INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRJ

Propriedades das soluções liouvillianas de campos polinomiais complexos

Bryan Hugo Mejia Enriquez

Rio de Janeiro, Brasil

10 de Agosto de 2022

Propriedades das soluções liouvillianas de campos polinomiais complexos

Bryan Hugo Mejia Enriquez

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

Rio de Janeiro, Brasil

10 de Agosto de 2022

CIP - Catalogação na Publicação

E516p

Enriquez, Bryan Hugo Mejia
Propriedades das soluções liouvillianas de campos polinomiais complexos / Bryan Hugo Mejia Enriquez. - Rio de Janeiro, 2022.
66 f.

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2022.

1. Função liouvilliana. 2. integral primeira liouvilliana. 3. álgebra diferencial. 4. campos vetoriais analíticos. I. Scárdua, Bruno César Azevedo, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Bryan Hugo Mejia Enriquez

Propriedades das soluções liouvillianas de campos polinomiais complexos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado por

Prof. Dr. Bruno César Azevedo Scárdua, UFRJ
Orientador

Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León, UNILA

Prof. Dr. Fernando Pereira Paulucio Reis, UFES

Prof. Dr. Leonardo Meireles Câmara, UFES

Rio de Janeiro, Brasil
10 de Agosto de 2022

Aos meus pais.

Agradecimentos

A meus pais Hugo Mejia e Norma Enriquez, por terem sempre incentivado a estudar e por terem acreditado em mim.

As minhas irmãs Betsabe Mejia e Hassmin Mejia, e o meu irmão Victor Mejia pelo apoio incondicional.

A minha namorada Benazir, por ter me dado força e motivação necessária ao longo deste trabalho.

A meus amigos Gilbert Barrera, Manuel Saavedra, Rafael Santiago, Natália Stanescon, Alexander Cantoral, Erik Rojas, Eric Cabezas e Carlos Alvarez pela amizade e por terem me ajudado em distintos momentos da minha formação académica, sou muito grato por isto.

Aos professores Víctor Arturo Martínez León, Leonardo Meireles Câmara, Fernando Pereira Paulucio Reis por aceitarem participar da banca, e pelas sugestões feitas para melhorar minha dissertação.

A PEC-PG(CAPES) pelo apoio financeiro.

A meu orientador Bruno Scárdua, pela orientação, tempo e paciência. Pelas conversas de matemática que tive com ele, sempre fiquei admirado e motivado pelos seus conhecimentos.

Finalmente quero agradecer especialmente ao professor Víctor León, pelo apoio e conselhos ao longo da dissertação que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Nesta dissertação temos como objetivo explicar com mais detalhes os resultados obtidos por Michael Singer no artigo "Liouvillian first integrals of differential equations" publicado na revista Transactions of the American Mathematical Society em 1992, [17]. Este artigo tem mais de 300 citações. Portanto é importante fazer uma revisão detalhada do mesmo. Funções liouvillianas são funções que são construídas a partir de funções racionais usando exponenciação, integração e funções algébricas. O autor mostra que se um sistema de equações diferenciais tem uma solução genérica que satisfaz uma relação liouviliana (ou seja, existe uma função liouvilliana de várias variáveis que se anulam na curva definida por esta solução) então o sistema tem uma integral primeira liouviliana (ou seja, uma função liouvilliana não constante que é constante nas curvas de solução em algum conjunto aberto não vazio). É possível refinar esse resultado em casos especiais para mostrar que a integral primeira deve ter uma forma muito especial. Também, nesse artigo o autor dá uma redemonstração de um antigo resultado devido a Ritt [11, 12] afirmando que uma equação diferencial linear de segunda ordem tem uma solução não constante satisfazendo uma relação liouviliana se, e só se, todas as suas soluções são liouvilianas.

Palavras-chave: Função liouvilliana, integral primeira liouvilliana, álgebra diferencial, campos vetoriais analíticos.

Abstract

In this dissertation our goal is to explain in more detail the results presented by Michael Singer in the article "Liouvillian first integrals of differential equations" published in the journal Transactions of the American Mathematical Society in 1992, [17]. This article has more than 300 citations. Therefore it is important to make a detailed review of it. Liouvillian functions are functions that are built up from rational functions using exponentiation, integration, and algebraic functions. The author shows that if a system of differential equations has a generic solution satisfying a Liouvillian relation (that is, there exists a Liouvillian function of several variables vanishing on the curve defined by this solution) then the system has a Liouvillian first integral (that is, a non-constant Liouvillian function that is constant on solution curves in some non-empty open set). It is possible to refine this result in special cases to show that the first integral must have a very special form. Also in this article the author gives a redemonstration of an old result of Ritt [11, 12] is affirming that a second order linear differential equation has a non-constant solution satisfying a Liouvillian relation if and only if all of its solutions are Liouvillian.

Keywords: liouvillian function, liouvillian first integrals, differential algebra, analytic vector fields.

Sumário

1 INTRODUÇÃO 15

2 PRELIMINARES 19
2.1 Funções analíticas em abertos de $\mathbb{C}^n$ 19
2.2 Campo vetoriais complexos 22
2.3 O K-modulo $\Omega_{K/k}$ 24
2.4 Extensão de corpos 26
2.5 O resultante de polinômios 28

3 ÁLGEBRA DIFERENCIAL 29
3.1 Extensões diferenciais 29
3.2 Extensões liouvillianas 38

4 INTEGRAIS PRIMEIRAS LIOUVILLIANAS 39
4.1 Relações liouvillianas e integrais primeiras 39
4.2 Campos vetoriais planos 47
4.3 Equações diferenciais lineares 49
4.4 O Teorema de Darboux 53

5 DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS PRINCIPAIS 59

REFERÊNCIAS 65

1 Introdução

Nos cursos elementares de equações diferenciais, consideramos sistemas da forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= P(x,y), \\ \frac{dy}{dz} &= Q(x,y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde P e Q são polinômios em $\mathbb{C}(x,y)$, sendo $\mathbb{C}$ os números complexos. Aprendemos que, embora nem sempre possamos resolver explicitamente esse sistema, ocasionalmente podemos encontrar as integrais primeiras, ou seja, funções não constantes $F(x,y)$, analíticas em algum conjunto aberto não vazio em $\mathbb{C}^2$, que são constantes nas curvas de solução desse conjunto. Para fazer isso, consideramos a 1-forma diferencial $Q(x,y)dx - P(x,y)dy$ associada ao sistema (1.1).

1. Se $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, então $F(x,y) = \displaystyle\int Qdx - Pdy$ será uma integral primeira de (1.1).
2. Se $\dfrac{\partial P}{\partial x} \neq -\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, aprendemos métodos pontuais para encontrar um fator de integração, que é uma função $R(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial (RP)}{\partial x} = -\frac{\partial (RQ)}{\partial y}.$$

   Caso possamos encontrar tal função R, $F(x,y) = \displaystyle\int RQdx - RPdy$ será uma integral primeira de (1.1). Por exemplo, se $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial x}\right)$ é independente de y, então $R = \exp\left(-\displaystyle\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x}\right)dx\right)$ será um fator de integração.

Surge uma pergunta natural:

Quando o sistema (1.1) tem uma integral primeira que pode se expressa em termos das funções conhecidas por um estudante de cálculo (ou seja, aquelas funções que podem ser construídas usando integração, exponenciação e operações algébricas de funções racionais; veja a Seção 4.1 para uma definição precisa dessas funções - as funções liouvillianas) como encontrar tal integral?

Para responder à primeira parte desta questão, Singer mostra o seguinte

Teorema 1.1 (Teorema 5.1)**.** Seja $P(x,y), Q(x,y)$ polinômios em duas variáveis e seja $(\overline{x}(t), \overline{y}(t))$ uma solução de (1.1) a qual é analítica em algum aberto não vazio $\mathscr{O} \subset \mathbb{C}$. Se

existe uma função liouvilliana não zero $F(x,y)$ analítica em algum aberto de $\mathbb{C}^2$ contendo $\mathscr{G} = \{(\overline{x}(z), \overline{y}(z));\ z \in \mathscr{O}\}$, e $F|_{\mathscr{G}} \equiv 0$, então temos que uma e só uma das seguintes afirmações é valida:

1. Existe G polinômio não nulo tal que $G(\overline{x}(z), \overline{y}(z)) = 0$.
2. A forma diferencial $Q(x,y)dx - P(x,y)dy$ tem um fator integrante da forma
$$R(x,y) = \exp\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} U(x,y)dx + V(x,y)dy\right], \tag{1.2}$$
onde U, V são funções racionais com $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x}$ tal que essa integral de linha é bem definida.

Como consequência deste teorema se deduz o seguinte corolário.

Corolário 1.2 (Corolário 5.2)**.** O sistema de equações diferenciais (1.1) tem uma integral primeira liouvilliana se, e só se, a forma diferencial $Q(x,y)dx - P(x,y)dy$ tem um fator integrante da forma (1.2). Nesse caso
$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} R(x,y)Q(x,y)dx - R(x,y)P(x,y)dy$$
é uma integral primeira liouvilliana.

Observe que (1.1) pode ter uma integral primeira liouviliana sem ter soluções liouvilianas não constantes. Um exemplo disso é o sistema
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= xy - x^2, \\ \frac{dy}{dz} &= y^2, \end{aligned}$$
que tem a integral primeira liouvilliana $y - \exp\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (ver [13]). Em contraste a isso, Singer redemonstra o seguinte resultado de Ritt [11, 12].

Teorema 1.3 (Teorema 5.4)**.** Seja $\overline{y}(z)$ uma solução não nula de $L(y) := y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$, onde $p(z)$ e $q(z)$ são funções liouvillianas de z, e suponha que $\overline{y}(z), p(z)$ e $q(z)$ são analíticas em algum aberto $\mathscr{O}$. Se existe uma função liouvilliana não nula F de três variáveis analíticas em algum aberto $U \subset \mathbb{C}^3$, contendo $\mathscr{G} = \{(z, \overline{y}(z), \overline{y}'(z));\ z \in \mathscr{O}\}$ e $F|_{\mathscr{G}} = 0$ então $y(z)$ é uma função liouvilliana de z.

Por uma primeira integral liouvilliana de uma equação diferencial de ordem n, queremos dizer uma função liouviliana F diferente de zero de n-variáveis analíticas em um subconjunto aberto não vazio $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}^n$ tal que $F(z, \overline{y}(z), \overline{y}'(z), \ldots, \overline{y}^{(n-1)}(z))$ é constante para qualquer solução $\overline{y}(z)$ da equação diferencial sempre que $(z, \overline{y}(z), \overline{y}'(z), \ldots, \overline{y}^{(n-1)}(z))$ está em $\mathcal{U}$. Como corolário, temos o seguinte resultado referente às integrais primeiras liouvilianas.

Corolário 1.4 (Corolário 5.6)**.** Sejam $p(z)$ e $q(z)$ funções liouvillianas. Se $L(y) = y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$ tem uma integral primeira liouvilliana, então todas as soluções de $L(y) = 0$ são liouvillianas. Se $L(y) = 0$ tem uma solução liouvilliana não nula, então essa equação tem uma integral primeira liouvilliana.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos.

O Capítulo 2 contém definições utilizadas nos capítulos seguintes e necessárias para o entendimento do texto, por exemplo, o conceito de funções analíticas, campos vetoriais complexos, extensão de corpos e o resultante de polinômios.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo da álgebra diferencial enfatizando os conceitos de extensões diferenciáveis e extensões liouvillianas.

No Capítulo 4 apresentamos as ferramentas necessárias para compreender e demonstrar os teoremas principais.

Na Seção 4.1, damos uma definição formal de uma função liouviliana, relação liouviliana e primeira integral liouviliana. Mostramos que se um sistema de equações diferenciais tem uma solução suficientemente genérica que satisfaz uma relação liouviliana, então o sistema tem uma primeira integral liouviliana (Proposição 4.4). Também derivamos uma consequência algébrica (Proposição 4.8) de tal evento. A Proposição 4.8 será a principal ferramenta técnica deste trabalho. A Seção 4.2 é dedicada às integrais primeiras de campos vetoriais planares, mostrando alguns lemas algorítmicos que serão utilizados na prova do Teorema 5.1 e do Corolário 5.2. A Seção 4.3 é dedicada às integrais primeiras de equações diferenciais lineares onde mostramos alguns resultados utilizados na prova do Teorema 5.4 e do Corolário 5.6. A Seção 4.4 apresentamos uma demonstração detalhada de um Teorema de Darboux que é usado neste artigo.

No capítulo 5 demonstramos os resultados principais deste trabalho assim como suas consequências.

2 Preliminares

2.1 Funções analíticas em abertos de $\mathbb{C}^n$

O corpo dos números reais sera denotado por $\mathbb{R}$ e o corpo dos números complexos por $\mathbb{C}$. Ambos são espaços topológicos com propriedades bem conhecidas. $\mathbb{C}^n$ denota o n-espaço vetorial complexo, o qual identifica-se com o produto cartesiano $\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ de n cópias do plano complexo, ou com o espaço euclideano $\mathbb{R}^{2n}$ de dimensão $2n$. Um ponto de $\mathbb{C}^n$ é denotado por $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, onde $z_j = x_j + iy_j$, com x_j, y_j números reais e $i = \sqrt{-1}$. A seguir, consideramos duas bases especiais para os subconjuntos abertos particularmente úteis ao se considerar a topologia usual de $\mathbb{C}^n$.

Definição 2.1. Um **polidisco aberto** em $\mathbb{C}^n$ é um subconjunto da forma

$$\Delta(A; R) = \{Z \in \mathbb{C}^n;\ |z_j - a_j| < r_j \text{ , para cada } j = 1, \cdots, n\}$$

onde $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ é chamado **centro do polidisco**, e $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ é chamado seu **poliraio**. Note que um polidisco é um produto cartesiano de n discos abertos em $\mathbb{C}$. Quando $r_1 = \ldots = r_n = r$, este valor comum r é também chamado de **raio do polidisco**, nesse caso o polidisco é denotado por $\Delta(A; r)$.

Definição 2.2. Uma **bola aberta** em $\mathbb{C}^n$ é um subconjunto da forma

$$B(A; r) = \{Z \in \mathbb{C}^n;\ \sum_{j=1}^{n} |z_j - a_j| < r\}$$

onde $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ é chamado **centro da bola**, e $r \in \mathbb{R}_+$ é chamado seu **raio**. Este conjunto é, naturalmente, uma bola no sentido usual em termos da métrica euclidiana $||Z - A|| = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j - a_j|^2 \right)^{1/2}$.

O **polidisco fechado** $\overline{\Delta}(A; R)$ e a **bola fechada** $\overline{B}(A; r)$, são definidos respectivamente por

$$\overline{\Delta}(A; R) = \{Z \in \mathbb{C}^n;\ |z_j - a_j| \leq r_j \text{ , para cada } j = 1, \cdots, n\}$$

e

$$\overline{B}(A; r) = \{Z \in \mathbb{C}^n;\ \sum_{j=1}^{n} |z_j - a_j| \leq r\}.$$

Definição 2.3. Uma função $f : D \to \mathbb{C}$ em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{C}^n$ é **analítica em** D se cada ponto $A \in D$ admite uma vizinhança aberta U tal que a f pode ser escrita em termos da série de potência

$$f(Z) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty} c_{i_1, \ldots, i_n} (z_1 - a_1)^{i_1} \ldots (z_n - a_n)^{i_n}$$

a qual converge para todo $Z \in U$. O conjunto das funções analíticas em D será denotado por $\mathscr{H}(D)$.

Lema 2.4 (**Lema de Osgood**, Lema 2 do Capítulo A em [2])**.** Se uma função de valor complexo é continua num subconjunto aberto $D \subset \mathbb{C}^n$ e é analítica em cada variável separada, então é analítica em D.

Exemplo 2.5. Seja $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dada por $f(z_1, z_2) = z_1 e^{z_2} + (z_1 - 7)(z_2 + 3)$. Uma vez que f é analítica em cada variável separada, pelo Lema 2.4 temos que é analítica em $\mathbb{C}^2$.

Algumas propriedades são válidas como no caso de uma variável complexa. Podemos ver isso na seguente lista de teoremas

Teorema 2.6 (**Teorema da Identidade**, Teorema 3 do Capítulo A em [2])**.** Se f,g são funções analíticas num aberto e conexo $D \subset \mathbb{C}^n$ e se $f(Z) = g(Z)$ para todo ponto Z num subconjunto aberto e não vazio $U \subset D$, então $f(Z) = g(Z)$ para todo Z em D.

Teorema 2.7 (**Teorema do módulo máximo**, Teorema 4 do Capítulo A em [2])**.** Se f é analítica num conjunto aberto e conexo $D \subset \mathbb{C}^n$ e se existe um ponto $A \in D$ tal que

$$|f(Z)| \leq |f(A)|$$

para todo ponto Z em alguma vizinhança de A, então $f(Z) = f(A)$ para todo $Z \in D$.

É conveniente introduzir aqui os operadores diferenciais parciais lineares de primeira ordem

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Como é bem conhecido, o critério clássico de Cauchy-Riemann diz que uma função de valor complexo continuamente diferenciável $f(x_i, y_i)$ de duas variáveis reais é uma função analítica de $z_j = x_j + y_j$ se $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = 0$ em toda a região de definição da função; para uma função analítica $f(z_j)$, a expressão $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ coincide com a derivada complexa de f. Essas asserções se estendem imediatamente a funções de várias variáveis. Portanto, pelo Lema 2.4, uma função $f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ continuamente diferenciável num domínio $D \subset \mathbb{C}^n$ é analítica em D quando $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_n} = 0$ em todo D. É costume referir-se a essas equações como as **equações de Cauchy-Riemann para várias variáveis**.

Definição 2.8. *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$, uma **1-forma analítica** definida em U é uma função*

$$\begin{aligned} \omega : \ U &\to (\mathbb{C}^n)^* \\ q &\to w(q) \end{aligned}$$

onde $(\mathbb{C}^n)^* = \{f : \mathbb{C}^n \to C;\ f \text{ é linear}\}$. assim $\omega(q)$ é um funcional linear.

Dada uma 1-forma analítica ω em U, pode-se escrever

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j dz_j$$

onde $a_j : U \to \mathbb{C}$ são funções analíticas em U.

