



INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro



UFRJ

Sobre os espectros dinâmicos de Lagrange e Markov

Juan Carlos Mongez Duran

Rio de Janeiro, Brasil

6 de maio de 2020

Sobre os espectros dinâmicos de Lagrange e Markov

Juan Carlos Mongez Duran

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários á obtenção do título de Mestre em Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Maria José Pacifico

Coorientador: Sergio Romãña

Rio de Janeiro, Brasil

6 de maio de 2020

CIP - Catalogação na Publicação

M962t Mengano, Fulano
Título / Fulano Mengano. -- Rio de Janeiro, 2019.
101 f.

Orientador: Fulanaorientadora Menganaorientadora.
Coorientador: Fulanacoorientadora
Menganacoorientadora.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós
Graduação em Matemática, 2019.

1. análise. 2. álgebra. 3. geometria. I.
Menganaorientadora, Fulanaorientadora, orient. II.
Menganacoorientadora, Fulanacoorientadora,
coorient. III. Título.

Juan Carlos Mongez Duran

Sobre os espectros dinâmicos de Lagrange e Markov

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários á obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado por

Maria José Pacifico
Orientador

Sergio Romãña
Coorientador

Alexander Arbieto

Vilton Pinheiro

Rio de Janeiro, Brasil
6 de maio de 2020

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora, Maria José Pacifico, por toda a compreensão, paciência e apoio durante o desenvolvimento da dissertação.

Agradeço também ao meu coorientador, Sergio A. Ibarra Romaña, por sua cordialidade, dedicação e ajuda quando houveram problemas no presente texto.

Agradeço a cada um de meus amigos da “salinha” pelos momentos vividos nestes dois anos.

Agradeço do fundo do meu coração a minha família pelo apoio e esforços que fizeram para eu chegar até aqui.

De maneira geral, agradeço a cada um que passou pela minha vida até aqui.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro. Fundamental para o desenvolvimento do projeto.

Resumo

Este trabalho estuda os espectros de Lagrange e Markov do ponto de vista dinâmico, mais especificamente, vamos estudar os espectros de Lagrange e Markov para difeomorfismos de superfícies. Provaremos que para difeomorfismos típicos de superfícies que apresentam ferraduras com dimensão Hausdorff maior do que 1 e para funções reais típicas, os espectros dinâmicos de Lagrange e Markov tem interior não vazio.

Palavras-chave: Conjuntos de Cantor regulares, ferraduras, dimensão de Hausdorff, espectro dinâmico de Markov, espectro dinâmico de Lagrange.

Abstract

This work studies the Lagrange and Markov spectra from the dynamic point of view, more specifically, we will study the Lagrange and Markov spectrum for diffeomorphisms on surface. We show that for typical diffeomorphisms on surfaces with horseshoes with a Hausdorff dimension greater than 1 and for typical real functions, both the Lagrange and Markov dynamical spectra have a non-empty interior.

Keywords: Regular Cantor sets, horseshoe, Hausdorff dimension, Markov dynamical spectrum, Lagrange dynamical spectrum.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	SISTEMAS DINÂMICOS	21
2.1	Introdução aos sistemas dinâmicos	21
2.2	Dinâmica Simbólica	23
2.3	Dinâmica Hiperbólica	25
2.4	Estabilidade	28
2.5	Partição de Markov	29
2.6	Aplicações de Partições de Markov	30
3	CONJUNTOS DE CANTOR	35
3.1	Primeiras definições	35
3.2	Conjuntos regulares de Cantor e geometrias limites	36
3.3	Dimensões fractais	38
3.4	Funções expansivas associadas a uma ferradura	44
4	DENSIDADE DE H_φ	47
5	IMAGEM DE SUBFERRADURA	53
5.1	O espectro de Markov contém a imagem de uma subferradura	53
5.2	O espectro de Lagrange contém a imagem de uma subferradura	57
6	TEOREMA CENTRAL	61
6.1	Interseção de conjuntos regulares de Cantor	61
6.2	Teorema Central	65
7	APÊNDICE: TOPOLOGIA DIFERENCIAL	69
	REFERÊNCIAS	71

1 Introdução

Dado $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e uma aproximação racional $\frac{p}{q}$ de α , é natural comparar a distância $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$ com o tamanho do denominador da aproximação racional.

Como qualquer número real está entre dois números inteiros consecutivos, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{N}$, existe um $p \in \mathbb{Z}$ tal que $|q\alpha - p| \leq \frac{1}{2}$, i.e.,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q}. \quad (1.1)$$

Em 1842, Dirichlet (ver [2]) usou o famoso princípio da casa dos pombos para provar a relação (1.1).

Teorema 1.1. (*Dirichlet*) *Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a desigualdade*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

possui infinitas soluções racionais.

Em 1891, Hurwitz (ver [5]) provou uma versão mais geral do teorema de Dirichlet.

Teorema 1.2. (*Hurwitz*) *Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, existem infinitas soluções racionais para a desigualdade*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Além disso, $\forall \epsilon > 0$ a relação

$$\left| \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{(\sqrt{5} + \epsilon)q^2}$$

possui apenas uma quantidade finita de soluções.

Fixado um irracional α , podemos encontrar melhores erros na aproximação por racionais. O que nós leva a associar, para cada α , sua melhor constante de aproximação diofântica (valor de Lagrange de α), dada por

$$l(\alpha) = \limsup_{p, q \rightarrow \infty} \frac{1}{|q(q\alpha - p)|}.$$

Pelo resultado de Hurwitz sempre temos $l(\alpha) \geq \sqrt{5}$ e $l\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$. Logo, consideremos o conjunto

$$L = \{l(\alpha) : l(\alpha) < \infty, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

conhecido como o **espectro de Lagrange**.

Vale a pena ressaltar que por um resultado de Khinchin (ver [7]) o conjunto $\{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : l(\alpha) < \infty\}$ tem medida de Lebesgue zero.

Outro conjunto clássico é o espectro de Markov.

Seja $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ uma forma quadrática binária com coeficientes reais. Suponha que q é indefinida, com determinante positivo, $\Delta(q) := b^2 - 4ac > 0$. Então o

$$M := \left\{ \frac{\sqrt{\Delta(q)}}{\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} |q(x,y)|} \in \mathbb{R}, q \text{ é uma forma quadrática binária indefinida, } \Delta(q) > 0 \right\}.$$

é conhecido com o **espectro de Markov** por (Ver [1])

Ambos espectros são definidos a priori sem nenhuma relação. Em 1880, Markov (ver [8]), mostrou uma relação entre algumas formas quadráticas binárias e aproximações racionais de alguns números irracionais, com isso, é possível provar que:

Teorema 1.3. (*Markov*)

$$L \cap (-\infty, 3) = M \cap (-\infty, 3) = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\},$$

onde $k_1 = \sqrt{5}$, $k_2 = \sqrt{8}$, $k_3 = \frac{\sqrt{221}}{5}$ é uma sequência crescente explícita com $k_n^2 \in \mathbb{Q}$, $k_n = \sqrt{9 - \frac{4}{m_n^2}}$, onde $m_n \in \mathbb{N}$ é o n -ésimo número de Markov.

Outra relação interessante é que $L \subset M$, mas $M \setminus L \neq \emptyset$.

É natural perguntar o que acontece com os espectros quando é intersectado com intervalos da forma $[c, \infty)$, com $c > 3$. Em 1947 M. Hall, (ver [4]) provou o seguinte teorema.

Teorema 1.4. *O Raio $[6, +\infty)$ está contido em L .*

Como $L \subset M$, concluímos que os dois espectros têm interior não vazio. Este resultado vai ser replicado para os espectros dinâmicos de Lagrange e Markov.

Voltando à aproximação de números irracionais, é conhecido que as frações contínuas têm uma importante relação com aproximação de números irracionais por números racionais (veja [13]).

