_1)$ se encontra abaixo na curva, indicando uma renovação. Dessa forma, a função h é deslocada para a coordenada t_1 desse ponto, isto é, a primeira linha pontilhada azul indica a função $h(t - t_1)$. Analogamente, a segunda linha pontilhada azul indica a função $h(t - t_2)$, referente ao ponto p_2 , que se localiza abaixo do gráfico de $h(t - t_1)$. Além disso, o ponto p_3 se localiza acima do gráfico, não provocando um novo deslocamento.

A reta verde indica a mesma função h , mas dessa vez representa as renovações de um Processo de Renovação que começa a partir de um instante $t_0 \neq 0$. Dessa forma, a curva em verde escuro indica a função $h(t - t_0)$. A primeira renovação ocorre no instante t_4 , já que esse é o primeiro ponto que se encontra abaixo dessa curva. Logo, há um deslocamento e a reta verde pontilhada representa a função $h(t - t_4)$.

Os instantes de renovação de ambos processos passam a coincidir a partir do ponto p_5 , que se localiza abaixo do gráfico de ambas funções. A reta vermelha tracejada indica que agora as duas funções foram deslocadas para o mesmo ponto, isto é, $h(t - t_5)$, refletindo o fato de que a partir de agora ambos processos possuem renovações nos mesmos instantes. O próximo ponto, p_6 é um exemplo disso, já que as curvas se deslocam simultaneamente.

3.1.6 Dominação entre processos de renovação.

A segunda aplicação é a comparação entre um modelo RCP e o próprio modelo do tipo exponencial-exponencial, isto é, o clássico Processo de Contato. Com efeito, suponha que seja considerado um processo de renovação \mathcal{R} cuja distribuição entre ocorrências siga

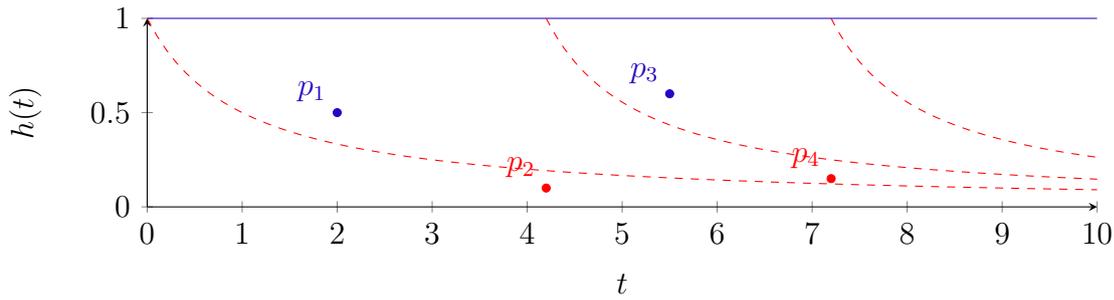


Figura 4

uma distribuição com densidade dada por

$$g(t) = \frac{1}{(t+1)^2}, \quad (3.23)$$

para $t \geq 0$.

Através de alguns cálculos elementares é pode ser verificado que

$$G(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)}, \quad (3.24)$$

e que, portanto

$$h(t) = \frac{1}{(t+1)}, \quad (3.25)$$

uma função decrescente em t e limitada superiormente por 1.

Considerando um processo de renovação $\tilde{\mathcal{R}}$ cuja distribuição entre ocorrências é dada por uma variável exponencial de parâmetro $\gamma \geq 1$ cuja *hazard rate function* \tilde{h} é simplesmente constante igual ao parâmetro γ , é possível deduzir que essa função sempre domina a outra, referente ao processo anterior.

Dessa forma, considerando ambas funções num gráfico, é possível concluir que todas as vezes que um ponto do Processo Pontual de Poisson cair abaixo do gráfico de h , ele também cairá abaixo do gráfico de \tilde{h} , fazendo com que, portanto, todo ponto de renovação de \mathcal{R} também seja um de $\tilde{\mathcal{R}}$, completando o acoplamento.

Esse argumento mostra que é possível usar os resultados do modelo clássico para obter respostas para o RCP. Em particular, é possível concluir que o parâmetro crítico de um processo de contato sob renovações é finito, se o parâmetro λ responsável pelas infecções for suficientemente grande.

Vale ressaltar a importância da hipótese de decrescimento satisfeita por h . Do contrário, não há garantia de que todas as renovações oriundas de sucessivos deslocamentos de \tilde{h} conterão aquelas de h .

A título de ilustração, agora é realizado o acoplamento de dois processos de renovação distintos começando num mesmo instante $t_0 = 0$. O primeiro processo de renovação \mathcal{R} já foi introduzido nesta seção, com *hazard rate function* dada por $h_1(t) = \frac{1}{(t+1)}$, enquanto que o segundo é um processo de renovação $\tilde{\mathcal{R}}$ tal que seu intervalo entre curas é exponencialmente distribuído com parâmetro $\gamma = 1$, fornecendo $h_2(t) = 1$ como *hazard rate function*.

Na *figura 4*, quatro pontos podem ser vistos. Apenas os pontos p_2 e p_4 indicam renovações do processo \mathcal{R} . Por outro lado, todos os pontos, isto é, p_1, p_2, p_3 e p_4 indicam renovações do processo $\tilde{\mathcal{R}}$, já que todos se encontram abaixo da função deslocada $h(t - t_i) = h(t)$, para i em $\{1, 2, 3, 4\}$.

Essa dinâmica mostra que um subconjunto das renovações de $\tilde{\mathcal{R}}$ é responsável por representar cada uma das renovações de \mathcal{R} , como descrito anteriormente.

3.2 Sobre a convergência em lei do processo.

Um tipo de resultado clássico em Teoria das Probabilidades consiste na demonstração de uma convergência em medida de um Processo Estocástico. Esta seção consiste na demonstração de um teorema desse tipo retirado de [5].

A seção começa enunciando condições suficientes para que o processo se perpetue bem como caracterizando uma medida que será uma candidata natural ao limite. Em seguida são desenvolvidas definições e lemas auxiliares que revelarão certas propriedades que o processo possui no regime em questão. Por fim, através da convergência dos resultados desenvolvidos ao longo do capítulo é apresentada uma ideia da demonstração do teorema de convergência.

3.2.1 Descrição e hipóteses.

Ao longo deste capítulo, as condições assumidas para uma medida de renovação μ desse capítulo são as seguintes.

(A) Existem $1 < M_1 < +\infty$, $\epsilon_1 > 0$ e $t_0 \in (0, +\infty)$ tais que para todo $t > t_0$

$$\epsilon_1 \int_0^t u \mu(du) < t \mu(t, M_1 t). \quad (3.26)$$

(B) Existem $1 < M_2 < +\infty$, $\epsilon_2 > 0$ e $r_2 < +\infty$ tais que para todo $r > r_2$

$$\epsilon_2 \mu[M_2^r, M_2^{r+1}] \leq \mu[M_2^{r+1}, M_2^{r+2}]. \quad (3.27)$$

(C) Existem $M_3 < +\infty$ e $\epsilon_3 > 0$ tais que para todo $t \geq M_3$

$$t^{-(1-\epsilon_3)} \leq \mu(t, +\infty) \leq t^{-\epsilon_3}. \quad (3.28)$$

Sob essas condições o Processo de Contato sob Renovações possui probabilidade positiva de sobrevivência para toda taxa de infecção $\lambda > 0$ [7]. Além disso, pode se observar que embora a medida μ não tenha primeiro momento finito, ela goza de certa regularidade.

Denotando por τ o tempo de extinção, isto é

$$\tau := \inf\{t > 0 : \xi_t \equiv 0\}, \quad (3.29)$$

e por $\underline{0}$ e $\underline{1}$ as configurações onde nenhum sítio está infectado e onde todos os sítios estão infectados, respectivamente, o teorema pode ser enunciado através da introdução de apenas mais duas quantidades. Sejam $\delta_{\underline{0}}$ e $\delta_{\underline{1}}$ as medidas que colocam, respectivamente, massa total na configuração onde nenhum sítio está infectado e onde todos os sítios estão infectados.

