

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO



UFRJ

Quantização Geométrica e Representações de Grupos Compactos

Yuri Conrado da Silva



Instituto de Matemática

2021

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Quantização Geométrica e Representações de Grupos Compactos

Yuri Conrado da Silva

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alejandro Cabrera.

Examinada por:

Prof. Alejandro Cabrera (Doutor, IM-UFRJ), Presidente

Prof. Hans-Christian Herbig (Doutor, IM-UFRJ)

Prof. Henrique Bursztyn (Doutor, IMPA)

Prof. Thiago Linhares Drummond (Doutor, IM-UFRJ)

Rio de Janeiro, RJ, Brasil
Julho de 2021

Quantização Geométrica e Representações de Grupos Compactos

Autor: Yuri Conrado da Silva

Orientador: Alejandro Cabrera

Resumo: O método de quantização geométrica é amplamente utilizado por matemáticos para entender e generalizar o processo de quantização da física, permitindo descrever muitos modelos com uma linguagem unificada. Neste trabalho, apresentamos uma introdução à quantização geométrica e ilustramos uma classe de exemplos, conhecida como método da órbitas de Kirillov, onde aplicamos a quantização a órbitas coadjuntas de grupos de Lie compactos, a fim de obter representações unitárias irredutíveis. A linguagem permite relacionar objetos geométricos simpléticos com conceitos de teoria de representações, assim como entender resultados semi-clássicos presentes na literatura [5], [6], [3] entre outros.

Palavras-chave: geometria simplética, grupos de Lie, teoria de representação, quantização geométrica, física-matemática.

Author: Yuri Conrado da Silva

Advisor: Alejandro Cabrera

Abstract: The method geometric quantization is widely used by mathematicians to understand and generalize the quantization process in physics, allowing to describe a number models in an unified way. In this work we present an introduction to geometric quantization and illustrate a class of examples, known as Kirillov's orbit method, where the quantization is applied to coadjoint orbits of compact Lie groups to obtain irreducible unitary representations. The formalism allows one to relate geometric objects to concepts of representation theory, as well as to understand semi-classical results present in the literature [5], [6], [3] and others.

Keywords: symplectic geometry, Lie groups, representation theory, geometric quantization, mathematical-physics.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, antes de tudo à UFRJ, ao Instituto de Matemática e à CAPES por possibilitar que eu pudesse fazer esse trabalho, agradecimento esse que se estende para todas as instituições de ensino público brasileiro pelas quais passei. Agradeço aos professores do IM que puderam me ensinar, em especial meu orientador Alejandro e os professores Andrew e Hamid. Obrigado pela paciência com esse aluno teimoso. Agradeço também ao prof. Marcus Venicius do Instituto de Física, cuja visão sobre a matemática na física definitivamente influenciou a minha.

Agradeço aos meus amigos que me acompanharam pela graduação e proporcionaram muitas risadas, pães-de-queijo e açaí. Em especial, agradeço ao Thadeu, por ser meu companheiro de *abstrac nonsense*, e à Larissa por me possibilitar conhecer muitos outros que puderam se tornar meus amigos (espero que um dia ela consiga chegar a presidência). Agradeço principalmente à Caroline por me fazer companhia durante esses tempos difíceis de pandemia e isolamento.

Por fim e mais importante, agradeço aos meus pais, Alaide e João, que trabalharam duro para que eu pudesse ter tudo que tenho hoje.

Introdução

*First quantization is a mystery,
but second quantization is a
functor.*

Edward Nelson

Desde a concepção da mecânica quântica no início do século XX, inúmeros sistemas quânticos foram estudados por ambos físicos e matemáticos. Grandes avanços na matemática foram feitos, especialmente na Análise Funcional, com o intuito de entender esses sistemas de forma estrutural. Entretanto, ficou claro que a ligação entre a teoria quântica e a mecânica clássica é fundamental para o entendimento completo da teoria. Um marco nesse entendimento foi o formalismo da *quantização canônica* criado por Paul M. Dirac ([39]) que, apesar de simples e intuitivo, não era rigoroso para os padrões da matemática.

Em sua essência, o formalismo diz que um procedimento de quantização deve levar funções de uma álgebra, entendidas como as grandezas observáveis da teoria clássica, em elementos uma outra álgebra, cujos elementos são entendidos como as grandezas observáveis da teoria quântica. A associação é feita em analogia à estrutura da teoria clássica, afim de essa possa ser reobtida como aproximação da teoria quântica. A aproximação é regida por um parâmetro de escala $\hbar$ — a constante de Plank — que no contexto físico é uma grandeza característica de fenômenos quânticos.

Dois métodos que surgiram para colocar a quantização canônica em uma linguagem rigorosa foram a *quantização por deformação* e a *quantização geométrica*. Ambas se utilizam de conceitos da geometria simplética. A quantização por deformação tenta focar nas estruturas algébricas e acaba levando a uma abordagem formal em relação aos conceitos físicos, enquanto a quantização geométrica tenta ter um compromisso mais direto com a física subjacente. Como consequência, a quantização geométrica sofre de algumas dificuldades estruturais.

Nessa dissertação vamos tratar da quantização geométrica, passando pelos conceitos básicos que a compõem e alguns exemplos elementares. Ao final, resumimos algumas aplicações conhecidas do método. A principal delas é a quantização de grupos compactos: o *método das órbitas coadjuntas*, introduzido por A. Kirillov com o intuito de classificar as representações unitárias irredutíveis de grupos de Lie nilpotentes e mais tarde expandido para grupos de Lie gerais por B. Kostant e outros, pode ser entendido como um caso particular da quantização geométrica ([2]). Essa visão permite analogias entre conceitos geométricos simpléticos e conceitos da teoria de representações.

No Capítulo 1 fazemos uma exposição introdutória a teoria de grupos e álgebras

de Lie, focando em aspectos geométricos e de teoria de representações envolvidos no método de quantização.

O Capítulo 2 é uma introdução a alguns conceitos de geometria simplética, começando com generalidades sobre variedades de Poisson sua estrutura local (coordenadas canônicas) e seguindo com variedades simpléticas e polarizações.

O Capítulo 3 começa com uma breve exposição do que são sistemas clássicos, quânticos, e segue com uma descrição dos ingredientes da quantização geométrica.

No Capítulo 4 resumimos três aplicações do método de quantização geométrica: a primeira seção é sobre o método das órbitas e a classificação de representações unitárias irredutíveis de grupos compactos que ele permite; a segunda é sobre como representações unitárias redutíveis se encaixam na quantização; e a terceira seção é sobre *aproximação semi-clássica*, em dois contextos, que recupera objetos clássicos a partir de objetos quânticos, em caminho oposto a quantização, por meio de limites assintóticos com $\hbar \rightarrow 0$.

Os Apêndices A e B contêm materiais sobre fibrados, conexões e integração em variedades que são utilizados ao longo do texto.

Em cada capítulo, a lista de referências seguidas para a elaboração de seu texto são encontradas logo no início. Todos os resultados presentes nessa dissertação são conhecidos na literatura e podem ser encontrados nas referências apresentadas. Nenhum resultado original é introduzido no texto, porém a apresentação e seleção de resultados é original.

Notações

$\mathcal{F}(X, Y)$ — funções de X para Y

$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^r(\mathbb{V}; \mathbb{W})$ — aplicações r -lineares entre $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle, (\cdot | \cdot), \langle \cdot | \cdot \rangle, \langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$ — produto interno

Ad, ad — reps. adjuntas, resp., de $\mathcal{G}$ e de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathcal{G})$ no espaço de $\mathfrak{g}$

coAd, coad — reps. coadjuntas, resp., de $\mathcal{G}$ e de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathcal{G})$ no espaço $\mathfrak{g}^*$

$\mathcal{G} \circ \mathcal{M}, \mathcal{G} \circ \mathcal{M}$ — ações à esquerda e direita, respectivamente

$C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})^{\mathcal{G}}$ — funções $\mathcal{G}$ -equivariantes entre $\mathcal{G}$ -espaços

$\mathcal{C}_g$ — automorfismo de conjugação em um grupo $h \mapsto ghg^{-1}$

$\mathcal{O}_\eta$ — órbita da rep. coadjunta do grupo $\mathcal{G}$ passando por $\eta \in \mathfrak{g}^*$

$\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ — fibrado sobre $\mathcal{M}$ com espaço total $\mathcal{E}$, projeção π e fibra abstrata $\mathcal{F}$

$\mathcal{X} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{Y}$ — produto fibrado de dois fibrados com mesma base

$\Gamma_U(\mathcal{E})$ — seções do fibrado $\mathcal{E}$ definidas em U

$\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ — campos vetoriais suaves sobre $\mathcal{M}$

$\Omega^r(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ — r -formas diferenciais sobre $\mathcal{M}$ com valores no fibrado vetorial $\mathcal{E}$

$\text{Vol}^s(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ — fibrado de s -densidades com valores no fibrado vetorial $\mathcal{E}$

$|\Omega|^s(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ — s -densidades com valores no fibrado vetorial $\mathcal{E}$

$\check{C}^\bullet(X; A), \check{H}^\bullet(X; A)$ — complexo e cohomologia de Čech sobre X e coeficientes no feixe A

$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{M})$ — cohomologia de deRham sobre $\mathcal{M}$;

Sumário

1	Teoria de Lie	1
1.1	Álgebras de Lie	1
1.2	Grupos de Lie	9
1.3	Correspondência de Lie	14
1.4	Representações de Grupos de Lie	24
1.5	Ações Suaves e Invariantes	28
1.6	Grupos Compactos	37
1.7	Teorema de Borel-Weil	41
2	Geometria Simplética	45
2.1	Espaços Vetoriais Simpléticos	45
2.2	Estruturas de Poisson	51
2.3	Variedades Simpléticas	59
2.4	Folheações Simpléticas	62
2.5	Polarizações	72
3	Quantização Geométrica	79
3.1	Sistemas Clássicos	79
3.2	Sistemas Quânticos	82
3.3	Pré-Quantização	87
3.4	Quantização Holomorfa	94
3.5	Correção Metaplética	96
3.6	Comentário sobre Functorialidade	101
4	Aplicações	103
4.1	Quantização de Grupos Compactos	103
4.2	Multiplicidades de Quantizações Equivariantes	115
4.3	Limites Semi-Clássicos	118
A	Apêndice: Teoria de Fibrados e Conexões	123
A.1	Cohomologia de Čech	123
A.2	Fibrados	128
A.3	Fibrados Vetoriais	133
A.4	Fibrados Principais	137
A.5	Conexões	141
A.6	Derivada Covariante e Curvatura	145
A.7	Fibrados de Linhas	146
A.8	Operadores Diferenciais	149
A.9	Cohomologia de deRham	150

B	Apêndice: Estruturas Complexas e Integração	153
B.1	Complexificação de Espaços Vetoriais	153
B.2	Fibrados Vetoriais Complexos	157
B.3	Densidades	159
B.4	O espaço L^2 canônico	163
B.5	Medida de Haar	165

Capítulo 1

Teoria de Lie

1.1 Álgebras de Lie

As referências seguidas nesta seção são [14], [15], [16] e [34].

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma **$\mathbb{K}$ -álgebra de Lie** é um par $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ em que $\mathfrak{g}$ é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma aplicação bilinear satisfazendo

(Alternada): $[x, x] = \mathbf{0}$ para todo $x \in \mathfrak{g}$;

(Jacobi): $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = \mathbf{0}$ para quaisquer $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Ou seja, $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ é uma $\mathbb{K}$ -álgebra alternada cujo produto age como derivação sobre si.

Exemplo 1.1.1. Todo $\mathbb{K}$ -espaço vetorial $\mathbb{V}$ admite uma estrutura trivial de álgebra de Lie com o colchete nulo $[x, y] := \mathbf{0}$. $\blacklozenge$

Uma $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita **abeliana** se seu produto for nulo, i.e., $[x, y] = \mathbf{0}$ para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.1.2. Para qualquer $\mathbb{K}$ -álgebra associativa $\mathcal{A}$, o produto $[a, b] = ab - ba$, chamado de **comutador**, faz de $\mathcal{A}$ uma álgebra de Lie. $\blacklozenge$

Exemplo 1.1.3. Dado um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial $\mathbb{V}$, o exemplo anterior nos dá a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$, que é simplesmente $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ equipada com o comutador do produto de transformações lineares. $\blacklozenge$

Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $\mathbb{K}$ -linear $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é dita um **homomorfismo de álgebras de Lie** se $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Denotaremos por $\text{LieAlg}_{\mathbb{K}}$ a categoria de $\mathbb{K}$ -álgebras de Lie de dimensão finita.

Em uma $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dados subconjuntos $A, B \subseteq \mathfrak{g}$ definimos o seu produto por

$$[A, B] := \text{span}\{[x, y] \in \mathfrak{g} \mid x \in A, y \in B\}.$$

Utilizando essa notação, vemos que $\mathfrak{g}$ é abeliana se e só se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{\mathbf{0}\}$. Uma **subálgebra de Lie** é um subespaço $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$, de modo que o produto se restringe em $\mathfrak{h}$ formando uma álgebra de Lie. Nesse caso, inclusão $\mathbf{i}_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ é claramente um homomorfismo.

Um **ideal** é um subespaço $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$. Em particular, todo ideal é uma subálgebra de Lie. Um ideal $\mathfrak{a}$ é dito **trivial** se $\mathfrak{a} = \mathbf{0}$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.1.4. Dada uma $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, uma **derivação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$** é um endomorfismo $D \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ tal que $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$ para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$. Denotando por $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ o de derivações, vemos que $\text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ forma uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. $\blacklozenge$

Exemplo 1.1.5. Toda álgebra de Lie unidimensional é abeliana. De fato, qualquer vetor não-nulo $x \in \mathfrak{g}$ é uma base e $[x, x] = 0$. $\blacklozenge$

Exemplo 1.1.6. Neste exemplo vamos mostrar que, em dimensão 2, só existem duas álgebras de Lie, além de isomorfismo. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com uma base $\{v, u\}$. Se $[v, u] = 0$, o produto é trivial e $\mathfrak{g}$ é abeliana. Suponhamos que $[v, u] \neq 0$, de modo que existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, com $[v, u] = \alpha v + \beta u$. Vamos construir uma base $\{x, y\}$ com $[x, y] = y$. Seja $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ tais que $x = av + bu$ e $y = cv + du$, de modo que $ad - bc \neq 0$. Queremos $[x, y] = y$, ou seja,

$$[av + bu, cv + du] = cv + du.$$

Do lado esquerdo temos $(ad - bc)[v, u] = (ad - bc)(\alpha v + \beta u)$. Escolha $a, b \in \mathbb{K}$ de modo que $a\beta - b\alpha = 1$ e ponha $c = \alpha$, $d = \beta$. Assim, $\{x, y\}$ é uma base com $[x, y] = y$. Concluimos que as únicas $\mathbb{K}$ -álgebras de Lie de bidimensionais são, além de isomorfismo, a abeliana e a admitindo uma base com $[x, y] = y$. Note que a reta gerada por y é um ideal unidimensional. Assim, além de isomorfismo, a única álgebra de Lie bidimensional não-abeliana admite um ideal unidimensional. $\blacklozenge$

Exemplo 1.1.7. Seja $\mathbb{V}$ um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e $A : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear. Uma **derivação de A** é uma transformação linear $D : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que

$$A(Dx, y) + A(x, Dy) = 0$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{V}$. Denotamos por $\text{Der}(A)$ o conjunto de derivações de A . Verifica-se facilmente que $\text{Der}(A)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Os exemplos mais importantes de álgebras de Lie matriciais são formados por derivações de uma forma bilinear:

- **álgebra ortogonal:** é a $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie $\mathfrak{o}(\mathbb{V}, \eta) := \text{Der}(\eta)$ associada a um espaço pseudo-euclidiano sobre $\mathbb{K}$;
- **álgebra unitária:** é a álgebra de Lie real $\mathfrak{u}(\mathbb{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle) := \text{Der}(\langle \cdot | \cdot \rangle)$ associada a um espaço complexo unitário;
- **álgebra simplética:** é a $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(\mathbb{V}, \omega) := \text{Der}(\omega)$ associada a um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial simplético (Seção 2.1).

Também temos as álgebras especiais lineares

- **especial linear:** considerando o funcional traço de um espaço vetorial $\text{tr} : \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{K}$, temos a álgebra especial linear $\mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) := \ker \text{tr}$;
- **especial ortogonal:** $\mathfrak{so}(\mathbb{V}, \eta) := \mathfrak{o}(\mathbb{V}, \eta) \cap \mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$;
- **especial unitária:** é a álgebra real $\mathfrak{su}(\mathbb{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle) := \mathfrak{u}(\mathbb{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle) \cap \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V})$;

- **especial simplética:** é a própria álgebra simplética, já que $\mathfrak{sp}(\mathbb{V}, \omega) \subset \mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$.



Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $S \subseteq \mathfrak{g}$ um subconjunto. Definimos o **centralizador** e o **normalizador** de S como as subálgebras

$$\begin{aligned} Z_{\mathfrak{g}}(S) &:= \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in S, [x, y] = 0\}, \\ N_{\mathfrak{g}}(S) &:= \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in S, [x, y] \in S\}, \end{aligned}$$

respectivamente. Ou seja, $Z_{\mathfrak{g}}(S)$ e $N_{\mathfrak{g}}(S)$ são as maiores subálgebras com $[Z_{\mathfrak{g}}(S), S] = 0$ e $[N_{\mathfrak{g}}(S), S] \subseteq S$. Em particular, o **centro** de $\mathfrak{g}$ é o ideal $Z(\mathfrak{g}) := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$.

Dados subconjuntos $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$, se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ forem ideais, então $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ são ideais. De fato, a soma e a interseção são triviais, enquanto o produto segue da identidade Jacobi

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]] &\subseteq [\mathfrak{a}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{g}]] + [\mathfrak{b}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]] \\ &\subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] \\ &\subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.8. Se $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo, seu núcleo $\ker f$ é um ideal em $\mathfrak{g}$ e sua imagem $\text{img } f$ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$. ◆

Dado um ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$, o espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ naturalmente admite uma estrutura de álgebra de Lie com o produto $[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] := [x, y] + \mathfrak{a}$. Desse modo, o mapa quociente $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é um homomorfismo com $\ker \pi = \mathfrak{a}$.

Proposição 1.1.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ são ideais, temos o isomorfismo natural*

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

Demonstração. O isomorfismo é dado pelo mapa $x + y + \mathfrak{a} \mapsto y + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $x \in \mathfrak{a}$ e $y \in \mathfrak{b}$. □

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Para cada $x \in \mathfrak{g}$ definimos a aplicação linear $\text{ad}(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ por $\text{ad}(x)y := [x, y]$. Pela identidade de Jacobi, obtemos o homomorfismo

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \\ &: x \mapsto \text{ad}(x) \end{aligned}$$

chamado de **representação adjunta de $\mathfrak{g}$** . Denotando por $\text{ad } \mathfrak{g}$ a imagem de ad , a identidade de Jacobi também garante que $\text{ad } \mathfrak{g} \subseteq \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. É trivial ver que $\ker \text{ad} = Z(\mathfrak{g})$. A álgebra $\text{ad } \mathfrak{g}$ é chamada de **álgebra adjunta de $\mathfrak{g}$** , e seus elementos são chamados de **derivações internas**.

Exemplo 1.1.9. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ duas álgebras de Lie sobre $\mathbb{K}$. Dado um homomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h})$ podemos definir a **soma semidireta** $\mathfrak{g} \ltimes_{\varphi} \mathfrak{h}$ como a álgebra de Lie $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, [\cdot, \cdot])$ com o produto dado por

$$[x \oplus v, y \oplus u] := [x, y] \oplus ([v, u] + \varphi(x)u).$$

Desse modo, $\mathfrak{g}$ se mergulha como subálgebra e $\mathfrak{h}$ como ideal em $\mathfrak{g} \ltimes_{\varphi} \mathfrak{h}$, e o produto satisfaz $[x, u] = \varphi(x)u$ para $x \in \mathfrak{g}$ e $u \in \mathfrak{h}$, com as relações originais nas subálgebras.

Quando $\varphi = \mathbf{0}$ é o homomorfismo nulo, dizemos que a soma é **direta** e denotamos $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} := \mathfrak{g} \ltimes_{\mathbf{0}} \mathfrak{h}$. Nesse caso, ambos $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ se mergulham como ideais na soma direta.

Agora, dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e subálgebras $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ tais que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$ como espaços vetoriais, i.e., $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathbf{0}$. Se $\mathfrak{b}$ é um ideal, as derivações internas $\text{ad}(x)$ com $x \in \mathfrak{a}$ se restringem a derivações em $\mathfrak{b}$, de modo que temos um homomorfismo $\mathfrak{a} \mapsto \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{b}) : x \mapsto \text{ad}(x)|_{\mathfrak{b}}$. Obtemos um isomorfismo $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$. Quando $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são ambos ideais, a condição $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathbf{0}$ garante que o homomorfismo $\mathfrak{a} \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{b})$ é nulo e $\mathfrak{g}$ é soma direta de álgebras de Lie. $\blacklozenge$

Exemplo 1.1.10. Dadas duas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, em geral, o produto tensorial $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{h}$ não admite uma estrutura de álgebra de Lie natural. Para definir um “produto tensorial” de álgebras de Lie que seja naturalmente uma álgebra de Lie, as álgebras precisam de ações com alguma compatibilidade. Mais detalhes em [18]. $\blacklozenge$

Exemplo 1.1.11. Seja $\mathfrak{g}$ uma $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie. Para qualquer extensão $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$ podemos considerar a álgebra de coeficientes estendidos $\mathfrak{g}^{\mathbb{L}}$ cujo espaço subjacente é dado pela extensão de espaços vetoriais $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$ (Seção B.1) e colchete $[\alpha \otimes x, \beta \otimes y] = \alpha\beta \otimes [x, y]$, estendido $\mathbb{L}$ -bilinearmente. $\blacklozenge$

Agora vamos estudar a estrutura das álgebras de Lie. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Definimos uma sequência descendente de ideais

$$\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{n+1} := [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}^n]$$

chamada de **série de comutadores**,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^n \supseteq \cdots$$

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é **solúvel** se existe $n \in \mathbb{N}$ com $\mathfrak{g}^n = \mathbf{0}$. Assim, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra solúvel não-nula, existe um ideal abeliano não-nulo $\mathfrak{g}^{n_0-1}$, com $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{g}^n = \mathbf{0}\}$. Note que na série de comutadores, cada $\mathfrak{g}^{n+1}$ é um ideal apenas em $\mathfrak{g}^n$, a princípio.

Por outro lado, definimos a **série central inferior** de $\mathfrak{g}$ como a sequência descendente

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}_n \supseteq \cdots$$

de ideais

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_{n+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_n].$$

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é **nilpotente** se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}_n = \mathbf{0}$. Segue que uma álgebra nilpotente não-nula $\mathfrak{g}$ tem centro não-nulo, já que $\mathfrak{g}_{n_0-1} \subseteq Z(\mathfrak{g})$, onde $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{g}_n = \mathbf{0}\}$. Como $\mathfrak{g}^n \subseteq \mathfrak{g}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que uma álgebra de Lie nilpotente é também solúvel. Diferente da série de comutadores, cada $\mathfrak{g}_{n+1}$ é um ideal em $\mathfrak{g}_n$ e em $\mathfrak{g}$.

Proposição 1.1.2. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é nilpotente se, e somente se, $\text{ad } x$ é um operador nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Equivalentemente, $\mathfrak{g}$ é nilpotente se e só se $\text{ad } \mathfrak{g}$ é.

Demonstração. Segue diretamente das definições. $\square$

Proposição 1.1.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Valem as seguintes afirmações:*

- (a) *se $\mathfrak{g}$ é solúvel/nilpotente então qualquer subálgebra $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ é solúvel/nilpotente;*
- (b) *se $\mathfrak{g}$ é solúvel/nilpotente então $f[\mathfrak{g}]$ é solúvel/nilpotente, para qualquer homomorfismo $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$.*

Demonstração. Basta notar que $\mathfrak{a}^k \subseteq \mathfrak{g}^k$ e $f[\mathfrak{g}^k] = f[\mathfrak{g}]^k$, e o mesmo para a série central inferior. $\square$

Proposição 1.1.4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal. Se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ são ambas solúveis, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração. Seja $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ o homomorfismo quociente e suponha que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é solúvel, i.e., existe $n \in \mathbb{N}$ com $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^n = \mathbf{0}$. Como $\pi(\mathfrak{g}^k) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $\pi(\mathfrak{g}^n) = \mathbf{0}$, ou seja, $\mathfrak{g}^n \subseteq \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ é solúvel, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^m = \mathbf{0}$, e portanto $\mathfrak{g}^{n+m} \subseteq \mathfrak{a}^m = \mathbf{0}$. $\square$

Proposição 1.1.5. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita, então existe um único ideal solúvel contendo todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita, basta mostrar que a soma de ideais solúveis ainda é solúvel. Sejam $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ dois ideais solúveis. Pela Proposição 1.1.1 temos

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}),$$

de modo que, a Proposição 1.1.4 acima garante que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ é solúvel. $\square$

Para uma álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$, o seu ideal solúvel máximo é chamado de **radical de $\mathfrak{g}$** , e o denotamos por $\text{rad } \mathfrak{g}$.

Uma álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ é dita:

- **simples** se não possui ideais não-triviais;
- **semisimples** se $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{g}_j$ é soma direta de subálgebras $\mathfrak{g}_j$ simples.

Seja $\mathfrak{g}$ uma $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie de dimensão finita. A **forma de Killing** de $\mathfrak{g}$ é a forma bilinear simétrica $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\kappa(x, y) := \text{tr}(\text{ad } x \text{ ad } y).$$

Uma forma bilinear $A : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ é dita **ad-invariante** ou **invariante pela adjunta** se $\text{ad } \mathfrak{g} \subseteq \text{Der}(A)$, ou seja, se

$$A(\text{ad}(x)y, z) = -A(y, \text{ad}(x)z)$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Assim, a forma de Killing κ é ad-invariante:

$$\begin{aligned}
 \kappa(\operatorname{ad}(x)y, z) &= \kappa([x, y], z) \\
 &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}[x, y] \operatorname{ad} z) \\
 &= \operatorname{tr}([\operatorname{ad}(x), \operatorname{ad}(y)] \operatorname{ad}(z)) \\
 &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x) \operatorname{ad}(y) \operatorname{ad}(z)) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(y) \operatorname{ad}(x) \operatorname{ad}(z)) \\
 &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(y) \operatorname{ad}(z) \operatorname{ad}(x)) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(y) \operatorname{ad}(x) \operatorname{ad}(z)) \\
 &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(y)[\operatorname{ad}(z), \operatorname{ad}(x)]) \\
 &= -\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(y) \operatorname{ad}[x, z]) \\
 &= -\kappa(y, \operatorname{ad}(x)z).
 \end{aligned}$$

Com um argumento similar, vemos que para a forma de Killing também vale a identidade

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]).$$

Proposição 1.1.6 (Critério de Cartan). *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Se $\mathfrak{g}$ é não-trivial, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\mathfrak{g}$ é semisimples;
- (ii) a forma de Killing é não-degenerada;
- (iii) $\mathfrak{g}$ não possui ideais abelianos não-triviais;
- (iv) $\mathfrak{g}$ não possui ideais solúveis não-triviais;
- (v) $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \mathbf{0}$.

Demonstração. Teorema 1.45 em [14]. □

Para álgebras semisimples temos algumas propriedades importantes.

Proposição 1.1.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie de dimensão finita. Valem as seguintes propriedades:*

- (a) todo ideal, quociente e produto tensorial de álgebras de Lie semisimples ainda é semisimples;
- (b) se $\mathfrak{g}$ é semisimples, então $Z(\mathfrak{g}) = \mathbf{0}$;
- (c) se $\mathfrak{g}$ é semisimples, então $\operatorname{ad} \mathfrak{g} = \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{g} \simeq \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$;
- (d) se $\mathfrak{g}$ é semisimples, então $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$;
- (e) $\mathfrak{g}$ é semisimples se e somente se $\mathfrak{g}^{\mathbb{L}}$ é semisimples para qualquer extensão $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$.

Representações de Álgebras de Lie

Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{L}$ uma extensão $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$. Dada uma $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, uma **$\mathbb{L}$ -representação de $\mathfrak{g}$** é um par $(\mathbb{V}, \rho)$ em que $\mathbb{V}$ é um $\mathbb{L}$ -espaço vetorial e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{L}}(\mathbb{V})$ um homomorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebras de Lie.

Dadas duas representações $(\mathbb{V}_1, \rho_1)$ e $(\mathbb{V}_2, \rho_2)$ de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$, definimos um **morfismo de representações** $T : (\mathbb{V}_1, \rho_1) \rightarrow (\mathbb{V}_2, \rho_2)$ como um mapa $\mathbb{L}$ -linear $T : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ equivariante, i.e., $T \circ \rho_1(x) = \rho_2(x) \circ T$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Denotaremos por $\text{Rep}_{\mathbb{L}}(\mathfrak{g})$ a categoria de $\mathbb{L}$ -representações de $\mathfrak{g}$.

Um **$\mathfrak{g}$ -módulo** é um par $(\mathcal{V}, \cdot)$ em que $\mathcal{V}$ é um grupo abeliano e $\cdot : \mathfrak{g} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ é uma ação aditiva satisfazendo

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$$

para quaisquer $v \in \mathcal{V}$ e $x, y \in \mathfrak{g}$. Vemos que toda representação é naturalmente um $\mathfrak{g}$ -módulo. Um **homomorfismo de $\mathfrak{g}$ -módulos** $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ é um mapa $\mathfrak{g}$ -linear, ou seja, $f(xv) = xf(v)$ para quaisquer $v \in \mathcal{V}$ e $x \in \mathfrak{g}$. Denotaremos por $\mathfrak{g}\text{-Mod}$ a categoria de $\mathfrak{g}$ -módulos. Como todo homomorfismo de representação é $\mathfrak{g}$ -linear, $\text{Rep}_{\mathbb{L}}(\mathfrak{g})$ é uma subcategoria de $\mathfrak{g}\text{-Mod}$ para qualquer extensão $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$.

Exemplo 1.1.12. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real. Uma **representação complexa** de $\mathfrak{g}$ é dada por um espaço vetorial complexo $\mathbb{V}$ com um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V})$, onde vemos $\mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V})$ como uma álgebra de Lie real. $\blacklozenge$

Uma representação é dita **fiel** quando o mapa associado for injetivo, de modo que podemos ver a álgebra representada como uma subálgebra de transformações lineares.

Exemplo 1.1.13. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{L}$ uma extensão. Dado um $\mathbb{L}$ -espaço vetorial $\mathbb{V}$, toda subálgebra $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_{\mathbb{L}}(\mathbb{V})$ se representa naturalmente em $\mathbb{V}$ pela inclusão. $\blacklozenge$

Exemplo 1.1.14. Toda álgebra de Lie admite uma representação em si mesma. A representação adjunta $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ recebe esse nome porque é, de fato, uma representação. $\blacklozenge$

Exemplo 1.1.15. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{g}^*$ seu espaço dual. Para cada $x \in \mathfrak{g}$, podemos tomar o operador transposto $\text{ad}(x)^T : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dado por

$$[\text{ad}(x)^T \alpha](y) := \alpha(\text{ad}(x)y),$$

$\alpha \in \mathfrak{g}^*$, $y \in \mathfrak{g}$. Denotando por $\text{coad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ o mapa dado por $\text{coad}(x) := -\text{ad}(x)^T$ obtemos a **representação coadjunta** de $\mathfrak{g}$. Para ver que coad é uma representação, calculamos

$$\begin{aligned} (\text{coad}[x, y]\alpha)(z) &= -((\text{ad}[x, y])^T \alpha)(z) \\ &= -\alpha(\text{ad}[x, y]z) \\ &= -\alpha([\text{ad } x, \text{ad } y]z) \\ &= -([\text{ad } y]^T, [\text{ad } x]^T] \alpha)(z) \\ &= ([-(\text{ad } x)^T, -(\text{ad } y)^T] \alpha)(z) \\ &= ([\text{coad } x, \text{coad } y] \alpha)(z) \end{aligned}$$

para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$, $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. $\blacklozenge$

Seja $(\mathbb{V}, \rho)$ uma representação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Um subespaço $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ é dito **invariante por ρ** se $\rho[\mathfrak{g}][\mathbb{W}] \subseteq \mathbb{W}$, i.e., $\rho(x)w \in \mathbb{W}$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in \mathbb{W}$. Nesse caso, obtemos uma representação em $\mathbb{W}$ por $\rho_{\mathbb{W}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{W}) : x \mapsto \rho(x)|_{\mathbb{W}}$ chamada de **subrepresentação**. Uma subrepresentação é dita **trivial** se o subespaço invariante associado for $\mathbb{V}$ ou $\mathbf{0}$. Quando ρ admite subespaços invariantes não-triviais dizemos que ρ é **redutível**, e do contrário, quando ρ não admite subrepresentações não-triviais, dizemos que ρ é **irredutível**.

Associado a um espaço invariante $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ também temos a **representação quociente** $(\mathbb{V}/\mathbb{W}, \rho/\rho_{\mathbb{W}})$ dada por

$$\rho/\rho_{\mathbb{W}}(x)(v + \mathbb{W}) := \rho(x)v + \mathbb{W}.$$

Ou seja, $\rho/\rho_{\mathbb{W}}(x) \circ \pi_{\mathbb{W}} = \pi_{\mathbb{W}} \circ \rho(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, onde $\pi_{\mathbb{W}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}/\mathbb{W}$ é o mapa quociente.

Dada uma representação $(\mathbb{V}, \rho)$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos o **núcleo simultâneo de ρ** como a interseção de núcleos

$$\mathbb{V}_0 := \bigcap_{x \in \mathfrak{g}} \ker \rho(x).$$

Vemos que $\mathbb{V}_0$ é um subespaço invariante em que ρ age trivialmente. Os elementos de $\mathbb{V}_0$ são chamados de **vetores invariantes da representação**.

Exemplo 1.1.16. Dadas duas $\mathbb{L}$ -representações $(\mathbb{V}, \rho)$ e $(\mathbb{W}, \varphi)$ de $\mathfrak{g}$, definimos a **representação regular** $(\mathcal{F}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), R)$ por

$$[R(x)f](v) = \varphi(x)f(v) - f(\rho(x)v)$$

para quaisquer $v \in \mathbb{V}$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ e $x \in \mathfrak{g}$. Com essa representação, as ações envolvidas obedecem uma regra de Leibniz, i.e.,

$$x \cdot f(v) = (x \cdot f)(v) + f(x \cdot v).$$

Essa representação tem as funções lineares $\mathcal{L}_{\mathbb{L}}(\mathbb{V}; \mathbb{W})$ como subespaço invariante. Vemos facilmente que os morfismos $T : (\mathbb{V}, \rho) \rightarrow (\mathbb{W}, \varphi)$ são as funções lineares tais que $R(x)T = \mathbf{0}$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, ou seja, são os elementos do núcleo simultâneo da subrepresentação $R_{\mathcal{L}_{\mathbb{L}}(\mathbb{V}; \mathbb{W})}$. $\blacklozenge$

Exemplo 1.1.17. Seja $\mathfrak{g}$ um $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie e sejam $(\mathbb{V}_1, \rho_1), \dots, (\mathbb{V}_k, \rho_k)$ representações sobre $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$. Podemos definir as representações **soma direta** em $\bigoplus_{j=1}^k \mathbb{V}_j$ e **produto tensorial** em $\bigotimes_{j=1}^k \mathbb{V}_j$ por

$$(\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k)(x)(v_1 \oplus \dots \oplus v_k) := \rho_1(x)v_1 \oplus \dots \oplus \rho_k(x)v_k$$

$$(\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_k)(x)(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) := \sum_{j=1}^k v_1 \otimes \dots \otimes v_{j-1} \otimes \rho_j(x)v_j \otimes v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_k.$$

$\blacklozenge$

Proposição 1.1.8. *Toda álgebra de Lie real/complexa de dimensão finita admite uma representação fiel de dimensão finita.*

Demonstração. É uma consequência direta do Teorema de Ado ([34], sec. 1.7.3, teorema 3). $\square$

1.2 Grupos de Lie

Referências para a seção: [14], [15], [16], [34].

Um **grupo de Lie** é um par $(\mathcal{G}, m)$ em que $\mathcal{G}$ é uma variedade suave, $m : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ é uma operação suave fazendo de $\mathcal{G}$ um grupo e o mapa de inversão $\text{inv} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} : g \mapsto g^{-1}$ também é suave. De imediato vemos que a inversão é um difeomorfismo, já que $\text{inv}^{-1} = \text{inv}$. Para cada elemento $g \in \mathcal{G}$, definimos as **translações à esquerda** e **à direita**, respectivamente,

$$\begin{aligned} L_g : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} & R_g : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ : h &\longmapsto gh & : h &\longmapsto hg \end{aligned}$$

que são difeomorfismos. Associado a cada $g \in \mathcal{G}$ temos também o mapa de conjugação $\mathcal{C}_g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} : h \mapsto ghg^{-1}$, que também é um difeomorfismo, uma vez que $\mathcal{C}_g = L_g R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} L_g$.

Proposição 1.2.1. *Sejam $\mathcal{G}$ uma variedade e $m : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ uma operação fazendo de $\mathcal{G}$ um grupo. O par $(\mathcal{G}, m)$ é um grupo de Lie se e somente se a aplicação $\alpha : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ dada por $\alpha(g, h) = gh^{-1}$ é suave.*

Demonstração. É claro que se $(\mathcal{G}, m)$ é um grupo de Lie então $\alpha = m \circ (\text{id} \times \text{inv})$ é suave. Reciprocamente, se α é suave então a inversão é suave já que $\text{inv} = \alpha \circ (e \times \text{id})$, onde $e \in \mathcal{G}$ é o elemento neutro. Agora, temos $m = \alpha \circ (\text{id} \times \text{inv})$ e logo a multiplicação também é suave. $\square$

Exemplo 1.2.1. Todo grupo contável (finito ou enumerável) pode ser considerado um grupo de Lie com a estrutura de variedade discreta (dimensão nula). $\blacklozenge$

Exemplo 1.2.2. Todo espaço vetorial de dimensão finita é um grupo de Lie abeliano. $\blacklozenge$

Proposição 1.2.2. *Seja $\mathcal{G}$ uma variedade com uma operação de grupo $m : (g, h) \mapsto gh$. Com essa operação, $\mathcal{G}$ forma um grupo de Lie, se e só se, valem as propriedades:*

- (a) para todo $g_0 \in \mathcal{G}$, a translação L_{g_0} é suave;
- (b) para todo $g_0 \in \mathcal{G}$, a conjugação $\mathcal{C}_{g_0}$ é suave em uma vizinhança da identidade e ;
- (c) o mapa $\alpha : (g, h) \mapsto gh^{-1}$ é suave em uma vizinhança de (e, e) .

Demonstração. Se $\mathcal{G}$ é grupo de Lie, é óbvio que essas operações são suaves. Para verificar a recíproca, basta notar que

$$\begin{aligned} \alpha(g, h) &= gh^{-1} = (g_0 h_0^{-1}) h_0 (g_0^{-1} g) (h_0^{-1} h)^{-1} h_0^{-1} \\ &= L_{g_0 h_0^{-1}} \mathcal{C}_{h_0} \alpha(L_{g_0^{-1}} g, L_{h_0^{-1}} h) \end{aligned}$$

para quaisquer $g, h, g_0, h_0 \in \mathcal{G}$. Dados $g, h \in \mathcal{G}$, podemos escolher g_0 e h_0 de modo que a expressão da direita é suave. $\square$

Proposição 1.2.3. *Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade, $e \in \mathcal{M}$, U e V vizinhanças abertas de e e $m : U \times U \rightarrow \mathcal{M}$ uma função suave, satisfazendo as propriedades:*

- (i) $m(e, p) = m(p, e) = p$ para todo $p \in U$;
- (ii) $V \subseteq U$, $m(V \times V) \subseteq U$ e $m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$ para quaisquer $x, y, z \in V$.

Sob essas condições, existe uma vizinhança $W \subseteq V$ de e e um difeomorfismo $\varphi : W \rightarrow W$ tal que $\varphi(e) = e$, $\varphi(\varphi(p)) = p$ e $m(p, \varphi(p)) = m(\varphi(p), p) = e$ para todo $p \in W$.

Demonstração. Como $m(e, p) = p$ para todo $p \in U$, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança $W_1 \subseteq V$ de e e um difeomorfismo $\varphi_1 : W_1 \rightarrow W_1$ tal que $\varphi_1(e) = e$ e $m(p, \varphi_1(p)) = e$ para todo $p \in W_1$. Analogamente para a outra coordenada, existe uma vizinhança $W_2 \subseteq V$ de e e um difeomorfismo $\varphi_2 : W_2 \rightarrow W_2$ tal que $\varphi_2(e) = e$ e $m(\varphi_2(p), p) = e$ para todo $p \in W_2$. Para $p \in W_1 \cap W_2$ temos

$$\begin{aligned} \varphi_1(p) &= m(e, \varphi_1(p)) \\ &= m(m(\varphi_2(p), p), \varphi_1(p)) \\ &= m(\varphi_2(p), m(p, \varphi_1(p))) \\ &= m(\varphi_2(p), e) \\ &= \varphi_2(p). \end{aligned}$$

Seja $\varphi_3 : W_1 \cap W_2 \rightarrow \mathcal{M}$ a função suave dada por $\varphi_3(p) := \varphi_1(p) = \varphi_2(p)$. Defina $W := \varphi_3^{-1}[W_1 \cap W_2]$, que é aberto por continuidade, e defina $\varphi : W \rightarrow W$ por $\varphi(p) := \varphi_3(p)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(p)) &= m(m(p, \varphi(p)), \varphi(\varphi(p))) \\ &= m(p, m(\varphi(p), \varphi(\varphi(p)))) \\ &= m(p, e) = p \end{aligned}$$

e portanto φ é um difeomorfismo. □

Proposição 1.2.4. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade. Se tivermos uma operação associativa $m : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, com elemento neutro $e \in \mathcal{M}$, que também é uma função suave, então o grupo $\mathcal{G} = \mathcal{M}^\times$ de elementos invertíveis de $\mathcal{M}$ é um aberto e forma um grupo de Lie.*

Demonstração. Pela Proposição 1.2.3 acima, colocando $U = V = \mathcal{G}$, obtemos um aberto $W \subseteq \mathcal{G}$ com $e \in W$. Ou seja, $\mathcal{G}$ é uma vizinhança da identidade. Como a translação $L_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um difeomorfismo, para todo $g \in \mathcal{G}$, a imagem $L_g[\mathcal{G}]$ é uma vizinhança de g , e claramente $L_g[\mathcal{G}] \subseteq \mathcal{G}$. Em conclusão, $\mathcal{G}$ é aberto em $\mathcal{M}$. Pela Proposição 1.2.2, vemos que $\mathcal{G}$ forma um grupo de Lie com a restrição da operação m , onde as condições (a) e (b) são trivialmente verificadas e a condição (c) segue de 1.2.3. □

Exemplo 1.2.3. Dada uma álgebra real associativa unital $\mathbb{A}$ de dimensão finita, o seu grupo de elementos invertíveis $\mathbb{A}^\times$ forma um grupo de Lie. Em particular, se $\mathbb{A} = \text{End}(\mathbb{V})$ é a álgebra de operadores lineares de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com a operação de composição, o grupo linear geral $\text{GL}(\mathbb{V}) = \text{End}(\mathbb{V})^\times$ é um grupo de Lie. ◆

Um **homomorfismo de grupos de Lie** $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ é simplesmente um homomorfismo de grupos que também é suave. Denotando por **LieGrp** a categoria dos grupos de Lie, vemos que **LieGrp** é uma subcategoria de ambos **Man** e **Grp**.

Proposição 1.2.5. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupos de Lie e $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ um homomorfismo de grupos. Para f ser suave, é necessário e suficiente que exista um aberto não-vazio $U \subseteq \mathcal{G}$ em que $f|_U$ é suave.*

Demonstração. Que é necessário é óbvio. Suponhamos que $f|_U$ é suave, para algum aberto não-vazio $U \subseteq \mathcal{G}$. Para todo $g_0 \in \mathcal{G}$ temos $f(g_0g) = f(g_0)f(g)$, de modo que

$$f|_{g_0U} = L_{f(g_0)} \circ f|_U \circ L_{g_0}^{-1}$$

é uma composta de funções suaves. Logo, f é suave em g_0U , para todo $g_0 \in \mathcal{G}$. Como $\{g_0U\}_{g_0 \in \mathcal{G}}$ forma uma cobertura aberta de $\mathcal{G}$, segue o resultado. $\square$

Com um argumento essencialmente igual, segue também a demonstração das

Proposição 1.2.6. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupos de Lie e $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ um homomorfismo de grupos de Lie. Para f ser uma imersão/submersão/difeomorfismo local, basta o ser em um ponto.*

Proposição 1.2.7. *Se $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ é um homomorfismo de grupos de Lie, então o posto de f é constante.*

Dado um grupo de Lie $\mathcal{G}$, dizemos que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ é um **subgrupo de Lie** se for ao mesmo tempo uma subvariedade e um subgrupo, de modo que forme um grupo de Lie com a restrição da multiplicação. Assim, a inclusão $i_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ é um homomorfismo.

Proposição 1.2.8. *Todo subgrupo de Lie é fechado.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ um subgrupo de Lie. Como $\mathcal{H}$ é uma subvariedade, é localmente fechado, i.e., para todo $h \in \mathcal{H}$ existe uma vizinhança aberta $U \subseteq \mathcal{G}$ com $\mathcal{H} \cap U$ fechado em U . Desse modo, $\mathcal{H} \cap U = \overline{\mathcal{H} \cap U} = \overline{\mathcal{H}} \cap U$ é aberto em $\overline{\mathcal{H}}$. Lembrando que $\overline{\mathcal{H}}$ é um subgrupo de $\mathcal{G}$, para $h \in \overline{\mathcal{H}}$ temos

$$h(\mathcal{H} \cap U) = h\overline{\mathcal{H}} \cap hU$$

$$h\mathcal{H} \cap hU = \overline{\mathcal{H}} \cap hU,$$

de modo que $h\mathcal{H}$ é aberto em $\overline{\mathcal{H}}$. Em resumo, $\{h\mathcal{H}\}_{h \in \overline{\mathcal{H}}}$ é uma cobertura aberta de $\overline{\mathcal{H}}$. Em particular, $\mathcal{H}$ é aberto em $\overline{\mathcal{H}}$. Como os cosets são disjuntos, $\overline{\mathcal{H}} \setminus \mathcal{H}$ é uma união dos outros cosets, que ainda é um aberto, e portanto $\mathcal{H}$ é fechado em $\overline{\mathcal{H}}$. Concluimos que $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$. $\square$

Exemplo 1.2.4. Para todo grupo de Lie $\mathcal{G}$, a componente conexa da identidade é um subgrupo de Lie aberto, que denotaremos por $\mathcal{G}^0$. $\blacklozenge$

Exemplo 1.2.5. Para qualquer subconjunto $U \subseteq \mathcal{G}$, a união $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$ é o subgrupo $\langle U \rangle$ gerado por U . Em particular, quando U é uma vizinhança aberta da identidade, $\langle U \rangle$ é um subgrupo aberto, e logo um subgrupo de Lie, sendo assim um fechado. Se U for conexo, $\langle U \rangle$ também é conexo, e portanto, é a componente conexa da identidade $\langle U \rangle = \mathcal{G}^0$. $\blacklozenge$

Exemplo 1.2.6. Os subgrupos matriciais clássicos de $GL_{\mathbb{K}}(n)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, são subgrupos de Lie. $\blacklozenge$

Proposição 1.2.9. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ um subgrupo. Para que $\mathcal{H}$ seja um subgrupo de Lie é necessário e suficiente que exista um ponto $h \in \mathcal{H}$ e uma vizinhança aberta $U \subseteq \mathcal{G}$ de h , tal que $\mathcal{H} \cap U$ é uma subvariedade de $\mathcal{G}$.*

Demonstração. A condição é obviamente necessária. Suponhamos que ela valha. Para todo $h_0 \in \mathcal{H}$, a translação à esquerda $L_{h_0 h^{-1}}$ é um difeomorfismo de $\mathcal{G}$ que leva a subvariedade $\mathcal{H} \cap U$ na subvariedade

$$(h_0 h^{-1} \mathcal{H}) \cap (h_0 h^{-1} U) = \mathcal{H} \cap (h_0 h^{-1} U).$$

Assim, todo ponto $h_0 \in \mathcal{H}$ admite uma vizinhança $h_0 h^{-1} U$ cuja interseção com $\mathcal{H}$ é uma subvariedade de $\mathcal{G}$. Isso mostra que $\mathcal{H}$ é uma subvariedade. $\square$

N.B. Na literatura é comum encontrar uma outra definição de subgrupo de Lie. Um **subgrupo de Lie imerso** de $\mathcal{G}$ é a imagem de um homomorfismo injetivo e imersivo. Essencialmente, é um subgrupo $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ equipado com alguma estrutura suave fazendo de $\mathcal{H}$ um grupo de Lie. Essa estrutura suave pode não ter relação com a topologia de subespaço em $\mathcal{H}$, e por isso a inclusão $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$, apesar de um homomorfismo, não precisa ser um mergulho. $\star$

Exemplo 1.2.7. Considere o toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, onde utilizamos a notação complexa $\{(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \mid \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{T}^2$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ podemos definir um subgrupo $\mathcal{G}_\lambda = \{(e^{i\theta}, e^{i\lambda\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, que é fechado se e só se $\lambda \in \mathbb{Q}$, e logo $\mathcal{G}_\lambda$ será um subgrupo de Lie apenas quando λ é racional. Por outro lado, sempre podemos definir uma estrutura suave em $\mathcal{G}_\lambda$ com cartas da forma $(e^{i\theta}, e^{i\lambda\theta}) \mapsto \theta$. Para λ racional, é a estrutura de subvariedade, enquanto que para λ irracional, vai induzir uma topologia mais fina que a de subespaço em $\mathcal{G}_\lambda$. Outro modo de ver essa dicotomia é notar que, para λ racional $\mathcal{G}_\lambda$ é imagem de um mergulho $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{T}^2$ enquanto, para λ irracional, é a imagem de um mergulho $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{T}^2$. $\blacklozenge$

Veremos mais à frente qual a importância de subgrupos imersos.

Exemplo 1.2.8. Sejam $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ grupos de Lie. Com a estrutura de variedade e multiplicações usuais, o produto direto $\prod_{i=1}^n \mathcal{G}_i$ forma de fato o produto na categoria LieGrp. $\blacklozenge$

Exemplo 1.2.9. Sejam $\mathcal{K}$ e $\mathcal{H}$ dois grupos de Lie e $\sigma : \mathcal{K} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H})$ um homomorfismo. Se a ação $(k, h) \mapsto \sigma(k)h$ for suave, então produto semi-direto $\mathcal{K} \ltimes_\sigma \mathcal{H}$ forma um grupo de Lie, com a estrutura de variedade produto e a multiplicação $(k, h)(a, b) = (ka, h\sigma(k)b)$.

Por outro lado, suponhamos que $\mathcal{G}$ é um grupo de Lie que se decompõe, algebricamente, no produto semi-direto interno de subgrupos de Lie $\mathcal{K}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ com $\mathcal{H} \trianglelefteq \mathcal{G}$. Tomando $\sigma : \mathcal{K} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H})$ dado por $\sigma(k)h := khk^{-1}$, temos um isomorfismo de grupos de Lie $\mathcal{K} \ltimes_\sigma \mathcal{H} \simeq \mathcal{G}$. Sob essa identificação, denotamos por $\pi_1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K}$ e $\pi_2 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ os mapas de projeção, $g = \pi_1(g)\pi_2(g)$ para todo $g \in \mathcal{G}$. $\blacklozenge$

Proposição 1.2.10. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupos de Lie, $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ e $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ homomorfismos de grupo de Lie e $\mathcal{N} = \ker \pi$. Se $\pi \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{H}}$, então $\mathcal{N}$ é um subgrupo de Lie, σ é um mergulho e $\mathcal{G}$ é o produto semi-direto interno de $\sigma[\mathcal{H}]$ por $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Como $\pi \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{H}}$, derivando na identidade obtemos $\pi_{*e} \circ \sigma_{*e} = \text{id}_{T_e(\mathcal{H})}$, de modo que π/σ é uma submersão/imersão na identidade, e portanto em qualquer ponto. Como $\mathcal{N} = \pi^{-1}[e]$ é a pré-imagem de um valor regular, segue que $\mathcal{N}$ é uma subvariedade e logo um subgrupo de Lie. Agora, sendo um homeomorfismo e uma imersão, σ é um mergulho de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$, de modo que a imagem $\sigma[\mathcal{H}]$ é um subgrupo de Lie isomorfo a $\mathcal{H}$. Para concluir, todo $g \in \mathcal{G}$ se escreve como $g = (\sigma \circ \pi)(g)q$ para um único $q \in \mathcal{N}$. Logo $\mathcal{G}$ é um produto semi-direto. $\square$

Exemplo 1.2.10. Dado um grupo de Lie $\mathcal{G}$, considere a componente conexa da identidade $\mathcal{G}^0$. Verifica-se facilmente que $\mathcal{G}^0$ é um subgrupo normal. O grupo quociente $\mathcal{G}/\mathcal{G}^0$ está em bijeção com o conjunto $\pi_0(\mathcal{G})$ das componentes conexas de $\mathcal{G}$ e, portanto, é contável. Colocando a estrutura de variedade discreta no quociente, vemos que a projeção $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{G}^0$ é um homomorfismo de grupos de Lie. Um seção de π , i.e., um homomorfismo $\sigma : \mathcal{G}/\mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}$ com $\pi \circ \sigma = \text{id}$, fica univocamente definida por uma escolha de representativos para cada classe de $\mathcal{G}/\mathcal{G}^0$, ou seja, um ponto $h_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ em cada componente conexa $\mathcal{C} \in \pi_0(\mathcal{G})$, com $h_{\mathcal{G}^0} = e$. Em resumo, para cada função $\sigma : \pi_0(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G}$ levando $\mathcal{G}^0$ na identidade, temos uma decomposição em produto semi-direto $\mathcal{G} \simeq (\mathcal{G}/\mathcal{G}^0) \ltimes_{\sigma} \mathcal{G}^0$. $\blacklozenge$

Proposição 1.2.11. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupos de Lie e $\varphi : \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{H}$ um homomorfismo. Para cada seção $\sigma : \mathcal{G}/\mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}$ existe um único homomorfismo $\bar{\varphi}_{\sigma} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ estendendo φ tal que $\text{Im} \sigma \subseteq \ker \bar{\varphi}_{\sigma}$.*

Demonstração. Basta definir $\bar{\varphi}_{\sigma}(g) := \varphi(\sigma(g)^{-1}g)$. $\square$

Proposição 1.2.12 (Recobrimento Universal). *Para todo grupo de Lie conexo $\mathcal{G}$, valem as seguintes afirmações:*

- (i) *o recobrimento universal $\pi : \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ existe e admite uma única estrutura de grupo de Lie que faz de π um homomorfismo suave;*
- (ii) *o recobrimento universal é dado pela extensão central*

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}, e) \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{G} \longrightarrow 1$$

Demonstração. Capítulo I, seção 11 em [14]. $\square$

Exemplo 1.2.11. Considere o grupo de rotações $\text{SO}(3)$ e seu recobrimento universal $\text{SU}(2)$. Como os elementos de $\text{SU}(2)$ são da forma

$$U = \begin{pmatrix} z^0 & z^1 \\ -\bar{z}^1 & \bar{z}^0 \end{pmatrix}$$

para $(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2$ com $\det U = |z^0|^2 + |z^1|^2 = 1$, temos uma identificação com a esfera $\varphi : S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$. Utilizando o produto dos quaternions em $\mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$, a álgebra de Lie de S^3 é a álgebra do produto vetorial $(\mathbb{R}^3, \times)$, visto como subálgebra de $\mathbb{H}$. O isomorfismo $\varphi' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ leva o produto escalar no produtor interno induzido pela forma de Killing em $\mathfrak{su}(2)$, de modo que a rep. adjunta de $\text{SU}(2)$ induzida em $\mathbb{R}^3$ por φ' é ortogonal, i.e., temos um mapa $\pi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$, $\pi(U) = \varphi'^{-1} \text{Ad } U \varphi'$. Como $\text{Ad } U = \text{Ad}(-U)$, o núcleo de π é $\{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\} \simeq \mathbb{Z}_2$ e π é um 2-recobrimento. $\blacklozenge$

1.3 Correspondência de Lie

Referências: [14], [15], [16], [34].

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$ um campo vetorial. Diremos que X é **invariante à esquerda** se, para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$, tivermos

$$(L_g)_*X(h) = X(gh),$$

ou seja, $(L_g)_*X = X$, ou ainda, X é L_g -relacionado a si mesmo para todo $g \in \mathcal{G}$. Similarmente, diremos que X é **invariante à direita** se for R_g -relacionado a si mesmo, para todo $g \in \mathcal{G}$. Denotaremos os conjuntos de campos invariantes por $\mathfrak{X}_L(\mathcal{G})$ e $\mathfrak{X}_R(\mathcal{G})$, que formam subespaços de $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$. Mais ainda, como os colchetes de campos φ -relacionados são ainda φ -relacionados, sabemos que $\mathfrak{X}_L(\mathcal{G})$ e $\mathfrak{X}_R(\mathcal{G})$ são sub-álgebras de Lie de $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$, com o colchete de Lie.

Seguiremos tratando de campos invariantes à esquerda, com os resultados análogos valendo para campos invariantes à direita, *mutatis mutandis*.

Proposição 1.3.1. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Existe um isomorfismo canônico $\mathfrak{X}_L(\mathcal{G}) \simeq T_e(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Tomamos

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{X}_L(\mathcal{G}) &\rightarrow T_e(\mathcal{G}) \\ &: X \mapsto X_e \end{aligned}$$

mapeando um campo para seu valor na identidade. É óbvio que ϕ é linear. Agora, dados $X, Y \in \mathfrak{X}_L(\mathcal{G})$, se $\phi(X) = \phi(Y)$ temos

$$X_g = (L_g)_*X_e = (L_g)_*Y_e = Y_g$$

para qualquer $g \in \mathcal{G}$. Logo $X = Y$ e ϕ é injetiva. Dado $\xi \in T_e(\mathcal{G})$, seja $X^\xi : \mathcal{G} \rightarrow T(\mathcal{G})$ a aplicação dada por

$$X^\xi(g) := (L_g)_*\xi.$$

Para ver que X^ξ é suave, tomamos $g \in \mathcal{G}$ e $f \in C^\infty(\mathcal{G})$ e calculamos

$$\begin{aligned} (X^\xi f)(g) &= [X^\xi(g)]f \\ &= [(L_g)_*\xi]f \\ &= \xi(f \circ L_g). \end{aligned}$$

Dado $h \in \mathcal{G}$, $(f \circ L_g)(h) = (f \circ m)(g, h)$, onde $m : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ é a multiplicação. Portanto a função $X^\xi f : g \mapsto \xi(f \circ L_g)$ é suave e o campos X^ξ também. Como X^ξ é invariante à esquerda, por construção, e $X^\xi(e) = \xi$, concluímos que ϕ é sobrejetiva, e logo um isomorfismo. $\square$

Para todo grupo de Lie $\mathcal{G}$, utilizamos o isomorfismo canônico acima $\mathfrak{X}_L(\mathcal{G}) \simeq T_e(\mathcal{G})$ para definir o colchete de vetores tangentes na identidade;

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : T_e(\mathcal{G}) \times T_e(\mathcal{G}) &\rightarrow T_e(\mathcal{G}) \\ &: (\xi, \zeta) \mapsto [\xi, \zeta] := [X^\xi, X^\zeta](e). \end{aligned}$$

Com essa operação, o espaço tangente $T_e(\mathcal{G})$ forma uma álgebra de Lie, que chamamos de **álgebra de Lie associada a $\mathcal{G}$** , e denotamos por $\text{Lie}(\mathcal{G})$ ou $\mathfrak{g}$ (mesma letra que denota o grupo, porém minúscula com fonte gótica). Note que, por construção, $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{X}_L(\mathcal{G})$ são isomorfas como álgebras de Lie, e por isso é comum tratar ambas como a álgebra de Lie de $\mathcal{G}$.

Exemplo 1.3.1. Para uma álgebra associativa unital $\mathbb{A}$, a álgebra de Lie do grupo de invertíveis $\mathbb{A}^\times$ pode ser naturalmente identificada a $\mathbb{A}$ com o comutador $[x, y] = xy - yx$. Em particular, para um espaço vetorial $\mathbb{V}$ podemos identificar $\mathfrak{gl}(\mathbb{V}) := \text{Lie}(\text{GL}(\mathbb{V})) \simeq (\text{End}(\mathbb{V}), [\cdot, \cdot])$. $\blacklozenge$

Exemplo 1.3.2. Para um grupo abeliano $\mathcal{G}$ de dimensão n , como o produto em $\mathfrak{g}$ é nulo, uma base nos permite identificar $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$ como álgebras abelianas. $\blacklozenge$

Proposição 1.3.2. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupos de Lie e $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ um homomorfismo suave. A derivada de φ na identidade de $\mathcal{G}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração. Para quaisquer $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ temos

$$\begin{aligned} (\varphi \circ L_{g_1})(g_2) &= \varphi(g_1 g_2) \\ &= \varphi(g_1) \varphi(g_2) \\ &= L_{\varphi(g_1)} \varphi(g_2) \\ &= (L_{\varphi(g_1)} \circ \varphi)(g_2). \end{aligned}$$

Ou seja, vale $\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi$ para todo $g \in \mathcal{G}$. Dados $\xi \in \mathfrak{g}$ e $\zeta \in \mathfrak{h}$, denotamos por X^ξ e Y^ζ os respectivos campos invariantes à esquerda. Dado $g \in \mathcal{G}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_* X^\xi(g) &= \varphi_* [(L_g)_* X^\xi(e)] \\ &= (\varphi \circ L_g)_* \xi \\ &= (L_{\varphi(g)} \circ \varphi)_* \xi \\ &= (L_{\varphi(g)})_* \varphi_* \xi \\ &= Y^{\varphi_* \xi}(\varphi(g)) \\ &= (Y^{\varphi_* \xi} \circ \varphi)(g), \end{aligned}$$

isto é, os campos invariantes de ξ e $\varphi_* \xi$ são φ -relacionados, de modo que

$$\begin{aligned} \varphi_* [X^{\xi_1}, X^{\xi_2}](g) &= [Y^{\varphi_* \xi_1}, Y^{\varphi_* \xi_2}](\varphi(g)) \\ \varphi_* [X^{\xi_1}, X^{\xi_2}](e) &= [Y^{\varphi_* \xi_1}, Y^{\varphi_* \xi_2}](e) \\ \varphi_{*e} [\xi_1, \xi_2] &= [\varphi_{*e} \xi_1, \varphi_{*e} \xi_2] \end{aligned}$$

para quaisquer $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$. Concluimos que $\varphi_{*e} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. $\square$

Dado um homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, denotaremos por $\varphi' := \varphi_{*e} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ o morfismo de álgebras de Lie associado. Note que, para campos

invariantes $X \in \mathfrak{X}_L(\mathcal{G})$ e $Y \in \mathfrak{X}_L(\mathcal{H})$, temos em geral,

$$\begin{aligned}\varphi_{*g}X_g &= \varphi_{*g}(L_g)_*X_e \\ &= (\varphi \circ L_g)_*X_e \\ &= (L_{\varphi(g)} \circ \varphi)_*X_e \\ &= (L_{\varphi(g)})_{*\varphi(g)}\varphi'_*X_e \\ &= (L_{\varphi(g)})_{*\varphi(g)}Y_e \\ &= Y_{\varphi(g)},\end{aligned}$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Assim, obtemos o **functor de álgebras de Lie** $\mathcal{L} : \text{LieGrp} \rightarrow \text{LieAlg}_{\mathbb{R}}$ dado por

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{G} & & \text{Lie}(\mathcal{G}) \\ \downarrow \varphi & \mapsto & \downarrow \varphi' \\ \mathcal{H} & & \text{Lie}(\mathcal{H})\end{array}$$

Esse functor não é fiel e nem cheio. Veremos mais à frente uma subcategoria de LieGrp em que ele se torna uma equivalência.

Exemplo 1.3.3. Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Um **recobrimento de Lie** de $\mathcal{G}$ é um homomorfismo de grupos de Lie $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ que também é um recobrimento. Desse modo, a derivada $\varphi' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um isomorfismo. Fixado um grupo de Lie, vamos identificar sua álgebra de Lie com as de seus recobrimentos de Lie. Em particular, o recobrimento universal de um grupo de Lie conexo tem sua álgebra identificada com a do grupo base. $\blacklozenge$

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Lembremos que para cada $g \in \mathcal{G}$ temos um mapa de conjugação associado $\mathcal{C}_g : h \mapsto ghg^{-1}$. Notando que $\mathcal{C}_g$ é sempre um automorfismo de grupos de Lie, obtemos um homomorfismo $\mathcal{C} : \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})$. Os automorfismos $\mathcal{C}_g$ também são chamados de **automorfismos internos** de $\mathcal{G}$. Agora, para cada $g \in \mathcal{G}$, consideramos a derivada $\mathcal{C}'_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, que denotaremos por $\text{Ad}(g) := \mathcal{C}'_g$. Para cada $g \in \mathcal{G}$, $\text{Ad}(g)$ é um operador invertível sobre $\mathfrak{g}$, de modo que obtemos uma função $\text{Ad} : \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$.

Afirmamos que o mapa Ad é um homomorfismo de grupos de Lie, e portanto uma representação suave de $\mathcal{G}$ em $\mathfrak{g}$, chamada de **representação adjunta do grupo**. O fato de ser um homomorfismo segue diretamente de $\mathcal{C} : \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})$ ser um homomorfismo. Resta ver que Ad é suave.

Dada uma carta $(U, \mathbf{x})$ de $\mathcal{G}$ na identidade, seja $X_1, \dots, X_n : U \rightarrow T(\mathcal{G})$ a base local de campos coordenados. Segue que

$$\begin{aligned}\text{Ad}(g)X_j(e) &= (\mathcal{C}_g)_{*p}X_j(e) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{C}_g^i}{\partial x^j}(e)X_i(e)\end{aligned}$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{C}_g^i}{\partial x^j}(e) = \frac{\partial (x^i \circ \mathcal{C}_g \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x^j}(\mathbf{x}(e))$$

são os coeficientes da matriz da derivada de $\mathcal{C}_g$ na identidade. Note que, para cada $p \in U$ temos

$$\begin{aligned} (x^i \circ \mathcal{C}_g \circ \mathbf{x}^{-1})(\mathbf{x}(p)) &= x^i(gpg^{-1}) \\ &= (x^i \circ \alpha)(g, p) \\ &= (x^i \circ \alpha \circ (\text{id}_{\mathcal{G}}, p))(g) \end{aligned}$$

onde $\alpha : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} : p \mapsto gpg^{-1}$ é a ação por conjugação e $(\text{id}_{\mathcal{G}}, p) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{G} : g \mapsto (g, p)$. Como α e $(\text{id}_{\mathcal{G}}, p)$ são funções suaves, segue que $x^i \circ \mathcal{C}_g \circ \mathbf{x}^{-1}$ é suave, e portanto, o mapa

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{x}} \circ \text{Ad} : U &\rightarrow \text{GL}(n) \\ : g &\mapsto \left(\frac{\partial \mathcal{C}_g^i}{\partial x^j}(e) \right)_{i,j=1}^n \end{aligned}$$

é suave, onde $T_{\mathbf{x}} : \text{GL}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{GL}(n)$ é identificação induzida pela base $X_1(e), \dots, X_n(e)$. Concluimos que Ad é suave na identidade, e logo suave em todo o grupo (Proposição 1.2.5). Em resumo, obtemos uma representação do grupo $\mathcal{G}$ em sua álgebra de Lie.

Agora, consideremos um grupo de Lie $\mathcal{G}$ e sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dado $\xi \in \mathfrak{g}$, tome seu campo invariante X^ξ e considere seu fluxo $\Phi_\xi : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, ou seja, Φ_ξ é uma função suave satisfazendo

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi_\xi^t(g) \right|_{t=0} = X^\xi(g)$$

e $\mathcal{D}$ é o maior aberto de $\mathbb{R} \times \mathcal{G}$ em que é possível definir tal função. Como X^ξ é invariante por cada L_g , seu fluxo comuta com as tranlações e logo, para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$ e $t \in I(g) \cap I(h) \cap I(gh)$, vale

$$\Phi_\xi^t(gh) = \Phi_\xi^t(L_g h) = L_g \Phi_\xi^t(h) = g \Phi_\xi^t(h),$$

onde $I(p) = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$ é o intervalo maximal de definição da curva integral $t \mapsto \Phi_\xi^t(p)$. Em particular, temos $\Phi_\xi^t(g) = g \Phi_\xi^t(e)$ para todo $t \in I(g) \cap I(e)$. Para $t \notin I(e)$, podemos definir $\Phi_\xi^t(g) := g \Phi_\xi^t(e)$, de modo que essa extensão ainda é fluxo de X^ξ e temos $I(e) \subseteq I(g)$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Dados $\varepsilon \in I(e) \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R}$, existem $n \in \mathbb{Z}$ e $\delta \in I(e)$ com $|\delta| < |\varepsilon|$ tais que $t = n\varepsilon + \delta$, de modo que

$$\begin{aligned} \underbrace{\Phi_\xi^\varepsilon(e) \cdots \Phi_\xi^\varepsilon(e)}_{n \text{ vezes}} \Phi_\xi^\delta(e) &= \underbrace{\Phi_\xi^\varepsilon(e) \cdots \Phi_\xi^\varepsilon(e)}_{n-1 \text{ vezes}} \Phi_\xi^\delta(\Phi_\xi^\varepsilon(e)) \\ &= \underbrace{\Phi_\xi^\varepsilon(e) \cdots \Phi_\xi^\varepsilon(e)}_{n-1 \text{ vezes}} \Phi_\xi^{\varepsilon+\delta}(e) \\ &= \Phi_\xi^{n\varepsilon+\delta}(e) \\ &= \Phi_\xi^t(e). \end{aligned}$$

Ou seja, $t \in I(e)$, e portanto $I(e) = \mathbb{R} = I(g)$ para qualquer $g \in \mathcal{G}$. Concluimos que $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathcal{G}$ e X^ξ é um campo completo. Definimos o **mapa exponencial** de $\mathcal{G}$ como a aplicação

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathcal{G} \\ : \xi &\mapsto \Phi_\xi^1(e), \end{aligned}$$

que tem a suavidade garantida pela suavidade do fluxo. Considere a curva $\gamma_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ dada por $\gamma_\xi(t) := \exp(t\xi)$. Como $\gamma_\xi(0) = e$ e $\dot{\gamma}_\xi(0) = \xi$, pela unicidade das curvas integrais, segue que $\frac{d}{dt}[\exp(t\xi)] = X^\xi(\exp(t\xi))$ e logo $\exp(t\xi) = \Phi_\xi^t(e)$. Segue que

$$\begin{aligned}\exp((t+s)\xi) &= \exp(t\xi)\exp(s\xi), \\ \exp(-\xi) &= \exp(\xi)^{-1}\end{aligned}$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathfrak{g}$, e ainda

$$[\xi, \zeta] = \mathbf{0} \implies \exp(\xi + \zeta) = \exp(\xi)\exp(\zeta),$$

já que os fluxos de X^ξ e X^ζ comutam se seu colchete for nulo.

Lembrando que $T_0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, temos ainda que a derivada $\exp_{*0} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é a identidade, de modo que $\exp$ é um difeomorfismo local na identidade. Note que, como $\exp$ não é um homomorfismo, *não podemos* utilizar o resultado da Proposição 1.2.6 para concluir que $\exp$ é difeomorfismo local (em geral, não é). Quando $\exp$ se restringe a um difeomorfismo $V \rightarrow U$ em vizinhanças $V \subseteq \mathfrak{g}$ de $\mathbf{0}$ e $U \subseteq \mathcal{G}$ de e , dizemos que a inversa $\log = (\exp|_V)^{-1}$ é um **logarítmo** em $\mathcal{G}$.

Dado um isomorfismo $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ (i.e., escolhendo uma base) e uma vizinhança $U \subseteq \mathcal{G}$ da identidade podemos definir uma carta $\mathbf{x} : Ug \rightarrow T^{-1}[V]$ em $g \in \mathcal{G}$ pela inversa de $x \mapsto \exp(Tx)g$, ou seja, $\mathbf{x} = T^{-1} \circ \log \circ L_{g^{-1}}|_{Ug}$. Um sistema de coordenadas dessa forma é chamado de **coordenadas de primeiro tipo** em g .

Se $\mathfrak{g}$ admite uma decomposição em soma direta $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ de subespaços, podemos escolher vizinhanças do zero $U_i \subseteq \mathfrak{g}_i$ tais que a função

$$\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_k \mapsto \exp(\xi_1) \cdots \exp(\xi_k)g$$

é um difeomorfismo. Em particular, quando os subespaços $\mathfrak{g}_i$ são unidimensionais, o mapa acima define um sistema de coordenadas em $g \in \mathcal{G}$ chamado de **coordenadas de segundo tipo**.

Podemos usar o mapa exponencial para descrever a representação adjunta do grupo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(g)\xi &= (\mathcal{C}_g)_*\xi \\ &= (\mathcal{C}_g)_*\dot{\gamma}_\xi(0) \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\mathcal{C}_g \circ \gamma_\xi) \right|_{t=0} \\ \mathrm{Ad}(g)\xi &= \left. \frac{d}{dt} [g \exp(t\xi)g^{-1}] \right|_{t=0}.\end{aligned}$$

Proposição 1.3.3. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A representação derivada da adjunta do grupo $\mathrm{Ad} : \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ é a representação adjunta da álgebra $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) : \xi \mapsto [\xi, \cdot]$.*

Demonstração. Para quaisquer $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$ temos

$$\begin{aligned}
 \text{ad}(\xi)\zeta &= [\xi, \zeta] \\
 &= [X^\xi, X^\zeta]_e \\
 &= \left. \frac{d}{dt} (\Phi_\xi^{-t})_* X_{\Phi_\xi^t(e)}^\zeta \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} (\Phi_\xi^{-t})_* (L_{\Phi_\xi^t(e)})_* \zeta \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} (R_{\exp(-t\xi)} \circ L_{\exp(t\xi)})_* \zeta \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} (\mathcal{C}_{\exp(t\xi)})_* \zeta \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp(t\xi)) \zeta \right|_{t=0} \\
 &= \text{Ad}_*(\xi)(\zeta).
 \end{aligned}$$

□

Proposição 1.3.4. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra. A imagem do mapa exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ gera a componente conexa da identidade $\mathcal{G}^0$.*

Demonstração. Vamos começar mostrando que a imagem da exponencial é conexa por caminhos. Para todo $g \in \exp[\mathfrak{g}]$, existe algum $\xi \in \mathfrak{g}$ com $\exp(\xi) = \Phi_\xi^1(e) = g$, onde Φ_ξ é o fluxo do campo invariante induzido por ξ . Assim, dados $g_1, g_2 \in \exp[\mathfrak{g}]$, existem $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ tais que a curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}$ dada por

$$\gamma(t) := \begin{cases} \Phi_{\xi_1}^{1-2t}(e) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \Phi_{\xi_2}^{2t}(e) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

ou seja, γ é uma curva ligando g_1 a g_2 . Para concluir que $\exp[\mathfrak{g}]$ é conexo por caminhos, basta ver que a imagem de γ está contida em $\exp[\mathfrak{g}]$. Com efeito, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathfrak{g}$ temos

$$\Phi_\xi^t(e) = \Phi_{t\xi}^1(e) = \exp(t\xi),$$

de modo que $\Phi_\xi^t(e) \subseteq \exp[\mathfrak{g}]$. Concluimos que $\exp[\mathfrak{g}]$ é conexo.

Segue que $\exp[\mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{G}^0$. Como existe uma vizinhança conexa $U \subseteq \mathcal{G}$ da identidade em que $\exp$ é um difeomorfismo, ou seja, $U \subseteq \exp[\mathfrak{g}]$, concluimos que $\mathcal{G}^0 = \langle U \rangle \subseteq \langle \exp[\mathfrak{g}] \rangle$, e logo $\langle \exp[\mathfrak{g}] \rangle = \mathcal{G}^0$. □

Proposição 1.3.5. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Para cada subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, existe um único subgrupo imerso conexo $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ com $\text{Lie}(\mathcal{H}) = \mathfrak{h}$.*

Demonstração. Tome $\mathcal{H} = \langle \exp[\mathfrak{h}] \rangle$. Vamos definir uma estrutura suave em $\mathcal{H}$ utilizando o mapa exponencial. Seja $U \subseteq \mathcal{G}$ uma vizinhança da identidade em que o mapa exponencial é um difeomorfismo e seja $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ uma base para $\mathfrak{h}$. Seja

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exp(x^1 \zeta_1 + \dots + x^n \zeta_n) \in U\},$$

e $\mathbf{x}_h : U_h = \mathcal{H} \cap U_h \rightarrow V$ a bijeção dada pela inversa de $x \mapsto \exp(x^1 \zeta_1 + \cdots + x^n \zeta_n)h$, $h \in \mathcal{H}$. Segue que a família $\{(U_h, \mathbf{x}_h)\}_{h \in \mathcal{H}}$ é um atlas suave para $\mathcal{H}$. Ainda mais, completando a base de acima para uma base $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ de $\mathfrak{g}$, obtemos cartas $\mathbf{y}_g : U_g \rightarrow W$ com

$$W = \{y \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \exp(y^1 \zeta_1 + \cdots + y^n \zeta_n + y^{n+1} \xi_1 + \cdots + y^{n+m} \xi_m) \in U\}$$

e $\mathbf{y}_g^{-1} : y \mapsto \exp(y^1 \zeta_1 + \cdots + y^n \zeta_n + y^{n+1} \xi_1 + \cdots + y^{n+m} \xi_m)g$. Assim, para cada $h \in \mathcal{H}$, a expressão em coordenadas da inclusão $\mathbf{i}_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ nas cartas $(U_h, \mathbf{x}_h)$ e $(U_h, \mathbf{y}_h)$ é simplesmente a inclusão $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$ de V em W , e portanto $\mathbf{i}_{\mathcal{H}}$ é suave e uma imersão. Para ver que $\text{Lie}(\mathcal{H}) = \mathfrak{h}$, basta notar que a parametrização $\mathbf{x}_e^{-1} : V \rightarrow \mathcal{H} \cap U$ tem como derivada $(\mathbf{x}_e^{-1})_{*0} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_e(\mathcal{H})$ o mapa

$$(\mathbf{x}_e^{-1})_{*0}(v) = \sum_{i=1}^n v^i \zeta_i.$$

Ou seja, $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in T_e(\mathcal{H})$ e logo $\mathfrak{h} \subseteq T_e(\mathcal{H})$. Como $\dim \mathcal{H} = n = \dim \mathfrak{h}$, segue que $\mathfrak{h} = T_e(\mathcal{H})$.

Segue ainda que, como $\mathcal{H}$ é gerado por um conexo, é também conexo. Se existir outro subgrupo imerso conexo $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$ com $\text{Lie}(\mathcal{K}) = \mathfrak{h}$, devemos ter $\mathcal{K} = \langle \exp[\mathfrak{h}] \rangle = \mathcal{H}$. $\square$

Proposição 1.3.6. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie com $\text{Lie}(\mathcal{G}) = \mathfrak{g}$ e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ um subgrupo. Seja $\mathfrak{h} := \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp(t\xi) \in \mathcal{H}\}$. Se $\mathcal{H}$ for fechado, valem as seguintes afirmações:*

- (a) $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$;
- (b) dada uma vizinhança $U \subseteq \mathcal{G}$ da identidade em que é possível definir um logaritmo $\log : U \rightarrow V$, existe uma vizinhança $W \subseteq U$ da identidade tal que $\log[\mathcal{H} \cap W] \subseteq \mathfrak{h}$.

Demonstração. (a) Basta mostrar que $\mathfrak{h}$ é fechado pela soma e pelo colchete. Para quaisquer $\xi, \zeta \in \mathfrak{h}$ e $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\exp(t(\xi + \zeta)) = \lim_{k \in \mathbb{N}} \left[\exp\left(\frac{t}{k}\xi\right) \exp\left(\frac{t}{k}\zeta\right) \right]^k.$$

Como cada $\exp\left(\frac{t}{k}\xi\right) \exp\left(\frac{t}{k}\zeta\right) \in \mathcal{H}$ e $\mathcal{H}$ é fechado, segue que o limite $\exp(t(\xi + \zeta)) \in \mathcal{H}$, ou seja, $\xi + \zeta \in \mathfrak{h}$. Para o colchete, como $\text{Ad}(\exp(t\xi)) \exp(s\zeta) \in \mathcal{H}$ para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} [\xi, \zeta] &= \frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp(t\xi))\zeta \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \left[\exp(t\xi) \exp(s\zeta) \exp(-t\xi) \right] \Big|_{t=s=0}, \end{aligned}$$

temos $\exp(ts[\xi, \zeta]) = \exp([t\xi, s\zeta]) = \exp(t\xi) \exp(s\zeta) \exp(-t\xi)$. Em resumo, $[\xi, \zeta] \in \mathfrak{h}$.

(b) Escolha um produto interno em $\mathfrak{g}$. Seja $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ a função dada por $f(\xi) = \exp(\xi_1) \exp(\xi_2)$, onde $\xi_1 \in \mathfrak{h}$ e $\xi_2 \in \mathfrak{h}^\perp$ são únicos com $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Assim, f é suave, e tem derivada $f_{*\mathbf{0}} = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, já que

$$\begin{aligned} f_{*\mathbf{0}}(\xi_1) &= \left. \frac{d}{dt} f(t\xi_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \exp(t\xi_1) \right|_{t=0} = \xi_1 \\ f_{*\mathbf{0}}(\xi_2) &= \left. \frac{d}{dt} f(t\xi_2) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \exp(t\xi_2) \right|_{t=0} = \xi_2 \end{aligned}$$

para quaisquer $\xi_1 \in \mathfrak{h}$ e $\xi_2 \in \mathfrak{h}^\perp$. Segue que f é difeomorfismo local em zero.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $V_\varepsilon = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \|\xi\| < \varepsilon\}$ e $U_\varepsilon = \exp[V_\varepsilon]$. Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $h \in \mathcal{H} \cap U_\varepsilon$ implica em $\log(h) \in \mathfrak{h}$. Suponhamos, por absurdo, que esse não seja o caso. Existiria então uma sequência $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{H}$ com $h_k \rightarrow e$ e $\log(h_k) \notin \mathfrak{h}$. Tome uma vizinhança $V \subseteq \mathfrak{g}$ da origem em que f se restringe a um difeomorfismo $V \rightarrow U$ e escolha $k_0 \in \mathbb{N}$ com $h_k \in U$ para $k \geq k_0$, de modo que existem $\xi_k \in \mathfrak{h} \cap U$ e $\zeta_k \in \mathfrak{h}^\perp$ únicos com $h_k = \exp(\xi_k) \exp(\zeta_k)$ e $\xi_k, \zeta_k \rightarrow \mathbf{0}$. Se $\zeta_k = \mathbf{0}$ então acontece que $\log(h_k) = \xi_k \in \mathfrak{h}$, o que contradiz nossa hipótese. Portanto devemos ter $\zeta_k \neq \mathbf{0}$ para todo $k \geq k_0$. Como ambos $\exp(\xi_k)$ e h_k são elementos de $\mathcal{H}$, temos que $g_k := \exp(-\xi_k)h_k = \exp(\zeta_k) \in \mathcal{H}$.