Dado $\alpha = \alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, podemos definir recursivamente $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ e $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$. Note que

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \cdots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}} := [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1}].$$

Denotemos

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} =: [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \in \mathbb{Q},$$

onde p_n e q_n são coprimos.

Os racionais $\frac{p_n}{q_n}$ são chamados de convergentes. Não é difícil provar que dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ temos que $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha$. Logo α pode ser escrito da forma.

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \cdots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \cdots}}}$$

A expressão acima é chamada de fração contínua do α . As frações contínuas fornecem uma forma simples e simbólica de escrever qualquer número irracional, se destacam porque a partir delas conseguimos estimar melhor os erros quando aproximamos um número irracional por um número racional. Mais especificamente, controlando o erro, é possível dizer que a aproximação vem de uma aproximação por fração contínua.

Proposição 1.5. *Se $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$, então $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ para algum n natural. Além disso, para todo $q < q_n$, $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < |\alpha - \frac{p}{q}|$.*

As frações contínuas permitem expressar os espectros em termos de sistemas dinâmicos (Ver [9]), pois $l(\alpha)$ pode ser expressado em termos dos convergentes. Em 1921 Perron interpretou $l(\alpha)$ em termos de sistemas dinâmicos usando o resultado a seguir:

Teorema 1.6. $\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$, onde $\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$.

Agora, do ponto de vista dos sistemas dinâmicos, se consideramos o espaço simbólico $\Sigma = (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{Z}} = \Sigma^- \times \Sigma^+$, a função deslocamento $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ dada por $\sigma((a_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (a_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ e a função $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f((a_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = [a_0; a_1, a_2, \dots] + [0; a_{-1}, a_{-2}, \dots]$, usando o teorema anterior, pode-se provar que:

$$l(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(\sigma^n(\underline{\theta})),$$

onde $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ e $\underline{\theta} = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$. Analogamente, o espectro de Markov também pode ser expresso em termos de frações contínuas

$$M = \{m(\underline{\theta}) : \underline{\theta} \in \Sigma, m(\underline{\theta}) < \infty\},$$

onde $m(\underline{\theta}) := \sup_{n \in \mathbb{Z}} f(\sigma^n(\underline{\theta}))$. Veja ([9])

Esta caracterização permite fazer uma generalização dos espectros de Markov e Lagrange em termos de dinâmicas mais gerais.

Definimos os espectros dinâmicos de Lagrange e de Markov como segue:

Sejam $\varphi : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de uma variedade compacta M e $\Lambda \subset M$ um conjunto invariante para φ . Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua. **O espectro dinâmico de Lagrange** associado a (f, Λ) é definido por:

$$L(f, \Lambda) = \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} f(\varphi^n(x)) : x \in \Lambda \right\},$$

e o **espectro dinâmico de Markov** associado a (f, Λ) é definido por:

$$M(f, \Lambda) = \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} f(\varphi^n(x)) : x \in \Lambda \right\}.$$

Com estas definições para os espectros, um resultado que pode ser provado neste contexto é o seguinte.

Teorema 1.7. *Se $f \in C^0(M, \mathbb{R})$, então*

$$L(f, \Lambda) \subset M(f, \Lambda).$$

Sempre que M seja uma superfície compacta.

Esta dissertação focasse no estudo dos espectros dinâmicos de Lagrange e Markov para difeomorfismo de superfícies, mais especificamente para difeomorfismo com ferraduras de dimensão de Hausdorff maior do que 1, os quais estão intimamente relacionados com conjuntos de Cantor, com veremos a seguir:

Em 1947, Hall (ver [4]) provou que para o conjunto de Cantor regular $C(4)$, o qual consiste dos números reais no intervalo $[0, 1]$ que só tem coeficientes 1, 2, 3 e 4 em sua correspondente fração contínua, cumpre que

$$C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4(\sqrt{2} - 1)]. \quad (1.2)$$

Usando a caracterização de Perron (Veja teorema 1.6) e a igualdade (1.2), se prova o teorema 1.4; ou seja, o espectro de Lagrange contém um raio, este é chamado do raio de Hall. Em 1975 Freiman (veja [3] e [1]) provou que a soma aritmética de certos conjuntos de cantor regulares, relacionados com frações contínuas, contém intervalos e usando isto, determinou precisamente o início do raio do Hall, o qual é

$$\frac{2221564096 + 283748\sqrt{462}}{491993569} \cong 4,52782956616.$$

O problema de encontrar intervalos nos espectros clássicos de Markov e Lagrange clássicos está muito relacionado ao estudo da geometria fractal de conjuntos de Cantor relacionados às funções de Gauss. A geometria fractal de conjuntos de Cantor é também a ferramenta principal para estudar alguns problemas relacionados com os espectros de Markov e Lagrange em dimensão 2. De fato, usando resultados de interseção estável de dois conjuntos regulares de Cantor para os quais a soma das dimensões de Hausdorff são maior do que um (veja [11], [12]), provamos o teorema principal deste trabalho, o qual é um resultado de Sergio Romãna e Carlos Moreira [15].

Dado uma superfície compacta M , uma **ferradura** é um conjunto localmente maximal, transitivo, hiperbólico, invariante e de tipo sela.

Teorema principal *Seja Λ uma ferradura associada a um difeomorfismo φ classe C^2 de uma superfície compacta M , tal que $HD(\Lambda) > 1$. Então, arbitrariamente perto de φ , existe um difeomorfismo φ_0 e uma C^2 vizinhança W de φ_0 tal que, se Λ_ψ denota a continuação de Λ associada a $\psi \in W$, existe um aberto e denso conjunto $H_\Psi \subset C^1(M^2, \mathbb{R})$ tal que para todo $f \in H_\psi$,*

$$\text{int}(L(f, \Lambda_\psi)) \neq \emptyset \text{ e } \text{int}(M, \Lambda_\psi) \neq \emptyset.$$

Onde $\text{int}(A)$ denota o interior de A .

2 Sistemas Dinâmicos

O objetivo básico da teoria de sistemas dinâmicos é entender o comportamento eventual ou assintótico de um processo iterativo. Se esse processo for uma equação diferencial a qual depende do tempo, a teoria tenta prever o comportamento final das soluções da equação ou em um futuro distante $t \rightarrow \infty$, ou o passado distante $t \rightarrow -\infty$. Se o processo for um processo discreto como a iteração de uma função f , a teoria trabalha para entender o comportamento eventual dos pontos $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)$ a medida que n aumenta.

Neste capítulo vamos a introduzir alguns termos e teoremas necessários para poder entrar no contexto que é de nosso interesse, e desenvolver algumas ferramentas úteis para nosso objetivo. Faremos as provas apenas dos resultados que achamos necessários e que não escapam dos objetivos deste trabalho, mas deixaremos referências para o leitor interessado.

2.1 Introdução aos sistemas dinâmicos

Vamos começar dando uma pequena introdução nos conceitos básicos dos sistemas dinâmicos que vamos precisar. Particularmente seguiremos como referência [6].

Definimos a dupla (f, X) como um sistema dinâmico topológico discreto, onde X é um espaço topológico e f uma função contínua com domínio X e imagem em X .

Definição 2.1. *Definimos a **órbita positiva** de x como o conjunto de pontos $\{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}$ que vamos a denotar por $\mathcal{O}^+(x)$. Se f é um homeomorfismo, podemos definir simplesmente a **órbita** de x , $\mathcal{O}(x)$ por $\mathcal{O}(x) := \{\dots, f^{-n}(x), \dots, f^{-1}(x), x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}$ e também podemos definir a **órbita negativa** como $\mathcal{O}^-(x) := \{\dots, f^{-n}(x), \dots, f(x), x\}$. Onde $f^2(x) = f(f(x))$ e para $n \geq 2$ $f^n(x) = f^{n-1}(f(x))$.*

É claro que entender as órbitas permitirá entender o comportamento assintótico da função f . Estudar a órbita do ponto x é intuitivamente estudar a história do ponto x através da função f . Os primeiros casos triviais são os pontos fixos e mais geralmente os pontos periódicos.

