UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO-UFRJ
INSTITUTO DE MATEMÁTICA-IM

UFRJ

APLICAÇÃO DO MÉTODO VARIACIONAL ÀS EQUAÇÕES ELÍPTICAS SEMILINEARES

Victor Hugo Ventura

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Adán J. Corcho Fernández D.Sc.
Juliana Fernandes D.Sc.

Rio de Janeiro
Junho de 2020

APLICAÇÃO DO MÉTODO VARIACIONAL ÀS EQUAÇÕES ELÍPTICAS SEMILINEARES

Victor Hugo Ventura

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE PÓS-GRADUAÇÃO (IM) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MATEMÁTICA.

Examinada por:

Prof. Adán José Corcho Fernández, UFRJ, Presidente.

Prof. Juliana Fernandes da Silva Pimentel, UFRJ.

Prof. César Javier Niche Mazzeo, UFRJ.

Prof. Liliane de Almeida Maia, UnB.

Prof. Raquel Lehrer, Unioeste.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JUNHO DE 2020

Aos meus pais, Antonio Sergio e Valdenise.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Antonio Sergio e Valdenise, a quem devo tudo. Também estendo essa gratidão a toda minha família pelo amor que me deram, em especial à minha tia Sueli e às minhas primas Paula e Flávia, por cuidarem de mim enquanto minha mãe trabalhava; e também à minha avó Valdenice, pela sabedoria que me passou ao longo dos anos.

Agradeço aos amigos e colegas que fiz durante meus anos de estudo, tanto no ensino superior quanto no ensino médio e no fundamental. Espero que nossas amizades durem por toda a vida.

Agradeço a meus orientadores, Adán J. Corcho e Juliana Fernandes, pela confiança que depositaram em mim, por sempre estarem dispostos a me orientar, por corrigirem meus erros quando foi necessário, e por terem estimulado a minha própria busca por conhecimento.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada ao IM/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

APLICAÇÃO DO MÉTODO VARIACIONAL ÀS EQUAÇÕES ELÍPTICAS SEMILINEARES

Victor Hugo Ventura

Junho/2020

Orientador: Adán J. Corcho Fernández D.Sc.
Juliana Fernandes D.Sc.

Programa: Matemática

Resumo

Consideramos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, e $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que satisfaz a seguinte condição de crescimento subcrítico:

$$|f(x,s)| \leq a_0|s|^{p-1} + b_0 \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ e q.t. } x \in \Omega,$$

para constantes $a_0, b_0 \geq 0$, e com $1 \leq p < 2n/(n-2)$ se $n \geq 3$, e $1 \leq p < \infty$ se $n = 1, 2$. Então, as soluções fracas $u \in H_0^1(\Omega)$ de (P) são os pontos críticos do funcional C^1

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt$. A literatura de métodos variacionais geralmente separa o problema (P) em dois casos: quando $\lim\limits_{|s|\to\infty} F(x,s)/s^2 \leq c < \infty$, o problema (P) é dito *subquadrático*, enquanto que se $\lim\limits_{|s|\to\infty} F(x,s)/s^2 = \infty$, estamos na situação *superquádratica*. Nosso objetivo é apresentar uma abordagem unificada para esses dois casos por meio de uma condição chamada de *não quadraticidade* no infinito em F. Nossa referência principal é o artigo de D. G. Costa e C. A. Magalhães [11].

Abstract

We consider the Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{if } x \in \Omega \\ \quad u = 0 & \text{if } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ is a bounded smooth domain, and $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Carathéodory function and satisfies the following subcritical growth condition:

$$|f(x,s)| \leq a_0|s|^{p-1} + b_0 \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

for some constants $a_0, b_0 \geq 0$, where $1 \leq p < 2n/(n-2)$ if $n \geq 3$, and $1 \leq p < \infty$ if $n = 1, 2$. Then, the weak solutions $u \in H_0^1(\Omega)$ of (P) are the critical points of the C^1 functional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

where $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt$. The literature usually distinguishes between two cases for the problem (P): the *subquadratic* situation, where F satisfies $\lim\limits_{|s|\to\infty} F(x,s)/s^2 \leq c < \infty$, and the *superquadratic* situation, where F satisfies $\lim\limits_{|s|\to\infty} F(x,s)/s^2 = \infty$. Our main goal is to advance a unified approach to both situations with the aid of a condition called *nonquadraticity* at infinity on F. Our main reference is the paper by D. G. Costa and C. A. Magalhães [11].

Introdução

Consideramos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ é o operador de Laplace usual, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, e $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, o que significa que

(i) $f(\cdot, s)$ é mensurável em Ω para cada $s \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x, \cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para quase todo $x \in \Omega$.

Além disso, f também satisfaz a seguinte condição de crescimento subcrítico:

$$|f(x,s)| \leq a_0|s|^{p-1} + b_0 \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ e q.t. } x \in \Omega,$$

para constantes $a_0, b_0 \geq 0$, com $1 \leq p < 2n/(n-2)$ se $n \geq 3$, e $1 \leq p < \infty$ se $n = 1, 2$. Agora, considerando o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, que é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$ com relação à norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \right)^{1/2},$$

e definindo o funcional

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt$, segue que as restrições de continuidade na segunda variável e de crescimento subcrítico em f implicam que $J \in C^1(H_0^1(\Omega); \mathbb{R})$ no sentido de Frechét e

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_\Omega f(x,u) v\, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, de forma que as soluções fracas $u \in H_0^1(\Omega)$ de (P) são os pontos críticos do funcional J. Para um tratamento mais completo da teoria de equações semilineares, assim como a consideração de outras condições sobre a não linearidade f, ver [2, 7, 21]. Geralmente, o problema (P) é distinguido em dois casos:

(i) (*subquadrático*) F satisfaz $\lim_{|s|\to\infty} \dfrac{F(x,s)}{s^2} \le c < \infty$ para alguma constante $c > 0$;

(ii) (*superquadrático*) F satisfaz $\lim_{|s|\to\infty} \dfrac{F(x,s)}{s^2} = \infty$.

Tomando como referência principal o artigo de D. G. Costa e C. A. Magalhães [11], o objetivo deste trabalho é apresentar uma abordagem unificada para estes dois casos por meio de uma condição chamada de *não quadraticidade* no infinito em F. Mais precisamente, nossas hipóteses são que existem $a, b > 0$ tais que

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^q} \le b < \infty \qquad \text{uniformemente para q.t. } x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \liminf\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} \ge a > 0 \qquad \text{unif. para q.t. } x \in \Omega \\ \text{ou} \\ \limsup\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} \le -a < 0 \qquad \text{unif. para q.t. } x \in \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

A segunda hipótese é a que chamamos de não quadraticidade no infinito para a potência F. Tal condição foi introduzida nos artigos [9, 10] com $\mu = 1$ para tratar de sistemas de equações elípticas com perturbações subquadráticas no caso em que há ressonância. Para entender porque a condição leva este nome, assumimos que $f(x,s) = a(x)|s|^m + b(x)$, onde $a, b \in L^\infty(\Omega)$, $a(x), b(x) > 0$ quase sempre e $m > 0$, e então

$$\frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|} = \frac{m-1}{m+1} a(x)s|s|^{m-1} - \operatorname{sgn}(s)b(x),$$

e F não satisfaz (2) com $\mu = 1$ se, e somente se, $m = 1$, logo a hipótese original de [9, 10] pode ser vista como uma medida do quanto F difere de uma função quadrática em s no infinito, enquanto que (2) pode ser vista como não quadraticidade relativa ao expoente μ. Vamos mostrar que as duas condições acima, junto com uma restrição técnica nos valores de μ, nos dão uma condição de compacidade introduzida por Cerami [8], e usada por Bartolo *et al.* [4] para provar um teorema minimax (Teorema 2.3 de [4]), que utilizaremos na demonstração de nossos teoremas principais. Em ambos os casos descritos para a potência F, ainda temos que assumir alguma condição que resulte no link necessário para aplicar o Teorema 2.3 de [4] (o link está relacionado com a geometria do problema, e será diferente nos dois casos). Denotando por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots$ os autovalores associados a $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, assumimos o seguinte cruzamento do primeiro autovalor de $-\Delta$ no caso superquadrático:

$$\limsup_{s\to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \alpha < \lambda_1 < \beta \leq \liminf_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \tag{3}$$

uniformemente para quase todo $x \in \Omega$. Levando em conta as considerações e as hipóteses anteriores, enunciamos o resultado principal deste trabalho para potências superquadráticas.

Teorema 1. *Se F satisfaz (1), (2) e (3) com $\mu > (n/2)(q-2)$, então (P) tem uma solução não trivial $u \in H_0^1(\Omega)$.*

No caso subquadrático, focamos nossa atenção em problemas de ressonância e de dupla ressonância, que definiremos a seguir. Segundo Costa e Oliveira [12], o primeiro artigo sobre problemas de ressonância foi [18], com um resultado sobre o problema de autovalores de um operador uniformemente elíptico auto-adjunto de segunda ordem com uma perturbação não linear. Dizemos que (P) é um problema de ressonância ou de dupla ressonância, respectivamente, se

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} = \lambda_i \qquad \text{unif. para q.t. } x \in \Omega, \tag{4}$$

$$\lambda_i \leq L(x) = \liminf_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \limsup_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} = K(x) \leq \lambda_{i+1}, \tag{5}$$

uniformemente para quase todo $x \in \Omega$ e para algum $i \in \mathbb{N}$. No artigo de Costa e Oliveira [12], a condição (5) foi considerada com $\lambda_i < L(x)$ e $K(x) < \lambda_{i+1}$ em conjuntos de medidas positiva junto com uma restrição de limitação no quociente $f(x,s)/s$, enquanto que em [15] condições mais gerais do que em [12] foram estudadas. Em nossa abordagem, assumimos

$$\lim_{|s|\to\infty} [f(x,s)s - 2F(x,s)] = \pm\infty \qquad \text{unif. para q.t. } x \in \Omega, \tag{6}$$

uma condição mais fraca do que (2) com $\mu > 0$. Vamos mostrar que (6) nos permite tratar problemas de ressonância e dupla ressonância sem a restrição no quociente $f(x,s)/s$ (ver exemplo 3.2 para um caso em que F satisfaz (5) e $(6)_+$ mas $|f|$ cresce mais rápido do que $|s|^\gamma$, para qualquer $\gamma > 1$).

Teorema 2. *Se (P) é um problema de dupla ressonância, então (P) tem uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ se*

(i) *$(6)_+$ é satisfeita e $\lambda_i < L(x)$ em um conjunto de medida positiva; ou*

(ii) *$(6)_-$ é satisfeita e $K(x) < \lambda_{i+1}$ em um conjunto de medida positiva.*

Se estamos diante de um problema de ressonância, então $K(x) < \lambda_{i+1}$ e $\lambda_{i-1} < L(x)$ quase sempre em $H_0^1(\Omega)$, logo temos o seguinte corolário:

Corolário 3. *Se* (P) *é um problema de ressonância e satisfaz* $(6)_+$ *ou* $(6)_-$, *então* (P) *tem uma solução.*

No Capítulo 1, primeiro estabelecemos alguns resultados básicos sobre espaços métricos, espaços L^p e análise funcional. Depois, apresentamos a teoria de espaços de Sobolev focando principalmente no espaço $H_0^1(\Omega)$, que é o espaço natural para estabelecer a formulação fraca do problema (P). Por último, vamos apresentar rapidamente a teoria de pontos críticos para funcionais e provar que o Teorema 2.3 de [4] generaliza os dois teoremas clássicos desta teoria, a saber, o Teorema do Passo da Montanha e o Teorema do Ponto de Sela.

No Capítulo 2, de fato aplicamos o método variacional ao problema (P). Provamos primeiro que o funcional J associado a este problema é continuamente diferenciável. Demonstramos que J satisfaz a condição de compacidade de Cerami, primeiro no caso superquadrático e em seguida no caso subquadrático. Então, verificamos as condições geométricas necessárias para aplicar o Teorema de Bartolo *et al.* e provamos o resultado principal no caso superquadrático. Terminamos o capítulo fazendo o mesmo para o caso subquadrático.

O Capítulo 3 consiste em exemplos que demonstram o grau de liberdade da não linearidade f no caso subquadrático. Geralmente, problemas que têm a geometria do Teorema do Ponto de Sela são assintoticamente lineares. No entanto, assumindo as condições (5) e (6), podemos lidar com problemas que têm esta geometria mas cuja não linearidade é sublinear ou superlinear. O exemplo 3.1 consiste de uma f tal que o quociente $f(x,s)/s$ pode cruzar um número arbitrário de autovalores de $-\Delta$ no infinito. Como já mencionado, no exemplo 3.2, F satisfaz (5) e $(6)_+$ mas

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{|f(x,s)|}{|s|^\gamma} = \infty$$

para qualquer $\gamma > 1$. Finalmente, no exemplo 3.3, construímos uma F que satisfaz (4) e $(6)_+$ tal que

$$\begin{cases} \limsup_{|s|\to\infty} \dfrac{|g(x,s)|}{|s|^\delta} \leq \text{constante}, \\[2ex] \limsup_{|s|\to\infty} \dfrac{|G(x,s)|}{|s|^{2\delta}} \leq \text{constante}, \end{cases}$$

onde $\delta \in (0,1)$, $f(x,s) = \lambda_j s + g(x,s)$ e $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt$.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições e Resultados Básicos de Análise

Vamos começar nossa discussão com algumas definições e resultados básicos de análise que serão necessários neste trabalho. No que se segue, $(X, \|\cdot\|_X)$ será um espaço de Banach.

Definição 1.1. Dizemos que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge em X para $u \in X$ se

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_X = 0,$$

denotaremos isto por

$$u_n \to u \text{ em } X.$$

Definição 1.2 (Convergência fraca)**.** Dizemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *converge fracamente* em X para $u \in X$ se

$$\lim_{n\to\infty} |\phi(u_n - u)| = 0,$$

para toda função $\phi : X \to \mathbb{R}$ contínua e linear. Isto será denotado por

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } X.$$

Definição 1.3 (Espaço dual)**.** O conjunto de todos os funcionais lineares e limitados $\phi : X \to \mathbb{R}$ é chamado de *espaço dual* de X e denotado por X^*.

Observação. 1.4. Se $u_k \to u$ em X, por definição, para todo $\phi \in X^*$ existe uma constante $C_\phi > 0$ tal que $|\phi(u_k - u)| \leq C_\phi \|u_k - u\|_X$ para todo $u \in X$, logo $u_k \rightharpoonup u$ em X.

