



INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro



UFRJ

Clique-Coloração de Grafos

Krissy Kischlat Dias

Rio de Janeiro, Brasil

2 de março de 2020

Clique-Coloração de Grafos

Krissy Kischlat Dias

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: César Javier Niche Mazzeo

Coorientador: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro, Brasil

2 de março de 2020

Krissy Kischlat Dias

Clique-Coloração de Grafos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado por

César Javier Niche Mazzeo
Orientador

Márcia Rosana Cerioli
Coorientador

Bernardo Freitas Paulo da Costa

Mitre Costa Dourado

Taisa Lopes Martins

Ademir Fernando Pazoto
(Suplente)

Rio de Janeiro, Brasil
2 de março de 2020

Dedico este trabalho a todos que me incentivaram e me apoiaram nesses anos de estudo.

Agradecimentos

Ao meu pai, por ter me incentivado desde pequena a gostar de matemática. Sem esse estímulo, eu provavelmente não teria escolhido esse caminho. À minha mãe, por entender que, muitas vezes, precisei abrir mão de momentos em família em prol dos estudos. À minha irmã, por, mesmo sem perceber, me ensinar tanto sobre determinação. Aos três, agradeço por apoiarem todas as minhas escolhas e por vibrarem comigo a cada etapa vencida. Eu não seria nada sem o apoio de vocês.

Ao meu noivo, por ter vivido toda essa experiência comigo, por sempre acreditar na minha capacidade e por não medir esforços para me ajudar. Agradeço também por ter aguentado todos os meus surtos de desespero com a maior paciência do mundo, sempre me fazendo acreditar que tudo daria certo. Sem a menor dúvida, você foi fundamental para essa minha conquista.

À minha família, por torcerem por mim e me apoiarem, mesmo sem entenderem muito bem o que é a pesquisa em matemática.

Aos meus amigos, por todo o apoio e palavras de incentivo nos momentos difíceis, e por entenderem a minha ausência, que foi comum nos últimos tempos.

Aos meninos que entraram comigo no mestrado em 2018, por sempre se mostrarem dispostos a me ajudar e pelas inúmeras conversas e brincadeiras, que ajudavam a aliviar a pressão do dia a dia.

À Atlético do Instituto de Matemática e ao Volleyshow, por me proporcionarem a oportunidade de jogar e treinar, o que muitas vezes foi minha válvula de escape durante os dois anos de mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual teria sido impossível realizar este trabalho.

Finalmente, à minha orientadora, professora Marcia Cerioli, por ter me passado seu amor pelos grafos e por ter doado seu tempo para me ajudar, ensinar e mostrar o mundo da pesquisa. Agradeço a paciência e por ter acreditado em mim, desde a graduação.

Resumo

Uma clique-coloração de um grafo consiste em uma atribuição de cores aos seus vértices de forma que nenhuma clique maximal seja monocromática, isto é, nem todos os vértices de uma mesma clique maximal recebem a mesma cor. Neste problema, somente grafos sem vértices isolados são considerados. Dizemos que um grafo é k -clique-colorível se admite uma clique-coloração com no máximo k cores e o número clique-cromático de um grafo G é o menor k tal que G é k -clique-colorível.

Neste trabalho, nos concentramos no estudo do número clique-cromático de grafos de interseção de caminhos e de grafos planares. Na classe dos grafos de interseção de caminhos, exibimos a prova de que grafos arco-circulares e grafos UEH são 3-clique-coloríveis, e de que grafos B_1 -EPG são 4-clique-coloríveis. Em particular, mostramos exatamente quais são os grafos arco-circulares 3-clique-cromáticos. Além disso, exibimos a prova de que grafos UE têm número clique-cromático ilimitado.

Já para a classe de grafos planares, mostramos que todo grafo desta classe admite uma 3-clique-coloração forte. A partir deste resultado, mostramos que os ciclos induzidos ímpares diferentes de triângulos são os únicos grafos planares sem $K_{1,3}$ que são 3-clique-cromáticos. Além disso, apresentamos um algoritmo que fornece uma clique-coloração ótima para grafos outerplanares. Por fim, exibimos o nosso resultado, caracterizando os grafos Halin que são 3-clique-cromáticos e apresentamos um algoritmo que fornece uma clique-coloração ótima para grafos desta classe.

Abstract

A clique-coloring of a graph is an assignment of colors to its vertices in such a way that no maximal clique is monocolored, it means, not all the vertices of the same maximal clique receive the same color. In this problem, only graphs without isolated vertices are considered. A graph is k -clique-colorable if there exists a clique-coloring of it using at most k colors and the clique-chromatic number of a graph G is the smallest integer k such that G is k -clique-colorable.

In this work, our focus was the study of the clique-chromatic number of intersection graphs of a family of paths and planar graphs. In the first class, we exhibit the proof that arc-circular graphs and UEH graphs are 3-clique-colorable, and that B_1 -EPG graphs are 4-clique-colorable. In particular, we show exactly which arc-circular graphs are 3-clique-chromatic. We also exhibit the proof that the clique-chromatic number of UE graphs is unbounded.

For planar graphs, we show that for any graph in this class there exists a strong 3-clique-coloring. From this result, we show that odd-cycles different from triangles are the only claw-free planar graphs that are 3-clique-chromatic. We also present an algorithm for the optimal clique-coloring of an outerplanar graph. Lastly, we exhibit our result, which characterizes the Halin graphs that are 3-clique-chromatic, and we present an algorithm for the optimal clique-coloring of a Halin graph.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Grafos M_1, M_2, M_3 e M_4 da família de Mycielski.	20
Figura 3.1 – Exemplo de uma clique-coloração forte do grafo K_4	21
Figura 3.2 – Exemplo de um subgrafo induzido com número clique-cromático maior do que o do grafo original.	23
Figura 3.3 – Grafo G	23
Figura 3.4 – Exemplo de um grafo cordal.	25
Figura 4.1 – Exemplo de um grafo de intervalo G e um modelo para ele.	34
Figura 4.2 – Exemplo de um grafo arco-circular e um modelo para ele.	35
Figura 4.3 – Modelo reduzido do modelo de arcos exibido na figura 4.2.	37
Figura 4.4 – Clique-coloração para modelo de arcos não-Helly (caso (i)).	39
Figura 4.5 – Clique-coloração para modelo de arcos não-Helly (caso (ii)).	40
Figura 4.6 – Exemplo de um grafo UE e dois modelos para ele.	43
Figura 4.7 – Exemplo de um grafo UEH e um modelo para ele.	44
Figura 4.8 – Grafo de Hajós e um modelo UE desse grafo.	44
Figura 4.9 – Árvore característica para o grafo G da figura 4.6	45
Figura 4.10–Exemplo de grafo UEH 3-clique-cromático.	48
Figura 4.11–Grafos G' e G'' correspondentes ao grafo G da figura 4.10.	49
Figura 4.12–Grafo G_6	49
Figura 4.13–Exemplo de um grafo B_1 -EPG e um modelo para ele.	50
Figura 4.14–Exemplo de um grafo B_1 -EPG 3-clique-cromático.	55
Figura 5.1 – Exemplo de um grafo planar G e uma representação plana M_1	57
Figura 5.2 – Exemplo de uma subdivisão do grafo K_5	58
Figura 5.3 – Exemplo de um grafo contendo um triângulo separador.	60
Figura 5.4 – Outra representação plana do grafo G da figura 5.1.	61
Figura 5.5 – Exemplo de uma triangulação.	62
Figura 5.6 – Uma 2-clique-coloração para o grafo da figura 5.3	66
Figura 5.7 – Exemplo de um grafo planar 3-clique-cromático.	66
Figura 5.8 – Grafos F_1 e F_2	68
Figura 5.9 – Grafos F_3 e F_4	69
Figura 5.10–Exemplo de um grafo planar sem $K_{1,3}$, com clique de tamanho 4 e grau máximo igual a 6	69
Figura 5.11–Grafo H	71
Figura 5.12–Exemplo de um grafo outerplanar.	72
Figura 5.13–Exemplo de um grafo Halin.	78
Figura 5.14–Exemplo de um grafo Halin e suas respectivas cadeias.	81
Figura 5.15–Cadeia aberta do grafo H em que C' está.	82

Figura 5.16–Cadeia aberta do grafo H	83
Figura 5.17–Exemplo de uma 3-clique-coloração para o grafo H da figura 5.13. . .	84
Figura 5.18–Exemplo de dois grafos Halin 2-clique-coloríveis.	84

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	PRELIMINARES	17
3	CLIQUE-COLORAÇÃO	21
4	GRAFOS DE INTERSEÇÃO DE CAMINHOS	33
4.1	Grafos de Intervalo	34
4.2	Grafos Arco-Circulares	35
4.3	Grafos UE	43
4.4	Grafos B_1 -EPG	48
5	GRAFOS PLANARES	57
5.1	Propriedades	59
5.2	Clique-coloração	63
5.3	Grafos Planares sem $K_{1,3}$	66
5.4	Grafos Outerplanares	72
5.5	Grafos Halin	78
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
	REFERÊNCIAS	89

1 Introdução

O problema da coloração própria de vértices consiste em atribuir cores aos seus vértices de forma que vértices adjacentes recebam cores distintas, minimizando o número de cores utilizadas. Diversos problemas podem ser modelados como um problema desse tipo, como, por exemplo, problemas de escalonamento. Nesse caso, os vértices do grafo representam as tarefas e as arestas entre os vértices representam conflitos entre as tarefas correspondentes. Em uma coloração própria desse grafo, cada cor representa um grupo de tarefas que podem ser executadas simultaneamente. Este é um dos problemas mais conhecidos e estudados na teoria dos grafos.

Muitos outros problemas relacionados à coloração de vértices já foram estudados, mas com objetivos ou restrições diferentes [24]. Este trabalho é dedicado ao estudo do *Problema da Clique-Coloração*, que consiste em atribuir cores aos vértices de um grafo de forma que todo conjunto maximal de vértices mutuamente adjacentes possua ao menos dois vértices com cores distintas. Nesse tipo de coloração, vértices adjacentes podem receber a mesma cor. Assim como no problema da coloração própria, o objetivo é determinar o número mínimo de cores necessárias para obtermos uma clique-coloração de um grafo, o que chamamos de número clique-cromático.

Os dois tipos de coloração citados possuem similaridades. Por exemplo, qualquer coloração própria de vértices de um grafo é também uma clique-coloração do mesmo grafo. Além disso, as duas colorações coincidem no caso de grafos sem triângulos. Entretanto, existem também diferenças essenciais entre a coloração própria de vértices e a clique-coloração, como o fato de uma clique-coloração de um grafo não ser necessariamente uma clique-coloração para os subgrafos induzidos. Outra diferença é que são necessárias n cores para colorir propriamente um grafo completo com n vértices, enquanto que, para obter uma clique-coloração do mesmo grafo, apenas duas cores são suficientes.

O problema da clique-coloração ganhou interesse após a conjectura feita por Duffus, Sands, Sauer e Woodrow [14], em 1991, de que existiria uma constante N tal que todo grafo perfeito admitiria uma clique-coloração com no máximo N cores. Em 2004, Bacsó, Gravier, Gyárfás, Preissmann e Sebő [2] provaram que *quase todos* os grafos perfeitos podem ser clique-coloridos com no máximo três cores. Assim, durante muitos anos, acreditou-se que a conjectura de Duffus et al. era verdadeira, onde a constante N seria igual a 3. Apenas em 2015 tal conjectura foi refutada, quando Charbit, Penev, Thomassé e Trotignon [9] construíram uma família de grafos perfeitos que têm número clique-cromático tão grande quanto se queira.

Tanto o problema da coloração própria quanto o problema da clique-coloração em grafos são problemas NP-difíceis e, portanto, ainda não se conhece algoritmos para a resolução de tais problemas em tempo polinomial. Entretanto, uma forma de estudá-los é restringindo-os a certas classes de grafos. Adotando essa estratégia, foi possível obter resultados para algumas classes.

Assim como os grafos perfeitos, a classe dos grafos sem triângulos [33] e a dos grafos linha [2] também possuem número clique-cromático ilimitado. Por outro lado, é possível determinar uma cota superior para o número clique-cromático de outras classes. Por exemplo, grafos perfeitos sem $K_{1,3}$, grafos sem $K_{1,3}$ e sem ciclos ímpares são 2-clique-coloríveis [2]. Também são 2-clique-coloríveis os grafos sem $K_{1,3}$ com grau máximo estritamente menor que 5 e diferentes de um ciclo ímpar de tamanho maior que 3 [3], assim como algumas subclasses de grafos sem ciclos ímpares [12, 13]. Classes de grafos com poucos P_4 's, como grafos split, cografos, P_4 -esparsos e complementos de ciclos maiores que 5, são 2-clique-coloríveis [25].

Estivemos interessados, neste trabalho, em grafos de interseção e grafos planares. Em particular, estudamos o comportamento do problema da clique-coloração quando restrito às seguintes subclasses: grafos cordais, de intervalo, arco-circulares, UE, outerplanares, B_1 -EPG, planares sem $K_{1,3}$ e Halin.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos.

O próximo capítulo contém definições utilizadas nos capítulos seguintes e necessárias para o entendimento do texto, onde são apresentados os conceitos gerais de grafos e de coloração de vértices.

O capítulo 3 é dedicado ao problema da clique-coloração, onde apresentaremos o problema e propriedades, além das semelhanças e diferenças para a coloração própria de vértices. Nese mesmo capítulo, também exibimos cotas superiores para grafos cordais e para grafos sem $K_{1,3}$ com grau máximo limitado.

No capítulo 4, apresentamos os grafos de interseção e mostramos os resultados já existentes para as classes dos grafos de intervalo, arco-circulares, UE e B_1 -EPG.

No capítulo 5, mostramos resultados para a classe dos grafos planares e duas subclasses: dos grafos planares sem $K_{1,3}$ e dos grafos Halin. Em particular, na última seção, provamos um teorema que caracteriza quais grafos Halin são 3-clique-cromáticos.

2 Preliminares

Neste capítulo, apresentamos as definições básicas que serão utilizadas ao longo desta dissertação. As definições seguem essencialmente [5] e [30].

Um *grafo simples* G é um conjunto finito e não-vazio V e um conjunto E de pares não ordenados de elementos distintos de V , denotado por $G(V, E)$. Um *multigrafo* G é um conjunto finito e não-vazio V e um multiconjunto E de pares não ordenados de elementos de V . Chamamos de *vértices* os elementos de V e de *arestas* os elementos de E . Nesse trabalho são considerados apenas grafos simples, a menos que seja dito o contrário.

Se $|V| = 1$, G é chamado de *trivial*. Quando conveniente, denotamos os conjuntos de vértices e arestas de G por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. Ao longo do texto, denotamos por n e m as cardinalidades dos conjuntos V e E , respectivamente. Também chamamos a cardinalidade de $V(G)$ de *ordem* de G .

Uma aresta $e = (u, v)$, também denotada por uv , é *incidente* aos vértices u e v , e esses são os *extremos* de e . Um vértice u é *adjacente* a um vértice v em G se u e v são extremos de uma aresta em G . Nesse caso, também dizemos que u e v são *vizinhos*. Duas arestas são *adjacentes* se têm um extremo em comum.

O conjunto dos vértices adjacentes a um vértice u é denotado por $N(u)$ e chamado de *vizinhança* de u . Chamamos de *vizinhança fechada* de u o conjunto $N(u) \cup u$, que denotamos por $N[u]$. Um vértice u é *isolado* quando $N(u) = \emptyset$ e *universal* quando $N[u] = V(G)$. O *grau* de u , denotado por $g(u)$, é o número de vizinhos de u , ou seja, $g(u) = |N(u)|$. Denotamos o maior e o menor grau dentre os vértices de G por $\Delta(G)$ e $\delta(G)$, respectivamente.

Dois grafos G e H são *isomorfos* se existe uma bijeção ϕ de $V(G)$ em $V(H)$ tal que uma aresta $uv \in E(G)$ se, e somente se, $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. A função ϕ é um *isomorfismo* de G em H .

Um grafo H é *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se $\emptyset \neq X \subseteq V(G)$, o *subgrafo induzido* de G por X , denotado por $G[X]$, é o subgrafo H tal que $V(H) = X$ e $E(H)$ é o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em X . De modo análogo, o subgrafo induzido por um conjunto de arestas Y é tal que $E(H) = Y$ e $V(H)$ é o conjunto de vértices de G que são extremos de alguma aresta em Y .

Dizemos que G é *sem o grafo* H quando nenhum subgrafo induzido de G é isomorfo a H . Caso contrário, dizemos que G *tem o grafo* H *como subgrafo induzido*.

Uma *subdivisão* de uma aresta $uv \in E(G)$ é uma operação em que um novo vértice de grau igual a 2 é adicionado a G , transformando uv em um caminho (u, w, v) . Qualquer

grafo obtido de G por uma sequência de subdivisões de arestas é chamado de *subdivisão de G* .

Uma *contração da aresta $uv \in E(G)$* é uma identificação dos vértices u e v , isto é, a substituição desses vértices por um novo vértice w , adjacente a todos os vizinhos de u e v . Um *H -menor* é um grafo G tal que H pode ser obtido de G a partir de nenhuma ou algumas contrações de arestas.

Um *passeio* $P = (v_1, \dots, v_k)$ em G é uma sequência de vértices de G tal que, para todo i , com $1 < i \leq k$, $v_{i-1}v_i$ é uma aresta de G . Se P não possuir vértices repetidos, então dizemos que P é um *comprimento*. Em ambos os casos, o *tamanho* de P é $k - 1$. A distância $d(u, v)$ entre dois vértices de G é o comprimento de um menor caminho entre u e v em G .

Dizemos que P *passa* por seus vértices e pelas arestas que têm ambos os extremos consecutivos em P . Dois caminhos P_1 e P_2 *compartilham* uma aresta e se ambos passam por e . Nesse caso, também dizemos que P_1 e P_2 têm *interseção em arestas*.

Um *ciclo* $C = (v_1, \dots, v_k)$ é um caminho em que $v_1 = v_k$. Um ciclo é *par* ou *ímpar* quando o seu comprimento $k - 1$ é par ou ímpar, respectivamente. Uma *corda* em um ciclo é uma aresta entre dois vértices não consecutivos em C . Um ciclo de comprimento k sem cordas é denotado por C_k .

Um grafo G é *conexo* quando existe um caminho entre qualquer par de vértices distintos de G . Um *componente conexo* de G é um subgrafo conexo maximal de G . Um grafo é *desconexo* se não é conexo. Nesse trabalho, consideramos apenas grafos conexos, a menos que seja dito o contrário.

Uma *ponte* é uma aresta e de G tal que $G - e$ tem mais componentes conexos do que G . Analogamente, um *vértice de corte* é um vértice v de G tal que $G - v$ tem mais componentes conexos do que G .

Um grafo é dito *2-conexo* quando é conexo e não possui vértices de corte. Um *bloco* de G é um subgrafo 2-conexo maximal de G e um *bloco folha* de G é um bloco que possui exatamente um vértice de corte de G . Se G possui um vértice de corte, então pelo menos dois dos blocos de G são bloco folhas.

Uma *árvore* é um grafo conexo que não possui ciclos. Toda árvore de ordem n tem $n - 1$ arestas. Um subgrafo conexo de uma árvore é uma *subárvore*. Damos o nome de *folha* aos vértices de grau um em uma árvore.

Um grafo é *completo* se quaisquer dois vértices distintos de G são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com n vértices e tal grafo é denotado por K_n .

Um grafo G é *bipartido* se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y , isto é, $X \cup Y = V(G)$ e $X \cap Y = \emptyset$, tais que cada aresta de G tem um extremo em X e o outro em

Y . Uma tal partição (X, Y) é chamada *bipartição* do grafo. Denotamos um grafo bipartido por $G_{p,q}$, onde $p = |X|$ e $q = |Y|$. Quando o grafo bipartido é completo, denotamos por $K_{p,q}$. Os grafos bipartidos são caracterizados no seguinte teorema clássico.

Teorema 2.1. *Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclos ímpares.*

O *complemento* de um grafo G , denotado por \overline{G} é o grafo cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e tal que dois vértices distintos são adjacentes em \overline{G} se, e somente se, não são adjacentes em G .

Um conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ é uma *clique* se $G[X]$ é um grafo completo e é um *conjunto independente* se $\overline{G[X]}$ é um grafo completo. Chamamos de *número de independência* de G , denotado por $\alpha(G)$, o tamanho do maior conjunto independente de G .

Uma clique X de um grafo é uma *clique máxima* se qualquer outra clique de G tem um número de vértices menor ou igual ao de X . Denotamos por $\omega(G)$ a quantidade de vértices da clique máxima de G . Um clique X é uma *clique maximal* se, para qualquer vértice $v \in V(G) \setminus X$, o conjunto $X \cup v$ não é uma clique. Uma clique maximal X de G é um *separador clique* se o grafo induzido $G[V \setminus X]$ é desconexo.

Uma *k-estrela* é uma árvore com $k + 1$ vértices, onde um deles é universal e todos os outros são folhas. Uma *k-roda* é um grafo formado por um ciclo induzido C_k e um vértice adjacente a todos os vértices do ciclo. Chamamos de *diamante* o grafo formado por um ciclo de tamanho 4 com exatamente uma corda.

O *grafo linha* de G , denotado por $L(G)$, é um grafo tal que cada vértice de $L(G)$ representa uma aresta de G e dois vértices distintos de $L(G)$ são adjacentes se, e somente se, as arestas correspondentes de G são adjacentes.

O *número de Ramsey* $r(k, l)$ é o menor inteiro r tal que, em qualquer coloração das arestas do grafo completo K_r com as cores vermelha e azul, existe uma clique de k vértices vermelha ou uma clique de l vértices azul. De uma maneira natural, podemos generalizar o número de Ramsey, da seguinte forma: definimos $r(k_1, \dots, k_p)$ como o menor inteiro r tal que toda coloração das arestas de K_r com p cores contém, para algum i , um subgrafo completo com k_i vértices cujas arestas têm todas a mesma cor.

Uma *coloração de vértices* é uma atribuição de cores aos vértices de um grafo de tal forma que vértices adjacentes possuam cores distintas. Uma *k-coloração* dos vértices de G é uma função $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ se u e v são adjacentes em G . Um grafo G para o qual existe uma k -coloração é dito *k-colorível*. O *número cromático* de G é menor valor k tal que G é k -colorível e é denotado por $\chi(G)$. Além disso, se c é uma coloração que utiliza exatamente $\chi(G)$ cores, dizemos que c é uma coloração *ótima*. Da definição, segue que, para qualquer grafo G , vale $\chi(G) \leq \omega(G)$. O problema da coloração

de vértices consiste em encontrar, dado um grafo G , uma coloração minimizando o número de cores utilizadas.

Apesar de algumas classes de grafos possuírem número cromático limitado, existem grafos com número cromático tão grande quanto se queira. Por exemplo, a família de Mycielski [33] é formada por grafos sem triângulos, onde cada grafo M_k da família possui número cromático igual a k . A construção dessa família é feita de forma indutiva. Consideramos $M_1 = K_1$ e $M_2 = K_2$. Sejam v_1, v_2, \dots, v_p os vértices de M_k . Construímos M_{k+1} adicionando a M_k os vértices u_1, \dots, u_p e u , onde, para cada $1 \leq i \leq p$, a vizinhança de u_i é formada pelos vizinhos de v_i e pelo vértice u .

Mostramos, na figura 2.1 os quatro primeiros grafos dessa família.

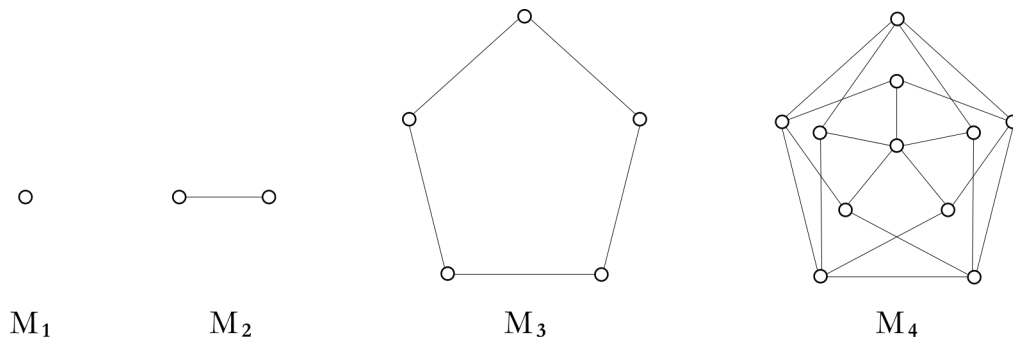


Figura 2.1 – Grafos M_1 , M_2 , M_3 e M_4 da família de Mycielski.

Um grafo G é *perfeito* se $\omega(H) = \chi(G)$, para todo subgrafo induzido H de G . E G é *cordal* se não possui ciclos induzidos de tamanho maior ou igual a 4.

3 Clique-Coloração

A *clique-coloração* é uma variante da coloração própria de vértices de um grafo. Neste problema, é necessário satisfazer condições mais fracas do que na coloração própria: em vez de exigir que os dois extremos de cada aresta tenham cores diferentes, é pedido que toda clique maximal com pelo menos dois vértices não seja monocromática. O problema da clique-coloração, que consiste em determinar o menor número para o qual o grafo dado admite uma clique-coloração com este número de cores, é considerado NP-difícil.

Dizemos que um grafo G é k -clique-colorível se admite uma k -clique-coloração $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Denotado por $\chi_c(G)$, o *número clique-cromático* é o menor valor k tal que G é k -clique-colorível. No caso em que $k = \chi_c(G)$, dizemos que G é k -clique-cromático e que c é uma clique-coloração *ótima*.

Além de exigir que nenhuma clique maximal com pelo menos dois vértices seja monocromática, podemos pedir também que todo triângulo do grafo receba ao menos duas cores distintas. Nesse caso, temos uma clique-coloração *forte* do grafo. Observamos que, se o grafo não tiver cliques de tamanho pelo menos 4, então toda clique-coloração desse grafo é forte. Na figura 3.1 exibimos duas clique-colorações do grafo K_4 . À esquerda, exibimos uma clique-coloração que não é forte, pois o triângulo formado pelos vértices u_2, u_3 e u_4 está monocromático. À direita, exibimos uma 2-clique-coloração forte do mesmo grafo.

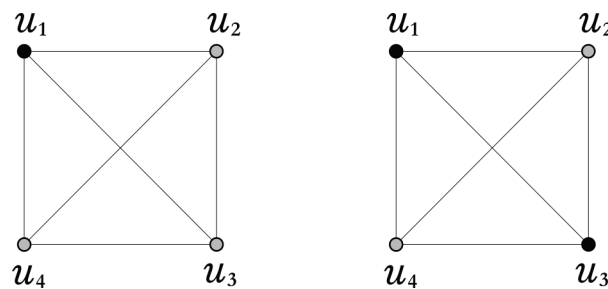


Figura 3.1 – Exemplo de uma clique-coloração forte do grafo K_4 .

A clique-coloração de um grafo G também pode ser encontrada na literatura como a coloração de seu hipergrafo-clique. O *hipergrafo-clique* $H(G)$ de um grafo G tem $V(G)$ como seu conjunto de vértices e o conjunto das cliques maximais de G como seu conjunto de hiperarestas. Uma k -coloração de $H(G)$ é uma atribuição de k cores aos seus vértices de forma que toda hiperaresta receba pelo menos duas cores. Da definição, é fácil ver que um grafo G é k -clique-colorível se, e somente se, o hipergrafo-clique $H(G)$ é k -colorível.

Em 1991, Duffus et al. [14] questionaram se haveria uma cota superior para o número cromático do hipergrafo-clique obtido de grafos perfeitos. A partir dessa conjectura, o

problema da clique-coloração ganhou interesse, pois muitos pesquisadores passaram a tentar obter uma resposta. Grafos de comparação [15], grafos perfeitos sem $K_{1,3}$ [2] e várias subclasses de grafos perfeitos possuem resposta positiva, tendo 2 ou 3 como limite para seus números clique-cromáticos. Em 2004, Bacsó et al. provaram que *quase todos* os grafos perfeitos eram 3-clique-coloríveis e conjecturaram que, de fato, todos os grafos perfeitos seriam 3-clique-coloríveis. Apenas em 2016, o problema da clique-coloração foi resolvido para grafos perfeitos, quando Mohar et al. [9] mostraram que essa classe tem número clique-cromático ilimitado. Para isso, construíram, para cada inteiro $k \geq 2$, um grafo perfeito G_k com número clique-cromático igual a $k + 1$.