Definição 2.9. *Sejam ω,ν 1-formas analíticas em U, podemos escrever*

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j dz_j \quad e \quad \nu = \sum_{j=1}^{n} b_j dz_j$$

Definimos o produto exterior de ω e ν como

$$\omega \wedge \nu = \sum_{j,k} a_j b_k dz_j \wedge dz_k$$

Proposição 2.10. *Sejam ω, ν e θ 1-formas analíticas em U, então são satisfeitas as seguintes propriedades:*

- $\omega \wedge \nu = -\nu \wedge \omega$.
- $\omega \wedge \nu = 0$ *se* $\omega = \nu$.
- $(\omega \wedge \nu) \wedge \theta = \omega \wedge (\nu \wedge \theta)$.
- $\omega \wedge (\nu + \theta) = \omega \wedge \nu + \omega \wedge \theta$.

Definição 2.11. Num subconjunto $D \subset \mathbb{R}^d$ com coordenadas $x_1, \ldots, x_d$ uma **forma diferencial** ψ de grau r pode ser escrita explicitamente como

$$\psi = \sum_{J} \psi_{j_1,\ldots,j_r} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_r}$$

para alguns funções $\psi_{j_1,\ldots,j_r}$ definidas em D, onde $J \subset \{(a_1, \ldots, a_r) \in {I_d}^r;\, a_1 < \ldots < a_r\}$. ψ é de valor real ou valor complexo se os $\psi_{j_1,\ldots,j_r}$ de valor real ou valor complexo respectivamente.

Definição 2.12. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ um aberto e sejam $0 \leq p, q \leq n$. Dizemos que ω é uma **forma diferencial do tipo** (p, q) se

$$\omega = \sum_{|\alpha|=p, |\beta|=q} \omega_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta. \tag{2.1}$$

1. *$\partial\omega$ é dado por*

$$\partial w = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial w_{\alpha\beta}}{\partial z_j} dz_j \wedge dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta.$$

2. *Dizemos que uma forma ω é* ∂***-fechada*** *quando*

$$\partial\omega = 0.$$

3. *Para o caso quando $q = 0$, dizemos que ω é uma p-**forma analítica** se os coeficientes são funções analíticas.*

Lema 2.13 (Lema 6.3.4 em [6])**.** Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um polidisco. Seja γ uma p-forma analítica ∂-fechada em U, $0 \leq p \leq n$. Então existe uma $(p-1)$-forma analítica em U tal que $\partial u = \gamma$.

2.2 Campo vetoriais complexos

Definição 2.14. Seja $U \subset \mathbb{C}^n$, um **campo vetorial complexo** é um mapa

$$\begin{aligned} X : U &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (w_1, \ldots, w_n) &\longmapsto (X_1(w_1, \ldots, w_n), \ldots, X_n(w_1, \ldots, w_n)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dizemos que X é **analítico** se $X_i : U \to \mathbb{C}$ é analítico.

O sistema diferencial complexo associado a X é

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dz} &= X_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dz} &= X_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Definição 2.15. Dizemos que φ é uma **solução** do sistema (2.3) no aberto $V \subset \mathbb{C}$, se

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : V &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \end{aligned}$$

é analítica em V tal que para todo $t \in V$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dz}(t) &= X_1(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ &\vdots \\ \frac{d\varphi_n}{dz}(t) &= X_n(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)). \end{aligned} \tag{2.4}$$

As soluções do sistema (2.3) também são chamadas **curvas integrais** de X.

Teorema 2.16 (Teorema de existência e unicidade, Teorema 8.1 em [1])**.** Sejam $z_0 \in \mathbb{C}, w_0 \in \mathbb{C}^n$ e assumindo que f é analítica e limitada num aberto $R_2 = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n;\ |z - z_0| < a, |w - w_0| < b\}$,onde $a, b > 0$, e tomando

$$M = \sup_{(z,w)\in R_2} |f(z, w)|, \quad \alpha = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

temos que existe em $|z - z_0| < \alpha$ uma única função analítica ϕ a qual é solução de

$$w' = f(z, w)$$

satisfazendo $\phi(z_0) = w_0$.

Dizemos que o campo vetorial (2.2) é **polinomial** se os X_i são polinômios complexos em n variáveis, para todo $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 2.17. Sejam P, Q polinômios em $\mathbb{C}(x, y)$ então o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dz} &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{2.5}$$

esta associado a um campo polinomial complexo.

Definição 2.18. *A 1-forma diferencial analítica associada ao sistema (2.5) é*

$$\omega = Q(x, y)dx - P(x, y)dy$$

Definição 2.19. Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto e $F : U \to \mathbb{C}$ analítica e não contante. Dizemos que F é uma **integral primeira** em U para o sistema (2.3) se F é constante ao longo das soluções de (2.3) contidas em U.

Exemplo 2.20 (**Equação de Lotka-Volterra**, Exemplo 1 do Capítulo 1 em [8])**.** Considere o sistema de equações diferennciais de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \tfrac{dy}{dt} &= -cy + kxy \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde a, b, c e k são números complexos. Afirmamos que em qualquer aberto simplesmente conexo U contido em $\mathbb{C}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{C}^2;\ xy = 0\}$ qualquer determinação da função

$$F(x, y) = kx + by + c\log(x) - a\log(y)$$

é uma integral primeira para (2.6).

Demonstração. De fato, se $\phi = (\phi_1, \phi_2) : V \to \mathbb{C}^2$ é uma solução do sistema (2.6) temos que

$$\phi'(t) = (a\phi_1(t) - b\phi_1(t)\phi_2(t), -c\phi_2(t) + k\phi_1(t)\phi_2(t))$$

e portanto $\frac{d}{dt}(F \circ \phi) = dF(\phi(t)).\phi'(t)$ é igual a

$$\left(k - \frac{c}{\phi_1}\right)(a\phi_1 - b\phi_1\phi_2) + \left(b - \frac{a}{\phi_2}\right)(-c\phi_2 + k\phi_1\phi_2) = 0.$$

Consequentemente qualquer determinação de F é constante ao longo das soluções de (2.6), ou seja qualquer determinação de F é uma integral primeira do sistema (2.6). ■

Proposição 2.21. *F é uma integral primeira do sistema (2.5) se e somente se $\omega \wedge dF = 0$, onde w é a 1-forma analítica associada ao sistema (2.5).*

Exemplo 2.22 (Exemplo 2 do Capítulo 1 em [8])**.** Suponha que o sistema de equações diferenciais (2.5) é tal que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Vê-se então que a 1-forma diferencial $\omega = Qdx - Pdy$ é fechada, i.e. $d\omega = 0$. Portanto a função

$$F(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega$$

obtida integrando w ao longo de qualquer caminho ligando o ponto (x_0, y_0) ao ponto (x, y) esta bem definido (pois w é uma forma fechada e $\mathbb{C}^2$ simplesmente conexo) e é tal que $\omega = dF$. Por tanto F é uma integral primeira para o sistema (2.5)

Definição 2.23. Seja $W \subset \mathbb{C}^2$ um aberto e $R : W \to \mathbb{C}$ uma função analítica não constante. Dizemos que R é um **fator de integração** para o sistema de equações diferenciais (2.5) se

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y}.$$

Exemplo 2.24 (Exemplo 3 do Capítulo 1 em [8])**.** Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x), \;\; a, b \in \mathbb{C}(x).$$

Podemos associar a esta equação a 1-forma racional w,

$$\omega = dy - (a(x)y + b(x))dx.$$

Ao tentar encontrar um fator de integração R que dependa apenas da variável x vemos que deve satisfazer

$$0 = d(R\omega) = \left(\frac{\partial R}{\partial x} + Ra(x)\right) dx \wedge dy$$

ve-se então que

$$R(x) = \exp\left(-\int a(x)dx\right),$$

é tal que $d(Rw) = 0$ e portanto R é um fator de integração para w.

2.3 O K-modulo $\Omega_{K/k}$

Seja K anel comutativo, e $k \subset K$ subanel. Se M é um K-módulo, uma k-derivação de K em M é uma mapa k-linear

$$D : K \to M$$

tal que $D(xy) = xD(y) + yD(x)$, para todo $x, y \in K$. Nesse caso verifica-se que $Dx^n = nx^{n-1}Dx$ para todo $X \in K, n$ inteiro positivo. Dessa última igualdade tomando

$x = 1, n = 2$ temos que $D1 = 0$ e portanto D anula-se em k. As k-derivações de K em M formam um K-submódulo $Der_k(K, M)$ de $Hom_k(K, M)$.Uma derivação no anel K é simplesmente uma $\mathbb{Z}$-derivação de K em K(isto é, tomando $k = \mathbb{Z}$ e $M = K$). Observe que coincide com a definição 3.1.

Seja E um conjunto não vazio, K um anel, então o conjunto

$$\bigoplus_{e\in E} K = \{(a_e)_{e\in K}\,;\, a_e \in K, a_e \neq 0, \text{ somente em uma quantidade finita de termos}\}$$

é K-modulo livre.
Consideremos o mapa $\delta : E \to \bigoplus_{e\in E} K$ tal que $\delta(x) = (x_e)_{e\in E}$, onde $x_x = 1$ e $x_e = 0$, para todo $e \neq x, e \in E$. Não é difícil verificar que o conjunto $\{\delta(x)\}_{x\in E}$ é uma base para o K-modulo $\bigoplus_{e\in E} K$.

A seguir enunciaremos alguns resultados que utilizaremos na prova do Teorema 4.17:

Proposição 2.25 (Proposição 1 em [14]). *Seja K um anel comutativo, e $k \subset K$ um subanel. Então existe um K-módulo $\Omega_{K/k}$ e uma k-derivação d de K em $\Omega_{K/k}$ tal que, para cada k-derivação de K em um K-módulo M, existe um único K-homomorfismo $\xi_D : \Omega_{K/k} \to M$ tal que $D = \xi_D \circ d$.*

Proposição 2.26 (Proposição 2 em [14]). *Seja $\iota : k \to K$ um homomorfismo de anéis comutativos, D uma derivação em K tal que existe um mapa $D_k : k \to k$ tal que $\iota D_k = D\iota$. Então existe um único mapa $D^1 : \Omega_{K/k} \to \Omega_{K/k}$ tal que, para todo $\omega, \nu \in \Omega_{K/k}$ e para todo $f \in K$ temos:*

- $D^1(\omega * \nu) = D^1\omega + D^1\nu$
- $D^1(f\omega) = (Df)\omega + f(D^1\omega)$
- $D^1(df) = d(Df)$.

Proposição 2.27 (Proposição 3 em [14]). *Sejam $k \subset K$ corpos, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ elementos de K algebricamente independentes sobre k, A um conjunto de índices, e tal que K é algebricamente separável sobre $k(\{x_\alpha\}_{\alpha\in A})$. Então $\{dx_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma $K-$base de $\Omega_{K/k}$.*

Proposição 2.28 (Proposição 4 em [14]). *Sejam $k \subset K$ corpos de característica zero, sejam $u_1, \ldots, u_n, v \in K$, com $u_1, \ldots, u_n$ não zeros, sejam $c_1, \ldots, c_n \in k$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então o elemento*

$$c_1\frac{du_1}{u_1} + \ldots + c_n\frac{du_n}{u_n} + dv$$

de $\Omega_{K/k}$ é zero se, e só se cada $u_1, \ldots, u_n, v$ é algébrico sobre k.

Proposição 2.29 (Proposição 5 em [14]). *Sejam $k \subset K$ corpos de característica zero, D uma derivação de K tal que $Dk \subset k$, $C = C(k, \{D\})$, ver definição 3.11, e $u, t \in K$ algebraiamente independentes sobre C. Então em $\Omega_{K/k}$ temos que*

$$D^1(udt) = d(uDt).$$

Proposição 2.30 (Proposição 6 em [14]). *Sejam $k \subset K$ corpos de característica zero, Δ um conjunto de derivações de K tal que $Dk \subset k$, para cada $D \in \Delta$ e seja $C = \bigcap_{D\in\Delta} ker(D)$. Assuma que $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega_{K/k}$, são anulados por D^1, para cada $D \in \Delta$. Então se $\omega_1, \ldots, \omega_n$ são linearmente dependentes sobre K então são linearmente dependentes sobre C.*

Teorema 2.31 (Teorema 2 em [14]). Sejam k um corpo diferencial de característica zero, K uma extensão diferencial do corpo k com o mesmo corpo de constantes e algébrico sobre $k(t)$, para algum $t \in K$. Suponha que $c_1, \ldots, c_n$ são constantes de k linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, $u_1, \ldots, u_n, v \in K$, com $u_1, \ldots, u_n$ não nulos, e que para cada derivação D de K temos

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{D(u_i)}{u_i} + D(v) \in k.$$

1. Se para cada derivação D de K tivermos $Dt \in k$, então $u_1, \ldots, u_n$ são algébricos sobre k e existe uma constante c de k tal que $v - ct$ é algébrico sobre k.
2. Se para cada derivação D de K tivermos $\frac{Dt}{t} \in k$, então v é algébrico sobre k e existem inteiros $v_0, \ldots, v_n$ com $v_0 \neq 0$, tais que cada $\frac{u_i^{v_0}}{t^{v_i}}$ é algébrico sobre k.

2.4 Extensão de corpos

Definição 2.32. Seja L um corpo e seja $K \subset L$ um subanel. Se K é um corpo, dizemos que L é uma **extensão** de K e que este é um **subcorpo** de L.

Seja $L \supset K$ uma extensão de corpos e seja $S \subset L$ um subconjunto. O subcorpo L gerado por S sobre K é o menor subcorpo de L contendo K, denotado $K\langle(S)\rangle$. A extensão $L \supset K$ é finitamente gerada se existir um subconjunto finito $S \subset L$ tal que $L = K\langle(S)\rangle$. Se $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, escrevemos $K\langle(S)\rangle = K(s_1, \ldots, s_n)$. Se $L \supset K$ é uma extensão de corpos, L é naturalmente um espaço vetorial sobre o corpo K; a dimensão desse espaço é chamado **grau de** $L \supset K$, denotado $[L : K]$; quando é finita, dizemos que $L \supset K$ é uma extensão finita. Evidentemente toda extensão finita é finitamente gerada. vale a reciproca para extensões algébricas que discutiremos a seguir. Seja $L \supset K$ uma extensão de corpos. Dizemos que um elemento $x \in L$ é **algébrico** sobre K se existir $f(X) \in K(X)$ polinômio não constante tal que $f(x) = 0$. Equivalentemente, a sequencia $1, x, x^2, \ldots$ gera

um subespaço de L de dimensão finita. Se x não é algébrico, diremos que é transcendente. Dizemos que $L \supset K$ é uma **extensão algébrica** se todo $x \in L$ é algébrico sobre K.

Proposição 2.33. Seja $L \supset K$ uma extensão de corpos e seja $x \in L$. Então x é algébrico sobre K se e só se o subanel $K[x] \subset L$ é um subcorpo de L.

Demonstração. Suponhamos x algébrico sobre K. Seja $y \in K[x]$, $y \neq 0$. Devemos mostrar que $y^{-1} \in K[x]$. Como $K[x]$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre K, existe $n \leq 1$ tal que $1, y, \ldots, y^n$ são linearmente dependentes. Tomando n mínimo, obtemos uma relação

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0,$$

com $a_i \in K$ e necessariamente $a_0 \neq 0$. Daí obtemos

$$y(y^{n-1} + \ldots + a_1) = -a_0$$

e portanto,

$$y^{-1} = (-a_0)^{-1}(y^{n-1} + \ldots + a_1)$$

que pertence a $K[y] \subset K[x]$. Reciprocamente, se $K[x]$ é um corpo e $x \neq 0$, temos que $x^{-1} \in K[x]$, isto é , vale a relação

$$x^{-1} = a_n x^n + \ldots + a_0$$

com $a_i \in K$ seguindo-se evidente que x é algébrico sobre K. ■

Definição 2.34. Um corpo K é dito **algebricamente fechado** se todo polinômio não constante em uma variável a coeficientes em K admite uma raiz em K. Dizemos que uma extensão algébrica $L \supset K$ é um **fecho algébrico** de K se L é algebricamente fechado.

Definição 2.35. Seja $L \supset K$ uma extensão de corpos. Dizemos que $x_1, \ldots, x_n \in L$ são **algebricamente dependentes** se existir um polinômio não constante $f(X_1, \ldots, X_n) \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$

Dizemos que $x_1, \ldots, x_n$ formam uma **base de transcendência** de $L \supset K$ se são algebricamente independentes e $L \supset K(x_1, \ldots, x_n)$ é uma extensão algébrica.

Proposição 2.36 (Grau de transcendência, ver Proposição 38 do Capítulo 10 em [3])**.** Seja $L = K(x_1, \ldots, x_N) \supset K$ una extensão finitamente gerada. Então

(1) existem $m \geq 0, 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq N$ tais que $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ é uma base de transcendência de $L \supset K$;

(2) o número de elementos de duas quaisquer bases de transcendência de $L \supset K$ é o mesmo, chamado de **grau de transcendência** da extensão $L \supset K$ e que denotaremos $\mathrm{trdeg}_K L$.

2.5 O resultante de polinômios

Definição 2.37. Seja A um anel comutativo, e sejam

$$\begin{aligned} f &= a_dY^d + \ldots + a_0 (d \geq 1) \\ g &= b_eY^e + \ldots + b_0 (e \geq 1) \end{aligned}$$

polinômios com coeficientes em A. Definimos a resultante de f, g por

$$R = R_{f,g} = \begin{vmatrix} a_d & a_{d-1} & \ldots & a_0 & & & & \\ & a_d & \ldots & a_1 & a_0 & & & \\ & & \ldots\ldots\ldots & & & & & \\ & & & & & a_d & a_{d-1} \ldots & a_0 \\ b_e & b_{e-1} & \ldots & b_0 & & & & \\ & & \ldots\ldots\ldots & & & & & \\ & & & & & b_e & b_{e-1} \ldots & b_0 \end{vmatrix}$$

determinante da matriz $(d+e) \times (d+e)$, com e linhas de a's e d linhas de b's. Subentende-se que os espaços em branco são preenchidos com zeros.

Estamos interessados no caso em que os coeficientes a_i, b_j são também polinômios em outras variáveis $X_1, \ldots, X_n$. Escrevemos então $R(X_1, \ldots, X_n)$ para enfatizar que R é um polinômio nessas variáveis.