Definição 2.2. *Um ponto x é um **ponto fixo** para f se $f(x) = x$. Denotaremos por $\text{Fix}(f)$ o conjunto de todos os pontos fixos de f .*

*Se x é um ponto fixo para a função f^n , então dizemos que x é um **ponto periódico**. O menor positivo n para o qual $f^n(x) = x$ é chamado o **período** de x . Denotamos por*

$Per_n(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos de f de período n e por $Per(f)$ ao conjunto de todos os pontos periódicos de f .

Exemplo 2.3. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$ tem dois pontos fixos ($x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$), e além disso tem dois pontos periódicos em $x = -1$ e $x = 0$ de período 2.

Note que em geral, o conjunto dos pontos fixo ($Fix(f)$) é invariante por f no sentido que $f(Fix(f)) = Fix(f)$. Esta é uma propriedade de interesse para nós.

Definição 2.4. Um subconjunto $E \subset X$ é **f -invariante** ou simplesmente **invariante** para um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$, se $f(E) \subset E$.

Note que se $E \subset X$ é um conjunto invariante para f , então $(f|_E, E)$ também é um sistema dinâmico discreto.

Agora vamos definir algumas noções de recorrência que são um pouco mais fracas que a noção de pontos periódicos.

Definição 2.5. Sejam X um espaço topológico e $f : X \rightarrow X$ uma função contínua. Um ponto $x \in X$ é **errante** se existe uma vizinhança U de x tal que $f^k(U) \cap U$ é vazio para todo k positivo. Um ponto x que não seja errante é dito **não-errante**. Nós denotamos por $\Omega(f)$ o conjunto de todos os pontos não-errantes; para simplificar a notação, sempre que não houver confusão, denotaremos $\Omega(f)$ simplesmente por Ω .

Proposição 2.6. O conjunto Ω é fechado e $f(\Omega)$ está contido em Ω . Além disso, se f é um homeomorfismo, $f(\Omega) = \Omega$. Um ponto é não-errante para f se e somente se é não errante para f^{-1} .

Como Ω é fechado e um ponto periódico é claramente não-errante, o fecho do conjuntos de pontos periódicos está contido no conjunto de pontos não errantes: $\overline{Per(f)} \subset \Omega(f)$.

Definição 2.7. Sejam $f : X \rightarrow X$ uma função contínua e $x \in X$. O conjunto **ω -limite** de x , $\omega_f(x)$, é definido por:

$$\omega_f(x) = \{y \in X \mid \text{Existe uma sequência } n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Se f é um homeomorfismo, nós definimos o conjunto **α -limite** de x similarmente:

$$\alpha_f(x) = \{y \in X \mid \text{Existe uma sequência } n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Assim, podemos definir $L_+(f) = \overline{\cup_{x \in X} \omega_f(x)}$, $L_-(f) = \overline{\cup_{x \in X} \alpha_f(x)}$ e $L(f) = L_+(f) \cup L_-(f)$.

Os conjuntos $L_-(f)$, $L_+(f)$ e $L(f)$ são chamados conjunto limite negativo, conjunto limite positivo e conjunto limite respetivamente.

terminamos esta sessão enunciando o seguinte resultado.

Proposição 2.8. $Fix(f) \subset \overline{Per(f)} \subset L(f)$.

2.2 Dinâmica Simbólica

Os sistemas dinâmicos simbólicos são exemplos relevantes na teoria dos sistemas dinâmicos. Eles serão importante neste trabalho pois, tem o “mesmo” comportamento dinâmico que uma ferradura. A referência usada será [16].

Seja k um inteiro positivo. Denotaremos por $[k]$ o conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ os quais chamaremos de símbolos e denotaremos por Σ_k , ou caso seja claro, no contexto, o conjunto $[k]$ denotaremos apenas por Σ , ao conjunto $[k]^{\mathbb{Z}}$, ou seja, $\underline{a} \in \Sigma$ é uma sequência bi-infinita em $[k]$, $\underline{a} = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$. Também vamos definir a função $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-(2|n|+1)} \delta_n(\underline{a}, \underline{b}),$$

onde $\delta_n(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ se $a_n = b_n$, 1 caso contrário. Note que se $d(\underline{a}, \underline{b}) < \frac{1}{2}$, então $a_0 = b_0$.

Teorema 2.9. *A função d definida acima é uma métrica para Σ e o espaço métrico (Σ, d) é um espaço compacto, totalmente desconexo e sem pontos isolados.*

Lembremos que uma **base** para uma topologia de um conjunto X é uma família \mathcal{B} de subconjuntos de X que cumpre que, para todo $x \in X$ existe B em \mathcal{B} tal que $x \in B$ e, além disso, se B_1 e B_2 pertencem \mathcal{B} e $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Um conjunto $A \subset X$ é uma aberto da topologia gerada por \mathcal{B} se para todo $x \in A$, existe B de \mathcal{B} tal que $x \in B \subset A$. Dizemos que duas bases \mathcal{B} e \mathcal{C} de X geram a mesma topologia se todo conjunto aberto na topologia gerada por \mathcal{B} é aberto na topologia gerada por \mathcal{C} e, reciprocamente, se todo aberto gerado pela topologia \mathcal{C} é aberto na topologia gerada por \mathcal{B} . Pode ser provado que duas bases \mathcal{B} e \mathcal{C} de um conjunto X , geram a mesma topologia se para todo básico B de \mathcal{B} e $x \in B$, existe C de \mathcal{C} tal que $x \in C \subset B$, reciprocamente para todo C de \mathcal{C} e $x \in C$, existe B de \mathcal{B} tal que $x \in C \subset B$. Claramente o conjunto de todas as bolas de (Σ, d) é uma base que gera uma topologia, denotaremos este conjunto por \mathcal{B} .

Proposição 2.10. *Sejam $a \in \Sigma$ e um inteiro $n \geq 0$. Definimos o cilindro de centro $\underline{a} \in \Sigma$ e tamanho n como $C_{\underline{a}, n} = \{\underline{x} \in \Sigma : (\underline{x})_i = (\underline{a})_i, |i| \leq n\}$. A coleção de todos os cilindros de Σ é uma base para Σ e gera a mesma topologia que \mathcal{B} .*

Demonstração. Primeiro vamos começar provando que o conjunto de todos os cilindros é uma base que denotaremos por \mathcal{C} , de fato. Para cada $\underline{a} \in \Sigma$ o cilindro $C_{\underline{a}, 2}$ prova a primeira condição trivialmente. Por outro lado, sejam $\underline{a}, \underline{b} \in \Sigma$ e n_1, n_2 inteiros não negativos tais que

$\underline{c} \in C_{\underline{a}_{n_1}} \cap C_{\underline{b}_{n_2}}$. Suponha sem perda de generalidade que $n_1 < n_2$. Como $\underline{c} \in C_{\underline{a}_{n_1}}$, $c_i = a_i$ para $i = 0, \dots, n_1$. Da mesma maneira, como $\underline{c} \in C_{\underline{b}_{n_2}}$, $c_i = b_i$ para $i = 0, \dots, n_1, \dots, n_2$. Logo $a_i = b_i$ para $i = 1 \dots, n_1$ e portanto $C_{\underline{b}_{n_2}} \subset C_{\underline{a}_{n_1}}$, assim $\underline{c} \in C_{\underline{b}_{n_2}} \subset C_{\underline{a}_{n_1}} \cap C_{\underline{b}_{n_2}}$ e portanto $C_{\underline{b}_{n_2}}$ cumpre a segunda condição de base.