Definição 1.5 (Norma dual)**.** Definimos a *norma dual* de $\phi \in X^*$ por

$$\|\phi\|_{X^*} := \sup\{|\phi(x)|;\, x \in X, \|x\|_X \leq 1\}.$$

Definição 1.6 (Topologia fraca)**.** A *topologia fraca* em X é a topologia inicial em X com respeito a X^*, ou seja, é a menor topologia em X tal que todos os funcionais $\phi \in X^*$ do espaço dual são aplicações contínuas.

Vamos definir uma topologia em X^* chamada de *topologia fraca**. Consideramos a *injeção canônica* $J : X \to X^{**}$ definida para cada $x \in X$ por $J(x) = J_x$, onde $J_x : X^* \to \mathbb{R}$ é definida por $J_x(\phi) = \phi(x)$, para todo $\phi \in X^*$. Variando $x \in X$, obtemos uma família de funções $(J_x)_{x\in X}$ indexada for X.

Definição 1.7 (Topologia fraca*)**.** A topologia fraca* em X^* é a topologia inicial em X^* com relação a família de funções $(J_x)_{x\in X}$.

Ressaltamos aqui que a topologia fraca* é uma topologia em X^*, e não em X. Para fixar essa ideia, vamos dar a definição de convergência nessa topologia, que é uma noção de convergência nos funcionais lineares pertencentes a X^*.

Definição 1.8 (Convergência fraca*)**.** *Sejam $(\phi_n)_{n\in N} \subset X^*$ uma sequência e $\phi \in X^*$. Dizemos que (ϕ_n) converge na topologia fraca* para ϕ se*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

A aplicação J é uma isometria linear, de fato, está claro que J é linear. Sabemos que, para qualquer $\phi \in X^*$,

$$|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{X^*}\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X,$$

e se $\|\phi\|_{X^*} = 1$, a igualdade é atingida quando $\phi(x) = \|x\|_X$, logo

$$\|J(x)(\phi)\|_{X^{**}} := \sup_{\substack{\phi\in X^* \\ \|\phi\|\leq 1}} |\phi(x)| = \|x\|_X.$$

Segue que J é uma aplicação contínua e injetora, pode acontecer de J não ser sobrejetora, isto motiva a próxima definição.

Definição 1.9 (Espaço reflexivo)**.** O espaço de Banach X é *reflexivo* se a injeção canônica $J : X \to X^{**}$ definida por $J(x)(\phi) = \phi(x)$ é sobrejetiva.

Lema 1.10 (Lema de Fatou)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ $\mathcal{M}$-mensuráveis. Então,*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Folland [16] página 52. □

Teorema 1.11 (Teorema da Convergência Dominada no espaço $L^p(\Omega)$)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $1 \leq p < \infty$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $\mathcal{M}$-mensuráveis $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Suponha que $f_n \to f$ μ-quase sempre para uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{M}$-mensurável e $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-quase sempre, onde $g \in L^p(\Omega)$. Então, $f_n, f \in L^p(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Ver Folland [16] página 55 para a prova quando $p = 1$. Para $1 \leq p < \infty$, temos que $|f_n| \leq g$ implica $|f| \leq g$ μ-quase sempre, então

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq |f| + |g| \leq 2|g|.$$

Logo,

$$|f_n - f|^p \leq 2^p |g|^p,$$

$g \in L^p(\Omega)$ implica que $|g|^p \in L^1(\Omega)$, e então aplicamos o Teorema da Convergência Dominada para o caso $p = 1$. □

Proposição 1.12. *Sejam $|\Omega| < \infty$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Então $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ e*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)} \qquad \forall\, u \in L^q(\Omega).$$

Demonstração. Se $p = q$, então $L^q(\Omega) = L^p(\Omega)$ e não precisamos provar nada, logo assumimos $p < q$. Quando $q < \infty$, sendo $\mathbf{1}_\Omega$ a função indicadora de Ω e notando que $\dfrac{q-p}{q} + \dfrac{p}{q} = 1$, pela desigualdade de Hölder ([6] página 92), temos que

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \|\mathbf{1}_\Omega u^p\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mathbf{1}_\Omega\|_{L^{q/(q-p)}(\Omega)} \|u^p\|_{L^{q/p}(\Omega)} = |\Omega|^{q/(q-p)} \|u\|^p_{L^q(\Omega)},$$

e só precisamos elevar ambos os lados à $1/p$. Para o caso em que $q = \infty$, como $|u| \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ quase sempre,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p \, dx \leq |\Omega| \|u\|^p_{L^\infty(\Omega)},$$

de novo elevando à $1/p$, chegamos ao resultado. □

Teorema 1.13 (Desigualdade de interpolação)**.** *Sejam $0 < p \leq r \leq q \leq \infty$ tais que*

$$\frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}, \text{ onde } t \in [0, 1],$$

e $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Então, $u \in L^r(\Omega)$ e $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{1-t}_{L^p(\Omega)} \|u\|^t_{L^q(\Omega)}$.

Demonstração. Definindo $\alpha = \dfrac{p}{(1-t)r}$ e $\beta = \dfrac{q}{tr}$, então $1 \leq \alpha, \beta \leq \infty$ e $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.

Pela desigualdade de Hölder:

$$\|u\|_{L^r(\Omega)}^r = \|u\|_{L^r(\Omega)}^{(1-t)r+tr} \leq \left(\int_\Omega |u|^{(1-t)r\alpha}\right)^{1/\alpha} \left(\int_\Omega |u|^{tr\beta}\right)^{1/\beta} = \|u\|_{L^p(\Omega)}^{(1-t)r} \|u\|_{L^q(\Omega)}^{tr},$$

como $x^{1/r}$ é crescente, o resultado segue. $\square$

Observação. 1.14. Da mesma forma, como $\log x$ é crescente, a desigualdade acima prova que a função $p \mapsto \|u\|_{L^p(\Omega)}^p$ é log-convexa no conjunto $\{p > 0; \|u\|_{L^p(\Omega)}^p < \infty\}$, e a interpolação mostra que este conjunto é um intervalo.

Teorema 1.15 (Teorema da Alfândega)**.** *Sejam C e X subconjuntos de um espaço métrico M. Se C é conexo e tem pontos em comum com X e $M - X$, então algum ponto de C pertence à fronteira de X.*

Demonstração. Santos [22] página 35. $\square$

Teorema 1.16 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Seja X um espaço de Banach. A bola unitária fechada*

$$B_{X^*} = \{f \in X^*; \|f\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca de X^*.*

Demonstração. Brezis [6] página 66. $\square$

Teorema 1.17 (Kakutani)**.** *O espaço de Banach X é reflexivo se, e somente se,*

$$B_X = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$$

é compacto na topologia fraca de X.

Demonstração. Brezis [6] página 68. $\square$

Teorema 1.18. *Se X é um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca de X.*

Demonstração. Brezis [6] página 76. $\square$

Observação. 1.19. A recíproca do teorema acima também é verdadeira e é chamada de Teorema de Eberlein-Šmulian ([6] página 70). Para muitos autores, a equivalência lógica é o resultado que leva este nome.

Teorema 1.20. *Sejam $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Então, existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

(i) *$f_{k_j}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω,*

(ii) *$|f_{k_j}(x)| \leq h(x)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, quase sempre em Ω.*

Demonstração. Brezis [6] página 94. $\square$

1.2 Espaços de Sobolev

No que se segue, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 1.21 (Espaço de Sobolev)**.** O *espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists f_1, \dots, f_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u v_{x_i}\, dx = -\int_\Omega f_i v\, dx,\ \forall\, v \in C_c^\infty(\Omega),\ \forall\, i = 1, \dots, n \end{array} \right\},$$

onde $C_c^\infty(\Omega)$ é o conjunto de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω.

Definição 1.22. Chamamos as funções f_i de *derivadas fracas* de u.

Notação 1.23. Denotamos $f_i = u_{x_i}$, de forma que $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ está bem definido. Além disso, denotamos $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$; esta notação é justificada pois $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert se, e somente se, $p = 2$.

Definição 1.24. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então podemos definir sua norma por

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

onde

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{x_i}(x)|^p\, dx \right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{i=1,\dots,n} \{\|u_{x_i}\|_{L^\infty(\Omega)}\}.$$

Definição 1.25. Se $u, v \in H^1(\Omega)$, então

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$$

é o produto interno associado à norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Observação. 1.26. Esta norma é equivalente àquela definida em 1.24 para $p = 2$ pois $\frac{\sqrt{2}}{2}(a^{1/2} + b^{1/2}) \leq (a+b)^{1/2} \leq a^{1/2} + b^{1/2}$ para $a, b \geq 0$.

Proposição 1.27. *$\big(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\big)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. $\big(H^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}\big)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Demonstração. Evans [14] página 262. □

Definição 1.28 (Imersão contínua)**.** Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ respectivamente, e suponha que $X \subset Y$. Então, dizemos que X está *imergido continuamente* em Y (denotado $X \hookrightarrow Y$) se existe $C > 0$ tal que, para todo $u \in X$,

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X.$$

Teorema 1.29 (Desigualdades de Sobolev)**.** *Suponha Ω é de classe C^1 com fronteira $\partial\Omega$ limitada. Então*

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \ \textit{onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, && \textit{se } p < n,\\
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \ \textit{para todo } q \in [p, +\infty), && \textit{se } p = n,\\
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega), && \textit{se } p > n.
\end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ é uma imersão contínua para quaisquer $1 \leq p < \infty$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Brezis [6] página 285. □

Definição 1.30 (Imersão compacta)**.** Sejam X e Y dois espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ respectivamente, e suponha que $X \subseteq Y$. Então, dizemos que X está *imergido compactamente* em Y (denotado $X \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$) se

(i) X está imergido continuamente em Y e

(ii) toda sequência limitada em X é *pré-compacta* em Y.

A condição (ii) significa que se $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X com $\sup_k \|u_k\|_X < \infty$, então existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge em Y para algum limite u:

$$\lim_{j\to\infty} \|u_{k_j} - u\|_Y = 0.$$

Definição 1.31 (Operador compacto)**.** Seja um operador linear $C : X \to Y$. Dizemos que C é um *operador compacto* se, para toda sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, a sua imagem $(Cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente.

Proposição 1.32. *Sejam $D : W \to X$, $B : Y \to Z$ operadores lineares limitados e $C : X \to Y$ um operador compacto, onde W, X, Y e Z são espaços de Banach. Então, $CD : W \to Y$ e $BC : X \to Z$ são operadores compactos.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência limitada, como C é compacto, a imagem de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente $Cx_{n_j} \to y$, e pela continuidade de B, a imagem $BCx_{n_j} \to By$ continua convergente. Seja $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ uma sequência limitada, como D é limitado, $(Dw_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ é limitada, e por conseguinte $(CDw_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente. □

Teorema 1.33 (Rellich-Kondrachov). *Suponha que Ω é um conjunto limitado e de classe C^1. Então, temos as seguintes imersões compactas:*

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [1, p^*), \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, && \text{se } p < n,\\
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [p, +\infty), && \text{se } p = n,\\
&W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow C(\overline{\Omega}), && \text{se } p > n.
\end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^p(\Omega)$ é uma imersão compacta para quaisquer $1 \leq p < \infty$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Brezis [6] a partir da página 285. □

Observação. 1.34. A versão do Teorema de Rellich-Kondrachov em [6] não cobre os casos em que $q \in [1, p)$ quando $p = n$, mas, pela Proposição 1.12 acima, $1 \leq r \leq q$ implica $L^q(\Omega) \subseteq L^r(\Omega)$, e concluímos que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, +\infty)$ se $p = n$. Vamos aplicar a Proposição 1.32 e o Teorema de Rellich-Kondrachov para provar a compacidade de um certo operador relacionado ao nosso problema.

Observação. 1.35. Os teoremas 1.18 e 1.20 serão empregados da seguinte forma: se $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$, então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ e uma subsequência $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{k_j} \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Por Rellich-Kondrachov 1.33, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^2(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, passando para uma subsequência (não vamos denotar mais subíndices), segue que $u_{k_j} \to u$ em $L^2(\Omega)$. Finalmente, pelo Teorema 1.20, depois de passar para uma subsequência, temos que $u_{k_j}(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω. Em resumo, se $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, então existem $u \in H_0^1(\Omega)$, uma subsequência $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e uma função $w \in L^2(\Omega)$ tais que

(i) $u_{k_j} \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$,

(ii) $u_{k_j} \to u$ em $L^2(\Omega)$,

(iii) $u_{k_j}(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω.

(iv) $|u_{k_j}(x)| \leq w(x)$ quase sempre em Ω e para todo $j \in \mathbb{N}$.

1.2.1 O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definição 1.36. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$, isto significa que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se existe uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

Como a medida n-dimensional de Lebesgue de $\partial\Omega$ é zero, a restrição $u|_{\partial\Omega}$ não faz sentido, visto que os elementos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ só estão definidos a menos de conjuntos de medida nula. Mas como queremos aplicar a teoria de espaços de Sobolev em problemas de EDP, precisamos em algum momento avaliar a função no bordo do domínio em consideração. Para resolver esse problema, vamos introduzir o *operador traço*, que nos permite estender a operação de restrição de funções à fronteira mesmo quando esta restrição não faz sentido pelo motivo acima mencionado. Em seguida, vamos dar uma caracterização do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ em termos do operador traço, que nos possibilitará considerar problemas de Dirichlet utilizando os elementos de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Notação 1.37. Denotaremos a medida n-dimensional de Lebesgue de um conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável por $|E|$ ou por $m(E)$.

Teorema 1.38 (Teorema do Traço)**.** *Assuma que Ω é limitado e que $\partial\Omega$ é C^1, então existe um operador linear limitado $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tal que*

(i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ *se* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$;

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *para todo* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *com* $C > 0$ *dependendo apenas de* p *e* Ω.

Definição 1.39. Chamamos Tu de *traço* de u em $\partial\Omega$.

Demonstração. Evans [14] página 272. $\square$

Teorema 1.40 (Caracterização de $W_0^{1,p}(\Omega)$)**.** *Seja Ω limitado com fronteira C^1, e seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ se e somente se } Tu = 0.$$

Demonstração. Evans [14] página 273. $\square$

Teorema 1.41 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e que Ω é limitado. Então existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de p e Ω, tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Brezis [6] página 289. $\square$

Como consequência desta estimativa, temos que

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq (1 + C)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e portanto $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é equivalente à norma usual no subespaço $W_0^{1,p}(\Omega)$. Isto não é verdade em $W^{1,p}(\Omega)$ pois funções constantes teriam norma zero. No caso em que $p = 2$,

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

é um produto interno em $H_0^1(\Omega)$, que induz a norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

que por sua vez é equivalente à norma usual em $H^1(\Omega)$, logo $\big(H_0^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}\big)$ e $\big(H_0^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}\big)$ são iguais como espaços de Hilbert.