Exemplo 2.38 (Exemplo 8 do Capítulo 2 em [3])**.** Sejam $f = Y^2 + X^2 - 4$, $g = XY - 1$. Temos que

$$R(X) = R_{f,g}(X) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & X^2 - 4 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \end{vmatrix} = X^4 - 4X^2 + 1$$

Proposição 2.39 (Proposição 9 do Capítulo 2 em [3])**.** Sejam

$$\begin{aligned} f &= a_d(X)Y^d + \ldots + a_0(X), \\ g &= b_e(X)Y^e + \ldots + a_0(X), \end{aligned}$$

onde a_i, b_j são polinômios nas variáveis $X_1, X_2, \ldots$, a coeficientes no corpo K. Então, para cada $x = (x_1, x_2, \ldots)$, temos

$$R_{f,g}(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_d(x) = b_e(x) = 0 \\ ou \\ f(x,Y), g(x,Y) \text{ admitem fator comum não constante.} \end{array} \right\}$$

Proposição 2.40 (Ver Observação 4.1.1 do Capítulo 4 em [16])**.** Seja K um anel e sejam $f, g \in K[x, y]$, então pode-se escrever o resultante de f e g como segue

$$R_{f,g}(x) = Af + Bg,$$

onde $A, B \in K[x, y]$.

3 Álgebra diferencial

3.1 Extensões diferenciais

Definição 3.1. Seja A um anel. Uma **derivação** em A é um mapa $\delta : A \longrightarrow A$ tal que

1. $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$
2. $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$

para todo $a, b \in A$.

Escrevemos $\delta(a), \delta^{(2)}(a), \ldots, \delta^{(n)}(a)$ as derivadas sucessivas. Pode-se provar por indução a regra de Leibnitz:

$$\delta^{(n)}(ab) = \delta^{(n)}(a)b + \cdots + \binom{n}{i}\delta^{(n-i)}(a)\delta^{(i)}(b) + \cdots + a\delta^{(n)}(b).$$

Se $\delta(a)$ comuta com a obtemos

$$\delta(a^n) = na^{n-1}\delta(a).$$

Se $a \in A$ tem inversa então

$$\delta(a^{-1}) = -a^{-1}\delta(a)a^{-1}.$$

Observe também que se A tem elemento identidade 1, então $\delta(1) = 0$. De fato,

$$\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) \cdot 1 + 1 \cdot \delta(1) = 2\delta(1).$$

Teorema 3.2. Uma derivação δ de um domínio integral tem uma única extensão ao corpo quociente a qual satisfaz

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2}$$

Demonstração. Seja δ uma derivação sobre o domínio integral A, e Q o corpo quociente de A.

Afirmação 3.3. *A extensão de δ definida acima é uma derivação no corpo quociente.*

Demonstração. Provemos que δ é bem definida. De fato, dados $a, b, x, y \in A$ tais que $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ sabemos que $ay = bx \in A$, logo

$$\begin{aligned} \delta(a)y + a\delta(y) &= \delta(b)x + b\delta(x) \\ y\delta(a) - x\delta(b) &= b\delta(x) - a\delta(y) \\ \\ \frac{y\delta(a) - x\delta(b)}{yb} &= \frac{b\delta(x) - a\delta(y)}{yb} \\ \\ \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2} &= \frac{\delta(x)y - x\delta(y)}{y^2}. \end{aligned}$$

Assim $\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta\left(\frac{x}{y}\right)$. ■

Agora provemos que δ define uma derivação em Q. Sejam $\frac{a}{b}, \frac{x}{y} \in Q$, temos que,

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{a}{b} + \frac{x}{y}\right) &= \delta\left(\frac{ay + bx}{by}\right) \\ &= \frac{\delta(ay + bx)by - (ay + bx)\delta(by)}{(by)^2} \\ &= \frac{(\delta(a)yby + b\delta(x)by) - (ay\delta(b)y + bxb\delta(y))}{(by)^2} \\ &= \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2} + \frac{\delta(x)y - x\delta(y)}{y^2} \\ &= \delta\left(\frac{a}{b}\right) + \delta\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y}\right) &= \delta\left(\frac{ax}{by}\right) = \frac{\delta(ax)by - ax\delta(by)}{(by)^2} \\ &= \frac{\delta(a)xby + a\delta(x)by - ax\delta(b)y - axb\delta(y)}{(by)^2} \\ &= \left(\frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2}\right)\frac{x}{y} + \frac{a}{b}\left(\frac{\delta(x)y - x\delta(y)}{y^2}\right) \\ &= \delta\left(\frac{a}{b}\right)\frac{x}{y} + \frac{a}{b}\delta\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

Portanto, δ é uma derivação sobre Q. Agora provemos a unicidade desta extensão. Suponha que existe outra extensão de δ a qual chamamos $\overline{\delta}$. Já que são extensões da mesma derivação, $\delta(a) = \overline{\delta}(a)$ para todo $a \in A$. Por outro lado, para $a \in A$ invertível, lembre que

$$\overline{\delta}\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{\overline{\delta}\,(a)}{a^2} = -\frac{\delta\,(a)}{a^2}.$$

Logo

$$\overline{\delta}\left(\frac{a}{b}\right) = \overline{\delta}\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \overline{\delta}\,(a)\,\frac{1}{b} + a\overline{\delta}\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\delta\,(a)\,b}{b^2} + a\frac{(-\delta(b))}{b^2} = \delta\left(\frac{a}{b}\right).$$

■

Definição 3.4. Um **anel diferencial** (A, Δ) é um anel comutativo A com elemento identidade, dotado de um conjunto finito de derivações Δ em A tal que $\delta(\delta'(a)) = \delta'(\delta(a))$, para todo $\delta, \delta' \in \Delta, a \in A$. Dizemos que (A, Δ) é um **corpo diferencial** se A for corpo. Dizemos que (A, Δ) é um **anel (corpo) diferencial ordinário** se $\mathrm{Card}(\Delta) = 1$ e **anel (corpo) diferencial parcial** se $\mathrm{Card}(\Delta) > 1$.

Agora apresentamos alguns exemplos de anéis diferenciais:

Exemplo 3.5 (Exemplo 2.1 do Capítulo 1 em [4])**.** Cada anel comutativo com identidade pode-se tornar anel diferencial dotando-o com a derivação trivial 0.

Exemplo 3.6 (Exemplo 2.3 do Capítulo 1 em [4])**.** O anel das funções inteiras $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ com a derivada usual é um anel diferencial. Observe que $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ não possui divisores de 0 Portanto pelo Teorema 3.2 o corpo quociente (o corpo das funções meromorfas) é um corpo diferencial. Mais geralmente, podemos tomar as funções analíticas em um domínio do plano complexo.

Exemplo 3.7 (Exemplo 2.4 do Capítulo 1 em [4])**.** Seja $(A, \{\delta\})$ um anel diferencial. Definimos $A[x]$ como o anel dos polinômios com coeficientes em A com a indeterminada x,

$$A[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n;\ a_i \in A, \forall i = 1, \ldots, n; \forall n \in \mathbb{Z}_0^+\}.$$

Se A é um corpo, denotamos $A(x)$, o corpo de funções racionais em x, isto é,

$$A(x) = \left\{\frac{P(x)}{Q(x)};\ P, Q \in A[x], Q \neq 0\right\}.$$

A derivação de A será estendida para uma derivação de $A[x]$ assinando $\delta(x)$ arbitrário, definindo $\delta(x^n) = nx^{n-1}\delta(x)$, e estendendo por linearidade, isto é, dado

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in A[x],$$

então

$$\begin{aligned}\delta(P(x)) &= \sum_{i=0}^{n}\delta(a_i)x^i + \sum_{i=1}^{n} a_i\delta(x^i)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\delta(a_i)x^i + \sum_{i=1}^{n} a_i i x^{i-1}\delta(x)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\delta(a_i)x^i + \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}\right)\delta(x).\end{aligned}$$

Se assumimos que A é corpo então $A[x]$ é um domínio de integridade e pelo Teorema 3.2, $A(x)$ é um corpo diferencial.

Exemplo 3.8. Considerando no caso anterior $\delta \equiv 0$ sobre A, com $\delta(x) = 1$ em $A[x]$, temos que dado $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x]$:

$$\delta(P(x)) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}.$$

Usamos a notação $\dfrac{\partial}{\partial x} := \delta$ para esta derivação.

Exemplo 3.9. Novamente seja $(A, \{\delta\})$ um anel diferencial. Desta vez formamos o anel $A[x_1, \ldots, x_n]$ dos polinômios num número finito de indeterminados $x_1, \ldots, x_n$

$$A[x_1, \ldots, x_n] = \left\{ \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in J} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n};\ a_{i_1,\ldots,i_n} \in A,\ J \subset (\mathbb{Z}_0^+)^n \right\}.$$

Se A for corpo, denotamos $A(x_1, \ldots, x_n)$, ao corpo das funções racionais em $x_1, \ldots, x_n$, isto é,

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \frac{P(x_1, \ldots, x_n)}{Q(x_1, \ldots, x_n)};\ P, Q \in A[x_1, \ldots, x_n], Q \neq 0 \right\}.$$

A derivação em A pode ser estendida a n derivações que definem o conjunto $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ de derivações sobre o anel $A[x_1, \ldots, x_n]$ satisfazendo as seguintes condições:

- δ_i é extensão por linearidade de δ como no Exemplo 3.7, mas neste caso $\delta_i(x_i) = 1$, para cada i.
- $\delta_i(x_j) = 0$ se $i \neq j$.

Então nessas condições $(A[x_1, \ldots, x_n], \Delta)$ é um anel diferencial parcial. Denotamos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ no lugar de δ_i, para cada $i = 1, \ldots, n$. Agora se consideramos A sendo corpo, então $A[x_1, \ldots, x_n]$ é um domínio de integridade e pelo Teorema 3.2 temos que $A(x_1, \ldots, x_n)$ é um corpo diferencial.

Exemplo 3.10 (Exemplo 2.5 do Capítulo 1 em [4])**.** Seja $(A, \{\delta\})$ um anel diferencial. No anel $A[x_i], i = 0, 1, \ldots$ dos polinômios numa quantidade infinita de indeterminados $\{x_0, x_1, \cdots\}$, definimos a derivação $\delta x_i = x_{i+1}$ e usamos a notação $x := x_0$, $\delta^{(n)}x := x_n$.

Chamamos este procedimento de **adjunção** de uma indeterminada diferencial e usamos a notação $A\{x\}$ para o anel diferencial resultante. Os elementos de $A\{x\}$ são ditos **polinômios diferenciais** em x (polinômios ordinários em x e suas derivadas). Se A é um corpo diferencial, então $A\{x\}$ é um domínio de integridade e pelo Teorema 3.2 sua derivada tem uma única extensão ao corpo quociente, o qual denotamos $A\langle x\rangle$, e seus elementos são chamados **funções racionais diferenciais** de x.

Definição 3.11. Seja (A, Δ) um corpo diferencial, o **corpo de constantes** de A se define como $C(A, \Delta) = \{a \in A;\ \delta(a) = 0, \text{para todo } \delta \in \Delta\}$.

Proposição 3.12. O corpo de constantes de um corpo diferencial (A, Δ) é algebricamente fechado.

Demonstração. Seja v algébrico sobre $C(A, \Delta)$, e suponha que existe um $\delta_0 \in \Delta$ tal que $\delta_0(v) \neq 0$. Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n$ o polinômio minimal mônico de v sobre $C(A, \Delta)$. Tomando a derivada δ_0 a $p(v)$ temos

$$0 = \delta_0(p(v)) = \sum_{i=0}^{n} \delta_0(a_i)v^i + \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i v^{i-1}\right)\delta_0(v)$$

neste caso $a_n = 0$, e como $\delta_0(a_j) = 0, j = 0, \ldots, n$ temos que

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i v^{i-1}\right)\delta_0(v)$$

logo

$$0 = \sum_{i=1}^{n} i a_i v^{i-1}$$

o qual é uma contradição com a minimalidade de p. Portanto, $\delta(v) = 0, \forall \delta \in \Delta$, isto é, $v \in C(A, \Delta)$. ■

Definição 3.13. Seja (A, Δ) um anel diferencial e seja $I \subset A$ um ideal de A. Dizemos que I é um **ideal diferencial** se $a \in I$ implica $\delta(a) \in I$, para todo $\delta \in \Delta$.

Proposição 3.14. Se (A, Δ) é um anel diferencial e I é um ideal diferencial de A então o mapa $\hat{\delta} : A/I \to A/I$ tal que $\hat{\delta}(a + I) = \delta(a) + I$ define uma derivação em A/I, onde $\delta \in \Delta$.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $\hat{\delta}$ é bem definida. Sejam $a + I, b + I \in A/I$, então $a - b \in I$ e como I é ideal diferencial temos que $\delta(a) - \delta(b) = \delta(a - b) \in I$, de onde $\delta(a) + I = \delta(b) + I$.
Agora mostremos que $\hat{\delta}$ é uma derivação, isto é, na suma obtemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}((a + I) + (b + I)) &= \hat{\delta}((a + b) + I) = \delta(a + b) + I \\
&= (\delta(a) + \delta(b)) + I = (\delta(a) + I) + (\delta(b) + I) \\
&= \hat{\delta}(a + I) + \hat{\delta}(b + I)
\end{aligned}$$

na multiplicação obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\delta}((a+I)(b+I)) &= \hat{\delta}((ab)+I) = \delta(ab)+I \\ &= (\delta(a)b + a\delta(b)) + I = (\delta(a)b+I) + (a\delta(b)+I) \\ &= (\delta(a)+I)(b+I) + (a+I)(\delta(b)+I) \\ &= \hat{\delta}(a+I)(b+I) + (a+I)\hat{\delta}(b+I).\end{aligned}$$

■

Definição 3.15. Sejam (A,Δ), (B,Δ) anéis diferenciais com o mesmo conjunto de derivações, um homomorfismo de anéis $f : A \longrightarrow B$ é dito **diferencial** se $\delta(f(a)) = f(\delta(a))$, para todo $a \in A$, para todo $\delta \in \Delta$.

Definição 3.16. Sejam $(M,\Delta_1),(K,\Delta_2)$ anéis diferenciais tais que $K \subset M$ é subanel, então M/K é uma **extensão diferenciável** se para cada $\delta_2 \in \Delta_2$, existe $\delta_1 \in \Delta_1$, tal que $\delta_1|_K = \delta_2$.

Definição 3.17. Sejam $y_1,\ldots,y_n \in K$, e seja $\delta \in \Delta$ onde (K,Δ) é um corpo diferencial. Definimos o **determinante Wronskiano** de $y_1,\ldots,y_n$ con respeito a δ como o determinante:

$$W_\delta(y_1,\ldots,y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \delta(y_1) & \delta(y_2) & \ldots & \delta(y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta^{(n-1)}(y_1) & \delta^{(n-1)}(y_2) & \ldots & \delta^{(n-1)}(y_n) \end{vmatrix}.$$

Teorema 3.18 (Teorema 3.7 do Capítulo 3 em [4])**.** Seja $(F,\{\delta\})$ um corpo diferencial com $C_0 = C(F,\{\delta\})$, e sejam $y_1,\ldots,y_n \in F$. Então o conjunto $\{y_1,\ldots,y_n\}$ é linearmente dependentes sobre C_0 se, e só se, $W_\delta(y_1,\ldots,y_n) = 0$.

Demonstração. Suponha que $y_1,\ldots,y_n$ são linearmente dependentes sobre C_0. Então existem $\{c_i\}_{i=1}^n \subset C_0$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = 0$. Observe que das $(n-1)$-primeiras derivadas da ultima igualdade obtemos "n" equações lineares homogêneas em $c_1,\ldots,c_n$

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1y_1 & + & c_2y_2 & + & \ldots & + & c_ny_n & = & 0 \\ c_1\delta(y_1) & + & c_2\delta(y_2) & + & \ldots & + & c_n\delta(y_n) & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ c_1\delta^{(n-1)}(y_1) & + & c_2\delta^{(n-1)}(y_2) & + & \ldots & + & c_n\delta^{(n-1)}(y_n) & = & 0. \end{array}$$

Desde que c_i's não são todos nulos temos que o determinante da matriz $[\delta^{(i-1)}(y_j)]$ é zero, isto é, $W_\delta(y_1,\ldots,y_n) = 0$. Para a outra implicação fazemos a demonstração por indução.

Assim para $k = 2$, temos que $W_\delta(y_1, y_2) = 0$ do qual existem $c_1, c_2 \in F$ tais que

$$\begin{aligned} c_1 y_1 &+ c_2 y_2 = 0 \\ c_1\delta(y_1) &+ c_2\delta(y_2) = 0. \end{aligned}$$

Podemos considerar $c_1 = 1$. Derivando a primeira equação e restando a segunda equação obtemos $\delta(c_2)y_2 = 0$. Logo $c_2 \in C_0$. Assim, y_1, y_2 são linearmente dependentes sobre C_0. Agora supondo valido para todos os $k < n$, assumimos que $W_\delta(y_1, \ldots, y_n) = 0$. Então pode-se encontrar em F uma solução não trivial $c_1, \ldots, c_n$ das equações $\sum_{i=1}^{n} c_i\delta^{(j)}(y_i) = 0$, para cada $j = 0, \ldots, n-1$. Podemos considerar $c_1 = 1$ e $W_\delta(y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, pois se $W_\delta(y_2, \ldots, y_n) = 0$ temos pela hipótese indutiva que $y_2, \ldots, y_n$ são linearmente dependentes sobre C_0. Derivando as $(n-1)$-primeiras equações obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(y_1) + c_2\delta(y_2) + \cdots + c_n\delta(y_n) + \delta(c_2)y_2 + \cdots + \delta(c_n)y_n \\ 0 &= \delta^{(2)}(y_1) + c_2\delta^{(2)}(y_2) + \cdots + c_n\delta^{(2)}(y_n) + \delta(c_2)\delta(y_2) + \cdots + \delta(c_n)\delta(y_n) \\ &\vdots \\ 0 &= \delta^{(n-1)}(y_1) + c_2\delta^{(n-1)}(y_2) + \cdots + c_n\delta^{(n-1)}(y_n) + \delta(c_2)\delta^{(n-2)}(y_2) + \cdots + \delta(c_n)\delta^{(n-2)}(y_n). \end{aligned}$$

Como as equações $\sum_{i=1}^{n} c_i\delta^{(j)}(y_i) = 0$ para $j = 1, \ldots, n-1$, obtemos as $(n-1)$-equações lineares homogêneas em $\delta(c_2), \ldots, \delta(c_n)$

$$\begin{aligned} \delta(c_2)y_2 + &\quad \ldots \quad + \delta(c_n)y_n = 0 \\ \delta(c_2)\delta(y_2) + &\quad \ldots \quad + \delta(c_n)\delta(y_n) = 0 \\ &\quad \vdots \\ \delta(c_2)\delta^{(n-2)}(y_2) + &\quad \ldots \quad + \delta(c_n)\delta^{(n-2)}(y_n) = 0 \end{aligned}$$

com determinante $W_\delta(y_2, \ldots, y_n) \neq 0$. Portanto, $\delta(c_2) = \cdots = \delta(c_{n-1}) = 0$. ■

A seguir enunciaremos alguns resultados que utilizaremos na demonstração dos teoremas principais.