Fazendo uma comparação entre clique-coloração e coloração própria de vértices, é possível observar algumas semelhanças. De fato, toda coloração própria é também uma clique-coloração, por definição. Assim, para qualquer grafo G , é verdade que $\chi_c(G) \leq \chi(G)$. Se considerarmos grafos sem triângulos, uma clique-coloração é também uma coloração própria de vértices, já que toda clique maximal é formada por apenas dois vértices. Com isso, se G é um grafo sem triângulos, temos que $\chi(G) = \chi_c(G)$. Como a família de Mycielski é formada por grafos sem triângulos, seus números cromático e clique-cromático coincidem. Assim, podemos concluir que existem grafos com qualquer número clique-cromático.

No entanto, em alguns aspectos, essas colorações são bem diferentes. Ao contrário do que acontece com o número cromático, o número clique-cromático de um subgrafo, mesmo que induzido, pode ser maior que o do grafo original. Assim, um grafo k -clique-colorível pode ter um subgrafo induzido com número clique-cromático maior do que k . O motivo pelo qual isso pode acontecer é que a retirada de vértices pode criar novas cliques maximais. O grafo G da figura 3.2 é uma 5-roda e pode ser clique-colorido com apenas duas cores. Entretanto, o subgrafo H , induzido pelos vértices $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, tem número clique-cromático igual a 3. Isso acontece porque a retirada do vértice u_6 faz com que as arestas do ciclo passem a ser cliques maximais.

Outra diferença relevante é que apenas duas cores são suficientes para clique-colorir qualquer clique. Assim, um grafo 2-clique-colorível pode ter uma clique arbitrariamente grande, o que nos impede de obter qualquer cota inferior para $\chi_c(G)$ baseada em $\omega(G)$. Na verdade, o problema de determinar se um grafo é 2-clique-colorível é NP-difícil [26]. Porém, quando restrito a grafos planares, uma 2-clique-coloração pode ser testada em tempo polinomial.

Apesar da dificuldade do problema, encontrar o número clique-cromático de certas classes de grafos não é difícil. Por exemplo, grafos completos, bipartidos, estrelas, rodas e ciclos de tamanho par têm número clique-cromático igual a 2. Apesar de ciclos ímpares terem número clique-cromático igual a 3, esse número pode ser reduzido se adicionarmos um triângulo de modo que uma das arestas do ciclo não seja uma clique

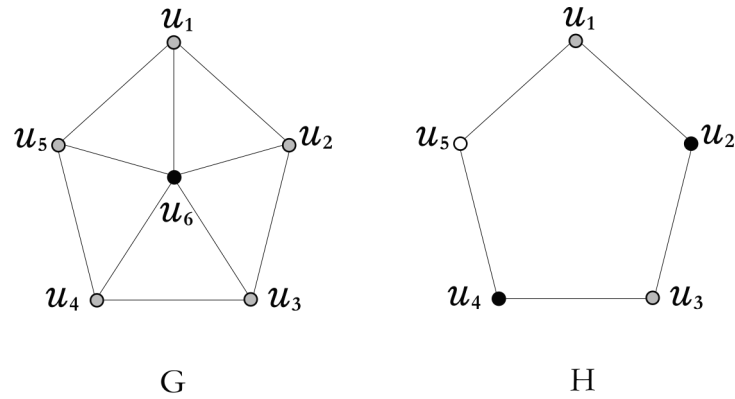


Figura 3.2 – Exemplo de um subgrafo induzido com número clique-cromático maior do que o do grafo original.

maximal, conforme mostramos na proposição a seguir.

Proposição 3.1. *Seja G um grafo formado por um ciclo ímpar C e um triângulo T , de forma que exatamente uma aresta de C está em T . Então, G é 2-clique-colorível. Além disso, a 2-clique-coloração de G é única, uma vez determinada a cor de um vértice de G .*

Prova. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o ciclo ímpar C tenha tamanho 5. Consideramos G como na figura 3.3.

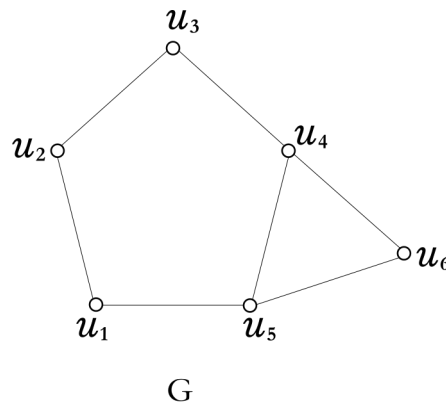


Figura 3.3 – Grafo G .

Começamos colorindo u_1 com uma cor, digamos cor 1. Como as arestas u_1u_2 , u_2u_3 , u_3u_4 e u_1u_5 são cliques maximais, os vértices u_2 , u_4 e u_5 devem receber a cor 2, enquanto u_3 deve receber cor 1. Por fim, para que o triângulo T , que é uma clique maximal, não seja monocromático, o vértice u_6 deve receber cor 1.

Assim, podemos ver que, uma vez atribuída a cor de um dos vértices do ciclo C , as cores de todos os outros vértices estão definidas para que a atribuição seja uma 2-clique-coloração. \square

Observamos que é suficiente considerar o problema da clique-coloração apenas em grafos 2-conexos. Pois, se um grafo G possui pelo menos uma articulação, podemos clique-colorir cada um de seus blocos separadamente e, assim, obter uma clique-coloração de G a menos de uma permutação de cores nas clique-colorações dos blocos. Em particular, temos que um grafo é 2-clique-colorível se, e somente se, cada um de seus blocos é 2-clique-colorível.

Sendo um problema NP-difícil, uma das formas de estudá-lo é analisando seu comportamento em classes de grafos específicas. Dessa forma, é possível usar propriedades estruturais da classe para resolver o problema. Assim, em algumas classes de grafos, o problema já está resolvido, por exemplo: grafos linha e grafos sem triângulos têm número clique-cromático ilimitado [2, 33]; grafos sem $K_{1,3}$ e sem ciclos ímpares são 2-clique-coloríveis [2]; algumas subclasses de grafos sem ciclos ímpares, grafos split, cografos e P_4 -esparsos são 2-clique-coloríveis [12, 13, 25].

Observamos que, mesmo que uma classe tenha número clique-cromático ilimitado, é possível que exista uma cota superior para o número clique-cromático de alguma de suas subclasses. Por exemplo, como sabemos, grafos perfeitos têm número clique-cromático ilimitado, mas grafos perfeitos sem $K_{1,3}$ são 2-clique-coloríveis.

Em classes cujo número clique-cromático é limitado, é natural nos questionarmos se essa cota superior é justa para todas as suas subclasses. Caso a resposta seja positiva, podemos procurar por teoremas que caracterizem os grafos de acordo com seu número clique-cromático. Um exemplo, que será exibido neste trabalho, é a classe dos grafos planares. O número clique-cromático de grafos desta classe é no máximo igual a 3 [31] e a cota é justa para subclasses como a dos grafos planares sem $K_{1,3}$, grafos Halin e grafos outerplanares. Entretanto, é conhecido um teorema que caracteriza os grafos planares sem $K_{1,3}$ que são 2-clique-coloríveis [35] e, em nosso estudo, obtivemos tal caracterização para grafos Halin.

É um fato bem conhecido que grafos cordais são 2-clique-coloríveis. Mais especificamente, podemos mostrar que todo grafo cordal admite uma 2-clique-coloração em que os vértices coloridos com uma das cores formam um conjunto independente. Para provar esse resultado, utilizaremos uma ordenação especial dos vértices do grafo cordal.

Dado um grafo G , dizemos que um vértice $v \in V$ é *simplicial* se o conjunto $N(v)$ é uma clique (não necessariamente maximal). Um *esquema de eliminação perfeita* de G é uma ordenação (v_1, \dots, v_n) de seus vértices onde cada v_i é vértice simplicial do subgrafo induzido $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$. Um esquema de eliminação perfeita para o grafo G da figura 3.4 é: $(u_2, u_3, u_4, u_1, u_5, u_6, u_7)$.

Uma das mais conhecidas caracterizações dos grafos cordais é a seguinte:

Teorema 3.2. ([19]) *Seja G um grafo. Então, G é cordal se, e somente se, possui um esquema de*

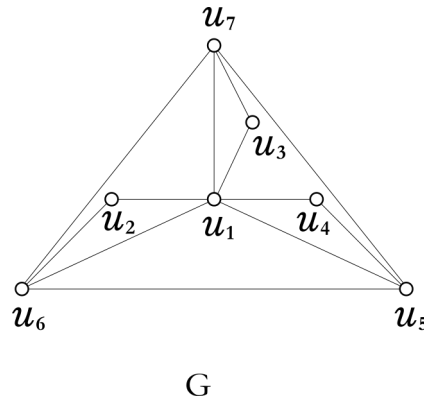


Figura 3.4 – Exemplo de um grafo cordal.

eliminação perfeita.

Como comentamos anteriormente, utilizamos o esquema de eliminação perfeita para mostrar que todo grafo cordal é 2-clique-colorível.

Teorema 3.3. *Todo grafo cordal é 2-clique-colorível.*

Prova. Faremos a prova por indução no número de vértices. Seja G um grafo cordal de ordem n . Como G é cordal, possui um esquema de eliminação perfeita (v_1, v_2, \dots, v_n) . Consideremos $G' = G - v_1$.

A classe dos cordais é hereditária, portanto, G' é ainda um grafo cordal, de ordem $n - 1$. Pela hipótese de indução, temos que G' é 2-clique-colorível. Consideramos, então, uma clique-coloração de G' , utilizando as cores 1 e 2.

Observamos que os vértices de $N[v_1]$ formam uma clique maximal em G . Analisamos os dois possíveis casos a respeito das cores dos vértices de $N(v_1)$:

- (i) Os vértices de $N(v_1)$ estão coloridos com as cores 1 e 2.

Nesse caso, podemos colorir o vértice v_1 com qualquer uma das duas cores, pois a clique formada pelos vértices de $N(v_1)$ já não é monocromática.

- (ii) Todos os vértices de $N(v_1)$ estão coloridos com a mesma cor, digamos cor 1.

Nesse caso, basta colorirmos v_1 com a cor 2. Dessa forma, a clique maximal formada pelos vértices de $N[v_1]$ não é monocromática.

Em ambos os casos, a clique maximal formada pelos vértices de $N[v_i]$ recebe as duas cores. Todas as outras cliques maximais de G são também cliques maximais de G' e, portanto, não são monocromáticas. Logo, a atribuição de cores feita é uma 2-clique-coloração para G . \square

Em particular, todo grafo cordal admite uma 2-clique-coloração em que os vértices coloridos com uma das cores formam um conjunto independente. De fato, se G é um grafo cordal e (v_1, \dots, v_n) é um esquema de eliminação perfeita de G , podemos colorir os vértices de v_n até v_1 com as cores 1 e 2 da seguinte forma: atribuímos cor 1 ao vértice v_n e atribuímos cor 2 a um vértice v_i se, e somente se, todos os seus vizinhos que já estão coloridos têm cor 1. Assim, obtemos uma 2-clique-coloração de G onde os vértices coloridos com a cor 2 formam um conjunto independente.

Apesar de os grafos sem $K_{1,3}$ com grau máximo limitado não serem sempre 2-clique-coloráveis, Bacsó e Tuza mostraram, em [3], uma condição suficiente para isso:

Teorema 3.4. *Seja G um grafo sem $K_{1,3}$ tal que $\Delta(G) \leq 4$. Se G é diferente de um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5, então G é 2-clique-colorável.*

Observamos que é comum encontrarmos resultados como o teorema 3.4, relacionando a existência de uma 2-clique-coloração de grafos de certas classes com a ausência de ciclos ímpares cujas arestas sejam cliques maximais. Isso porque tais ciclos garantem a necessidade da utilização de três cores em uma clique-coloração.

Para provar o teorema 3.4, vamos considerar que G não é um ciclo par, já que ciclos pares pode ser facilmente 2-clique-colorados. Primeiro analisamos o caso em que o grafo não tem diamante. Em seguida, analisamos o caso complementar, em que a ideia será identificar um diamante D em G e mostrar que 2-clique-coloração de $G - D$ pode ser estendida para uma 2-clique-coloração de G .

Assim, começamos considerando G um grafo conexo, sem $K_{1,3}$, sem diamante, com $\Delta(G) \leq 4$ e tal que G não é um ciclo de tamanho maior do que 3. Um grafo nessas condições será chamado de *grafo seguro*. Além disso, chamamos um vértice $u \in V(G)$ de *seguro* se u satisfaz as seguintes condições:

1. $G - u$ é conexo;
2. $G - u$ não é um ciclo de tamanho maior do que 3;
3. u tem grau igual a 1 ou está contido em um triângulo de G .

Para um vértice seguro u , definimos seu *vizinho crítico* v da seguinte forma:

- Se $g(u) = 1$, então v é o único vizinho de u .
- Se u está em algum triângulo T_u , seja K_u a única clique maximal de G contendo T_u . Se u tem vizinhos fora de K_u , então escolhemos v como um desses vizinhos. Caso contrário, escolhemos v como qualquer vizinho de u em K_u .

Observamos que a escolha de v não é sempre única. Além disso, cada aresta (e, então, cada triângulo) de G está contida em uma única clique maximal de G , pois, caso contrário, G teria diamante. Com isso, temos que a clique K_u está bem definida. Pelo mesmo motivo, u não pode estar em duas cliques maximais de tamanho 3 que compartilham um outro vértice. Também, u não pode estar na interseção de duas cliques maximais de tamanho 2, pois, nesse caso, esses três vértices junto com outro vértice de T_u induziriam um $K_{1,3}$. Por outro lado, pode acontecer de u estar em dois triângulos que são cliques maximais e não se intersectam em arestas. Nesse caso, $T_u = K_u$ pode ser escolhido como qualquer um dos dois triângulos.

A partir de agora, mostraremos duas propriedades de vértices seguros em grafos seguros. A primeira garante que a clique $K_u - u$ é maximal quando u é retirado do grafo. A segunda propriedade garante a existência de um vértice seguro em qualquer grafo seguro.

Lema 3.5. *Sejam G um grafo seguro e u um vértice seguro de G . Se u está em um triângulo T_u , então $K_u - u$ é uma clique maximal em $G_u - u$, onde K_u é a única clique maximal contendo T_u em G .*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $K_u - u$ não seja maximal. Então, existe vértice w que é adjacente a todos os vértices de $K_u - u$. Como K_u é maximal, u e w não são adjacentes. Mas então, $T_u \cup \{w\}$ formam um diamante, um absurdo. \square

Lema 3.6. *Todo grafo seguro não-trivial tem um vértice seguro.*

Prova. Seja G um grafo seguro. Suponhamos que G tenha um vértice u com grau igual a 1. Então, u satisfaz as condições 1 e 3 para ser um vértice seguro. Se a condição 2 não fosse satisfeita, existiria um $K_{1,3}$ em G , o que é um absurdo. Logo, as três condições são satisfeitas e, portanto, u é um vértice seguro.

Suponhamos, então, que G não tenha nenhum vértice de grau igual a 1. Assim, G não é uma árvore e, portanto, G contém um ciclo. Suponhamos que G tenha um ciclo induzido C de tamanho pelo menos 4. Como G é seguro, G é diferente de C e, então, existe um vértice x adjacente a algum vértice u de C . Como G é sem $K_{1,3}$ e C não tem cordas, x é adjacente a um vértice v vizinho de u em C . Então, $G - u$ é conexo, pois, caso contrário, u , seus vértices vizinhos em C e mais um vértice em outro componente conexo de $G - u$ formariam um $K_{1,3}$ centrado em u . Com isso, para que u seja um vértice seguro, basta verificar se a condição 2 é satisfeita.

Suponhamos que $G - u$ seja um ciclo. Seja w o vizinho de u em C , diferente de v . Nesse caso, $G - u$ é formado pelo caminho $P = C - u$ de v a w , pelo caminho Q de w a x e pela aresta xv . Como G é sem $K_{1,3}$, u deve ser adjacente ao vértice vizinho a w em Q .

Essa é a única situação em que u não satisfaz a condição 2 exigida para ser um vértice seguro. Por outro lado, nesse caso, v e w são vértices seguros em G .

Se G não possui ciclos de tamanho pelo menos 4, então G é um grafo cordal. É um fato conhecido que todo grafo cordal tem um vértice simplicial. Assim, esse vértice satisfaz todas as condições exigidas e, portanto, é um vértice seguro. \square

A partir da existência de um vértice seguro, podemos obter uma condição suficiente para que um grafo seguro seja 2-clique-colorível:

Lema 3.7. *Sejam G um grafo seguro, u um vértice seguro de G e v um vizinho crítico de u . Se c é uma 2-clique-coloração de $G - u$, então c pode ser estendida para uma 2-clique-coloração de G , fazendo $c(u) \neq c(v)$.*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que atribuindo $c(u) \neq c(v)$ não obtemos uma 2-clique-coloração de G . Então, existe clique maximal K em G com pelo menos dois vértices e contendo u tal que K é monocromática. Consideramos $Q = K - u$. Como todos os vértices de Q têm a mesma cor e c é uma clique-coloração em $G - u$, temos que Q não é uma clique maximal em $G - u$. Assim, pelo lema 3.5, temos que $|K| = 2$ e, portanto, $|Q| = 1$. Seja x o único vértice de Q . Observamos que $v \neq x$, pois $c(x) = c(u) \neq c(v)$.

Então, temos que u tem grau maior do que 1 em G , pois v e x são vizinhos distintos de u . Como u é um vértice seguro, u está em um triângulo T_u de G . Seja K_u a única clique maximal contendo T_u .

Como a aresta ux é uma clique maximal, não está contida em nenhum triângulo de G . Assim, temos que $xv \notin E(G)$ e que $x \notin K_u$. Além disso, pela escolha do vizinho crítico v , temos que v também não está em K_u . De novo pelo lema 3.5, temos que $K_u - u$ é clique maximal em $G - u$. Como v e x não estão em $K_u - u$, então existem vértices v' e x' (não necessariamente distintos) em $K_u - u$ tais que v' não é adjacente a v e x' não é adjacente a x . Temos que v é adjacente a x' , pois, caso contrário $\{u, v, x', x\}$ induziria um $K_{1,3}$ em G . Isso garante que v' e x' são vértices distintos. Mas, então, $\{u, v, x', v'\}$ induz um diamante em G , o que contradiz o fato de G ser um grafo seguro. \square

A partir desse ponto, vamos supor que G contém um diamante D . Nesse caso, algumas cliques maximais de G podem ter vértices tanto em D , quanto em $G - D$. Chamamos essas cliques de *cliques cruzadas*. Se uma clique cruzada K tem apenas um vértice em D , dizemos que K é *forte*. Caso contrário, dizemos que K é *fraca*.

Por uma questão de notação, consideramos que um diamante D de G tem $\{c_1, c_2, d_1, d_2\}$ como conjunto de vértices e que o único par de vértices não adjacentes é $\{c_1, c_2\}$. Como $\Delta(G) \leq 4$, os vértices d_i podem ser adjacentes a no máximo mais um vértice de $G - D$ e os vértices c_i podem ser adjacentes a no máximo mais dois vértices de $G - D$ ($i = 1, 2$).

Devido a essas restrições em relação aos graus dos vértices e à hipótese de que G é sem $K_{1,3}$, as seguintes cliques cruzadas podem existir:

- aresta forte: $c_i a_i$ (no máximo uma para cada $i \in \{1, 2\}$)
- triângulo forte: $c_i b'_i b''_i$ (no máximo um para cada $i \in \{1, 2\}$)
- triângulo fraco: $c_i d_j w_{i,j}$ (no máximo um para cada par (i, j))
- 4-clique fraca: $c_i d_1 d_2 z_i$ (no máximo uma para cada $i \in \{1, 2\}$)

A limitação do grau máximo de G implica que, se $w_{1,j}$ e $w_{2,j}$ existirem, então $w_{1,j} = w_{2,j}$. Pelo mesmo motivo, se z_1 e z_2 existirem, então $z_1 = z_2$. Além disso, triângulos da forma $d_1 d_2 x$ dariam origem a $K_{1,3}$ formados pelos vértices $\{d_i, c_1, c_2, x\}$ ($i = 1, 2$) e, por isso, não são considerados.

O lema a seguir mostra como podemos estender uma 2-clique-coloração de $G - D$ para uma 2-clique-coloração de todo o grafo.

Lema 3.8. *Sejam G um grafo sem $K_{1,3}$, com $\Delta(G) \leq 4$ e D um diamante de G . Se nenhum componente de $G - D$ é um ciclo ímpar, então toda 2-clique-coloração de $G - D$ pode ser estendida para uma 2-clique-coloração de G de forma que os dois vértices de grau igual a três em D recebam cores distintas.*

Prova. Consideramos c uma 2-clique-coloração de $G - D$ que utiliza as cores 1 e 2. Queremos estender c para uma 2-clique-coloração de G sem alterar as cores dos vértices de $G - D$.

Se mostrarmos que d_1 e d_2 recebem cores distintas, teremos que todas as cliques maximais com três vértices em D não são monocromáticas. Isso inclui os triângulos de D e também as 4-cliques fracas, se existir alguma. A partir disso, apenas precisaríamos mostrar que as outras cliques cruzadas (aresta forte, triângulo forte e triângulo fraco) também recebem duas cores.

Suponhamos que $c_1 a_1$ seja uma aresta forte. Então, c_1 não pode estar em um triângulo forte, pois c_1 teria mais do que 4 vizinhos; e nem em um triângulo fraco $c_1 d_1 w_{1,1}$, pois $\{c_1, d_2, a_1, w_{1,1}\}$ induziria um $K_{1,3}$ em G . Assim, podemos definir $c(c_1) = \{1, 2\} \setminus c(a_1)$, o que garante que a clique maximal $c_1 a_1$ não seja monocromática. Podemos aplicar o mesmo argumento para o caso de existir uma aresta forte $c_2 a_2$.

Suponhamos agora que exista um triângulo forte $c_1 b'_1 b''_1$. Nesse caso, uma ou ambas as arestas $b'_1 d_1$ e $b''_1 d_2$ podem existir, criando um ou dois triângulos fracos. Se $c(b'_1) = c(b''_1)$, podemos definir $c(c_1) = \{1, 2\} \setminus c(b'_1)$, fazendo com que todos esses triângulos recebam duas cores. Por outro lado, se $c(b'_1) \neq c(b''_1)$, podemos desconsiderar o triângulo forte, pois ele já recebe duas cores distintas, independente da cor de c_1 .

Assim, podemos assumir que c_1 e c_2 estão apenas em triângulos fracos. Sejam $c_1 d_i w_{1,i}$ e $c_2 d_j w_{2,j}$ dois desses triângulos. Podemos definir $c(c_1) = \{1, 2\} \setminus c(w_{1,i})$ e $c(c_2) = \{1, 2\} \setminus c(w_{2,j})$. Com essa coloração, no máximo um triângulo fraco contendo c_1 pode ser monocromático, e o mesmo vale para c_2 . Se apenas um desses triângulos existir, então definir $(c(d_1), c(d_2)) = (1, 2)$ ou $(c(d_1), c(d_2)) = (2, 1)$ faz com que ele não seja monocromático. Caso contrário, todos os quatro possíveis triângulos fracos existem e, como observamos anteriormente, temos que $w_{1,1} = w_{2,1}$ e $w_{1,2} = w_{2,2}$. Além disso, temos que $w_{2,1} \neq w_{1,2}$, pois caso contrário, teríamos duas 4-cliques fracas, em vez de quatro triângulos fracos.

Se $c(w_{1,2}) \neq c(w_{2,1})$, podemos atribuir as cores de d_1 e d_2 como: $c(d_1) = c(w_{1,2})$ e $c(d_2) = c(w_{2,1})$. Por outro lado, se $c(w_{1,2}) = c(w_{2,1})$, então todos os triângulos fracos têm c_1 ou c_2 como um vértice de cor diferente. Assim, podemos definir $(c(d_1), c(d_2)) = (1, 2)$, obtendo uma 2-clique-coloração. \square

A partir dos resultados obtidos nos lemas anteriores, podemos provar o teorema 3.4:

Prova do teorema 3.4. Faremos a prova por indução no número de vértices de G . Se G é o grafo trivial, então claramente é 2-clique-colorável. Suponhamos, então, que G seja um grafo de ordem $n > 1$, sem $K_{1,3}$, com $\Delta(G) \leq 4$ e diferente de um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5.

Se G é um ciclo par, então, G é 2-clique-colorável. Consideramos, então, o caso complementar.

Se G é sem diamante, então G é um grafo seguro. Pelo lema 3.6, existe um vértice u de G que é seguro. Consideramos $G' = G - u$. O fato de u ser um vértice seguro garante que G' é conexo e não é um ciclo. Além disso, G' é sem $K_{1,3}$, de ordem $n - 1$ e $\Delta(G') \leq \Delta(G) \leq 4$. Então, pela hipótese de indução, G' é 2-clique-colorável. Consideramos c uma 2-clique-coloração de G' . Pelo lema 3.7, c pode ser estendida para uma 2-clique-coloração de G e, portanto, G é 2-clique-colorável.

Suponhamos, então, que G tenha um diamante D e consideramos $G' = G - D$. Se nenhum componente conexo de G' é um ciclo ímpar, então, pela hipótese de indução, cada um dos componentes de G' é 2-clique-colorável e, portanto, G' é 2-clique-colorável. Se c é uma 2-clique-coloração de G' , então, pelo lema 3.8, c pode ser estendida para uma 2-clique-coloração de G .

Se existe componente conexo H de G' que é um ciclo ímpar, então a aresta e que liga H a D está contida em um triângulo com dois vértices em H , pois, caso contrário, existiria um $K_{1,3}$ em G . Assim, esse triângulo é um triângulo forte contendo c_1 ou c_2 . Então, a situação é a mesma de se tivéssemos considerado um triângulo forte com dois vértices em um componente conexo diferente de um ciclo ímpar. Portanto, a demonstração do

lema 3.8 garante que todas as cliques cruzadas recebem duas cores, fazendo com que G seja 2-clique-colorível. \square

4 Grafos de Interseção de Caminhos

Neste capítulo, apresentaremos os grafos de interseção, que são bastantes interessantes não só no ponto de vista teórico, mas também no ponto de vista aplicado, tendo frequentemente, aplicações reais em áreas como biologia, computação e estatística.

Dizemos que um grafo é um *grafo de interseção* se é possível associar ao seu conjunto de vértices uma família de conjuntos tal que existe uma relação um a um entre os vértices e os elementos dessa família, de forma que dois vértices são adjacentes se, e somente se, os conjuntos correspondentes têm interseção não-vazia. A esta família, damos o nome de *modelo*.

Dado um modelo \mathcal{M} , denotamos por $\Omega(\mathcal{M})$ o grafo de interseção de \mathcal{M} , ou seja, ao grafo $G = (V, E)$ com exatamente um vértice em V para cada conjunto de \mathcal{M} e tal que $uv \in E$ se, e somente se, os conjuntos correspondentes a u e v em \mathcal{M} possuem interseção não-vazia.

Dependendo da natureza e da geometria dos conjuntos da família \mathcal{F} , diferentes grafos de interseção são gerados. Por exemplo, se tomarmos uma família de intervalos na reta real, damos origem à classe dos grafos de intervalo; enquanto, se considerarmos uma família de arcos de uma circunferência, geramos os grafos arco-circulares. Podemos também considerar uma família de subárvores de uma árvore, dando origem aos grafos cordais.

Além disso, é verdade que todo grafo é um grafo de interseção. De fato, se G é um grafo, podemos associar a cada $u_i \in V(G)$ um conjunto F_i composto pelas arestas incidentes a u_i . Dessa forma, dois vértices u_i e u_j de G são adjacentes em G , se e somente se, F_i e F_j têm interseção não-vazia.

Dizemos que uma família \mathcal{F} possui a *propriedade Helly* quando toda subfamília cujos elementos se interceptam dois a dois possui um elemento em comum a todos os seus membros. Por exemplo, a família $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, onde $F_1 = \{a, b, c\}$, $F_2 = \{a, b\}$, $F_3 = \{a, c, d\}$, $F_4 = \{d\}$ possui a propriedade Helly.

