



INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro



UFRJ

Teoria dos Nós e Homologia de Khovanov

Karina Livramento dos Santos

Rio de Janeiro, Brasil

5 de outubro de 2020

Teoria dos Nós e a Homologia de Khovanov

Karina Livramento dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Renato Ferreira de Velloso Vianna

Rio de Janeiro, Brasil
5 de outubro de 2020

CIP - Catalogação na Publicação

S237t Santos, Karina Livramento dos
Teoria dos nós e homologia de Khovanov / Karina
Livramento dos Santos. -- Rio de Janeiro, 2020.
42 f.

Orientador: Renato Ferreira de Velloso Vianna.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Teoria dos nós. 2. Invariantes de nós e links.
3. Homologia de Khovanov. I. Vianna, Renato
Ferreira de Velloso, orient. II. Título.

Teoria dos Nós e Homologia de Khovanov

Karina Livramento dos Santos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado por

**Prof. Renato Ferreira de Velloso
Vianna(UFRJ)**
Doutor – IM/UFRJ, Presidente

Prof. Alejandro Cabrera
Doutor – IM/UFRJ

Prof. Andrew James Clarke
Doutor – IM/UFRJ

**Prof. Gonçalo Marques Fernandes de
Oliveira**
Doutor – IME/UFF

Prof. Francesco Nosedà
Doutor – IM/UFRJ, Suplente

Rio de Janeiro, Brasil
28 de setembro de 2020

Teoria dos Nós e a Homologia de Khovanov

Karina Livramento dos Santos

Orientador: Renato Ferreira de Velloso Vianna

O estudo dos nós do ponto de vista topológico tem mostrado cada vez mais sua importância para diferentes áreas de matemática, física, química e biologia. A área matemática de teoria dos nós busca classificá-los com respeito a isotopias ambiente. Ferramentas de classificação muito importantes são os invariantes polinomiais, em particular, o polinômio de Alexander e o polinômio de Jones. A partir deste último polinômio, foi desenvolvida uma teoria de homologia de nós chamada homologia de Khovanov, que mais recentemente mostrou-se ser um invariante capaz de detectar o nó trivial. O objetivo deste trabalho é apresentar esses invariantes, com foco especial na homologia de Khovanov, além de introduzir os problemas básicos de teoria dos nós e uma aplicação desta área para variedades tridimensionais.

Palavras-chave: teoria dos nós, invariantes de nós e links, homologia de Khovanov, detector do nó trivial.

Teoria dos Nós e a Homologia de Khovanov

Karina Livramento dos Santos

Advisor: Renato Ferreira de Velloso Vianna

The study of knots from a topological point of view has increasingly shown its importance for different areas of mathematics, physics, chemistry and biology. The mathematical field of knot theory seeks to classify them with respect to ambient isotopies. Very important classification tools are polynomial invariants, in particular, the Alexander polynomial and the Jones polynomial. From this last polynomial, a theory of homology for knots called Khovanov homology was developed, which more recently was proved to be an invariant capable of detecting the trivial knot. The aim of this work is to present these invariants, with a special focus on Khovanov homology, in addition to introducing the basic problems of knot theory and an application of this field to three-dimensional manifolds.

Keywords: knot theory, knot and link invariants, Khovanov homology, unknot detector.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	História da Teoria dos Nós	2
1.2	Aplicações	3
2	Definições Preliminares	4
3	Invariantes	10
3.1	Invariantes Numéricos	10
3.2	Invariantes Polinomiais	12
3.2.1	Polinômio de Alexander	13
3.2.2	Polinômio de Jones	15
3.2.3	Polinômio HOMFLY	19
4	Homologia de Khovanov	20
4.1	Revisitando o Polinômio de Jones	20
4.2	Construção do Complexo	23
4.3	As Diferenciais	25
4.4	Invariância	31
5	Cirurgias em S^3	35
	Referências Bibliográficas	41

Capítulo 1

Introdução

Em topologia, um problema central é classificar espaços topológicos em termos de deformações como homeomorfismos, equivalências homotópicas e isotopias. Para abordar problemas dessa natureza, ferramentas de outras áreas da matemática, principalmente ferramentas de álgebra, se mostram muito úteis.

Um caso particular é estudado em de teoria dos nós, onde os objetos geométricos são nós no espaço tridimensional. Por nó, entendemos um mergulho do círculo em \mathbb{R}^3 , uma curva que pode estar atada ao redor de si mesma no espaço. A base para os problemas em teoria dos nós está em conseguir distingui-los, isto é, determinar quais nós são equivalentes por deformações e quais não são. Dentro dessa classe de problemas, uma grande questão, apesar de mais simples, é determinar se um nó específico pode ser desatado, isto é, se ele pode ser deformado até se obter um círculo canonicamente mergulhado, o qual chamamos de *nó trivial*.



Figura 1.1: Nó górdio de Wolfgang Haken. (Imagem retirada de [13].)

Dados dois nós, para provar que eles representam o mesmo objeto é suficiente exibir uma sequência de movimentos que leva o primeiro no segundo. Nem sempre é evidente que uma sequência assim existe, como é o caso do nó representado na Figura 1.1, que é equivalente ao nó trivial. Por outro lado, não há um método geral para mostrar que eles

não são o mesmo objeto, e este caso exige alguma criatividade. A solução usualmente é obtida por meio de funções cujo domínio é o conjunto dos nós e que são invariantes pelas deformações dos nós. Se dois nós possuem imagens distintas por algum invariante, então eles são de fato distintos.

Naturalmente, podemos construir invariantes de nós através de invariantes já conhecidos dos seus complementos. Um dos primeiros invariantes estudados surgiu desta forma: o grupo $\pi(K)$ de um nó K em \mathbb{R}^3 é o grupo fundamental do complemento do nó, isto é, $\pi(K) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Este grupo pode ser apresentado em função de uma imagem bidimensional do nó (como na Figura 1.1), onde cada componente conexa da imagem representa um gerador e cada cruzamento representa uma relação do tipo $ab = bc$. A abelianização deste grupo é sempre igual a \mathbb{Z} , e se o grupo de um nó é abeliano – e portanto igual a \mathbb{Z} – este nó é equivalente ao nó trivial [17]. Neste sentido o invariante $\pi(K)$ distingue o nó trivial, porém costuma ser difícil calcular o grupo do nó, o que faz com que ele nem sempre seja útil.

O objetivo principal desta dissertação é estudar alguns dos invariantes algébricos mais importantes: os polinômios de Alexander e de Jones, que permitiram distinguir uma grande quantidade de nós e contribuíram significativamente para o desenvolvimento da área, e a homologia de Khovanov, que estende o polinômio de Jones e que é capaz de distinguir o nó trivial de maneira combinatorial. Também apresentaremos como cirurgias ao redor de nós em S^3 podem ser usados para obter 3-variedades.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 definimos conceitos básicos da área de teoria dos nós. No capítulo 3 apresentamos alguns invariantes numéricos e os principais invariantes polinomiais. No capítulo 4 construímos a homologia de Khovanov, mostrando que sua característica de Euler graduada recupera o polinômio de Jones. No capítulo 5 mostramos que toda 3-variedade fechada, orientável e conexa pode ser obtida por cirurgias em S^3 associadas a links. O conteúdo desta dissertação está baseado nos livros [1] e [15] e nos artigos [23] e [3].

1.1 História da Teoria dos Nós

Nós foram estudados por Carl Gauss e seu aluno Johann Listing ainda na primeira metade do século XIX, mas o interesse em distinguir nós surgiu em matemática quando Lord Kelvin teorizou que átomos eram nós nos fios de éter. Esta teoria tinha como hipótese que diferentes nós geravam diferentes elementos químicos. Isso levou o físico Peter Guthrie Tait a criar uma tabela na tentativa de identificar todos os nós distintos, o que ele acreditava ser a tabela dos elementos.

Apesar da teoria de Kelvin ter sido refutada no final do século XIX, matemáticos continuaram a desenvolver o estudo dos nós. Na década de 1920 dois grandes avanços foram feitos. Alexander descobriu o primeiro invariante polinomial, que permitiu distinguir uma grande quantidade de nós de maneira eficiente, e Reidemeister determinou um conjunto de movimentos fundamentais que decompõem qualquer isotopia de nós. Esse último resultado reduz a equivalência de nós a algo mais tangível, permitindo definir invariantes de forma mais simples.

Um número de outras grandes descobertas foram feitas nos últimos 50 anos. No final da década de 1970, o trabalho pioneiro do matemático William Thurston sobre 3-variedades hiperbólicas mostrou uma relação importante da área com teoria dos nós, e teve grande

impacto em ambas. Em 1984, Vaughan Jones notou uma relação surpreendente entre álgebras de von Neumann e teoria dos nós, que resultou no polinômio de Jones. Além de sua eficiência em distinguir nós, esse polinômio levou à descoberta de outros invariantes polinomiais, resolveu problemas clássicos da área e criou um vínculo entre teoria dos nós e física. Em 1989, o físico matemático Edward Witten aprofundou esse vínculo, estabelecendo uma conexão entre o polinômio de Jones e teoria de Chern-Simons, ao mesmo tempo que deu origem a área de teoria quântica de campos topológica. Thurston, Jones e Witten foram premiados com a medalha Fields por suas descobertas.

No final do século passado, a descoberta da homologia de Khovanov inaugurou novas abordagens em teoria dos nós. Esta teoria de homologia corresponde a uma categorificação do polinômio de Jones por meio de uma teoria quântica de campos topológica $(1 + 1)$ -dimensional, que resulta num invariante mais forte que ele. Outra teoria de homologia foi construída em 2003, a homologia de Floer de nós, que categorifica o polinômio de Alexander.

1.2 Aplicações

Teoria dos nós se relaciona com um número de outras áreas, como teoria das cordas, geometria de contato, e teoria de calibres. Nós podem ser vistos como órbitas fechadas de um sistema dinâmico, em particular, eles surgem naturalmente em variedades simpléticas como órbitas de dinâmicas Hamiltonianas.

As aplicações de teoria dos nós vão além das aplicações em matemática e física. Nas últimas décadas do século passado, ferramentas de teoria dos nós começaram a ser utilizadas em ciências naturais como química e biologia. Nós aparecem naturalmente em moléculas orgânicas como DNA e proteínas, e a maneira como uma molécula está posicionada no espaço afeta suas propriedades biofísicas.

Por exemplo, processos como transcrição e replicação são mais difíceis de ocorrer em uma molécula de DNA que está emaranhada. A forma de desatá-la é por meio de enzimas que mudam topologicamente a estrutura do DNA, e para compreender a ação de uma enzima específica, são usadas ferramentas de teoria dos nós.

Capítulo 2

Definições Preliminares

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos de Teoria dos Nós. Começamos formalizando o conceito de nó em matemática.

Definição 2.1. Chamamos de *nó* a imagem de um mergulho do círculo S^1 em \mathbb{R}^3 ou na esfera S^3 . Similarmente, um *link* é a imagem de um mergulho da união disjunta $\bigsqcup_{i=1}^m S^1$ em \mathbb{R}^3 ou S^3 . Neste caso, cada imagem de uma das m cópias de S^1 é chamada de *componente* do link. Desta forma, os nós são os links com apenas uma componente.

Definição 2.2. Dois links são ditos *equivalentes* ou *isotópicos* se existe uma isotopia ambiente que leva um link no outro.

Isso nos dá uma relação de equivalência no conjunto de links. Como estamos primariamente interessados em distinguir entre classes de equivalência, muitas vezes também chamamos de *link* (ou *nó*) a classe de equivalência de um link (ou nó).

Exemplo 2.3. O círculo unitário $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ em \mathbb{R}^3 é o exemplo mais simples de um nó, que chamamos de *nó trivial*. A união de m translações disjuntas desse círculo é um link chamado de *link trivial (de m componentes)*.

Uma primeira dificuldade é que em geral não é praticável exibir links através de mergulhos, mas eles podem ser facilmente visualizados através de desenhos. Então, para simplificar a apresentação de links, usamos projeções em planos do espaço ambiente.

Definição 2.4. Seja L um link em \mathbb{R}^3 . Seja $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow H$ uma projeção ortogonal sobre um plano H de \mathbb{R}^3 tal que:

1. para cada $x \in H$, a imagem inversa $p^{-1}(x)$ contém no máximo 2 pontos de L ; e
2. o conjunto $\chi = \{x \in H \mid |L \cap p^{-1}(x)| = 2\}$ é discreto e a projeção de L se intersecta transversalmente em cada $x \in \chi$.

Fixado um vetor normal \mathbf{N} de H , a cada ponto $x \in \chi$ correspondemos o ponto $y_x \in L \cap p^{-1}(x)$ com menor produto interno com \mathbf{N} . Se V é uma pequena vizinhança dos pontos $\{y_x\}_{x \in \chi}$, então a imagem $D = p(L \setminus V)$ é dita um *diagrama* de L . Os pontos em χ são chamados de *cruzamentos* de D .

Observação 2.5. Usualmente descrevemos D como um subconjunto de \mathbb{R}^2 , pela identificação de H com \mathbb{R}^2 de forma a preservar a orientação dada por \mathbf{N} .

Um diagrama funciona como uma foto do link e os cruzamentos são os pontos onde o fio se sobrepõe nessa imagem. Notamos que a exclusão de uma vizinhança do ponto y_x na definição de D tem a função de marcar qual parte do fio está por cima no cruzamento x . Desta forma, os diagramas contêm todas as informações da classe do link L , isto é, podemos obter a classe de equivalência de L a partir de um diagrama D de L : com D no plano xy de \mathbb{R}^3 , para cada $x \in \chi$ ligamos as duas pontas soltas perto de x (criadas pela exclusão da vizinhança de y_x em L) com uma curva que passa por baixo do plano xy . Disso obtemos um link que é isotópico a L .

Além disso, a classe de equivalência de um link L qualquer sempre pode ser representada por um diagrama, pois podemos escolher um link isotópico a L tal que existe uma projeção satisfazendo as condições da Definição 2.4.

Observação 2.6. Como estamos interessados em identificar L com a sua classe, qualquer diagrama de um link equivalente a L também será entendido como um diagrama de L .

Exemplo 2.7. Alguns dos exemplos mais simples de nós e links estão representados nos diagramas abaixo:

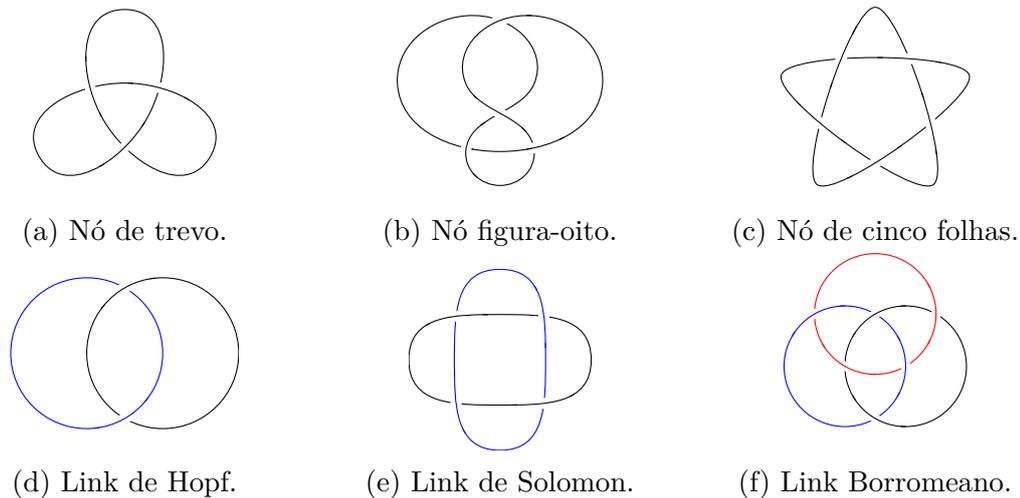


Figura 2.1: Diagramas de nós e links.