Teorema 5. *Dado qualquer conjunto A inicialmente infectado, a quantidade ξ_t^A converge em lei, quando $t \rightarrow \infty$ para*

$$\mathbb{P}(\tau < \infty)\delta_{\underline{0}} + \mathbb{P}(\tau = \infty)\delta_{\underline{1}}. \quad (3.30)$$

3.2.2 Definições e construções.

A demonstração do teorema envolverá a estimativa da probabilidade de que a infecção se perpetue e um sítio x arbitrário não esteja infectado num certo instante t . Para realizar essa estimativa o evento $\{\tau = \infty, \xi_t(x) = 0\}$ será decomposto em 3 outros. Por sua vez, cada uma receberá um tratamento específico. É exatamente com essa tarefa que a presente seção se encarrega.

Primeiramente é feita a definição de uma classe de tempos de parada que receberão o nome de *extremais*. A nomenclatura é motivada através da definição, já que tais tempos de parada tem a propriedade que o sítio infectado mais distante da origem, num dado instante, é estritamente maior, no sentido da norma infinito, do que o sítio mais distante da infecção em qualquer instante anterior. Essa definição é tornada mais precisa da seguinte forma.

Definição 1 (Tempo de parada extremo.). *Um tempo de parada T com respeito à filtração natural \mathcal{A}_t é dito extremo quando*

$$\max\{\|x\|_\infty : \xi_T(x) = 1\} > \max_{s < T}\{\|x\|_\infty : \xi_s(x) = 1\}. \quad (3.31)$$

Será mostrado que, sob a hipótese da infecção durar por tempo indeterminado, a quantidade de sítios infectados não pode ser finita. Em outras palavras, sob tal hipótese, a infecção nunca fica inteiramente contida em nenhuma caixa do tipo $[-m, m]^d$, seja qual for m inteiro não negativo.

Seja um tal m fixado e considere o seguinte evento.

$$\{\tau = \infty\} \cap \{\xi_s(x) = 0, \forall x \notin [-m, m]^d, \forall s \geq 0\}. \quad (3.32)$$

A análise que será feita consiste na constatação de que durante um certo intervalo de tempo a probabilidade de ocorrência de uma renovação em algum dos sítios dessa caixa é muito pequena. Além disso, a probabilidade de que a infecção seja propagada para fora da caixa também será pequena. Dessa forma, será demonstrado que essa família de eventos indexada por m é formada por eventos de probabilidade 0 e, portanto, a probabilidade de que a infecção se perpetue infectando apenas finitos sítios será 0.

Pela proposição 7 de [7], combinada com a *desigualdade de Boole* aplicada em cada sítio da caixa, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno satisfazendo que a probabilidade de que haja uma renovação em qualquer um dos sítios da caixa $[-m, m]^d$ no intervalo temporal $[2^n, 2^n + 2^{n\epsilon}]$ seja no máximo $\frac{(2m+1)^d}{2^{n\epsilon}}$, para todo n suficientemente grande.

Além disso, condicionado na existência de um sítio infectado no instante 2^n na caixa $[-m, m]^d$, a probabilidade de que haja uma sequência de no máximo $(m+1)$ sítios vizinhos infectados começando dentro da caixa $[-m, m]^d$ e terminando em algum sítio fora dela no instante $2^n + 2^{n\epsilon}$ fica arbitrariamente pequena conforme n cresce.

A combinação dos dois parágrafos imediatamente anteriores mostra que a probabilidade de que os sítios fora de uma caixa $[-m, m]^d$ nunca sejam infectados sob a hipótese da perpetuação da infecção por tempo indeterminado é 0. Em símbolos, vale que para todo $m > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\{\tau = +\infty\} \cap \{\xi_s(x) = 0, \forall s > 0, \forall x \notin [-m, m]^d\}\right) = 0. \quad (3.33)$$

Dessa forma, se a infecção se perpetua, então um número infinito de sítios é infectado. O resultado é anunciado a seguir na forma de um lema. Além disso, também é explicitada sua relação com os tempos de parada extremais.

Lema 1. *Sob a hipótese de perpetuação da infecção, a quantidade total de sítios infectados pelo menos uma vez ao longo do processo não pode ser finita.*

$$\mathbb{P}\left(\{\tau = +\infty\} \cap \left\{\left|\left\{x : \int_0^{+\infty} \xi_s(x) ds > 0\right\}\right| < +\infty\right\}\right) = 0. \quad (3.34)$$

Em particular, isso implica que condicionado na perpetuidade da infecção, para todo instante $t > 0$ existe um tempo de parada extremal, quase certamente.

Além do lema anterior responder uma pergunta que é por si só interessante, ele também permitirá a demonstração de outro resultado curioso. O resultado é o seguinte.

Para todo instante t , existe um sítio não muito distante da origem que permanece infectado durante o intervalo temporal $[\frac{t}{2}, t]$. A noção de *não muito distante* é tornado preciso a seguir.

Os tempos de parada extremais se mostrarão úteis na demonstração do seguinte resultado.

Corolário 1. *Sob o evento $\{\tau = +\infty\}$, para todo t suficientemente grande, existe um sítio x_t a uma distância inferior a $\log^3 t$ da origem tal que $\xi_s(x) = 1$ para todo s em $[\frac{t}{2}, t]$.*

A estratégia será considerar, dado um tempo de parada extremo T , uma sequência monótona de pontos $\{X_T + L_i\}_i$ cuja duração de infecção se prolonga como uma potência de 2. Mostrando que a existência de tal sequência é possível com probabilidade positiva, o resultado é demonstrado através da constatação de que os pontos da sequência acima fornecem pelo menos um ponto do tipo requerido cuja distância em relação à origem é satisfatoriamente pequena.

A título de evitar o sobrecarregamento da notação é feita a suposição de que a dimensão d do modelo é igual à 1. Para o caso de dimensão superior a argumentação envolverá um vetor unitário-direcional que aponte “para fora” da origem.

Dado um tempo de parada extremo T será considerado X_T como sendo o sítio mais distante da origem. Dessa forma,

$$\text{ou } X_T = \max\{x : \exists s < T, \xi_s(x) = 1\} + 1, \quad \text{ou } X_T = \min\{x : \exists s < T, \xi_s(x) = 1\} - 1. \quad (3.35)$$

Por definição, o diâmetro da infecção aumenta no instante de um tempo de parada extremal. Dessa forma, X_T simplesmente é um ponto referente a essa nova infecção que, por conta da unidimensionalidade, ou se encontra na extrema direita ou na extrema esquerda. Decorre desse fato o emprego das quantidades min e max e o não mencionamento de $\|\cdot\|$, já que \mathbb{Z} é ordenado.

Sem perda de generalidade, uma suposição será feita. Será considerado o caso em que X_T é o ponto da extrema direita. Com efeito, se X_T for o ponto do sentido oposto basta refletir as definições que serão dadas em breve.

Visando definir as quantidades L_i empregadas na construção da sequência aleatória, será tratado um termo auxiliar.

Seja n_0 o menor n tal que a potência n -ésima de 2 exceda T . Em fórmulas,

$$n_0 := \inf\{n : 2^n > T\}. \quad (3.36)$$

Em seguida, as quantidades n_i são definidas recursivamente através da adição de uma unidade à quantidade imediatamente anterior.

$$n_{i+1} := 1 + n_i. \quad (3.37)$$

Quanto às quantidades L_i , é possível, finalmente, fazer sua definição de modo também recursivo.

$$L_0 := 0, \quad (3.38)$$

e

$$L_{i+1} := \inf\{k > L_i : \mathcal{R}_{X_T+k} \cap [2^{n_i}, 2^{n_i+3}] = \emptyset\}. \quad (3.39)$$

Dessa forma, $X_{T+L_0} = X_T$.