Lema 3.19 (Lema 5.2 do Capítulo 5 em [4])**.** Seja K um corpo diferencial com corpo de contantes C. Sejam $k_1, \ldots, k_r$ constantes em alguma extensão diferencial do corpo K. Se $k_1, \ldots, k_n$ são algebricamente dependentes sobre o corpo K, então são algebricamente dependentes sobre C.

Teorema 3.20 (Ver o Teorema da página 160 em [15])**.** Seja R o corpo dos números racionais e K uma extensão diferencial parcial finita de R com m derivações distintas. Então K é isomorfo ao corpo F das funções meromorfas de m-variáveis complexas.

Definição 3.21. Considere uma equação diferencial linear homogênea

$$L(y) = \delta^{(n)}(y) + a_{n-1}\delta^{(n-1)}(y) + \cdots + a_1\delta(y) + a_0 y = 0 \tag{3.1}$$

com coeficientes em um corpo diferencial $(K, \{\delta\})$. Dizemos que M contendo K é uma **extensão Picard-Vessiot** de K, para a equação (3.1), temos

1. $M = K\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$, onde $u_1, \ldots, u_n$ são n soluções de (3.1) linearmente independentes sobre $C(K, \{\delta\})$.
2. $C(M, \{\delta\}) = C(K, \{\delta\})$.

Definição 3.22. Seja $(K, \{\delta\})$ um corpo diferencial e seja u um elemento em alguma extensão de K, tal que $\delta(u) = a \in K$, onde a não é uma derivada em K, isto é, $a \neq \delta(x)$, para todo $x \in K$ (em particular $u \notin K$). Então $K\langle u\rangle$ é chamada **adjunção por uma integral**.

Exemplo 3.23 (Lema 3.9 do Capítulo 3 em [4])**.** Uma adjunção por uma integral $K\langle u\rangle$ é uma extensão de Picard-Vessiot de K para

$$L(y) = \delta^{(2)}(y) - \frac{\delta(a)}{a}\delta(y)$$

onde $\delta(u) = a$.

Demonstração. Primeiro vamos provar que u é transcendente sobre K. Para isto, vamos supor que u é algébrico sobre K e seja

$$p(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$$

seu polinômio minimal sobre K. Derivando $p(u)$ temos:

$$0 = nu^{n-1}\delta(u) + \delta(b_{n-1})u^{n-1} + \cdots + \delta(b_0)$$

e

$$0 = [n\delta(u) + \delta(b_{n-1})]u^{n-1} + \cdots + \delta(b_0).$$

Pela minimalidade de p, os coeficientes da última equação são todos iguais a zero Em particular

$$a = \delta(u) = \delta\left(-\frac{b_{n-1}}{n}\right), \text{ onde } -\frac{b_{n-1}}{n} \in K$$

o qual é uma contradição. Portanto u é transcendente sobre K. Desde que

$$L(u) = \delta^{(2)}(u) - \frac{\delta(a)}{a}\delta(u) = 0$$

e $L(1) = 0$, podemos observar que u e 1 são linearmente independente sobre $C(K, \{\delta\})$. De fato, assumindo que $c_1 \cdot 1 + c_2 u = 0$, onde $c_1, c_2 \in C(K, \{\delta\})$ temos que $c_2 = 0$, se não

$u = -c_1 \cdot c_2^{-1} \in C(K, \{\delta\}) \subset K$ o qual é uma contradição. Logo como $c_2 = 0$, então temos que $c_1 = 0$. Veja que $K\langle u\rangle = K(u)$. De fato, sabemos que $K(u) \subset K\langle u\rangle$. Por outro lado, para $p \in K\langle u\rangle$

$$p = \frac{f(u, \delta(u), \cdots)}{g(u, \delta(u), \cdots)}.$$

onde $g(u, \delta(u), \cdots) \neq 0$. Segue-se que

$$\begin{aligned} f(u, \delta(u), \cdots) &= f_1(u) \\ g(u, \delta(u), \cdots) &= g_1(u) \end{aligned}$$

pois para $n \geq 1$ se tem $\delta^{(n)}(u) \in K$ com $f_1(x), g_1(x) \in K[x]$ e $g_1(x) \neq 0$. Assim $p \in K(u)$. Por último temos que provar que $C(K(u), \{\delta\}) = C(K, \{\delta\})$. Supondo que existe $c \in C(K(u), \{\delta\})$ tal que $c \notin C(K, \{\delta\})$, então $c = \dfrac{f(u)}{g(u)}$, onde $f(x), g(x) \in K[x], g(x) \neq 0$, pode-se assumir $\text{MDC}(f(x), g(x)) = 1$, sendo g um polinômio minimal mônico de grau$(g) \geq 1$. Então derivando c temos:

$$0 = \delta\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right) = \frac{\delta(f(u))g(u) - f(u)\delta(g(u))}{g(u)^2}.$$

Supondo que $\delta(g(u)) \neq 0$, temos da equação anterior que

$$\frac{\delta(f(u))}{\delta(g(u))} = \frac{f(u)}{g(u)} \in C(K(u), \{\delta\}).$$

Mas grau$(\delta(g(u))) <$ grau$(g(u))$ o qual é uma contradição pela minimalidade de g. Portanto, $g(u) \in C(K(u), \{\delta\})$. Seja

$$g(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i, \text{ onde } a_i \in K.$$

Lembrando que $a_n = 1$, pois g é mônico, derivando temos

$$0 = \delta(a_0) + \delta(a_1)u + a_1\delta(u) + \cdots + \delta(a_{n-1})u^{n-1} + a_{n-1}(n-1)u^{n-2}\delta(u) + \delta(1)u^n + nu^{n-1}\delta(u)$$

do qual podemos obter

$$0 = [\delta(a_0) + a_1 a] + [\delta(a_1) + 2a_2 a]u + \cdots + [\delta(a_{n-1}) + na]u^{n-1}.$$

Como u é transcendente sobre K, os coeficientes da ultima equação são todos iguais a zero. Assim $\delta(a_{n-1}) + na = 0$, logo

$$a = \delta\left(-\frac{a_{n-1}}{n}\right), \text{ onde } -\frac{a_{n-1}}{n} \in K$$

o qual é uma contradição, assim $C(K(u), \{\delta\}) = C(K, \{\delta\})$. Portanto $K(u)$ é uma extensão de Picard-Vessiot de K para $L(y) = \delta^{(2)}(y) - \dfrac{\delta(a)}{a}\delta(y)$. ■

Definição 3.24. Seja $(K, \{\delta\})$ um corpo diferencial e seja u um elemento em alguma extensão de K, tal que $\dfrac{\delta(u)}{u} = a \in K - \{0\}$. Então $K\langle u\rangle$ é chamada **adjunção da exponencial de uma integral**.

Exemplo 3.25 (Lema 3.10 do Capítulo 3 em [4])**.** Seja $K\langle u\rangle$ uma adjunção da exponencial de uma integral e suponha que $C(K\langle u\rangle, \{\delta\}) = C(K, \{\delta\})$, então $K\langle u\rangle$ é uma extensão de Picard-Vessiot de K para $L(y) = \delta(y) - ay$.

3.2 Extensões liouvillianas

Definição 3.26. Um corpo diferencial (M, Δ) é uma **extensão liouvilliana** de (K, Δ) se existe uma torre de corpos diferenciais $K = K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m = M$, tal que cada $K_i = K_{i-1}(t_i)$ onde uma e só uma das propriedades é satisfeita:

(i) $\delta t_i \in K_{i-1}$, para todo $\delta \in \Delta$.

(ii) $\dfrac{\delta t_i}{t_i} \in K_{i-1}$, para todo $\delta \in \Delta$.

(i) t_i é algébrico sobre K_{i-1}.

Chamamos $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots K_m = M$ **torre definidora** de M e o **comprimento desta torre definidora** é o número m.

Definição 3.27. Uma **integral primeira liouvilliana de uma equação diferencial de ordem** n é uma função liouvilliana não nula F de n-variáveis, analítica em um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ não vazio tal que $F(z, \overline{y}(z), \overline{y}'(z), \ldots, \overline{y}^{(n-1)}(z))$ é constante para cada solução $\overline{y}(z)$ da equação diferencial, sempre que $(z, \overline{y}(z), \overline{y}'(z), \ldots, \overline{y}^{(n-1)}(z)) \in U$.

4 Integrais primeiras liouvillianas

4.1 Relações liouvillianas e integrais primeiras

Consideremos a forma diferencial $Q(x,y)dx - P(x,y)dy$ associada ao sistema de equações diferenciais (2.5)

$$\frac{dx}{dz} = P(x,y)$$
$$\frac{dy}{dz} = Q(x,y)$$

então
Se $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$, a função

$$F(x,y) = \int Qdx - Pdy$$

é uma integral primeira para (2.5).
Se $\frac{\partial P}{\partial x} \neq -\frac{\partial Q}{\partial y}$ e $R(x,y)$ é um fator de integração para o sistema de equações diferenciais (2.5), então

$$F(x,y) = \int RQdx - RPdy$$

é uma integral primeira para (2.5).

Seja $k = \mathbb{C}(y_1, \ldots, y_n)$, onde $y_1, \ldots, y_n$ são indeterminados e seja $\Delta = \left\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$. Seja (M, Δ) uma extensão liouvilliana de (k, Δ) tal que $C(M, \Delta) = \mathbb{C}$. Pelo Teorema 3.20 cada elemento de M representa uma função analítica em um conjunto aberto denso de $\mathbb{C}^n$. Chamaremos tais funções de funções liouvillianas de n-variaveis.
Consideremos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dz} &= f_1(y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dz} &= f_n(y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde os f_i são funções analíticas liouvillianas em algum dominio (conexo, aberto e não vazio) $U_0 \subset \mathbb{C}^n$. Seja (k, Δ) a extensão diferencial de $\mathbb{C}(y_1, \ldots, y_n)$ gerada pelos f_i e suas derivadas parciais de todas as ordens com $\Delta = \left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\right\}$. Veja que cada elemento de k pode-se escrever como quociente de elementos em k que são analíticos em U_0. Em outras palavras temos a seguinte proposição.

Proposição 4.1. *k é corpo quociente de $\mathscr{H}(U_0) \cap k$, onde $\mathscr{H}(U_0)$ é o anel das funções analiticas em U_0.*

Demonstração. De fato, seja $G \in k$, como os elementos em k são funções racionais definidas nas variáveis $f_i(y_1, \ldots, y_n)'s$ e suas derivadas de todas as ordens, e seus coeficientes são funções racionais nas variáveis $y_1, \ldots, y_n$ com coeficientes complexos, temos que $G = P/Q$, onde P, Q são somas e produtos de funções analíticas sobre U_0. ■

Seja $\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)$ solução analítica de (4.1) em algum domínio $\mathscr{O}_0 \subset \mathbb{C}$ e suponha que $\mathscr{G}_0 = \{(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z));\ z \in \mathscr{O}_0\} \subset U_0$. Neste caso dizemos que a solução $\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)$ satisfaz a **suposição básica**, se cada elemento G em k é analítico e não identicamente zero em um subconjunto aberto e denso $\mathscr{O}_G \subset \mathscr{G}_0$. Essa suposição básica é satisfeita, por exemplo, nos seguintes casos:

- Se os f_i em (4.1) são polinômios de n-variáveis com coeficientes em $\mathbb{C}$ e a solução $\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)$ é algebricamente independentemente (este é o caso do Teorema 5.1)). De fato, primeiro observe que se os f_i são polinômios temos que $k = \mathbb{C}(y_1, \ldots, y_n)$. Assim tomando um elemento $G \in k$, então $G = \frac{P}{Q}$, com $P, Q \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$, logo temos que P, Q são analíticos em qualquer aberto contido no conjunto $\mathscr{G}_0$ e pela hipótese temos que não podem ser identicamente nulos neste conjunto. Tomando o conjunto $\mathscr{O}_G = \mathscr{G}_0 - V(Q)$ temos que é aberto e denso em $\mathscr{G}_0$. Além disso uma vez que Q não tem zeros em $\mathscr{O}_G$ temos que G é analítica e não identicamente zero em $\mathscr{O}_G$.

- Se $f_n = 1$. Neste caso pode-se assumir que $\overline{y}_n = z$, e sejam $f_1, \ldots, f_{n-1}$ polinômios cujos coeficientes são funções liouvillianas na variável y_n. Esta é a situação no Teorema 5.4. Seja $(k_0, \{\frac{\partial}{\partial y_n}\})$ o corpo diferencial gerado pelos coeficientes dos $f_i'^s$ e seja $k = k_0(y_1, \ldots, y_{n-1})$. Se $\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_{n-1}(z)$ são algebricamente independentes sobre k_0 e são solução de (4.1), então a solução satisfaz a suposição básica. De fato, lembre que como k_0 é uma extensão liouvilliana de $\mathbb{C}(y_n)$ com corpo de derivações $\{\frac{\partial}{\partial y_n}\}$, então, pelo Teorema 3.20 os elementos de k_0 são funções analíticas num aberto e denso de $\mathbb{C}$. Agora cada elemento $G \in k$ é da forma $G = \frac{P(y_1,\ldots,y_{n-1})}{Q(y_1,\ldots,y_{n-1})}$, onde P, Q são polinômios de $n-1$ variáveis com coeficientes em k_0. Desde que P, Q são polinômios e seus coeficientes são funções analíticas em y_n temos que $P(y_1, \ldots, y_{n-1}), Q(y_1, \ldots, y_{n-1})$ são funções analíticas num aberto denso de $\mathbb{C}^n$, em particular num aberto e denso de $\mathscr{G}_0$. Além disso como $\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_{n-1}(z)$ são algebricamente independentes sobre k_0, $P(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_{n-1}(z)), Q(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_{n-1}(z))$ não podem ser identicamente nulos. Então tomando o conjunto $\mathscr{O}_G = \mathscr{G}_0 - V(Q)$

Definição 4.2. Dizemos que $\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)$ satisfazem uma **relação liouvilliana** se houver uma função liouvilliana $F(y_1, \ldots, y_n)$ analítica em algum subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ contendo $\mathscr{G}_0$, tal que $F|_{\mathscr{G}_0} \equiv 0$.

Lema 4.3. Seja $G : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma integral primeira para o sistema (4.1) e seja $\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z)$ uma solução de (4.1) definida em um conjunto aberto $\mathscr{O}_0 \subset \mathbb{C}^n$ com $\mathscr{G}_0 = \{(\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z)) \,;\, z \in \mathscr{O}_0\} \subset U$, sabemos que existe um $c \in \mathbb{C}$ tal que $G|_{\mathscr{G}_0} \equiv c$. Esta ultima afirmação é equivalente ao fato de $DG \equiv 0$ em U, onde $D = \sum f_i(y_1, \ldots, y_n)\dfrac{\partial}{\partial y_i}$.

Demonstração. De fato, assumindo que para cada solução $\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z)$ existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $G\left(\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z)\right) = c$. Seja $u \in U$, pelo Teorema de existência e unicidade existe uma solução do sistema (4.1) definida num aberto $\mathscr{O}_0$ contendo 0, tal que $u = (\overline{\overline{y}}_1(0), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(0))$ e pela hipótese $G\left(\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z)\right) = c$, para algum $c \in \mathbb{C}$ e para todo $z \in \mathscr{O}_0$ então

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dz}(G(\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z))) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial y_i}(\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z))\frac{\partial \overline{\overline{y}}_1(z)}{\partial z} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i((\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z))\frac{\partial G}{\partial y_i}(\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z)) \\ &= DG(\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Em particular para $z = 0$ temos que $DG(u) = 0$ e como $u \in U$ foi escolhido arbitrariamente, temos que $DG \equiv 0$ em U.
Agora suponha que $DG \equiv 0$ em U, e seja $\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z)$ uma solução do sistema (4.1) em algum aberto $\mathscr{O}_0$, então temos que $DG(\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z)) = 0$ para todo $z \in \mathscr{O}_0$ e da igualdade em (4.2) temos que $G(\overline{\overline{y}}_1(z), \ldots, \overline{\overline{y}}_n(z)) = c$ para algum $c \in \mathbb{C}$, para todo $z \in \mathscr{O}_0$, esto é, $G|_{\mathscr{G}_0} \equiv c$. ■

Observe que D define uma derivação em k, bem como em qualquer extensão diferencial deste corpo.

Proposição 4.4. Seja $\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)$ uma solução analítica de (4.1) em algum domínio $\mathscr{O}_0 \subset \mathbb{C}$ e seja $\mathscr{G}_0 = \{(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z));\ z \in \mathscr{O}_0\}$. Suponha que $\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)$ satisfazem a suposição básica e uma relação liouvilliana. Então existe uma extensão liouvilliana M de $(k, \{\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_n\})$ tal que

(i) Existe $\mathscr{O} \subset \mathscr{O}_0$ aberto e $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_0 \subset \mathbb{C}^n$ aberto contendo $\mathscr{G} = \{(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z));\ z \in \mathscr{O}\}$ tal que os elementos de M são meromorfos em $\mathscr{U}$.

(ii) Se $k = K_0 \subset \cdots \subset K_m = M$ é a torre definidora de M, então cada elemento em K_{m-1} é analítico e não identicamente zero em um subconjunto aberto e denso de $\mathscr{G}$, por tanto o mapa levando $G(y_1, \ldots, y_n) \in K_{m-1}$ a $G(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z))$ define um isomorfismo φ de K_{m-1} sobre o corpo diferencial de funções meromorfas de uma

variavel em $\mathscr{O}$, tal que

$$\frac{d(\varphi(G))}{dz} = \sum_{j=1}^{n} \varphi\left(\frac{\partial G}{\partial y_i}\right)\varphi(f_i).$$

(iii) Existe $W \in M$ tal que $DW \equiv 0$, enquanto $\partial W/\partial y_j \neq 0$, para algum j.