Agora vamos provar que a topologia gerada pela base \mathcal{C} é igual á topologia gerada pela base \mathcal{B} .

Toda bola de centro \underline{a} e radio r , contém uma outra bola de centro \underline{a} e raio menor que $\frac{1}{2}$. Sabemos que se $d(\underline{a}, \underline{b}) < \frac{1}{2}$, então $a_0 = b_0$. Por outro lado, se temos um cilindro $C_{\underline{a}_n}$, fixemos $\epsilon < 2^{-2n-1}$, não é difícil provar que $B_\epsilon(\underline{a}) \subset C_{\underline{a}_n}$. Com isso, é trivial provar que as duas bases geram a mesma topologia. ■

Definição 2.11. Chamamos de função deslocamento a função $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, dada por $(\sigma(\underline{a}))_i = (\underline{a})_{i+1}$.

Teorema 2.12. A função deslocamento é um homeomorfismo.

Note que (Σ, σ) é um sistema dinâmico discreto.

O conjunto das matrizes quadradas $k \times k$ com entradas 0 ou 1, que denotaremos por M_k , fornecem uma boa quantidade de exemplos de sistemas dinâmicos que são de nosso interesse.

Para $A = (A_{ij}) \in M_k$, dizemos que uma palavra finita a_0, a_1, \dots, a_n é admissível para A , ou simplesmente **admissível**, se $A_{a_i, a_{i+1}} = 1$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$. Dado dois símbolos $p, q \in [k]$, denotamos por $N_n(p, q, A)$ o número de palavras que iniciam em p e terminam em q com $n+1$ símbolos. Denotaremos por Σ_A ao conjunto de todas as seqüências bi-infinitas admissíveis. i.e.

$$\Sigma_A := \{\underline{a} \in \Sigma : \forall i \in \mathbb{Z}, A_{a_i, a_{i+1}} = 1\}.$$

Lema 2.13. $N_n(p, q, A) = (A)_{p,q}^n$.

Teorema 2.14. Σ_A é um conjunto σ -invariante do espaço Σ .

Demonstração. Seja $\underline{a} \in \Sigma_A$ e denotemos por a_i a i -ésima palavra de \underline{a} . Note que $(\sigma(\underline{a}))_i = a_{i-1}$, logo $A_{\sigma(\underline{a})_i, \sigma(\underline{a})_{i+1}} = A_{a_{i-1}, a_i} = 1$, assim $\sigma(\underline{a}) \in \Sigma_A$. ■

Pela proposição acima, (Σ_A, σ) é um sistemas dinâmico discreto e é chamado de **sub-deslocamento**.

Exemplo 2.15. Sejam (X, f) um sistema dinâmico discreto com f um homeomorfismo e $\{P_i\}_{i \in k}$ uma partição de X . Definimos a matriz $A = (A_{ij}) \in M_k$ por:

$$A_{ij} = 1 \Leftrightarrow f(P_i) \cap P_j.$$

Cada elemento x em X pode ser associado a uma palavra através da função $\tau : X \rightarrow \Sigma_A$, dada por seu itinerário, ou seja, se $\forall i \in \mathbb{Z}, f^i(x) \in P_{a_i}$, então $\tau(x) = \underline{a}$

Definição 2.16. Sejam (f, X) um sistema dinâmico discreto e $x \in M$. Definimos o conjunto estável de x por:

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ com } n \rightarrow \infty \text{ e } d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}.$$

$$W^s(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\epsilon^s(f^n(x))).$$

Analogamente definimos o conjunto instável de x por:

$$W_\epsilon^u(x, f) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ com } n \rightarrow -\infty \text{ e } d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \leq 0\}.$$

$$W^u(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\epsilon^u(f^{-n}(x))).$$

Teorema 2.17. Para todo $\underline{a} \in \Sigma_A$, temos

$$W_{\frac{1}{3}}^s(\underline{a}) = \{\underline{b} : \forall n \geq 0, a_n = b_n\},$$

$$W_{\frac{1}{3}}^u(\underline{a}) = \{\underline{b} : \forall n \leq 0, a_n = b_n\}.$$

Se $d(\underline{a}, \underline{b}) < \frac{1}{3}$, então $W_{\frac{1}{3}}^s(\underline{a}) \cap W_{\frac{1}{3}}^u(\underline{b})$ é exatamente um único ponto \underline{c} para o qual $c_n = a_n$ se $n \geq 0$ e $c_n = b_n$ se $n \leq 0$.

Observação 2.18. Com o teorema acima, se $d(\underline{a}, \underline{b}) < \frac{1}{2}$, podemos definir uma operação local, que denotaremos por $[\ , \]$, dada por:

$$[\underline{a}, \underline{b}] = W_{\frac{1}{3}}^s(\underline{a}) \cap W_{\frac{1}{3}}^u(\underline{b}).$$

Dita operação é chamada de estrutura de produto local.

Teorema 2.19. Seja \underline{a} um ponto de Σ_A . A operação $[\ , \]$ é um homeomorfismo de $W_{\frac{1}{3}}^u \times W_{\frac{1}{3}}^s$ sobre o aberto $U(\underline{a}) = \{\underline{b} : a_0 = b_0\}$.

2.3 Dinâmica Hiperbólica

Uma definição essencial no teorema principal é a de conjunto hiperbólico. As provas dos resultados desta seção podem se encontrar em [16].

Definição 2.20. Seja Λ um conjunto invariante e compacto de um difeomorfismo C^r da variedade M . Dizemos que Λ é um conjunto **hiperbólico** se existe um *splitting contínuo* do fibrado tangente de M restrito a Λ , TM_Λ , o qual é $D\varphi$ invariante:

$$TM_\Lambda = E^s \oplus E^u; D\varphi(E^s) = E^s; D\varphi(E^u) = E^u.$$

E para o qual existe uma constante c e uma constante λ , $c > 0$ e $0 < \lambda < 1$, tal que

$$\|D\varphi^n|_{E^s}\| < c\lambda^n, \forall n \geq 0,$$

$$\|D\varphi^{-n}|_{E^u}\| < c\lambda^{-n}, \forall n \leq 0.$$

Observação 2.21. A condição acima é independente da métrica.

Proposição 2.22. Suponha que Λ é um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo C^r φ sobre M , então existe uma métrica C^∞ sobre M e uma constante σ , $0 < \sigma < 1$ tal que:

$$\|D\varphi|_{E^s}\| < \sigma,$$

$$\|D\varphi|_{E^u}^{-1}\| < \sigma.$$

Chamaremos esta métrica de métrica adaptada.

Teorema 2.23. Seja Λ um conjunto hiperbólico para φ , e suponha que Λ tem uma métrica adaptada. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo x em Λ , $W_\epsilon^s(x, \varphi)$ é um disco mergulhado de dimensão igual a de E_x^s . Além disso, $T_x W_\epsilon^s(x) = E_x^s$; e similarmente para o caso instável.