Dizemos que um grafo de interseção é Helly quando admite um modelo cuja família possui a propriedade Helly.

Como veremos nas próximas seções desse capítulo, considerar essa propriedade é bastante útil para o estudo da clique-coloração em classes de grafos de interseção. Por exemplo, os grafos UE têm número clique-cromático ilimitado, mas os grafos UE Helly são 3-clique-coloríveis.

4.1 Grafos de Intervalo

Grafos de intervalo são os grafos de interseção de intervalos na reta real. Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é um grafo de intervalo quando existe um modelo $\mathcal{M} = (R, \mathcal{I})$ tal que $G = \Omega(\mathcal{M})$, onde R é a reta real e \mathcal{I} uma família de intervalos. Ao modelo \mathcal{M} damos o nome de *modelo de intervalo*. Na figura 4.1, exibimos um grafo G e um modelo de intervalo para G .

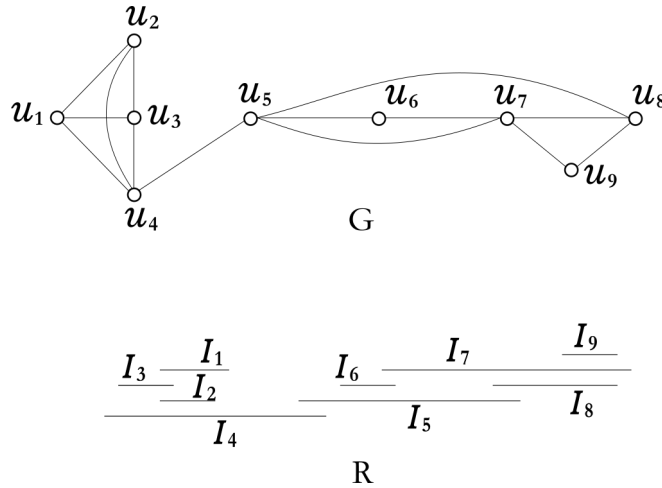


Figura 4.1 – Exemplo de um grafo de intervalo G e um modelo para ele.

O conceito de grafos de intervalo foi introduzido por Hajös [22] em 1957, porém sem usar de fato essa nomenclatura. No mesmo trabalho, questionou quando um grafo dado seria isomorfo a um grafo de intervalo. Independentemente, grafos de intervalo apareceram também em 1959, quando Benzer [4], um famoso biólogo molecular da época, questionou se as estruturas dentro dos genes poderiam ser tratadas como arranjos lineares.

Desde então, grafos de intervalo são objeto de diversos estudos. Atualmente, algumas caracterizações são conhecidas para grafos desta classe [16, 18, 27], além de propriedades estruturais interessantes, que permitem que vários problemas de otimização possam ser resolvidos eficientemente. Uma dessas propriedades é que todo modelo de intervalo possui a propriedade Helly, ao contrário do que acontece em geral.

Os grafos desta classe também aparecem como opção para modelar diversas situações reais, especialmente envolvendo o tempo, e possuem aplicações em áreas como biologia, computação e psicologia [30, 34].

Também é importante observar que todo grafo de intervalo é cordal. Seja $G = (R, \mathcal{I})$ um grafo de intervalo. Suponhamos, por absurdo, que G tenha um ciclo induzido (v_1, \dots, v_k) , com $k \geq 4$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, seja $[a_i, b_i] \in \mathcal{I}$ o intervalo correspondente ao vértice v_i , onde a_i, b_i são números reais.

Como v_1 e v_3 não são adjacentes, então $[a_1, b_1] \cap [a_3, b_3] = \emptyset$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $b_1 < a_3$. Além disso, v_2 é adjacente a esses dois vértices, logo $a_2 < b_1 < a_3 < b_2$. Da mesma forma, v_4 é adjacente a v_3 , mas não é adjacente a v_2 , então $b_2 < a_4 < b_3$. Em particular, $b_1 < a_4$. Seguindo essa construção, temos que $b_1 < a_4 < a_j < b_j$, para todo $j \in \{5, \dots, k\}$. Portanto, o intervalo $[a_1, b_1]$ não intersecta $[a_k, b_k]$, o que contradiz o fato de v_1 e v_k serem adjacentes.

Com isso, temos, pelo teorema 3.3, que todo grafo de intervalo é 2-clique-colorível.

4.2 Grafos Arco-Circulares

Com o estudo dos grafos de intervalo, surge uma generalização natural para os mesmos. Se considerarmos arcos em uma circunferência ao invés de intervalos da reta real, temos o que chamamos de grafos *arco-circulares*.

Dizemos, então, que um grafo G é arco-circular se existe um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ tal que $G = \Omega(\mathcal{M})$, onde C é a circunferência e \mathcal{A} é uma família de arcos em C . Um exemplo de grafo arco-circular pode ser encontrado na figura 4.2, juntamente com um modelo de arcos.

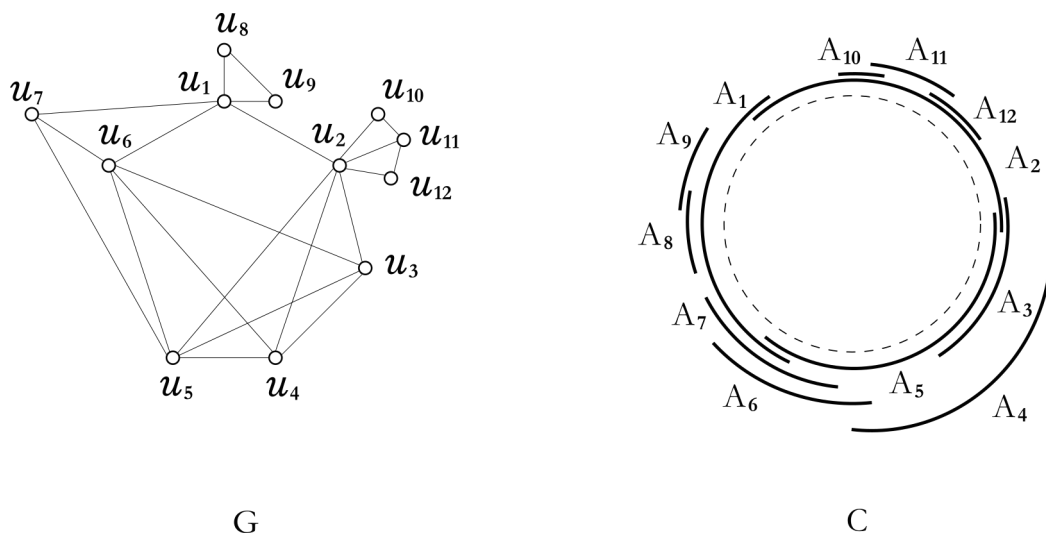


Figura 4.2 – Exemplo de um grafo arco-circular e um modelo para ele.

Sendo uma generalização dos grafos de intervalo, a classe dos grafos arco-circulares é bastante relevante e é conhecida há décadas. Desde então, propriedades estruturais e problemas algorítmicos vêm sendo investigados, tendo [17] e [39] como dois dos primeiros trabalhos nesse sentido. Em particular, dois problemas que receberam atenção considerável foram: encontrar caracterizações e construir modelos de arcos para um grafo arco-circular dado. Apesar disso, achar caracterizações envolvendo subgrafos que impeçam o grafo original de ser arco-circular ainda é um problema em aberto.

Com relação ao problema da clique-coloração, Cerioli e Korenchender [7] mostraram que todo grafo arco-circular é 3-clique-colorável. Mais especificamente, provaram um teorema que caracteriza os grafos dessa classe que são 3-clique-cromáticos. A estratégia utilizada para obter esses resultados consiste em mostrar, inicialmente, que todo grafo arco-circular é 3-clique-colorável e, em seguida, analisar separadamente os casos em que o modelo de arcos possui ou não a propriedade Helly.

Começamos apresentando as definições necessárias e, em seguida, apresentamos os resultados obtidos para a clique-coloração.

Dado $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos, cada arco $A_i \in \mathcal{A}$ é escrito como $A_i = (s_i, t_i)$, onde $s_i, t_i \in C$ são os *extremos* de A_i , com s_i sendo o *extremo inicial* e t_i o *extremo final*, no sentido horário. Os *extremos de \mathcal{M}* são os extremos de todos os arcos $A_i \in \mathcal{A}$. Dizemos que um arco $A_i = (s_i, t_i)$ *cobre* um ponto $p \in C$ se $p \in (s_i, t_i)$ e que C é *coberto* por \mathcal{A} se, para todo $p \in C$, algum arco $A_j \in \mathcal{A}$ cobre p . Supomos, sem perda de generalidade, que os extremos de \mathcal{M} são todos distintos, que um arco $A_i = (s_i, t_i)$ não cobre os seus extremos s_i e t_i , e que nenhum arco sozinho cobre C .

Observamos que, se existir um ponto $p \in C$ que não é coberto por nenhum arco, então o modelo de arcos \mathcal{M} pode ser visto como um modelo de intervalo.

Uma *ordenação circular* dos extremos de \mathcal{M} é uma ordenação $S = (p_1, p_2, \dots, p_{2n})$ para os extremos de \mathcal{M} tal que, para todo par de extremos consecutivos p_i, p_{i+1} em S (os extremos p_{2n} e p_1 também são considerados consecutivos em S), o segmento (p_i, p_{i+1}) não contém nenhum extremo de \mathcal{M} . Uma possível ordenação circular para o modelo de arcos da figura 4.2 é: $(s_1, t_5, t_6, t_7, s_8, s_9, t_8, t_9, s_2, t_1, s_{10}, s_{11}, t_{10}, s_{12}, t_{11}, t_{12}, s_3, s_5, s_4, t_2, t_3, s_6, t_4, s_7)$.

A respeito da propriedade Helly, observamos que nem todo modelo de arcos a possui. Por exemplo, o modelo exibido na figura 4.2 não possui essa propriedade, já que os arcos A_1, A_2 e A_5 se intersectam dois a dois, mas não possuem um ponto em comum. Em um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$, possuir a propriedade Helly significa que, para toda clique do grafo, é possível associar um ponto $p \in C$ tal que os vértices correspondentes aos arcos que cobrem p são exatamente os vértices que formam a clique.

Se $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ é um modelo de arcos de um grafo G e $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, dizemos que os arcos de \mathcal{A}' são *removíveis* se existe um arco $A_i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ que satisfaça simultaneamente às seguintes propriedades:

- (i) Todo arco $A' \in \mathcal{A}'$ está contido em A_i ;
- (ii) O grafo de interseção do modelo de arcos $\mathcal{M}' = (C, \mathcal{A}')$ é conexo;
- (iii) Para todo $A' \in \mathcal{A}'$ e $A \in \mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}' \cup \{A_i\})$, temos que $A' \cap A = \emptyset$.

Equivalentemente, dizemos que os arcos de \mathcal{A}' são removíveis se, e somente se, o vértice v_i correspondente ao arco A_i é uma articulação do grafo G ; os vértices correspondentes aos arcos de $\mathcal{A}' \cup \{A_i\}$ induzem um componente biconexo em G e o arco A_i contém todo arco $A' \in \mathcal{A}'$.

Um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ que não possui arcos removíveis é chamado de *modelo reduzido* e $G = \Omega(\mathcal{M})$ de *grafo reduzido*. Dado um modelo de arcos que tenha arcos removíveis, é possível associar a ele um modelo reduzido, como mostramos na figura 4.3. Nela, exibimos um modelo reduzido do modelo exibido na 4.2 e seu grafo reduzido.

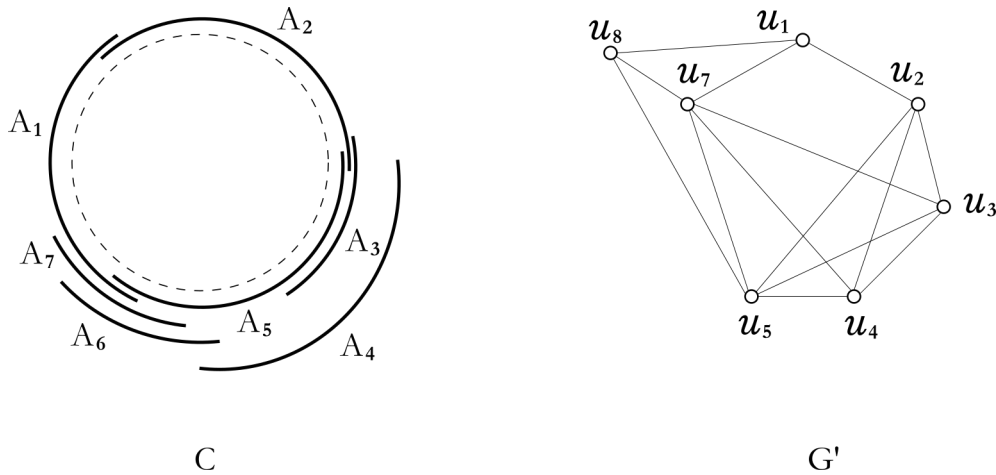


Figura 4.3 – Modelo reduzido do modelo de arcos exibido na figura 4.2.

Um questionamento natural que surge a partir dessa definição é entender qual a relação entre o número clique-cromático de um grafo arco-circular e o número clique-cromático do seu grafo reduzido. Em 2010, Cerioli e Korenchandler [7] mostraram que esses números são iguais.

Teorema 4.1. *Sejam $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ um conjunto de arcos removíveis e A_i o arco que contém propriamente os arcos de \mathcal{A}' . Se $G = \Omega(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}' = (C, \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}')$ e $G' = \Omega(\mathcal{M}')$, então $\chi_c(G) = \chi_c(G')$.*

Prova. Como toda clique maximal de G' é também clique maximal de G , temos que $\chi_c(G') \leq \chi_c(G)$. Seja c' uma clique-coloração de G' com $\chi_c(G')$ cores. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $c'(v_i) = 1$, onde v_i é o vértice correspondente ao arco A_i . Definimos c uma atribuição de cores aos vértices de G da seguinte forma: se v é vértice de G' , então $c(v) = c'(v)$; caso contrário, $c(v) = 2$. Seja K uma clique maximal de G . Se K contém algum dos vértices correspondentes aos arcos de \mathcal{A}' , então K também contém v_i e, assim, não é monocromática. Caso contrário, K também é clique maximal de G' e, portanto, não é monocromática. Assim, c é uma clique-coloração para G e então, $\chi_c(G) \leq \chi_c(G')$. Logo, temos que $\chi_c(G) = \chi_c(G')$. \square

Aplicando o teorema anterior a cada conjunto de arcos removíveis de um modelo \mathcal{M} , temos o seguinte resultado:

Corolário 4.2. *Se \mathcal{M} é um modelo de arcos, \mathcal{M}' o seu modelo reduzido, $G = \Omega(\mathcal{M})$ e $G' = \Omega(\mathcal{M}')$, então $\chi_c(G) = \chi_c(G')$.*

Além de mostrar que o número clique-cromático de um grafo arco-circular não muda quanto retiramos os arcos removíveis de seu modelo, os mesmos autores também mostraram que esse número é limitado.

Teorema 4.3. *Sejam $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos e $G = \Omega(\mathcal{M})$. Então G é 3-clique-colorível.*

Prova. Seja $S = (p_1, p_2, \dots, p_{2n})$ uma ordenação circular dos extremos de \mathcal{M} . Seja $p \in C$ um ponto que está estritamente entre dois extremos consecutivos p_k e p_{k+1} em S tal que, para todo par de arcos $A_i, A_j \in \mathcal{A}$, temos que $p_k \neq s_i$ e $p_{k+1} \neq t_j$. Seja \mathcal{A}_p o conjunto dos arcos de \mathcal{A} que cobrem p . Se $\mathcal{A}_p = \emptyset$, então G é um grafo de intervalo e, portanto, é 3-clique-colorível.

Suponhamos, então, que \mathcal{A}_p não seja vazio. Consideramos o modelo de arcos $\mathcal{M}' = (C, \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_p)$. Como \mathcal{M}' não cobre o ponto p , \mathcal{M}' é um modelo de intervalo e, portanto, $G' = \Omega(\mathcal{M}')$ é 2-clique-colorível. Consideramos c' uma 2-clique-coloração de G' que utiliza as cores 1 e 2. Seja c uma atribuição de cores aos vértices de G definida da seguinte forma: se v é vértice de G' , então $c(v) = c'(v)$; caso contrário, $c(v) = 3$. Os vértices correspondentes aos arcos de \mathcal{A}_p não formam uma clique maximal em G , pois esses arcos contêm os extremos p_k e p_{k+1} . Assim, toda clique maximal de G que contém algum desses vértices, também contém um vértice de G' e, então, não é monocromática. Qualquer outra clique maximal de G é também clique maximal de G' e, portanto, não é monocromática. Logo, c é uma 3-clique-coloração de G . \square

A partir dessa limitação, podemos analisar quais grafos dessa classe admitem ou não clique-colorações com apenas duas cores. Mostramos a seguir que uma condição suficiente para que um grafo arco-circular seja 2-clique-colorível é que ele não possua a propriedade Helly. Além disso, a prova do teorema fornece uma maneira de encontrar uma clique-coloração ótima nesse caso.

Teorema 4.4. *Sejam $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos que não possui a propriedade Helly e $G = \Omega(\mathcal{M})$. Então, G é 2-clique-colorível.*

Prova. Como \mathcal{M} não é Helly, basta considerarmos os seguintes casos [29]:

- (i) Dois arcos $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ cobrem C .

Sejam v_i e v_j os vértices correspondentes aos arcos A_i e A_j , respectivamente. Como A_i e A_j cobrem C , temos que $N(v_i) \cup N(v_j) = V(G)$. Então, ao atribuirmos cor 1 aos vértices que estão em $N(v_j)$ e cor 2 aos vértices restantes, obtemos uma 2-clique-coloração para G . A figura 4.4 exibe a relação entre os vértices v_i , v_j e os vértices restantes do grafo, e também a coloração proposta acima.

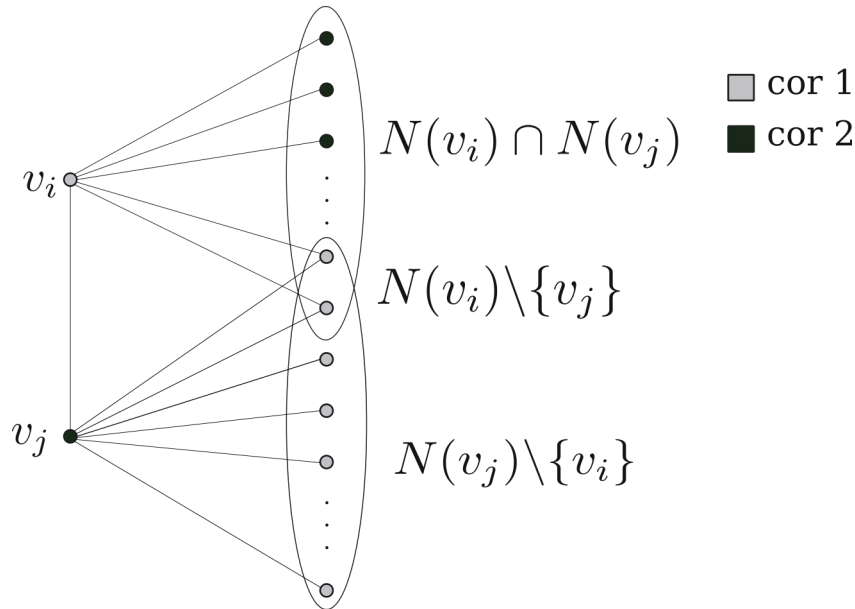


Figura 4.4 – Clique-coloração para modelo de arcos não-Helly (caso (i)).

- (ii) Três arcos A_i , A_j e $A_k \in \mathcal{A}$ cobrem C , mas, quando tomados dois a dois, nenhum deles o faz.

Sejam v_i , v_j e v_k os vértices correspondentes aos arcos A_i , A_j e A_k , respectivamente. Consideramos a atribuição de cores c aos vértices de G definida da seguinte forma:

$$c(v) = \begin{cases} 1 & v \in \{v_i, v_j\} \\ 1 & v \in N(v_k) \setminus (N(v_i) \cup N(v_j)) \\ 1 & v \in (N(v_k) \cap N(v_i)) \setminus N(v_j) \\ 2 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$$

Na figura 4.5, é possível observar a relação entre as vizinhanças dos vértices e também a coloração c aplicada aos vértices das mesmas.

Para verificar se c é de fato uma 2-clique-coloração, supomos, por absurdo, que exista uma clique maximal K de G que seja monocromática. Analisamos as possíveis configurações dessa clique:

- $v_i \in K$: apenas v_j e vértices de $(N(v_k) \cap N(v_i)) \setminus N(v_j)$ receberam a mesma cor que v_i . Então, como K é monocromática, ou $K = \{v_i, v_j\}$, ou K contém, além

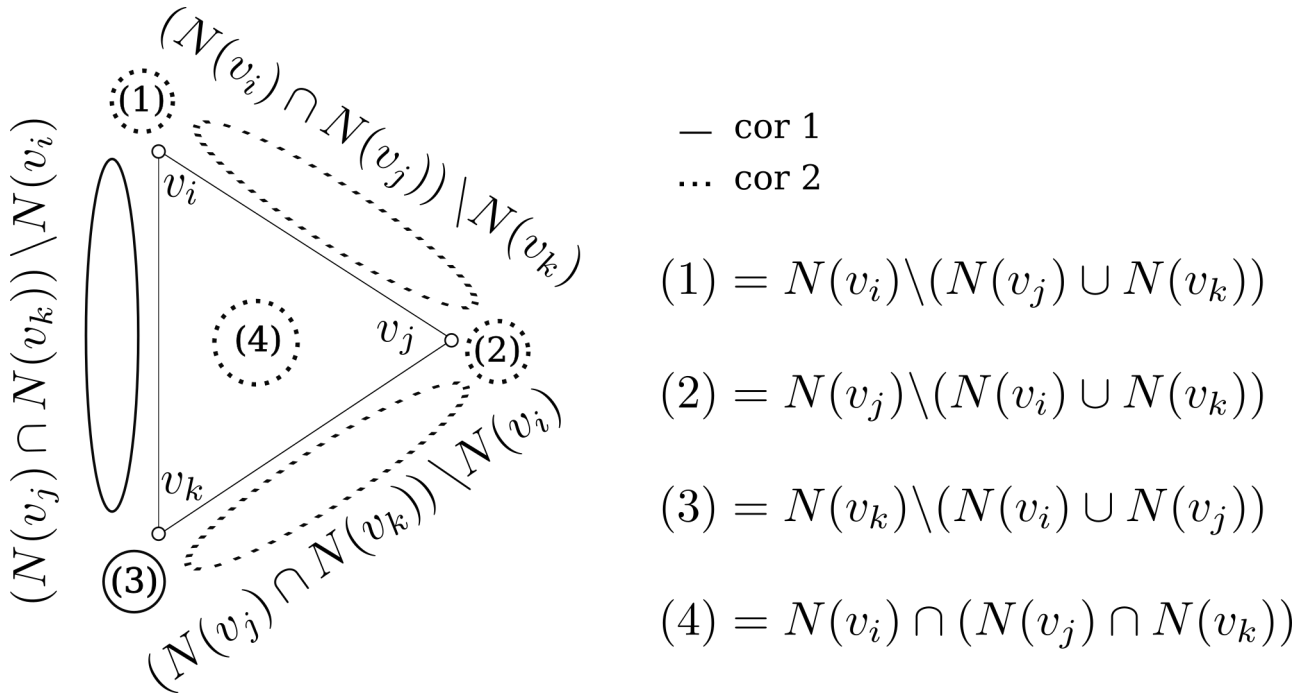


Figura 4.5 – Clique-coloração para modelo de arcos não-Helly (caso (ii)).

de v_i , apenas vértices de $(N(v_k) \cap N(v_i)) \setminus N(v_j)$. Em ambos os casos, $K \cup \{v_k\}$ também é uma clique de G , o que contradiz a maximalidade da clique K .

- $v_j \in K$: dos vértices que receberam a mesma cor que v_j , apenas v_i é adjacente a v_j . Então, como K é monocromática, $K = \{v_i, v_j\}$, contradizendo a maximalidade da clique K , assim como no caso anterior.
- $v_k \in K$: nesse caso, nem v_i , nem v_j pertencem a K . Além disso, qualquer $v \in K$, diferente de v_k , deve pertencer ao conjunto $N(v_k) \cap N(v_j)$, já que K é monocromática. Mas então $K \cup \{v_j\}$ é uma clique de G , contradizendo a maximalidade de K .
- $\{v_i, v_j, v_k\} \cap K = \emptyset$: nesse caso, K deve possuir vértices de $(N(v_i) \cap N(v_j)) \setminus N(v_k)$, de $(N(v_j) \cap N(v_k)) \setminus N(v_i)$ e de $(N(v_k) \cap N(v_i)) \setminus N(v_j)$, pois caso contrário, ao menos um vértice dentre v_i, v_j, v_k faria parte de K . Mas então K tem vértices de cores 1 e 2, contradizendo o fato de K ser monocromática.

Logo, nenhuma clique maximal de G é monocromática e, portanto, c é uma 2-clique-coloração para G .

□

Nem todos os grafos arco-circulares Helly são 2-clique-coloríveis, ao contrário do que acontece com os grafos dessa classe que não possuem tal propriedade. Apesar disso, é possível caracterizar os que são, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 4.5. *Sejam $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos Helly reduzido e $G = \Omega(\mathcal{M})$. Então, G é 2-clique-colorível se, e somente se, G não é um ciclo ímpar induzido de tamanho pelo menos 5.*

Prova. (\Rightarrow) Suponhamos, por absurdo, que G seja um ciclo ímpar induzido de tamanho pelo menos 5. Então G é 3-clique-cromático, contradizendo a hipótese.

(\Leftarrow) Se G é um grafo cordal, pelo teorema 3.3, G é 2-clique-colorível. Suponhamos, então, que G não seja cordal. Nesse caso, G possui ao menos um ciclo induzido de tamanho maior ou igual a 4. Seja $C_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ um ciclo induzido de G , com $k \geq 4$. Observamos que os arcos correspondentes aos vértices de C_k cobrem C . Consideramos duas possibilidades para o grafo G :

(i) Nenhuma clique maximal de G possui tamanho menor que 3.

Como \mathcal{M} tem a propriedade Helly, para toda clique maximal K_i de G , existe pelo menos um ponto $p_i \in C$ tal que os arcos que cobrem p_i são exatamente aqueles correspondentes aos vértices de K_i . Como, em particular, os arcos correspondentes aos vértices de C_k cobrem p_i e K_i é maximal, existe vértice $v' \in K_i \cap C_k$. Além disso, como $|K_i| \geq 3$ para toda clique maximal K_i de G e C_k é ciclo induzido com $k \geq 4$, existe vértice $v'' \in K_i \setminus C_k$. Assim, se atribuirmos cor 1 aos vértices de C_k e cor 2 para os vértices restantes, obtemos uma 2-clique-coloração para G .

(ii) Existe pelo menos uma clique maximal de tamanho 2 em G .

Seja $e = v_i v_j$ uma aresta de G que é clique maximal. Observamos que e é, necessariamente, uma aresta de C_k , pois todo par de vértices adjacentes e que não pertencem a C_k são simultaneamente adjacentes a pelo menos um vértice de C_k , já que os arcos correspondentes aos vértices de C_k cobrem C . Outra possibilidade seria e possuir exatamente um extremo em C_k , o que contradiz o fato de G ser um grafo reduzido.

Sejam $P = \{P_1, \dots, P_p\}$ o conjunto de todos os caminhos maximais de G tais que as arestas desses caminhos são cliques maximais e $Q = \{Q_1, \dots, Q_q\}$ o conjunto de componentes conexos do grafo induzido por $E(G) \setminus E(P)$.

Denotamos por v'_i e v''_i os vértices de Q_i cujos arcos correspondentes têm o menor extremo inicial e o maior extremo final, respectivamente. Como \mathcal{M} é um modelo reduzido, v'_i e v''_i são vértices distintos e são vértices de C_k . Além disso, toda clique maximal de Q_i é também maximal em G , possui ao menos três vértices e pelo menos um desses vértices é vértice de C_k . Mostraremos que existem c e c' , duas 2-clique-colorações dos vértices de Q_i , tais que $c(v'_i) = c(v''_i)$ e $c'(v'_i) \neq c'(v''_i)$.