Assim como para links, consideramos dois diagramas equivalentes se existe isotopia (planar) entre eles. É claro que se dois links possuem diagramas equivalentes, então eles também são equivalentes. O seguinte teorema permite identificar quando dois diagramas representam o mesmo link.

Teorema 2.8. *Sejam D_1 e D_2 diagramas para os links L_1 e L_2 . Então L_1 e L_2 são equivalentes se e somente se podemos obter D_2 a partir de D_1 através de uma sequência finita de isotopias planares e movimentos locais de 3 tipos, representados pelas figuras:*

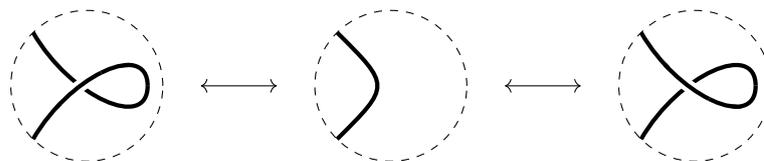


Figura 2.2: Movimentos do tipo I.

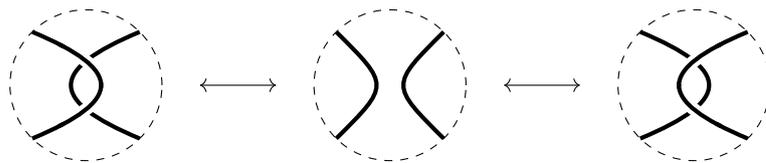


Figura 2.3: Movimentos do tipo II.

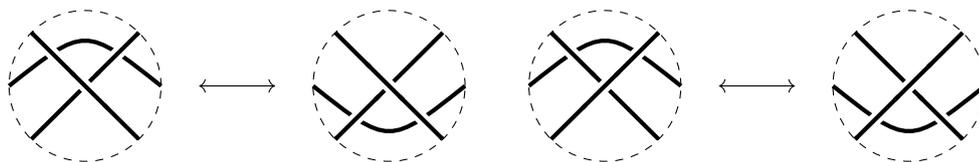


Figura 2.4: Movimentos do tipo III.

Chamamos os movimentos acima de movimentos de Reidemeister, em homenagem ao matemático alemão Kurt Reidemeister, que demonstrou esse teorema por volta de 1927. A importância desse resultado se dá principalmente pela possibilidade de produzirmos invariantes de links usando propriedades de diagramas que são inalteradas pelos três movimentos de Reidemeister.

Definição 2.9. Um link L é dito *orientado* se é atribuída uma orientação a cada uma de suas componentes.

Neste caso, quando consideramos links orientados, requeremos que a equivalência de links se dê por meio de isotopias que preservam a orientação das componentes.

Definição 2.10. O link obtido ao trocar a orientação em cada componente de um link orientado L é chamado *inverso* de L e denotado L^{-1} . Dizemos que L é *invertível* se L é equivalente ao seu inverso.

Exemplo 2.11. Os 3 nós da Figura 2.1, se forem orientados, são nós invertíveis. Para ver isso, considere os nós repousando sobre o plano em que está seu diagrama. Podemos fazer uma rotação que vira este plano de forma parecida com a que viramos uma folha de papel. Isso dá uma isotopia que leva o nó no seu inverso.

Definição 2.12. Um link L é dito *separável* se podemos separar duas componentes de L com uma esfera.

Definição 2.13. Sejam K_1 e K_2 dois nós orientados tais que $K_1 \cup K_2$ é separável. Definimos a sua *composição*, ou *soma*, denotada $K_1 \# K_2$, como a classe de equivalência do nó obtido pelo seguinte procedimento. Fixe um retângulo mergulhado tal que:

1. um de seus lados é um arco de K_1 e o lado oposto é um arco de K_2 ;
2. ele não intersecta K_1 nem K_2 a menos desses dois lados; e
3. é possível orientar a sua fronteira de modo a coincidir nos arcos com as orientações dos dois nós.

Exclua esses dois arcos em $K_1 \sqcup K_2$ e inclua os outros dois lados do retângulo. Isso produz um nó (depois de suavizar os ângulos criados) que pode ser orientado de acordo com as orientações de K_1 e K_2 . Chamamos K_1 e K_2 de *fatores* de $K_1 \# K_2$.

Exemplo 2.14. A composição do nó de trevo com ele mesmo é representada na figura abaixo:

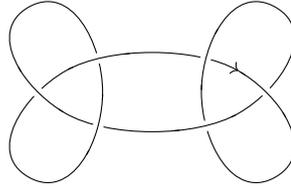


Figura 2.5: Nó de vovó.

A composição de dois nós orientados é bem definida, isto é, independe do retângulo fixado. Informalmente, é fácil ver que se fizermos o procedimento com um segundo retângulo, podemos deslizá-lo junto com um dos nós, mantendo o outro fixo, até obter a configuração do primeiro retângulo.

Podemos estender essa operação para uma composição de classes de equivalência de nós orientados, mas não podemos estendê-la para uma composição de nós não-orientados em geral, pois o procedimento pode resultar em duas composições distintas. De fato, as composições $K_1 \# K_2$ e $K_1 \# K_2^{-1}$ possuem os mesmos fatores a menos de orientação, mas em geral não são equivalentes, mesmo quando desconsideramos as suas orientações. Entretanto, essa ambiguidade não acontece se um dos fatores é um nó invertível, e neste caso a composição de nós não-orientados é bem definida.

A operação de composição é comutativa, e com ela o conjunto de nós orientados em \mathbb{R}^3 é um monoide comutativo, com a unidade sendo o nó trivial. Por isso, também chamamos a composição de soma. Uma propriedade importante e não tão óbvia da composição é que não podemos obter o nó trivial pela composição de dois nós não-triviais. Intuitivamente, não podemos desatar um nó ao criar um novo nó em seu fio. Isso nos permitirá decompor um nó em fatores irredutíveis.

Definição 2.15. Um nó orientado não-trivial K é dito *composto* se ele é a composição de dois nós orientados não-triviais. Se K não é composto, ele é dito *primo*.

Exemplo 2.16. Embora necessite alguma argumentação, todos os nós da Figura 2.1 são primos.

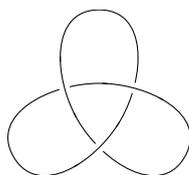
Temos que vale a fatoração única em elementos primos: todo nó pode ser escrito de forma única, a menos de ordenação e composição com a unidade, como composição de fatores primos [20].

Definição 2.17. Dado um link L em \mathbb{R}^3 , a *imagem espelho* de L , denotada \bar{L} , é a sua reflexão por um plano de \mathbb{R}^3 . Se L e sua imagem espelho são equivalentes, dizemos que L é *aquiral*. Caso contrário, L é dito *quiral*.

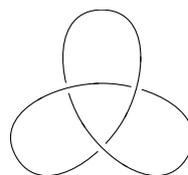
Observação 2.18. Note que podemos chamar \bar{L} de “a” imagem espelho de L na definição acima porque a classe de \bar{L} não depende do plano de reflexão escolhido.

Dado um diagrama de L , podemos obter um diagrama da sua imagem espelho invertendo cada cruzamento de D , isto é, trocando a sobreposição dos fios nos cruzamentos. Esse é precisamente um diagrama da reflexão de L pelo mesmo plano em que D está.

Exemplo 2.19. O nó de trevo e a sua imagem espelho (Figura 2.6), que também chamamos de nó de trevo, não são equivalentes. O nó de cinco folhas (Figura 2.1c) é outro exemplo de nó quiral, enquanto o nó figura-oito (Figura 2.1b) é um nó aquiral.



(a) Nó de trevo canhoto.



(b) Nó de trevo destro.

Figura 2.6: As duas versões do nó de trevo.

Definição 2.20. Um link é dito *tórico* quando é equivalente à um link que está contido em um toro canonicamente mergulhado em \mathbb{R}^3 . Para inteiros p e q , um link equivalente ao o link que dá q voltas ao redor do círculo central e p voltas ao redor do eixo de rotação do toro é chamado (p, q) -tórico.

Observação 2.21. Um link (p, q) -tórico também é (q, p) -tórico, portanto podemos permutar as atribuições de p e q na definição acima.

Exemplo 2.22. Os nós de trevo (Figura 2.1a) e cinco folhas (Figura 2.1c) são nós $(3, 2)$ -tórico e $(5, 2)$ -tórico, respectivamente.

Um link (p, q) -tórico tem exatamente $\text{mdc}(p, q)$ componentes, portanto os nós tóricos são exatamente os links (p, q) -tóricos com p e q primos entre si. Sabe-se que todo nó tórico é primo, quiral (com imagem espelho sendo o nó $(-p, q)$ -tórico) e invertível.

Definição 2.23. Um diagrama de link D é dito *alternado*, se o fio se alterna entre fio de baixo e fio de cima nos cruzamentos consecutivos quando percorremos cada uma das componentes (Figura 2.7). Um link é dito *alternado* quando possui um diagrama alternado.



Figura 2.7: Cruzamentos de um diagrama alternado.

Exemplo 2.24. Todos os diagramas de links na Figura 2.1 são alternados.

A característica de ser alternado é bastante útil para a tabulação de nós. Uma tabela de nós é uma lista com todas as classes distintas de nós não-orientados que podem ser representadas por diagramas com até um determinado número de cruzamentos. Nesta listagem, omitimos nós compostos e escolhemos apenas um de cada par formado por um nó e sua imagem espelho. Uma tabela de links é feita de forma similar, mas omitem-se também os links separáveis. O procedimento para construir uma tabela de nós ou links é considerar todos os diagramas com até n cruzamentos e determinar quais destes representam links equivalentes ou que não devem ser incluídos na tabela.

Muito deste trabalho é simplificado por certas propriedades dos links alternados. Por exemplo, se um nó alternado é composto, podemos identificar os seus fatores em qualquer diagrama alternado. Isto é, sempre podemos dividir o diagrama com um círculo que intersecta o nó em apenas dois pontos e tal que as partes de dentro e de fora do círculo representam os fatores do nó. Um resultado similar permite identificar quando um link alternado é separável: todo diagrama alternado de um link separável tem mais de uma componente conexa. Veremos também que é razoavelmente simples encontrar um diagrama minimal (com respeito ao número de cruzamentos) para um link alternado.

Durante as primeiras tabulações, era comum considerar apenas os nós alternados. As propriedades mencionadas acima permitiram criar tabelas de nós alternados de até 11 cruzamentos com poucos erros ou omissões, quando ainda não existiam ferramentas potentes de classificação. Além disso, a proporção de nós omitidos por não serem alternados era pequena. Por exemplo, são necessários pelo menos 8 cruzamentos em um diagrama para representar um nó primo que não é alternado. Entretanto, à medida que consideramos um número maior de cruzamentos para a tabulação, a fração de links alternados decai consideravelmente, e então outros métodos de classificação se fazem necessários.

Capítulo 3

Invariantes

Neste capítulo apresentaremos alguns dos inúmeros invariantes de nós e links conhecidos. Os primeiros invariantes a surgir eram numéricos, que em geral são mais simples, mas não são tão úteis na classificação dos nós. Um conjunto de invariantes importante para a classificação é o dos polinômios, que nasceu com o polinômio de Alexander em 1928, e inclui o polinômio de Jones, que fez grande contribuição à teoria dos nós e ao qual a homologia de Khovanov, apresentada no Capítulo 4, está intrinsecamente ligada.

3.1 Invariantes Numéricos

Começamos com o mais fundamental invariante numérico. Entendemos que a complexidade de um diagrama de nó ou link está relacionada com seu número de cruzamentos, portanto frequentemente escolhemos diagramas que minimizam esta quantidade.

Definição 3.1. Um diagrama de um link L é chamado *diagrama minimal* quando possui o menor número de cruzamentos dentre os diagramas de L . O *número de cruzamentos* de um link L , denotado $c(L)$, é o número de cruzamentos de um diagrama minimal de L .

Exemplo 3.2. Por definição do nó trivial, temos $c(\bigcirc) = 0$. O mesmo vale para links triviais. Como um diagrama com apenas um cruzamento representa um link trivial, nenhum link satisfaz $c(L) = 1$. Com um pouco de trabalho pode-se mostrar que qualquer diagrama de nó com 2 cruzamentos também representa o nó trivial. Veremos que todos os diagramas da Figura 2.1 são diagramas minimais. Como resultado, temos que o nó de trevo é o nó não-trivial mais simples, com número de cruzamentos igual a 3.

A tabulação de nós é feita tradicionalmente em função do número de cruzamentos e a notação de Alexander–Briggs usa este invariante para denotar links. Nela o número de cruzamentos é sobrescrito pelo número de componentes (no caso de links com mais de uma componente) e subscrito por um índice cuja função é diferenciar links com mesmo número de cruzamentos e componentes. Por exemplo, os nós trivial, de trevo e figura-oito e o link de Hopf possuem, respectivamente, notação Alexander-Briggs 0_1 , 3_1 , 4_1 e 2_1^2 .

Esta abordagem em que toma-se o menor valor dentre todos os diagramas do link é comum a outros invariantes numéricos. Ela torna a invariância automática, mas o problema de determinar o seu valor para um link genérico depende em algum sentido do problema de classificação. Mais explicitamente, para mostrar que $c(L) \geq n$, deve-se mostrar que qualquer diagrama que possui um número de cruzamentos menor que

n não representa L . Em 1987, L. Kauffman [8], K. Murasugi [16] e M. Thistlethwaite [22] provaram uma das conjecturas de Peter Tait, apresentada a seguir, que permite determinar o número de cruzamentos de links alternados de forma muito mais simples. Antes precisamos definir o que é um *diagrama reduzido*.

Definição 3.3. Um cruzamento em um diagrama de link é dito *reduzível* se existe uma curva fechada no plano que intersecta o diagrama apenas nesse cruzamento, onde a interseção é transversal (Figura 3.1). Um diagrama de link é dito *reduzido* se não possui cruzamentos reduzíveis.

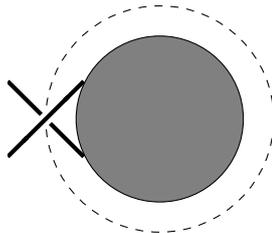


Figura 3.1: Cruzamento reduzível em um diagrama.

Como ilustrado na figura acima, um cruzamento reduzível divide o diagrama em dois. O disco sombreado encobre a parte do link conectada à direita do cruzamento e a parte conectada à esquerda do cruzamento pode dar voltas ao redor do disco, desde que não intersecte o círculo tracejado.

Intuitivamente, podemos eliminar o cruzamento na Figura 3.1 ao virar o disco sombreado para baixo (junto com a parte do diagrama sob ele) e trocar a sobreposição dos fios em cada cruzamento que agora está sobre o disco. Isso produz um diagrama para o mesmo link que possui um cruzamento reduzível a menos. Um caso particular dessa operação corresponde aos movimentos de Reidemeister do tipo I que eliminam um cruzamento (Figura 2.2).

É importante notar que se o diagrama inicial é alternado, a operação descrita acima gera de novo um diagrama alternado. Desta forma, podemos sempre obter um diagrama alternado e reduzido de um link L a partir de qualquer diagrama alternado de L . Podemos agora enunciar o teorema.