Notação 1.42. Denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$.

Definição 1.43. Como em 1.5, se $f \in H^{-1}(\Omega)$, então definimos a sua norma por

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup\{|f(v)|; \, v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

Sabemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. A aplicação $A : L^2(\Omega)^* \to H^{-1}(\Omega)$, que restringe o domínio dos funcionais $\phi : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ para $H_0^1(\Omega)$, é uma injeção contínua de $L^2(\Omega)^*$ em $H^{-1}(\Omega)$. Portanto, se fazemos a identificação $L^2(\Omega) \simeq L^2(\Omega)^*$, ficamos com $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, e não identificamos $H_0^1(\Omega)$ com o seu dual (ver observação 3 da página 136 de [6]).

Teorema 1.44 (Autovalores de $-\Delta$)**.** *Consideramos o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e suave, dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de $-\Delta$ se o problema acima tem solução. Temos que

(i) *Todos os autovalores $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $-\Delta$ são números reais positivos e tem multiplicidade finita. Além disso, se repetirmos cada autovalor de acordo com a sua multiplicidade, então*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$$

e

$$\lambda_k \to \infty \text{ quando } k \to \infty.$$

(ii) *Existe uma base ortonormal $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$, onde $u_k \in H_0^1(\Omega)$ é uma auto-*

função associada a λ_k:

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & \text{em } \Omega \\ u_k = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

(iii) *As funções u_k são analíticas no interior de Ω, para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Evans [14] páginas 355 e 356. □

Teorema 1.45 (Princípio variacional para o primeiro autovalor de $-\Delta$)**.** *Considerando o problema de autovalores associado a $-\Delta$, temos que*

(i)

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{1.1}$$

(ii) *Este mínimo é atingido para uma função u_1, positiva em Ω, que é a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda_1 u_1 & \text{em } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

(iii) *Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então u é múltiplo de u_1.

Observação. 1.46. Ressaltamos que

(1) A afirmação (iii) nos diz que o primeiro autovalor λ_1, também chamado de autovalor principal, tem multiplicidade 1, e podemos escrever

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots .$$

(2) A equação (1.1) implica que $\lambda_1^{-1/2}$ é a constante ótima para a desigualdade de Poincaré.

Demonstração. Evans [14] páginas 357 até 360. □

Pelo Teorema 1.44, qualquer $u \in L^2(\Omega)$ pode ser escrito como

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i,$$

onde $a_i = (u, u_i)_{L^2(\Omega)}$ e u_i é uma autofunção associada a λ_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Pela definição de autofunção:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda_i \int_\Omega u_i v \, dx,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Substituindo v por u_j, com $j \in \mathbb{N}$, vemos que

$$(u_i, u_j)_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_i (u_i, u_j)_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } j = i, \\ 0 & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Ou seja, $u \perp v$ em $L^2(\Omega)$ se, e somente se, $u \perp v$ em $H_0^1(\Omega)$. Logo, $\left(\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2, \qquad \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2.$$

Se denotamos por X_1 o espaço gerado pelas autofunções associadas aos primeiros k autovalores de $-\Delta$ e $X_2 = X_1^\perp$, então $H_0^1(\Omega) = X_1 \oplus X_2$. Para o próximo teorema, escrevemos $w = u + v$ para cada $w \in H_0^1(\Omega)$, onde $u \in X_1$ e $v \in X_2$.

Teorema 1.47. *Com a notação introduzida acima,*

$$\lambda_k \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \qquad \forall\, u \in X_1,$$

e

$$\lambda_{k+1} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \qquad \forall\, v \in X_2.$$

Demonstração. Pela discussão anterior,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i^2 = \lambda_k \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

e

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i a_i^2 \geq \lambda_{k+1} \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2 = \lambda_{k+1} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

$\square$

1.3 Introdução à Teoria de Pontos Críticos para Funcionais

1.3.1 Teoria Clássica

Começamos nossa discussão da teoria de pontos críticos com algumas definições. No que se segue, $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ é um funcional de X.

Definição 1.48. Dizemos que I é *Frechét diferenciável* em $u \in X$ se existe uma aplicação linear contínua $L : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte afirmação: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, u) > 0$ tal que $\|v\|_X \leq \delta$ implica

$$|I(u+v) - I(u) - L(v)| \leq \epsilon \|v\|_X.$$

Denotamos L por $I'(u)$, e dizemos que I é C^1 se a aplicação $I' : X \to X^*$ definida por $u \mapsto I'(u)$ for contínua.

Definição 1.49. Se I for diferenciável, chamamos de *ponto crítico* um elemento $u \in X$ do domínio tal que $I'(u) = 0$. Como $I'(u) \in X^*$, isto significa que $I'(u)v = 0$ para todo $v \in X$. A imagem do funcional neste ponto é chamada de *valor crítico.*

Definição 1.50. Dizemos que uma EDP está em sua *formulação fraca* se está na forma

$$Au = f,$$

onde $A : X \to X^*$, $f \in X^*$ e queremos achar $u \in X$, que denominamos *solução fraca* da EDP. Isto é equivalente a achar $u \in X$ tal que

$$Au(v) = f(v)$$

para todo $v \in X$. Os vetores v são chamados de *funções teste*, pois geralmente X é um espaço de funções.

O interesse em pontos críticos de funcionais no contexto de equações diferenciais vem do fato de que, se conseguirmos encontrar um funcional I tal que $I'(u) = Au - f$, então os pontos críticos deste funcional são exatamente as soluções fracas da EDP que estamos estudando, assim, a existência de soluções fracas nos é garantida por teoremas de existência de pontos críticos do funcional associado I. Esta abordagem ao estudo de equações diferenciais é chamada de *método variacional.* Vamos apresentar o exemplo de um problema de valor inicial linear elíptico.

Exemplo 1.51. Consideramos

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado com fronteira suave e $f \in C(\overline{\Omega})$. A função u é uma *solução clássica* de (1.2) se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Para tal função, multiplicando a primeira equação de (1.2) por funções teste $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrando por partes, chegamos em

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx. \tag{1.3}$$

Escolhendo $X = H_0^1(\Omega)$, por definição, um elemento de $H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (1.2) se satisfaz (1.3) para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Como $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \subset H_0^1(\Omega)$, segue que soluções clássicas de (1.2) são automaticamente soluções fracas de (1.2). Se definimos

$$I(u) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f u \, dx,$$

segue que I é Frechét diferenciável (vamos provar isso no caso em que f é a não linearidade do nosso problema principal) em X e

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - f v \, dx$$

para todo $v \in X$. Assim, u é um ponto crítico de I se, e somente se, u é uma solução fraca de (1.2). Muitas vezes, utilizando resultados de análise funcional, é mais fácil provar a existência de soluções fracas do que de soluções clássicas. De fato, assuma agora que $f \in L^2(\Omega)$, a equação (1.3) pode ser escrita como

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Definindo $T_f(v) := (f, v)_{L^2(\Omega)}$, claramente T_f é linear. Pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré,

$$|(f, v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

segue que T_f é contínuo, logo $T_f \in H^{-1}(\Omega)$. Pelo Teorema da Representação de Riesz ([6] página 135), existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $T_f(v) = (u, v)_{H_0^1(\Omega)}$ e $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|T_f\|_{H^{-1}(\Omega)}$.

Os primeiros tipos de pontos críticos a serem considerados são pontos de máximo e mínimo global, para os quais é necessário que o funcional seja limitado por baixo ou por cima, respectivamente. O funcional associado ao problema (P) é ilimitado, e portanto não poderemos encontrar estes pontos de extremo globais. No entanto, por uma questão didática, vamos descrever o método para encontrar pontos críticos considerando estes pontos globais primeiro, e depois modificaremos o método para lidar com outros tipos de pontos críticos. Por enquanto, vamos assumir que $\inf_{u \in X} I(u) > -\infty$, sendo que o outro caso é análogo. Seja $c \in \mathbb{R}$ o ínfimo de I, por definição, para todo $\epsilon > 0$ existe algum $u \in X$ tal que $I(u) < c + \epsilon$, e escolhendo $\epsilon = 1/k$, onde $k \in \mathbb{N}$, podemos construir uma sequência minimizante $I(u_k) \to c$. O *método direto do cálculo de variações* (ver [13, 17, 19]) consiste nos seguintes passos:

(1) Tome uma sequência minimizante $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de I;

(2) mostre que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente para algum $u \in X$;

(3) mostre que I é sequencialmente semicontínua inferiormente em u.

O último item significa que $\liminf_{k\to\infty} I(u_k) \geq I(u)$ para qualquer sequência convergente $u_k \to u$. Se os três itens acima forem verificados, então

$$c = \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \lim_{j\to\infty} I(u_{k_j}) \geq I(u) \geq c,$$

logo $I(u) = c$ e u é o mínimo global que queríamos. A chave para reutilizar este método no contexto em que I é ilimitado é considerar outro tipo de sequência com uma propriedade a mais. Uma pista nessa direção é um resultado que segue do Princípio Variacional de Ekeland ([23] página 256, a versão do teorema na referência assume limitação por cima, mas como já dito ambos os casos são análogos), e diz que se I é C^1 e limitado por baixo, então existe uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $I(u_k) \to \inf_{u\in X} I(u)$ e $I'(u_k) \to 0$ quando $k \to \infty$. Como não temos mais a limitação por baixo em I, a solução é demonstrar diretamente a existência da sequência.

(1)' Prove que existe uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $I(u_k) \to c$ e $I'(u_k) \to 0$.

É claro que incluímos um passo zero que é provar que $I \in C^1(X;\mathbb{R})$, mas por outro lado não precisamos mais do passo (3). Por fim, se I é C^1 e (1)' e (2) forem verificados, então

$$c = \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \lim_{j\to\infty} I(u_{k_j}) = I(u)$$

e

$$0 = \lim_{k\to\infty} I'(u_k) = \lim_{j\to\infty} I'(u_{k_j}) = I'(u),$$

provando que u é de fato um ponto crítico. Esta discussão motiva as próximas definições.

Definição 1.52. Seja $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional C^1. Uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $(I(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada e $I'(u_k) \to 0$ é chamada de *sequência de Palais-Smale* para I.

Definição 1.53. Seja $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional C^1 e $c \in \mathbb{R}$. Uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $I(u_k) \to c$ e $I'(u_k) \to 0$ é chamada de *sequência de Palais-Smale no nível* c para I.

Definição 1.54. Um funcional $I \in C^1(X;\mathbb{R})$ satisfaz a *condição de compacidade de Palais-Smale* (PS) se toda sequência de Palais-Smale tem uma subsequência convergente.

Definição 1.55. Dizemos que $I \in C^1(X;\mathbb{R})$ satisfaz a *condição de compacidade de Palais-Smale no nível* $c \in \mathbb{R}$ $(\mathrm{PS})_c$ se toda sequência de Palais-Smale no nível c tem uma subsequência convergente.

Observação. 1.56. Se I satisfaz (PS), então I satisfaz $(\mathrm{PS})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Com efeito, as sequências $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ para as quais $(I(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada incluem todas as sequências em que $(I(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para algum $c \in \mathbb{R}$.

Com estas novas definições, reorganizamos nosso método no seguinte lema.

Lema 1.57. *Sejam $I \in C^1(X;\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Assuma que existe um sequência de Palais-Smale no nível c e que I satisfaz $(PS)_c$, então I tem um ponto crítico no nível c.*

Demonstração. Pela condição $(\mathrm{PS})_c$, existe uma subsequência (u_{k_j}) de (u_k) tal que $u_{k_j} \to u$ quando $j \to \infty$, então

$$c = \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \lim_{j\to\infty} I(u_{k_j}) = I(u)$$

e

$$0 = \lim_{k\to\infty} I'(u_k) = \lim_{j\to\infty} I'(u_{k_j}) = I'(u).$$

□

Observação. 1.58. Para garantir que u seja não trivial é necessário saber explicitamente que $I(0) \neq c$ (imagem de 0 não está no nível c) ou $I'(0) \neq 0$ ($0 \in X$ não é ponto crítico de I).

Agora vamos introduzir os dois teoremas clássicos da teoria de pontos críticos, o primeiro a ser enunciado foi o Teorema do Passo da Montanha por Ambrosetti e Rabinowitz [1]. Este teorema geralmente é usado no caso em que a potência associada a não linearidade é superquadrática.

Teorema 1.59 (Teorema do Passo da Montanha)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $I \in C^1(H;\mathbb{R})$ um funcional tais que*

(i) *$I' : H \to H^*$ é Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de H,*

(ii) *$I(0) = 0$,*

(iii) *existem constantes $r, a > 0$ tais que $I(u) \geq a$ se $\|u\| = r$ e*

(iv) *existe $v \in H$ com $\|v\| > r$ tal que $I(v) < a$.*

Então, existe uma sequência de Palais-Smale para I em um nível $c \geq a$. Definindo

$$\Gamma := \{g \in C([0,1];H) \mid g(0) = 0, g(1) = v\},$$

este nível é caracterizado por

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} I[g(t)].$$

Além disso, se I satisfaz $(PS)_c$, então existe um ponto crítico de I no nível c.

Demonstração. Badiale e Serra [2], página 156. □

A intuição por trás deste teorema e o motivo pelo qual ele leva este nome vem da sua versão em dimensão finita, que pode ser visto em [24, capítulo 2]. Infelizmente, a visualização que daremos não se aplica às hipóteses do teorema declarado acima, mas ainda assim é útil para a sua compreensão. Digamos que $H = \mathbb{R}^2$ e I esteja medindo a altura. Então, conhecemos dois pontos de alturas pequenas na paisagem, a saber, a origem e o ponto v. Entre eles, a uma distância r da origem, se encontra uma cadeia de montanhas de altura $I(u) \geq a > 0$, e se quisermos ir da origem até v, temos que passar pela cadeia de montanhas. Logo, considerando todos os caminhos entre esses dois pontos, escolhemos aquele que minimiza o quanto temos que subir: este é o passo da montanha. O teorema diz que a altura máxima do passo é um valor crítico de I. O ponto que tem esta altura deveria ser minimizador na cadeia de montanhas e maximizador no caminho que tomamos, e portanto deveria ser um ponto de sela. Entretanto, isto não é verdade no caso degenerado em que a cadeia de montanhas tem um cume circular ao redor da origem, ou seja, quando $I(u) = c$ para todo $u \in H$ tal que $\|u\| = r$.