Para construir c , colorimos os vértices de $V(Q_i) \cap V(C_k)$ com cor 1 e todos os outros com a cor 2. Assim, $c(v'_i) = c(v''_i) = 1$. Além disso, toda clique maximal de Q_i tem

pelo menos um vértice de C_k e pelo menos um vértice que não está em C_k . Dessa forma, é possível observar que c é, de fato, uma 2-clique-coloração de Q_i .

Agora, para construir c' , consideramos a seguinte atribuição de cores aos vértices de Q_i :

$$c'(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } v \in V(C_k) \setminus \{v_i''\} \text{ ou } N(v) \cap V(C_k) = \{v_i''\} \\ 2 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$$

Nesse caso, $c'(v_i') = 1$ e $c'(v_i'') = 2$. Ao analisarmos as possibilidades para as cliques maximais de Q_i , vemos que nenhuma delas é monocromática e, então, c' é de fato uma 2-clique-coloração para Q_i .

A partir disso, para obtermos uma 2-clique-coloração para G , procedemos da seguinte forma:

- Obtemos uma clique-coloração ótima para cada caminho $P_i \in P$;
- Para cada componente $Q_i \in Q$, comparamos a cor dos vértices v_i' e v_i'' . Baseado nisso, atribuímos aos vértices de Q_i uma das duas clique-colorações definidas anteriormente.

É importante observarmos que, se $|P| = 1$ e $|P_1| = 2$, teremos que os vértices v_i' e v_i'' são adjacentes em G e o grafo induzido pelos vértices de Q_1 é o próprio grafo G . Nesse caso, a atribuição de cores feita anteriormente continua sendo uma clique-coloração, pois colorimos primeiro os vértices de $P_1 = (v_i', v_i'')$. Assim, v_i' e v_i'' recebem cores distintas, forçando que os vértices em Q_1 sejam coloridos utilizando a atribuição c' .

Em ambos os casos, exibimos uma clique-coloração para G com apenas duas cores. Logo, G é 2-clique-colorável. □

Como consequência dos teoremas 4.4 e 4.5, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 4.6. *Um grafo arco-circular G é 3-clique-cromático se o seu grafo reduzido for um ciclo induzido de tamanho ímpar com pelo menos 5 vértices. Caso contrário, G é 2-clique-cromático.*

O corolário anterior caracteriza exatamente quais são os grafos arco-circulares que precisam de três cores para serem clique-coloridos e os que precisam de apenas duas. Assim, vemos que o estudo do problema da clique-coloração nesta classe está completamente resolvido.

4.3 Grafos UE

Grafos UE (*undirected edge path graph*) são os grafos de interseção em arestas de uma família de caminhos em uma árvore. Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é um grafo UE quando existe um modelo $\mathcal{M} = (T, \mathcal{P})$ tal que $G = \Omega(\mathcal{M})$, onde T é uma árvore e \mathcal{P} uma família de caminhos em T . Na figura 4.6, exibimos um grafo G e duas famílias de caminhos em árvore tais que G é o grafo de interseção em arestas de cada uma dessas famílias.

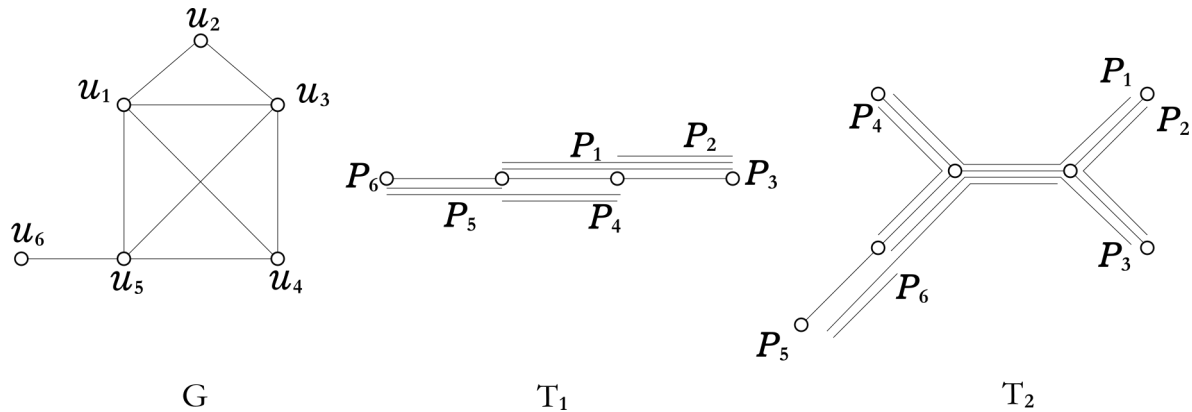


Figura 4.6 – Exemplo de um grafo UE e dois modelos para ele.

Os grafos UE foram introduzidos por Syslo [37], em 1978, onde foram denominados grafos *ciclo fundamental*. Seu estudo foi motivado pelo problema de acrescentar o maior conjunto possível de arestas à uma árvore geradora de um grafo de modo que os ciclos formados não tenham interseção. Se, para cada aresta acrescentada, considerarmos o caminho em na árvore entre seus extremos, o grafo de interseção em arestas desta família de caminhos é um grafo UE. Assim, resolver o problema proposto é determinar um conjunto independente máximo neste grafo. Os ciclos formados a partir de uma árvore geradora de um grafo pelo acréscimo de uma aresta são chamados *ciclos fundamentais*, o que justifica o nome da classe proposto por Syslo.

Golumbic e Jamison [20] apresentaram vários resultados a respeito da classe UE, referentes às cliques, à estrutura dos grafos e ao comportamento da classe para alguns problemas em grafos. Em 1986, Monma e Wei [32] publicaram um trabalho mais completo sobre as classes de grafos de interseção de caminhos em uma árvore onde uniformizaram a terminologia sobre estas classes e introduziram a nomenclatura UE, além de apresentarem um extenso estudo comparando as classes de grafos de interseção de caminhos em uma árvore dadas pela interseção em arestas ou em vértices.

Um grafo é *UE Helly*, ou simplesmente *UEH*, quando é um grafo de interseção em arestas de uma família de caminhos em uma árvore e admite um modelo que possui a propriedade Helly. Na figura 4.7, exibimos um grafo UEH e um modelo cuja família de caminhos possui a propriedade Helly.

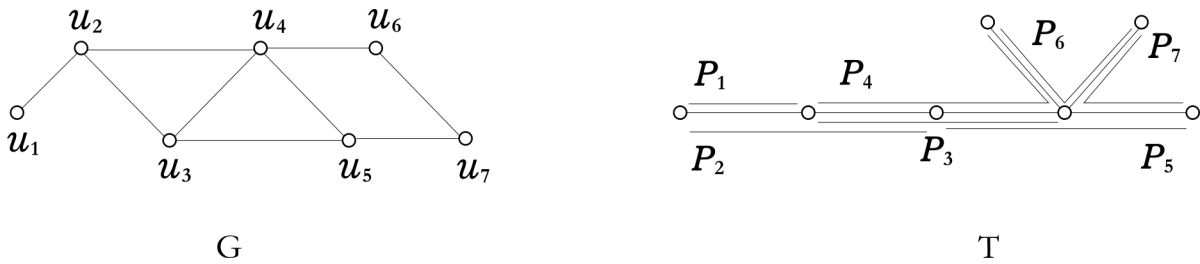


Figura 4.7 – Exemplo de um grafo UEH e um modelo para ele.

Observamos que os grafos UEH são uma subclasse própria da classe dos grafos UE, ou seja, existem grafos que são UE, mas não são UEH. Um exemplo é o grafo de Hajós, ilustrado na figura 4.8, juntamente com um modelo UE.

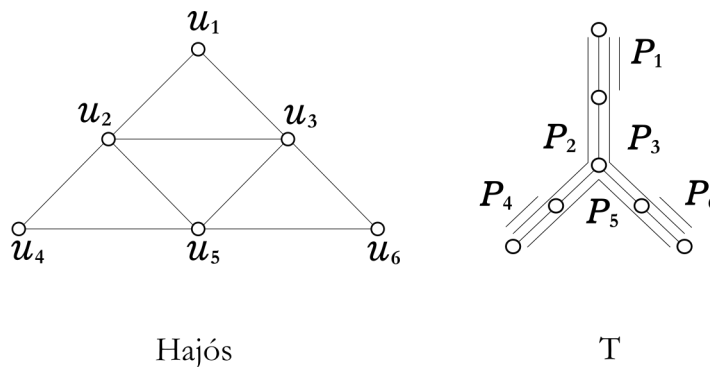


Figura 4.8 – Grafo de Hajós e um modelo UE desse grafo.

Considerar a propriedade Helly no caso dos grafos UE é bastante relevante, dado que os grafos UEH possuem propriedades particulares e resultados próprios. No caso do problema da clique-coloração, Cerioli e Petito [8] usaram caracterizações dos grafos UEH para mostrar que esses grafos são 3-clique-coloríveis. Por outro lado, mostraram que grafos UE têm número clique-cromático ilimitado. Para isso, utilizaram uma subclasse especial dos grafos UE formada pelos grafos linha de grafos completos. Apresentamos todos esses resultados ao longo desta seção.

Dado $G = (V, E)$ um grafo, denotamos por C o conjunto de todas as cliques maximais de G e por C_v o conjunto de todas as cliques maximais que contém um determinado vértice v de G . Dizemos que uma árvore T é uma *árvore característica* de G quando $E(T) = C$ e $T[C_v]$ é um caminho, para todo $v \in V(G)$. Por exemplo, a árvore T é uma árvore característica do grafo G , na figura 4.7.

É importante observar que um grafo pode ter mais de uma árvore característica. Na figura 4.6, T_1 é uma árvore característica do grafo G . Uma árvore característica do mesmo grafo não isomorfa àquela, é dada na figura 4.9.

Árvores características desempenham um papel fundamental no estudo dos grafos UEH. A partir delas, Monma e Wei [32] provaram uma caracterização dos grafos dessa

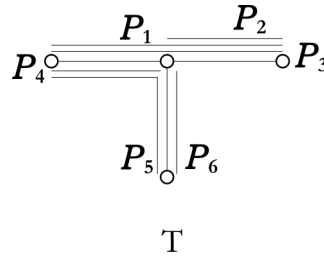


Figura 4.9 – Árvore característica para o grafo G da figura 4.6

classe, que mostramos no próximo teorema.

Teorema 4.7. *Um grafo G é UEH se, e somente se, existe uma árvore característica de G .*

Prova. (\Rightarrow) Sejam G um grafo UEH e $\mathcal{M} = (T, \mathcal{P})$ um modelo UEH de G , onde $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ e T tem o menor número possível de arestas. Se $e \in E(T)$, denotamos por $P[e]$ a subfamília de \mathcal{P} formada pelos caminhos que passam pela aresta e . Como, para toda aresta $e \in E(T)$, os vértices correspondentes aos caminhos de $P[e]$ formam uma clique maximal em G , existe uma bijeção entre $E(T)$ e \mathcal{C} .

Sejam $v \in V(G)$ e P_v o caminho de \mathcal{P} correspondente a v . Como $T[C_v]$ é formado pelas arestas de T correspondentes às cliques de G que contém v , e P_v passa por essas arestas, temos que $T[C_v] \subset P_v$. Por outro lado, as arestas de P_v correspondem às cliques maximais de G que contém v . Então as arestas de P_v estão em $T[C_v]$ e, portanto, $P_v \subset T[C_v]$. Com isso, $P_v = T[C_v]$ e, conseqüentemente, $T[C_v]$ é um caminho. Logo, T é uma árvore característica de G .

(\Leftarrow) Seja T uma árvore com conjunto de arestas \mathcal{C} tal que, para todo $v \in V(G)$, $T[C_v]$ é um caminho em T . Consideramos $\mathcal{P} = \{P_v = T[C_v] \mid v \in V(G)\}$. Vamos mostrar que (T, \mathcal{P}) é um modelo UEH de G .

Se $v, w \in V(G)$, os caminhos P_v e P_w se intersectam em arestas se, e somente se, v e w estão em uma mesma clique maximal de G , ou seja, são adjacentes em G . Assim, a árvore T e a família \mathcal{P} formam um modelo UE de G . Falta provar que a família \mathcal{P} possui a propriedade Helly.

Seja \mathcal{P}' uma subfamília de \mathcal{P} tal que os caminhos de \mathcal{P}' se intersectam dois a dois. Os vértices correspondentes a tais caminhos formam uma clique em G , que está contida em alguma clique maximal do grafo. Por hipótese, existe uma aresta e de T que corresponde a essa clique maximal. Então, e pertence a todos os caminhos da subfamília \mathcal{P}' . Logo, \mathcal{P} possui a propriedade Helly e, portanto, (T, \mathcal{P}) é um modelo UEH de G . \square

Monma e Wei [32] caracterizaram também os grafos UEH que admitem modelo (T, \mathcal{P}) , onde T é uma estrela. Mais especificamente, esses grafos são exatamente os grafos linha de multigrafos sem triângulos. Além disso, mostraram que todo grafo UEH sem

separadores clique admite um modelo em que a árvore é uma estrela. O teorema abaixo mostra que o problema da clique-coloração está completamente resolvido para os grafos UEH que admitem tal modelo, e sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 4.8 ([2]). *Seja G um grafo UEH que admite um modelo (T, \mathcal{P}) , onde T é uma estrela. Então, G é 3-clique-colorível. Além disso, G é 3-clique-cromático se, e somente se, G é um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5.*

Se G é um grafo UEH, com modelo UEH (T, \mathcal{P}) onde T é uma árvore característica de G , atribuir cores aos caminhos de \mathcal{P} é o mesmo que atribuir cores aos vértices de G . Para cada aresta da árvore característica, existem dois caminhos com cores diferentes passando por essa aresta se, e somente se, a coloração correspondente em G é uma clique-coloração. Além disso, em uma árvore característica, toda aresta não incidente a uma folha corresponde a um separador clique em G . Baseado nesses fatos, Cerioli e Petitto [8] estenderam o teorema 4.8, mostrando que todo grafo UEH é 3-clique-colorível.

Teorema 4.9. *Seja G um grafo UEH. Então, G é 3-clique-colorível.*

Prova. Sem perda de generalidade, podemos supor que G é conexo. Seja (T, \mathcal{P}) um modelo UEH de G , onde T é uma árvore característica de G . A prova é por indução na quantidade de separadores clique de G . Se G não tem separadores clique, então T é uma estrela e, pelo teorema 4.8, G é 3-clique-colorível.

Suponhamos que T não seja uma estrela. Então, existe aresta $e = vw \in E(T)$ tal que todos os vizinhos de w , exceto v , são folhas de T . Consideramos T' e T'' as subárvores de T tais que T' é induzida por v , w e todos os vértices de T que não são adjacentes a w , enquanto T'' é a estrela induzida por w e todos os seus vizinhos em T .

Sejam \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' as subfamílias de \mathcal{P} tais que um caminho P está em \mathcal{P}' se, e somente se, P tem um aresta de T' , e P está em \mathcal{P}'' se, e somente se, P tem uma aresta em T'' . Sejam G' e G'' os grafos de interseção em arestas de \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' , respectivamente.

Pela hipótese de indução, G' é 3-clique-colorível. Consideramos a coloração parcial de \mathcal{P} que corresponde à atribuição das cores $\{1, 2, 3\}$ aos vértices de G' . Observamos que os caminhos de \mathcal{P}'' que contém a aresta e já estão coloridos. Para estender essa coloração para toda a família de caminhos \mathcal{P} , classificamos as arestas de $T'' - e$ como a seguir.

Uma aresta é do tipo 2 se existem dois caminhos passando por ela com cores distintas; uma aresta é do tipo 1 se todos os caminhos coloridos de \mathcal{P}'' que contém essa aresta têm a mesma cor e existe ao menos um caminho com essa característica; e uma aresta é do tipo 0 se nenhum caminho que a contém está colorido. Seja A_i , $i \in \{0, 1, 2\}$, o conjunto das arestas do tipo i . Como cada aresta de T corresponde a uma clique maximal de G , para cada aresta $a \in A_1$, existe um caminho de \mathcal{P}'' ainda não colorido que contém a .

Essa propriedade se mantém mesmo com o procedimento feito abaixo. Vamos, então, atribuir cores aos caminhos de \mathcal{P}'' que ainda não estão coloridos. Para isso, aplicamos o seguinte passo a passo:

Passo 1: Enquanto $A_1 \neq \emptyset$, escolhemos $a \in A_1$ e um caminho não-colorido $P_a \in \mathcal{P}''$ que contenha a aresta a . Supomos, sem perda de generalidade, que todos os caminhos coloridos que passam por a têm cor 1. Se P_a é formado apenas pela aresta a , atribuímos a cor 2 ao caminho P_a e movemos a para o conjunto A_2 . Caso contrário, o caminho P_a é formado por duas arestas, a e b . Se b é do tipo 2, procedemos da mesma forma do caso anterior. Se b é do tipo 0, procedemos da mesma forma do caso anterior, e também movemos b para o conjunto A_1 . Consideramos, então, b do tipo 1. Se todos os caminhos coloridos de \mathcal{P} que passam por b tiverem a cor 1, atribuímos cor 2 ao caminho P_a ; caso contrário, entre as cores 2 e 3, escolhemos a cor diferente dos caminhos que passam por b e atribuímos a P_a , e em ambos os casos, movemos a e b para o conjunto A_2 .

Passo 2: Se $A_0 \neq \emptyset$, escolhemos um caminho não-colorido P que contenha uma aresta de A_0 . Atribuímos cor 1 ao caminho P , movemos todas as arestas do tipo 0 de P para o conjunto A_1 e voltamos ao passo 1.

Passo 3: Se $A_0 = \emptyset$, atribuímos cor 1 a todos os caminhos que ainda não tenham sido coloridos.

No fim desse procedimento, todos os caminhos de \mathcal{P}'' e, portanto, de \mathcal{P} estão coloridos.

Como $A_1 \cup A_0 = \emptyset$ quando o passo 3 termina, para cada aresta de T'' , existem dois caminhos com cores diferentes contendo essa aresta. Logo, G é 3-clique-colorível. \square

De fato, existem grafos UEH que são 3-clique-cromáticos, o que garante que a cota obtida no teorema 4.9 para o número clique-cromático da classe é justa. Um exemplo pode ser encontrado na figura 4.10.

A prova do teorema 4.9 fornece um algoritmo para a 3-clique-coloração de grafos UEH. Entretanto, esse algoritmo pode usar três cores em grafos que são, de fato, 2-clique-cromáticos. Também é importante observar que existem grafos UEH 3-clique-cromáticos, cujos grafos G' e G'' especificados na prova do teorema 4.9 são 2-clique-cromáticos. Por exemplo, os grafos G' e G'' correspondentes ao grafo G da figura 4.10 podem ser coloridos com apenas duas cores, como pode ser visto na figura 4.11.

Apesar do número clique-cromático dos grafos UEH serem limitados, Cerioli e Petito [8] mostraram que o mesmo não acontece com os grafos UE, ou seja, para essa classe, não existe constante C tal que todos os grafos UE sejam C -clique-cromáticos.

Para justificar esse fato, consideramos, para cada n , um grafo UE especial G_n , definido por um modelo (S_n, \mathcal{P}_n) , onde S_n é uma estrela com $n + 1$ vértices e \mathcal{P}_n é a família de todos

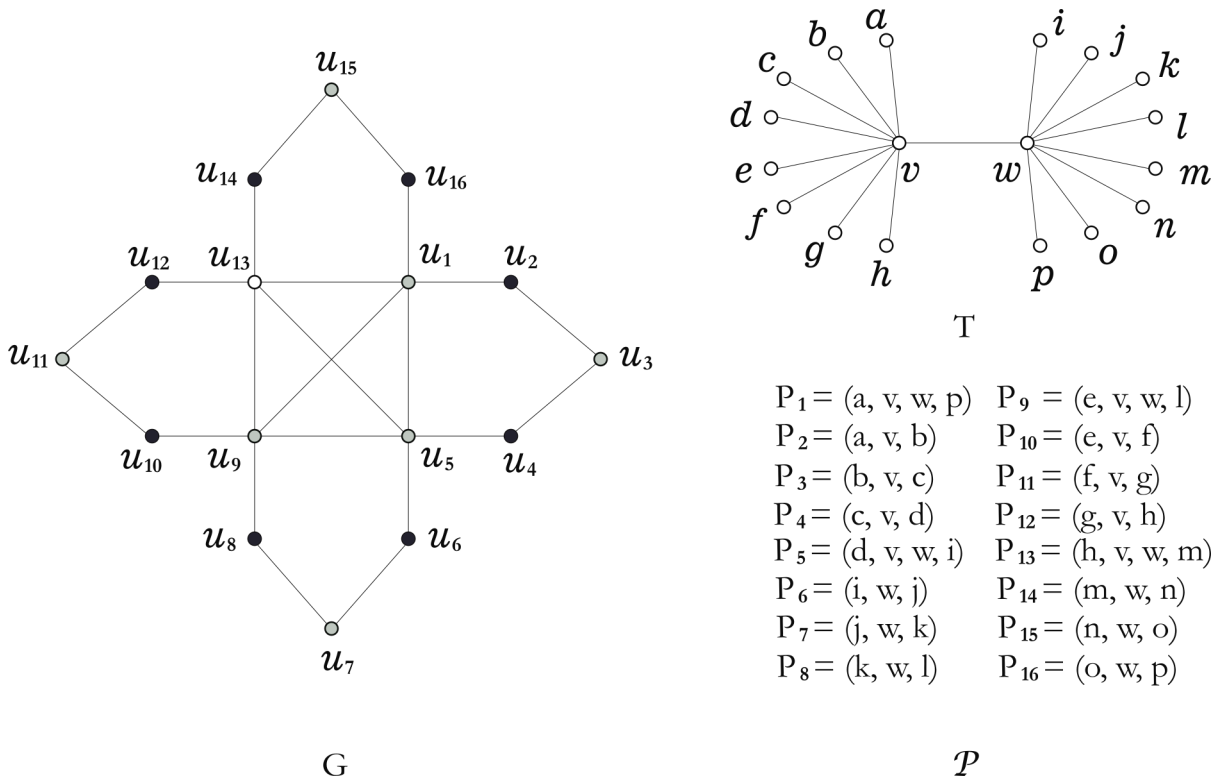


Figura 4.10 – Exemplo de grafo UEH 3-clique-cromático.

os possíveis caminhos de duas arestas de S_n . Observamos que o grafo G_n é exatamente o grafo linha do grafo completo K_n , para todo $n \geq 3$.

Quando consideramos $n = r(k_1, \dots, k_m)$ e $k_i = 3$, para $i = 1, \dots, m$, temos que, para qualquer coloração de arestas de K_n com m cores, existe um triângulo monocromático. Como uma coloração das arestas de K_n corresponde a uma coloração de vértices de seu grafo linha G_n e todo triângulo de K_n corresponde a uma clique maximal em G_n , então G_n não admite clique-coloração com m cores.

Na figura 4.12, está representado o grafo G_6 , grafo linha de K_6 . Pelo fato explicado anteriormente e, como $6 = r(3, 3)$, temos que G_6 não é 2-clique-colorível.

Como consequência direta, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.10. *Não existe constante N tal que todos os grafos UE são N -clique-coloríveis.*

4.4 Grafos B_1 -EPG

Um modelo EPG $(\mathcal{G}, \mathcal{P})$ de um grafo G é uma coleção de caminhos \mathcal{P} na grade bidimensional \mathcal{G} tal que dois vértices de G são adjacentes se, e somente se, os caminhos correspondentes compartilham pelo menos uma aresta da grade. Um grafo que admite um modelo EPG é chamado de grafo EPG (*edge-intersection of paths on a grid*). Os grafos B_1 -EPG constituem uma subclasse dos grafos EPG e são aqueles que admitem um

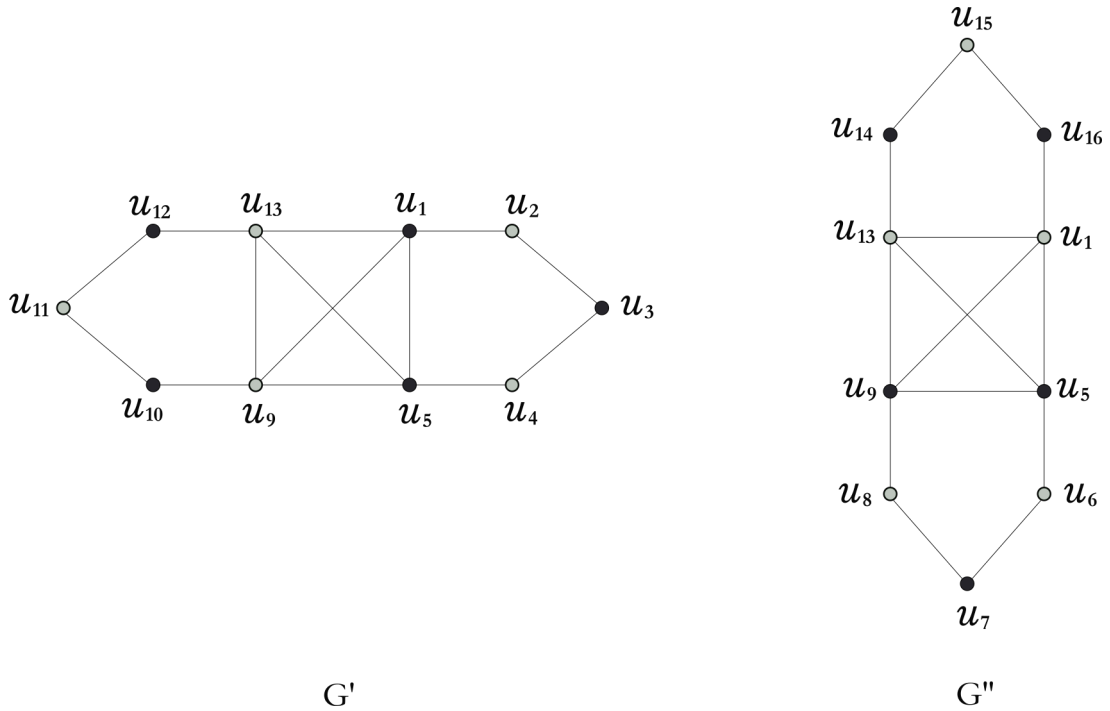


Figura 4.11 – Grafos G' e G'' correspondentes ao grafo G da figura 4.10.

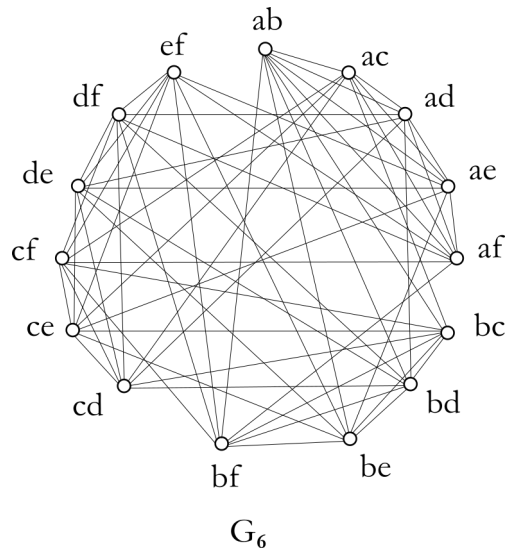


Figura 4.12 – Grafo G_6 .

modelo EPG $(\mathcal{G}, \mathcal{P})$ em que cada caminho de \mathcal{P} tem no máximo uma dobra (*bend*). Aos modelos EPG que possuem essa característica, damos o nome de *modelos B_1 -EPG*.

Observamos que o grafo de Hajós, exibido na figura 4.8, também é B_1 -EPG. Um outro exemplo de grafo B_1 -EPG pode ser encontrado na figura 4.13.

Os grafos EPG foram introduzidos por Golumbic, Lipshteyn e Stern [21], em 2009. Nesse mesmo artigo, os autores mostraram que todo grafo é um grafo EPG e apresentaram diversos resultados estruturais para a subclasse dos grafos B_1 -EPG.