Ademais, a recursão é descrita a seguir. O ponto seguinte, $X_T + L_{i+1}$ é o menor vizinho à direita do ponto atual, $X_T + L_i$, tal que não haja nenhuma renovação durante o intervalo de tempo que começa a partir de 2^{n_i} e termina em $2^3 \cdot 2^{n_i}$.

Com a intenção de concluir o argumento heurístico apresentado anteriormente é necessário tornar precisa a ideia de *proximidade* referente aos pontos sequenciais e fornecer uma garantia de que haja um caminho infeccioso que ligue um ponto ao outro.

É possível observar que até agora as condições para a definição da sequência dependiam apenas das renovações e não das infecções.

Além disso, as sequências construídas existem para toda realização do processo. Não obstante, apenas aquelas que satisfazem uma certa condição de *proximidade* ao lado de uma condição associada às infecções serão úteis.

As realizações que satisfazem essas duas condições mencionadas serão aquelas que pertencem ao evento definido a seguir, a partir de uma coleção de eventos. Primeiro será descrito cada membro dessa coleção.

O evento $H_{T,i}$ associado ao tempo de parada T consiste das realizações do processo tais que

- $L_{i+1} - L_i \leq (i + 1)n_0$,
- Existe um caminho infeccioso de $(X_T + L_i, 2^{n_i})$ até $(X_T + L_{i+1}, 2^{n_{i+1}})$ no retângulo espaço-temporal definido por esses mesmos pontos, isto é $[X_T + L_i, X_T + L_{i+1}] \times [2^{n_i}, 2^{n_{i+1}}]$.

Dessa forma, para que uma sequência com boas propriedades seja construída todos os eventos $H_{T,i}$ devem ser satisfeitos e, portanto, o interesse residirá precisamente através da interseção dessa coleção tomada a partir do subíndice i . O interesse residirá, portanto, em

$$H_T := \bigcap_{i=0}^{+\infty} H_{T,i}. \quad (3.40)$$

Um argumento da *Seção 4* de [7] garante que uniformemente em $\{T > N\}$, para

uma constante N suficiente grande, existe c tal que

$$\mathbb{P}(H_T | \mathcal{A}_T) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} H_{T,i} | \mathcal{A}_T\right) \geq c > 0. \quad (3.41)$$

A invocação desse resultado permite mostrar a seguinte afirmação.

$$\mathbb{P}(\{\tau = +\infty\} \cap \{\nexists \text{ um ponto extremal } T \text{ tal que } H_T \text{ ocorra}\}) = 0. \quad (3.42)$$

Com efeito, suponha que, sob a hipótese de perpetuidade da infecção, para um certo tempo extremo T_1 o evento H_T não seja satisfeito. Então existe um subíndice i_1 tal que H_{T_1, i_1} não ocorre. Dessa forma, tome um tempo de parada $T_2 > 2^{n_{i_1}}$, fato esse que é possível devido ao *lema* anterior. Dessa forma, $\mathbb{P}(H_{T_2} | \mathcal{A}_{T_2}) \geq c$.

O que esse argumento ilustra é que é possível construir uma sequência de tempos de parada $\{T_k\}_k$ tais que a probabilidade de sucesso de um certo H_{T_k} condicionado nas falhas de $H_{T_1}, \dots, H_{T_{k-1}}$ possa ser comparada à probabilidade de que uma variável geométrica de parâmetro c tenha sucesso na k -ésima tentativa.

Devido ao fato de uma variável geométrica ser finita quase certamente, segue que H_T quase certamente ocorre. A afirmação está provada.

Finalmente, é possível fazer a construção de x_t . Seja T tempo de parada extremal fixado e considere suas sequências $\{L_i\}_i$ e $\{n_i\}_i$ associadas. Suponha $t > 2^{n_1}$. Tomando i como sendo o menor índice tal que $2^{n_{i-1}} < t \leq 2^{n_i}$ é possível definir $x_t := X_T + L_{i-2}$.

A construção de H_T garante que $\xi_s(t) = 1$ durante o intervalo temporal $[\frac{t}{2}, t] \subset [2^{n_{i-2}}, t]$.

Por outro lado, a proximidade em relação à origem também é satisfeita. Com efeito,

$$x_t = X_T + L_{i-2} \quad (3.43)$$

$$\leq X_T + \sum_{j=1}^{i-2} j n_0 \quad (3.44)$$

$$\leq X_T + \frac{n_0}{2} (i-1)^2 \quad (3.45)$$

$$\leq X_T + \frac{n_0}{2} \left(\frac{\log t}{\log 2} - n_0\right)^2 \quad (3.46)$$

$$\ll \log^3 t. \quad (3.47)$$

O corolário está provado.

Denotando por $B(r) := [-r, r]^d$ uma bola espacial de raio r , já é possível definir o primeiro evento que constituirá a decomposição mencionada no início da seção. Seja W_t o evento em que existe um ponto x na bola de raio $\log^3 t$ que esteja infectado durante o intervalo temporal $[t/2, t]$. Pelo corolário anterior,

$$\mathbb{P}(\{\tau = \infty\} \cap W_t^c) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \quad (3.48)$$

Visando aplicações futuras, será enunciada a *Proposição 7* de [7]. Ela estabelece uma condição suficiente para que a probabilidade de ocorrência de uma renovação num certo intervalo temporal seja suficientemente pequena.

Proposição 1. *Existe $\epsilon > 0$ tal que para n suficientemente grande e para qualquer intervalo $[s, t]$ que satisfaça $2^n \leq s \leq t \leq s + 2^{n\epsilon}$, vale*

$$\mathbb{P}(\mathcal{R} \cap [s, t] \neq \emptyset) \leq 2^{-n\epsilon}. \quad (3.49)$$

Considerando ainda $B(\log^3 t)$, os dois outros eventos da decomposição serão definidos e estudados. Eles dizem respeito ao intervalo temporal $[t - t^\epsilon, t]$, onde ϵ é a mesma quantidade da proposição anterior.

Dado um ponto dessa bola com $\xi_t(x) = 0$, ou ele estava infectado e se curou durante esse intervalo; ou ele já estava saudável e não foi infectado. Ambos casos serão tratados.

O evento U_t consiste daquelas realizações do processo em que não há renovação para nenhum sítio da bola $B(\log^3 t)$ no intervalo temporal $[t - t^\epsilon, t]$.

Evidentemente, seu complementar expressa a ocorrência de uma cura em pelo menos um sítio da bola.

Levando em consideração a *desigualdade de Boole* associada à existência de no máximo $C(d)(\log^3 t)^d$ sítios na bola em questão, mais uma vez é obtida uma cota superior para a ocorrência de pelo menos um cura.

$$\mathbb{P}(U_t^c) \leq C(d)(\log^3 t)^d t^{-\epsilon}. \quad (3.50)$$

Também pode ser observado que

$$\mathbb{P}(U_t^c) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \quad (3.51)$$

Isso significa que a probabilidade de que haja pelo menos uma renovação algum dos sítios de $B(\log^3 t)$ em $[t - t^\epsilon, t]$ tende à 0 quando t cresce.

Por fim, é introduzido o conceito de infecção livre. Considera-se que (x, t) infecta $(y, t + h)$ livremente num subconjunto $B \times [t, t + h]$ de $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ quando ambos pontos se

encontram nesse subconjunto e existe uma sequência de sítios $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ com $|x_i - x_{i-1}| = 1$ e uma sequência de tempos $t < t_1, t_2, \dots, t_n < t + h$ tais que exista uma marca de infecção entre x_{i-1} e x_i no instante t_i .

O último evento da decomposição, V_t , é constituído a partir da realizações do processo tais que todo par (x, y) de $B(\log^3 t)$ satisfaça: $(x, t - t^\epsilon)$ livremente infecte (y, t) em $B(\log^3 t)$.

É feita a afirmação de que a probabilidade de não-infecção entre dois sítios fixados é de, no máximo, e^{-ct^ϵ} . A justificativa é dada a seguir.