O disco estável e instável também satisfaz o seguinte:

- $d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \forall y \in W_\epsilon^s(x), \forall n \geq 0,$
 $d(\varphi^{-n}(x), \varphi^{-n}(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \forall y \in W_\epsilon^u(x), \forall n \leq 0,$
 onde $\lambda < 1$ é tal que $\|D\varphi|_{E^s}\| < \lambda$ e $\|(D\varphi|_{E^u})^{-1}\| < \lambda.$
- O Mergulho de W^u (resp. W^s)(x, φ) varia continuamente com x . Mais precisamente, se φ é C^r e $n = \dim E^s$ existe uma vizinhança U de x e uma função contínua

$$\Theta : U \rightarrow \text{Emb}^r(D^n, M)$$

tal que $\Theta(y)(0) = y$ e $\Theta(y)(D^n) = W_\epsilon^s(y, \varphi), \forall y \in U.$

- $W_\epsilon^s(x, \varphi) = \{y \mid d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\},$
 $W_\epsilon^u(x, \varphi) = \{y \mid d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \leq 0\},$
- A variedade W^u (resp. W^s)(x, φ) é tão suave como $\varphi.$

Proposição 2.24. Seja Λ um conjunto hiperbólico para um C^r difeomorfismo de M , $r \geq 1$. Então, para todo $\eta > 0$ pequeno, existe $\delta > 0$, tal que $\forall x, y \in \Lambda$ tal que $d(x, y) < \delta$, $W_\eta^s(x) \cap W_\eta^u(y) = z$, onde z é um ponto interseção transversal de $W_\eta^s(x)$ e $W_\eta^u(y).$

Definição 2.25. *Seja X um espaço métrico e φ um homeomorfismo de X sobre ele mesmo. Dizemos que φ é **expansivo** sobre um subconjunto $Y \subset X$, se existe um ϵ positivo tal que para todo par de pontos distintos x e y , $x \in X$ e $y \in Y$:*

$$\sup d[f^n(x), f^n(y)] > \epsilon$$

Quando $X = Y$, nós simplesmente dizemos que f é expansiva.

Proposição 2.26. *Seja Λ um conjunto fechado, hiperbólico invariante de difeomorfismo φ classe C^r de M , $r \geq 1$, então φ é expansiva sobre Λ .*

Demonstração. Tomando ϵ como no teorema 2.23, se temos $\sup_n d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \leq \epsilon$ para $x \in M$ e $y \in \Lambda$, então temos que $x \in W^s(y)$ e $x \in W^u(y)$, assim $x \in W^s(y) \cap W^u(y)$, logo $x = y$, o que é uma contradição. ■

Existe uma classe de conjuntos hiperbólicos que tem uma estrutura muito particular e serão de grande importância em nossos resultados (veja [6]).

Definição 2.27. *Seja Λ um conjunto hiperbólico, para φ um difeomorfismo de M em M , se existe uma vizinhança aberta V suficientemente pequena de Λ tal que $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(V)$, então nós dizemos que Λ é um conjunto hiperbólico **localmente maximal**.*

Teorema 2.28. *Seja Λ um conjunto hiperbólico localmente maximal para φ . Então os pontos periódicos são densos em Λ .*

Proposição 2.29. *Um conjunto hiperbólico localmente maximal tem uma estrutura de produto local. ou seja*

$$\exists \epsilon, \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, y \in \Lambda,$$

$$d(x, y) < \delta \implies [x, y] \in W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y) \in \Lambda,$$

onde $[,]$ denota o produto local.

Definição 2.30. *Um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ é chamado **topologicamente transitivo** se existe um ponto $x \in X$ tal que sua órbita $\mathcal{O}(x)$ é densa em X .*

Definição 2.31. *Dado uma variedade compacta M , uma **ferradura** é um conjunto localmente maximal, transitivo, hiperbólico, invariante e de tipo sela.*

Corolário 2.32. *Uma ferradura tem estrutura de produto local.*

Definição 2.33. Dado um conjunto hiperbólico, definimos a **folheação estável** que denotaremos por $\mathcal{F}^s(\Lambda)$ como:

$$\mathcal{F}(x) = W^s(x), \quad \forall x \in \Lambda,$$

Analogamente definimos a **folheação instável** $\mathcal{F}^u(\Lambda)$ por

$$\mathcal{F}(x) = W^u(x), \quad \forall x \in \Lambda.$$

Teorema 2.34. Se Λ é um conjunto hiperbólico associado a um C^2 -difeomorfismo, então as foliações estável e instável \mathcal{F}^s e \mathcal{F}^u são C^1 . Além disso, estas foliações podem C^1 estendidas a uma vizinhança de Λ .

Pode se encontrar uma prova do teorema acima em [6].

2.4 Estabilidade

Um resultado relevante para o teorema principal é que dada uma ferradura associada a um difeomorfismo, todos os difeomorfismos perto também tem associado uma ferradura. Ditas ferraduras são conjugadas no sentido que vai ser definido nesta seção.

Sejam X, Y espaços topológicos, com $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ duas funções contínuas. Uma função e sobrejetora $h : X \rightarrow Y$ é dita uma **semi-conjugação** se $hf = gh$, ou seja, se o seguinte diagrama comuta:

Figura 1 – .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Além disso, se h é um homeomorfismo de X sobre Y , então h é chamado de uma **conjugação topológica** e f e g são ditos topologicamente conjugados.

Note que $hf = fh$ implica que $hf^n = g^n h$. De fato, $hf^2 = g^2 h = g(hf) = g^2 h$, usando indução matemática temos a conclusão. A imagem de uma órbita de f por uma semi-conjugação é uma órbita de g , enquanto uma conjugação topológica envia órbitas de f a órbitas de g e preserva as propriedades topológicas.

A conjugação h pode ser interpretada como uma mudança de variável contínua a qual muda f por g . É fácil provar que a conjugação topológica é uma relação de equivalência.

Teorema 2.35. *Seja Λ um conjunto hiperbólico fechado invariante por um difeomorfismo classe C^k de M , $k \geq 1$. Existe uma vizinhança U_f de f em $\text{Diff}^k(M)$ e uma função contínua $\phi : U_f \rightarrow C^0(\Lambda, M)$ tal que:*

- $\phi(f)$ é a inclusão, denotada por inc_Λ , de Λ em M .
- $\phi(g)(\Lambda)$ é um conjunto invariante hiperbólico g , para cada g em U_f .
- $\phi(g)$ é um homeomorfismo de Λ sobre $\phi(g)(\Lambda)$ e conjuga topologicamente (f, Λ) com $(g, \phi(g)(\Lambda))$. Em outras palavras, o seguinte digrama de homeomorfismo comuta:

Figura 2 - .

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda & \xrightarrow{\phi(g)} & \phi(g)(\Lambda) \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 \Lambda & \xrightarrow{\phi(g)} & \phi(g)(\Lambda)
 \end{array}$$

- Existe uma constante K tal que $d_{C_0}(\phi(g), \text{inc}_\Lambda) < kd_{C_0}(g, f)$.

2.5 Partição de Markov

Vamos agora a definir o que é uma Partição de Markov para conjuntos hiperbólicos invariantes com estrutura de produto local. Primeiro vamos a fixar as notações e o contexto. Para esta seção seguiremos [16].

Seja Λ um subconjunto hiperbólico de um difeomorfismo classe C^r sobre uma variedade compacta de classe C^r e vamos assumir que Λ tem uma estrutura de produto local. Denotemos dito produto por $[\ , \]$, isto é.

$$\exists \epsilon, \delta > 0 \text{ tal que } \forall x, y \in \Lambda,$$

$$d(x, y) < \delta \implies [x, y] \in W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y) \in \Lambda.$$

Onde $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ e ϵ é a constante de expansividade de f sobre Λ . Se A é um subconjunto de Λ , denotamos por $\overset{\circ}{A}$ seu interior como um subespaço de Λ ; assim mesmo ∂A vai denotar a fronteira em Λ . Quando x está em Λ , definimos

$$W^s(x, A) = W^s(x) \cap A.$$

Se η é uma contante menor ou igual a ϵ

$$W_\eta^s(x) = \{y \in W_\epsilon^s(x) : d(x, y) \leq \eta\},$$

$$\mathring{W}_\eta^s(x) = \{y \in W_\epsilon^s(x) : d(x, y) < \eta\}.$$

Proposição 2.36. *Existe uma constante positiva ρ menor que $\frac{\delta}{2}$, tal que para todo $x \in \Lambda$, a operação binária é um homeomorfismo de $\mathring{W}_\rho^u \cap \Lambda \times \mathring{W}_\rho^s \cap \Lambda$ sobre uma vizinhança de x em Λ .*

Definição 2.37. *Definimos um **retângulo** R como um subconjunto Λ de diâmetro menor que δ que é fechado baixo a o produto local $[\cdot, \cdot]$ i.e.,*

$$\text{Se } x, y \in R \text{ então } [x, y] \in R.$$

O retângulo é próprio se o fecho de seu interior em Λ é ele mesmo; isto é $\overline{\mathring{R}} = R$.