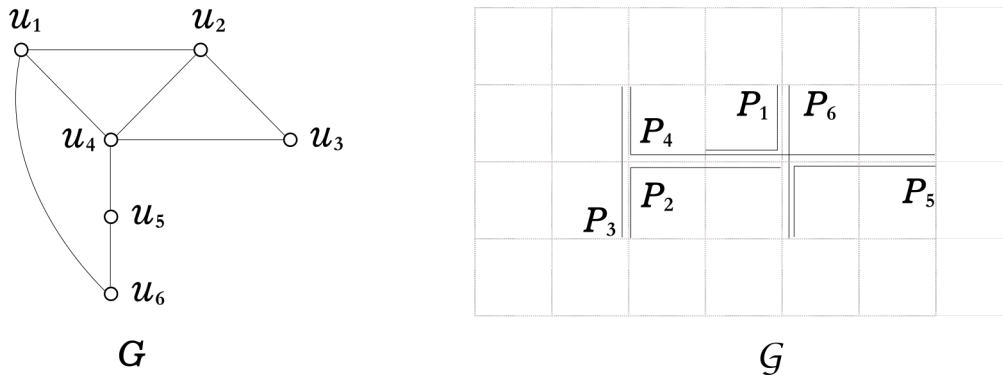


Figura 4.13 – Exemplo de um grafo B_1 -EPG e um modelo para ele.

Para esta subclasse, caracterizaram as representações de cliques e ciclos induzidos de tamanho 4 e também apresentaram uma condição suficiente para que um grafo não seja B_1 -EPG.

Dois anos depois, Asinowski e Ries [1] apresentaram, além de propriedades estruturais da classe, resultados relacionando os grafos B_1 -EPG a outras classes de grafos. Em particular, mostraram que o subgrafo induzido pela vizinhança de qualquer vértice de um grafo B_1 -EPG é um grafo perfeito e também que todo grafo cordal sem $K_{1,3}$ é um grafo B_1 -EPG.

O primeiro resultado sobre clique-coloração nesta classe surgiu em 2017, quando Mazzoleni, Bonomo e Stein [6] mostraram que todo grafo B_1 -EPG é 4-clique-colorível. Para isso, consideraram os segmentos horizontais de cada linha e os segmentos verticais de cada coluna da grade como grafos de intervalo e utilizaram o fato de que todo grafo de intervalo pode ser clique-colorido com duas cores, onde uma delas induz um conjunto independente. Apesar do resultado obtido, não se conhecem grafos B_1 -EPG que sejam 4-clique-cromáticos e, por isso, as autoras conjecturaram que apenas três cores são suficientes para clique-colorir os grafos desta classe.

Apresentamos, nesta seção, o resultado citado acerca da clique-coloração na classe dos grafos B_1 -EPG. Para isso, começaremos apresentando as definições necessárias para o entendimento.

Seja $(\mathcal{G}, \mathcal{P})$ um modelo B_1 -EPG. Cada caminho de \mathcal{P} tem uma das seguintes formas: um intervalo em uma coluna da grade; um intervalo em uma linha da grade; ou um intervalo em uma coluna da grade junto com um intervalo em uma linha da grade, com dobra no ponto de interseção dessa coluna e dessa linha. Além disso, se dois caminhos de \mathcal{P} compartilham uma aresta em \mathcal{G} , então estão na mesma coluna ou na mesma linha ou ambos.

As cliques maximais de um grafo B_1 -EPG podem ser formadas de modos diferentes. Sejam G um grafo B_1 -EPG e $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{P})$ um modelo B_1 -EPG para G . Uma clique maximal

C de G é uma *clique-aresta* de \mathcal{M} quando todos os caminhos de \mathcal{P} correspondentes aos vértices de C compartilham uma aresta da grade \mathcal{G} . A clique maximal C é uma *clique-garra* de \mathcal{M} quando existe um ponto x na grade e três arestas da grade compartilhando x tais que cada caminho de \mathcal{P} correspondente a um vértice de C contém duas dessas três arestas, e todo par dentre essas três arestas está contido em pelo menos um caminho de \mathcal{P} (assim, garantimos que não seja uma clique-aresta). Dizemos que a clique-garra está *centrada em x* ou que x é o *centro* da clique-garra.

Na figura 4.13, o triângulo formado pelos vértices u_1 , u_2 e u_4 é uma clique-aresta, enquanto o triângulo formado pelos vértices u_2 , u_3 e u_4 é uma clique-garra.

Em [21], Golumbic et al. mostraram que essas são as duas únicas maneiras de formar cliques maximais em um grafo B_1 -EPG, ou seja, toda clique maximal de um grafo B_1 -EPG é uma clique-aresta ou uma clique-garra de seu modelo. Utilizamos esse fato para provar que todo grafo dessa classe admite uma clique-coloração com quatro cores. Essa demonstração será feita, com detalhes, a seguir.

Teorema 4.11 ([6]). *Seja G um grafo B_1 -EPG. Então, G é 4-clique-colorível.*

Prova. Seja $(\mathcal{G}, \mathcal{P})$ um modelo B_1 -EPG para o grafo G . Cada caminho de \mathcal{P} é composto ou por um único segmento formado por uma ou mais arestas na mesma linha ou coluna da grade \mathcal{G} ; ou por dois segmentos compartilhando um ponto da grade, um horizontal (ou seja, em uma linha de \mathcal{G}) e um na vertical (em uma coluna de \mathcal{G}). Vamos, primeiro, atribuir cores aos segmentos horizontais e verticais de cada caminho, e então mostraremos como combinar essas cores de forma a cada caminho ter uma única cor.

Como vimos na seção 3.2, todo grafo cordal e, em particular, todo grafo de intervalo admite uma 2-clique-coloração onde uma das cores induz um conjunto independente. Cada linha (respectivamente, cada coluna) da grade, juntamente com os seus segmentos pode ser interpretado como um grafo de intervalo. Assim, usamos a 2-clique-coloração citada para atribuir cores 1 e 2 a esses segmentos de forma que a cor 2 seja a cor que induz um conjunto independente.

Obtemos quatro tipos de caminhos, de acordo com as cores que seus respectivos segmentos receberam: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(2, 2)$, onde a primeira componente corresponde ao segmento horizontal do caminho e a segunda componente ao segmento vertical do caminho. Se alguma dessas partes não existir, colocamos 1 na respectiva componente.

Observamos que os vértices correspondentes aos caminhos coloridos com $(2, 2)$ formam um conjunto independente.

Vamos, então, analisar quais cliques maximais poderiam ser monocromáticas. Consideramos uma clique-aresta K de $(\mathcal{G}, \mathcal{P})$, e e a aresta de \mathcal{G} compartilhada por todos os caminhos correspondentes aos vértices de K . Então, K também é uma clique maximal

do grafo de intervalo correspondente à linha (respectivamente, coluna) de \mathcal{G} à qual a aresta e pertence. Assim, como partimos de uma clique-coloração desses grafos de intervalo, os caminhos que passam por e têm cores diferentes na componente horizontal (respectivamente, vertical) e, portanto, K não é monocromática.

Olharemos, então, para as cliques-garra. Suponhamos que exista uma clique-garra K que é monocromática. Então, existem pelo menos dois caminhos correspondentes aos vértices de K cujos segmentos horizontais se sobrepõe e têm a mesma cor, e o mesmo vale para os segmentos verticais. Pela forma como as cores foram atribuídas, a única possibilidade para K ser monocromática é que todos os caminhos correspondentes aos vértices de C tenham sido coloridos com $(1, 1)$.

Para cada ponto x da grade que é centro de uma ou mais cliques-garra monocromáticas $(1, 1)$, recolorimos um ou mais caminhos tendo dobra em x . Assim, cada caminho só será recolorido no máximo uma vez, já que só tem uma dobra. Caminhos sem dobras não serão recoloridos.

A ordem em que processamos os pontos x da grade não importa, pois a recoloração é independente da recoloração em outro ponto da grade. Vamos atribuir cor 2 a alguns segmentos que tinham, originalmente, cor 1, obedecendo às seguintes regras, para qualquer ponto x fixado da grade:

- (I) os caminhos recoloridos terão cor $(1, 2)$ ou $(2, 1)$;
- (II) todo segmento de um caminho com dobra em x que é recolorido 2 está contido em um segmento de um caminho com dobra em x que tem cor 1;
- (III) se recolorirmos dois caminhos com dobra em x , eles só compartilham o ponto x (ou seja, têm formas \perp e \top ou \lrcorner e \ulcorner);
- (IV) após feita a recoloração, não existem mais cliques-garra coloridas $(1, 1)$ com centro em x .

Vamos explicar mais a frente como construir uma recoloração obedecendo às regras descritas acima. Uma vez que essa recoloração é construída, os segmentos coloridos com 2 podem não mais formar um conjunto independente, mas as regras acima garantem que cliques monocromáticas não são criadas. De fato, propriedade (II) garante que não criamos cliques-aresta monocromáticas. Suponhamos que uma clique-garra, centrada em x , fique monocromática após o processo de recoloração. Pela simetria, podemos assumir que essa clique tem formato \perp . Por (I), essa clique é monocromática tendo cor $(1, 2)$ ou $(2, 1)$. No primeiro caso, um dos segmentos verticais de um dos caminhos com dobra em x , digamos caminho P , foi recolorido, já que os segmentos originalmente coloridos com 2 não têm interseção. Propriedade (II) implica que existe um caminho Q

com dobra em x cujo segmento vertical tem cor 1 e contém o segmento vertical de P . Mas então, Q pertence a essa clique-garra e, portanto, a mesma não é monocromática. No segundo caso, como a propriedade (III) garante que no máximo um dos caminhos dessa clique com dobra em x foi recolorido e como os segmentos originalmente coloridos com cor 2 não se intersectam, então os segmentos horizontais de todos os caminhos que estão na clique e não têm dobra em x foram recoloridos. Então, propriedade (II) implica que existe um caminho pertencendo à clique cujo segmento horizontal tem cor 1. A contradição segue de forma análoga ao caso anterior. Essas observações, juntamente com a propriedade (IV), garantem que após aplicar esse processo em todos os pontos da grade, obtemos uma 4-clique-coloração de G .

Para explicar como achar tal recoloração, separamos três casos possíveis. Vamos dizer que um formato *falta* em x se não existe caminho desse formato com dobra em x ou se existe pelo menos um caminho desse formato com dobra em x que não está colorido com $(1, 1)$.

(i) Dois ou mais formatos \lrcorner , \llcorner , \ulcorner , \urcorner faltam em x .

Se não existe nenhuma clique-garra monocromática com cor $(1, 1)$ centrada em x , não recolorimos nada. Caso contrário, existe uma única clique-garra centrada em x colorida $(1, 1)$ e, pela simetria, podemos assumir que essa clique tem formato \perp . Ambos os formatos \ulcorner e \urcorner faltam em x . De todos os caminhos com dobra em x que têm formato \lrcorner ou \llcorner , escolhemos o que tem o menor segmento vertical e recolorimos esse caminho com $(1, 2)$. Em ambos os casos, as propriedades (I)-(IV) valem.

(ii) Exatamente um dos formatos \lrcorner , \llcorner , \ulcorner , \urcorner falta em x .

Pela simetria, podemos assumir que o formato que falta em x é \urcorner . Seja \mathcal{R} o conjunto de todos os caminhos de formato \lrcorner com dobra em x . Observamos que \mathcal{R} não é vazio, pois o formato \lrcorner não falta em x . Além disso, todos os caminhos de \mathcal{R} têm cor $(1, 1)$.

Se existe caminho $P \in \mathcal{R}$, cujo segmento horizontal está contido em algum outro caminho com dobra em x , então podemos recolorir P com $(2, 1)$. Caso contrário, se existir $P \in \mathcal{R}$ cujo segmento vertical está contido em algum outro caminho com dobra em x , recolorimos P com $(1, 2)$. Em ambos os casos, a escolha de P garante que as propriedades (I)-(IV) valem.

Falta considerarmos o caso em que, para cada um dos caminhos de \mathcal{R} , seu segmento horizontal (vertical) contém estritamente os segmentos horizontais (verticais) de todos os caminhos com dobra em x (em particular, $|\mathcal{R}| = 1$). Nesse caso, escolhemos qualquer caminho P_1 com formato \llcorner e qualquer caminho P_2 com formato \ulcorner , ambos

com dobra em x , e recolorimos P_1 com $(1, 2)$ e P_2 com $(2, 1)$. Observamos que as escolhas de P_1 e P_2 garantem que as propriedades (I)-(IV) valem.

(iii) Nenhum dos formatos \lrcorner , \llcorner , \ulcorner , \urcorner faltam em x .

Consideramos o menor segmento de todos os segmentos de caminhos com dobra em x (ou um deles, se existir mais de um), e o caminho Q ao qual ele pertence. Por simetria, podemos supor que Q tem formato \urcorner e que o menor segmento é o horizontal. Assim como no caso anterior, consideramos \mathcal{R} o conjunto de todos os caminhos de formato \lrcorner com dobra em x . Se existe $P \in \mathcal{R}$ cujo segmento horizontal (vertical) está contido em outro caminho com dobra em x , podemos recolorir P com $(2, 1)$ (ou $(1, 2)$, respectivamente) e recolorir Q com $(2, 1)$. As escolhas de P e Q garantem (I)-(IV).

Caso contrário, para cada caminho em \mathcal{R} , seu segmento horizontal (vertical) contém estritamente os segmentos horizontais (verticais) de todos os caminhos com dobra em x . Escolhemos qualquer caminho P_1 com formato \llcorner e qualquer caminho P_2 com formato \ulcorner , ambos com dobra em x , e recolorimos P_1 com $(1, 2)$ e P_2 com $(2, 1)$. Nesse caso, Q não é recolorido. De novo, as escolhas de P_1 e P_2 garantem (I)-(IV).

Dessa forma, construímos uma recoloração obedecendo às regras (I) a (IV) e, a partir dela, obtivemos uma 4-clique-coloração de G . \square

A demonstração do teorema 4.11 fornece um algoritmo para colorir as cliques de um grafo B_1 -EPG com quatro cores. No entanto, esse algoritmo pode utilizar quatro cores em grafos que são 2-clique-cromáticos ou 3-clique-cromáticos.

Além disso, como não encontraram exemplos de grafos B_1 -EPG que precisam de quatro cores para serem clique-coloridos, Bonomo et al. conjecturaram, em [6], que os grafos dessa classe são, na verdade, 3-clique-coloríveis. Existem grafos B_1 -EPG 3-clique-cromáticos como, por exemplo, os ciclos ímpares. Outro exemplo pode ser encontrado na figura 4.14.

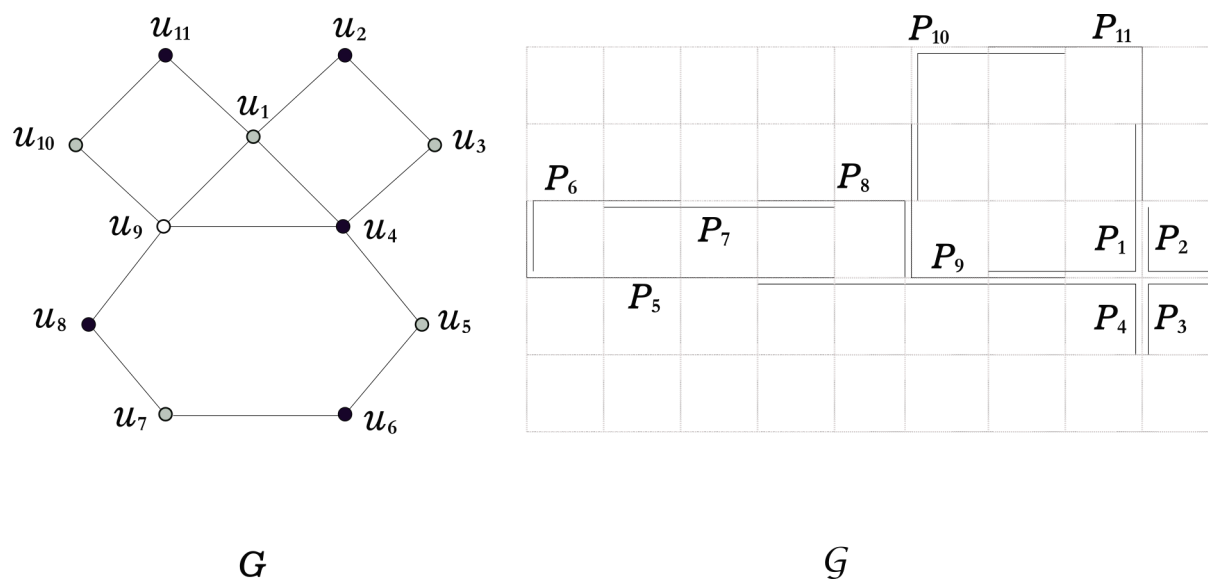


Figura 4.14 – Exemplo de um grafo B_1 -EPG 3-clique-cromático.

5 Grafos Planares

A classe dos grafos *planares* é a constituída pelos grafos que podem ser desenhados no plano sem interseção de arestas. Tal desenho é chamado de *representação plana* e pode ser visto como um grafo isomorfo ao original. A figura 5.1 exibe um grafo planar e uma representação plana desse grafo.

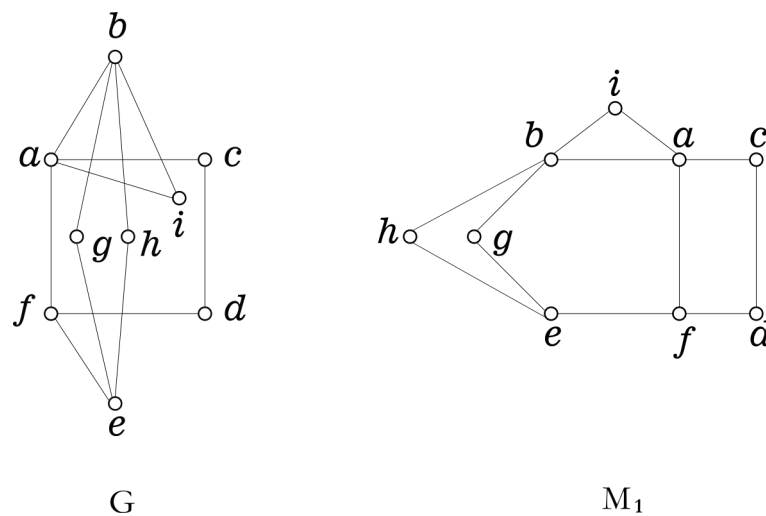


Figura 5.1 – Exemplo de um grafo planar G e uma representação plana M_1 .

Esta classe de grafos ganhou interesse com o início dos estudos acerca de coloração de mapas, em que países vizinhos deveriam receber cores distintas. Isso se deve ao fato de que podemos associar mapas no plano a grafos planares, da seguinte forma: associamos um vértice a cada país do mapa e dois vértices são adjacentes se, e somente se, os países correspondentes fazem fronteira.

Em 1852, após colorir um mapa dos vilarejos da Inglaterra usando apenas quatro cores, Francis Guthrie questionou se qualquer mapa poderia ser colorido usando no máximo essa quantidade de cores. O assunto ganhou interesse e vários matemáticos, como Augustus De Morgan, Alfred Kempe e Peter Tait, tentaram resolvê-lo, mas não obtiveram sucesso. A conjectura, que hoje chamamos de *Teorema das Quatro Cores*, permaneceu muitos anos em aberto e foi provada apenas em 1976, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, com o auxílio de computadores.

Teorema 5.1. *Em um mapa qualquer, os países podem ser coloridos com quatro cores de forma que países vizinhos tenham cores diferentes.*

Equivalentemente, na teoria dos grafos, esse problema pode ser enunciado como: os vértices de qualquer grafo planar conexo podem ser coloridos propriamente utilizando apenas quatro cores.

Um ponto importante para estudar tal conjectura e para o estudo da classe em geral é saber determinar quais grafos eram planares. É verdade que os grafos $K_{3,3}$ e K_5 não são planares. Mais especificamente, de acordo com o famoso teorema de Kuratowski que caracteriza os grafos desta classe, esses dois grafos são, essencialmente, os únicos grafos não-planares.

Teorema 5.2 (Kuratowski, 1930). *Um grafo é planar se, e somente se, não contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$ como subgrafo.*

O grafo exibido na figura 5.2 é uma subdivisão de K_5 e, portanto, não é planar.

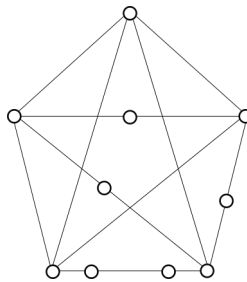


Figura 5.2 – Exemplo de uma subdivisão do grafo K_5 .

Como dito anteriormente, do Teorema das Quatro Cores, temos que todo grafo planar é 4-colorível. Entretanto, certos grafos desta classe admitem colorações próprias utilizando apenas três cores:

Teorema 5.3 (Grötzsch, 1959). *Todo grafo planar sem triângulos é 3-colorível. Além disso, toda 3-coloração de um C_4 ou C_5 do grafo pode ser estendida para uma 3-coloração de todo o grafo.*

Como em grafos sem triângulos, colorações próprias também são clique-colorações, temos que todo grafo planar sem triângulos é também 3-clique-colorível. A partir desse resultado, Mohar e Skrekovski [31] mostraram, em 1999, que todo grafo planar é 3-clique-colorível. Mais especificamente, mostraram que todo grafo planar admite uma 3-clique-coloração forte, ou seja, uma 3-clique-coloração em que nenhum triângulo é monocromático.

A partir deste resultado, é natural tentarmos restringir o problema para subclasses dos grafos planares, analisando se a cota obtida para o número clique-cromático pode ser reduzida. Caso não seja possível, passamos a buscar caracterizações dos grafos que sejam 3-clique-cromáticos. Foi com essa estratégia que Shan, Liang e Kang [35] mostraram que um grafo planar sem $K_{1,3}$ é 2-clique-colorível se, e somente se, é diferente de um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5.

Para a classe dos grafos outerplanares, os mesmos autores não obtiveram uma caracterização. Apesar disso, apresentaram em [28] um algoritmo que, dado um grafo outerplanar, fornece uma clique-coloração ótima para ele.

Durante este trabalho, nós investigamos o comportamento do problema na classe dos grafos Halin e conseguimos provar o seguinte teorema de caracterização: um grafo Halin é 3-clique-cromático se, e somente se, possui uma cadeia em que o primeiro e último termos são ciclos ímpares de tamanho pelo menos 5.

Apresentaremos todos os resultados citados neste capítulo, que está organizado da seguinte forma: na próxima seção, podem ser encontradas as definições e propriedades de grafos planares que serão necessárias para a compreensão dos resultados. Na seção 5.2, mostramos o resultado obtido por Mohar e Skrekovski a respeito da clique-coloração de grafos planares em geral. Na seção 5.3, exibimos os resultados conhecidos para clique-coloração de grafos planares sem $K_{1,3}$. A seção 5.4 apresenta o passo a passo feito por Shan, Liang e Kang para a obtenção do algoritmo que fornece uma clique-coloração ótima para grafos outerplanares. E, por fim, na última seção, provamos o teorema de caracterização obtido por nós, na classe dos grafos Halin.

Lembramos que todos os grafos considerados são conexos e simples.

5.1 Propriedades

Nesta seção, apresentaremos definições e propriedades básicas de grafos planares.

Uma representação plana de um grafo planar divide o plano em regiões conexas, cujos fechos são chamados de *faces*. Dentre essas regiões, exatamente uma não é limitada, a qual chamamos de *face externa*. Denotamos por $F(M)$ o conjunto de todas as faces da representação plana M . A *fronteira* de uma face f é o passeio fechado definido pelas arestas que delimitam f e o *grau* de f , denotado por $g(f)$, é o número de arestas na sua fronteira.

Na figura 5.1, a representação plana M_1 tem cinco faces. Sua face externa tem como fronteira o ciclo (a, c, d, f, e, h, b, i) e, portanto, tem grau igual a 8. Observamos que cada aresta de M_1 está na fronteira de exatamente duas faces. Em particular, a aresta ai está na face externa e também na face cuja fronteira é (a, b, i) .

De fato, se uma aresta e não é ponte, então e está na fronteira de exatamente duas faces da representação plana. Caso contrário, e está na fronteira de apenas uma face e aparece duas vezes no passeio que define a fronteira dessa face. Observamos que o grau de qualquer face é pelo menos o tamanho do menor ciclo do grafo.

Dada uma representação plana M de um grafo planar G , se C é um ciclo de G , podemos definir o *interior de C* , $Int(C)$, como o subgrafo de G formado por C e todos os vértices e arestas contidos na região delimitada por C , em M . De forma similar, $Ext(C)$ denota o *exterior de C* . Um triângulo T é um *triângulo separador* se $Int(T)$ e $Ext(T)$ são ambos não vazios. No grafo da figura 5.3, o triângulo formado pelos vértices u_4 , u_5 e u_7

é separador, mas o triângulo formado pelos vértices u_8 , u_9 e u_{10} não é separador, pois seu interior é vazio.

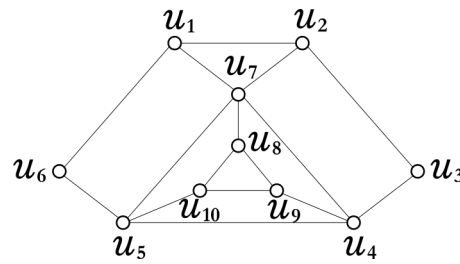


Figura 5.3 – Exemplo de um grafo contendo um triângulo separador.

Euler mostrou, através do teorema a seguir, que os números de faces, arestas e vértices de um grafo estão relacionados.

Teorema 5.4 (Euler, 1750). *Sejam G um grafo planar e M uma representação plana de G . Então, vale que $n - m + |F(M)| = 2$.*

Prova. Faremos a prova por indução no número de faces.

Se $|F(M)| = 1$, G não tem ciclos e, por hipótese, é conexo. Então, G é uma árvore e vale que $m = n - 1$ e, portanto, o teorema vale.

Suponhamos, então, que M seja uma representação plana de G com $|F(M)| \geq 2$. Como existem pelo menos duas faces, G tem ciclo. Seja e uma aresta que está em exatamente duas faces de M . Consideramos $G' = G - e$ e uma representação plana M' para G' , obtida a partir de M . Pela hipótese de indução, $|V(G')| - |E(G')| + |F(M')| = 2$. Usando que $|V(G')| = n$, $|E(G')| = m - 1$ e $|F(M')| = |F(M)| - 1$ na equação anterior, temos que $n - m + |F(M)| = 2$. \square

É importante observar que um grafo planar não possui uma única representação plana. Como exemplo, exibimos, na figura 5.4 uma outra representação plana para o grafo G da figura 5.1, diferente de M_1 .

A partir da relação obtida no Teorema de Euler, concluímos que a quantidade de faces de um grafo independe da representação plana que é utilizada, mas o mesmo não acontece com os graus das faces. Consideramos o grafo G planar e suas representações planas M_1 e M_2 , das figuras 5.1 e 5.4. Ambas as representações têm cinco faces, mas, como vimos, a face externa de M_1 tem grau igual a 8, enquanto M_2 não tem nenhuma face com esse grau.

Podemos observar que, intuitivamente, quanto maior é o número de arestas de um grafo em relação ao seu número de vértices, mais difícil se torna a obtenção de uma representação plana. De fato, a quantidade de arestas de um grafo planar é limitada e essa limitação está relacionada à ordem do grafo, como mostramos a seguir.

Proposição 5.7. *Seja G um grafo planar. Então, existe $v \in V(G)$ tal que $g(v) \leq 5$.*

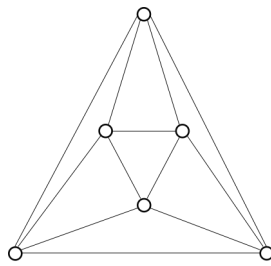
Prova. Se $n \leq 6$, a proposição vale. Consideramos, então, $n \geq 7$.