Demonstração. Seja L o conjunto das ternas $(\mathscr{O}', \mathscr{U}', F')$, onde $\mathscr{O}'$ é subdomínio de $\mathscr{O}_0$ não vazio, tal que $\mathscr{G}' = \{(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z));\ z \in \mathscr{O}'\} \subset \mathscr{U}' \subset \mathbb{C}^n$, $\mathscr{U}'$ subdomínio de $\mathscr{U}_0$, F' uma função liouvilliana, analítica e não nula em $\mathscr{U}'$ com $F'|_{\mathscr{G}'} \equiv 0$. Uma vez que $\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)$ satisfazem uma relação liouvilliana, L é não vazio. Escolha um elemento $(\mathscr{O}'', \mathscr{U}'', F'')$ em L tal que F'' pertence a uma torre definidora de comprimento minimal e denotemos esta torre por $k = K_0 \subset \cdots \subset K_m$. Seja $M = K_m$. Agora consideremos as funções em k como funções em $\mathscr{U}''$ e os y_i como funções em $\mathscr{O}''$.

Afirmação 4.5. *Estas funções restritas ainda satisfazem a suposição básica.*

De fato, seja $G \in k$ e escrevemos $G = \dfrac{G_1}{G_2}$, onde $G_1, G_2 \in k$ e são analíticas em $\mathscr{U}_0$. Suponha que G_2 anula-se num subconjunto aberto, não vazio de $\mathscr{G}'' = \{(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n);\ z \in \mathscr{O}''\} \subset \mathscr{G}_0$, então como $\mathscr{G}_0$ é domínio, temos pelo Teorema da identidade 2.6 que G_2 anula-se em $\mathscr{G}_0$. Esto é absurdo respeito a validez da suposição básica para $\mathscr{O}_0$ e $\mathscr{U}_0$, por tanto G_2 é analítica e não nula em um subconjunto aberto e denso de $\mathscr{G}''$. Analogamente (G_1 é não nula, de onde) se conclui que G é analítica e não identicamente nula em $\mathscr{G}''$, assim as funções restritas satisfazem a suposição básica. Portanto podemos assumir $\mathscr{O}'' = \mathscr{O}_0$ e $\mathscr{U}'' = \mathscr{U}_0$.

Afirmação 4.6. (i) e (ii) são satisfeitos para K_i.

De fato, a prova decorre por indução sobre $i < m$. Suponha que existe um domínio $\mathscr{O}_{i-1} \subset \mathscr{O}_0$ em um domínio $\mathscr{U}_{i-1} \subset \mathscr{U}_0$ contendo $\mathscr{G}_{i-1} = \{(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z));\ z \in \mathscr{O}_{i-1}\}$ tal que cada elemento de K_{i-1} é meromorfo em $\mathscr{U}_{i-1}$ analítico e não identicamente nulo num subconjunto aberto e denso de $\mathscr{G}_{i-1}$. Além disso suponha que K_{i-1} é o corpo quociente de $\mathscr{H}(\mathscr{U}_{i-1}) \cap K_{i-1}$. Provaremos que existem domínios $\mathscr{O}_i \subset \mathscr{O}_{i-1}$ e $\mathscr{U}_i \subset \mathscr{U}_{i-1}$, satisfazendo as propriedades análogas respeito a K_i (excepto se $i = m$, em tal caso não garante-se que os elementos são não nulos e analíticos em um subconjunto aberto e denso de $\mathscr{G}_m = \mathscr{G}'$).
Caso 1: $K_i = K_{i-1}(t)$, onde t é transcendente sobre K_{i-1} e $\dfrac{\partial t}{\partial y_j} \in K_{i-1}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Para cada j existe um subconjunto $\mathscr{U}^j$ de $\mathscr{U}_{i-1}$ aberto, tal que $\partial t/\partial y_j$ é analítica em $\mathscr{U}^j$ e $\mathscr{U}^j \cap \mathscr{G}_{i-1}$ é denso em $\mathscr{G}_{i-1}$. Além disso algum $\dfrac{\partial t}{\partial y_j}$ é não nulo em $\mathscr{U}^j \cap \mathscr{G}_{i-1}$. Logo $\mathscr{U} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathscr{U}_j$ é um aberto não vazio intersectando $\mathscr{G}_{i-1}$. Como t é analítico em algum aberto denso de $\mathbb{C}^n$ então seja $p \in \mathscr{U}$ um ponto onde t seja analítica, tal que para algum $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(p) \subset \mathscr{U}$ e $B_\varepsilon(p) \cap \mathscr{G}_{i-1}$ é não vazio. Como cada $\dfrac{\partial t}{\partial y_j}$ é analítica em $B_\varepsilon(p)$

e $\dfrac{\partial^2 t}{\partial y_j \partial y_k} = \dfrac{\partial^2 t}{\partial y_k \partial y_j}$ temos pelo Lema 2.13 que t pode ser definido analítica em todo $B_\varepsilon(p)$. Seja o domínio $\mathscr{O}_i \subset \mathscr{O}_{i-1}$ escolhido tal que $\mathscr{G}_i = \{(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z));\, z \in \mathscr{O}_i\} \subset B_\varepsilon(p)$. Definimos $\mathscr{U}_i = B_\varepsilon(p)$. Note que t não é identicamente nulo em $\mathscr{G}_i$ pela minimalidade de "m". Agora consideremos as funções de K_{i-1} restritas a $\mathscr{U}_i$. Como no caso anterior pode-se provar que cada $g \in K_{i-1}$ é analítica e não identicamente nula em um subconjunto aberto e denso de $\mathscr{G}_i$. Seja

$$P(t) = a_r t^r + a_{r-1} t^{r-1} \cdots + a_1 t + a_0 \in K_{i-1}[t]. \tag{4.3}$$

Claramente $P(t)$ será meromorfa em $\mathscr{U}_i$ e analítica em um subconjunto aberto e denso de $\mathscr{G}_i$.

- Se $i < m$ e $P(t)$ for zero em um subconjunto aberto não vazio de $\mathscr{G}_i$, então isto contradiz a minimalidade de m (pois t seria algébrico sobre K_{i-1} com $i < m$).
- Se $G = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$ com $P(t), Q(t) \in K_{i-1}$ e $i < m$ temos, argumentando como acima, que G é meromorfa em $\mathscr{U}_i$ e analítica em um subconjunto aberto e denso de $\mathscr{G}_i$, não vazio.

Finalmente, já que t é analítica em $\mathscr{U}_i$ então K_i é o corpo quociente de $\mathscr{H}(\mathscr{U}_i) \cap K_i$.
Caso 2: $K_i = K_{i-1}(t)$, onde t é transcendente sobre K_{i-1} e $\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial t}{\partial y_j} \in K_{i-1}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Seja v tal que $t = exp(v)$, temos que $\dfrac{\partial v}{\partial y_j} = \dfrac{1}{t}\dfrac{\partial t}{\partial y_j}$, para todo $j = 1, \ldots, n$, então como no caso anterior elas são analíticas num disco $B_\varepsilon(p)$ e já que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_j} &= \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{t^2}\left[t\frac{\partial^2 t}{\partial y_k \partial y_j} - \frac{\partial t}{\partial y_j}\frac{\partial t}{\partial y_k}\right] \\
\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k} &= \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial y_k}\right) = \frac{1}{t^2}\left[t\frac{\partial^2 t}{\partial y_j \partial y_k} - \frac{\partial t}{\partial y_k}\frac{\partial t}{\partial y_j}\right]
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}$$

temos que v pode-se definir analítica em todo $B_\varepsilon(p)$, consequentemente $t = expv$ também é analítica em todo $B_\varepsilon(p)$. Logo a demostração é análoga ao **Caso 1**.
Caso 3: $K_i = K_{i-1}(t)$ com t algébrico sobre K_{i-1}, então seja

$$P(t) = t^r + a_{r-1} t^{r-1} + \cdots + a_0$$

o polinômio minimal de t sobre K_{i-1}. Usando a hipótese indutiva, pode-se assumir que existe um aberto $\mathscr{U}_P$ tal que os a_j são analíticos em $\mathscr{U}_P$ e $\mathscr{U}_P \cap \mathscr{G}_{i-1}$ é denso em $\mathscr{G}_{i-1}$. Seja D o discriminante de P. Note que D é um polinômio nós a_j com coeficientes constantes, portanto, é analítica em $\mathscr{U}_P$. Já que $P(t)$ é irredutível, D não é

identicamente nula em $\mathscr{U}_P$ (ver Proposição 4 do Capítulo 5 seção 10 em [7]) e como $D \in K_{i-1}$ temos que não é identicamente nulo em $\mathscr{G}_{i-1}$. Portanto, existe um domínio $\mathscr{O}_i \subset \mathscr{O}_{i-1}$ tal que $\mathscr{G}_i = \{(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z));\ z \in \mathscr{O}_i\} \subset \mathscr{U}_i$, onde $\mathscr{U}_i$ é uma componente de $\{(y_1(z), \ldots, y_n(z)) \in \mathscr{U}_P;\ D(y_1, \ldots, y_n) \neq 0\}$ intersecando $\mathscr{O}_i$ não trivialmente. Logo t é analítica em $\mathscr{U}_i$. Cada elemento G em K_i é da forma $G = b_r t^r + \ldots + b_0$, para alguns b_j em K_{i-1} e podemos argumentar como no Caso 1 considerando G como em (4.3) para concluir (i) e (ii) para K_i. Finalmente, para provar que a substituição de $\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)$ para $y_1(z), \ldots, y_n(z)$ define um isomorfismo φ de K_{m-1} até um corpo diferencial $\overline{K}$ de funções meromorfas, note que

$$\frac{d(\varphi(G))}{dz} = \sum_{j=1}^{n} \varphi\left(\frac{\partial G}{\partial y_j}\right) \varphi(f_j).$$

é obtida da forma seguinte

$$\begin{aligned}
\frac{d(\varphi(G))}{dz} &= \frac{d(G(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)))}{dz} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial y_j}(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)) \frac{d\overline{y}_j}{dz} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \varphi\left(\frac{\partial G}{\partial y_j}\right) f_j(\overline{y}_1(z), \ldots, \overline{y}_n(z)). \\
&= \sum_{j=1}^{n} \varphi\left(\frac{\partial G}{\partial y_j}\right) \varphi(f_j).
\end{aligned}$$

Agora provemos (iii), seja $\varphi : K_{m-1} \to \overline{K}$ o isomorfismo descrito em (ii), onde K é um corpo de funções meromorfas em $\mathscr{O}$ e seja $M = K_{m-1}(t)$, onde ou t é algébrico em K_{m-1}, ou t é transcendente em K_{m-1} e $\dfrac{\partial t}{\partial y_j} \in K_{m-1}$ para todo $j = 1, \ldots, n$, ou t é transcendente em K_{m-1} e $\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial t}{\partial y_j} \in K_{m-1}$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Afirmação 4.7. *t não pode ser algébrico sobre K_{m-1}.*

De fato, suponha que t é algébrico sobre K_{m-1}. Pela minimalidade de m podemos considerar $F \in M$ elemento definindo pela relação liouvilliana e

$$P(Y) = Y^r + a_{r-1}Y^{r-1} + \cdots + a_0$$

o polinômio minimal de F sobre K_{m-1}. Como $a_0 \neq 0$ em K_{m-1} temos que a_0 é analítica e não nula sobre um subconjunto aberto e denso de $\mathscr{G}$. Desde que $P(F) = 0$ e $F|_{\mathscr{G}} \equiv 0$, temos que $a_0|_{\mathscr{G}} \equiv 0$. Portanto, t é transcendente sobre K_{m-1}, aqui temos que ver dois casos:

- Primeiro assumimos que $\dfrac{\partial t}{\partial y_j} \in K_{m-1}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Podemos assumir $F \in K_{m-1}[t]$. Agora pode-se estender φ para um homomorfismo em $K_{m-1}[t]$. Já que $\varphi(F) = 0$, então

$$F = a_r t^r + \cdots + a_0$$

então

$$0 = \varphi(F) = \varphi(a_r)\varphi(t)^r + \cdots + \varphi(a_0)$$

i.e., $\varphi(t)$ é algébrico sobre $\overline{K}$, por tanto o Corolário do Teorema 1 em [14] implica que existe $u \in \overline{K}$ tal que $\varphi(t) - u$ é uma constante. Seja $U \in K_{m-1}$ satisfazendo $\varphi(U) = u$. Então temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d(\varphi(t-U))}{dz} = \sum \varphi\left(\frac{\partial(t-U)}{\partial y_j}\right)\varphi(f_j) \\ &= \varphi\left(\sum \frac{\partial(t-U)}{\partial y_j} f_j\right) \end{aligned}$$

Seja $W = t - U$. Como φ é isomorfismo em K_{m-1}, $DW \in K_{m-1}$ e $\varphi(DW) = 0$, temos que $DW = 0$. Se $\dfrac{\partial W}{\partial y_j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. então $W \in \mathbb{C}$, esto implica que t é algébrico sobre K_{m-1} o qual é uma contradição.

- Agora assumindo que $\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial t}{\partial y_j} \in K_{m-1}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Observe que $\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial t}{\partial y_j}$ são analíticas e não nulas em algum subconjunto aberto e denso de $\mathscr{G}$, então t vai ser analítica em um subconjunto aberto e denso de $\mathscr{G}$. Portanto, $\varphi(t) \neq 0$. De novo pode-se assumir que $F \in K_{m-1}[t]$ e concluímos que $\varphi(t)$ é algébrico em $\overline{K}$, novamente usando o Corolário do Teorema 1 em [14] podemos concluir que existe r inteiro tal que $\varphi(t^r) \in \overline{K}$. Seja $U \in K_{m-1}$ satisfazendo $\varphi(\dfrac{t^r}{U}) = 1$ e seja $W = \dfrac{t^r}{U}$. Podemos ver que $\dfrac{DW}{W} \in K_{m-1}$ e $\varphi\left(\dfrac{DW}{W}\right) = 0$, então $DW = 0$. Se $\dfrac{\partial W}{\partial y_j} = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$, então W é uma constante e t seria algébrico sobre K_{m-1}, o qual seria uma contradição.

■

Proposição 4.8. Seja (M, Δ) uma extensão liouvilliana do corpo diferencial (k, Δ) com $C(M, \Delta) = C(k, \Delta)$. Seja $D = f_1\delta_1 + \cdots + f_n\delta_n$ com $f_i \in k, \delta_i \in \Delta$ e assuma que $C(k, \Delta) = C(k, \{D\})$. Se $C(M, \Delta)$ é subconjunto próprio de $C(M, \{D\})$, então existe uma extensão liouvilliana (N, Δ) de (k, Δ) tal que:

(i) $C(k, \Delta) = C(N, \Delta) = C(N, \{D\})$

(ii) Existe $u_i \in N$, não todos nulos, tais que $f_1u_1 + \cdots + f_nu_n = 0$ e $\delta_i u_j = \delta_j u_i$, para $1 \leq i, j \leq n$.

Demonstração. Seja (M, Δ) uma extensão liouvilliana de (k, Δ) de menor grau de transcendência sobre k, tal que a hipótese da proposição é satisfeita.

Afirmação 4.9. *M não é algébrico sobre k.*

De fato, se fora então existe u elemento de M, algébrico sobre k tal que $Du = 0$, enquanto $\delta u \neq 0$ para algum $\delta \in \Delta$. Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{l-1} t^{l-1} + t^l$ o polinomio minimal monico de u sobre o corpo k, então tomando a derivada D ao elemento $p(u)$ temos pelo exemplo 3.7 a seguinte igualdade:

$$0 = D(p(u)) = \sum_{i=0}^{l} D(a_i)u^i + \left(\sum_{i=1}^{l} i a_i u^{i-1}\right) D(u)$$

e com neste caso $a_l = 1$ temos

$$0 = \sum_{i=0}^{l-1} D(a_i)u^i$$

e pela minimalidade de p temos que $D(a_j) = 0, j = 0, 1, \ldots, l-1$, isto é, $a_j \in C(k, \{D\}) = C(k, \Delta)$, portanto u é algébrico sobre $C(k, \{D\})$, e como $C(k, \{D\}) = C(k, \Delta)$, temos que $\delta u = 0$ para todo $\delta \in \Delta$, o que é uma contradição. Portanto, M é algébrico sobre $N(t)$, onde N é uma extensão liouvilliana de k, t é transcendental sobre N e

$$\text{ou } \delta t \in N, \text{ para todo } \delta \in \Delta \text{ ou } \delta t/t \in N, \text{ para todo } \delta \in \Delta.$$

Podemos assumir que N é algebricamente fechado sobre M. Seja u um elemento de M tal que $Du = 0$ e $\delta u \neq 0$ para algum $\delta \in \Delta$. Note que u é raiz de um polinômio irredutível $y^r + b_{r-1}y^{r-1} + \cdots + b_0$, com $b_i \in N(t)$.

- Se $\delta b_i = 0$ para todo $\delta \in \Delta$, , $1 \leq i \leq r-1$, então $\delta u = 0$, para todo $\delta \in \Delta$.
- Analogamente, se $Db_i \neq 0$ para algum i então $Du \neq 0$.

Portanto, assumimos que existe um elemento $u_0 \in N(t)$ tal que $Du_0 = 0$ e $\delta u_0 \neq 0$, para algum $\delta \in \Delta$. Observe que $C(N, \{D\}) = C(N, \Delta) = C(k, \Delta)$. Aqui se apresentam os seguintes casos:

Caso 1: Assumindo $\delta t \in N$, para todo $\delta \in \Delta$. Isso implica que $Dt \in N$. Como existe $u_0 \in N(t)$ tal que $Du_0 = 0$, temos pela Proposição 1.2 em [10] que existem elementos $\alpha \in N$ e $c \in N(t)$ tal que $Dc = 0$ e $t = \alpha + c$. Observe que $\delta c = \delta t - \delta\alpha \in N$, para todo $\delta \in \Delta$. Além disso, se $\delta c = 0$ para todo $\delta \in \Delta$, então $c \in N$. Já que $t \notin N$, temos que $\delta c \neq 0$ para algum $\delta \in \Delta$. Seja $u_i = \delta_i c$. Então temos que

$$\sum f_i u_i = \sum f_i \delta_i c = Dc = 0$$

e como os δ_i comutam, temos que

$$\delta_j u_i = \delta_j(\delta_i c) = \delta_i(\delta_j c) = \delta_i u_j.$$

Caso 2: $\dfrac{\delta t}{t} \in N$, para todo $\delta \in \Delta$. Temos que $\dfrac{Dt}{t} \in N$, e como existe $u \in N(t)$, $u \notin N$, tal que $Du \neq 0$, a Proposição 1.2 em [10] implica que existem $\alpha \in N$, $c \in N(t)$ tal que

$Dc = 0$ e existe um inteiro não nulo m tal que $t^m = c\alpha$. Observe que $\dfrac{\delta c}{c} = m\dfrac{\delta t}{t} - \dfrac{\delta \alpha}{\alpha} \in v$, para todo $\delta \in \Delta$. Além disso, se $\delta c = 0$, para todo $\delta \in \Delta$, então c pertence a N, o que é contraditório com $t \notin N$. Seja $u_i = \dfrac{\delta_i c}{c}$. Temos que $\sum f_i u_i$ e $\delta_i u_j = \delta_j u_i$. ■

4.2 Campos vetoriais planos

Lema 4.10. Seja k um corpo diferencial de característica zero com derivação D e $k(t)$ uma extensão diferencial com o mesmo corpo de constantes tal que $Dt \in k$. Para cada a, b em k, cada solução de

$$DU + aU = b \tag{4.4}$$

em $k(t)$ é da forma $U_0 + U_1 t$ para algum U_0, U_1 em k.