Observação. 1.60. Dizemos que um funcional I tem a geometria do Teorema do Passo da Montanha se satisfaz as hipóteses (ii), (iii) e (iv) do teorema acima. Veremos que uma das condições que utilizamos para provar o teorema de existência no caso superquadrático implica na geometria do Teorema do Passo da Montanha para o funcional associado ao problema (P).

O segundo teorema clássico da teoria de pontos críticos é o Teorema do Ponto de Sela, provado por Rabinowitz [20]. Em contraste com o Teorema do Passo da Montanha, este teorema geralmente é utilizado quando a não linearidade é assintoticamente linear, o que faz a potência associada ser assintoticamente quadrática. A diferença deste trabalho é assumir diretamente uma restrição na potência, a saber, a condição de dupla ressonância, o que dá um grau de liberdade maior a nível da não linearidade.

Teorema 1.61 (Teorema do Ponto de Sela)**.** *Seja $H = V \oplus W$, onde H é um espaço de Hilbert e V é um subespaço vetorial de dimensão finita. Suponha que I é um funcional C^1 que satisfaz as seguintes afirmações:*

(i) $I' : H \to H^*$ *é Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de H;*

(ii) *existe uma vizinhança limitada simplesmente conexa D de 0 em V tal que*

$$\max_{u \in \partial D} I(u) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{u \in W} I(u),$$

onde α e β são constantes reais. Então, existe uma sequência de Palais-Smale para I no nível $c \geq \beta$. Este nível é caracterizado por

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} I[h(u)],$$

onde

$$\Gamma := \{h \in C(\overline{D}; H) \mid h(u) = u,\ \forall\, u \in \partial D\}.$$

Além disso, se I satisfaz $(PS)_c$, então existe um ponto crítico de I no nível c.

Demonstração. Badiale e Serra [2] página 159. □

Observação. 1.62. Dizemos que I tem a geometria do Teorema do Ponto de Sela se I satisfaz a condição (ii) do teorema acima. Veremos que um de nossos lemas auxiliares implica nesta geometria para o funcional associado ao problema (P) no caso subquadrático.

Observação. 1.63. Em ambos os teoremas acima, poderíamos ter assumido a condição mais forte (PS).

A importância do método descrito neste capítulo é exatamente que conseguimos separar a busca de pontos críticos em duas partes que podem ser verificadas independentemente: a existência de uma sequência de Palais-Smale e a questão da convergência deste tipo de sequência. Um ponto em comum dos dois teoremas acima é que todo o trabalho pesado é feito para garantir a existência da sequência de Palais-Smale, e uma vez que isso é provado, a existência do ponto crítico segue imediatamente do Lema 1.57. Nosso objetivo agora é unificar estes dois teoremas estabelecendo um padrão geral em termos de geometria, com a finalidade de esclarecer a relação entre os resultados clássicos e o teorema minimax geral de Bartolo *et al.*. Isto será feito através da noção de *linking*.

1.3.2 Linking e o Teorema Minimax de Bartolo-Benci-Fortunato

Começamos esta seção com a definição de linking, que retiramos diretamente do artigo de Bartolo *et al.* [4], mas ver [5] para outra definição deste conceito. Ainda outra definição se encontra no livro [23], que contém vários exemplos diferentes de linking e aplicações à teoria de pontos críticos.

Definição 1.64 (Linking)**.** Sejam H um espaço de Hilbert real e S um subconjunto fechado de H. Seja Q uma variedade de Hilbert com fronteira ∂Q. Vamos dizer que há um link entre S e ∂Q (ou que S e ∂Q conectam) se

(i) $S \cap \partial Q = \emptyset$;

(ii) se $\phi : H \to H$ é uma aplicação contínua tal que $\phi(u) = u$ para todo $u \in \partial Q$, então $\phi(Q) \cap S \neq \emptyset$.

Intuitivamente, esta definição significa que, mantendo a fronteira de Q fixa, independente de quanto continuamente deformarmos Q, sempre haverá algum ponto em comum entre o interior de Q e S. Considerando as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, se definirmos $Q = \{tv \in H \mid 0 \leq t \leq 1\}$ e $S = \partial B_r = \{u \in H \mid \|u\| = r\}$, então

$$\max_{u \in \partial Q} I(u) < a \leq \inf_{u \in S} I(u),$$

que é bastante similar a uma das hipóteses do Teorema do Ponto de Sela. Ademais, em termos destes conjuntos, podemos ver que a geometria do teorema é de uma esfera com um ponto dentro (a origem) e um ponto fora (o ponto v) com alguma curva conectando os dois, que seria $\phi(Q)$, logo é extremamente provável que existe um link entre ∂Q e S. Vamos provar que este é de fato o caso com uma aplicação direta do Teorema da Alfândega.

Proposição 1.65. *Sejam H um espaço de Hilbert real, $Q = \{tv \in H \mid 0 \leq t \leq 1\}$ e $S = \{u \in H \mid \|u\| = r\}$, onde $0 < r < \|v\|$. Então, ∂Q e S conectam.*

Demonstração. Pelo Teorema da Alfândega 1.15 com $M = H$, $C = \phi(Q)$ e $X = B_r$, segue que existe um ponto de $\phi(Q)$ que pertence a $\partial X = S$ para qualquer $\phi : H \to H$ contínua que fixa ∂Q, portanto S e ∂Q conectam. $\square$

Focando agora nas hipóteses do Teorema do Ponto de Sela, fixando $Q = \overline{D}$ e $S = W$, temos similarmente que

$$\max_{u \in \partial Q} I(u) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{u \in S} I(u).$$

A visualização é um pouco mais difícil neste caso, mas fazendo uma analogia com $\mathbb{R}^3$, onde $Q' = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ e $S' = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$, vemos que para não haver o link, seria necessário abrir um buraco em Q' sobre o eixo z utilizando uma função contínua, o que é impossível. Isso nos dá a ideia de prosseguir por contradição.

Proposição 1.66. *Sejam $H = V \oplus W$, onde $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ é um espaço de Hilbert real e V é um subespaço vetorial de dimensão finita. Suponha que $Q = \overline{D}$, onde D é uma vizinhança limitada e simplesmente conexa de 0 em V e $S = W$. Então, S e ∂Q conectam.*

Demonstração. Seja $\phi : H \to H$ uma função contínua tal que $\phi(u) = u$ para todo $u \in \partial Q$. Por contradição, vamos assumir que para todo $u \in Q$ existe $r > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \langle \phi(u), u_i \rangle_H^2 \geq r^2$, onde $\{u_1, \ldots, u_k\}$ é uma base de V. Isto implica que $\phi(Q)$ não é simplesmente conexo, contradição. Então, existe $u \in Q$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \langle \phi(u), u_i \rangle_H^2 < r^2$ para todo $r > 0$, logo $\langle \phi(u), u_i \rangle_H = 0$ para $i = 1, \ldots, k$, e portanto $\phi(u) \in S$. $\square$

O último ingrediente que precisamos para declarar o Teorema de Bartolo-Benci-Fortunato [4, Teorema 2.3] é uma condição de compacidade introduzida por Cerami [8].

Definição 1.67. Dizemos que $I \in C^1(H; \mathbb{R})$ satisfaz a *condição de tipo Palais-Smale no nível* $c \in \mathbb{R}$ $(\mathrm{C})_c$, se:

(i) toda sequência limitada $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H$ tal que $I(u_k) \to c$ e $I'(u_k) \to 0$ quando $k \to \infty$ tem uma subsequência convergente;

(ii) existem constantes positivas δ, R e α tais que $\|I'(u)\| \|u\| \geq \alpha$ para qualquer $u \in I^{-1}([c - \delta, c + \delta])$ com $\|u\| \geq R$.

Observação. 1.68. $(\mathrm{PS})_c \Rightarrow (\mathrm{C})_c$.
De fato, está claro que $(\mathrm{PS})_c \Rightarrow (\mathrm{C})_c$(i). Agora, se I satisfaz $(\mathrm{PS})_c$ e $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H$ é uma sequência tal que $I(u_k) \to c$ e $\|u_k\| \to \infty$ quando $k \to \infty$, então existe $\alpha > 0$ tal que $\|I'(u_k)\| \geq \alpha$, para todo k grande o suficiente. Do contrário, temos que $\|I'(u_k)\| \to 0$, logo $I'(u_k) \to 0$, e por $(\mathrm{PS})_c$ existe uma subsequência que converge para algum $u \in H$, contradição. Logo, para todos $\delta, R > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que se $u \in I^{-1}([c - \delta, c + \delta])$ e $\|u\| \geq R$, então $\|I'(u)\| \geq \alpha$. Isto implica $(\mathrm{C})_c$(ii).

Teorema 1.69. [4, Teorema 2.3] *Seja H um espaço de Hilbert real, suponha que $I \in C^1(H;\mathbb{R})$ satisfaz a condição* $(\mathrm{C})_c$ *para todo $c > 0$, e que existem $S \subset H$ um subconjunto fechado e $Q \subset H$ uma variedade de Hilbert com fronteira ∂Q tais que*

(i) $\sup_{u\in\partial Q} I(u) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{u\in S} I(u)$, *para* $0 \leq \alpha < \beta$;

(ii) *S e ∂Q conectam;*

(iii) $\sup_{u\in Q} I(u) < +\infty$.

Então, I possui um valor crítico $c \geq \beta$.

Observação. 1.70. Segue da prova deste teorema que se I satisfaz $(\mathrm{C})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, a restrição $\alpha \geq 0$ não é necessária.

Pela discussão anterior, fica claro que o teorema acima é uma generalização de ambos os teoremas clássicos em suas versões fortes, ou seja, assumindo (PS) ao invés de $(\mathrm{PS})_c$. De fato, (PS) implica $(\mathrm{PS})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, que por sua vez implica $(\mathrm{C})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. As Proposições 1.65 e 1.66 providenciam os links necessários, e como em ambos os casos o conjunto Q é compacto, segue que $\sup_{u\in Q} I(u) < +\infty$.

Antes de continuarmos com as aplicações da teoria de pontos críticos ao problema (P), vamos apresentar novamente os dois casos em que este problema se divide, e fazer uma breve observação sobre nossa definição de dupla ressonância.

Definição 1.71. O problema (P) é chamado de *subquadrático* na potência F se existe algum $c > 0$ tal que F satisfaz

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} \leq c < \infty.$$

Definição 1.72. O problema (P) é chamado de *superquadrático* na potência F se F satisfaz

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = \infty.$$

Observação. 1.73. Sendo $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, usualmente (P) é chamado de um problema ressonante ou duplamente ressonante (ver [11]) quando, respectivamente:

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = \lambda_k \qquad \text{uniformemente para q.t. } x \in \Omega,$$

$$\lambda_k \leq \liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq \limsup_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq \lambda_{k+1},$$

uniformemente para quase todo $x \in \Omega$ e para algum $k \in \mathbb{N}$. Neste artigo, chamaremos (P) de problema de ressonância ou de dupla ressonância quando, respectivamente:

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} = \lambda_k \qquad \text{uniformemente para q.t. } x \in \Omega,$$

$$\lambda_k \leq L(x) = \liminf_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \limsup_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} = K(x) \leq \lambda_{k+1},$$

uniformemente para quase todo $x \in \Omega$ e para algum $k \in \mathbb{N}$. A definição usual de problema de ressonância é mais geral do que a nossa definição pela regra de L'Hôpital. No entanto, utilizando a versão generalizada da regra de L'Hôpital apresentada em Taylor [25]:

$$\liminf_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

podemos ver que a nossa definição de problema de dupla ressonância é mais geral do que a definição usual. De fato, assumindo a definição usual, e notando que quando $c = \pm\infty$, nossa hipótese é apenas $\lim\limits_{x\to c} |g(x)| = \infty$ (ou seja, a hipótese sobre o limite de f não é necessária), temos que

$$\lambda_k \leq \liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq \liminf_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \limsup_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \limsup_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq \lambda_{k+1}.$$

Capítulo 2

Aplicação às EDPs Elípticas Semilineares

Como dito na introdução, nosso problema é

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, e $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que satisfaz a seguinte condição de crescimento subcrítico:

$$|f(x,s)| \leq a_0|s|^{p-1} + b_0 \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ e q.t. } x \in \Omega,$$

para constantes $a_0, b_0 \geq 0$, e com $1 \leq p < 2n/(n-2)$ se $n \geq 3$, e $1 \leq p < \infty$ se $n = 1, 2$. Multiplicamos a primeira equação do problema (P) por uma função teste $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e integramos em Ω:

$$-\int_\Omega \Delta uv\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f(x,u)v\, dx,$$

onde foi utilizada integração por partes do lado esquerdo. Agora, admitindo que $v \in H_0^1(\Omega)$, chegamos à formulação fraca do problema: achar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f(x,u)v\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

As soluções fracas $u \in H_0^1(\Omega)$ de (P) são os pontos críticos do funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt$.

Proposição 2.1. *O funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido acima é continuamente diferenciável. Além disso, o operador $K : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definido por*

$$K(u)v = \int_\Omega f(x,u)v\,dx$$

é compacto.