Como a esfera $\{\zeta \in \mathfrak{h}^\perp \mid \|\zeta\| = 1\}$ é compacta, existe $\zeta \in \mathfrak{h}^\perp$ com $\|\zeta\| = 1$ tal que $\lim(\zeta_k/\|\zeta_k\|) = \zeta$. Ainda mais, para todo $t \in \mathbb{R}$ vale $\lim(t/\|\zeta_k\|)\zeta_k = t\zeta$. Como $\lim\|\zeta_k\| = 0$ e $\|\zeta_k\| \neq 0$, existem $\ell_k \in \mathbb{N}$ com $\lim \ell_k \|\zeta_k\| = t$ (basta tomar $\ell_k = \lceil t/\|\zeta_k\| \rceil$). Juntando toda essa palhaçada, obtemos

$$\lim \exp(\ell_k \zeta_k) = \lim \exp \left[(\ell_k \|\zeta_k\|) \frac{\zeta_k}{\|\zeta_k\|} \right] = \exp(t\zeta).$$

Por outro lado, $\exp(\ell_k \zeta_k) = \exp(\zeta_k)^{\ell_k} = g_k^{\ell_k} \in \mathcal{H}$, $k \geq k_0$. Como $\mathcal{H}$ é fechado, segue que $\exp(t\zeta) = \lim g_k^{\ell_k} \in \mathcal{H}$. Como $t \in \mathbb{R}$ é arbitrário, temos $\zeta \in \mathfrak{h}$. Absurdo, já que $\zeta \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = \{\mathbf{0}\}$ e $\|\zeta\| = 1$. Concluimos assim o resultado. $\square$

Proposição 1.3.7 (Subgrupo Fechado). *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ um subgrupo. Assim, $\mathcal{H}$ é subgrupo de Lie se e somente se for fechado.*

Demonstração. A implicação “subgrupo de Lie $\Rightarrow$ fechado” é o conteúdo da Proposição 1.2.8. Vamos mostrar que um subgrupo fechado é subgrupo de Lie.

Pela Proposição 1.3.6 acima, existe uma vizinhança da identidade $U \subseteq \mathcal{G}$ em que é possível definir um logaritmo $\log : U \rightarrow V$ tal que $\log[\mathcal{H} \cap U] \subseteq \mathfrak{h}$. Assim, $\log$ define uma carta de subvariedade em $\mathcal{H} \cap U$. Concluimos com a Proposição 1.2.9. $\square$

Obtemos um corolário imediato

Proposição 1.3.8. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupos de Lie. Para qualquer homomorfismo suave $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ o núcleo $\ker \varphi$ é um subgrupo de Lie de $\mathcal{G}$ com codimensão igual ao posto de φ .*

Exemplo 1.3.4. Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. O centro $Z(\mathcal{G})$ coincide com o núcleo da representação adjunta, i.e., $Z(\mathcal{G}) = \ker \text{Ad}$, e portanto é um subgrupo de Lie. Vemos também que $\text{Lie}(Z(\mathcal{G})) = Z(\text{Lie}(\mathcal{G}))$. $\blacklozenge$

Proposição 1.3.9. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupos de Lie com respectivas álgebras $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ e $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ um homomorfismo de grupos de Lie. Se $\mathcal{G}$ é conexo, então φ é o único homomorfismo com derivada φ' .*

Demonstração. Denote por $\exp_{\mathcal{G}}$ e $\exp_{\mathcal{H}}$ os respectivos mapas exponenciais. Dado $\xi \in \mathfrak{g}$ considere as curvas $\gamma_{\xi}, \mu_{\xi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ dadas por

$$\begin{aligned}\gamma_{\xi}(t) &:= \varphi(\exp_{\mathcal{G}}(t\xi)), \\ \mu_{\xi}(t) &:= \exp_{\mathcal{H}}(t\varphi'(\xi)).\end{aligned}$$

Ambas começam na identidade $\gamma_{\xi}(0) = \mu_{\xi}(0) = e_{\mathcal{H}}$ e têm a mesma velocidade inicial

$$\dot{\gamma}_{\xi}(0) = \varphi'(\xi) = \dot{\mu}_{\xi}(0),$$

de modo que $\gamma_{\xi} = \mu_{\xi}$. Como isso vale para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, segue que $\varphi \circ \exp_{\mathcal{G}} = \exp_{\mathcal{H}} \circ \varphi'$.

Pela conexidade de $\mathcal{G}$, a Proposição 1.3.4 garante que, para todo $g \in \mathcal{G}$, existem $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathfrak{g}$ com $g = \exp_{\mathcal{G}}(\xi_1) \dots \exp_{\mathcal{G}}(\xi_n)$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\varphi(g) &= \varphi(\exp_{\mathcal{G}}(\xi_1) \dots \exp_{\mathcal{G}}(\xi_n)) \\ &= \exp_{\mathcal{H}}(\varphi'(\xi_1)) \dots \exp_{\mathcal{H}}(\varphi'(\xi_n)).\end{aligned}$$

Concluimos que, se existir outro homomorfismo $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ com $\psi' = \varphi'$, teremos

$$\begin{aligned}\psi(g) &= \exp_{\mathcal{H}}(\psi'(\xi_1)) \dots \exp_{\mathcal{H}}(\psi'(\xi_n)) \\ &= \exp_{\mathcal{H}}(\varphi'(\xi_1)) \dots \exp_{\mathcal{H}}(\varphi'(\xi_n)) \\ &= \varphi(g),\end{aligned}$$

e logo $\psi = \varphi$. □

Exemplo 1.3.5. Em um grupo de Lie $\mathcal{G}$, dado $\xi \in \mathfrak{g}$, a curva $\gamma_{\xi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G} : t \mapsto \exp(t\xi)$ é o único homomorfismo associado ao homomorfismo de álgebras de Lie $\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g} : t \mapsto t\xi$. ◆

Proposição 1.3.10. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupos de Lie e $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ um homomorfismo. O homomorfismo derivado $\varphi' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é:*

- (a) *injetivo se, e só se, o núcleo $\ker \varphi$ é um subgrupo discreto de $\mathcal{G}$;*
- (b) *sobrejetivo se, e só se, $\varphi[\mathcal{G}^0] = \mathcal{H}^0$.*

Demonstração. (a) Se o $\ker \varphi$ é discreto, sua álgebra de Lie é nula e é o núcleo de φ' . Por outro lado, vê-se facilmente que o subgrupo imerso conexo gerado por $\exp[\ker \varphi']$ é a componente conexa da identidade em $\ker \varphi$, de modo que $\ker \varphi' = \mathbf{0}$ implica que $(\ker \varphi)^0$ é discreto. Como as componentes conexas de um grupo de Lie são difeomorfas por translações, segue que $\ker \varphi$ é discreto.

(b) Basta usar que $\varphi \circ \exp_{\mathcal{G}} = \exp_{\mathcal{H}} \circ \varphi'$. Se φ' é sobrejetivo, então $\mathcal{H}^0$ é gerado por $\exp_{\mathcal{H}}[\text{Im} \varphi'] = \exp_{\mathcal{H}}[\mathfrak{h}]$, e como $\varphi[\mathcal{G}^0] = \varphi[\mathcal{G}]^0$ é gerado por $\varphi \exp_{\mathcal{G}}[\mathfrak{g}]$, segue a igualdade. Reciprocamente, se $\varphi[\mathcal{G}^0] = \mathcal{H}^0$ então φ' deve ser sobrejetivo, caso contrário, $\text{Im} \varphi'$ seria uma subálgebra própria de $\mathfrak{h}$ e o subgrupo conexo gerado por $\exp_{\mathcal{H}}[\text{Im} \varphi']$ seria um subgrupo próprio de $\mathcal{H}^0$, o que contradiz a hipótese. □

Proposição 1.3.11 (Teorema do Homomorfismo). *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Se $\mathcal{G}$ é simplesmente conexo, para todo homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ existe um único homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $\rho = \varphi'$.*

Demonstração. Pelo resultado anterior, a unicidade segue da conexidade de $\mathcal{G}$. Basta construir um homomorfismo. Considere o grupo produto $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$. Como ρ é um homomorfismo de álgebras de Lie, seu gráfico $\text{Grf } \rho = \{(\xi, \rho(\xi)) \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Seja $\mathcal{K}$ o subgrupo imerso conexo de $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ com $\text{Lie}(\mathcal{K}) = \text{Grf } \rho =: \mathfrak{k}$. Considere a projeção $\pi : \mathcal{G} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ e sua restrição $\tau : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}$. É trivial ver que $\tau' : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$ é um isomorfismo. Assim, $\tau : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}$ é um recobrimento de Lie, e como $\mathcal{G}$ é simplesmente conexo, τ é um isomorfismo. Seja $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por $\varphi := \text{proj}_{\mathcal{H}} \circ \tau^{-1}$, i.e., $\tau^{-1}(g) = (g, \varphi(g))$. Vemos que φ é um homomorfismo e que

$$(\tau^{-1})' = \text{id}_{\mathfrak{g}} \oplus \rho = \text{id}_{\mathfrak{g}} \oplus \varphi',$$

ou seja, $\varphi' = \rho$. □

Proposição 1.3.12 (3º Teorema de Lie). *Para toda álgebra de Lie real de dimensão finita $\mathfrak{g}$, existe um único grupo de Lie simplesmente conexo $\tilde{\mathcal{G}}$, tal que $\text{Lie}(\tilde{\mathcal{G}}) = \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Pelo corolário 1.1.8 do Teorema de Ado, para toda álgebra de Lie real de dimensão finita $\mathfrak{g}$ existe uma rep. fiel $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{V})$ para algum espaço vetorial real $\mathbb{V}$, de modo que podemos identificar $\mathfrak{g}$ com a imagem de ρ em $\mathfrak{gl}(\mathbb{V})$. Agora, seja $\mathcal{G}$ o subgrupo imerso conexo de $\text{GL}(\mathbb{V})$ gerado por $\exp[\mathfrak{g}]$. Tome o recobrimento universal $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$, de modo que $\text{Lie}(\tilde{\mathcal{G}}) = \text{Lie}(\mathcal{G}) = \mathfrak{g}$. Se $\mathcal{H}$ é outro grupo de Lie simplesmente conexo com $\text{Lie}(\mathcal{H}) = \mathfrak{g}$, então a identidade $\text{id}_{\mathfrak{g}}$ corresponde a um único par de homomorfismos $\varphi : \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{H}$ e $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ com $\varphi' = \psi' = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, de modo que $\psi^{-1} = \varphi$. □

Considere a subcategoria cheia LieGrp_{sc} de LieGrp dos grupos de Lie simplesmente conexos. O Teorema de Lie garante que, nessa subcategoria, o functor de álgebras de Lie $\mathcal{L} : \text{LieGrp}_{sc} \rightarrow \text{LieAlg}_{\mathbb{R}}$ é uma equivalência.

Uma aplicação direta dos teoremas de correspondência é a classificação dos grupos abelianos conexos.

Proposição 1.3.13. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie conexo. Se $\mathcal{G}$ é abeliano, então:*

- (i) *o mapa exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ é o homomorfismo de recobrimento universal;*
- (ii) *existe um isomorfismo $\mathcal{G} \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k$ para alguns $n, k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. (i) Como a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é abeliana, o mapa exponencial satisfaz $\exp(\xi + \zeta) = \exp(\xi)\exp(\zeta)$, ou seja, é um homomorfismo. O fato de que $\exp$ é um mapa de recobrimento segue de $\mathcal{G}$ ser conexo e $\exp$ ser um difeomorfismo local. O recobrimento é universal já que $\mathfrak{g}$ é simplesmente conexa.

(ii) O núcleo de $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ é um subgrupo discreto da forma $\mathbb{Z}\xi_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\xi_k$ com $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathfrak{g}$ linearmente independentes. Completando uma base $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n, \xi_1, \dots, \xi_k\}$ para $\mathfrak{g}$, obtemos um recobrimento $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathcal{G}$ com núcleo $\{0\}^n \times \mathbb{Z}^k$. Logo $\mathcal{G} \simeq \mathbb{R}^{n+k}/\mathbb{Z}^k = \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k$. □

1.4 Representações de Grupos de Lie

Referências para a seção: [14], [15], [2], [34], [16], [17], [53], [51] e [50].

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $\mathbb{K}$ o corpo real ou complexo. Uma **$\mathbb{K}$ -representação de $\mathcal{G}$** é um par $(\mathbb{V}, \rho)$ em que $\mathbb{V}$ é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ um homomorfismo de grupos. A **dimensão da representação** é simplesmente a dimensão do seu espaço vetorial. Uma **representação suave** de $\mathcal{G}$ é uma representação de dimensão finita $(\mathbb{V}, \rho)$ em que ρ é um homomorfismo suave.

Dadas duas $\mathbb{K}$ -representações $(\mathbb{V}_1, \rho_1)$ e $(\mathbb{V}_2, \rho_2)$, definimos um **morfismo de representações** $T : (\mathbb{V}_1, \rho_1) \rightarrow (\mathbb{V}_2, \rho_2)$ como uma transformação linear $T : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ que é também equivariante, i.e., $T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T$ para todo $g \in \mathcal{G}$. Denotaremos por $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G})$ a categoria de $\mathbb{K}$ -representações de $\mathcal{G}$. Duas $\mathbb{K}$ -representações são ditas **equivalentes** se forem isomorfas em $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G})$. Representações sobre $\mathbb{R}$ são chamadas de **representações reais** e sobre $\mathbb{C}$ de **representações complexas**.

Exemplo 1.4.1. Fixado um espaço vetorial de dimensão finita $\mathbb{V}$, todo subgrupo imerso $\mathcal{G} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{V})$ se representa naturalmente em $\mathbb{V}$ pela inclusão. $\blacklozenge$

Exemplo 1.4.2. Um grupo $\mathcal{G}$ se representa trivialmente em qualquer espaço vetorial $\mathbb{V}$ pela **representação constante** $g \mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{V}}$. $\blacklozenge$

Exemplo 1.4.3. Sejam $(\mathbb{V}_1, \rho_1)$ e $(\mathbb{V}_2, \rho_2)$ duas $\mathbb{K}$ -representações de $\mathcal{G}$. Em $\mathcal{F}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ podemos definir a **representação regular** $R : \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2))$ por

$$[R(g)f](v) := \rho_2(g)f(\rho_1(g^{-1})v) \quad (1.1)$$

para quaisquer $v \in \mathbb{V}_1$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$, $g \in \mathcal{G}$. Vemos que os morfismos $(\mathbb{V}_1, \rho_1) \rightarrow (\mathbb{V}_2, \rho_2)$ são as funções lineares $T \in \mathcal{F}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ com $R(g)T = T$ para todo $g \in \mathcal{G}$.

Na prática, o termo *representação regular* aparece associado a inúmeras representações definidas em espaços de funções e definidas por equações similares à (1.1). Por exemplo, podemos trocar a representação $(\mathbb{V}_1, \rho_1)$ por um $\mathcal{G}$ -espaço qualquer e a definição de representação regular acima ainda faz sentido. $\blacklozenge$

Exemplo 1.4.4. Em um grupo $\mathcal{G}$, toda representação $(\mathbb{V}, \rho)$ de dimensão finita é equivalente a uma representação da forma $\rho_0 : \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$, $n = \dim \mathbb{V}$, bastando escolher uma base $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{V}$ e tomar $\rho_0(g) = T^{-1}\rho(g)T$. $\blacklozenge$

Seja $(\mathbb{V}, \rho)$ uma representação de $\mathcal{G}$. Um subespaço $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ é dito **invariante por ρ** se $\rho(g)[\mathbb{W}] \subseteq \mathbb{W}$ para todo $g \in \mathcal{G}$. Assim, obtemos uma representação $(\mathbb{W}, \rho_{\mathbb{W}})$, $\rho_{\mathbb{W}}(g) = \rho(g)|_{\mathbb{W}}$, chamada de **subrepresentação** de $(\mathbb{V}, \rho)$. Uma subrepresentação é dita **trivial** se o subespaço invariante associado for $\mathbb{V}$ ou $\mathbf{0}$. Quando ρ admite subrepresentações não-triviais dizemos que ρ é **redutível**, e do contrário, quando ρ só tem subrepresentações triviais, dizemos que ρ é **irredutível** ou **simples**.

Associado a um subespaço invariante $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ também temos a **representação quociente** $(\mathbb{V}/\mathbb{W}, \rho/\rho_{\mathbb{W}})$ dada por

$$\rho/\rho_{\mathbb{W}}(g)(v + \mathbb{W}) := \rho(g)v + \mathbb{W},$$

de modo que o mapa quociente $\pi_{\mathbb{W}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}/\mathbb{W}$ é equivariante.

Exemplo 1.4.5. Dadas duas representações $(\mathbb{V}_1, \rho_1)$ e $(\mathbb{V}_2, \rho_2)$, para todo mapa equivariante $T : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$, o núcleo $\ker T \subseteq \mathbb{V}_1$ é um subespaço invariante por ρ_1 :

$$Tv = \mathbf{0} \Rightarrow T\rho_1(g)v = \rho_2(g)Tv = \mathbf{0}.$$

◆

Duas subrepresentações $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2 \subseteq \mathbb{V}$ são ditas **complementares** se $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$. Nesse caso, a representação ρ se escreve como uma matriz em blocos

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbb{W}_1}(g) & 0 \\ 0 & \rho_{\mathbb{W}_2}(g) \end{pmatrix}.$$

Em geral, dadas duas representações $(\mathbb{V}_1, \rho_1)$ e $(\mathbb{V}_2, \rho_2)$, podemos definir as **representações soma direta** $(\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2, \rho_1 \oplus \rho_2)$ e **produto tensorial** $(\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$ por

$$\begin{aligned} (\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) &:= (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2) \\ (\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes v_2) &:= \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2. \end{aligned}$$

No caso acima em que $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2 \subseteq \mathbb{V}$ são subrepresentações complementares, temos um isomorfismo $(\mathbb{V}, \rho) \simeq (\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2, \rho_{\mathbb{W}_1} \oplus \rho_{\mathbb{W}_2})$.

Uma representação $(\mathbb{V}, \rho)$ é dita **semi-simples** se for uma soma direta $(\mathbb{V}, \rho) = \bigoplus_{i \in I} (\mathbb{W}_i, \rho_i)$ de subrepresentações irredutíveis.

Proposição 1.4.1 (Lema). *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $P : (\mathbb{V}, \alpha) \rightarrow (\mathbb{W}, \beta)$ um morfismo de representações sobrejetivo. Se $(\mathbb{V}, \alpha)$ é semi-simples então P admite uma seção.*

Demonstração. Proposição 9.4 em [17]. Seja $\mathbb{V} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{V}_i$ a decomposição em subirreps. Como $\ker P \cap \mathbb{V}_i$ é um subespaço invariante de $\mathbb{V}_i$, para todo $i \in I$ devemos ter $\mathbb{V}_i \subseteq \ker P$ ou $\ker P \cap \mathbb{V}_i = \mathbf{0}$. Tomando $J = \{i \in I \mid \ker P \cap \mathbb{V}_i = \mathbf{0}\}$, vemos que $\ker P = \sum_{i \in I \setminus J} \mathbb{V}_i$ e $\mathbb{V} = \ker P \oplus (\bigoplus_{i \in J} \mathbb{V}_i)$. Assim, $P|_{\mathbb{V}'} : \mathbb{V}' = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{V}_i \rightarrow \mathbb{W}$ é um isomorfismo. Denotando por $S : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ o mapa $S(w) = P|_{\mathbb{V}'}^{-1}(w)$, obtemos uma seção de P , uma vez que $S\beta(g)w = S\beta(g)PS(w) = SP\alpha(g)S(w) = \alpha(g)S(w)$ para todo $w \in \mathbb{W}$. $\square$

Proposição 1.4.2. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo e $(\mathbb{V}, \rho)$ uma representação. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $(\mathbb{V}, \rho)$ é semi-simples;
- (b) $\mathbb{V}$ é uma soma (possivelmente não-direta) $\sum_{i \in I} \mathbb{V}_i$ de subrepresentações irredutíveis;
- (c) toda subrepresentação de $\mathbb{V}$ admite uma subrepresentação complementar.

Demonstração. Teorema 9.6 em [17].

(a) $\Rightarrow$ (c): Dada uma subrep $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$, a projeção $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}/\mathbb{W}$ é um morfismo sobrejetivo. Pelo Lema acima (Prop. 1.4.1) existe uma seção dessa projeção, cuja imagem é uma subrepresentação complementar a $\mathbb{W}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Supondo $\mathbb{V} = \sum_{i \in I} \mathbb{V}_i$, onde $\mathbb{V}_i$ são subirreps, definimos o conjunto

$$\mathcal{P} = \{J \in \mathcal{P}(I) \mid \forall i, j \in J, i \neq j \Rightarrow \mathbb{V}_i \cap \mathbb{V}_j = \mathbf{0}\}$$

ordenado por inclusão. Dado $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P})$ totalmente ordenado, vemos que $K = \bigcup_{J \in \mathcal{S}} J$ é uma cota superior para $\mathcal{S}$. Assim, o Lema de Zorn garante que existe $I' \subseteq I$ maximal em $\mathcal{P}$, ou seja, maximal entre os $J \subseteq I$ com $\sum_{i \in J} \mathbb{V}_i = \bigcup_{i \in J} \mathbb{V}_i$. Denote $\mathbb{W} := \bigcup_{i \in I'} \mathbb{V}_i$. Por irreducibilidade, devemos ter $\mathbb{V}_j \subseteq \mathbb{W}$ ou $\mathbb{V}_j \cap \mathbb{W} = \mathbf{0}$ para todo $j \in I$. No segundo caso, a soma direta $\mathbb{W} \oplus \mathbb{V}_j$ nos daria $I' \subsetneq I' \cup \{j\}$, o que contradiz a maximalidade de I' . Segue que $\mathbb{V}_j \subseteq \mathbb{W}$ para todo $j \in I$, ou seja, $\mathbb{V} = \mathbb{W}$.

(c) $\Rightarrow$ (b): Dividimos essa parte da demonstração em três passos: **(Passo 1)** Se $\mathbb{V}$ satisfaz (c), então é uma soma de subrepresentações *cíclicas*, isto é uma subrep $\mathbb{W}$ tal que existe $w \in \mathbb{W}$ com $\mathbb{W} = \rho[\mathcal{G}]w$. De fato, seja $\mathcal{C}$ o conjunto das subreps cíclicas de $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W} = \sum_{U \in \mathcal{C}} U$. Se $\mathbb{V} \neq \mathbb{W}$, existe uma subrep complementar $\mathbb{W}'$ não-nula. Dado $x \in \mathbb{W}'$, a varredura $\text{span} \rho[\mathcal{G}]x$ é uma subrep cíclica não-nula de $\mathbb{V}$ contida em $\mathbb{W}'$, o que é um absurdo já que $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}' = \mathbf{0}$.

(Passo 2) Toda subrep não-nula contém uma subirrep. Com efeito, se $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ é uma subrep não-nula, decompos em subreps cíclicas $\mathbb{W} = \sum_{U \in \mathcal{C}_\mathbb{W}} U$. Cada U , admite uma subrepresentação própria maximal U_1 . Seja U_2 uma subrep complementar $\mathbb{V} = U_1 \oplus U_2$. Como $U = U_1 \oplus (U \cap U_2)$ e U_1 é maximal, segue que $U \cap U_2 \simeq U/U_1$ é irredutível. Em particular, $U \cap U_2 \subseteq \mathbb{W}$.

(Passo 3) Seja $\mathbb{V}_1 = \sum_{\mathbb{W} \in \mathcal{I}} \mathbb{W}$ onde $\mathcal{I}$ é o conjunto de todas as subrepresentações irredutíveis de $\mathbb{V}$. Seja $\mathbb{V}_2$ uma subrepresentação complementar a $\mathbb{V}_1$. Se $\mathbb{V}_2 \neq \mathbf{0}$, existe uma subirrep $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}_2$ e logo $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 \neq \mathbf{0}$, o que é um absurdo. Logo devemos ter $\mathbb{V}_2 = \mathbf{0}$ e logo $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1$. $\square$

No restante da seção trataremos de representações complexas.

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Uma **representação unitária** de $\mathcal{G}$ é um par $(\mathbb{V}, \rho)$ em que $\mathbb{V}$ é um espaço de Hilbert complexo e $\rho : \mathcal{G} \rightarrow U(\mathbb{V})$ um **homomorfismo fortemente contínuo**, i.e., para todo $v \in \mathbb{V}$, a função $\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{V} : g \mapsto \rho(g)v$ é contínua. Equivalentemente, ρ é contínua quando considerando a topologia do produto (convergência pontual) em $U(\mathbb{V}) \subseteq \mathbb{V}^\mathbb{V}$. Fica definida a **categoria de representações unitárias** $\text{UniRep}(\mathcal{G})$ cujos morfismos $(\mathbb{V}_1, \rho_1) \rightarrow (\mathbb{V}_2, \rho_2)$ são morfismos de representação contínuos, i.e., morfismos limitados.

Dizemos que duas representações unitárias $(\mathbb{V}_1, \rho_1)$ e $(\mathbb{V}_2, \rho_2)$ são **unitariamente equivalentes** se existe um morfismo unitário $U : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$, que será um isomorfismo.

Proposição 1.4.3. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Duas representações em $\text{UniRep}(\mathcal{G})$ são unitariamente equivalentes se, e somente se, forem isomorfas.*

Demonstração. Uma direção é trivial. Para a outra, suponhamos que $A : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ é um isomorfismo de representações. Assim, o mapa adjunto $A^\dagger : \mathbb{V}_2 \rightarrow \mathbb{V}_1$ também é um isomorfismo. O operador $A^\dagger A$ também é um isomorfismo e, sendo autoadjunto e positivo, possui uma única raiz quadrada positiva e autoadjunta $R = \sqrt{A^\dagger A}$. Por outro lado, dado $g \in \mathcal{G}$, o operador $R' = \rho(g)^{-1} R \rho(g)$ também é uma raiz positiva e autoadjunta de $A^\dagger A$:

$$(R')^2 = \rho(g)^{-1} R^2 \rho(g) = \rho(g)^{-1} A^\dagger A \rho(g) = A^\dagger A.$$

Ou seja, $R' = R$, e logo R é um isomorfismo de representações ($R^{-1} = \sqrt{AA^\dagger}$). Como

$$U^\dagger U = (AR^{-1})^\dagger AR^{-1} = R^{-1}A^\dagger AR^{-1} = R^{-1}R^2R^{-1} = \text{id}_V,$$

segue que o mapa $U := AR^{-1}$ é um isomorfismo unitário. $\square$

Seja (V, ρ) uma representação unitária de um grupo de Lie $\mathcal{G}$. Dado um subespaço invariante $W \subseteq V$, se W for fechado, a subrepresentação (W, ρ_W) ainda é unitária, e nesse caso chamamos de **subrepresentação unitária**. Nesse caso, temos a

Proposição 1.4.4 (Lema). *Seja (V, ρ) uma representação unitária de um grupo $\mathcal{G}$. Se $W \subseteq V$ é um subespaço invariante então $W^\perp$ também é invariante.*

Demonstração. Basta notar que

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$$

para quaisquer $w \in W$, $v \in W^\perp$ e $g \in \mathcal{G}$. $\square$

Proposição 1.4.5. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo. Toda representação unitária (V, ρ) é semi-simples e se decompõe em soma de representações unitárias irredutíveis.*

Demonstração. Segue do Lema acima (Prop. 1.4.4) e da Proposição 1.4.2. $\square$

Exemplo 1.4.6. Seja $A : (V_1, \rho_1) \rightarrow (V_2, \rho_2)$ um morfismo de representações unitárias de um grupo de Lie $\mathcal{G}$. Como $\ker A \subseteq V_1$ é um subespaço invariante de ρ_1 e é fechado, segue que é uma subrepresentação unitária. Por outro lado, a imagem $\text{Im } A \subseteq V_2$ é um subespaço invariante de ρ_2 que pode não ser fechado, mas seu fecho $\overline{\text{Im } A}$ é uma subrepresentação unitária. $\blacklozenge$

Para representações unitárias (V_1, ρ_1) , (V_2, ρ_2) as operações de soma direta e produto tensorial precisam ser completadas para obtermos reps unitárias. Mais precisamente, definimos $(V_1 \hat{\oplus} V_2, \rho_1 \hat{\oplus} \rho_2)$ e $(V_1 \hat{\otimes} V_2, \rho_1 \hat{\otimes} \rho_2)$ por:

- $V_1 \hat{\oplus} V_2$ é o completamento de $V_1 \oplus V_2$ pelo produto interno $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle$;
- $V_1 \hat{\otimes} V_2$ é o completamento de $V_1 \otimes V_2$ pelo produto interno $\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle$;
- $(\rho_1 \hat{\oplus} \rho_2)(g)$ e $(\rho_1 \hat{\otimes} \rho_2)(g)$ são as extensões contínuas de $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)$ e $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)$, respectivamente.

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Dizemos que uma representação complexa (V, ρ) é **unitarizável** se existe um isomorfismo $(V, \rho) \rightarrow (V_0, \rho_0)$ para alguma representação unitária (V_0, ρ_0) . Equivalentemente, (V, ρ) é unitarizável se, e só se, existe um produto interno fazendo de V um espaço de Hilbert e de ρ uma rep. unitária. Desse modo, as representações se fatoram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\rho} & \text{GL}(V) \\ & \searrow \rho_0 & \nearrow \\ & U(V) & \end{array}$$

Proposição 1.4.6. *Seja $(\mathbb{V}, \rho)$ uma representação unitária de um grupo de Lie $\mathcal{G}$. Dado um subespaço fechado $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ com projeção ortogonal $P : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, temos que $\mathbb{W}$ é invariante se e só se P for um morfismo, i.e., $\rho(g)P = P\rho(g)$ para todo $g \in \mathcal{G}$.*

Demonstração. Se $\mathbb{W}$ é um subespaço invariante fechado, temos um isomorfismo natural $\mathbb{V}/\mathbb{W}^\perp \simeq \mathbb{W}$. Como $\text{Im } P = \mathbb{W}$, o mapa $P|^\mathbb{W}$ é identificado com o mapa quociente $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}/\mathbb{W}^\perp$, que é um morfismo de representações. Como $P = \mathbf{i}_\mathbb{W} \circ P|^\mathbb{W}$ é composição de morfismos, P também é um morfismo.

Reciprocamente, se $\rho(g)P = P\rho(g)$ para todo $g \in \mathcal{G}$, dado $w \in \mathbb{W}$ temos

$$\rho(g)w = \rho(g)Pw = P\rho(g)w \in \mathbb{W}.$$

□

Proposição 1.4.7 (Lema de Schur). *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $(\mathbb{V}, \rho)$, $(\mathbb{W}, \varphi)$ duas representações unitárias irredutíveis. Dado um morfismo $A : (\mathbb{V}, \rho) \rightarrow (\mathbb{W}, \varphi)$ valem as seguintes afirmações:*

- (i) se $A \neq \mathbf{0}$ então A é um isomorfismo;
- (ii) se $(\mathbb{V}, \rho) = (\mathbb{W}, \varphi)$, então $A = \lambda \text{id}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demonstração. (i) Suponhamos $A \neq \mathbf{0}$. Como $\ker A$ é uma subrepresentação, a irredutibilidade de $\mathbb{V}$ garante que $\ker A = \mathbf{0}$ ou $\ker A = \mathbb{V}$. Como $A \neq \mathbf{0}$, devemos ter A injetiva. Analogamente, a irredutibilidade de $\mathbb{W}$ nos diz que $\overline{\text{Im } A} = \mathbf{0}$ ou $\overline{\text{Im } A} = \mathbb{W}$, e como $A \neq \mathbf{0}$, segue que A é sobrejetiva. O Teorema da Aplicação Aberta entre espaços de Banach garante que A é um isomorfismo.

(ii) Adaptada do Teo. 21.30 em [53]. Suponha que $B : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é um operador auto-adjunto limitado. Tome a sua decomposição espectral

$$B = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_B(\lambda).$$

Pelo Teorema Espectral, temos $[\rho(g), B] = \mathbf{0}$ se e somente se $[\rho(g), \mu_B(E)] = \mathbf{0}$ para todo Boreliano $E \subseteq \mathbb{R}$. Como $\mu_B(E)$ é uma projeção ortogonal e $\mathbb{V}$ é irredutível, a Prop. 1.4.6 acima nos diz que $\mu_B(E) = \mathbf{0}$ ou $\mu_B(E) = \text{id}_\mathbb{V}$. Existe um $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{-\infty}^t \lambda d\mu_B(\lambda) = \mathbf{0}$ para $t < \lambda_0$ e $\int_{-\infty}^t \lambda d\mu_B(\lambda) = \text{id}_\mathbb{V}$ para $t > \lambda_0$, de modo que $B = \lambda_0 \text{id}_\mathbb{V}$.

Agora, para o morfismo arbitrário A , temos $A = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) + \frac{1}{2i}(A - A^\dagger)$, onde $B_1 := \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ e $B_2 := \frac{1}{2i}(A - A^\dagger)$ são auto-adjuntos. Aplicando o argumento acima, para $B_1 = \lambda_1 \text{id}_\mathbb{V}$ e $B_2 = \lambda_2 \text{id}_\mathbb{V}$ obtemos $A = (\lambda_1 + i\lambda_2) \text{id}_\mathbb{V}$. □

1.5 Ações Suaves e Invariantes

As referências para esta seção são [34], [2] e [32].

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Um **$\mathcal{G}$ -espaço suave** é um par $(\mathcal{X}, \cdot)$ onde $\cdot : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ é uma ação suave à esquerda ou à direita.¹ Mais geralmente, um **$\mathbf{G}$ -espaço** será

¹Como ações por um lado são univocamente determinadas por ações do outro, vamos tratar geralmente de ações à direita no decorrer do texto, com as modificações para ações à esquerda sendo triviais.

uma tripla $(\mathcal{X}, \mathcal{G}, \cdot)$ em que $\mathcal{G}$ é um grupo de Lie $\mathcal{X}$ um $\mathcal{G}$ -espaço. Geralmente vamos omitir a ação da notação e escrever apenas $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$. Dado um outro $\mathcal{G}$ -espaço $(\mathcal{Y}, \mathcal{H})$, definimos um **mapa equivariante** como um par (f, f_G) , em que $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ e $f_G : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ é um homomorfismo, ambos suaves, satisfazendo $f(xg) = f(x)f_G(g)$, para quaisquer $x \in \mathcal{X}$ e $g \in \mathcal{G}$. Em outras palavras, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{(f, f_G)} & \mathcal{Y} \times \mathcal{H} \\ \downarrow (x, g) \mapsto xg & & \downarrow (y, h) \mapsto yh \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Fica definida a categoria **G-spaces** de $\mathcal{G}$ -espaços com mapas equivariantes como morfismos. Também vamos considerar a subcategoria **$\mathcal{G}$ -spaces** de $\mathcal{G}$ -espaços para um grupo de Lie $\mathcal{G}$ fixo, com mapas equivariantes da forma $f(xg) = f(x)g$, i.e., $f_G = \text{id}_{\mathcal{G}}$. Os morfismo em **$\mathcal{G}$ -spaces** serão chamados de mapas **$\mathcal{G}$ -equivariantes**.

Exemplo 1.5.1. Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupos de Lie. Dado um homomorfismo $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$, fica definida uma ação $\cdot : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ por $h \cdot g := f(h)g$. Note que ação de $\mathcal{H}$ em si mesmo pela esquerda é dessa forma, com $f = \text{id}_{\mathcal{H}}$. Desse modo, f se torna um mapa $\mathcal{H}$ -equivariante $f(h_1 h_2) = f(h_1)f(h_2) = h_1 \cdot f(h_2)$.

Em especial, para subgrupos $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, vamos sempre considerar a ação natural à esquerda, que se encaixa no caso acima com o mapa de inclusão $f = \mathbf{i}_{\mathcal{H}}$. ♦

Exemplo 1.5.2. Generalizando o exemplo anterior, tome um $\mathcal{G}$ -espaço $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ e um homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$. Compondo a ação $\mathcal{H} \curvearrowright \mathcal{X}$ com φ obtemos uma ação $\mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X} : (x, g) \mapsto x\varphi(g)$ chamada de **ação induzida por φ** . ♦

Exemplo 1.5.3 (Ação Coadjunta). Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie com álgebra $\text{Lie}(\mathcal{G}) = \mathfrak{g}$. Considere a representação adjunta $\text{Ad} : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. A **ação coadjunta** de $\mathcal{G}$ é a ação dada pela transposta de Ad , i.e., é a ação à direita

$$\begin{aligned} & : \mathfrak{g}^* \times \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{g}^* \\ & : (\alpha, g) \mapsto \alpha \circ \text{Ad}(g) = \text{Ad}(g)^T \alpha \end{aligned}$$

no espaço dual da álgebra. Essa ação está por trás de um exemplo principal do esquema de quantização, que veremos mais à frente. A realização associada à essa ação é a **representação coadjunta do grupo**

$$\begin{aligned} \text{coAd} : \mathcal{G} & \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*) \\ & : g \mapsto \text{Ad}(g^{-1})^T, \end{aligned}$$

que é simplesmente a representação regular de $\mathcal{F}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ restrita nas funções lineares. ♦

Exemplo 1.5.4. Considere dois $\mathcal{G}$ -espaços $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ e $(\mathcal{Y}, \mathcal{H})$. Se tivermos um homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, podemos definir a **ação diagonal em relação a φ** como o mapa

$$\begin{aligned} & : (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \\ & : ((x, y), g) \mapsto (xg, y\varphi(g)). \end{aligned}$$

Desse modo, as projeções $\pi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ e $\pi_{\mathcal{Y}} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ formam mapas equivariantes $(\pi_{\mathcal{X}}, \text{id}_{\mathcal{G}})$ e $(\pi_{\mathcal{Y}}, \varphi)$. Se considerarmos a ação de $\mathcal{H}$ pela *esquerda* $hy := yh^{-1}$ em $\mathcal{Y}$, a ação diagonal toma a forma $((x, y), g) \mapsto (xg, \varphi(g^{-1})y)$. Quando temos ações de lados opostos, precisamos colocar uma inversão na ação diagonal. Quando $\mathcal{H} = \mathcal{G}$, é costume considerar a ação diagonal em relação à identidade $\text{id}_{\mathcal{G}}$, de modo que as projeções são $\mathcal{G}$ -equivariantes.

Note que a ação diagonal em relação a φ é igual à ação diagonal em relação a $\text{id}_{\mathcal{H}}$ considerando $\mathcal{Y}$ com a ação induzida por φ . $\blacklozenge$

Exemplo 1.5.5. Fixe um G -espaço $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$. Dada uma variedade $\mathcal{M}$, podemos definir uma ação

$$\begin{aligned} & : (\mathcal{M} \times \mathcal{X}) \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{X} \\ & : ((p, x), g) \mapsto (p, xg) \end{aligned}$$

que faz da projeção $\pi_{\mathcal{X}} : \mathcal{M} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ um mapa $\mathcal{G}$ -equivariante. Se equiparmos $\mathcal{M}$ com a ação trivial $(p, g) \mapsto p$, a ação acima é simplesmente uma ação diagonal. $\blacklozenge$

Dado um G -espaço $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$, consideramos para cada $x \in \mathcal{X}$ o subgrupo

$$\text{Stab}(x) := \{g \in \mathcal{G} \mid xg = x\},$$

chamado de **estabilizador de x** , e o mapa de avaliação

$$\begin{aligned} \sigma_x & : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X} \\ & : g \mapsto xg. \end{aligned}$$

A suavidade de σ_x segue diretamente da suavidade da ação. Como $\text{Stab}(x) = \sigma_x^{-1}[x]$ é fechado, é naturalmente um subgrupo de Lie, cuja álgebra de Lie denotaremos por $\mathfrak{stab}(x) := \text{Lie}(\text{Stab}(x))$.

Alguns tipos de G -espaços importantes que vão aparecer no nosso estudo são:

- **espaços homogêneos:** correspondem a ações transitivas, isto é, um G -espaço $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ é dito homogêneo se para quaisquer $x, y \in \mathcal{X}$ existe $g \in \mathcal{G}$ com $xg = y$.
- **ações efetivas:** uma ação efetiva ou fiel é uma em que a realização correspondente $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{X})$ é injetiva, ou equivalentemente, para todo $g \in \mathcal{G} \setminus \{e\}$ existe $x \in \mathcal{X}$ com $xg \neq x$.
- **ações livres:** uma ação é dita livre de ponto fixo quando, dado $g \in \mathcal{G}$, existir um $x \in \mathcal{X}$ com $xg = x$ implica em $g = e$, ou seja, o único elemento de $\mathcal{G}$ com ponto fixo é a identidade.
- **espaços homogêneos principais:** correspondem a ações regulares (livre e transitiva). Nesse caso, para cada $x, y \in \mathcal{X}$ existe um único $g \in \mathcal{G}$ com $xg = y$, que pode ser denotado por $x^{-1}y$.
- **ações próprias:** uma ação $\mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ é dita própria se o mapa $f : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}^2 : (x, g) \mapsto (x, xg)$ é próprio, i.e., $f^{-1}[K]$ é compacto para qualquer compacto $K \subseteq \mathcal{X}^2$.

Um dos ingredientes principais no estudo dos próximos capítulos são espaços de órbitas, i.e., variedades da forma $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ para algum G -espaço $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$. Em geral, não podemos garantir que um quociente de ação suave admite estrutura suave. Porém, ainda temos muitos casos em que isso ocorre. Em especial,

Proposição 1.5.1 (Teorema da Variedade Quociente). *Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ um G -espaço. Se a ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{X}$ é livre e própria, então o espaço quociente $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ é uma variedade topológica de dimensão $\dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{G}$ e admite uma única estrutura suave tal que a projeção $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{G}$ é uma submersão suave.*

Demonstração. Teorema 7.10 em [32]. □

Proposição 1.5.2. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ é um subgrupo fechado, então o quociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, por qualquer uma das ações à esquerda ou direita, admite uma única estrutura de variedade suave em que a projeção $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ é uma submersão suave. Ainda mais, se $\mathcal{H}$ é normal, então $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ é um grupo de Lie.*

Demonstração. A ação de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ é claramente livre. Resta mostrar que é própria. Seja $F : \mathcal{G}^2 \rightarrow \mathcal{G}^2$, $F(g_1, g_2) = (g_1, g_1 g_2)$. Dado um compacto $K \subseteq \mathcal{G}^2$, sua pré-imagem é

$$\begin{aligned} F^{-1}[K] &= \{(g_1, g_2) \in \mathcal{G}^2 \mid (g_1, g_1 g_2) \in K\} \\ &= \{(k_1, k_1^{-1} k_2) \in \mathcal{G}^2 \mid (k_1, k_2) \in K\}, \end{aligned}$$

de modo que $f^{-1}[K] = F^{-1}[K] \cap (\mathcal{G} \times \mathcal{H})$, onde $f = F|_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}$ é a restrição de F a $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$. Como $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ é Hausdorff, K é fechado e logo $f^{-1}[K]$ é fechado.

Por outro lado, a inversa F^{-1} leva K no compacto $F^{-1}[K]$. Como $f^{-1}[K]$ é fechado dentro de um compacto, segue que é compacto. □

Exemplo 1.5.6. Seguindo o Exemplo 1.5.1, consideramos um homomorfismo de grupos de Lie $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$. Se f é um mergulho, ou seja, se a imagem de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ é um subgrupo fechado, podemos considerar o quociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ pela ação à esquerda induzida por f . No espaço quociente temos naturalmente uma ação à direita

$$\begin{aligned} & : \mathcal{G}/\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H} \\ & : (\mathcal{H}g, h) \mapsto \mathcal{H}gh, \end{aligned}$$

obtendo assim um $\mathcal{H}$ -espaço $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

É claro que temos uma ação à esquerda natural de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, mas ela é trivial já que $h\mathcal{H}g = \mathcal{H}g$. Por isso, ao considerar ações entre grupos à esquerda, os G -espaços obtidos por quociente terão ações à direita, e vice-versa. ◆

Proposição 1.5.3. *Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ um G -espaço. Para cada $x_0 \in \mathcal{X}$ considere o mapa $\phi : \mathcal{G}/\text{Stab}(x_0) \rightarrow \mathcal{X}$, $\phi(\text{Stab}(x_0)g) = x_0 g$. Valem as seguintes afirmações:*

- (i) ϕ é uma imersão injetiva $\mathcal{G}$ -equivariante;
- (ii) se a ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{X}$ é transitiva, então ϕ é um isomorfismo.

Demonstração. (i) É trivial ver que ϕ é equivariante. Vamos mostrar que é injetivo. Dados $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, se $\text{Stab}(x_0)g_1 \neq \text{Stab}(x_0)g_2$ então $x_0g_1 \neq x_0g_2$. De fato, se fosse $x_0g_1 = x_0g_2$ teríamos $g_1g_2^{-1} \in \text{Stab}(x_0)$, o que contradiz a hipótese. Segue que ϕ é injetivo. Para ver que é uma imersão basta notar que $\ker \phi_{*x_0} = \text{stab}(x_0)$.

(ii) Suponha que $\mathcal{X}$ é homogêneo. Para mostrar a sobrejetividade, vamos construir uma inversa para ϕ , supondo a transitividade da ação. Nesse caso, para todo $x \in \mathcal{X}$ existe $g_x \in \mathcal{G}$ tal que $x_0g_x = x$. Note que, se ambos $g_x, h_x \in \mathcal{G}$ satisfazem $x_0g_x = x = x_0h_x$, então $g_xh_x^{-1} \in \text{Stab}(x_0)$, i.e., $g_x\text{Stab}(x_0) = h_x\text{Stab}(x_0)$. Podemos então definir uma função $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}/\text{Stab}(x_0)$ por $\psi(x) = \text{Stab}(x_0)g_x$. Para ver que $\psi = \phi^{-1}$ basta calcular

$$(\phi \circ \psi)(x) = \phi(\text{Stab}(x_0)g_x) = x_0g_x = x$$

para cada $x \in \mathcal{X}$. Como ϕ é uma imersão injetiva, é um mapa aberto e logo um mergulho. Segue que ϕ é um difeomorfismo. $\square$

Proposição 1.5.4. *Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ um G -espaço. Dado $x_0 \in \mathcal{X}$, sobre o mapa de avaliação $\sigma_{x_0} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X} : g \mapsto x_0g$, valem as seguintes afirmações:*

- (a) σ_{x_0} é $\mathcal{G}$ -equivariante;
- (b) se a ação $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{X}$ é transitiva, então σ_{x_0} é uma submersão;
- (c) se a ação é regular (livre e transitiva), então σ_{x_0} é um isomorfismo.

Demonstração. (a) Trivial.

(b) Tome um vetor tangente $X \in T_x(\mathcal{X})$. Em uma vizinhança conexa U de x . A pré-imagem $\sigma_{x_0}^{-1}[U]$ é uma vizinhança da identidade. Tome U_0 a componente conexa de $\sigma_{x_0}^{-1}[U]$ contendo e . Dada uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ com $\dot{\gamma}(0) = X$, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ existe $g_t \in U_0$ com $x_0g_t = \gamma(t)$. A curva $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_0 : t \mapsto g_t$ é suave e $X = \xi^\sigma(x)$, onde $\xi = \frac{dg_t}{dt}(0)$.

(c) Como $\text{Stab}(x_0) = \{e\}$ para todo $x_0 \in \mathcal{X}$, segue do isomorfismo $\mathcal{G} = \mathcal{G}/\{e\} \rightarrow \mathcal{X}$. $\square$

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e $\mathcal{X}$ uma variedade. Uma **ação de álgebra de Lie** de $\mathfrak{g}$ em $\mathcal{X}$ é uma função suave $\varphi : \mathcal{X} \times \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathcal{X})$ tal que $\varphi(x, \xi) \in T_x(\mathcal{X})$ para quaisquer $x \in \mathcal{X}$, $\xi \in \mathfrak{g}$ e $[\xi^\varphi, \zeta^\varphi] = [\xi, \zeta]^\varphi$ para quaisquer $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$, onde $\xi^\varphi : \mathcal{X} \rightarrow T(\mathcal{X})$ é o campo de vetores $\xi^\varphi(x) := \varphi(x, \xi)$. Em outras palavras, φ é um homomorfismo de fibrados vetoriais que induz um homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{X}) : \xi \mapsto \xi^\varphi$.

Dizemos que uma ação de álgebra de Lie $\rho : \mathcal{X} \times \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathcal{X})$ é:

- **efetiva** ou **fiel** se o homomorfismo $\xi \mapsto \xi^\rho$ for injetivo;
- **livre** ou **livre de ponto fixo**, se para todo $\xi \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ o campo ξ^ρ é não-singular.

Proposição 1.5.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita agindo em uma variedade $\mathcal{X}$ por $\rho : \mathcal{X} \times \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathcal{X})$. A ação ρ é livre se, e somente se, $\mathcal{X} \times \mathfrak{g}$ se mergulha como um subfibrado trivial de $T(\mathcal{X})$.*

Demonstração. Utilizando a Proposição A.3.6, basta notar que ρ ser livre é equivalente à $\ker \rho = \mathbf{O}_{\mathcal{X}}$. Suponha que ρ é livre. Dado $\xi \in \mathfrak{g}$ não-nulo, o campo ξ^ρ não se anula em $\mathcal{X}$, de modo que o mapa $\mathfrak{g} \rightarrow T_x(\mathcal{X}) : \xi \mapsto \rho(x, \xi)$ é injetivo para todo $x \in \mathcal{X}$. A recíproca segue trivialmente. $\square$

Quando $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathcal{G})$ é a álgebra de um grupo de Lie, uma ação de grupo $\mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ induz uma aplicação $\sigma : \mathcal{X} \times \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathcal{X})$ por

$$\sigma(x, \xi) := \left. \frac{d}{dt} [x \exp(t\xi)] \right|_{t=0},$$

ou seja, $\sigma(x, \xi) = (\sigma_x)_* \xi$, onde $\sigma_x : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ é o mapa de avaliação $\sigma_x(g) = xg$.

Proposição 1.5.6. *Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ um G -espaço. Sobre o mapa $\sigma : \mathcal{X} \times \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathcal{X})$ valem as seguintes afirmações:*

- (i) σ é uma ação de álgebra de Lie;
- (ii) se a ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{X}$ for efetiva, então σ é efetiva;
- (iii) se a ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{X}$ for livre, então σ é livre.

Demonstração. (i) Dado $\xi \in \mathfrak{g}$, note que o fluxo de ξ^σ é $\Phi_\xi : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $\Phi_\xi^t(x) = x \exp(t\xi)$. Ou seja, se $\gamma_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ é a curva $\gamma_\xi(t) = \exp(t\xi)$, então

$$\Phi_\xi^t(x) = R_{\gamma_\xi(t)}(x) = \sigma_x(\gamma_\xi(t))$$

onde $R_g : x \mapsto xg$. Agora, para cada $g \in \mathcal{G}$ e $x \in \mathcal{X}$ temos

$$\begin{aligned} (R_{\gamma_\xi(t)} \circ \sigma_{x\gamma_\xi(t)^{-1}})(g) &= [(x\gamma_\xi(t)^{-1})g]\gamma_\xi(t) \\ &= x[\gamma_\xi(t)^{-1}g\gamma_\xi(t)] \\ &= x(\mathcal{C}_{\gamma_\xi(t)^{-1}}g), \end{aligned}$$

isto é,

$$R_{\gamma_\xi(t)} \circ \sigma_{x\gamma_\xi(t)^{-1}} = \sigma_x \circ \mathcal{C}_{\gamma_\xi(t)^{-1}}.$$

Dados $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$, para cada $x \in \mathcal{X}$ calculamos

$$\begin{aligned} (R_{\gamma_\xi(t)})_* \zeta^\sigma(R_{\gamma_\xi(t)^{-1}}(x)) &= (R_{\gamma_\xi(t)})_* \zeta^\sigma(x\gamma_\xi(t)^{-1}) \\ &= (R_{\gamma_\xi(t)})_*(\sigma_{x\gamma_\xi(t)^{-1}})_* \zeta \\ &= (R_{\gamma_\xi(t)} \circ \sigma_{x\gamma_\xi(t)^{-1}})_* \zeta \\ &= (\sigma_x \circ \mathcal{C}_{\gamma_\xi(t)^{-1}})_* \zeta \\ &= (\sigma_x)_* \text{Ad}(\gamma_\xi(t)^{-1})\zeta, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
[\xi^\sigma, \zeta^\sigma]_x &= \frac{d}{dt} \left[(\Phi_\xi^{-t})_* \zeta_{\Phi_\xi^t(x)}^\sigma \right] \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left[(R_{\gamma_\xi(t)^{-1}})_* \zeta^\sigma(R_{\gamma_\xi(t)}(x)) \right] \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left[(\sigma_x)_* \text{Ad}(\gamma_\xi(t)) \zeta \right] \Big|_{t=0} \\
&= (\sigma_x)_* \frac{d}{dt} \left[\text{Ad}(\gamma_\xi(t)) \zeta \right] \Big|_{t=0} \\
&= (\sigma_x)_* \text{ad}(\xi) \zeta \\
&= [\xi, \zeta]_x^\sigma.
\end{aligned}$$

Concluimos que $\xi \mapsto \xi^\sigma$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

(ii) Dado $\xi \in \mathfrak{g}$, suponhamos que $\xi^\sigma = \mathbf{0}$. Isso significa que o fluxo Φ_ξ é trivial, i.e., $\Phi_\xi^t = \text{id}_\mathcal{X}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se a ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{X}$ é fiel, temos $x \exp(t\xi) = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$, e logo $\exp(t\xi) = e$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em resumo, concluimos que $\xi = \mathbf{0}$, ou seja, $\xi \mapsto \xi^\sigma$ é injetiva.

(iii) Dado $\xi \in \mathfrak{g}$ suponhamos que $\xi^\sigma(x) = \mathbf{0}$ para algum $x \in \mathcal{X}$. Segue que $x \exp(t\xi) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se a ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{X}$ é livre, então $\exp(t\xi) = e$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e logo $\xi = \mathbf{0}$. $\square$

Os campos ξ^σ associados a uma ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{X}$ são chamados de **campos fundamentais**. Denotamos por $\mathfrak{g}^\sigma$ a subálgebra de campos fundamentais em $\mathfrak{X}(\mathcal{X})$.

N.B. Para ações à esquerda a fórmula do campo fundamental deve ser $\frac{d}{dt} [\exp(-t\xi)x] \Big|_{t=0}$ para garantir que $\xi \mapsto \xi^\sigma$ seja um homomorfismo de álgebras de Lie. $\star$

Um **fibrado equivariante** é um objeto-fibrado na categoria de G-espacos, ou seja, consiste em um mapa equivariante $(\pi, \pi_G) : (\mathcal{E}, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{H})$, tal que π também é um fibrado suave. Em resumo, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{(v, g) \mapsto vg} & \mathcal{E} \\
\pi \times \pi_G \downarrow & & \downarrow \pi \\
\mathcal{M} \times \mathcal{H} & \xrightarrow{(x, h) \mapsto xh} & \mathcal{M}
\end{array}$$

Um **fibrado vetorial equivariante** é um fibrado equivariante $(\pi, \pi_G) : (\mathcal{E}, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{H})$ com uma estrutura de fibrado vetorial, tal que a ação $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{E}$ é dada por um homomorfismo $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}_{\text{VB}}(\mathcal{E})$ com $\rho(g^{-1})v = vg$, $\rho(g^{-1})_B x = x\pi_G(g)$, $v \in \mathcal{E}$, $x \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{G}$. Ou seja, é um objeto-fibrado vetorial na categoria de G-espacos. Fixado um grupo de Lie $\mathcal{G}$, seguem as definições análogas de **fibrado $\mathcal{G}$ -equivariante** e **fibrado vetorial $\mathcal{G}$ -equivariante**, bastando fixar $\pi_G = \text{id}_\mathcal{G}$.

Denotaremos por FB^G (resp. VB^G) a categoria de fibrados (vetoriais) equivariantes, cujos morfismos, e por $\text{FB}^\mathcal{G}$ (respec. $\text{VB}^\mathcal{G}$) a categoria de fibrados (vetoriais) $\mathcal{G}$ -equivariantes, todas com morfismos sendo mapas fibrados equivariantes.

Exemplo 1.5.7. Dados $\mathcal{G}$ -espaços $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ e $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ e um homomorfismo $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, o produto $\mathcal{M} \times \mathcal{F}$, com a ação diagonal em relação a φ , forma um fibrado $\mathcal{G}$ -equivariante $\mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$.

Um fibrado $\mathcal{G}$ -equivariante é dito **trivial** se for equivalente a um produto $\mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$ com ação trivial nas fibras $((x, v), g) \mapsto (xg, v)$. $\blacklozenge$

Em um fibrado equivariante $(\pi, \pi_G) : (\mathcal{E}, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{H})$, uma **seção equivariante** é um mapa suave $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $\pi \circ s = \text{id}_{\mathcal{M}}$ e $s(x\pi_G(g)) = s(x)g$, para quaisquer $x \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{G}$. Ou seja, é um seção de π que é $\mathcal{G}$ -equivariante quando consideramos a ação induzida $(x, g) \mapsto x\pi_G(g)$ em $\mathcal{M}$. Denotaremos por $\Gamma_{\mathcal{M}}(\pi, \pi_G)$ o conjunto de seções equivariantes de (π, π_G) . Quando $\pi_G = \text{id}_{\mathcal{G}}$, escrevemos $\Gamma_{\mathcal{M}}(\pi)^{\mathcal{G}} := \Gamma_{\mathcal{M}}(\pi, \text{id}_{\mathcal{G}})$.

No caso vetorial, o espaço de seções $\Gamma_{\mathcal{M}}(\pi)$ admite uma representação $R : \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(\Gamma_{\mathcal{M}}(\pi))$ dada por

$$[R(g)s](x) := s(x\pi_G(g))g^{-1}$$

$s \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\pi)$, $x \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{G}$. Vemos imediatamente que as seções equivariantes são os pontos fixos dessa representação, i.e.,

$$\Gamma_{\mathcal{M}}(\pi, \pi_G) = \{s \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\pi) \mid \forall g \in \mathcal{G}, R(g)s = s\}.$$

A representação R será chamada de **representação regular do fibrado vetorial equivariante**.

Exemplo 1.5.8. Considere um $\mathcal{G}$ -espaço $\mathcal{M}$ e $(\mathbb{V}, \rho)$ uma representação suave de $\mathcal{G}$. Pelo isomorfismo natural $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{M} \times \mathbb{V}) \simeq C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{V})$, a representação regular se escreve $[R(g)f](x) = \rho(g)f(xg)$.

Por outro lado, se $\mathcal{M} = *$ é um ponto com ação trivial de $\mathcal{G}$, os fibrados vetoriais $\mathcal{G}$ -equivariantes $\mathcal{E} \rightarrow *$ se resumem a representações suaves de $\mathcal{G}$. $\blacklozenge$

Proposição 1.5.7. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $\mathcal{M}$ um $\mathcal{G}$ -espaço. Para qualquer functor suave $\mathcal{F} : \text{Vec}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}}$, a extensão a fibrados vetoriais $\mathcal{F}_{\mathcal{M}} : \text{VB}_{\mathcal{M}} \rightarrow \text{VB}_{\mathcal{M}}$ preserva equivariância, ou seja, se $\mathcal{E}$ é $\mathcal{G}$ -equivariante então $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ admite uma ação natural que o faz $\mathcal{G}$ -equivariante.*

Demonstração. Capítulo III, seção 8, Proposição 15 em [34]. Se a ação de $\mathcal{E}$ é dada por um homomorfismo $R : \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}_{\text{VB}}(\mathcal{E})$, então a ação em $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ é definida por $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(R) : \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}_{\text{VB}}(\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}))$, com $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(R)(g)_x = \mathcal{F}(R(g)_x)$ entre as fibras $\mathcal{F}(\mathcal{E}_x) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{E}_{xg})$. $\square$

Seja $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ um $\mathcal{G}$ -espaço. Um **invariante geométrico** da ação $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ é uma seção equivariante $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(T(\mathcal{M}))$ para algum functor suave $\mathcal{F} : \text{Vec}_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}}$.

Exemplo 1.5.9. Um **campo de vetores invariante** de uma ação $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ é um campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tal que $X(xg)g^{-1} = X(x)$ para quaisquer $x \in \mathcal{M}$ e $g \in \mathcal{G}$, onde a ação $\mathcal{G} \curvearrowright T(\mathcal{M})$ é dada pelo pushforward de $x \mapsto xg^{-1}$. $\blacklozenge$

Exemplo 1.5.10. Em um grupo de Lie $\mathcal{G}$, os campos invariantes $\mathfrak{X}_L(\mathcal{G})$ e $\mathfrak{X}_R(\mathcal{G})$ recebem esse nome justamente porque são invariantes das ações à esquerda e à direita, respectivamente. Lembrando que a definição da álgebra de Lie associada que utilizamos nos dá $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{X}_L(\mathcal{G})$ e $\mathfrak{g}^{\text{op}} \simeq \mathfrak{X}_R(\mathcal{G})$, onde $\mathfrak{g}^{\text{op}} = (\mathfrak{g}, -[\cdot, \cdot])$ é a álgebra de Lie do grupo oposto $\mathcal{G}^{\text{op}}$. $\blacklozenge$

Seja $(\pi, \pi_G) : (\mathcal{E}, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{H})$ um fibrado vetorial equivariante. Considerando o fibrado $A^k(T(\mathcal{M}); \mathcal{E}) \simeq \bigwedge^k T^*(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{E}$, a representação regular é dada por

$$[R(g)\nu]_x(X_1, \dots, X_k) = \nu_{xg}(X_1g, \dots, X_kg)g^{-1}$$

$X_1, \dots, X_k \in T_x(\mathcal{M})$, $g \in \mathcal{G}$, $\nu \in \Omega^k(\mathcal{M}; \mathcal{E}) = \Gamma_{\mathcal{M}}(A^k(T(\mathcal{M}); \mathcal{E}))$, que lembra a fórmula de um pullback. Denotaremos por $\Omega^k(\pi, \pi_G)$ o espaço de k -formas equivariantes em $\Omega^k(\mathcal{M}; \mathcal{E})$, e por $\Omega^\bullet(\pi, \pi_G) := \Gamma_{\mathcal{M}}(A^\bullet(T(\mathcal{M}); \mathcal{E}))$ o espaço graduado de todas as formas equivariantes.

Em particular, em um grupo de Lie $\mathcal{G}$ com sua ação à esquerda, temos as **formas diferenciais invariantes à esquerda** $\Omega_L^\bullet(\mathcal{G}, \mathbb{V}) := \Gamma_{\mathcal{G}}(A^\bullet(T(\mathcal{G}); \mathbb{V}))^{\mathcal{G}}$, onde $\mathbb{V}$ é uma representação constante.

Exemplo 1.5.11. Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$. A **forma de Maurer-Cartan** em $\mathcal{G}$ é a forma $\Theta \in \Omega_L^1(\mathcal{G}; \mathfrak{g})$ dada por $\Theta(X) := g^{-1}X = (L_g^{-1})_*X$, $g \in \mathcal{G}$, $X \in T_g(\mathcal{G})$. Em outras palavras, Θ é a segunda componente do isomorfismo natural $T(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G} \times \mathfrak{g} : X \mapsto (\pi(X), \pi(X)^{-1}X)$, onde $\pi : T(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G}$ é a projeção do fibrado tangente. $\blacklozenge$

Em um fibrado principal $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ definimos as **formas Ad-equivariantes** $\Omega^\bullet(\mathcal{P}; \mathfrak{g})^{\text{Ad}}$ como as formas equivariantes de $A^\bullet(T(\mathcal{P}); \mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{P}$ com a ação regular induzida pela representação adjunta $(\mathfrak{g}, \text{Ad})$, ou seja, $\omega \in \Omega^k(\mathcal{P}; \mathfrak{g})^{\text{Ad}}$ se e só se

$$\omega_{ug}(X_1g, \dots, X_kg) = \text{Ad}(g^{-1})\omega_u(X_1, \dots, X_k)$$

para quaisquer $u \in \mathcal{P}$, $X_i \in T_u(\mathcal{P})$, $g \in \mathcal{G}$.

Exemplo 1.5.12. Considerando um grupo de Lie como fibrado principal sobre um ponto $\mathcal{G} \rightarrow *$ com a ação à direita, vemos que a forma de Maurer-Cartan Θ é Ad-equivariante. Não só isso, Θ é uma conexão principal para $\mathcal{G} \rightarrow *$. (pág. 144) $\blacklozenge$

Exemplo 1.5.13. Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie de dimensão n . Escolhendo um elemento $\omega_e \in A^n(\mathfrak{g})$ não-nulo obtemos formas de volume ω^L e ω^R invariantes à esquerda e direita, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \omega_g^L(X_1, \dots, X_n) &:= \omega_e(g^{-1}X_1, \dots, g^{-1}X_n), \\ \omega_g^R(X_1, \dots, X_n) &:= \omega_e(X_1g^{-1}, \dots, X_ng^{-1}). \end{aligned}$$

A medida (elemento de volume) associada a essas formas é a *medida de Haar* (Seção B.5 do apêndice). $\blacklozenge$

Exemplo 1.5.14. Dado um grupo de Lie $\mathcal{G}$, consideramos a forma de Killinga $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ em sua álgebra. Obtemos duas formas simétricas invariantes κ^L e κ^R por

$$\begin{aligned} \kappa^L(X, Y) &:= \kappa(g^{-1}X, g^{-1}Y), \\ \kappa^R(X, Y) &:= \kappa(Xg^{-1}, Yg^{-1}). \end{aligned}$$

$\blacklozenge$

Exemplo 1.5.15. Seja $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado $\mathcal{G}$ -equivariante. Para o fibrado de s -densidades $\text{Vol}^s(\mathcal{M}; \mathcal{E})$, sendo um fibrado natural de $\mathcal{M}$, temos uma ação de $\mathcal{G}$ dada por

$$(\mu g)(X_1, \dots, X_m) := \mu(X_1 g^{-1}, \dots, X_m g^{-1})g$$

onde $\mu \in \text{Vol}^s(\mathcal{M}; \mathcal{E})_x$, $\mu g \in \text{Vol}^s(\mathcal{M}; \mathcal{E})_{xg}$ e $X_1, \dots, X_m \in T_{xg}(\mathcal{M})$. A representação regular em $|\Omega|^s(\mathcal{M}; \mathcal{E})$, nesse caso, é dada por

$$[R(g)\mu]_x(X_1, \dots, X_m) = \mu_{xg}(X_1 g, \dots, X_m g)g^{-1},$$

que é equivalente à representação produto tensorial em $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) \otimes |\Omega|^s(\mathcal{M})$.

Em particular, para um grupo de Lie compacto $\mathcal{G}$, a densidade de volume natural dvol é um invariante geométrico, já que $\text{dvol} = |\omega|$ para alguma forma de volume invariante. $\blacklozenge$

1.6 Grupos Compactos

Nesta seção, enunciamos alguns resultados para grupos de Lie compactos que serão utilizados no Método das Órbitas. As referências utilizadas foram [2], [34], [50] e [51].

Para um grupo compacto $\mathcal{G}$ existe uma escolha natural de medida bi-invariante (Haar), sendo a medida induzida pela densidade $\text{dvol} = |\omega / \text{vol}_{\omega}(\mathcal{G})|$, onde $\omega \in \Omega^{\dim \mathcal{G}}(\mathcal{G})$ é invariante à esquerda ou direita e não-singular. Pelo restante da seção $\mathcal{G}$ será um grupo de Lie compacto.

Dada uma representação unitária $(\mathbb{V}, \rho)$ de $\mathcal{G}$, como o mapa $g \mapsto \rho(g)v$ é contínuo para todo $v \in \mathbb{V}$, a função $\rho_{v,u}(g) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\rho_{v,u}(g) := \langle v, \rho(g)u \rangle$ é contínua, para quaisquer $v, u \in \mathbb{V}$. Em particular, é integrável. Essa função é chamada de **elemento matricial associado a $v, u \in \mathbb{V}$** .

Dada uma função $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{V}$ contínua, para cada $v \in \mathbb{V}$, a função $\langle f, v \rangle : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\langle f, v \rangle(g) = \langle f(g), v \rangle$ é contínua e podemos definir o funcional $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$F(v) := \int_{\mathcal{G}} \langle f(g), v \rangle \text{dvol}(g),$$

que é limitado por $|F(v)| \leq \|f\|_{\infty} \|v\|$, i.e., $\|F\|_{op} = \|f\|_{\infty}$. Assim, existe um único vetor $u_f \in \mathbb{V}$ tal que $F(v) = \langle u_f, v \rangle$, chamado de **integral de f** e o denotaremos por

$$\int_{\mathcal{G}} f(g) \text{dvol}(g) := u_f.$$

Temos a igualdade

$$\left\langle \int_{\mathcal{G}} f(g) \text{dvol}(g), v \right\rangle = \int_{\mathcal{G}} \langle f(g), v \rangle \text{dvol}(g)$$

Em particular, fixados $x, y \in \mathbb{V}$ podemos definir um operador $T_{x,y} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$,

$$T_{x,y}(v) := \int_{\mathcal{G}} \rho_{x,v}(g^{-1}) \rho(g)y \text{dvol}(g) = \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g)x, v \rangle \rho(g)y \text{dvol}(g),$$

que é limitado por $\|T_{x,y}(v)\| \leq \|\rho_{x,v}\|_\infty \|y\| \leq \|x\| \|y\| \|v\|$, i.e., $\|T_{x,y}\|_{op} = \|x\| \|y\|$. Vemos também que $T_{x,y}$ é um morfismo da representação, i.e., $\rho(g_0)T_{x,y} = T_{x,y}\rho(g_0)$ para $g_0 \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \rho(g_0)T_{x,y}(v) &= \rho(g_0) \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g)x, v \rangle \rho(g)y \, d\text{vol}(g) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g)x, v \rangle \rho(g_0)\rho(g)y \, d\text{vol}(g) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g)x, v \rangle \rho(g_0g)y \, d\text{vol}(g) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g_0g)x, \rho(g_0)v \rangle \rho(g_0g)y \, d\text{vol}(g) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g)x, \rho(g_0)v \rangle \rho(g)y \, d\text{vol}(g) \\ &= T_{x,y}(\rho(g_0)v). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{G}$ é compacto, a integral pode ser calculada como limite de somas de Riemann, e logo $T_{x,y}$ é um limite

$$T_{x,y} = \lim_{S^*} \sum_{i=0}^n T_i \, \text{vol}(S_i)$$

onde $T_i : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é dado por $T_i(v) = \langle x, \rho(g_i)v \rangle \rho(g_i)y$ e o limite é tomado sobre partições pontuadas $S^* = (\{S_i\}_{i=0}^n, \{g_i\}_{i=0}^n)$ de $\mathcal{G}$. Assim, $T_{x,y}$ é limite de operadores de posto finito, ou seja, é um operador compacto.

Proposição 1.6.1 (Nachbin). *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Se $\mathcal{G}$ é compacto, todas as suas representações unitárias irredutíveis têm dimensão finita.*

Demonstração. Baseada em [50] e [51]. Seja $(\mathbb{V}, \rho)$ uma representação unitária. Escolha um vetor unitário $u \in \mathbb{V}$ e defina o operador compacto $T_u : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$,

$$T_u(v) := \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g)u, v \rangle \rho(g)u \, d\text{vol}(g)$$

que é compacto e um morfismo de representação. Supondo que $\mathbb{V}$ seja irredutível, o Lema de Schur garante $T = \lambda \text{id}_{\mathbb{V}}$, com $\lambda = \langle u, T_u u \rangle = \int_{\mathcal{M}} |\langle \rho(g)u, u \rangle|^2 d\text{vol}(g)$. Seja $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ um subespaço de dimensão finita e $P : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ a projeção ortogonal sobre $\mathbb{W}$. Obtemos

$$\lambda P(v) = PT_u P(v) = \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g)u, Pv \rangle P\rho(g)v \, d\text{vol}(g)$$

para todo $v \in \mathbb{V}$. Restringindo $PT_u P$ a $\mathbb{W}$ e tomando traço obtemos

$$\lambda \dim \mathbb{W} = \int_{\mathcal{G}} \|P\rho(g)u\|^2 d\text{vol}(g) \leq \text{vol}(\mathcal{G}).$$

Ou seja, os subespaços de dimensão finita de $\mathbb{V}$ têm dimensão cotada por $\text{vol}(\mathcal{G})$. Logo $\mathbb{V}$ deve ter dimensão finita. $\square$

Proposição 1.6.2 (Truque Unitário de Weyl). *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Se $\mathcal{G}$ é compacto, toda representação de dimensão finita é unitarizável.*

Demonstração. Dada uma representação $(\mathbb{V}, \rho)$ de dimensão finita, escolha um produto interno qualquer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{V}$. Definimos um produto interno $\mathcal{G}$ -invariante por

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{G}} := \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g)x, \rho(g)y \rangle \, d\text{vol}(g)$$

para $x, y \in \mathbb{V}$. Dado $g_0 \in \mathcal{G}$ temos

$$\begin{aligned} \langle \rho(g_0)x, \rho(g_0)y \rangle_{\mathcal{G}} &= \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g)\rho(g_0)x, \rho(g)\rho(g_0)y \rangle \, d\text{vol}(g) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(gg_0)x, \rho(gg_0)y \rangle \, d\text{vol}(g) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(gg_0)x, \rho(gg_0)y \rangle \, d\text{vol}(g) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \langle \rho(g)x, \rho(g)y \rangle \, d\text{vol}(g) \\ &= \langle x, y \rangle_{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

□

Com os resultados acima vemos que para classificar as irreps. de um grupo de Lie compacto basta classificar as unitárias de dimensão finita.

Um grupo de Lie conexo $\mathcal{G}$ é dito **semisimples** se sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ for semisimples. Nesse caso, como $Z(\mathfrak{g}) = \mathbf{0}$, o centro $Z(\mathcal{G})$ é um subgrupo discreto. Ainda mais, a forma de Killing $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa(X, Y) = \text{tr}(\text{ad } X \text{ ad } Y)$, é não-degenerada.

Proposição 1.6.3. *Se um grupo de Lie $\mathcal{G}$ é compacto, sua forma de Killing $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ é negativa. Ainda mais, se $\mathcal{G}$ for semisimples $-\kappa$ é um produto interno.*

Demonstração. Sendo compacto, sua representação adjunta Ad é unitarizável e logo a rep. adjunta da álgebra ad também é. Ou seja, existe um produto interno em $\mathfrak{g}$ tal que $\text{ad } X$ é um operador anti-simétrico para todo $X \in \mathfrak{g}$. Segue que

$$\kappa(X, X) = \text{tr}(\text{ad } X)^2 = \text{tr}(\text{ad } X(-\text{ad } X)^{\dagger}) = -\text{tr}(\text{ad } X(\text{ad } X)^{\dagger}) \leq 0.$$

Vemos também que $\kappa(X, X) = 0$ é o mesmo que $X \in \ker \text{ad} = Z(\mathfrak{g})$. Se $\mathcal{G}$ for semisimples, $Z(\mathfrak{g}) = \mathbf{0}$ e segue que κ é definida-negativa. □

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Um **fibrado $\mathcal{G}$ -equivariante complexo** é um fibrado vetorial $\mathcal{G}$ -equivariante $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ equipado com uma estrutura complexa $J : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $J^2 = -\text{id}_{\mathcal{E}}$, que comuta com a ação de $\mathcal{G}$, i.e., $J(vg) = (Jv)g$ para quaisquer $v \in \mathcal{E}$ e $g \in \mathcal{G}$. Considerando as fibras de $\mathcal{E}$ como espaços vetoriais complexos, isso equivale a dizer que $\mathcal{G}$ age $\mathbb{C}$ -linearmente nas fibras. Nesse caso, a representação regular em $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ é complexa.

Dado um produto interno Hermitiano $\langle \cdot | \cdot \rangle$ em $\mathcal{E}_J \rightarrow \mathcal{M}$ que seja $\mathcal{G}$ -invariante, i.e., $\langle v_1g | v_2g \rangle = \langle v_1 | v_2 \rangle$, o produto Hermitiano induzido no fibrado de $\frac{1}{2}$ -densidades

$\text{Vol}^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ também será $\mathcal{G}$ -invariante, de modo que a representação regular em $|\Omega|^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ preserva o produto interno L^2 . Assim, a representação regular se estende a uma representação unitária em $L^2(\mathcal{M}; \mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, que chamamos de **representação regular unitária canônica** de $(\mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle) \mapsto \mathcal{M}$.

Se existir um elemento de volume $\mu \in |\Omega|(\mathcal{M})$ que seja invariante por $\mathcal{G}$, teremos

$$\int_{\mathcal{M}} f(xg)\mu(x) = \int_{\mathcal{M}} f(x)\mu(x)$$

para toda $f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Em particular, o produto interno $(\cdot | \cdot)$ em $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})_c$ definido por

$$(s_1 | s_2) := \int_{\mathcal{M}} \langle s_1 | s_2 \rangle(x) \mu(x)$$

será invariante pela representação regular, de modo que a extensão da rep. regular em $L^2(\mathcal{M}, \mu; \mathcal{E})$ é unitária. Obtemos um isomorfismo unitário natural $L^2(\mathcal{M}, \mu; \mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle) \simeq L^2(\mathcal{M}; \mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Chamaremos a representação em $L^2(\mathcal{M}, \mu; \mathcal{E})$ de **representação regular unitária relativa a μ** .

Em geral, uma densidade invariante pode não existir em $\mathcal{M}$. No nosso caso de interesse em que $\mathcal{M} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ com $\mathcal{G}$ compacto, existe um volume invariante canônico.

Proposição 1.6.4. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo compacto. Para qualquer subgrupo fechado $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ existe uma forma de volume $\mathcal{G}$ -invariante em $\mathcal{M} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$.*

Demonstração. Sejam $\omega_{\mathcal{G}} \in \Omega_L^n(\mathcal{G})$ e $\omega_{\mathcal{H}} \in \Omega_L^k(\mathcal{H})$ formas de volume invariantes. Considere o fibrado $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}$. Dada uma trivialização $\phi : \pi^{-1}[U] \rightarrow U \times \mathcal{H}$, a identificação $\phi_* : T(\pi^{-1}[U]) \simeq T_U(\mathcal{M}) \times T(\mathcal{H})$ nos permite escolher uma forma de volume $\mu_U \in \Omega^{n-k}(U)$ tal que $\phi^*(\mu_U \wedge \omega_{\mathcal{H}}) = \omega_{\mathcal{G}}$. Como as transições $\phi_U \circ \phi_V^{-1}$ são dadas pela ação à esquerda de $\mathcal{H}$, todos os elementos na equação que define μ_U devem ser invariantes, de modo que existe uma forma de volume global $\mu \in \Omega^{n-k}(\mathcal{M})$ com $\mu|_U = \mu_U$ em cada trivialização. Um argumento similar mostra que μ deve ser $\mathcal{G}$ -invariante. $\square$

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real de dimensão finita. Uma **representação unitária de $\mathfrak{g}$** é um par $(\mathfrak{H}, \rho)$ onde $\mathfrak{H}$ é um espaço de Hilbert complexo e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{u}(\mathfrak{H})$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. É imediato ver que toda rep. unitária de um grupo de Lie induz uma rep. unitária de sua álgebra. A recíproca só é válida para grupos simplesmente conexos.

Proposição 1.6.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real de dimensão finita e $\mathcal{G}$ o grupo simplesmente conexo correspondente. Se $\mathcal{G}$ é compacto, então existe uma bijeção entre as classes de isomorfismo de reps. unitárias de $\mathfrak{g}$ e reps. complexas de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, ambas de dimensão finita. Irreduzibilidade é preservada por essa correspondência.*

Demonstração. Dada uma rep. unitária ρ de $\mathfrak{g}$ em $\mathbb{V}$, definimos uma rep. complexa $\rho^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{V}$ por

$$\rho^{\mathbb{C}}(\lambda \otimes x)v := \lambda \rho(x)v.$$

Agora, dados $R : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V})$ e $x \in \mathfrak{g}$, definimos $r(x) : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ por $r(x)v := R(1 \otimes x)v$. Como $\mathcal{G}$ é compacto e simplesmente conexo, a rep. de $\mathcal{G}$ correspondente a r é unitarizável, e logo existe um produto interno em $\mathbb{V}$ fazendo de r uma rep. unitária. $\square$

Um **grupo de Lie complexo** é um grupo de Lie $\mathcal{G}$ com uma estrutura de variedade complexa tal que as operações são holomorfas. Nesse caso, a álgebra de Lie de $\mathcal{G}$ é uma álgebra complexa.

Dado um grupo de Lie $\mathcal{G}$, sua **complexificação** é um homomorfismo suave $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ em um grupo complexo $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$, tal que, para qualquer outro mapa $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ com $\mathcal{H}$ complexo, existe um único homomorfismo holomorfo $\tilde{\varphi} : \mathcal{G}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{H}$ com $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \iota$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\ & \searrow \iota & \uparrow \tilde{\varphi} \\ & & \mathcal{G}^{\mathbb{C}} \end{array}$$

Em geral, o mapa $\iota : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ pode não ser injetivo, nem mesmo nas álgebras. Entretanto, para grupos matriciais, sempre é uma inclusão.

Proposição 1.6.6. *Todo grupo de Lie admite uma complexificação.*

Demonstração. Em [34]. □

O que vamos precisar apenas é que, para um grupo compacto e simplesmente conexo $\mathcal{G}$ com álgebra $\mathfrak{g}$, sua complexificação $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ é o grupo simplesmente conexo com álgebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, e $\mathcal{G}$ é um

Exemplo 1.6.1. $U(n)^{\mathbb{C}} = GL_{\mathbb{C}}(n)$ e $SU(n)^{\mathbb{C}} = SL_{\mathbb{C}}(n)$. ◆

Juntando a Prop. 1.6.5 com o conceito de complexificação do grupo, obtemos a

Proposição 1.6.7. *Para um grupo compacto e simplesmente conexo $\mathcal{G}$, existe uma bijeção entre as classes de reps. unitárias e as classes de reps. complexas da complexificação $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$. A irreduzibilidade é preservada por essa bijeção.*

1.7 Teorema de Borel-Weil

Referências: [2], [34], [47] e [49].

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e um subgrupo de Lie $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$. Consideramos as categorias de representações unitárias $\text{UniRep}(\mathcal{G})$ e $\text{UniRep}(\mathcal{H})$. Definimos o **functor de restrição** $\text{Res}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} : \text{UniRep}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{UniRep}(\mathcal{H})$ por $(\mathbb{V}, \rho) \mapsto (\mathbb{V}, \rho|_{\mathcal{H}})$ nos objetos e identidade nos morfismos. O processo contrário, de obter uma representação de um grupo a partir de uma de um subgrupo, é conhecido como o **functor de indução** $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} : \text{UniRep}(\mathcal{H}) \rightarrow \text{UniRep}(\mathcal{G})$. Em geral, esse par de funtores adjuntos pode ser obtido de formas variadas, dependendo dos tipos de grupos e representações envolvidos. Nesta seção vamos construir a indução para grupos compactos e representações unitárias de dimensão finita.