Suponhamos, por absurdo, que $g(v) \geq 6, \forall v \in V(G)$. Então,

$$2m = \sum_{v \in V(G)} g(v) \geq 6n$$

Assim, temos que $m \geq 3n$. Absurdo, pois G é planar e, portanto, pela proposição 5.5, vale que $m \leq 3n - 6$. \square

Em alguns casos, o grafo planar pode ter uma representação plana em que todas as suas faces são triângulos. Quando isso ocorre, dizemos que essa representação plana é uma *triangulação*. Caso apenas a face externa não seja um triângulo, dizemos que a representação é uma *quase-triangulação*. Um exemplo de triangulação é o octaedro, grafo exibido na figura 5.5. O grafo de Hajós e as k -rodas são exemplos de quase-triangulação.



Octaedro

Figura 5.5 – Exemplo de uma triangulação.

A definição de quase-triangulação aparece na proposição a seguir, que será a última que apresentaremos:

Proposição 5.8. *Sejam G um grafo planar sem triângulos separadores, M uma representação plana de G e C a fronteira da face externa de M . Se nenhuma aresta de $E(G) \setminus E(C)$ está em exatamente um triângulo de G , então M é uma quase-triangulação ou G é um grafo sem triângulos, exceto possivelmente o ciclo C .*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que M não é uma quase-triangulação e que G não é um grafo sem triângulos (com exceção, possivelmente, de C). Então, existe um vértice u em algum triângulo C' , diferente de C , tal que todos os triângulos contendo u não formam, localmente, uma quase-triangulação em volta de u . Como G é sem triângulos separadores, todos os triângulos de G , e em particular os que contém u , são faces. Com isso, existem pelo menos duas arestas incidentes a u que estão em exatamente um triângulo. Em particular, uma dessas arestas não está em C , o que contradiz a hipótese. \square

Tendo conhecimento das definições e propriedades expostas nesta seção, apresentaremos, nas próximas seções, resultados sobre clique-coloração em grafos planares e subclasses.

5.2 Clique-coloração

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos por Mohar e Skrekovski [31] a respeito do problema da clique-coloração para grafos planares em geral.

Como consequência direta do teorema de Grötzsch, temos que todo grafo planar sem triângulos é 3-clique-colorível. Entretanto, em 1999, Mohar e Skrekovski mostraram que esse resultado vale para toda a classe de grafos planares, ou seja, que todo grafo planar pode ser clique-colorido com apenas três cores.

Para obter tal resultado, os autores mostraram, inicialmente, que apenas duas cores são suficientes para clique-colorir grafos planares tais que cada aresta está em algum triângulo. Em seguida, mostraram que uma clique-coloração de um triângulo qualquer do grafo pode ser estendida para uma 3-clique-coloração forte de todo o grafo. Com esses resultados parciais e, utilizando o teorema de Grötzsch, é possível mostrar que todo grafo planar admite uma 3-clique-coloração forte. Mostraremos detalhadamente, nesta seção, as provas dos resultados citados acima.

Começamos supondo que cada aresta do grafo planar está em algum triângulo. Nesse caso, é possível usar o Teorema das Quatro Cores para mostrar que apenas duas cores são suficientes para clique-colorir todo o grafo.

Teorema 5.9. *Seja G um grafo planar, com pelo menos uma aresta, tal que toda aresta de G está em algum triângulo. Então G é 2-clique-colorível.*

Prova. Pelo Teorema das Quatro Cores, existe uma 4-coloração c de G . Consideramos $U_i \subseteq V$ o conjunto de vértices de G que foram coloridos com a cor i na coloração c , para $i = 1, \dots, 4$.

Definimos uma coloração c' em que, para cada vértice $v \in V$, $c'(v) = 1$ se $v \in U_1 \cup U_2$ e $c'(v) = 2$ se $v \in U_3 \cup U_4$. Como toda aresta de G está contida em um triângulo, toda clique maximal de G tem pelo menos três vértices e, portanto, recebe pelo menos três cores na 4-coloração c que consideramos.

Dessa forma, toda clique maximal recebe cores 1 e 2 na coloração c' . Logo, c' é uma 2-clique-coloração de G . □

Como comentado anteriormente, Mohar e Skrekovski mostraram que, em um grafo planar, uma clique-coloração de um triângulo qualquer pode ser estendida para uma

3-clique-coloração de todo o grafo. Para provar este resultado, mostraram que é possível fazer essa extensão se o triângulo é único no grafo ou se é a fronteira da sua face externa.

Lema 5.10. *Sejam G um grafo planar com exatamente um triângulo, $T = uvw$, e c uma clique-coloração de T . Então é possível estender c para uma 3-clique-coloração de G .*

Prova. Se dois vértices de T tiverem recebido a mesma cor na clique-coloração c , podemos assumir, sem perda de generalidade, que tenham sido os vértices u e v .

Consideramos, então, o grafo G' , obtido ao subdividirmos a aresta uv , inserindo um novo vértice x de grau 2. Colorimos x de forma que ele receba uma cor diferente da cor de u e v .

Assim, temos uma 3-coloração de um ciclo de tamanho 4 de G' . Pelo teorema de Grötzsch, podemos estender essa 3-coloração para todo o grafo G' . Como G' é sem triângulos, essa 3-coloração é também uma 3-clique-coloração de G' . Assim, é uma 3-clique-coloração de G , estendendo c .

Caso todos os três vértices de T tenham recebido cores distintas em c , podemos utilizar o mesmo argumento para qualquer aresta de T . \square

Lema 5.11. *Sejam G um grafo planar, M uma representação plana de G cuja fronteira da face externa seja um triângulo T e c uma clique-coloração de T . Então c pode ser estendida para uma 3-clique-coloração forte de G .*

Prova. A prova será feita por indução em $|V(G)| + |E(G)|$.

Suponhamos que $G \neq C$. Seja T' um triângulo de G tal que existe ao menos um vértice no seu interior, mas, ao mesmo tempo, $Int(T')$ seja o menor possível.

Suponhamos $T' \neq T$. Seja G_1 o grafo obtido ao retirarmos todos os vértices e arestas do interior de T' . Pela hipótese de indução, c pode ser estendida para uma 3-clique-coloração forte c_1 de G_1 .

Como c_1 é forte, induz uma 3-clique-coloração c' do triângulo T' . De novo pela hipótese de indução, c' pode ser estendida para uma 3-clique-coloração forte de $Int(T')$. Como todo triângulo de G está em G_1 ou em $Int(T')$, a coloração que obtemos é uma 3-clique-coloração forte de G .

Suponhamos $T' = T$. Pela escolha de T' , G não tem triângulos separadores. Suponhamos que exista aresta $e = uv$ com $u \notin V(T)$ tal que e está em exatamente um triângulo $T^* = uvw$ de G . Então, T^* é fronteira de uma face e $T^* \neq T$.

Sejam v_1, v_2, \dots, v_g , com $g = g(u)$, os vizinhos de u enumerados no sentido horário, com $v = v_1$ e $w = v_2$. Seja $k \geq 2$ tal que $uv_i v_{i+1}$ é triângulo para $i = 1, \dots, k-1$, mas $uv_k v_{k+1}$

(tomando o índice módulo g) não é triângulo em G . Como e está em exatamente um triângulo, k existe.

Consideramos G' como o subgrafo obtido ao removermos as arestas $uv_2, uv_4, uv_6, \dots, uv_k$ (se k é par) ou $uv_2, uv_4, uv_6, \dots, uv_{k-1}$ (se k é ímpar). Pela hipótese de indução, c pode ser estendida para uma 3-clique-coloração de G' . Em G' , nenhuma das arestas uv_1, uv_3, uv_5, \dots está em triângulo e, portanto, são cliques maximais. Assim, os vértices v_1, v_3, v_5, \dots recebem cores diferentes da cor de u . Então, a 3-clique-coloração de G' é também uma 3-clique-coloração forte de G .

Suponhamos agora que nenhuma aresta de $E(G) \setminus E(T)$ esteja em exatamente um triângulo em G . Então, pela proposição 5.8 e usando o fato de que T é um triângulo, M é uma triangulação ou T é o único triângulo de G .

Se T é o único triângulo de G , então, pelo lema 5.10, c pode ser estendida para uma 3-clique-coloração de G . Caso contrário, se M é uma triangulação, então cada aresta de G está em um triângulo de G . Pelo teorema 5.9, G tem uma 3-clique-coloração forte. Além disso, podemos permutar as cores da 4-coloração de G dada na prova desse teorema para que a 3-clique-coloração forte de G seja exatamente uma extensão de c . \square

Assim, temos que é possível estender uma clique-coloração c de um triângulo T qualquer de um grafo planar G para uma 3-clique-coloração de G . Para isso, basta usarmos o lema 5.11 para estender c separadamente para $Int(T)$ e para $Ext(T)$.

Com os resultados já obtidos a respeito da clique-coloração dos grafos planares, é possível garantir a existência de uma 3-clique-coloração forte para todo grafo planar.

Teorema 5.12. *Todo grafo planar admite uma 3-clique-coloração forte.*

Prova. Seja G um grafo planar. Se G tem um triângulo T , colorimos os vértices de T e, então, estendemos essa clique-coloração para uma 3-clique-coloração de G . Caso contrário, $\chi_c(G) = \chi(G) \leq 3$, pelo teorema de Grötzsch. \square

Observamos que o teorema 5.9 fornece uma condição suficiente para um grafo planar ser 2-clique-colorível, mas não necessária. Por exemplo, as arestas do grafo da figura 5.3 não estão todas em triângulos, mas pode ser clique-colorido utilizando duas cores, como mostramos na figura 5.6.

Também é importante observar que a cota superior obtida no teorema 5.12 é justa já que existem grafos planares 3-clique-cromáticos. Um exemplo pode ser encontrado na figura 5.7.

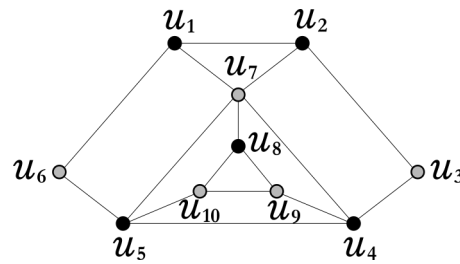


Figura 5.6 – Uma 2-clique-coloração para o grafo da figura 5.3

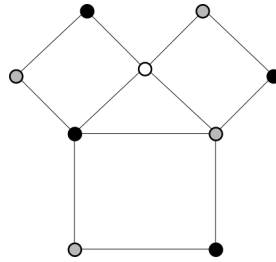


Figura 5.7 – Exemplo de um grafo planar 3-clique-cromático.

5.3 Grafos Planares sem $K_{1,3}$

Nesta seção apresentaremos propriedades estruturais dos grafos planares sem $K_{1,3}$ e, a partir delas, mostraremos condições suficientes obtidas por Shan, Liang e Kang [35] para que um grafo dessa classe admita uma clique-coloração com apenas duas cores.

Uma propriedade conhecida dos grafos planares sem $K_{1,3}$ diz respeito a uma cota superior para o grau máximo.

Proposição 5.13. *Seja G um grafo planar sem $K_{1,3}$. Então $\Delta(G) \leq 6$.*

A proposição a seguir mostra que, se adicionarmos a hipótese do grafo não ter cliques de tamanho 4, essa cota superior pode ser reduzida em uma unidade e, além disso, que os vizinhos de um vértice de grau igual a 5 induzem um ciclo no grafo. Em seguida, mostramos uma condição suficiente para existir uma 2-clique-coloração para grafos sem $K_{1,3}$, envolvendo a existência desse vértice.

Proposição 5.14 ([35]). *Seja G um grafo planar sem $K_{1,3}$ e sem cliques de tamanho 4. Então, $\Delta(G) \leq 5$ e $G[N[v]]$ é uma 5-roda para todo vértice v de grau igual a 5 em G .*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $\Delta(G) > 5$. Pela proposição 5.13, $\Delta(G) = 6$ e, portanto, existe um vértice $u \in V(G)$ com $g(u) = 6$. Pelo número de Ramsey $r(3, 3) = 6$, o subgrafo induzido por $N(u)$ tem um conjunto independente de tamanho 3 ou um triângulo como subgrafo induzido. Assim, $G[N[u]]$ contém um $K_{1,3}$ ou uma clique de tamanho 4 com subgrafo induzido, o que contradiz as hipóteses. Logo, $\Delta(G) \leq 5$.

Seja $v \in V(G)$ com $g(v) = 5$. Como G não tem clique de tamanho 4, $G[N(v)]$ não tem triângulos. Também, como G é sem $K_{1,3}$, o tamanho do maior conjunto independente de vértices de $G[N(v)]$ deve ser, no máximo, 2. Dessa forma, temos que $G[N(v)]$ é um ciclo C_5 e, portanto, $G[N[v]]$ é uma 5-roda. \square

Lema 5.15 ([35]). *Sejam G um grafo planar sem $K_{1,3}$ e sem cliques de tamanho 4 e v um vértice de grau 5 em G . Se $G - v$ é 2-clique-colorível, então G é 2-clique-colorível.*

Prova. Pela proposição 5.14, $\Delta(G) \leq 5$. Suponhamos, por absurdo, que G não seja 2-clique-colorível. Seja c' uma 2-clique-coloração de $G - v$ com as cores 1 e 2. Essa coloração c' não pode ser estendida para uma 2-clique-coloração de G . Então, existem duas cliques maximais K e L de G com $K \cap L = \{v\}$ tais que os vértices de $K - v$ têm cor 1 em c' e os vértices de $L - v$ têm cor 2 em c' . Assim, v não pode receber nenhuma das duas cores em uma extensão de c' .

Pela proposição 5.14, $G[N[v]]$ é uma 5-roda com centro em v . Com isso, temos que K e L são triângulos. Sejam $N(v) = \{u_1, \dots, u_5\}$ e, sem perda de generalidade, $V(K) = \{v, u_1, u_2\}$ e $V(L) = \{v, u_3, u_4\}$. Como observamos acima, $c'(u_1) = c'(u_2) = 1$ e $c'(u_3) = c'(u_4) = 2$. Podemos supor $c'(u_5) = 1$.

Como G não tem cliques de tamanho 4 e c' é uma 2-clique-coloração de $G - v$, existem vértices w_1, w_2, w_3 em $G - N[v]$ tais que $(G - v)[\{w_1, u_1, u_2\}]$, $(G - v)[\{w_2, u_3, u_4\}]$ e $(G - v)[\{w_3, u_1, u_5\}]$ são cliques maximais, com $c'(w_1) = c'(w_3) = 2$ e $c'(w_2) = 1$.

Suponhamos que $w_1 = w_3$. Nesse caso, a proposição 5.14 implica que $g(u_1) = 4$. Então, trocando a cor de u_1 para a cor 2 e atribuindo cor 1 ao vértice v , conseguimos uma 2-clique-coloração de G , uma contradição.

Suponhamos, então, $w_1 \neq w_3$. Nesse caso, $g(u_1) = 5$ e, pela proposição 5.14, $G[N[u_1]]$ é uma 5-roda e, portanto, $w_1 w_3 \in E(G)$. Trocando a cor de u_3 ou u_4 , existem cliques maximais monocromáticas M_1 ou M_2 em $G - v$, contendo u_3 ou u_4 , respectivamente, pois caso contrário, poderíamos obter uma 2-clique-coloração de G atribuindo a cor 2 ao vértice v . Seja $V_1 = V(G) - (N[v] \cup \{w_1, w_2, w_3\})$. Consideramos os três seguintes casos para M_1 e M_2 .

(i) $M_1 \cap V_1 = \emptyset$ e $M_2 \cap V_1 = \emptyset$

Temos que $M_1 = \{u_2, u_3, w_2\}$ e $M_2 = \{u_4, u_5, w_2\}$. Então, $g(u_2) = g(u_5) = 5$ e, pela proposição 5.14, $G[N[u_2]]$ e $G[N[u_5]]$ são 5-rodas. Com isso, temos que $w_1 w_2, w_2 w_3 \in E(G)$. Assim, $g(w_2) = 6$, como o grafo F_1 da figura 5.8, contradizendo o fato de que $\Delta(G) \leq 5$.

(ii) Exatamente um dos conjuntos $M_1 \cap V_1$ e $M_2 \cap V_1$ é vazio.

Pela simetria, podemos assumir $M_1 \cap V_1 = \emptyset$ e $M_2 \cap V_1 \neq \emptyset$. Assim como no caso anterior, $M_1 = \{u_2, u_3, w_2\}$. Pela proposição 5.14, $w_1w_2 \in E(G)$ e $g(u_3) = 4$. Por outro lado, como $\Delta(G) \leq 5$, temos que $|M_2 \cap V_1| = 1$. Seja $w_5 \in M_2 \cap V_1$, com $c'(w_5) = 1$. Então, w_5 é adjacente aos vértices u_5 e w_2 , pois, pela proposição 5.14, $G[N[u_4]]$ é uma 5-roda. Como $g(u_5) = g(w_2) = 5$, pelo mesmo argumento anterior, $w_3w_5, w_1w_5 \in E(G)$. De novo pela proposição 5.14, $g(w_3) = 4$. Como os vértices já têm os maiores graus possíveis, $G = F_2$, onde F_2 é o grafo mostrado na figura 5.8. Mas então todas as arestas de G estão em triângulos e, pelo teorema 5.9, G é 2-clique-colorível, uma contradição.

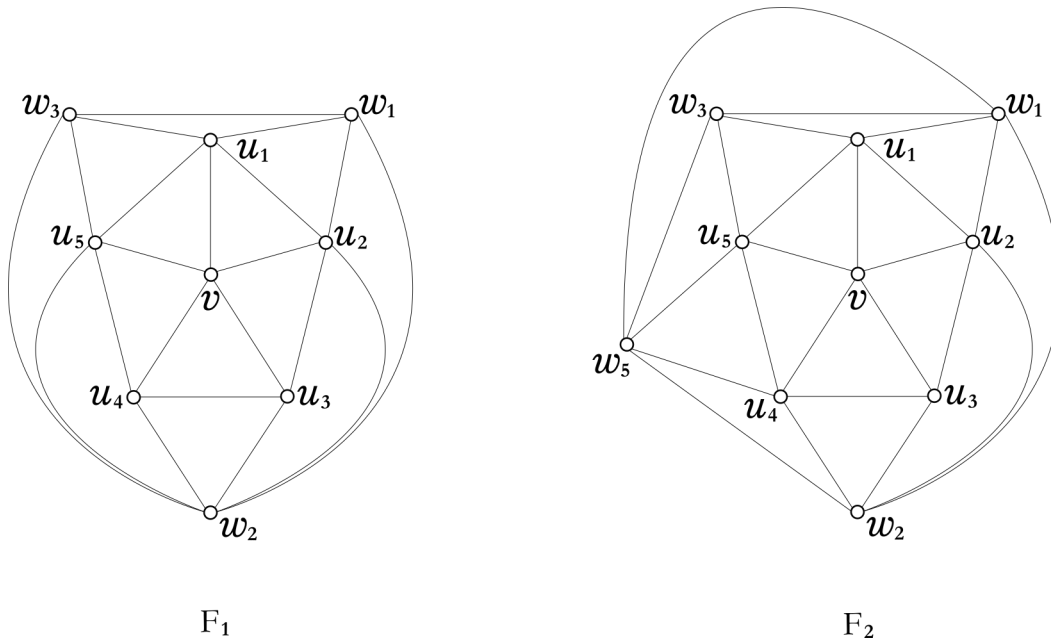


Figura 5.8 – Grafos F_1 e F_2 .

(iii) $M_1 \cap V_1 \neq \emptyset$ e $M_2 \cap V_1 \neq \emptyset$

Assim como no caso (ii), podemos mostrar que existem dois vértices distintos $w_4, w_5 \in V_1$ tais que w_4 é adjacente aos vértices u_2, u_3, w_1 e w_2 , enquanto w_5 é adjacente aos vértices u_4, u_5, w_2 e w_3 , com $c'(w_4) = c'(w_5) = 1$ (grafo F_3 da figura 5.9). Seja $V_2 = N[v] \cup \{w_1, \dots, w_5\}$. Temos que $V \neq V_2$ pois, caso contrário, conseguiríamos uma 2-clique-coloração de G trocando as cores de u_3 e w_4 e colorindo v com a cor 2. Seja $t \in V - V_2$. Como G é conexo, podemos assumir que t é adjacente a w_1 . Com isso, pela proposição 5.14, t é adjacente a w_i , para $i = 1, \dots, 5$. Como todos os vértices já têm o maior grau possível, temos que $G = F_4$, onde F_4 é o grafo mostrado na figura 5.9. Todas as arestas de G estão em triângulos e, pelo teorema 5.9, G é 2-clique-colorível, uma contradição.

Como todos os possíveis casos chegam a contradições, concluímos que G é, de fato, 2-clique-colorível. \square

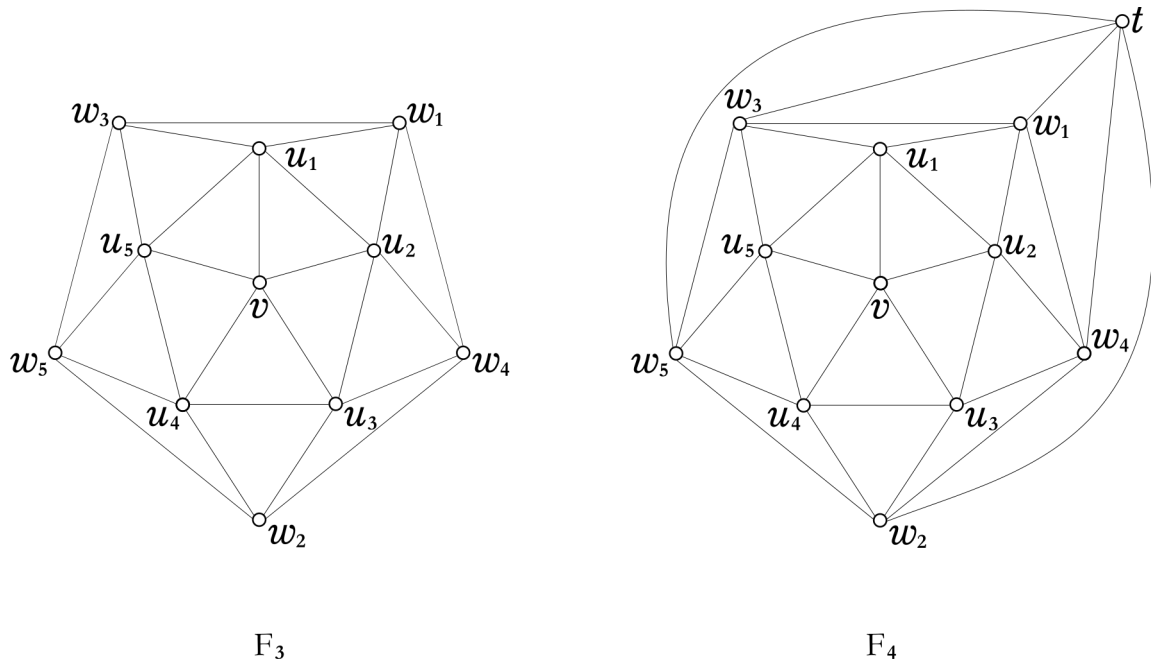


Figura 5.9 – Grafos F_3 e F_4 .

A figura 5.10 mostra um exemplo de um grafo planar sem $K_{1,3}$ que tem clique de tamanho 4 e grau máximo igual a 6. Assim, podemos observar que, nesses casos, a cota superior dada na proposição 5.13 é justa. Apesar disso, é possível garantir a existência de um vértice de grau no máximo 5 em uma clique de tamanho 4. A partir disso, obtemos outra condição suficiente para que grafos planares em $K_{1,3}$ sejam 2-clique-coloríveis.

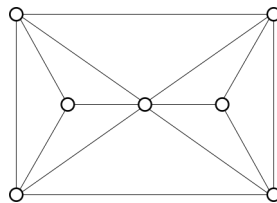


Figura 5.10 – Exemplo de um grafo planar sem $K_{1,3}$, com clique de tamanho 4 e grau máximo igual a 6

Proposição 5.16 ([35]). *Seja G um grafo planar sem $K_{1,3}$ com $\omega(G) = 4$. Então, existe $v \in V(G)$ com $g(v) \leq 5$ em G que está em uma clique de tamanho 4.*

Prova. Se $\Delta(G) \leq 5$, a proposição vale. Caso contrário, pela proposição 5.13, $\Delta(G) = 6$. Pela proposição 5.7, existe vértice $v \in V(G)$, com $g(v) \leq 5$ tal que v é adjacente a um vértice u de grau igual a 6 em G . Consideramos $G' = G[N(u)]$. Basta mostrarmos que v está em um triângulo de G' .

Como G não tem nenhuma subdivisão de K_5 e nem $K_{1,3}$, então G' não contém uma subdivisão de K_4 e $\alpha'(G') = 2$. Com isso, temos que $\delta(G') \geq 2$ e, portanto, v está em um

ciclo em G' . Suponhamos que v não esteja em um triângulo de G' . Então, v está em um ciclo de tamanho 4 ou 5 em G' .

Suponhamos que v esteja em um C_4 . Sejam $x_1, x_2 \in N(u) - V(C_4)$. Como v não está em triângulo e $\alpha(G') = 2$, cada x_i é adjacente a exatamente dois vértices consecutivos do C_4 , diferentes de v , e $x_1x_2 \in E(G)$. Mas, então, G' tem uma subdivisão de K_4 , o que contradiz o fato de G ser planar.

Suponhamos agora que v esteja em um C_5 e seja $x \in N(u) - V(C_5)$. Como $\alpha(G') = 2$, então x é adjacente a pelo menos três vértices consecutivos do C_5 , diferentes de v . Com isso, G' tem uma subdivisão de K_4 , que é uma contradição. Logo, v está em um triângulo de G' e, portanto, em uma clique de tamanho 4 de G . \square

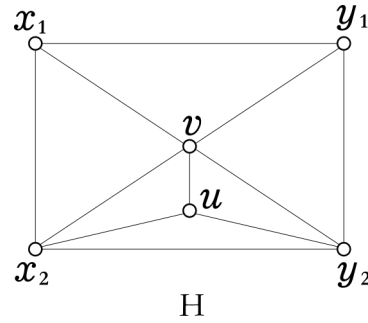
Lema 5.17 ([35]). *Sejam G um grafo planar sem $K_{1,3}$ e v um vértice de grau no máximo 5 que está em uma clique de tamanho 4. Se $G - v$ é 2-clique-colorível, então G é 2-clique-colorível.*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que G não seja 2-clique-colorível e consideramos c' uma 2-clique-coloração de $G - v$ com cores 1 e 2. Como $\chi_c(G) \geq 3$, é impossível estendermos c' para uma 2-clique-coloração de G . Então, existem duas cliques maximais K e L em G com $K \cap L = \{v\}$ tais que os vértices de $Q := K - v$ receberam cor 1 em c' e os vértices de $R := L - v$ receberam cor 2 em c' . Assim, v não pode receber nenhuma das duas cores em uma extensão de c' . Como c' é uma 2-clique-coloração de $G - v$, existem cliques Q' e R' em $G - v$ tais que $Q' = Q \cup q$ e $R' = R \cup r$, com $q \notin V(Q)$, $c'(q) = 2$ e $r \notin V(R)$, $c'(r) = 1$.

(i) Uma das cliques K e L é de tamanho 4.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que K tenha tamanho 4. Pela planaridade, G é sem K_5 e, portanto, os vértices q e v não são adjacentes. Consideramos o subgrafo G' obtido pela remoção dos vértices de Q . Não existe caminho entre os vértices q e v em G' , pois, caso contrário, encontraríamos uma subdivisão de K_5 em G . Seja C o componente conexo de G' que contém v . Definimos uma coloração c dos vértices de G da seguinte forma: colorimos v com a cor 2, trocamos a cor dos vértices de $C - v$ e atribuímos a cor dada em c' para os outros vértices. Queremos mostrar que c é uma 2-clique-coloração de G .

Suponhamos que exista uma clique maximal M de G monocromática na coloração c . Pela forma com c foi feita, M deve conter pelo menos um vértice k de Q e vértices de C . Como os vértices de Q estão coloridos com a cor 1 e M é monocromática, todos os vértices de M receberam cor 1. Com isso, temos que v não está em M , já que $c(v) = 2$. Então, M contém algum vértice c que não é adjacente a v e c deve ser um vértice de C . Mas então o conjunto de vértices $\{k, q, v, c\}$ induz um $K_{1,3}$ centrado em k , o que é um absurdo.

Figura 5.11 – Grafo H .

(ii) Nenhuma das cliques K e L é de tamanho 4.