Para dois sítios x e y em $B(\log^3 t)$ existe um caminho determinístico que conecta x a y dentro dessa bola usando no máximo $C(d) \log^3 t$ elos. Se existe uma marca de infecção no primeiro elo, depois uma no segundo, e assim sucessivamente, e a marca final ocorre antes de t , então há uma infecção livre. Pela perda de memória da Poisson, a probabilidade do evento descrito acima não ocorrer é menor que a probabilidade de uma Poisson de parâmetro λ ter menos que $C(d) \log^3 t$ ocorrência no intervalo $[t - t^\epsilon, t]$.

Portanto, usando a *desigualdade de Boole* a partir de todos os pares possíveis de pontos que podem se infectar na bola, é obtida a quantidade

$$\mathbb{P}(V_t) \geq 1 - C(d)(\log^3 t)^{2d} e^{-ct^\epsilon}. \quad (3.52)$$

O resultado desejado, entretanto, é caracterizado pelo complementar do anterior. O interesse reside na probabilidade de que não haja uma infecção. Isto é,

$$\mathbb{P}(V_t^c) \leq C(d)(\log^3 t) e^{-ct^\epsilon}. \quad (3.53)$$

E portanto,

$$\mathbb{P}(V_t^c) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0. \quad (3.54)$$

Acaba de ser demonstrado que a probabilidade da não ocorrência de uma infecção livre tende à 0, conforme t cresce.

3.2.3 Demonstração do teorema.

Sendo a subseção presente a final, todos os termos são relacionados visando obter a demonstração do teorema desejado, isto é, a demonstração de que a distribuição assintótica do processo converge para a medida que coloca massa proporcional à extinção do processo na configuração em que nenhum sítio está infectado e, massa complementar na configuração em que todos os sítios estão infectados.

A prova consistirá na análise que, sob o evento de não extinção $\{\tau = \infty\}$, a probabilidade de que todos os pontos de um compacto K qualquer de \mathbb{Z}^d estejam todos infectados converge, simplesmente, à probabilidade de não extinção.

Deve-se notar que todos os argumentos que constituirão a demonstração já foram desenvolvidos e provados, restando apenas estabelecer um diálogo conveniente entre os termos até aqui mencionados.

Com efeito, pode ser observado que o evento $\{\tau = +\infty\} \cap V_t \cap U_t \cap W_t$ implica que todos os termos da bola $B(\log^3 t)$ estejam infectados no instante t . Reciprocamente, ainda em $\{\tau = +\infty\}$, o evento em que algum ponto não está infectado está contido em $\{\tau = +\infty\} \cap V_t^c \cap U_t^c \cap W_t^c$.

Dessa forma, dado um sítio x de \mathbb{Z}^d fixado e tomando t suficientemente grande

$$\mathbb{P}\left(\{\tau = \infty, \xi_t(x) = 0\}\right) \leq \mathbb{P}(V_t^c) + \mathbb{P}\left(\{\tau = \infty\} \cap W_t^c\right) + \mathbb{P}(U_t^c). \quad (3.55)$$

O que acaba de ser mostrado é que a probabilidade de $\{\tau = +\infty, \xi_t(x) = 0\}$ converge a 0 conforme t cresce. Esse fato é a última peça do quebra-cabeça, fazendo com que seja imediatamente formado o cenário completo através de

$$\mathbb{P}\left(\{\tau = +\infty, \xi_t(x) = 1, \forall x \in K\}\right) \geq \mathbb{P}\left(\{\tau = +\infty\}\right) - \sum_{x \in K} \mathbb{P}\left(\{\tau = +\infty, \xi_t(x) = 0\}\right) \quad (3.56)$$

$$\rightarrow_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\{\tau = +\infty\}\right). \quad (3.57)$$

O teorema está provado.

3.3 Sobre a positividade do parâmetro crítico.

No contexto de sistemas de partículas, talvez a primeira pergunta a se fazer sobre um novo modelo introduzido consista na existência ou não de um certo fenômeno - a transição de fase. A caracterização desse fenômeno qualitativo do processo reside no estudo do que é conhecido na literatura como *parâmetro crítico*.

O capítulo estabelece uma condição sobre a medida que caracteriza as renovações de modo que o modelo tenha parâmetro crítico positivo. O resultado foi retirado de [5].

Será estabelecida uma cota inferior para o parâmetro crítico de um modelo com distribuição entre curvas μ que satisfaz

$$\int_1^{+\infty} x \exp [\theta(\log x)^{\frac{1}{2}}] \mu(dx) < +\infty, \quad (3.58)$$

onde θ é uma constante estritamente maior que $4\sqrt{d \log 2}$.

Teorema 6. *Se a distribuição μ satisfaz a equação 3.58, então o parâmetro crítico $\lambda_c(\mu)$ de um Processo de Contato sob Renovações em \mathbb{Z}^d é positivo.*

3.3.1 Definições e construções.

Visando o estudo da existência ou não da possibilidade de sobrevivência da infecção por tempo indeterminado é feita a seguir a descrição dos eventos sobre os quais a demonstração será construída.

Definição 2 (Cruzamento). *Dado regiões espaço-temporais C, D e H de $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$, é dito que há um cruzamento de C à D em H quando existe um caminho $\gamma : [s, t] \rightarrow \mathbb{Z}^d$ tal que $\gamma(s) \in C$, $\gamma(t) \in D$ e para todo u em $[s, t]$ o par $(\gamma(u), u)$ está em H .*

Embora essa seja uma definição bem geral, será necessário aplicá-la apenas a uma única forma geométrica: a caixa. Dessa forma, uma típica caixa B será representada por um produto $\left(\prod_{i=1}^d [a_i^-, a_i] \right) \times [s, t]$. As quantidades $a_i^- < a_i$ são todas consideradas reais.

Frequentemente a sua projeção espacial será apenas denotada por $[a^-, a]$, onde $a^- = (a_1^-, \dots, a_d^-)$ e $a = (a_1, \dots, a_d)$. Nesse contexto também será feita referência às suas faces,

$$\partial_i^- B := \{(x, u) \in B : x_i = a_i^-\} \text{ e } \partial_i B := \{(x, u) \in B : x_i = a_i\}. \quad (3.59)$$

Uma vez feita a definição da principal forma geométrica a ser estudada, pode ser realizada a introdução dos eventos propriamente ditos.

Seja $B = \left(\prod_{i=1}^d [a_i^-, a_i] \right) \times [s, t]$ uma caixa.

Definição 3 (Cruzamento temporal.). *Será denotado por $T(B)$ o evento que consiste dos caminhos de $[a^-, a] \times \{s\}$ a $[a^-, a] \times \{t\}$ em B .*

Definição 4 (Meio-cruzamento temporal.). *Será denotado por $\tilde{T}(B)$ o evento que consiste dos caminhos de $[a^-, a] \times \{s\}$ a $[a^-, a] \times \{\frac{s+t}{2}\}$ em $[a^-, a] \times [s, \frac{s+t}{2}]$*

Definição 5 (Cruzamento espacial.). *Para uma direção fixada j o evento $S_j(B)$ consiste dos caminhos de $\partial_j^- B$ à $\partial_j B$ em B .*

Definição 6 (Fatiamento de uma caixa.). *Será denotado por $\tilde{B}(j)$ o fatiamento da caixa B ao longo da direção j , isto é,*

$$\tilde{B}(j) := \left(\prod_{i=1}^{j-1} [a_i^-, a_i] \right) \times \left[\frac{a_j^- + a_j}{2}, a_j \right] \times \left(\prod_{i=j+1}^n [a_i^-, a_i] \right) \times [s, t]. \quad (3.60)$$

Definição 7 (Meio cruzamento espacial.). *Diz-se que um meio cruzamento espacial de uma caixa B ao longo da direção j ocorreu quando ocorre um cruzamento espacial na direção j da caixa $\tilde{B}(j)$, o que é representado por $S_j(\tilde{B}(j))$.*

Os argumentos serão construídos com base numa sequência genérica de caixas B_n da forma $\left(\prod_{i=1}^d [0, a_{i,n}] \right) \times [0, b_n]$. A principal técnica utilizada será a recorrência, motivo pelo qual os *meio cruzamentos espaciais* e os *meio cruzamentos temporais* serão úteis.