Pelo restante da seção, $\mathcal{G}$ será um grupo compacto e $\mathcal{H}$ um subgrupo fechado. Dada uma representação $(\mathbb{V}, \rho)$ de $\mathcal{H}$ com dimensão n , consideramos o fibrado vetorial $\mathcal{E}^{\rho} = \mathcal{G} \times^{\rho} \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ associado² ao fibrado principal $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ (quociente à

²Pág. 140.

esquerda). Se a representação for unitária, teremos uma $U(\mathbb{V})$ -estrutura em $\mathcal{E}^\rho$, que define um produto interno Hermitiano por

$$\langle (g, v_1) | (g, v_2) \rangle_{\mathcal{H}_g} := \langle v_1 | v_2 \rangle. \quad (1.2)$$

Temos uma ação natural $\mathcal{E}^\rho \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}^\rho$ dada por $(g, v]g_0 := (gg_0, v]$, que é linear nas fibras. Com essa ação a projeção $\pi_\rho : \mathcal{E}^\rho \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ é $\mathcal{G}$ -equivariante:

$$\pi_\rho((g, v]g_0) = \pi_\rho((gg_0, v]) = \mathcal{H}gg_0 = \pi_\rho((g, v])g_0.$$

Ou seja, o fibrado associado é $\mathcal{G}$ -equivariante. Nas seções $\Gamma_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}(\mathcal{E}^\rho)$ podemos definir a representação regular $[R(g_0)s](\mathcal{H}g) := s(\mathcal{H}gg_0)g_0^{-1}$. Pelo isomorfismo entre seções e mapas equivariantes $\Gamma_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}(\mathcal{E}^\rho) \simeq C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{V})^\rho$, vemos que esse isomorfismo é um isomorfismo entre as representações regulares $[R(g_0)f](g) = f(gg_0)$. Ainda mais, segue diretamente da fórmula (1.2) que a ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{E}^\rho$ preserva o produto interno nas fibras. Consequentemente, a representação regular em $L^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}; \mathcal{E}^\rho)$ é unitária.

Definimos a **representação unitária induzida** como a representação regular

$$\text{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\mathbb{V}, \rho) := (L^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}; \mathcal{E}^\rho), R).$$

Pela Prop. 1.6.4, podemos escolher uma densidade de volume invariante μ em $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, que só depende de $\mathcal{H}$, de modo que o isomorfismo $L^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mu; \mathcal{E}^\rho) \simeq L^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}; \mathcal{E}^\rho)$ nos permite definir a representação induzida, equivalentemente, como $(L^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mu; \mathcal{E}^\rho), R)$.

Para definir o functor de indução nos morfismos, tome um morfismo de representações $\varphi : (\mathbb{V}, \alpha) \rightarrow (\mathbb{W}, \beta)$, de modo que obtemos um homomorfismo de $\mathcal{H}$ -fibrados vetoriais $\widehat{\varphi} : \mathcal{E}^\alpha \rightarrow \mathcal{E}^\beta$, que induz um mapa linear $\widehat{\varphi} \circ (\cdot) : \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}^\alpha) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}^\beta)$ entre seções. Como $\widehat{\varphi}$ comuta com as representações nas fibras, segue que $\widehat{\varphi} \circ (\cdot)$ comuta com as representações regulares. Concluimos que o mapa $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} \varphi : L^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}; \mathcal{E}^\alpha) \rightarrow L^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}; \mathcal{E}^\beta)$, que estende $\widehat{\varphi} \circ (\cdot)$, é um morfismo de representações. Assim, fica definido o functor de indução $\text{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} : \text{UniRep}(\mathcal{H})^\infty \rightarrow \text{UniRep}(\mathcal{G})$ para *representações de dimensão finita*. Para a construção da representação induzida para grupos de Lie possivelmente não-compactos, ver o Apêndice V em [2].

Para grupos complexos $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ é possível realizar a **indução holomorfa** $\text{Hol Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}$ que estende uma representação complexa $(\mathbb{V}, \rho)$ de $\mathcal{H}$ a uma representação complexa de $\mathcal{G}$ no espaço de seções holomorfas $\text{Hol}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}^\rho)$ do fibrado holomorfo $\mathcal{E}^\rho = \mathcal{G} \times^\rho \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Quando $\mathcal{G}$ é a complexificação de um grupo compacto $\mathcal{K}$, a restrição da representação a $\mathcal{K}$ é unitária.

Proposição 1.7.1 (Borel-Weil). *Seja $\mathcal{G}$ um grupo compacto com complexificação $\mathcal{G}^\mathbb{C}$. Toda unirrep. de $\mathcal{G}$ é da forma $\text{Hol Ind}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{G}^\mathbb{C}} \rho$ para algum subgrupo parabólico $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}^\mathbb{C}$ e $\rho : \mathcal{B} \rightarrow S^1$ um peso máximo.*

Demonstração. Em [47] e [49]. □

Temos dois ingredientes no enunciado que precisamos entender: *subgrupo parabólico* e *peso máximo*.

Seguindo as notações da Seção 4.1, um subgrupo **parabólico** $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}^\mathbb{C}$ é simplesmente o subgrupo conexo associado a uma polarização algébrica complexa $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}^\mathbb{C}$ de um funcional $\eta \in \mathfrak{g}^*$. Assim, o quociente $\mathcal{G}^\mathbb{C}/\mathcal{B}$ pode ser identificado com a redução $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{G}/\text{Stab}(\eta)^0$.

Agora, escolha um toro maximal $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$ com $\mathcal{T} \subseteq \text{Stab}(\eta)^0$. Um **peso** de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ é simplesmente uma representação unidimensional $\lambda : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$. Como $\lambda|_{[\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}]} = 0$ e $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ é complementar a $[\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}]$, o valor de λ fica determinado pela restrição $\rho|_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}$, e todo funcional em $(\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^*$ define um peso. Dizemos que um peso $\lambda \in (\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^*$ é **integral** se $\lambda(\xi) \in \mathbb{Z}$ para $\xi \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ com $\exp(\xi) = e$. Para um peso integral λ , existe um único homomorfismo $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ tal que $d\rho_e = \lambda$. Dados dois pesos λ_0, λ_1 dizemos que λ_1 é **mais alto do que** λ_0 , denotado por $\lambda_1 \succeq \lambda_0$, quando $\lambda_1 - \lambda_0$ é uma combinação linear de raízes positivas com coeficientes reais não-negativos. Um peso é dito **máximo** se for mais alto do que todos os pesos.

Dado $\eta \in \mathfrak{g}$, quando $\mathcal{M}_{\eta}$ satisfaz a condição de pré-quantização (Seção 4.1) o funcional complexificado $\eta^{\mathbb{C}}$ é um peso integral, de modo que o homomorfismo ρ obtido se restringe a χ_{η} , onde $\chi_{\eta} : \text{Stab}(\eta)^0 \rightarrow S^1$ é o caractere associado ao estabilizador pela condição de Bohr-Sommerfeld. O fibrado obtido na representação holomorfa induzida $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \times^{\rho} \mathbb{C}$ é naturalmente isomorfo ao fibrado de pré-quantização $\mathcal{G} \times^{\chi_{\eta}} \mathbb{C}$.

Capítulo 2

Geometria Simplética

Neste capítulo, seguimos as referências [22], [8], [3], [11], [12], [9], [10] e [2].

2.1 Espaços Vetoriais Simpléticos

As seguintes referências nesta seção são [22] e [3].

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.¹ Dada uma forma bilinear $\alpha : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ definimos o mapa $(-)^{\alpha} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^*$ por $v^{\alpha}(u) := \alpha(v, u)$. Para um subconjunto $X \subseteq \mathbb{V}$, denotaremos por $X^{\alpha} \subseteq \mathbb{V}^*$ sua imagem pelo mapa $(-)^{\alpha}$.

Dizemos que α é **não-degenerada** se o mapa $(-)^{\alpha}$ é um isomorfismo. Em geral, a condição

$$\alpha(v, u) = 0 \text{ para todo } u \in \mathbb{V} \text{ implica em } v = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

é equivalente à injetividade de $(-)^{\alpha}$. Quando $\mathbb{V}$ tem dimensão finita, a condição (2.1) é equivalente a α não-degenerada.

Uma forma bilinear não-degenerada α é chamada:

- um **produto pseudo-euclidiano** se for simétrica;
- uma **forma simplética** se for alternada.

No primeiro caso, dizemos que o par $(\mathbb{V}, \alpha)$ é um **espaço pseudo-euclidiano** e no segundo, um **espaço vetorial simplético**.

Exemplo 2.1.1. Seja $\mathcal{Q}$ um espaço vetorial e $\mathbb{V} = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^*$. Em $\mathbb{V}$, definimos uma forma simplética natural $\omega_0 : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$\omega_0((q_1, p_1), (q_2, p_2)) := p_1(q_2) - p_2(q_1).$$

Mais à frente veremos que todo espaço vetorial simplético admite uma decomposição dessa forma. $\blacklozenge$

Dados espaços simpléticos (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) , uma transformação linear $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ é dita **simplética** se $\omega_1 = \varphi^* \omega_2$. Denotamos por $\mathbf{SpVec}_{\mathbb{K}}$ a categoria de $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais simpléticos e transformações simpléticas.

¹Os conceitos que apresentaremos fazem sentido em um corpo arbitrário, assim como alguns resultados.

Exemplo 2.1.2. Em $\mathbb{K}^{2n}$ considere a decomposição $\mathbb{K}^{2n} = \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$, escrevendo as coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Assim, definimos a forma simplética canônica $\omega_0 : \mathbb{K}^{2n} \times \mathbb{K}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$\omega_0((q, p), (x, y)) := \sum_{i=1}^n p_i x^i - \sum_{i=1}^n y_i q^i.$$

Note que essa forma simplética corresponde a do exemplo anterior escolhendo uma base para $\mathcal{Q}$ e a dual em $\mathcal{Q}^*$. $\blacklozenge$

Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético. Dado um subconjunto $X \subseteq \mathbb{V}$, definimos o seu **complemento simplético**² por

$$X^\perp := \{v \in \mathbb{V} \mid \forall x \in X, \omega(v, x) = 0\}.$$

Vemos imediatamente que $X^\perp$ é um subespaço de $\mathbb{V}$. Em outras palavras, $X^\perp$ é a pré-imagem do anulador X° pelo mapa $(-)^{\omega}$. Como ω é não-degenerada, esse mapa é um isomorfismo e portanto $(X^\perp)^{\omega} = X^\circ$.

Proposição 2.1.1. *Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético. Dados subespaços $X, Y \subseteq \mathbb{V}$, valem as propriedades:*

- (1) $X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp$;
- (2) $(X^\perp)^\perp = X$;
- (3) $\dim X^\perp = \dim \mathbb{V} - \dim X$, caso as dimensões sejam finitas;
- (4) $(X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$;
- (5) $X^\perp + Y^\perp \subseteq (X \cap Y)^\perp$, sendo uma igualdade se $\dim \mathbb{V}$ é finita.

Demonstração. (1) Basta notar que $Y^\circ \subseteq X^\circ$ e aplicar a inversa de $(-)^{\omega}$.

(2) Dados $x_1, \dots, x_n \in X$ e $c^1, \dots, c^n \in \mathbb{K}$, é claro que $\sum_{i=1}^n c^i x_i \in (X^\perp)^\perp$, de modo que $X \subseteq (X^\perp)^\perp$. Por outro lado, temos

$$((X^\perp)^\perp)^{\omega} = (X^\perp)^\circ \subseteq X^{\omega}$$

e tomando a inversa de $(-)^{\omega}$ obtemos $(X^\perp)^\perp \subseteq X$.

(3) Supondo $\mathbb{V}$ de dimensão finita, sejam $n = \dim \mathbb{V}$ e $k = \dim X$. Tome uma base $e_1, \dots, e_k \in X$ e complete para uma base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{V}$. Seja $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n \in \mathbb{V}^*$ a base dual. Vamos mostrar que os $\epsilon^{k+1}, \dots, \epsilon^n$ formam uma base para X° . É claro que $\epsilon^i \in X^\circ$ para $i \geq k+1$. Agora, se $f \in X^\circ$ e $f = \sum_{i=1}^n f_i \epsilon^i$ devemos ter $f_1 = \dots = f_k = 0$, porque caso contrário, teríamos $f(e_i) \neq 0$ para $e_1, \dots, e_k$. Segue que $\epsilon^{k+1}, \dots, \epsilon^n$ forma uma base de X° , de modo que

$$\dim X^\perp = \dim X^\circ = \dim \mathbb{V} - \dim X.$$

(4) Dados $x \in X$, $y \in Y$ e $v \in \mathbb{V}$, sempre temos

$$\omega(v, x + y) = \omega(v, x) + \omega(v, y).$$

²Apesar do nome “complemento”, o complemento simplético pode não ser um subespaço complementar.

Segue que $v \in (X + Y)^\perp$ se e só se $v \in X^\perp \cap Y^\perp$.

(5) Dados $v \in X^\perp$ e $u \in Y^\perp$ temos

$$\omega(v + u, z) = \omega(v, z) + \omega(u, z) = 0$$

para todo $z \in X \cap Y$, de modo que $v + u \in (X \cap Y)^\perp$, ou seja, $X^\perp + Y^\perp \subseteq (X \cap Y)^\perp$. Se $\mathbb{V}$ tem dimensão finita, por (3) e (4) temos

$$\dim X^\perp = \dim \mathbb{V} - \dim X$$

$$\dim Y^\perp = \dim \mathbb{V} - \dim Y$$

$$\dim(X \cap Y)^\perp = \dim \mathbb{V} - \dim(X \cap Y)$$

$$\begin{aligned} \dim(X^\perp + Y^\perp) &= \dim X^\perp + \dim Y^\perp - \dim(X^\perp \cap Y^\perp) \\ &= \dim X^\perp + \dim Y^\perp - \dim(X + Y)^\perp \\ &= \dim X^\perp + \dim Y^\perp - (\dim \mathbb{V} - \dim(X + Y)) \\ &= \dim X^\perp + \dim Y^\perp - (\dim \mathbb{V} - (\dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y))) \\ &= 2 \dim \mathbb{V} - \dim X - \dim Y - \dim \mathbb{V} + \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y) \\ &= \dim \mathbb{V} - \dim(X \cap Y) \end{aligned}$$

$$\therefore \dim(X^\perp + Y^\perp) = \dim(X \cap Y)^\perp.$$

Em conclusão, $X^\perp + Y^\perp = (X \cap Y)^\perp$. □

Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético. Dizemos que um subespaço $X \subseteq \mathbb{V}$ é

- **isotrópico** se $X \subseteq X^\perp$;
- **coisotrópico** se $X^\perp \subseteq X$;
- **simplético** se $X \cap X^\perp = \{0\}$;
- **Lagrangiano** se $X = X^\perp$.

Note que X é isotrópico se e só se $X^\perp$ é coisotrópico, e vice-versa. Da propriedade (3) na Proposição 2.1.1 acima, um subespaço X é Lagrangiano se e somente se for (co)isotrópico e $\dim X = \frac{1}{2} \dim \mathbb{V}$.

Proposição 2.1.2. *Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético de dimensão finita. Dado um subespaço $X \subseteq \mathbb{V}$, valem as propriedades:*

- (a) *o quociente $X/(X \cap X^\perp)$ admite uma forma simplética induzida por ω ;*
- (b) *se X for coisotrópico, para todo subespaço Lagrangiano $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{V}$, o subespaço $(X \cap \mathcal{Q})/X^\perp$ é Lagrangiano.*

Demonstração. (a) Denotando $\mathbb{W} = X/(X \cap X^\perp)$ e $\pi : X \rightarrow \mathbb{W}$ a projeção, definimos a forma $\tilde{\omega} : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{K}$ por $\tilde{\omega}(\pi(x), \pi(y)) = \omega(x, y)$. Primeiro verificamos que essa

forma esta bem definida. Dados $x_i, y_i \in X$, $i = 1, 2$, com $x_2 - x_1, y_2 - y_1 \in X \cap X^\perp$, temos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}(\pi(x_2), \pi(y_2)) &= \omega(x_2, y_2) \\
 &= \omega(x_1 + x_2 - x_1, y_1 + y_2 - y_1) \\
 &= \omega(x_1, y_1) + \omega(x_1, y_2 - y_1) + \omega(x_2 - x_1, y_1) + \omega(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\
 &= \omega(x_1, y_1) + 0 \\
 &= \tilde{\omega}(\pi(x_2), \pi(y_2)).
 \end{aligned}$$

Agora, $\tilde{\omega}$ é claramente alternada, restando verificar que é não-degenerada. Com efeito, dado $x \in X$, se $\tilde{\omega}(\pi(x), \pi(y)) = \omega(x, y) = 0$ para todo $y \in X$, então $x \in X \cap X^\perp$ e logo $\pi(x) = \mathbf{0}$.

(b) Note que $X \cap X^\perp = X^\perp$ e $\mathbb{W} = X/X^\perp$. Basta mostrar que $\mathcal{Q}' = \pi[\mathcal{Q} \cap X] = (\mathcal{Q} \cap X)/X^\perp$ é coisotrópico. Dado $x' \in \mathcal{Q}'$, existe $x \in X$ tal que $x' = \pi(x)$ e $\omega(x, y) = 0$ para todo $y \in \mathcal{Q} \cap X$. Ou seja, $x \in (\mathcal{Q} \cap X)^\perp = \mathcal{Q}^\perp + X^\perp = \mathcal{Q} + X^\perp$. Logo $x' \in \mathcal{Q}'$. Trocando $\mathcal{Q}$ com $\mathcal{Q}^\perp$, o mesmo argumento mostra que $\mathcal{Q}'$ é isotrópico. $\square$

Proposição 2.1.3. *Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético. Se $\mathbb{V}$ tem dimensão finita, então a dimensão de $\mathbb{V}$ é par e qualquer subespaço isotrópico X pode ser estendido a um subespaço Lagrangiano $\mathcal{Q} \supseteq X$. Em particular, existem subespaços Lagrangianos.*

Demonstração. Tome um subespaço isotrópico $F_0 \subseteq \mathbb{V}$ de dimensão $k > 0$. A existência de subespaços isotrópicos não-triviais é garantida já que todo subespaço unidimensional é isotrópico. Como $F_0 \subseteq F_0^\perp$, temos $\dim F_0 \leq \dim F_0^\perp$, de modo que

$$\begin{aligned}
 \dim F_0 &= \dim \mathbb{V} - \dim F_0^\perp \leq \dim \mathbb{V} - \dim F_0 \\
 \dim F_0 &\leq \frac{1}{2} \dim \mathbb{V}.
 \end{aligned}$$

Se $k = \frac{1}{2} \dim \mathbb{V}$ não há o que fazer. Se $k \neq \frac{1}{2} \dim \mathbb{V}$ sabemos que $F_0 \neq F_0^\perp$, de modo que podemos escolher $v_0 \in F_0^\perp \setminus F_0$. O subespaço $F_1 = \text{span}(F_0 \cup \{v_0\}) = F_0 + \mathbb{K}v_0$ ainda é isotrópico. De fato, como

$$\begin{aligned}
 F_1^\perp &= (F_0 + \mathbb{K}v_0)^\perp = F_0^\perp \cap \{v_0\}^\perp, \\
 F_0 &\subseteq F_1 \subseteq F_0^\perp \Rightarrow F_0 \subseteq F_1^\perp \subseteq F_0^\perp
 \end{aligned}$$

e como $v_0 \in F_0^\perp \cap \{v_0\}^\perp$, temos $F_1 = F_0 + \mathbb{K}v_0 \subseteq F_1^\perp$. Assim obtemos um subespaço isotrópico $F_1 \subseteq \mathbb{V}$ com dimensão $k + 1$. Se $k + 1 = \frac{1}{2} \dim \mathbb{V}$, a demonstração acaba aqui. Caso contrário, construímos do mesmo modo um subespaço isotrópico F_2 com dimensão $k + 2$, e assim em diante, obtendo assim uma sequência $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq \cdots$ de subespaços isotrópicos com $\dim F_n = k + n \leq \frac{1}{2} \dim \mathbb{V}$. Como $\mathbb{V}$ tem dimensão finita, a sequência para em algum $\mathcal{Q} = F_n$ com $\dim \mathcal{Q} = \frac{1}{2} \dim \mathbb{V}$. $\square$

N.B. A demonstração acima depende fortemente de ω ser alternada e não-degenerada: ser alternada implica que todo subespaço unidimensional é isotrópico e ser não-degenerada garante a construção da sequência que define o subespaço Lagrangiano. Em particular, temos os corolários abaixo. ★

Proposição 2.1.4 (Corolário). *Se a dimensão de $\mathbb{V}$ é ímpar, toda 2-forma alternada é degenerada.*

Proposição 2.1.5 (Corolário). *Um espaço vetorial de dimensão finita $\mathbb{V}$ admite forma simplética se, e só se, sua dimensão é par.*

Proposição 2.1.6. *Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético. Se $\mathbb{V}$ tem dimensão finita, então, para qualquer subespaço Lagrangiano $\mathcal{Q}$ existe isomorfismo simplético $(\mathbb{V}, \omega) \sim (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^*, \omega_0)$.*

Demonstração. Escolha um complementar $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{V}$ para que $\mathcal{Q}$, i.e., $\mathbb{V} = \mathcal{Q} + \mathcal{P}$ e $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P} = \{\mathbf{0}\}$. Defina o $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^*$ por

$$\varphi(q + p) = (q, p^\omega|_{\mathcal{Q}}).$$

Dado $p \in \mathcal{P}$, $p^\omega|_{\mathcal{Q}} = \mathbf{0}$ é equivalente a $\omega(q, p) = 0$ para todo $q \in \mathcal{Q}$, ou seja, $p \in \mathcal{Q}^\perp = \mathcal{Q}$. Como $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P} = \{\mathbf{0}\}$, temos $p = \mathbf{0}$. Concluimos que $p \mapsto p^\omega|_{\mathcal{Q}}$ é um isomorfismo $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}^*$, e logo φ . Note também que $\mathcal{P}$ é isotrópico, já que, se $v = q + p \in \mathcal{P}^\perp$ então

$$\omega(v, q' + p') = \omega(v, q') = \omega(p, q'),$$

para qualquer $x = q' + p' \in \mathbb{V}$, i.e., $q^\omega = \mathbf{0} \Rightarrow q = \mathbf{0}$, logo $v = p \in \mathcal{P}$. Como $\dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{Q} = \frac{1}{2} \dim \mathbb{V}$, segue que $\mathcal{P}$ é Lagrangiano.

Para ver que φ é uma transformação simplética, calculamos

$$\begin{aligned} \omega(q_1 + p_1, q_2 + p_2) &= \omega(p_1, q_2) + \omega(q_1, p_2) \\ &= p_1^\omega(q_2) - p_2^\omega(q_1) \\ &= \omega_0((q_1, p_1^\omega|_{\mathcal{Q}}), (q_2, p_2^\omega|_{\mathcal{Q}})) \\ &= \omega_0(\varphi(q_1 + p_1), \varphi(q_2 + p_2)) \\ &= \varphi^* \omega_0(q_1 + p_1, q_2 + p_2). \end{aligned}$$

□

Em um espaço vetorial simplético $(\mathbb{V}, \omega)$ definimos uma **polarização** como uma escolha de subespaço Lagrangiano $\mathcal{Q}$. Um **espaço vetorial simplético polarizado** será uma tripla $(\mathbb{V}, \omega, \mathcal{Q})$ com uma polarização fixada. Uma **transformação simplética polarizada** $\varphi : (\mathbb{V}_1, \omega_1, \mathcal{Q}_1) \rightarrow (\mathbb{V}_2, \omega_2, \mathcal{Q}_2)$ é uma morfismo $\varphi : (\mathbb{V}_1, \omega_1) \rightarrow (\mathbb{V}_2, \omega_2)$ que preserva as polarizações, i.e., $\varphi[\mathcal{Q}_1] \subseteq \mathcal{Q}_2$. Assim, temos a categoria de espaços vetoriais simpléticos polarizados $\mathbf{SpVec}_{\mathbb{K}}^P$ em que o isomorfismo descrito na Proposição 2.1.6 induz um isomorfismo natural entre o functor identidade $\text{Id} : \mathbf{SpVec}_{\mathbb{K}}^P \rightarrow \mathbf{SpVec}_{\mathbb{K}}^P$ e $\mathcal{F} : \mathbf{SpVec}_{\mathbb{K}}^P \rightarrow \mathbf{SpVec}_{\mathbb{K}}^P$, $\mathcal{F}(\mathbb{V}, \omega, \mathcal{Q}) = (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^*, \omega_0, \mathcal{Q})$.

Proposição 2.1.7. *O isomorfismo $\varphi : \text{Id} \Rightarrow \mathcal{F}$ dado por*

$$\begin{aligned} \varphi_{(\mathbb{V}, \omega, \mathcal{Q})} : (\mathbb{V}, \omega, \mathcal{Q}) &\rightarrow (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^*, \omega_0, \mathcal{Q}) \\ &: q + p \mapsto (q, p^\omega|_{\mathcal{Q}}) \end{aligned}$$

é natural.

Demonstração. Precisamos mostrar que φ independe da escolha de um complementar para $\mathcal{Q}$. Dados dois subespaços $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subseteq \mathbb{V}$ com $\mathcal{Q} + \mathcal{P}_i = \mathbb{V}$ e $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}_i = \{\mathbf{0}\}$, $i = 1, 2$, para todo $v \in \mathbb{V}$ existem $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$ e $p_1 \in \mathcal{P}_1$, $p_2 \in \mathcal{P}_2$ tais que

$$v = q_1 + p_1 = q_2 + p_2,$$

de modo que $p_2 - p_1 = q_1 - q_2 \in \mathcal{Q}$. Assim,

$$\begin{aligned} p_2^\omega(q) &= \omega(p_2, q) \\ &= \omega(p_1 + q_1 - q_2, q) \\ &= \omega(p_1, q) \\ &= p_1^\omega(q) \end{aligned}$$

para todo $q \in \mathcal{Q}$. Segue que $p_1^\omega|_{\mathcal{Q}} = p_2^\omega|_{\mathcal{Q}}$, de modo que o mapa $q + p \mapsto (q, p^\omega|_{\mathcal{Q}})$ independe da escolha de $\mathcal{P}$. $\square$

Proposição 2.1.8 (Coordenadas Canônicas). *Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético de dimensão finita $2n$. Existe uma base $\{v_1, \dots, v_n, v^1, \dots, v^n\}$ de $\mathbb{V}$ tal que*

$$\omega(v_i, v_j) = 0, \quad \omega(v^i, v^j) = 0, \quad \omega(v^i, v_j) = \delta^i_j,$$

para $i, j = 1, \dots, n$.

Demonstração. Escolha uma polarização $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{V}$ e uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ para $\mathcal{Q}$. Tome a base dual $\{\nu^1, \dots, \nu^n\}$ em $\mathcal{Q}^*$. Em $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^*$ temos

$$\begin{aligned} \omega_0((v_i, \mathbf{0}), (v_j, \mathbf{0})) &= 0, \\ \omega_0((\mathbf{0}, \nu^i), (\mathbf{0}, \nu^j)) &= 0, \\ \omega_0((\mathbf{0}, \nu^i), (v_j, \mathbf{0})) &= \nu^i(v_j) = \delta^i_j. \end{aligned}$$

Essa base induz um isomorfismo simplético $\mathbb{K}^{2n} \rightarrow \mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^*$ e compondo com o isomorfismo da Proposição 2.1.6 temos um isomorfismo $\iota : \mathbb{K}^{2n} \rightarrow \mathbb{V}$ que determina a base $\iota(e_i) = v_i$, $\iota(e^j) = v^j$. $\square$

Uma base da forma acima é chamada de **base de coordenadas canônicas**.

Exemplo 2.1.3. Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético de dimensão finita $2n$. Como ω é não-degenerada, o produto $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n \text{ vezes}}$ é uma forma de volume não-nula. Definimos a **forma de volume simplética** de $(\mathbb{V}, \omega)$ por $dV_\omega := \omega^n$. Assim todo espaço vetorial simplético é naturalmente orientado. Em particular, toda base de coordenadas canônicas é positiva, já que $\omega^n = \nu_1 \wedge \nu^1 \wedge \dots \wedge \nu_n \wedge \nu^n$, onde $\{\nu^i, \nu_i\}_{i=1}^n$ é a base dual de uma com coordenadas canônicas. $\blacklozenge$

Proposição 2.1.9. *Toda transformação simplética $\varphi : (\mathbb{V}_1, \omega_1) \rightarrow (\mathbb{V}_2, \omega_2)$ preserva o volume orientado. Em particular, se $(\mathbb{V}_1, \omega_1) = (\mathbb{V}_2, \omega_2)$ então $\det \varphi = 1$.*

Demonstração. Como $\varphi^* \omega_2 = \omega_1$, segue que $\varphi^* dV_{\omega_2} = dV_{\omega_1}$. $\square$

2.2 Estruturas de Poisson

Nesta seção, seguimos as referências [8], [3] e [2].

Para começar, consideramos uma variedade suave $\mathcal{M}^{(m)}$. Um **colchete quase-Poisson** em $\mathcal{M}$ é um mapa bilinear $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ satisfazendo as propriedades:

$$(\mathbf{QP1}) \quad \{f, f\} = 0 \text{ para toda } f \in C^\infty(\mathcal{M});$$

$$(\mathbf{QP2}) \quad \{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \text{ para quaisquer } f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

A propriedade **QP1** diz que um colchete quase-Poisson é alternado. Já a propriedade **QP2** é uma regra de Leibniz entre o colchete e o produto ponto-a-ponto de funções, de modo que os mapas $f \mapsto \{f, h\}$ e $f \mapsto \{h, f\} = -\{f, h\}$, associados a cada $h \in C^\infty(\mathcal{M})$, são derivações da álgebra $C^\infty(\mathcal{M})$. Quando $\{\cdot, \cdot\}$ satisfaz, além de **QP1** e **QP2**, a propriedade

$$(\mathbf{Jacobi}) \quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \text{ para quaisquer } f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M}),$$

dizemos que $\{\cdot, \cdot\}$ é um **colchete de Poisson** em $\mathcal{M}$.

Uma **variedade (quase-)Poisson** é um par $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$ em que $\{\cdot, \cdot\}$ é um colchete (quase-)Poisson em $\mathcal{M}$.

Exemplo 2.2.1. Toda variedade admite o **colchete trivial** $\{f, g\} = 0$. ◆

Exemplo 2.2.2. Dada uma variedade (quase-)Poisson $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$ definimos sua variedade (quase-)Poisson **oposta** com colchete negativo $(\mathcal{M}, -\{\cdot, \cdot\})$. Se omitirmos os colchetes da notação e denotarmos $\mathcal{M}$ com uma estrutura, com a estrutura oposta denotaremos por $\overline{\mathcal{M}}$. ◆

De modo geral, uma **álgebra quase-Poisson sobre um corpo** $\mathbb{K}$ é uma tripla $(\mathcal{A}, \cdot, \{\cdot, \cdot\})$ em que $\mathcal{A}$ é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, $\cdot, \{\cdot, \cdot\} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ são mapas $\mathbb{K}$ -bilineares com $(\mathcal{A}, \cdot)$ sendo uma álgebra associativa e $\{\cdot, \cdot\}$ satisfazendo as propriedades **QP1** e **QP2** em relação ao produto associativo. Se ainda, $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ é uma álgebra de Lie, i.e., $\{\cdot, \cdot\}$ satisfaz **(Jacobi)**, dizemos que $(\mathcal{A}, \cdot, \{\cdot, \cdot\})$, ou simplesmente $\mathcal{A}$, é uma **álgebra de Poisson**. Com essa visão, um colchete (quase-)Poisson em uma variedade $\mathcal{M}$ é simplesmente uma operação que faz de $(C^\infty(\mathcal{M}), \cdot, \{\cdot, \cdot\})$ uma álgebra (quase-)Poisson.

Em uma variedade $\mathcal{M}$, se tivermos um campo de bivectores $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow \bigwedge^2 T(\mathcal{M})$ podemos definir um colchete quase-Poisson $\{\cdot, \cdot\}_\Pi$ por

$$\{f, g\}_\Pi := \Pi(df, dg) = (df \wedge dg)(\Pi)$$

Podemos nos perguntar se todo colchete quase-Poisson vem de um campo de bivectores dessa forma. A resposta vem na

Proposição 2.2.1. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade suave e $A : C^\infty(\mathcal{M}) \times \cdots \times C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ uma aplicação k -linear sobre $\mathbb{R}$. Existe um único campo de tensores $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow T(\mathcal{M})^{\otimes k}$ com $A(f_1, \dots, f_k) = \alpha(df_1, \dots, df_k)$, se e somente se, A é satisfaz a regra de Leibniz em cada argumento, i.e.,*

$$\begin{aligned} A(f_1, \dots, f_{j-1}, fg, f_{j+1}, \dots, f_k) &= \\ &= fA(f_1, \dots, f_{j-1}, g, f_{j+1}, \dots, f_k) + A(f_1, \dots, f_{j-1}, f, f_{j+1}, \dots, f_k)g \end{aligned}$$

para quaisquer $f, g, f_1, \dots, f_k \in C^\infty(\mathcal{M})$ e $j = 1, \dots, k$. Ainda mais, se A for alternada ou simétrica, então α é, respectivamente, um campo de k -vetores $\mathcal{M} \rightarrow \bigwedge^k T(\mathcal{M})$ ou de tensores simétricos $\mathcal{M} \rightarrow S^k T(\mathcal{M})$.

Demonstração. Fixadas $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(\mathcal{M})$, para cada $j = 1, \dots, k$ define $\iota_{f_1 \dots f_k}^{(j)} : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})^k$ por $\iota_{f_1 \dots f_k}^{(j)}(f) := (f_1, \dots, f_{j-1}, f, f_{j+1}, \dots, f_k)$. Assim, os mapas $A \circ \iota_{f_1 \dots f_k}^{(j)}$ são derivações de $C^\infty(\mathcal{M})$, de modo que existem campos de vetores únicos $X_{f_1 \dots f_k}^{(j)} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ com $(A \circ \iota_{f_1 \dots f_k}^{(j)})(f) = df(X_{f_1 \dots f_k}^{(j)})$. Assim, dadas $g_1, \dots, g_k \in C^\infty(\mathcal{M})$, se $df_j = dg_j$ para cada $j = 1, \dots, k$, teremos $A(f_1, \dots, f_k) = A(g_1, \dots, g_k)$.

Para cada $x \in \mathcal{M}$ e $\eta \in T_x^*(\mathcal{M})$ existe alguma função global $f_\eta \in C^\infty(\mathcal{M})$ tal que $df_\eta(x) = \eta$. Defina $\alpha_x \in \mathcal{L}^k(T_x^*(\mathcal{M}); \mathbb{R}) \simeq T_x(\mathcal{M})^{\otimes k}$ por

$$\alpha_x(\eta_1, \dots, \eta_k) := A(f_{\eta_1}, \dots, f_{\eta_k})(x).$$

Vemos que α_x está bem-definida já que o lado direito da igualdade só depende dos valores dos diferenciais em x . O campo de tensores $\alpha : x \mapsto \alpha_x$ assim definido satisfaz o enunciado e segue de diretamente que a simetria das entradas de α é a mesma que a de A . $\square$

Assim, podemos definir, de forma equivalente, uma variedade quase-Poisson como um par $(\mathcal{M}, \Pi)$ em que $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow \bigwedge^2 T(\mathcal{M})$ é um campo de bivectores suave. Se o colchete $\{\cdot, \cdot\}_\Pi$ associado a Π é um colchete de Poisson, também dizemos que Π é uma **estrutura de Poisson**. Vamos denotar a estrutura por $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$, se quisermos enfatizar uma propriedade do colchete, e por $(\mathcal{M}, \Pi)$ quando quisermos enfatizar uma propriedade do campo de bivectores.

Exemplo 2.2.3. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. No dual $\mathfrak{g}^*$ definimos uma estrutura de Poisson $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(\mathfrak{g}^*) \times C^\infty(\mathfrak{g}^*) \rightarrow C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ por

$$\{f, g\}(\eta) := \eta[df_\eta, dg_\eta]$$

para cada $\eta \in \mathfrak{g}^*$, $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, onde identificamos $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$ para ter $df : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ como um gradiente. Em particular, para as funções lineares, i.e., $f, g \in \mathfrak{g} \subset C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, temos

$$\begin{aligned} \{f, g\}(\eta + \lambda\nu) &= (\eta + \lambda\nu)[f, g] \\ &= \eta[f, g] + \lambda\nu[f, g] \\ &= \{f, g\}(\eta) + \lambda\{f, g\}(\nu) \end{aligned}$$

para quaisquer $\eta, \nu \in \mathfrak{g}^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $\{f, g\} \in \mathfrak{g}$. Ou seja, em $\mathfrak{g}$ o colchete $\{\cdot, \cdot\}$ se restringe ao produto original $[\cdot, \cdot]$.

Dualmente, seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita. Um colchete de Poisson em $C^\infty(\mathbb{V})$ é dito **linear** se leva funções lineares em funções lineares, i.e., $f, g \in \mathbb{V}^*$ implica em $\{f, g\} \in \mathbb{V}^*$. Desse modo fica definido um produto $[\cdot, \cdot] : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{V}^*$, fazendo de $\mathbb{V}^*$ uma álgebra de Lie. Como $\bigwedge^2 T^*(\mathbb{V}) = \mathbb{V} \times \bigwedge^2 \mathbb{V}^*$, o bivetor $\Pi : \mathbb{V} \times \bigwedge^2 \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ associado a um colchete de Poisson linear, deve ele próprio ser linear em $\mathbb{V}$, de modo que corresponde a um único mapa linear $[\cdot, \cdot] : \bigwedge^2 \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{V}^*$ que é um colchete de Lie. Assim, vemos que existe uma bijeção entre estruturas de Poisson lineares em $C^\infty(\mathbb{V})$ e estruturas de álgebra de Lie em $\mathbb{V}^*$. $\blacklozenge$

Sejam $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}})$ e $(\mathcal{N}, \{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{N}})$ duas variedades quase-Poisson. Uma função $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é dita um **morfismo quase-Poisson** se o pullback $\varphi^* : C^\infty(\mathcal{N}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ é um homomorfismo de álgebras quase-Poisson, i.e., se

$$\varphi^* \{f, g\}_{\mathcal{N}} = \{\varphi^* f, \varphi^* g\}_{\mathcal{M}}$$

para quaisquer $f, g \in C^\infty(\mathcal{N})$. Em, particular, se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são variedades de Poisson, o pullback é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Denotaremos por **qPoisson** a categoria de variedades quase-Poisson com os morfismos acima, e por **Poisson** sua subcategoria cheia de variedades de Poisson. Em termos do campo de bivectores, φ é um morfismo se $\Pi_{\mathcal{M}}$ for φ -relacionado a $\Pi_{\mathcal{N}}$, i.e.,

$$\Pi_{\mathcal{M}} \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \Pi_{\mathcal{N}}$$

onde φ^* na esquerda é pullback de formas $\Omega^2(\mathcal{N}) \rightarrow \Omega^2(\mathcal{M})$ e na direita é o pullback de funções, vendo os bivectores como mapas $C^\infty(\mathcal{M})$ -bilineares $\Omega^2(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$.

Exemplo 2.2.4. Seja $\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ um homomorfismo de álgebras de Lie. O mapa transposto $\varphi^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ é um morfismo de Poisson em relação às respectivas estruturas de Poisson lineares. Com efeito, denote o pullback de φ^* em $C^\infty(\mathfrak{h}^*) \rightarrow C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ por $\tilde{\varphi}$, de modo que, dadas $f, g \in C^\infty(\mathfrak{h}^*)$ e $\nu \in \mathfrak{g}^*$ temos

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\varphi} \{f, g\}_{\mathfrak{h}} \right) (\nu) &= \{f, g\}_{\mathfrak{h}} (\varphi^* \nu) \\ &= \nu(\varphi[df_{\varphi^* \nu}, dg_{\varphi^* \nu}]) \\ &= \nu([\varphi(df_{\varphi^* \nu}), \varphi(dg_{\varphi^* \nu})]). \end{aligned}$$

Note que $\tilde{\varphi}$ restrita a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{**} \subseteq C^\infty(\mathfrak{h}^*)$ é simplesmente φ , e obtemos

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\varphi} \{f, g\}_{\mathfrak{h}} \right) (\nu) &= \nu([d(\tilde{\varphi} f)_\nu, d(\tilde{\varphi} g)_\nu]) \\ &= \{\tilde{\varphi} f, \tilde{\varphi} g\}_{\mathfrak{g}} (\nu). \end{aligned}$$

$\blacklozenge$

Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade (quase-)Poisson. Em cada aberto U o campo de bivectores se restringe de modo a obtermos uma variedade (quase-)Poisson $(U, \Pi|_U)$. Assim, uma estrutura (quase-)Poisson induz um homomorfismo de feixes $\mathcal{O}_{\mathcal{M}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ por $C^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U) : f \otimes g \mapsto \{f, g\}_{\Pi|_U} = (df \wedge dg)(\Pi|_U)$. Ou seja, o produto se estende para o feixe de estrutura de $\mathcal{M}$, fazendo de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ um feixe de álgebras (quase-)Poisson. A compatibilidade desse produto com as restrições segue da localidade da derivada, i.e., $df|_V = d(f|_V)$ para toda $f \in C^\infty(U)$ e todo aberto $V \subseteq U$.

Voltando com os pés ao chão, dada uma carta $(U, \mathbf{x})$ de $\mathcal{M}$, considere os campos coordenados $\partial/\partial x^i$. O bivetor se escreve como uma soma

$$\Pi|_U = \sum_{i < j} \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j},$$

onde as funções $\Pi^{ij} \in C^\infty(U)$ são $\Pi^{ij} = \{x^i, x^j\}_\Pi$. Em termos dessa expressão local, o colchete de funções $f, g \in C^\infty(U)$ toma a forma

$$\begin{aligned} \{f, g\}_\Pi &= (df \wedge dg)(\Pi|_U) \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j \right) \left(\sum_{i < j} \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i < j} \Pi^{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Para cada campo de bivetores Π definimos o seu **Jacobiador** como o campo de trivetores J_Π definido por

$$J_\Pi(df, dg, dh) = \{f, \{g, h\}_\Pi\}_\Pi + \{g, \{h, f\}_\Pi\}_\Pi + \{h, \{f, g\}_\Pi\}_\Pi$$

para cada $f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$. É óbvio que Π é uma estrutura de Poisson se e só se $J_\Pi = 0$.

Proposição 2.2.2. *Seja $(\mathcal{M}^{(m)}, \Pi)$ uma variedade quase-Poisson. Para cada carta $(U, \mathbf{x})$ de $\mathcal{M}$, a restrição $\Pi|_U$ é uma estrutura Poisson, se e só se, $\alpha^{ijk} + \alpha^{jki} + \alpha^{kij} = 0$, onde $\alpha^{ijk} = \sum_{r=1}^m \Pi^{ir} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^r}$, $\Pi^{ij} = \{x^i, x^j\}_\Pi$, $i, j, k = 1, \dots, m$.*

Demonstração. Basta notar que as somas cíclicas $\alpha^{ijk} + \alpha^{jki} + \alpha^{kij}$ são as coordenadas do Jacobiador J_Π na carta $(U, \mathbf{x})$. De fato,

$$\begin{aligned} J_\Pi(x^i, x^j, x^k) &= \{x^i, \{x^j, x^k\}_\Pi\}_\Pi + \{x^j, \{x^k, x^i\}_\Pi\}_\Pi + \{x^k, \{x^i, x^j\}_\Pi\}_\Pi \\ &= \{x^i, \Pi^{jk}\}_\Pi + \text{cycle} \\ &= \sum_{\ell, r=1}^m \Pi^{\ell r} \frac{\partial x^i}{\partial x^\ell} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^r} + \text{cycle} \\ &= \sum_{r=1}^m \Pi^{ir} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^r} + \text{cycle} \\ &= \alpha^{ijk} + \alpha^{jki} + \alpha^{kij}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.2.5. Considere $\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$. Escolhendo quaisquer constantes $\Pi^{ij} \in \mathbb{R}$, o resultado acima garante que o bivetor constante $\Pi = \sum_{i < j} \Pi^{ij} e_i \wedge e_j$ define uma estrutura de Poisson em $\mathbb{R}^m$. ♦

Exemplo 2.2.6. Para uma variedade de dimensão até 2, todos os bivectores são estruturas de Poisson, já que todos os trivetores são nulos. ♦

Exemplo 2.2.7. Sejam $(\mathcal{M}_i, \{\cdot, \cdot\}_i)$ variedades quase-Poisson, $i = 1, \dots, k$. Podemos equipar o produto $\mathcal{M} = \prod_{i=1}^k \mathcal{M}_i$ com um colchete $\{\cdot, \cdot\}$ dado por

$$\{f, g\}(x) := \sum_{i=1}^k \{f_{i,x}, g_{i,x}\}_i(x_i)$$

onde $h_{i,x} \in C^\infty(\mathcal{M}_i)$ é dada por $h_{i,x}(p) := h(x_1, \dots, x_{i-1}, p, x_{i+1}, \dots, x_k)$. Desse modo, $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$ é uma variedade quase-Poisson, que é precisamente o produto categórico, i.e., as projeções $\pi_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_i$ são morfismos quase-Poisson. De fato, basta notar que, dada $f \in C^\infty(\mathcal{M}_i)$, vale

$$(\pi_i^* f)_{j,x} = \begin{cases} f & , \text{ se } j = i \\ f(x_i) \text{ constante} & , \text{ se } j \neq i \end{cases}$$

de modo que

$$\{\pi_i^* f, \pi_i^* g\}(x) = \{f, g\}_i(x_i) = (\pi_i^* \{f, g\}_i)(x)$$

para $x \in \mathcal{M}$, $f, g \in C^\infty(\mathcal{M}_i)$, $i = 1, \dots, k$. Com a Proposição 2.2.2, é fácil verificar que, se todas as $\mathcal{M}_i$ forem Poisson, $\mathcal{M}$ também será.

Fixando $x \in \mathcal{M}$, para cada $i = 1, \dots, k$ podemos definir um mapa de inclusão $\iota_{i,x} : \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}$ por $\iota_{i,x}(p) = (x_1, \dots, x_{i-1}, p, x_{i+1}, \dots, x_k)$. Notando que $\iota_{i,x}^* f = f_{i,x}$, podemos utilizar essas inclusões para escrever o bivector do produto em termos dos bivectores. Isto é, se Π é a estrutura quase-Poisson do colchete $\{\cdot, \cdot\}$ e Π_i a de $\{\cdot, \cdot\}_i$, temos

$$\Pi|_x = \sum_{i=1}^k (\Pi_i|_{x_i} \circ \iota_{i,x}^*)$$

para cada $x \in \mathcal{M}$, onde $\iota_{i,x}^*$ no lado direito da igualdade é o pullback em formas $\bigwedge^2 T_x^*(\mathcal{M}) \rightarrow \bigwedge^2 T_{x_i}^*(\mathcal{M}_i)$. ♦

Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade (quase-)Poisson. Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é dito **campo (quase-)Poisson** se $\mathcal{L}_X \Pi = 0$. Dadas $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$, para um campo X genérico temos

$$\begin{aligned} X \{f, g\}_\Pi &= \mathcal{L}_X \{f, g\}_\Pi \\ &= \mathcal{L}_X(df \wedge dg)(\Pi) \\ &= [\mathcal{L}_X(df) \wedge dg](\Pi) + [df \wedge \mathcal{L}_X(dg)](\Pi) + (df \wedge dg)(\mathcal{L}_X \Pi) \\ &= (d\mathcal{L}_X f \wedge dg)(\Pi) + (df \wedge d\mathcal{L}_X g)(\Pi) + \{f, g\}_{\mathcal{L}_X \Pi} \\ &= \{Xf, g\}_\Pi + \{f, Xg\}_\Pi + \{f, g\}_{\mathcal{L}_X \Pi}. \end{aligned}$$

Vemos que X é um campo (quase-)Poisson se e só se ele age como uma derivação do colchete, i.e.,

$$X \{f, g\}_\Pi = \{Xf, g\}_\Pi + \{f, Xg\}_\Pi \quad (\forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M})).$$

Um campo (quase-)Poisson também é dito uma **simetria infinitesimal** de Π . Denotamos por $\mathcal{Pois}(\mathcal{M}, \Pi)$ o subespaço de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ composto de simetrias infinitesimais de Π .

Proposição 2.2.3. *Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade quase-Poisson. Os campos quase-Poisson $\text{Poiss}(\mathcal{M}, \Pi)$ formam uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.*

Demonstração. Basta notar que, $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ para obtermos que $\mathcal{L}_{[X,Y]}\Pi = \mathbf{0}$ se $\mathcal{L}_X\Pi = \mathbf{0} = \mathcal{L}_Y\Pi$. $\square$

Por outro lado, uma **simetria local** de Π é um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ entre abertos $U, V \subseteq \mathcal{M}$ que também é um morfismo de quase-Poisson $(U, \Pi|_U) \rightarrow (V, \Pi|_V)$.

Proposição 2.2.4. *Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade quase-Poisson. Um campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é uma simetria infinitesimal de Π se, e somente se, seu fluxo Φ_X induzir simetrias locais de Π .*

Demonstração. Começamos com a recíproca. Se $\Phi_X^t : U_t \rightarrow U_{-t}$ for um morfismo quase-Poisson teremos

$$\begin{aligned}\Pi \circ (\Phi_X^{-t})^* &= (\Phi_X^{-t})^* \Pi \\ \Pi((\Phi_X^{-t})^* \alpha) &= \Pi(\alpha) \circ \Phi_X^{-t} \\ \therefore \Pi((\Phi_X^{-t})^* \alpha) \circ \Phi_X^t &= \Pi(\alpha)\end{aligned}$$

para toda $\alpha \in \Omega^2(\mathcal{M})$. Segue que

$$(\mathcal{L}_X \Pi)(\alpha)|_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Pi((\Phi_X^{-t})^* \alpha)|_{\Phi_X^t(x)} - \Pi(\alpha)|_x}{t} = 0$$

para toda $\alpha \in \Omega^2(\mathcal{M})$.

Por outro lado, se $\mathcal{L}_X \Pi = \mathbf{0}$, então, para toda forma $\alpha \in \Omega^2(\mathcal{M})$ e todo $x \in \mathcal{M}$, a função $t \mapsto \Pi((\Phi_X^{-t})^* \alpha)|_{\Phi_X^t(x)}$ é constante, de modo que devemos ter

$$\Pi \circ (\Phi_X^{-t})^* = (\Phi_X^{-t})^* \Pi.$$

$\square$

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade. Um campo de bivectores $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow \bigwedge^2 T(\mathcal{M})$ é naturalmente um mapa bilinear alternado $\Pi : T^*(\mathcal{M}) \times_\pi T^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$, e ainda induz um mapa $(-)^{\Pi} : T^*(\mathcal{M}) \rightarrow T^*(\mathcal{M})^* = T(\mathcal{M})$ em que $\alpha^{\Pi} \in T(\mathcal{M})$ é definido como o único vetor tangente satisfazendo $\beta(\alpha^{\Pi}) = \Pi(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)(\Pi)$ para todo $\beta \in T_{\pi(\alpha)}^*(\mathcal{M})$. O mapa $(-)^{\Pi}$ é chamado de **âncora associada a Π** .³

Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade quase-Poisson. Dada uma função $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ definimos o **campo de vetores Hamiltoniano associado a f** como $X_f = (df)^{\Pi}$, de modo que,

$$\{f, g\}_{\Pi} = (df \wedge dg)(\Pi) = dg(X_f) = X_f g$$

i.e., X_f é o campo de vetores associado à derivação $\{f, \cdot\}_{\Pi}$. Ainda temos

$$\begin{aligned}[X_f, X_g]h &= X_f X_g h - X_g X_f h \\ &= X_f \{g, h\}_{\Pi} - X_g \{f, h\}_{\Pi} \\ &= \{f, \{g, h\}_{\Pi}\}_{\Pi} - \{g, \{f, h\}_{\Pi}\}_{\Pi} \\ &= \{f, \{g, h\}_{\Pi}\}_{\Pi} + \{g, \{h, f\}_{\Pi}\}_{\Pi}\end{aligned}$$

³Para mais detalhes, ver Apêndice 2.1.

para quaisquer $f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$. Se Π for uma estrutura de Poisson, temos

$$\begin{aligned} [X_f, X_g]h &= -\{h, \{f, g\}_\Pi\}_\Pi \\ &= \{\{f, g\}_\Pi, h\}_\Pi \\ &= X_{\{f, g\}_\Pi}h, \end{aligned}$$

ou seja, o mapa $f \mapsto X_f$ induz um homomorfismo de álgebras de Lie

$$(C^\infty(\mathcal{M}), \{\cdot, \cdot\}_\Pi) \rightarrow (\mathfrak{X}(\mathcal{M}), [\cdot, \cdot]).$$

Para uma estrutura de Poisson, a imagem de $f \mapsto X_f$ é a subálgebra de campos Hamiltonianos, que denotaremos por $\mathcal{H}\text{am}(\mathcal{M}, \Pi) := \{X_f \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \mid f \in C^\infty(\mathcal{M})\}$.⁴

Note que, o núcleo do mapa $f \mapsto X_f$ é precisamente o centro $Z(C^\infty(\mathcal{M}), \{\cdot, \cdot\}_\Pi)$, já que $X_f = 0 \iff \forall g, \{f, g\} = 0$. Em uma álgebra de Poisson $(\mathcal{A}, \cdot, \{\cdot, \cdot\})$, um **Casimir** é elemento do centro $Z(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$. Para uma variedade de Poisson, denotaremos por $\mathcal{C}\text{as}(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\}_\Pi) := Z(C^\infty(\mathcal{M}), \{\cdot, \cdot\}_\Pi)$ a subálgebra de Casimires.

Como as funções localmente constantes estão contidas em $\mathcal{C}\text{as}(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\}_\Pi)$, e todo campo Hamiltoniano é um campo de Poisson, obtemos um complexo de cocadeias

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{constantes}} C^\infty(\mathcal{M}) \xrightarrow{f \mapsto X_f} \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \xrightarrow{X \mapsto \mathcal{L}_X \Pi} \mathfrak{X}^2(\mathcal{M})$$

que corresponde às primeiras componentes do *complexo de Lichnerowicz* associado a Π . Para mais detalhes sobre esse complexo, ver [8].

Exemplo 2.2.8. Em termos de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ o mapa $(-)^{\Pi}$ se escreve

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i dx^i \right)^{\Pi} = \sum_{i,j=1}^m \alpha_i \Pi^{ji} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i,j=1}^m \alpha_i \{x^j, x^i\}_\Pi \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\text{i.e., } (\alpha^{\Pi})^j = -\sum_{i=1}^m \Pi^{ij} \alpha_i. \quad \blacklozenge$$

Exemplo 2.2.9. Em uma variedade de Poisson $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\}_\Pi)$ todo campo de vetores Hamiltoniano é um campo de Poisson, já que

$$\begin{aligned} X_f \{g, h\} &= \{f, \{g, h\}\} \\ &= -\{h, \{f, g\}\} - \{g, \{h, f\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{X_f g, h\} + \{g, X_f h\} \end{aligned}$$

para quaisquer $f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$. A recíproca, entretanto, não é válida em geral. $\blacklozenge$

Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade quase-Poisson. Um subespaço $\mathbb{V} \subseteq T_x(\mathcal{M})$ é dito **coisotrópico** se $\mathbb{V}^\circ \subseteq (\mathbb{V}^\circ)^\perp$, i.e., se $\alpha(X) = \beta(X) = 0$ para quaisquer $X \in \mathbb{V}$, $\alpha, \beta \in T_x^*(\mathcal{M})$, então $(\alpha \wedge \beta)(\Pi) = 0$. Uma subvariedade $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ é dita **coisotrópica** se $T_x(\mathcal{S})$ for coisotrópico para cada $x \in \mathcal{S}$.

Proposição 2.2.5. *Sejam $(\mathcal{M}_1, \Pi_1)$ e $(\mathcal{M}_2, \Pi_2)$ variedades quase-Poisson. Uma função suave $\varphi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ é um morfismo quase-Poisson se, e somente se, seu gráfico $\text{Grf } \varphi = \{(x, y) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \mid y = \varphi(x)\}$ é uma subvariedade coisotrópica de $(\mathcal{M}_1, \Pi_1) \times (\mathcal{M}_2, -\Pi_2)$.*

⁴Para uma variedade quase-Poisson, $\mathcal{H}\text{am}(\mathcal{M}, \Pi)$ é apenas um subespaço de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$, em geral.

Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade quase-Poisson. Dado $x \in \mathcal{M}$ definimos o **espaço característico** de Π como a imagem $\mathcal{C}_x(\Pi) := T_x^*(\mathcal{M})^\Pi$. A dimensão $\text{rank}_x \Pi := \dim \mathcal{C}_x(\Pi)$ é chamada de **posto** ou **rank de Π em x** . Quando $\text{rank}_x \Pi = \dim \mathcal{M}$, dizemos que Π é **não-degenerado em x** . Quando a função $x \mapsto \text{rank}_x \Pi$ é constante, dizemos que Π é uma **estrutura quase-Poisson regular**.

Pela Proposição A.3.5, para uma estrutura Π regular, a imagem do mapa $(-)^{\Pi} : T^*(\mathcal{M}) \rightarrow T(\mathcal{M})$ forma um subfibrado vetorial $\mathcal{C}(\Pi) := \text{Im}(-)^{\Pi} \subseteq T(\mathcal{M})$. Mais à frente veremos como entender $\mathcal{C}(\Pi)$ mesmo quando não é um subfibrado.

Proposição 2.2.6. *Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade quase-Poisson. Para todo $x \in \mathcal{M}$, vale $(\mathcal{C}_x(\Pi)^{\circ})^{\perp} = T_x^*(\mathcal{M})$. Ou seja, o espaço característico $\mathcal{C}_x(\Pi)$ é o maior subespaço coisotrópico de $T_x(\mathcal{M})$.*

Demonstração. Dada $\alpha \in \mathcal{C}_x(\Pi)$ temos $(\beta \wedge \alpha)(\Pi) = \alpha(\beta^{\Pi}) = 0$, para qualquer $\beta \in T_x^*(\mathcal{M})$. $\square$

Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade de Poisson. Uma subvariedade imersa $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ é dita uma **subvariedade (quase-)Poisson** se existe uma estrutura (quase-)Poisson $\Pi_{\mathcal{N}}$ em $\mathcal{N}$ tal que a inclusão é um morfismo (quase-)Poisson $\mathbf{i}_{\mathcal{N}} : (\mathcal{N}, \Pi_{\mathcal{N}}) \rightarrow (\mathcal{M}, \Pi)$.

Proposição 2.2.7. *Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade de (quase-)Poisson. Uma subvariedade imersa $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ é (quase-)Poisson se, e somente se, $\mathcal{C}_x(\Pi) \subseteq T_x(\mathcal{N})$ para todo $x \in \mathcal{N}$.*

Demonstração. Dado $x \in \mathcal{N}$, se $\mathcal{C}_x(\Pi) \subseteq T_x(\mathcal{N})$, i.e., $\alpha^{\Pi} \in T_x(\mathcal{N})$ para todo $\alpha \in T_x^*(\mathcal{M})$, temos

$$\Pi(\alpha, \beta) = \beta(\alpha^{\Pi}) = \beta|_{T_x(\mathcal{N})}(\alpha^{\Pi}) = \mathbf{i}^*(\beta)(\alpha^{\Pi})$$

para todo $\beta \in T_x^*(\mathcal{M})$, e o mesmo vale para a outra entrada de Π . Segue que

$$\Pi(\alpha, \beta) = \Pi_{\mathcal{N}}(\alpha|_{T_x(\mathcal{N})}, \beta|_{T_x(\mathcal{N})}) = \Pi_{\mathcal{N}}(\mathbf{i}^*\alpha, \mathbf{i}^*\beta). \quad (2.2)$$

Assim, se $\mathcal{C}_x(\Pi) \subseteq T_x(\mathcal{N})$ para qualquer $x \in \mathcal{N}$, obtemos $\mathbf{i}^* \circ \Pi = \Pi_{\mathcal{N}} \circ \mathbf{i}^*$.

Para mostrar a recíproca, note que, fixado $x \in \mathcal{N}$, a igualdade (2.2) é equivalente a $\alpha^{\Pi} \in \mathcal{C}_x(\Pi)$ para todo $\alpha \in T_x^*(\mathcal{M})$. Conclui-se que $\mathbf{i}^* \circ \Pi = \Pi_{\mathcal{N}} \circ \mathbf{i}^*$ implica na hipótese.

Resta verificar que, se Π for uma estrutura de Poisson, o bivector $\Pi_{\mathcal{N}}$ definido acima é uma estrutura de Poisson. Dado $x \in \mathcal{N}$ tome cartas $(U, \mathbf{x})$ e $(V, \mathbf{y})$ de $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ &: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

$n = \dim \mathcal{N}$ e $m = \dim \mathcal{M}$. A Proposição 2.2.2 garante que se Π é Poisson, então $\Pi_{\mathcal{N}}$ é Poisson. $\square$

Assim, em uma subvariedade (quase-)Poisson existe uma única estrutura (quase-)Poisson fazendo da inclusão um morfismo, com essa estrutura sendo definida pela igualdade (2.2) acima.

2.3 Variedades Simpléticas

Uma **variedade simplética** é um par $(\mathcal{M}, \omega)$ em que $\mathcal{M}$ é uma variedade e $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ é uma 2-forma alternada, não-degenerada e fechada. Ou seja, $\omega(X, X) = 0$ para todo $X \in T(\mathcal{M})$, o mapa

$$\begin{aligned} (-)^\omega : T(\mathcal{M}) &\rightarrow T^*(\mathcal{M}) \\ &: X \mapsto \omega(X, \cdot) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de fibrados vetoriais e $d\omega = 0$. Uma forma diferencial satisfazendo essas propriedades é chamada de **forma simplética**.

Um **morfismo simplético** $\varphi : (\mathcal{M}_1, \omega_1) \rightarrow (\mathcal{M}_2, \omega_2)$ é uma função suave $\varphi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ tal que $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Ou seja, a derivada $\varphi_* : T(\mathcal{M}_1) \rightarrow T(\mathcal{M}_2)$ age como uma transformação simplética em cada espaço tangente. Denotaremos por **SpMan** a categoria de variedades simpléticas.

Para uma variedade simplética $(\mathcal{M}, \omega)$, em cada $x \in \mathcal{M}$ o espaço tangente $T_x(\mathcal{M})$ é um espaço vetorial simplético com ω_x , e logo deve ter dimensão par (Prop. 2.1.3). Assim, toda variedade simplética tem dimensão par.

Seja $(\mathcal{M}^{(2n)}, \omega)$ uma variedade simplética. Como ω é não-degenerada, ω^n é uma forma de volume não-singular em $\mathcal{M}$. Em particular, $\mathcal{M}$ é orientável. Agora, dada outra variedade simplética $(\mathcal{N}, \nu)$, um morfismo $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ preserva as formas de volume $\varphi^*\nu^n = \omega^n$ e portanto preserva orientação. Os isomorfismos em **SpMan** são chamados de **simplectomorfismos**.

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Como ω é não-degenerada, a inversa do mapa $(-)^\omega$ é uma âncora $T^*(\mathcal{M}) \rightarrow T(\mathcal{M})$, de modo a definir um bivector Π^ω por $\Pi^\omega(X^\omega, Y^\omega) = \omega(X, Y)$ e a correspondência entre funções e campos Hamiltonianos toma a forma $df = \omega(X_f, \cdot)$. Ainda mais, como ω é fechada, temos

$$\begin{aligned} d\omega(X_f, X_g, X_h) &= 0 = X_f(\omega(X_g, X_h)) - X_g(\omega(X_f, X_h)) + X_h(\omega(X_f, X_g)) + \\ &\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f) \\ &= X_f\{g, h\} - X_g\{f, h\} + X_h\{f, g\} + \\ &\quad + dh[X_f, X_g] - dg[X_f, X_h] + df[X_g, X_h] \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \\ &\quad + [X_f, X_g]h - [X_f, X_h]g + [X_g, X_h]f \\ &= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \\ &\quad + X_fX_g h - X_gX_f h - X_fX_h g + X_hX_f g + X_gX_h f - X_hX_g f \\ &= 3(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}) \end{aligned}$$

para quaisquer $f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$. Assim, toda variedade simplética $(\mathcal{M}, \omega)$ é naturalmente uma variedade de Poisson com o colchete $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$.

Por outro lado, em uma variedade quase-Poisson $(\mathcal{M}, \Pi)$, se Π é não-generado, a forma $\omega^\Pi \in \Omega^2(\mathcal{M})$ definida por $\omega^\Pi(\alpha^\Pi, \beta^\Pi) = \Pi(\alpha, \beta)$ é não-degenerada, e o argumento acima mostra que ω^Π é fechada se e só se Π for uma estrutura de Poisson. Ou seja, uma estrutura simplética é equivalente a uma estrutura de Poisson não-degenerada.

Exemplo 2.3.1. Em $\mathbb{R}^{2n}$ a forma constante ω_0 fornece uma estrutura simplética natural. Mais geralmente, em uma variedade $\mathcal{M}$ de dimensão par $2n$, dada uma

carta $(U, \mathbf{x})$ podemos definir uma forma simplética em U por

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$$

onde $q_i = x^i$ para $i = 1, \dots, n$ e $p_i = x^i$ para $i = n+1, \dots, 2n$, de modo que $\omega = \mathbf{x}^* \omega_0$. $\blacklozenge$

Exemplo 2.3.2. Seja $\mathcal{Q}$ uma variedade e $T^*(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q}$ seu fibrado cotangente. Em $T^*(\mathcal{Q})$ podemos definir a **forma de Liouville**, ou **forma tautológica**, $\theta \in \Omega^1(T^*(\mathcal{Q}))$ por $\theta_\alpha := \pi^* \alpha$, ou seja,

$$\theta_\alpha(X) := \alpha(\pi_* X), \quad \forall X \in T_{\pi(\alpha)}(T^*(\mathcal{Q})).$$

A derivada $\omega = d\theta$ é uma estrutura simplética natural para o fibrado cotangente $T^*(\mathcal{Q})$. De fato, sendo exata, é claro que ω é fechada, e para ver que é não-degenerada, basta tomar uma carta $\mathbf{x} = (q^1, \dots, q^n)$ em U e induzir uma carta $\mathbf{y} = (q^1 \circ \pi, \dots, q^n \circ \pi, p_1, \dots, p_n)$ em $T_U^*(\mathcal{Q}) = \pi^{-1}[U]$ com

$$\alpha = \sum_{i=1}^n p_i(\alpha) dq_{\pi(\alpha)}^i$$

para toda $\alpha \in T^*(\mathcal{Q})$. A forma de Liouville se escreve localmente por

$$\theta|_{T_U^*(\mathcal{Q})} = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$$

e sua derivada fica

$$\omega|_{T_U^*(\mathcal{Q})} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i = \mathbf{y}^* \omega_0.$$

A forma $\omega = d\theta$ é chamada de **estrutura simplética natural** de $T^*(\mathcal{Q})$, e a variedade simplética $(T^*(\mathcal{Q}), d\theta)$ é chamada de **espaço de fase canônico** de $\mathcal{Q}$. $\blacklozenge$

Exemplo 2.3.3. Sejam $(\mathcal{M}_i, \omega_i)$ variedades simpléticas, $i = 1, \dots, k$. Na variedade produto $\mathcal{M} = \prod_{i=1}^k \mathcal{M}_i$, definimos a forma $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ por

$$\omega(X, Y) := \sum_{i=1}^k \omega_i(X_i, Y_i)$$

onde $X_i, Y_i \in T_{x_i}(\mathcal{M}_i)$, $i = 1, \dots, k$, $X = \oplus_{i=1}^k X_i$ e $Y = \oplus_{i=1}^k Y_i$ são vetores em $T_x(\mathcal{M})$ e $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{M}$. Em resumo, $\omega = \sum_{i=1}^k \pi_i^* \omega_i$. Segue facilmente que ω é uma forma simplética em $\mathcal{M}$. As estruturas de Poisson subjacentes de cada $\mathcal{M}_i$ induzem exatamente a estrutura de Poisson produto em $\mathcal{M}$, de modo que $(\mathcal{M}, \omega)$ é o produto das $(\mathcal{M}_i, \omega_i)$ na categoria **Poisson** das variedades de Poisson. Porém, em geral, as projeções $\pi_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_i$ não são morfismos simpléticos e $(\mathcal{M}, \omega)$ não é o produto das $(\mathcal{M}_i, \omega_i)$ na categoria **SpMan** de variedades simpléticas. $\blacklozenge$

Como vimos, em uma variedade simplética $(\mathcal{M}, \omega)$, os campos Hamiltonianos podem ser expressos em termos da forma simplética: $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é o campo Hamiltoniano de $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ se e só se $df = \omega(X, \cdot)$, ou seja, $\iota_X \omega = df$, onde $\iota_X : \Omega^\bullet(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{M})$ é o mapa de contração $\alpha \mapsto \alpha(X, -, \dots, -)$. Pela fórmula mágica de Cartan, em geral temos

$$\mathcal{L}_X \alpha = \iota_X d\alpha + d(\iota_X \alpha)$$

para quaisquer $\alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{M})$ e $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Para um campo Hamiltoniano X_f e a forma simplética ω , essa fórmula implica em

$$\mathcal{L}_{X_f} \omega = \iota_{X_f} d\omega + d(\iota_{X_f} \omega) = \mathbf{0} + dd f = \mathbf{0},$$

ou seja, X_f é uma simetria infinitesimal de ω . Assim, em uma variedade simplética, um campo X ser Hamiltoniano é equivalente à forma $\iota_X \omega$ ser exata.

Em uma variedade de Poisson $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$, dizemos que um campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é **localmente Hamiltoniano** se, para todo $x \in \mathcal{M}$ existe uma vizinhança aberta $U \ni x$ tal que $X|_U$ é Hamiltoniano, ou seja, existe $f \in C^\infty(U)$ com $X|_U = \{f, \cdot\}$. Em uma variedade simplética, essa condição é expressa em termos da forma simplética.

Proposição 2.3.1. *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Um campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é localmente Hamiltoniano se, e somente se, $\mathcal{L}_X \omega = \mathbf{0}$.*

Demonstração. O resultado segue diretamente do Lema de Poincaré. □

Proposição 2.3.2. *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. O fluxo de um campo localmente Hamiltoniano X age por transformações simpléticas.*

Demonstração. Como $\mathcal{L}_X \omega = \mathbf{0}$, para cada $t \in \mathbb{R}$, o mapa $\Phi^t : \mathcal{D}_t(X) \rightarrow \mathcal{D}_{-t}(X)$ é um symplectomorfismo $\Phi^{t*} \omega|_{\mathcal{D}_{-t}(X)} = \omega|_{\mathcal{D}_t(X)}$. □

Em particular, o fluxo um campo localmente Hamiltoniano completo X é uma ação suave $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ do grupo de Lie aditivo $\mathbb{R}$ por symplectomorfismos $\Phi^t \in \text{Aut}_{\text{SpMan}}(\mathcal{M}, \omega)$.

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Dizemos que um subfibrado $\mathcal{E} \leq T(\mathcal{M})$ é **isotrópico**, **coisotrópico**, **simplético** ou **Lagrangiano**, se suas fibras $\mathcal{E}_x \subseteq T_x(\mathcal{M})$ forem subespaços dos respectivos tipos. Uma subvariedade imersa $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ é dita **isotrópica**, **coisotrópica**, **simplética** ou **Lagrangiana** se seu fibrado tangente $T(\mathcal{S})$ o for.

Exemplo 2.3.4. Dada uma variedade $\mathcal{Q}$, considere o espaço de fase canônico $(T^*(\mathcal{Q}), d\theta)$. As fibras $T_x^*(\mathcal{Q})$ são claramente subvariedades Lagrangianas. Para qualquer $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{Q})$, a imagem $\text{Im } \alpha = \{\alpha_x \mid x \in \mathcal{Q}\}$ também é uma subvariedade Lagrangiana de $T^*(\mathcal{Q})$. Mais geralmente, subvariedades Lagrangianas de $T^*(\mathcal{Q})$ podem misturar trechos verticais e horizontais. ◆

Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade de Poisson. Uma **subvariedade simplética** de $\mathcal{M}$ é uma subvariedade de Poisson $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ cuja estrutura de Poisson induzida é não-degenerada, ou seja, é definida por uma forma simplética.

Proposição 2.3.3. *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Valem as seguintes afirmações:*

- (i) *um subespaço vetorial $\mathbb{V} \subseteq T_x(\mathcal{M})$ é coisotrópico, no sentido quase-Poisson, se e só se é coisotrópico, no sentido simplético.*
- (ii) *uma subvariedade imersa $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ é simplética, no sentido Poisson, se e só se o for no sentido simplético.*

Proposição 2.3.4. *Sejam $(\mathcal{M}_1, \omega_1)$ e $(\mathcal{M}_2, \omega_2)$ variedade simpléticas. Um difeomorfismo $\varphi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ é isomorfismo simplético se, e somente se, seu gráfico $\text{Grf } \varphi$ é uma subvariedade Lagrangiana de $(\mathcal{M}_1, \omega_1) \times (\mathcal{M}_2, -\omega_2)$.*

Demonstração. Segue diretamente da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Grf } \varphi & \\
 \text{id}_{\mathcal{M}_1} \swarrow & \downarrow \mathbf{i} & \searrow \text{proj}_2 \circ \mathbf{i} \\
 & \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2^- & \\
 \swarrow \text{proj}_1 & & \searrow \text{proj}_2 \\
 \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}_2^-
 \end{array}$$

e notando que $(\mathcal{M}_1, \omega_1) \times (\mathcal{M}_2, -\omega_2) = (\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \text{proj}_1^* \omega_1 - \text{proj}_2^* \omega_2)$. Como $\dim \text{Grf } \varphi = \dim \mathcal{M}_1 = \dim \mathcal{M}_2 = \frac{1}{2} \dim(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$, vemos que $\text{Grf } \varphi$ é Lagrangiana se e só se $\text{Grf } \varphi_{*x} \leq T_x(\mathcal{M}_1) \oplus T_{\varphi(x)}(\mathcal{M}_2)$ for Lagrangiano, i.e.,

$$\begin{aligned}
 (\text{proj}_1^* \omega_1 - \text{proj}_2^* \omega_2)|_{\text{Grf } \varphi_*} &= \mathbf{0}, \\
 (\text{proj}_1^* \omega_1)|_x &= (\text{proj}_2^* \omega_2)|_{\varphi(x)} \varphi_{*x}
 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{M}_1$, ou seja, $\omega_1 = \varphi^* \omega_2$. □

2.4 Folheações Simpléticas

Referências: [8], [11], [12], [9], [10] e [3].

Seja $\mathcal{M}^{(m)}$ uma variedade. Uma **folheação singular** de $\mathcal{M}$ é uma família $\mathfrak{F}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(F1) cada $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ é uma subvariedade imersa conexa $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$;

(F2) $\mathfrak{F}$ é uma partição de $\mathcal{M}$, i.e., para todo $x \in \mathcal{M}$ existe uma única $\mathcal{F}_x \in \mathfrak{F}$ com $x \in \mathcal{F}_x$;

(F3) para todo $x_0 \in \mathcal{M}$ existe uma carta $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $x_0 \in U$, tal que para toda $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ existe $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^{m-n_0}$, $n_0 := \dim \mathcal{F}_{x_0}$, tal que

$$\mathcal{F} \cap U = \bigsqcup_{c \in \Lambda} \mathbf{x}^{-1}[\mathbb{R}^{n_0} \times \{c\}].$$

As subvariedades $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ são chamadas de **folhas** da folheação. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é **regular** se todas as folhas tem a mesma dimensão, que chamaremos de **dimensão da folheação** $\dim \mathfrak{F}$. Uma carta $(U, \mathbf{x})$ satisfazendo a propriedade **F3** é chamada de **carta adaptada à $\mathfrak{F}$** .

N.B. Note que as folhas de uma folheação são *immersas*, ou seja, são variedades com topologias e estruturas suaves que, a priori, não tem nenhuma relação com as da variedade ambiente. ★

Exemplo 2.4.1. Se $\mathcal{M}$ é uma variedade não-conexa, então existe uma folheação trivial $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in \pi_0(\mathcal{M})} \mathcal{M}_i$ em que cada $\mathcal{M}_i$ é uma componente conexa de $\mathcal{M}$. ◆

Exemplo 2.4.2. Dada uma submersão $f : \mathcal{M}^{(m)} \rightarrow \mathcal{N}^{(n)}$, para cada $y \in \text{Img } f$, a fibra $f^{-1}[y]$ é uma subvariedade de codimensão n , de modo que

$$\mathfrak{F} = \{\text{conex}(f^{-1}[y], x) \mid x \in f^{-1}[y], y \in \text{Img } f\}$$

é uma folheação regular de dimensão $m - n$. ◆

Como uma folheação $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{M}$ é uma partição, existe uma única relação de equivalência $\sim_{\mathfrak{F}}$ em $\mathcal{M}$ com $\mathfrak{F} = \mathcal{M}/\sim_{\mathfrak{F}}$. Veremos $\mathfrak{F}$ como um espaço quociente chamado **espaço de folhas**. Uma folheação regular $\mathfrak{F}$ é dita **simples** se o espaço de folhas admite uma estrutura de variedade suave, fazendo da projeção $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{F} : x \mapsto \mathcal{F}_x$ uma submersão suave. Ou seja, $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{F}$ forma uma variedade fibrada. Em particular, toda folheação simples é regular.

N.B. A definição de folheação, junto com o fato de $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{F}$ ser uma submersão sobrejetiva, garante que a estrutura suave em $\mathfrak{F}$ é única. ★

Proposição 2.4.1. Para toda folheação simples $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{F}$, temos uma identificação natural $\pi^*T(\mathfrak{F}) \simeq T(\mathcal{M})/\mathcal{T}\mathfrak{F}$.

Demonstração. Como $\mathfrak{F}$ é regular, a distribuição tangente $\mathcal{T}\mathfrak{F}$ é um subfibrado de $T(\mathcal{M})$ e portanto o fibrado quociente $T(\mathcal{M})/\mathcal{T}\mathfrak{F}$ faz sentido. Como $\ker \pi_* = \mathcal{T}\mathfrak{F}$, obtemos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}\mathfrak{F} \xrightarrow{\mathbf{i}} T(\mathcal{M}) \xrightarrow{\pi^*\pi_*} \pi^*T(\mathfrak{F}) \longrightarrow 0$$

que nos dá o isomorfismo $\pi^*T(\mathfrak{F}) \simeq \text{coker } \mathbf{i} = T(\mathcal{M})/\mathcal{T}\mathfrak{F}$. □

Uma **variedade folheada** é um par $(\mathcal{M}, \mathfrak{F})$ em que $\mathfrak{F}$ é uma folheação de $\mathcal{M}$. Dadas duas variedade folheadas $(\mathcal{M}_1, \mathfrak{F}_1)$ e $(\mathcal{M}_2, \mathfrak{F}_2)$, definimos um **morfismo folheado** como um par $(f, \bar{f})$ de mapas $f \in C^\infty(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ e $\bar{f} \in C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ comutando com as projeções

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathfrak{F}_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathfrak{F}_2 \end{array}$$

Com essa definição, uma variedade folheada $(\mathcal{M}, \mathfrak{F})$ é dita **simples** se existe um isomorfismo de folheações $(\mathcal{M}, \mathfrak{F}) \simeq (\mathcal{M}, \mathcal{B})$ para uma variedade fibrada $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$.

Uma **distribuição singular** em $\mathcal{M}$ é uma união $\mathcal{D} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_x$ de subespaços vetoriais $\mathcal{D}_x \subseteq T_x(\mathcal{M})$. Dizemos que $\mathcal{D}$ é:

- **regular** se $x \mapsto \dim \mathcal{D}_x$ é constante;
- **suave** se, para quaisquer $x \in \mathcal{M}$ e $v \in \mathcal{D}_x$, existe um campo suave local $X \in \mathfrak{X}(U)$ em um aberto $U \ni x$, tal que $X(x) = v$ e $X(y) \in \mathcal{D}_y$ para todo $y \in U$.

Proposição 2.4.2. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade. Uma distribuição $\mathcal{D} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_x$ em $\mathcal{M}$ define um subfibrado vetorial $\mathcal{D} \subseteq T(\mathcal{M})$ se, e somente se, for regular e suave.*

Demonstração. Fixado $x \in \mathcal{M}$, tome uma base $v_1, \dots, v_n$ de $\mathcal{D}_x$. Se $\mathcal{D}$ for uma distribuição suave, pela Proposição A.3.3, existem campos $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$ em alguma vizinhança $U \ni x$ tal que $X_i(x) = v_i$, $X_1(y), \dots, X_n(y)$ são linearmente independentes e $X_i(y) \in \mathcal{D}_y$, para todo $y \in U$. Como $\mathcal{D}$ é regular, os $X_1, \dots, X_n$ formam bases de $\mathcal{D}$ em cada ponto, e pela Proposição A.3.4, segue que $\mathcal{D}$ forma um subfibrado vetorial de $T(\mathcal{M})$. $\square$

Exemplo 2.4.3. Dada uma folheação $\mathfrak{F}$ de uma variedade $\mathcal{M}^{(m)}$, podemos definir a sua **distribuição tangente** $\mathcal{T}\mathfrak{F} := \bigcup_{x \in \mathcal{M}} T_x(\mathcal{F}_x)$. A propriedade **F3** na definição de folheação garante que $\mathcal{T}\mathfrak{F}$ é uma distribuição suave. De fato, dados $x_0 \in \mathcal{M}$ e $v \in T_{x_0}(\mathcal{F}_{x_0})$, tome uma carta adaptada $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em x_0 e denote $v = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0}$. Como $\mathbf{x}^{-1}[\mathbb{R}^{n_0} \times \{(x_0^{n_0+1}, \dots, x_0^m)\}] \subseteq \mathcal{F}_{x_0}$ e $v \in T_{x_0}(\mathcal{F}_{x_0})$, as coordenadas $v^{n_0+1}, \dots, v^m$ são nulas. Definimos o campo $X \in \mathfrak{X}(U)$ por

$$X(p) := \sum_{i=1}^{n_0} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \mathbf{x}_*^{-1}(\mathbf{x}(p), (v^1, \dots, v^{n_0}, 0, \dots, 0))$$

de modo que $X(x_0) = v$ e $X(p) \in T_p(\mathcal{F}_p)$, já que

$$\mathbf{x}^{-1}[\mathbb{R}^{n_0} \times \{(x^{n_0+1}(p), \dots, x^m(p))\}] \subseteq \mathcal{F}_p.$$

Segue que se $\mathfrak{F}$ for uma folheação regular, $\mathcal{T}\mathfrak{F}$ é uma distribuição regular suave, e portanto, um subfibrado vetorial de $T(\mathcal{M})$. $\blacklozenge$

Dada uma distribuição singular suave $\mathcal{D}$ em $\mathcal{M}$, uma **subvariedade integral** de $\mathcal{D}$ é uma subvariedade imersa conexa $\iota : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que $T_x(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{D}_x$ é um subespaço vetorial, para cada $x \in \mathcal{S}$. Dizemos que uma subvariedade integral $\mathcal{S}$ é **maximal** se para qualquer outra subvariedade integral $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{D}$ tivermos $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' \Rightarrow \mathcal{S}' = \mathcal{S}$. Dizemos que $\mathcal{S}$ tem **dimensão máxima** se $T_x(\mathcal{S}) = \mathcal{D}_x$ para todo $x \in \mathcal{S}$.

Dizemos que uma distribuição singular suave $\mathcal{D}$ é **integrável** se, para todo $x \in \mathcal{M}$, existe uma subvariedade integral $\mathcal{S}$ de $\mathcal{D}$, maximal e de dimensão máxima, com $x \in \mathcal{S}$.

Agora, dada uma família de campos vetoriais $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{M}$, possivelmente não-suaves, definimos a distribuição singular $\langle \mathcal{V} \rangle$ por $\langle \mathcal{V} \rangle_x := \text{span}\{X(x)\}_{X \in \mathcal{V}}$, chamada de **distribuição gerada por $\mathcal{V}$** . Se $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é composta de campos suaves, então distribuição $\langle \mathcal{V} \rangle$ é também suave, por construção. Dada uma distribuição $\mathcal{D}$, dizemos que $\mathcal{D}$ é **gerada por $\mathcal{V}$** se $\mathcal{D} = \langle \mathcal{V} \rangle$.