Nesse caso, K e L são triângulos, pois G é sem K_5 . Sejam $V(K) = \{v, x_1, x_2\}$ e $V(L) = \{v, y_1, y_2\}$. Por hipótese, v tem grau no máximo 5 e está em uma clique de tamanho 4. Então, existe um vértice u tal que o conjunto $\{v, u, x_i, y_i\}$ induz uma clique de tamanho 4, para algum $i \in \{1, 2\}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, $i = 2$. Como G é sem $K_{1,3}$, os vértices x_1 e y_1 são adjacentes. Assim, $G[N[v]]$ é isomorfo ao grafo H da figura 5.11.

Temos que $c'(x_1) = c'(x_2) = 1$, $c'(y_1) = c'(y_2) = 2$, $c'(q) = 2$ e $c'(r) = 1$. Definimos uma coloração c dos vértices de G da seguinte forma: trocamos as cores de x_2 e y_2 , atribuímos 1 ou 2 para v e fazemos $c(u) = c'(u)$, para todos os vértices $u \in V(G) - \{v, x_2, y_2\}$. Queremos mostrar que c é uma 2-clique-coloração de G .

Suponhamos que exista uma clique maximal M de G monocromática na coloração c . Então, M deve conter exatamente um vértice de $\{x_2, y_2\}$, digamos x_2 , e exatamente um vértice k de $V - (N[v] \cup \{q, r\})$, pois, por hipótese, $\Delta(G) \leq 6$ e x_2 já tem cinco vizinhos em $G[N[v]]$. Como M é monocromática, $c(k) = c(x_2) = 2$. Então, k não é adjacente aos vértices x_1 e y_2 , caso contrário, M não seria uma clique maximal monocromática. Mas então o conjunto de vértices $\{x_1, x_2, y_2, k\}$ induz um $K_{1,3}$ centrado em x_2 , o que é um absurdo.

Em ambos os casos, c é uma 2-clique-coloração de G e, portanto, G é 2-clique-colorável. \square

Para grafos sem $K_{1,3}$ com grau máximo estritamente menor do que 5, Bacsó e Tuza [3] provaram o teorema 3.4, mostrando que é suficiente que o grafo seja diferente de um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5 para que admita uma 2-clique-coloração. Em particular, o resultado vale para grafos planares dentro desta classe. Shan, Liang e Kang mostraram que esse resultado vale para todos os grafos planares sem $K_{1,3}$. Com isso, provaram a implicação não-trivial do teorema a seguir, que caracteriza os grafos planares sem $K_{1,3}$ que são 2-clique-coloráveis.

Teorema 5.18. *Seja G um grafo planar sem $K_{1,3}$. Então G é 2-clique-colorível se, e somente se, G é diferente de um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5.*

Prova. (\Rightarrow) Suponhamos, por absurdo, que G seja um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5. Então, $\chi_C(G) = 3$. Absurdo, pois contradiz a hipótese de que G é 2-clique-colorível.

(\Leftarrow) A prova será feita por indução em n . Se $n \leq 5$, então $\Delta(G) \leq 4$ e, pelo lema 3.4, o teorema vale. Suponhamos, então, $n \geq 6$. De novo pelo lema 3.4, podemos assumir $\Delta(G) \geq 5$.

Suponhamos que G não tenha cliques de tamanho 4. Pela proposição 5.14, $\Delta(G) = 5$ e $G[N[v]]$ é uma 5-roda, onde $v \in V(G)$ com $g(v) = 5$. Se $G = G[N[v]]$, então G é 2-clique-colorível. Caso contrário, $G - v$ é um grafo planar sem $K_{1,3}$ diferente de um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5. Pela hipótese de indução, $G - v$ é 2-clique-colorível. Então, G é 2-clique-colorível, pelo lema 5.15.

Suponhamos, agora, que G tenha clique de tamanho 4. Pela proposição 5.16, existe $v \in V(G)$ com $g(v) \leq 5$ que está em uma clique de tamanho 4. Então, $G - v$ ainda é um grafo planar sem $K_{1,3}$, diferente de um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5. Pela hipótese de indução, $G - v$ é 2-clique-colorível. Então, G é 2-clique-colorível, pelo lema 5.17. \square

Com isso, temos que os ciclos ímpares de tamanho pelo menos 5 são os únicos grafos planares sem $K_{1,3}$ que são 3-clique-cromáticos. Assim, concluímos que o problema da clique-coloração está completamente resolvido para grafos desta classe.

5.4 Grafos Outerplanares

Um grafo é *outerplanar* se admite uma representação plana em que todos os seus vértices estão na fronteira da face externa, como o grafo exibido na figura 5.12.

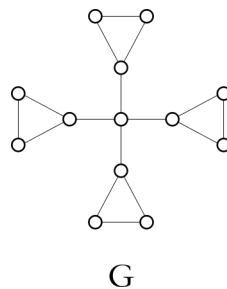


Figura 5.12 – Exemplo de um grafo outerplanar.

O primeiro estudo sobre grafos outerplanares foi [10], em que Chartrand e Harary introduziram e nomearam a classe. Nesse mesmo trabalho, provaram um análogo do

Teorema de Kuratowski para os grafos outerplanares: um grafo é outerplanar se, e somente se, não contém uma subdivisão de K_4 ou de $K_{2,3}$ como subgrafo.

Observamos que um grafo conexo e planar é outerplanar se, e somente se, cada um dos seus blocos é outerplanar. Assim, um grafo outerplanar 2-conexo é um bloco e sua face externa é um ciclo.

Como formam uma subclasse dos planares, os grafos outerplanares são 3-clique-coloríveis. Teoremas que caracterizem os grafos outerplanares 3-clique-cromáticos ainda não são conhecidos. Por outro lado, Shan, Liang e Kang apresentaram em [28] um algoritmo que fornece uma clique-coloração ótima para grafos outerplanares. Mostraremos, nesta seção, os resultados obtidos por eles, que são necessários para a construção desse algoritmo.

Começamos apresentando uma propriedade dos grafos outerplanares.

Lema 5.19. *Seja G um grafo outerplanar. Então, pelo menos um dos seguintes casos acontece:*

1. *Existe um vértice $u_1 \in V(G)$ com grau igual a 1;*
2. *Existem dois vértices $u_1, u_2 \in V(G)$ de grau igual a 2 tais que $u_1u_2 \in E(G)$;*
3. *Existe um triângulo xu_1y em G tal que $g(u_1) = 2$ e $g(x) = 3$;*
4. *Existem dois triângulos xu_1v_1 e xu_2v_2 em G tais que $g(u_1) = g(u_2) = 2$, $g(x) = 4$ e esses cinco vértices são todos distintos.*

Como consequência direta do lema 5.19, temos que todo grafo outerplanar tem ao menos um vértice de grau no máximo igual a 2. A existência desse vértice nos dá um passo a passo para obter uma 3-clique-coloração de um grafo outerplanar:

Seja G um grafo outerplanar de ordem n . Então, existe vértice $v_1 \in V(G)$ com $g_G(v_1) \leq 2$. Consideramos $G_1 = G - v_1$. Temos que G_1 ainda é um grafo outerplanar e, portanto, existe $v_2 \in V(G_1)$ com $g_{G_1}(v_2) \leq 2$. Então, $G_2 = G_1 - v_2$ é outerplanar. Podemos seguir com o raciocínio até obtermos o grafo trivial $G_{n-1} = G_{n-2} - v_{n-1}$. Assim, para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, temos que $G_i = G_{i-1} - v_i$ (consideramos $G_0 = G$) é um grafo outerplanar e $v_i \in V(G_{i-1})$ é um vértice de grau no máximo igual a 2 em G_{i-1} .

Atribuímos uma cor ao único vértice de $V(G_{n-1})$. Podemos atribuir também uma cor ao vértice v_{n-1} de forma a obter uma clique-coloração de G_{n-2} . A partir daí, como o grau de v_i em G_{i-1} é no máximo igual a 2 e queremos obter uma clique-coloração com três cores, sempre existe uma cor disponível para ser atribuída ao vértice v_i . Assim, podemos aplicar esse processo até termos atribuído cores a todos os vértices de G , obtendo uma 3-clique-coloração.

Observamos que, a partir deste ponto, sempre que precisarmos construir uma 3-clique-coloração de um grafo outerplanar, estaremos nos referindo ao processo descrito acima.

No caso de grafos outerplanares 2-conexos, uma análise sobre as arestas que estão na sua face externa fornece três estruturas possíveis, dependendo dessas arestas estarem ou não em triângulos do grafo.

Lema 5.20. *Sejam G um grafo outerplanar 2-conexo e o ciclo $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ a fronteira da face externa de G . Então, ao menos uma das seguintes situações acontece:*

1. *Nenhuma aresta do ciclo C está em triângulo de G ;*
2. *Existe um triângulo $v_i v_{i+1} v_{i+2}$ em G ;*
3. *Existe um triângulo $v_i v_{i+1} v_j$ em G ($j \neq i - 2, i - 1, i + 2, i + 3$) tal que nenhuma aresta do caminho $P = C - \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}\}$ está em triângulo de G (consideramos $v_n = v_0$).*

A partir das estruturas obtidas no lema 5.20, é possível provar resultados que serão necessários para obtermos uma clique-coloração própria de um grafo outerplanar.

Lema 5.21. *Sejam G um grafo outerplanar 2-conexo e o ciclo $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ a fronteira da face externa de G tal que no máximo uma aresta de C está em triângulo de G . Se G é 2-clique-colorável, então a 2-clique-coloração é única, uma vez determinada a cor de um vértice de G .*

Prova. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_1 v_n$ é a única aresta de C que está em algum triângulo de G (se existir). Então, toda aresta do caminho $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ é uma clique maximal. Assim, usando apenas duas cores, ao atribuirmos uma cor a um vértice de G , por exemplo v_1 , as cores dos vértices $v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ são determinadas. Logo, se G é 2-clique-colorável, a 2-clique-coloração é única uma vez que um vértice de G recebe uma cor. □

Conseguimos um resultado análogo para o caso em que o grafo outerplanar não é necessariamente 2-conexo:

Lema 5.22. *Sejam G um grafo outerplanar e C a fronteira da face externa de G tal que nenhuma aresta de C está em triângulo de G . Se G é 2-clique-colorável, então a 2-clique-coloração é única, uma vez determinada a cor de um vértice de G .*

Prova. A prova é por indução no número no número l de blocos de G . Se $l = 1$, então G é um grafo outerplanar 2-conexo e o resultado vale, pelo lema 5.21.

Suponhamos, então, que G tenha l blocos, com $l \geq 1$. Seja B um bloco-folha de G e x o vértice de corte contido em B . Consideramos o grafo $G' = G - (V(B) - x)$. Temos que G' é outerplanar, conexo e tem $l - 1$ blocos. Além disso, observamos que toda aresta que está na fronteira da face externa de G' (respectivamente, de B) não está em um triângulo de G' (respectivamente, de B). Pela hipótese de indução, se G' (respectivamente, B) é 2-clique-colorível, a 2-clique-coloração de G' (respectivamente, de B) é única uma vez que atribuímos uma cor a um vértice de G' (respectivamente, de B).

Como, por hipótese, G é 2-clique-colorível, todos os blocos de G são 2-clique-coloríveis e o mesmo vale para G' . Vamos analisar o que acontece quando atribuímos uma cor a um vértice $v \in V(G)$. Se $v \in V(G')$, então existe uma única 2-clique-coloração c' para G' . Como $x \in V(B)$ e foi colorido por c' , existe uma única 2-clique-coloração c'' para B . Dessa forma, temos uma única 2-clique-coloração de G . O raciocínio é análogo para o caso em que $v \in V(B)$. \square

Analisamos agora o caso em que o grafo outerplanar é 2-conexo e possui a estrutura 2 do lema 5.20. Nesse caso, mostramos que podemos estender uma clique-coloração ótima de G' para uma clique-coloração ótima de G , onde G' é como a seguir:

Lema 5.23. *Sejam G um grafo outerplanar 2-conexo e o ciclo $C = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ a fronteira da face externa de G . Se existem três vértices consecutivos em C que estão em um triângulo de G (digamos, v_1, v_2 e v_3), temos que:*

1. *Suponha que $v_1v_2v_3$ seja o único triângulo contendo a corda $e = v_1v_3$. Então, G é 2-clique-colorível se, e somente se, o grafo $G' = G - v_2 - e$ é 2-clique-colorível.*
2. *Suponha que a corda $e = v_1v_3$ esteja em dois triângulos de G . Então G é 2-clique-colorível se, e somente se, o grafo $G' = G - v_2$ é 2-clique-colorível.*

Prova. Observamos que o vértice v_2 tem grau igual a 2 em G e que as cliques maximais de G' são também cliques maximais de G , em ambos os casos. Isso mostra que, se G é 2-clique-colorível, então G' é 2-clique-colorível. Para mostrar a implicação contrária, supomos que G' é 2-clique-colorível e consideramos uma 2-clique-coloração c de G' . Podemos estender c para G , atribuindo ao vértice v_2 uma cor diferente de $c(v_1)$. Assim, temos uma 2-clique-coloração para G . \square

Resta, então, considerarmos o caso em que o grafo outerplanar é 2-conexo e possui a terceira estrutura do lema 5.20. A análise desse caso será subdividida em subcasos, que dependem, por exemplo, da existência de outro triângulo de G contendo a aresta $v_i v_j$. Os quatro próximos lemas mostram, com detalhes, essa análise.

Lema 5.24. *Sejam G um grafo outerplanar 2-conexo, como descrito no caso 3 do lema 5.20 e $G^* = G[V(P)]$. Suponha que a aresta $v_i v_j$ está em um triângulo de G^* . Se G^* é 2-clique-colorível, então a 2-clique-coloração de G^* é única. Além disso, se v_i e v_j têm cores distintas na 2-clique-coloração de G^* , então G é 2-clique-colorível se, e somente se, o grafo $G' = G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}]$ é 2-clique-colorível.*

Prova. (\Rightarrow) Como G é do tipo descrito no caso 3 do lema 5.20, $v_i v_j$ é a única aresta do ciclo $C' = P + v_i v_j$ que está em um triângulo de G^* . Então, pelo lema 5.22, a 2-clique-coloração de G^* é única se G for 2-clique-colorível. Observamos que as cliques maximais de G^* e de G' são cliques maximais de G . Assim, se G é 2-clique-colorível, G' também é.

(\Leftarrow) Se G' é 2-clique-colorível, os vértices v_i e v_j podem receber cores distintas em uma 2-clique-coloração de G' . Então, se G^* é 2-clique-colorível e v_i, v_j recebem cores distintas em uma 2-clique-coloração de G^* , podemos estender as 2-clique-colorações de G' e G^* para uma 2-clique-coloração de G . \square

Lema 5.25. *Sejam G um grafo outerplanar 2-conexo, como descrito no caso 3 do lema 5.20 e $G^* = G[V(P)]$. Se a aresta $v_i v_j$ está em um triângulo de G^* e seus extremos têm a mesma cor em uma 2-clique-coloração de G^* , então G é 2-clique-colorível se, e somente se, G' é 2-clique-colorível, onde G' varia de acordo com os seguintes casos:*

1. *Se a corda $e = v_{i+1} v_j$ está em um único triângulo de G , então*

$$G' = G[\{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j\}] \cup \{v_{i'}, v_{j'}\} \cup \{v_{i+1} v_{i'}, v_j v_{j'}, v_{j'} v_{i'}\} - e$$

onde $v_{i'}$ e $v_{j'}$ são dois novos vértices.

2. *Se a corda $e = v_{i+1} v_j$ está em dois triângulos de G , então*

$$G' = G[\{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j\}] \cup \{v_{i'}, v_{j'}\} \cup \{v_{i+1} v_{i'}, v_j v_{j'}, v_{j'} v_{i'}\}$$

onde $v_{i'}$ e $v_{j'}$ são dois novos vértices.

Prova. Assim como no lema 5.24, as cliques maximais de G^* são cliques maximais de G e, pelo lema 5.21, uma 2-clique-coloração de G^* é única se G^* é 2-clique-colorível. Se v_i e v_j recebem a mesma cor na 2-clique-coloração de G^* , também recebem a mesma cor em uma 2-clique-coloração de G . Então, v_{i+1} e v_j recebem cores distintas na 2-clique-coloração de G , já que $v_i v_{i+1} v_j$ é uma clique maximal. Com isso, temos que G' é 2-clique-colorível se G é 2-clique-colorível. Por outro lado, se G' é 2-clique-colorível, os vértices v_{i+1} e v_j recebem cores distintas em uma 2-clique-coloração de G' . Então, podemos obter uma 2-clique-coloração para G a partir das 2-clique-colorações de G' e G^* . \square

Lema 5.26. *Sejam G um grafo outerplanar 2-conexo, como descrito no caso 3 do lema 5.20 e $G^* = G[V(P)] - v_i v_j$. Se a aresta $v_i v_j$ não está em um triângulo de $G[V(P)]$, então uma*

2-clique-coloração de G^* é única (se existir). Além disso, se G^* é 2-clique-colorível e v_i, v_j recebem cores distintas na 2-clique-coloração de G^* , então G é 2-clique-colorível se, e somente se, $G' = G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}]$ é 2-clique-colorível.

Prova. □

Lema 5.27. *Sejam G um grafo outerplanar 2-conexo, como descrito no caso 3 do lema 5.20 e $G^* = G[V(P)] - v_i v_j$. Se a aresta $v_i v_j$ não está em um triângulo de $G[V(P)]$, e v_i, v_j têm a mesma cor na 2-clique-coloração de G^* , então G é 2-clique-colorível se, e somente se, G é 2-clique-colorível, onde G' varia de acordo com os seguintes casos:*

1. *Se a corda $e = v_{i+1} v_j$ está em um único triângulo de G , então*

$$G' = G[\{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j\}] \cup \{v_{i'}, v_{j'}\} \cup \{v_{i+1} v_{i'}, v_j v_{j'}, v_{i'} v_{j'}\} - e$$

onde $v_{i'}$ e $v_{j'}$ são dois novos vértices.

2. *Se a corda $e = v_{i+1} v_j$ está em dois triângulos de G , então*

$$G' = G[\{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j\}] \cup \{v_{i'}, v_{j'}\} \cup \{v_{i+1} v_{i'}, v_j v_{j'}, v_{i'} v_{j'}\}$$

onde $v_{i'}$ e $v_{j'}$ são dois novos vértices.

Prova. Pelo lema 5.26, a 2-clique-coloração de G^* é única se G^* for 2-clique-colorível. Se, nessa coloração, v_i e v_j têm a mesma cor, então esses vértices também têm a mesma cor em uma 2-clique-coloração de G , enquanto v_j recebe a outra cor possível, já que $v_i v_{i+1} v_j$ é uma clique maximal de G . Assim, se G é 2-clique-colorível, G' também é. Por outro lado, se G' é 2-clique-colorível, então v_{i+1} e v_j devem ter cores distintas em uma 2-clique-coloração de G' . Assim, obtemos uma 2-clique-coloração de G a partir das 2-clique-colorações de G' e G^* . □

A partir de todos os resultados mostrados nesse capítulo, obtemos um algoritmo para clique-coloração ótima de grafos outerplanares, que exibimos a seguir.

Algoritmo A para uma clique-coloração ótima de grafos outerplanares

Passo 1: Se G é 2-conexo, vá para o passo 2. Caso contrário, encontre um bloco-folha B de G e o único vértice de corte x contido em B . Então, faça $A(G - (V(B) - x))$ e $A(B)$. Se $\chi_c(G - (V(B) - x)) = 3$ ou $\chi_c(B) = 3$, dê uma 3-clique-coloração G . Se $\chi_c(G - (V(B) - x)) = 2$ e $\chi_c(B) = 2$, obtenha uma 2-clique-coloração de G a partir da 2-clique-coloração de B e de $G - (V(B) - x)$ como no lema 5.22. Pare o algoritmo.

Passo 2: Seja o ciclo $C = (v_1, \dots, v_n)$ a fronteira da face externa de G . Se existir um triângulo da forma $v_i v_{i+1} v_{i+2}$ em G , vá para o passo 3. Se existir triângulo da forma $v_i v_{i+1} v_j$ em G ($j \neq i - 2, i - 1, i + 2, i + 3$) tal que nenhuma aresta do caminho $P = C - (v_{i+1}, \dots, v_{j-1})$

está em um caminho de G , vá para o passo 4. Se nenhuma desses triângulos existem, então, pelo lema 5.20, toda aresta de C é clique maximal. Nesse caso, vá para o passo 5.

Passo 3: Construa o grafo G' como no lema 5.23 e faça $A(G')$. Se $\chi_c(G') = 2$, estenda a 2-clique-coloração de G' para uma 2-clique-coloração de G . Se $\chi_c(G') = 3$, então G é 3-clique-cromático. Nesse caso, dê uma 3-clique-coloração para G .

Passo 4:

Passo 5: Dê uma clique-coloração ótima para G , como no lema 5.21, e pare o algoritmo.

Passo 6:

5.5 Grafos Halin

A última subclasse de grafos planares a qual restringimos o problema da clique-coloração é a dos grafos Halin. Estão nessa classe os grafos que podem ser construídos ligando as folhas de uma árvore em um ciclo, de forma a obter um desenho plano. A árvore deve ter pelo menos quatro vértices, nenhum vértice interno de grau igual a 2 e deve estar desenhada no plano, sem cruzamento de arestas. O ciclo obtido delimita a face externa do grafo. Representamos um grafo Halin H por $H = T \cup C$, onde T é a árvore e C é o ciclo formado. Um exemplo pode ser encontrado na figura 5.13.

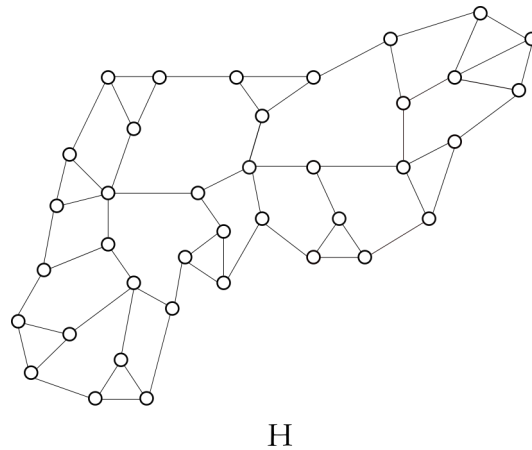


Figura 5.13 – Exemplo de um grafo Halin.

O nome da classe se deve a Rudolf Halin, matemático alemão que introduziu os grafos Halin, em 1971, como uma classe de grafos 3-conexos minimais, ou seja, grafos cuja a retirada de qualquer aresta reduz sua conectividade [23]. A classe ganhou atenção com a descoberta de que diversos problemas algorítmicos, que eram computacionalmente inviáveis para grafos planares em geral, podiam ser resolvidos eficientemente para grafos Halin [11,38].

Como toda árvore sem vértices de grau igual a 2 possui duas folhas que compartilham o mesmo vizinho, todo grafo Halin tem ao menos um triângulo. Em particular, não existem grafos Halin bipartidos. A classe também possui propriedades interessantes quanto a ciclos: todo grafo Halin possui ciclos de tamanho 3 até n , exceto possivelmente de um único tamanho par [36]. Além disso, todo grafo Halin possui um ciclo que passa por todos os seus vértices, propriedade que continua válida mesmo se retirarmos algum vértice do grafo original [11].

Assim como foi feito para as outras subclasses dos grafos planares, nosso intuito era obter condições suficientes ou necessárias para que um grafo Halin admitisse uma clique-coloração utilizando apenas duas cores. Por fim, provamos um teorema que caracteriza os grafos 2-clique-coloríveis dessa classe. Para isso, analisamos as propriedades estruturais da classe e observamos a formação de certas sequências de ciclos induzidos de tamanho ímpar, como mostraremos mais a frente.

Observamos que os grafos Halin são grafos planares sem pontes. Assim, cada aresta de $H = T \cup C$ deve estar em exatamente duas faces e, portanto, cada aresta de C está em exatamente um ciclo C' de H , com $C' \neq C$. Além disso, cada ciclo de H que seja diferente de C possui exatamente uma aresta que está em C .

É verdade que todo grafo Halin tem ao menos um triângulo, entretanto, os triângulos que existirem não podem estar em qualquer parte do grafo. O lema abaixo explicita as suas possíveis disposições em relação a outros ciclos do grafo.

Lema 5.28. *Sejam $H = T \cup C$ um grafo Halin e $C' = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ um ciclo induzido de H , com $k > 3$ e $C' \neq C$. Se $v_i v_{i+1} \in E(C)$, então as únicas arestas de C' que podem estar em triângulos são $v_{i-1} v_i$ ou $v_{i+1} v_{i+2}$.*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que a aresta $v_j v_{j+1}$ esteja em um triângulo, $j \neq i-1, i+1$.

Se $j = i$, então a aresta $v_i v_{i+1}$ faz parte dos ciclos C, C' e, por hipótese, de um triângulo. Um absurdo, pois uma aresta só pode fazer parte da fronteira de no máximo duas faces.

Caso contrário, seja $x \in V(G) \setminus V(C')$ o terceiro vértice desse triângulo. Como T é um grafo acíclico, uma das arestas desse triângulo não pertence a T e, portanto, foi criada ao ligarmos as folhas de T . Analisamos os possíveis casos:

(i) $v_j v_{j+1} \in E(C)$

Nesse caso, o ciclo C' tem duas arestas que não pertencem a T , $v_i v_{i+1}$ e $v_j v_{j+1}$. Absurdo com o fato de que C' só pode ter uma aresta em comum com C .

(ii) $v_j x \in E(C)$ ou $v_{j+1} x \in E(C)$

Suponhamos, sem perda de generalidade, $v_j x \in E(C)$. Então, em particular, v_j

é folha de T . Assim, ou $v_{j-1}v_j \notin E(T)$ ou $v_jv_{j+1} \notin E(T)$. Em qualquer uma das possibilidades, o ciclo C' teria duas arestas em comum com o ciclo C . Absurdo.

Assim, se $j \neq i-1, i+1$, o triângulo formado pelos vértices v_j, v_{j+1} e x não pode existir. Logo, as únicas arestas de C' que podem estar em triângulos são $v_{i-1}v_i$ ou $v_{i+1}v_{i+2}$. \square

Chamamos de *cadeia* uma sequência maximal alternada de ciclos ímpares de tamanho pelo menos 5 e triângulos, todos distintos, onde cada triângulo intersecta em arestas os ciclos anterior e posterior a ele na sequência. A cadeia é *fechada* se o primeiro e o último elementos coincidem e *aberta* caso contrário.

Na figura 5.14 exibimos separadamente as cadeias que o grafo da figura 5.13 possui. Uma cadeia pode ter os dois extremos sendo ciclos ímpares de tamanho pelo menos 5, como a cadeia 1 do grafo H ; os dois extremos sendo triângulos, como a cadeia 4; ter apenas um extremo sendo triângulo, como as cadeias 2 e 6. Observamos ainda que uma cadeia também pode ser formada por um único triângulo (como as cadeias 3 e 5 do grafo H) ou por um único ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5.

As diferenças na estrutura das cadeias são importantes para o estudo da clique-coloração na classe. Essa importância fica clara no teorema a seguir, onde mostramos que uma condição necessária e suficiente para que um grafo Halin seja 2-clique-colorível é que todas as suas cadeias tenham pelo menos um dos seus extremos sendo um triângulo. Para isso, colorimos os vértices da árvore a partir da qual o grafo é obtido e, então, corrigimos as cores de certos vértices para obtermos uma clique-coloração de todo o grafo.

Teorema 5.29. *Seja H um grafo Halin. Então H é 3-clique-cromático se, e somente se, H tem cadeia aberta que começa e termina com ciclos ímpares de tamanho pelo menos 5.*

Prova. (\Rightarrow) Provaremos pela contrapositiva: se toda cadeia de H começa ou termina com triângulos, então $\chi_c(H) = 2$.

Seja $w \in V(H)$ que não seja folha de T . Definimos, então, os seguintes conjuntos:

$$A := \{v \in V(G) \mid d_T(w, v) \text{ é par}\} \text{ e } B := \{v \in V(G) \mid d_T(w, v) \text{ é ímpar}\}$$

Colorimos os vértices de A com a cor 1 e os vértices de B com a cor 2. Como os triângulos de H são formados por duas folhas de T e um vértice interno de T , já estão coloridos com duas cores.