Demonstração. Primeiro provamos que toda solução de (4.4) em $k(t)$ é um polinômio em t. De fato, seja $\dfrac{p(t)}{q(t)} \in k(t)$ solução de (4.4), suponha grau$(q) \geq 1$ podemos considerar q mônico de grau minimal com MDC$(p, q) = 1$. Veja que

$$\begin{aligned}
D(p(t)) &= D\left(\frac{p(t)}{q(t)} q(t)\right) \\
D(p(t)) &= D\left(\frac{p(t)}{q(t)}\right) q(t) + \frac{p(t)}{q(t)} D(q(t)) \\
D(p(t)) &= \left(-a\frac{p(t)}{q(t)} + b\right) q(t) + \frac{p(t)}{q(t)} D(q(t)) \\
D(p(t)) &= -ap(t) + bq(t) + \frac{p(t)}{q(t)} D(q(t))
\end{aligned}$$

então

$$\frac{D(p(t)) + ap(t) - bq(t)}{D(q(t))} = \frac{p(t)}{q(t)}$$

Por outro lado denotando

$$q_0(t) = D(q(t)) = Da_0 + Da_1 t + \ldots + Da_{n-1} t^{n-1} + Dt(a_1 + 2a_2 t + \ldots + n a_n t^{n-1})$$

onde $q(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n$ temos que grau$(q_0) \leq$grau(q) o qual é absurdo. Portanto q é um polinômio constante. Se $U_0 + U_1 t + \ldots + U_n t^n$ é uma solução com $n \geq 2$, então, equiparando potências de t, temos $DU_n + aU_n = 0$ e $nU_n Dt + DU_{n-1} + aU_{n-1} = 0$. Multiplicando essa última equação por U_n^{-1} temos que $D(U_n^{-1} U_{n-1}) = -nDt$. Isso implica que $t \in k$, o que é uma contradição. ■

Lema 4.11. Seja $(k, \{\delta_1, \delta_2\})$ um corpo diferencial de característica zero, N uma extensão liouvilliana de k com $C(N, \{\delta_1, \delta_2\}) = C(k, \{\delta_1, \delta_2\})$ e P, Q elementos de N. Suponha que:

(i) $C(N, \{\delta_1, \delta_2\}) = C(N, \{D\})$, onde $D = P\delta_1 + Q\delta_2$

(ii) $PU + QV = 0$, $\delta_2 U = \delta_1 V$ só tem solução trivial $U = V = 0$ em N.

(iii) $PU + QV = -(\delta_1 P + \delta_2 Q)$, $\delta_2 U = \delta_1 V$ tem solução em N.

Então existem U_0, V_0 em k satisfazendo $PU_0 + QV_0 = -(\delta_1 P + \delta_2 Q)$ e $\delta_2 U_0 = \delta_1 V_0$.

Demonstração. Procedemos por indução no grau de transcendência de N sobre k. Portanto, podemos supor que existem U e V em $\hat{k}(t)$ satisfazendo a equação em (iii) onde $\hat{k}$ é uma extensão algébrica de k e ou $\delta_1 t, \delta_2 t \in \hat{k}$ ou $\frac{\delta_1 t}{t}, \frac{\delta_2 t}{t} \in \hat{k}$. Iniciamos mostrando que pode-se encontrar U_0 e V_0 em $\hat{k}$ satisfazendo a equação em (iii). Primeiro assumimos que $\frac{\delta_1 t}{t}$ e $\frac{\delta_2 t}{t}$ estão em $\hat{k}$. Escrevendo U e V em potências decrescentes de t, temos $U = U_n t^n + U_{n-1} t^{n-1} + \dots$ e $V = V_m t^m + V_{m-1} t^{m-1} + \dots$, com os $U_i, V_i \in \hat{k}$. Fazendo a comparação de potencias de t, podemos concluir que

$$PU_0 + QV_0 = -(\delta_1 P + \delta_2 Q)$$

e comparando os coeficientes de t^0 em $\delta_2 U_0 = \delta_1 V_0$ vemos que

$$\delta_2 U_0 = \delta_1 V_0.$$

Agora assumimos que $\delta_1 t$ e $\delta_2 t$ estão em $\hat{k}$. Temos portanto que $Dt \in \hat{k}$. Aplicando δ_1 a $PU + QV = -(\delta_1 P + \delta_2 Q)$ concluímos que $DU + aU = b$ para alguns $a, b \in \hat{k}$. O Lema 4.10 implica que $U = U_0 + U_1 t$ para alguns $U_0, U_1 \in \hat{k}$. Analogamente, pode-se provar que $V = V_0 + V_1 t$, para alguns $V_0, V_1 \in \hat{k}$. Comparando as potências de t na equação (iii) concluímos que $PU_1 + QU_1 = 0$ e $\delta_2 U_1 = \delta_1 V_1$, logo por (ii) $U_1 = V_1 = 0$. Portanto $U = U_0$ e $V = V_0$ pertence a $\hat{k}$. ■

Proposição 4.12. Seja $(k, \{\delta_1, \delta_2\})$ um corpo diferencial de característica zero e sejam P, Q em k. Seja $D = P\delta_1 + Q\delta_2$ e suponha que $C(k, \{\delta_1, \delta_2\}) = C(k, \{D\})$. Se existe uma extensão liouvilliana $(M, \{\delta_1, \delta_2\})$ de k tal que $C(k, \{\delta_1, \delta_2\}) = C(M, \{\delta_1, \delta_2\})$ e tal que $C(M, \{\delta_1, \delta_2\})$ é subconjunto próprio de $C(M, \{D\})$, então existem elementos U, V em k tais que

$$\begin{aligned} PU + QV &= -(\delta_1 P + \delta_2 Q) \\ \delta_2 U &= \delta_1 V. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Demonstração. Pela Proposição 4.8, a estrutura $(k, \{\delta_1, \delta_2\})$ admite uma extensão liouvilliana $(N, \{\delta_1, \delta_2\})$ tal que $C(k, \{\delta_1, \delta_2\}) = C(N, \{\delta_1, \delta_2\}) = C(N, \{D\})$ e elementos não nulos $u_1, u_2 \in N$ tal que $Pu_1 + Qu_2 = 0$ e $\delta_2 u_1 = \delta_1 u_2$. Além disso, devemos assumir que N tem o menor grau de transcendência sobre k de todas essas extensões. Seja $R = \frac{u_1}{Q}$. Vemos que $DR = -(\delta_1 P + \delta_2 Q)R$. Seja $U = \frac{\delta_1(R)}{R}$ e $V = \frac{\delta_2(R)}{R}$. Se N é algébrico sobre k,

então a substituição de U e V por um múltiplo constante de seus traços nos permite chegar à conclusão da proposição. Portanto, assumiremos que N é algébrico sobre $k(t)$, onde ou $\delta_1 t, \delta_2 t \in k$ ou $\frac{\delta_1 t}{t}, \frac{\delta_2 t}{t} \in k$, t é transcendente sobre k, e k é algebricamente fechado sobre N.

Afirmação 4.13. *U e V pertencem em k.*

De fato, assuma primeiro que $\delta_1 t, \delta_2 t \in k$. Temos então que $Dt \in k$. Desde que $\frac{DR}{R} \in k$, o Teorema 2.31 implica que $R \in k$ para alguns inteiros, portanto, $U = \frac{\delta_1 R}{R}$ e $V = \frac{\delta_2 R}{R}$ pertencem a k.
Agora assumindo que $\frac{\delta_1 t}{t}, \frac{\delta_2 t}{t} \in k$, já que $\frac{Dt}{t} \in k$ pelo Teorema 2.31 $R^n t^m \in k$, onde m, n são inteiros, com $m \neq 0$. logo escrevendo $R^n t^m = c \in k$, e considerando $1 \leq i \leq 2$ temos que

$$\frac{\delta_i(R)}{R} = \frac{\delta_i(c)}{c} - m\frac{\delta_i t}{t} \in k.$$

Por conseguinte $U, V \in k$. ■

4.3 Equações diferenciais lineares

Seja k_0 um corpo diferencial ordinário com derivação D e seja

$$L(y) = D^{(n)}y + a_{n-1}D^{(n-1)}y + \cdots + a_0 y = 0$$

uma equação diferencial linear com coeficientes em k_0. Vamos construir formalmente um corpo diferencial k com $n+1$ derivações $\Delta = \{\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\}$ como segue. Seja $k = k_0(y_0, \ldots, y_{n-1})$, onde $y_0, \ldots, y_{n-1}$ são indeterminados algebricamente independentes. Definimos $\delta_{-1}|_{k_0} = D$ e estendida em k pela regra $\delta_{-1}(y_i) = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Para $j = 0, \ldots, n-1$, seja δ_j zero em k_0 e $\delta_j(y_i) = 1$ se $i = j$ e $\delta_j(y_i) = 0$ se $i \neq j$. Agora estendemos D para k (e usando a mesma letra para denotar a extensão) por

$$D = \delta_{-1} + y_1\delta_0 + \cdots + y_{n-1}\delta_{n-2} + (-a_{n-1}y_{n-1} - \cdots - a_0 y_0)\delta_{n-1}.$$

Observe que

$$L(y_0) = D^{(n)}y_0 + a_{n-1}D^{(n-1)}y_0 + \cdots + a_0 y_0 = 0$$

pois

$$\begin{aligned} Dy_0 &= \delta_{-1}(y_0) + y_1\delta_0(y_0) + \cdots + y_{n-1}\delta_{n-2}(y_0) + (-a_{n-1}y_{n-1} - \cdots - a_0y_0)\delta_{n-1}(y_0) \\ &= y_1\delta_0 y_0 = y_1 \\ D^{(2)}y_0 &= Dy_1 = \delta_{-1}y_1 + y_1\delta_0 y_1 + \cdots + y_{n-1}\delta_{n-2}y_1 + (-a_{n-1}y_{n-1} - \cdots - a_0y_0)\delta_{n-1}y_1 \\ &= y_2\delta_1 y_1 = y_2 \\ &\vdots \\ D^{(n-1)}y_0 &= y_{n-1}..... \\ D^{(n)}y_0 &= -a_{n-1}y_{n-1} - \cdots - a_0y_0 \end{aligned}$$

assim o elemento $y_0 \in k$ satisfaz $L(y_0) = 0$.

Para o seguinte lema utilizaremos a definição do **adjunto de** L definido como em [9] (ver pag. 38) da seguinte maneira

$$L^*(z) = (-1)^n D^{(n)}z + (-1)^{n-1}D^{(n-1)}(a_{n-1}z) + \cdots - D(a_1z) + a_0z.$$

Lema 4.14. Seja (k, Δ) como acima, e seja (F, Δ) uma extensão de (k, Δ) contendo elementos $u_i, -1 \leq i \leq n-1$, tais que

(i) $u_{-1} + y_1u_0 + \cdots + y_{n-1}u_{n-2} + (-a_{n-1}y_{n-1} - \cdots - a_0y_0)u_{n-1} = 0$

(ii) $\delta_i u_j = \delta_j u_i$, $-1 \leq i, j \leq n-1$.

Então u_{n-1} satisfaz $L^*(u_{n-1}) = 0$, onde $L^*(z)$ é o adjunto de $L(y)$.

Demonstração. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

e seja B a matriz $(n+1) \times (n+1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Sejam U e Y os $(n+1) \times 1$ vetores coluna $(u_{-1}, \dots, u_{n-1})^T$ e $(1, y_0, \dots, y_{n-1})^T$ respectivamente. Note que $D((y_0, y_1, \dots, y_{n-1})^T) = A(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})^T$ e esta é a forma matricial de $L(y) = 0$. Por (i) temos

$$\begin{aligned} \langle BY, U\rangle &= \langle (1, y_0, \dots, y_{n-1}, -a_0y_0 - \cdots - a_{n-1}y_{n-1})^T, (u_{-1}, \dots, u_{n-1})^T\rangle \\ &= u_{-1} + u_0y_1 + \cdots + u_{n-2}y_{n-1} + (-a_0y_0 - \cdots - a_{n-1}y_{n-1})u_{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual. Aplicando δ_i nessa ultima equação obtemos

$$0 = \delta_i(\langle BY, U \rangle) = \langle \delta_i(BY), U \rangle + \langle BY, \delta_i U \rangle.$$

Devemos calcular cada um desses termos separadamente. Para $i = 1, \ldots, n-1$, δ_i anula cada entrada em , temos que

$$\begin{aligned} \delta_i(BY) &= \delta_i((1, y_1, \ldots, y_{n-1}, -a_0 y_0 - \cdots - a_{n-1} y_{n-1})^T) \\ &= (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{(i+1)-\text{entradas}}, 0, \ldots, 0, -a_i) \\ &= B(\delta_i Y). \end{aligned}$$

Por (ii), temos que $\delta_i(U) = (\delta_{-1} u_i, \ldots, \delta_{n-1} u_i)^T$. Portanto, para $i = 0, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_i(\langle BY, U \rangle) \\ &= \langle B(\delta_i Y), U \rangle + \langle BY, (\delta_{-1} u_i, \ldots, \delta_{n-1} u_i)^T \rangle \\ &= \langle \delta_i Y, B^T U \rangle + D u_i = (B^T U)_{i+2} + D u_i \end{aligned}$$

onde $(X)_j$ denota a j-ésima entrada de X. Consequentemente, temos a seguinte relação

$$D \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = -A^T \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

de onde pode-se concluir que $L^*(u_{n-1}) = 0$. ■

Proposição 4.15. Seja (k, Δ), como o Lema 4.14, com $a_1 = 0$ e $n = 2$. Suponha que $C(k, \Delta) = C(k_0, \Delta)$. Se existe uma extensão liouvilliana (M, Δ) de (k, Δ) tal que $C(k, \Delta) = C(M, \Delta) \neq C(M, \{D\})$, então todas as soluções de $L(y) = 0$ são liouvillianas sobre k.

Demonstração. A suposição implica que $L(y) = D^2 y + a_0 y$ e portanto $L^*(z) = D^2 z + a_0 z$. A Proposição 4.8 implica que existe uma extensão liouvilliana (N, Δ) de (k, Δ) tal que $C(N, \Delta) = C(N, \{D\}) = C(k, \Delta)$, e existem elementos u_{-1}, u_0 e u_1 m N, nem todos nulos, tais que

$$u_{-1} + u_0 y_1 + u_1(-a_0 y_0) = 0, \tag{4.6}$$

e $\delta_i u_j = \delta_j u_i$ para $-1 \leq i, j \leq 1$. O Lema 4.14 implica que $D^2 u_1 + a_0 u_1 = 0$, i.e., u_1 é solução de $L(y) = 0$. Provaremos que u_1 é algébrico sobre k. Procedendo por indução no grau de transcendência de N sobre k, podemos supor que N é algébrico sobre $\overline{k}(t)$ onde $\delta_i t \in \overline{k}$ ou $\dfrac{\delta_i t}{t} \in \overline{k}$ para $i = -1, 0, 1$ e $\overline{k}$ é algébrico sobre k.

- Primeiro assumimos que $\dfrac{\delta_i t}{t} \in \overline{k}$ para $i = -1, 0, 1$. Como $a_1 = 0$, temos que o determinante Wronskiano de cada duas soluções de $L(y) = 0$ é constante. De fato, sejam f, g duas soluções de $L(y) = 0$, então

$$\begin{aligned} D(W_D(f,g)) &= D\left(\begin{vmatrix} f & g \\ Df & Dg \end{vmatrix}\right) \\ &= D(fDg - gDf) \\ &= DfDg + fD^2g - DgDf - gD^2f \\ &= f(-a_0 g) - g(-a_0 f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

  Assim o determinante Wronskiano de cada duas soluções de $L(y) = 0$ é constante, e como u_1 e y_0 são soluções de $L(y) = 0$ temos que

$$D\left(\frac{u_1}{y_0}\right) = \frac{Du_1 y_0 - u_1 Dy_0}{y_0^2} = \frac{c}{y_0^2}$$

  onde c é uma constante.
  Se $c = 0$, então $\dfrac{u_1}{y_0}$ é uma constante, segue-se que $u_1 \in \overline{k}$, em particular é algébrico sobre k. Então podemos supor $c \neq 0$, note que $\dfrac{D(y_0)}{y_0}, \dfrac{D(y_1)}{y_1} \in \overline{k}$, então

$$c\frac{D(y_0)}{y_0} + \frac{D(y_1)}{y_1} + D\left(\frac{u_1}{y_0}\right) \in \overline{k}.$$

  E desde que

$$\frac{Dt}{t} = \frac{\delta_{-1}(t)}{t} + y_1\frac{\delta_0(t)}{t} - a_0 y_0 \frac{\delta_1(t)}{t} \in \overline{k},$$

  o Teorema 2.31 implica que $\dfrac{u_1}{y_0}$ é algébrico sobre $\overline{k}$, mas como y_0 é algébrico sobre $\overline{k}$, temos que u_1 é algébrico sobre $\overline{k}$. Como $\overline{k}$ é algébrico sobre k, temos que u_1 é algébrico sobre k.