Por outro lado, dada uma distribuição singular $\mathcal{D}$, denotamos por $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$ o $C^\infty(\mathcal{M})$ -módulo de campos suaves com $X(x) \in \mathcal{D}_x$ para cada $x \in \mathcal{M}$. Pela propriedade de extensão de campos locais a campos globais, a suavidade de uma distribuição $\mathcal{D}$ é equivalente a $\mathcal{D} = \langle \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}) \rangle$.

Dada uma família $\mathcal{T} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de transformações locais de $\mathcal{M}$, dizemos que uma distribuição $\mathcal{D}$ é **invariante** por $\mathcal{T}$ se $\varphi_{\alpha*}[\mathcal{D}_x] = \mathcal{D}_{\varphi_\alpha(x)}$ para todo $x \in U_\alpha$ e todo $\alpha \in A$. Em particular, para uma família de campos suaves $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, dizemos que $\mathcal{D}$ é **invariante** por $\mathcal{V}$ se for invariante pelos fluxos $\{\Phi_X^t\}_{X \in \mathcal{V}, t \in \mathbb{R}}$ dos campos de $\mathcal{V}$.⁵

Proposição 2.4.3 (Stefan-Sussmann). *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição singular suave em uma variedade $\mathcal{M}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\mathcal{D}$ é integrável;
- (b) existe uma família de campos suaves $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{D}$ é invariante e gerada por $\mathcal{V}$;
- (c) existe uma única folheação $\mathfrak{F}$ tal que $\mathcal{D} = \mathcal{T}\mathfrak{F}$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Sendo suave, é claro que $\mathcal{D}$ é gerada por $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$. Vamos mostrar que a integrabilidade implica em $\mathcal{D}$ ser invariante por $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$, i.e., se o campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ toma valores em $\mathcal{D}$, então $(\Phi_X^t)_*\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_{\Phi_X^t(x)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in U_t := \text{Dom } \Phi_X^t$.

Dado $x \in \mathcal{M}$, seja $\mathcal{F}_x$ a subvariedade integral maximal de dimensão máxima passando por x . Assim, um campo $X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$ se restringe a um campo $X|_{\mathcal{F}_x} \in \mathfrak{X}(\mathcal{F}_x)$ e $\mathcal{F}_x$ é a subvariedade maximal em que isso acontece, de modo que qualquer curva integral de X partindo de um ponto de $\mathcal{F}_x$ tem sua imagem contida em $\mathcal{F}_x$. Em resumo, $\Phi_X^t[\mathcal{F}_x \cap U_t] = \mathcal{F}_x \cap U_{-t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e logo

$$(\Phi_X^t)_*[\mathcal{D}_x] = (\Phi_X^t)_*[T_x(\mathcal{F}_x)] = T_{\Phi_X^t(x)}(\mathcal{F}_x) = \mathcal{D}_{\Phi_X^t(x)}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ no intervalo de definição da curva integral começando em x .

(b) $\Rightarrow$ (c): Dado $x \in \mathcal{M}$, tome campos $X_1, \dots, X_{n_x} \in \mathcal{V}$ tais que $X_1(x), \dots, X_{n_x}(x)$ é uma base de $\mathcal{D}_x$, $n_x = \dim \mathcal{D}_x$. Tome $\varepsilon_x > 0$ de modo que o mapa

$$\begin{aligned} \phi_x : R_x &\rightarrow \mathcal{M} \\ &: (t_1, \dots, t_n) \mapsto \Phi_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \Phi_{X_n}^{t_n}(x), \end{aligned}$$

definido no retângulo aberto $R_x = (-\varepsilon_x, \varepsilon_x)^{n_x} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$, é uma imersão injetiva. Como $\mathcal{D}$ é invariante por $\mathcal{V}$, a imagem de ϕ_x é uma subvariedade integral de $\mathcal{D}$ com dimensão máxima. A seguir, definimos a seguinte relação de equivalência em $\mathcal{M}$;

$$x \sim_{\mathcal{D}} y \iff \exists k \in \mathbb{N}, \exists z_0, \dots, z_k \in \mathcal{M}, \text{ Img } \phi_{z_{i-1}} \cap \text{Img } \phi_{z_i} \neq \emptyset, i = 1, \dots, k.$$

Afirmamos que a partição de $\mathcal{M}$ associada à relação de equivalência $\sim_{\mathcal{D}}$ é uma folheação $\mathfrak{F}$ com $\mathcal{T}\mathfrak{F} = \mathcal{D}$. De fato, denotando por $\mathcal{F}_x$ a classe de x por $\sim_{\mathcal{D}}$, vemos que $\mathcal{F}_x$ é conexa, já que dois pontos podem ser ligados por um caminho suave por partes passando pelos pontos intermediários z_i . Ainda mais, $\mathcal{F}_x$ é uma subvariedade imersa, cuja estrutura suave é definida pelas parametrizações ϕ_y , $y \in \mathcal{F}_x$, e portanto, $T_x(\mathcal{F}_x) = \mathcal{D}_x$ para todo $x \in \mathcal{M}$.

A unicidade da folheação segue da unicidade de soluções de EDO.

(c) $\Rightarrow$ (a): Por hipótese, as folhas de $\mathfrak{F}$ são subvariedades integrais, maximais e de dimensão máxima para $\mathcal{D}$. □

⁵Para $t \in \mathbb{R}$ em que curvas integrais de X não estão definidas, colocamos o fluxo como a função de gráfico vazio $\text{Grf } \Phi_X^t := \emptyset$ por definição.

À luz desse resultado, definimos a **folheação integral de uma distribuição singular suave** $\mathcal{D}$ como a única folheação singular $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{T}(\mathcal{M}/\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Dizemos que $\mathcal{D}$ é **fortemente integrável** se for integrável e $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ for uma folheação simples.

Exemplo 2.4.4. Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$. Dada uma subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ sabemos que existe um subgrupo imerso conexo $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\text{Lie}(\mathcal{H}) = \mathfrak{h}$. Considerando a distribuição $\mathcal{D}^{\mathfrak{h}} = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} g\mathfrak{h}$, vemos que $\mathcal{D}^{\mathfrak{h}}$ é gerada pelos campos X invariantes à esquerda com $X(e) \in \mathfrak{h}$. Em termos da trivialização natural $T(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \times \mathfrak{g}$, $\mathcal{D}^{\mathfrak{h}}$ corresponde a $\mathcal{G} \times \mathfrak{h}$. A distribuição $\mathcal{D}^{\mathfrak{h}}$ é integrável e $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ é uma folheação integral de $\mathcal{D}^{\mathfrak{h}}$. Quando $\mathcal{H}$ é um subgrupo fechado, o quociente $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ é suave e a folheação é simples. $\blacklozenge$

Dizemos que uma distribuição singular $\mathcal{D}$ é **involutiva** se, $X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$ implica em $[X, Y] \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$, ou seja, $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$ é uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Note que, se $\mathcal{D}$ é integrável, pela propriedade (b) da Proposição 2.4.3 acima, segue que $\mathcal{D}$ é involutiva, já que

$$[X, Y]_x := \left. \frac{d}{dt} \left[(\Phi_X^{-t})_* Y_{\Phi_X^t(x)} \right] \right|_{t=0}.$$

Proposição 2.4.4 (Frobenius). *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade e $\mathcal{D}$ uma distribuição regular suave. Se $\mathcal{D}$ é involutiva, é integrável.*

Demonstração. Basta notar que, sendo involutiva, $\mathcal{D}$ é invariante por $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$. $\square$

Exemplo 2.4.5. Em uma variedade fibrada $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, o fibrado vertical $V(\mathcal{E}) \leq T(\mathcal{E})$ é uma distribuição suave, regular e involutiva. Por definição, $V(\mathcal{E}) = \mathcal{T}\{\mathcal{E}_x\}_{x \in \mathcal{M}}$ é a distribuição tangente da folheação natural de $\mathcal{E}$. Vemos que $\mathcal{E}/V(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{M}$. $\blacklozenge$

Dizemos que uma distribuição suave $\mathcal{D}$ em $\mathcal{M}$ é **localmente finitamente gerada**, se para todo $x \in \mathcal{M}$ existe um aberto $U \ni x$ tal que $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(U)$ é finitamente gerado como $C^\infty(U)$ -módulo.

Proposição 2.4.5. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade e $\mathcal{D}$ uma distribuição suave. Se $\mathcal{D}$ é involutiva e localmente finitamente gerada, então é integrável.*

Demonstração. As hipóteses implicam em $\mathcal{D}$ ser invariante por $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$. A demonstração com detalhes pode ser encontrada em [10], Teorema 2.2. $\square$

Exemplo 2.4.6. Seja $(\mathcal{G}, \mathcal{M})$ um G-espaço e $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathcal{G})$. A ação de álgebra de Lie induzida $\sigma : \mathcal{M} \times \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathcal{M})$ nos dá uma distribuição singular suave $\mathcal{D}^\sigma := \text{Im } \sigma$ gerada pelos campos fundamentais. Como os campos fundamentais formam uma subálgebra de Lie, a folheação $\mathcal{D}^\sigma$ é integrável. Vemos imediatamente que as órbitas $\mathcal{M}/\mathcal{G}$ formam uma folheação integral de $\mathcal{D}^\sigma$. Essa folheação é simples precisamente quando a ação admite quociente suave. $\blacklozenge$

Exemplo 2.4.7. Quando $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ é um fibrado principal, a folheação por órbitas da ação coincide com a folheação vertical, i.e., $\mathcal{P}/\mathcal{G} = \mathcal{P}/V(\mathcal{P}) \simeq \mathcal{M}$. $\blacklozenge$

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade $\mathcal{D}$ uma distribuição singular. Uma **subdistribuição** de $\mathcal{D}$ é uma distribuição singular $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{D}_x$ é subespaço vetorial, para todo $x \in \mathcal{M}$. Nesse caso, escrevemos $\mathcal{V} \leq \mathcal{D}$.

Proposição 2.4.6. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade e $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ distribuições integráveis. Se $\mathcal{D}_0 \leq \mathcal{D}_1$ valem as seguintes propriedades:*

(1) *existe um único mapa quociente $\pi : \mathcal{M}/\mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{D}_1$ comutando o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M} & \\ \pi_0 \swarrow & & \searrow \pi_1 \\ \mathcal{M}/\mathcal{D}_0 & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M}/\mathcal{D}_1 \end{array}$$

(2) *para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{M}/\mathcal{D}_1$, $\pi^{-1}[\mathcal{F}]$ é uma folheação;*

(3) *se ambas $\mathcal{D}_0$ e $\mathcal{D}_1$ forem fortemente integráveis, π é uma submersão.*

Demonstração. (1) Como $\mathcal{D}_{0x} \subseteq \mathcal{D}_{1x}$ para todo $x \in \mathcal{M}$, para toda folha $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{M}/\mathcal{D}_0$ existe uma única folha $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{M}/\mathcal{D}_1$ com $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1$. Definimos π por $\pi(\mathcal{F}_0) := \mathcal{F}_1$. Por outro lado, dado $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{M}/\mathcal{D}_1$ teremos $x \in \mathcal{F}_0$ para alguma $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{M}/\mathcal{D}_1$, de modo que $\mathcal{F}_1 = \pi(\mathcal{F}_0)$.

(2) Basta notar que cada $\mathcal{F}_0 \in \pi^{-1}[\mathcal{F}]$ é uma subvariedade integral de $\mathcal{D}_0|_{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in \mathcal{F}} \mathcal{D}_{0x}$, de modo que $\pi^{-1}[\mathcal{F}]$ é a folheação integral de $\mathcal{D}_0|_{\mathcal{F}}$.

(3) Segue diretamente da Proposição 2.4.1. $\square$

Consideramos uma variedade de quase-Poisson $(\mathcal{M}, \Pi)$. Agora, com a linguagem de distribuições, vemos que Π define uma distribuição singular $\mathcal{C}(\Pi) = \text{Im}(-)^\Pi$, chamada de **distribuição característica** de Π . A regularidade de Π equivale à de $\mathcal{C}(\Pi)$. A suavidade de $\mathcal{C}(\Pi)$ segue da seguinte forma: dados $x \in \mathcal{M}$ e $v \in \mathcal{C}_x(\Pi)$, por definição, existe algum funcional $\alpha \in T_x^*(\mathcal{M})$ com $v = \alpha^\Pi$. Como $T^*(\mathcal{M})$ é um fibrado vetorial suave, existe uma vizinhança $U \ni x$ e uma forma $\bar{\alpha} \in \Omega^1(U)$ com $\bar{\alpha}_x = \alpha$, de modo que o campo $X = \bar{\alpha}^\Pi$ é uma extensão de v .

Proposição 2.4.7. *Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade de quase-Poisson. Sobre a distribuição característica $\mathcal{C}(\Pi)$, valem as seguintes afirmações:*

- (i) $\mathcal{C}(\Pi)$ é gerada pelos campos Hamiltonianos;
- (ii) $\mathcal{C}(\Pi)$ é invariante por simetrias infinitesimais de Π ;
- (iii) se Π é uma estrutura de Poisson, então $\mathcal{C}(\Pi)$ é integrável.

Demonstração. (i) Dados $x \in \mathcal{M}$ e $\alpha \in T_x^*(\mathcal{M})$, existe uma vizinhança aberta $U \ni x$ e uma função $f \in C^\infty(U)$ tal que $df_x = \alpha$. Em alguma vizinhança $V \subseteq U$ de x , podemos encontrar uma função $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$ com $\varphi|_V = 1$ e $\text{supp } \varphi \subseteq U$, de modo que a função $\bar{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\bar{f}|_U = \varphi f$ e $\bar{f}|_{\mathcal{M} \setminus U} = 0$ é uma extensão de f em x com $d\bar{f}_x = df_x$, já que

$$d(\varphi f)_x = \varphi(x)df_x + f(x)d\varphi_x = df_x.$$

Em resumo, para todo funcional $\alpha \in T_x^*(\mathcal{M})$ existe uma função suave global $\bar{f} \in C^\infty(\mathcal{M})$ com $\alpha = d\bar{f}_x$. Dado $v \in \mathcal{C}_x(\Pi)$, se $\alpha^\Pi = v$, basta tomar $X = (d\bar{f})^\Pi$ para obter um campo Hamiltoniano com $X(x) = v$.

(ii) Por (i) temos $\mathcal{C}_x(\Pi) = \{X_f(x) \mid f \in C^\infty(\mathcal{M})\}$, para todo $x \in \mathcal{M}$. Seja $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ uma simetria de Π . Pela Proposição 2.2.4, temos

$$\begin{aligned} [(\Phi_Y^t)_* X_f]g &= X_f(g \circ \Phi_Y^t) \\ &= \{f, g \circ \Phi_Y^t\} \\ &= \{f \circ \Phi_Y^{-t} \circ \Phi_Y^t, g \circ \Phi_Y^t\} \\ &= \{f \circ \Phi_Y^{-t}, g\} \circ \Phi_Y^t \\ &= (X_{f \circ \Phi_Y^{-t}}g) \circ \Phi_Y^t \end{aligned}$$

para quaisquer $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$, de modo que $(\Phi_Y^t)_* X_f = X_{f \circ \Phi_Y^{-t}} \circ \Phi_Y^t$ onde Φ_Y^t estiver definida. Concluimos que $(\Phi_Y^t)_*[\mathcal{C}_x(\Pi)] = \mathcal{C}_{\Phi_Y^t(x)}(\Pi)$.

(iii) Como $\mathcal{H}\text{am}(\mathcal{M}, \Pi) \subseteq \mathcal{P}\text{oisson}(\mathcal{M}, \Pi)$, de (i) e (ii) segue que $\mathcal{C}(\Pi)$ é invariante e gerada por $\mathcal{H}\text{am}(\mathcal{M}, \Pi)$. Pela Proposição 2.4.3, concluimos que $\mathcal{C}(\Pi)$ é integrável. $\square$

Pela propriedade (iii) da Proposição 2.4.7, vemos que a integrabilidade de Π ($J_\Pi = \mathbf{0}$) implica na integrabilidade da distribuição característica.

Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade quase-Poisson. Em cada espaço característico $\mathcal{C}_x(\Pi)$ definimos uma forma $\omega_x^\Pi \in \bigwedge^2 T_x^*(\mathcal{M})$ por

$$\omega_x^\Pi(\alpha^\Pi, \beta^\Pi) := \Pi(\alpha, \beta).$$

Quando Π é não-degenerada já sabemos que essa forma é bem-definida. Em geral, se $\alpha_1^\Pi = \alpha_2^\Pi$, por definição temos $\Pi(\alpha_1, \beta) = \Pi(\alpha_2, \beta)$ para todo $\beta \in T_x^*(\mathcal{M})$, e o mesmo para a outra entrada já que Π é alternado. Em resumo, obtemos uma família de formas alternadas $\{\omega_x^\Pi\}_{x \in \mathcal{M}}$. Afirmamos que, para cada $x \in \mathcal{M}$, o mapa

$$\begin{aligned} (-)^{\omega_x^\Pi} : \mathcal{C}_x(\Pi) &\rightarrow \mathcal{C}_x(\Pi)^* \\ &: X \mapsto \omega_x^\Pi(X, \cdot) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. De fato, se $X^{\omega_x^\Pi} = \mathbf{0}$, escolhendo $\alpha \in T_x^*(\mathcal{M})$ com $X = \alpha^\Pi$, vemos que $X^{\omega_x^\Pi} = \alpha|_{\mathcal{C}_x(\Pi)} = \mathbf{0}$, ou seja, $\alpha \in \mathcal{C}_x(\Pi)^\circ$. Como $\mathcal{C}_x(\Pi)$ é o maior subespaço coisotrópico (Proposição 2.2.6), segue que $\mathbf{0} = \Pi(\cdot, \alpha) = -\alpha^\Pi = -X$.

Em conclusão, para cada $x \in \mathcal{M}$ o par $(\mathcal{C}_x(\Pi), \omega_x^\Pi)$ é um espaço vetorial simplético. Em particular, o posto de Π em cada ponto é um número par.

Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade de Poisson. Uma **folheação de Poisson** de $\mathcal{M}$, é uma folheação singular $\mathfrak{F}$ cujas folhas são subvariedades de Poisson. Se as folhas de $\mathfrak{F}$ forem ainda subvariedades simpléticas, dizemos que $\mathfrak{F}$ é um **folheação simplética**.

Proposição 2.4.8. *Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade de Poisson. Toda folheação integral da distribuição característica $\mathcal{C}(\Pi)$ é uma folheação simplética.*

Demonstração. Pela Proposição 2.2.7, toda subvariedade integral de dimensão máxima para $\mathcal{C}(\Pi)$ é automaticamente uma subvariedade de Poisson. Resta mostrar que é simplética.

Seja $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ uma subvariedade imersa com $T_x(\mathcal{S}) = \mathcal{C}_x(\Pi)$ para todo $x \in \mathcal{S}$. Desse modo, a estrutura de Poisson Π se restringe a uma estrutura de Poisson $\Pi_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{S})$. Seja $\omega_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \bigwedge^2 T^*(\mathcal{S})$ a forma definida acima por $x \mapsto \omega_x^{\Pi}$. Vemos imediatamente que $\omega_{\mathcal{S}}$ é igual a forma $\omega^{\Pi_{\mathcal{S}}}$ definida por $\Pi_{\mathcal{S}}$. De fato,

$$\omega_{\mathcal{S}}(\alpha^{\Pi}, \beta^{\Pi}) = \Pi(\alpha, \beta) = \Pi_{\mathcal{S}}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \omega^{\Pi_{\mathcal{S}}}(\bar{\alpha}^{\Pi_{\mathcal{S}}}, \bar{\beta}^{\Pi_{\mathcal{S}}}),$$

onde $\alpha, \beta \in T_x^*(\mathcal{M})$, $\bar{\alpha} = \alpha|_{\mathcal{C}_x(\Pi)}$, $\bar{\beta} = \beta|_{\mathcal{C}_x(\Pi)}$, $x \in \mathcal{S}$. Como $\bar{\alpha}^{\Pi_{\mathcal{S}}} = \alpha^{\Pi}$ e $\bar{\beta}^{\Pi_{\mathcal{S}}} = \beta^{\Pi}$, segue que $\omega_{\mathcal{S}} = \omega^{\Pi_{\mathcal{S}}}$. Ou seja, $\omega_{\mathcal{S}}$ é não-degenerada e definida por $\Pi_{\mathcal{S}}$, e portanto é suave. Como $\Pi_{\mathcal{S}}$ é uma estrutura de Poisson, segue que $\omega_{\mathcal{S}}$ é fechada. Em resumo, $\omega_{\mathcal{S}}$ é uma forma simplética. $\square$

Proposição 2.4.9 (Splitting de Weinstein). *Seja $(\mathcal{M}^{(m)}, \Pi)$ uma variedade de Poisson. Para todo $x_0 \in \mathcal{M}$ existe uma carta $\mathbf{z} : U \rightarrow \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2s} \times \mathbb{R}^n$ com $\mathbf{z}(x_0) = 0$, $s := \frac{1}{2} \text{rank}_{x_0} \Pi$, $n := m - 2s$ e coordenadas $\mathbf{x} = (q^1, \dots, q^s, p_1, \dots, p_s, c^1, \dots, c^n)$ satisfazendo as relações*

$$\begin{aligned} \{q^i, p_j\} &= \delta_j^i, & \{q^i, q^j\} &= \{p_i, p_j\} = 0 \\ \{c^k, c^\ell\} &= 0, & \{c^k, p_j\} &= \{c^k, q^j\} = 0 \end{aligned}$$

para quaisquer $i, j = 1, \dots, s$ e $k, \ell = 1, \dots, n$.

Demonstração. Seja Π a estrutura de Poisson do colchete em $\mathcal{M}$ e ω^{Π} a forma simplética definida por Π em folha simplética. Se $s = 0$, não há o que mostrar. O restante da demonstração segue indutivamente em s .

Hipótese de Indução: Para $s > 0$, suponhamos que para toda variedade de Poisson $(\mathcal{M}_0^{(m_0)}, \Pi_0)$ e todo $y_0 \in \mathcal{M}_0$ com $s_0 := \frac{1}{2} \text{rank}_{y_0} \Pi_0 \in \{1, \dots, s-1\}$, podemos encontrar uma carta $\mathbf{y} : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{2s_0} \times \mathbb{R}^{m_0-2s_0}$ com $\mathbf{y}(y_0) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} = (q^1, \dots, q^{s_0}, p_1, \dots, p_{s_0}, c^1, \dots, c^{m_0-2s_0})$ satisfazendo as relações do colchete especificadas na proposição.

Passo de Indução: Como $s > 0$, existe um vetor não-nulo $X \in \mathcal{C}_{x_0}(\Pi)$ e, em alguma vizinhança W_0 de x_0 , uma $q^1 \in C^\infty(W_0)$ com $X = X_{q^1}(x_0)$. Como $X_{q^1}(x_0) \neq \mathbf{0}$, existe alguma vizinhança $V_0 \subseteq W_0$ de x_0 e uma função $p_1 \in C^\infty(V_0)$ tal que $X_{q^1} p_1 = 1$, ou seja, $\{q^1, p_1\} = 1$ em V_0 . Em particular, $[X_{q^1}, X_{p_1}] = X_{\{q^1, p_1\}} = \mathbf{0}$. Podemos então encontrar uma carta $\mathbf{x} : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ em $x_0 \in U_0 \subseteq V_0$ com $\mathbf{x} = (q^1, p_1, x^3, \dots, x^m)$, de modo que $\{x^i, q^1\} = 0 = \{x^i, p_1\}$, $i = 3, \dots, m$, e

$$X_{q^1} = -\frac{\partial}{\partial p_1}, \quad X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial q^1}.$$

Com uma translação adequada, podemos supor que $\mathbf{x}(x_0) = 0$. Pela identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \{q^1, \{x^i, x^j\}\} = -\frac{\partial}{\partial p_1} \{x^i, x^j\}, \\ 0 &= \{p_1, \{x^i, x^j\}\} = \frac{\partial}{\partial q^1} \{x^i, x^j\}, \end{aligned}$$

$i = 3, \dots, m$. Em $\mathbb{R}^{m-2}$ induzimos uma estrutura de Poisson Π_0 por

$$\Pi_0^{ij}(a) = \{x^i, x^j\}(\mathbf{x}^{-1}(0, 0, a)),$$

de modo que a subvariedade $\mathcal{M}_0 := \mathbf{x}^{-1}[\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^{m-2}]$ é Poisson e o mapa $\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m-2}$ induzido por $\mathbf{x}$ é um isomorfismo. Por outro lado, a subvariedade $\mathcal{S}_0 := \mathbf{x}^{-1}[\mathbb{R}^2 \times \{\mathbf{0}_{m-2}\}]$ é simplética com a forma $dp_1 \wedge dq^1$ e o mapa $\mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ induzido por $\mathbf{x}$ é um isomorfismo simplético. Assim, $\text{rank}_{x_0} \Pi_{\mathcal{M}_0} = 2s - 2 = 2(s - 1)$ e $\mathcal{M}_0$ satisfaz a hipótese de indução, assim como $(\mathbb{R}^{m-2}, \Pi_0)$. Definimos a carta $\mathbf{z} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em $U := \mathbf{x}^{-1}[U_1]$ como a composta

$$U \xrightarrow{\mathbf{x}} \mathbb{R}^2 \times U_0 \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{R}^2} \times \mathbf{y}} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2(s-1)} \times \mathbb{R}^{m-2s}$$

onde $\mathbf{y} : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{m-2} = \mathbb{R}^{2(s-1)} \times \mathbb{R}^{m-2s}$ é a carta obtida em $\mathbb{R}^{m-2}$ pela hipótese de indução. Reordenando adequadamente as componentes de $\mathbf{z}$, obtemos o resultado. $\square$

Em uma variedade de Poisson $(\mathcal{M}, \Pi)$, dizemos que um conjunto de funções

$$\{q^1, \dots, q^s, p_1, \dots, p_s, z^1, \dots, z^n\} \subseteq C^\infty(\mathcal{M})$$

satisfaz as relações de comutação canônicas em $x_0 \in \mathcal{M}$ se todas elas se anulam em x_0 e

$$\begin{aligned} \{q^i, p_j\} &= \delta_j^i, & \{q^i, q^j\} &= \{p_i, p_j\} = 0 \\ \{c^k, c^\ell\}(x_0) &= 0, & \{c^k, p_j\} &= \{c^k, q^j\} = 0 \end{aligned}$$

para $i, j = 1, \dots, s$ e $k, \ell = 1, \dots, n$. As funções $q^1, \dots, q^s, p_1, \dots, p_s$ são chamadas de parte **simplética** e as $c^1, \dots, c^n$ de parte **degenerada**. O resultado acima garante que todo ponto admite um sistema de coordenadas cujas componentes satisfazem as relações canônicas. Um sistema de coordenadas dessa forma é dito ter **coordenadas canônicas**.

Exemplo 2.4.8. Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade de Poisson. Dado $x_0 \in \mathcal{M}$, um sistema de coordenadas canônicas $\mathbf{z} : U \rightarrow \mathbb{R}^{2s} \times \mathbb{R}^n$ em x_0 define uma carta adaptada a uma folheação simplética de $\mathcal{M}$. Basta notar que a construção das coordenadas canônicas acima garante que os níveis $\mathcal{S}_c = \mathbf{z}^{-1}[\mathbb{R}^{2s} \times \{c\}]$ são subvariedades integrais de dimensão máxima da distribuição característica. $\blacklozenge$

Proposição 2.4.10. *Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade de Poisson. Dado $x_0 \in \mathcal{M}$, se $\mathbf{z} = (q, p, c) : U \rightarrow \mathbb{R}^{2s} \times \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas canônicas em x_0 , então $\{X_{q^i}(x_0), X_{p_i}(x_0)\}_{i=1}^s$ é uma base de Darboux para a estrutura simplética natural do espaço característico $\mathcal{C}_{x_0}(\Pi)$.*

Demonstração. É claro que os vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_{x_0}, \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{x_0} \right\}$ formam uma base para $\mathcal{C}_{x_0}(\Pi)$, uma vez que geram o espaço tangente de uma subvariedade integral de $\mathcal{C}(\Pi)$ com dimensão máxima. Agora, pelas relações canônicas, vemos que

$$X_{q^i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad X_{p_i} = -\frac{\partial}{\partial q^i} \quad (i = 1, \dots, s).$$

Assim, $\{X_{q^i}(x_0), X_{p_i}(x_0)\}_{i=1}^s$ é uma base do espaço característico e

$$\omega^\Pi(X_{q^i}(x_0), X_{p_j}(x_0)) = \delta_j^i, \quad \omega^\Pi(X_{q^i}(x_0), X_{q^j}(x_0)) = \omega^\Pi(X_{p_i}(x_0), X_{p_j}(x_0)) = 0.$$

$\square$

Proposição 2.4.11 (Weinstein). *Seja $(\mathcal{M}, \Pi)$ uma variedade de Poisson. Para todo $x_0 \in \mathcal{M}$ existe uma vizinhança U que se decompõe, por um isomorfismo $\varphi : U \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{N}$, no produto de uma subvariedade simplética $\mathcal{S}$, de dimensão $\text{rank}_{x_0} \Pi$, e uma subvariedade de Poisson $\mathcal{N}$, de rank nulo em x_0 . As subvariedades $\mathcal{S}$ e $\mathcal{N}$ são únicas além de isomorfismo local.*

Demonstração. A existência segue diretamente da existência de coordenadas canônicas. Colocando $s = \frac{1}{2} \text{rank}_{x_0} \Pi$, $m = \dim \mathcal{M}$ e $n = m - 2s$, tome coordenadas canônicas $\mathbf{z} : U \rightarrow \mathbb{R}^{2s} \times \mathbb{R}^n$ e defina $\mathcal{S} := \mathbf{z}^{-1}[\mathbb{R}^{2s} \times \{\mathbf{0}_n\}]$, $\mathcal{N} := \mathbf{z}^{-1}[\{\mathbf{0}_{2s}\} \times \mathbb{R}^n]$. Se escolhermos outra carta $\mathbf{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^{2s} \times \mathbb{R}^n$ com coordenadas canônicas, a mudança de cartas $\mathbf{y} \circ \mathbf{z}^{-1}$ em $U \cap V$ define um automorfismo local de $\mathbb{R}^{2s} \times \mathbb{R}^n$, induzindo assim isomorfismo entre as subvariedades definidas por cada carta. $\square$

Em uma variedade simplética $(\mathcal{M}^{(2n)}, \omega)$ um **sistema de coordenadas de Darboux** é uma carta $(U, \mathbf{x})$ em que $\mathbf{x}$ é um isomorfismo simplético $(U, \omega|_U) \rightarrow (\mathbf{x}[U], \omega_0)$, onde ω_0 é a estrutura simplética natural em $\mathbf{x}[U] \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Ou seja, denotando $\mathbf{x} = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ teremos

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i.$$

Vemos facilmente que um sistema de coordenadas de Darboux é o mesmo que um sistema de coordenadas canônicas, sem as componentes degeneradas. Segue a diretamente a

Proposição 2.4.12 (Coordenadas de Darboux). *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Em todo ponto de $\mathcal{M}$ existe um sistema de coordenadas de Darboux.*

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Um **potencial simplético** é uma forma $\theta \in \Omega^1(\mathcal{M})$ tal que $\omega = d\theta$. Em geral, como ω é fechada, também é localmente exata, ou seja, para todo ponto $x \in \mathcal{M}$ existe uma vizinhança U e um potencial local $\theta_U \in \Omega^1(U)$ com $d\theta_U = \omega|_U$. Utilizando coordenadas canônicas podemos obter uma fórmula explícita para potenciais locais: dado um sistema de coordenadas de Darboux $\mathbf{x} = (q, p) : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, temos

$$\omega|_U = \mathbf{x}^* \omega_0 = \mathbf{x}^* d\theta_0 = d(\mathbf{x}^* \theta_0),$$

onde $\theta_0 \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ é a forma de Liouville $\theta_0 = \sum_{i=1}^n x^{i+n} dx^i$. Fica definido o potencial local

$$\theta_{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^* \theta_0 = \sum_{i=1}^n p_i dq^i.$$

Dado um potencial simplético $\theta \in \Omega^1(U)$, para qualquer outro potencial simplético $\theta' \in \Omega^1(V)$ temos

$$(\theta' - \theta)|_{U \cap V} = \alpha$$

onde $\alpha \in \Omega^1(U \cap V)$ é uma forma fechada. Podemos encontrar um aberto menor $W \subseteq U \cap V$ em que $\alpha|_W = df$ para alguma $f \in C^\infty(W)$, e ficamos com

$$(\theta' - \theta)|_W = df.$$

Em particular, todo potencial simplético pode $\theta \in \Omega^1(U)$ pode ser escrito localmente como $\theta_x + df$ onde θ_x vem de coordenadas canônicas como acima e f é uma função local.

Exemplo 2.4.9. Uma **variedade pré-simplética** é um par $(\mathcal{M}', \omega')$ tal que $\omega' \in \Omega^2(\mathcal{M}')$ é uma forma fechada $d\omega' = 0$, podendo ser degenerada. Temos a distribuição $\ker \omega' = \{X \in T(\mathcal{M}') \mid \omega'(X, \cdot) = 0\}$. A integrabilidade de ω' garante que $\ker \omega'$ é uma distribuição integrável: $\ker \omega'$ é invariante pelos campos $X \in \mathfrak{X}_{\ker \omega'}(\mathcal{M}')$ já que $\mathcal{L}_X \omega' = 0$. Obtemos uma folheação integral $\mathcal{M} = \mathcal{M}' / \ker \omega'$. Se a folheação for simples, então $\mathcal{M}$ é uma variedade e admite uma estrutura simplética ω com $\omega' = \pi^* \omega$, onde $\pi : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$ é o mapa quociente. Nesse caso, dizemos que $(\mathcal{M}', \omega')$ é **redutível**, que $(\mathcal{M}, \omega)$ é a **redução pré-simplética** de $(\mathcal{M}', \omega')$ e que $(\mathcal{M}, \omega)$ é uma variedade simplética **reduzida**. Mais geralmente, $(\mathcal{M}', \omega')$ é redutível se existe uma variedade simplética $(\mathcal{M}, \omega)$ e uma submersão sobrejetiva $\pi : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$ com $\omega' = \pi^* \omega$. $\blacklozenge$

2.5 Polarizações

Referências para a seção: [3], [2] e [44].

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade. Uma **distribuição singular complexa** é uma família $\mathcal{D} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_x$ de subespaços complexos $\mathcal{D}_x \subseteq T_x(\mathcal{M})^\mathbb{C}$. Dizemos que $\mathcal{D}$ é:

- **regular** se $x \mapsto \dim \mathcal{D}_x$ é constante;
- **suave** se para quaisquer $x \in \mathcal{M}$ e $v \in \mathcal{D}_x$, existe um campo complexo suave $Z \in \mathfrak{X}(U)^\mathbb{C}$ em uma vizinhança $U \ni x$, tal que $Z(x) = v$ e $Z(y) \in \mathcal{D}_y$ para todo $y \in U$.

Definimos também $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$ como o espaço de campos complexos com valores em $\mathcal{D}$. Segue que $\mathcal{D}$ é suave se, e só se, $\mathcal{D} = \langle \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}) \rangle$. Assim como no caso real, uma distribuição complexa regular e suave $\mathcal{D}$ é o mesmo que um subfibrado complexo de $T(\mathcal{M})^\mathbb{C}$.

O conceito de integrabilidade não pode ser traduzido literalmente. Dizemos que uma distribuição complexa $\mathcal{D}$ é **involutiva** se $[\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}), \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})] \subseteq \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$, ou seja, se $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$ for uma subálgebra de Lie complexa de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^\mathbb{C}$. Uma distribuição complexa é dita **integrável** se for regular, suave e todo ponto $x_0 \in \mathcal{M}$ admite uma vizinhança U com funções complexas independentes $f_1, \dots, f_N \in C^\infty(U, \mathbb{C})$, $N = \dim \mathcal{M} - \text{rank } \mathcal{D}$, tais que $Xf_i = 0$ para todo $X \in \mathcal{D}$. Segue facilmente que integrabilidade implica em ser involutiva. Já a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 2.5.1. Toda distribuição real $\mathcal{D}$ pode ser complexificada $\mathcal{D}^\mathbb{C} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_x^\mathbb{C}$. Vemos facilmente que $\mathfrak{X}_{\mathcal{D}^\mathbb{C}}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})^\mathbb{C}$, e que a regularidade e suavidade de $\mathcal{D}^\mathbb{C}$ equivalem a mesma condição em $\mathcal{D}$. Sobre integrabilidade a única implicação trivial é que $\mathcal{D}$ ser suave, regular e integrável implica integrabilidade de $\mathcal{D}^\mathbb{C}$. $\blacklozenge$

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade suave e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dada uma distribuição singular $\mathcal{D}$, sobre $\mathbb{K}$, em $\mathcal{M}$, definimos o conjunto de **funções $\mathcal{D}$ -holomorfas**

$$C_{\mathcal{D}}^\infty(\mathcal{M}) := \{f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{K}) \mid \forall X \in \mathcal{D}, \bar{X}f = 0\}.$$

Pela regra de Leibniz, vemos que $C_{\mathcal{D}}^{\infty}(\mathcal{M})$ forma uma $\mathbb{K}$ -subálgebra de $C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{K})$. Se $\mathcal{D}$ é suave, então $C_{\mathcal{D}}^{\infty}(\mathcal{M}) = \{f \in C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{K}) \mid \forall X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}), \bar{X}f = 0\}$. Se $\mathcal{D}$ for integrável e real, temos $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ e $C_{\mathcal{D}}^{\infty}(\mathcal{M})$ coincide com as funções constantes nas folhas de $\mathcal{M}/\mathcal{D}$, i.e., $f|_{\mathcal{F}} = c_{\mathcal{F}} \in \mathbb{R}$ para toda $\mathcal{F} \in \mathcal{M}/\mathcal{D}$.

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Uma **polarização real** é uma distribuição (real) integrável e Lagrangiana $\mathcal{P}$ em $\mathcal{M}$. Ou seja, $\mathcal{P}$ é um subfibrado involutivo de $T(\mathcal{M})$ tal que $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{P}$. Nesse caso, temos $\text{rank } \mathcal{P} = \frac{1}{2} \dim \mathcal{M}$.

Exemplo 2.5.2. Dada uma variedade $\mathcal{Q}$, no fibrado contangente $T^*(\mathcal{Q})$ temos uma polarização natural dada pelo fibrado vertical $V(T^*(\mathcal{Q}))$, cuja folheação é simples e equivalente ao fibrado $T^*(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{Q}$. $\blacklozenge$

Vemos que, as cartas adaptadas $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ à folheação $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ são coordenadas de Darboux $\mathbf{x} = (q, p)$ em que as folhas são, localmente, níveis $q = \text{constante}$

$$\mathbf{x}^{-1}[q(x_0) \times \mathbb{R}^n] \subseteq \mathcal{F}_{x_0} \cap U,$$

para $x_0 \in U$. Assim, o espaço de folhas $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ age formalmente como um espaço de configurações $\mathcal{Q}$ com $\mathcal{M} = T^*(\mathcal{Q})$. Vale reforçar que, em geral, isso não passa de uma analogia. Mesmo quando a polarização $\mathcal{P}$ é fortemente integrável, isto é, $\mathcal{M}/\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ é variedade, $\mathcal{M}$ pode ser globalmente bem diferente de $T^*(\mathcal{Q})$. Por exemplo, a projeção $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{P}$ em geral é apenas uma variedade fibrada, enquanto $T^*(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{Q}$ é um fibrado.

Proposição 2.5.1. *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Para toda polarização real $\mathcal{P}$ temos*

$$\mathcal{P} = \langle X_f \mid f \in C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M}) \rangle.$$

Demonstração. Como $\mathcal{M}$ é uma variedade simplética, os campos Hamiltonianos geram o fibrado tangente. Resta mostrar que os campos X_f com $f \in C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M})$ tomam valores em $\mathcal{P}$. De fato, se $f \in C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M})$ então $df(Y) = \omega(X_f, Y) = 0$ para todo $Y \in \mathcal{P}$. Ou seja, $X_f \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}^{\perp}}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})$. $\square$

Proposição 2.5.2. *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Um subfibrado vetorial $\mathcal{P} < T(\mathcal{M})$ de posto $\frac{1}{2} \dim \mathcal{M}$ é uma polarização real se, e somente se, $C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M})$ for uma subálgebra abeliana maximal na álgebra de Lie $(C^{\infty}(\mathcal{M}), \{\cdot, \cdot\})$.*

Demonstração. Se $\mathcal{P}$ é uma polarização, o resultado anterior garante que X_f, X_g tomam valores em $\mathcal{P}$, para quaisquer $f, g \in C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M})$, de modo que $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = 0$. Agora, suponha que $\mathcal{A} \subseteq C^{\infty}(\mathcal{M})$ é uma subálgebra de Lie com $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}\} = \mathbf{0}$ e $C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{A}$. Dada $f \in \mathcal{A}$, como $\{f, g\} = 0 = X_f g$ para toda $g \in C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M})$, segue que $X_f \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}_{\mathcal{P}^{\perp}}(\mathcal{M})$, ou seja, $f \in C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M})$. Em resumo, $\mathcal{A} = C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M})$.

Reciprocamente, suponhamos que $C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M})$ é uma subálgebra de Lie abeliana maximal em $C^{\infty}(\mathcal{M})$ com o colchete de Poisson. Como $\omega(X_f, X_g) = \{f, g\}$ para quaisquer $f, g \in C^{\infty}(\mathcal{M})$, o espaço $\mathcal{P}_x = \text{span}\{X_f(x)\}_{f \in C_{\mathcal{P}}^{\infty}(\mathcal{M})}$ é isotrópico, para qualquer $x \in \mathcal{M}$. Como $\dim \mathcal{P}_x = \frac{1}{2} \dim T_x(\mathcal{M})$, segue que $\mathcal{P}_x$ é Lagrangiano. $\square$

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Dada uma polarização real $\mathcal{P}$, dizemos que um potencial simplético local $\theta \in \Omega^1(U)$ está **adaptado a $\mathcal{P}$** se $\theta(X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{P}$. Em termos de coordenadas de Darboux, temos $\mathcal{P}_x = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_x \right\}$ e $\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$. Reciprocamente, todo potencial local define uma polarização local por $\mathcal{P}|_U = \ker \theta_U$.

Exemplo 2.5.3. Em um fibrado cotangente $T^*(\mathcal{Q}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q}$, a forma de Liouville θ nos dá um potencial simplético global, que está adaptado à polarização vertical $V(T^*(\mathcal{Q}))$, já que

$$\theta_\alpha(X) = (\pi^*\alpha)(X) = \alpha\pi_*(X) = 0$$

para $\alpha \in T^*(\mathcal{Q})$ e $X \in V(T^*(\mathcal{Q})) = \ker \pi_*$. ◆

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Uma **polarização complexa** é uma distribuição complexa $\mathcal{P}$ que é integrável e Lagrangiana no fibrado simplético $(T(\mathcal{M})^\mathbb{C}, \omega^\mathbb{C})$. Ou seja, é um subfibrado integrável $\mathcal{P} \leq T(\mathcal{M})^\mathbb{C}$ tal que $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{P}$ em relação a $\omega^\mathbb{C}$. Segue de imediato que o fibrado conjugado $\overline{\mathcal{P}}$ é uma polarização se e só se $\mathcal{P}$ for.

Associadas a uma polarização complexa $\mathcal{P}$, temos as distribuições reais

$$\mathcal{D} := \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap T(\mathcal{M}) \quad \text{e} \quad \mathcal{E} := (\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}) \cap T(\mathcal{M})$$

cujas complexificações são simplesmente $\mathcal{D}^\mathbb{C} = \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{E}^\mathbb{C} = \mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}$. Note que $\mathcal{D}^\perp = \mathcal{E}$ e que, em geral, ambas são singulares. Pela definição de $\mathcal{P}$, vemos que $\mathcal{D}$ é involutiva, e como $\mathcal{P}$ é localmente finitamente gerada (todo fibrado vetorial é), $\mathcal{D}$ é integrável (Proposição 2.4.5). Por outro lado, $\mathcal{E}$ não é involutiva, em geral. Dizemos que $\mathcal{P}$ é **fortemente admissível** se ambas $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ forem integráveis à folheações simples, de modo que a projeção natural $\mathcal{M}/\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{E}$ é uma submersão suave.

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Um **potencial simplético complexo (local)** é uma forma complexa $\theta \in \Omega^1(U; \mathbb{C})$ tal que $d\theta = \omega^\mathbb{C}|_U$. Dada uma polarização complexa $\mathcal{P}$, dizemos que um potencial complexo está **adaptado a $\mathcal{P}$** se $\theta(\overline{X}) = 0$ para todo $X \in \mathcal{P}|_U$. Dizemos que $\mathcal{P}$ é **admissível** se para todo $x \in \mathcal{M}$ existe um potencial local adaptado em alguma vizinhança.

Proposição 2.5.3. *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Para toda polarização complexa $\mathcal{P}$ temos*

$$\overline{\mathcal{P}} = \langle X_f \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^\mathbb{C} \mid f \in C_P^\infty(\mathcal{M}) \rangle.$$

Demonstração. Segue em analogia ao caso real. O fibrado tangente complexo é gerado pelos campos Hamiltonianos de funções complexas. Para concluir, basta mostrar que os campos X_f com $f \in C_P^\infty(\mathcal{M})$ tomam valores em $\overline{\mathcal{P}}$. De fato, $\overline{Y}f = \omega^\mathbb{C}(X_f, \overline{Y}) = 0$ para todo $Y \in \mathcal{P}$. Ou seja, $X_f \in \mathfrak{X}_{\overline{\mathcal{P}}}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}_{\overline{\mathcal{P}}}(\mathcal{M})$. □

Proposição 2.5.4. *Seja $(\mathcal{M}^{(m)}, \omega)$ uma variedade simplética. Dada uma polarização complexa $\mathcal{P}$, se $\mathcal{D}$ for regular e $\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}$ for involutiva, então, para todo $x_0 \in \mathcal{M}$ existe um sistema de coordenadas $\mathbf{z} = (q^1, \dots, q^k, p_1, \dots, p_k, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ em $U \ni x_0$, tal que*

- (i) $\mathcal{D}|_U = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_j} \mid 1 \leq j \leq k \right\rangle$;
- (ii) $\mathcal{E}|_U = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_{j_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j_2}}, \frac{\partial}{\partial y^{j_2}} \mid 1 \leq j_1 \leq k, 1 \leq j_2 \leq n \right\rangle$;
- (iii) $\mathcal{P}|_U = \left\langle \frac{\partial}{\partial p_{j_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{j_2}} - i \frac{\partial}{\partial y^{j_2}} \mid 1 \leq j_1 \leq k, 1 \leq j_2 \leq n \right\rangle$ com coeficientes complexos.

Demonstração. Como $\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}$ é involutiva, $\mathcal{E}$ é integrável. Ainda mais, a regularidade de $\mathcal{D}$ garante que ambas $\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{E}$ são regulares. Assim, podemos encontrar uma vizinhança U_0 de x_0 e funções $q^1, \dots, q^k \in C^\infty(U_0)$ independentes, $k = m - \text{rank } \mathcal{E}$. Da integrabilidade de $\mathcal{P}$ e da Prop. 2.5.3 acima, existem funções complexas $z^1, \dots, z^n \in C^\infty(U_1, \mathbb{C})$ tais que $X_{z^1}, \dots, X_{z^n}$ formam uma base local de $\overline{\mathcal{P}}$. Defina $x^i := \text{Re } z^i$ e $y^i := \text{Im } z^i$. Agora, dada uma carta $\mathbf{x} : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $\mathbf{x}(x_0) = \mathbf{0}$, adaptada a folheação de $\mathcal{D}$, tomamos uma subvariedade transversa $\mathcal{S} := \mathbf{x}^{-1}[\mathbf{0} \times \mathbb{R}^{m-k}]$. Em uma vizinhança $U \subseteq U_0 \cap U_1 \cap U_2$ podemos escolher funções $p_1, \dots, p_k \in C^\infty(U)$ tais que $\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$ e $p_j|_{\mathcal{S} \cap U} = 0$. Assim, os campos Hamiltonianos $X_{q^i} = \frac{\partial}{\partial p_j}$ geram $\mathcal{D}$. Adicionando os campos

$$\frac{\partial}{\partial z^j} := \frac{1}{2} X_{\overline{z^j}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i \frac{\partial}{\partial y^j} \right)$$

aos anteriores, geramos $\mathcal{P}$. Definindo a carta $\mathbf{z} := (q, p, x, y)$ em U , concluímos (i) e (iii). A propriedade (ii) segue de (iii) e da definição de $\mathcal{E} = (\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}) \cap T(\mathcal{M})$. $\square$

Uma polarização complexa $\mathcal{P}$ é dita:

- **realizável** quando $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{D}^\mathbb{C}$;
- **totalmente complexa** quando $\mathcal{D} = \mathbf{0}$.

Em ambos os casos, $\mathcal{P}$ é fortemente admissível: no caso realizável, $\mathcal{D}$ é uma polarização real, de modo que $\mathcal{E} = \mathcal{D}^\perp = \mathcal{D}$ e $\text{id} : \mathcal{M}/\mathcal{D} = \mathcal{M}/\mathcal{E}$; já no caso totalmente complexo temos $\mathcal{E} = T(\mathcal{M})$ com $\mathcal{M}/\mathcal{D} = \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{E} = \pi_0(\mathcal{M})$.

Proposição 2.5.5. *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Se uma polarização complexa $\mathcal{P}$ é totalmente complexa, então*

- (a) *existe uma única estrutura complexa $J : T(\mathcal{M}) \rightarrow T(\mathcal{M})$ cujo fibrado holomorfo é $\mathcal{P}$;*
- (b) *J preserva ω .*

Demonstração. (a) Dado $X \in T_x(\mathcal{M})$, existe um único $JX \in T(\mathcal{M})$ tal que $X - iJX \in \mathcal{P}$. De fato, se $Z_1 = X - iY_1$ e $Z_2 = X - iY_2$ são ambos elementos de $\mathcal{P}$, então $Z_1 - Z_2 = -(\overline{Z_1 - Z_2})$ é um elemento de $\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} = \mathbf{0}$. Defina JX como o único vetor em $T_x(\mathcal{M})$ tal que $X - iJX \in \mathcal{P}$. Para verificar que $J^2 = -\text{id}_{T(\mathcal{M})}$, basta notar que $JX - iX = -i(X + iJX) \in \mathcal{P}$. Segue que $\mathcal{P} = \{X - iJX \in T(\mathcal{M})^\mathbb{C} \mid X \in T(\mathcal{M})\} = T(\mathcal{M})_+$.

A integrabilidade de J segue do resultado anterior sobre coordenadas e do Teorema de Newlander-Nirenberg (ver [44]). Essencialmente equivale à integrabilidade de $\mathcal{P}$.

(b) Dados $X, Y \in T_x(\mathcal{M})$, como $X - iJX, Y - iJY \in \mathcal{P}_x$ e $\mathcal{P}_x$ é Lagrangiano, segue que

$$0 = \omega^\mathbb{C}(X - iJX, Y - iJY) = \omega(X, Y) - \omega(JX, JY) - i[\omega(X, JY) + \omega(JX, Y)]$$

e logo $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$. $\square$

Dizemos que uma polarização complexa $\mathcal{P}$ em $(\mathcal{M}, \omega)$ é **não-degenerada** se a forma sesquilinear $w : \mathcal{P} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $w(X, Y) := i\omega^\mathbb{C}(\overline{X}, Y)$, for não-degenerada. Caso $\mathcal{P}$ seja totalmente complexa todo $X \in \mathcal{P}$ é da forma $X = X_0 - iJX_0$, para um único $X_0 \in T(\mathcal{M})$, e teremos

$$\begin{aligned} w(X, Y) &= i\omega^\mathbb{C}(X_0 + iJX_0, Y_0 - iJY_0) \\ &= i[\omega(X_0, Y_0) + \omega(JX_0, JY_0) + i\omega(X_0, JY_0) - i\omega(JX_0, Y_0)] \\ &= \omega(JX_0, Y_0) - \omega(X_0, JY_0) + i[\omega(X_0, Y_0) + \omega(JX_0, JY_0)] \\ &= 2[\omega(X_0, JY_0) + i\omega(X_0, Y_0)]. \end{aligned}$$

Vemos que, quando $\mathcal{P}$ é totalmente complexa e não-degenerada, o isomorfismo $\mathcal{P} \rightarrow T(\mathcal{M}) : (X_0 - iJX_0)/2 \mapsto X_0$ leva a forma w em um produto pseudo-Hermitiano em $\mathcal{M}$. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{P}$ é uma polarização **pseudo-Kähler**, já que induz uma estrutura pseudo-Kähler $\langle \cdot | \cdot \rangle = \omega(\cdot, J\cdot) + i\omega$. Por outro lado, quando w é positiva (resp. não-negativa), i.e., $w(X, X) > 0$ (resp. $w(X, X) \geq 0$) para todo $X \in \mathcal{P}$, dizemos que $\mathcal{P}$ é **positiva** (resp. **não-negativa**). Segue diretamente que uma polarização **nula**, i.e., $w = \mathbf{0}$, é simplesmente uma polarização realizável $\mathcal{P} = \mathcal{D}^\mathbb{C}$.

Uma **variedade de Kähler** é uma upla $(\mathcal{M}, J, \omega, (\cdot | \cdot), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ em que J é uma estrutura complexa em $\mathcal{M}$, ω é uma forma simplética em $\mathcal{M}$, $(\cdot | \cdot)$ é um produto interno real em $T(\mathcal{M})$ e $\langle \cdot | \cdot \rangle$ é um produto interno complexo em $T(\mathcal{M})$, todos se relacionando por

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle &= (\cdot | \cdot) + i\omega \\ (\cdot | \cdot) &= \omega(\cdot, J\cdot). \end{aligned}$$

Mais geralmente, quando $\langle \cdot | \cdot \rangle$ é apenas sesquilinear não-degenerado, dizemos que a estrutura é **pseudo-Kähler**. Seguindo a discussão acima, vemos que a escolha de uma polarização totalmente complexa positiva em uma variedade simplética $(\mathcal{M}, \omega)$ é equivalente a uma estrutura Kähler.

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética e suponha que temos uma polarização fortemente admissível $\mathcal{P} < T(\mathcal{M})^\mathbb{C}$ com projeção $\pi : \mathcal{M}/\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{E}$. A sequência exata

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{D} \longrightarrow T(\mathcal{M})/\mathcal{D} \longrightarrow T(\mathcal{M})/\mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{0}$$

se identifica com a sequência de pullbacks

$$\mathbf{0} \longrightarrow \pi_{\mathcal{D}}^* V(\mathcal{M}/\mathcal{D}) \longrightarrow \pi_{\mathcal{D}}^* T(\mathcal{M}/\mathcal{D}) \xrightarrow{\pi_*} \pi_{\mathcal{E}}^* T(\mathcal{M}/\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{0},$$

de modo que $T_{\pi_{\mathcal{D}}(x)}(\pi^{-1}[\pi_{\mathcal{E}}(x)]) \simeq \mathcal{E}_x/\mathcal{D}_x$ para todo $x \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{E}$ é coisotrópico, a Proposição 2.1.2 garante que $\mathcal{E}_x/\mathcal{D}_x$ admite uma forma simplética $\tilde{\omega}_x$ induzida por ω . Vamos mostrar que, para cada folha $\mathcal{F} \in \mathcal{M}/\mathcal{E}$, fica definida uma forma alternada não-degenerada $\omega^{\mathcal{F}/\mathcal{D}}$ em $\mathcal{F}/\mathcal{D} = \pi^{-1}[\mathcal{F}]$ pela identificação $T_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}/\mathcal{D}) = T_{\pi_{\mathcal{D}}(x)}(\pi^{-1}[\pi_{\mathcal{E}}(x)]) \simeq \mathcal{E}_x/\mathcal{D}_x$ com $x \in \mathcal{S}$. Dados $x, y \in \mathcal{S}$, suponha que existe um aberto $U \subseteq \mathcal{F}$ com $x, y \in U$ e um campo $X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}|_{\mathcal{F}}}(U)$ cujo fluxo Φ^t leva x em y . Desse modo, temos as identificações

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_x/\mathcal{D}_x & \xrightarrow{\Phi_*^t} & \mathcal{E}_y/\mathcal{D}_y \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & T_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}/\mathcal{D}) & \end{array}$$

e as formas $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y$ são relacionadas por $\tilde{\omega}_x = \Phi^{t*}\tilde{\omega}_y$. Para $x, y \in \mathcal{S}$ arbitrários, existe uma curva suave por partes γ ligando x a y que pode ter sua velocidade estendida a campos tangentes a $\mathcal{S}$ em vizinhanças dos trechos suaves. Em todo caso, o valor $\omega^{\mathcal{F}/\mathcal{D}}(Y, Z) = \tilde{\omega}_x(Y_x, Z_x) = \tilde{\omega}_y(Y_y, Z_y)$ está bem definido porque $\mathcal{L}_X \omega|_{\mathcal{E}} = \mathbf{0}$ para todo $X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$. Em resumo, podemos pensar $T_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}/\mathcal{D})$ como classes de vetores tangentes $Y, Z \in T(\mathcal{F})|_{\mathcal{S}} = \mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$, identificados quando existe um campo local X tangente a $\mathcal{S}$ cujo fluxo leva Y em Z , e o valor de ω nessas classes independe dos representativos.

Proposição 2.5.6. *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética e $\mathcal{P}$ uma polarização complexa fortemente admissível. Para toda $\mathcal{F} \in \mathcal{M}/\mathcal{E}$, o par $(\mathcal{F}/\mathcal{D}, \omega^{\mathcal{F}/\mathcal{D}})$ é uma variedade simplética.*

Demonstração. A forma $\omega^{\mathcal{F}/\mathcal{D}}$ é não-degenerada por construção. Para ver que é fechada, basta notar que $(\pi_{\mathcal{D}} \circ \mathbf{i}_{\mathcal{F}})^* \omega^{\mathcal{F}/\mathcal{D}} = \mathbf{i}_{\mathcal{F}}^* \omega$. $\square$

Em termos de complexificação, a identificação nos dá

$$T_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}/\mathcal{D})^{\mathbb{C}} \simeq (\mathcal{E}_x/\mathcal{D}_x)^{\mathbb{C}} \simeq \mathcal{E}_x^{\mathbb{C}}/\mathcal{D}_x^{\mathbb{C}} = (\mathcal{P}_x + \overline{\mathcal{P}}_x)/(\mathcal{P}_x \cap \overline{\mathcal{P}}_x).$$

Tomando o subespaço $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}^{(0)} < T_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}/\mathcal{D})^{\mathbb{C}}$ correspondente a $\mathcal{P}_x/\mathcal{D}_x^{\mathbb{C}}$ obtemos uma polarização totalmente complexa $\mathcal{P}^{(0)}$ em $(\mathcal{F}/\mathcal{D}, \omega^{\mathcal{F}/\mathcal{D}})$.

Capítulo 3

Quantização Geométrica

As referências seguidas neste capítulo foram [3], [4], [20], [24].

3.1 Sistemas Clássicos

Um **sistema clássico Hamiltoniano** consiste simplesmente em uma variedade de Poisson $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$. Os conceitos físicos correspondem às seguintes estruturas:

(CS1) os **observáveis clássicos** são os elementos da álgebra de Poisson $(C^\infty(\mathcal{M}), \cdot, \{\cdot, \cdot\})$;

(CS2) um **estado** é um funcional linear $S : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ que é **positivo** $S(f^2) \geq 0$ para toda $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, e **unital** $S(1) = 1$. Os **estados puros** são os pontos de $\mathcal{M}$, vistos como mapas de avaliação $\text{ev}_x(f) = f(x)$. Denotamos o conjunto de estados por $\mathcal{S}(\mathcal{M})$.

(CS3) o valor da medição de um observável $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ em um estado $S \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ é simplesmente $S(f)$.

Dada uma função $h \in C^\infty(\mathcal{M})$, a sua *dinâmica Hamiltoniana* é definida pelo fluxo $\Phi_h : \mathcal{D}(X_h) \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ de seu campo Hamiltoniano X_h . Fixada h , a **evolução Hamiltoniana** de um observável $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ é a função $E_h f : \mathcal{D}(X_h) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E_h f(t, x) := f(\Phi_h(t, x)),$$

ou seja, $E_h = \Phi_h^* : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{D}(X_h))$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos também $E_h^t f := \Phi_h^{t*} f : \mathcal{D}_t(X_h) \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, $E_h f$ é a solução com domínio máximo para a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} E_h f(t, x) = \{h, E_h^t f\}(x) = X_h E_h^t f(x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}(X_h).$$

Pensando no fluxo Φ como uma *ação local* $\mathbb{R} \curvearrowright \mathcal{M}$, vemos que essa ação é dada por simetrias locais de Poisson. Quando X_h é completo, o fluxo é uma ação global por isomorfismos de Poisson $\Phi^t \in \text{Aut}_{\text{Poisson}}(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$.

Uma **dinâmica Hamiltoniana** é uma variedade de Poisson $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\}, h)$ com um observável $h \in C^\infty(\mathcal{M})$ fixo para descrever a evolução Hamiltoniana.

Um **morfismo de dinâmicas Hamiltonianas** será um mapa de Poisson $\varphi : (\mathcal{M}_1, \{\cdot, \cdot\}_1, h_1) \rightarrow (\mathcal{M}_2, \{\cdot, \cdot\}_2, h_2)$ com $h_1 = \varphi^* h_2$.

Um sistema clássico Hamiltoniano $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$ vindo de uma variedade simplética $(\mathcal{M}, \omega)$, $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$, é dito **regular** ou **não-degenerado**. A variedade simplética $(\mathcal{M}, \omega)$ nesse caso é chamada de **espaço de fase**. A evolução Hamiltoniana de um observável $h \in C^\infty(\mathcal{M})$ é dada localmente por symplectomorfismos.

Exemplo 3.1.1. Seja $\mathcal{Q}$ uma variedade. Um sistema Hamiltoniano da forma $(T^*(\mathcal{Q}), \omega)$ é chamado de **sistema Hamiltoniano canônico com espaço de configurações** $\mathcal{Q}$. O espaço de fase nesse caso é chamado de **espaço de fase de momento**. ♦

Exemplo 3.1.2 (Corpo Rígido). Um *corpo rígido tridimensional de massa $m \in (0, +\infty)$* consiste em um sistema canônico com espaço de configuração $\text{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, o grupo de movimentos rígidos, e Hamiltoniano $H \in C^\infty(T^*(\text{SO}(3)) \times \mathbb{R}^6)$ dado por

$$H((\alpha, x, p)) := \frac{1}{2} (\alpha g | I \alpha g) + \frac{1}{2m} \langle p, p \rangle + V(x)$$

onde $g \in \text{SO}(3)$, $\alpha \in T_g^*(\text{SO}(3))$, $(x, p) \in \mathbb{R}^6$, $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $(\cdot | \cdot)$ é o produto interno em $\mathfrak{g}^*$ induzido pela forma de Killing e $I : \mathfrak{so}(3)^* \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ é um operador simétrico. A componente do movimento em $\mathbb{R}^3$ descreve o movimento do centro de massa do corpo, enquanto o movimento em $\text{SO}(3)$ descreve o movimento de rotação do corpo em torno do centro de massa. Quando $V = 0$, dizemos que o corpo rígido é *livre*. Em geral, conhecemos a evolução do centro de massa como solução do sistema clássico

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t), p(t)) &= (p(t)/m, -\text{grad } V(x(t))) = X_{H_0}(x(t), p(t)), \\ H_0(x, p) &= \frac{1}{2m} \langle p, p \rangle + V(x). \end{aligned}$$

Agora, a parte rotacional do movimento é dada pelo sistema $(T^*(\text{SO}(3)), H_1)$,

$$H_1(\alpha) = \frac{1}{2} (\ell(\alpha) | I \ell(\alpha)),$$

onde $\ell : T^*(\text{SO}(3)) \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ é o mapa momento $\ell_g(\alpha) := \alpha g$ da ação $\text{SO}(3) \curvearrowright T^*(\text{SO}(3))$. Escolhendo a base clássica de $\mathfrak{so}(3)$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o isomorfismo $a : \mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3 : \xi_i \mapsto e_i$ induz uma identificação $b : \mathfrak{so}(3)^* \simeq \mathbb{R}^3 : \xi^i \mapsto e_i$, que podemos estender para $B : T^*(\text{SO}(3)) \rightarrow \mathbb{R}^3 : \alpha \mapsto b(\alpha g)$. Se $(x_0, p_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ é o movimento de uma partícula do corpo rígido, seu momento angular é $L : t \mapsto x_0(t) \times p_0(t)$ e pode ser calculado com o mapa momento ℓ por meio da equação

$$\ell(\alpha)[a^{-1}(L(t))] = \langle B(\alpha), L(t) \rangle.$$

Na mesma base, o operador I pode ser escrito como o momento de inércia usual da distribuição de massa do corpo rígido (pág. 113 em [40]). ♦

Exemplo 3.1.3. A maior parte dos sistemas Hamiltonianos surgem como correspondente de um **sistema clássico Lagrangiano (em primeira ordem)**, que consiste em uma dupla $(\mathcal{Q}, L)$ em que $\mathcal{Q}$ é uma variedade e uma função suave $L \in C^\infty(T(\mathcal{Q}))$. A função L é chamada de **Lagrangiano do sistema**. Uma **solução do sistema Lagrangiano** é uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{Q}$ que é um ponto crítico da ação

$$S(\gamma) = \int_I L(\dot{\gamma}(t)) dt.$$

Equivalentemente, γ satisfaz localmente as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(q(t), v(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i}(q(t), v(t)) = 0 \quad (\forall t \in \gamma^{-1}[U])$$

onde $(q, v) = \mathbf{x}_* : T_U(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é uma carta trivializada, associada a uma carta $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $\mathcal{Q}$, e $(q(t), v(t)) = \mathbf{x}_* \dot{\gamma}(t)$.

No fibrado tangente duplo, temos um endomorfismo $F : T(T(\mathcal{Q})) \rightarrow T(T(\mathcal{Q}))$ chamado de **estrutura tangente** ou **endomorfismo canônico**, dado por $F_X Y := \text{vl}_X \pi_* Y$ (Exemplo A.5.1), onde $Y \in T_X(T(\mathcal{Q}))$ e $\pi : T(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{Q}$ é a projeção do fibrado. Agora, associado ao Lagrangiano L , definimos uma forma $\theta^L \in \Omega^1(T(\mathcal{Q}))$ por $\theta^L := dL \circ F$. Com a forma $\omega^L := d\theta^L$, o par $(T(\mathcal{Q}), \omega^L)$ forma uma variedade pré-simplética (Exemplo 2.4.9). Dizemos que o Lagrangiano L é **regular** se ω^L for não-degenerada, i.e., $(T(\mathcal{Q}), \omega^L)$ é uma variedade simplética e um sistema Hamiltoniano com o colchete $\{f, g\} = \omega^L(X_f, X_g)$. O observável $H_L \in C^\infty(T(\mathcal{Q}))$ definido por

$$H_L(X) := \mathcal{V}_X L - L(X)$$

é chamado de **Hamiltoniano associado a L** , onde $\mathcal{V} : T(\mathcal{Q}) \rightarrow T(T(\mathcal{Q}))$ é o campo vertical canônico $\mathcal{V}_X := \text{vl}_X X$. Em coordenadas, obtemos

$$\begin{aligned} \theta^L &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^j} dq^j \\ \omega^L &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dv^i \wedge dv^j \right) \\ H_L &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L. \end{aligned}$$

Uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{Q}$ é solução do sistema Lagrangiano se, e somente se, for uma evolução Hamiltoniana de estados em $(T(\mathcal{Q}), \omega^L)$ induzida por H_L . De fato, utilizando as expressões em coordenadas, as equações de Euler-Lagrange tomam a forma

$$dH_L|_{\dot{\gamma}(t)} - \omega^L(\ddot{\gamma}(t), \cdot) = \mathbf{0},$$

ou seja, $\dot{\gamma}$ é curva integral do campo Hamiltoniano X_{H_L} . Mais ainda, obtemos um isomorfismo simplético $\mu : T(\mathcal{Q}) \rightarrow T^*(\mathcal{Q})$, chamado de **transformada de Legendre**¹, em que um vetor tangente $X \in T_x(\mathcal{Q})$ é levado no funcional $\mu(X) \in T_x^*(\mathcal{Q})$ dado por

$$\mu(X)Y := (\text{vl}_X Y)L.$$

¹Quando L é degenerado a transformada de Legendre é apenas um morfismo pré-simplético.

Em coordenadas, $\mu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i$. Segue que $\theta^L = \mu^* \theta$ e $\omega^L = \mu^* \omega$, onde θ é a forma de Liouville e $\omega = d\theta$ a forma simplética natural em $T^*(\mathcal{Q})$. Em resumo, todo sistema Lagrangiano regular $(\mathcal{Q}, L)$ dá lugar a uma dinâmica Hamiltoniana no **espaço de fase de velocidades** $(T(\mathcal{Q}), \omega^L, H_L)$. $\blacklozenge$

Exemplo 3.1.4. Seguindo o exemplo anterior, seja $\mathcal{Q}$ uma variedade e $\eta : T(\mathcal{Q}) \times_\pi T(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{R}$ uma métrica Riemanniana. Dada $V \in C^\infty(\mathcal{Q})$, temos naturalmente o Lagrangiano $L \in C^\infty(T(\mathcal{Q}))$,

$$L(X) := \frac{1}{2} \eta(X, X) - V(\pi_{T(\mathcal{Q})}(X)),$$

chamado de **Lagrangiano Newtoniano com energia potencial** V . Vemos que L é regular já que η é definida-positiva. O Hamiltoniano $H_L \in C^\infty(T^*(\mathcal{Q}))$ é simplesmente

$$H_L(\alpha) = \frac{1}{2} \eta^*(\alpha, \alpha) + V(\pi_{T^*(\mathcal{Q})}(\alpha)),$$

onde η^* é a métrica Riemanniana em $T^*(\mathcal{Q})$ induzido por η , e a transformada de Legendre $\mu : T(\mathcal{Q}) \rightarrow T^*(\mathcal{Q})$ é $\mu(X) = \eta(X, \cdot)$. Quando $V = 0$, as curvas críticas da ação de L são precisamente as geodésicas da métrica η , e ambos L e H_L medem a energia cinética dessas curvas. $\blacklozenge$

3.2 Sistemas Quânticos

Em nível mais elementar, um sistema quântico é descrito por um espaço de Hilbert complexo $\mathfrak{H}$, cujos elementos da projetificação $\mathbb{P}(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{H} \setminus \mathbf{0})/\mathbb{C}^\times$ são os *estados puros* do sistema, e os *observáveis quânticos* são operadores auto-adjuntos em $\mathfrak{H}$. Começamos esta seção com a definição de um sistema quântico e uma breve exposição dos conceitos presentes na definição. Apesar das estruturas presentes nos axiomas darem um certo trabalho para definir, a maioria delas não serão utilizadas no restante do texto, pois não são integrais para o processo de quantização. Colocamos elas aqui pelo bem da completude (e para satisfazer curiosidade do leitor claro). Para mais detalhes ver [24].

Um **sistema quântico elementar** consiste simplesmente em um espaço de Hilbert complexo $\mathfrak{H}$. A correspondência entre estruturas obtidas de $\mathfrak{H}$ e conceitos físicos é o conteúdo dos **axiomas de Dirac-von Neumann**:

(DvN1) Os **observáveis quânticos** são os operadores auto-adjuntos em $\mathfrak{H}$, cujo conjunto denotaremos por $\mathcal{Obs}(\mathfrak{H})$;

(DvN2) Os **estados quânticos** são os operadores positivos de traço unital

$$\mathfrak{S} := \{S \in \mathcal{B}_1(\mathfrak{H}) \mid S \geq 0, \text{tr } S = 1\}.$$

Em particular, os **estados puros** são os operadores de projeção ortogonal unidimensional $P_u : v \mapsto \langle u|v \rangle u$, $\|u\| = 1$;

(DvN3) O **processo de medição** é caracterizado pela correspondência

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{Obs}(\mathfrak{H}) \times \mathfrak{S} &\rightarrow \text{Prob}(\mathbb{R}) \\ (A, S) &\mapsto \mu_{A,S} = \text{tr } \mu_A(\cdot)S \end{aligned}$$

onde μ_A é a medida espectral de A . Assim, o valor $\mu_{A,S}(E)$ é a probabilidade de uma medição do observável A no estado S ser um elemento de $E \in \text{Borel}(\mathbb{R})$.

(DvN4) Um conjunto finito de observáveis $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ é dito **simultaneamente mensuráveis** se suas medidas espectrais comutarem pontualmente, i.e., $[\mu_{A_i}(E), \mu_{A_j}(E)] = \mathbf{0}$ para todo $E \in \text{Borel}(\mathbb{R})$ e $i, j = 1, \dots, n$. Nesse caso a **medição simultânea** de $\mathcal{A}$ em um estado S é dada pela medida de probabilidade $\mu_{\mathcal{A},S} \in \text{Prob}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mu_{\mathcal{A},S}(E) := \text{tr } \mu_{\mathcal{A}}(E)S,$$

onde $\mu_{\mathcal{A}} = \mu_{A_1} \times \dots \times \mu_{A_n}$ é a medida produto. Para cada conjunto de Borel $E \subseteq \mathbb{R}^n$, o valor $\mu_{\mathcal{A},S}(E)$ é a probabilidade do valor da medição simultânea dos $A_1, \dots, A_n$ no estado S ser um elemento de E .

As estruturas presentes nos axiomas são determinadas por $\mathfrak{H}$ ou pela álgebra- C^* de observáveis limitados $\mathcal{Obs}_0(\mathfrak{H}) := \mathcal{Obs}(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{B}(\mathfrak{H}) = i\mathfrak{u}(\mathfrak{H})$. Para mais detalhes ver [24] e [23]. Fixado um subespaço denso $D \subseteq \mathfrak{H}$, denotamos por

$$\mathcal{Obs}(\mathfrak{H})^D := \{A \in \mathcal{Op}(\mathfrak{H})^D \mid D \subseteq D_A, \forall x, y \in D_A, \langle x|Ay \rangle = \langle Ax|y \rangle\}$$

o espaço de operadores simétricos que preservam D . Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o comutador imaginário $i\lambda[\cdot, \cdot]$ define uma operação de álgebra de Lie real em $\mathcal{Obs}(\mathfrak{H})^D$.

A partir daqui apresentamos as definições dos elementos presentes nos axiomas.

Seja $\mathfrak{H}$ um espaço de Hilbert complexo. Um **operador ilimitado** em $\mathfrak{H}$ é uma função $\mathbb{C}$ -linear $A : D_A \rightarrow \mathfrak{H}$ cujo domínio é um subespaço vetorial denso $D_A \subseteq \mathfrak{H}$. O **fecho** de um operador A é o operador² $\bar{A} : D_{\bar{A}} \rightarrow \mathfrak{H}$ definido por

$$\begin{aligned} \text{Grf } \bar{A} &:= \overline{\text{Grf } A} \subseteq \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \\ D_{\bar{A}} &:= \text{proj}_1[\text{Grf } \bar{A}]. \end{aligned}$$

Dizemos que um operador A é **fechado** se $A = \bar{A}$. Agora, dizemos que A é **simétrico** ou **anti-simétrico** se, respectivamente,

$$\langle x|Ay \rangle = \langle Ax|y \rangle \quad \text{ou} \quad \langle x|Ay \rangle = -\langle Ax|y \rangle$$

para todos $x, y \in D_A$.

Mais geralmente, uma **relação linear** entre espaços de Hilbert $\mathfrak{H}_1$ e $\mathfrak{H}_2$ é uma relação $R = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2; \text{Grf } R)$ cujo gráfico é um subespaço vetorial $\text{Grf } R \subseteq \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$. É fácil verificar que a composta de duas relações lineares ainda é linear. Denotamos por $\text{Hilbert}_{\mathbb{C}}^{\text{rel}}$ a categoria de espaços de Hilbert, com relações lineares como morfismos. Denotamos por $\mathcal{Rel}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) := \text{Hom}_{\text{Hilbert}_{\mathbb{C}}^{\text{rel}}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ o conjunto de relações lineares entre dois espaços.

²Não confundir com a conjugação complexa.

Sob essa visão, um operador ilimitado $A : D_A \rightarrow \mathfrak{H}$ é univocamente definido por uma relação linear $R_A = (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}; \text{Grf } A)$ com $D_A = \text{proj}_1[\text{Grf } A]$. Entre dois espaços de Hilbert, definimos as **operadores lineares ilimitadas** como os elementos de

$$\mathcal{O}p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) := \{A \in \mathcal{R}el(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) \mid \overline{D_A} = \mathfrak{H}_1 \text{ e } A|_{D_A} \text{ é função}\},$$

onde $D_A := \text{proj}_1[\text{Grf } A]$. Assim, não faremos distinção entre operadores ilimitados vistos como relações ou como funções em seu domínio de definição. Quando os espaços são iguais, escrevemos $\mathcal{O}p(\mathfrak{H}) := \mathcal{O}p(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$.

Fixado um subespaço denso $D \subseteq \mathfrak{H}$, denotaremos por

$$\mathcal{O}p(\mathfrak{H})^D := \{A \in \mathcal{O}p(\mathfrak{H}) \mid D \subseteq D_A, A[D] \subseteq D\}$$

o conjunto de operadores que deixam D invariante. Definindo as operações $A + B := A|_D + B|_D$ e $AB := A(B|_D)$ em $\mathcal{O}p(\mathfrak{H})^D$, vemos que $\mathcal{O}p(\mathfrak{H})^D$ forma uma álgebra complexa associativa unital e uma álgebra de Lie complexa com o comutador $[A, B] = AB - BA$.

Dada uma relação linear $R \in \mathcal{R}el(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, definimos seu **fecho** como a relação $\bar{R} := (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2; \overline{\text{Grf } R})$, e dizemos que R é **fechada** se $R = \bar{R}$. Uma **extensão** de R é uma $S \in \mathcal{R}el(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ tal que $\text{Grf } R \subseteq \text{Grf } S$. Nesse caso, vale $D_R \subseteq D_S$.

A **relação adjunta** de R é a $R^\dagger \in \mathcal{R}el(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ definida pelo gráfico

$$\text{Grf } R^\dagger := \{(u, v) \in \mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1 \mid \forall (x, y) \in \text{Grf } R, \langle v|x \rangle_1 - \langle u|y \rangle_2 = 0\}.$$

Quando $A \in \mathcal{O}p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, sua relação adjunta é o operador $A^\dagger \in \mathcal{O}p(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1)$ com maior gráfico tal que

$$\langle A^\dagger u|x \rangle_1 = \langle u|Ax \rangle_2.$$

para quaisquer $x \in D_A$ e $u \in D_{A^\dagger}$. Em geral $R^\dagger$ é fechada. Uma relação $R \in \mathcal{R}el(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ é dita **simétrica** ou **anti-simétrica** se, respectivamente, vale

$$\langle v|x \rangle = \langle u|y \rangle \quad \text{ou} \quad \langle v|x \rangle = -\langle u|y \rangle$$

para quaisquer $(x, y), (u, v) \in \text{Grf } R$. Uma relação R é dita **auto-adjunta** se $R = R^\dagger$, e é **essencialmente auto-adjunta** se $\bar{R}$ for auto-adjunta, com $\bar{R} = R^\dagger$ nesse caso.

Proposição 3.2.1 (Teorema Espectral). *Seja $\mathfrak{H}$ um espaço de Hilbert. Para todo operador auto-adjunto $A \in \mathcal{O}p(\mathfrak{H})$ existe uma única medida vetorial $\mu_A : \text{Borel}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ satisfazendo:*

- (i) *para todo $E \in \text{Borel}(\mathbb{R})$, $\mu_A(E)$ é uma projeção ortogonal, i.e., $\mu_A(E)^2 = \mu_A(E)$ e $\mu_A(E)^\dagger = \mu_A(E)$;*
- (ii) $\mu_A(\mathbb{R}) = \text{id}_{\mathfrak{H}}$;
- (iii) *o domínio de A é*

$$D_A = \left\{ x \in \mathfrak{H} \mid \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle x | \mu_A(\lambda) x \rangle < +\infty \right\}$$

e para todo $x \in D_A$ temos

$$Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_A(\lambda)x,$$

onde $\mu_A x : \text{Borel}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{H}$ é a medida vetorial dada por $E \mapsto \mu_A(E)x$;

- (iv) *para todo $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, temos $B[D_A] \subseteq D_A$ e $[A, B] = \mathbf{0}$ em D_A se, e só se, $[\mu_A(E), B] = \mathbf{0}$ para todo $E \in \text{Borel}(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Teorema 2.2, capítulo IX, em [23]. □

A medida μ_A é chamada de **medida espectral de A** e denotamos

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_A(\lambda),$$

onde a integral é entendida pontualmente como na propriedade (iii) acima.

Considere um espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$, com seu espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathfrak{H})$ sendo visto como sistema quântico de estados puros. Definimos a função $P : \mathbb{P}(\mathfrak{H}) \times \mathbb{P}(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$P([x], [y]) := \frac{|\langle x | y \rangle|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2},$$

que está bem-definida já que a classe $[x]$ consiste de múltiplos λx . O valor $P([x], [y])$ pode ser interpretado como a probabilidade de transição do estado $[x]$ para o estado $[y]$. Uma **simetria** de $\mathbb{P}(\mathfrak{H})$ é uma bijeção $T : \mathbb{P}(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{H})$ preservando a probabilidade de transição, i.e., $P(T[x], T[y]) = P([x], [y])$ para quaisquer $[x], [y] \in \mathbb{P}(\mathfrak{H})$. Não é difícil ver que temos um isomorfismo natural entre as simetrias de $\mathbb{P}(\mathfrak{H})$ e o grupo projetivo unitário $\mathbb{P}(\text{U}(\mathfrak{H})) := \text{U}(\mathfrak{H})/\text{U}(1)$, e vamos identificá-los.

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Uma **representação projetiva unitária** de $\mathcal{G}$ é um par $(\mathfrak{H}, R)$ onde $\mathfrak{H}$ é um espaço de Hilbert e $R : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{P}(\text{U}(\mathfrak{H}))$ é um homomorfismo. Em particular, toda representação unitária $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \text{U}(\mathfrak{H})$ define uma rep. projetiva ao compor com o mapa quociente $\text{U}(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{P}(\text{U}(\mathfrak{H}))$. Porém, nem toda rep. projetiva pode ser obtida dessa forma. O que acontece, em geral, é que as representações projetivas (uni.) de $\mathcal{G}$ estão em bijeção com as representações lineares (uni.) do recobrimento universal $\tilde{\mathcal{G}}$ (Prop. 3.2.2 a seguir).

Interpretando $\mathbb{P}(\mathfrak{H})$ como um sistema quântico, suas simetrias são obtidas por meio de reps. projetivas. Agora, dado um grupo de Lie $\mathcal{G}$, como saber quem são os sistemas quânticos elementares em que ele pode agir como simetrias.

Proposição 3.2.2. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie compacto e conexo com recobrimento universal $\tilde{\mathcal{G}}$. Para toda rep. projetiva unitária $(\mathfrak{H}, R)$ de $\mathcal{G}$ existe uma rep. (linear) unitária $(\mathfrak{H}, \rho)$ de $\tilde{\mathcal{G}}$ comutando o diagrama abaixo.*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{U}(\mathfrak{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{R} & \mathbb{P}(\mathbf{U}(\mathfrak{H})) \end{array}$$

Irreducibilidade é preservada por essa correspondência.

Demonstração. Em [15]. □

Em termos das álgebras, o resultado acima diz que as reps. unitárias de $\mathfrak{g}$ estão em bijeção com as reps. projetivas (uni.) de $\mathcal{G}$. Para classificar os sistemas quânticos elementares admitindo simetrias por $\mathcal{G}$, basta classificar as irreps. unitárias de sua álgebra $\mathfrak{g}$.