Teorema 3.4 (Conjectura de Tait sobre número de cruzamentos). *Todo diagrama alternado e reduzido de um link L é um diagrama minimal.*

Esta conjectura, que permaneceu sem solução por quase um século, foi provada através de uso extenso do polinômio de Jones, que será apresentado na Seção 3.2. Por ser razoavelmente fácil identificar e eliminar um cruzamento reduzível, para determinar o número de cruzamentos de um link alternado L basta encontrar um diagrama alternado de L .

Exemplo 3.5. Os diagramas na Figura 2.1 são todos alternados e reduzidos, portanto são diagramas minimais.

Uma questão que surge naturalmente é se o número de cruzamentos de uma composição (Definição 2.13) se relaciona com os números de cruzamentos dos seus fatores. Isso nos leva a outra conjectura antiga que diz que o número de cruzamentos é aditivo com respeito à composição:

Conjectura 3.6. *Para dois nós orientados K_1 e K_2 , vale que $c(K_1\#K_2) = c(K_1) + c(K_2)$?*

A desigualdade $c(K_1\#K_2) \leq c(K_1) + c(K_2)$ é trivialmente verificada, e sabe-se que a aditividade é válida nos casos em que K_1 e K_2 são ambos alternados (consequência do Teorema 3.4) ou ambos tóricos [4].

Outro invariante que mede o quão complicado um link é – ou quão distante o link está de ser trivial – é o número de desate.

Definição 3.7. Em um diagrama, a *troca* de um cruzamento é a inversão da sobreposição dos fios presentes neste cruzamento. O *número de desate* de um link L , denotado $u(L)$, é o menor número de trocas em um diagrama de L necessário para que este represente um link trivial, considerando todos os diagramas de L .

Intuitivamente, o número de desate corresponde ao menor número de vezes que o link precisa se atravessar para que ele se torne trivial. Como para o número de cruzamentos, calculá-lo pode ser um problema difícil, especialmente porque nem sempre ele é realizado em um diagrama minimal. Um exemplo dessa dificuldade é o nó com notação Alexander-Briggs 10_{11} , cujo número de desate ainda é desconhecido, podendo ser 2 ou 3. Contudo, para o caso específico de nós tóricos, o número de desate é conhecido.

Teorema 3.8. *O número de desate de um nó (p, q) -tórico é igual a $(p - 1)(q - 1)/2$.*

Este resultado, juntamente com a Conjectura de Milnor (veja Teorema 4.23), foi demonstrado em 1992 por Peter Kronheimer e Tom Mrowka por meio de teorias de calibre [11].

Pela dificuldade em calculá-los, o número de cruzamentos e o número de desate não são muito úteis para o problema de classificação. Entretanto, eles capturam propriedades fundamentais dos nós, um exemplo é o teorema a seguir, demonstrado por Martin G. Scharlemann em 1985 [19].

Teorema 3.9. *Um nó K satisfazendo $u(K) = 1$ é primo.*

Isso implica que um nó composto tem número de desate pelo menos dois. Uma pergunta natural é se o número de fatores não-triviais de um nó composto é um limite inferior para seu número de desate. Essa questão permanece sem solução.

Conjectura 3.10. *Para nós orientados não-triviais K_1, \dots, K_n , vale que $u(K_1\#\dots\#K_n) \geq n$?*

Podemos generalizar essa questão ainda mais e perguntar se vale a aditividade, que é outra conjectura antiga.

Conjectura 3.11. *Para nós orientados K_1 e K_2 , vale que $u(K_1\#K_2) = u(K_1) + u(K_2)$?*

3.2 Invariantes Polinomiais

O primeiro invariante polinomial de nós a ser descoberto foi o polinômio de Alexander, em 1928, por James Alexander II [2]. Esta descoberta revolucionou a área, pois forneceu o primeiro método geral que permitiu distinguir um conjunto numeroso de nós. Ele foi

o único invariante polinomial até 1984, quando Vaughan Jones descobriu o polinômio de Jones. Logo após essa descoberta, o interesse em desenvolver outros polinômios usando ideia similar à de Jones resultou no polinômio HOMFLY, cujo nome é acrônimo dos seus desenvolvedores Jim Hoste, Adrian Ocneanu, Kenneth Millett, Peter Freyd, William Lickorish, David Yetter.

3.2.1 Polinômio de Alexander

Originalmente, o polinômio de Alexander $\Delta(K)$ de um nó orientado $K \subset S^3$ foi definido em termos da homologia de uma cobertura cíclica infinita do complemento $S^3 \setminus K$ do nó K . Porém, em 1969 John Conway apresentou uma versão do polinômio de Alexander – chamado polinômio de Alexander-Conway – que poderia ser calculado através de uma relação entre os polinômios de nós com diagramas similares. Esse tipo de relação, chamada *relação de novelo*, também pode ser usada para definir os polinômio de Jones e HOMFLY. Usaremos aqui a abordagem apresentada por Conway para definir o polinômio de Alexander.

Teorema 3.12. *A diagramas de links orientados D , podemos associar polinômios $\nabla(D)$ no anel $\mathbb{Z}[z]$ determinados unicamente pelas relações:*

1. *se D representa o nó trivial, então $\nabla(D) = 1 \in \mathbb{Z}[z]$;*
2. *se D_+ , D_- e D_0 são idênticos a menos de uma vizinhança, dentro da qual eles são como na Figura 3.2, então os polinômios a eles associados satisfazem a relação de novelo*

$$\nabla(D_+) - \nabla(D_-) = z\nabla(D_0).$$

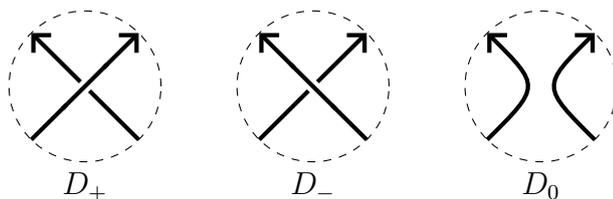


Figura 3.2

Definição 3.13. Para um diagrama de link orientado D , o polinômio $\nabla(D)$ (também denotado ∇_D) dado pelo teorema acima é chamado *polinômio de Conway-Alexander* de D .

Teorema 3.14. *O polinômio de Conway-Alexander é um invariante de links orientados, isto é, se D_1 e D_2 são dois diagramas de um link orientado L , então*

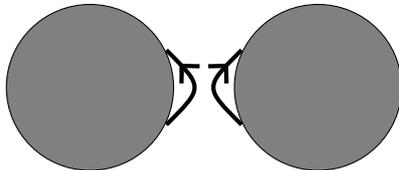
$$\nabla(D_1) = \nabla(D_2).$$

Desta forma, podemos nos referir ao polinômio de Conway-Alexander de L , denotado $\nabla(L)$ ou ∇_L .

Antes de calcular alguns exemplos, vamos mostrar a seguinte propriedade.

Proposição 3.15. *O polinômio de Conway-Alexander de um link separável é sempre 0.*

Demonstração. Considere um diagrama de L como na figura



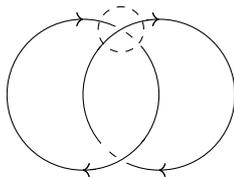
e aplique a relação de novelo com ele fazendo o papel de D_0 . Isso nos dá

$$z\nabla_{D_0}(z) = \nabla_{D_+}(z) - \nabla_{D_-}(z) = 0$$

pois D_+ e D_- claramente representam o mesmo link. □

Esta proposição nos ajuda a computar o polinômio, como veremos abaixo.

Exemplo 3.16. Começaremos computando o polinômio de Conway-Alexander do link de Hopf. Se aplicarmos a relação de novelo ao cruzamento destacado no diagrama



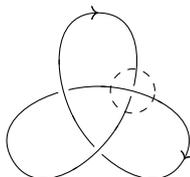
obtemos $z\nabla_{D_0}(z) = \nabla_{D_+}(z) - \nabla_{D_-}(z)$ onde D_- é o diagrama do link de Hopf acima, D_+ representa um link separável e D_0 representa o nó trivial. Portanto temos

$$\nabla_{D_-}(z) = \nabla_{D_+}(z) - z\nabla_{D_0}(z) = 0 - z \cdot 1 = -z.$$

Desta forma, o polinômio do link de Hopf acima é $-z$.

É importante notar que a outra versão do link de Hopf, obtida ao trocar a orientação em uma das componentes, possui polinômio de Conway-Alexander igual à z .

Exemplo 3.17. Usando o mesmo raciocínio, se aplicarmos a relação de novelo ao cruzamento abaixo



obtemos que D_+ representa o nó trivial, D_- representa o nó de trevo e D_0 representa o link de Hopf do Exemplo 3.16. Portanto, o polinômio de Conway-Alexander do nó de trevo é

$$\nabla_{D_-}(z) = \nabla_{D_+}(z) - z\nabla_{D_0}(z) = 1 - z(-z) = 1 + z^2.$$

O polinômio $\Delta(L) = \Delta_L \in \mathbb{Z}[t]$ originalmente descrito por Alexander se relaciona com ∇_L pela equação

$$\Delta_L(t) = \pm t^{\pm \frac{n}{2}} \nabla_L(t^{-1/2} - t^{1/2}),$$

onde o fator $\pm t^{\pm \frac{n}{2}}$ é escolhido de forma a fazer com que o termo de menor grau seja uma constante positiva.

Por mais de 50 anos, o polinômio de Alexander foi a melhor ferramenta para distinguir nós. De fato, com ele foi possível distinguir todos os nós com 8 ou menos cruzamentos da tabela de nós. Além disso, não há nenhum nó com polinômio de Alexander igual a 1 dentre os nós não-triviais com 10 ou menos cruzamentos.

Porém, o polinômio de Alexander não detecta o nó-trivial, ou seja, existem (vários) exemplos de nós não-triviais que possuem polinômio de Alexander igual a 1. Ele também não detecta a quiralidade, isto é, seu valor sempre é igual para um nó e sua imagem espelho.

3.2.2 Polinômio de Jones

A descoberta de Jones se deu enquanto ele trabalhava em uma área até então não relacionada com teoria dos nós: a construção original do polinômio veio de álgebra de operadores [7]. Além de ser um invariante mais refinado que o polinômio de Alexander e ainda simples de se calcular, o polinômio de Jones mostrou conexões com uma variedade de teorias matemáticas relacionadas à física, especialmente teorias quânticas dos campos topológicas (TQFT), como teoria de Chern-Simons. Posteriormente, resultou em outro invariante de nós, a homologia de Khovanov.

Apresentaremos a construção do polinômio de Jones desenvolvida por Louis Kauffman, que faz uso de outro polinômio associado a diagramas de links.

Teorema 3.18. *Podemos associar a cada diagrama de link (não-orientado) D um polinômio de Laurent $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$, determinado unicamente pelas relações:*

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$;
2. $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle D \rangle$;
3. se D , D_0 e D_1 são iguais fora de uma vizinhança, e dentro são como na Figura 3.3, então eles satisfazem

$$\langle D \rangle = A\langle D_0 \rangle + A^{-1}\langle D_1 \rangle.$$

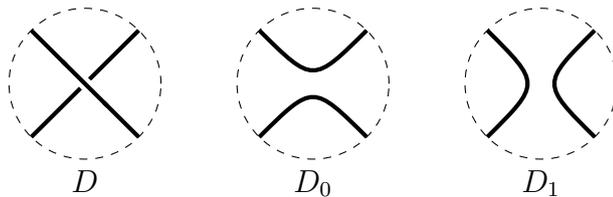


Figura 3.3

Chamamos $\langle D \rangle$ de polinômio bracket de D .

Observação 3.19. No Item 2 acima, o símbolo $D \sqcup \bigcirc$ representa a união do diagrama D com um círculo disjunto de D no plano. Notamos também que a relação descrita no Item 3 do teorema acima geralmente é representada pela equação

$$\langle \text{diagrama} \rangle = A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle \langle \bigcirc \rangle. \quad (3.1)$$

De forma geral, se temos uma relação de novelo qualquer, podemos omitir a parte em que os diagramas coincidem e escrever a relação no espírito da Equação 3.1.

O polinômio bracket não é um invariante de nós e links: ele não é invariante por movimentos de Reidemeister do tipo I, apesar de ser invariante pelos outros movimentos.

Proposição 3.20. *O polinômio bracket é inalterado por movimentos de Reidemeister dos tipos II e III, e para movimentos do tipo I, satisfaz*

$$\langle \text{diagrama} \rangle = -A^{-3} \langle \bigcirc \rangle \quad e \quad \langle \text{diagrama} \rangle = -A^3 \langle \bigcirc \rangle.$$

Demonstração. Primeiro vamos calcular o efeito de um movimento do tipo I no polinômio bracket. Ao aplicarmos as relações do Teorema 3.18, obtemos

$$\langle \text{diagrama} \rangle = A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \rangle = [A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})] \langle \bigcirc \rangle = -A^{-3} \langle \bigcirc \rangle.$$

Similarmente, para o outro movimento do tipo I temos

$$\langle \text{diagrama} \rangle = A \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle = [A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}] \langle \bigcirc \rangle = -A^3 \langle \bigcirc \rangle.$$

Para o movimento do tipo II, nós temos

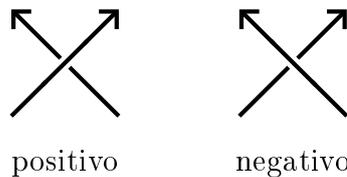
$$\begin{aligned} \langle \text{diagrama} \rangle &= A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle = A(-A^{-3}) \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1}[A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle] \\ &= (-A^{-2} + A^{-2}) \langle \text{diagrama} \rangle + \langle \text{diagrama} \rangle = \langle \text{diagrama} \rangle, \end{aligned}$$

onde usamos o resultado mostrado há pouco para obter a segunda igualdade. Finalmente, para os movimentos do tipo III, vale

$$\langle \text{diagrama} \rangle = A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle = A \langle \text{diagrama} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama} \rangle = \langle \text{diagrama} \rangle,$$

onde a invariância do bracket pelo movimento do tipo II foi usada duas vezes na segunda igualdade. Uma equação similar mostra a invariância pelo outro movimento do tipo III. \square

Felizmente, podemos corrigir este polinômio para que ele se torne um invariante de links usando o número de torção definido abaixo. Para diagramas de links orientados, classificamos os cruzamentos como positivos ou negativos pela regra:



Denotaremos a quantidade de cruzamentos positivos em um diagrama D por $n_+(D)$, (ou simplesmente n_+ , quando está claro a qual diagrama se refere). Da mesma forma, $n_-(D)$ (ou n_-) denotará o número de cruzamentos negativos de D .

Definição 3.21. O *número de torção* de um diagrama de link orientado D , denotado $w(D)$, é definido como o número de cruzamentos positivos menos o número de cruzamentos negativos de D . Isto é,

$$w(D) := n_+(D) - n_-(D).$$

Podemos facilmente verificar que o número de torção de um diagrama não é alterado por movimentos de Reidemeister dos tipos II e III. Com um movimento do tipo I, o número de torção é alterado em ± 1 . Usando o polinômio bracket e o número de torção, podemos definir um invariante de links da seguinte forma:

Proposição 3.22. *Seja D um diagrama de link orientado. Então o polinômio de Laurent X_D na variável A definido por*

$$X_D(A) := (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle$$

é um invariante de links orientados.

Demonstração. A invariância pelos movimentos dos tipos II e III segue da Proposição 3.20 e da propriedade do número de torção notada acima. Para ver que ele também é invariante pelos movimentos do tipo I, notamos que os cruzamento na Figura 3.4 abaixo são sempre positivo e negativo, respectivamente, independente da orientação do link.