Se todas as arestas de H que são cliques maximais receberam duas cores, então a coloração acima é uma clique-coloração para H e, portanto, $\chi_c(G) = 2$.

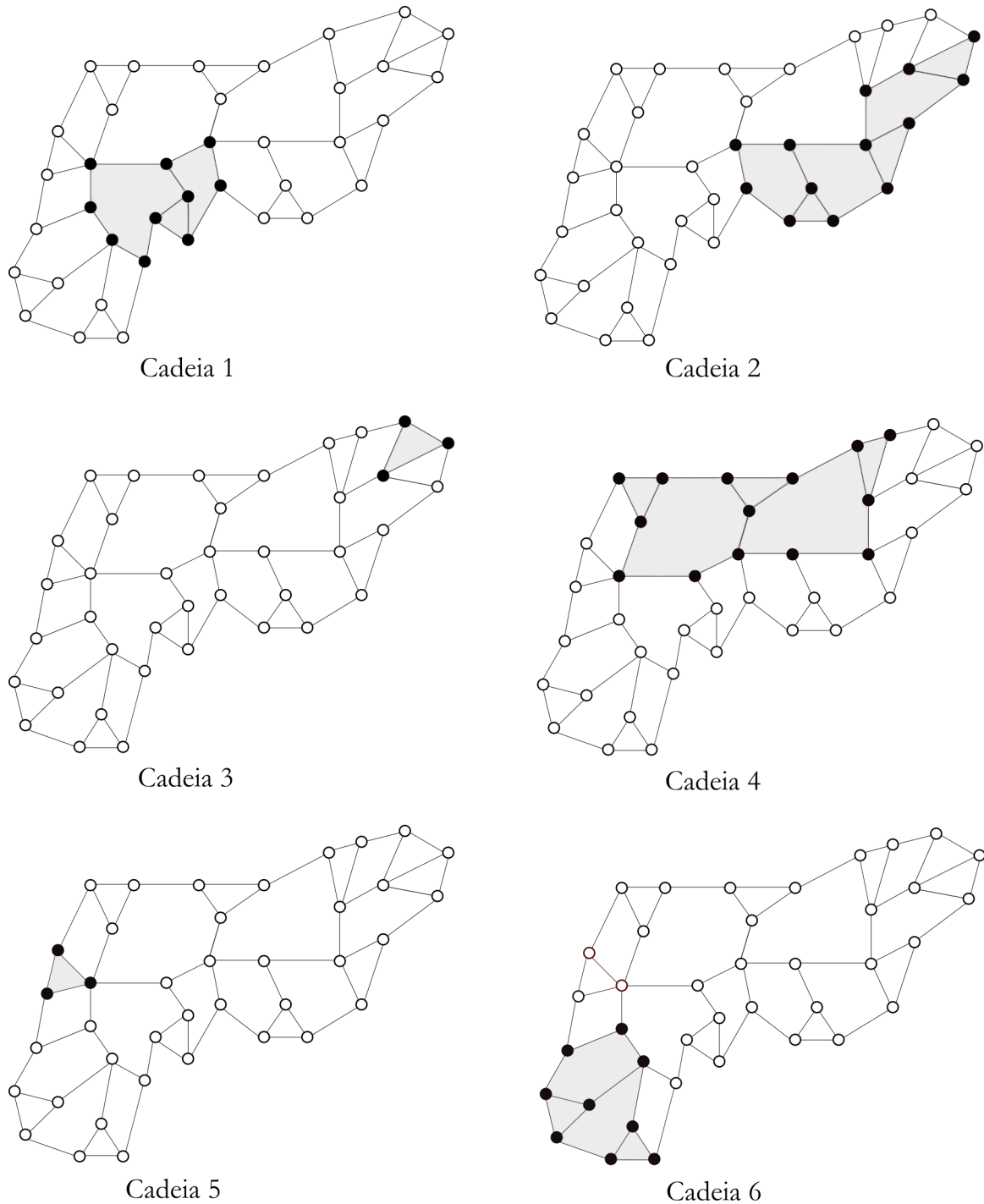


Figura 5.14 – Exemplo de um grafo Halin e suas respectivas cadeias.

Caso contrário, existe $e \in E(C)$ clique maximal de H tal que seus extremos receberam a mesma cor. Pela forma como a atribuição de cores foi feita, uma aresta de H tem seus extremos coloridos com a mesma cor se, e somente se, é uma aresta de C e está em um ciclo ímpar de H , diferente de C .

Então, e está em um ciclo ímpar C' de H , com $C' \neq C$. Como e é clique maximal, temos que $|C'| \geq 5$. Vamos considerar os dois possíveis casos a respeito da cadeia em

que C' está:

(i) A cadeia em que C' está é aberta.

Então, por hipótese, essa cadeia começa ou termina com um triângulo. Suponhamos que termine com triângulo, sendo da forma $C^1, T^1, C^2, T^2, \dots, C^k, T^k$, onde cada C^i denota um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5 e cada T^i , um triângulo.

Sejam $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \in V(C)$ tais que $u_i v_i$ é aresta de C^i (para $i = 1, \dots, k$) e $v_j u_{j+1}$ é aresta de T^j (para $j = 1, \dots, k-1$), como exibimos na figura 5.15. Observamos que $e = u_i v_i$, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$.

Como $u_1 v_1$ e $v_1 u_2$ são arestas dos ciclos ímpares C^1 e T^1 , respectivamente, u_1 e v_1 receberam a mesma cor, e v_1 e u_2 também. Assim, u_1, v_1 e u_2 estão coloridos com a mesma cor. Aplicando o mesmo raciocínio até u_k e v_k , mostramos que todos os vértices u_i 's e v_i 's receberam a mesma cor.

Podemos, então, trocar a cor de todos os vértices v_i 's. Dessa forma, nenhum triângulo T^i é monocromático, pois os vértices v_i e u_{i+1} estão em T^i e têm cores distintas. Além disso, cada uma das arestas $u_i v_i$, em particular a aresta e , deixou de ser monocromática.

Se a cadeia começa com um triângulo, o processo é análogo ao anterior. Se a cadeia começar e terminar com triângulos, da forma $T^1, C^1, \dots, T^k, C^k, T^{k+1}$, podemos aplicar o processo anterior a partir do ciclo C^i .

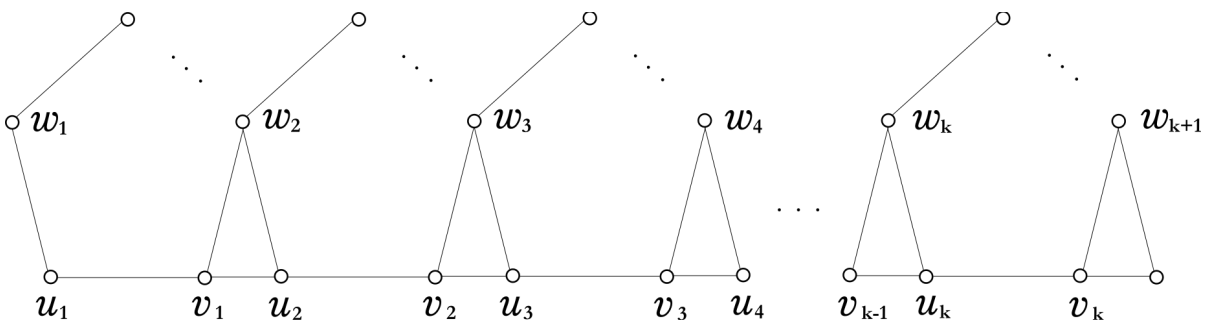


Figura 5.15 – Cadeia aberta do grafo H em que C' está.

(ii) A cadeia em que C' está é fechada.

Nesse caso, o grafo H é a própria cadeia em questão: $C^1, T^1, C^2, T^2, \dots, C^k, T^k, C^1$. Sejam $u_i, v_i \in V(C^i) \cap V(C)$ tais que $u_i v_i$ é aresta de C^i e $v_i u_{i+1}$ é aresta de T^i , onde os índices são tomados módulo k .

Por raciocínio análogo ao do caso anterior, temos que todos os vértices u_i 's e v_i 's estão coloridos com a mesma cor. Podemos, então, trocar a cor de todos os

vértices v_i 's. Dessa forma, as arestas $u_i v_i$, que antes eram monocromáticas, agora têm extremos coloridos com cores diferentes. Além disso, os triângulos T^i 's não são monocromáticos, pois os vértices v_i e u_{i+1} estão em T^i e têm cores distintas.

Logo, nenhuma clique maximal de H é monocromática.

Podemos repetir esse processo até que H não tenha mais arestas que são cliques maximais monocromáticas. Assim, teremos uma 2-clique-coloração para H e, portanto, $\chi_c(H) = 2$.

(\Leftarrow) Por hipótese, H tem cadeia aberta que começa e termina com ciclos ímpares de tamanho pelo menos 5. Consideramos uma tal cadeia C^1, T^1, \dots, C^k , como exibida na figura 5.16.

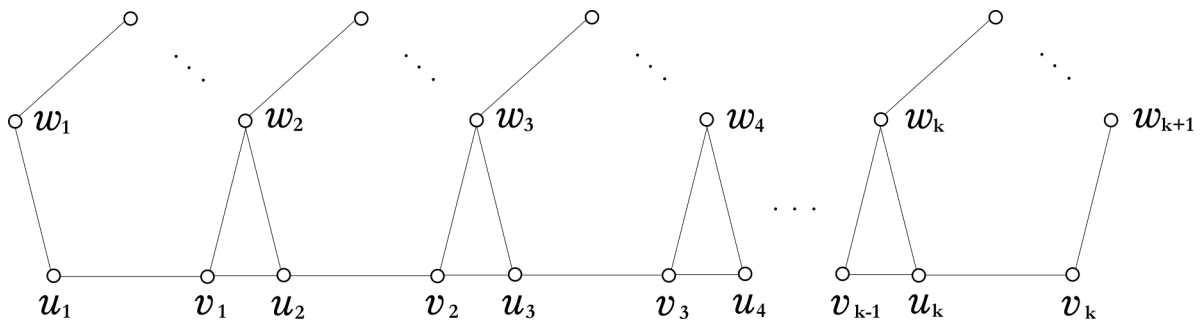


Figura 5.16 – Cadeia aberta do grafo H .

Consideramos os vértices u_i 's, v_i 's e w_j 's como na figura 5.16, com $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, k + 1$. Pela proposição 5.28, as cliques maximais dessa cadeia são também cliques maximais de H . Assim, basta mostrarmos que são necessárias três cores para clique-colorir os vértices dessa cadeia.

Pelo lema 3.1, existe uma única 2-clique-coloração c de C^1 e T^1 , com $c(u_1) = c(u_2) = 1$, $c(w_1) = c(w_2) = c(v_1) = 2$. Como $u_2 \in V(C^2)$ e já está colorido, de novo pelo lema 3.1, existe uma única 2-clique-coloração de C^2 e T^2 , com $c(u_2) = c(u_3) = 1$ e $c(w_2) = c(w_3) = c(v_2) = 2$.

Podemos atribuir cores a todos os vértices da cadeia seguindo o mesmo raciocínio, até chegarmos no triângulo T^k . Observamos que, nesse processo, $c(u_i) = 1$, $c(v_i) = 2$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, e $c(w_j) = 2$, para todo $j \in \{1, \dots, k + 1\}$. Então, o vértice w_k recebeu cor 2 e u_k recebeu cor 1. Colorimos os vértices do ciclo C^k usando o fato de que, exceto $u_k w_k$, todas as suas arestas são cliques maximais. Como C^k tem tamanho ímpar, temos que w_{k+1} recebe cor 2.

Resta atribuir uma cor para v_k . Como a aresta $u_k v_k$ é clique maximal, v_k não pode receber cor 1. Por outro lado, a aresta $v_k w_{k+1}$ também é clique maximal, então v_k não pode receber cor 2 e, então, v_k deve receber cor 3.

Logo, não é possível clique-colorir H com apenas duas cores e, portanto, $\chi_c(H) = 3$. \square

Observamos que existem grafos 3-clique-cromáticos. De fato, o grafo exibido na figura 5.13 possui uma cadeia que começa e termina por ciclos ímpares de tamanho pelo menos 5 (cadeia 1 exibida na figura 5.14) e, portanto é 3-clique-cromático. A figura 5.17 exhibe uma 3-clique-coloração de H .

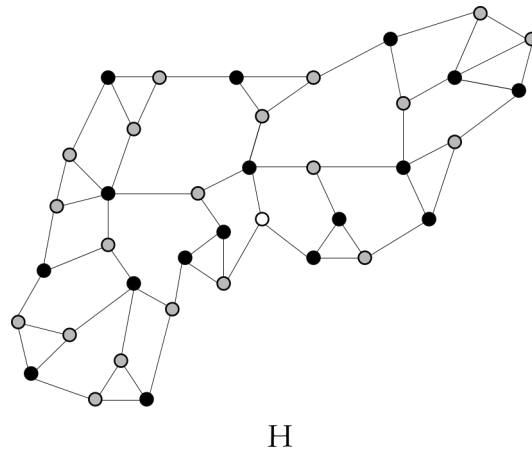


Figura 5.17 – Exemplo de uma 3-clique-coloração para o grafo H da figura 5.13.

Na figura 5.18, mostramos dois grafos Halin H_1 e H_2 , onde H_1 é formado por uma cadeia fechada e H_2 é tal que sua única cadeia começa e termina por triângulos. Ambos os grafos são 2-clique-coloríveis e uma 2-clique-coloração para cada um deles também é exibida na figura.

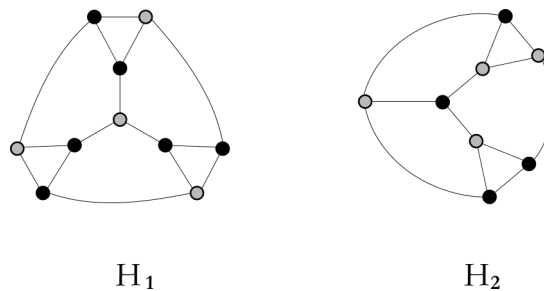


Figura 5.18 – Exemplo de dois grafos Halin 2-clique-coloríveis.

Com o teorema 5.29, conseguimos caracterizar exatamente quais grafos Halin utilizam duas ou três cores em uma clique-coloração ótima. Além disso, a demonstração feita acima fornece um algoritmo para achar uma clique-coloração com duas cores de grafos Halin sem cadeias que começam e terminam em ciclos ímpares de tamanho pelo menos 5.

Finalizaremos a presente seção exibindo um passo a passo que fornece uma clique-coloração ótima para qualquer grafo Halin.

A fim de simplificar a escrita, diremos que uma cadeia é do *tipo I* se começar ou terminar com triângulos e do *tipo II* se começar e terminar com ciclos ímpares de tamanho pelo menos 5.

Algoritmo para clique-coloração de grafos Halin

Entrada: Grafo Halin $H = T \cup C$.

Passo 1: Escolher $v \in V(T)$ com $g_T(v) \neq 1$. Colorir os vértices de $A := \{v \in V(G) \setminus d_T(w, v) \text{ é par}\}$ com a cor 1 e os vértices de $B := \{v \in V(G) \setminus d_T(w, v) \text{ é ímpar}\}$ com a cor 2. Ir para o passo 2.

Passo 2: Se o H for uma cadeia fechada, ir para o passo 3. Caso contrário, escolher uma cadeia do tipo I, se existir, e ir para o passo 4. Se não existir nenhuma cadeia desse tipo, escolher uma cadeia do tipo II que tenha ao menos um triângulo e ir para o passo 4.

Passo 3: Numerar os vértices de C da seguinte forma: v_1 um vértice que esteja em um triângulo; v_2 o vértice que está no mesmo triângulo que v_1 ; v_3 o vértice adjacente a v_2 , diferente de v_1 ; e, para $3 \leq i \leq n$, v_i o vértice adjacente a v_{i-1} , diferente de v_{i-2} . Atribuir a cor $\{1, 2\} \setminus \{\text{cor}(v_1)\}$ aos vértices v_j , com j ímpar. Parar algoritmo.

Passo 4: Numerar os vértices de C da seguinte forma: v_1 um vértice que está em apenas um elemento dessa cadeia; v_2 o vértice adjacente a v_1 que está nessa cadeia; v_3 o vértice adjacente a v_2 , diferente de v_1 ; e, para $3 \leq i \leq k$, v_i o vértice adjacente a v_{i-1} , diferente de v_{i-2} . Ir para o passo 5.

Passo 5: Para $i = 1, \dots, n$, analisar a aresta $v_i v_{i+1}$ de C que tiver os extremos coloridos com a mesma cor (considerar $v_{n+1} = v_1$). Se $v_i v_{i+1}$ não estiver em uma cadeia do tipo I, ir para o passo 5. Se estiver, verificar se essa cadeia tem ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5. Se não tiver, não alterar a coloração. Caso tenha, ir para o passo 7.

Passo 6: Se a aresta $v_{i-1} v_i$ estiver na mesma cadeia que $v_i v_{i+1}$, atribuir a cor $\{1, 2\} \setminus \{\text{cor}(v_i)\}$ aos vértices $v_{i+(2s-1)}$, $s \geq 1$ que estiverem nessa mesma cadeia. Caso contrário, atribuir a cor $\{1, 2\} \setminus \{\text{cor}(v_i)\}$ aos vértices $v_{i+(2s-1)}$, $s \geq 1$, que estiverem nessa mesma cadeia, com exceção do último, o qual deve-se atribuir a cor 3.

Passo 7: Seja l a quantidade de vértices que essa cadeia tem em comum com o ciclo C . Se l é par, atribuir a cor $\{1, 2\} \setminus \{\text{cor}(v_i)\}$ aos vértices da forma v_{i+2s} , $s \geq 1$, que estiverem nessa mesma cadeia. Se l é ímpar, verificar se a aresta $v_{i-1} v_i$ está na mesma cadeia que $v_i v_{i+1}$. Se estiver, atribuir a cor $\{1, 2\} \setminus \{\text{cor}(v_{i+1})\}$ aos vértices v_{i+2s} , $s \geq 0$, que estiverem nessa mesma cadeia. Caso contrário, atribuir a cor $\{1, 2\} \setminus \{\text{cor}(v_i)\}$ aos vértices $v_{i+(2s-1)}$, $s \geq 1$, que estiverem nessa mesma cadeia.

6 Considerações Finais

Neste trabalho, tivemos como objetivo exibir nosso estudo acerca do número clique-cromático de certas classes de grafos, em que nos concentramos em grafos de interseção de caminhos e em grafos planares. Nele, exibimos resultados já existentes na literatura e mostramos nossa contribuição para a resolução do problema.

Mostramos que grafos cordais podem ser facilmente clique-coloridos utilizando apenas duas cores, a partir de um esquema de eliminação perfeita, que sempre existe. Mais especificamente, mostramos que é possível obter uma 2-clique-coloração destes grafos em que os vértices coloridos com uma das cores formam um conjunto independente. Como consequência de serem uma subclasse desta classe, os grafos de intervalo também são 2-clique-coloríveis.

Os grafos arco-circulares aparecem como uma generalização natural para os grafos de intervalo. Mostramos o resultado obtido por Cerioli e Korenchender [7], de que grafos desta classe sempre admitem uma clique-coloração com três cores. Além disso, exibimos a prova de que os únicos grafos desta classe que são 3-clique-cromáticos são os grafos tais que seu grafo reduzido é um ciclo induzido ímpar de tamanho pelo menos 5.

Apresentamos também a prova de que grafos UEH são 3-clique-coloríveis, feita por Cerioli e Petitto [8], a partir de uma caracterização envolvendo árvores características. Mostramos também que o mesmo não acontece se não considerarmos a propriedade Helly, exibindo a prova de que grafos UE têm número clique-cromático ilimitado.

Ainda em classes de grafos de interseção de caminhos, apresentamos o resultado obtido por Bonomo, Mazzoleni e Stein [6], de que grafos B_1 -EPG são 4-clique-coloríveis. Para obter este resultado, foi necessário considerar grafos de intervalo e sua 2-clique-coloração em que uma das cores induz um conjunto independente.

Quanto aos grafos planares, apresentamos a prova de Mohar e Skrekvoski ... de que três cores são suficientes para clique-colorir estes grafos. Também consideramos subclasses desta classe, em busca de condições suficientes para obter uma 2-clique-coloração. Assim, apresentamos os resultados obtidos por Shan, Liang e Kang para grafos planares sem $K_{1,3}$ e grafos outerplanares; e resultados obtidos por nós para a classe dos grafos Halin.

Em relação aos grafos planares sem $K_{1,3}$, mostramos que os ciclos induzidos ímpares de tamanho pelo menos 5 são os únicos grafos desta classe que necessitam de três cores para serem clique-coloridos [35].

Para grafos outerplanares, mostramos um passo a passo para obter uma clique-

coloração ótima de grafos desta classe [28].

Por fim, provamos um resultado estrutural para a classe dos grafos Halin e analisamos a existência de cadeias nestes grafos. Também caracterizamos os grafos 3-clique-cromáticos desta classe como sendo os grafos cujas cadeias começam e terminam com ciclos ímpares de tamanho pelo menos 5. Além disso, apresentamos um algoritmo que fornece uma clique-coloração ótima para grafos Halin.

Este estudo deixa algumas questões em aberto a respeito do problema da clique-coloração como, por exemplo, a conjectura feita por Bonomo, Mazzoleni e Stein em [6] de que grafos B_1 -EPG são, na verdade, 3-clique-coloríveis.

Também mostramos, neste trabalho, que a cota superior para o número clique-cromático de grafos UEH é justa. Mas ainda não se conhece condições suficientes para que estes grafos possam ser clique-coloridos com apenas duas cores.

Outra questão interessante, e que ainda não foi resolvida, seria a de tentar caracterizar os grafos outerplanares que são 3-clique-cromáticos.

Ainda existem muitas outras classes de grafos nas quais o problema da clique-coloração ainda não foi resolvido, como por exemplo a dos grafos fracamente cordais. Existem exemplos de grafos desta classe que são 3-clique-cromáticos, mas ainda não se sabe se o número clique-cromático destes grafos é limitado ou não.

Esperamos que o leitor, após o estudo deste texto, sinta-se motivado a prosseguir na investigação de resultados ainda não estabelecidos sobre o problema da clique-coloração.

Referências

- [1] ASINOWSKI, A.; RIES, B. Some properties of edge intersection graphs of single-bend paths on a grid. *Discrete Mathematics*, v. 312, p. 427–440, 2012.
- [2] BACSÓ, G.; GRAVIER, S.; GYÁRFÁS, A.; PREISSMANN, M.; SEBŐ, A. Coloring the maximal cliques of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 17, p. 361–376, 2004.
- [3] BACSÓ, G.; TUZA, Z. Clique-transversal sets and weak 2-colorings in graphs of small maximum degree. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, v. 11, p. 15–24, 2009.
- [4] BENZER, S. On the topology of the genetic fine structure. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Washington, v. 45, n. 11, p. 1607–1620, 1959.
- [5] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. New York: Elsevier, 1976.
- [6] BONOMO, F.; MAZZOLENI, M. P.; STEIN, M. Clique coloring B1-EPG graphs. *Discrete Mathematics*, v. 340, p. 1008–1011, 2017.
- [7] CERIOLI, M. R.; KORENCHENDLER, A. L. Clique-coloring circular-arc graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 35, p. 287–292, 2009.
- [8] CERIOLI, M. R.; PETITO, P. Clique-coloring UE and UEH graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 30, p. 201–206, 2008.
- [9] CHARBIT, P.; PENEV, I.; THOMASSÉ, S.; TROTIGNON, N. Perfect graphs of arbitrarily large clique-chromatic number. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 116, 2015.
- [10] CHARTRAND, G.; HARARY, F. Planar permutation graphs. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Calcul des Probabilités et Statistique*, v. 3, n. 4, p. 433–438, 1967.
- [11] CORNUÉJOLS, G.; NADDEF, D.; PULLEYBLANK, W. R. Halin graphs and the travelling salesman problem. *Mathematical Programming*, v. 26, p. 287–294, 1983.
- [12] DÉFOSSEZ, D. Clique-coloring some classes of odd-hole-free graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 53, p. 233–249, 2006.
- [13] DÉFOSSEZ, D. Complexity of clique-coloring odd-hole-free graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 62, p. 139–156, 2009.

- [14] DUFFUS, D.; SANDS, B.; SAUER, N.; WOODROW, R. E. Two-colouring all two-element maximal antichains. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 57, p. 109–116, 1991.
- [15] DUFFUS, D.; KIERSTEAD, H. A.; TROTTER, W. T. Fibres and ordered set coloring. *J. Comb. Theory, Ser. A*, v. 58, p. 158–164, 1991.
- [16] FULKERSON, D. R.; GROSS, O. Incidence matrices and interval graphs. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 15, n. 3, p. 835–855, 1965.
- [17] GAVRIL, F. Algorithms on circular-arc graphs. *Networks*, v. 4, n. 4, p. 357–369, 1974.
- [18] GILMORE, P.; HOFFMAN, A. *A characterization of comparability graphs and of interval graphs*. Defense Technical Information Center, 1962.
- [19] GOLUBIC, M. C. *Algorithmic graph theory and perfect graphs (annals of discrete mathematics)*. NLD: North-Holland Publishing Co., 2004. v. 57.
- [20] GOLUBIC, M. C.; JAMISON, R. E. The edge intersection graphs of paths in a tree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 38, p. 8–22, 2008.
- [21] GOLUBIC, M. C.; LIPSHTEYN, M.; STERN, M. Edge intersection graphs of single bend paths on a grid. *Networks*, v. 54, p. 130 – 138, 2009.
- [22] HAJOS, G. Über eine art von graphen. c2005.
- [23] HALIN, R. *Studies on minimally n -connected graphs*. Academic Press, London, c1971. p. 129–136.
- [24] JENSEN, T. R.; TOFT, B. *Graph coloring problems*. John Wiley & Sons, 1994.
- [25] KLEIN, S.; MORGANA, A. On clique-colouring of graphs with few P_4 's. *Journal of the Brazilian Computer Society*, v. 18, 2012.
- [26] KRATOCHVÍL, J.; TUZA, Z. On the complexity of bicoloring clique hypergraphs of graphs. *J. Algorithms*, v. 45, p. 40–54, 2002.
- [27] LEKKERKERKER, C. G.; BOLAND, J. C. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fundamenta Mathematicae*, v. 51, n. 1, p. 45–64, 1962.
- [28] LIANG, Z.; SHAN, E.; KANG, L. The clique-perfectness and clique-coloring of outer-planar graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, v. 38, p. 794–807, 2019.
- [29] LIN, M. C.; SZWARCFITER, J. L. Characterizations and linear time recognition of Helly circular-arc graphs. c2006. p. 73–82.

- [30] MCKEE, T. A.; MCMORRIS, F. R. *Topics in intersection graph theory*. Monographs on Discrete Mathematics and Applications. SIAM, 1999.
- [31] MOHAR, B.; ŠKREKOVSKI, R. The Grötzsch theorem for the hypergraph of maximal cliques. *The Electronic Journal of Combinatorics*, v. 6, 1999.
- [32] MONMA, C. L.; WEI, V. K. Intersection graphs of paths in a tree. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 41, p. 141–181, 1986.
- [33] MYCIELSKI, J. Sur le coloriage des graphes. *Colloquium Mathematicae*, v. 3, n. 2, p. 161–162, 1955.
- [34] ROBERTS, F. S. *Discrete mathematical models, with applications to social, biological, and environmental problems*. Prentice-Hall, 1976.
- [35] SHAN, E.; LIANG, Z.; KANG, L. Clique-transversal sets and clique-coloring in planar graphs. *European Journal of Combinatorics*, v. 36, p. 367–376, 2014.
- [36] SKOWROŃSKA, M. The pancyclicity of halin graphs and their exterior contractions. *North-Holland Mathematics Studies*, v. 115, 1985.
- [37] SYSŁO, M. M. *On characterizations of cycle graphs and on other families of intersection graphs*. Technical Report N-40, Institute of Computer Science, University of Wrocław, 1978.
- [38] SYSŁO, M. M.; PROSKUROWSKI, A. On Halin graphs. c1983. p. 248–256.
- [39] TUCKER, A. Characterizing circular-arc graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 76, n. 6, p. 1257–1260, 1970.