Definição 2.38. *Uma **partição de Markov** de Λ para φ é uma coleção finita de retângulos pequenos e próprios $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ com interior disjunto os quais cumpre as condições:*

- $x \in \mathring{R}_i, \varphi(x) \in \mathring{R}_j, \implies \varphi(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f(x), R_j).$
- $x \in \mathring{R}_i, \varphi^{-1}(x) \in \mathring{R}_j, \implies f^{-1}(W^u(x, R_i)) \subset W^u(f^{-1}(x), R_j).$

O seguinte teorema é fundamental para nosso trabalho e pode se encontrar uma prova em [14].

Teorema 2.39. *Seja Λ uma ferradura de uma superfície compacta M , então existe uma partição de Markov para Λ com retângulos disjuntos arbitrariamente pequenos.*

2.6 Aplicações de Partições de Markov

Nosso objetivo agora é estudar a codificação associada a uma partição de Markov (seguindo [16]). Primeiro vamos ampliar a notação que temos fixada desde a seção anterior. Seja $R = R_1, \dots, R_k$ uma partição de Markov de Λ para φ de pequenos retângulos tal que $\forall i \in [k], \text{diam}(R_i) < \rho < \frac{\delta}{2} < \frac{\epsilon}{4}$. Definimos a Matriz A in M_k por:

$$A_{ij} = 1 \text{ se } \varphi(\mathring{R}_i) \cap \mathring{R}_j \neq \emptyset, \text{ caso contrário } A_{ij} = 0.$$

Nosso objetivo vai ser definir e estudar uma semi-conjugação natural Π desde (Σ_A, σ) até (φ, Λ) que no caso de Λ ser uma ferradura sera uma conjugação.

Definição 2.40. *Seja R um **retângulo** de Λ , um subconjunto S de R é chamado uma **faixa estável** (**instável**) de R se, para cada x em S , $W^s(x, R) \subset S$ ($W^u(x, R) \subset S$).*

Proposição 2.41. *Seja S uma faixa estável de R , então S é um retângulo. Se S é não vazio, S intersecta cada $W^u(x, R)$ para cada x em R . Seja $x \in R$ e $y \in S$, então temos $S = [W^u(x, R) \cap S, W^s(y, R)]$.*

Demonstração. Note que se $x \in R$ e $y \in S$, $[y, x] \in W^s(y, R)$, pois $x, y \in R$ e R é retângulo, além disso por definição de S , $W^s(y, R) \subset S$, logo temos que

$$[y, x] \in W^s(y, R) \subset S. \quad (2.1)$$

No caso de $x, y \in S$, pela equação 2.1, temos que $[y, x] \in S$ e portanto S é um retângulo.

Quando $x \in R$ e $y \in S$, por definição de produto e de retângulo, $[y, x] \in W^u(x, R)$ e por 2.1, $[y, x] \in W^u(x, R) \cap S$.

Agora, seja $z \in S$. Por definição temos que $z = [[z, x], [y, z]]$ e assim

$$S \subset [W^u(x, R) \cap S, W^s(y, R)].$$

Como S é retângulo, a outra inclusão é imediata. ■

Corolário 2.42. *Se $\mathring{R}_i \cap \varphi^{-1}(\mathring{R}_j)$ é não vazio e S é uma faixa estável não vazia de R_j (resp \mathring{R}_j), então $\varphi^{-1}(S) \cap R_i$ (resp. $\varphi^{-1}(S) \cap \mathring{R}_i$) é uma faixa estável não vazia de R_i (resp. \mathring{R}_i).*

Demonstração. Seja $x \in \mathring{R}_i \cap \varphi^{-1}(\mathring{R}_j)$. Como \mathbf{R} é uma partição de Markov, temos

$$\varphi^{-1}(W^u(\varphi(x), R_j)) \subset W^u(x, R_i).$$

Pela proposição 2.41, $S \cap W^u(\varphi(x), R_j)$ é não vazio, logo, usando que

$$\varphi^{-1}(W^u(\varphi(x), R_j)) \subset W^u(x, R_i),$$

temos que $\varphi^{-1}(S) \cap R_i$ é também não vazio.

Seja y um ponto de $\varphi^{-1}(S) \cap R_i$, o objetivo é provar que $W^s(y, R_i) \subset \varphi^{-1}(S) \cap R_i$. Pela definição de retângulo temos que

$$W^s(y, R_i) = \{[y, z] | z \in W^s(x, R_i)\}.$$

Desde que \mathbf{R} é uma partição de Markov, $\varphi(W^s(x, R_i)) \subset W^s(\varphi(x), R_j)$. Portanto, temos que

$$\varphi(W^s(y, R_i)) \subset \{[\varphi(x), w] | w \in W^s(\varphi(y), R_j) = W^s(\varphi(y), R_j)\} \subset S,$$

o qual implica que $W^s(y, R_i) \subset \varphi^{-1}(S)$ e, portanto, $\varphi^{-1}(S) \cap R_i$ é uma faixa estável de R_i . ■

Corolário 2.43. *Seja (a_0, \dots, a_n) uma palavra admissível de A , então a interseção $\bigcap_{s=0}^m \varphi^{-s}(R_{a_1})$ (resp. $\bigcap_{s=0}^m \varphi^{-s}(R_{a_1}^\circ)$) é uma faixa estável não vazia de R_{a_0} (resp. $R_{a_0}^\circ$). Igualmente, $\bigcap_{s=0}^m \varphi^{m-s}(R_{a_s})$ (resp. $\bigcap_{s=0}^m \varphi^{m-s}(R_{a_s}^\circ)$) é uma faixa estável não vazia de R_{a_m} (resp. $R_{a_m}^\circ$).*

Agora, seja \underline{a} um ponto de Σ_A . Do corolário anterior e da compacidade dos retângulos da partição de Markov, temos que a sequência $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $F_n = \bigcap_{s=-n}^n \varphi^{-s}(R_{a_s})$ é uma sequência decrescente de compactos não vazios e, portanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ é não vazia. Se x e y são dois pontos distintos da interseção, teríamos que

$$d(f^i(x), f^j(y)) < \epsilon \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Logo, pelo teorema 2.23, y é ponto da variedade estável e instável de x e portanto $x = y$.

portanto, podemos definir a função $\Pi : \Sigma_A \rightarrow \Lambda$ dada por

$$\Pi(\underline{a}) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(R_{a_n}).$$

Por outro lado, como os retângulos são próprios, temos que $\Lambda - \partial R_s$ é denso em Λ para todo R_s . Logo $\Lambda - \bigcup_{s=1}^k \partial R_s$ é denso, e como φ é um homeomorfismo e é invariante em Λ , $\varphi^{-n}(\Lambda - \bigcup_{s=1}^k \partial R_s)$ é aberto e denso.

Se definimos $H = \bigcap_{n=-\infty}^{n=\infty} \varphi^{-n}(\Lambda - \bigcup_{s=1}^k \partial R_s)$, pelo teorema de Baire, H é denso em Λ .