Figura 3.4

Assim, pela Proposição 3.20, temos

$$(-A)^{-3w(\curvearrowright)} \langle \curvearrowright \rangle = (-A)^{-3[w(\curvearrowright)+1]} (-A^3) \langle \curvearrowleft \rangle = (-A)^{-3w(\curvearrowleft)} \langle \curvearrowleft \rangle.$$

O cálculo para o caso em que o cruzamento é negativo segue de forma similar. Concluimos que o polinômio X_D é invariante também por movimentos do tipo I. \square

Podemos notar que, embora precisamos de uma orientação em L para calcular o polinômio X_L , os polinômios de L e de seu inverso L^{-1} são iguais. De fato, o sinal de um cruzamento (e conseqüentemente o número de torção também) não é alterado ao trocar a orientação de todas as componentes do link. Em particular, o polinômio X_K de um nó K não depende de orientação.

Definição 3.23. O *polinômio de Jones* de um link orientado L , denotado V_L , é o polinômio de Laurent na variável $t^{\frac{1}{2}}$ dado por

$$V_L(t) = X_L(t^{-\frac{1}{4}}).$$

Exemplo 3.24. Para o nó de trevo canhoto (Figura 2.6a), nós temos

$$\begin{aligned}
\langle \text{Trevo Canhoto} \rangle &= A \langle \text{Trevo Canhoto} \rangle + A^{-1} \langle \text{Trevo Canhoto} \rangle \\
&= A(-A^3)^2 + A^{-1} \left(A \langle \text{Trevo Canhoto} \rangle + A^{-1} \langle \text{Trevo Canhoto} \rangle \right) \\
&= A^7 + \left[(-A^3) \langle \text{Círculo} \rangle + A^{-2}(-A^{-3}) \langle \text{Círculo} \rangle \right] = A^7 - A^3 - A^{-5}.
\end{aligned}$$

Note que, independente da orientação, o número de torção deste diagrama do nó de trevo é -3, assim temos que o seu polinômio de Jones é

$$\begin{aligned}
V_L(t) &= (-A)^9(A^7 - A^3 - A^{-5}) \Big|_{A=t^{-1/4}} \\
&= (-A^{16} - A^{12} - A^4) \Big|_{A=t^{-1/4}} = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}.
\end{aligned}$$

Esta abordagem para definir o polinômio de Jones foi apresentada por Louis Kauffman em [8]. Assim como o polinômio de Conway-Alexander, o polinômio de Jones também satisfaz uma relação de novelo. Mais do que isso, ele é caracterizado pelas seguintes propriedades.

Proposição 3.25. *O polinômio de Jones V é caracterizado pelas relações:*

1. $V_D \in \mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$ para todo diagrama de link orientado D ;
2. $V_D(t) = 1$ se D representa o nó trivial; e
3. se D_+ , D_- e D_0 são iguais fora de uma vizinhança, e dentro são como na Figura 3.2, então eles satisfazem

$$t^{-1}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{D_0}(t).$$

Ele também é bem comportado por operações de composição e reflexão.

Proposição 3.26. *O polinômio de Jones de um link orientado L satisfaz:*

1. se L tem um número ímpar de componentes, em particular se L é um nó, então $V_L \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$;
2. se L tem um número par de componentes, então $V_L \in t^{\frac{1}{2}}\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$;
3. se L é a composição de dois nós orientados K_1 e K_2 , então $V_L = V_{K_1}V_{K_2}$;
4. $V_{\bar{L}}(t) = V_L(t^{-1})$, onde \bar{L} é a imagem espelho de L .

O polinômio de Jones é considerado um invariante mais potente que o polinômio de Alexander. Apesar dele não ser estritamente mais forte, ele diferencia um conjunto de links maior que o de Alexander, além de conseguir detectar a quiralidade de muitos nós. Por exemplo, a quiralidade do nó de trevo segue do fato de que seu polinômio de Jones não satisfaz $V(t) = V(t^{-1})$. Porém ainda não se sabe se ele detecta o nó trivial, i.e., não se tem uma prova ou contra-exemplo para a seguinte pergunta.

Conjectura 3.27. *Se K é um nó não-trivial, vale que $V_K \neq 1$?*

3.2.3 Polinômio HOMFLY

A descoberta do polinômio de Jones fez com que vários matemáticos tentassem produzir novos invariantes polinomiais que generalizassem os polinômios de Jones e Alexander. Isto resultou na descoberta do polinômio HOMFLY por 4 grupos independentes apenas alguns meses depois da descoberta do polinômio de Jones [5].

Teorema 3.28. *Para diagramas de links orientados D , existem polinômios de Laurent $P(D) \in \mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$ nas variáveis l e m determinados unicamente pelas relações:*

1. se D representa o nó trivial, então $P(D) = 1$;
2. se D_+ , D_- e D_0 são diagramas idênticos a menos de uma vizinhança, dentro da qual eles são como na Figura 3.2, então seus polinômios satisfazem a relação de novelo

$$lP(D_+) + l^{-1}P(D_-) + mP(D_0) = 0.$$

Além disso, o polinômio P é um invariante de links orientados e chamamos $P(L)$ o polinômio HOMFLY do link orientado L .

Podemos obter os polinômios de Conway-Alexander e de Jones a partir do polinômio de HOMFLY da seguinte forma:

Proposição 3.29. *O polinômio $P_L(l, m)$ de um link orientado L se relaciona com os polinômios $V_L(t)$ e $\nabla_L(z)$ por*

$$V_L(t) = P_L(it^{-1}, i(t^{-1/2} - t^{1/2})) \quad e \quad \nabla_L(z) = P_L(i, -iz), \quad (3.2)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ em \mathbb{C} .

Demonstração. Segue diretamente da caracterização dos polinômios de Jones e Alexander usando as relações de novelo. \square

Uma propriedade interessante do polinômio HOMFLY é a seguinte.

Teorema 3.30. *Seja $L_1 \sqcup L_2$ a união de dois links orientados L_1 e L_2 tal que podemos separar L_1 de L_2 com uma esfera. Então temos*

$$P(L_1 \sqcup L_2) = -\frac{l + l^{-1}}{m} P(L_1)P(L_2)$$

Como para o polinômio de Jones, o polinômio de HOMFLY é multiplicativo com relação à composição.

Teorema 3.31. *Para nós orientados K_1 e K_2 , temos*

$$P(K_1 \# K_2) = P(K_1)P(K_2).$$

Capítulo 4

Homologia de Khovanov

Neste capítulo vamos estudar a homologia de Khovanov para links desenvolvida por Mikhail Khovanov em 1999 [9]. A ideia inicial é associar a cada diagrama de link um complexo de cadeias, de forma que a característica de Euler graduada do complexo seja o polinômio de Jones do link. Essa construção nos leva a uma teoria de homologia de links, ou seja, os grupos de homologia obtidos são invariantes de links.

Em 2010, foi provado por P. B. Kronheimer e T. S. Mrowka que essa homologia detecta o nó-trivial [12]. A homologia de Khovanov também contribuiu com uma nova prova da Conjectura de Milnor sobre o gênero slice de nós tóricos, a partir de um invariante derivado definido por Jacob Rasmussen [18].

4.1 Revisitando o Polinômio de Jones

Começaremos com uma nova visão sobre o polinômio de Jones. Dado um diagrama de link orientado D com n cruzamentos, a relação

$$\langle \text{cruzamento} \rangle = A \langle \text{resolução} \rangle + A^{-1} \langle \text{resolução} \rangle \quad (4.1)$$

nos permite escrever o bracket de D em função dos brackets de dois diagramas com $n - 1$ cruzamentos. Usando essa relação recursivamente, obtemos $\langle D \rangle$ em função de brackets de 2^n diagramas que não possuem cruzamentos. Nosso objetivo é escrever o polinômio de Jones de D em função de tais diagramas.

Definição 4.1. Seja x um cruzamento de um diagrama de link D . Chamamos de 0 -suavização de x e 1 -suavização de x as duas mudanças numa vizinhança de x retratadas na Figura 4.1. Os diagramas obtidos após suavizar todos os cruzamentos em D são ditos *suavizações de D* .



Figura 4.1: Suavizações em um cruzamento.

Ao fixarmos uma enumeração dos cruzamentos de D , podemos associar cada suavização de D a um elemento de $\{0, 1\}^n$, onde a i -ésima coordenada representa o tipo de suavização feita no i -ésimo cruzamento. Assim, se Γ_α é a suavização correspondente a $\alpha \in \{0, 1\}^n$ e r_α é a quantidade de 1's em α , isto é, a quantidade de 1-suavizações em D para obter Γ_α , podemos escrever

$$\langle D \rangle = \sum_{\alpha} A^{n-r_\alpha} (A^{-1})^{r_\alpha} \langle \Gamma_\alpha \rangle = \sum_{\alpha} A^{n-2r_\alpha} \langle \Gamma_\alpha \rangle.$$

Usando as relações

$$\langle \bigcirc \rangle = -A^2 - A^{-2} \quad \text{e} \quad \langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle, \quad (4.2)$$

concluimos que $\langle \Gamma_\alpha \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{k_\alpha}$, onde k_α é o número de componentes de Γ_α . Portanto, temos

$$\langle D \rangle = \sum_{\alpha} A^{n-2r_\alpha} (-A^2 - A^{-2})^{k_\alpha}. \quad (4.3)$$

Observação 4.2. Usualmente, a definição do polinômio bracket estabelece $\langle \bigcirc \rangle = 1$ no lugar de $\langle \bigcirc \rangle = -A^2 - A^{-2}$. Porém, neste capítulo usaremos esta versão não-normalizada do polinômio bracket. Podemos obter a forma padrão ao dividir o bracket aqui usado por $(-A^2 - A^{-2})$.

De forma análoga à feita no Capítulo 3, definimos

$$X_D(A) = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle, \quad (4.4)$$

onde $w(D) = n_+ - n_-$ e n_+ e n_- são, respetivamente, a quantidade de cruzamentos positivos e negativos de D . O polinômio X_D é um invariante de links, e está relacionado com o polinômio de Jones via

$$V_D(t) = \frac{X_D(t^{-1/4})}{(-t^{-1/2} - t^{1/2})}. \quad (4.5)$$

Porém, aqui usaremos uma versão ligeiramente diferente – e mais simples – do polinômio de Jones.

Definição 4.3. O *polinômio de Jones não-normalizado* de um link L , denotado J_L , é definido como o polinômio de Laurent em $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ dado por

$$J_L(q) = X_L((-q)^{-1/2}).$$

Observação 4.4. Pela Equação 4.5, está claro que obtemos o polinômio de Jones a partir desta versão não-normalizada ao dividir por $(q + q^{-1})$ e fazer a substituição $q = -t^{1/2}$.

Escrevendo $n = n_+ + n_-$ e aplicando a Equação 4.3 na definição de X_D , nós obtemos

$$\begin{aligned} X_D(A) &= (-A)^{-3(n_+ - n_-)} \sum_{\alpha} A^{n_+ + n_- - 2r_\alpha} (-A^2 - A^{-2})^{k_\alpha} \\ &= (-1)^{n_+ - n_-} A^{-2(n_+ - 2n_-)} \sum_{\alpha} A^{-2r_\alpha} (-A^2 - A^{-2})^{k_\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, vemos que o polinômio de Jones não-normalizado de D pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 J_D(q) &= (-1)^{n_+ + n_-} (-q)^{n_+ - 2n_-} \sum_{\alpha} (-q)^{r_{\alpha}} (q + q^{-1})^{k_{\alpha}} \\
 &= (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \sum_{i=0}^n (-q)^i \sum_{\substack{\alpha \\ r_{\alpha}=i}} (q + q^{-1})^{k_{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Usando essa equação, tornaremos o cálculo do polinômio de Jones mais visual. Podemos imaginar que sobre cada vértice α do cubo n -dimensional $\{0, 1\}^n$ está o polinômio $\langle \Gamma_{\alpha} \rangle = (q + q^{-1})^{k_{\alpha}}$. Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, somamos os polinômios dos vértices α com $r_{\alpha} = i$ e multiplicamos por $(-q)^{r_{\alpha}}$. Por fim, para obter $J_D(q)$, somamos sobre todos os i 's e multiplicamos por $(-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-}$.

Exemplo 4.5. Para o nó de trevo destro (Figura 2.6b), este processo é mostrado abaixo.

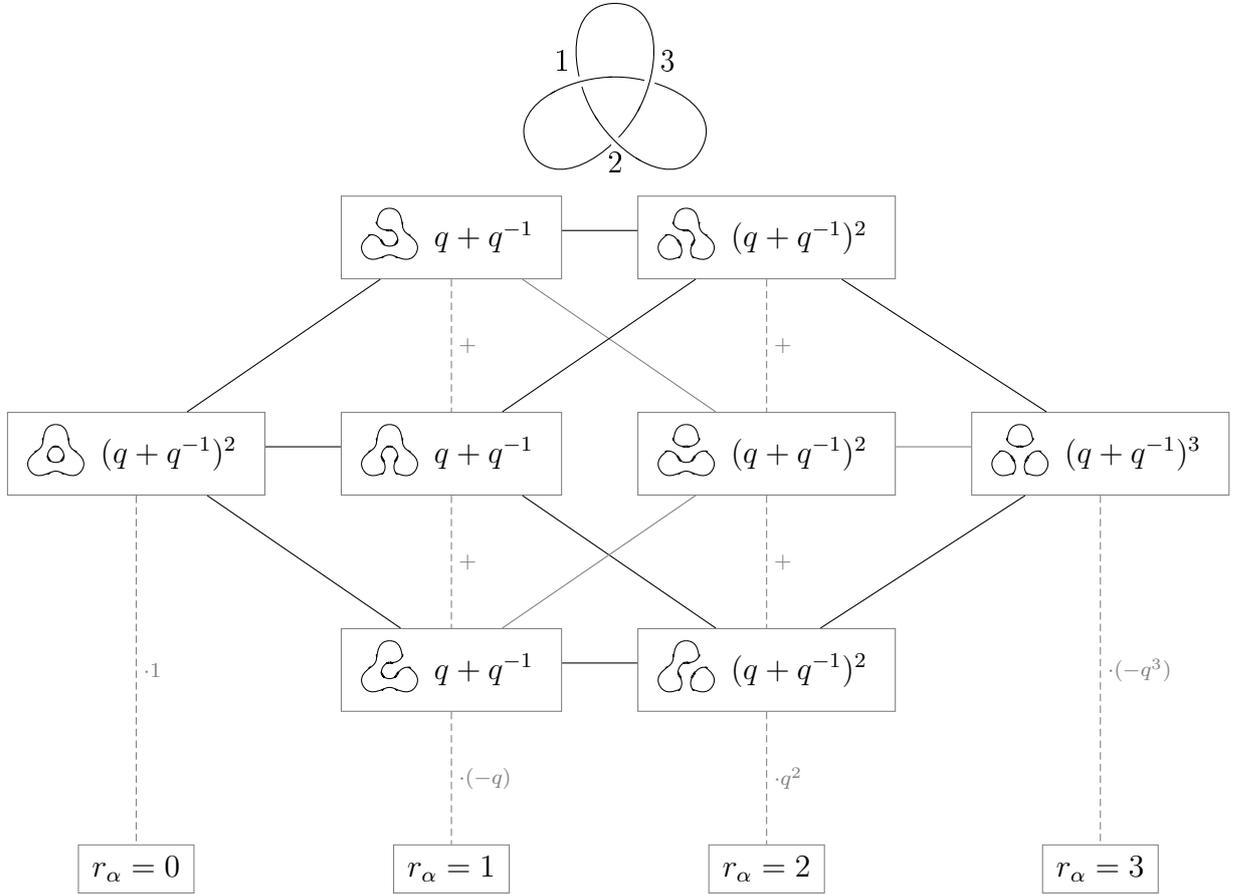


Figura 4.2: Cubo para o nó de trevo.