Uma observação deve ser feita sobre o fatiamento. Será suficiente, devido à simetria do modelo, considerar apenas a metade em que se encontra a face “mais a direita” da direção em que a divisão espacial foi feita.

3.3.2 Algumas observações e desigualdades.

Uma vez tendo sido definidos os principais eventos, a tarefa mais natural a ser realizada em seguida consiste no estudo das probabilidades relativas a esses eventos.

Primeiramente, é feita uma observação sobre a probabilidade de que exista um cruzamento de uma meia-caixa ao longo de sua direção de fatiamento. É possível observar que a simetria do modelo implica que essa probabilidade seja a mesma, independentemente do lado fatiado.

Além disso, é necessário que alguns comentários sobre probabilidades referentes a translações de caixas também sejam realizados. A independência e a igual distribuição dos processos infecciosos de Poisson permitem concluir que a probabilidade de que qualquer tipo de cruzamento seja realizado é invariante com relação a qualquer translação espacial $(x, 0) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}$ e também com relação a qualquer outra simetria de \mathbb{Z}^d .

Não obstante, não há garantia de que o mesmo seja verdade se uma translação temporal, ademais da espacial, também for permitida. Isso ocorre pois, em geral, um Processo de Renovação não goza da propriedade de *perda de memória*, a qual é satisfeita por Processos de Poisson. A fim de contornar esse empecilho técnico algumas quantidades uniformes são imediatamente introduzidas.

Definição 8 (Quantidades uniformes.).

$$s_n := \sup \hat{\mathbb{P}}\left(S_j((x, t) + B_n)\right), \quad h_n := \sup \hat{\mathbb{P}}\left(S_j((x, t) + \tilde{B}_n(j))\right), \quad (3.61)$$

$$t_n := \sup \hat{\mathbb{P}}\left(T((x, t) + B_n)\right), \quad \tilde{t}_n := \sup \hat{\mathbb{P}}\left(\tilde{T}((x, t) + B_n)\right), \quad (3.62)$$

onde o sup é tomado sobre todas as translações $(x, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ e sobre todas as medidas produto $\hat{\mathbb{P}}$ cuja distribuição marginal entre curvas seja μ e com pontos iniciais de renovação começando em (possivelmente diferentes) pontos temporais estritamente menores do que 0.

Sem tardar, a utilidade dessas quantidades pode ser apreciada na desigualdade

$$\mathbb{P}(\tau^0 = +\infty) \leq \tilde{t}_n + 2d \cdot h_n. \quad (3.63)$$

A fim de justificar essa desigualdade, algumas observações devem ser feitas. Primeiramente, dado uma caixa espaço-temporal, a perpetuação da infecção implica que ela não pode ficar contida nessa caixa e, portanto, precisar “sair” ou pelo “topo”, isto é, pela direção temporal, ou por alguma das $2d$ faces laterais. Entretanto, não há garantias que um cruzamento espacial dessa caixa não ocorra antes do cruzamento temporal. Dessa forma,

uma desigualdade preliminar é obtida oriunda da ordem de ocorrência desses eventos. Uma paráfrase desse argumento em símbolos é dada por

$$\mathbb{P}(\tau^0 = +\infty) \leq \mathbb{P}(T(B_n)) + 2d\mathbb{P}(S_1(\tilde{B}_n(1))), \quad (3.64)$$

onde o $2d$ vem da simetria dos meio-cruzamentos, uma vez que um cruzamento espacial qualquer está contido no evento formado pelos $2d$ meio-cruzamentos espaciais, que por sua vez dá lugar à estimativa indicada, através da *desigualdade de Boole*.

$$\mathbb{P}(\tau^0 = +\infty) \leq t_n + 2d \cdot h_n \quad (3.65)$$

$$\leq \tilde{t}_n + 2d \cdot h_n, \quad (3.66)$$

já que um cruzamento temporal implica um meio-cruzamento temporal.

3.3.3 Relações entre escalas sucessivas temporais.

Uma vez estabelecidos os principais eventos e definidas as quantidades uniformes, o objetivo desta seção é estabelecer a desejada relação de recorrência entre cruzamentos temporais.

Será assumido que $a_n = 2^n$. As suposições posteriores que serão feitas sobre b_n se mostrarão realizáveis em breve.

A primeira suposição é a de que $\frac{b_n}{2} > 3b_{n-1}$. Isso garante que a ocorrência de um meio-cruzamento temporal de B_n implique a de um cruzamento temporal em $[0, 3b_{n-1}]$. Por sua vez, tal cruzamento será subdividido em dois casos: um em que há renovação em $[b_{n-1}, 2b_{n-1}]$ e outro em que não há.

Dada uma caixa $B_n := [0, 2^n]^d \times [0, b_n]$ fixada, denote por G_i o evento que consiste na ocorrência de um cruzamento temporal de $[0, 2^n]^d \times [ib_{n-1}, (i+1)b_{n-1}]$. Além disso, denote por J o evento que indica a existência de pelo menos um sítio na caixa espacial que não possui renovação durante o intervalo $[b_{n-1}, 2b_{n-1}]$. A decomposição que acaba de ser descrita é, portanto, dada por

$$\tilde{T}(B_n) \subset J \cup (G_0 \cup J^c \cup G_2). \quad (3.67)$$

Com o fim de estabelecer uma desigualdade entre probabilidades será apresentado um resultado um pouco mais geral envolvendo *eventos do tipo J*.

Denote por $J_n(t, h)$ a existência pelo menos um sítio x em $[0, a_n]^d$ que é curado durante o intervalo temporal $[t, t+h]$. Seja $f(x) := e^{\theta(\log x)^{\frac{1}{2}}} \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}$ e suponha μ satisfazendo as relações estabelecidas anteriormente. O motivo de f ser desse tipo ficará claro em um

momento futuro. O ponto a ser feito é que é possível obter uma cota superior para a probabilidade de ocorrência de $J_n(t, h)$ através de uma constante C que depende apenas da medida μ .

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{P}(J_n(t, h)) \leq C \frac{a_n^d}{f(h)}. \quad (3.68)$$

O resultado, na verdade, pode ser visto como um corolário de um resultado ainda mais geral e elementar sobre processos de renovação enunciado na *Seção 2.2* de [5]. A função f deve satisfazer apenas as hipóteses de diferenciabilidade, não-decrescimento em função de x e de crescimento indeterminado, i.e., ao infinito, ao passo que x cresce. A constante C , então, dependerá da medida μ e da escolha da função f . Se o valor esperado de $xf(x)$ com respeito à medida μ for finito, então para qualquer instante $t_0 \leq 0$ em que o Processo de Renovação se inicie, é possível obter uma cota superior para a probabilidade de não ocorrência de uma infecção no intervalo correspondente.