Exemplo 3.2.1. Vamos encontrar as irreps. unitárias de $\mathfrak{su}(2)$. Pela Prop. 1.6.5, basta encontrar as irreps. complexas de dimensão finita de $\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$. Escolha uma base $\{J_+, J_-, H\}$ para $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$ satisfazendo as relações de comutação

$$[H, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \text{ e } [J_+, J_-] = H.$$

Por exemplo, podemos tomar

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fixe uma irrep. complexa $\mathbb{V}$ de $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$. Dado um autovetor $v \in \mathbb{V}$ de H com autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, i.e., $Hv = \lambda v$, as relações de comutação nos permitem calcular

$$H(J_{\pm}v) = (\lambda \pm 1)J_{\pm}v.$$

Ou seja, $J_{\pm}v$ é nulo ou um autovetor de H com autovalor $\lambda \pm 1$. Como $\mathbb{V}$ tem dimensão finita, H tem um número finito de autovalores, e deve existir um autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_0 + 1$ não é autovalor de H . Seja $v_0 \in \mathbb{V}$ um autovetor com autovalor λ_0 . Defina $v_k := J_-^k v_0$, de modo que v_k é nulo ou um autovetor de H com autovalor $\lambda_0 - k$. Como a rep. tem dimensão finita, deve existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $v_m \neq \mathbf{0}$ e $v_{m+1} = \mathbf{0}$. Os autovetores $\{v_0, \dots, v_m\}$ são linearmente independentes, por terem autovalores distintos. Ainda mais, eles devem gerar $\mathbb{V}$, caso contrário teríamos um subespaço invariante, o que é impossível já que a rep. em $\mathbb{V}$ é irreducível. Em outras palavras, $\{v_0, \dots, v_m\}$ é uma base. Utilizando as relações de comutação indutivamente, obtemos

$$J_+ v_k = k(2\lambda_0 - (k-1))v_{k-1}$$

para $k > 0$. Segue que

$$\mathbf{0} = J_+ v_{m+1} = (m+1)(2\lambda_0 - m)v_m,$$

ou seja, $m = 2\lambda_0$. Denotando $s := \lambda_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, vemos que a representação $\mathbb{V}$ deve ter dimensão $2s+1$. Por outro lado, qualquer espaço complexo $\mathbb{V}_s$ de dimensão $2s+1$ admite uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$. A irrep. $\mathbb{V}_s$ de dimensão $2s+1$ (única além de isomorfismo) é chamada de **representação de spin s** . Para obter a rep. unitária por $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$ basta escolher um produto interno adequado na base obtido. Esse sistema pode ser interpretado como uma partícula quântica esfericamente simétrica, e os valores $\{-s\hbar, (-s+1)\hbar, \dots, (s-1)\hbar, s\hbar\}$ são os possíveis resultados da medição do momento angular intrínseco em qualquer direção. $\blacklozenge$

3.3 Pré-Quantização

O procedimento de quantização geométrica foi desenvolvido para unificar, de forma rigorosa, exemplos do processo de *quantização canônica*. A quantização canônica, primeiro formulada por Dirac, descreve como deve ser o processo de obtenção de sistemas quânticos a partir de sistemas clássicos, idealmente. Em termos modernos, esse processo associa a uma variedade de Poisson $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$ um espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$ com um subespaço denso distinto D e uma função $\mathbf{Q} : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{Obs}(\mathfrak{H})^D$ satisfazendo:

(Q1) $\mathbf{Q}$ é $\mathbb{R}$ -linear;

(Q2) $[\mathbf{Q}(f), \mathbf{Q}(g)] = i\hbar \mathbf{Q}(\{f, g\})$ para $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ (não possível; ver nota 5);

(Q3) $\mathbf{Q}(1) = \text{id}_{\mathfrak{H}}$;

onde $\hbar \in [0, \infty)$ é a constante de Planck reduzida.³ Definindo o colchete $[\cdot, \cdot]_{\hbar} = \frac{1}{i\hbar}[\cdot, \cdot]$ em $\mathcal{Obs}(\mathfrak{H})^D$, as condições **Q1** e **Q2** nos dizem que $\mathbf{Q}$ é um homomorfismo de $\mathbb{R}$ -álgebras de Lie. A condição **Q3** é o que garante a validade de princípios de incerteza: se dois observáveis f, g satisfazem a relação canônica $\{f, g\} = 1$ então $\mathbf{Q}(f)$ e $\mathbf{Q}(g)$ não podem ser diagonalizados simultaneamente (medição simultânea) e os desvios médios satisfazem $\sigma(f)\sigma(g) \geq \hbar/2$ em relação a qualquer estado (mais detalhes em [24]). Outra condição que a quantização deve satisfazer é

(Q4) todo subconjunto *completo*⁴ $\mathcal{A} \subseteq C^\infty(\mathcal{M})$ é levado em um subconjunto completo $\mathbf{Q}[\mathcal{A}] \subseteq \mathcal{Obs}(\mathfrak{H})^D$.

Se $D = \mathfrak{H}$, as condições **Q1** a **Q4** equivalem a $(\mathfrak{H}, \mathbf{Q})$ ser uma representação irredutível de $C^\infty(\mathcal{M})$. Infelizmente, não existe quantização dessa forma na álgebra de observáveis clássicos inteira⁵ Apesar disso, temos algumas teorias que tentam lidar com a quantização canônica de forma rigorosa, entre elas:

³Valor físico $\hbar = h/2\pi$, $h \approx 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$, porém é tratado como parâmetro livre por ter seu valor dependente do sistema de unidades.

⁴Em uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, um subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{g}$ é dito **completo** se $[\mathcal{A}, x] = \mathbf{0}$ implica $x \in Z(\mathfrak{g})$, i.e., $Z_{\mathfrak{g}}(\mathcal{A}) = Z(\mathfrak{g})$.

⁵O Teorema de Groenewold garante que em $\mathbb{R}^{2n}$ não podemos quantizar diretamente as observáveis polinomiais. Para mais detalhes, ver [21].

- a *quantização por deformação* busca definir uma operação em $C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]$ que satisfaça a regra **Q2** formalmente em primeira ordem de $\hbar$;
- a *quantização geométrica* seleciona uma subálgebra de Lie de observáveis clássicos para ser quantizada canonicamente.

Para a quantização geométrica, originalmente, o espaço de fase clássico é uma variedade simplética. Hoje existe uma extensão para certos espaços de fase Poisson por meio da teoria de *grupoides simpléticos* (mais detalhes em [13] e [19]). As próximas seções são dedicadas a entender a quantização geométrica de variedades simpléticas.

Para definir a quantização geométrica em variedades simpléticas precisamos de um passo intermediário chamado *pré-quantização* que, heurísticamente, vem de uma tentativa construtiva de forçar as condições **Q1**, **Q2** e **Q3**.

Um espaço de Hilbert natural a ser associado a uma variedade simplética é $L^2(\mathcal{M}, \text{dvol}_\omega; \mathbb{C})$ de funções suaves L^2 -integráveis⁶ em relação ao volume simplético, que como subespaço denso as funções de suporte compacto $C_c^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Vamos supor que, para cada $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ definimos $\mathbf{Q}(f) = i\hbar X_f \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^\mathbb{C}$ agindo em $C_c^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Por exemplo, para $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ teremos $\mathbf{Q}(q^i) = i\hbar \partial/\partial p_i$ e $\mathbf{Q}(p_j) = -i\hbar \partial/\partial q^j$. Com essa definição as relações de comutação canônicas falham imediatamente

$$[\mathbf{Q}(q^i), \mathbf{Q}(p_j)] = -\hbar^2 X_{\{q^i, p_j\}} = -\hbar^2 X_{\delta^i_j} = \mathbf{0}.$$

A modificação mais simples para consertar isso é definir $\mathbf{Q}(f) = i\hbar X_f + f$, onde f age por multiplicação ponto-a-ponto. Para toda $s \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ temos

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}(f), \mathbf{Q}(g)]s &= [i\hbar X_f + f, i\hbar X_g + g]s \\ &= -\hbar^2 X_{\{f, g\}}s + i\hbar(X_f(gs) + fX_gs - X_g(fs) - gX_fs) \\ &= -\hbar^2 X_{\{f, g\}}s + i\hbar((X_fg)s + gX_fs + fX_gs - (X_gf)s - fX_gs - gX_fs) \\ &= -\hbar^2 X_{\{f, g\}}s + i\hbar(\{f, g\}s - \{g, f\}s) \\ &= -\hbar^2 X_{\{f, g\}}s + 2i\hbar \{f, g\}s, \end{aligned}$$

de modo que, as relações de comutação tomam a forma

$$[\mathbf{Q}(f), \mathbf{Q}(g)] = -\hbar^2 X_{\{f, g\}} + 2i\hbar \{f, g\} = i\hbar(\mathbf{Q}(\{f, g\}) + \{f, g\}),$$

que nos dá $[\mathbf{Q}(q^i), \mathbf{Q}(p_j)] = 2i\hbar \delta^i_j$ em $\mathbb{R}^{2n}$, que é o dobro do esperado. Como ainda queremos $\mathbf{Q}(1) = 1$, não podemos simplesmente redefinir $\mathbf{Q}$ por uma constante multiplicativa. A solução vem na adição de um potencial simplético $\theta \in \Omega^1(\mathcal{M})$

$$\mathbf{Q}(f) = i\hbar X_f - \theta(X_f) + f,$$

⁶Subseção B.4

e temos

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Q}(f), \mathbf{Q}(g)] &= i\hbar \left(i\hbar[X_f, X_g] + [X_f, g] - [X_f, \theta(X_g)] - [\theta(X_f), X_g] + [f, X_g] \right) \\
&= i\hbar \left(i\hbar X_{\{f, g\}} + X_f g - X_g f - X_f \theta(X_g) + X_g \theta(X_f) \right) \\
&= i\hbar \left(i\hbar X_{\{f, g\}} + 2\{f, g\} - d\theta(X_f, X_g) - \theta([X_f, X_g]) \right) \\
&= i\hbar \left(i\hbar X_{\{f, g\}} + 2\{f, g\} - \omega(X_f, X_g) - \theta(X_{\{f, g\}}) \right) \\
&= i\hbar \left(i\hbar X_{\{f, g\}} + 2\{f, g\} - \{f, g\} - \theta(X_{\{f, g\}}) \right) \\
&= i\hbar \left(i\hbar X_{\{f, g\}} - \theta(X_{\{f, g\}}) + \{f, g\} \right) \\
&= i\hbar \mathbf{Q}(\{f, g\}),
\end{aligned}$$

onde $[X, h] : s \mapsto X(hs) - hXs = (Xh)s$. Também obtemos $\mathbf{Q}(1) = 1$. Assim, as regras de quantização **Q1**, **Q2** e **Q3** são satisfeitas. Porém, nem toda variedade simplética admite um potencial global $d\theta = \omega$ e ainda que admitisse, a quantização iria depender do potencial com

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{\theta+d\varphi}(f) &= i\hbar X_f - (\theta + d\varphi)(X_f) - f \\
&= i\hbar X_f - \theta(X_f) + f - X_f \varphi \\
&= \mathbf{Q}^\theta(f) - X_f \varphi
\end{aligned}$$

para qualquer $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$. Porém, se as funções complexas forem apenas representativas de seções de um fibrado e mudarem com as trivializações por $s' = e^{i\varphi/\hbar}s$ teremos

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{\theta+d\varphi}(f)s' &= (i\hbar X_f - \theta(X_f) + f - X_f \varphi)(e^{i\varphi/\hbar}s) \\
&= i\hbar(X_f e^{i\varphi/\hbar})s + i\hbar e^{i\varphi/\hbar} X_f s - e^{i\varphi/\hbar} \theta(X_f)s + f e^{i\varphi/\hbar}s - (X_f \varphi) e^{i\varphi/\hbar}s \\
&= (X_f \varphi) e^{i\varphi/\hbar}s + i\hbar e^{i\varphi/\hbar} X_f s - e^{i\varphi/\hbar} \theta(X_f)s + f e^{i\varphi/\hbar}s - (X_f \varphi) e^{i\varphi/\hbar}s \\
&= e^{i\varphi/\hbar} \mathbf{Q}^\theta(f)s.
\end{aligned}$$

Notando que $i\hbar X_f - \theta = i\hbar \left(X_f + \frac{i}{\hbar} \theta \right)$ tem a forma de uma $U(1)$ -derivada covariante, a estrutura que precisamos é um fibrado de linhas Hermitiano $\mathcal{L}$ com uma $U(1)$ -conexão cujos potenciais de conexão são $\frac{i}{\hbar} \theta$. O espaço de Hilbert a ser utilizado é o de seções L^2 -integráveis $L^2(\mathcal{M}, d\text{vol}_\omega; \mathcal{L})$, substituindo $C_c^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ pelas seções de suporte compacto $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})_c$.

Seja $(\mathcal{M}^{(2n)}, \omega)$ uma variedade simplética. Definimos uma **pré-quantização de** $(\mathcal{M}, \omega)$ como um par $(\mathcal{L}, \nabla)$ onde $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ é um fibrado de linhas Hermitiano e ∇ é uma $U(1)$ -conexão em $\mathcal{L}$ com $R^\nabla = \frac{i}{\hbar} \omega$. Tendo uma pré-quantização, podemos considerar o espaço $L^2(\mathcal{M}, d\text{vol}_\hbar; \mathcal{L})$ como as seções L^2 -integráveis⁷ em $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ com produto interno

$$\langle s_1 | s_2 \rangle_{L^2} := \int_{\mathcal{M}} (s_1 | s_2) \, d\text{vol}_\hbar,$$

⁷Pág. 164.

onde $(\cdot | \cdot) : \mathcal{L} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$ é o produto interno pontual de $\mathcal{L}$ e $\text{dvol}_h = \left(\frac{\omega}{2\pi\hbar}\right)^n$ (ver Prop. 3.3.2 para o motivo da normalização). Para cada $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ definimos a aplicação $\mathbf{P}(f) : \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})_c \rightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})_c$ por

$$\mathbf{P}(f)s := i\hbar \nabla_{X_f} s + fs$$

Os operadores assim definidos são simétricos:

$$\begin{aligned} \langle s_1 | \mathbf{P}(f)s_2 \rangle &= \int_{\mathcal{M}} (s_1 | \mathbf{P}(f)s_2) \text{dvol}_h \\ &= \int_{\mathcal{M}} (s_1 | (i\hbar \nabla_{X_f} + f)s_2) \text{dvol}_h \\ &= \int_{\mathcal{M}} (s_1 | i\hbar \nabla_{X_f} s_2) \text{dvol}_h + \int_{\mathcal{M}} (s_1 | fs_2) \text{dvol}_h \\ &= \int_{\mathcal{M}} i\hbar (-\nabla_{X_f} s_1 | s_2) \text{dvol}_h + \int_{\mathcal{M}} f (s_1 | s_2) \text{dvol}_h \\ &= \int_{\mathcal{M}} (i\hbar \nabla_{X_f} s_1 | s_2) \text{dvol}_h + \int_{\mathcal{M}} (fs_1 | s_2) \text{dvol}_h \\ &= \int_{\mathcal{M}} ((i\hbar \nabla_{X_f} + f)s_1 | s_2) \text{dvol}_h \\ &= \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{P}(f)s_1 | s_2) \text{dvol}_h \\ &= \langle \mathbf{P}(f)s_1 | s_2 \rangle, \end{aligned}$$

já que vale $X(s_1 | s_2) = (\nabla_X s_1 | s_2) + (s_1 | \nabla_X s_2)$ para $U(1)$ -conexões. Definindo $\mathfrak{H} := L^2(\mathcal{M}, \text{dvol}_h; \mathcal{L})$ e $D := \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})_c$, a pré-quantização define um mapa $\mathbf{P} : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Obs}(\mathfrak{H})^D$, que claramente satisfaz as condições de quantização **Q1** e **Q3**.

Proposição 3.3.1. *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Com as notações definidas acima, se $(\mathcal{L}, \nabla)$ é uma pré-quantização de $\mathcal{M}$, o mapa $\mathbf{P} : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Obs}(\mathfrak{H})^D$ é um homomorfismo de álgebras de Lie $\{\cdot, \cdot\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\cdot, \cdot]$.*

Demonstração. Basta notar que

$$R^\nabla(X_f, X_g) = [\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] - \nabla_{[X_f, X_g]} = \frac{i}{\hbar} \omega(X_f, X_g) = \frac{i}{\hbar} \{f, g\}$$

e abrir as definições. □

Assim, o mapa $\mathbf{P}$ satisfaz **Q1**, **Q2** e **Q3**. Antes de seguir com exemplos e mais propriedades vamos analisar as condições de existência para tal estrutura.

Proposição 3.3.2 (Condição de Pré-Quantização). *Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética. Valem as seguintes afirmações:*

- (i) *existe uma pré-quantização para $(\mathcal{M}, \omega)$ se, e somente se, a classe de cohomologia da forma $\frac{\omega}{2\pi\hbar}$ em $\check{H}^2(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ pertence ao subgrupo integral $\check{H}^2(\mathcal{M}; \mathbb{Z})$;*
- (ii) *as escolhas não-isomorfas de pré-quantização são classificadas por $\check{H}^1(\mathcal{M}; S^1)$.*
- (iii) *se $\mathcal{M}$ é simplesmente conexa, a condição de integralidade (i) é equivalente a*

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma} \omega \in \mathbb{Z}$$

para toda 2-superfície fechada orientada $\Sigma \subseteq \mathcal{M}$. Nesse caso, a pré-quantização é única.

Demonstração. (i) Suponha que a classe de $\frac{\omega}{2\pi\hbar}$ em $H_{\text{dR}}^2(\mathcal{M}) \simeq \check{H}^2(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ seja integral, de modo que existe uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in I}$, potenciais simpléticos $\theta_j \in \Omega^1(U_j)$ e funções $a_{jk} \in C^\infty(U_j \cap U_k)$ tais que

$$\begin{aligned} da_{jk}(x) &= \theta_j(x) - \theta_k(x) && \text{para } x \in U_j \cap U_k, \\ a_{jk}(x) + a_{k\ell}(x) + a_{\ell j}(x) &\in 2\pi\hbar\mathbb{Z} && \text{para } x \in U_j \cap U_k \cap U_\ell. \end{aligned}$$

Colocando $\alpha_{jk} = \exp(-ia_{jk}/\hbar) \in C^\infty(U_j \cap U_k, S^1)$ obtemos

$$\alpha_{jk}\alpha_{k\ell}\alpha_{\ell j} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(a_{jk} + a_{k\ell} + a_{\ell j})\right) = 1 \quad \text{em } U_j \cap U_k \cap U_\ell$$

e

$$\frac{i}{\hbar}\theta_j = \frac{i}{\hbar}\theta_k + \alpha_{jk}^{-1}d\alpha_{jk} \quad \text{em } U_k \cap U_j.$$

Assim, o cociclo $\alpha = (\alpha_{jk})$ corresponde a um fibrado de linhas Hermitiano $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ e a família de potenciais $\left\{\frac{i}{\hbar}\theta_j\right\}$ corresponde a uma conexão Hermitiana ∇ em $\mathcal{L}$, cuja curvatura é $\frac{i}{\hbar}\omega$.

Reciprocamente, suponha que existe uma pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$. Dado um cociclo $(g_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow S^1)$ associado a algum atlas de trivializações com abertos contráteis, podemos definir logaritmos $\log g_{jk}$, de modo que as funções

$$z_{jkl} = -\frac{1}{2\pi i} (\log g_{jk} + \log g_{k\ell} + \log g_{\ell j})$$

tem valores inteiros constantes. Como os logaritmos estão definidos além de múltiplos inteiros de $2\pi i$, a classe $[z]$ do cociclo (z_{jkl}) em $\check{H}^2(\mathcal{M}; \mathbb{Z})$ independe dessas escolhas. Como $d(\log g_{jk}) = g_{jk}^{-1}dg_{jk} = i(\theta_j - \theta_k)$, segue que o cociclo $2\pi\hbar z$ é um representante da classe de ω em $\check{H}^2(\mathcal{M}; \mathbb{R})$.

(ii) Dada uma pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$, para qualquer fibrado plano $\mathcal{F}$, a conexão induzida no produto $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}$ tem curvatura $\frac{i}{\hbar}\omega$, e reciprocamente, para qualquer

outra pré-quantização $(\mathcal{L}', \nabla')$ o produto $\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}^{-1}$ é plano. Assim, fixada uma pré-quantização, todas podem ser obtidas por produto tensorial com um fibrado plano, que são classificados por $\check{H}^1(\mathcal{M}; S^1)$.

(iii) A unicidade segue diretamente de (ii). Fixe $x_0 \in \mathcal{M}$ e o conjunto L_{x_0} de triplas (x, λ, γ) onde $x \in \mathcal{M}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ é uma curva suave por partes ligando x_0 a x . Definimos uma relação de equivalência $\simeq$ em L_{x_0} por

$$(x_1, \lambda_1, \gamma_1) \simeq (x_2, \lambda_2, \gamma_2) : \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } \lambda_2 = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \omega\right) \lambda_1$$

onde $\Sigma \subseteq \mathcal{M}$ é uma superfície orientada cujo bordo é $\gamma_1 - \gamma_2$ (γ_1 de x_0 a x_1 e γ_2 de x_1 a x_0). Como $\mathcal{M}$ é simplesmente conexa, tal superfície existe, e o valor da exponencial independe da escolha. O quociente $\mathcal{L}_{x_0} = L_{x_0} / \simeq$ forma um espaço vetorial complexo com as operações óbvias, e $\mathcal{L} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_x$ forma um fibrado de linhas complexo. Trivializações locais são obtidas a partir de potenciais simpléticos. Para mais detalhes, ver [3]. $\square$

N.B. Note que o valor de $\hbar$ é imaterial para a pré-quantização: $(\mathcal{M}, \omega)$ é pré-quantizável se e só se $(\mathcal{M}, \omega/\hbar)$ for pré-quantizável colocando 1 no lugar de $\hbar$ em todas as suas instâncias. Mais precisamente, podemos definir os esquemas de *pré- $\hbar$ -quantizações* com $\hbar \in (0, +\infty)$ e notar que são equivariantes por reescala. $\star$

Exemplo 3.3.1 (Espaço de Fase Canônico). Dada uma variedade $\mathcal{Q}$, vista como espaço de configuração, o espaço de fase $T^*(\mathcal{Q})$ admite uma pré-quantização óbvia dada por

$$\mathcal{L} = T^*(\mathcal{Q}) \times \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \nabla = d + \frac{i}{\hbar} \theta$$

onde $\theta \in \Omega^1(T^*(\mathcal{Q}))$ é a forma de Liouville. Em um sistema de coordenadas canônicas $(q, p) : T_U^*(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, obtemos os operadores

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(q^j) &= i\hbar \nabla_{X_{q^j}} + q^j = i\hbar X_{q^j} - \theta(X_{q^j}) + q^j = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j} + q^j, \\ \mathbf{P}(p_k) &= i\hbar X_{p_k} - \theta(X_{p_k}) + p_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^k} \end{aligned}$$

agindo em $\Gamma_U(\mathcal{L}) = C^\infty(U, \mathbb{C})$. $\blacklozenge$

Exemplo 3.3.2. Dada uma família contável de variedades simpléticas $(\mathcal{M}_j, \omega_j)_{j \in I}$ de mesma dimensão, se todas forem pré-quantizáveis, então a união disjunta $\mathcal{M} = \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{M}_j$, com a estrutura simplética induzida, é pré-quantizável e, se $(\mathcal{L}_j, \nabla_j)$ for pré-quantização de $(\mathcal{M}_j, \omega_j)$, obtemos uma pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla) \rightarrow \mathcal{M}$ por $\mathcal{L}|_{\mathcal{M}_j} := \mathcal{L}_j$ com a derivada covariante também restrita. O espaço de Hilbert obtido se decompõe naturalmente na soma direta $\mathfrak{H} = \bigoplus_{j \in I} \mathfrak{H}_j$ dos L^2 's correspondentes. Em geral, para um espaço de fase não-conexo $(\mathcal{M}, \omega)$, temos uma decomposição do espaço de Hilbert da pré-quantização, indexada pelas componentes conexas de $\mathcal{M}$. $\blacklozenge$

Exemplo 3.3.3. Dadas variedades simpléticas $(\mathcal{M}_j, \omega_j)$, $j = 1, \dots, k$, se cada uma tiver uma pré-quantização $(\mathcal{L}_j, \nabla_j)$, a variedade simplética produto $\mathcal{M} = \prod_{j=1}^k \mathcal{M}_j$,

$\omega = \sum_{j=1}^k \text{proj}_j^* \omega_j$, admite a pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$ dada por

$$\mathcal{L} := \bigotimes_{j=1}^k \text{proj}_j^* \mathcal{L}_j,$$

$$\nabla \left(\bigotimes_{j=1}^k s_j \right) := \sum_{j=1}^k s_1 \otimes \cdots \otimes s_{j-1} \otimes \nabla_j s_j \otimes s_{j+1} \otimes \cdots \otimes s_k.$$

O espaço de Hilbert L^2 obtido se decompõe naturalmente no produto tensorial $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \mathfrak{H}_k$. $\blacklozenge$

A versão clássica da condição de integralidade surge para espaços de fase reduzidos na

Proposição 3.3.3 (Bohr-Sommerfeld). *Seja $(\mathcal{M}', \omega')$ uma variedade pré-simplética com redução $\pi : (\mathcal{M}', \omega') \rightarrow (\mathcal{M}, \omega)$. Se $\omega' = d\theta'$ para alguma $\theta' \in \Omega^1(\mathcal{M}')$ então $(\mathcal{M}, \omega)$ é pré-quantizável se*

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\gamma} \theta' \in \mathbb{Z}$$

para qualquer curva fechada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}'$ contida em uma folha integral de $\ker \omega'$. Se $\mathcal{M}'$ for simplesmente conexa, vale a recíproca.

Demonstração. Vamos demonstrar a implicação. A recíproca parcial segue de modo similar ao item (iii) da Prop. 3.3.2, como em [3].

Suponha que vale a condição. Dado $x \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{F} = \pi^{-1}[x]$ a folha integral de $\ker \omega'$ correspondente. Defina $\mathcal{L}_x$ como o espaço de funções $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$v(y_1) = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma} \theta' \right) v(y_0)$$

para quaisquer $y_0, y_1 \in \mathcal{F}$ e qualquer caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}$ com $\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = y_1$. O valor dessa exponencial está bem-definido uma vez que a integral de θ' por qualquer caminho fechado é um múltiplo de $2\pi\hbar$. Segue que o espaço complexo $\mathcal{L}_x$ é unidimensional. Colocando $\mathcal{L} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_x$, obtemos trivializações locais da seguinte forma: como $\pi : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$ é uma variedade fibrada, para cada $y_0 \in \pi^{-1}[x_0]$ existem seções locais $s : U \rightarrow \mathcal{M}'$ com $s(x_0) = y_0$. Defina $\phi_s : \mathcal{L}_U \rightarrow U \times \mathbb{C}$ onde $\phi_s^{-1}(x, z)$ é a única função em $\mathcal{L}_x$ com $v(s(x)) = z$, $x \in U$.

Considere a conexão ∇' em $\mathcal{M}' \times \mathbb{C}$ com potencial global $\frac{i}{\hbar} \theta'$, i.e.,

$$\nabla'_X f = Xf + \frac{i}{\hbar} \theta'(X) f.$$

Denote $\mathfrak{V} := \{f \in C^\infty(\mathcal{M}', \mathbb{C}) \mid \forall X \in \ker \omega', \nabla'_X f = 0\}$. Temos um isomorfismo $\varphi : \mathfrak{V} \simeq \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ onde $\varphi(f)_x : \pi^{-1}[x] \rightarrow \mathbb{C} : y \mapsto f(y)$. Definimos a conexão ∇ em $\mathcal{L}$ por

$$\nabla_Y v := \varphi(\nabla'_Y \varphi^{-1}(v))$$

onde $Z \in T(\mathcal{M}')$ é tal que $\pi_*(Z) = Y \in T(\mathcal{M})$. Para ver que isso está bem-definido: primeiro, note que $\nabla'_Z \varphi^{-1}(v)$ independe da escolha de Z , já que outra escolha difere por um vetor em $\ker \omega'$; segundo, se $X \in \ker \omega'$ e $f \in \mathfrak{V}$, então $[X, Z] \in \ker \omega'$ e

$$\nabla'_X(\nabla'_Z f) = \nabla'_Z(\nabla'_X f) + \nabla'_{[X, Z]} f - \frac{i}{\hbar} \omega'(X, Z) = 0,$$

de modo que $\nabla'_X(\nabla'_Z f) \in \mathfrak{V}$. Segue diretamente que a curvatura de ∇ é $\frac{i}{\hbar} \omega$. $\square$

Essa demonstração nos dá uma construção (vagamente) mais concreta para a pré-quantização.

Exemplo 3.3.4. Seguindo o Exemplo 3.1.3, um sistema Lagrangiano $L : T(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{R}$ tem um espaço de fase degenerado $(T(\mathcal{Q}), \omega^L)$ que é uma variedade pré-simplética exata, i.e., $\omega^L = d\theta^L$ onde $\theta^L = dL \circ F$ e $F : T(T(\mathcal{Q})) \rightarrow T(T(\mathcal{Q}))$ é o endomorfismo canônico (flip vertical). Em termos de L , a condição de integralidade se escreve

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\gamma} \theta^L = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{F \circ \gamma} dL = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^1 L(F\gamma(t)) dt = 0$$

onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow T(\mathcal{Q})$ é uma curva fechada nas folhas integrais de $\ker \omega^L$. Segue que a redução $(\mathcal{M}', \omega)$ de $(T(\mathcal{Q}), \omega^L)$ sempre admite pré-quantização, cujas seções são identificadas com as funções $f : T(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $Yf + \frac{i}{\hbar} [F(Y)L]f = 0$ para todo $Y \in T(T(\mathcal{Q}))$. $\blacklozenge$

3.4 Quantização Holomorfa

Como vimos na seção anterior, para obter uma quantização $\mathbf{Q} : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{O}bs(\mathfrak{H})$, satisfazendo a condição de irreduzibilidade **Q4** precisamos de um espaço de Hilbert potencialmente menor que o obtido pela pré-quantização. Intuitivamente, as seções de uma pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla) \rightarrow \mathcal{M}$ podem ser pensadas como funções de onda que dependem de ambos q, p , enquanto uma quantização adequada deveria resultar em funções de onda que dependem apenas de q . A ferramenta que separa os dois em um espaço de fase simplético é a polarização.

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética com uma pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$. Dada uma polarização complexa $\mathcal{P}$, dizemos que uma seção $S \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ é **$\mathcal{P}$ -holomorfa** ou **polarizada** se

$$\nabla_{\bar{X}} S = 0$$

para todo $X \in \mathcal{P}$. Denotaremos por

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{P}} := \{S \in L^2(\mathcal{M}, d\text{vol}_h; \mathcal{L}) \mid \forall X \in \mathcal{P}, \nabla_{\bar{X}} S = 0\}$$

o espaço de seções L^2 -integráveis $\mathcal{P}$ -holomorfas, que é um subespaço fechado de $L^2(\mathcal{M}, d\text{vol}_h; \mathcal{L})$. Dois problemas podem ser observados imediatamente para essa definição: nem toda variedade simplética admite polarizações e mesmo que admita, dependendo da polarização, $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ pode ser nulo. Não comentaremos sobre o problema de existência de polarizações (detalhes em [7]).

Sobre a trivialidade de $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ podemos observar o seguinte. Quando $\mathcal{P}$ contém direções reais ($\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \neq \mathbf{0}$) a norma pontual $\|S\|^2 = \langle S|S \rangle$ é uma função constante nas folhas de $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap T(\mathcal{M})$ sempre que S for polarizada, de modo que, se as folhas forem não-compactas e completas, a norma $\|S\|_{L^2} = \int_{\mathcal{M}} \|S\| \, \text{dvol}_h$ só converge para $S = \mathbf{0}$. Por outro lado, se $\mathcal{P}$ for totalmente complexa ($\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} = \mathbf{0}$) e $\mathcal{M}$ compacta, só podem existir seções polarizadas não-nulas se $\mathcal{P}$ for Kähler ([3], cap. 9, seção 1).

Exemplo 3.4.1. Considere um espaço de configurações $\mathcal{Q}$ com o espaço de fase canônico $\mathcal{M} = T^*(\mathcal{Q})$ e a pré-quantização $\mathcal{M} \times \mathbb{C}$, $\nabla = d + \frac{i}{h}\theta$, onde $\theta \in \Omega^1(\mathcal{M})$ é a forma de Liouville. Temos uma polarização real óbvia pelo fibrado vertical $\mathcal{P} = V(T^*(\mathcal{Q}))$, que é adaptada a θ , de modo que as seções polarizadas são exatamente as funções complexas $C_{\mathcal{P}}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ constantes ao longo das fibras $T_x^*(\mathcal{Q})$. Se $\dim \mathcal{Q} > 0$ nenhuma função não-nula em $C_{\mathcal{P}}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ pode ser L^2 -integrável. $\blacklozenge$

Agora vamos ver que dificuldades as funções a serem quantizadas podem apresentar. Mais precisamente, vamos estudar os operadores

$$\mathbf{Q}(f) := i\hbar \nabla_{X_f} + f.$$

Dados $S \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ e $X \in \mathcal{P}$ temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\overline{X}}(\mathbf{Q}(f)S) &= \nabla_{\overline{X}}(i\hbar \nabla_{X_f} S + fS) \\ &= i\hbar \nabla_{\overline{X}} \nabla_{X_f} S + (\overline{X}f)S + f \nabla_{\overline{X}} S \\ &= i\hbar \left[\nabla_{X_f} \nabla_{\overline{X}} S - \nabla_{[\overline{X}, X_f]} S - \frac{i}{h} \omega(\overline{X}, X_f) \right] + \omega(X_f, \overline{X}) + f \nabla_{\overline{X}} S \\ &= i\hbar \nabla_{X_f} + f \nabla_{\overline{X}} S - \nabla_{[\overline{X}, X_f]} S + \omega(\overline{X}, X_f) + \omega(X_f, \overline{X}) \\ &= \mathbf{Q}(f) \nabla_{\overline{X}} S - i\hbar \nabla_{[\overline{X}, X_f]} S. \end{aligned}$$

Vemos que $\mathbf{Q}(f)$ leva seções polarizadas em seções polarizadas se $[\overline{X}, X_f] \in \mathfrak{X}_{\overline{\mathcal{P}}}(\mathcal{M})$, que é o mesmo que $[X, X_f] \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})$ já que X_f é um campo real e $[\overline{X}, X_f] = \overline{[X, X_f]}$. Ou seja, apenas a sub-álgebra

$$\mathcal{O}bs_{\text{class}}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}) := \{f \in C^\infty(\mathcal{M}) \mid [X_f, \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})] \subseteq \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})\},$$

de observáveis cujo fluxo Hamiltoniano preserva $\mathcal{P}$, pode ser diretamente quantizada $\mathbf{Q} : \mathcal{O}bs_{\text{class}}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{O}bs(\mathfrak{H}_{\mathcal{P}})^D$.

Um caso especial em que muitos dos problemas acima são resolvidos é a *quantização holomorfa*. Seja $(\mathcal{M}, \omega, J, (\cdot | \cdot), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ uma variedade de Kähler⁸ e $(\mathcal{L}, \nabla)$ uma pré-quantização para $(\mathcal{M}, \omega)$. Temos a polarização natural dos vetores holomorfos $\mathcal{P} = T(\mathcal{M})_+ = \{X \in T(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} \mid JX = iX\}$, de modo que, uma seção $S \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ é polarizada $\nabla_{\overline{\mathcal{P}}} S = \mathbf{0}$ se e só se for dada localmente por funções holomorfas, e obtemos uma estrutura de fibrado holomorfo em $\mathcal{L}$. Denotamos por $\mathfrak{H}_{\text{hol}}$ o espaço de seções holomorfas L^2 -integráveis.

Quando $\mathcal{M}$ é compacta, o teorema de Montel garante que $\mathfrak{H}_{\text{hol}}$ tem dimensão finita. Mais a frente, veremos que é possível estimar (assintoticamente) a dimensão do espaço de estados quânticos com o volume simplético (Prop. 4.3.1).

⁸Definição na pág. 76.

Exemplo 3.4.2. Consideramos o espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ com a estrutura Kähler Fubini-Study (Exemplo 4.1.5) reescalada $\omega = \hbar\omega_{\text{Fubini-Study}}$. Nas coordenadas homogêneas $w^j = z^j/z^0$, $[z^0 : \dots : z^{n+1}] \in \mathbb{CP}^n$, obtemos um potencial simplético $\theta = i\bar{\partial}K$ onde $K(w, \bar{w}) = \hbar \log(1 + w \cdot \bar{w})$ é um escalar de Kähler. Na trivialização induzida pelo potencial θ , as seções holomorfas da pré-quantização se identificam com funções holomorfas $f(w)$ e homogêneas de grau 1, ou seja, restrições de funcionais lineares. Assim, a quantização holomorfa de $\mathbb{CP}^n$ recupera $\mathbb{C}^{n+1}$. Para mais detalhes, ver exemplo na pág. 189 de [3]. $\blacklozenge$

O exemplo de quantização holomorfa que temos interesse é a quantização de órbitas coadjuntas de grupos compactos, que veremos na Seção 4.1.

3.5 Correção Metaplética

Como vimos na seção anterior, a quantização de variedades Kähler, quando possível, pode ser feita diretamente. O primeiro passo para possibilitar a quantização com polarizações mais gerais é a *correção metaplética*, que consiste em modificar a pré-quantização, afim de obter um produto L^2 adequado para as seções polarizadas. Entretanto, essa correção introduz mais uma restrição na quantização. Cada polarização precisa de uma *estrutura metaplética* para ser possível a correção, porém se a variedade a ser quantizada possuir tal estrutura, podemos induzi-la nas polarizações e seguir com a quantização.

Essa correção também nos leva a considerar um pareamento entre estados quânticos associados a polarizações distintas, que generaliza a transformada de Fourier entre representações coordenadas-momentum. (Seção 3.5.)

$\frac{1}{2}$ -formas

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética e $\mathcal{P}$ uma polarização complexa. Considerando as formas diferenciais complexas⁹ sobre $\mathcal{M}$, dizemos que $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}^k(\mathcal{M})$ é **$\mathcal{P}$ -holomorfa** se $\alpha(X_1, \dots, X_k) = 0$ sempre que algum $X_j \in \overline{\mathcal{P}}$. Ou seja, $\iota_{\overline{X}}\alpha = 0$ para todo $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})$. Em particular, se $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{P}$ e $Y_1, \dots, Y_k \in \overline{\mathcal{P}}$ então

$$\alpha(X_1 + Y_1, \dots, X_k + Y_k) = \alpha(X_1, \dots, X_k).$$

Denotando por $\Omega_{\mathbb{C}}^k(\mathcal{P})$ os mapas k -lineares complexos $\mathcal{P} \times_{\mathcal{M}} \dots \times_{\mathcal{M}} \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, vemos que toda forma $\mathcal{P}$ -holomorfa α define uma $\tilde{\alpha} \in \Omega_{\mathbb{C}}^k(\mathcal{P})$ por restrição a $\mathcal{P}$. Como $\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}} = T(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$, a correspondência $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ é sobrejetiva, com $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ se e só se $(\alpha - \beta)|_{\mathcal{P}} = 0$. Dada $\tilde{\alpha} \in \Omega_{\mathbb{C}}^k(\mathcal{P})$, se $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ preserva $\mathcal{P}$, i.e., $[Z, \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})] = 0$, podemos definir a derivada de Lie

$$\mathcal{L}_Z \tilde{\alpha} := \widetilde{\mathcal{L}_Z \alpha},$$

uma vez que $d(\iota_Z \alpha)$ e $\iota_Z d\alpha$ são ambas $\mathcal{P}$ -holomorfas. Em particular, quando $Z \in \mathfrak{X}_{\overline{\mathcal{P}}}(\mathcal{M})$ obtemos $\mathcal{L}_Z \tilde{\alpha} = \widetilde{\iota_Z d\alpha}$.

Com essa definição em mente, para cada $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ que preserva $\mathcal{P}$ e $\mu \in \Omega_{\mathbb{C}}^k(\mathcal{P})$ temos a derivada de Lie complexa $\mathcal{L}_Z \mu := \mathcal{L}_{\text{Re } Z} \mu + i\mathcal{L}_{\text{Im } Z} \mu$ e satisfazendo a fórmula de Cartan usual $\mathcal{L}_Z \mu = \iota_Z d\mu + d(\iota_Z \mu)$. Quando $Z \in \mathfrak{X}_{\overline{\mathcal{P}}}(\mathcal{M})$ temos $\mathcal{L}_Z \mu = \iota_Z d\mu$.

⁹Exemplo B.2.2.

Para $n = \frac{1}{2} \dim \mathcal{M}$, temos o fibrado determinante $\bigwedge^n \mathcal{P}^*$, cujas seções nos dão formas de volume complexas nas fibras de $\mathcal{P}$. Como $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P} = n$, $\bigwedge^n \mathcal{P}^*$ é um fibrado de linhas complexo sobre $\mathcal{M}$. Definimos uma forma sesquilinear $\langle \cdot | \cdot \rangle : \bigwedge^n \mathcal{P}^* \times_{\mathcal{M}} \bigwedge^n \mathcal{P}^* \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$i^n \langle \mu_1 | \mu_2 \rangle \operatorname{dvol}_h = \overline{\mu_1} \wedge \mu_2 \quad (3.1)$$

onde $\operatorname{dvol}_h = (\omega/2\pi\hbar)^n$. Quando $\mathcal{P}$ é uma polarização totalmente complexa, essa forma é um produto pseudo-Hermitiano, que é não-negativo, positivo ou não-degenerado caso $\mathcal{P}$ o seja.

Um **fibrado de $\frac{1}{2}$ -formas de volume** para $\mathcal{P}$ é um fibrado de linhas complexo $\sqrt{\det}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{M}$ que é raiz quadrada do determinante $\sqrt{\det}(\mathcal{P})^{\otimes 2} = \bigwedge^n \mathcal{P}^*$. As seções de $\sqrt{\det}(\mathcal{P})$ são chamadas de **$\frac{1}{2}$ -formas de volume sobre $\mathcal{P}$** e denotamos $\sqrt{\Omega_{\mathbb{C}}}(\mathcal{P}) := \Gamma_{\mathcal{M}}(\sqrt{\det}(\mathcal{P}))$. Como vemos ao fim do Apêndice A.7, a existência de raiz quadrada de $\bigwedge^n \mathcal{P}^*$ está condicionada a uma classe de cohomologia característica de $\mathcal{P}$ em $\check{H}^2(\mathcal{M}; \mathbb{Z}_2)$ ser nula e escolhas inequivalentes de raiz estão parametrizadas por classes em $\check{H}^1(\mathcal{M}; \mathbb{Z}_2)$.

N.B. Não devemos confundir $\frac{1}{2}$ -formas com $\frac{1}{2}$ -densidades. Lembrando do isomorfismo natural $\operatorname{Vol}_{\mathbb{C}}^{1/2}(\mathbb{V})^{\otimes 2} = \operatorname{Vol}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{V})$ e que densidades são, essencialmente, o valor absoluto de formas de volume, vemos que as seções de $\operatorname{Vol}_{\mathbb{C}}^{1/2}(\mathcal{P})$ e $\sqrt{\det}(\mathcal{P})$ diferem por um fator unitário, localmente. Esse fator é o que vem da condição cohomológica citada acima, que é uma condição mais fina que orientabilidade das folhas reais de $\mathcal{P}$. ★

Dadas duas $\frac{1}{2}$ -formas $\nu_1, \nu_2 \in \sqrt{\Omega_{\mathbb{C}}}(\mathcal{P})$ obtemos uma n -forma $\nu_1 \nu_2 \in \Omega_{\mathbb{C}}^n(\mathcal{P})$ dada pelo produto tensorial, ou localmente pelo produto usual $C^\infty(U, \mathbb{C}) \times C^\infty(U, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C})$ em trivializações. Por outro lado, dada $\mu \in \Omega_{\mathbb{C}}^n(\mathcal{P})$ temos uma única $\sqrt{\mu} \in \sqrt{\Omega_{\mathbb{C}}}(\mathcal{P})$, fixada pela escolha de $\sqrt{\det}(\mathcal{P})$. Podemos definir uma derivada de Lie em $\sqrt{\det}(\mathcal{P})$ satisfazendo

$$\mathcal{L}_Z \nu^2 = 2(\mathcal{L}_Z \nu) \nu.$$

Similarmente, temos uma derivada covariante natural em $\sqrt{\det}(\mathcal{P})$ determinada também pela fórmula

$$\iota_Z d(\nu^2) = 2(\nabla_Z \nu) \nu.$$

Ainda, quando $\mathcal{P}$ é uma polarização não-negativa podemos definir um pareamento sesquilinear $\sqrt{\det}(\mathcal{P}) \times_{\mathcal{M}} \sqrt{\det}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle \nu_1 | \nu_2 \rangle := \sqrt{\langle \nu_1^2 | \nu_2^2 \rangle},$$

que é não-negativo, positivo ou não-degenerado conforme $\mathcal{P}$ o for.

Supondo que as estruturas envolvidas existam, fixe em $(\mathcal{M}, \omega)$ uma pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$ e uma polarização fortemente admissível¹⁰ $\mathcal{P}$ com fibrado de $\frac{1}{2}$ -formas $\sqrt{\det}(\mathcal{P})$. Definimos o **fibrado de quantização geométrica** $(\mathcal{L} \otimes \sqrt{\det}(\mathcal{P}), \nabla)$ com a derivada covariante satisfazendo a regra de Leibniz

$$\nabla_X(s\nu) = (\nabla_X s)\nu + s(\nabla_X \nu).$$

¹⁰Definição na pág. 74.

As **$\mathcal{P}$ -funções de onda** são as seções $S \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L} \otimes \sqrt{\det}(\mathcal{P}))$ com

$$\nabla_{\overline{X}} S = \mathbf{0} \text{ para todo } X \in \mathcal{P}.$$

Como $\mathcal{P}$ é fortemente admissível, o espaço de folhas $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ é uma variedade suave, $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap T(\mathcal{M})$. Suponha que $\nu_1, \nu_2 \in \sqrt{\Omega_{\mathbb{C}}}(\mathcal{P})$ sejam $\mathcal{P}$ -holomorfas, i.e., $\nabla_{\overline{X}} \nu_j = \mathbf{0}$ para $X \in \mathcal{P}$. A distribuição $\mathcal{D}$ é gerada por campos Hamiltonianos, cujos fluxos preservam ω , $\mathcal{P}$, ν_1 , ν_2 . Assim, a n -forma $\overline{\nu_1} \nu_2$ é invariante por $\mathcal{D}$ e induz uma densidade complexa $\mu(\nu_1, \nu_2)$ em $\mathcal{M}/\mathcal{D}$. Analogamente, dadas seções $\mathcal{P}$ -holomorfas $s_1, s_2 \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$, a função $\langle s_1 | s_2 \rangle$ desce para $\mathcal{M}/\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$. Como toda seção $S \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L} \otimes \sqrt{\det}(\mathcal{P}))$ é, localmente, um produto $S = s\nu$, podemos definir o pareamento L^2 por

$$\langle\langle S_1 | S_2 \rangle\rangle_{L^2} := \int_{\mathcal{M}/\mathcal{D}} \langle s_1 | s_2 \rangle \mu(\nu_1, \nu_2).$$

Quando $\mathcal{P}$ é não-negativa e não-degenerada, o pareamento acima é um produto interno no espaço

$$D := \left\{ S \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L} \otimes \sqrt{\det}(\mathcal{P}))_c \mid \forall X \in \mathcal{P}, \nabla_{\overline{X}} S = \mathbf{0} \right\}$$

de $\mathcal{P}$ -funções de onda com suporte compacto. O **espaço de Hilbert $\mathfrak{H}_{\text{meta}}(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{P})$ de quantização metaplética** é o completamento de D com o produto interno L^2 acima. Dada $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ definimos o operador quântico $\mathbf{Q}(f)$ localmente por

$$\mathbf{Q}(f)(s\nu) := (i\hbar \nabla_{X_f} s + fs)\nu - i\hbar s \mathcal{L}_{X_f} \nu.$$

Assim como no caso holomorfo, $\mathbf{Q}(f)$ deixa D invariante quando $\mathcal{P}$ é preservada pelo fluxo de f . A subálgebra de observáveis quantizáveis é

$$\mathcal{O}bs_{\text{class}}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}) := \{f \in C^\infty(\mathcal{M}) \mid [X_f, \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})] \subseteq \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})\}$$

e a **quantização metaplética** é o mapa $\mathbf{Q} : \mathcal{O}bs_{\text{class}}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{O}bs(\mathfrak{H}_{\text{meta}}(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{P}))^D$.

Exemplo 3.5.1 (Espaço de Fase Canônico). Dada uma variedade simplética $(\mathcal{M}^{(2n)}, \omega)$, suponhamos que temos uma polarização real $\mathcal{P} < T(\mathcal{M})$ fortemente admissível, de modo que $\mathcal{Q} = \mathcal{M}/\mathcal{P}$ é uma variedade suave. Nesse caso, o mapa de restrição $\alpha \mapsto \alpha|_{\mathcal{P}}$ nos dá um isomorfismo $\pi^* (\bigwedge^n T^*(\mathcal{Q})^{\mathbb{C}}) \simeq \bigwedge^n (\mathcal{P}^{\mathbb{C}})^*$, onde $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}$ é o mapa quociente. Se $\mathcal{Q}$ for orientável, $\bigwedge^n T^*(\mathcal{Q})^{\mathbb{C}}$ é trivial, e portanto existe raiz quadrada para $\sqrt{\det}(\mathcal{P}^{\mathbb{C}})$.

Em particular, se $\mathcal{M} = T^*(\mathcal{Q})$ é o espaço de fase canônico e $\mathcal{P} = V(T^*(\mathcal{Q}))$ a polarização vertical, um elemento de volume $d\text{vol}$ em $\mathcal{Q}$ define uma trivialização global de $\bigwedge^n (\mathcal{P}^{\mathbb{C}})^*$. Escolhendo a pré-quantização trivial como no Exemplo 3.3.1, as seções polarizadas $S \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ são constantes nas fibras, ou seja, $S = \pi^* s$ com $s \in C^\infty(\mathcal{Q}, \mathbb{C})$. O produto L^2 é dado por

$$\langle\langle S_1 | S_2 \rangle\rangle_{L^2} = \int_{\mathcal{Q}} \overline{s_1} s_2 d\text{vol}$$

e os observáveis clássicos quantizáveis $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ são funções afins na fibras

$$f(\alpha) = u(\pi(\alpha)) + \theta_\alpha(X) = (\pi^* u)(\alpha) + (\pi^* \alpha)(X)$$

onde $u \in C^\infty(\mathcal{Q})$ e $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{Q})$ definem f univocamente. O observável quântico $\mathbf{Q}(f)$ é dado por

$$\mathbf{Q}(f)(S) = \pi^* \left[-i\hbar Xs + \left(u + \frac{1}{2} \operatorname{div} X \right) s \right]$$

onde $S = \pi^*s$ e a divergência é definida por $\mathcal{L}_X \operatorname{dvol} = (\operatorname{div} X) \operatorname{dvol}$. Escolhendo coordenadas de modo que $\operatorname{dvol} = dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n$ localmente, obtemos

$$\mathbf{Q}(q^j)S = q^j S \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}(p_k)S = -i\hbar \frac{\partial S}{\partial q^k}$$

que nos dão as relações de comutação canônicas. ◆

Estrutura Metaplética

Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético de dimensão $2n$ e $\omega^\mathbb{C}$ a complexificação de ω . Um **subespaço Lagrangiano não-negativo** (resp. **positivo**) de $\mathbb{V}^\mathbb{C}$ é um subespaço $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{V}$, que é Lagrangiano em relação a ω , i.e. $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{P}$, e $i\omega^\mathbb{C}(\bar{v}, v) \geq 0$ (resp. $i\omega^\mathbb{C}(\bar{v}, v) > 0$) para todo $v \in \mathcal{P}$. Denotamos por $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \omega)$ (resp. $\mathcal{L}^+(\mathbb{V}, \omega)$) o conjunto de subespaços Lagrangianos não-negativos (resp. positivos) de $(\mathbb{V}^\mathbb{C}, \omega^\mathbb{C})$. Não é difícil ver que $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \omega)$ é uma variedade complexa com bordo¹¹ e dimensão complexa n^2 , cujo interior é $\mathcal{L}^+(\mathbb{V}, \omega)$ e o bordo $\partial\mathcal{L}(\mathbb{V}, \omega)$ é formado pelos subespaços Lagrangianos realizáveis, i.e., $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0^\mathbb{C}$ com $\mathcal{P}_0 < \mathbb{V}$ Lagrangiano.

Para uma variedade simplética $(\mathcal{M}^{(2n)}, \omega)$ escrevemos $\mathcal{L}_x(\mathcal{M}, \omega) := \mathcal{L}(T_x(\mathcal{M})^\mathbb{C})$ para cada $x \in \mathcal{M}$. Definimos o **fibrado de Lagrangianos não-negativos** por $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega) = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_x(\mathcal{M}, \omega)$, que é um subfibrado do Grassmaniano complexo $\operatorname{Gr}^n(T(\mathcal{M})^\mathbb{C})$. Uma seção $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega)$ é nada mais do que uma distribuição suave de subespaços Lagrangianos não-negativos. Em particular, uma polarização não-negativa é uma seção de $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega)$. As definições análogas seguem para $\mathcal{L}^+(\mathcal{M}, \omega)$.

Sobre $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega)$ temos o **fibrado de linhas canônico** $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega)$ cujas fibras são $\mathcal{K}_{(x, \mathcal{P})} := \bigwedge^n \mathcal{P}^*$. Dada uma seção $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega)$, o pullback $\sigma^*\mathcal{K}$ é o fibrado $\bigwedge^n \sigma^* = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \bigwedge^n \sigma_x^*$. Temos um pareamento sesquilinear $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{K} \times_{\mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega)} \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ definido como na equação (3.1), que é não-negativo e sua restrição a $\mathcal{L}^+(\mathcal{M}, \omega)$ é positiva.

Uma **estrutura metaplética** para $(\mathcal{M}, \omega)$ é uma escolha de raiz quadrada $\sqrt{\mathcal{K}}$ para o fibrado de linhas canônico de $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega)$. Dada uma seção $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega)$, o pullback $\sigma^*\sqrt{\mathcal{K}}$ é uma raiz quadrada de $\sigma^*\mathcal{K} = \bigwedge^n \sigma^*$. Ou seja, uma estrutura metaplética nos permite obter raízes de $\bigwedge^n \mathcal{P}^*$ para todas as polarizações não-negativas de uma só vez.

N.B. Uma estrutura metaplética em $(\mathcal{M}, \omega)$, propriamente dita, é um fibrado principal $\operatorname{Mp}(2n, \mathbb{C}) \curvearrowright \operatorname{MpFr}^\mathbb{C}(\mathcal{M}, \omega) \rightarrow \mathcal{M}$ que é levantamento do fibrado de referenciais simpléticos complexos $\operatorname{Sp}(2n, \mathbb{C}) \curvearrowright \operatorname{SpFr}^\mathbb{C}(\mathcal{M}, \omega) \rightarrow \mathcal{M}$ pelo duplo recobrimento $\operatorname{Mp}(2n, \mathbb{C}) \rightarrow \operatorname{Sp}(2n, \mathbb{C})$ (grupo metaplético), cuja existência é condicionada a uma classe, característica de $(\mathcal{M}, \omega)$, em $\tilde{H}^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ ser nula. O interessante é que uma estrutura metaplética equivale a escolha de raiz $\sqrt{\mathcal{K}}$, por meio de raízes do cociclo de Čech associado a $\mathcal{K}$. Mais detalhes sobre como estruturas metapléticas se relacionam à quantização podem ser encontrados em [4]. ★

¹¹É a pré-imagem de $[0, +\infty)$ por $v \mapsto i\omega^\mathbb{C}(\bar{v}, v)$ dentro do Grassmaniano $\operatorname{Gr}^n(\mathbb{V}^\mathbb{C})$ de subespaços de dimensão n .

Pareamento BKS e a Equação de Schrödinger

A correção metaplética ainda nos permite definir um pareamento entre quantizações associadas a polarizações distintas.

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética com pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$ e uma estrutura metaplética. Dadas polarizações não-negativas $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, considere os espaços $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ e $\mathcal{E} := \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, de modo que

$$\overline{\mathcal{P}_1} \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D}^\mathbb{C} \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{P}_1} + \mathcal{P}_2 = \mathcal{E}^\mathbb{C}.$$

O par de polarizações $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ é dito **fortemente admissível** quando $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ são distribuições fortemente integráveis, i.e., os espaços de folhas $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ e $\mathcal{M}/\mathcal{E}$ são variedades quociente. Nesse caso, dadas $\frac{1}{2}$ -formas polarizadas $\nu_1 \in \sqrt{\Omega_\mathbb{C}}(\mathcal{P}_1)$ e $\nu_2 \in \sqrt{\Omega_\mathbb{C}}(\mathcal{P}_2)$, podemos definir uma densidade complexa $\mu(\nu_1, \nu_2)$ sobre $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ localmente por $f_{12} = \overline{f_1} f_2$, onde f_1, f_2, f_{12} são as expressões locais de $\nu_1, \nu_2, \mu(\nu_1, \nu_2)$ em trivializações em seus respectivos fibrados (mais detalhes em [4]). Para os fibrados de pré-quantização corrigidos $\mathcal{L} \otimes \sqrt{\det}(\mathcal{P}_1)$ e $\mathcal{L} \otimes \sqrt{\det}(\mathcal{P}_2)$ temos um pareamento de seções polarizadas dado por

$$\text{BKS}(S_1|S_2) := \int_{\mathcal{M}/\mathcal{D}} \langle s_1 | s_2 \rangle \mu(\nu_1, \nu_2)$$

com $S_j = s_j \otimes \nu_j$, $j = 1, 2$. Vemos que, quando ambas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são positivas, a integral é sobre $\mathcal{M}$. Em geral, a integral pode não convergir. Condições podem ser impostas sobre as polarizações para garantir a convergência (ver [4] e [3]). Supondo que a convergência é garantida, estendendo aos L^2 's, obtemos o mapa $\text{BKS} : \mathfrak{H}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}_1) \times \mathfrak{H}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}_2) \rightarrow \mathbb{C}$ chamado de **pareamento Blattner-Konstant-Sternberg**. Também obtemos o **núcleo BKS** que é um mapa $K : \mathfrak{H}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}_2) \rightarrow \mathfrak{H}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}_1)$ tal que $\langle\langle S_1 | K S_2 \rangle\rangle = \text{BKS}(S_1|S_2)$. Além dos problemas de convergência já citados, também não há garantia, em geral, de que o pareamento BKS seja sesquilinear, valendo apenas no limite $\hbar \rightarrow 0$ (ver Seção 4.3).

Uma ideia importante no processo de quantização canônica é a correspondência entre a evolução de estados clássica e a evolução de funções de onda, por meio da *equação de Schrödinger*. Mais precisamente, dada uma observável clássica $H \in C^\infty(\mathcal{M})$, a evolução de qualquer grandeza $T \in \mathcal{F}(T(\mathcal{M}))$ relevante ao sistema é dado pelo fluxo Hamiltoniano $\mathcal{F}(\Phi_H^t)T$. Em particular, qualquer movimento do sistema $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ deve satisfazer a EDO $\dot{\gamma} = \gamma^* X_H$.

Fixada H , suponhamos agora que $(\mathcal{M}, \omega)$ admite uma polarização não-negativa $\mathcal{P}_0$ tal que $\mathcal{P}_t := (\Phi_H^t)^\mathbb{C}[\mathcal{P}_0]$ é ainda uma polarização não-negativa com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ temos um mapa $\widetilde{\Phi}_H^t : \mathcal{L} \otimes \sqrt{\det}(\mathcal{P}_t) \rightarrow \mathcal{L} \otimes \sqrt{\det}(\mathcal{P}_0)$ dado pelo pullback do fluxo Φ_H^t . Dada uma função de onda $S_0 \in \mathfrak{H}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}_0)$ sua evolução temporal $S_t \in \mathfrak{H}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}_0)$ no tempo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ é dada por

$$S_t := K_t \widetilde{\Phi}_H^t S_0$$

onde $K_t : \mathfrak{H}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}_t) \rightarrow \mathfrak{H}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}_0)$ é o núcleo BKS. Em geral, não há garantia de que a evolução temporal $U_H(t) : \mathfrak{H}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}_0) \rightarrow \mathfrak{H}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P}_0)$ assim definida seja unitária. Quando o fluxo de H preserva a polarização $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$, $K = \text{id}$ e $\widetilde{\Phi}_H^t$ é a

família de automorfismos de $\mathcal{L} \otimes \sqrt{\det}(\mathcal{P})$ gerados pelo operador diferencial $\frac{1}{i\hbar} \mathbf{Q}(H)$, de modo que obtemos a **equação de Schrödinger**

$$i\hbar \frac{d}{dt} S_t = \mathbf{Q}(H) S_t.$$

Com esse processo re-obtemos Hamiltonianos lineares no momento para polarizações reais.

Exemplo 3.5.2. Considere uma variedade $\mathcal{Q}^{(n)}$ com uma métrica Riemanniana η , como no Exemplo 3.1.4. O Hamiltoniano $H(\alpha) = \frac{1}{2}\eta^*(\alpha, \alpha) + \pi^*V(\alpha)$ é quadrático nas fibras de $T^*(\mathcal{Q})$ e portanto não preserva a polarização vertical. Porém, a prescrição de Schrödinger (Seção 3.5) nos dá uma evolução temporal que é gerada (em primeira ordem) por um operador

$$\mathbf{Q}(H) = -\frac{\hbar^2}{2} \left(\nabla^2 - \frac{1}{6}R \right) + \pi^*V$$

onde ∇^2 é o Laplaciano da métrica induzido em $C^\infty(\mathcal{Q}, \mathbb{C})$ e $R \in C^\infty(\mathcal{Q})$ é o escalar de Ricci. Para detalhes, ver [3]. ◆

3.6 Comentário sobre Functorialidade

Apesar das complicações que podem surgir para garantir que o processo de quantização geométrica esteja bem posto, ao fim, obtemos uma correspondência entre certas variedades simpléticas e espaços de Hilbert (equipados com subespaço denso). Pode-se perguntar se essa correspondência é functorial. Infelizmente, a categoria de variedades simpléticas com morfismos sendo mapas simpléticos é pequena para ser domínio de tal functor. Seguindo os trabalhos de Alan Weinstein, para entender a quantização geométrica como um functor precisamos considerar a “**categoria**” **simplética**, cujos objetos são variedades simpléticas e os morfismos são *relações Lagrangianas* $\mathcal{M}_1 \rightsquigarrow \mathcal{M}_2$, i.e., subvariedades Lagrangianas de $\overline{\mathcal{M}_1} \times \mathcal{M}_2$. As aspás em *categoria* vêm do fato de que as relações Lagrangianas não são fechadas por composição, e não podemos chamar tal estrutura de uma categoria propriamente dita. Mais sobre a functorialidade da quantização geométrica e outros aspectos estruturais podem ser encontrados em [13] e [6].

Capítulo 4

Aplicações

Como a quantização geométrica tenta unificar vários modelos de 1ª quantização, alguns cálculos clássicos associados a esses modelos puderam ser reobtidos de modo sistemático sob a linguagem da quantização geométrica. Neste capítulo apresentamos alguns exemplos.

4.1 Quantização de Grupos Compactos

Uma ferramenta muito importante na Teoria de Representações de grupos de Lie é o *método das órbitas*, desenvolvido por Kirillov. O método descreve uma correspondência entre representações unitárias irredutíveis de um grupo $\mathcal{G}$ e uma classe de órbitas da ação coadjunta. O método pode ser entendido sob a linguagem de Teoria de Lie pura ou como um caso particular do processo de quantização holomorfa, fazendo uma ponte entre os formalismos.

As referências seguidas para esse assunto foram [2], [3] e [26].

Geometria de Órbitas Coadjuntas

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Lembrando do Exemplo 2.2.3, o espaço dual $\mathfrak{g}^*$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita admite uma estrutura de Poisson linear natural dada por

$$\{f, g\}(\eta) = \eta[\text{grad } f_\eta, \text{d grad } g_\eta], \quad \forall \eta \in \mathfrak{g}^*, f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$$

onde $\text{grad } f : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{**}$ é a função correspondente ao diferencial $\text{d}f$ por meio da identificação $T^*(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^{**}$. Essa estrutura de Poisson também é conhecida como **estrutura Lie-Poisson**. Desta seção em diante, sempre vamos assumir que $\mathfrak{g}^*$ está equipado com essa estrutura. O bivector Π correspondente a esse colchete, visto como mapa $\wedge^2 T^*(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}^* \times (\wedge^2 \mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{R}$, é $\Pi_\eta(\xi \wedge \zeta) = \eta([\xi, \zeta])$.

Em $\mathfrak{g}^*$ temos a representação coadjunta $\text{coAd}(g)\eta = \text{Ad}(g^{-1})^T \eta = \eta \circ \text{Ad}(g^{-1})$, que vamos denotar simplesmente por $\mathcal{K} := \text{coAd}$. Dado $\eta \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ a **órbita coadjunta passando por η** é o espaço homogêneo $\mathcal{O}_\eta := \{\mathcal{K}(g)\eta \mid g \in \mathcal{G}\}$, i.e., é um ponto de $(\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})/\mathcal{K}$. Temos uma projeção $\sigma_\eta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_\eta$ dada pelo mapa de avaliação $\sigma_\eta(g) := \mathcal{K}(g)\eta$. Pela Prop. 1.5.3, temos um isomorfismo $\mathcal{G}/\text{Stab}(\eta) \simeq \mathcal{O}_\eta$

comutando as projeções

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G} & \\ \swarrow & & \searrow \sigma_\eta \\ \mathcal{G}/\text{Stab}(\eta) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{O}_\eta \end{array}$$

onde $\text{Stab}(\eta)$ age à direita em $\mathcal{G}$. O mapa $\mathcal{G} \xrightarrow{\sigma_\eta} \mathcal{O}_\eta$ é um fibrado principal com grupo de estrutura $\text{Stab}(\eta)$. A fibra sobre $\nu = \mathcal{K}(g)\eta$ é a classe lateral $\sigma_\eta^{-1}[\nu] = g\text{Stab}(\eta)$.

Para definir a estrutura simplética em $\mathcal{O}_\eta$ precisamos de algumas preparações. Considere o bivector $\Pi_\eta(\xi, \zeta) = \eta([\xi, \zeta])$ da estrutura de Lie-Poisson em $\mathfrak{g}^*$. Note que, visto como forma bilinear sobre $\mathfrak{g}$, Π_η é invariante por $\text{Stab}(\eta)$ e que

$$\Pi_\eta(\xi, \cdot) = \eta \circ \text{ad}(\xi) = -\mathcal{K}'(\xi)\eta = 0$$

para qualquer $\xi \in \mathfrak{stab}(\eta)$. Como $T_\eta(\mathcal{O}_\eta) = \{\mathcal{K}'(\xi)\eta \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$, definimos a forma $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O}_\eta)$ por

$$\omega_\eta(\mathcal{K}'(\xi)\eta, \mathcal{K}'(\zeta)\eta) := \eta([\xi, \zeta]) = \Pi_\eta(\xi, \zeta)$$

que está bem-definida já que $\mathcal{K}'(\xi_1)\eta = \mathcal{K}'(\xi_2)\eta \iff \xi_1 - \xi_2 \in \mathfrak{stab}(\eta)$. O mesmo argumento mostra que ω é não-degenerada.

Proposição 4.1.1. *A forma ω definida em $\mathcal{O}_\eta$ é fechada, i.e., $d\omega = 0$.*

Demonstração. Considere o pullback $\sigma_\eta^*\omega \in \Omega^2(\mathcal{G})$, que vemos ser

$$\begin{aligned} (\sigma_\eta^*\omega)_g(X, Y) &= \omega_{\mathcal{K}(g)\eta}(\mathcal{K}'(g^{-1}X)\mathcal{K}(g)\eta, \mathcal{K}'(g^{-1}Y)\mathcal{K}(g)\eta) \\ &= \omega_{\eta \text{Ad}(g^{-1})}(\eta \text{Ad}(g^{-1})\text{ad}(g^{-1}X), \eta \text{Ad}(g^{-1})\text{ad}(g^{-1}Y)) \\ &= \eta \text{Ad}(g^{-1})[\Theta(X), \Theta(Y)] \\ &= \eta([\Theta(Xg), \Theta(Yg)]) \end{aligned}$$

onde $\Theta \in \Omega^1(\mathcal{G}; \mathfrak{g})$ é a forma de Maurer-Cartan. Vemos que $\sigma_\eta^*\omega$ é invariante à esquerda. Não só isso, como $d\Theta = -\Theta([\cdot, \cdot])$, segue que $(\sigma_\eta^*\omega)_g = -\mathcal{K}(g)\eta \circ d\Theta = -d(\mathcal{K}(g)\eta \circ \Theta)$. Como σ_η é uma submersão, o mapa $\sigma_\eta^*: \Omega^\bullet(\mathcal{O}_\eta) \rightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{G})$ é injetivo, de modo que

$$\sigma_\eta^*(d\omega) = d(\sigma_\eta^*\omega) = -d^2(\mathcal{K}(g)\eta \circ \Theta) = 0$$

implica em $d\omega = 0$. □

Vemos que o par $(\mathcal{O}_\eta, \omega)$ é uma variedade simplética. Dualizando a inclusão $T_\eta(\mathcal{O}_\eta) \rightarrow \mathfrak{g}^*$ obtemos o mapa de restrição $\mathfrak{g} \rightarrow T_\eta^*(\mathcal{O}_\eta)$, onde vemos os elementos da álgebra como funcionais sobre $\mathfrak{g}^*$. Segue que o isomorfismo $(-)^^\omega: T_\eta(\mathcal{O}_\eta) \rightarrow T_\eta^*(\mathcal{O}_\eta)$ associa $\mathcal{K}'(\xi)\eta$ a $\xi|_{T_\eta(\mathcal{O}_\eta)}$. Esse fato, junto com a fórmula que define ω , garantem que a forma simplética associada ao bivector Π é ω , onde $T_\eta(\mathcal{O}_\eta)$ é precisamente o espaço característico $\mathcal{C}_\eta(\Pi)$. Assim, $\mathcal{O}_\eta$ contém a folha simplética de $(\mathfrak{g}^*, \Pi)$ passando por η , que é a componente conexa $\mathcal{C}_\eta(\Pi)$. Em geral, temos uma projeção entre quocientes $\mathfrak{g}^*/\Pi \rightarrow \mathfrak{g}^*/\mathcal{K}$. Quando $\mathcal{G}$ é conexo, $\mathcal{O}_\eta$ é exatamente a folha simplética e $\mathfrak{g}^*/\Pi = \mathfrak{g}^*/\mathcal{K}$ é a folheação simplética.

Também podemos obter a estrutura simplética na órbita $\mathcal{O}_\eta$ por meio de uma redução pré-simplética (ver pág. 2.4.9).

Para $\eta \in \mathfrak{g}^*$, consideramos a 1-forma $\Theta^\eta := -\mathcal{K}(\cdot)\eta \circ \Theta$ e a variedade pré-simplética $(\mathcal{G}, d\Theta^\eta)$. A forma simplética na órbita $\mathcal{O}_\eta$, essencialmente, é imagem de $d\Theta^\eta$ pelo mapa de órbita $\sigma_\eta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_\eta$. Notando que

$$\ker d\Theta^\eta = \langle X^\xi \in \mathfrak{X}_L(\mathcal{G}) \mid \xi \in \mathfrak{stab}(\eta) \rangle,$$

vemos que as folhas integrais de $\ker d\Theta^\eta$ são os cosets $g\text{Stab}(\eta)^0$ da componente conexa da identidade no estabilizador, e a redução $\pi_\eta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}_\eta$ nos dá a variedade simplética $\mathcal{M}_\eta := \mathcal{G}/\text{Stab}(\eta)^0$. A inclusão $\text{Stab}(\eta)^0 \subseteq \text{Stab}(\eta)$ nos dá uma projeção

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G} & \\ \pi_\eta \swarrow & & \searrow \sigma_\eta \\ \mathcal{M}_\eta & \xrightarrow{\tilde{\pi}_\eta} & \mathcal{O}_\eta \end{array}$$

que é um recobrimento — localmente temos $\tilde{\pi}_\eta^{-1}[U] \simeq \bigsqcup_{\pi_0(\text{Stab}(\eta))} U$ — e preserva as estruturas simpléticas. Identificando $\pi_0(\text{Stab}(\eta)) \simeq \text{Stab}(\eta)/\text{Stab}(\eta)^0$, o recobrimento $\mathcal{M}_\eta \rightarrow \mathcal{O}_\eta$ se torna um $\pi_0(\text{Stab}(\eta))$ -fibrado principal.

Exemplo 4.1.1. Considere o grupo $\text{SO}(3)$. Identificando $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)^*$ pelo produto interno do traço, a representação coadjunta é simplesmente a ação usual por rotações $\text{SO}(3) \curvearrowright \mathbb{R}^3$, cujas órbitas são esferas $S^2(r) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\}$, $r \in [0, +\infty)$. Para $x \neq \mathbf{0}$, o estabilizador $\text{Stab}(x)$ é identificado com $\text{SO}(2)$ pelas rotações em $\{x\}^\perp$. Para $r \neq 0$, a forma simplética da órbita $S^2(r)$ é $\omega_r = (1/r) \text{dvol}_r$, onde $\text{dvol}_r = (dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx)|_{S^2(r)}$ é a forma de volume em $S^2(r)$.

Como a ação adjunta de $\text{SU}(2)$ em $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$ se fatora pelo recobrimento $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$, as órbitas coadjuntas são as mesmas. Em termos das coordenadas complexas

$$\begin{pmatrix} z^0 & z^1 \\ -\bar{z}^1 & \bar{z}^0 \end{pmatrix} \mapsto (z^0, z^1)$$

em $\text{SU}(2) \simeq S^3 \subset \mathbb{C}^2$, as formas definidas por $\eta = (0, 0, r) \in \mathbb{R}^3$ são

$$\begin{aligned} \Theta^\eta &= ir(z^0 d\bar{z}^0 + z^1 d\bar{z}^1 - \bar{z}^0 dz^0 - \bar{z}^1 dz^1), \\ d\Theta^\eta &= 2ir(dz^0 \wedge d\bar{z}^0 + dz^1 \wedge d\bar{z}^1). \end{aligned}$$

O mapa de órbita $\text{SU}(2) \rightarrow \mathcal{O}_\eta$, que também é o mapa de redução, é dado pela fibração de Hopf

$$\begin{aligned} &: S^3 \rightarrow S^2(r) \\ &: (z^0, z^1) \mapsto r(z^1 \bar{z}^0 + z^0 \bar{z}^1, iz^1 \bar{z}^0 - iz^0 \bar{z}^1, |z^0|^2 - |z^1|^2). \end{aligned}$$

As fibras da redução são os círculos $\{e^{it}(z^0, z^1) \in S^3 \mid t \in [0, 2\pi]\}$. ◆

Ações de Poisson

Nesta parte vamos entender onde as órbitas coadjuntas de $\mathcal{G}$ se encaixam em relação a outros sistemas que admitam $\mathcal{G}$ como simetrias. Mais precisamente, as órbitas coadjuntas são objetos terminais em uma certa categoria de $\mathcal{G}$ -espaços.

Fixe um grupo de Lie $\mathcal{G}$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Um **$\mathcal{G}$ -espaço de Poisson** é um par $(\mathcal{M}, \tilde{\mu})$ em que $\mathcal{M}$ é uma variedade de Poisson com uma ação $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ (à esquerda) e $\tilde{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ é um homomorfismo de álgebras de Lie comutando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & C^\infty(\mathcal{M}) \\ & \searrow \xi \mapsto \xi^\sigma & \downarrow f \mapsto X_f \\ & & \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \end{array}$$

Um **morfismo de $\mathcal{G}$ -espaços de Poisson** $\varphi : (\mathcal{M}, \tilde{\mu}_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, \tilde{\mu}_{\mathcal{N}})$ é um morfismo de Poisson $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ comutando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathcal{M}) & \xleftarrow{\varphi^*} & C^\infty(\mathcal{N}) \\ \tilde{\mu}_{\mathcal{M}} \swarrow & & \searrow \tilde{\mu}_{\mathcal{N}} \\ & \mathfrak{g} & \end{array}$$

Denotamos por $\text{Poisson}(\mathcal{G})$ a categoria de $\mathcal{G}$ -espaços de Poisson.

Proposição 4.1.2. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie conexo e $(\mathcal{M}, \tilde{\mu}_{\mathcal{M}}), (\mathcal{N}, \tilde{\mu}_{\mathcal{N}})$ dois $\mathcal{G}$ -espaços de Poisson. Se $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é um morfismo em $\text{Poisson}(\mathcal{G})$ então é equivariante.*

Demonstração. Dado $\xi \in \mathfrak{g}$, denote por Φ^t e Ψ^t os fluxos do campo fundamental gerado por ξ em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente. Ou seja, Φ^t é o fluxo de $X_{\tilde{\mu}_{\mathcal{M}}(\xi)}$ e Ψ^t é o fluxo de $X_{\tilde{\mu}_{\mathcal{N}}(\xi)}$. Como $\tilde{\mu}_{\mathcal{M}} = \varphi^* \circ \tilde{\mu}_{\mathcal{N}}$ e, sendo um mapa de Poisson, $\varphi \circ \Phi^t = \Psi^t \circ \varphi$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(\exp(-t\xi)x) &= \varphi(\Phi^t(x)) \\ &= \Psi^t(\varphi(x)) \\ &= \exp(-t\xi)\varphi(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{G}$ é conexo, segue que φ é equivariante. $\square$

O resultado acima nos diz que, para uma grupo conexo $\mathcal{G}$, $\text{Poisson}(\mathcal{G})$ é uma subcategoria de $\mathcal{G}$ -spaces.

Exemplo 4.1.2. O exemplo mais importante de $\mathcal{G}$ -espaço de Poisson é $(\mathfrak{g}^*, \iota)$ com a representação coadjunta e o mapa de inclusão $\iota : \mathfrak{g} \mapsto C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. $\blacklozenge$

Seja $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$ uma variedade de Poisson e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Dada uma função suave $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ (não necessariamente morfismo de Poisson), por dualização, podemos definir um mapa linear $\tilde{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ com

$$\tilde{\mu}(\xi)(x) := \mu(x)\xi \quad (4.1)$$

para quaisquer $\xi \in \mathfrak{g}$ e $x \in \mathcal{M}$. Pela identificação $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{**} \subseteq C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, vemos que $\tilde{\mu}$ é simplesmente a restrição do pullback $\mu^* : C^\infty(\mathfrak{g}^*) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ nas funções lineares. Desse modo, μ induz um homomorfismo de fibrados vetoriais

$$\begin{aligned} \rho_\mu : \mathcal{M} \times \mathfrak{g} &\rightarrow T(\mathcal{M}) \\ &: (x, \xi) \mapsto X_{\tilde{\mu}(\xi)}(x), \end{aligned}$$

cujos mapa induzido $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) : \xi \mapsto \xi^{\rho_\mu}$ é dado pela composição

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & C^\infty(\mathcal{M}) \\ & \searrow \xi \mapsto \xi^\rho & \downarrow f \mapsto X_f \\ & & \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \end{array}$$

Note ainda, que μ é univocamente determinado por $\tilde{\mu}$ através da equação (4.1), que é uma equação $\mathbb{R}$ -linear em $\tilde{\mu}$. Assim, temos um isomorfismo de espaços vetoriais $C^\infty(\mathcal{M}, \mathfrak{g}^*) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}; C^\infty(\mathcal{M})) : \mu \mapsto \tilde{\mu}$.

Dizemos que $\mu \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathfrak{g}^*)$ é um **mapa momento** quando ρ_μ é uma ação de álgebra de Lie, ou seja, quando $\xi \mapsto \xi^{\rho_\mu}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Em outras palavras, o subespaço de mapas momento em $C^\infty(\mathcal{M}, \mathfrak{g}^*)$ é a pré-imagem de $\text{Hom}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{g}, C^\infty(\mathcal{M})) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}; C^\infty(\mathcal{M}))$ sob $\mu \mapsto \tilde{\mu}$. Quando μ é também um morfismo de Poisson, dizemos que μ é um **mapa momento de Poisson**.

Proposição 4.1.3. *Seja $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$ uma variedade de Poisson e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um mapa momento $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ é de Poisson se, e somente se, o mapa dual $\tilde{\mu}$ for um homomorfismo de álgebras de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]) \rightarrow (C^\infty(\mathcal{M}), \{\cdot, \cdot\})$.*

Demonstração. Se μ for um morfismo de Poisson, então, por definição, seu pullback $\mu^* : C^\infty(\mathfrak{g}^*) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Segue que a restrição $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathfrak{g}}$ à uma subálgebra também é um homomorfismo.

Reciprocamente, suponha que $\tilde{\mu}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Como o colchete de Poisson em $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ é linear, basta verificar a condição em funções lineares: dados $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$ e $x \in \mathcal{M}$, temos

$$\begin{aligned} (\mu^* \{\xi, \zeta\})(x) &= \{\xi, \zeta\}_{\mathfrak{g}^*}(\mu(x)) \\ &= \mu(x)[\xi, \zeta] \\ &= \tilde{\mu}([\xi, \zeta])(x) \\ &= \{\tilde{\mu}(\xi), \tilde{\mu}(\zeta)\}(x) \\ &= (\{\mu^*\xi, \mu^*\zeta\})(x). \end{aligned}$$

Concluimos que μ é um morfismo de Poisson. □

Seja $(\mathcal{M}, \{\cdot, \cdot\})$ uma variedade de Poisson e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma **ação Hamiltoniana de $\mathfrak{g}$ em $\mathcal{M}$** é uma ação $\rho : \mathcal{M} \times \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathcal{M})$ tal que, existe um mapa momento Poisson $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que induz $\rho = \rho_\mu$. Note que o mapa momento pode não ser único, já que dois deles podem diferir por uma função genética com campo Hamiltoniano nulo $X_f = \mathbf{0}$.

Para um grupo de Lie $\mathcal{G}$, dizemos que uma ação $\mathcal{G} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é **Hamiltoniana** se a ação induzida na álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathcal{G})$ for Hamiltoniana. Assim, os campos fundamentais da ação são Hamiltonianos.

Em resumo, um $\mathcal{G}$ -espaço de Poisson $(\mathcal{M}, \tilde{\mu})$ é o mesmo que uma ação Hamiltoniana de $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ com uma escolha de mapa momento μ fixado pela equação (4.1).

N.B. Na literatura também é possível encontrar uma outra definição de $\mathcal{G}$ -espaço de Poisson, como apenas uma ação $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ por automorfismos de Poisson. Deve ficar claro que para esse tipo de espaço, mapas momento podem não existir e mesmo existindo podem não ser equivariantes. Um trabalho detalhado sobre mapas momento pode ser encontrado em [25]. ★

Exemplo 4.1.3. Considere uma ação $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{M}$. No fibrado cotangente $T^*(\mathcal{M})$ temos uma ação natural $g\nu = \nu g_*^{-1}$. Para essa ação, temos um mapa momento $\mu : T^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dado pela forma de Liouville $\mu(\nu)(\xi) := \theta_\nu \xi^\sigma$, onde ξ^σ é o campo fundamental da ação em $T^*(\mathcal{M})$.