Disto, vemos que o polinômio de Jones não-normalizado do nó de trevo destro (note que $n_+ = 3$ e $n_- = 0$) é

$$\begin{aligned}
 J(q) &= q^3 \left[(q + q^{-1})^2 - 3q(q + q^{-1}) + 3q^2(q + q^{-1})^2 - q^3(q + q^{-1})^3 \right] \\
 &= q^3(q + q^{-1})(-q^5 + q^3 + q^{-1}) = -q^9 + q^5 + q^3 + q,
 \end{aligned}$$

e portanto, o polinômio de Jones do nó é

$$V(t) = \frac{J(q)}{(q + q^{-1})} \Big|_{q=-t^{1/2}} = [-q^8 + q^6 + q^2] \Big|_{q=-t^{1/2}} = -t^4 + t^3 + t,$$

que corresponde a $V_L(t^{-1})$, onde L é o nó de trevo canhoto (Exemplo 3.24).

4.2 Construção do Complexo

A ideia é usar a abordagem mais visual do polinômio de Jones não-normalizado, descrita na seção anterior, para atribuir a cada diagrama D um complexo de co-cadeias $(C(D)^\bullet, d^\bullet)$ (de espaços vetoriais graduados sobre \mathbb{Q}) cuja característica de Euler graduada seja o próprio polinômio. Para isso, definiremos a seguir os conceitos básicos relativos a espaços vetoriais graduados. Para as definições e propriedades gerais de complexo de (co-)cadeias e de grupos de (co)homologia, veja [6].

Definição 4.6. Uma *gradação* de um espaço vetorial V é uma sequência de subespaços $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tais que

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i.$$

Fixada uma gradação, V é dito *graduado* e os elementos de V_i são chamados *elementos homogêneos de grau i* . Dizemos que um mapa linear $f : V \rightarrow W$ entre espaços vetoriais graduados *tem grau d* se $f(V_i) \subset W_{i+d}$ para todo índice $i \in \mathbb{Z}$. Além disso, se V tem dimensão finita, definimos a *dimensão graduada* de V , denotada $\text{qdim}(V)$, como sendo o polinômio de Laurent em $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ dado por

$$\text{qdim}(V) := \sum_i q^i \dim(V_i).$$

Às operações de soma direta e produto tensorial de espaços vetoriais graduados correspondem gradações canônicas: se V e W são graduados, então as gradações de $V \oplus W$ e $V \otimes W$ são dadas por

$$(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i \quad \text{e} \quad (V \otimes W)_i = \bigoplus_{j+k=i} V_j \otimes W_k.$$

Com estas gradações, a dimensão graduada satisfaz as seguintes propriedades:

$$\text{qdim}(V \oplus W) = \text{qdim}(V) + \text{qdim}(W) \quad \text{e} \quad \text{qdim}(V \otimes W) = \text{qdim}(V) \text{qdim}(W).$$

Definição 4.7. Para um espaço graduado V e um número inteiro n , chamamos de *shift por n de V* , denotado $V\{n\}$, o espaço graduado dado por

$$V\{n\}_i = V_{i-n}.$$

O efeito de um shift na dimensão graduada é o de uma multiplicação por q^n , isto é, $\text{qdim}(V\{n\}) = q^n \text{qdim}(V)$. De forma análoga definimos o *shift* em complexos de cadeias:

Definição 4.8. Se $C = (C^\bullet, d^\bullet)$ é um complexo de co-cadeias e m um inteiro, definimos o *shift por m de C* , denotado $C[m]$, como sendo o complexo $(C^{\bullet-m}, d^{\bullet-m})$, isto é,

$$C[m]^i := C^{i-m}$$

e o mesmo para as diferenciais de $C[m]$.

Por fim, definimos a característica de Euler graduada de um complexo de cadeias.

Definição 4.9. Dado um co-complexo $C = (C^\bullet, d^\bullet)$ de espaços vetoriais graduados, definimos a característica de Euler graduada de C , $\chi_q(C)$ por

$$\chi_q(C) = \sum_i (-1)^i \text{qdim}(H^i(C)),$$

onde $H^i(C)$ é o i -ésimo grupo de cohomologia de C , isto é, $H^i(C) = \ker(d^i) / \text{Im}(d^{i-1})$.

Agora, sejam D um diagrama de link orientado com n cruzamentos e n_+ e n_- como antes. Vamos construir, usando a Equação 4.6, um co-complexo de espaços vetoriais graduados cuja característica de Euler graduada é o polinômio de Jones não-normalizado de D . Note que cada círculo em uma suavização de D contribui com um fator da forma $q + q^{-1}$ em um dos somandos de $J_D(q)$. Isso motiva a escolha de um espaço vetorial graduado V que satisfaça $\text{qdim} = q + q^{-1}$. Assim, definimos V como o espaço vetorial bidimensional sobre \mathbb{Q} com base $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}\}$, com a gradação

$$\deg(\mathbf{1}) = 1 \quad \text{e} \quad \deg(\mathbf{x}) = -1.$$

Este espaço será o alicerce da definição de homologia de Khovanov. Para cada $\alpha \in \{0, 1\}^n$, associamos o espaço graduado $V_\alpha := V^{\otimes k_\alpha} \{r_\alpha\}$ e, para cada inteiro i , definimos os espaços $\llbracket D \rrbracket^i$ por

$$\llbracket D \rrbracket^i = \bigoplus_{\substack{\alpha \\ r_\alpha=i}} V_\alpha. \quad (4.7)$$

Desta maneira, no caso em que $n = 3$, temos o cubo da Figura 4.3.

Note que as dimensões graduadas dos espaços $\llbracket D \rrbracket^i$ satisfazem

$$\text{qdim}(\llbracket D \rrbracket^i) = \sum_{\substack{\alpha \\ r_\alpha=i}} \text{qdim}(V_\alpha) = \sum_{\substack{\alpha \\ r_\alpha=i}} q^{r_\alpha} (q + q^{-1})^{k_\alpha}. \quad (4.8)$$

Ignoremos por um momento que ainda não definimos as diferenciais $d^i : \llbracket D \rrbracket^i \rightarrow \llbracket D \rrbracket^{i+1}$.

Definição 4.10. O *complexo de Khovanov de D* , denotado $K(D)$, é dado por

$$K(D) := \llbracket D \rrbracket[-n_-] \{n_+ - 2n_-\}.$$

Logo,

$$K^i(D) = \llbracket D \rrbracket^{i+n_-} \{n_+ - 2n_-\} = \bigoplus_{\substack{\alpha \\ r_\alpha=i+n_-}} V_\alpha \{n_+ - 2n_-\}. \quad (4.9)$$

Além disso, a cohomologia do complexo de Khovanov de D é chamada de *homologia de Khovanov* e seus espaços graduados serão denotados $H_K^i(D)$. Assim,

$$H_K^i(D) := \frac{\ker(d^i : K^i(D) \rightarrow K^{i+1}(D))}{\text{Im}(d^{i-1} : K^{i-1}(D) \rightarrow K^i(D))}.$$

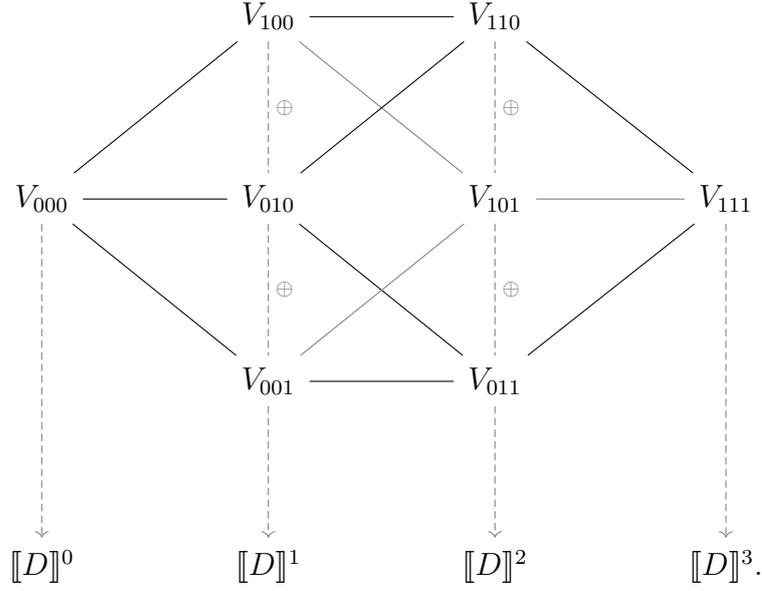


Figura 4.3: Cubo associado aos espaços $\llbracket D \rrbracket^i$.

Observação 4.11. Como todos os espaços $K^i = K^i(D)$ têm dimensão finita, se os mapas de bordo d^i forem escolhidos de modo a ter grau zero com respeito às gradações dos K^i , a característica de Euler graduada do complexo de Khovanov de D será igual à soma alternada das dimensões graduadas de $K = K(D)$, isto é,

$$\chi_q(K) = \sum_i (-1)^i \text{qdim}(K^i). \quad (4.10)$$

Por outro lado, pelas Equação 4.9 e Equação 4.8 temos que

$$\begin{aligned} \text{qdim}(K^i) &= q^{n_+ - 2n_-} \text{qdim}(\llbracket D \rrbracket^{i+n_-}) \\ &= q^{n_+ - 2n_-} \sum_{\substack{\alpha \\ r_\alpha = i+n_-}} q^{r_\alpha} (q + q^{-1})^{k_\alpha}. \end{aligned}$$

Assim, o lado direito da Equação 4.10 é igual a

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^{i-n_-} \text{qdim}(K^{i-n_-}) &= (-1)^{-n_-} q^{n_+ - 2n_-} \sum_i (-1)^i \sum_{\substack{\alpha \\ r_\alpha = i}} q^{r_\alpha} (q + q^{-1})^{k_\alpha} \\ &= (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \sum_{i=0}^n (-q)^i \sum_{\substack{\alpha \\ r_\alpha = i}} (q + q^{-1})^{k_\alpha} \end{aligned}$$

que é exatamente o polinômio de Jones não-normalizado de D (Equação 4.6).

4.3 As Diferenciais

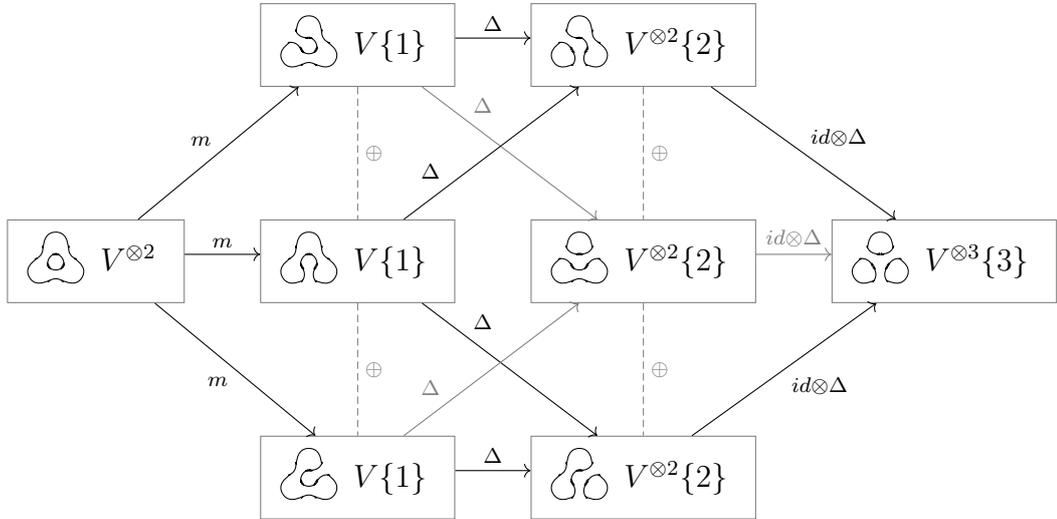
Para definir as diferenciais $d^i : \llbracket D \rrbracket^i \rightarrow \llbracket D \rrbracket^{i+1}$, vamos associar mapas a cada aresta do cubo subjacente à $\llbracket D \rrbracket$ (Figura 4.3). Considerando que $V_\alpha := V^{\otimes k_\alpha} \{r_\alpha\}$, atribuímos um

círculo de Γ_α a cada cópia de V em V_α , para todos os vértices α do cubo. As arestas do cubo ligam dois vértices que diferem em apenas uma coordenada, desta forma elas podem ser representadas por elementos de $\{0, 1, *\}^n$ que têm $*$ apenas na respectiva coordenada. Se uma aresta $\xi \in \{0, 1, *\}^n$, com $*$ na i -ésima coordenada, liga os vértices α e β , com $r_\beta = r_\alpha + 1$, as suavizações associadas Γ_α e Γ_β resolvem todos os cruzamentos de D da mesma forma, a menos do i -ésimo cruzamento, onde Γ_α resolve com uma 0-suavização e Γ_β com uma 1-suavização. Isso garante que a diferença entre k_α e k_β é exatamente 1. De fato, se trocarmos \succ por \succleftarrow em um diagrama sem cruzamentos, estaremos dividindo um círculo em dois, ou grudando dois círculos. Essas mudanças serão representadas pelos mapas lineares $m : V \otimes V \rightarrow V$ e $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$ definidos por

$$\begin{cases} m(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1}, & m(\mathbf{x} \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{x} \\ m(\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}) = \mathbf{x}, & m(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{1} \\ \Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \end{cases} .$$

Chamamos m de multiplicação e Δ de co-multiplicação. Observamos que ambos possuem grau -1 . Podemos definir $d_\xi : V_\alpha \rightarrow V_\beta$ como o produto tensorial entre a identidade de V , nos fatores associados à círculos invariantes por ξ , e m ou Δ , nos fatores dos círculos que mudam, dependendo do tipo de mudança (veja Exemplo 4.12). Como a diferença entre os shifts de V_α e V_β é 1, o grau de d_ξ é zero.

Exemplo 4.12. Para o nó de trevo destro, com o mesmo diagrama do Exemplo 4.5, os espaços vetoriais e os mapas associados aos vértices e arestas do cubo são dados a seguir.



Com estes mapas d_ξ associados às arestas, cada quadrado do cubo se torna comutativo.

Proposição 4.13. *O cubo associado a um diagrama de link D , com vértices $\{V_\alpha\}$ e arestas $\{d_\xi\}$ como descrito acima, é comutativo em cada quadrado.*

Demonstração. Primeiro, note que um quadrado do cubo, visto a partir das suavizações associadas, representa a mudança de duas suavizações do tipo 0 para duas do tipo 1, e cada ordem possível de fazer essas mudanças está associada a um dos caminhos do quadrado. Assim, dado um quadrado no cubo de D , podemos enxergá-lo como o cubo de um diagrama D' com apenas dois cruzamentos: o diagrama obtido fazendo-se as mesmas suavizações que não se alteram no quadrado, e mantendo os dois cruzamentos – que

chamaremos de i e j – cujas suavizações são alteradas. Com essas considerações, podemos dividir a demonstração em casos.