Demonstração. Vamos primeiro calcular a derivada de Frechét de J. Definindo

$$J_1(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx, \qquad J_2(u) := \int_\Omega F(x,u)\,dx,$$

então

$$J_1(u+v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx,$$

logo

$$J_1'(u)v = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx.$$

Como $F(x,u)$ é C^1 em u para quase todo $x\in\Omega$, temos

$$F(x,u+s) = F(x,u) + f(x,u)s + R(s), \text{ onde } \lim_{s\to 0}\frac{|R(s)|}{|s|} = 0, \tag{2.1}$$

e essas igualdades valem quase sempre em Ω. Substituindo $s\in\mathbb{R}$ por uma função $v\in H_0^1(\Omega)$, segue que

$$J_2(u+v) = \int_\Omega F(x,u)\,dx + \int_\Omega f(x,u)v\,dx + \int_\Omega R(v)\,dx$$

e devemos verificar que

$$\frac{|\int_\Omega R(v)\,dx|}{\|v\|_{H_0^1}} \to 0 \text{ quando } \|v\|_{H_0^1}\to 0, \tag{2.2}$$

notamos que o limite em (2.1) é em $\mathbb{R}$ enquanto que o limite em (2.2) é em $H_0^1(\Omega)$. Seja $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência tal que $v_k\to 0$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $k\to\infty$. Pela observação 1.35, existe uma subsequência $(v_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}\subset(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $v_{k_j}(x)\to 0$ quase sempre em Ω. Substituindo $s = v_{k_j}(x)$,

$$\lim_{j\to\infty}\frac{|R(v_{k_j}(x))|}{|v_{k_j}(x)|} = 0 \tag{2.3}$$

para quase todo $x\in\Omega$. Logo, quando j é grande o suficiente, existe $C>0$ tal que

$$\frac{|R(v_{k_j}(x))|}{|v_{k_j}(x)|} \le C,$$

quase sempre em Ω. Escolhendo $g(x) = C$ como nossa função dominante, temos que $g \in L^2(\Omega)$ pois $|\Omega| < \infty$, e pelo Teorema da Convergência Dominada em $L^2(\Omega)$,

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \frac{|R(v_{k_j}(x))|^2}{|v_{k_j}(x)|^2}\, dx = 0.$$

Então, para esta subsequência, pelas desigualdades de Poincaré e de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{\|R(v_{k_j})\|_{L^1}}{\|v_{k_j}\|_{H_0^1}} \leq C \frac{\|R(v_{k_j})\|_{L^1}}{\|v_{k_j}\|_{L^2}} \leq C \left\| \frac{R(v_{k_j})}{v_{k_j}} \right\|_{L^2} \to 0$$

quando $j \to \infty$. O que provamos até agora foi que para toda sequência tal que $v_k \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$, existe uma subsequência (v_{k_j}) tal que

$$\frac{\|R(v_{k_j})\|_{L^1}}{\|v_{k_j}\|_{H_0^1}} \to 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

Para terminar a prova de que J é diferenciável, precisamos da seguinte afirmação geral.

Afirmação 1. *Sejam $f : X \to Y$ e $x \in X$, onde (X, d_X) e (Y, d_Y) são espaços métricos. Suponha que para toda sequência $x_n \to x$, existe uma subsequência $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f(x_{n_m}) \to f(x)$. Então, $f(x_n) \to f(x)$ para toda sequência tal que $x_n \to x$.*

Demonstração. Por contraposição, isso é equivalente a seguinte afirmação: se existe uma sequência $x_n \to x$ tal que $f(x_n) \not\to f(x)$, então existe uma sequência $x_k \to x$ tal que para qualquer subsequência $x_{k_j} \to x$, temos que $f(x_{k_j}) \not\to f(x)$. Suponha que existe $x_n \to x$ tal que $f(x_n) \not\to f(x)$. Por definição, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $d_Y(f(x_n), f(x)) \geq \epsilon$. Seja $N' \in \mathbb{N}$, extraímos da sequência (x_n) todos os elementos com índices $n \geq N'$ tais que $d_Y(f(x_n), f(x)) < \epsilon$ e montamos uma nova sequência (x_k) com os elementos restantes. Para esta sequência, existem $\epsilon > 0$ e $N' \in \mathbb{N}$ tais que para todo $k \geq N'$, temos que $d_Y(f(x_k), f(x)) \geq \epsilon$, logo (x_k) não tem subsequências cuja imagem converge para $f(x)$. $\square$

Aplicando a afirmação, para toda sequência $v_k \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\frac{\|R(v_k)\|_{L^1}}{\|v_k\|_{H_0^1}} \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Finalmente, pelo critério sequencial de continuidade, isso significa que

$$\frac{\|R(v)\|_{L^1}}{\|v\|_{H_0^1}} \to 0 \text{ quando } \|v\|_{H_0^1} \to 0.$$

Portanto,
$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f(x,u)v \, dx,$$
e vemos que quando $J'(u)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ (u é ponto crítico), recuperamos a forma fraca de (P). Note que não usamos a condição de crescimento em f na prova acima. Para a próxima parte, a função $J' : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é contínua se $\|J'(u_k) - J'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0$ para qualquer sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ convergindo para algum $u \in H_0^1(\Omega)$. Pela Definição 1.43, a convergência na norma dual significa, em termos da norma primal, convergência uniforme em conjuntos limitados. Como qualquer conjunto limitado está contido em um múltiplo da bola unitária com centro na origem, aqui denotada por B_1, é suficiente checar a convergência uniforme em B_1. Então, o que queremos provar é que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq N$ e todo $v \in B_1$, temos $|J'(u_k)v - J'(u)v| < \epsilon$. De fato, para J_1', é fácil ver que
$$|J_1'(u_k)v - J_1'(u)v| = \left| \int_\Omega \nabla(u_k - u) \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \|u_k - u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$
Vamos provar agora que K é na verdade um operador compacto, o que implica que K é contínuo. Primeiro, pela condição de crescimento subcrítico, a função que leva $u \mapsto f(\cdot, u)$ tem imagem em $L^q(\Omega)$ (onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) se $u \in L^p(\Omega)$:
$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u)|^q \, dx &\leq \int_\Omega (a_0|u|^{p-1} + b_0)^q \, dx \leq 2^q \int_\Omega (\max\{a_0|u|^{p-1}, b_0\})^q \, dx \\ &= 2^q \int_\Omega (\max\{a_0^{1/(p-1)}|u|, b_0^{1/(p-1)}\})^p \, dx < +\infty.\end{aligned}$$
Temos o seguinte diagrama para K:
$$\begin{tikzcd} H_0^1(\Omega) \arrow[rr, hook, two heads] \arrow[d, "K"'] & & L^p(\Omega) \arrow[d] \\ H^{-1}(\Omega) & L^p(\Omega)^* \arrow[l] & L^q(\Omega) \arrow[l, hook, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$
A imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L^p(\Omega)$ é compacta pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, a aplicação $u \mapsto f(\cdot, u)$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$ por hipótese, $L^q(\Omega)$ é isometricamente isomorfo a $L^p(\Omega)^*$ (ver Folland [16] para uma prova deste resultado), e a última função é simplesmente a restrição do domínio de algum funcional $\phi \in L^p(\Omega)^*$ para $H_0^1(\Omega)$. Em vista da Proposição 1.32, K é compacto. □

Proposição 2.2. *A condição de crescimento subcrítico implica que o funcional J satisfaz a condição $(C)_c$(i) para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Definindo dois operadores $T, K : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ da seguinte forma:

$$T(u)v := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \qquad K(u)v := \int_\Omega f(x,u)v \, dx,$$

temos que $J'(u) = T(u) - K(u)$, e o resultado é consequência de K ser um operador compacto. Seja $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada, então $(K(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente $K(u_{k_j}) \to \psi \in H^{-1}(\Omega)$, e pelo Teorema da Representação da Riesz, existe um único $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $T(u_0) = \psi$ e $\|T(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo, como $J'(u_k) \to 0$:

$$\begin{aligned}\|u_{k_j} - u_0\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|T(u_{k_j} - u_0)\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq \|T(u_{k_j}) - K(u_{k_j})\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|K(u_{k_j}) - T(u_0)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0.\end{aligned}$$

$\square$

Notamos que (1) é sempre satisfeita se $p = q$. De fato,

$$\frac{F(x,s)}{|s|^p} \leq \frac{\int_0^s (a_0|t|^{p-1} + b_0)\, dt}{|s|^p} = \frac{\frac{a_0}{p} s|s|^{p-1} + b_0 s}{|s|^p} = \mathrm{sgn}(s)\left(\frac{a_0}{p} + \frac{b_0}{|s|^{p-1}}\right),$$

se $s > 0$ e $p > 1$:

$$\frac{a_0}{p} + \frac{b_0}{s^{p-1}} \xrightarrow{s\to\infty} \frac{a_0}{p},$$

e se $p = 1$:

$$\frac{a_0}{p} + \frac{b_0}{s^{p-1}} = a_0 + b_0.$$

Enquanto que se $s < 0$ e $p > 1$:

$$-\frac{a_0}{p} + (-1)^p \frac{b_0}{s^{p-1}} \xrightarrow{s\to-\infty} -\frac{a_0}{p},$$

e se $p = 1$:

$$-\frac{a_0}{p} + (-1)^p \frac{b_0}{s^{p-1}} = -a_0 - b_0.$$

Porém, (1) pode ser satisfeita para valores menores de q, o que é de interesse para o que pretendemos fazer. Como dito anteriormente, a hipótese (2) é chamada de condição de não quadraticidade no infinito para a potência F, para ilustrar o seu significado, suponha que $f(x,s)$ é da forma $f(x,s) = \lambda s + g(s)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e g é contínua. Então, assumindo que g satisfaz a condição de tipo Landesman-Lazer:

$$\lim_{s\to\pm\infty} g(s) = g_\pm, \qquad \text{com } g_\pm > 0, \tag{2.4}$$

e denotando $G(s) = \int_0^s g(t)\,dt$, temos que

$$\lim_{s\to\pm\infty} \frac{G(s)}{|s|} = \lim_{s\to\pm\infty} \frac{\int_0^s g(t)\,dt}{|s|} = \lim_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{\operatorname{sgn}(s)} = \pm g_\pm$$

e

$$\frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} = \frac{g(s)s - 2G(s)}{|s|^\mu}.$$

Sob a hipótese de que $\mu \leq 1$ em (2), segue que, se $s > 0$:

$$\begin{aligned}\limsup_{s\to\infty} \frac{g(s)s - 2G(s)}{s^\mu} &= \limsup_{s\to\infty} s^{1-\mu}\left(g(s) - 2\frac{G(s)}{s}\right) \\ &= \limsup_{s\to\infty} s^{1-\mu}(-g_+) \leq -g_+ < 0.\end{aligned}$$

Se $s < 0$:

$$\begin{aligned}\limsup_{s\to-\infty} \frac{g(s)s - 2G(s)}{(-s)^\mu} &= \limsup_{s\to-\infty}(-s)^{1-\mu}\left(-g(s) + 2\frac{G(s)}{s}\right) \\ &= \limsup_{s\to-\infty}(-s)^{1-\mu}(-3g_-) \leq -3g_- < 0.\end{aligned}$$

Portanto, F satisfaz (2) para $\mu \leq 1$. Por outro lado, consideramos a condição

$$0 < \theta F(x,s) \leq f(x,s)s \qquad \forall\, |s| \geq R, \text{ uniformemente para q.t. } x \in \Omega, \tag{2.5}$$

para $\theta > 2$ e $R > 0$, introduzida por Ambrosetti e Rabinowitz [1] para obter uma solução não trivial no caso superquadrático. Essa condição implica que

$$\frac{f(x,s)}{F(x,s)} = \frac{d}{ds}(\log F(x,s)) \geq \frac{\theta}{s},$$

integrando em s, achamos

$$\log F(x,s) \geq \theta \log|s| + c,$$

logo $F(x,s) \geq a_1|s|^\theta$, para todo $|s| \geq R$, e algum $a_1 > 0$. Daí,

$$\frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu} \geq \frac{(\theta-2)F(x,s)}{|s|^\mu} \geq (\theta-2)a_1|s|^{\theta-\mu},$$

portanto, se $\mu \leq \theta$:

$$0 < (\theta-2)a_1 \leq \liminf_{|s|\to\infty}(\theta-2)a_1|s|^{\theta-\mu} \leq \liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)s - 2F(x,s)}{|s|^\mu}.$$

Tanto (2.4) quanto (2.5) implicam, separadamente, na condição de compacidade de Palais-Smale 1.54 para o funcional J. Vamos provar que (2.5) $\Rightarrow$ (PS). Para isso, provamos que uma sequência sob as hipóteses de Palais-Smale é limitada e utilizamos o mesmo argumento da Observação 2.2. As condições (2.4) e (2.5) são mencionadas para exemplificar diferentes maneiras que as condições de não quadraticidade no infinito e de Palais-Smale podem ser cumpridas, por essa razão a proposição abaixo não será utilizada em outras partes deste trabalho.

Proposição 2.3. *Se F satisfaz a condição (2.5), então J satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência tal que $(J(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada e $J'(u_k) \to 0$, então existe $M > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
M &\geq \frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \left(\int_{\{x\in\Omega;\,|u_k|\geq R\}} F(x,u_k)\,dx + \int_{\{x\in\Omega;\,|u_k|<R\}} F(x,u_k)\,dx\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_{\{x\in\Omega;\,|u_k|\geq R\}} F(x,u_k)\,dx - C_1\\
&\geq \frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{\theta}\int_{\{x\in\Omega;\,|u_k|\geq R\}} f(x,u_k)u_k\,dx - C_1\\
&\geq \frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{\theta}\int_{\Omega} f(x,u_k)u_k\,dx - C_1.
\end{aligned}$$

Reordenando, temos a estimativa inferior

$$\int_\Omega f(x,u_k)u_k\,dx \geq \frac{\theta}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \theta(M + C_1), \tag{2.6}$$

onde para $|u_k| < R$, temos

$$F(x,u_k) = \int_0^{u_k} f(x,s)\,ds \leq \int_0^R (a_0|s|^{p-1} + b_0)\,ds = \frac{a_0}{p}R^p + b_0R,$$

logo C_1 é dado por

$$C_1 := m(\{x\in\Omega;\,|u_k| < R\})\left(\frac{a_0}{p}R^p + b_0R\right) \geq \int_{\{x\in\Omega;\,|u_k|<R\}} F(x,u_k)\,dx.$$

Como $J'(u_k) \to 0$, então para todo $\epsilon > 0$, existe um $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$,

$$\left|\int_\Omega \nabla u_k\cdot\nabla v - f(x,u_k)v\,dx\right| \leq \epsilon\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $\epsilon = 1$ e $v = u_k$ e rearranjando:

$$\int_\Omega f(x, u_k)u_k\, dx \leq \|u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|u_k\|_{H^1_0(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Combinando (2.6) e (2.7):

$$\left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \|u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \|u_k\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \theta(M + C_1),$$

portanto, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Como K é compacto, então $(K(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente $K(u_{k_j}) \to \psi \in H^{-1}(\Omega)$, e pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ tal que $T(u_0) = \psi$ e $\|T(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{H^1_0(\Omega)}$ para todo $u \in H^1_0(\Omega)$, mas $J'(u_k) = T(u_k) - K(u_k) \to 0$, então

$$\begin{aligned}\|u_{k_j} - u_0\|_{H^1_0(\Omega)} &= \|T(u_{k_j} - u_0)\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq \|T(u_{k_j}) - K(u_{k_j})\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|K(u_{k_j}) - T(u_0)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0.\end{aligned}$$

$\square$

Em relação à condição (3), fazemos as seguintes observações.