Em particular, para o grupo de Lie $\mathcal{G}$, o mapa momento definido acima coincide com a transposta da forma de Maurer-Cartan $\Theta^T : T^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{g}^* : \nu \mapsto \nu\Theta$. ◆

Exemplo 4.1.4. Seja $(\mathbb{V}, \rho)$ uma representação unitária de $\mathcal{G}$. Denotando por $\langle \cdot | \cdot \rangle$ o produto interno, vemos que as formas

$$(\cdot | \cdot) := \text{Re} \langle \cdot | \cdot \rangle \quad \text{e} \quad \omega := \text{Im} \langle \cdot | \cdot \rangle$$

fazem de $\mathbb{V}$ um espaço vetorial Kähler. Como ρ é unitária, essas formas são preservadas pela representação. O colchete de Poisson associado a ω é $\{f, g\} = \omega(\text{grad } f, \text{grad } g)$ e a ação de $\mathcal{G}$ é Poisson com mapa momento $\mu : \mathbb{V} \rightarrow \mathfrak{g}^*$, $\mu_v(\xi) := -i \langle v | \rho'(\xi)v \rangle$. De fato, basta notar que

$$\text{grad } \tilde{\mu}(\xi)(v) = -i\rho'(\xi)v$$

Escolhendo uma base ortonormal obtemos coordenadas complexas $z : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}^n$ com

$$\omega = i \sum_{j=1}^n dz^j \wedge d\bar{z}^j$$

que é a forma simplética natural em $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. ◆

Exemplo 4.1.5 (Fubini-Study). Considere o espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$. Temos uma estrutura de Kähler dada localmente pelo potencial

$$K(w, \bar{w}) = \log \left(1 + \sum_{j=1}^n w^j \bar{w}^j \right) = \log (1 + |w|^2)$$

onde $w^j = z^j/z^0$ e $[z^0 : z^1 : \dots : z^n]$ são coordenadas homogêneas em $\mathbb{CP}^n$. Nessas coordenadas, a forma simplética é escrita

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} K = \frac{i}{2} \sum_{k,\ell=1}^n \frac{\partial^2 K}{\partial w^k \partial \bar{w}^\ell} dw^k \wedge d\bar{w}^\ell \\ &= \frac{i}{2} \sum_{k,\ell=1}^n \left(\frac{\delta_{k\ell}}{1 + |w|^2} - \frac{w^k \bar{w}^\ell}{(1 + |w|^2)^2} \right) dw^k \wedge d\bar{w}^\ell \\ &= \frac{i}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{dw^k \wedge d\bar{w}^k}{1 + |w|^2} - \sum_{k,\ell=1}^n \frac{w^k \bar{w}^\ell}{(1 + |w|^2)^2} dw^k \wedge d\bar{w}^\ell \right).\end{aligned}$$

Essa estrutura Kähler é chamada **estrutura Fubini-Study**. Dada uma representação unitária $(\mathbb{V}, \rho)$ de $\mathcal{G}$, identificada com $\mathbb{C}^{n+1}$ por meio de uma base ortonormal, induzimos uma estrutura Kähler no espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathbb{V})$, que é invariante pela projetificação de ρ . Obtemos um $\mathcal{G}$ -espaço Poisson $\mathcal{G} \curvearrowright \mathbb{P}(\mathbb{V})$ com mapa momento $\mu_{[v]}(\xi) = -i \langle v | \rho'(\xi) v \rangle / \|v\|^2$. $\blacklozenge$

Proposição 4.1.4. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie com álgebra $\mathfrak{g}$. O espaço $(\mathfrak{g}^*, \iota)$ com a ação coadjunta é o objeto final em $\text{Poisson}(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Segue da existência e unicidade do mapa momento $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}^*$. $\square$

Proposição 4.1.5. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie conexo e $(\mathcal{M}, \tilde{\mu})$ um $\mathcal{G}$ -espaço de Poisson com mapa momento $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Se a ação $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ é transitiva, então:*

- (a) a imagem $\mu[\mathcal{M}] \subseteq \mathfrak{g}^*$ é uma órbita coadjunta;
- (b) a restrição $\mathcal{M} \xrightarrow{\mu} \mu[\mathcal{M}]$ é um recobrimento.

Demonstração. (a) Segue diretamente da transitividade da ação com $\mu[\mathcal{M}] = \mathcal{O}_{\mu(x)}$ para qualquer $x \in \mathcal{M}$.

(b) Denote a restrição por $\pi := \mu|_{\mu[\mathcal{M}]}$. Da fórmula

$$\pi_*(\xi(x)) = (\pi(x), \mathcal{K}'(\xi)\pi(x))$$

vemos que π é uma submersão, já que a transitividade de $\mathcal{M}$ garante que vetor tangente a $\mathcal{M}$ é imagem de algum campo fundamental (Prop. 1.5.4). Para ver que π é imersiva, basta notar que $\pi_*(\xi(x)) = \mathbf{0}$ implica em $\xi \in \mathfrak{stab}(\pi(x)) = \mathfrak{stab}(x)$, i.e., $\xi(\cdot)$ é o campo nulo. Concluímos que π é um difeomorfismo local e logo, pela conexidade de $\mu[\mathcal{M}]$, é um recobrimento. $\square$

Proposição 4.1.6 (Corolário). *Se um grupo de Lie $\mathcal{G}$ é conexo, então todo $\mathcal{G}$ -espaço de Poisson homogêneo é simplético.*

Pensando nos $\mathcal{G}$ -espaços de Poisson homogêneos como sistemas clássicos $\mathcal{G}$ -simétricos “pequenos”, as órbitas coadjuntas podem ser entendidas como os menores sistemas clássicos com simetrias por $\mathcal{G}$.

Polarizações Invariantes

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dado um funcional $\eta \in \mathfrak{g}^*$ e uma subálgebra $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{g}$ vemos que

$$\eta|_{[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]} = 0 \iff \eta|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{K} \text{ é uma representação unidimensional de } \mathfrak{p}.$$

Quando essas condições ocorrem, dizemos que $\mathfrak{p}$ é uma subálgebra **subordinada** a η . Agora, para um grupo de Lie conexo $\mathcal{G}$ com álgebra $\mathfrak{g}$, dado $\eta \in \mathfrak{g}^*$, uma:

- **polarização algébrica real** de η é uma subálgebra $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{g}$ subordinada a η maximal;
- **polarização algébrica complexa** é uma subálgebra $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ subordinada a $\eta^{\mathbb{C}}$ maximal.

Considere uma polarização algébrica complexa $\mathfrak{p}$. Como

$$\eta^{\mathbb{C}}([\xi, \zeta]) = -(\mathcal{K}')^{\mathbb{C}}(\xi)\eta^{\mathbb{C}}(\zeta) = (\omega^{\eta})^{\mathbb{C}}(\xi, \zeta),$$

vemos que $\eta^{\mathbb{C}}|_{[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]} = 0$ equivale a $\mathfrak{p}$ ser um subespaço isotrópico de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ com a forma pré-simplética complexa $(d\theta^{\eta})^{\mathbb{C}}$. A condição de maximalidade nos diz que $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{stab}(\eta)^{\mathbb{C}}$ (caso contrário $\mathfrak{p} + \mathfrak{stab}(\eta)^{\mathbb{C}}$ satisfaz a definição) e equivale a

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} + \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{stab}(\eta)^{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2}(\dim \mathcal{G} + \dim \mathfrak{stab}(\eta)).$$

Agora, considere a distribuição complexa $\mathcal{P}' := \langle X^{\xi} \in \mathfrak{X}_L(\mathcal{G}) \mid \xi \in \mathfrak{p} \rangle$, que é invariante à esquerda e isotrópica em relação à $(d\theta^{\eta})^{\mathbb{C}}$. Considere a redução pré-simplética $\pi_{\eta} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}_{\eta} = \mathcal{G}/\text{Stab}(\eta)^0$. Complexificando a derivada do mapa de redução para $(\pi_{\eta})_*^{\mathbb{C}} : T(\mathcal{G})^{\mathbb{C}} \rightarrow T(\mathcal{M}_{\eta})^{\mathbb{C}}$, vemos que a imagem $\mathcal{P}'' := (\pi_{\eta})_*^{\mathbb{C}} \mathcal{P}'$ é uma distribuição complexa integrável e isotrópica sobre $\mathcal{M}_{\eta}$. Como $\mathcal{P}' \supseteq \ker(d\theta^{\eta})^{\mathbb{C}}$, a dimensão de $\mathcal{P}''$ é

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}'' &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}' - \dim_{\mathbb{C}} \ker(d\theta^{\eta})^{\mathbb{C}} \\ &= \frac{1}{2}(\dim \mathcal{G} + \dim \mathfrak{stab}(\eta)) - \dim \mathfrak{stab}(\eta) \\ &= \frac{1}{2}(\dim \mathcal{G} - \dim \text{Stab}(\eta)^0) \\ &= \dim \mathcal{M}_{\eta}, \end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{P}''$ é uma polarização complexa sobre $\mathcal{M}_{\eta}$. Como o mapa de redução é $\mathcal{G}$ -equivariante e $\mathfrak{p}$ é invariante pela ação adjunta (complexificada) de $\text{Stab}(\eta)^0$, $\mathcal{P}''$ é uma polarização $\mathcal{G}$ -equivariante. Se $\mathfrak{p}$ for invariante pela ação adjunta de $\text{Stab}(\eta)$, então $\mathcal{P}''$ desce a uma polarização $\mathcal{G}$ -equivariante $\mathcal{P}$ na órbita coadjunta $\mathcal{O}_{\eta}$ por meio do recobrimento $\tilde{\pi}_{\eta} : \mathcal{M}_{\eta} \rightarrow \mathcal{O}_{\eta}$.

Para grupos compactos, sempre podemos obter polarizações Kähler. Vamos esboçar a construção da polarização invariante Kähler. Mais detalhes podem ser encontrados em [3] e [2].

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Um **toro** em $\mathcal{G}$ é um subgrupo $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$ compacto, conexo e abeliano. Para $\mathcal{G}$ compacto podemos considerar um **toro maximal**, que é

simplesmente um toro que é maximal entre todos os toros, ordenados por inclusão. Todo grupo compacto admite um toro maximal, que é único a menos de conjugação.

Dado $\eta \in \mathfrak{g}^*$, podemos escolher um toro maximal $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T} \subseteq \text{Stab}(\eta)$. Denotaremos sua álgebra de Lie por $\mathfrak{t}$. Uma **raiz de $\mathfrak{g}$** é um funcional $\alpha \in (\mathfrak{t}^\mathbb{C})^*$ tal que o espaço

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{\xi \in \mathfrak{g}^\mathbb{C} \mid \forall \zeta \in \mathfrak{t}^\mathbb{C}, [\zeta, \xi] = \alpha(\zeta)\xi\}$$

é não-nulo. Denotaremos por Δ o conjunto de raízes de $\mathfrak{g}$, que é não-vazio, já que os operadores $\text{ad } \zeta$ com $\zeta \in (\mathfrak{t}^\mathbb{C})^*$ comutam e portanto são simultaneamente diagonalizáveis. Como $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita, é claro que Δ é finito. Resumimos alguns fatos básicos sobre as raízes na

Proposição 4.1.7. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie compacto. Com as notações acima temos:*

- (a) *se $\alpha \in \mathfrak{t}^\mathbb{C}$ é uma raiz então $-\alpha = \bar{\alpha}$ também é e $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \overline{\mathfrak{g}_\alpha}$;*
- (b) *os autoespaços $\mathfrak{g}_\alpha$ são unidimensionais;*
- (c) $\mathfrak{g}^\mathbb{C} = \mathfrak{t}^\mathbb{C} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$;
- (d) *dadas $\alpha, \beta \in \Delta$ temos $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ sempre que $\alpha + \beta \in \Delta$ e $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{g}_0 := \mathfrak{t}^\mathbb{C}$, do contrário, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathbf{0}$.*

Se $\xi \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \mathbf{0}$, então $Z_\alpha = [\xi, \bar{\xi}] \in \mathfrak{t} \setminus \mathbf{0}$. Podemos escolher ξ de forma a ter $\alpha(Z_\alpha) = i$. Colocando $X_\alpha = \text{Re } \xi$ e $Y_\alpha = \text{Im } \xi$ temos

$$[X_\alpha, Y_\alpha] = Z_\alpha, \quad [Y_\alpha, Z_\alpha] = X_\alpha, \quad [Z_\alpha, X_\alpha] = Y_\alpha,$$

ou seja, $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ geram uma subálgebra $\mathfrak{h}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$ isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$. A escolha de Z é completamente determinada pela raiz (com $Z_{-\alpha} = -Z_\alpha$), enquanto X, Y estão determinados além de rotações planas

$$(X, Y) \mapsto (\cos(t)X + \sin(t)Y, \cos(t)Y - \sin(t)X)$$

Como $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{stab}(\eta)$, $\mathcal{K}'(\zeta)\eta = 0$ para todo $\zeta \in \mathfrak{t}$. Segue que, se $\xi \in \mathfrak{g}_\alpha$ então

$$0 = \mathcal{K}'(\zeta)\eta^\mathbb{C}(\xi) = -\eta^\mathbb{C}([\zeta, \xi]) = -\alpha(\zeta)\eta^\mathbb{C}(\xi), \quad \forall \zeta \in \mathfrak{t},$$

de modo que $\eta(\xi) = 0$. Ou seja, $\eta^\mathbb{C}$ anula a soma $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{stab}(\eta) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\eta[\mathfrak{h}_\alpha] \neq 0} \mathfrak{h}_\alpha$. Seja $\Delta_\eta^\pm := \{\alpha \in \Delta \mid \pm \eta(Z_\alpha) > 0\}$. Como $\{\alpha, -\alpha\} \subseteq \Delta_\eta^+$ apenas se $\eta(Z_\alpha) = 0$, a álgebra

$$\mathfrak{p} := \mathfrak{t}^\mathbb{C} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_\eta^-} \mathfrak{g}_\alpha$$

é uma polarização algébrica complexa para η . Considere a redução $\pi_\eta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}_\eta$ e tome $x_0 = \pi_\eta(e)$. O espaço tangente $T_{x_0}(\mathcal{M}_\eta) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{stab}(\eta)$ pode ser identificado com o subespaço de $\mathfrak{g}$ gerado por $\{X_\alpha, Y_\alpha \mid \alpha \in \Delta_\eta^+\}$. Sob essa identificação, a polarização invariante $\mathcal{P}$ induzida por $\mathfrak{p}$ tem fibra $\mathcal{P}_{x_0} \simeq \bigoplus_{\alpha \in \Delta_\eta^+} \mathfrak{g}_\alpha$, e as outras

fibras são obtidas pela ação de $\mathcal{G}$. Para $\alpha \in \Delta_\eta^+$ o produto interno da polarização é positivo

$$i\eta^{\mathbb{C}}([X_\alpha + iY_\alpha, X_\alpha - iY_\alpha]) = 2\eta^{\mathbb{C}}(Z_\alpha) > 0.$$

Em resumo, a polarização invariante $\mathcal{P}$ é Kähler, qualquer que seja $\eta \in \mathfrak{g}^*$.

Exemplo 4.1.6 (Estrutura Kähler de $SU(2)$). Seguindo o Exemplo 4.1.1, considere $SU(2)$ e $\eta = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{su}(2)$. O estabilizador $\text{Stab}(\eta)$ é o círculo diagonal $\mathcal{T} = \{\text{diag}(e^{it}, e^{-it}) \mid t \in [0, 2\pi]\}$, que é um toro maximal. Escolhendo a base

$$X = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vemos que $\mathfrak{t}$ é gerada por Z e temos duas raízes $\alpha(Z) = i$ e $-\alpha$. Como o estabilizador é conexo, $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{O}_\eta = S^2$. A subálgebra $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$ gerada por $X - iY$ nos dá uma polarização invariante $\mathcal{P}$ em S^2 . Utilizando as coordenadas complexas (z_0, z_1) da identificação $SU(2) \simeq S^3$, podemos identificar $S^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ localmente com $\mathbb{C}$ pelas cartas estereográficas $z([z^0 : z^1]) = z^1/z^0$ e $\bar{z}([z^0 : z^1]) = z^0/z^1$. Vemos que a estrutura simplética é dada pela forma $\omega = idz \wedge d\bar{z}$ e a polarização $\mathcal{P}$ é gerada por $\frac{\partial}{\partial z}$, ou seja, $\mathcal{P}$ é o fibrado de vetores holomorfos da estrutura complexa de S^2 . $\blacklozenge$

Quantização Holomorfa de Órbitas Coadjuntas

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie conexo com álgebra $\mathfrak{g}$. Vamos considerar a variedade pré-simplética $(\mathcal{G}, d\Theta^\eta)$, onde $\Theta_g^\eta = -\mathcal{K}(g)\eta \circ \Theta_g$, e sua redução $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{G}/\text{Stab}(\eta)^0$. Quando $\text{Stab}(\eta)$ é conexo, a redução é identificada com a órbita coadjunta $\mathcal{O}_\eta$. Os vetores em $\ker d\Theta^\eta$ são as imagens dos campos fundamentais gerados pela ação de $\mathfrak{h} := \mathfrak{stab}(\eta)$, e as folhas são as classes laterais $g\mathcal{H}$ de $\mathcal{H} := \text{Stab}(\eta)^0$. A condição de Bohr-Sommerfeld garante que o valor

$$\chi_\eta(h) := \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_\gamma \Theta^\eta\right)$$

está bem-definido para qualquer caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ com $\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = h$. Fica definida uma função $\chi_\eta : \mathcal{H} \rightarrow S^1$. Dado $\xi \in \mathfrak{h}$, como $\Theta^\eta(\xi^\sigma) = -\eta(\xi)$ temos $\xi^\sigma \chi_\eta = \frac{i}{\hbar} \eta(\xi) \chi_\eta$, de modo que

$$\chi_\eta(\exp(t\xi)h) = \chi_\eta(\exp(t\xi))\chi_\eta(h).$$

Por conexidade, obtemos $\chi_\eta(h'h) = \chi_\eta(h')\chi_\eta(h)$ para quaisquer $h', h \in \mathcal{H}$. Assim, a condição de pré-quantização garante um homomorfismo $\chi_\eta : \mathcal{H} \rightarrow S^1$ com $d\chi_\eta(e) = \frac{i}{\hbar} \eta|_{\mathcal{H}}$. Como $\mathbf{i}_{\mathcal{H}}^* \Theta^\eta \in \Omega^1(\mathcal{H})$ é a única forma invariante à direita com valor $-\eta$ na identidade, temos $\mathbf{i}_{\mathcal{H}}^* \Theta^\eta = -i\hbar d\chi_\eta$, de modo que a existência de χ_η com valor $\frac{i}{\hbar} \eta$ na identidade equivale à condição de Bohr-Sommerfeld. Em particular, se $\xi \in \mathfrak{h}$ satisfaz $\exp(2\pi\hbar\xi) = e$ então $(i/\hbar)\eta(2\pi\hbar\xi) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, ou seja, $\eta(\xi) \in \hbar\mathbb{Z}$.

Considerando a construção da pré-quantização na demonstração da Prop. 3.3.3, $\mathcal{L}$ é o fibrado associado $\mathcal{G} \times^{\chi_\eta} \mathbb{C}$ e as seções $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ podem ser indentificadas com as funções $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $f(gh) = \chi_\eta(h^{-1})f(g)$, i.e., são as funções χ_η -equivariantes. Obtemos uma representação de $\mathcal{G}$ em $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ correspondente a ação regular $(g_0 f)(g) = f(g_0^{-1}g)$ em $C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{C})^{\chi_\eta}$. Em outras palavras, é a representação induzida¹ pelo caracter χ_η .

Para obter a pré-quantização da órbita coadjunta $\mathcal{O}_\eta$, precisamos de um caractere $\tilde{\chi}_\eta : \text{Stab}(\eta) \rightarrow \mathbb{C}$ definido no estabilizador todo. Basta estender o caractere obtido acima (como na Prop. 1.2.11), o que sempre é possível. Ou seja, a condição de pré-quantização para a órbita $\mathcal{O}_\eta$ é exatamente a descrita acima, com $\tilde{\chi}_\eta$ substituindo χ_η . Em ambos os casos, a representação obtida é redutível.

Como vimos na Seção 3.3, a pré-quantização não é suficiente para satisfazer a condição de irreducibilidade **Q4**. Nesse caso, a subálgebra de observáveis selecionada para ser quantizada é $\mathfrak{g}$, vista como funções sobre a órbita.

Exemplo 4.1.7 (Spin). Considere o grupo $\mathcal{G} = \text{SU}(2)$. Como vimos no Exemplo 4.1.1, as órbitas coadjuntas $(\mathcal{O}, \omega)$ são esferas $(S^2(s), \omega_s)$ com raio $s \in [0, +\infty)$. Fixando $s \neq 0$, para que $\omega_s = (1/s)$ dvol satisfaça a condição de integralidade devemos ter

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \frac{1}{s} \text{vol}(S^2(s)) = \frac{4\pi s^2}{2\pi\hbar s} \in \mathbb{Z} \iff s \in \frac{\hbar}{2}\mathbb{Z}.$$

Em termos da redução $S^3 \rightarrow S^2(s)$, como as fibras são círculos $C = \{e^{it}(z^0, z^1) \mid t \in [0, 2\pi]\}$, a condição de Bohr-Sommerfeld nos dá

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_C \theta' = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^{2\pi} 2s \, dt = \frac{2s}{\hbar} \in \mathbb{Z}.$$

O homomorfismo $\chi_s : S^1 \rightarrow S^1$ associado à órbita $S^2(s)$ é $\chi_s(e^{it}) = \exp(-2ist/\hbar) = (e^{it})^{-2s/\hbar}$. As seções de $\mathcal{L}_s \rightarrow S^2(s)$ podem ser identificadas com as funções $f : S^3 \rightarrow \mathbb{C}$ que são χ_s -equivariantes

$$f(ze^{it}) = \exp(2ist/\hbar)f(z).$$

Como o espaço de funções equivariantes L^2 -integráveis tem dimensão infinita, a representação regular de $\text{SU}(2)$ em $\mathfrak{H} = L^2(S^2(s); \mathcal{L}_s)$ tem dimensão infinita e não pode ser irreducível, uma vez que $\text{SU}(2)$ é compacto. $\blacklozenge$

Agora vamos descrever a quantização. Seja $\mathcal{G}$ um grupo compacto e simplesmente conexo. Dado $\eta \in \mathfrak{g}^*$, considere a redução $(\mathcal{G}, d\Theta^\eta) \rightarrow (\mathcal{M}_\eta, \omega)$. Como visto na Seção 4.1, $\mathcal{M}_\eta$ sempre admite uma polarização Kähler. Quando $(\mathcal{M}_\eta, \omega)$ é pré-quantizável, a quantização holomorfa $\mathfrak{H}_{\text{hol}}$ é uma representação unitária de $\mathcal{G}$ com dimensão finita. O Teorema de Borel-Weil (Prop. 1.7.1) garante que essa rep. é irreducível e que toda unirrep. pode ser obtida dessa forma (ver Seção 1.7). Nesse caso, devemos ter $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{O}_\eta$.²

¹Definição na pág. 42.

²A Prop. 4.2.5 garante que $\mathcal{M}_\eta$ é um recobrimento de grau 1 sobre $\mathcal{O}_\eta$, já que a representação definida por $\mathcal{M}_\eta$ é irreducível e a definida pela órbita é uma subrep. não-nula.

Vamos ilustrar como podemos re-obter a informação da quantização holomorfa a partir de uma unirrep. de $\mathcal{G}$. Seja $(\mathbb{V}, \rho)$ uma unirrep. de $\mathcal{G}$. Dado $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbf{0}$ podemos definir $\mu_v \in \mathfrak{g}^*$ por

$$\mu_v(\xi) := -i\hbar \frac{\langle v | \rho'(\xi) v \rangle}{\|v\|^2}.$$

Note que μ_v depende apenas da classe de v em $\mathbb{P}(\mathbb{V})$, e fica definido um mapa $\mu : \mathbb{P}(\mathbb{V}) \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Esse é o mapa momento da estrutura simplética Fubini-Study (reescalada por $\hbar$) em $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ associado a ação projetiva $\mathcal{G} \curvearrowright \mathbb{P}(\mathbb{V})$.³ Como $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ é compacto, escolhendo qualquer métrica invariante em $\mathfrak{g}^*$, vão existir $[v_{\max}] \in \mathbb{P}(\mathbb{V})$ com $\|\mu_{v_{\max}}\| = \max_{[v] \in \mathbb{P}(\mathbb{V})} \|\mu_v\| =: M$. O conjunto

$$P_{\max} := \{[v] \in \mathbb{P}(\mathbb{V}) \mid \|\mu_v\| = M\}$$

é não-vazio e sua imagem é uma órbita coadjunta. Os vetores correspondentes aos elementos de $P_{\max}$ são chamados de **vetores de peso máximo** da representação. Para qualquer $[v] \in P_{\max}$, a quantização holomorfa de $\mathcal{O}_{\mu_v}$ nos dá uma representação isomorfa a $(\mathbb{V}, \rho)$: para cada $u \in \mathbb{V}$ a função $f_u \in C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{C})$ dada por $f_u(g) = \langle v | \rho(g) u \rangle$ é χ_v -equivariante e polarizada, onde $\chi_v : \text{Stab}(\mu_v) \rightarrow S^1$ é o caracter associado $\chi_v(h) = \exp\left((-i/\hbar) \int_e^h \Theta^{\mu_v}\right)$. Toda seção polarizada surge dessa forma.

Exemplo 4.1.8 (Spin). Para $\text{SU}(2)$, considere a órbita coadjunta de $\mathcal{O}_s$ de spin $s = N\hbar/2$. Considerando as seções da pré-quantização como funções equivariantes $f : S^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z^0 e^{it}, z^1 e^{it}) = e^{iNt} f(z^0, z^1)$, a polarização holomorfa $\mathcal{P} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z^0}, \frac{\partial}{\partial z^1} \right\rangle$ em $\mathbb{C}^2$ nos dá o espaço de estados da quantização

$$\mathfrak{H}_s = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}) \mid f|_{S^3} \text{ é homogênea de grau } N \text{ e } \frac{\partial f}{\partial z^0} = \frac{\partial f}{\partial z^1} = 0, \right\}.$$

Vemos que $\mathfrak{H}_s$ é o espaço $\text{HolPol}^N(\mathbb{C}^2)$ de polinômios holomorfos homogêneos de grau N , i.e., $f(z) = \sum_{k=0}^N \alpha_k (z^0)^k (z^1)^{N-k}$, $\alpha_0, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$. A dimensão é exatamente a esperada $\dim \mathfrak{H}_s = N + 1 = 2(s/\hbar) + 1$ e a unirrep. de $\text{SU}(2)$ é simplesmente a representação regular $(Uf)(z) := f(U^{-1}z)$. $\blacklozenge$

Em geral, para espaços de fase Kähler, a correção metaplética difere da quantização holomorfa por um fator topológico (ver [3]). Em particular, para um grupo de Lie compacto $\mathcal{G}$, a correção metaplética nos dá uma mudança de fase em relação a quantização holomorfa. Suponha que $\eta \in \mathfrak{g}^*$ é regular, i.e., $\text{Stab}(\eta) = \mathcal{T}$ é um toro maximal, e seja $\mathcal{M}_\eta$ a redução de $(\mathcal{G}, d\Theta^\eta)$. Sejam $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}_L(\mathcal{G})$ vetores invariantes com valor $Z_{\alpha_1}, \dots, Z_{\alpha_n}$ na identidade, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são as raízes positivas (Seção 4.1), de modo que eles geram a polarização invariante $\mathcal{P}$. Dada $\tilde{\mu} \in \Omega_{\mathbb{C}}^n(\mathcal{P})$ considere seu pullback $\mu = \pi_\eta^* \tilde{\mu}$ em $\mathcal{G}$. A função $f = \mu(X_1, \dots, X_n)$ satisfaz

$$X^\xi f = -i\Delta(\xi)f \quad \text{onde} \quad \Delta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

para todo $\xi \in \mathfrak{t} = \mathfrak{stab}(\eta)$. Assim, quando existe estrutura metaplética, as seções do fibrado de $\frac{1}{2}$ -formas em $\mathcal{M}_\eta$ são representadas por funções $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $X^\xi f = -\frac{1}{2}i\Delta(\xi)f$ para $\xi \in \mathfrak{t}$.

³Exemplo 4.1.4.

Exemplo 4.1.9 (Rotações). Para o $SU(2)$, existe estrutura metaplética e as seções de $\sqrt{\det}(\mathcal{P})$ são representadas por funções homogêneas $S^3 \rightarrow \mathbb{C}$ de grau -1 (ver [3]). Para o espaço de fase $\mathcal{O}_s$ de spin $s \in \frac{1}{2}\hbar\mathbb{N}$, as funções de onda são polinômios homogêneos $S^3 \rightarrow \mathbb{C}$ de grau $2s\hbar - 1$. $\blacklozenge$

4.2 Multiplicidades de Quantizações Equivariantes

Como vimos na seção anterior, o método das órbitas permite obter as unirreps. de um grupo de Lie a partir da quantização de órbitas coadjuntas. Mais geralmente, podemos considerar a quantização em um contexto equivariante afim de obter representações unitárias. Nesta seção vamos resumir alguns resultados principais sobre esse processo e relacionar o cálculo de multiplicidades de representações com um objeto vindo da quantização. A referência seguida é [5].

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética com uma ação Hamiltoniana de mapa momento $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Supondo que $(\mathcal{M}, \omega)$ é pré-quantizável, em qualquer pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$ temos uma representação natural $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}))$ dada por

$$\rho(\xi)S := \nabla_{\xi^\sigma} S + \frac{i}{\hbar} \mu(\cdot) \xi S$$

onde $\xi^\sigma \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é o campo fundamental associado a ξ pela ação e $\mu(\cdot)\xi \in C^\infty(\mathcal{M})$ é a função $x \mapsto \mu(x)\xi$. Dizemos que a pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$ é **$\mathcal{G}$ -equivariante** quando existe uma ação $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{L}$ que faz de $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado $\mathcal{G}$ -equivariante⁴ e que induz a representação ρ . Em particular, quando $\mathcal{G}$ é simplesmente conexo isso sempre é possível.

Exemplo 4.2.1. Dado $\eta \in \mathfrak{g}^*$, a pré-quantização, obtida na demonstração da Prop. 3.3.3, para a redução $\mathcal{M}_\eta = \mathcal{G}/\text{Stab}(\eta)^0$ é naturalmente $\mathcal{G}$ -equivariante e sua ação induz exatamente a representação natural de $\mathfrak{g}$ definida acima. Ou seja, quando $\mathcal{M}_\eta$ é pré-quantizável automaticamente possui uma pré-quantização equivariante. O mesmo vale para a órbita coadjunta $\mathcal{O}_\eta$. $\blacklozenge$

Suponha agora que $(\mathcal{M}, \omega)$ é compacta com polarização Kähler $\mathcal{P}$ e admite pré-quantização equivariante. Se $\mathcal{P}$ for $\mathcal{G}$ -equivariante, a representação regular em $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ induz uma rep. unitária no espaço de estados da quantização holomorfa $\mathfrak{H}_{\text{hol}} = \mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$, já que $\mathcal{G}$ preserva as seções polarizadas. Assim, vemos que a quantização holomorfa leva espaços de fase com simetrias por $\mathcal{G}$ em representações unitárias. Vamos dizer que uma variedade Kähler compacta $(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P})$ é **$\mathcal{G}$ -quantizável** quando $(\mathcal{M}, \omega)$ tiver ação Hamiltoniana por $\mathcal{G}$, possuir pré-quantização equivariante e sua polarização holomorfa $\mathcal{P}$ for equivariante.

O primeiro resultado importante sobre essas representações diz que a quantização comuta com tomar pontos fixos, em certo sentido.

⁴Detalhes na Seção 1.5.

Proposição 4.2.1. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie compacto. Se $(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P})$ for uma variedade Kähler compacta $\mathcal{G}$ -quantizável então existe um isomorfismo natural*

$$\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M} // \mathcal{G}) \simeq \mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M}) / \mathcal{G}$$

sempre que a ação Hamiltoniana $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ for redutível.

Demonstração. Teoremas 3.8 e 5.2 em [5]. $\square$

Aqui, uma ação Hamiltoniana $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ é dita **redutível** quando o quociente $\mu^{-1}[0]/\mathcal{G}$ for uma variedade suave com o mapa de projeção $\mu^{-1}[0] \rightarrow \mu^{-1}[0]/\mathcal{G}$ sendo uma submersão. Nesse caso, $\mathcal{M} // \mathcal{G} := (\mu^{-1}[0]/\mathcal{G}, \omega^{\mathcal{G}})$ é a **redução de Marsden-Weinstein** ou **quociente simplético** de $\mathcal{M}$ por $\mathcal{G}$ com a única forma simplética satisfazendo $\pi^*\omega^{\mathcal{G}} = \omega|_{\mu^{-1}[0]}$. Quando $(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P})$ é $\mathcal{G}$ -quantizável, as estruturas descem para o quociente simplético, de modo que $\mathcal{M} // \mathcal{G}$ é, de fato, uma variedade Kähler pré-quantizável e vale o resultado acima.

Mais geralmente, fixada uma órbita coadjunta $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}^*$, temos o **quociente simplético de $\mathcal{M}$ em relação a $\mathcal{O}$** dado por $\mathcal{M} // \mathcal{O} := (\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{O}}) // \mathcal{G}$, onde $\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{O}}$ é a variedade produto $\mathcal{M} \times \mathcal{O}$ com a estrutura simplética $\text{proj}_{\mathcal{M}}^*\omega - \text{proj}_{\mathcal{O}}\omega_{\mathcal{O}}$ e mapa momento $\Phi(x, \nu) = \mu(x) - \nu$. Como $\mathcal{M} // \mathcal{O} = \Phi^{-1}[0]/\mathcal{G}$ e $\Phi^{-1}[0]$ está em bijeção com $\mu^{-1}[\mathcal{O}]$, vemos que $\mathcal{M} // \mathcal{O}$ é vazia quando a imagem de μ não intercepta a órbita $\mathcal{O}$.

Suponha que $(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P})$ é $\mathcal{G}$ -quantizável e $\mathcal{O}$ é uma órbita coadjunta integral, com as respectivas pré-quantizações $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ e $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{O}$. No produto $\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{O}}$ temos a pré-quantização $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{V}^* := \text{proj}_{\mathcal{M}}^*\mathcal{L} \otimes \text{proj}_{\mathcal{O}}^*\mathcal{V}^*$ com a derivada covariante induzida⁵

$$\nabla_{X \oplus Y}(\text{proj}_{\mathcal{M}}^*S_1 \otimes \text{proj}_{\mathcal{O}}^*S_2) = \text{proj}_{\mathcal{M}}^*(\nabla_X S_1) \otimes \text{proj}_{\mathcal{O}}^*S_2 + \text{proj}_{\mathcal{M}}^*S_1 \otimes \text{proj}_{\mathcal{O}}^*(\nabla_Y S_2).$$

As seções polarizadas de $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{V}^*$ são exatamente as seções que são holomorfas em relação a $\mathcal{M}$ e anti-holomorfas em relação a $\mathcal{O}$. Sob a luz da Prop. 4.2.1, podemos identificar $\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M} // \mathcal{O})$ com os elementos de $\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{O}})$ que são invariantes pela representação de $\mathcal{G}$, i.e., seções $S : \mathcal{M} \times \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{V}^*$ que são polarizadas e $S(gx, g\nu) = gS(x, \nu)$.

Proposição 4.2.2. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupo de Lie compacto e $(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P})$ uma variedade compacta Kähler $\mathcal{G}$ -quantizável. Dada uma órbita coadjunta integral $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}^*$, temos um isomorfismo natural*

$$\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M} // \mathcal{O}) \simeq \text{Hom}_{\text{Rep}(\mathcal{G})}(\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{O}), \mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M})).$$

Demonstração. Pela Prop. 4.2.1, sabemos que $\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M} // \mathcal{G}) \simeq \mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M} \times \overline{\mathcal{O}})/\mathcal{G}$. Podemos ver o resultado notando que $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{V}^* \simeq \text{Hom}_{\text{VB}^{\mathcal{G}}}(\mathcal{V}; \mathcal{L})$ são os homomorfismos de fibrados vetoriais com a representação regular $(gT)(v) = gT(g^{-1}v)$, de modo que os pontos fixos em $\text{Hom}_{\text{VB}^{\mathcal{G}}}(\mathcal{V}; \mathcal{L})/\mathcal{G}$ são exatamente os homomorfismos $\mathcal{G}$ -equivariantes.

Outra forma de obter o isomorfismo é uma construção explícita: dada uma seção $S \in \Gamma_{\mathcal{M} // \mathcal{O}}(\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{V}^*)$, definimos o mapa $T_S : \Gamma_{\mathcal{O}}(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ por

$$T_S(f)(x) := \int_{\mathcal{O}} S(x, y) f(y) \text{dvol}_{\mathcal{O}}(y)$$

⁵Exemplo 3.3.3.

onde $\text{dvol}_{\mathcal{O}}$ é o volume simplético (reescalado por $2\pi\hbar$) em $\mathcal{O}$. Se S for polarizada e $\mathcal{G}$ -equivariante, T_S preserva seções polarizadas e passa ao L^2 sendo equivariante, i.e., um homomorfismo de representações. $\square$

De modo geral, dada uma representação unitária $\mathcal{G} \curvearrowright \mathfrak{H}$, para cada unirrep. $\mathcal{G} \curvearrowright \mathbb{V}$ temos o valor $m_{\mathfrak{H}}(\mathbb{V}) := \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\text{Rep}(\mathcal{G})}(\mathbb{V}, \mathfrak{H})$ chamado **multiplicidade de $\mathbb{V}$ em $\mathfrak{H}$** . Como $\mathbb{V}$ é irredutível, todos os elementos de $\text{Hom}_{\text{Rep}(\mathcal{G})}(\mathbb{V}, \mathfrak{H})$ são injeções, de modo que a multiplicidade $m_{\mathfrak{H}}(\mathbb{V})$ nos diz quantas vezes $\mathbb{V}$ aparece na decomposição⁶ de $\mathfrak{H}$.

Junto com a fórmula de dimensão na Prop. 4.3.1 que veremos na próxima seção, o resultado acima nos permite estimar assintoticamente essas multiplicidade com o volume de $\mathcal{M} // \mathcal{O}$. Também temos alguns corolários.

Proposição 4.2.3 (Corolário). *Sejam $\mathcal{G}$ um grupo de Lie compacto e $(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P})$ uma variedade compacta Kähler $\mathcal{G}$ -quantizável com mapa momento μ . Dada uma órbita coadjunta integral $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}^*$, se $\mathcal{O} \cap \text{Im} \mu = \emptyset$, então a multiplicidade de $\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{O})$ em $\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M})$ é nula.*

Proposição 4.2.4 (Corolário). *Sejam $\mathcal{G}$ um grupo de Lie compacto e $(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P})$ uma variedade compacta Kähler $\mathcal{G}$ -quantizável com mapa momento μ . Dada uma órbita coadjunta integral $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}^*$, se $\mu^{-1}[\mathcal{O}]$ for um subespaço homogêneo principal em $\mathcal{M}$, então $m_{\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M})}(\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{O})) = 1$.*

Demonstração. Basta lembrar que $\mu^{-1}[\mathcal{O}]$ está em bijeção equivariante com $\Phi^{-1}[\mathbf{0}]$, onde $\Phi : \mathcal{M} \times \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ é o mapa momento $\Phi(x, \nu) = \mu(x) - \nu$. Assim, se ação de $\mathcal{G}$ em $\mu^{-1}[\mathcal{O}]$ for livre e transitiva, $\mathcal{M} // \mathcal{O} = \Phi^{-1}[\mathbf{0}]/\mathcal{G}$ é apenas um ponto. $\square$

Junto com a Prop. 4.1.5 também temos a

Proposição 4.2.5. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupo de Lie compacto e $(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P})$ uma variedade compacta Kähler $\mathcal{G}$ -quantizável com mapa momento μ . Se a ação $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ é transitiva então:*

- (i) $\mu[\mathcal{M}] = \mathcal{O}$ é uma órbita coadjunta;
- (ii) $\mathcal{M} \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}$ é um recobrimento;
- (iii) a multiplicidade $m_{\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{M})}(\mathfrak{H}_{\text{hol}}(\mathcal{O}))$ é igual ao grau do recobrimento.

Demonstração. As implicações (i) e (ii) são a Prop. 4.1.5. A implicação (iii) segue de, localmente, termos $\mu^{-1}[U] \simeq \bigsqcup_{j=1}^k U$ para $U \subseteq \mathcal{O}$, de modo que temos uma decomposição $\mathcal{V}_{\mu^{-1}[U]} \simeq \bigoplus_{j=1}^k \mathcal{L}_U$ nos fibrados de pré-quantização respectivos $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ e $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}$. $\square$

⁶Ver Prop. 1.4.5.

4.3 Limites Semi-Clássicos

Idealmente, gostaríamos que o processo de quantização permitesse que resultados clássicos pudessem ser vistos como aproximações de resultados quânticos conforme $\hbar \rightarrow 0$, já que $\hbar$ é um parâmetro característico da escala em que fenômenos quânticos se tornam aparentes. Resultados que relacionam valores clássicos a valores quânticos por meio dessas aproximações são habitualmente chamados de **semi-clássicos**. As referencias seguidas nesta seção são [3], [4] e [6].

Fórmula Assintótica da Dimensão

Um resultado heurístico que surge de algumas ideias semi-clássicas é que a dimensão do espaço de estados quânticos pode ser estimado particionando o espaço de fase clássico em pequenas células com volume múltiplo de $\hbar$ e contando. Em termos de quantização holomorfa, isso pode ser entendido rigorosamente como a

Proposição 4.3.1. *Seja $(\mathcal{M}^{(2n)}, \omega; \mathcal{P})$ uma variedade compacta Kähler pré-quantizável. Fixada uma pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$ temos uma aproximação assintótica*

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hol}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}^{\otimes k}) \approx \frac{k^n}{n!} \text{vol}_{\hbar}(\mathcal{M})$$

com $k \rightarrow \infty$.

Demonstração. O teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch (ver [55]) nos diz que podemos calcular a característica de Euler holomorfa de um fibrado vetorial holomorfo $\mathcal{E}$

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{E}) := \sum_{j=0}^n (-1)^j \dim_{\mathbb{C}} H^j(\mathcal{M}, \mathcal{E}),$$

onde a cohomologia é de feixes e logo $H^0(\mathcal{M}, \mathcal{E}) = \text{Hol}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$, como a integral

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{E}) = \int_{\mathcal{M}} \text{ch}(\mathcal{E}) \text{td}(\mathcal{M}),$$

onde $\text{ch}(\mathcal{E})$ é a classe de Chern de $\mathcal{E}$ e $\text{td}(\mathcal{M})$ a classe de Todd. Para uma pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$, a classe de Chern $\text{ch}(\mathcal{L})$ pode ser representada como $\exp([\omega/2\pi\hbar])$, onde $[\omega/2\pi\hbar]$ é a classe de Čech integral. Para o produto tensorial $\mathcal{L}^{\otimes k}$ o mesmo vale com $k\omega$, i.e., $\text{ch}(\mathcal{L}^{\otimes k}) = \exp(k[\omega/2\pi\hbar])$. Não precisamos de detalhes sobre a classe de Todd, apenas que ela independe de k . Para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, os grupos de cohomologia superiores (H^j com $j > 0$) se anulam, e expandindo a exponencial em Taylor, obtemos

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hol}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}^{\otimes k}) \approx \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{n!} \left(k \frac{\omega}{2\pi\hbar} \right)^n = \frac{k^n}{n!} \text{vol}_{\hbar}(\mathcal{M})$$

já que a integral de r -formas sobre $\mathcal{M}$ se anula para $r \in \mathbb{N} \setminus \{2n\}$. $\square$

Pensando em $\hbar$ como um parâmetro de escala livre, o resultado acima pode ser visto como $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hol}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}(\hbar)) \approx \text{vol}_{\hbar}(\mathcal{M})/n!$ no limite $\hbar \rightarrow 0$.

Aproximação WKB e Símbolos Oscilatórios

Um processo conhecido para encontrar soluções aproximadas de alguns tipos de EDP é a **aproximação WKB**. Na física, esse método é utilizado para encontrar autoestados semi-clássicos da equação de Schrödinger. A quantização geométrica nos permite expressar esses estados em termos de objetos geométricos associados a eles.

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética e $\mathcal{P}$ uma polarização complexa. Como vimos anteriormente, a quantização metaplética de $(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P})$, quando possível, está definida apenas na álgebra de observáveis $\mathcal{Obs}(\mathcal{M}, \omega; \mathcal{P})$ que preservam $\mathcal{P}$. Para uma polarização Kähler (ou até totalmente complexa) esses observáveis correspondem aos campos de Killing da métrica, enquanto que para uma polarização real são as funções afins nas fibras da polarização. Em ambos os modelos, esses observáveis não cobrem exemplos importantes.

Considere a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} S = -\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 S = \mathbf{Q}(H)S$$

para uma partícula livre de massa unitária em $\mathbb{R}^n$, associado ao Hamiltoniano $H(q, p) = \frac{1}{2} \|p\|^2$ (na polarização vertical de $T^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{2n}$). Considerando as funções de onda metapléticas $s\sqrt{\text{dvol}}$, $s \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, os *estados WKB* são funções de onda da forma $S_\hbar = e^{iw(q)/\hbar} a(q, \hbar) \sqrt{\text{dvol}}$, onde $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ e $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. A equação de autovalor

$$\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 S + ES = 0$$

nos dá os autoestados estacionários de $\mathbf{Q}(H)$. Colocando os estados $S_\hbar$ na equação de autovalor, no limite $\hbar \rightarrow 0$ obtemos

$$\begin{aligned} H(q, \text{grad } w(q)) &= E \text{ em ordem } \hbar^0 \\ &\text{e} \\ \mathcal{L}_{\text{grad } w}(a(q, \hbar)^2 \text{dvol}) &= \mathbf{0} \text{ em ordem } \hbar, \end{aligned}$$

onde $\text{grad } w = X_H$ é o campo Hamiltoniano associado. Essas equações são restrições em objetos geométricos de $T^*(\mathbb{R}^n)$ que definem $S_\hbar$. Essas mesmas equações surgem para Hamiltonianos gerais, quantizados a partir da prescrição de Schrödinger.

Seja $(\mathcal{M}^{(2n)}, \omega)$ uma variedade simplética com pré-quantização $(\mathcal{L}, \nabla)$ e estrutura metaplética $\sqrt{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Dada uma subvariedade Lagrangiana $\Lambda \subset \mathcal{M}$, temos o fibrado de linhas complexo $\bigwedge^n T^*(\Lambda)^\mathbb{C} \rightarrow \Lambda$ cujas seções $\Omega_\mathbb{C}^n(\Lambda)$ podem ser identificadas com as formas $\mu \in \Omega_\mathbb{C}^n(\mathcal{M})$ com $\mu|_{T(\Lambda)} = \mathbf{0}$ (a inversa da restrição é o pullback pela inclusão $\mathbf{i} : \Lambda \rightarrow \mathcal{M}$). Similarmente ao que foi feito para polarizações, temos um pareamento sesquilinear em $\Omega_\mathbb{C}^n(\Lambda)$ dado por

$$i^n \langle \mu_1 | \mu_2 \rangle \text{dvol}_\hbar = \overline{\mu_1} \wedge \mu_2.$$

A inclusão $\mathbf{i} : \Lambda \rightarrow \mathcal{M}$ nos permite considerar os pullbacks

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i}^* \sqrt{\mathcal{K}} & \longrightarrow & \sqrt{\mathcal{K}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{i}^* \mathcal{L}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{\mathbf{i}} & \mathcal{M} \end{array}$$

de modo que $\mathbf{i}^* \sqrt{\mathcal{K}} \rightarrow \Lambda$ é uma raiz quadrada de $\bigwedge^n T^*(\Lambda)^\mathbb{C}$. A derivada de Lie em $\sqrt{\det}(\Lambda) := \mathbf{i}^* \sqrt{\mathcal{K}}$ é definida como para polarizações

$$\mathcal{L}_X \nu^2 = \nu(\mathcal{L}_X \nu).$$

Denotando $\mathcal{L}(\Lambda) := \mathbf{i}^* \mathcal{L}$ e $\sqrt{\Omega_\mathbb{C}}(\Lambda) := \Gamma_\Lambda(\sqrt{\det}(\Lambda))$, definimos uma **função de onda WKB** de $(\mathcal{M}, \omega)$, como uma tripla (Λ, s, ν) em que $s \in \Gamma_\Lambda(\mathcal{L}(\Lambda))$ é covariantemente constante, i.e., $\nabla_{T(\Lambda)} s = \mathbf{0}$, satisfaz $\langle s | s \rangle = 1$ e $\nu \in \sqrt{\Omega_\mathbb{C}}(\Lambda)$. Dada $H \in C^\infty(\mathcal{M})$, dizemos que (Λ, s, ν) é um **autoestado WKB de H** se $H|_\Lambda$ é constante e $\mathcal{L}_{X_H} \nu = \mathbf{0}$. Se tivermos uma polarização real $\mathcal{P} < T(\mathcal{M})$ transversa, i.e., $T(\Lambda) \oplus \mathcal{P}|_\Lambda = T_\Lambda(\mathcal{M})$, podemos recuperar uma $\mathcal{P}$ -função de onda a partir de (Λ, s, ν) , estendendo s e ν globalmente por transporte paralelo ao longo das folhas de $\mathcal{P}$, de modo que o produto estendido $s\nu$ é uma $\mathcal{P}$ -função de onda.

Mais geralmente, para polarizações reais $\mathcal{P}$ não-transversas, a tripla (Λ, s, ν) determina apenas uma $\mathcal{P}$ -função *distribucional*. Considere o subespaço $\text{WKB}(\Lambda; \mathcal{P})$ das $\mathcal{P}$ -funções de onda WKB $\widetilde{s_0 \nu_0}$ geradas por triplas (Λ_0, s_0, ν_0) em que ν_0 tem suporte compacto e Λ_0 é transversa a ambos Λ e $\mathcal{P}$. Definimos o mapa $S_h : \text{WKB}(\Lambda; \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$S_h(\widetilde{s_0 \nu_0}) := \sum_{x \in \Lambda \cap \Lambda_0} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{n/2} \langle s | s_0 \rangle(x) \langle \nu | \nu_0 \rangle(x),$$

onde a interseção $\Lambda \cap \Lambda_0$ é discreta pela transversalidade. O mapa S_h é linear apenas no limite $\hbar \rightarrow 0$, e não podemos chama-lo de *distribuição* apropriadamente. Apenas em alguns casos particulares é possível verificar que essa construção nos dá, de fato, uma distribuição em $\mathcal{Q} = \mathcal{M}/\mathcal{P}$. Mais detalhes em [3] e [4].

Agora, vamos considerar a construção das funções de onda oscilatórias em um espaço de fase canônico $T^*(\mathcal{Q})$, que é o objeto principal de estudo em [6], onde podem ser encontrados os detalhes da exposição a seguir.

O Exemplo 2.3.4 nos mostra os dois tipos de subvariedades Lagrangianas mais simples de $T^*(\mathcal{Q})$. Em geral, temos o seguinte. Seja $S \subseteq \mathbb{R}^d$ um aberto para algum $d \in \mathbb{N}$ e $\phi \in C^\infty(\mathcal{Q} \times S)$. Definimos o **conjunto crítico** $C_\phi \subseteq \mathcal{Q} \times S$ por

$$C_\phi := \{(q, s) \in \mathcal{Q} \times S \mid d_S \phi(q, s) = \mathbf{0}\}$$

onde $d_S \phi = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \phi}{\partial s^j} ds^j$ é a diferencial parcial em relação a S . Temos também diferencial parcial $d_{\mathcal{Q}} \phi \in \Gamma_{\mathcal{Q} \times S}(\text{proj}_{\mathcal{Q}}^* T^*(\mathcal{Q}))$ com $d\phi = d_{\mathcal{Q}} \phi + d_S \phi$. Fica definido um mapa $G_\phi : C_\phi \rightarrow T^*(\mathcal{Q})$ por

$$G_\phi(q, s) := d_{\mathcal{Q}} \phi_{(q, s)}.$$

Se as diferenciais $d\left(\frac{\partial\phi}{\partial s^j}\right)$ forem linearmente independentes, então a imagem $\Lambda_\phi = G_\phi[C_\phi]$ será uma subvariedade Lagrangiana exata (imagem de diferenciais) de $T^*(\mathcal{Q})$. Nesse caso, dizemos que ϕ é **criticamente transversa**. Dada uma variedade Lagrangiana $\Lambda \subset T^*(\mathcal{Q})$, uma **tripla geradora** de Λ é uma tripla $(\mathcal{Z}, \pi, \phi)$ em que $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Q}$ é uma variedade fibrada, $\phi \in C^\infty(\mathcal{Z})$ e existem coordenadas locais em que ϕ é criticamente transversa. Dizemos que ϕ é uma **função geradora de Λ em relação a fibração $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Q}$** .

Dada uma tripla geradora, um **símbolo local para $(\mathcal{Z}, \pi, \phi)$** é simplesmente uma função de suporte compacto $a \in C_c^\infty(\mathcal{Z} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos o espaço $\text{WKB}_c^k(\mathcal{Q}, \Lambda; \mathcal{Z}, \pi, \phi)$ das $\frac{1}{2}$ -densidades sobre $\mathcal{Q}$ da forma

$$\mu = \hbar^{k-d/2} \pi_*(a(\cdot, \hbar) e^{i\phi/\hbar} \nu)$$

onde $d = \text{rank } \mathcal{Z} = \dim \mathcal{Z} - \dim \mathcal{Q}$, $a \in C_c^\infty(\mathcal{Z} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ é um símbolo local, ν é uma $\frac{1}{2}$ -densidade não-singular sobre $\mathcal{Z}$ com suporte compacto em cada fibra, de modo que podemos definir o pushforward $\pi_* \nu \in |\Omega|^{1/2}(\mathcal{Q})$ por integração nas fibras, que é também não-singular. Definimos o espaço de **funções de onda WKB k -oscilatórias sobre Λ em relação a $(\mathcal{Z}, \pi, \phi)$** por

$$\text{WKB}^k(\mathcal{Q}, \Lambda; \mathcal{Z}, \pi, \phi) := \{ \mu \in |\Omega|^{1/2}(\mathcal{Q}) \mid \forall f \in C_c^\infty(\mathcal{Q}), f\mu \in \text{WKB}_c^k(\mathcal{Q}, \Lambda; \mathcal{Z}, \pi, \phi) \}.$$

Em coordenadas locais $\mathcal{Z}|_U \simeq U \times S$, uma função oscilatória se escreve como uma integral oscilatória

$$\mu(q, \hbar) = \left(\hbar^{k-d/2} \int_S a(q, s, \hbar) e^{i\phi(q,s)/\hbar} ds \right) \nu$$

onde ds é o volume euclidiano em $S \subseteq \mathbb{R}^d$ e $\nu \in |\Omega|^{1/2}(\mathcal{U})$ é não-singular.

Para uma subvariedade Lagrangiana genérica $\Lambda \subset T^*(\mathcal{Q})$ existem coberturas abertas localmente finitas $\{\Lambda \cap U_j\}_{j \in I}$ tais que $\Lambda \cap U_j$ é gerada por $\phi_j \in C^\infty(\mathcal{Z}_j)$ relativa a fibrações $\pi_j : \mathcal{Z}_j \rightarrow U_j$. Definimos $\text{WKB}_c^k(\mathcal{Q}, \Lambda)$ como as $\frac{1}{2}$ -densidades sobre $\mathcal{Q}$ que podem ser escritas como uma soma finita

$$\mu = \sum_{k=1}^{\ell} \mu_{j_k}$$

onde $\mu_{j_k} \in \text{WKB}_c^k(\mathcal{Q}, \Lambda_{j_k}; \mathcal{Z}_{j_k}, \pi_{j_k}, \phi_{j_k})$ e $j_1, \dots, j_\ell \in I$. Definimos as **funções de onda WKB k -oscilatórias sobre Λ** por

$$\text{WKB}^k(\mathcal{Q}, \Lambda) := \{ \mu \in L^2(\mathcal{Q}) \mid \forall f \in C_c^\infty(\mathcal{Q}), f\mu \in \text{WKB}_c^k(\mathcal{Q}, \Lambda) \}.$$

A ideia que esse processo todo dá é definir a quantização de observáveis como *operadores pseudo-diferenciais* em $L^2(\mathcal{Q})$, de modo que as funções de onda oscilatórias correspondem às projeções $\langle \mu | \cdot \rangle_{L^2} \frac{\mu}{\|\mu\|_{L^2}}$. Analogamente ao símbolo de operadores diferenciais⁷, podemos definir um símbolo para esses operadores pseudo-diferenciais, tomando valores em seções de um fibrado de linhas $\mathbb{L} \rightarrow \Lambda$ correspondente ao feixe

⁷Seção A.8.

$\Lambda \cap T_U^*(\mathcal{Q}) \mapsto \text{WKB}^k(U, \Lambda \cap T_U^*(\mathcal{Q})) / \text{WKB}^{k+1}(U, \Lambda \cap T_U^*(\mathcal{Q}))$. Para as projeções das funções de onda, esse símbolo é dado localmente por

$$\sigma_\phi(\mu)(\alpha) = a(q, s, 0), \text{ onde } (q, s) \in C_\phi \text{ corresponde a } \alpha \in \Lambda.$$

Nesse caso, os símbolos devem ser interpretados como observáveis semi-clássicas, ou clássicas módulo potências de $\hbar$, que podem ser quantizadas a operadores pseudo-diferenciais.

Considere um grupo de Lie compacto conexo $\mathcal{G}$ e uma órbita coadjunta $\mathcal{O}$. Considerando a identificação $T^*(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \times \mathfrak{g}^*$, denotamos por $\Lambda_{\mathcal{O}}$ a subvariedade Lagrangiana definida por

$$\Lambda_{\mathcal{O}} := \{(g, \nu) \in \mathcal{G} \times \mathfrak{g}^* \mid \nu \in \mathcal{O}, g\nu = \nu\}.$$

Fixado $\eta \in \mathcal{O} = \mathcal{O}_\eta$, temos um difeomorfismo $\Lambda_{\mathcal{O}_\eta} \simeq \text{Stab}(\eta) \times \mathcal{O}_\eta$. Suponha que $\mathcal{O}_\eta$ é uma órbita integral, correspondente a uma unirrep. de peso máximo $m\alpha$, onde α é uma raiz positiva integral e seja $\chi_\eta : \text{Stab}(\eta) \rightarrow S^1$ o caracter garantido pela integralidade. Seja $\tau_m : \mathcal{G} \rightarrow S^1$ o caracter multiplicativo associado a unirep. de $\mathcal{G}$, ou seja, o determinante da rep. induzida por χ_η . Considerando a fibração $\pi : \Lambda_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{G} : (g, \nu) \mapsto g$, a função $\phi_m = \pi^* \gamma_m : \Lambda_{\mathcal{O}_\eta} \rightarrow S^1$ encapsula as funções geradoras de $\Lambda_{\mathcal{O}}$. Utilizando a *fórmula de Weyl* para caracteres ([6]), pode-se mostrar que fica definida uma função de onda oscilatória

$$\mu(g, \hbar) = m\pi_*(\chi_\eta^m e^{\pi i \Delta} \sqrt{|\text{dvol}_{\mathcal{O}}|}) = \tau_m(g) \sqrt{|dg|} \in |\Omega|^{1/2}(\mathcal{G}),$$

para $\hbar = 1/m$, $m \in \mathbb{Z}$, cujo símbolo é a $\frac{1}{2}$ -densidade $\sigma(\mu) \in |\Omega|^{1/2}(\Lambda_{\mathcal{O}})$,

$$\sigma(\mu) = m e^{\pi i \Delta} \sqrt{|\text{dvol}_{\mathcal{O}}|},$$

onde $\Delta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ é a soma de raízes positivas associadas ao toro $\mathcal{T} \subseteq \text{Stab}(\eta)$. Essa função de onda oscilatória é um *character distributional* para a representação irredutível associada a órbita $\mathcal{O}$. Mais detalhes em [6].

Apêndice A

Apêndice: Teoria de Fibrados e Conexões

As referências para este apêndice são [28], [29], [30], [31], [32], [42], [43], [36], [33], [?], [41], [45], [27], [46] e [48].

A.1 Cohomologia de Čech

Seja X um espaço topológico e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X . Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos um **n -simplexo** de $\mathcal{U}$ como uma família ordenada $\sigma = (U_i)_{i=0}^n$ de abertos $U_i \in \mathcal{U}$ tais que $\bigcap_{i=0}^n U_i \neq \emptyset$. Denotamos por $|\sigma| := \bigcap_{i=0}^n U_i$ a interseção de elementos de um n -simplexo $\sigma = (U_i)_{i=0}^n$ e por $N_n(X, \mathcal{U})$ o conjunto de n -simplexos, também chamado de **n -nervo** de $\mathcal{U}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos o mapa $\partial_j : N_n(X, \mathcal{U}) \rightarrow N_{n-1}(X, \mathcal{U})$ por

$$\partial_j \sigma := (U_i)_{i=0, i \neq j}^n \quad (j = 0, \dots, n)$$

para cada $\sigma \in N_n(X, \mathcal{U})$.

Consideremos agora um feixe de grupos abelianos $\mathcal{A} : \text{Op}(X) \rightarrow \text{Ab}$ sobre X . Uma **n -cocadeia de Čech em relação a $\mathcal{U}$ com coeficientes em $\mathcal{A}$** é uma família indexada $a = (a_\sigma)_{\sigma \in N_n(X, \mathcal{U})}$ com $a_\sigma \in \mathcal{A}(|\sigma|)$ para cada $\sigma \in N_n(X, \mathcal{U})$. Denotamos o conjunto dessas n -cocadeias por $\check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A})$, que com as operações componente-a-componente, forma o produto direto de grupos

$$\check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) = \prod_{\sigma \in N_n(X, \mathcal{U})} \mathcal{A}(|\sigma|).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos um operador de cobordo $\delta_n : \check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \rightarrow \check{C}^{n+1}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A})$ por

$$(\delta_n a)_\sigma := \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_j \sigma|}) a_{\partial_j \sigma}$$

em que $\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_j \sigma|}$ é a inclusão de $|\sigma| = \bigcap_{i=0}^{n+1} U_i$ em $|\partial_j \sigma| = \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n+1} U_i$ com $\sigma = (U_i)_{i=0}^{n+1}$ e $\mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_j \sigma|}) : \mathcal{A}(|\partial_j \sigma|) \rightarrow \mathcal{A}(|\sigma|)$ o mapa de restrição associado. Assim, o par

$(\check{C}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}), \delta)$, com

$$\check{C}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A})$$

e δ definido em cada componente por δ_n , forma um complexo de cocadeias chamado de **complexo de Čech relativo a $\mathcal{U}$ com coeficientes em $\mathcal{A}$** . Vamos verificar que $\check{C}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A})$ é de fato um complexo: dado $a \in \check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A})$ e $\sigma \in N_{n+2}(X, \mathcal{U})$ calculamos

$$\begin{aligned} (\delta^2 a)_\sigma &= \sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_j \sigma|}) (\delta a)_{\partial_j \sigma}, \\ (\delta a)_{\partial_j \sigma} &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\partial_j \sigma|, |\partial_i \partial_j \sigma|}) a_{\partial_i \partial_j \sigma}, \\ \therefore (\delta^2 a)_\sigma &= \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_j \sigma|}) \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\partial_j \sigma|, |\partial_i \partial_j \sigma|}) a_{\partial_i \partial_j \sigma} \\ &= \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_i \partial_j \sigma|}) a_{\partial_i \partial_j \sigma} \\ &= \sum_{j=0}^{n+2} \left(\sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_i \partial_j \sigma|}) a_{\partial_i \partial_j \sigma} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j-1} \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_i \partial_j \sigma|}) a_{\partial_i \partial_j \sigma} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+2} \left(\sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_i \partial_j \sigma|}) a_{\partial_i \partial_j \sigma} - \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_i \partial_j \sigma|}) a_{\partial_i \partial_j \sigma} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tendo o complexo de cocadeias de Čech

$$\check{C}^0(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} \check{C}^{n+1}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

ficam definidos os cociclos e cobordos

$$\begin{aligned} \check{Z}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) &:= \ker \delta_n \\ \check{B}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) &:= \text{img } \delta_{n-1} \end{aligned}$$

e os espaços de cohomologia $\check{H}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) := \check{Z}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) / \check{B}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A})$, resultando na sequência exata

$$\check{H}^0(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \check{H}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^{n+1}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

que é chamada de **cohomologia de Čech relativa a $\mathcal{U}$ com coeficientes em $\mathcal{A}$** . Considere agora o conjunto

$$\text{Cober}(X) := \left\{ \mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_X) \mid \bigcup \mathcal{U} = X \right\}$$

de todas as coberturas abertas de X . Em $\text{Cober}(X)$ definimos uma ordem $\preceq$ por

$$\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} :\iff \forall V \in \mathcal{V}, \exists U \in \mathcal{U}, V \subseteq U,$$

ou seja, $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ se e só se $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$. Sendo uma pré-ordem, podemos considerar $\text{Cober}(X)$ como uma categoria naturalmente. Ainda mais, dadas duas coberturas $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, a cobertura $\mathcal{W} = \{U \cap V\}_{U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}}$ é um refinamento de ambas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$. Desse modo $\text{Cober}(X)$ é um conjunto direcionado.

Agora, dados $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, para cada $V \in \mathcal{V}$ escolhemos um $U_V \in \mathcal{U}$ com $V \subseteq U_V$. Mais precisamente, existe uma função $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ com $V \subseteq f(V)$, chamada função de refinamento. Para cada função de refinamento definimos um mapa $f^\# : \check{C}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \rightarrow \check{C}(X, \mathcal{V}; \mathcal{A})$ por

$$(f^\# a)_\sigma = a_{f(\sigma)}$$

onde $\sigma = (V_i)_{i=0}$ e $f(\sigma) := (f(V_i))_{i=0}^n$, para cada $f \in \check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A})$, $\sigma \in N_n(X, \mathcal{V})$ e $n \in \mathbb{N}$. Para ver que $f^\#$ é de fato um morfismo de complexos, basta calcular

$$\begin{aligned} (f^\# \delta a)_\sigma &= (\delta a)_{f(\sigma)} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|f(\sigma)|, |\partial_j f(\sigma)|}) a_{\partial_j f(\sigma)} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \mathcal{A}(\mathbf{i}_{f(|\sigma|), f(|\partial_j \sigma|)}) a_{f(\partial_j \sigma)} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|\sigma|, |\partial_j \sigma|}) (f^\# a)_{\partial_j \sigma} \\ &= (\delta f^\# a)_\sigma. \end{aligned}$$

Sendo um mapa de complexos, $f^\#$ induz um mapa nas cohomologias $f^* : \check{H}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \rightarrow \check{H}(X, \mathcal{V}; \mathcal{A})$.

Proposição A.1.1. *Seja X um espaço topológico e $\mathcal{A}$ um feixe de grupos abelianos sobre X . Dadas duas coberturas $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \text{Cober}(X)$ tais que $\mathcal{V}$ é refinamento de $\mathcal{U}$, para quaisquer funções de refinamento $f, g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ temos $f^* = g^*$.*

Demonstração. Basta mostrar que $f^\#$ e $g^\#$ são algebricamente homotópicos, i.e., existem mapas $h_n : \check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \rightarrow \check{C}^{n-1}(X, \mathcal{V}; \mathcal{A})$ tais que $f_n^\# - g_n^\# = \delta_{n-1} h_n - h_{n+1} \delta_n$.

$$\begin{array}{ccc} \check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^{n+1}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \\ & \swarrow h \quad \downarrow f^\# - g^\# \quad \searrow h & \\ \check{C}^{n-1}(X, \mathcal{V}; \mathcal{A}) & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^n(X, \mathcal{V}; \mathcal{A}) \end{array}$$

Definimos os mapas h por

$$(h_n a)_\sigma := \sum_{j=0}^n (-1)^j \mathcal{A}(\mathbf{i}_{|f(\sigma)|, |\partial_j f(\sigma)|}) a_{(f*g)_j(\sigma)}$$

onde $(f*g)_j \sigma = (f(V_0), \dots, f(V_j), g(V_j), \dots, g(V_n))$, para cada cocadeia $a \in \check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{A})$ e simplexo $\sigma = (V_i)_{i=0}^n \in N_n(X, \mathcal{V})$. $\square$

Desse modo, se $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$ obtemos um único morfismo $\check{H}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \rightarrow \check{H}(X, \mathcal{V}; \mathcal{A})$ entre as cohomologias.

Fixado um espaço topológico X e um feixe de grupos abelianos $\mathcal{A} : \text{Op}(X) \rightarrow \text{Ab}$, definimos a **cohomologia de Čech sobre X com coeficientes em $\mathcal{A}$** como o limite direto

$$\check{H}(X; \mathcal{A}) := \varinjlim \check{H}(X, -, \mathcal{A})$$

do functor $\text{Cober}(X) \rightarrow \text{CoCh}(\mathbb{Z})$ dado por $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \mapsto (\check{H}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \rightarrow \check{H}(X, \mathcal{V}; \mathcal{A}))$.

Proposição A.1.2. *Seja X um espaço topológico. Para qualquer feixe de grupos abelianos $\mathcal{A}$ em X , temos um isomorfismo natural*

$$\check{H}^0(X; \mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}(X).$$

Demonstração. Basta notar que $\check{H}^0(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) = \check{Z}^0(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}(X)$ independente da cobertura $\mathcal{U}$. De fato, dado um 0-cociclo $(a_U)_{U \in \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}}$ podemos definir uma seção $a \in \mathcal{A}(X)$ tal que $a|_U = a_U$. Como

$$a_U|_{U \cap V} - a_V|_{U \cap V} = \mathbf{0}$$

para $U \cap V \neq \emptyset$, a seção a está bem definida. Por outro lado, dada uma seção $a \in \mathcal{A}(X)$, definimos o 0-cociclo pela mesma equação $a|_U = a_U$. Agora, se escolhermos um refinamento $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, os cociclos relacionados pelo morfismo $\check{H}^0(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{V}; \mathcal{A})$ definem a mesma seção em $\mathcal{A}(X)$, e vice versa. $\square$

Seja X um espaço topológico. Dados dois feixes de grupos abelianos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sobre X , um homomorfismo de feixes $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ define um homomorfismo de complexos $\check{C}(X, \mathcal{U}; \varphi) : \check{C}(X, \mathcal{U}; \mathcal{A}) \rightarrow \check{C}(X, \mathcal{U}; \mathcal{B})$ por

$$(a_\sigma)_{\sigma \in N_n(X, \mathcal{U})} \longmapsto (\varphi|_\sigma(a_\sigma))_{\sigma \in N_n(X, \mathcal{U})}.$$

Desse modo, obtemos um functor covariante $\check{C}(X, \mathcal{U}; -) : \text{Sh}_X(\text{Ab}) \rightarrow \text{CoCh}(\mathbb{Z})$, que desce para a cohomologia $\check{H}(X, \mathcal{U}; -) : \text{Sh}_X(\text{Ab}) \rightarrow \text{CoCh}(\mathbb{Z})$. Como os morfismos em $\text{Sh}_X(\text{Ab})$ comutam com as restrições, obtemos ainda um functor

$$\begin{aligned} \check{H}(X; -) : \text{Sh}_X(\text{Ab}) &\rightarrow \text{CoCh}(\mathbb{Z}) \\ &: (\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}) \mapsto (\check{H}(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{\check{H}(X; \varphi)} \check{H}(X; \mathcal{B})) \end{aligned}$$

Dado $\beta \in \check{H}(X; \mathcal{B})$, os elementos de $\check{H}(X; \varphi)^{-1}[\beta] \subseteq \check{H}(X; \mathcal{A})$ são chamados **φ -refinamentos de β** . Em particular, para um n -cociclo $[b] \in \check{H}^n(X; \mathcal{B})$, $b = (b_\sigma)_{\sigma \in N_n(X, \mathcal{U})}$, vemos que um φ -refinamento de $[b]$ é da forma

$$[a] \in \check{H}^n(X; \mathcal{A}) \text{ com } a = (a_\sigma)_{\sigma \in N_n(X, \mathcal{U})}, \varphi|_\sigma(a_\sigma) = b_\sigma.$$

Para feixes de grupos não-abelianos, a cohomologia de Čech só pode ser definida de forma simples até grau 1, e não é exatamente o sentido usual de cohomologia¹. Dado um feixe de grupos $\mathcal{G} : \text{Op}(X) \rightarrow \text{Grp}$ definimos os grupos de cocadeias

¹Ver [48].

$\check{C}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{G})$, $n = 0, 1, 2$, por produto direto dos $\mathcal{G}(|\sigma|)$, como anteriormente, e definimos os mapas δ_0, δ_1 por

$$\begin{aligned} (\delta_0 a)_{(U,V)} &:= a_V|_U (a_U|_V)^{-1}, \\ (\delta_1 g)_{(U,V,W)} &:= g_{(V,W)}|_{U \cap V \cap W} (g_{(U,W)}|_{U \cap V \cap W})^{-1} g_{(U,V)}|_{U \cap V \cap W}, \end{aligned}$$

para $a = (a_U)_{U \in N_0(X, \mathcal{U})}$ e $g = (g_{(U,V)})_{(U,V) \in N_1(X, \mathcal{U})}$. Denotando $\check{Z}^n(X, \mathcal{U}; \mathcal{G}) := \ker \delta_n$, $n = 0, 1$, definimos uma ação à esquerda $\check{Z}^0(X, \mathcal{U}; \mathcal{G}) \curvearrowright \check{Z}^1(X, \mathcal{U}; \mathcal{G})$ por

$$(a \cdot g)_{(U,V)} := a_U|_{U \cap V} g_{(U,V)} (a_V|_{U \cap V})^{-1}.$$

A **cohomologia de Čech sobre X em relação a $\mathcal{U}$ e coeficientes em $\mathcal{G}$** é definida em grau 0 e 1 por

$$\begin{aligned} \check{H}^0(X, \mathcal{U}; \mathcal{G}) &:= \check{Z}^0(X, \mathcal{U}; \mathcal{G}) \\ \check{H}^1(X, \mathcal{U}; \mathcal{G}) &:= \check{Z}^1(X, \mathcal{U}; \mathcal{G}) / \check{Z}^0(X, \mathcal{U}; \mathcal{G}) \end{aligned}$$

onde o quociente é pela ação definida acima, e o mapa $\check{H}^0 \rightarrow \check{H}^1$ é constante na classe da identidade de $\check{Z}^1$. Note que $\check{H}^1(X, \mathcal{U}; \mathcal{G})$ não é um grupo e apenas um conjunto. Definimos a **cohomologia de Čech sobre X com coeficientes em $\mathcal{G}$** , em grau 0 e 1, como limite direto nos refinamentos

$$\begin{aligned} \check{H}^0(X; \mathcal{G}) &:= \varinjlim \check{H}^0(X, -; \mathcal{G}), \\ \check{H}^1(X; \mathcal{G}) &:= \varinjlim \check{H}^1(X, -; \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Novamente, $\check{H}^0$ acima é um grupo enquanto $\check{H}^1$ é apenas um conjunto. Assim como no caso abeliano, temos a

Proposição A.1.3. *Seja X um espaço topológico. Para todo feixe de grupos $\mathcal{G}$ sobre X , temos um isomorfismo natural*

$$\check{H}^0(X; \mathcal{G}) \simeq \mathcal{G}(X).$$

Demonstração. Mesma demonstração do caso abeliano. □

Exemplo A.1.1. Dado um grupo topológico G , para todo espaço topológico X podemos definir o **complexo de Čech com coeficientes em G** por

$$\check{C}(X; G) := \check{C}(X; C_X(-, G))$$

onde $C_X(-, G) : U \mapsto C(U, G)$ é o feixe de funções contínuas de X em G . Em particular:

- se G tem a topologia trivial, $C(U, G) = \mathcal{F}(U, G)$ tem todas as funções;
- se G tem a topologia discreta, $C(U, G) = \underline{G}_X(U)$ tem as funções localmente constantes e $C_X(-, G)$ é o feixe constante $\underline{G}_X$.

♦

Exemplo A.1.2. Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$ variedades suaves. A cohomologia de Čech $\check{H}(\mathcal{M}; \text{Diff}(\mathcal{F}))$ do complexo não-abeliano $\check{C}(\mathcal{M}; \text{Diff}(\mathcal{F}))$, onde vemos $\text{Diff}(\mathcal{F})$ com a topologia trivial, surge naturalmente na teoria de fibrados, sendo essencial no resultado classificatório Prop. A.2.4. ♦

Exemplo A.1.3. Para uma variedade $\mathcal{M}$ e um grupo de Lie $\mathcal{G}$, definimos a **cohomologia de Čech com coeficientes suaves em $\mathcal{G}$** por $\check{H}_{C^\infty}(\mathcal{M}; \mathcal{G}) := \check{H}(\mathcal{M}; C_{\mathcal{M}}^\infty(-, \mathcal{G}))$. ♦

A.2 Fibrados

Uma **variedade fibrada** é simplesmente uma submersão suave sobrejetiva $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$. A variedade $\mathcal{E}$ é chamada de **espaço total** e $\mathcal{M}$, de **espaço base**. Para cada $p \in \mathcal{M}$, a pré-imagem $\pi^{-1}[p] =: \mathcal{E}_p$ é chamada de **fibra passando por p** . Sendo uma submersão suave, cada fibra é naturalmente uma subvariedade do espaço total com dimensão $\dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{M}$. A dimensão das fibras também é chamada de **posto** ou **rank** de $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$.

Dadas duas variedades fibradas $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ e $\mu : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{N}$, definimos um **mapa fibrado** como um par (f, f_B) de aplicações suaves $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ e $f_B : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ com $\mu \circ f = f_B \circ \pi$, ou seja, comutando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f_B} & \mathcal{N} \end{array}$$

Dizemos que f **recobre** f_B . Note que, como π é sobrejetiva, a função f_B fica univocamente determinada por f , sujeita à condição de recobrimento. De modo equivalente, f é um mapa fibrado recobrindo f_B se $f[\mathcal{X}_p] \subseteq \mathcal{Y}_{f_B(p)}$ para todo $p \in \mathcal{M}$. Ficam definidas funções $f_p : \mathcal{X}_p \rightarrow \mathcal{Y}_{f_B(p)}$ que são restrições de f nas fibras.

Denotaremos por FM a **categoria de variedades fibradas** com mapas fibrados como morfismos. Fixada uma variedade $\mathcal{M}$, denotamos ainda por $\text{FM}_{\mathcal{M}}$ a categoria de variedades fibradas com espaço base $\mathcal{M}$ e morfismos recobrindo a identidade $\text{id}_{\mathcal{M}}$. Os isomorfismos de $\text{FM}_{\mathcal{M}}$ são chamados de **equivalências**.

Seja $\pi : \mathcal{E}^{(m+n)} \rightarrow \mathcal{M}^{(m)}$ uma variedade fibrada. Dizemos que uma carta $(V, \mathbf{y})$ de $\mathcal{E}$ está **adaptada a π** se existe uma carta $(U, \mathbf{x})$ de $\mathcal{M}$ tal que $\pi[V] = U$ e $\mathbf{x} \circ \pi = \text{proj}_m \circ \mathbf{y}$, onde $\text{proj}_m : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção $\text{proj}_m(a^1, \dots, a^{m+n}) = (a^1, \dots, a^m)$. Note que sob a condição de ser uma carta adaptada, $(V, \mathbf{y})$ define $(U, \mathbf{x})$ de modo único. Por isso, é comum denotar o sistema de coordenadas $\mathbf{y}$ por $(u^1, \dots, u^m, y^1, \dots, y^n)$ com $u^i = \mathbf{x}^i \circ \pi$.

Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ uma sobrejeção suave. Um **atlas fibrado** para π é um atlas suave $\mathcal{A}$ para $\mathcal{E}$ tal que as cartas de $\mathcal{A}$ são todas adaptadas a π . É fácil ver que a existência de um atlas fibrado para π é equivalente a ser uma variedade fibrada, já que a existência de cartas adaptadas equivale a π ser uma submersão.

Agora considerando $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ apenas uma função suave, definimos o conceito de **seção**. Uma **seção local** de π é uma aplicação $s : U \rightarrow \mathcal{E}$ em um aberto $U \subseteq \mathcal{M}$ tal que $\pi \circ s = \text{id}_U$. Denotamos por $\Gamma_U(\pi)$ o conjunto das seções suaves de π definidas em U . Se $U = \mathcal{M}$, dizemos que s é uma **seção global**.

Proposição A.2.1. *Uma sobrejeção suave $\pi : \mathcal{E}^{(m+n)} \rightarrow \mathcal{M}^{(m)}$ é uma variedade fibrada se e somente se, para todo $v \in \mathcal{E}$ existe uma seção local $s \in \Gamma_U(\pi)$ tal que $v \in \text{Im } s$.*

Demonstração. Suponhamos que π seja uma variedade fibrada. Dado $v \in \mathcal{E}$, tomamos uma carta adaptada $(V, \mathbf{y})$, com $(U, \mathbf{x})$ sua carta correspondente em $\mathcal{M}$. Seja $\iota : \mathbf{x}[U] \rightarrow \mathbf{y}[V]$ a função dada por

$$\iota(a^1, \dots, a^m) := (a^1, \dots, a^m, v^1, \dots, v^n),$$

onde $v^i = y^i(v)$, $i = 1, \dots, n$. Desse modo, a função $s_v : U \rightarrow \mathcal{E}$, dada por

$$s_v(p) := \mathbf{y}^{-1} \circ \iota \circ \mathbf{x}(p) = \mathbf{y}^{-1}(x^1(p), \dots, x^m(p), v^1, \dots, v^n),$$

é uma seção suave de π com $s_v(\pi(v)) = v$.

Reciprocamente, suponhamos que existam seções suaves tomando valores em todo elemento de $\mathcal{E}$. Dado $v \in \mathcal{E}$, seja $s : U \rightarrow \mathcal{E}$ uma seção local com $s(p) = v$, $p = \pi(v)$. Como $\pi \circ s = \mathbf{i}_U$, sabemos que $\pi_* \circ s_* = \mathbf{i}_{T(U)}$ é a inclusão do fibrado tangente de U no de $\mathcal{M}$. Em particular, $\pi_{*v} \circ s_{*p}$ é a identidade de $T_p(U) = T_p(\mathcal{M})$, e logo π_{*v} é sobrejetiva. Pela arbitrariedade de $v \in \mathcal{E}$, segue que π é uma submersão. $\square$

Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ uma variedade fibrada. Dada uma variedade $\mathcal{F}$, uma **trivialização (local) de π com fibra (abstrata) $\mathcal{F}$** é um par (U, ϕ) com $U \subseteq \mathcal{M}$ aberto e $\phi : \pi^{-1}[U] \rightarrow U \times \mathcal{F}$ um difeomorfismo tal que $\text{proj}_U \circ \phi = \pi$, i.e., o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}[U] & \xrightarrow{\phi} & U \times \mathcal{F} \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \text{proj}_U & \\ & U & \end{array}$$

Para cada $p \in U$, fica definido um difeomorfismo $\phi_p : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{F}$ por $\phi(v) = (p, \phi_p(v))$, $v \in \mathcal{E}_p = \pi^{-1}[p]$. Um **FB-atlas com fibra $\mathcal{F}$ para π** é uma família $\mathfrak{T}$ de trivializações para π com fibra $\mathcal{F}$ tais que $\bigcup_{(U, \phi) \in \mathfrak{T}} U = \mathcal{M}$. Se existe um FB-atlas com fibra $\mathcal{F}$ para π , dizemos que $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ é um **fibrado suave com fibra $\mathcal{F}$** .