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{P}(\mathcal{R} \cap [t, t+h] = \emptyset) \leq \frac{C}{f(h)}. \quad (3.69)$$

Voltando ao argumento anterior, a desigualdade procurada é, portanto,

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{T}(B_n)) \leq \hat{\mathbb{P}}(J) + \hat{\mathbb{P}}(G_0) \cdot \hat{\mathbb{P}}(G_2 | G_0 \cap J^c) \quad (3.70)$$

$$\leq \frac{C2^{dn}}{f(b_{n-1})} + \hat{\mathbb{P}}(G_0) \cdot \hat{\mathbb{P}}(G_2 | G_0 \cap J^c). \quad (3.71)$$

Quanto à segunda quantidade, a probabilidade condicional seria tratada através da integração sobre os possíveis intervalos de renovação τ_x de cada x de $[0, 2^n]^d$. Como cada intervalo diz respeito ao evento J^c , os valores τ_x residem no intervalo $[b_{n-1}, 2b_{n-1}]$. Denotando por $\tilde{\mathbb{P}}$ a medida de probabilidade cujas marcas de renovação começam a partir de $(x, \tau_x - 2b_{n-1})$ o tratamento fornece

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{T}(B_n)) \leq \frac{C2^{dn}}{f(b_{n-1})} + \hat{\mathbb{P}}(G_0) \cdot \sup_{\{\tau_x\}} \tilde{\mathbb{P}}(G_0). \quad (3.72)$$

Ainda assim, é possível majorar ambos termos do produto por

$$\hat{\mathbb{P}}\left(T([0, 2^n]^d \times [0, b_{n-1}])\right). \quad (3.73)$$

Os esforços serão, a partir de agora, direcionados à obtenção de uma cota superior, minimamente satisfatória, para essa quantidade, mostrando a utilidade da fixação de a_n como 2^n .

A primeira observação a ser feita é a escala. Felizmente, o termo temporal está indexado por $(n-1)$, enquanto que o espacial, por n . Evidentemente o interesse será trazer

ambos para a escala $(n - 1)$ a fim de obter, dessa forma, a recursão mencionada no início da seção.

Prosseguindo com o reescalamamento é feita a divisão de cada dos d intervalos $[0, 2^n]$ em subintervalos de comprimento $[0, 2^{n-2}]$. Considere agora apenas um desses intervalos. É possível constatar que há três pares de tais subintervalos consecutivos. Mais especificamente, usando os quatro subintervalos de tamanho 2^{n-2} é possível formar três intervalos de tamanho 2^{n-1} , a saber: $[0, 2 \cdot 2^{n-2}]$, $[1 \cdot 2^{n-2}, 3 \cdot 2^{n-2}]$ e $[2 \cdot 2^{n-2}, 4 \cdot 2^{n-2}]$.

É possível indagar-se sobre a necessidade de sua consecutividade. Lembrando-se de que o caminho infeccioso viaja apenas entre vizinhos de proximidade imediata, o indagamento é sanado instantaneamente.

Assim, sendo implicada pela ocorrência de um cruzamento temporal em $[0, 2^n] \times [0, b_{n-1}]$ ou a permanência do caminho em algum dos três intervalos de comprimento 2^{n-1} ou sua "saída" durante algum instante t de $(0, b_{n-1})$, as desejadas estimativas são obtidas a seguir.

Considerando agora a caixa $[0, 2^n]^d$, ela é subdividida em 3^d subcaixas de comprimento 2^{n-1} . Denotando por v um vetor tomando valores em $\{0, 1, 2\}^d$ responsável pela localização da subcaixa, uma típica subcaixa é representada por

$$v2^{n-2} + [0, 2^{n-1}]^d. \quad (3.74)$$

Dessa forma, no caso da permanência do caminho em uma tal subcaixa haverá um cruzamento temporal de uma caixa na escala $(n - 1)$, cujo número de diferentes possibilidades é 3^d .

Reciprocamente, no outro caso, existem no máximo 3^{d-1} caixas na escala $(n - 1)$ nas direções complementares ao cruzamento, fazendo com que haja o meio cruzamento espacial de alguma das $2d$ subcaixas. Logo, o máximo número de possibilidades para tal cruzamento é de $2d \cdot 3^{d-1}$.

Portanto,

$$\hat{\mathbb{P}}\left(T([0, 2^n]^d \times [0, b_{n-1}])\right) \leq (3^d t_{n-1} + 2d \cdot 3^{d-1} h_{n-1}). \quad (3.75)$$

Assim, a presente subseção, através dos argumentos apresentados fornece a seguinte fórmula como desigualdade final

$$\tilde{t}_n \leq \frac{C2^{dn}}{f(b_{n-1})} + (3^d t_{n-1} + 2d \cdot 3^{d-1} h_{n-1})^2. \quad (3.76)$$

3.3.4 Relações entre escalas sucessivas espaciais.

Fazendo a observação de que um cruzamento espacial implica dois meio-cruzamentos espaciais e lembrando que os processos de Poisson são independentes é deduzido que

$$s_n \leq h_n^2. \quad (3.77)$$

Essa relação permite reduzir o estudo de um cruzamento espacial de $[0, 2^n]^d$ ao longo da primeira direção no estudo de um cruzamento ao longo da primeira direção de $[0, 2^{n-1}] \times [0, 2^n]^{d-1}$.

Ao longo desta seção, buscar-se-á meios similares àqueles da seção anterior a fim de estabelecer uma igualdade do mesmo tipo para um meio cruzamento espacial. O mesmo argumento anterior reduz o estudo de h_n ao de outra quantidade, cujo melhor tratamento será apreciado em breve, através de

$$h_n \leq \sup \hat{\mathbb{P}} \left(S_1([0, 2^{n-2}] \times [0, 2^n]^{d-1} \times [0, b_n]) \right)^2. \quad (3.78)$$

Inspirada na construção anterior, a construção desta seção também contará com intervalos de comprimento meio ou um quarto do original 2^n , levando então à introdução de uma nova notação.

$$B(l_1, \dots, l_d) := \left(\prod_{i=1}^d [0, 2^{n-l_i}] \right) \times [0, b_n], \quad (3.79)$$

onde $l_i \in 0, 1, 2$. Vale mencionar que o intervalo temporal será, de fato, fixado igual a $[0, b_n]$ para as análises sucedentes.

A principal observação é que, dada um certa direção j_0 e a ocorrência de uma cruzamento temporal de $B(2, 1, \dots, 0, \dots, l_d)$, ou o caminho fica restrito a uma subcaixa de comprimento 2^{n-1} nessa direção ou não.

Em caso afirmativo, há um cruzamento espacial ao longo da primeira coordenada que pode ocorrer de três formas distintas, número referente à quantidade de subcaixas de comprimento 2^{n-1} que podem conter o caminho.

Em caso negativo, há a garantia de um cruzamento espacial de uma subcaixa de comprimento 2^{n-2} ao longo da direção j_0 . Em outras palavras, o fato de o caminho exceder um intervalo de comprimento 2^{n-1} implica que ele cruzou uma das duas subcaixas de metade do comprimento, levando a duas possibilidades.

Combinando os parágrafos anteriores ao fato do modelo ser simétrico, os argumentos fornecem a estimativa

$$\hat{\mathbb{P}}(S_1(2, l_2, \dots, 0, \dots, l_d)) \leq 3\hat{\mathbb{P}}(S_1(2, l_2, \dots, 1, \dots, l_d)) + 2\hat{\mathbb{P}}(S_1(2, l_2, \dots, 2, \dots, l_d)). \quad (3.80)$$

Denotando por $a(l)$ a quantidade de dimensões cuja quantidade l_i vale 1 e, em seguida, observando que a ocorrência de um cruzamento espacial ao longo da primeira coordenada de uma caixa tal que $l_{j_0} = 2$ implica a ocorrência do mesmo evento numa caixa idêntica, a não ser por $l_{j_0} = 1$, a estimativa se desenvolve.

$$\hat{\mathbb{P}}(S_1(2, 0, \dots, 0)) \leq \sum_{l \in \{1, 2\}^{d-1}} \hat{\mathbb{P}}(S_1(2, l)) \cdot 3^{a(l)} \cdot 2^{d-1-a(l)} \quad (3.81)$$

$$\leq \hat{\mathbb{P}}(S_1(2, 1, \dots, 1)) \cdot 2^{d-1} \cdot \sum_{l \in \{1, 2\}^{d-1}} \left(\frac{3}{2}\right)^{a(l)} \quad (3.82)$$

$$\leq 6^{d-1} \cdot \hat{\mathbb{P}}(S_1(2, 1, \dots, 1)). \quad (3.83)$$

É feita a observação de que, a fim de obter a recorrência desejada, ainda falta ajustar a escala temporal, uma vez que a estimativa envolve a quantidade temporal b_n , e não b_{n-1} . Dessa forma, usando uma sobreposição de caixas de escala menor é possível *cobrir* a caixa da escala b_n , isto é,

$$\hat{\mathbb{P}}(S_1(2, 1, \dots, 1)) \leq 2 \left\lceil \frac{b_n}{b_{n-1}} \right\rceil \cdot (h_{n-1} + \tilde{t}_{n-1}). \quad (3.84)$$

Combinando as quantidades, a estimativa procurada é encontrada. Em outras palavras,

$$h_n \leq 4 \cdot 36^{d-1} \cdot \left\lceil \frac{b_n}{b_{n-1}} \right\rceil^2 \cdot (h_{n-1} + \tilde{t}_{n-1})^2. \quad (3.85)$$

3.3.5 Demonstração do teorema.

Tendo feito a definição das principais quantidades, estabelecido as essenciais desigualdades e desenvolvido um diálogo entre esses termos, a demonstração do fato que o processo não se perpetua para λ pequeno se configura possível e à curta distância.