Teorema 2.44. *A função Π de Σ_A ate Λ é , sobrejetora e injectora sobre $\Pi^{-1}(H)$. Π . É também um homomorfismo da estrutura de produto local. Envia C_i em R_i . Além disso, é uma semiconjugação de $(\Sigma_A, \sigma_{\Sigma_A})$ sobre $(\Lambda, \varphi|_{\Lambda})$.*

Observação 2.45. *No caso do conjunto hiperbólico ser uma ferradura de um difeomorfismo de classe C^2 , podemos, como já sabemos, escolher os retângulos da partição de Markov disjuntos e arbitrariamente pequenos, fazendo com que Π do teorema acima seja uma conjugação topológica.*

Definimos $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}^2$ o conjunto de transições admissíveis que consiste nos pares ordenados (a_0, a_1) tal que $\varphi(R_{a_0}) \cap R_{a_1} \neq \emptyset$. Denotamos também por B a matriz de transições a qual lembremos está definida por

$$b_{a_i a_j} = 1 \text{ se } \varphi(R_{a_i} \cap R_{a_j}), \text{ caso contrário, } b_{a_i, a_j} = 0, \text{ para } (a_i, a_j) \in \mathbb{A}^2.$$

Proposição 2.46. *Seguindo a notação acima. Seja $\underline{q_s} = (q_{-s}, \dots, q_0, \dots, q_s)$ uma palavra admissível e defina $R_{\underline{q_s}}$, então $\tilde{\Lambda} := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \psi^n(\Lambda - R_{\underline{q_s}})$ é uma subferradura.*

Demonstração. Começemos por descobrir quem é o conjunto $\tilde{\Lambda}$

$$\begin{aligned}\Pi^{-1}(\tilde{\Lambda}) &= \Pi^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \psi^n(\Lambda - R_{\underline{q}_s})\right) \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \Pi^{-1}(\psi^n(\Lambda - R_{\underline{q}_s})) \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^n(\Pi^{-1}(\Lambda - R_{\underline{q}_s})).\end{aligned}$$

Note que $\Pi^{-1}(\Lambda - R_{\underline{q}_s}) = \Sigma_{\mathbb{B}} - C_{\underline{q}_s}$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^n(\Pi^{-1}(\Lambda - R_{\underline{q}_s}))$ é o conjunto de todos os elementos de $\Sigma_{\mathbb{B}}$ que não contém a palavra \underline{q}_s em lugar algum.

É claro que $\Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})$ é fechado em $\Sigma_{\mathbb{B}}$, pois se $\underline{x} \notin \Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})$, então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(\underline{x})_{m+i} = (\underline{q}_s)_i$. logo $\sigma^m(C_{\underline{q}_s})$ é uma vizinhança aberta de \underline{x} que não intersecta $\Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})$ e portanto é fechado. Logo como $\Pi^{-1}(\Lambda)$ é compacto, $\Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})$ é compacto, logo como Π é um homeomorfismo $\tilde{\Lambda}$ é compacto.

É fácil ver que $\Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})$ é invariante por σ , logo $\tilde{\Lambda}$ é invariante por ψ . Também é possível provar que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \psi^n(V - R_{\underline{q}_s}) = \tilde{\Lambda}$, onde V é tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \psi^n(V) = \Lambda$.

Finalmente é evidente que $\tilde{\Lambda}$ é hiperbólico e de tipo sela. Portanto $\tilde{\Lambda}$ é uma subferradura de Λ . ■

Para finalizar este capítulo, vamos apresentar o último teorema o qual é um resultado de Newhouse e Palis (Veja [14], p.170), esse teorema explica o comportamento no "bordo" de um ferradura e que permitirá ter controle sobre algumas órbitas.

Dizemos que x é um ponto de fronteira de Λ na direção instável se x é um ponto de fronteira de $W^u(x) \cap \Lambda$: isto é, se x é um ponto de acumulação de apenas um lado $W^u(x) \cap \Lambda$. Se x é um ponto fronteira na direção instável de Λ , então, pela propriedade de estrutura de produto local, o mesmo vale para todos os pontos de $W^s(x) \cap \Lambda$. Assim os pontos de fronteira na direção instável são interseção local de variedades estável como Λ . Por este motivo, denotamos o conjunto de pontos fronteiras na direção instável por $\partial_s \Lambda$. Os pontos fronteiras na direção estável são definidos analogamente e são denotados por $\partial_u \Lambda$.

Teorema 2.47. *Para uma ferradura Λ em dimensão 2, tem um número finito de pontos periódicos tipo selas $p_1^s, \dots, p_{n_s}^s$ tais que*

$$\Lambda \cap \left(\bigcup_i W^s(p_i^s) \right) = \partial_s \Lambda.$$

Similarmente, existem um número finito de pontos periódicos tipo sela $p_1^u, \dots, p_{n_u}^u$ tais que

$$\Lambda \cap \left(\bigcup_i W^u(p_i^u) \right) = \partial_u \Lambda.$$

Além disso, os conjuntos $\partial_s \Lambda$ e $\partial_u \Lambda$ são densos em Λ .

3 Conjuntos de Cantor

É bastante comum que as pessoas ouçam falar de exemplos de conjuntos de Cantor antes de estudar conjuntos de Cantor em geral. O conjunto de Cantor ternário é um engenhoso exemplo de um subconjunto da reta que é compacto, não numerável e totalmente desconexo.

A seguir, vamos introduzir a noção de conjuntos de Cantor e conjuntos de Cantor dinamicamente definidos. Seguiremos [14] para enunciar e provar alguns conceitos básicos dos conjuntos de Cantor dinamicamente definidos. Mas primeiro, vejamos algumas definições.

3.1 Primeiras definições

O exemplo mais comum é o conjunto de Cantor ternário.

Exemplo 3.1. *O conjunto de Cantor ternário C_3 é definido como segue*

$$C_3 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{3^n}; \sigma_n \in \{0, 2\}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (3.1)$$

O que simplesmente é o conjunto de todos os números do intervalo $[0, 1]$ que não possuem 1 na sua expansão em base 3. Note que $\frac{C_3}{3^n} = \{x : 3^n(x) \in C_3\} \subseteq C_3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Outra maneira de definir C_3 é a seguinte: Tomemos o intervalo $[0, 1]$ e tiremos o terço médio aberto, isto é, tiremos o intervalo aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Assim, ficam dois intervalos fechados cada um de comprimento $\frac{1}{3}$. Denotemos por C_1 a união desses intervalos. De novo tiramos o terço médio de cada um desses intervalos e denotamos a união destes novos intervalos como C_2 , e assim por diante definiremos C^3, \dots, C^n, \dots . O conjunto ternário de Cantor é dado por $C_3 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n$.

Definição 3.2. *Um subconjunto K de um intervalo real I é um conjunto de Cantor se é fechado, totalmente desconexo e um subconjunto perfeito de I (Esta última condição significa que todo ponto de K é um ponto de acumulação de K).*

Definição 3.3. *Uma função φ definida em um subconjunto A de \mathbb{R} é expansora se $|\varphi'| > \eta > 1$.*

Definição 3.4. *o conjunto K é um conjunto de **cantor regular de classe C^k** , $k \geq 1$, se:*

- *Existem conjuntos compactos disjuntos I_1, I_2, \dots, I_r tais que $K \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_r$.*

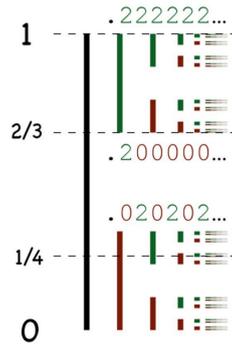


Figura 3 – De esquerda para direita, passo a passo na construção do conjunto de Cantor ternário.

- Existe uma função expansora φ definida em uma vizinhança de $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_r$ tal que $\varphi(I_j)$ é a envoltória convexa de alguns intervalos I_s que satisfazem:
 - Para cada j , $1 \leq r$ e n suficientemente grande, $\varphi^n(K \cap I_j) = K$
 - $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{-n}(I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_r)$.