1º caso: i e j estão em componentes distintas do diagrama D' . Assim, os círculos envolvidos na mudança da suavização em i são diferentes dos círculos envolvidos na mudança de j . Neste caso, a comutatividade do quadrado segue da equação

$$(\text{id} \otimes g) \circ (f \otimes \text{id}) = f \otimes g = (f \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes g).$$

2º caso: i e j aparecem na sobreposição de duas componentes de D' , como no link de Hopf. Nesse caso, a menos dos círculos que não são alterados, e que por isso foram omitidos, o quadrado tem uma das formas:

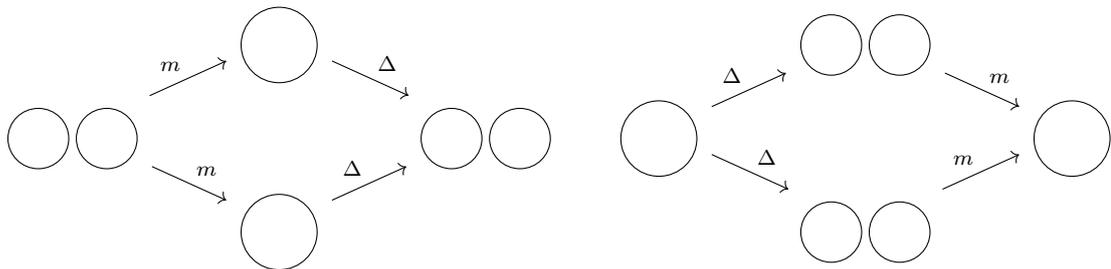


Figura 4.4: 2º caso.

Portanto, a comutatividade do quadrado é trivial.

3º caso: i e j estão na mesma componente de D' . Este é o caso mais delicado. Uma das suavizações divide essa componente em 3 círculos, outras duas dividem em 2, e a última resolve os cruzamentos de maneira a formar um único círculo. Os possíveis quadrados neste caso estão representados na Figura 4.5 e na Figura 4.6 abaixo:

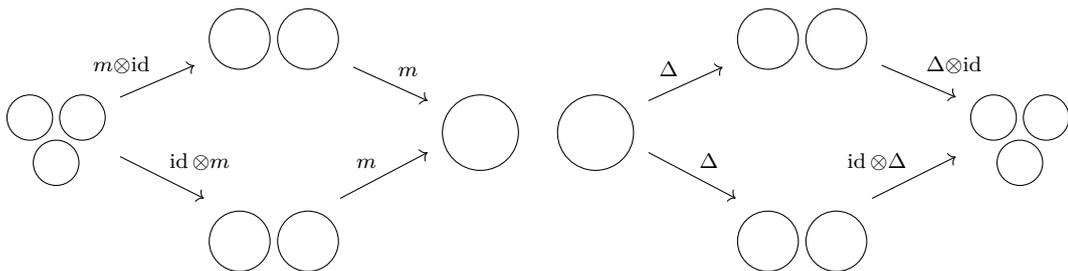


Figura 4.5: 3º caso.

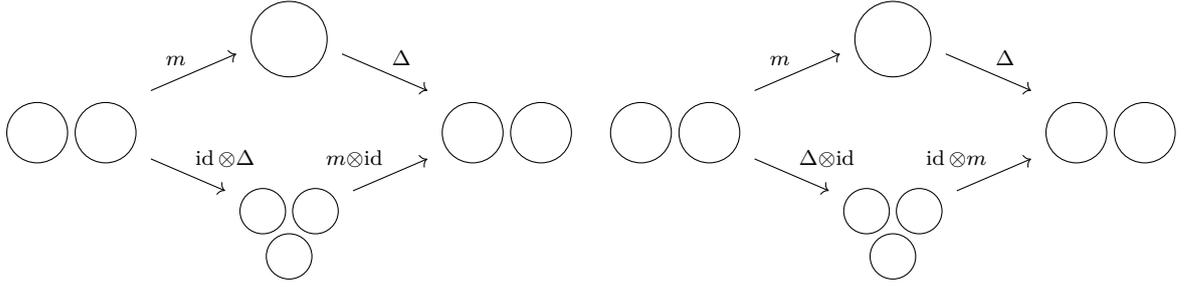


Figura 4.6: 3º caso.

A prova da comutatividade dos quadrados na Figura 4.5 está representada nos diagramas abaixo. Note que isso é equivalente a m ser associativa e a Δ ser co-associativa.

$$\begin{array}{ccc}
 (a + b\mathbf{x}) \otimes (c + d\mathbf{x}) \otimes (e + f\mathbf{x}) & \xrightarrow{m \otimes \text{id}} & (ac + (ad + bc)\mathbf{x}) \otimes (e + f\mathbf{x}) \\
 \downarrow \text{id} \otimes m & & \downarrow m \\
 (a + b\mathbf{x}) \otimes (ce + (cf + de)\mathbf{x}) & \xrightarrow{m} & ace + (acf + ade + bce)\mathbf{x} \\
 \\
 (a + b\mathbf{x}) & \xrightarrow{\Delta} & a \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes (a + b\mathbf{x}) \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \otimes \text{id} \\
 (a + b\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes a & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta} & a \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes a \otimes \mathbf{x} + \\
 & & \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes a + b\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}
 \end{array}$$

Para os quadrados da Figura 4.6, o diagrama a seguir mostra que $(\text{id} \otimes m) \circ (\Delta \otimes \text{id}) = \Delta \circ m = (m \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \Delta)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & ((a + b\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes a) \otimes (c + d\mathbf{x}) & & \\
 & \nearrow \Delta \otimes \text{id} & & \nwarrow \text{id} \otimes m & \\
 (a + b\mathbf{x}) \otimes (c + d\mathbf{x}) & \xrightarrow{m} & ac + (ad + bc)\mathbf{x} & \xrightarrow{\Delta} & (a + b\mathbf{x}) \otimes c\mathbf{x} + \\
 & \searrow \text{id} \otimes \Delta & & \nearrow m \otimes \text{id} & a\mathbf{x} \otimes (c + d\mathbf{x}) \\
 & & (a + b\mathbf{x}) \otimes (c \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes (c + d\mathbf{x})) & &
 \end{array}$$

□

Observação 4.14. As propriedades dos mapas m e Δ evidenciadas na demonstração da Proposição 4.13 fazem com que V seja uma álgebra de Frobenius comutativa. Tais álgebras estão em correspondência bijetiva com teorias quânticas de campos topológicas (TQFT) (1+1)-dimensionais. Essas teorias são funtores da categoria de cobordismos bi-dimensionais entre 1-variedades para a categoria de espaços vetoriais. Dessa perspectiva, a construção do complexo de Khovanov nada mais é que aplicar, ao cubo de suavizações de um diagrama e seus cobordismos naturais associados às arestas, a (1+1)-TQFT associada a V .

Para melhorar a notação, dada uma aresta ξ , chamaremos o vértice de sua cauda de ξ_0 e de sua ponta de ξ_1 . Desta forma, se substituirmos o $*$ de ξ por 0 ou por 1, obteremos, respectivamente, ξ_0 e ξ_1 .

Agora, lembrando que $\llbracket D \rrbracket^i = \bigoplus_{r_\alpha=i} V_\alpha$, gostaríamos de definir

$$d^i = \sum_{\substack{\xi \\ r_{\xi_0}=i}} d_\xi \quad \forall i,$$

mas esses mapas não satisfazem $d^{i+1} \circ d^i = 0$. Na verdade, esta condição é satisfeita exatamente quando cada quadrado do cubo anti-comuta. Isso ocorre porque a projeção de $d^{i+1} \circ d^i|_{V_\alpha}$ a um dos somandos de $\llbracket D \rrbracket^{i+2}$, se não for trivialmente nula, é a soma dos dois caminhos de um quadrado do cubo. Assim, acrescentamos sinais às arestas para tornar cada quadrado anti-comutativo. É necessário que todo quadrado possua uma quantidade ímpar de sinais negativos para garantirmos a anti-comutatividade. Uma forma de fazer isso é fixando $\text{sinal}(\xi) = (-1)^{\text{número de 1's à esquerda de } * \text{ em } \xi}$ e então

$$d^i := \sum_{\substack{\xi \\ r_{\xi_0}=i}} \text{sinal}(\xi) d_\xi \quad \forall i. \quad (4.11)$$

Corolário 4.15. *Os espaços $\llbracket D \rrbracket^i$, junto com os mapas d^i definidos na Equação 4.11, formam um complexo de co-cadeias.*

Como cada mapa d_ξ tem grau 0, com a Definição 4.10 do complexo de Khovanov e a Observação 4.11, concluímos que

Teorema 4.16. *Para um diagrama de link D , a característica de Euler graduada do complexo de Khovanov de D , $K(D)$, é igual ao polinômio de Jones não-normalizado de D , isto é,*

$$\chi_q(K(D)) = J_D(q). \quad (4.12)$$

Observação 4.17. Note que a definição de $\text{sinal}(\xi)$ depende da ordem implícita dos cruzamentos de D . Consequentemente, cada ordenação gera um conjunto de diferenciais para o co-complexo $K(D)$ diferente. Entretanto, o Teorema 4.16 não depende da enumeração escolhida, pois só é necessário que as diferenciais possuam grau 0. Veremos na próxima seção que a homologia de Khovanov também independe da ordem dos cruzamentos.

Exemplo 4.18. Vamos calcular a homologia de Khovanov para o diagrama do nó de trevo destro como no Exemplo 4.12. O cubo associado ao complexo $K(D) = \llbracket D \rrbracket\{3\}$ é mostrado na Figura 4.7 a seguir. Note que os sinais foram adicionados aos mapas do cubo de acordo com a enumeração dos cruzamentos de D dada pela Figura 4.2. Também enumeramos as componentes de cada suavização de forma a corresponder à ordenação dos fatores V de V_α que utilizaremos.

As tabelas abaixo mostram a ação de cada d^i na base de $K^i(D)$ e as bases de $\ker(d^i)$ e $\text{Im}(d^i)$. Como os mapas d^i têm grau 0, podemos separar os cálculos de acordo com as gradações dos espaços $K^i(D)$.

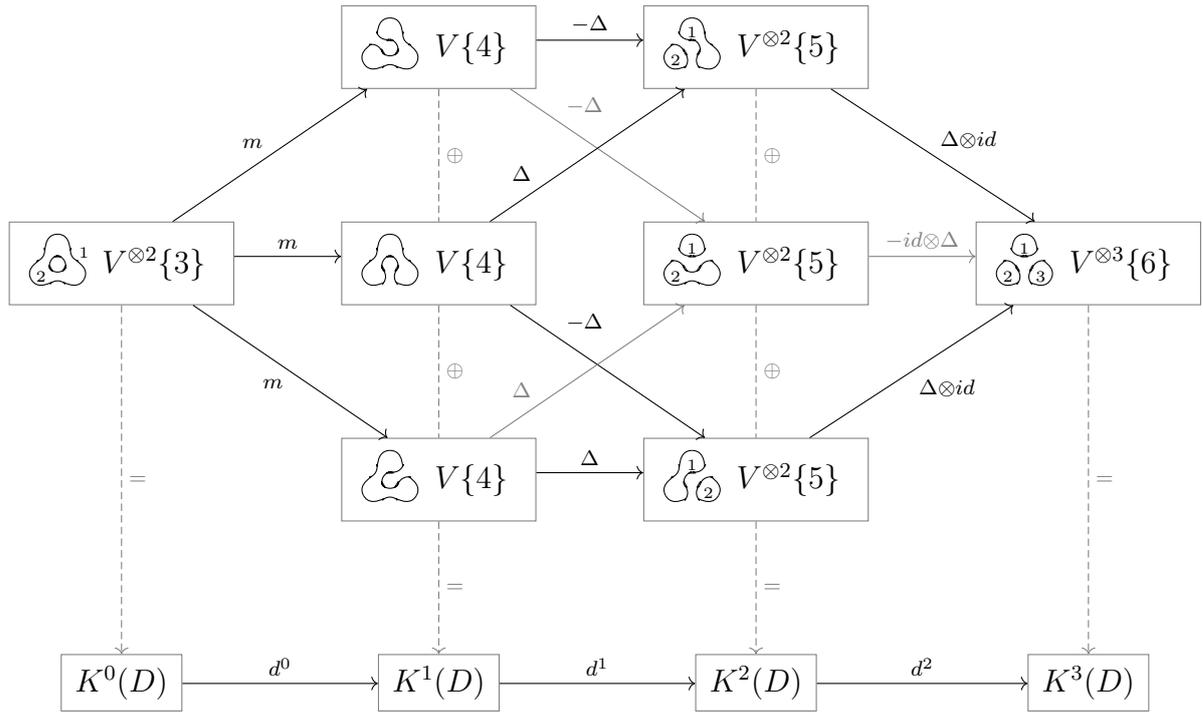


Figura 4.7: Complexo de Khovanov do nó de trevo destro.

Grau	$d^0 : V^{\otimes 2}\{3\} \rightarrow \oplus_3 V\{4\}$	$\ker(d^0)$	$\text{Im}(d^0)$
5	$\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \mapsto (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$
3	$\mathbf{1} \otimes \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ $\mathbf{x} \otimes \mathbf{1} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$	$\mathbf{1} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}$	$(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$
1	$\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \mapsto (0, 0, 0)$	$\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$	$(0, 0, 0)$

Grau	$d^1 : \oplus_3 V\{4\} \rightarrow \oplus_3 V^{\otimes 2}\{5\}$	$\ker(d^1)$	$\text{Im}(d^1)$
5	$(\mathbf{1}, 0, 0) \mapsto (-\mathbf{1} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}, -\mathbf{1} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}, 0)$ $(0, \mathbf{1}, 0) \mapsto (\mathbf{1} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}, 0, -\mathbf{1} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{1})$ $(0, 0, \mathbf{1}) \mapsto (0, \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{1})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(\Delta(\mathbf{1}), \Delta(\mathbf{1}), 0)$ $(0, \Delta(\mathbf{1}), \Delta(\mathbf{1}))$
3	$(\mathbf{x}, 0, 0) \mapsto (-\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, -\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, 0)$ $(0, \mathbf{x}, 0) \mapsto (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, 0, -\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})$ $(0, 0, \mathbf{x}) \mapsto (0, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x})$	$(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$	$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, 0)$ $(0, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x})$

Grau	$d^2 : V^{\otimes 2}\{5\} \rightarrow V^{\otimes 3}\{6\}$	$\ker(d^2)$	$\text{Im}(d^2)$
7	$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, 0, 0) \mapsto \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ $(0, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, 0) \mapsto -\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}$ $(0, 0, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \mapsto \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$	$(0, 0, 0)$	$\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}$ $\mathbf{1} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}$ $\mathbf{x} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$
5	$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}, 0, 0) \mapsto \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}$ $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{1}, 0, 0) \mapsto \mathbf{x} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}$ $(0, \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}, 0) \mapsto -\mathbf{1} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$ $(0, \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}, 0) \mapsto -\mathbf{x} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}$ $(0, 0, \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{1} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}$ $(0, 0, \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}) \mapsto \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}$	$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}, -\mathbf{x} \otimes \mathbf{1})$ $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{1}, \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}, \mathbf{x} \otimes \mathbf{1})$ $(-\mathbf{x} \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{1} \otimes \mathbf{x})$	$\mathbf{1} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$ $\mathbf{x} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}$ $\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{1}$
3	$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, 0, 0) \mapsto \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$ $(0, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, 0) \mapsto -\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$ $(0, 0, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$	$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, 0)$ $(0, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{x} \otimes \mathbf{x})$	$\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$

Então, após identificarmos cada espaço com \mathbb{Q}^n , podemos resumir a homologia do complexo em uma tabela.