Observação. 2.4. Pela condição de crescimento subcrítico,

$$\frac{2F(x,s)}{s^2} \geq -\frac{|2F(x,s)|}{s^2} \geq \frac{-2\int_0^s a_0|t|^{p-1} + b_0\, dt}{s^2} = -\frac{2}{s}\left(\frac{a_0}{p}|s|^{p-1} + b_0\right),$$

então, caso $b_0 \neq 0$ ou $p < 2$,

$$+\infty = \limsup_{s\to 0^-}\left[-\frac{2}{s}\left(\frac{a_0}{p}|s|^{p-1} + b_0\right)\right] \leq \limsup_{s\to 0^-} \frac{2F(x,s)}{s^2},$$

o que é uma contradição com o lado esquerdo de (3). Logo, $b_0 = 0$ e $p \geq 2$, e notando que $|f(x,0)| \leq b_0$ para quase todo $x \in \Omega$, então $f(x,0) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$, e o problema (P) tem solução trivial nesse caso.

Observação. 2.5. Vemos que a condição (3) nos coloca no limiar entre as situações subquadrática e superquadrática para a potência F: para $p = 2$, a potência ainda será subquadrática, mas, a partir de $p > 2$, entramos na situação superquadrática.

2.1 Resultados Auxiliares

Lema 1. *Se F satisfaz (1) e (2) com $\mu > (n/2)(q-2)$ se $n \geq 2$ ou $\mu > q - 2$ se $n = 1$, então J satisfaz $(\mathrm{C})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Já sabemos que $(C)_c$(i) segue da condição de crescimento subcrítico, vamos assumir a primeira alternativa de (2), a prova com a outra alternativa é análoga. Para demonstrar $(C)_c$(ii), assumimos, por contradição, que existem $c \in \mathbb{R}$ e uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ tais que $\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$ e $J(u_k) \to c$, mas $\|J'(u_k)\|_{H_0^1(\Omega)}\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$. Temos que (2)(i) é equivalente a

$$\lim_{R\to\infty}\left(\inf_{|s|\geq R}\left\{\frac{f(x,s)s-2F(x,s)}{|s|^\mu}\right\}\right) \geq a > 0 \qquad \text{unif. para q.t. } x \in \Omega,$$

logo, escolhendo $\epsilon = \dfrac{d}{|s|^\mu}$, com $d > 0$ constante, existe $R > 0$ tal que $|s| \geq R$ implica

$$a \leq \inf_{|s|\geq R}\left\{\frac{f(x,s)s-2F(x,s)}{|s|^\mu}\right\} + \frac{d}{|s|^\mu} \leq \frac{f(x,s)s-2F(x,s)}{|s|^\mu} + \frac{d}{|s|^\mu},$$

então

$$a|s|^\mu - d \leq f(x,s)s - 2F(x,s), \qquad \forall\, |s| \geq R \text{ e q.t. } x \in \Omega.$$

Agora, para $|s| \leq R$, segue da condição de crescimento subcrítico que f é limitada em $\Omega \times [-R,R]$ para quase todo $x \in \Omega$, logo, existe $M > 0$ tal que

$$-M \leq f(x,s)s - 2F(x,s), \qquad \forall\, |s| \leq R \text{ e q.t. } x \in \Omega.$$

Então, escolhendo $d' > 0$ tal que $d' \geq aR^\mu + M$, temos

$$a|s|^\mu - d' \leq f(x,s)s - 2F(x,s), \qquad \forall\, |s| \leq R \text{ e q.t. } x \in \Omega,$$

fazendo $d_1 = \max\{d, d'\}$:

$$a|s|^\mu - d_1 \leq f(x,s)s - 2F(x,s), \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ e q.t. } x \in \Omega. \tag{2.8}$$

Substituindo $s = u_k$ e integrando (2.8) em Ω, obtemos

$$a\|u_k\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} - d_1|\Omega| \leq \int_\Omega f(x,u_k)u_k - 2F(x,u_k)\,dx = 2J(u_k) + J'(u_k)u_k,$$

como o lado direito é limitado, concluímos que $u_k \in L^\mu(\Omega)$ e existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\|u_k\|_{L^\mu(\Omega)} \leq A, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Prosseguindo de modo análogo, a condição (1) é equivalente a:

$$\lim_{R'\to\infty}\left(\sup_{|s|\geq R'}\left\{\frac{F(x,s)}{|s|^q}\right\}\right) \leq b < \infty \qquad \text{unif. para q.t. } x \in \Omega,$$

escolhendo $\epsilon = \dfrac{d_2}{|s|^q}$, com $d_2 > 0$, existe $R' > 0$ tal que $|s| \geq R'$ implica

$$\frac{F(x,s)}{|s|^q} - \frac{d_2}{|s|^q} \leq \sup_{|s|\geq R'} \left\{ \frac{F(x,s)}{|s|^q} \right\} - \frac{d_2}{|s|^q} \leq b,$$

logo

$$F(x,s) \leq b|s|^q + d_2, \qquad \forall\, |s| \geq R' \text{ e q.t. } x \in \Omega.$$

Utilizando a condição de crescimento subcrítico, concluímos que F é limitada no conjunto $\Omega \times [-R', R']$, e portanto, depois de possivelmente aumentar o valor de d_2, conseguimos estender a desigualdade anterior para toda a reta:

$$F(x,s) \leq b|s|^q + d_2, \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ e q.t. } x \in \Omega. \tag{2.10}$$

Substituindo s por u_k e integrando (2.10) em Ω, vemos que:

$$\frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} - J(u_k) = \int_\Omega F(x,u_k)\,dx \leq b\|u_k\|^q_{L^q(\Omega)} + d_2|\Omega| \tag{2.11}$$

Se $\mu > q$, então, pela Proposição 1.12, $\|u_k\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\mu}}\|u_k\|_{L^\mu(\Omega)}$, logo $\left(\|u_k\|_{H^1_0(\Omega)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, contradição. Se $\mu \leq q$, então escolhemos $r = 2n/(n-2)$ se $n \geq 3$ (ou $q \leq r < \infty$ se $n = 1,2$) e utilizamos a desigualdade de interpolação 1.13, a limitação de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ na norma $\|\cdot\|_{L^\mu(\Omega)}$ (2.9), e as desigualdades de Sobolev $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1_0(\Omega)}$ em (2.11):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq b\|u_k\|^q_{L^q(\Omega)} + d_2|\Omega| + J(u_k) \\
&\leq b\|u_k\|^{(1-t)q}_{L^\mu(\Omega)}\|u_k\|^{tq}_{L^r(\Omega)} + d_2|\Omega| + J(u_k) \\
&\leq B\|u_k\|^{tq}_{H^1_0(\Omega)} + D,
\end{aligned}$$

portanto

$$\frac{1}{2}\|u_k\|^{2-tq}_{H^1_0(\Omega)} \leq B + D\|u_k\|^{-tq}_{H^1_0(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Para conseguir a limitação de $\left(\|u_k\|_{H^1_0(\Omega)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ neste caso, queremos que $2 - tq > 0$. Da hipótese da desigualdade de interpolação, temos que $1/q = (1-t)/\mu + t/r$. Daí, segue que $tq = r(q-\mu)/(r-\mu) < 2$, que é equivalente a $r(q-2)/(r-2) < \mu$. Quando $n \geq 3$, substituindo $r = 2n/(n-2)$, chegamos em $\mu > (n/2)(q-2)$, que é nossa hipótese, então de fato $2 - tq > 0$, contradição. Nos casos em que $n = 1,2$, como $r \in [q,\infty)$ é escolhido arbitrariamente, tomando o limite quando $r \to \infty$:

$$\lim_{r\to\infty} \mu = \mu > \lim_{r\to\infty} \frac{r(q-2)}{r-2} = q-2,$$

onde a desigualdade permanece estrita pois $r/(r-2)$ é decrescente para $r > 2$. Chegamos à conclusão que $2 - tq > 0$ desde que $\mu > q - 2$, e obtemos novamente a contradição desejada. $\square$

O lema anterior é usado na prova do Teorema 1. O próximo lema será usado na demonstração do Teorema 2, e mostra que, no caso subquadrático, a condição mais fraca (6) é suficiente para garantir $(\mathrm{C})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Lema 2. *Se* (P) *é um problema de dupla ressonância e* F *satisfaz* $(6)_+$ *ou* $(6)_-$, *então* J *satisfaz a condição* $(\mathrm{C})_c$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Vamos assumir $(6)_+$ (a prova é análoga para $(6)_-$) e, por contradição, que J não satisfaz $(\mathrm{C})_c$(ii) para algum $c \in \mathbb{R}$. Então, existe uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$, $J(u_k) \to c$, mas $\|J'(u_k)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$ quando $k \to \infty$. Segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega [f(x,u_k)u_k - 2F(x,u_k)]\, dx = \lim_{k\to\infty} [2J(u_k) - J'(u_k)u_k] = 2c, \tag{2.13}$$

e a ideia da prova é obter uma contradição mostrando que o lado esquerdo de (2.13) vai para infinito. De $(6)_+$, segue que existe $R > 0$ tal que

$$M \le f(x,s)s - 2F(x,s), \qquad \forall\, |s| \ge R \text{ uniformemente para q.t. } x \in \Omega.$$

Para $|s| < R$, empregando a condição de crescimento subcrítico como no Lema 1, e fazendo a substituição $s = u_k(x)$, concluímos que

$$-M \le f(x,u_k(x))u_k(x) - 2F(x,u_k(x)) \qquad \text{para q.t. } x \in \Omega.$$

Afirmação 2. *Existe um conjunto mensurável* $\Omega_0 \subseteq \Omega$ *com* $|\Omega_0| > 0$ *tal que* $|u_k(x)| \to \infty$ *quase sempre em* Ω_0 *quando* $k \to \infty$.

Da afirmação 2 junto com $(6)_+$, segue que

$$\lim_{k\to\infty} [f(x,u_k(x))u_k(x) - 2F(x,u_k(x))] = \infty, \text{ para quase todo } x \in \Omega_0.$$

Pelo Lema de Fatou com $A_k = f(x,u_k(x))u_k(x) - 2F(x,u_k(x))$,

$$\begin{aligned} &\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega A_k\, dx \ge \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega_0} A_k\, dx + \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus\Omega_0} A_k\, dx \\ &\ge \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega_0} A_k\, dx - M|\Omega\setminus\Omega_0| \ge \int_{\Omega_0} \liminf_{k\to\infty} A_k\, dx - M|\Omega\setminus\Omega_0| = \infty, \end{aligned}$$

que é a contradição que queremos. Para provar a Afirmação 2, da definição de dupla ressonância (5), segue que

$$\limsup_{|s|\to\infty}\left(\frac{2F(x,s)}{s^2}-\lambda_{l+1}\right)\leq 0,$$

uniformemente para quase todo $x\in\Omega$ e para algum $l\in\mathbb{N}$. Pela definição de limite superior, para cada $\epsilon>0$ existem $A,R>0$ tais que se $R>A$, então

$$\sup_{|s|\geq R}\left\{\frac{2F(x,s)}{s^2}-\lambda_{l+1}\right\}\leq\epsilon,\qquad\forall\,|s|\geq R \text{ e q.t. } x\in\Omega.$$

Daí,

$$F(x,s)-\frac{\lambda_{l+1}}{2}s^2\leq\frac{\epsilon}{2}s^2,\qquad\forall\,|s|\geq R \text{ e q.t. } x\in\Omega.$$

Para $|s|\leq R$, F é limitada por alguma constante $M>0$ pela condição de crescimento subcrítico, logo, estendemos a desigualdade anterior somando M do lado direito:

$$F(x,s)-\frac{\lambda_{l+1}}{2}s^2\leq\frac{\epsilon}{2}s^2+M,\qquad\forall\,s\in\mathbb{R} \text{ e q.t. } x\in\Omega.$$

Substituindo s por u_k e integrando em Ω:

$$\int_\Omega F(x,u_k)-\frac{\lambda_{l+1}}{2}u_k^2\,dx\leq\frac{\epsilon}{2}\|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}+M|\Omega|\leq\frac{\epsilon}{2\lambda_1}\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)}+M|\Omega|,$$

onde utilizamos a desigualdade de Poincaré 1.41 para conseguir a segunda desigualdade acima. Como $\epsilon>0$ é arbitrário, chegamos em

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)}}\int_\Omega F(x,u_k)-\frac{\lambda_{l+1}}{2}u_k^2\,dx\right)\leq 0. \tag{2.14}$$

Definindo $\hat{u}_k:=u_k/\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}$, a sequência $(\hat{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset H_0^1(\Omega)$ é limitada, e, como dito na Observação 1.35, existem $\hat{u}\in H_0^1(\Omega)$ e uma subsequência $(\hat{u}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}\subset(\hat{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\hat{u}_{k_j}\to\hat{u}$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, fortemente em $L^2(\Omega)$ e para quase todo $x\in\Omega$. Passando ao limite quando $j\to\infty$ na igualdade

$$\frac{1}{2}\left(1-\lambda_{l+1}\|\hat{u}_{k_j}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)=\frac{1}{\|u_{k_j}\|^2_{H_0^1(\Omega)}}\int_\Omega F(x,u_{k_j})-\frac{\lambda_{l+1}}{2}u_{k_j}^2dx+\frac{1}{\|u_{k_j}\|^2_{H_0^1(\Omega)}}J(u_{k_j})$$

e utilizando (2.14), chegamos à conclusão que

$$\frac{1}{\lambda_{l+1}}\leq\|\hat{u}\|^2_{L^2(\Omega)},$$

o que implica que $\hat{u}(x)\neq 0$ em um conjunto de medida positiva. Agora, fazendo $\Omega_0=\{x\in\Omega\mid\hat{u}(x)\neq 0\}$ e como $u_k(x)=\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}\hat{u}_k(x)$, segue que $|u_k(x)|\to\infty$

quando $k \to \infty$ para quase todo $x \in \Omega_0$ e a afirmação 2 está provada. $\square$

2.2 Teorema de Existência para Potências Superquadráticas

O próximo lema demonstra que a condição (3) implica na geometria do Teorema do Passo da Montanha 1.59 para o funcional J.