Denotaremos por FB a subcategoria cheia de FM cujos objetos são fibrados suaves. Fixada uma variedade $\mathcal{M}$, temos também a categoria $\text{FB}_{\mathcal{M}}$ dos fibrados com base $\mathcal{M}$ e morfismos recobrindo a identidade.

Exemplo A.2.1. Dadas quaisquer variedades $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$, o produto $\mathcal{M} \times \mathcal{F}$ tem naturalmente uma estrutura de fibrado com a projeção $\text{proj}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M} : (p, x) \mapsto p$. $\blacklozenge$

Exemplo A.2.2. Um fibrado $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ é dito **trivial** se existir uma equivalência de fibrados $\mathcal{E} \simeq \mathcal{M} \times \mathcal{F}$, ou seja, se existir uma trivialização $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{F}$ globalmente definida. $\blacklozenge$

Exemplo A.2.3. Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado. Dada uma subvariedade $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$, definimos a **restrição de π sobre $\mathcal{S}$** como o mapa $\pi|_{\pi^{-1}[\mathcal{S}]} : \pi^{-1}[\mathcal{S}] \rightarrow \mathcal{S}$, que verifica-se facilmente ser um fibrado. É costume denotar o espaço total do fibrado restrito por $\pi^{-1}[\mathcal{S}] =: \mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$. Também vemos que as inclusões $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}} \hookrightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{M}$ formam um mapa fibrado. $\blacklozenge$

Exemplo A.2.4. Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado. Um fibrado $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ em que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}$ e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ são subvariedades e $\mu = \pi|_{\mathcal{X}}^{\mathcal{S}}$ é dito um **subfibrado de π** . Segue que as inclusões $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{M}$ formam um mapa fibrado. Em particular, todo fibrado restrito $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$ é um subfibrado. $\blacklozenge$

Exemplo A.2.5. Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um recobrimento suave, isto é, é uma sobrejeção suave tal que, existe um conjunto Λ e, para todo $p \in \mathcal{M}$, uma vizinhança conexa $U \subseteq \mathcal{M}$, de modo que $\pi^{-1}[U] = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$ e $\pi|_{U_{\lambda}}^U$ seja um difeomorfismo. Em outras palavras, fazendo de Λ uma variedade discreta, o mapa $\phi : \pi^{-1}[U] \rightarrow U \times \Lambda$, dado

por $\phi(x) := (\pi(x), \lambda)$ para $x \in U_\lambda$ e $\lambda \in \Lambda$, é um difeomorfismo com $\text{proj}_U \circ \phi = \pi$, i.e., uma trivialização local de π . Vemos assim que um recobrimento é simplesmente um fibrado com fibra discreta. $\blacklozenge$

Para cada FB-atlas $\mathfrak{T}$ de um fibrado $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, temos uma família

$$\{\tau_{\psi\phi} \mid (V, \psi), (U, \phi) \in \mathfrak{T}\}$$

de funções $\tau_{\psi\phi} : U \cap V \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{F})$ dadas por $\tau_{\psi\phi}(p) = \psi_p \circ \phi_p^{-1}$ para $U \cap V \neq \emptyset$. Desse modo, temos a expressão $\psi^{-1}(p, \tau_{\psi\phi}(p)v) = \phi^{-1}(p, v)$ para $(p, v) \in (U \cap V) \times \mathcal{F}$. Por isso, as funções $\tau_{\psi\phi}$ são chamadas de **mapas de transição**.

Indo na direção contrária, considere variedades $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$ e uma cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ para $\mathcal{M}$. Uma **família de transições com fibra $\mathcal{F}$ relativa a $\{U_i\}_{i \in I}$** é uma família de funções $\{\tau_{ij}\}_{i,j \in I}$ de funções $\tau_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{F})$ satisfazendo

- $\tau_{ii}(p) = \text{id}_{\mathcal{F}}$, para quaisquer $p \in U_i$, $i \in I$;
- $\tau_{ij}(p) \circ \tau_{jk}(p) = \tau_{ik}(p)$, para todo $p \in U_i \cap U_j \cap U_k$ e quaisquer $i, j, k \in I$ com $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

Proposição A.2.2. *Sejam $\mathcal{E}$ um conjunto, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$ variedades, $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ uma função sobrejetiva e $\mathfrak{T} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ uma família de pares de abertos $U_i \subseteq \mathcal{M}$ e bijeções $\phi_i : \pi^{-1}[U_i] \rightarrow U_i \times \mathcal{F}$, tais que $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{M}$ e $\text{proj}_{U_i} \circ \phi_i = \pi|_{\pi^{-1}[U_i]}$. Se os mapas $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathcal{F} \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathcal{F}$ são difeomorfismos, para cada $i, j \in I$ com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então existe uma única estrutura diferencial suave para $\mathcal{E}$ fazendo de $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado suave e de $\mathfrak{T}$ um FB-atlas para π .*

Demonstração. Aqui vamos dar um resumo da demonstração, já que ela envolve muitos detalhes notacionais.

Para dar uma estrutura de variedade a $\mathcal{E}$ basta construir um atlas suave. Tome atlas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ para ambas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$. Restringindo aos domínios apropriados e compondo com os mapas ϕ_i , obteremos um atlas $\mathcal{C}$ para $\mathcal{E}$, cujas mudanças de cartas serão difeomorfismos suaves, uma vez que os mapas $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ são difeomorfismos. Tomando o atlas maximal compatível com $\mathcal{C}$, obtemos uma estrutura diferencial suave para $\mathcal{E}$, e nela os mapas ϕ_i são automaticamente suaves. Segue ainda que a projeção π é suave por ser uma colagem de mapas suaves $\text{proj}_{U_i} \circ \phi_i = \pi|_{\pi^{-1}[U_i]}$.

Para mostrar a unicidade, tome um outro atlas suave $\mathcal{C}_1$ para $\mathcal{E}$ fazendo de $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado e de $\mathfrak{T}$ um FB-atlas. Por hipótese, as trivializações de $\mathfrak{T}$ são difeomorfismos em relação a $\mathcal{C}_1$. Como as cartas em $\mathcal{C}$ são compostas de cartas de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$ com trivializações, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_1$ são compatíveis e geram a mesma estrutura diferencial. $\square$

Exemplo A.2.6. O resultado acima garante que todo recobrimento topológico $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, cuja base é uma variedade, admite uma única estrutura suave para $\mathcal{E}$ que faz de π um recobrimento suave. $\blacklozenge$

Proposição A.2.3. *Dadas variedades $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$, $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura de $\mathcal{M}$ e $\{\tau_{ij}\}_{i,j \in I}$ uma família de transições com fibra $\mathcal{F}$ relativa a $\{U_i\}_{i \in I}$, existe um único (além de equivalência) fibrado $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ admitindo um FB-atlas com as transições dadas.*

Demonstração. Consideramos a união disjunta $X = \bigsqcup_{i \in I} (U_i \times \mathcal{F})$ com a topologia natural e uma relação $\sim$ em X dada por

$$(i, p, x) \sim (j, q, y) :\iff p = q \in U_i \cap U_j \text{ e } y = \tau_{ji}(p)(x).$$

Seja $\mathcal{E} := X/\sim$ e $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ a função dada por $\pi[i, p, x] = p$, onde $[i, p, x]$ é a classe de equivalência (i, p, x) . É imediato ver que π é sobrejetiva. Note agora que, o mapa quociente $X \rightarrow \mathcal{E}$, quando restrito a $U_i \times \mathcal{F} \rightarrow (U_i \times \mathcal{F})/\sim = \pi^{-1}[U_i]$ nos dá uma bijeção $(p, x) \mapsto [i, p, x]$. Denotamos por $\phi_i : \pi^{-1}[U_i] \rightarrow U_i \times \mathcal{F}$ a inversa dessa bijeção, i.e., $\phi_i : [i, p, x] \mapsto (p, x)$.

Afirmamos que $\mathfrak{T} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ satisfaz as condições da Proposição A.2.2. De fato, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então

$$\phi_i(\phi_j^{-1}(p, x)) = \phi_i([j, p, x]) = \phi_i([i, p, \tau_{ij}(p)(x)]) = (p, \tau_{ij}(p)(x))$$

para $p \in U_i \cap U_j$ e $x \in \mathcal{F}$, de modo que a família de transições associada a $\mathfrak{T}$ é de fato $\{\tau_{ij}\}_{i,j \in I}$. Obtemos assim um fibrado suave $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ admitindo as transições $\{\tau_{ij}\}_{i,j \in I}$ em algum FB-atlas.

Para a unicidade, tomamos um fibrado $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\nu} \mathcal{M}$ que admite um FB-atlas $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ cujas transições são $\{\tau_{ij}\}_{i,j \in I}$. Definimos um mapa fibrado $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$ por

$$f|_{\pi^{-1}[U_i]} = \psi_i^{-1} \circ \phi_i$$

para cada $i \in I$. Isso está bem-definido já que, para as restrições em $\pi^{-1}[U_i \cap U_j] \rightarrow \nu^{-1}[U_i \cap U_j]$ temos

$$\begin{aligned} (\psi_j^{-1} \circ \phi_j)([i, p, x]) &= (\psi_j^{-1} \circ \phi_j)([j, p, \tau_{ji}(p)(x)]) \\ &= \psi_j^{-1}(p, \tau_{ji}(p)(x)) \\ &= \psi_i^{-1}(p, x) \\ &= (\psi_i^{-1} \circ \phi_i)([i, p, x]). \end{aligned}$$

Segue diretamente que f é um difeomorfismo. Resta verificar que $\nu \circ f = \pi$. Temos

$$\begin{aligned} (\nu \circ f)([i, p, x]) &= (\nu \circ \psi_i^{-1} \circ \phi_i)([i, p, x]) \\ &= \nu(\psi_i^{-1}(p, x)) \\ &= p \\ &= \pi([i, p, x]). \end{aligned}$$

□

Uma versão mais estrutural do resultado acima é apresentada na proposição a seguir. Para detalhes sobre a cohomologia de Čech, ver Apêndice A.1.

Proposição A.2.4. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$ variedades suaves. Denotando por $\text{FB}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F})$ a categoria de fibrados sobre $\mathcal{M}$ com fibra abstrata $\mathcal{F}$, temos uma bijeção natural*

$$\text{FB}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F})/\text{iso} \simeq \check{H}^1(\mathcal{M}; \text{Diff}(\mathcal{F})).$$

Demonstração. Seja $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ um fibrado suave com um FB-atlas $\mathfrak{T}$. Denote por $\mathcal{U} = \{U\}_{(U,\phi) \in \mathfrak{T}}$ a cobertura de $\mathcal{M}$ associada a $\mathfrak{T}$ e para cada aberto $U \in \mathcal{U}$, escolha uma trivialização $(U, \phi_U) \in \mathfrak{T}$ para formar um FB-atlas $\mathfrak{T}_0 = \{(U, \phi_U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ sem repetições de abertos. Tomando as transições $\tau_{UV} : U \cap V \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{F})$ de $\mathfrak{T}_0$, obtemos uma 1-cocadeia de Čech $\tau = (\tau_{UV})_{(U,V) \in N_1(\mathcal{M}, \mathcal{U})}$ com coeficientes no feixe $U \mapsto \mathcal{F}(U, \text{Diff}(\mathcal{F}))$. Vemos facilmente que τ é um cociclo, já que

$$\begin{aligned} (\delta\tau)_{UVW} &= \tau_{VW}|_{U \cap V \cap W} (\tau_{UV}|_{U \cap V \cap W})^{-1} \tau_{UV}|_{U \cap V \cap W} = \text{id}_{\mathcal{F}}, \quad \forall (U, V, W) \in N_2(\mathcal{M}, \mathcal{U}) \\ \iff &\begin{cases} \tau_{UU} = \text{id}_{\mathcal{F}}, & \forall U \in N_0(\mathcal{M}, \mathcal{U}) \\ \tau_{UW}|_{U \cap V \cap W} = \tau_{UV}|_{U \cap V \cap W} \tau_{VW}|_{U \cap V \cap W}, & \forall (U, V, W) \in N_2(\mathcal{M}, \mathcal{U}) \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, considere a classe de cohomologia $[\tau]_{\mathcal{U}} \in \check{H}^1(\mathcal{M}, \mathcal{U}; \text{Diff}(\mathcal{F}))$ e a classe limítrofe $[\tau] \in \check{H}^1(\mathcal{M}; \text{Diff}(\mathcal{F}))$. Suponha que temos outro FB-atlas $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}$ com outra escolha de trivializações (U, ψ_U) sem repetição de abertos e denote por $\alpha = (\alpha_{UV})_{(U,V) \in N_1(\mathcal{M}, \mathcal{U})}$ o cociclo de transições associado a $\mathfrak{T}_1$. Desse modo temos

$$\begin{aligned} \alpha_{UV}(p) &= \psi_{Up} \circ \psi_{Vp}^{-1} \\ &= \psi_{Up} \circ \phi_{Up}^{-1} \circ \phi_{Up} \circ \phi_{Vp}^{-1} \circ \phi_{Vp} \circ \psi_{Vp}^{-1} \\ &= (\psi_{Up} \circ \phi_{Up}^{-1}) \circ \tau_{UV}(p) \circ (\phi_{Vp} \circ \psi_{Vp}^{-1}) \\ &= (\psi_{Up} \circ \phi_{Up}^{-1}) \circ \tau_{UV}(p) \circ (\psi_{Vp} \circ \phi_{Vp})^{-1} \end{aligned}$$

para todo $p \in U \cap V$. Definindo o 0-cociclo $\lambda = (\lambda_U)_{U \in N_0(\mathcal{M}, \mathcal{U})}$ por

$$\begin{aligned} \lambda_U &: U \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{F}) \\ &: p \mapsto \psi_{Up} \circ \phi_{Up}^{-1}, \end{aligned}$$

vemos que $\alpha = \lambda \cdot \tau$, de modo que $[\alpha]_{\mathcal{U}} = [\tau]_{\mathcal{U}}$ e $[\alpha] = [\tau] \in \check{H}^1(\mathcal{M}; \text{Diff}(\mathcal{F}))$. O mesmo argumento mostra que, escolhendo outro FB-atlas com fibra $\mathcal{F}$ arbitrário $\mathfrak{T}' \neq \mathfrak{T}$ resulta na mesma classe $[\tau]$. Assim, para cada fibrado com fibra $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{M}$, obtemos uma única classe de cohomologia de Čech não-abeliana sobre $\mathcal{M}$ com coeficientes em $\text{Diff}(\mathcal{F})$. Para definir o mapa $\text{FB}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F})/\text{iso} \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{M}; \text{Diff}(\mathcal{F}))$, resta mostrar que fibrados equivalentes definem a mesma classe de cohomologia.

Dados $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{E}_i \xrightarrow{\pi_i} \mathcal{M}$, $i = 1, 2$, suponha que temos uma equivalência $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$. Tomando FB-atlas $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ para $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. Podemos supor que ambos definem a mesma cobertura $\mathcal{U}$ e ambos não têm repetição de abertos, caso contrário podemos refinar as coberturas, para uma em comum, e os atlas, retirando trivializações. Denotando as trivializações por $(U, \phi_U) \in \mathfrak{T}_1$ e $(U, \psi_U) \in \mathfrak{T}_2$, para cada $U \in \mathcal{U}$ temos um mapa $\lambda_U : U \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{F})$,

$$\lambda_U(p) := \psi_{Up} \circ f_p \circ \phi_{Up}^{-1}.$$

Fica definido um 0-cociclo $\lambda = (\lambda_U)_{U \in N_0(\mathcal{M}, \mathcal{U})}$, que por construção, satisfaz $\alpha' = \lambda \cdot \tau$, onde τ e α são os 1-cociclos associados a $\mathfrak{T}_1$ e $\mathfrak{T}_2$, respectivamente. Em resumo, $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ definem as mesmas classes de cohomologia em $\check{H}^1(\mathcal{M}; \text{Diff}(\mathcal{F}))$. Obtemos assim um mapa natural $\text{FB}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F})/\text{iso} \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{M}; \text{Diff}(\mathcal{F}))$. Para definir o mapa inverso, basta utilizar a Proposição A.2.3 acima para construir um fibrado que admite τ como família de transições, onde é um cociclo representativo τ de $[\tau] \in \check{H}^1(\mathcal{M}; \text{Diff}(\mathcal{F}))$. $\square$

N.B. No resultado acima, a fibra abstrata $\mathcal{F}$ é, de certo modo, insubstancial, já que $\text{FB}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F}) = \text{FB}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F}')$ para $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}'$ difeomorfas e $\text{Diff}(\mathcal{F})^{(-)} \simeq \text{Diff}(\mathcal{F}')^{(-)}$ são isomorfos como feixes sobre $\mathcal{M}$. $\star$

A.3 Fibrados Vetoriais

Um **fibrado vetorial de posto n** é uma quintupla $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi, +, \cdot)$ em que $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ é um fibrado, $+$: $\mathcal{E} \times_{\pi} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ é um mapa fibrado e $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ é uma função, satisfazendo as propriedades:

(VB1) para todo $p \in \mathcal{M}$, as restrições $+$: $\mathcal{E}_p \times \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_p$ e $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_p$ fazem da fibra $\mathcal{E}_p$ um espaço vetorial real de dimensão n ;

(VB2) para todo $p \in \mathcal{M}$ existe uma trivialização local (U, ϕ) , $\phi : \pi^{-1}[U] \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, tal que $\phi_q : \mathcal{E}_q \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo para cada $q \in U$.

O par de operações $(+, \cdot)$ é chamado de **estrutura vetorial** de $\mathcal{E}$. Note que se trocássemos $\mathbb{R}^n$ por qualquer espaço vetorial real de n -dimensional $\mathbb{V}$ nada mudaria na definição. Assim, denotaremos um fibrado vetorial por $\mathbb{V} \rightsquigarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$, onde a fibra ser um espaço vetorial indica implicitamente que uma estrutura vetorial esta sendo considerada, salvo menção do contrário.

Dados dois fibrados vetoriais $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ e $\mathcal{Y} \xrightarrow{\mu} \mathcal{N}$, definimos um **mapa fibrado linear** $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ como um mapa fibrado tal que as restrições às fibras $f_p : \mathcal{X}_p \rightarrow \mathcal{Y}_{f_B(p)}$ são aplicações lineares. Um **homomorfismo de fibrados vetoriais** será um mapa fibrado linear recobrindo a identidade.

Assim, denotaremos por VB a categoria de fibrados vetoriais com mapas lineares como morfismos, e fixada uma base $\mathcal{M}$, denotaremos por $\text{VB}_{\mathcal{M}}$ a categoria de fibrados vetoriais sobre $\mathcal{M}$ com homomorfismos. Os isomorfismos de $\text{VB}_{\mathcal{M}}$ também são chamados de **VB-equivalências**.

Exemplo A.3.1. Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado vetorial. Um **subfibrado vetorial** de $\mathcal{E}$ é um fibrado vetorial $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ em que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}$ e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ são subvariedades e para cada $p \in \mathcal{S}$, a fibra $\mathcal{X}_p$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{E}_p$. Segue que o par de inclusões forma um mapa fibrado linear. ♦

Diretamente da definição, um fibrado vetorial admite um FB-atlas $\mathfrak{T} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ cujas transições $\{\tau_{ij}\}_{i,j \in I}$ são funções suaves $\tau_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, consideramos um fibrado $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ admitindo como fibra um espaço vetorial real $\mathbb{V}$, porém *sem estrutura vetorial fixada*, definimos um $\text{GL}(\mathbb{V})$ -atlas para π como um FB-atlas $\mathfrak{T}$ cujas transições associadas são funções suaves $\tau_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(\mathbb{V})$, tomando valores em automorfismos lineares da fibra abstrata. Dizemos que dois $\text{GL}(\mathbb{V})$ -atlas $\mathfrak{T}_1$ e $\mathfrak{T}_2$ são **compatíveis** se a união $\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$ for ainda um $\text{GL}(\mathbb{V})$ -atlas. Uma $\text{GL}(\mathbb{V})$ -**estrutura** para $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ é um $\text{GL}(\mathbb{V})$ -atlas, que é maximal entre os compatíveis com ele.

Proposição A.3.1. *Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado admitindo um espaço vetorial $\mathbb{V}$ como fibra. Para cada $\text{GL}(\mathbb{V})$ -estrutura $\mathfrak{T}$ de π , existe uma única estrutura vetorial $(+, \cdot)$ tal que as trivializações de $\mathfrak{T}$ são VB-equivalências. Reciprocamente, toda estrutura vetorial é induzida por uma única $\text{GL}(\mathbb{V})$ -estrutura.*

Demonstração. Denotamos $\mathfrak{T} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$. Vamos definir as operações $+$: $\mathcal{E} \times_{\pi} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ e $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ localmente. Para cada $p \in U_i$, $x, y \in \pi^{-1}[U_i]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tomamos

$$\begin{aligned} x + y &:= \phi_{ip}^{-1}(\phi_{ip}(x) + \phi_{ip}(y)) \\ \lambda \cdot x &:= \phi_{ip}^{-1}(\lambda \phi_{ip}(x)). \end{aligned}$$

Isso está bem-definido uma vez que, se $p \in U_i \cap U_j$ então

$$\begin{aligned}\phi_{ip}^{-1}(\phi_{ip}(x) + \phi_{ip}(y)) &= \phi_{ip}^{-1}([\tau_{ij}(p)\phi_{jp}(x) + \tau_{ij}(p)\phi_{jp}(y)]) \\ &= \phi_{ip}^{-1}(\tau_{ij}(p)[\phi_{jp}(x) + \phi_{jp}(y)]) \\ &= \phi_{jp}^{-1}(\phi_{jp}(x) + \phi_{jp}(y)) \\ \phi_{ip}^{-1}(\lambda\phi_{ip}(x)) &= \phi_{ip}^{-1}(\lambda[\tau_{ij}(p)\phi_{jp}(x)]) \\ &= \phi_{ip}^{-1}(\tau_{ij}(p)[\lambda\phi_{jp}(x)]) \\ &= \phi_{jp}^{-1}(\lambda\phi_{jp}(x)).\end{aligned}$$

Para ver que as operações são suaves, note que as restrições $+_i : \pi^{-1}[U_i] \times_{\pi} \pi^{-1}[U_i] \rightarrow \pi^{-1}[U_i]$ e $\cdot_i : \mathbb{R} \times \pi^{-1}[U_i] \rightarrow \pi^{-1}[U_i]$ são suaves por construção, já que são compostas de ϕ_i com as operações em $\mathbb{V}$. A construção também garante que $\phi_{ip} \in \text{Iso}(\mathcal{E}_p, \mathbb{V})$ para cada $p \in U_i$, $i \in I$, ou seja, as trivializações são VB-equivalências.

Para verificar a unicidade, tomamos uma estrutura vetorial $(+', \cdot')$ em que $\phi_{ip} \in \text{Iso}(\mathcal{E}_p, \mathbb{V})$ para cada $p \in U_i$, $i \in I$. Segue que

$$\begin{aligned}\phi_{ip}(x +' \lambda \cdot' y) &= \phi_{ip}(x) + \lambda\phi_{ip}(y), \\ x +' \lambda \cdot' y &= \phi_{ip}^{-1}(\phi_{ip}(x) + \lambda\phi_{ip}(y)) = x + \lambda \cdot y\end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in \mathcal{E}_p$, $p \in U_i$, $i \in I$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Concluimos que $(+', \cdot') = (+, \cdot)$.

A recíproca segue facilmente. Dada uma estrutura vetorial $(+, \cdot)$, quaisquer duas $\text{GL}(\mathbb{V})$ -estruturas compatíveis com as operações (trivializações são VB-equivalências) são compatíveis entre si. $\square$

Exemplo A.3.2. O fibrado tangente de uma variedade $\mathcal{M}$ pode ser visto como o único fibrado vetorial $T(\mathcal{M})$ admitindo um atlas de trivializações cujas transições são as derivadas $(\mathbf{y}\mathbf{x}^{-1})'$ das mudanças de coordenadas em $\mathcal{M}$. Os fibrados de tensores sobre $\mathcal{M}$ são obtidos da mesma forma, com uma representação tensorial de $\text{GL}(m)$ composta as mudanças de coordenada (ver Seção A.4). $\blacklozenge$

Uma **variedade fibrada vetorial** é uma quintupla $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi, +, \cdot)$ em que $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ é uma variedade fibrada, $\mathcal{E} \times_{\pi} \mathcal{E}$ é uma subvariedade do produto $\mathcal{E}^2$, $+ : \mathcal{E} \times_{\pi} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ são funções suaves que fazem das fibras $\mathcal{E}_p$ espaços vetoriais. Uma **base local de π sobre $U \subseteq \mathcal{M}$** é uma upla $(s_1, \dots, s_n)$ de seções locais $s_1, \dots, s_n \in \Gamma_U(\pi)$ tais que $(s_1(p), \dots, s_n(p))$ forma uma base de $\mathcal{E}_p$ para cada $p \in U$.

As bases locais estão em bijeção com as trivializações de π . Mais precisamente, dada uma base local $s_1, \dots, s_n : U \rightarrow \mathcal{E}$, definimos uma trivialização local $\phi_s : \pi^{-1}[U] \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ pela inversa do mapa $(p, v^1, \dots, v^n) \mapsto \sum_{i=1}^n v^i s_i(p)$, e reciprocamente, dada uma trivialização $\psi : \pi^{-1}[U] \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, definimos uma base local $u_1, \dots, u_n : U \rightarrow \mathcal{E}$ por $u_i(p) := \psi^{-1}(p, e_i)$, onde $(e_1, \dots, e_n)$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Em particular, se uma variedade fibrada vetorial admite bases locais em cada ponto ela é também um fibrado vetorial. Um resultado imediato dessa observação é a

Proposição A.3.2. *Um fibrado vetorial $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ é trivial se, e somente se, existe uma base global, i.e., seções globais $s_1, \dots, s_n \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\pi)$ tais que $(s_1(p), \dots, s_n(p))$ forma uma base de $\mathcal{E}_p$ para cada $p \in \mathcal{M}$.*

Proposição A.3.3. *Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado vetorial. Dadas seções $s_1, \dots, s_n \in \Gamma_U(\pi)$, se $s_1(p), \dots, s_r(p)$ são linearmente independentes para algum $p \in U$, então existe um aberto $V \subseteq U$ tal que $s_1(q), \dots, s_r(q)$ é linearmente independente para todo $q \in V$.*

Demonstração. Seja $t_1, \dots, t_n : W \rightarrow \mathcal{E}$ uma base local de ξ com $p \in W \subseteq U$. Consideramos as funções $\alpha^i_j : W \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $s_j(q) = \sum_{i=1}^n \alpha^i_j(q) t_i(q)$ para $q \in V$. Considere a função matricial suave $\alpha : W \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^r; \mathbb{R}^n)$. Como o conjunto de aplicações injetivas $I \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^r; \mathbb{R}^n)$ é aberto, podemos tomar um aberto $V \subseteq W$ tal que $\alpha(q) \in I$ para todo $q \in V$. Segue que $s_1(q), \dots, s_r(q)$ são linearmente independentes para quaisquer $q \in V$. $\square$

Exemplo A.3.3. Seja $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ um homomorfismo de fibrados vetoriais. Dadas bases locais $s_1, \dots, s_n : U \rightarrow \mathcal{X}$ e $t_1, \dots, t_\ell : U \rightarrow \mathcal{Y}$, o homomorfismo f fica definido localmente em U por uma função matricial $\alpha^i_j : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\ell)$ tal que $f s_j(p) = \sum_{i=1}^\ell \alpha^i_j(p) t_i(p)$ para $p \in U$. $\blacklozenge$

Proposição A.3.4. *Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado vetorial e $\mathcal{X} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \mathcal{X}_p$ uma união de subespaços vetoriais $\mathcal{X}_p \subseteq \mathcal{E}_p$. Para que $\pi|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ seja um subfibrado vetorial de $\mathcal{E}$ é necessário e suficiente que, para todo $p \in \mathcal{M}$ existam seções locais $v_1, \dots, v_k : U \rightarrow \mathcal{E}$ tais que $p \in U$ e $v_1(q), \dots, v_k(q)$ é uma base de $\mathcal{X}_q$, para cada $q \in U$.*

Demonstração. A necessidade é trivial. Vamos mostrar que é suficiente.

Fixado $p \in \mathcal{M}$, sejam $s_1, \dots, s_k \in \Gamma_U(\pi)$ seções tais que $s_1(q), \dots, s_k(q)$ é uma base de $\mathcal{X}_q$ para cada $q \in U$. Escolha $u_{k+1}, \dots, u_n \in \mathcal{E}_p$ de modo que $s_1(p), \dots, s_k(p), u_{k+1}, \dots, u_n$ formem uma base para $\mathcal{E}_p$, e extenda os u_i 's para seções locais $w_{k+1}, \dots, w_n \in \Gamma_V(\pi)$ em alguma vizinhança $W \subseteq U$ de p com $w_i(p) = u_i$, $i = k+1, \dots, n$. Pela Proposição A.3.3, existe alguma vizinhança $V \subseteq W$ de p tal que os $s_1(q), \dots, s_k(q), w_{k+1}(q), \dots, w_n(q)$ são linearmente independentes para todo $q \in V$. Tomando as restrições $v_1, \dots, v_n : V \rightarrow \mathcal{E}$ dadas por $v_i = s_i|_V$ para $i = 1, \dots, k$ e $v_i = w_i|_V$ para $i = k+1, \dots, n$, obtemos uma base local de $\mathcal{E}$ cujas primeiras k seções formam uma base local de $\mathcal{X}$.

Tome agora a trivialização local $\phi : \pi^{-1}[V] \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(v_i(p)) = (p, e_i)$, $i = 1, \dots, n$. Em especial, ϕ leva $(\pi|_{\mathcal{X}})^{-1}[V] = \mathcal{X} \cap \pi^{-1}[V]$ em $V \times \mathbb{R}^k$. Assim, obtemos uma trivialização $\psi : (\pi|_{\mathcal{X}})^{-1}[V] \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$, mostrando que $(\pi|_{\mathcal{X}})^{-1}[V] \subseteq \pi^{-1}[V]$ é uma subvariedade. Pela arbitrariedade de $p \in \mathcal{M}$ e a sobrejetividade de π , segue que $\mathcal{X}$ é de fato uma subvariedade de $\mathcal{E}$. $\square$

Proposição A.3.5 (Critério para núcleo/imagem). *Seja $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre $\mathcal{M}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\text{Img } f$ admite estrutura de subfibrado de $\mathcal{Y}$;
- (b) $f^{-1}[\mathbf{O}_{\mathcal{M}}]$ admite estrutura de subfibrado de $\mathcal{X}$;
- (c) a dimensão das fibras de $\text{Img } f$ por $\pi_{\mathcal{Y}}$ é constante;
- (d) a dimensão das fibras de $f^{-1}[\mathbf{O}_{\mathcal{M}}]$ por $\pi_{\mathcal{X}}$ é constante.

Demonstração. Com o Teorema Núcleo-Imagem, a equivalência (c) $\Leftrightarrow$ (d) é imediata. Já as implicações (a) $\Rightarrow$ (c) e (b) $\Rightarrow$ (d) também são triviais. Resta mostrar (c) $\Rightarrow$ (a) e (c) $\Rightarrow$ (b).

(c) $\Rightarrow$ (a): Se f é nula, não há o que mostrar. Suponhamos f não-nula. Tomamos bases locais $s_1, \dots, s_n \in \Gamma_U(\mathcal{X})$ e $t_1, \dots, t_\ell \in \Gamma_U(\mathcal{Y})$ sobre o mesmo aberto $U \subseteq \mathcal{M}$. Fixemos $p \in U$ e seja $r = \dim \text{Im} f_p$. Existem $j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\}$ tais que $f s_{j_1}(p), \dots, f s_{j_r}(p)$ são linearmente independentes e geram $\text{Im} f_p$. Tomando $i_1, \dots, i_{\ell-r} \in \{1, \dots, \ell\}$ tais que $t_{i_1}(p), \dots, t_{i_{\ell-r}}(p) \notin \text{Im} f_p$ e os

$$f s_{j_1}(p), \dots, f s_{j_r}(p), t_{i_1}(p), \dots, t_{i_{\ell-r}}(p)$$

são linearmente independentes, de modo que existe um aberto $V \subseteq U$ em que $f s_{j_1}, \dots, f s_{j_r}, t_{i_1}, \dots, t_{i_{\ell-r}}$ é uma base local (Proposição A.3.3). Como $f s_{j_1}(q), \dots, f s_{j_r}(q) \in \text{Im} f_q$ e $\dim \text{Im} f_q = r$ para quaisquer $q \in V$, segue que $f s_{j_1}, \dots, f s_{j_r}$ é uma base local sobre V para $\text{Im} f$.

(c) $\Rightarrow$ (b): Com a mesma base local $s_1, \dots, s_n$ acima, podemos escrever

$$f s_j(q) = \sum_{i=1}^r \alpha^i_j(q) f s_{j_i}(q)$$

para $q \in U$ e $j \in J = \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$. Sejam $v_j := s_j - \sum_{i=1}^r \alpha^i_j s_{j_i}$ para $j \in J$. Assim cada v_j toma valores em $f^{-1}[\mathbf{O}_{\mathcal{M}}]$:

$$f v_j(q) = f s_j(q) - \sum_{i=1}^r \alpha^i_j(q) f s_{j_i}(q) = \mathbf{0}$$

para todo $q \in U$; e os $\{v_j\}_{j \in J}$ são linearmente independentes. Como temos $n - r = \dim \ker f_p$ deles, segue que $(v_j)_{j \in J}$ é uma base local de $f^{-1}[\mathbf{O}_{\mathcal{M}}]$ sobre U . $\square$

Com esse resultado, para os homomorfismos $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ que satisfazem as propriedades acima, podemos definir seu **núcleo** $\ker f$ e sua **imagem** $\text{img} f$ como os fibrados vetoriais

$$\pi_{\mathcal{X}} : f^{-1}[\mathbf{O}_{\mathcal{M}}] \rightarrow \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \pi_{\mathcal{Y}} : \text{Im} f \rightarrow \mathcal{M},$$

respectivamente, com as operações dos fibrados originais.

Proposição A.3.6. *Seja $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre $\mathcal{M}$. Para que $\mathcal{X}$ se mergulhe em $\mathcal{Y}$ como subfibrado vetorial, é necessário e suficiente que $\ker f = \mathbf{O}_{\mathcal{M}}$.*

Demonstração. A necessidade é óbvia, já que f deve ser injetiva em cada fibra. Para ver a suficiência, basta notar que f leva bases locais de $\mathcal{X}$ em bases locais de $\text{Im} f$, de modo que a topologia induzida pelas trivializações em $\text{Im} f$ coincide com a de $\mathcal{X}$ por meio de f . Concluimos que f é um mergulho. $\square$

Em outras palavras, f mergulha $\mathcal{X}$ como subfibrado vetorial de $\mathcal{Y}$ se, e somente se, a sequência

$$\mathbf{O}_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$$

é exata. Dualmente, $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ é um mapa quociente se, e somente se, a sequência

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{g} \mathcal{Z} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{O}_{\mathcal{M}}$$

é exata, de modo que $\mathcal{Z}_p = \mathcal{Y}_p / (\ker g)_p$, para todo $p \in \mathcal{M}$.

A.4 Fibrados Principais

Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado suave com fibra (abstrata) $\mathcal{F}$. Suponha que temos um grupo de Lie $\mathcal{G}$ agindo sobre $\mathcal{F}$ suavemente por uma realização $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{F})$. Vendo $(\mathcal{F}, \rho)$ como um $\mathcal{G}$ -espaço, definimos um **G-atlas com fibra** $(\mathcal{F}, \rho)$ para π é um FB-atlas $\mathfrak{T}$ tal que, existe família de funções suaves $g_{\psi\phi} : U \cap V \rightarrow \mathcal{G}$, $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathfrak{T}$, definindo as transições de $\mathfrak{T}$ por

$$\psi_x \circ \phi_x^{-1} = \rho(g_{\psi\phi}(x)) \text{ para todo } x \in U \cap V.$$

Dizemos que dois G-atlas $\mathfrak{T}_1$ e $\mathfrak{T}_2$, com fibra $(\mathcal{F}, \rho)$, são **compatíveis** se sua união $\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$ é ainda um G-atlas com fibra $(\mathcal{F}, \rho)$. É imediato ver que a relação de compatibilidade é uma relação de equivalência e que todo G-atlas admite um único G-atlas maximal compatível de mesma fibra. Uma **G-estrutura (com fibra $(\mathcal{F}, \rho)$)** para $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ é um G-atlas maximal $\mathfrak{T}$.

Um **$\mathcal{G}$ -fibrado** é uma upla $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \rho, \mathfrak{T})$ em que $\mathfrak{T}$ é uma G-estrutura para $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ com fibra $(\mathcal{F}, \rho)$. Vamos denotar toda a estrutura por $\mathcal{G} \circlearrowleft_{\rho} \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$, omitindo elementos da estrutura conforme for conveniente, para não carregar a notação. O grupo $\mathcal{G}$ é chamado de **grupo de estrutura** do fibrado G-fibrado e as trivializações da G-estrutura são chamadas de **G-trivializações**.

Sejam $\mathcal{G}_i \circlearrowleft_{\rho_i} \mathcal{F}_i \rightsquigarrow \mathcal{E}_i \xrightarrow{\pi_i} \mathcal{M}_i$ dois G-fibrados, $i = 1, 2$. Um **morfismo de G-fibrados** entre os dois é uma tripla (f, f_B, f_G) em que $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ é um mapa fibrado recobrindo $f_B : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ e $f_G : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ é um homomorfismo de grupos, de modo que f seja **localmente f_G -equivariante**, isto é, para quaisquer G-trivializações $(U, \phi) \in \mathfrak{T}_1$ e $(V, \psi) \in \mathfrak{T}_2$, os mapas $\lambda_p = \psi_p \circ f_p \circ \phi_p^{-1} \in C^\infty(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ são f_G -equivariantes, i.e.,

$$\lambda_p \circ \rho_1(g) = \rho_2(f_G(g)) \circ \lambda_p$$

para quaisquer $g \in \mathcal{G}_1$ e $p \in U \cap V$.

Denotaremos por **GB** a categoria de G-fibrados, com as respectivas subcategorias:

- **GB $_{\mathcal{M}}$** a categoria de G-fibrados sobre $\mathcal{M}$ com morfismos recobrindo a identidade;
- **GB $^{\mathcal{G}}$** a categoria de $\mathcal{G}$ -fibrados com morfismos localmente $\text{id}_{\mathcal{G}}$ -equivariantes;
- **GB $_{\mathcal{M}}^{\mathcal{G}}$** os $\mathcal{G}$ -fibrados sobre $\mathcal{M}$, com morfismos recobrindo $\text{id}_{\mathcal{M}}$ e localmente $\text{id}_{\mathcal{G}}$ -equivariantes.

Definimos uma **$\mathcal{G}$ -estrutura para uma variedade $\mathcal{M}$** como uma $\mathcal{G}$ -estrutura para seu fibrado tangente $T(\mathcal{M})$.

Exemplo A.4.1. Um fibrado vetorial com fibra $\mathbb{V}$ é naturalmente um $\text{GL}(\mathbb{V})$, porém os morfismos de fibrados vetoriais não são morfismos de $\text{GL}(\mathbb{V})$ -fibrados em geral. ♦

Exemplo A.4.2. Uma **orientação** em um fibrado vetorial $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, de posto n , é um mapa suave $O : \mathcal{E}^{\times \mathcal{M}} \rightarrow \{+1, -1\}$ tal que $O(Av_1, \dots, Av_n) = \text{sgn}(\det A)$ para quaisquer $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{E}_x$ linearmente independentes e $A \in \text{GL}(\mathcal{E}_x)$. Uma base $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{E}_x$ é dita **O-positiva** se $O(v_1, \dots, v_n) > 0$.

Um fibrado vetorial é dito **orientável** se existir uma orientação. No caso de $\mathcal{E}$ ser orientável, existem apenas 2 orientações. No fibrado produto $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$ temos

uma orientação natural com $O_0((x, e_1), \dots, (x, e_n)) = 1$ para todo $x \in \mathcal{M}$, onde $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ é a base canônica. Em geral, a orientabilidade é um problema topológico.

Dizemos que uma trivialização $\phi : \mathcal{E}_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ é **positiva** se $\det \phi_x > 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$. Dada uma orientação O em $\mathcal{E}$, uma trivialização positiva preserva as orientações, i.e., $O_0(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)) = O(v_1, \dots, v_n)$. Assim, a orientação induz uma $\text{GL}_+(n)$ -estrutura em $\mathcal{E}$. Não é difícil mostrar que as orientações são equivalentes às $\text{GL}_+(n)$ -estruturas. $\blacklozenge$

Exemplo A.4.3. Uma **forma de volume** em uma variedade $\mathcal{M}^{(m)}$ é uma forma diferencial $\omega \in \Omega^m(\mathcal{M})$. Como no exemplo anterior, podemos ver que ω é equivalente à escolha de uma $\text{SL}(n)$ -estrutura para $\mathcal{M}$. Como $\text{GL}_+(n) \simeq \mathbb{R}_{>0}^\times \times \text{SL}(n)$, vemos que a orientabilidade é equivalente à existência de formas de volume. $\blacklozenge$

Exemplo A.4.4. Para um fibrado vetorial real $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, um **produto interno Riemanniano** é um mapa bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{E} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ que é um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ em $\mathcal{E}_x$ para cada $x \in \mathcal{M}$. Uma trivialização $\phi : \mathcal{E}_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ é dita **ortogonal** se os $\phi_x : \mathcal{E}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ forem mapas ortogonais. Podemos ver que um produto interno Riemanniano é equivalente à escolha de uma $\text{O}(n)$ -estrutura em $\mathcal{E}$. Como $\text{O}(n) \simeq \mathbb{R}^\times \times \text{SO}(n)$, uma $\text{SO}(n)$ -estrutura é equivalente à escolha de um produto interno e uma forma de volume. $\blacklozenge$

Exemplo A.4.5. Para um fibrado vetorial complexo $(\mathcal{E}, J) \rightarrow \mathcal{M}$ temos as trivializações complexas $\phi : \mathcal{E}_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ cujos mapas ϕ_x são isomorfismos $\mathbb{C}$ -lineares. Vemos que uma estrutura complexa em um fibrado vetorial é equivalente a uma $\text{GL}(n; \mathbb{C})$ -estrutura. Uma estrutura complexa em $T(\mathcal{M})$ é apenas uma estrutura quase-complexa para $\mathcal{M}$, que deve ser integrável para fazer de $\mathcal{M}$ uma variedade complexa. $\blacklozenge$

Exemplo A.4.6. Um **produto interno Hermitiano** em um fibrado vetorial complexo $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ é um mapa sesquilinear $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{E} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ que é um produto interno complexo $\langle \cdot | \cdot \rangle_x$ em $\mathcal{E}_x$, para cada $x \in \mathcal{M}$. Analogamente aos exemplos anteriores, um produto Hermitiano é equivalente a uma $\text{U}(n)$ -estrutura. $\blacklozenge$

Exemplo A.4.7. Uma forma simplética $\omega : \mathcal{E} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ em um fibrado vetorial de posto $2n$ é equivalente a uma $\text{Sp}(2n)$ -estrutura. Uma estrutura simplética definir uma forma de volume é uma consequência de $\text{Sp}(2n) \leq \text{SL}(2n)$. $\blacklozenge$

Proposição A.4.1. *Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade e $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Temos uma bijeção natural*

$$\text{Ef-GB}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{G}}/\text{iso} \simeq \check{\text{H}}_{C^\infty}^1(\mathcal{M}; \mathcal{G})$$

onde $\text{Ef-GB}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{G}}$ é a categoria de $\mathcal{G}$ -fibrados com ações efetivas (fiéis) e $\check{\text{H}}_{C^\infty}^1(\mathcal{M}; \mathcal{G}) = \check{\text{H}}^1(\mathcal{M}; C^\infty(-, \mathcal{G}))$ é a cohomologia de Čech com coeficientes suaves em $\mathcal{G}$.

Demonstração. Com uma ação efetiva $\mathcal{G} \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{F})$ podemos realizar $\mathcal{G}$ como subgrupo de $\text{Diff}(\mathcal{F})$. O restante segue diretamente da Prop. A.2.4. $\square$

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Um **$\mathcal{G}$ -fibrado principal** é um $\mathcal{G}$ -fibrado $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ em que a fibra é o próprio grupo, agindo em si mesmo pela multiplicação à

esquerda $\rho(g)h = gh$. Como temos elementos repetidos na notação, vamos denotar um fibrado principal por $\mathcal{G} \circlearrowleft \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$.

Todo fibrado principal admite uma ação natural $\mathcal{P} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$ da seguinte forma. Tome um $\mathcal{G}$ -atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ para $\mathcal{G} \circlearrowleft \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$. Dados $u \in \mathcal{P}_p$ e $g \in \mathcal{G}$, definimos

$$ug := \phi_{ip}^{-1}(\phi_{ip}(u)g).$$

Para ver que isso esta bem-definido, suponha que $p \in U_i \cap U_j$, de modo que

$$\begin{aligned} (\phi_{jp} \circ \phi_{ip}^{-1})(\phi_{ip}(u)g) &= g_{ji}(p)\phi_{ip}(u)g \\ &= \phi_{jp}(u)g, \\ \therefore \phi_{ip}^{-1}(\phi_{ip}(u)g) &= \phi_{jp}^{-1}(\phi_{jp}(u)g). \end{aligned}$$

Para ver que essa ação é suave, basta ver que ela é definida localmente pelo mapa $\alpha_i : \pi^{-1}[U_i] \times \mathcal{G} \rightarrow \pi^{-1}[U_i]$ dado por

$$\alpha_i = \phi_i^{-1} \circ m \circ [(\text{proj}_{\mathcal{G}} \circ \phi_i) \times \text{id}_{\mathcal{G}}]$$

que é suave. Obtemos assim uma ação $\mathcal{P} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$. Note que, por construção, a órbita de um $u \in \mathcal{P}$ é sua própria fibra $\mathcal{P}_{\pi(u)}$. Por outro lado, se $ug = u$ então $\phi_{\pi(u)}(u)g = \phi_{\pi(u)}(u)$ para alguma trivialização local, de modo que $g = e$. Ou seja, a ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{P}$ é livre. Segue que as fibras $\mathcal{P}_p$ são espaços homogêneos principais e o quociente $\mathcal{P}/\mathcal{G}$ é naturalmente identificado com a base $\mathcal{M}$ pelo mapa $\mathcal{P}_p \mapsto p$.

Denotaremos por PB a subcategoria cheia de GB cujos objetos são fibrados principais, e analogamente para $\text{PB}_{\mathcal{M}}$, $\text{PB}^{\mathcal{G}}$ e $\text{PB}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{G}}$.

Proposição A.4.2. *Se $\mathcal{G} \circlearrowleft \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ é um fibrado principal, para cada aberto $U \subseteq \mathcal{M}$ temos uma bijeção natural entre as seções $\Gamma_U(\pi)$ e as $\mathcal{G}$ -trivializações.*

Demonstração. Dada uma trivialização $\phi : \pi^{-1}[U] \rightarrow U \times \mathcal{G}$ é fácil definir uma seção $s_{\phi} : U \rightarrow \mathcal{P}$ por $s_{\phi}(x) := \phi^{-1}(x, e)$. Reciprocamente, dada uma seção $s : U \rightarrow \mathcal{P}$ defina $\psi_s : U \times \mathcal{G} \rightarrow \pi^{-1}[U]$ por $\psi_s(x, g) = s(x)g$, de modo que a inversa $\phi_s := \psi_s^{-1}$ é uma $\mathcal{G}$ -trivialização. Vemos que as associações $\phi \mapsto s_{\phi}$ e $s \mapsto \phi_s$ são inversas. $\square$

Temos um corolário imediato.

Proposição A.4.3 (Corolário). *Um fibrado principal $\mathcal{G} \circlearrowleft \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ é trivial se, e somente se, existe uma seção global.*

Seja $\mathcal{G} \circlearrowleft \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ um fibrado principal. Dada uma ação $\mathcal{G} \curvearrowright_{\rho} \mathcal{V}$, considere a ação diagonal $(y, v)g := (yg, \rho(g^{-1})v)$ de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{P} \times \mathcal{V}$. Vamos mostrar que o quociente $\mathcal{P} \times^{\rho} \mathcal{V} := (\mathcal{P} \times \mathcal{V})/\rho$ admite uma estrutura natural de $\mathcal{G}$ -fibrado. Denotando as classes de equivalência por $(y, v]$, ficamos com as igualdades $(yg, \rho(g^{-1})v] = (y, v]$ e $(yg, v] = (y, \rho(g)v]$. Definimos a projeção $\pi_{\rho} : \mathcal{P} \times^{\rho} \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ por $\pi_{\rho}((y, v]) := \pi(y)$, cuja fibra sobre x é $\pi_{\rho}^{-1}[x] = \{(y, v] \mid v \in \mathcal{V}\}$, para qualquer $y \in \mathcal{P}_x$ fixo. Assim, para cada $y \in \mathcal{P}_x$ temos uma bijeção $\psi_y : \pi_{\rho}^{-1}[x] \rightarrow \mathcal{V} : (y, v] \mapsto v$. Dada uma trivialização $\phi : \mathcal{P}_U \rightarrow U \times \mathcal{G}$, que é um isomorfismo equivariante, obtemos um isomorfismo $\psi : \pi_{\rho}^{-1}[U] = \mathcal{P}_U \times^{\rho} \mathcal{V} \simeq (U \times \mathcal{G}) \times_{\mathcal{G}} \mathcal{V} \simeq U \times \mathcal{V}$ que é dado explicitamente por $\psi((y, v]) = (\pi(y), v)$, i.e., $\psi = (\pi_{\rho}, \psi_{\pi_{\rho}}(\cdot))$. A Prop. A.2.2 garante que $\pi_{\rho} : \mathcal{P} \times^{\rho} \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ é de fato um fibrado suave com fibra $\mathcal{V}$.

Ainda mais, dadas duas trivializações $\psi_1, \psi_2 : \pi_\rho^{-1}[U] \rightarrow U \times \mathcal{V}$, vindas de trivializações ϕ_1 e ϕ_2 de $\mathcal{P}$, como acima, vemos que $\psi_1^{-1}(x, v) = (\phi_1^{-1}(x, e), v]$ e $\psi_2^{-1}(x, v) = (\phi_2^{-1}(x, e), v]$ diferem pela transição $g_{21} : U \rightarrow \mathcal{G}$, $(\phi_{2x} \circ \phi_{1x}^{-1})(g) = g_{21}(x)g$, de $\mathcal{P}$. Isto é, $(\psi_{2x} \circ \psi_{1x}^{-1})(v) = \rho(g_{21}(x))v$, com o mapa de transição sendo $\tau_{21} : U \rightarrow \mathcal{G} : x \mapsto \rho(g_{21}(x))$. Assim, $\mathcal{P} \times^\rho \mathcal{V}$ tem uma $\mathcal{G}$ -estrutura natural. O $\mathcal{G}$ -fibrado $\mathcal{G} \circ_\rho \mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{P} \times^\rho \mathcal{V} \xrightarrow{\pi_\rho} \mathcal{M}$ assim definido é chamado de **fibrado associado a $\mathcal{P}$ com fibra $(\mathcal{V}, \rho)$** . Por simplicidade, às vezes vamos escrever $\mathcal{P} \times^\mathcal{G} \mathcal{V}$, $\mathcal{E}^\rho(\mathcal{P})$ ou $\mathcal{E}^\rho$ para denotar o fibrado associado. O nome é justificado pela

Proposição A.4.4. *Seja $\mathcal{G} \circ \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ um fibrado principal. Suponha que $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ é uma $\mathcal{G}$ -trivialização de $\mathcal{P}$ com transições $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$. Dada uma ação efetiva $\mathcal{G} \circ_\rho \mathcal{V}$, o fibrado associado $\mathcal{P} \times^\rho \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ é o único (além de equivalência) $\mathcal{G}$ -fibrado admitindo um $\mathcal{G}$ -atlas com transições $\{\rho \circ g_{ij}\}_{i,j \in I}$.*

Demonstração. Utilizando a injetividade da realização $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{V})$, podemos considerar $\mathcal{G}$ como subgrupo dos difeomorfismos. O restante segue como na Prop. A.2.3. $\square$

Considere um fibrado principal $\mathcal{G} \circ \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ e um fibrado associado $\mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{E}^\rho \rightarrow \mathcal{M}$. Pela construção, para cada $y \in \mathcal{P}$ temos um difeomorfismo $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}_{\pi(y)}^\rho : v \mapsto (y, v]$, que denotaremos simplesmente por $\tilde{y}$. Em particular, quando $(\mathbb{V}, \rho)$ é uma representação de $\mathcal{G}$, o fibrado associado é um fibrado vetorial e os mapas $\tilde{y} : \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{E}_{\pi(y)}^\rho$, $y \in \mathcal{P}$, são isomorfismos.

Proposição A.4.5. *Seja $\mathcal{G} \circ \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ um fibrado principal e $\mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{E}^\rho \xrightarrow{\pi_\rho} \mathcal{M}$ um fibrado associado. Temos uma bijeção $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}^\rho) \simeq C^\infty(\mathcal{P}, \mathcal{V})^\rho$ entre seções e funções equivariantes. Ainda mais, quando ρ é uma representação, essa bijeção é um isomorfismo.*

Demonstração. Dada uma seção $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}^\rho$, defina a função $\varphi(s) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}$ por $\varphi(s)(y) = \tilde{y}^{-1}s(\pi(y))$, que é equivariante, já que $\tilde{y}g = \tilde{y}\rho(g)$. Fica definida uma função $\varphi : \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}^\rho) \rightarrow C^\infty(\mathcal{P}, \mathcal{V})^\rho$. Agora, dada uma função equivariante $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}$, note que, fixado $x \in \mathcal{M}$, o valor $(y, f(y)) \in \mathcal{E}^\rho$ independe de $y \in \mathcal{P}_x$. Definimos a seção $\psi(f) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}^\rho$ por $\psi(f)(x) := (y, f(y))$ com $y \in \mathcal{P}_x$. Obtemos um mapa $\psi : C^\infty(\mathcal{P}, \mathcal{V})^\rho \rightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}^\rho)$. Vê-se facilmente que $\psi = \varphi^{-1}$. A última parte da conclusão segue da linearidade dos mapas $\tilde{y} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}_x^\rho$, $y \in \mathcal{P}_x$. $\square$

Seja $\mathcal{G} \circ \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ um fibrado principal. Dados dois $\mathcal{G}$ -espaços $(\mathcal{V}, \alpha)$ e $(\mathcal{W}, \beta)$, se tivermos um mapa equivariante $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, podemos definir um morfismo de $\mathcal{G}$ -fibrados $\widehat{\varphi} : \mathcal{E}^\alpha \rightarrow \mathcal{E}^\beta$ por $\widehat{\varphi}(y, v] := (y, \varphi(v))$. Em outras palavras, obtemos um **functor associado** $\text{Ass}^\mathcal{P} : \mathcal{G}\text{-spaces} \rightarrow \text{GB}_{\mathcal{M}}^\mathcal{G}$

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{V}, \alpha) & & \mathcal{E}^\alpha \\ \downarrow \varphi & \longmapsto & \downarrow \widehat{\varphi} \\ (\mathcal{W}, \beta) & & \mathcal{E}^\beta \end{array}$$

Quando restrito à categoria de representações $\text{Rep}_{\mathbb{K}}^\infty(\mathcal{G})$ de dimensão finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, o functor associado $\text{Ass}^\mathcal{P}$ toma valores em $\mathcal{G}$ -fibrados vetoriais $\text{VB}_{\mathcal{M}}^\mathcal{G}(\mathbb{K})$, que é uma subcategoria de ambas $\text{VB}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$ e $\text{GB}_{\mathcal{M}}^\mathcal{G}$.

Referenciais

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão n . Um **referencial** de $\mathbb{V}$ é um isomorfismo $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{V}$, ou seja, é simplesmente uma escolha de base ordenada. Denotamos por $\text{Fr}(\mathbb{V})$ o conjunto de referenciais de $\mathbb{V}$. Note que $\text{GL}(n)$ age em $\text{Fr}(\mathbb{V})$ (à direita) por pré-composição $uT := u \circ T$. Não é difícil ver que essa ação faz de $\text{Fr}(\mathbb{V})$ um $\text{GL}(n)$ -espaço homogêneo principal (livre e transitivo).

Agora, considere $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ um fibrado vetorial de posto n e denote $\text{Fr}_x(\mathcal{E}) := \text{Fr}(\mathcal{E}_x)$. A união $\text{Fr}(\mathcal{E}) = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} \text{Fr}_x(\mathcal{E})$, junto com a ação de $\text{GL}(n)$ por pré-composição, tem uma estrutura natural de fibrado principal $\text{GL}(n) \curvearrowright \text{Fr}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi_{\text{Fr}}} \mathcal{M}$. Basta notar que uma trivialização $\phi : \mathcal{E}_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ define uma trivialização $\psi : \text{Fr}_U(\mathcal{E}) \rightarrow U \times \text{Fr}(\mathbb{R}^n)$ por $\psi(u) = (\pi_{\text{Fr}}(u), \phi_{\pi_{\text{Fr}}(u)}^{-1} \circ u)$. Segue que $\text{Fr}(\mathcal{E})$ e $\mathcal{E}$ definem a mesma classe em $\check{H}_{C^\infty}^1(\mathcal{M}; \text{GL}(n))$ e $\mathcal{E}$ é equivalente ao fibrado associado $\text{Fr}(\mathcal{E}) \times^{\text{GL}(n)} \mathbb{R}^n$ pela rep. natural.

Para fibrados vetoriais complexos, valem os resultados análogos, *mutatis mutandis*. Denotamos os referenciais complexos por $\text{Fr}(\mathcal{E})^\mathbb{C}$.

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, fica definido o **functor de referenciais** $\text{Fr}^\mathbb{K} : \text{VB}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{PB}_{\mathcal{M}}$, cuja imagem é a subcategoria dos $\text{GL}_{\mathbb{K}}(n)$ -fibrados principais com $n \in \mathbb{N}$. Vemos que $\text{Fr}^\mathbb{K}$ é uma equivalência entre fibrados vetoriais e essa subcategoria. Os fibrados vetoriais associados nos dão uma equivalência inversa $\text{GL}_{\mathbb{K}}(n) \curvearrowright \mathcal{P} \mapsto \text{Ass}^{\mathcal{P}}(\text{id}_{\text{GL}_{\mathbb{K}}(n)})$.

Essa equivalência nos permite estender os funtores de espaços vetoriais para fibrados de maneira limpa² Um functor $\mathcal{F} : \text{Vec}_{\mathbb{K}}^\infty \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}^\infty$ é dito **suave** se $\mathcal{F}(g) : \mathcal{M} \rightarrow \text{GL}(\mathcal{F}(\mathbb{V}))$ é suave, para qualquer função suave $g : \mathcal{M} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{V})$. Fixada $\mathcal{M}$, obtemos um functor $\mathcal{F}_{\mathcal{M}} : \text{VB}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{VB}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$ pela composição de funtores

$$\mathcal{E} \mapsto \text{Fr}(\mathcal{E}) \mapsto \text{Ass}^{\text{Fr}(\mathcal{E})}(\mathcal{F} \circ \text{id}_{\text{GL}_{\mathbb{K}}(n)})$$

onde $\mathcal{F} \circ \text{id}_{\text{GL}_{\mathbb{K}}(n)} : \text{GL}_{\mathbb{K}}(n) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{F}(\mathbb{K}^n))$ é a representação dada por $(\mathcal{F} \circ \text{id}_{\text{GL}_{\mathbb{K}}(n)})(A) = \mathcal{F}(A)$.

A.5 Conexões

Seja $\pi : \mathcal{E}^{(m+n)} \rightarrow \mathcal{M}^{(m)}$ uma variedade fibrada. Para cada $u \in \mathcal{E}$, seja $V_u(\mathcal{E}) := T_u(\mathcal{E}_{\pi(u)})$ o espaço tangente à fibra que contém u . Considerando a derivada $\pi_{*u} : T_u(\mathcal{E}) \rightarrow T_{\pi(u)}(\mathcal{M})$, para cada $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, a composta $f \circ \pi$ é constante em cada fibra, já que π é constante nas fibras. Segue que, para todo $X \in V_u(\mathcal{E})$, temos $(\pi_{*u}X)f = X(f \circ \pi) = 0$. Pela arbitrariedade de f e X , obtemos $V_u(\mathcal{E}) \subseteq \ker \pi_{*u}$ para todo $u \in \mathcal{E}$. Analisando as dimensões, ainda temos

$$\dim V_u(\mathcal{E}) = \dim \mathcal{E}_{\pi(u)} = n = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{M} = \dim \ker \pi_{*u},$$

uma vez que π é submersiva. Ou seja, $V_u(\mathcal{E}) = \ker \pi_{*u}$, $u \in \mathcal{E}$. Pela constância da dimensão, fica definido um subfibrado vetorial $V(\mathcal{E}) \subseteq T(\mathcal{E})$, que chamamos de **fibrado vertical** de $\mathcal{E}$. As fibras de $V(\mathcal{E})$ são chamadas de **espaços verticais**, seus elementos, de **vetores verticais**, e as seções de $V(\mathcal{E})$ são chamadas de **campos verticais**. Denotaremos o $C^\infty(\mathcal{E})$ -módulo/ $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de campos verticais por $\mathfrak{X}_V(\mathcal{E})$.

²Em contraste com a construção direta, [30].

Proposição A.5.1. *Todo mapa fibrado $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ preserva os fibrados verticais, i.e., $f_*[V(\mathcal{E}_1)] \subseteq V(\mathcal{E}_2)$.*

Demonstração. Segue trivialmente de $\pi_2 f_* = f_{B*} \pi_{1*}$. $\square$

Obtemos o **functor vertical** $V : \mathbf{FM} \rightarrow \mathbf{VB}$ que associa a um morfismo $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ o mapa $V(f) = f_*|_{V(\mathcal{E}_1)}^{V(\mathcal{E}_2)} : V(\mathcal{E}_1) \rightarrow V(\mathcal{E}_2)$.

Exemplo A.5.1. Para uma fibrado vetorial $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, como as fibras $\mathcal{E}_p$ são espaços vetoriais, os espaços verticais são identificados com a própria fibra $T_v(\mathcal{E}_{\pi(v)}) = \mathcal{E}_{\pi(v)}$. Explicitamente, $u \in \mathcal{E}_{\pi(v)}$ é identificado com o vetor vertical

$$\mathbf{vl}_v u := \left. \frac{d}{dt}(v + tu) \right|_{t=0}.$$

Obtemos um isomorfismo natural $\mathbf{vl} : \pi^* \mathcal{E} \rightarrow V(\mathcal{E})$ chamado de **levantamento vertical**. O vetor $\mathbf{vl}_v u$ é chamado de **levantamento vertical de u sobre v** . Fica definido o **campo vertical canônico** $\mathcal{V} : \mathcal{E} \rightarrow T(\mathcal{E})$ por $\mathcal{V}_v := \mathbf{vl}_v v$, que é suave apenas em $\mathcal{E} \setminus \mathbf{O}_{\mathcal{M}}$. Para qualquer seção $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$, obtemos um isomorfismo $S : s^* V(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$, dual ao levantamento vertical, por $S_p X := \mathbf{vl}_{s(p)}^{-1} X$. $\blacklozenge$

Proposição A.5.2. *Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ uma variedade fibrada. O espaço de campos verticais $\mathfrak{X}_V(\mathcal{E})$ forma uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(\mathcal{E})$.*

Demonstração. Basta mostrar que $[X, Y]$ é vertical, para quaisquer dois campos verticais X e Y . Dada $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ e $u \in \mathcal{E}$, temos

$$\begin{aligned} (\pi_*[X, Y]_u)f &= [X, Y]_u(f \circ \pi) \\ &= [XY(f \circ \pi) - YX(f \circ \pi)](u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue que $[X, Y]_u \in \ker \pi_{*u}$ para cada $u \in \mathcal{E}$, ou seja, $[X, Y] \in \mathfrak{X}_V(\mathcal{E})$. $\square$

Para uma variedade fibrada $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, fica definida uma sequência exata

$$0 \longrightarrow V(\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathbf{i}} T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi_*} \pi^* T(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

de fibrados vetoriais sobre $\mathcal{E}$. Uma **conexão de Ehresmann** em $\mathcal{E}$ é um splitting dessa sequência exata, ou seja, é um homomorfismo $\mathbf{v} : T(\mathcal{E}) \rightarrow V(\mathcal{E})$ tal que

$$0 \longrightarrow V(\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathbf{i}} T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi_*} \pi^* T(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

$\nwarrow \text{---} \mathbf{v} \text{---}$

A forma $\mathbf{v} \in \Omega^1(\mathcal{E}; V(\mathcal{E}))$ também é chamada de **projeção vertical**, já que $\mathbf{v}|_{V(\mathcal{E})} = \text{id}_{V(\mathcal{E})}$. Como $\mathbf{v}$ é sobrejetiva nas fibras, a dimensão do núcleo $\ker \mathbf{v}_u$ é constante, e portanto define um subfibrado vetorial de $T(\mathcal{E})$, que denotaremos por $H(\mathcal{E}) := \ker \mathbf{v}$ e chamaremos de **fibrado horizontal** da conexão.

Temos uma decomposição $T(\mathcal{E}) = H(\mathcal{E}) \oplus V(\mathcal{E})$ e uma outra forma $\mathbf{h} \in \Omega^1(\mathcal{E}; H(\mathcal{E}))$ de projeção horizontal, de modo que $\mathbf{h} + \mathbf{v} = \text{id}_{T(\mathcal{E})}$ e π_* nos dá um isomorfismo $H(\mathcal{E}) \simeq \pi^* T(\mathcal{M})$.

Para cada campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, definimos o seu **levantamento horizontal** como o único campo horizontal $X^> \in \mathfrak{X}_H(\mathcal{E})$ com $\pi_* X_u^> = X_{\pi(u)}$ para todo $u \in \mathcal{E}$, ou seja, $X^>$ é o único campo horizontal π -relacionado a X . Para ver que o levantamento horizontal está bem-definido, basta utilizar o isomorfismo $H(\mathcal{E}) \simeq \pi^* T(\mathcal{M})$ para definir $X_u^> := \pi_{*u}|_{H_u(\mathcal{E})}^{-1} X_{\pi(u)}$.

Dada uma carta $(U, \mathbf{x})$ de $\mathcal{M}$, tomando os levantamentos dos campos coordenados $\partial/\partial x^i$ obtemos uma base local $(\partial/\partial x^1)^>, \dots, (\partial/\partial x^m)^>$ para o fibrado horizontal $H(\mathcal{E})$.

Proposição A.5.3. *Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ uma variedade fibrada e $H(\mathcal{E})$ uma conexão de Ehresmann. Para o levantamento horizontal valem as seguintes propriedades:*

- (a) $(X + Y)^> = X^> + Y^>;$
- (b) $(fX)^> = (\pi^* f)X^>;$
- (c) $\mathbf{h}[X^>, Y^>] = [X, Y]^>,$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $f \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Demonstração. (a) e (b) seguem trivialmente de $X^>$ e X serem π -relacionados. Para mostrar (c), precisamos notar que $\pi_* \mathbf{h} = \pi_*$, onde $\mathbf{h} \in \Omega^1(\mathcal{E}; H(\mathcal{E}))$ é a projeção horizontal. Como o colchete preserva campos relacionados, $[X^>, Y^>]$ é π -relacionado a $[X, Y]$, porém não é necessariamente horizontal. Pela observação anterior, segue que

$$\pi_* \mathbf{h}[X^>, Y^>]_u = \pi_* [X^>, Y^>]_u = [X, Y]_{\pi(u)}^> \quad (\forall u \in \mathcal{E})$$

de modo que $\mathbf{h}[X^>, Y^>]$ é horizontal e ainda é π -relacionado. □

Conexões Principais

Seja $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ um fibrado principal e $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathcal{G})$. Como a ação natural de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{P}$ é livre, pela Proposição 1.5.5 segue que $\mathcal{P} \times \mathfrak{g}$ se mergulha como subfibrado vetorial de $T(\mathcal{P})$ pela ação natural $\sigma : \mathcal{P} \times \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathcal{P}) : (u, \xi) \mapsto (\sigma_u)_* \xi$.

Proposição A.5.4. *Seja $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ um fibrado principal e $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathcal{G})$. Sobre as ações de $\mathcal{G}$ e sua álgebra em $\mathcal{P}$, valem as seguintes propriedades:*

- (i) σ induz um isomorfismo $\mathcal{P} \times \mathfrak{g} \simeq V(\mathcal{P})$;
- (ii) $V(\mathcal{P})$ é equivariante pela ação $\mathcal{G} \curvearrowright T(\mathcal{P})$.

Demonstração. (i) Como as órbitas da ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{P}$ são exatamente as fibras, a curva $t \mapsto u \exp(t\xi)$ permanece na fibra $\mathcal{P}_{\pi(u)}$, para quaisquer $u \in \mathcal{P}$ e $\xi \in \mathfrak{g}$. Segue que $\sigma(u, \xi) \in T_u(\mathcal{P}_{\pi(u)}) = V_u(\mathcal{P})$. Ou seja, $\text{Im} \sigma \subseteq V(\mathcal{P})$. Por outro lado, como σ é não-singular temos

$$\text{rank Im} \sigma = \dim \mathfrak{g} = \dim \mathcal{G} = \dim \mathcal{P}_{\pi(u)} = \dim V_u(\mathcal{P}) = \text{rank } V(\mathcal{P})$$

de modo que $\text{Im} \sigma = V(\mathcal{P})$.

- $\text{Ad}(g)\Theta_{ug}(Xg) = \Theta_u(X)$, para quaisquer $u \in \mathcal{P}$, $X \in T_u(\mathcal{P})$, $g \in \mathcal{G}$;
- $\Theta(\xi^\sigma) = \xi$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

Reciprocamente, dada uma forma $\Theta \in \Omega^1(\mathcal{P}; \mathfrak{g})$ satisfazendo ambas condições, fica definida uma conexão principal por $H(\mathcal{P}) = \ker \Theta$, ou pela equação (A.1).

Para um fibrado principal $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$, como a sequência exata que define as conexões admite splittings $\mathcal{G}$ -equivariantes, podemos quocientar a sequência toda pela ação de $\mathcal{G}$ e obter uma sequência split sobre $\mathcal{M}$:

$$0 \longrightarrow \text{Ad}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\iota} T(\mathcal{P})/\mathcal{G} \xrightarrow{\pi_*} T(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

onde $T(\mathcal{P})/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}$ é o quociente pela ação derivada em $T(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{P}$, e $T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ é o quociente pela ação trivial nas fibras de $\pi^*T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}$.

A.6 Derivada Covariante e Curvatura

Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ uma variedade fibrada. Fixemos uma conexão de Ehresmann $H(\mathcal{E})$ em $\mathcal{E}$. Para cada seção $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$, definimos a **derivada covariante de s** como a parte vertical da derivada $s_* : T(\mathcal{M}) \rightarrow T(\mathcal{E})$, i.e., é o mapa $Ds : T(\mathcal{M}) \rightarrow V(\mathcal{E})$ dado por $Ds(X) := \mathbf{v}s_*(X)$. Dizemos que uma seção é **horizontal** se $Ds = 0$.

Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ uma variedade fibrada. Associada a uma conexão de Ehresmann $\mathbf{v} : T(\mathcal{E}) \rightarrow V(\mathcal{E})$ temos uma 2-forma $C^\mathbf{v} \in \Omega^2(\mathcal{E}; V(\mathcal{E}))$

$$C^\mathbf{v}(X, Y) := \mathbf{v}[\mathbf{h}X, \mathbf{h}Y] = \mathbf{v}[(\text{id} - \mathbf{v})\tilde{X}, (\text{id} - \mathbf{v})\tilde{Y}],$$

onde $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{E})$ são extensões de $X, Y \in T(\mathcal{E})$. Para mostrar que a equação acima define uma forma, basta notar que é $C^\infty(\mathcal{E})$ -linear agindo em campos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[\mathbf{h}(f\tilde{X}), \mathbf{h}\tilde{Y}] &= \mathbf{v}[f\mathbf{h}\tilde{X}, \mathbf{h}\tilde{Y}] \\ &= \mathbf{v}\left(f[\mathbf{h}\tilde{X}, \mathbf{h}\tilde{Y}] - (\mathbf{h}\tilde{Y})(f)\mathbf{h}\tilde{X}\right) \\ &= f\mathbf{v}[\mathbf{h}\tilde{X}, \mathbf{h}\tilde{Y}]. \end{aligned}$$

A forma $C^\mathbf{v}$ é chamada de **curvatura da conexão de Ehresmann**. Obtemos imediatamente a

Proposição A.6.1. *Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ uma variedade fibrada e $\mathbf{v} : T(\mathcal{E}) \rightarrow V(\mathcal{E})$ uma forma de conexão. O fibrado horizontal $H(\mathcal{E}) = \ker \mathbf{v}$ é integrável se, e somente se, sua curvatura é nula $C^\mathbf{v} = 0$.*

Demonstração. Como $H(\mathcal{E})$ é integrável se, e só se, for involutiva (Proposição 2.4.4), segue diretamente da definição da curvatura:

$$[\mathfrak{X}_H(\mathcal{E}), \mathfrak{X}_H(\mathcal{E})] \subseteq \mathfrak{X}_H(\mathcal{E}) \iff \mathbf{v}[\mathfrak{X}_H(\mathcal{E}), \mathfrak{X}_H(\mathcal{E})] = 0 \iff C^\mathbf{v} = 0.$$

□

Uma conexão $\mathbf{v} : T(\mathcal{E}) \rightarrow V(\mathcal{E})$ é dita **plana**, ou **flat**, se sua curvatura é nula $C^\mathbf{v} = 0$. Nesse caso, o fibrado horizontal $H(\mathcal{E})$ se integra em uma folheação $\mathcal{E}/H(\mathcal{E})$ cujas folhas $\mathcal{M}' \in \mathcal{E}/H(\mathcal{E})$ são localmente difeomorfas à base por meio da projeção $\pi|_{\mathcal{M}'} : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$.

Exemplo A.6.1. Dadas variedade $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$, o fibrado produto $\text{proj}_1 : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$ admite uma conexão natural pela decomposição $T(\mathcal{M} \times \mathcal{F}) = \text{proj}_1^* T(\mathcal{M}) \oplus \text{proj}_2^* T(\mathcal{F})$. A conexão $\text{proj}_1^* T(\mathcal{M})$ é claramente integrável na folheação $\{\mathcal{M} \times \{u\}\}_{u \in \mathcal{F}}$.

Mais geralmente, um fibrado trivial $\mathcal{E} \simeq \mathcal{M} \times \mathcal{F}$ admite conexões planas por meio de trivializações globais: dada $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{F}$ definimos $H^\phi(\mathcal{E}) := \phi_*^{-1} \text{proj}_1^* T(\mathcal{M})$. Em geral, trivializações diferentes fornecem conexões diferentes. $\blacklozenge$

Um morfismo de variedades fibradas $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$. Dadas duas conexões $H(\mathcal{E}_1)$ e $H(\mathcal{E}_2)$, dizemos que f **preserva as conexões** se $f_*[H(\mathcal{E}_1)] \subseteq H(\mathcal{E}_2)$. Equivalentemente, f preserva as conexões se $\mathbf{v}_2 f_* = f_* \mathbf{v}_1$. Definimos a categoria FM^{conec} cujos objetos são pares $(\pi, \mathbf{v})$ em que $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ é uma variedade fibrada e $\mathbf{v} : T(\mathcal{E}) \rightarrow V(\mathcal{E})$ uma conexão e os morfismos $(\pi_1, \mathbf{v}_1) \rightarrow (\pi_2, \mathbf{v}_2)$ são mapas fibrados $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ que preservam as conexões.

A.7 Fibrados de Linhas

Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ uma fibrado vetorial. Para qualquer seção $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ temos $s^* V(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, de modo que, fixada uma conexão $H(\mathcal{E})$, a derivada covariante de s define um mapa $\nabla s : T(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{E}$, ou seja $\nabla s \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ é uma 1-forma com valores em $\mathcal{E}$. A conexão $H(\mathcal{E})$ é dita **linear** se a aplicação $\nabla : \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ é $\mathbb{R}$ -linear.

Por outro lado, uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear $\nabla : \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M}; \mathcal{E})$, satisfazendo a regra de Leibniz

$$\nabla(fs) = (df)s + f\nabla s,$$

$f \in C^\infty(\mathcal{M})$, $s \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$, define univocamente uma conexão linear da seguinte forma. Utilizando a regra de Liebniz e o fato de que as restrições são sobrejetivas nos feixes de seções de fibrados vetoriais, ∇ pode ser considerado como um mapa $\mathbb{R}$ -linear de feixes $\Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Omega^1(-; \mathcal{E})$ sobre $\mathcal{M}$, satisfazendo a regra de Leibniz acima, em cada aberto. Ainda mais, para cada $X \in T_x(\mathcal{M})$ fica definido um operador $\nabla_X = (-)|_x \circ \nabla_Y$, onde Y é qualquer campo tangente a $\mathcal{M}$ com $Y(x) = X$.

Agora, para cada $v \in \mathcal{E}$ existe uma seção $s \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ com $s_v(\pi(v)) = v$ e $\nabla_X s_v = \mathbf{0}$ para todo $X \in T_{\pi(v)}(\mathcal{M})$. Sejam $u_1, \dots, u_n : U \rightarrow \mathcal{E}$ e $X_1, \dots, X_m : U \rightarrow T(\mathcal{M})$ bases locais e defina funções $\Gamma^i_{jk} \in C^\infty(U)$ por $\nabla_{X_k} u_j = \sum_{i=1}^n \Gamma^i_{jk} u_i$. Defina s_v localmente em U por $\sum_{i=1}^n \alpha^i u_i$, onde $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução³ de

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} = - \sum_{j=1}^n \Gamma^i_{jk} \alpha^j, \\ \alpha^j(\pi(v)) = v^j. \end{cases}$$

Em seguida extendemos s_v globalmente. Assim, tomamos $H_v^\nabla(\mathcal{E}) = (s_v)_*[T_{\pi(v)}(\mathcal{M})]$. Note que as funções Γ^i_{jk} se juntam em uma função matricial $A_k := (\Gamma^i_{jk})_{i,j=1}^n \in C^\infty(U, \mathfrak{gl}(n))$, de modo que

$$\nabla_{X_k} \sum_{i=1}^n f^i u_i = \sum_{i=1}^n (X_k f^i + (A_k f)^i) u_i$$

³Facilmente solucionável escolhendo U contrátil.

em U , onde $(A_k f)^i = \sum_{j=1}^n \Gamma^i_{jk} f^j$. Em termos de trivializações, se $\phi : \mathcal{E}_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ é a trivialização associada à base local $u_1, \dots, u_n$, obtemos uma forma $A_\phi : T_U(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$ tal que

$$(\nabla_X s)(x) = \phi^{-1}(x, Xf(x) + A_\phi(X)f(x)) \quad (\text{A.2})$$

para quaisquer $x \in U$, $X \in T_x(\mathcal{M})$ e toda seção local $s \in \Gamma_U(\mathcal{E})$, onde $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ é a expressão local de s por ϕ . Assim, dada uma conexão linear ∇ em $\mathcal{E}$, para cada atlas de trivializações $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in I}$ obtemos uma família de formas $\{A_j\}_{j \in I}$, $A_j \in \Omega^1(U_j; \mathfrak{gl}(n))$, que satisfazem

$$A_j(x) = g_{jk}(x)A_k(x)g_{jk}(x)^{-1} + g_{jk}(x)^{-1}dg_{jk}(x) \quad (\text{A.3})$$

para todo $x \in U_j \cap U_k$, onde $\{g_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow \mathfrak{gl}(n)\}_{j,k \in I}$ é a família de transições. Reciprocamente, uma família de 1-formas com valores em $\mathfrak{gl}(n)$, associadas a um atlas de trivializações por (A.3), define univocamente uma conexão linear pela fórmula (A.2). As formas A são chamadas de **potenciais de conexão** para ∇ .

Em termos da derivada covariante, a curvatura toma a forma do **tensor de Riemann** $R^\nabla \in \Omega^2(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ dado por

$$R^\nabla(X, Y)s := [\nabla_X, \nabla_Y]s - \nabla_{[X, Y]}s$$

para quaisquer $X, Y \in T(\mathcal{M})$ e $s \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$. Em termos de uma trivialização ϕ com potencial A_ϕ temos

$$(R^\nabla(X, Y)s)(x) = \phi^{-1}(x, F_\phi(X, Y)f(x))$$

onde $s = \phi^{-1}(\cdot, f(\cdot))$ e $F_\phi := dA_\phi + [A_\phi \wedge A_\phi] \in \Omega^2(U; \mathfrak{g})$. Não é difícil ver que, variando as trivializações, as formas F_ϕ definem uma 2-forma global $F \in \Omega^2(\mathcal{M}; \mathfrak{g})$.

Se tivermos outras estruturas em $\mathcal{E}$ podemos pedir a compatibilidade de uma conexão linear com essas estruturas:

- se $J : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ for uma estrutura complexa, uma conexão linear $\nabla : \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ é dita **complexa** se $\nabla J = J\nabla$, i.e., se for $\mathbb{C}$ -linear. Nesse caso os potenciais de conexão são formas em $\Omega^1(U; \mathfrak{gl}(n/2; \mathbb{C}))$;
- se $(\cdot | \cdot)$ é um produto interno (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) em $\mathcal{E}$, uma conexão $\mathbb{K}$ -linear ∇ **preserva** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se $X \langle s_1, s_2 \rangle = \langle \nabla_X s_1, s_2 \rangle + \langle s_1, \nabla_X s_2 \rangle$. Nesse caso, os potenciais são formas em $\Omega^1(U; \mathfrak{o}(n))$ ou $\Omega^1(U; \mathfrak{u}(n))$, conforme o produto interno é real ou complexo.

Em geral, uma conexão linear ∇ em $\mathcal{E}$ define conexões lineares em fibrados vetoriais obtidos functorialmente:

- em $\mathcal{E}^*$ por $(\nabla_X^* \nu)(v) = d(\nu(v)) - \nu(\nabla_X v)$;
- em $\mathcal{E}^{\oplus r}$ por $\nabla_X^{\oplus r}(v_1 \oplus \dots \oplus v_r) = \nabla_X v_1 \oplus \dots \oplus \nabla_X v_r$;
- em $\mathcal{E}^{\otimes k}$ por $\nabla_X^{\otimes k}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = \sum_{j=1}^k v_1 \otimes \dots \otimes \nabla_X v_j \otimes \dots \otimes v_k$.

O mesmo vale para coeficientes complexos, e nesse caso também temos o fibrado $\bar{\mathcal{E}}$ com a conexão $\bar{\nabla}s = \overline{\nabla s}$.

Fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e uma variedade $\mathcal{M}$. Um **$\mathbb{K}$ -fibrado vetorial com conexão** sobre $\mathcal{M}$ é um par $(\mathcal{E}, \nabla)$ onde ∇ é uma conexão $\mathbb{K}$ -linear em $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$. Um **morfismo de conexões lineares** $(\mathcal{X}, \nabla^{\mathcal{X}}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \nabla^{\mathcal{Y}})$ é um homomorfismo de fibrados vetoriais $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tal que $\varphi(\nabla_X^{\mathcal{X}} s) = \nabla_X^{\mathcal{Y}} \varphi(s)$ para quaisquer $X \in T(\mathcal{M})$ e $s \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$. Os exemplos acima podem ser vistos como limites na categoria de fibrados com conexões, com os mesmos diagramas usuais para fibrados vetoriais.

Também vamos considerar **fibrados Hermitianos com conexão**, que são triplas $(\mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle, \nabla)$ em que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ é um produto Hermitiano em $\mathcal{E}$ e ∇ é uma conexão que o preserva. Os morfismos são, obviamente, homomorfismos de fibrados vetoriais preservando o produto e comutando com a conexão.