Grau	$H_K^0(D)$	$H_K^1(D)$	$H_K^2(D)$	$H_K^3(D)$
9				\mathbb{Q}
7				$\mathbb{Q}^3/\mathbb{Q}^3 \cong 0$
5		$\mathbb{Q}/\mathbb{Q} \cong 0$	$\mathbb{Q}^3/\mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^3/\mathbb{Q}^3 \cong 0$
3	\mathbb{Q}	$\mathbb{Q}/\mathbb{Q} \cong 0$	$\mathbb{Q}^2/\mathbb{Q}^2 \cong 0$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Q} \cong 0$
1	\mathbb{Q}			

Tabela 4.1: Homologia de Khovanov do nó de trevo destro.

Da Tabela 4.1, podemos ver que a característica de Euler graduada de $K(D)$ é

$$\begin{aligned} \chi_q(K(D)) &= \text{qdim}(H_K^0) - \text{qdim}(H_K^1) + \text{qdim}(H_K^2) - \text{qdim}(H_K^3) \\ &= q + q^3 + q^5 - q^9, \end{aligned}$$

o que coincide com o polinômio de Jones não-normalizado do nó de trevo destro calculado no Exemplo 4.5.

4.4 Invariância

A relevância do complexo de Khovanov está em sua homologia ser um invariante de link. Apesar de que até mesmo para um único diagrama, diferentes complexos estão associados – a depender da enumeração dos cruzamentos –, a homologia de Khovanov depende unicamente do link. Isso significa que os espaços de cohomologia obtidos de diferentes diagramas de um mesmo link são isomorfos.

Provaremos a seguir que a homologia de Khovanov não depende da escolha da enumeração dos cruzamentos.

Proposição 4.19. *Sejam D um diagrama de link e X o conjunto dos seus n cruzamentos. Se $e_1, e_2 : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$ são duas enumerações de X , denote por D_1 e D_2 o diagrama D com as respectivas enumerações. Então os espaços de cohomologia a eles associados, $H_K^i(D_1)$ e $H_K^i(D_2)$, são isomorfos como espaços graduados.*

Demonstração. Observamos que se uma suavização de D é determinada por $\alpha : X \rightarrow \{0, 1\}$, as suas representações por 0's e 1's nas enumerações e_1 e e_2 são dadas por $\alpha_1 = \alpha \circ e_1$ e $\alpha_2 = \alpha \circ e_2$, respectivamente. Assim, V_{α_1} no cubo de D_1 é igual a V_{α_2} no cubo de D_2 . De forma análoga, temos que uma função $\xi : X \rightarrow \{0, 1, *\}$, onde $*$ é imagem de apenas um cruzamento em X , determina uma aresta do cubo com duas representações ξ_1 e ξ_2 em $\{0, 1, *\}$, dependendo da enumeração de X . Porém, os mapas a ela associados em cada caso (d_{ξ_1} no cubo de D_1 e d_{ξ_2} do cubo de D_2) são iguais.

Lembramos que os vértices da cauda e da ponta de uma aresta são aqueles obtidos ao substituir $*$ por 0 e por 1, respectivamente. Seja $\alpha : X \rightarrow \{0, 1\}$ uma suavização de D e dada uma sequência de arestas $(\xi^i)_{i=1}^{r_\alpha}$ satisfazendo:

1. o vértice da cauda de ξ^1 é aquele que leva todo elemento $x \in X$ no 0,
2. o vértice da ponta de ξ^i é o mesmo da cauda de ξ^{i+1} , para $i = 1, \dots, r_\alpha - 1$, e
3. o vértice da ponta de ξ^{r_α} é α ,

definimos o sinal de α , com respeito as enumerações e_1 e e_2 , por

$$\text{sinal}(\alpha) = \prod_{i=1}^{r_\alpha} \frac{\text{sinal}(\xi_2^i)}{\text{sinal}(\xi_1^i)}.$$

Afirmamos que este sinal não depende da sequência escolhida. De fato, podemos obter qualquer outra sequência se trocarmos, vezes suficiente, duas arestas consecutivas ξ^i e ξ^{i+1} pelas outras duas que estão no mesmo quadrado. Esta mudança na sequência não altera o sinal de α , pois cada quadrado tem um número ímpar de sinais negativos, forçando tanto $\prod_{i=1}^{r_\alpha} \text{sinal}(\xi_1^i)$ quanto $\prod_{i=1}^{r_\alpha} \text{sinal}(\xi_2^i)$ a trocar de sinal.

Definimos os mapas $F^i : \llbracket D_1 \rrbracket^i \rightarrow \llbracket D_2 \rrbracket^i$ por

$$F^i|_{V_{\alpha_1}^{V_{\beta_2}}} = \begin{cases} \text{sinal}(\alpha) \text{id}, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

onde $F^i|_{V_{\alpha_1}^{V_{\beta_2}}}$ denota a projeção de $F^i|_{V_{\alpha_1}}$ ao somando V_{β_2} de $\llbracket D_2 \rrbracket^i$.

Mostraremos que $F^\bullet : \llbracket D_1 \rrbracket \rightarrow \llbracket D_2 \rrbracket$ é um mapa de cadeias. Denote por d_1^\bullet e d_2^\bullet as diferenciais de $\llbracket D_1 \rrbracket$ e de $\llbracket D_2 \rrbracket$, respectivamente. Sejam $\alpha, \beta : X \rightarrow \{0, 1\}$ dois vértices com $r_\beta = r_\alpha + 1$, logo

- se α e β não estão conectadas por uma aresta, os mapas $(F \circ d_1)|_{V_{\alpha_1}^{V_{\beta_2}}}$ e $(d_2 \circ F)|_{V_{\alpha_1}^{V_{\beta_2}}}$ são trivialmente nulos;

- se α e β estão conectadas por uma aresta ξ , temos

$$\begin{aligned}
(F \circ d_1)|_{V_{\alpha_1}^{V_{\beta_2}}} &= F|_{V_{\beta_1}^{V_{\beta_2}}} \circ d_1|_{V_{\alpha_1}^{V_{\beta_1}}} = (\text{sinal}(\beta) \text{ id}) \circ (\text{sinal}(\xi_1) d_{\xi_1}) \\
&= \text{sinal}(\beta) \cdot \text{sinal}(\xi_1) d_{\xi_1} = \text{sinal}(\alpha) \cdot \frac{\text{sinal}(\xi_2)}{\text{sinal}(\xi_1)} \cdot \text{sinal}(\xi_1) d_{\xi_1} \\
&= \text{sinal}(\alpha) \cdot \text{sinal}(\xi_2) d_{\xi_2} = (\text{sinal}(\xi_2) d_{\xi_2}) \circ (\text{sinal}(\alpha) \text{ id}) \\
&= d_2|_{V_{\alpha_2}^{V_{\beta_2}}} \circ F|_{V_{\alpha_1}^{V_{\alpha_2}}} = (d_2 \circ F)|_{V_{\alpha_1}^{V_{\beta_2}}}.
\end{aligned}$$

Concluimos que F é um isomorfismo de cadeias, já que é $\pm \text{id}$ em cada vértice do cubo. \square

Até aqui, mostramos que a homologia de Khovanov é bem definida para um diagrama de link D e que ela recupera o polinômio de Jones. Muito mais do que isso, ela é um invariante de links que detecta o nó trivial.

Teorema 4.20. *Se D_1 e D_2 são dois diagramas de um link L , então as suas homologias de Khovanov $H_K^\bullet(D_1)$ e $H_K^\bullet(D_2)$ são isomorfas como espaços vetoriais graduados.*

A demonstração da invariância se baseia nos movimentos de Reidemeister. A ideia é encontrar subcomplexos acíclicos C de $K(D)$ ou tais que $K(D)/C$ é acíclico e fazer uma correspondência com o complexo do diagrama relacionado com D por um dos movimentos. A prova pode ser encontrada em [3].

A homologia de Khovanov é estritamente mais forte que o polinômio de Jones, isto é, existem pares de links cujas homologias de Khovanov diferem, mas que possuem o mesmo polinômio de Jones. Um exemplo é o par 5_1 (nó de cinco folhas da Figura 2.1c) e 10_{132} (Figura 4.8 abaixo). Eles possuem o mesmo polinômio HOMFLY, portanto também não são distinguidos pelos polinômios de Alexander e de Jones. Porém, a homologia de Khovanov consegue distingui-los, como mostra a Tabela 4.2.

Grau	-5	-4	-3	-2	-1	0
-3						\mathbb{Q}
-5						\mathbb{Q}
-7				\mathbb{Q}		
-9						
-11		\mathbb{Q}	\mathbb{Q}			
-13						
-15	\mathbb{Q}					

(a) Homologia de Khovanov do nó 5_1 .

Grau	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
-1							\mathbb{Q}	\mathbb{Q}
-3								\mathbb{Q}
-5					\mathbb{Q}	\mathbb{Q}^2		
-7				\mathbb{Q}				
-9				\mathbb{Q}	\mathbb{Q}			
-11		\mathbb{Q}	\mathbb{Q}					
-13								
-15	\mathbb{Q}							

(b) Homologia de Khovanov do nó 10_{132} .

Tabela 4.2: Cada coluna corresponde a um grau da cohomologia e as linhas correspondem às gradações dos espaços.

Teorema 4.21. *A homologia de Khovanov detecta o nó trivial.*

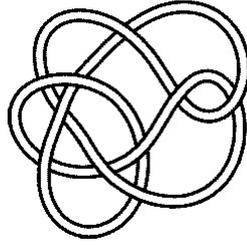


Figura 4.8: Nó 10_{132} (imagem retirada de [21]).

Este teorema foi provado por Kronheimer e Mrowka por meio de uma sequência espectral que relaciona a homologia de Khovanov com a homologia de Floer instanton, que já se sabia conseguir detectar o nó trivial [12].

Uma aplicação interessante da homologia de Khovanov é em gerar uma prova combinatorial da Conjectura de Milnor sobre o gênero slice de nós tóricos.

Definição 4.22. O *gênero slice* de um nó K em S^3 é o menor gênero de qualquer superfície orientável dentro do disco $D^4 \subset \mathbb{R}^4$ cuja fronteira é K .

Teorema 4.23 (Conjectura de Milnor). *O gênero slice de um nó (p, q) -tórico é*

$$(p - 1)(q - 1)/2.$$

Em 2004, Jacob Rasmussen definiu um invariante de nós usando a homologia de Khovanov, e através desse invariante forneceu uma nova prova para a Conjectura de Milnor [18].

Capítulo 5

Cirurgias em S^3

Apresentaremos aqui uma aplicação de teoria dos nós em 3-variedades. Mais precisamente, mostraremos como toda 3-variedade fechada, conexa e orientável pode ser obtida a partir de cirurgias em S^3 feitas ao redor de links. A demonstração deste teorema tem como ponto de partida a decomposição de Heegaard de 3-variedades.

Definição 5.1. Seja M uma n -variedade e denote o disco de dimensão k por D^k . Uma r -cirurgia elementar em M é a operação de remover uma cópia de $S^r \times D^{n-r}$ mergulhada em M e colar $D^{r+1} \times S^{n-r-1}$ através da identificação canônica entre as fronteiras do conjunto removido e do conjunto colado. Chamamos de r -cirurgia uma sequência de r -cirurgias elementares.

Na verdade, as únicas cirurgias necessárias para obter 3-variedades a partir de S^3 são as 1-cirurgias. Note que neste caso particular de uma 1-cirurgia elementar em uma 3-variedade, o conjunto removido e o conjunto colado são ambos equivalentes ao toro sólido, mas a identificação das fronteiras usada para colá-las é aquela que leva a fronteira de um disco meridional $D^2 \times \{x\}$ de $D^2 \times S^2$ numa curva que não é retrátil no conjunto removido $S^1 \times D^2$.

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o seguinte teorema devido a Lickorish [14] e Wallace [24].

Teorema 5.2 (Teorema de Lickorish-Wallace). *Toda 3-variedade fechada, conexa e orientável pode ser obtida ao fazer uma 1-cirurgia em S^3 .*

Notemos que executar uma 1-cirurgia é equivalente a executar simultaneamente 1-cirurgias elementares em toros sólidos disjuntos em M . Desta maneira, o conjunto removido ao fazer uma 1-cirurgia é uma vizinhança regular de um link em M . A parametrização dessa vizinhança, que determina a maneira como $D^2 \times S^1$ será colado (e consequentemente determina a variedade resultante), é o que chamamos de *moldura* do link.

Definição 5.3. Um mergulho f de cópias disjuntas de $S^1 \times D^2$ na esfera S^3 é dito uma *moldura* do link formado pelas imagens das cópias de $S^1 \times \{0\}$ por f . Chamamos um link com uma moldura de *emoldurado*.

Para demonstrar o Teorema 5.2, precisaremos de algumas definições e resultados gerais.

Definição 5.4. Sejam h_0 e h_1 dois difeomorfismos entre duas variedades X e Y . Chamamos h_0 e h_1 de *isotópicos* se existe um difeomorfismo $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$ tal que:

1. $H(x, 0) = (h_0(x), 0)$ e $H(x, 1) = (h_1(x), 1)$ para todo $x \in X$; e
2. para cada $t \in [0, 1]$, H se restringe a um homeomorfismo entre $X \times \{t\}$ e $Y \times \{t\}$.

Lema 5.5. Sejam U e V 3-variedades. Se $h_0, h_1 : \partial U \rightarrow \partial V$ são difeomorfismos isotópicos, então as variedades obtidas ao colar U e V por h_0 ou por h_1 são homeomorfas.

Lema 5.6 (Teorema da decomposição de Heegaard). *Toda 3-variedade fechada, conexa e orientável M admite decomposição $M = X \cup Y$ onde X e Y são dois handlebodies contidos em M tais que $\partial X = X \cap Y = \partial Y$.*

Para uma prova deste lema, veja [15]. Este tipo de decomposição, dada pelo Lema 5.6, é chamada de decomposição de Heegaard de M . A prova do Teorema de Lickorish-Wallace se baseia em realizar certas torções na fronteira de um dos handlebodies da decomposição de Heegaard de M , de forma a obter uma variedade similar a S^3 . Portanto, precisaremos de alguns resultados relativo a tais torções. No que se segue, F sempre denotará uma superfície conexa, compacta e orientável.

Definição 5.7. Seja C um círculo S^1 mergulhado em F . Uma *torção elementar ao redor de C* é um difeomorfismo τ de F igual à identidade fora de uma vizinhança anular de C e que dentro da vizinhança é como indicado na Figura 5.1. Um difeomorfismo isotópico à uma torção elementar é dito simplesmente *torção*.

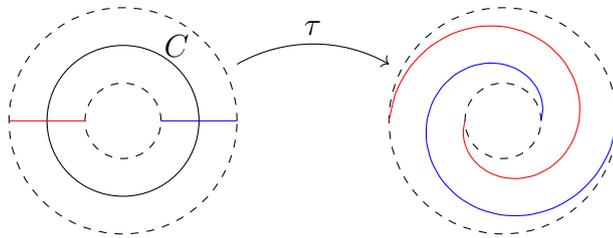


Figura 5.1: O mapa τ leva cada raio do anel em uma curva que dá uma volta completa ao redor do centro.

Definição 5.8. Sejam p e q duas curvas simples, fechadas e orientadas no interior de F . Dizemos que p e q são *equivalentes por torção* se podemos obter q a partir de p através de uma sequência de torções em F . Neste caso escrevemos $p \sim q$.

Proposição 5.9. *Sejam p e q curvas simples, fechadas e orientadas contidas no interior de F e que não separam F , então $p \sim q$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que p e q se intersectam transversalmente em n pontos. Provaremos por indução no número de interseções n .