Lema 3. *A condição (3) implica que existem $\rho, \beta > 0$ tais que $J(u) \geq \beta$ se $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \rho$. Além disso, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $J(tu_0) \to -\infty$ quando $t \to \infty$.*

Demonstração. Pelo lado esquerdo da condição (3), para todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2, \qquad \forall\, |s| \leq R \text{ e q.t. } x \in \Omega. \tag{2.15}$$

Da condição de crescimento subcrítico, resulta que

$$F(x,s) \leq \frac{a_0}{p}|s|^{p-1}s + b_0 s, \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ e q.t. } x \in \Omega,$$

e se quisermos que

$$F(x,s) \leq A|s|^p + \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2, \qquad \forall\, |s| \geq R \text{ e q.t. } x \in \Omega, \tag{2.16}$$

com $A = A(\epsilon) \geq 0$, então é suficiente que

$$A \geq \frac{a_0}{p} + \frac{b_0 + \frac{1}{2}|\alpha+\epsilon|R}{R^{p-1}}.$$

Combinando (2.15) e (2.16):

$$F(x,s) \leq A|s|^p + \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)s^2 \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ e q.t. } x \in \Omega. \tag{2.17}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ de forma que $\alpha + \epsilon < \lambda_1$, utilizamos (2.17), a desigualdade de Poincaré $\lambda_1\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, e a desigualdade de Sobolev $\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq K\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)}$ para obter uma cota inferior de J quando u tem um dado raio:

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - A\|u\|^p_{L^p(\Omega)} - \frac{1}{2}(\alpha+\epsilon)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha+\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - AK\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Como dito na Observação 2.4, o lado esquerdo da condição (3) implica que $p \geq 2$, (assumimos que $p > 2$ para entrar no caso superquadrático). Para facilitar a álgebra, introduzimos os símbolos $a := 1/2(1 - (\alpha + \epsilon)/\lambda_1) > 0$ e $b := AK > 0$, onde $a > 0$ por nossa escolha de ϵ. Ficamos com

$$J(u) \geq a\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - b\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\left(a - b\|u\|^{p-2}_{H_0^1(\Omega)}\right),$$

logo, se $\rho := \left(\dfrac{a}{2b}\right)^{1/(p-2)}$, então

$$J(u) \geq \frac{1}{2}a\rho^2 := \beta > 0, \qquad \forall \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \rho.$$

Para provar a segunda afirmação do Lema 3, pelo lado direito da condição (3), para todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 \leq F(x,s), \qquad \forall \, |s| \geq R \text{ e q.t. } x \in \Omega.$$

Analogamente ao Lema 1, existe um $M > 0$ que verifica

$$-M \leq F(x,s), \qquad \forall \, |s| \leq R \text{ e q.t. } x \in \Omega.$$

Logo, escolhendo $B(\epsilon) = B > 0$ de forma que

$$B \geq \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)R^2 + M,$$

temos

$$\frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 - B \leq F(x,s), \qquad \forall \, |s| \leq R \text{ e q.t. } x \in \Omega,$$

e podemos concluir que

$$\frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 - B \leq F(x,s), \qquad \forall \, s \in \mathbb{R} \text{ e q.t. } x \in \Omega. \tag{2.19}$$

Daí, chegamos em

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\beta - \epsilon}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + B|\Omega|. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Agora, se u_0 é um autovetor associado ao autovalor λ_1 com $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$, o Teorema 1.45 implica que $1 = \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_1\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$, e escolhendo $\epsilon > 0$ de forma que

$\beta - \epsilon > \lambda_1$, então

$$J(tu_0) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta - \epsilon}{\lambda_1}\right) t^2 + B|\Omega| \to -\infty$$

quando $t \to \infty$. $\square$

Observação. 2.6. A função no lado direito de (2.18) tem 0 como mínimo local, como $J(0) = 0$, segue que 0 é um mínimo local do funcional J e (P) tem solução trivial, o que já sabíamos diretamente por (3).

Observação. 2.7. Como consequência da segunda afirmação do Lema 3, não podemos achar um mínimo global para o funcional J em $H_0^1(\Omega)$, e portanto o método direto do cálculo de variações não funcionaria para o problema (P).

Demonstração do Teorema 1. Utilizamos o Teorema 1.69 com $S = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \rho\}$ e $Q = \{tu_0 \in H_0^1(\Omega) \mid 0 \leq t \leq t_0\}$, onde t_0 é tal que $t_0 > \rho$ e $J(t_0 u_0) \leq 0$. Pelo Lema 1, J satisfaz $(\mathrm{C})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 1.65, segue que S e ∂Q conectam. Como $J(Q) \subset \mathbb{R}$ é compacto, temos que $\sup_{u \in Q} J(u) < +\infty$. Por último,

$$0 = \sup_{u \in \partial Q} J(u) \leq \frac{\beta}{2} < \beta = \frac{1}{2} a\rho^2 \leq \inf_{u \in S} J(u),$$

logo, o funcional J possui um valor crítico $c \geq \beta > 0$. O ponto crítico $u \in H_0^1(\Omega)$ associado a c é diferente de zero pois $J(0) = 0$, portanto o problema (P) tem uma solução fraca não trivial $u \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

2.3 Teorema de Existência para Problemas de Dupla Ressonância

O próximo lema descreve o comportamento assintótico de funções que satisfazem (6) associadas a problemas de dupla ressonância.

Lema 4. *Suponha que* (P) *é um problema de dupla ressonância. Então:*

(i) $F(x,s) - \frac{1}{2}K(x)s^2 \to -\infty$ *quando* $|s| \to \infty$ *se* F *satisfaz* $(6)_+$;

(ii) $F(x,s) - \frac{1}{2}L(x)s^2 \to +\infty$ *quando* $|s| \to \infty$ *se* F *satisfaz* $(6)_-$.

Demonstração. Definimos $g(x,s) = f(x,s) - K(x)s$ e $G(x,s) = F(x,s) - \frac{1}{2}K(x)s^2$ e começamos a demonstração pela parte (i). Por $(6)_+$, para todo $M > 0$ existe $s_M > 0$ tal que

$$g(x,s)s - 2G(x,s) \geq M \qquad \forall\, |s| \geq s_M \text{ e q.t. } x \in \Omega. \tag{2.21}$$

Empregando (2.21) e integrando a identidade

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{G(x,s)}{s^2}\right] = \frac{g(x,s)s - 2G(x,s)}{s^3} \tag{2.22}$$

sobre um intervalo $[t,T] \subseteq [s_M, \infty]$, chegamos na estimativa

$$\frac{G(x,T)}{T^2} - \frac{G(x,t)}{t^2} \geq -\frac{M}{2}\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{t^2}\right). \tag{2.23}$$

Visto que

$$\begin{aligned}
\limsup_{T\to\infty} \frac{G(x,T)}{T^2} &= \limsup_{T\to\infty}\left[\frac{F(x,T)}{T^2} - \limsup_{T\to\infty}\frac{F(x,T)}{T^2}\right] \\
&\leq \limsup_{T\to\infty}\frac{F(x,T)}{T^2} + \limsup_{T\to\infty}\left[-\limsup_{T\to\infty}\frac{F(x,T)}{T^2}\right] \\
&= \limsup_{T\to\infty}\frac{F(x,T)}{T^2} - \limsup_{T\to\infty}\frac{F(x,T)}{T^2} = 0,
\end{aligned}$$

obtemos, tomando o limite superior quando $T \to \infty$ em (2.23),

$$G(x,t) \leq -\frac{M}{2}, \qquad \forall\, t \geq s_m \text{ e q.t. } x \in \Omega.$$

Como M é arbitrário, isso mostra que $G(x,t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Por outro lado, integrando (2.22) sobre o intervalo $[T,t] \subseteq [-\infty, -s_M]$:

$$\frac{G(x,t)}{t^2} - \frac{G(x,T)}{T^2} = \int_T^t \frac{g(x,s)s - 2G(x,s)}{s^3}\,ds \leq \int_T^t \frac{M}{s^3}\,ds = -\frac{M}{2}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{T^2}\right),$$

e caímos novamente em (2.23). Daí, conseguimos que $G(x,t) \leq -M/2$ para todo $t < -s_M$ e quase todo $x \in \Omega$, o que prova que $G(x,t) \to -\infty$ quando $t \to -\infty$. A demostração da segunda parte do lema é análoga. $\square$

O lema acima será usado para provar que as hipóteses do Teorema 2 implicam na geometria do Teorema do Ponto de Sela 1.61 para o funcional J. Para isso, vamos fazer a seguinte decomposição do espaço $H_0^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) = V \oplus W,$$

onde V é o espaço gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ e $W = V^\perp$. Notamos que, pelo item (i) do Teorema 1.44, o espaço V tem dimensão finita. Vamos escrever $\lambda_k \lneq L(x)$ para denotar que $\lambda_k \leq L(x)$ com desigualdade estrita em conjunto de medida positiva, e analogamente para $K(x)$. Com esta notação, a Proposição 2 de [12] afirma o seguinte:

(i) Se $\lambda_k \not\leq L(x)$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \int_\Omega L(x) v^2\, dx \leq -\delta_1 \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} \qquad \forall\, v \in V;$$

(ii) Se $K(x) \not\leq \lambda_{k+1}$, então existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|w\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \int_\Omega K(x) w^2\, dx \geq \delta_2 \|w\|^2_{H^1_0(\Omega)} \qquad \forall\, w \in W.$$

Estamos prontos para provar o próximo lema.

Lema 5. *Se F satisfaz as hipóteses do Teorema 2, então $J(v) \to -\infty$ quando $\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \to \infty$, para todo $v \in V$, e $J(w) \to \infty$ quando $\|w\|_{H^1_0(\Omega)} \to \infty$, para todo $w \in W$.*

Demonstração. Vamos considerar primeiro o caso em que F satisfaz a condição de dupla ressonância e $(6)_+$ com $\lambda_k \not\leq L(x)$. Pela definição de $L(x)$, para todo $\epsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que

$$\left| \inf_{|s|\geq R} \left\{ \frac{2F(x,s)}{s^2} \right\} - L(x) \right| < \epsilon,$$

para todo $R \geq A$. Por um lado, isto implica que

$$L(x) - \epsilon < \inf_{|s|\geq R} \left\{ \frac{2F(x,s)}{s^2} \right\} \leq \frac{2F(x,s)}{s^2}, \qquad \forall\, |s| \geq R \text{ e q.t. } x \in \Omega.$$

Para $|s| \leq R$, pela condição de crescimento subcrítico, existe $B > 0$ tal que $|F(x,s)| \leq B$ quase sempre em $\Omega \times [-R, R]$. Logo, escolhendo um $M(\epsilon) = M > 0$ de forma que $M \geq (\lambda_{k+1} - \epsilon)R^2 + 2B$, podemos estender a desigualdade anterior se diminuirmos M do lado esquerdo:

$$(L(x) - \epsilon)s^2 - M \leq 2F(x,s), \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ e q.t. } x \in \Omega.$$

Utilizando a Proposição 2 de [12] e a desigualdade de Poincaré $\lambda_1 \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)}$, obtemos

$$\begin{aligned} 2J(v) &= \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} - 2\int_\Omega F(x,v)\, dx \\ &\leq \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \int_\Omega L(x) v^2\, dx + \epsilon \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + M|\Omega| \\ &\leq \left(-\delta_1 + \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} + M|\Omega|, \qquad \forall\, v \in V, \end{aligned}$$

e então escolhendo $\epsilon > 0$ de forma que $\epsilon < \lambda_1 \delta_1$, segue que $-\delta_1 + \epsilon/\lambda_1 < 0$, o que implica que $J(v) \to -\infty$ quando $\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \to \infty$, para todo $v \in V$. Para a segunda afirmação, como não estamos assumindo $K(x) \not\leq \lambda_{k+1}$, não podemos usar a segunda parte da Proposição 2 de [12]. Ao invés disso, utilizaremos o Lema 4. Vamos denotar por W_0 o autoespaço associado ao autovalor λ_{k+1}, e definir $W_1 = W_0^{\perp}$, de forma que $W = W_0 \oplus W_1$. Para cada $w = w_0 + w_1 \in W_0 \oplus W_1$, temos

$$J(w) = \frac{1}{2}\left(\|w\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \lambda_{k+1}\|w\|^2_{L^2(\Omega)}\right) - \int_\Omega \left[F(x,w) - \frac{\lambda_{k+1}}{2}w^2\right] dx, \tag{2.24}$$

onde, pelo Lema 4, o integrando $H(x,w) = F(x,w) - (\lambda_{k+1}/2)w^2$ satisfaz

$$\lim_{|s|\to\infty}\left[F(x,s) - \frac{\lambda_{k+1}}{2}s^2\right] = -\infty \qquad \text{uniformemente para q.t. } x \in \Omega.$$

Consequentemente, escolhendo algum $R > 0$, existe $M > 0$ tal que $H(x,s) \leq M$ para $|s| \geq R$ e quase todo $x \in \Omega$. De modo análogo ao que foi feito acima, pela condição de crescimento em f, podemos estender tal limitação de $H(x,s)$ para toda a reta e quase sempre em Ω. Fazendo uso do Teorema 1.47 junto com a limitação de $H(x,s)$ e o fato de w_0 e w_1 serem ortogonais em (2.24):

$$\begin{aligned} J(w_0+w_1) &= \frac{1}{2}\left(\|w_0+w_1\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \lambda_{k+1}\|w_0+w_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right) - \int_\Omega H(x,w_0+w_1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\|w_1\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \lambda_{k+1}\|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right) - \int_\Omega H(x,w_0+w_1)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+2}}\right)\|w_1\|^2_{H^1_0(\Omega)} - M|\Omega| \to \infty \end{aligned}$$

quando $\|w_1\|_{H^1_0(\Omega)} \to \infty$. Para completar a demonstração, usamos o fato de que $\|w\|_{H^1_0(\Omega)} \to \infty$ se, e somente se, $\|w_0\|_{H^1_0(\Omega)} \to \infty$ ou $\|w_1\|_{H^1_0(\Omega)} \to \infty$ (ou os dois). Então, basta provarmos a seguinte afirmação:

Afirmação 3. *Se $w_m = w_{0m} + w_{1m} \in W_0 \oplus W_1$ é uma sequência tal que $\|w_{0m}\|_{H^1_0(\Omega)} \to \infty$ e $\|w_{1m}\|_{H^1_0(\Omega)}$ é limitada, então $J(w_m) \to \infty$ quando $m \to \infty$.*