Exemplo A.7.1. Para um fibrado vetorial complexo $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, uma conexão complexa ∇ pode ser naturalmente estendida $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^1(\mathcal{M}; \mathcal{E}) = \Gamma_{\mathcal{M}}(T^*(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E})$ por $\nabla_{X+iY} := \nabla_X + i\nabla_Y$. $\blacklozenge$

Um **fibrado de linhas** (complexo) é simplesmente um fibrado vetorial complexo $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ de posto 1, i.e., as fibras $\mathcal{L}_x$ são espaços complexos unidimensionais. Desse modo, $\mathcal{L}$ tem uma $\mathbb{C}^{\times} = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ -estrutura natural, dada por qualquer atlas de trivializações lineares: $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in I}$ com $\phi_j : \mathcal{L}_U \simeq U \times \mathbb{C}$ de modo que existem $g_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ com $\phi_j \circ \phi_k^{-1}(x, g_{jk}(x)z) = \phi_j^{-1}(x, 1)$ temos $s_j(x) = g_{jk}(x)s_k(x)$ para $x \in U_j \cap U_k$. O cociclo associado às transições $(g_{jk})_{j,k \in I}$ é corresponde a uma classe em $\check{H}_{C^{\infty}}^1(\mathcal{M}; \mathbb{C}^{\times})$ que define $\mathcal{L}$ além de isomorfismo.

Um produto Hermitiano $\langle \cdot | \cdot \rangle$ em $\mathcal{L}$ equivale a uma $S^1 = \text{U}(1)$ -estrutura, i.e., um atlas com transições $g_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow S^1$, de modo que a classe correspondente pertence ao subgrupo $\check{H}_{C^{\infty}}^1(\mathcal{M}; S^1) \subset \check{H}_{C^{\infty}}^1(\mathcal{M}; \mathbb{C}^{\times})$. Como $\text{Lie}(S^1) = \mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$, uma conexão Hermitiana ∇ em $\mathcal{L}$ fica definida por uma família de formas reais $\theta \in \Omega^1(U)$, com potenciais $A = -i\theta$. A curvatura é expressa localmente por

$$R^{\nabla}(X, Y)s = -i \, d\theta(X, Y)s.$$

N.B. Não se deve confundir $\check{H}_{C^{\infty}}^1(\mathcal{M}; \mathcal{G})$ com seu subgrupo de coeficientes localmente constantes $\check{H}^1(\mathcal{M}; \mathcal{G})$. Os fibrados associados a $\check{H}^1(\mathcal{M}; \mathcal{G})$ são os que admitem conexões planas, e por isso são chamados de **fibrados planos**. Apenas para grupos discretos que não precisamos fazer distinção. $\star$

Fixe uma variedade base $\mathcal{M}$. Considerando $\check{H}_{C^{\infty}}^1(\mathcal{M}; S^1)$ como as classes de isomorfismos de fibrados de linhas Hermitianos, o produto tensorial $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ nos dá uma operação de grupo em $\check{H}_{C^{\infty}}^1(\mathcal{M}; S^1)$, cujo inverso de $\mathcal{L}$ é $\mathcal{L}^*$. Podemos ver isso facilmente traduzindo essas operações em termos dos cociclos: se $g_{jk} \in C^{\infty}(U_j \cap U_k, S^1)$ é uma família de transições associada a $\mathcal{L}$, então a família $h_{jk} = g_{jk}^{-1}$ é associada a $\mathcal{L}^*$, e para qualquer outro fibrado de linhas $\mathcal{X}$ com transições a_{jk} , a família $g_{jk}a_{jk}$ está associada ao produto tensorial $\mathcal{L} \otimes \mathcal{X}$. Assim vemos que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^* \simeq \mathbb{C}_{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathbb{C}$.

De modo geral, fixado $\mathcal{L}$, uma solução de uma equação da forma $\mathcal{X}^{\lambda} = \mathcal{L}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, se existir, equivale a um cociclo $[a] \in \check{H}^1(\mathcal{M}; S^1)$ com $a_{jk}^{\lambda} = g_{jk}$. Em geral não temos solução. Por exemplo, dizemos que um fibrado de linhas $\mathcal{X}$ é **raiz de $\mathcal{L}$** se $\mathcal{X}^2 = \mathcal{L}$. Tome um atlas de trivializações $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in I}$ tal que a cobertura

$\{U_j\}_{j \in I}$ é formada apenas de abertos contráteis, sem repetições. Seja $g = (g_{jk})_{j,k \in I}$ o 1-cociclo de transições desse atlas. Assim, para cada $j, k \in I$, podemos escolher $b_{jk} \in C^\infty(U_j \cap U_k, S^1)$ tais que $b_{jk}^2 = g_{jk}$. Defina $f_{jkl} \in C^\infty(U_j \cap U_k \cap U_\ell, S^1)$ por

$$f_{jkl}(x) = b_{jk}(x)b_{k\ell}(x)b_{\ell j}(x), \quad x \in U_j \cap U_k \cap U_\ell.$$

Como as funções b_{jk} diferem apenas por sinal aonde os domínios se interceptam, o 2-cociclo $f = (f_{jkl})_{j,k,\ell \in I}$ toma valores em $\{1, -1\} = \mathbb{Z}_2$. Vemos ainda que f independe da escolha dos b_{jk} 's e depende apenas das transições. Se a classe $[f] \in \check{H}^2(\mathcal{M}; \mathbb{Z}_2)$ for nula, i.e., $[f] = 1$, então existe uma 1-cocadeia $(c_{jk})_{j,k \in I}$ com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, tal que $f_{jkl} = (\delta c)_{jkl} = c_{jk}c_{k\ell}c_{\ell j}$. Segue que a família $a = (a_{jk})_{j,k \in I}$, $a_{jk} := c_{jk}b_{jk}$, é um 1-cociclo: $\delta a = f^2 = 1$. Assim, o fibrado $\mathcal{X}$ associado a $[a] \in \check{H}_{C^\infty}^1(\mathcal{M}; S^1)$ é uma raiz de $\mathcal{L}$. Note que $\mathcal{X}$ depende diretamente da escolha de $[c]$, de modo que se $\check{H}^1(\mathcal{M}; \mathbb{Z}_2)$ for não-trivial, podemos ter raízes não-equivalentes para $\mathcal{L}$.

A.8 Operadores Diferenciais

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade suave, fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e denote $\mathcal{O}_{\mathcal{M}} := C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{K})$. Seja $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ um $\mathbb{K}$ -fibrado vetorial. Para cada $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ podemos definir um operador linear $F_{\mathcal{X}}(f) : \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ por multiplicação pontual $F_{\mathcal{X}}(f)s := fs$. Agora, consideramos dois fibrados vetoriais $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}$ e uma função $\mathbb{K}$ -linear $D : \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{Y})$. Para cada $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ definimos o mapa $\mathbb{K}$ -linear $[f, D] : \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{Y})$ como o comutador usual $[f, D] := F_{\mathcal{Y}}(f) \circ D - D \circ F_{\mathcal{X}}(f)$, ou seja,

$$[f, D](s) := fD(s) - D(fs), \quad \forall s \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}).$$

Dizemos que D é um **operador diferencial de ordem** $k \in \mathbb{N}$ se

$$[f_k, [f_{k-1}, [\dots [f_0, D] \dots]] = 0$$

para quaisquer $f_0, \dots, f_k \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$. Denotando por $\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^k(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ o espaço de operadores diferenciais de ordem k , vemos que $\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^k(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{k+1}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que, para $k = 0$, temos

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^0(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}}(\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}), \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{Y})) \simeq \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})).$$

Da definição, segue diretamente que

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{k+1}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \{D \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}), \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{Y})) \mid [\mathcal{O}_{\mathcal{M}}, D] \subseteq \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^k(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\}$$

para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Como temos uma sequência crescente de subespaços

$$C^\infty(\mathcal{M}) = \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^0(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^k(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{k+1}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \dots \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}), \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{Y})),$$

podemos considerar o subespaço soma

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^k(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}), \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{Y}))$$

chamado simplesmente de **espaço de operadores diferenciais de $\mathcal{X}$ para $\mathcal{Y}$** . Em particular, quando $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}), \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})) = \text{End}_{\mathbb{K}}(\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X}))$ é uma

$\mathbb{K}$ -álgebra com a composição, de modo que $[f, D]$ é de fato o comutador do produto na álgebra e vemos que $\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{\infty}(\mathcal{X}) := \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{\infty}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ forma uma subálgebra graduada com $\text{gr}(D_1 D_2) = \text{gr}(D_1) + \text{gr}(D_2)$ e $\text{gr}([D_1, D_2]) = \text{gr}(D_1) + \text{gr}(D_2) - 1$.

Para uma variedade $\mathcal{M}^{(m)}$ os operadores diferenciais $C^{\infty}(\mathcal{M}) \rightarrow C^{\infty}(\mathcal{M})$ de ordem k podem ser representados localmente por expressões polinomiais

$$D(x^1, \dots, x^n, \partial_1, \dots, \partial_m) = \sum_{j_1 + \dots + j_{\ell} \leq k} f^{j_1 \dots j_{\ell}}(x) \frac{\partial^{j_1}}{\partial (x^1)^{j_1}} \cdots \frac{\partial^{j_{\ell}}}{\partial (x^{\ell})^{j_{\ell}}} \quad (\text{A.4})$$

de grau k nas variáveis diferenciais com coeficientes $f^{j_1 \dots j_{\ell}}$ suaves em $\mathcal{M}$. Temos um isomorfismo de $C^{\infty}(\mathcal{M})$ -módulos

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^k(\mathbb{R}_{\mathcal{M}}) \simeq \bigoplus_{j=0}^k S^j(\mathfrak{X}(\mathcal{M}))$$

onde $S^j(\mathfrak{X}(\mathcal{M}))$ é a j -ésima potência simétrica de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ como $C^{\infty}(\mathcal{M})$ -módulo, ou seja, são as seções do fibrado de tensores contravariantes siméticos $S_{\mathbb{R}}^j(T(\mathcal{M})) \rightarrow \mathcal{M}$. Em outras palavras, temos um isomorfismo de $C^{\infty}(\mathcal{M})$ -módulos $\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{\infty}(\mathbb{R}_{\mathcal{M}}) \simeq S(\mathfrak{X}(\mathcal{M}))$ com a álgebra simétrica livre gerada por $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$, porém $\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{\infty}(\mathbb{R}_{\mathcal{M}})$ e $S(\mathfrak{X}(\mathcal{M}))$ não são isomorfas como álgebras.⁴

Como $S(\mathfrak{X}(\mathcal{M}))$ se mergulha em $C^{\infty}(T^*(\mathcal{M}))$ como funções polinomiais nas fibras $T_x^*(\mathcal{M})$, obtemos um mapa $\sigma : \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{\infty}(\mathbb{R}_{\mathcal{M}}) \rightarrow C^{\infty}(T^*(\mathcal{M}))$ chamado de **símbolo**, dado localmente por

$$\sigma(D)(\alpha)(x) = \sum_{j_1 + \dots + j_{\ell} \leq k} f^{j_1 \dots j_{\ell}}(x) \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_{\ell}}$$

para quaisquer $\alpha = \sum_{j=1}^m \alpha_j dx^j \in T_x^*(\mathcal{M})$ e $D \in \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{\infty}(\mathbb{R}_{\mathcal{M}})$ com a expressão local (A.4). Temos ainda o **símbolo principal** $\sigma_P : \mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{\infty}(\mathbb{R}_{\mathcal{M}}, \mathbb{R}_{\mathcal{M}}) \rightarrow C^{\infty}(T^*(\mathcal{M}))$ em que $\sigma_P(D)$ é a parcela homogênea de grau máximo de $\sigma(D)$, dada localmente por

$$\sigma_P(D)(\alpha)(x) = \sum_{j_1 + \dots + j_{\ell} = k} f^{j_1 \dots j_{\ell}}(x) \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_{\ell}}$$

para $\alpha = \sum_{j=1}^m \alpha_j dx^j \in T_x^*(\mathcal{M})$ e D como em (A.4).

A.9 Cohomologia de deRham

Seja $\mathcal{M}^{(m)}$ uma variedade. Lembramos que a derivada exterior em $\mathcal{M}$ é o mapa $d : \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M})$ definido por

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &:= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) + \\ &\quad + \sum_{i < j}^k (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) \end{aligned}$$

⁴A álgebra de operadores diferenciais $\mathfrak{D}_{\mathcal{M}}^{\infty}(\mathbb{R}_{\mathcal{M}})$ também é conhecida como *álgebra de Weyl*, e pode ser vista como uma deformação não-comutativa da álgebra simétrica.

para quaisquer campos $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Como sabemos, $d^2 = 0$, de modo que a sequência

$$\Omega^0(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^k(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^m(\mathcal{M})$$

é um complexo de cocadeias, chamado de **complexo de deRham** associado a $\mathcal{M}$. Junto com os mapas induzidos, os grupos de cohomologia

$$H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{M}) := (\ker d|_{\Omega^\bullet(\mathcal{M})}) / (d\Omega^{\bullet-1}(\mathcal{M}))$$

formam a **cohomologia de deRham** de $\mathcal{M}$.

Proposição A.9.1 (Isomorfismo de deRham). *Para toda variedade $\mathcal{M}$ temos um isomorfismo natural $H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{M}) \simeq \check{H}^\bullet(\mathcal{M}; \mathbb{R})$.*

Demonstração. A demonstração completa se encontra em [46]. Aqui, vamos esboçar o mapa $\check{H}^\bullet(\mathcal{M}; \mathbb{R}) \rightarrow H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{M})$. Tome uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ localmente finita, de abertos contráteis, de $\mathcal{M}$ e uma partição da unidade $\{\rho_i\}_{i \in I}$ subordinada a $\mathcal{U}$. Dada uma cocadeia $a = (a_{U_{i_0} \dots U_{i_k}})$ em $\check{C}^k(\mathcal{M}, \mathcal{U}; \mathbb{R})$ definimos a k -forma

$$\varphi(a) := \sum_{i_0, \dots, i_k \in I} a_{U_{i_0} \dots U_{i_k}}(x) \rho_{i_0}(x) d\rho_{i_1} \wedge \dots \wedge d\rho_{i_k}$$

onde as funções $a_{U_{i_0} \dots U_{i_k}}$ são estendidas como zero fora das interseções. Como

$$d(a_{U_{i_0} \dots U_{i_k}} \rho_{i_0} d\rho_{i_1} \wedge \dots \wedge d\rho_{i_k}) = a_{U_{i_0} \dots U_{i_k}} d\rho_{i_0} \wedge \rho_{i_1} \wedge \dots \wedge d\rho_{i_k}$$

e $a_{U_{i_0} \dots U_{i_k}}|_U = a_{U_{i_0} \dots U_{i_k}} \rho_{i_{k+1}}$ para algum aberto $U \subseteq U_{i_{k+1}}$, podemos ver que $d\varphi(a) = \varphi(\delta a)$. Segue que $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ diferem por uma forma exata se $[a] = [b]$ em $\check{H}^k(\mathcal{M}; \mathbb{R})$. O mapa induzido por φ entre $\check{H}^\bullet(\mathcal{M}; \mathbb{R}) \rightarrow H_{\text{dR}}^\bullet(\mathcal{M})$ independe das escolhas de partição da unidade e é um isomorfismo. $\square$

Em grau $k = 2$, dada uma forma fechada $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ obtemos um representante da classe correspondente a $[\omega] \in \check{H}^2(\mathcal{M})$ do seguinte modo: escolha uma cobertura contrátil $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in I}$, sem repetições, com formas $\theta_j \in \Omega^1(U_j)$ e funções $a_{jk} \in C^\infty(U_j \cap U_k)$ tais que

$$\begin{aligned} \omega|_{U_j} &= d\theta_j \\ \theta_j - \theta_k &= da_{jk} \text{ para } U_j \cap U_k \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Tome $\alpha_{jkl} := a_{jk} + a_{kl} + a_{lj}$, de modo que a cocadeia $\alpha = (\alpha_{jkl})$ é um cociclo $\delta\alpha = 0$. As equações acima garantem que $\omega - \varphi(\alpha)$ é uma forma exata.

Apêndice B

Apêndice: Estruturas Complexas e Integração

Referências para este apêndice: [44] e [22].

B.1 Complexificação de Espaços Vetoriais

Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$ uma extensão. Todo $\mathbb{L}$ -espaço vetorial $\mathbb{W}$ forma naturalmente um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com a restrição da multiplicação. Em geral, o espaço obtido por essa restrição é denotado ainda por $\mathbb{W}$, mas vamos denotá-lo por $\mathbb{W}|_{\mathbb{K}}$. É claro que $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}|_{\mathbb{K}} = (\dim_{\mathbb{L}} \mathbb{W})(\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L})$. Como todo mapa $\mathbb{L}$ -linear é também $\mathbb{K}$ -linear, obtemos um functor $(-)|_{\mathbb{K}} : \mathbf{Vec}_{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ chamado de **restrição de coeficientes**. Nesta seção iremos construir um functor adjunto a restrição.

Dado um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial $\mathbb{V}$ e $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$ uma extensão, definimos a categoria $\mathbb{V}/\mathbf{Vec}_{\mathbb{L}}$, cujos objetos são pares $(\mathbb{W}, f)$ com $\mathbb{W}$ um $\mathbb{L}$ -espaço e $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}|_{\mathbb{K}}$ um mapa $\mathbb{K}$ -linear, e um morfismo $(\mathbb{W}_1, f_1) \rightarrow (\mathbb{W}_2, f_2)$ é uma transformação $\mathbb{L}$ -linear $T : \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{W}_2$ com $f_2 = f_1 \circ T$. Definimos a **$\mathbb{L}$ -extensão de escalares de $\mathbb{V}$** como um objeto inicial $(\mathbb{V}^{\mathbb{L}}, \iota)$ em $\mathbb{V}/\mathbf{Vec}_{\mathbb{L}}$. Vemos facilmente que $\iota : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^{\mathbb{L}}|_{\mathbb{K}}$ é um mapa injetivo, ou seja, $\mathbb{V}$ se identifica naturalmente como um $\mathbb{K}$ -subespaço de $\mathbb{V}^{\mathbb{L}}$.

Temos uma construção natural da extensão de escalares: tome $\mathbb{V}^{\mathbb{L}} = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$ com a multiplicação $\mathbb{L} \times \mathbb{V}^{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{V}^{\mathbb{L}}$ definida por extensão $\mathbb{K}$ -linear de

$$\lambda(\alpha \otimes v) := \lambda\alpha \otimes v$$

para $\lambda \in \mathbb{L}$, $\alpha \otimes v \in \mathbb{V}^{\mathbb{L}}$. Tomando uma base $\{v_j\}_{j \in J}$ de $\mathbb{V}$, o conjunto $\{1 \otimes v_j\}_{j \in J}$ forma uma base de $\mathbb{V}^{\mathbb{L}}$ já que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (1 \otimes v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes v_i = \mathbf{0}$$

implica em $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Em particular, $\dim_{\mathbb{L}} \mathbb{V}^{\mathbb{L}} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$.

Por outro lado, tomando a restrição de coeficientes de $\mathbb{V}^{\mathbb{L}}$, vemos que $\mathbb{V}$ se mergulha naturalmente como o subespaço $1 \otimes \mathbb{V} \subseteq (\mathbb{V}^{\mathbb{L}})|_{\mathbb{K}}$. Escolhendo uma base $\{e_i\}_{i \in I}$ de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{K}$, obtemos uma decomposição na soma direta $(\mathbb{V}^{\mathbb{L}})|_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}e_i \otimes \mathbb{V} \simeq \mathbb{V}^{(I)}$. Ou seja, temos $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}^{\mathbb{L}}|_{\mathbb{K}} = (\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V})(\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L})$.

Definimos o functor de **extensão de coeficientes** $(-)^{\mathbb{L}} : \text{Vec}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{L}}$ atuando nos morfismos por $T \mapsto \text{id}_{\mathbb{L}} \otimes_{\mathbb{K}} T$. Dado um $\mathbb{L}$ -espaço vetorial $\mathbb{W}$, temos uma bijeção

$$\mathcal{L}_{\mathbb{L}}(\mathbb{V}^{\mathbb{L}}; \mathbb{W}) \simeq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}; \mathbb{W}|_{\mathbb{K}})$$

levando uma função $\mathbb{L}$ -linear T na função $\mathbb{K}$ -linear $T|_{1 \otimes \mathbb{V}} : \mathbb{V} = 1 \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}|_{\mathbb{K}}$. Em resumo, a extensão $(-)^{\mathbb{L}}$ é adjunto à esquerda da restrição $(-)|_{\mathbb{K}}$.

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, o espaço com coeficientes estendidos $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ é chamado de **complexificação** do espaço real $\mathbb{V}$.

Nesse caso, como $\mathbb{C}$ admite uma base canônica $\{1, i\}$ sobre $\mathbb{R}$, sempre podemos decompor a restrição da complexificação na soma $(\mathbb{V}^{\mathbb{C}})|_{\mathbb{R}} = \mathbb{V} \oplus i\mathbb{V}$, onde identificamos $\mathbb{V} = 1 \otimes \mathbb{V}$ e $i\mathbb{V} := i \otimes \mathbb{V}$. Temos um operador natural $J \in \text{End}_{\mathbb{R}}((\mathbb{V}^{\mathbb{C}})|_{\mathbb{R}})$, dado pela multiplicação imaginária $J(v) := iv$, satisfazendo $J^2 = -\text{id}_{(\mathbb{V}^{\mathbb{C}})|_{\mathbb{R}}}$, $J[\mathbb{V}] = i\mathbb{V}$ e $J[i\mathbb{V}] = \mathbb{V}$.

De forma geral, em um espaço vetorial real $\mathbb{V}$, uma **estrutura complexa** é uma aplicação linear $J \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$ tal que $J^2 = -\text{id}_{\mathbb{V}}$. Assim, J induz uma multiplicação complexa $\mathbb{C} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ por

$$(\alpha + i\beta)v := \alpha v + \beta J(v).$$

Denotando por $\mathcal{V}$ o espaço $\mathbb{V}$ com essa multiplicação complexa, vemos que $\mathcal{V}|_{\mathbb{R}} = \mathbb{V}$. É claro que $\mathbb{V}$ admite estrutura complexa se e só se tiver dimensão real par. Se $(\mathbb{V}_1, J_1)$ e $(\mathbb{V}_2, J_2)$ são espaços vetoriais reais com estruturas complexas, vemos que um mapa $T : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ é $\mathbb{C}$ -linear se e somente for $\mathbb{R}$ -linear e $J_2 T = T J_1$. Assim, podemos considerar espaços complexos $\mathcal{V}$ e espaços reais com estruturas complexas $(\mathbb{V}, J)$ como o mesmo objeto. Vamos denotar por $\mathbb{V}_J$ o espaço complexo $\mathcal{V}$.

Exemplo B.1.1. Tendo estruturas complexas em mente, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, temos ainda um segunda construção natural para a complexificação. Podemos definir como $\mathbb{V}^{\mathbb{C}} = (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V})_J$ com estrutura complexa $J(v, u) := (-u, v)$. ♦

Exemplo B.1.2. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo. Podemos considerar o espaço dual $\mathcal{V}^{*\mathbb{C}} := \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}; \mathbb{C})$ de funcionais complexos, que é naturalmente um espaço complexo. Por outro lado, o espaço real $\mathcal{V}|_{\mathbb{R}}$ nos dá o dual $(\mathcal{V}|_{\mathbb{R}})^*$ de funcionais reais. Seja $J : \mathcal{V}|_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{V}|_{\mathbb{R}}$ a estrutura complexa $\mathcal{V} = (\mathcal{V}|_{\mathbb{R}})_J$, que induz a estrutura complexa transposta $J^T : (\mathcal{V}|_{\mathbb{R}})^* \rightarrow (\mathcal{V}|_{\mathbb{R}})^*$, $J^T f = fJ$. Temos um isomorfismo natural $\mathcal{V}^{*\mathbb{C}} \simeq (\mathcal{V}|_{\mathbb{R}})_{J^T}^*$ dado pelo mapa

$$f \mapsto \text{Re } f + J^T \text{Im } f.$$

É considerando essa identificação que podemos denotar o dual de um espaço complexo simplesmente por $\mathcal{V}^*$ sem causar confusão. ♦

Seja $\mathcal{W}$ um espaço vetorial complexo. Uma **forma real** de $\mathcal{W}$ é um subespaço vetorial real $\mathbb{V} \subseteq \mathcal{W}|_{\mathbb{R}}$ tal que $\mathcal{W}|_{\mathbb{R}} = \mathbb{V} \oplus i\mathbb{V}$. Vemos que $\mathbb{V}^{\mathbb{C}} = \mathcal{W}$. Em relação a uma forma real, podemos definir um mapa de **conjugação** $\bar{\cdot} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$, $\overline{x \oplus iy} := x \oplus -iy$, que é idempotente $\overline{\bar{w}} = w$, $\mathbb{R}$ -linear em $\mathcal{W}|_{\mathbb{R}}$ e anti- $\mathbb{C}$ -linear em $\mathcal{W}$.

Seja $\mathcal{W}$ um espaço vetorial complexo. O **espaço conjugado** de $\mathcal{W}$ é o espaço vetorial complexo $\overline{\mathcal{W}}$ cujo conjunto base é $\mathcal{W}$, com a mesma operação de soma e o produto composto com a conjugação $\mathbb{C} \times \overline{\mathcal{W}} \rightarrow \overline{\mathcal{W}} : (\lambda, w) \mapsto \bar{\lambda}w$. Em termos de uma estrutura complexa $\mathcal{W} = (\mathbb{W}, J)$, vemos que $\overline{\mathcal{W}} = (\mathbb{W}, -J)$. Assim, um mapa

$f : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ é anti- $\mathbb{C}$ -linear, se só se for $\mathbb{C}$ -linear como $\mathcal{W} \rightarrow \overline{\mathcal{W}}$. Vemos também que uma forma real $\mathbb{V}$ de $\mathcal{W}$ equivale a um anti-isomorfismo idempotente $c : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ por $\mathbb{V} = \ker(c - \text{id}_{\mathcal{W}})$, de modo que c é o mapa de conjugação associado a $\mathbb{V}$.

Exemplo B.1.3. Seja $\mathcal{W}$ um espaço complexo. Uma forma sesquilinear $A : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser definida, de modo equivalente, como um mapa $\mathbb{C}$ -linear $A : \overline{\mathcal{W}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$. Quando o mapa $\mathbb{C}$ -linear $(-)^A : \overline{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{W}^*$ dado por $w^A = A(w, \cdot)$ é um isomorfismo, dizemos que A é **não-degenerada**. $\blacklozenge$

Exemplo B.1.4. Seja $(\mathbb{V}, \omega)$ um espaço vetorial simplético real. Na complexificação $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ podemos definir a **forma complexificada** $\omega^{\mathbb{C}} : \mathbb{V}^{\mathbb{C}} \times \mathbb{V}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\omega^{\mathbb{C}}(v + iu, x + iy) := \omega(v, x) - \omega(u, y) + i(\omega(u, x) + \omega(v, y)).$$

Vemos imediatamente que $\omega^{\mathbb{C}}$ é uma forma simplética complexa. Note que, $(\mathbb{V}^{\mathbb{C}}|_{\mathbb{R}}, \text{Re } \omega^{\mathbb{C}})$ é um espaço vetorial simplético real, em que $\mathbb{V}$ é um subespaço simplético. Note também que $\omega^{\mathbb{C}}$ é univocamente determinada por $\text{Re } \omega^{\mathbb{C}} = \omega$. Assim, $(\mathbb{V}^{\mathbb{C}}, \omega^{\mathbb{C}})$ é o objeto inicial em

$$(\mathbb{V}, \omega)/\text{SpVec}_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{ccc} & & (\mathcal{V}_1, \omega_1) \\ & \nearrow \text{\mathbb{R}-morfismo} & \downarrow \text{\mathbb{C}-morfismo} \\ (\mathbb{V}, \omega) & & \\ & \searrow \text{\mathbb{R}-morfismo} & \downarrow \\ & & (\mathcal{V}_2, \omega_2) \end{array} \right\}$$

$\blacklozenge$

Exemplo B.1.5. Similarmente ao exemplo anterior, para um espaço vetorial real $\mathbb{V}$, o dual complexo $(\mathbb{V}^{\mathbb{C}})^{*_{\mathbb{C}}}$ de sua complexificação é naturalmente isomorfo a complexificação $(\mathbb{V}^*)^{\mathbb{C}}$ de seu dual. $\blacklozenge$

O exemplo anterior mostra que o processo de extensão funciona com propriedades análogas em subcategorias de espaços vetoriais.

Exemplo B.1.6. Seja $\mathcal{A}$ um $\mathbb{K}$ -álgebra. Dada uma extensão $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$, definimos uma estrutura de álgebra em $\mathcal{A}^{\mathbb{L}} = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{A}$ pelo produto tensorial de $\mathbb{K}$ -álgebras, ou seja, com a multiplicação dada por

$$(\lambda \otimes v)(\alpha \otimes u) = \lambda\alpha \otimes vu.$$

Chamamos a $\mathbb{L}$ -álgebra $\mathcal{A}^{\mathbb{L}}$ de **extensão de $\mathcal{A}$ com coeficientes em $\mathbb{L}$** . Assim, $\mathcal{A}^{\mathbb{L}}$ com a inclusão $\mathcal{A} = 1 \otimes \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{L}}$ é o objeto inicial na categoria

$$\mathcal{A}/\text{Alg}_{\mathbb{L}} = \left\{ \begin{array}{ccc} & & \mathcal{A}_1 \\ & \nearrow \text{\mathbb{K}-morfismo} & \downarrow \text{\mathbb{L}-morfismo} \\ \mathcal{A} & & \\ & \searrow \text{\mathbb{K}-morfismo} & \downarrow \\ & & \mathcal{A}_2 \end{array} \right\}$$

Em particular, quando $\mathcal{A}$ é associativa/álgebra de Lie, $\mathcal{A}^{\mathbb{L}}$ também será. Os funtores de extensão e restrição de coeficientes quando restritos às categorias de álgebras ainda são adjuntos e satisfazem propriedades análogas. $\blacklozenge$

Agora, seja $\mathcal{B}$ uma álgebra complexa. Uma **forma real de $\mathcal{B}$** é uma subálgebra real $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}|_{\mathbb{R}} = \mathcal{A} \oplus i\mathcal{A}$. Em relação a uma forma real, temos os mapas $\text{Re}, \text{Im} : \mathcal{B}|_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{A}$ dados por

$$\text{Re}(x + iy) := x \quad \text{e} \quad \text{Im}(x + iy) := y.$$

O produto passa a ter a expressão usual da multiplicação complexa:

$$(x + iy)(v + iu) = (xv - yu) + i(xu + yv).$$

Em termos do mapa de conjugação associado a $\mathcal{A}$, os mapas de parte real e imaginária se escrevem

$$\text{Re } v = \frac{1}{2}(v + \bar{v}) \quad \text{e} \quad \text{Im } v = \frac{1}{2}(v - \bar{v}).$$

Exemplo B.1.7. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra complexa com uma forma real $\mathcal{A}$. Dada uma derivação $D \in \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B})$, temos

$$\begin{aligned} \text{Re } D(vu) &= \text{Re}[D(v)u + vD(u)] \\ &= [\text{Re } D(v)][\text{Re } u] - [\text{Im } D(v)][\text{Im } u] + [\text{Re } v][\text{Re } D(u)] - [\text{Im } v][\text{Im } D(u)]. \end{aligned}$$

Se ambos $v, u \in \mathcal{A}$, vemos que a composta $\text{Re } D$ é uma derivação de $\mathcal{A}$. Similarmente, o mesmo vale para $\text{Im } D$. Segue que $D = \text{Re } D + i \text{Im } D$ como aplicação $\mathbb{R}$ -linear em $\mathcal{B}|_{\mathbb{R}}$. Concluimos que $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B})|_{\mathbb{R}} = \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) \oplus i \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$, ou seja, $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ é uma forma real de $\text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B})$. $\blacklozenge$

Exemplo B.1.8. Para uma variedade suave $\mathcal{M}$, é fácil ver que $C^{\infty}(\mathcal{M}) = C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ é a forma real de $C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{C}) = C^{\infty}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$. $\blacklozenge$

Seja $\mathbb{V}_J$ um espaço vetorial complexo. Na complexificação $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ o mapa J se estende para um automorfismo $J^{\mathbb{C}} \in \text{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}^{\mathbb{C}})$ com $(J^{\mathbb{C}})^2 = -\text{id}$, de modo que $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ se decompõe como uma soma $\mathbb{V}^{\mathbb{C}} = \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_-$ de autoespaços

$$\mathbb{V}_{\pm} := \{v \in \mathbb{V}^{\mathbb{C}} \mid J^{\mathbb{C}}v = \pm iv\}$$

com as projeções $P_{\pm} : \mathbb{V}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ dadas por

$$P_{\pm}(v) := \frac{1}{2}(v \mp iJ^{\mathbb{C}}v).$$

Os subespaços $\mathbb{V}_+$ e $\mathbb{V}_-$ são chamados, respectivamente, de espaços **holomorfo** e **anti-holomorfo** associados a $\mathbb{V}_J$. As restrições das projeções $P_{\pm}$ em $\mathbb{V}$ definem isomorfismos $\mathbb{V}_J = \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{V}_{\pm}$ com P_+ sendo $\mathbb{C}$ -linear e P_- sendo anti- $\mathbb{C}$ -linear. Assim, $\mathbb{V}_+$ é uma cópia de $\mathbb{V}_J$ em $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{V}_-$ é uma cópia de $\mathbb{V}_{-J}$ em $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$. Também é claro que $\overline{\mathbb{V}_{\pm}} = \mathbb{V}_{\mp}$.

Proposição B.1.1. *Seja $\mathbb{V}_J$ um espaço vetorial complexo. Se $\dim \mathbb{V} < \infty$, para toda aplicação $\mathbb{C}$ -linear $T : \mathbb{V}_J \rightarrow \mathbb{V}_J$ temos*

$$(a) \quad \text{tr}(T|_{\mathbb{R}}) = 2 \operatorname{Re} \operatorname{tr} T;$$

$$(b) \quad \det(T|_{\mathbb{R}}) = |\det T|^2,$$

onde $T|_{\mathbb{R}}$ é a mesma função, considerada como mapa $\mathbb{R}$ -linear $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$.

Demonstração. Proposição 1.3.20 em [22]. □

Seja $\mathbb{V}_J$ um espaço vetorial complexo. Dizemos que uma forma bilinear real $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é **preservada por J** se $B(Jx, Jy) = B(x, y)$ para todos $x, y \in \mathbb{V}$. Sendo uma estrutura complexa, vemos que B é preservada por J se, e só se, $B(Jx, y) = -B(x, Jy)$. De fato,

$$\begin{aligned} B(Jx, Jy) = B(x, y) &\Rightarrow B(x, Jy) = -B(J^2x, Jy) = -B(JJx, Jy) = -B(Jx, y), \\ B(Jx, y) = -B(x, Jy) &\Rightarrow B(Jx, Jy) = -B(J^2x, y) = B(x, y). \end{aligned}$$

Nesse caso, se B for simétrica, a forma $B(\cdot, J\cdot)$ será anti-simétrica e vice versa.

Suponha que temos uma forma simplética real ω em $\mathbb{V}$. Dizemos que J é **mansa em relação a ω** se a preservar, i.e., for uma transformação simplética, e

$$\omega(x, Jx) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{V} \setminus \mathbf{0}.$$

Nesse caso, a forma bilinear $(\cdot | \cdot)_J : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(x|y)_J := \omega(x, Jy)$$

é um produto interno real. Vemos que J preserva $(\cdot | \cdot)_J$ e logo é ortogonal e anti-simétrica. Ainda mais, considerando o espaço complexo $\mathbb{V}_J$, a forma $\langle \cdot | \cdot \rangle_J : \mathbb{V}_J \times \mathbb{V}_J \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\langle x|y \rangle_J := (x|y)_J + i\omega(x, y)$$

é um produto interno complexo. Como J age como multiplicação por i em $\mathbb{V}_J$, é um operador unitário e anti-hermitiano em relação a $\langle \cdot | \cdot \rangle_J$.

Um **espaço vetorial de Kähler** é uma upla $(\mathbb{V}, J, \omega, (\cdot | \cdot), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ em que J é um estrutura complexa, ω é uma forma simplética real, $(\cdot | \cdot)$ é um produto interno real e $\langle \cdot | \cdot \rangle$ é um produto interno complexo, todos se relacionando por

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle &= (\cdot | \cdot) + i\omega \\ (\cdot | \cdot) &= \omega(\cdot, J\cdot). \end{aligned}$$

B.2 Fibrados Vetoriais Complexos

Seja $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ um fibrado vetorial suave. Uma **estrutura complexa** em $\mathcal{E}$ é um endomorfismo $J \in \operatorname{End}_{\operatorname{VB}_{\mathcal{M}}}(\mathcal{E})$ tal que $J^2 = -\operatorname{id}_{\mathcal{E}}$. Um **fibrado vetorial complexo** será um par $(\mathcal{E}, J)$ em que $\mathcal{E}$ é um fibrado vetorial e J uma estrutura complexa nele. Em um fibrado vetorial complexo, o mapa de multiplicação $\mathbb{C} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ definido por

$(\alpha + i\beta)v := \alpha v + \beta J(v)$ torna as fibras $\mathcal{E}_x$ espaços vetoriais complexos, de modo que J se torna a multiplicação imaginária $J(v) = iv$.

Em particular, quando $\mathcal{E} = T(\mathcal{M})$, dizemos que J é uma **estrutura quase complexa** em $\mathcal{M}$ quando for uma estrutura complexa em seu fibrado tangente. Uma **variedade quase complexa** é um par $(\mathcal{M}, J)$ em que J é uma estrutura quase complexa para $\mathcal{M}$.

Dados dois fibrados complexos $(\mathcal{E}_1, J_1)$ e $(\mathcal{E}_2, J_2)$, definimos um **mapa $\mathbb{C}$ -linear** $f : (\mathcal{E}_1, J_1) \rightarrow (\mathcal{E}_2, J_2)$ como um mapa fibrado que comuta com a multiplicação complexa definida pelos J 's. Equivalentemente, f comuta com as estruturas complexas $fJ_1 = J_2f$. Quando $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ são fibrados sobre a mesma base $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$ e f recobre o mapa identidade $f_B = \text{id}_{\mathcal{M}_1}$, dizemos que f é um **homomorfismo de fibrados complexos**. Denotaremos por $\text{VB}^{\mathbb{C}}$ e $\text{VB}_{\mathcal{M}}^{\mathbb{C}}$, respectivamente, a categoria de fibrados complexos e a categoria de fibrados complexos sobre $\mathcal{M}$. Analogamente ao caso real, as operações usuais em espaços vetoriais complexos se estendem para operações sobre fibrados vetoriais complexos sobre uma base fixa.

Para qualquer fibrado vetorial real $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, a **complexificação de $\mathcal{E}$** é o fibrado vetorial complexo $(\mathcal{E}^{\mathbb{C}}, J)$ dado por $\mathcal{E}^{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{E}$ e $J(\alpha \otimes v) := i\alpha \otimes v$. Assim, a multiplicação complexa é simplesmente $\lambda(\alpha \otimes v) = \lambda\alpha \otimes v$, e as fibras $\mathcal{E}_x^{\mathbb{C}}$ são as complexificações das fibras $\mathcal{E}_x$. Identificamos $\mathcal{E}$ com o subfibrado real $1 \otimes \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^{\mathbb{C}}$, e temos uma decomposição de fibrados reais $\mathcal{E}^{\mathbb{C}} = \mathcal{E} \oplus J\mathcal{E}$.

Seja $(\mathcal{E}, J)$ um fibrado vetorial complexo. Definimos o **fibrado conjugado** $(\bar{\mathcal{E}}, \bar{J}) := (\mathcal{E}, -J)$, de modo que a multiplicação complexa $\mathbb{C} \times \bar{\mathcal{E}} \rightarrow \bar{\mathcal{E}} : (\lambda, v) \mapsto \bar{\lambda}v$ é a de $\mathcal{E}$ composta com a conjugação.

Uma **forma real de $\mathcal{E}$** é um subfibrado real $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus J\mathcal{V}$. Assim como no caso de espaços vetoriais, uma forma real de um fibrado complexo corresponde a uma escolha de isomorfismo de conjugação $\mathcal{E} \rightarrow \bar{\mathcal{E}}$.

Para as seções $\Gamma_{\mathcal{M}}(\pi)$, além das estruturas de $C^{\infty}(\mathcal{M})$ -módulo e $\mathbb{R}$ -espaço, também temos as estruturas de $C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ -módulo e $\mathbb{C}$ -espaço. Se $\mathcal{E}$ admite uma forma real $\mathcal{V}$, então $\Gamma_{\mathcal{M}}(\pi|_{\mathcal{V}})$ é uma forma real de $\Gamma_{\mathcal{M}}(\pi)$ como espaços vetoriais.

Exemplo B.2.1. Seja $\mathcal{M}$ uma variedade. Para a complexificação do fibrado tangente $T(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} = T(\mathcal{M}) \oplus iT(\mathcal{M})$, as seções são da forma $X + iY$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} := \Gamma_{\mathcal{M}}(T(\mathcal{M})^{\mathbb{C}})$ o $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de **campos vetoriais complexos em $\mathcal{M}$** . Com a ação em funções complexas $f + ig \in C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ dada por

$$(X + iY)(f + ig) := Xf - Yg + i(Xg + Yf)$$

vemos que os elementos de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ agem como derivações em $\text{Der}_{\mathbb{C}}(C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{C}))$. Como $\text{Der}_{\mathbb{C}}(C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{C})) = \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^{\infty}(\mathcal{M})) \oplus i\text{Der}_{\mathbb{R}}(C^{\infty}(\mathcal{M})) = \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \oplus i\mathfrak{X}(\mathcal{M})$, vemos que $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ coincide com a álgebra de Lie complexa de derivações em $C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. $\blacklozenge$

Exemplo B.2.2. Para uma variedade $\mathcal{M}$ temos as **formas diferenciais complexas** $\Omega_{\mathbb{C}}^k(\mathcal{M})$ cujos elementos são mapas k -lineares complexos $\alpha : (T(\mathcal{M})^{\mathbb{C}})^{k \times \mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{C}$, ou, equivalentemente, seções de $\Gamma_{\mathcal{M}}(\bigwedge^k T^*(\mathcal{M})^{\mathbb{C}})$. Como $T^*(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ é também o dual complexo de $T(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ (Exemplo B.1.5) vemos que $\Omega_{\mathbb{C}}^k(\mathcal{M})$ pode ser identificado com $\Omega^k(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$. $\blacklozenge$

Exemplo B.2.3. Fixada uma variedade $\mathcal{M}$ e um functor suave¹ $\mathcal{F} : \text{Vec}_{\mathbb{C}}^{\otimes} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{C}}^{\otimes}$ de espaços complexos, teremos um fibrado $\mathcal{F}(T(\mathcal{M})^{\mathbb{C}})$ cujas fibras são $\mathcal{F}(T_x(\mathcal{M})^{\mathbb{C}})$. Assim como a derivada de Lie usual $\mathcal{L}_X$, $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ pode ser definida em qualquer fibrado obtido functorialmente a partir de $T(\mathcal{M})$, podemos definir uma derivada de Lie em relação a campos complexos $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ por $\mathcal{L}_{X+iY} := \mathcal{L}_X + i\mathcal{L}_Y$, uma vez que $\mathcal{F}(T(\mathcal{M})^{\mathbb{C}})$ também é obtido functorialmente de $T(\mathcal{M})$ e a derivada de Lie usual faz sentido. ♦

Dado um fibrado complexo $(\mathcal{E}, J)$, na sua complexificação $\mathcal{E}^{\mathbb{C}}$ podemos estender a estrutura complexa $J \in \text{Aut}_{\text{VB}_{\mathbb{R}}}(\mathcal{E})$ para um mapa $J^{\mathbb{C}} \in \text{Aut}_{\text{VB}_{\mathbb{C}}}(\mathcal{E}^{\mathbb{C}})$, de modo a obter uma decomposição $\mathcal{E}^{\mathbb{C}} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$ em autofibrados

$$\mathcal{E}_{\pm} := \{v \in \mathcal{E}^{\mathbb{C}} \mid J^{\mathbb{C}}v = \pm iv\}.$$

Analogamente ao caso de espaços vetoriais, temos projeções $P_{\pm} = \frac{1}{2}(\text{id} \mp iJ^{\mathbb{C}})$. Os fibrados $\mathcal{E}_+$ e $\mathcal{E}_-$ são chamados, respectivamente, de fibrados **holomorfo** e **anti-holomorfo** associados a $(\mathcal{E}, J)$.

Exemplo B.2.4. Em uma variedade quase-complexa $(\mathcal{M}, J)$, dizemos que uma função $f \in C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ é **holomorfa** se $Xf = 0$ para todo vetor anti-holomorfo $X \in T(\mathcal{M})_-$. Quando a estrutura J é integrável, ou seja, $\mathcal{M}$ é uma variedade complexa, as funções holomorfas correspondem às funções analíticas $C^{\omega}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. ♦

Um **fibrado pseudo-Hermitiano** é uma tripla $(\mathcal{E}, J, (\cdot | \cdot))$ em que $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ é um fibrado vetorial, J uma estrutura complexa para $\mathcal{E}$ e $(\cdot | \cdot) : \mathcal{E} \times_{\pi} \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear não-degenerada. Quando $(\cdot | \cdot)$ é definida-positiva, i.e., $(v|v) \geq 0$ para todo $v \in \mathcal{E}$, dizemos que $(\mathcal{E}, J, (\cdot | \cdot))$ é um **fibrado Hermitiano**.

B.3 Densidades

Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, com $\dim \mathbb{V} = n$ finita. Dado $s \in \mathbb{R}$, um **s -densidade em $\mathbb{V}$ com valores em $\mathbb{W}$** é uma função $\omega : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{W}$ tal que

$$\omega(Av_1, \dots, Av_n) = |\det A|^s \omega(v_1, \dots, v_n)$$

para quaisquer $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ e $A \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Denotaremos por $\text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}; \mathbb{W})$ o espaço vetorial real de s -densidades. Em particular, denotaremos $\text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}) := \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}; \mathbb{K})$.

Para $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, temos um isomorfismo $\text{Vol}_{\mathbb{K}}^{s_1}(\mathbb{V}) \otimes \text{Vol}_{\mathbb{K}}^{s_2}(\mathbb{V}) \simeq \text{Vol}_{\mathbb{K}}^{s_1+s_2}(\mathbb{V})$ pela identificação

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(v_1, \dots, v_n) = \omega_1(v_1, \dots, v_n) \omega_2(v_1, \dots, v_n).$$

Notando que $\text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}; \mathbb{W}) \simeq \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}) \otimes \mathbb{W}$ para $\mathbb{W}$ com dimensão finita, vemos que

$$\text{Vol}_{\mathbb{K}}^{s_1}(\mathbb{V}; \mathbb{W}_1) \otimes \text{Vol}_{\mathbb{K}}^{s_2}(\mathbb{V}; \mathbb{W}_2) \simeq \text{Vol}_{\mathbb{K}}^{s_1+s_2}(\mathbb{V}; \mathbb{W}_1 \otimes \mathbb{W}_2).$$

Proposição B.3.1. Para todo $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita $\mathbb{V}$ e $s \in \mathbb{R}$, temos $\dim \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}) = 1$.

¹Seção A.4.

Demonstração. Fixe uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$. Como todos os $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{V}^n$ são obtidos por uma única A com $u_i = Av_i$, um volume $\omega \in \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V})$ fica determinado univocamente determinado por seu valor $\omega(v_1, \dots, v_n)$ nessa base. Fixando $\omega \neq \mathbf{0}$, para todo $\nu \in \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V})$, existe um único $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\nu = \lambda\omega$. De fato, basta tomar

$$\lambda = \frac{\nu(v_1, \dots, v_n)}{\omega(v_1, \dots, v_n)},$$

que está bem-definido, já que $\omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, caso contrário teríamos $\omega = \mathbf{0}$. $\square$

Exemplo B.3.1. Em um espaço $\mathbb{V}$ de dimensão m , para toda m -forma $\omega \in A^m(\mathbb{V})$ podemos definir um s -densidade $|\omega|^s \in \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V})$ por

$$|\omega|^s(v_1, \dots, v_m) := |\omega(v_1, \dots, v_m)|^s.$$

Em particular, em $\mathbb{K}^m$ definimos o s -volume canônico $dV_{\mathbb{K}}^s$ por $dV_{\mathbb{K}}^s(e_1, \dots, e_m) = 1$ na base canônica, ou seja, $dV_{\mathbb{K}}^s = |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m|^s$. Qualquer outra s -densidade em $\mathbb{K}^m$ é um múltiplo de $dV_{\mathbb{K}}^s$. Fixando essa densidade como base, podemos identificar $\text{Vol}^s(\mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{K}$. $\blacklozenge$

Proposição B.3.2. Para quaisquer $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ de dimensão finita, temos o isomorfismo natural $\text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}; \mathbb{W}) \simeq \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}) \otimes \mathbb{W}$.

Demonstração. Basta notar que o mapa $\varphi : \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}) \otimes \mathbb{W} \rightarrow \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}; \mathbb{W})$ dado por $\varphi(\nu \otimes w)(v) = \nu(v)w$ é injetivo e as dimensões são ambas iguais a $\dim \mathbb{W}$. $\square$

Como $\text{Vol}^s(\mathbb{V})$ tem dimensão 1, todo elemento de $\text{Vol}^s(\mathbb{V}) \otimes \mathbb{W}$ é da forma $\omega \otimes w$. De fato, dada $\omega \in \text{Vol}^s(\mathbb{V})$ não-nula temos

$$\sum_{i=1}^k \omega_i \otimes w^i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \omega \otimes w^i = \omega \otimes \sum_{i=1}^k \lambda_i w^i$$

para alguns $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Temos também $\text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}; \mathbb{K}^n) \simeq \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V}) \otimes \mathbb{K}^n \simeq \text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{V})^n$. Em particular, para $\mathbb{V} = \mathbb{K}^m$ temos $\text{Vol}_{\mathbb{K}}^s(\mathbb{K}^m; \mathbb{K}^n) \simeq \mathbb{K}^n$ correspondendo a escolha da base $\omega_i = (\delta_i^j dV^s)_{j=1}^n$.

Por enquanto, fixemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dado um fibrado vetorial $\pi : \mathcal{E}^{(m+n)} \rightarrow \mathcal{M}^{(m)}$, para cada $s \in \mathbb{R}$ definimos o **fibrado de s -densidade com valores em $\mathcal{E}$** por $\text{Vol}^s(\mathcal{M}; \mathcal{E}) := \text{Vol}^s(T(\mathcal{M}); \mathcal{E})$. As seções de $\text{Vol}^s(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ são chamadas de **s -densidades sobre $\mathcal{M}$ com valores em $\mathcal{E}$** . Denotaremos os espaços de s -densidades por $|\Omega|^s(\mathcal{M}; \mathcal{E}) := \Gamma_{\mathcal{M}}(\text{Vol}^s(\mathcal{M}; \mathcal{E}))$ e $|\Omega|^s(\mathcal{M}; \mathbb{V}) := |\Omega|^s(\mathcal{M}; \mathcal{M} \times \mathbb{V})$.

Dada uma carta $(U, \mathbf{x})$ de $\mathcal{M}$ e uma trivialização $\phi : \mathcal{E}_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, teremos uma trivialização $\psi : \text{Vol}^s(U; \mathcal{E}) \rightarrow U \times \text{Vol}^s(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ dada por

$$\begin{aligned} \psi_p(\nu)(a_1, \dots, a_m) &= \phi_p(\nu(\mathbf{x}_{*p}^{-1} a_1, \dots, \mathbf{x}_{*p}^{-1} a_m)) \\ \psi(\nu) &= (p, \psi_p(\nu)) \end{aligned}$$

para $\nu \in \text{Vol}^s(T_p(\mathcal{M}); \mathcal{E}_p)$, $p \in U$. Compondo ψ com a identificação $\text{Vol}^s(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$, obtemos uma trivialização $\tilde{\psi} : \text{Vol}^s(U; \mathcal{E}) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$. Fazendo outras escolhas

$(U, \mathbf{y})$ e $\alpha : \mathcal{E}_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, teremos $\beta : \text{Vol}^s(U; \mathcal{E}) \rightarrow U \times \text{Vol}^s(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ e $\tilde{\beta} : \text{Vol}^s(U; \mathcal{E}) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$. As transições $\tau_{\beta\psi}$ e $\tau_{\tilde{\beta}\tilde{\psi}}$ são ambas dadas por

$$\begin{aligned}\tau_{\beta\psi}(p)\omega &= |\det(\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1})'(\mathbf{x}(p))|^{-s} (\phi_p \alpha_p^{-1})\omega = |\det(\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1})'(\mathbf{x}(p))|^{-s} (\phi_p \alpha_p^{-1})\omega, \\ \tau_{\tilde{\beta}\tilde{\psi}}(p)v &= |\det(\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1})'(\mathbf{x}(p))|^{-s} (\phi_p \alpha_p^{-1})v = |\det(\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1})'(\mathbf{x}(p))|^{-s} (\phi_p \alpha_p^{-1})v,\end{aligned}$$

ou seja, pelo produto $|\det \tau_{\mathbf{y}\mathbf{x}}(p)|^{-s} \tau_{\phi\alpha}(p)$.

Fixada $\omega \in |\Omega|^s(\mathcal{M}; \mathcal{E})$, para cada carta $(U, \mathbf{x})$ de $\mathcal{M}$ temos uma expressão local

$$\omega|_U = f |d^m \mathbf{x}|^s$$

onde $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma seção local, $d^m \mathbf{x} := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ e o produto deve ser entendido pontualmente como

$$\omega(p)(X_1, \dots, X_m) = f(p) |d^m \mathbf{x}|^s(X_1, \dots, X_m) = \frac{f(p)}{(m!)^s} |dx^1(X_1) \cdots dx^m(X_m)|^s$$

para $p \in U$ e $X_i \in T_p(\mathcal{M})$. Em particular, quando $\mathcal{E} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$, temos as **s-densidades** $\text{Vol}^s(\mathcal{M})$, $|\Omega|^s(\mathcal{M}) := |\Omega|^s(\mathcal{M}; \mathbb{R})$. Nesse caso, f deve ser uma função real $U \rightarrow \mathbb{R}$. Quando $s = 1$ chamamos as seções de $\text{Vol}^1(\mathcal{M})$ apenas de **densidades** e escrevemos $\text{Vol}(\mathcal{M}) := \text{Vol}^1(\mathcal{M})$, $|\Omega|(\mathcal{M}) := |\Omega|^1(\mathcal{M})$.

Seja $\{(U_i, \mathbf{x}_i)\}_{i \in I}$ uma atlas de $\mathcal{M}$ com uma partição da unidade $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$. Para uma densidade de suporte compacto $\omega \in |\Omega|(\mathcal{M})_c$, definimos a sua **integral** como o número real

$$\int_{\mathcal{M}} \omega := \sum_{i \in I} \int_{\mathbf{x}_i[U_i]} \varphi_i(x) (f_i \circ \mathbf{x}_i^{-1})(x) dx$$

onde $\omega|_{U_i} = f_i |d^m \mathbf{x}|$. Como ω tem suporte compacto, existem $i_1, \dots, i_k \in I$ com $\omega|_{\mathcal{M} \setminus U} = 0$, $U = \bigcup_{\ell=1}^k U_{i_\ell}$, de modo que $f_i = 0$ para $i \neq i_1, \dots, i_k$, e a soma acima tem um número finito de termos não-nulos. Para verificar que a integral está bem-definida, basta notar que:

- se ω tem suporte contido em uma vizinhança coordenada U_i então $\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathbf{x}_i[U_i]} f_i(x) dx$;
- se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são cartas em U , com $\omega|_U = f |d^m \mathbf{x}| = g |d^m \mathbf{y}|$, temos $f = |\det(\mathbf{y}\mathbf{x}^{-1})'(\mathbf{x}(\cdot))|g$ e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{y}[U]} (g \circ \mathbf{y}^{-1})(y) dy &= \int_{(\mathbf{y}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{x})[U]} (g \circ \mathbf{y}^{-1})(y) dy \\ &= \int_{\mathbf{x}[U]} (g \circ \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{y}\mathbf{x}^{-1})(x) |\det(\mathbf{y}\mathbf{x}^{-1})'(x)| dx \\ &= \int_{\mathbf{x}[U]} (f \circ \mathbf{x}^{-1})(x) dx.\end{aligned}$$

Fica definido o funcional integral $\int_{\mathcal{M}} : |\Omega|(\mathcal{M})_c \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \int_{\mathcal{M}} \omega$. Fixada uma densidade $\omega \in \text{Vol}(\mathcal{M})$, para qualquer função suave de suporte compacto $f \in C_c^\infty(\mathcal{M})$,

a densidade $f\omega$ tem suporte compacto e podemos integrá-la. Para densidades complexas $\text{Vol}(\mathcal{M}; \mathbb{C}) = \text{Vol}(\mathcal{M}) \otimes \mathbb{C}$, como $|\Omega|(\mathcal{M}; \mathbb{C}) = |\Omega|(\mathcal{M}) + i|\Omega|(\mathcal{M})$, definimos a integral de uma densidade complexa $\omega = \text{Re } \omega + i \text{Im } \omega$ por

$$\int_{\mathcal{M}} \omega := \left(\int_{\mathcal{M}} \text{Re } \omega \right) + i \left(\int_{\mathcal{M}} \text{Im } \omega \right)$$

e obtemos um funcional complexo $\int_{\mathcal{M}} : |\Omega|(\mathcal{M}; \mathbb{C})_c \rightarrow \mathbb{C}$.

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade suave. Um **elemento de volume** em $\mathcal{M}$ é uma densidade global $\text{dvol} \in |\Omega|(\mathcal{M})$ tal que:

- dvol é não-singular, i.e., $\text{dvol}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$;
- para toda $f \in C_c^\infty(\mathcal{M})$ não-negativa, $\int_{\mathcal{M}} f(x) \text{dvol}(x) \geq 0$.

Por exemplo, se $\omega \in \Omega^m(\mathcal{M})$ é uma forma de volume não-singular, a densidade $|\omega|$ será um elemento de volume e $\int_{\mathcal{M}} f\omega \leq \pm \int_{\mathcal{M}} f|\omega|$ para funções não-negativas.

Proposição B.3.3. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade. Para qualquer fibrado vetorial $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ e $s \in \mathbb{R}$, existe seção $\omega : \mathcal{M} \rightarrow \text{Vol}^s(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ não-singular, i.e., $\omega_x \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{M}$.*

Demonstração. Escolha um atlas $\{(U_i, \mathbf{x}_i)\}_{i \in I}$ localmente finito para $\mathcal{M}$ com uma partição da unidade $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$. Possivelmente encolhendo os abertos U_i , podemos escolher seções $s_i : U_i \rightarrow \mathcal{E}$ não-singulares. Defina

$$\omega_i := \begin{cases} \varphi_i s_i |\text{d}\mathbf{x}_i|^s & \text{em } U_i \\ 0 & \text{em } \mathcal{M} \setminus U_i. \end{cases}$$

e $\omega := \sum_{i \in I} \omega_i$. Dado $x \in \mathcal{M}$, existem $i_1, \dots, i_k \in I$ com $x \in U = \bigcap_{\ell=1}^k U_{i_\ell}$ e $\varphi_{i_\ell}(x) > 0$, de modo que

$$\omega|_U = \sum_{\ell=1}^k \omega_{i_\ell}|_U = \left(\sum_{\ell=1}^k \varphi_{i_\ell} s_{i_\ell} |_U D_\ell \right) |\text{d}\mathbf{x}_{i_1}|^s|_U,$$

onde $|\text{d}\mathbf{x}_{i_\ell}|^s|_U = D_\ell |\text{d}\mathbf{x}_{i_1}|^s|_U$, para cada $\ell = 1, \dots, k$. Como $\sum_{\ell=1}^k \varphi_{i_\ell}(x) D_\ell(x) > 0$, segue que $\omega_x \neq 0$. □

Proposição B.3.4 (Corolário). *Toda variedade $\mathcal{M}$ admite um elemento de volume.*

Demonstração. Segue da demonstração acima tomando $s_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ constante $s_i = 1$. □

Proposição B.3.5 (Corolário). *Para qualquer variedade $\mathcal{M}$ e $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o fibrado de s -densidades $\text{Vol}^s(\mathcal{M})$ é trivial.*

Demonstração. Como $\text{Vol}^s(\mathcal{M})$ tem posto 1, a potência dvol^s de um forma uma base global, já que não se anula em nenhum ponto. □

Assim, a escolha de um elemento de volume $\text{dvol} \in |\Omega|(\mathcal{M})$ define um isomorfismo $C^\infty(\mathcal{M}) \simeq |\Omega|^s(\mathcal{M})$ por $f \mapsto f \text{dvol}^s$, para cada $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para um fibrado vetorial $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, o isomorfismo $\text{Vol}^s(\mathcal{M}; \mathcal{E}) \simeq \mathcal{E}$ nos dá $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) \simeq |\Omega|^s(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ com a mesma fórmula $\sigma \mapsto \sigma \text{dvol}$.

B.4 O espaço L^2 canônico

Completamento L^2

Consideramos dois fibrados vetoriais complexos $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}$ e um pareamento sesquilinear $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{X} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$. Para cada par de números reais $p, q \in [1, \infty]$ com $^2 (1/p) + (1/q) = 1$, podemos definir um mapa bilinear $\text{Vol}^{1/p}(\mathcal{M}; \mathcal{X}) \times_{\mathcal{M}} \text{Vol}^{1/q}(\mathcal{M}; \mathcal{Y}) \rightarrow \text{Vol}(\mathcal{M}; \mathbb{C})$ dado por $(\eta, \nu) \mapsto \langle \cdot | \cdot \rangle \circ (\eta, \nu)$, que vamos denotar simplesmente por $\langle \eta | \nu \rangle$. Para as seções, obtemos um mapa bilinear

$$|\Omega|^{1/p}(\mathcal{M}; \mathcal{X}) \times |\Omega|^{1/q}(\mathcal{M}; \mathcal{Y}) \rightarrow |\Omega|(\mathcal{M}; \mathbb{C})$$

que ainda denotamos por $\langle \eta | \nu \rangle$, sendo definido pontualmente. Dada uma carta $(U, \mathbf{x})$, podemos escrever $\eta|_U = f|\text{d}\mathbf{x}|^{1/p}$ e $\nu|_U = g|\text{d}\mathbf{x}|^{1/q}$ localmente com seções $f : U \rightarrow \mathcal{X}$ e $g : U \rightarrow \mathcal{Y}$ para obter uma fórmula local do produto

$$\langle \eta | \nu \rangle|_U = \langle f | g \rangle |\text{d}\mathbf{x}|.$$

Vemos que, se pelo menos uma delas tiver suporte compacto, a densidade $\langle \eta | \nu \rangle$ terá suporte compacto e poderemos integrá-la. Fica definido um mapa sesquilinear

$$\begin{aligned} \langle \langle \cdot | \cdot \rangle \rangle : |\Omega|^{1/p}(\mathcal{M}; \mathcal{X})_c \times |\Omega|^{1/q}(\mathcal{M}; \mathcal{Y})_c &\rightarrow \mathbb{C} \\ : (\eta, \nu) &\mapsto \langle \langle \eta | \nu \rangle \rangle := \int_{\mathcal{M}} \langle \eta | \nu \rangle. \end{aligned}$$

Em particular, vamos tomar $p = q = 2$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ e $\langle \cdot | \cdot \rangle$ um produto interno. Nesse caso, o pareamento sesquilinear $\langle \langle \cdot | \cdot \rangle \rangle$ é um produto interno no espaço de seções $|\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{X})_c$. Com efeito, basta verificar $\langle \langle \eta | \eta \rangle \rangle \geq 0$ e $\langle \langle \eta | \eta \rangle \rangle = 0 \Rightarrow \eta = \mathbf{0}$ para η com suporte contido em uma carta $(U, \mathbf{x})$: se $\eta|_U = f\sqrt{|\text{d}\mathbf{x}|}$ então

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \eta | \eta \rangle = \int_{\mathbf{x}[U]} \langle (f \circ \mathbf{x}^{-1})(x) | (f \circ \mathbf{x}^{-1})(x) \rangle \, dx$$

onde $x \mapsto \langle (f \circ \mathbf{x}^{-1})(x) | (f \circ \mathbf{x}^{-1})(x) \rangle$ é claramente uma função não-negativa. Definimos o espaço de Hilbert $L^2(\mathcal{M}; \mathcal{X}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ como o completamento de $|\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{X})_c$ por esse produto interno, que chamamos de L^2 **canônico** do fibrado Hermitiano $(\mathcal{X}, \langle \cdot | \cdot \rangle) \rightarrow \mathcal{M}$. Por simplicidade, vamos denotar esse espaço apenas por $L^2(\mathcal{M}; \mathcal{X})$, quando o produto interno estiver implícito pelo contexto. Para um fibrado produto $\mathcal{X} = \mathcal{M} \times \mathbb{V}$, escrevemos apenas $L^2(\mathcal{M}; \mathbb{V})$.

O L^2 **canônico de uma variedade** $\mathcal{M}$ é simplesmente o espaço $L^2(\mathcal{M}) := L^2(\mathcal{M}; \mathbb{C})$ com o produto interno canônico $\langle z | w \rangle = \bar{z}w$. Em geral, dado um espaço Hilbert $\mathbb{V}$ de dimensão finita, o isomorfismo $\text{Vol}^{1/2}(\mathcal{M}; \mathbb{V}) \simeq \text{Vol}^{1/2}(\mathcal{M}; \mathbb{C}) \otimes \mathbb{V}_{\mathcal{M}}$ nos dá um isomorfismo natural $L^2(\mathcal{M}; \mathbb{V}) \simeq L^2(\mathcal{M}) \hat{\otimes} \mathbb{V}$.³

Agora, se fixarmos um elemento de volume $\text{dvol} \in |\Omega|(\mathcal{M})$, para cada fibrado Hermitiano $(\mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle) \rightarrow \mathcal{M}$, podemos definir o L^2 **relativo a** dvol como o espaço $L^2(\mathcal{M}, \text{dvol}; \mathcal{E})$ obtido pelo completamento de $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})_c$ com o produto interno

$$\langle v_1 | v_2 \rangle := \int_{\mathcal{M}} \langle v_1(x), v_2(x) \rangle \, \text{dvol}(x).$$

²Aqui utilizamos $1/\infty = 0$.

³Mais geralmente, essa fórmula se estende para espaços de Hilbert de dimensão infinita, utilizando uma definição apropriada de fibrado vetorial suave de posto infinito. Mais detalhes em [2].

O isomorfismo $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) \simeq |\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{E})$ definido por $v \mapsto v\sqrt{\text{dvol}}$ nos dá um mapa unitário $L^2(\mathcal{M}, \text{dvol}; \mathcal{E}) \simeq L^2(\mathcal{M}; \mathcal{E})$.

L^2 como funções suaves

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade. Dado um compacto $K \subseteq \mathcal{M}$ de interior não-vazio, dizemos que uma função suave $\rho \in C^\infty(\mathcal{M})$ está **subordinada a K** se $\text{supp } \rho \subseteq K$ e $\rho[\mathcal{M}] \subseteq [0, 1]$.

Dada uma densidade $\omega \in |\Omega|(\mathcal{M}; \mathbb{C})$, dizemos que um valor $L_\omega \in \mathbb{C}$ é a **integral de ω** se para todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K_\varepsilon \subseteq \mathcal{M}$ de interior não-vazio tal que

$$\left| \int_{\mathcal{M}} \rho \omega - L_\omega \right| < \varepsilon$$

para toda $\rho \in C^\infty(\mathcal{M})$ subordinada a K_ε . Se existir tal $L_\omega \in \mathbb{C}$, é fácil ver que é único e denotamos $\int_{\mathcal{M}} \omega := L_\omega$. Nesse caso, dizemos que ω é **integrável**.

Proposição B.4.1. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade. Dada $f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, $f \text{ dvol}_1$ é integrável se e só se $f \text{ dvol}_2$ for integrável, para quaisquer elementos de volume dvol_1 e dvol_2 .*

Demonstração. Sabemos que $\text{dvol}_1 = \lambda \text{dvol}_2$ para uma única função $\lambda \in C^\infty(\mathcal{M})$ e pela definição de elemento de volume, devemos ter $\lambda \geq 0$. O restante segue diretamente da definição. $\square$

A Prop. acima nos permite dizer que $f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ é **integrável** se $f \text{ dvol}$ for integrável, para qualquer elemento de volume. Assim, a integrabilidade de uma densidade ω é equivalente a integrabilidade de $f = \frac{\omega}{\text{dvol}}$, para qualquer elemento de volume.

Dizemos que uma densidade $\eta \in |\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ é L^2 -integrável se a densidade $\langle \eta | \eta \rangle$ for integrável. Como a definição de integrabilidade de densidades sugere, toda densidade L^2 -integrável corresponde a um elemento de $L^2(\mathcal{M}; \mathcal{X})$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \eta = \eta$ para funções ρ_n subordinadas a uma exaustão de $\mathcal{M}$ por compactos. Denotando o espaço de seções L^2 -integráveis por $|\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{X})_{L^2}$, vemos que $|\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{X})_c \subseteq |\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{X})_{L^2}$, de modo que $|\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{X})_{L^2}$ é denso em $L^2(\mathcal{M}; \mathcal{X})$. Por outro lado, segue diretamente da definição que $|\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{X})_{L^2}$ é fechado com a norma L^2 , ou seja, $|\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{X})_{L^2} \simeq L^2(\mathcal{M}; \mathcal{X})$. Sempre que possível, faremos a identificação $L^2(\mathcal{M}; \mathcal{X}) = |\Omega|^{1/2}(\mathcal{M}; \mathcal{X})_{L^2}$. Em particular, quando fixamos um elemento de volume dvol em $\mathcal{M}$ podemos representar o elementos de $L^2(\mathcal{M}; \mathcal{X})$ concretamente como seções suaves em $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$. Nesse caso, identificaremos $L^2(\mathcal{M}; \mathcal{X}) = \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{X})_{L^2}$.

Exemplo B.4.1. Considere uma variedade complexa $\mathcal{M}$. Dentre as funções L^2 -integráveis em $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ temos as funções holomorfas $C^\omega(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Pensando os campos vetoriais complexos $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^\mathbb{C}$ como operadores $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, vemos que

$$C^\omega(\mathcal{M}, \mathbb{C}) = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}_{\text{anti}}(\mathcal{M})} \ker X$$

onde $\mathfrak{X}_{\text{anti}}(\mathcal{M}) = \{X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} \mid \forall x \in \mathcal{M}, X(x) \in T(\mathcal{M})^{-}\}$ é o espaço de campos anti-holomorfos. Como os campos holomorfos e anti-holomorfos preservam as funções L^2 , concluímos que $C^{\omega}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ é um subespaço fechado de $C^{\infty}(\mathcal{M}, \mathbb{C})_{L^2}$, ou seja, é um espaço de Hilbert com o produto L^2 . $\blacklozenge$

Exemplo B.4.2. Considere um fibrado Hermitiano holomorfo $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ e um elemento de volume dvol em $\mathcal{M}$. Generalizando o exemplo anterior, as seções holomorfas

$$\text{Hol}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) := \{s \in \Gamma_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) \mid \forall X \in T(\mathcal{M})^{-}, s_*X = \mathbf{0}\}$$

são L^2 -integráveis em relação a dvol , de modo que $\text{Hol}_{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ é um subespaço fechado em $L^2(\mathcal{M}; \mathcal{E})$. $\blacklozenge$

B.5 Medida de Haar

Seja $\mathcal{M}^{(m)}$ uma variedade suave. Um conjunto $A \subseteq \mathcal{M}$ é dito **Lebesgue mensurável** se, para todo $x \in A$ existe uma carta $(U, \mathbf{x})$ em x tal que $\mathbf{x}[U \cap A] \subseteq \mathbb{R}^m$ é mensurável no sentido de Lebesgue. A família dos conjuntos Lebesgue mensuráveis em $\mathcal{M}$ forma uma σ -álgebra $\text{Leb}(\mathcal{M})$, que contém a σ -álgebra de Borelianos $\text{Borel}(\mathcal{M})$, gerada por abertos. Mais detalhes podem ser encontrados em [52]. Aqui, vamos apenas mostrar como um elemento de volume define uma medida.

Dado um elemento de volume dvol e uma carta $(U, \mathbf{x})$ de $\mathcal{M}$, para cada $A \subseteq U$ mensurável definimos

$$\text{vol}(A) := \int_{\mathbf{x}_i[A]} (\lambda \circ \mathbf{x}^{-1})(x) \, dx$$

onde $\text{dvol}|_U = \lambda|\text{d}\mathbf{x}|$. Como funções suaves preservam a mensurabilidade de Lebesgue, essa definição está bem-posta. Agora, tome um atlas contável $\{(U_k, \mathbf{x}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ para $\mathcal{M}$. Dado um mensurável $A \in \text{Leb}(\mathcal{M})$, defina

$$A_0 := A \cap U_0 \text{ e } A_{k+1} := (A \cap U_{k+1}) \setminus \left(\bigcup_{j=0}^k A_j \right),$$

de modo que $A_k \subseteq U_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e podemos definir

$$\text{vol}(A) := \sum_{i=0}^{\infty} \text{vol}(A_i).$$

Mais uma vez, esse valor independe do atlas escolhido.

Para um grupo de Lie $\mathcal{G}$, dizemos que uma medida $\mu : \text{Leb}(\mathcal{G}) \rightarrow [0, \infty]$ é **invariante à esquerda** ou **invariante à direita** se

$$\forall A \in \text{Leb}(\mathcal{G}), g \in \mathcal{G}, \mu(gA) = \mu(A)$$

ou

$$\forall A \in \text{Leb}(\mathcal{G}), g \in \mathcal{G}, \mu(Ag) = \mu(A),$$

respectivamente. Mais geralmente, se $\mathcal{G}$ age em uma variedade $\mathcal{M}$, digamos pela direita, dizemos que uma medida μ é **invariante pela ação** se $\mu(Ag) = \mu(A)$ para

quaisquer $A \in \text{Leb}(\mathcal{M})$ e $g \in \mathcal{G}$. Para um grupo de Lie $\mathcal{G}^{(n)}$, sempre existem medidas invariantes à esquerda ou à direita. De fato, dada $\omega_e \in A^n(\mathfrak{g})$, temos duas únicas formas $\omega^L \in \Omega_L^n(\mathcal{G})$ e $\omega^R \in \Omega_R^n(\mathcal{G})$ tais que $\omega^L|_e = \omega_e = \omega^R|_e$. As densidades $|\omega^L|$ e $|\omega^R|$ também serão invariantes, de modo que as medidas μ_{ω^L} e μ_{ω^R} são invariante à esquerda e direita, respectivamente. Qualquer outra medida invariante deve ser múltipla de uma delas por uma constante.

Uma medida em um grupo de Lie $\mathcal{G}$ é dita **bi-invariante** se for invariante pela esquerda e pela direita. Em geral *não existe* medida bi-invariante em $\mathcal{G}$. Dada uma medida μ , digamos invariante à direita, para cada $g \in \mathcal{G}$, a medida $A \mapsto \mu(g^{-1}A)$ também é invariante à direita, e existe $\Delta(g) \in \mathbb{R}$ com $\mu(g^{-1}A) = \Delta(g)\mu(A)$. A função $\Delta_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ que dá esses coeficientes é chamada de **função modular de $\mathcal{G}$** . Escolhendo medidas induzidas por densidades, vemos que $\Delta_{\mathcal{G}} = |\det \text{Ad}(\cdot)| \in C^\infty(\mathcal{G})$. Assim, existe medida bi-invariante para $\mathcal{G}$ se e somente se $\Delta_{\mathcal{G}} = 1$. Os grupos com essa condição são chamados de **unimodulares**. Em particular, todo grupo compacto é unimodular, bastando tomar $\mu(A) = \mu_R(A)/\mu_R(\mathcal{G})$, e logo $1 = \mu(g^{-1}\mathcal{G}) = \Delta(g)\mu(\mathcal{G}) = \Delta(g)$.

Em resumo, para um grupo de Lie compacto $\mathcal{G}$ existe uma única medida bi-invariante unitária, chamada de **medida de Haar**, que pode ser calculada como a medida induzida por uma densidade invariante $|\omega|/\text{vol}_{|\omega|}(\mathcal{G})$.

Referências Bibliográficas

- [1] Sean Bates, Alan Weinstein - *Lectures on the Geometry of Quantization*, 1997, American Mathematical Society.
- [2] A. A. Kirillov - *Lectures on the Orbit Method*, 2004, American Mathematical Society.
- [3] N. M. J. Woodhouse - *Geometric Quantization*, 1997, Oxford University Press.
- [4] J. Śniatycki - *Geometric Quantizations and Quantum Mechanics*, 1980, Springer-Verlag.
- [5] V. Guillemin e S. Sternberg - *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, 1982, *Inventiones Mathematicae*, 67(3), 515–538.
- [6] V. Guillemin e S. Sternberg - *Semi-Classical Analysis*, 2013, International Press of Boston.
- [7] M.J. Gotay - *A class of non-polarizable symplectic manifolds*, 1987, *Monatshefte Für Mathematik*, 103(1), 27—30.
- [8] Jean-Paul Dufour e Nguyen T. Zung - *Poisson Structures and Their Normal Forms*, 2005, Birkhäuser Verlag.
- [9] César Camacho, Alcides L. Neto - *Introdução à Teoria das Folheações*, 1977, IMPA.
- [10] Robert Hermann - *The Differential Geometry of Foliations, II*, *Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 11, no. 2, 1962, pp. 303–315.
- [11] Sylvain Lavau - *A short guide through integration theorems of generalized distributions*, arXiv:1710.01627v4 [math.DG] 27 Aug 2018.
- [12] Alan Weinstein - *The Local Structure of Poisson Manifolds*, *J. Differential Geometry* 18 (1983) 523–557.
- [13] Ana Cannas da Silva, Alan Weinstein - *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, 1999, volume 10, American Mathematical Society.
- [14] Anthony W. Knap - *Lie Groups Beyond an Introduction*, 2002, Birkhäuser.
- [15] V. Bargmann - *On Unitary Ray Representations of Continuous Groups*, *Annals of Math.*, Second Series, Vol. 59 No.1 (1954), 1–46.

- [16] V. S. Varadarajan - *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, 1984, Springer-Verlag.
- [17] Frank W. Anderson, Kent R. Fuller - *Rings and Categories of Modules*, 1992, Springer.
- [18] G. J. Ellis - *A Non-Abelian Tensor Product of Lie Algebras*, 1991, Glasgow Mathematical Journal, 33(1), 101–120.
- [19] Stephan Bongers - *Geometric Quantization of symplectic and Poisson manifolds*, 2014, tese de Mestrado em Utrecht University Departament of Mathematics.
- [20] Andrea Carosso - *Geometric Quantization*, arXiv:1801.02307v1 [math-ph] 8 Jan 2018.
- [21] H. J. Groenewold - *On the Principles of Elementary Quantum Mechanics*, 1946, Physica 12(7) 405–460.
- [22] Paolo Piccione e Daniel V. Tausk - *A Student's Guide to Symplectic Spaces, Grassmannians and Maslov Index*, 2008, IME-USP.
- [23] John B. Conway - *A Course in Functional Analysis, 2nd ed.*, 1990, Springer-Verlag.
- [24] Leon A. Takhtajan - *Quantum Mechanics for Mathematicians*, 2008, American Mathematical Society.
- [25] Rui Loja Fernandes, Juan-Pablo Ortega, Tudor S. Ratiu - *The momentum map in Poisson geometry*, 2009, arXiv:0705.0562v3 [math.SG].
- [26] M. de Leon, J. C. Marrero, D. M. de Diego - *Linear almost Poisson structures and Hamilton-Jacobi equation. Applications to nonholonomic Mechanics*, 2009, arXiv:0801.4358v3 [math-ph].
- [27] Paolo Piccione e Daniel V. Tausk - *The theory of connections and G-structures. Applications to affine and isometric immersions*, notas de curso ministrado na 14^a Escola de Geometria Diferencial, 2006.
- [28] Shoshichi Kobayashi, Katsumi Nomizu - *Foundations of Differential Geometry vol.1*, 1963, John Wiley and Sons.
- [29] R. W. Sharpe - *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, 1997, Springer.
- [30] Serge Lang - *Differential Manifolds*, 1985, Springer-Verlag.
- [31] Morris W. Hirsch - *Differential topology*, 1976, Springer.
- [32] John M. Lee - *Introduction to Smooth Manifolds*, versão 3.0
- [33] Alfred Frölicher, Albert Nijenhuis - *Theory of Vector-Valued Differential Forms : Part I. Derivations in the Graded Ring of Differential Forms*, Indagationes Mathematicae (Proceedings), Volume 59, 1956, Páginas 338–359.

- [34] Nicolas Bourbaki - *Lie Groups and Lie Algebras*, 1975, Addison-Wesley.
- [35] Nicolas Bourbaki - *General Topology Pt.1*, 1966, Addison-Wesley.
- [36] Peter Freyd - *Abelian Categories*, Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 3 (2003) pp -23 - 164.
- [37] Kenneth Hoffman, Ray Kunze - *Linear Algebra, 2nd ed.*, 1971, Pearson Education.
- [38] Marcus Venicius, André Bessa - *Introdução à Álgebra Linear para estudantes de Física (Notas de Aula)*, 2014, IF-UFRJ.
- [39] Paul M. Dirac - *Principles of Quantum Mechanics*, 1958, Oxford University Press.
- [40] Nivaldo A. Lemos - *Mecânica Analítica*, 2ª edição, 2013, Livraria da Física.
- [41] Jet Nestruev - *Smooth Manifolds and Observables*, 2003, Springer-Verlag.
- [42] Richard Swan - *Vector Bundles and Projective Modules*, Trans. A.M.S. 105 (1962), 264–277.
- [43] Leonid N. Vaserstein - *Vector Bundles and Projective Modules*, Trans. A.M.S. 294 (1986), 749–755.
- [44] A. Newlander, L. Nirenberg - *Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds*, The Annals of Mathematics vol. 65(3), 391–404.
- [45] John Milnor, James Munkres - *Differential Topology - Lectures*, Princeton University, 1958.
- [46] R. Bott, L.W. Tu - *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1982.
- [47] R. Bott - *Homogeneous Vector Bundles*, 1957, Annals of Mathematics, vol. 66, no. 2, pp. 203–248.
- [48] R. Debremaeker - *Cohomology with values in a sheaf of crossed groups over a site*, 2017, arXiv:1702.02128 [math.AG].
- [49] J. Lurie - *A Proof of The Borel-Weil-Bott Theorem*, em <http://people.math.harvard.edu/~lurie/papers/bwb.pdf>.
- [50] Leopoldo Nachbin - *On the Finite Dimensionality of every Irreducible Representation of a Compact Group*, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 11–12.
- [51] Anna Hurevitsch - *Unitary representation in Hilbert space of a compact topological group*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 1943, Volume 13(55), Number 1, 79–86.
- [52] H. Amann, J. Escher - *Analysis III*, 2009, Birkhäuser.
- [53] E. Hewitt, K. A. Ross - *Abstract Harmonic Analysis vol. I*, 1994, Springer-Verlag.

- [54] Manuel de León, Juan C. Marrero, David M. de Diego - *Linear Almost Poisson Structures and Hamilton-Jacobi Equation. Applications to NonHolonomic Mechanics*, arXiv:0801.4358v3 [math-ph] 13 Nov 2009.
- [55] F. Hirzebruch - *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 1978, Springer.