Se $n = 1$, então podemos compor p com duas torções, a primeira ao redor de q , e a segunda ao redor de uma cópia levemente deslocada de p , como mostrado na Figura 5.2. A curva resultante pode ser levada em q por um difeomorfismo isotópico à identidade,

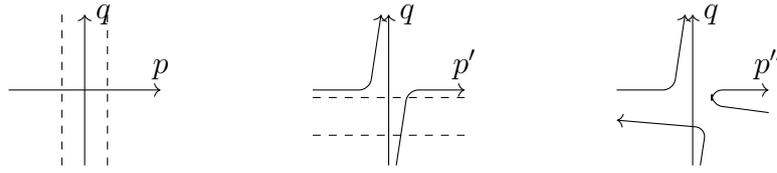


Figura 5.2: Torções que levam p a uma curva equivalente a q .

portanto $p \sim q$. Note que não foi necessária a hipótese de que p e q não separam F para este caso.

Se $n = 0$, a superfície $F \setminus p \cup q$ tem no máximo 2 componentes conexas. Se ela tem duas componentes, então cada uma pode ser compactificada com uma cópia de p e outra de q . Assim, podemos escolher uma curva simples em cada componente que conecta um ponto de p a um ponto de q (o mesmo ponto em cada cópia). Isso dá uma curva simples e fechada r no interior de F que intersecta transversalmente p e q em um ponto. Pelo caso $n = 1$, temos $p \sim r \sim q$. De maneira similar, se $F \setminus p \cup q$ tem apenas uma componente, ela pode ser compactificada com duas cópias de cada curva p e q . Podemos ligar um ponto de uma das cópias de p a outro ponto de uma das cópias de q por uma curva simples. Essa curva não separa a superfície, assim os pontos correspondentes nas outras cópias de p e q podem ser ligados sem intersectar o primeiro segmento. De novo, isso gera uma curva r em F tal que $p \sim r \sim q$.

Agora, suponha que a proposição vale para curvas que se intersectam em até $n - 1$ pontos. Sejam x e y pontos consecutivos de $p \cap q$ ao longo de p . Dividiremos a prova em dois casos.

Caso 1: p sai de y e chega em x por lados diferentes de q . Neste caso, existe uma curva r que intersecta p em no máximo $n - 1$ pontos e intersecta q em apenas um ponto. Para ver isso, basta escolher uma curva próxima de p entre x e y e que acompanha de perto q de y até x , como na Figura 5.3a. A curva r não separa F pois intersecta q em apenas um ponto. Assim, $p \sim r$ pela hipótese de indução e $r \sim q$ pelo caso $n = 1$, o que implica $p \sim q$.



Figura 5.3

Caso 2: p sai de y e chega em x pelo mesmo lado de q . De maneira similar a anterior, escolhemos duas curvas r_1 e r_2 , cada uma seguindo q em sentidos diferentes, como na Figura 5.3b. Temos que ao menos uma delas não separa F , já que $[r_1] - [r_2] = [q]$ em $H_1(F, \partial F)$ e $[q] \neq 0$ pois q não separa F . Digamos que r_1 não separa F , então $r_1 \sim q$ já que r_1 não intersecta q . Além disso, $r_1 \sim p$ pois r_1 intersecta p em no máximo $n - 2$. Logo $p \sim q$. \square

Corolário 5.10. *Sejam p_1, \dots, p_n curvas simples, fechadas e disjuntas no interior de F cuja união não separa F e sejam q_1, \dots, q_n outro conjunto de curvas com as mesmas propriedades. Então existe um difeomorfismo $h : F \rightarrow F$ tal que h é uma composição de torções e*

$$h \circ p_i = q_i \quad \forall i = 1 \dots, n.$$

Demonstração. A prova segue por indução em n . A Proposição 5.9 cobre o caso $n = 1$. Supondo valer para $n - 1$, seja $h : F \rightarrow F$ tal que $h \circ p_i = q_i$ para $i = 1, \dots, n - 1$. Podemos aplicar a Proposição 5.9 novamente para $h \circ p_n$ e q_n em $F \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} q_i$. \square

Teorema 5.11. *Seja M uma 3-variedade fechada, conexa e orientável. Então existem toros sólidos disjuntos T_1, \dots, T_n em M e toros sólidos disjuntos T'_1, \dots, T'_n em S^3 tais que*

$$M \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(T_i) \quad \text{é homeomorfo a} \quad S^3 \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(T'_i).$$

Demonstração. Seja $M = U \cup V$ uma decomposição de Heegaard de M dada pelo Lema 5.6. Defina $F = \partial U = \partial V$ e seja g o gênero de F . Podemos escolher $2g$ curvas p_1, \dots, p_g e q_1, \dots, q_g em F como na Figura 5.4, onde as curvas p_i são vistas como curvas em U e as curvas q_i como curvas em V .

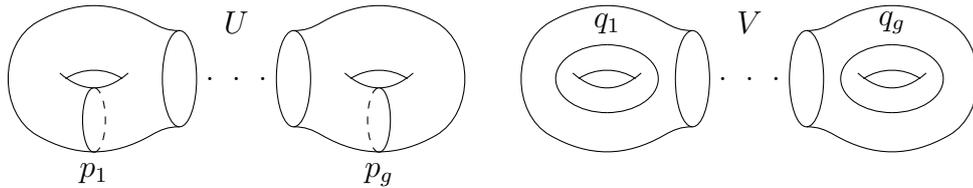


Figura 5.4

Desta forma, se um homeomorfismo $h : F \rightarrow F$ leva p_i em q_i para cada i , então a 3-variedade $U \cup_h V$ obtida ao colar U e V por h é homeomorfa a S^3 . Além disso, para qualquer homeomorfismo $\varphi : V \rightarrow V$ temos que M é homeomorfa a $U \cup_{\varphi|_F} V$. Em particular, se φ leva p_i em q_i para cada i , então M é homeomorfa a S^3 . Construiremos um tal homeomorfismo φ para V menos o interior de finitos toros sólidos, o que prova o teorema.

Se $\tau : F \rightarrow F$ é uma torção elementar, podemos estender τ para um homeomorfismo de V menos um toro sólido da seguinte maneira. Seja N uma vizinhança de F em V homeomorfa a $F \times [0, 1)$ ($F \subset V$ identificada com $F \times \{0\}$) e seja A a vizinhança anular em F na qual τ difere da identidade. Definimos $T = A \times (\frac{1}{2}, 1) \subset N$, e estendemos τ em $N \setminus T$ por $\tau \times id$ e em $V \setminus N$ pela identidade. Isso resulta num homeomorfismo $\tilde{\tau} : V \setminus T \rightarrow V \setminus T$ que estende τ , onde T é o interior de um toro sólido.

Ao repetirmos este processo para uma segunda torção elementar $\tau' : F \rightarrow F$, onde escolhemos $F \times [0, \frac{1}{3})$ para ser a vizinhança de F em V , vemos que $\tau \circ \tau'$ estende a um homeomorfismo de $V \setminus (T \cup T')$ para $V \setminus (T \cup \tilde{\tau}(T'))$, onde $T \cup T'$ e $T \cup \tilde{\tau}(T')$ são ambos o interior de dois toros sólidos disjuntos. Da mesma forma, podemos estender qualquer composição de torções elementares de F para um homeomorfismo de V menos o interior de toros sólidos disjuntos para V menos o interior de (possivelmente) outros toros sólidos disjuntos.

Agora, note que as curvas $\{p_i, q_i\}_i$ satisfazem as condições do Corolário 5.10, portanto existe uma composição de torções $h : F \rightarrow F$ tal que $h(p_i) = q_i$ para cada i . É fácil ver que h é isotópico a uma composição de torções elementares φ , e pelo Lema 5.5, temos que

$$S^3 \cong U \cup_h V \cong U \cup_\varphi V.$$

Pelo último parágrafo, existem dois conjuntos T_1, \dots, T_n e T'_1, \dots, T'_n de toros sólidos disjuntos em V tais que φ estende a um homeomorfismo

$$\tilde{\varphi} : V \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(T_i) \rightarrow V \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(T'_i).$$

Logo,

$$M \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(T_i) \cong U \cup_\varphi V \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(T'_i),$$

o que conclui nossa demonstração. \square

Finalmente, para provar o Teorema 5.2, basta considerar o efeito de $\tilde{\varphi}$ da demonstração acima nas fronteiras dos toros deletados. Para fazer uma 1-cirurgia em $U \cup_\varphi V \cong S^3$ ao longo dos toros sólidos T'_i e obter M , precisamos que a identificação dada por $\tilde{\varphi}$ das fronteiras $\partial T_1, \dots, \partial T_n$ com as fronteiras $\partial T'_1, \dots, \partial T'_n$ seja a mesma da Definição 5.1. A extensão $\tilde{\tau}$ da demonstração leva a fronteira de um disco meridional de T em uma curva que é homóloga (em T) a uma longitude de T . Além disso, esta propriedade da curva é preservada por composição com extensões de outras torções elementares. Assim, podemos parametrizar cada toro sólido T'_i por $S^1 \times D^2$ de forma que as imagens das curvas $S^1 \times \{x\}$, com $x \in \partial D^2$, são as imagens por $\tilde{\varphi}$ dos meridianos de T_i . Isso nos dá a moldura do link em S^3 na qual a 1-cirurgia deve ser feita para obter M .

Terminamos enunciando um resultado devido a Robion Kirby [10] que permite identificar quando dois links emoldurados em S^3 resultam na mesma variedade após uma 1-cirurgia. Podemos representar links emoldurados associando um número a cada componente, onde este número indica quantas voltas um paralelo $S^1 \times \{x\}$ desta componente dá ao redor dela. Mais precisamente, associamos o número de link destas curvas.

Definição 5.12. Seja L um link orientado e α e β duas componentes distintas de L . Definimos o *número de link das componentes α e β* , denotado $lk(\alpha, \beta)$, por

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{n_+(\alpha, \beta) - n_-(\alpha, \beta)}{2},$$

onde $n_+(\alpha, \beta)$ e $n_-(\alpha, \beta)$ são os números de cruzamentos positivos e negativos, respectivamente, em um diagrama de L , nos quais as duas componentes α e β aparecem.

O número de link só considera os cruzamentos entre as duas componentes, e é fácil verificar que está bem definido, isto é, não depende da escolha do diagrama. Agora, para uma componente de um link emoldurado, considere a imagem de um paralelo $S^1 \times \{x\}$, com $x \in \partial D^2$, pela moldura desta componente. Orientamos essa curva e a respectiva componente do link de maneira correspondente, e então rotulamos a componente pelo número de link dessas duas curvas. Temos que estes rótulos determinam a moldura do link e a variedade obtida ao fazer a 1-cirurgia em L é determinada pela classe de equivalência de L e pelos rótulos atribuídos a cada componente.

Teorema 5.13 (Teorema de Kirby). *Duas 3-variedades obtidas por 1-cirurgias em S^3 ao redor de dois respectivos links emoldurados são homeomorfas se e somente se os dois links estão relacionados por uma sequência de movimentos de dois tipos. São eles:*

Tipo 1. Remover ou acrescentar uma componente trivial, separável do restante do link por uma esfera, e que possui rótulo 1 ou -1.

Tipo 2. Substituir uma componente α por $\alpha \# p_\beta$, onde p_β é um paralelo de uma outra componente β e a composição é feita por um retângulo que não intersecta nenhuma outra componente do link além de α (Figura 5.5). Esta nova componente é rotulada por $n_\alpha + n_\beta + 2lk(\alpha, \beta)$, onde n_α e n_β são os rótulos de α e β , respectivamente.

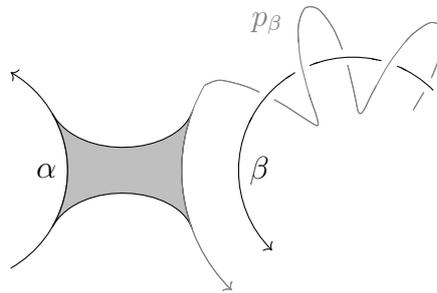


Figura 5.5: Movimento do tipo 2.

Observação 5.14. Há um abuso de notação na descrição do movimento do tipo 2, pois as componentes α e p_β não são orientadas e podem não ser separáveis, e por isso a composição $\alpha \# p_\beta$ não é bem definida. O que estamos denotando por $\alpha \# p_\beta$ é um dos possíveis resultados do procedimento descrito na Definição 2.13, para orientações em α e p_β fixadas. E então, o número de link $lk(\alpha, \beta)$ é calculado usando a orientação de α e a orientação em β que corresponde à de p_β .

Para ver que o movimento do tipo 2 de fato não altera a variedade obtida após a cirurgia, considere o efeito da cirurgia em β . Após a cirurgia, o paralelo p_β corresponde ao bordo de um disco meridional $D^2 \times \{x\}$ do toro sólido que foi colado. Ao deslizar um arco de α ao longo de desse disco até atravessar o toro, obtemos uma curva no complementar do toro que é isotópica a $\alpha \# p_\beta$ (Figura 5.6).

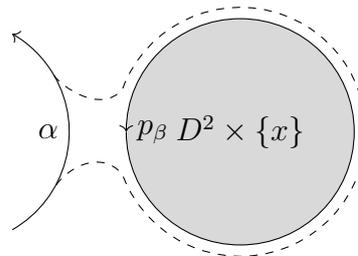


Figura 5.6

Referências Bibliográficas

- [1] Colin C. Adams. *The knot book*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. An elementary introduction to the mathematical theory of knots, Revised reprint of the 1994 original.
- [2] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30(2):275–306, 1928.
- [3] Dror Bar-Natan. On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial. *Algebr. Geom. Topol.*, 2:337–370, 2002.
- [4] Yuanan Diao. The additivity of crossing numbers. *J. Knot Theory Ramifications*, 13(7):857–866, 2004.
- [5] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(2):239–246, 1985.
- [6] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [7] Vaughan F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(1):103–111, 1985.
- [8] Louis H. Kauffman. State models and the Jones polynomial. *Topology*, 26(3):395–407, 1987.
- [9] Mikhail Khovanov. A categorification of the Jones polynomial. *Duke Math. J.*, 101(3):359–426, 2000.
- [10] Robion Kirby. A calculus for framed links in S^3 . *Invent. Math.*, 45(1):35–56, 1978.
- [11] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. Gauge theory for embedded surfaces. II. *Topology*, 34(1):37–97, 1995.
- [12] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. Khovanov homology is an unknot-detector. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (113):97–208, 2011.
- [13] Marc Lackenby. A polynomial upper bound on Reidemeister moves. *Ann. of Math. (2)*, 182(2):491–564, 2015.
- [14] W. B. R. Lickorish. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 76:531–540, 1962.

- [15] W. B. Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory*, volume 175 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [16] Kunio Murasugi. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology*, 26(2):187–194, 1987.
- [17] C. D. Papakyriakopoulos. On Dehn’s lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math. (2)*, 66:1–26, 1957.
- [18] Jacob Rasmussen. Khovanov homology and the slice genus. *Invent. Math.*, 182(2):419–447, 2010.
- [19] Martin G. Scharlemann. Unknotting number one knots are prime. *Invent. Math.*, 82(1):37–55, 1985.
- [20] Horst Schubert. Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.*, 1949(3):57–104, 1949.
- [21] The Knot Atlas. 10 132, 2005. http://katlas.org/wiki/10_132.
- [22] Morwen B. Thistlethwaite. A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology*, 26(3):297–309, 1987.
- [23] Paul Turner. Five lectures on Khovanov homology. *J. Knot Theory Ramifications*, 26(3):1741009, 41, 2017.
- [24] Andrew H. Wallace. Modifications and cobounding manifolds. *Canadian J. Math.*, 12:503–528, 1960.