Tomando como base a relação de recorrência estabelecida entre as quantidades h_n e \tilde{t}_n , será definido um termo que incorpora ambas as quantidades de modo que sua majoração implicará a majoração de ambas, simultaneamente. Seja

$$u_n := h_n + \tilde{t}_n. \quad (3.86)$$

As relações estabelecidas nas duas seções anteriores podem ser aplicadas neste momento e conduzirão à estimativa

$$u_n \leq C(d) \cdot \left(\frac{b_n}{b_{n-1}} \right)^2 \cdot u_{n-1}^2 + \frac{C(\mu, \theta) 2^{dn}}{f(b_{n-1})}. \quad (3.87)$$

Fazendo a função f enunciada na desigualdade como $f(x) := e^{\theta(\log x)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{1}_{\{x \geq 1\}}$, a escolha dos termos b_n que garantirão a aproximação de 0, ao passo que n cresce, pode ser dada por $e^{(\alpha/\theta)^2 n^2}$. Isso implica que

$$f(b_{n-1}) = e^{(n-1)\alpha}. \quad (3.88)$$

Dessa forma, o parâmetro α está relacionado ao decaimento do segundo termo do lado direito de (3.87), que conduz a

$$u_n \leq C(d) \left(\frac{b_n}{b_{n-1}} \right)^2 \cdot u_{n-1}^2 + C(\mu, \theta) \exp[(d \ln 2)n - \alpha(n-1)]. \quad (3.89)$$

Além disso, é possível concluir daí que o decaimento de u_n não pode ser maior do que $e^{(n-1)\alpha}$. Assim, é realizada a suposição de que para algum n_0 fixado existe β satisfazendo $0 < \beta < \alpha$ tal que $u_{n_0-1} \leq e^{-(n_0-1)\beta}$. Sob essa hipótese a estimativa pode ser desenvolvida em

$$u_{n_0} \leq \left(C(d, \alpha, \beta, \theta) e^{[4(\alpha/\theta)^2 - \beta]n_0} + C(\mu, \alpha, \theta) e^{(\beta + d \log 2 - \alpha)n_0} \right) e^{-\beta n_0}. \quad (3.90)$$

Evidentemente, é desejado que os expoentes das duas exponenciais dentro dos parênteses sejam negativos. Para que isso seja verdade, é necessário que duas equações sejam satisfeitas.

$$\begin{cases} \theta^2 > \frac{4\alpha^2}{\beta}, \\ \alpha > \beta + d \ln 2. \end{cases} \quad (3.91)$$

Além da necessidade de satisfação de 3.91 pelos parâmetros, sua escolha deve ser feita de modo que θ seja o menor possível, já que isso implica num intervalo maior de possível escolha para esse parâmetro e, por conseguinte, aumenta a família de funções que satisfarão o teorema.

Através da combinação de ambas desigualdades e de uma aplicação da desigualdade das médias a seguinte relação é obtida.

$$\theta^2 > 4\left(\sqrt{\beta} + \frac{d \ln 2}{\sqrt{\beta}}\right)^2 \geq 16d \ln 2. \quad (3.92)$$

Essa relação justifica a condição imposta sobre θ na enunciação do teorema, isto é, $\theta > 4\sqrt{d \log 2}$.

Além disso, essa equação também explica o motivo que β será tomado como $d \log 2$. Isso faz com que o intervalo de definição de θ seja o maior possível.

Quanto a α , ele será definido através da média entre seus limites inferior e superior, os quais indicam uma desigualdade estrita. A saber.

$$2d \ln 2 < \alpha < \sqrt{\frac{\theta^2 d \ln 2}{4}}. \quad (3.93)$$

Portanto, α é tomado como $\frac{1}{2}\left(2d \log 2 + \sqrt{\frac{\theta^2 d \log 2}{2}}\right)$.

Até agora foram estabelecidos valores para os parâmetros α , θ e β que garantem a negatização dos expoentes das exponencias dentro dos parênteses de 3.90 sob a hipótese de que $u_{n_0-1} \leq e^{-\beta(n_0-1)}$.

Por sua vez, tal garantia implica que se o tal n_0 fixado é suficientemente grande, então

$$\begin{cases} C(d, \alpha, \beta, \theta)e^{[4(\alpha/\theta)^2 - \beta]n} & \leq \frac{1}{4}, \\ C(\mu, \theta, \alpha)e^{(\beta + d \ln 2 - \alpha)n} & \leq \frac{1}{4}, \end{cases} \quad (3.94)$$

para todo n maior o igual que $(n_0 - 1)$.

Essas desigualdades combinadas com 3.90 garantem que $u_{n_0} \leq e^{-n_0\beta}$ e que, portanto, é possível realizar um argumento indutivo.

Agora o objetivo é mostrar que, de fato, a hipótese realizado sobre u_{n_0} é satisfeita.

A fim de lidar tanto com um meio-cruzamento espacial quanto com um meio-cruzamento temporal será introduzido um evento que será útil no tratamento de ambos.

Dado n_0 fixado e o evento H definido como {não há transmissão da infecção em B_{n_0-1} }. Afirma-se que existe um valor $\lambda(n_0)$ tal que a probabilidade de H se encontra suficien-

temente próxima de 1 para todo λ maior ou igual a $\lambda(n_0)$. De fato, denotando por N o número de arestas de $[0, 2^{n_0-1}]^d$,

$$\hat{\mathbb{P}}(H) = e^{-\lambda b_{n_0-1} \cdot N} \rightarrow 1. \quad (3.95)$$

A principal estimativa a ser obtida diz respeito a um meio-cruzamento espacial. Com efeito, se há um meio cruzamento espacial, então há pelo menos uma transmissão da infecção. Daí,

$$h_{n_0-1} \leq \hat{\mathbb{P}}(H^c) \leq 1 - e^{-\lambda b_{n_0-1}}. \quad (3.96)$$

A segunda estimativa a ser obtida diz respeito a um meio-cruzamento temporal. É feita a observação de que um meio-cruzamento temporal \tilde{t}_{n_0-1} pode ser dividido em dois casos. Um deles envolve a ocorrência da transmissão da infecção e outro na sua não ocorrência, que por sua vez implica na sobrevivência da infecção num único sítio por um intervalo de comprimento $\frac{b_{n_0-1}}{2}$. Através do evento $J = J_{n_0-1}(t, \frac{b_{n_0-1}}{2})$ essa última quantidade pode ser tratada, levando a

$$\tilde{t}_{n_0-1} \leq \hat{\mathbb{P}}(H^c) + \hat{\mathbb{P}}(H \cap J) \quad (3.97)$$

$$\leq 1 - e^{-\lambda b_{n_0-1}} + \frac{1}{4} e^{-\beta(n_0-1)}, \quad (3.98)$$

onde o segundo termo da segunda linha vem de [3.94](#).