- Agora assuma que $\delta_i t \in \overline{k}$ para $i = -1, 0$ e 1. Como $D\left(\dfrac{u_1}{y_0}\right) \in \overline{k}$, o Teorema 2.31 implica que existe c_0 constante tal que $\dfrac{u_1}{y_0} + c_0 t \in \overline{k}$. Se $c_0 = 0$, então $u_1 \in \overline{k}$, então supondo $c_0 \neq 0$. Mostraremos que isso leva a uma contradição. De fato seja $\dfrac{u_1}{y_0} = -c_0 t + d$, onde $d \in \overline{k}$, escrevendo $T = -\dfrac{c_0}{c}t + \dfrac{d}{c}$ veja que

$$\frac{1}{y_0^2} = \frac{1}{c}D\left(\frac{u_1}{y_0}\right) = DT$$

  além disso, $v_{-1} = \delta_{-1}\left(\dfrac{u_1}{y_0}\right) = -c_0\delta_{-1}t + \delta_{-1}d, v_0 = \delta_0\left(\dfrac{u_1}{y_0}\right) = -c_0\delta_0 t + \delta_0 d, v_1 = \delta_1\left(\dfrac{u_1}{y_0}\right) = -c_0\delta_1 t + \delta_1 d \in \overline{k}$. Note também que para $-1 \leq i, j \leq 1$ temos

$$\delta_i(v_j) = \delta_i\left(\delta_j\left(\frac{u_1}{y_0}\right)\right) = \delta_j\left(\delta_i\left(\frac{u_i}{y_0}\right)\right) = \delta_j(v_i)$$

e a seguinte equação é satisfeita

$$v_{-1} + y_1 v_0 - a_0 y_0 v_1 = \frac{1}{y_0^2} \tag{4.7}$$

aplicando δ_1 temos

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1 v_{-1} + v_0 + y_1 \delta_1 v_0 - a_0 y_0 \delta_1 v_1 \\ &= \delta_{-1} v_1 + v_0 + y_1 \delta_0 v_1 - a_0 y_0 \delta_1 v_1 \\ &= D v_1 + v_0. \end{aligned}$$

Portanto $Dv_1 = -v_0$. Aplicando δ_0 a (4.7) concluímos que $Dv_0 = a_0 v_1 - \frac{2}{y_0^3}$. Assim $D^2 v_1 - a_0 v_1 = \frac{2}{y_0^3}$, e tomando $w = \frac{v_1}{y_0} \in \overline{k}$ vemos que $D\left[\frac{Dwy_0^2}{2}\right] = \frac{1}{y_0^2}$. Portanto $\frac{Dwy_0^2}{2} - T$ é uma constante. Já que $\frac{Dwy_0^2}{2} \in \overline{k}$ temos que $T = -\frac{c_0}{c}t + \frac{d}{c} \in \overline{k}$, e como $\frac{c_0}{c}, \frac{d}{c} \in \overline{k}$ temos que $t \in \overline{k}$ o qual é uma contradição.

Assim temos que u_1 é algébrico sobre k. Se u_1 e y_0 são linearmente independentes então $\overline{k}$ contém a extensão Picard-Vessiot (ver definição 3.21) de k_0 correspondente a $L(y) = 0$. Como o grau de transcendência de $\overline{k}$ sobre k_0 é 2, pode-se concluir que a componente conexa da identidade do Grupo de Galois de $L(y) = 0$ é solúvel (ver página 373 em [5]), e portanto todas as soluções de $L(y) = 0$ são liouvillianas. Para completar a prova, vamos mostrar que a suposição de que u_1 e y_0 são linearmente dependentes leva a uma contradição. Primeiro observamos que, aplicando δ_1 a (4.6), concluímos que $Du_1 = -u_0$. Portanto, se $u_1 = cy_0$ para alguma constante c, por (4.6) temos que

$$u_{-1} - c(Dy_0)^2 - a_0 c y_0^2 = 0. \tag{4.8}$$

Já que $\delta_0 u_{-1} = \delta_{-1} u_0 = \delta_{-1}(cDy_0)$ e $\delta_1 u_{-1} = \delta_{-1} u_1 = \delta_{-1}(cy_0) = 0$, temos que u_{-1} é algébrico sobre $C(k, \{\delta_0, \delta_1\}) = k_0$. Observe que $c \neq 0$ (caso contrário $u_{-1} = u_0 = u_1 = 0$), então (4.8) implica que y_0 e $Dy_0 = y_1$ são algebricamente dependentes sobre k_0, uma contradição. ■

4.4 O Teorema de Darboux

Sejam P e Q polinômios em $\mathbb{C}[x, y]$ e consideremos a derivação $D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$. Dizemos que $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ é um **ponto não singular** de D se $P(x_0, y_0) \neq 0$ ou $Q(x_0, y_0) \neq 0$.

Lema 4.16. *Sejam D como acima e (x_0, y_0) um ponto não singular de D. Sejam H_1 e H_2 polinômios tais que H_1 divide DH_1, H_2 divide DH_2, $H_1(x_0, y_0) = H_2(x_0, y_0) = 0$ e H_1 é irredutível. Então H_1 divide H_2.*

Demonstração. Suponha que $P(x_0, y_0) \neq 0$. O caso $Q(x_0, y_0) \neq 0$ é análogo. Seja $R(x)$ o resultante de H_1 e H_2 com respeito a y. Pode-se escrever, pela Proposição 2.40, $R(x) = A_0H_1 + B_0H_2$ para algum $A_0, B_0 \in \mathbb{C}[x, y]$. Observe que $R(x_0) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} DR &= PR' \\ &= (DA_0)H_1 + (DB_0)H_2 + A_0DH_1 + B_0DH_2 \\ &= A_1H_1 + B_1H_2 \end{aligned}$$

para algum $A_1, B_1 \in \mathbb{C}[x, y]$, já que H_i divide DH_i, $i = 1, 2$. Como $P(x_0, y_0) \neq 0$, temos que $R'(x_0) = 0$ e aplicando D novamente, obtemos $(DP)R' + P^2R'' = A_2H_1 + B_2H_2$, para algum $A_2, B_2 \in \mathbb{C}[x, y]$. Esta equação implica que $R''(x_0) = 0$. Fazendo o processo indutivamente obtemos que $R^{(n)}(x_0) = 0$ para todo n, então $R(x) = 0$. Portanto, pela Proposição 2.39 H_1 e H_2 tem um fator comum e sendo H_1 irredutível temos a conclusão. ■

Teorema 4.17. (**Teorema de Darboux**) Sejam $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ e $D = P\dfrac{\partial}{\partial x} + Q\dfrac{\partial}{\partial y}$. Se $G_1, \ldots, G_m$ são polinômios irredutíveis relativamente primos em $\mathbb{C}[x, y]$ tais que G_i divide DG_i, para $i = 1, \ldots, m$ então $m < \dfrac{d(d+1)}{2} + 2$, onde $d = \text{máx}(\text{grau } P, \text{grau } Q)$ ou existem inteiros n_i, não todos nulos, tais que $Dw = 0$ onde $w = \prod_{i=1}^{m} {G_i}^{n_i}$. Neste último caso, se G é um polinômio irredutível tal que G divide a DG, então ou existem c_1, c_2 em $\mathbb{C}$, ambos não nulos tal que G divide $c_1 \prod_{i \in I} {G_i}^{n_i} - c_2 \prod_{j \in J} {G_j}^{-n_j}$, onde $I = \{i;\, n_i \geq 0\}$ e $J = \{j;\, n_j > 0\}$ ou G divide a $\text{MDC}(P, Q)$.

Demonstração. Sejam $G_1, \ldots, G_m$ como acima. Assuma que $m \geq \dfrac{d(d+1)}{2} + 2$.

Afirmação 4.18. *Os polinômios* $\dfrac{DG_i}{G_i}$ *tem grau menor ou igual* $d - 1$.

Seja $i \in 1, \ldots, m$ fixo. Sendo

$$G_i = \sum_{(r,s) \in A_i} a_{(r,s)} x^r y^s$$

com $a_{(r,s)} \in \mathbb{C}$ e $A_i = \{(r, s) \in \mathbb{Z}^2 \ ;\ 0 \leq r, s, r + s \leq \text{grau}(G_i)\}$, temos que

$$DG_i = P(x, y) \sum_{(r,s) \in A_i} r a_{(r,s)} x^{r-1} y^s + Q(x, y) \sum_{(r,s) \in A_i} s a_{(r,s)} x^r y^{s-1}.$$

Assim $\text{grau}(DG_i) \leq d + \text{grau}(G_i) - 1$ e

$$\text{grau}\left(\frac{DG_i}{G_i}\right) = \text{grau}(DG_i) - \text{grau}(G_i) \leq d - 1.$$

Além disso, o espaço vetorial dos polinômios em duas variáveis de grau menor ou igual a $d - 1$ tem dimensão $\dfrac{d(d+1)}{2}$. Então $\left\{\dfrac{DG_i}{G_i}\right\}_{i=1}^{m}$ tem pelo menos 2 elementos que podem ser escritos como combinação linear dos outros $m - 2$ elementos. Pois $m - 2 \geq \dfrac{d(d+1)}{2}$,

sem perda de geralidade, existem $r_1, \ldots, r_{m-1} \in \mathbb{C}$ não todos nulos, e $s_1, \ldots, s_{m-1} \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que

$$\frac{DG_{m-1}}{G_{m-1}} = \sum_{i=1}^{m-2} r_i \frac{DG_i}{G_i}$$

$$\frac{DG_m}{G_m} = \sum_{i=1}^{m-2} s_i \frac{DG_i}{G_i}.$$

Escrevendo $r_{m-1} = -1, r_m = 0, s_{m-1} = 0, s_m = -1$ temos que $(r_1, \ldots, r_m), (s_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{C}^m$ são $\mathbb{C}$-linearmente independentes, e

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \frac{DG_i}{G_i} = \sum_{i=1}^{m} s_i \frac{DG_i}{G_i} = 0.$$

Sejam $k = \{w \in \mathbb{C}(x,y);\ Dw = 0\}$ e $K = \mathbb{C}(x,y)$. Usaremos as notações e resultados da seção 1 em [14]. Sejam $w_1, w_2 \in \Omega_{K/k}$ definidos por

$$w_1 = \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{dG_i}{G_i} \ ,\ w_2 = \sum_{i=1}^{m} s_i \frac{dG_i}{G_i},$$

e seja $\overline{D} = \frac{1}{P} D$.

Afirmação 4.19. $\overline{D}^1(w_1) = \overline{D}^1(w_2) = \overline{D}^1(dx) = 0$

provemos que $\overline{D}^1(w_1) = 0$. De fato

$$\begin{aligned}
\overline{D}^1(w_1) &= \overline{D}^1\left(\sum_{i=1}^{m} r_i \frac{dG_i}{G_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} \overline{D}^1\left(r_i \frac{dG_i}{G_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \overline{D}\left(r_i \frac{1}{G_i}\right) dG_i + \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{1}{G_i} \overline{D}^1(dG_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} -r_i \frac{\overline{D}G_i}{{G_i}^2} dG_i + \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{1}{G_i} d(\overline{D}G_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{-r_i}{P} \frac{DG_i}{G_i} \frac{dG_i}{G_i} + \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{1}{G_i} d\left(\frac{1}{P}\right) DG_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{P} \frac{1}{G_i} d(DG_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{-r_i}{P} \frac{DG_i}{G_i} \frac{dG_i}{G_i} + d\left(\frac{1}{P}\right) \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{DG_i}{G_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{P} \frac{1}{G_i} d\left(\frac{DG_i}{G_i} G_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{-r_i}{P} \frac{DG_i}{G_i} \frac{dG_i}{G_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{P} \frac{1}{G_i} d\left(\frac{DG_i}{G_i}\right) G_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{P} \frac{1}{G_i} \frac{DG_i}{G_i} dG_i \\
&= \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{m} d\left(r_i \frac{DG_i}{G_i}\right) = \frac{1}{P} d\left(\sum_{i=1}^{m} r_i \frac{DG_i}{G_i}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Para mostrar $\overline{D}^1(w_2) = 0$ basta trocar r_i por s_i na prova acima. Agora provaremos que $\overline{D}^1(dx) = 0$. De fato

$$\overline{D}^1(dx) = d(\overline{D}x) = d\left(\frac{1}{P}Dx\right) = d\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{Q}{P}\frac{\partial x}{\partial y}\right) = d(1) = 0.$$

Veja que $\text{trdeg}_{\mathbb{C}}K = 2$, pois x, y são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$, e como $\mathbb{C} \subset k \subset K$, temos que $\text{trdeg}_k K \leq 2$. Assim existem $\{n_i\}_{i\in I} \subset K$ algebricamente independentes sobre k, com $\text{Card}(I) \leq 2$, tais que K é extensão algébrica de $k(\{n_i\}_{i\in I})$, em particular é separavelmente algébrica sobre $k(\{n_i\}_{i\in I})$ e pela Proposição 2.27 temos que $\{dn_i\}_{i\in I}$ é uma K-base de $\Omega_{K/k}$. Logo $\dim_K \Omega_{K/k} \leq 2$. Agora como $w_1, w_2, dx \in \Omega_{K/k}$ são linearmente dependentes sobre K e $\overline{D}^1(w_1) = \overline{D}^1(w_2) = \overline{D}^1(dx) = 0$, temos da Proposição 2.30 que existem c_1, c_2, c_3 em k tais que

$$0 = c_1 dx + c_2 w_1 + c_3 w_2 = d(c_1 x) + \sum_{i=1}^{m}(c_2 r_i + c_3 s_i)\frac{dG_i}{G_i}.$$

Sejam $t_1, \ldots, t_n$ uma base do $\mathbb{Q}$-espaço vetorial gerado por $\{c_2 r_i + c_3 s_i\}_{i=1}^m$ e seja

$$c_2 r_i + c_3 s_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} t_j$$

onde p_{ij} são inteiros não todos zeros. Defina $F_j = \prod_{i=1}^{m} G_i^{p_{ij}}$ e veja que

$$\frac{dF_j}{F_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_{ij}\prod_{i=1}^{m} {G_i}^{P_{ij}-1} dG_i}{\prod_{i=1}^{m} {G_i}^{P_{ij}}} = \sum_{i=1}^{m} P_{ij}\frac{dG_i}{G_i}.$$

Então

$$\begin{aligned}
0 &= d(c_1 x) + \sum_{i=1}^{m}(c_2 r_i + c_3 s_i)\frac{dG_i}{G_i} \\
&= d(c_1 x) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{N} t_j P_{ij}\frac{dG_i}{G_i} \\
&= d(c_1 x) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{N} t_j P_{ij}\frac{dG_i}{G_i} \\
&= d(c_1 x) + \sum_{j=1}^{n}\frac{t_j}{N}\sum_{i=1}^{m} P_{ij}\frac{dG_i}{G_i} \\
&= d(c_1 x) + \sum_{j=1}^{n}\frac{t_j}{N}\frac{dF_j}{F_j}.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.28 temos que $F_1, \ldots, F_n$ são algébricos sobre k, e lembrando que o corpo de constantes é algebricamente fechado, $F_j \in k$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Logo $\overline{D}F_i = DF_i = 0$. Desde que algum p_{ij} é diferente de zero, sem perda de generalidade

podemos supor $p_{11} \neq 0$. Então tomando $w = F_1$ temos a conclusão da primeira parte do teorema. Agora seja G um polinômio irredutível tal que G divide DG e sejam

$$F = \prod_{i \in I} G_i^{n_i} \text{ e } H = \prod_{j \in J} G_j^{-n_j}.$$

Assumindo que G não divide $MDC(P, Q)$ temos que mostrar que existem c_1, c_2 em $\mathbb{C}$ tal que G divide $c_1F - c_2H$. Se G divide H então tomando $c_1 = 0$ e $c_2 = -1$ temos a conclusão final do teorema. Portanto, pode-se assumir que G não divide H, e como H não divide G, pois é irredutível, temos que

$$G(x, y) = H(x, y) = 0$$

tem só um numero finito de soluções. Além disso, desde que temos infinitos pontos satisfazendo

$$P(x, y) \neq \text{ ou } Q(x, y) \neq 0,$$

existe pelo menos um ponto (x_0, y_0) tal que $G(x_0, y_0) = 0$, $H(x_0, y_0) \neq 0$ e também $P(x_0, y_0) \neq 0$ ou $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Seja $c_1 = H(x_0, y_0)$ e $c_2 = F(x_0, y_0)$ e definindo

$$S(x, y) = c_1F - c_2H.$$

Veja que $S(x_0, y_0) = 0$, e além disso $D\left(\frac{S}{H}\right) = 0$, pois

$$\begin{aligned} D\left(\frac{S}{H}\right) &= \frac{D(S)H - SD(H)}{H^2} \\ &= \frac{(c_1D(F) - c_2D(H))H - (c_1F - c_2H)D(H)}{H^2} \\ &= \frac{c_1(D(F)H - FD(H))}{H^2} \\ &= D\left(\frac{F}{H}\right) = Dw = 0. \end{aligned}$$

Em particular $HD(S) = SD(H)$. Equivalentemente S divide $HD(S)$. E como $\text{MDC}(S, H) = 1$ temos que S divide $D(S)$ e aplicando o Lema 4.16, com $H_1 = G$ e $H_2 = S$ concluímos que G divide S. ■

Corolário 4.20. Sejam $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ e $D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$. Ou existem no máximo um número finito de polinômios irredutíveis G tal que G divide DG ou existe uma função racional não nulo W tal que $DW = 0$. Em ambos os casos existe um inteiro N, dependendo de D, tal que se G é um polinômio irredutível e G divide DG então $\text{grau}(G) \leq N$.

5 Demonstração dos teoremas principais

Teorema 5.1. Seja $P(x,y), Q(x,y)$ polinômios em duas variáveis e seja $(\overline{x}(t), \overline{y}(t))$ uma solução do sistema (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= P(x,y) \\ \frac{dy}{dz} &+ Q(x,y) \end{aligned}$$

a qual é analítica em algum aberto não vazio $\mathscr{O} \subset \mathbb{C}$. Se existe uma função liouvilliana não nula $F(x,y)$ analítica em algum aberto de $\mathbb{C}^2$ contendo $\mathscr{G} = \{(\overline{x}(z), \overline{y}(z));\ z \in \mathscr{O}\}$, e $F|_{\mathscr{G}} \equiv 0$, então temos que uma e só uma das seguintes afirmações é valida:

1. Existe G polinômio não nulo tal que $G(\overline{x}(z), \overline{y}(z)) = 0$.
2. A 1-forma diferencial $Q(x,y)dx - P(x,y)dy$ tem um fator integrante dado por
$$R(x,y) = \exp\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} U(x,y)dx + V(x,y)dy\right], \tag{5.1}$$
onde U, V são funções racionais com $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x}$ tal que essa integral de linha é bem definida.