De fato, definindo $\hat{w}_{0m} := w_{0m}/\|w_m\|_{H^1_0(\Omega)}$, $\hat{w}_{1m} := w_{1m}/\|w_m\|_{H^1_0(\Omega)}$ e $\hat{w}_m := \hat{w}_{0m} + \hat{w}_{1m}$, e sendo $C > 0$ uma constante que limita $(w_{1m})_{m\in\mathbb{N}}$, segue, pela desigualdade triangular e a limitação de $(w_{1m})_{m\in\mathbb{N}}$, que

$$\frac{\|w_{0m}\|}{\|w_{0m}\| + C} \leq \|\hat{w}_{0m}\| \leq \frac{\|w_{0m}\|}{\|w_{0m}\| - C}, \qquad \|\hat{w}_{1m}\| \leq \frac{C}{\|w_m\|},$$

logo, $\|\hat{w}_{0m}\|_{H^1_0(\Omega)} \to 1$ e $\|\hat{w}_{1m}\|_{H^1_0(\Omega)} \to 0$. Pela Observação 1.35, existe $\hat{w} \in W$ e uma subsequência $(\hat{w}_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $\hat{w}_{m_j} \rightharpoonup \hat{w}$ em $H^1_0(\Omega)$, $\hat{w}_{m_j} \to \hat{w}$ em $L^2(\Omega)$ e $\hat{w}_{m_j}(x) \to \hat{w}(x)$ quase sempre em Ω. Como $\|\hat{w}_{1m}\|_{H^1_0(\Omega)} \to 0$, na verdade $\hat{w} \in W_0$ e $\|\hat{w}\| = 1$, ou seja, $\hat{w}$ é uma autofunção normalizada associada a λ_{k+1}. O item (iii) do Teorema 1.44 afirma que $\hat{w}$ é analítica no interior de Ω, e em particular, $\hat{w}(x) \neq 0$

quase sempre em Ω, de modo que

$$|w_m(x)| = \|w_m\|_{H_0^1(\Omega)} |\hat{w}_m(x)| \to \infty \text{ quando } n \to \infty \text{ para quase todo } x \in \Omega. \quad (2.25)$$

Combinando isso com o Lema 4, temos

$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{\lambda_{k+1}}{2} w_m^2 - F(x, w_m)\right] = \infty \qquad \text{uniformemente para q.t. } x \in \Omega.$$

Para um índice m grande o suficiente, $-H(\cdot, w_m)$ é não negativa, consequentemente, podemos usar o Lema de Fatou:

$$+\infty = \int_\Omega \lim_{m\to\infty} \left[\frac{\lambda_{k+1}}{2} w_m^2 - F(x, w_m)\right] dx \leq \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \frac{\lambda_{k+1}}{2} w_m^2 - F(x, w_m)\, dx.$$

Agora voltando para 2.24, podemos utilizar o mesmo argumento de antes, porém desta vez os papéis são trocados, $(w_{1m})_{m\in\mathbb{N}}$ é limitado enquanto que $-\int H(x, w_m)$ tende a infinito:

$$J(w_m) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+2}}\right) \|w_{1m}\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega H(x, w_m)\, dx \to \infty$$

quando $m \to \infty$. □

Demonstração do Teorema 2. Aplicamos o Teorema 1.69 com $S = W$ e $Q = V \cap B_R$, onde $B_R = \{v \in H_0^1(\Omega); \|v\| \leq R\}$. Primeiro, em vista dos Lemas 2 e 5, J satisfaz a condição $(\mathrm{C})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 1.66, segue que S e ∂Q conectam. O fato de $J(Q) \subset \mathbb{R}$ ser compacto nos dá imediatamente que $\sup_{v\in Q} J(v) < +\infty$. Por último, tomando R grande o suficiente,

$$\sup_{v\in\partial Q} J(v) \equiv \alpha < \beta \equiv \inf_{w\in W} J(w),$$

logo J possui um valor crítico $c \geq \beta$. □

Capítulo 3

Exemplos

Os exemplos a seguir servem para ilustrar o grau de liberdade da não linearidade f no Teorema 2. A ideia é que, mesmo que a potência F satisfaça a condição de dupla ressonância (o que implica que F é subquadrática), as condições do Teorema 2 ainda possibilitam liberdade na escolha de f.

Seja $\psi : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\psi(s) \geq 0, \qquad \int_1^\infty \psi(t)\, dt < \infty \tag{3.1}$$

e, dado $\epsilon \in (0, 2)$, definimos $H : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ de forma que

$$H(s) = d + \int_1^s \psi(t) + t^{\epsilon - 3}\, dt, \tag{3.2}$$

onde $d \in \mathbb{R}$ é escolhido para que $H(s) \to 1$ quando $s \to \infty$ e H deve ser estendida para toda a reta como uma função par de classe C^1. Além disso, se Ω_1 e Ω_2 são conjuntos mensuráveis tais que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, definimos

$$\rho(x) = \lambda_j \mathbf{1}_{\Omega_1}(x) + \lambda_{j+1} \mathbf{1}_{\Omega_2}(x)$$

e fazendo

$$F(x, s) = \frac{1}{2} \rho(x) s^2 H(s),$$

então $L(x) = K(x) = \rho(x)$, logo F satisfaz a condição de dupla ressonância (5). Por outro lado,

$$\lim_{|s| \to \infty} [f(x, s)s - 2F(x, s)] = \frac{\rho(x)}{2} \lim_{|s| \to \infty} s^3 H'(s), \tag{3.3}$$

como H é par, segue que H' é ímpar e $s^3 H'$ é par, então só precisamos tomar o limite quando $s > 0$:

$$s^3 H'(s) = s^3 \psi(s) + s^\epsilon \geq s^\epsilon \to \infty \text{ quando } s \to \infty.$$

Logo, F satisfaz $(6)_+$ para todo $d \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1. Dado $M > 0$, seja ψ como em (3.1) e tal que

$$0 \leq \psi(s) \leq \frac{2M}{s}, \qquad \psi(k) = \frac{2M}{k} \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots.$$

A função $f(x,s)/s$ é par em s, logo o comportamento desta função no infinito é o mesmo quando $s > 0$ e $s < 0$, tomamos $s > 0$. Temos

$$\frac{f(x,s)}{s} = \rho(x)\left[H(s) + \frac{sH'(s)}{2}\right],$$

e como $H(s) \to 1$, $s^{\epsilon-2} \to 0$ quando $s \to \infty$ e $0 \leq t\psi(t)/2 \leq M$, segue que

$$\rho(x) = \liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq \limsup_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = (1+M)\rho(x).$$

Isto significa que a razão $f(x,s)/s$ pode cruzar um número arbitrariamente grande de autovalores de $-\Delta$ no infinito.

Exemplo 3.2. Seja $\gamma \in [1, \infty)$. Escolhemos um inteiro $m > \gamma - 2$ e ψ de novo satisfazendo (3.1) e tal que $\psi(k) = k^m$ para todo $k = 1, 2, \ldots$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x,s)|}{|s|^\gamma} &= \frac{\rho(x)}{|s|^\gamma}\left|sH(s) + \frac{s^2}{2}H'(s)\right| \\
&\geq \rho(x)\left|\frac{|H'(s)|}{2|s|^{\gamma-2}} - \frac{|H(s)|}{|s|^{\gamma-1}}\right| \\
&\geq \rho(x)\left|\frac{1}{2}\left|\frac{\psi(s)}{|s|^{\gamma-2}} - \frac{1}{|s|^{\gamma+1-\epsilon}}\right| - \frac{|H(s)|}{|s|^{\gamma-1}}\right|,
\end{aligned}$$

como $\gamma + 1 - \epsilon \geq 0$ e $H(s) \to 1$ quando $|s| \to \infty$, segue que

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{|f(x,s)|}{|s|^\gamma} = \infty.$$

Em vista da condição de crescimento subcrítico em f, devemos tomar $\gamma < p - 1$.

Exemplo 3.3. Dado $\delta \in (0,1)$, queremos construir um exemplo em que F satisfaz a condição de ressonância (4), $(6)_+$ e

$$\begin{cases}
\limsup_{|s|\to\infty} \dfrac{|g(x,s)|}{|s|^\delta} \leq \text{constante}, \\[2ex]
\limsup_{|s|\to\infty} \dfrac{|G(x,s)|}{|s|^{2\delta}} \leq \text{constante}.
\end{cases} \tag{3.4}$$

onde $f(x,s) = \lambda_j s + g(x,s)$ e $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\,dt$. Seja ψ como em (3.1) e tal que

$$s^{2(1-\delta)} \int_s^\infty \psi(t)\,dt < \infty, \quad 0 \le \psi(s) \le \frac{2}{s^{2-\delta}}, \quad \psi(k) = \frac{2}{k^{2-\delta}} \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots.$$

Definimos $G(x,s) = \frac{1}{2}\rho(x) s^2 H(s)$, com H sendo como em (3.2), mas $d \in \mathbb{R}$ sendo escolhido de forma que $H(s) \to 0$ quando $s \to \infty$ (neste caso, é necessário que $d < 0$), e $\epsilon = 2\delta \in (0,2)$. Então,

$$f(x,s)s - 2F(x,s) = g(x,s)s - 2G(x,s) = \frac{\rho(x)}{2} s^3 H'(s),$$

e F satisfaz $(2.8)_+$. Além disso,

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} = \lambda_j + \rho(x) \lim_{|s|\to\infty} H(s) = \lambda_j.$$

Para provar as limitações em (3.4), sabemos que G é uma função par em s, logo tomamos $s > 0$. Como H é crescente em $s \in (1,\infty)$ e $H(s) \to 0$ quando $s \to \infty$, segue que $H(s) < 0$, então $G(x,s) < 0$ para $s > 1$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{|G(x,s)|}{|s|^{2\delta}} &= -\frac{1}{2}\rho(x) s^{2(1-\delta)} H(s) \\
&= -\frac{1}{2}\rho(x) s^{2(1-\delta)} \left[d + \int_1^s \psi(t) + t^{2\delta-3}\,dt \right] \\
&= -\frac{1}{2}\rho(x) s^{2(1-\delta)} \left[d + \int_1^s \psi(t)\,dt + \frac{s^{2(\delta-1)} - 1}{2(\delta-1)} \right] \\
&= -\frac{1}{2}\rho(x) s^{2(1-\delta)} \left[d + \int_1^s \psi(t)\,dt + \frac{1}{2(1-\delta)} \right] + \frac{\rho(x)}{4(1-\delta)} \\
&= -\frac{1}{2}\rho(x) s^{2(1-\delta)} \left[d + \int_1^s \psi(t)\,dt + \int_1^\infty t^{2\delta-3}\,dt \right] + \frac{\rho(x)}{4(1-\delta)} \\
&= \frac{1}{2}\rho(x) \left[s^{2(1-\delta)} \int_s^\infty \psi(t)\,dt + \frac{1}{2(1-\delta)} \right] < \infty,
\end{aligned}$$

a última igualdade é porque $d + \int_1^\infty \psi(t) + t^{2\delta-3}\,dt = 0$. A primeira limitação está provada. De forma análoga ao que foi feito anteriormente, $|g|$ é uma função par em s, e então só precisamos considerar o caso em que $s > 0$. Temos que

$$\frac{|g(x,s)|}{|s|^\delta} \le \rho(x) \left[s^{1-\delta}|H(s)| + \frac{1}{2} s^{2-\delta} H'(s) \right].$$

Queremos controlar o crescimento dos termos entre colchetes. Primeiro,

$$\frac{1}{2} s^{2-\delta} H'(s) = \frac{1}{2} s^{2-\delta}\psi(s) + \frac{1}{2} s^{\delta-1} \le 1 + \frac{1}{2} s^{\delta-1} \to 1$$

quando $s \to \infty$. Por outro lado, $|H(s)| = -H(s)$, e fazendo as mesmas manipulações de antes,

$$\begin{aligned} -s^{1-\delta}H(s) &= s^{\delta-1}\left[-s^{2(1-\delta)}H(s)\right] \\ &= s^{\delta-1}\left[s^{2(1-\delta)}\int_s^\infty \psi(t)\,dt + \frac{1}{2(1-\delta)}\right] \to 0 \end{aligned}$$

quando $s \to \infty$.

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti & P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. funct. Analysis **14**, 349-381 (1973).

[2] M. Badiale & E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach*. Universitext. Springer, London (2011).

[3] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Online Library, **27** (1995).

[4] P. Bartolo, V. Benci & D. Fortunato, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity.* Nonlinear Analysis **7**, 981-1012 (1983).

[5] V. Benci & P.H. Rabinowitz, *Critical point theorems for indefinite functionals*, Invent. Math., 52, 241–273 (1979).

[6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York (2011).

[7] T. Cazenave, *An introduction to semilinear elliptic equations*, Editora do IM-UFRJ, Rio de Janeiro (2006).

[8] G. Cerami, *Un criterio di esistenza per i punti critici su varieta ilimitate*, Rc. 1st. Lomb. Sci. Lett. **112**, 332-336 (1978).

[9] D. G. Costa & C. A. Magalhães, *Un probleme elliptique non-quadratique a l'infini*, C. r. Acud. Sci. Paris, **t.315**, Serie I, 1059-1062 (1992).

[10] D. G. Costa & C. A. Magalhães, *A variational approach to subquadratic perturbations of elliptic systems*, J. diff. Eqns **111**, 108-122 (1994).

[11] D. G. Costa & C. A. Magalhães, *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity*, Nonlinear Analysis, **23** 1401-1412 (1994).

[12] D. G. Costa & A. S. Oliveira, *Existence of solution for a class of semilinear elliptic problems at double resonance*, Bol. Sot. Bras. Mat. **19**, 21-37 (1988).

[13] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations.* Springer, Berlin (1989).

[14] L. C. Evans, *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society (2010).

[15] D. G. de Figueiredo & O. H. Miyagaki, *Semilinear elliptic equations with the primitive of the nonlinearity away from the spectrum*, Nonlinear Analysis **17**, 1201-1219 (1991).

[16] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, INC **2** (1999).

[17] I. M. Gelfand & S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs (1963).

[18] E. M. Landesman & A. C. Lazer, *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. math. Mech. **19**, 609-623 (1970).

[19] J. Mawhin. & M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems.* Springer Verlag (1989).

[20] P. H. Rabinowitz, *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*, in Nonlinear Analysis (Edited by CESARI, KANNAN and WEINBERGER), pp. 161-177. Academic Press, New York (1978).

[21] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Vol. 65. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1986).

[22] D. C. L. dos Santos, *Sobre o Teorema da Alfândega*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2014).

[23] M. Schechter, *Linking Methods in Critical Point Theory*, Birkhauser, Boston (1999).

[24] M. Struwe, *Variational Methods.* Springer (2008).

[25] A. E. Taylor, *L'Hopital's rule.* Amer. Math. Monthly, **59**, 20-24 (1952).