O artigo original faz um pequeno erro ao considerar o evento $J_{n_0-1}(t, b_{n_0-1})$ para estimar a probabilidade de um semi-cruzamento na escala n_0 . Na verdade, ele deveria ser estimado pelo evento $J_{n_0-1}(t, b_{n_0-1}/2)$. Pequenas adaptações precisam ser feitas para ajustar as estimativas, mas o resultado final continua válido.

A seguinte desigualdade garante que $u_{n_0-1} \leq e^{-(n-1)\beta}$, o que conclui o argumento indutivo e demonstra o teorema.

$$\max\{h_{n_0-1}, \tilde{t}_{n_0-1}\} \leq \sup\{\hat{\mathbb{P}}(H^c) + \hat{\mathbb{P}}(H \cap J)\} \quad (3.99)$$

$$\leq \left(1 - e^{-\lambda b_{n_0-1}}\right) + \left(\frac{1}{4} e^{-\beta(n_0-1)}\right) \quad (3.100)$$

$$\leq \frac{1}{2} e^{-\beta(n_0-1)}. \quad (3.101)$$

3.4 Sobre o Processo de Contato sob Renovações *à la* SIS.

Nesta seção, mais uma variação do Processo de Contato será apresentada, incluindo uma condição suficiente para que o parâmetro crítico seja positivo, inspirada no *Teorema 1* de [6].

Dessa vez a dinâmica tomará lugar em \mathbb{Z}^d . Cada sítio pertencerá a apenas um de dois estados: saudável e infectado. Os sítios infectados transmitem a infecção para cada um de seus vizinhos a uma taxa λ . A duração da infecção começa a contar a partir do instante da infecção do sítio e é representada por uma medida μ . É justamente por essa propriedade que o modelo é dito do caso *SIS*. Na literatura de modelagem epidemiológica é assim que são batizados os modelos que satisfazem essa propriedade.

3.4.1 Sobre a positividade do parâmetro crítico.

No cenário de um modelo *SIS* definido em \mathbb{Z}^d cuja variável responsável pelo intervalo de duração da infecção possui primeiro momento finito com média m e as arestas de \mathbb{Z}^d responsáveis pela transmissão da infecção segue uma exponencial de parâmetro λ , então λ_c é positivo.

A demonstração desse resultado está baseada na utilização de processos de ramificação. Esses processos aproximam por cima o número de descendentes. Dessa forma, uma condição suficiente para que o processo de ramificação seja extinto também implica a extinção do processo *SIS*.

Primeiro é feita a definição do que significa um *intervalo infeccioso*. Considera-se como um intervalo infeccioso um subconjunto de $\{x\} \times \mathbb{R}_+$ da forma $\{x\} \times J$, onde x é um sítio de \mathbb{R}^d e J é um intervalo de \mathbb{R}_+ tal que para todo t de J , a origem $(0, 0)$ se conecta a (x, t) , de modo que J é assumido o intervalo maximal com tal propriedade. Dessa forma, dado um intervalo infeccioso I , pode-se denotar por $\{x\} \times [s_I, t_I)$, considerando s_I o instante da infecção do sítio em questão e t_I o instante de sua cura.

É introduzido a codificação de intervalos. Adota-se a convenção que ao intervalo que contem $(0, 0) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}_+$ é atribuído como índice \emptyset . Os códigos aos intervalos seguintes são atribuídos de forma recursiva. Um típico intervalo infeccioso $\{x\} \times [s_I, t_I)$ recebe o código (i_1, \dots, i_k) quando ele foi a i_k -ésima infecção do sítio, diga-se, y no instante s_I de modo que $\{y\} \times [s_I, t_I)$ é elemento do intervalo infeccioso $\{y\} \times I'$ codificado por (i_1, \dots, i_{k-1}) .

Adotando a convenção de que $N^0 = \emptyset$, considera-se a família $X_{\tilde{i}}$ de variáveis aleatórias cujos índices tomam valores em $\bigcup_{k=0}^{\infty} N^k$. A variável $X_{\tilde{i}}$ representa o número de infecções que o intervalo codificado por \tilde{i} emite. Evidentemente, essa coleção de variáveis

constitui um processo de renovação.

Levando em consideração que o intervalo de infecção possui média m , um sítio de \mathbb{Z}^d possui $2d$ vizinhos e taxa de transmissão é λ ,

$$\mathbf{E}\left[\sum_{(i_1, \dots, i_k)} X_{(i_1, \dots, i_k)}\right] = (2d\lambda m)^{k+1}. \quad (3.102)$$

Portanto, se $\lambda \leq 1/(2dm)$ o processo *SIS* chega à extinção quase certamente.

4 Conclusões.

Este trabalho permitiu ao aluno ter contato com temas de pesquisa tanto clássicos quanto recentes. Tendo sido estudadas algumas variações do Processo de Contato é possível elaborar uma lista de possíveis direções nas quais próximos passos podem ser dados. Três dessas possíveis direções serão agora mencionadas.

O estudo de modelos epidêmicos que envolvam Equações Diferenciais Estocásticas se mostra atrativo ao passo que a construção de dinâmicas mais verossímeis se caracteriza possível. Evidentemente, nem sempre um tratamento analítico é factível, o que não necessariamente é algo negativo, já que a busca por abordagens numéricas são altamente positivas num mundo globalizado que a cada momento *exige* de seus habitantes habilidades de programação.

Outra possível direção é o aprofundamento teórico em questões relacionadas a outros Sistemas de Partículas markovianos, como o Processo de Exclusão, por exemplo. Ainda tendo esse Processo Estocástico em mente é possível fazer um diálogo com outros temas de pesquisa, como Equações Diferenciais Parciais Estocásticas. Um bom exemplo que faz parte dessa classe de equações é a *Equação KPZ*. Ela está relacionada a uma Classe de Universalidade, a mesma em que o Processo Simples de Exclusão Totalmente Assimétrico se encontra.

Por fim, outra opção é seguir se aprofundando em temas relacionados ao RCP, buscando novas relações entre quantidades, diferentes condições para a satisfação de teoremas e até mesmo o estudo de variações adjacentes do modelo.

Referências

- [1] Hakan Andersson and Tom Britton. *Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis*, volume 151. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Carol Bezuidenhout and Geoffrey Grimmett. The critical contact process dies out. *The Annals of Probability*, 18(4):1462–1482, 1990.
- [3] Richard Durrett. On the Growth of One Dimensional Contact Processes. *The Annals of Probability*, 8(5):890 – 907, 1980.
- [4] Richard Durrett and David Griffeath. Supercritical contact processes on \mathbb{Z} . *The Annals of Probability*, pages 1–15, 1983.
- [5] Luiz Renato Fontes, Thomas S. Mountford, Daniel Ungaretti, and Maria Eulália Vares. Renewal contact processes: phase transition and survival. *arXiv*, 2021.
- [6] Luiz Renato Fontes, Thomas S. Mountford, and Maria Eulália Vares. Contact process under renewals ii. *Stochastic Processes and their Applications*, 130(2):1103–1118, 2020.
- [7] Luiz Renato G. Fontes, Domingos H.U. Marchetti, Thomas S. Mountford, and Maria Eulalia Vares. Contact process under renewals i. *Stochastic Processes and their Applications*, 129(8):2903–2911, 2019.
- [8] C. M. Fortuin, J. Ginibre, and P. W. Kasteleyn. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Communications in Mathematical Physics*, 22(2):89 – 103, 1971.
- [9] Geoffrey Grimmett. *Percolation*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [10] T. E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 56(1):13–20, 1960.
- [11] Theodore E Harris. Contact interactions on a lattice. *The Annals of Probability*, 2(6):969–988, 1974.
- [12] Thomas M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.

- [13] Thomas Milton Liggett and Thomas M Liggett. *Interacting particle systems*, volume 2. Springer, 1985.
- [14] Achillefs Tzioufas. The central limit theorem for supercritical oriented percolation in two dimensions. *Journal of Statistical Physics*, 171(5):802–821, 2018.