Demonstração. Como $(\overline{x}(z), \overline{y}(z))$ é solução de (2.5) e existe uma função liouvilliana $F(x,y)$, não nula, analítica num aberto contendo $\mathscr{G}$ e satisfazendo $F|_{\mathscr{G}} \equiv 0$, então $(\overline{x}(z), \overline{y}(z))$ satisfaz uma relação liouvilliana. E supondo que não existe polinômio não nulo tal que $G(\overline{x}(z), \overline{y}(z)) = 0$, i.e., $\overline{x}(z)$ e $\overline{y}(z)$ não são algebricamente dependentes sobre $\mathbb{C}$ então $(\overline{x}(z), \overline{y}(z))$ satisfaz a suposição básica. Portanto, $(\overline{x}(z), \overline{y}(z))$ satisfazem as hipóteses da Proposição 4.4. Consequentemente (2.5) tem uma integral primeira liouvilliana. Observe que, considerando $k = \mathbb{C}(x,y)$, $\delta_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ e $\delta_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ temos satisfeitas as hipóteses da Proposição 4.12. Assim concluímos que existem $U, V \in k$ tal que (4.5) é satisfeita. Definimos

$$R(x,y) = \exp\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} U(x,y)dx + V(x,y)dy\right].$$

Note que R é bem definida por (4.5) e pelo Exemplo 2.22. Não é difícil ver R é um fator integrante da forma diferencial $Q(x,y)dx - P(x,y)dy$, isto é, $\dfrac{\partial(RP)}{\partial x} = -\dfrac{\partial(RQ)}{\partial y}$. ■

Corolário 5.2. O sistema de equações diferenciais (2.5) tem uma integral primeira liouvilliana se, e só se, a forma diferencial $Q(x,y)dx - P(x,y)dy$ tem um fator integrante da forma (5.1). Nesse caso

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} R(x,y)Q(x,y)dx - R(x,y)P(x,y)dy$$

é uma integral primeira liouvilliana.

Demonstração.
($\Longleftarrow$) Como temos a existência de um fator integrante da forma (5.1) isto garante a existência de uma integral primeira liouvilliana.
($\Longrightarrow$) Agora suponha que (2.5) tem uma integral primeira liouvilliana F analítica em algum aberto não vazio $U \subset \mathbb{C}^2$. Para fazer a demonstração vamos tomar dois casos:
Caso 1: Existe uma solução $(x(z), y(z))$ de (2.5) passando por U tal que, não existe polinômio G não nulo tal que $G(x(z), y(z)) = 0$. Temos do Teorema 5.1 a conclusão do corolário.
Caso 2: Para toda solução $(x(z), y(z))$ de (2.5) passando por U, existe um polinômio G não nulo tal que $G(x(z), y(z)) = 0$. Logo sem perda de geralidade podemos assumir que para cada solução de (2.5) passando por U existe polinômio irredutível anulando-a. Observe que G divide DG. De fato, seja $(x(z), y(z))$ uma solução de (2.5) passando por U e seja G o polinômio irredutível tal que $G(x(z), y(z)) = 0$. Então

$$\begin{aligned} DG(x(z), y(z)) &= P(x(z), y(z))\frac{\partial G}{\partial x}(x(z), y(z)) + Q(x(z), y(z))\frac{\partial G}{\partial y}(x(z), y(z)) \\ &= \frac{dx}{dz}\frac{\partial G}{\partial x}(x(z), y(z)) + \frac{dy}{dz}\frac{\partial G}{\partial y}(x(z), y(z)) \\ &= \frac{\partial G}{\partial x}(x(z), y(z))\frac{dx}{dz} + \frac{\partial G}{\partial y}(x(z), y(z))\frac{dy}{dz} \\ &= \frac{d}{dz}\left(G(x(z), y(z))\right) = 0. \end{aligned}$$

Como G é irredutível, temos que G divide DG. Assim existira um número infinito de polinômios irredutíveis satisfazendo a condição anterior. Consequentemente o número de polinômios primos entre si satisfazendo as hipóteses do Teorema de Darboux é tão grande quanto se queira. Portanto existe um elemento w tal que

$$w(X, Y) = \prod_{i=1}^{n} G_i^{n_i}$$

onde os G_i são polinômios em x e y com coeficientes constantes, satisfazendo

$$Dw = P\frac{\partial w}{\partial x} + Q\frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{5.2}$$

A fim de mostrar que w é uma integral primeira de (2.5) precisamos verificar que w é constante ao longo das soluções de (2.5) que estejam em seu domínio. De fato, seja $(x(z), y(z))$ uma solução de (2.5) pertencente ao domínio de w. Então

$$\begin{aligned} Dw(x(z), y(z)) &= P(x(z), y(z))\frac{\partial w}{\partial x}(x(z), y(z)) + Q(x(z), y(z))\frac{\partial w}{\partial y}(x(z), y(z)) \\ &= \frac{dx}{dz}\frac{\partial w}{\partial x}(x(z), y(z)) + \frac{dy}{dz}\frac{\partial w}{\partial y}(x(z), y(z)) \\ &= \frac{d}{dz}\left(w(x(z), y(z))\right) \end{aligned}$$

e de (5.2) temos que w é constante ao longo de $(x(z), y(z))$.

Afirmação 5.3.

$$R = \frac{1}{Q}\frac{\partial F}{\partial x} \tag{5.3}$$

é um fator integrante de (2.5).

De fato, observe que usando (5.3) nas derivadas parciais e realizando uma substituição conveniente temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(PR)}{\partial x} + \frac{\partial(QR)}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial x}R + P\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}R + Q\frac{\partial R}{\partial y} \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}R + \frac{P}{Q^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)Q - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x}\right] \\
&\quad + \frac{\partial Q}{\partial y}R + \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)Q - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}\right] \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}R + \frac{P}{Q}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{RP}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x} \\
&\quad + \frac{\partial Q}{\partial y}R + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}R \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}R + \frac{P}{Q}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{RP}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Por outro lado, por (5.2) e (5.3) temos que

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{RP}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{5.5}$$

Agora desde que F é analítica e substituindo (5.3) e (5.5) em (5.4) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(PR)}{\partial x} + \frac{\partial(QR)}{\partial y} &= \frac{1}{Q}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{P}{Q}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\
&= \frac{1}{Q}\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0
\end{aligned}$$

Desde que $R \in \mathbb{C}(x, y)$, esse claramente pode ser escrito na forma (5.1). ■

Teorema 5.4. Seja $\overline{y}(z)$ uma solução não nulo de

$$L(y) := y'' + p(z)y' + q(z)y = 0, \tag{5.6}$$

onde $p(z)$ e $q(z)$ são funções liouvillianas de z, e suponha que $\overline{y}(z), p(z)$ e $q(z)$ são analíticas em algum aberto $\mathscr{O}$. Se existe uma função liouvilliana não nula F de três variáveis analíticas em algum aberto $U \subset \mathbb{C}^3$, contendo $\mathscr{G} = \{(z, \overline{y}(z), \overline{y}'(z));\ z \in \mathscr{O}\}$ e $F|_{\mathscr{G}} = 0$ então $y(z)$ é uma função liouvilliana de z.

Demonstração. Seja k_0 uma extensão liouvilliana do corpo dos números complexos contendo $p(z)$ e $q(z)$ e $h(z)$, onde $h(z) = \exp\left(-\int_{z_0}^{z} \frac{p(w)}{2} dw\right)$. Observe que

$$2h'(z) + p(z)h(z) = 0 \tag{5.7}$$

e considerando a equação

$$\overline{L}(w) = w'' + a_0 w, \tag{5.8}$$

onde

$$a_0 = \frac{h''(z) + p(z)h'(z) + q(z)h(z)}{h(z)} \tag{5.9}$$

temos a seguinte afirmação:

Afirmação 5.5. *$\overline{w}$ é solução de (5.8), onde*

$$\overline{y} = h(z)\overline{w}. \tag{5.10}$$

De fato, derivando até segundo ordem em (5.10) obtemos

$$\begin{aligned} \overline{y}' &= h'(z)\overline{w} + h(z)\overline{w}' \\ \overline{y}'' &= h''(z)\overline{w} + 2h(z)'\overline{w}' + h(z)\overline{w}''. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Como $\overline{y}$ é solução de (5.6) e substituindo (5.10) e (5.11) em (5.6) temos

$$\begin{aligned} 0 &= L(\overline{y}) = \overline{y}'' + p(z)\overline{y}' + q(z)\overline{y} \\ &= h''(z)\overline{w} + 2h'(z)\overline{w}' + h(z)\overline{w}'' + p(z)[h'(z)\overline{w} + h(z)\overline{w}'] + q(z)h(z)\overline{w} \\ &= h(z)\overline{w}'' + (2h'(z) + p(z)h(z))\overline{w}' + [h''(z) + p(z)h'(z) + q(z)h(z)]\overline{w}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Agora substituindo (5.7) e (5.9) e dividindo por $h(z)$ em (5.12) obtemos

$$0 = \overline{w}'' + a_0\overline{w} = \overline{L}(\overline{w}).$$

Observe que a_0 é analítica em $\mathscr{O}$ e liouvilliana, além disso $a_0 \in k_0$. Portanto esta modificação em $L(y)$ não afeta a validez de nossa hipótese. A seguir vamos escrever L e $\overline{y}$ em vez de $\overline{L}$ e $\overline{w}$, respectivamente. A demostração será divida em dois casos:

Caso 1: se $\overline{y}$ e $\dfrac{d\overline{y}}{dz}$ são algebricamente dependentes sobre k_0, então existe um polinômio de duas variáveis P_1, não identicamente zero, com coeficientes em k_0 tal que $P_1(\overline{y}, \frac{d\overline{y}}{dz}) = 0$. Seja $f \in k_0[\overline{y}]$ o polinômio minimal de $\frac{d\overline{y}}{dz}$, tal que $f\left(\frac{d\overline{y}}{dz}\right) = 0$. Escrevendo

$$f(x) = \sum_{(i,j)\in A} b_{ij}\overline{y}^i x^j$$

onde $A \subset \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ é finito. Podemos notar que $\frac{d}{dz}\left(f\left(\frac{d\overline{y}}{dz}\right)\right) = 0$, dessa forma

$$\sum_{(i,j)\in A} b'_{ij}\overline{y}^i \left(\frac{d\overline{y}}{dz}\right)^j + b_{ij} i\overline{y}^{i-1}\left(\frac{d\overline{y}}{dz}\right)^{j+1} + j b_{ij}\overline{y}^i \left(\frac{d\overline{y}}{dz}\right)^{j-1} \overline{y}'' = 0$$

desde que $L(\overline{y}) = 0$, isto é, $\overline{y}'' = -a_0\overline{y}$, ao substituir obtemos

$$\sum_{(i,j)\in A} b'_{ij}\overline{y}^i \left(\frac{d\overline{y}}{dz}\right)^j + b_{ij}i\overline{y}^{i-1}\left(\frac{d\overline{y}}{dz}\right)^{j+1} - a_0 j b_{ij}\overline{y}^{i+1}\left(\frac{d\overline{y}}{dz}\right)^{j-1}$$

com o qual, associamos o polinômio $g \in k_0[\overline{y}]$ dado por

$$g(x) = \sum_{(i,j)\in A} b'_{ij}\overline{y}^i x^j + b_{ij}i\overline{y}^{i-1}x^{j+1} - a_0 j b_{ij}\overline{y}^{i+1}x^{j-1}$$

onde $g\left(\frac{d\overline{y}}{dz}\right) = 0$. Notar que $\text{grau}(f) \leq \text{grau}(g) \leq \text{grau}(f) + 1$ pois $f|g$. Escrevendo

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n\left(\sum_{(i,n)\in A} b_{in}\overline{y}^i\right) + x^{n-1}(\dots) + \cdots \\ g(x) &= x^{n+1}\left(\sum_{(i,n)\in A} ib_{in}\overline{y}^{i-1}\right) + x^n(\dots) + \cdots \end{aligned}$$

podemos distinguir dois casos, o primeiro se $\sum_{(i,n)\in A} ib_{in}\overline{y}^{i-1} = 0$ do qual $\overline{y}$ é algébrico sobre k_0, o segundo caso é dado por $\sum_{(i,n)\in A} ib_{in}\overline{y}^{i-1} \neq 0$, de esta forma

$$g(x) = a(\overline{y})(x - c(\overline{y})))f(x)$$

para alguns $a(\overline{y}), c(\overline{y}) \in k_0(\overline{y})$. Comparando o coeficiente do termo x^{n+1}

$$a(\overline{y})\sum_{(i,n)\in A} b_{in}\overline{y}^i - \sum_{(i,n)\in A} ib_{in}\overline{y}^{i-1} = 0$$

dessa forma $\overline{y}$ é algébrico sobre k_0.

Caso 2: Se $\overline{y}$ e $\dfrac{d\overline{y}}{dz}$ são algebricamente independentes sobre k_0. Note que $y_1 = \overline{y}$, $y_2 = \dfrac{d\overline{y}}{dz}$, $y_3 = z$ satisfazem:

$$\frac{dy_1}{dz} = y_2 \quad \frac{dy_2}{dz} = -a_0 y_1, \quad \frac{dy_3}{dz} = 1$$

Temos que pensar em a_0 como função de y_3. Seja k_0 a extensão diferencial de $\mathbb{C}(y_3)$ gerada por a_0 e seja $K = k_0(y_1, y_2)$. Como $\overline{y_1}$ e $\overline{y_2}$ são algebricamente independentes então eles satisfazem a suposição básica. Note que a Proposição 4.4 é satisfeita. Esta a sua vez implica as hipóteses da Proposição 4.15 e portanto esto implica que as soluções são liouvillianas, isto é, $\overline{y}$ é uma função liouvilliana de z. ■

Corolário 5.6. Sejam $p(z)$ e $q(z)$ funções liouvillianas. Se $L(y) = y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$ tem uma integral primeira liouvilliana, então todas as soluções de $L(y) = 0$ são liouvillianas. Se $L(y) = 0$ tem uma solução liouvilliana não nula, então essa equação tem uma integral primeira liouvilliana.

Demonstração. Para a primeira implicação, seja F a integral primeira liouvilliana definida em $\mathscr{U}$, e seja $\overline{y}$ uma solução de $L(y) = 0$, com $\mathscr{G} = \{(z, \overline{y}(z), \overline{y}'(z)) : z \in \mathscr{O}\} \subset \mathscr{U}$. Então

temos que existe c constante tal que $F|_{\mathscr{G}} \equiv c$. Assim definindo $F_0 = F - c$ temos que F_0 é uma função analítica liouvilliana não constante tal que $F_0|_{\mathscr{G}} \equiv 0$, e pelo Teorema 5.4 temos que $\overline{y}$ é uma solução liouvilliana. Já que $\overline{y}$ foi fixada arbitrariamente temos que toda solução é liouvilliana. Por outro lado, seja $\overline{y}(z)$ uma solução liouvilliana não nula de $L(y) = 0$. Seja $u(z) = \dfrac{\overline{y}'(z)}{\overline{y}(z)}$.

Afirmação 5.7. Podemos escrever $L(y) = L_1(L_2(y))$, onde $L_2(y) = y' - u(z)y$ e $L_1(y) = y' - v(z)y$ com $v(z) = -u(z) - p(z)$.

De fato, primeiro note que

$$\begin{aligned} u'(z) - v(z)u(z) &= \frac{\overline{y}''(z)\overline{y}(z) - (\overline{y}'(z))^2}{\overline{y}^2(z)} + [u(z) + p(z)]\frac{\overline{y}'(z)}{\overline{y}(z)} \\ &= \frac{[-p(z)\overline{y}'(z) - q(z)y(z)]\overline{y}(z) - (\overline{y}'(z))^2}{\overline{y}^2(z)} + \left(\frac{\overline{y}'(z)}{\overline{y}(z)} + p(z)\right)\frac{\overline{y}'(z)}{\overline{y}(z)} \\ &= -q(z). \end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} L_1(L_2(y)) &= L_1(y' - u(z)y) \\ &= [y'' - u'(z)y - u(z)y'] - v(z)[y' - u(z)y] \\ &= y'' - [u(z) + v(z)]y' - [u'(z) - v(z)u(z)]y \\ &= y'' + p(z)y' + q(z)y = L(y). \end{aligned}$$

Lembre que as soluções de $L_1(y) = 0$ são da forma $c\exp\left(\displaystyle\int_{z_0}^{z} v(w)dw\right)$, onde c é uma constante,$z_0 \in \mathbb{C}$ fixado. Seja $\overline{x}$ solução de $L(y) = 0$ então satisfaz

$$L_1(L_2(\overline{x})) = 0.$$

Logo existe uma constante $c_{\overline{x}}$ tal que $L_2(\overline{x}) = c_{\overline{x}}\exp\left(\displaystyle\int_{z_0}^{z} v(w)dw\right)$. Portanto, a função $F(z, y, y') = \exp\left(-\displaystyle\int_{z_0}^{z} v(w)dw\right)[y' - u(z)y]$ é uma integral primeira liouvilliana. ■

Referências

[1] CODDINGTON E. A.; LEVINSON N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1984.

[2] GUNNING, R. C. *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, Volume I: Function Theory. California: CRC Press, 1990.

[3] VAINSENCHER, Israel. *Introdução às curvas algébricas planas*. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

[4] KAPLANSKY, I. *An Introduction to Differential Algebra*. Paris: Hermann, 1957.

[5] KOLCHIN, E. R. *Differential algebra and algebraic groups*. New York: Academic press, 1973.

[6] KRANTZ, S. G. *Function theory of several complex variables*. Rhode Island: AMS, 2001.

[7] LANG, S. *Algebra*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1965.

[8] PEREIRA, J. V. *Integrabilidade de equações diferenciais no plano complexo*. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

[9] POOLE, E. G. C. *Introduction to the theory of linear differential equations*. New York: Dover, 1960.

[10] RISCH, R. H. The problem of integration in finite terms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 139, p. 167-189, 1969.

[11] RITT. J. F. On the integration infinite terms of linear differential equations of the second order. *Bull Amer. Math. Soc.* v.33, p. 51-57, 1927.

[12] RITT. J. F. *Integration infinite terms*. New York: Columbia Univ. Press, 1948.

[13] ROSENLICHT, M. On the explicit solvability of certain transcendental equations. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, v. 36, n. 1, p. 15-22, 1969.

[14] ROSENLICHT, M. On Liouville's theory of elementary functions. *Pac. J. Appl. Math.*, v. 65, n. 2, p. 485-492, 1976.

[15] SEIDENBERG, A. Abstract differential algebra and the analytic case. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 9, n. 1, p. 159-164, 1958.

[16] SEIDENBERG, A. *Elements of the theory of algebraic curves*. California: Addison-Wesley, 1968.

[17] SINGER, M. F. Liouvillian first integrals of differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 333, n. 2, p. 673-688, 1992.