Dizemos que $\{I_1, I_2, \dots, I_r\}$ é uma partição de Markov para K e que K é definido por φ

Exemplo 3.5. Considere o conjunto de Cantor ternário C_3 . Se tomamos $K = C_3$, $K_0 = [0, 1]$, $K_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $K_2 = [\frac{2}{3}, 1]$ e ψ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ 3x - 2 & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Note que ψ é C^∞ e ψ' é identicamente 3, e portanto ψ é expansora. Além disso $\psi(K_1) = \psi(K_2) = K_0$. Agora, tomando a expansão em base 3 de cada ponto $x \in K_i \cap K$, $i = 1, 2$ como em 3.1 obtemos que $\psi^2(K_i \cap K) = K$. O anterior prova que $K_1, K_2 \subset K_0$ é uma partição de Markov de C_3 e ψ .

3.2 Conjuntos regulares de Cantor e geometrias limites

Vamos apresentar uma outra definição para conjuntos de Cantor regulares e vai ser bastante útil na hora de relacionar conjuntos de Cantor com ferraduras.

Seja \mathbb{A} um alfabeto finito, \mathbb{B} um subconjunto de \mathbb{A}^2 e $\Sigma_{\mathbb{B}}$ o sub-deslocamento de tipo finito de $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, o qual tem como transições permitidas os elemento de \mathbb{B} . Em nosso contexto, vamos assumir que $\Sigma_{\mathbb{B}}$ é topologicamente misturador, e que cada letra em \mathbb{A} aparece em \mathbb{B} .

Definição 3.6. Uma função expansora g é do tipo $\Sigma_{\mathbb{B}}$ se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) O domínio de g é a união disjunta de $\bigcup_{\mathbb{B}} I(a, b)$, onde cada $I(a, b)$ é um subintervalo compacto de $I(a) := [0, 1] \times \{a\}$
- (ii) Para cada $(a, b) \in \mathbb{B}$, a restrição de g a $I(a, b)$ é um difeomorfismo suave em $I(b)$ que satisfaz $|Dg(t)| > 1$ para cada t .

E definimos o conjunto de Cantor associado a g como o conjunto maximal invariante

$$K = \bigcap_{n \geq 0} g^{-n} \left(\bigcup_{\mathbb{B}} I(a, b) \right).$$

Seja $\Sigma_{\mathbb{B}}^+$ o sub-deslocamento unilateral associado a $\Sigma_{\mathbb{B}}$. Existe um único homeomorfismo. $h : \Sigma_{\mathbb{B}}^+ \rightarrow K$ tal que $h(\underline{a}) \in I(a_0)$ para $\underline{a} = (a_0, a_1, \dots) \in \Sigma_{\mathbb{B}}^+$ e $h \circ \sigma = g \circ h$, onde, $\sigma^+ : \Sigma_{\mathbb{B}}^+ \rightarrow \Sigma_{\mathbb{B}}^+$ se define como $\sigma^+((a_n)_{n \geq 0}) = (a_{n+1})_{n \geq 0}$.

Para $(a, b) \in \mathbb{B}$, seja

$$f_{a,b} = [g|_{I(a,b)}]^{-1},$$

o qual é um difeomorfismo contrativo desde $I(b)$ sobre $I(a, b)$. Se $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ é uma palavra de $\Sigma_{\mathbb{B}}^+$, definimos

$$f_{\underline{a}} = f_{a_0, a_1} \circ \dots \circ f_{a_{n-1}, a_n},$$

o qual é um difeomorfismo de $I(a_n)$ sobre um subintervalo do intervalo $I(a_0)$ que denotaremos por $I(\underline{a})$. Note que se $z \in I(a_n)$, então

$$f_{\underline{a}}(z) = h(\underline{a}h^{-1}(z)).$$

Denotemos por $\Omega_{\Sigma_{\mathbb{B}}}^r$ o espaço das funções expansivas C^r do tipo $\Sigma_{\mathbb{B}}$ dotado da topologia C^r , onde $r > 1$ é um número real ou $r = +\infty$. Em $\Omega_{\Sigma_{\mathbb{B}}} = \bigcup_{r > 1} \Omega_{\Sigma_{\mathbb{B}}}^r$, consideremos a topologia limite.

Seja $\Sigma^- = \{(\theta_0)_{n \geq 0}, (\theta_i, \theta_{i+1}) \in \mathbb{B} \text{ para } i < 0\}$. Dotamos Σ^- da seguinte distancia ultrametrica: Para $\underline{\theta} \neq \tilde{\underline{\theta}} \in \Sigma^-$, definimos:

$$d(\underline{\theta}, \tilde{\underline{\theta}}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \theta_0 \neq \tilde{\theta}_0 \\ |I(\underline{\theta} \wedge \tilde{\underline{\theta}})| & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Onde $\underline{\theta} \wedge \tilde{\underline{\theta}} = (\theta_{-n}, \dots, \theta_0)$, se $\tilde{\theta}_{-j} = \theta_{-j}$ para $0 \leq j \leq n$ e $\tilde{\theta}_{-n-1} \neq \theta_{-n-1}$.

Agora, seja $\theta \in \Sigma^-$; para $n > 0$, seja $\underline{\theta}^n = (\theta_{-n}, \dots, \theta_0)$ e seja $B(\underline{\theta}^n)$ a função afim de $I(\underline{\theta}^n)$ sobre $I(\theta_0)$ tal que o difeomorfismo $k_n^{\underline{\theta}} = B(\underline{\theta}^n) \circ f_{\underline{\theta}^n}$ preserve a orientação.

Esta família tem um comportamento assintótico muito importante, o qual será útil para a definição de geometrias limites, como veremos a seguir.

Proposição 3.7. *Seja $r \in (1, +\infty)$, $g \in \omega_\Sigma^r$.*

- (1) *Para cada $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, existe um difeomorfismo $k^{\underline{\theta}} \in \text{Diff}_+^r(I(\theta_0))$ tal que $k_n^{\underline{\theta}}$ converge a $k^{\underline{\theta}}$ em $\text{Diff}_+^r(I(\theta_0))$ uniformemente em $\underline{\theta}$ para cada $r' < r$. A convergência também é uniforme em uma vizinhança de $g \in \Omega_\Sigma^r$.*
- (2) *Se r é um inteiro, ou $r = +\infty$, $k_n^{\underline{\theta}}$ converge a $k^{\underline{\theta}}$ em Diff_+^r . Sendo mais preciso, para todo $0 \leq j \leq r - 1$, existe uma constante C_j (independente do θ) tal que*

$$|D^j \log D [k_n^{\underline{\theta}} \circ (k^{\underline{\theta}})^{-1}] (x)| \leq C_j |I(\underline{\theta}^n)|.$$

Resulta que $\underline{\theta} \rightarrow k^{\underline{\theta}}$ é Lipschitz no seguinte sentido: para $\theta_0 = \tilde{\theta}$,

$$|D^j \log D [k^{\tilde{\theta}} \circ (k^{\underline{\theta}})^{-1}] (x)| \leq C_j d(\underline{\theta}, \tilde{\theta}).$$

3.3 Dimensões fractais

Os conjuntos de Cantor que são de nosso interesse têm medida de Lebesgue nula, porém existem medidas mais finas para subconjuntos da reta e em geral para espaços métricos. Vamos começar o capítulo pelo conceito mais importante para nós neste aspecto: Dimensão de Hausdorff.

Definição 3.8. *Seja X um espaço métrico. Para todo $A \subset X$, $s \geq 0$ e $\delta > 0$ definimos*

$$HD_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^s; \text{ tais que } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j; \text{ e } |U_j| \leq \delta \right\},$$

onde

$$|U_j| = \text{diam}(U_j) = \sup_{x, y \in U_j} d(x, y) \quad \text{é o diâmetro de } U_j.$$

Note que se A é compacto podemos assumir que há um número finito de U_j .

Definimos a s -dimensional medida de Hausdorff de U , $HD^s(U)$, fazendo tender o limite de δ para zero, isto é:

$$HD^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} HD_\delta^s(A)$$

Proposição 3.9. HD_δ^s é uma medida exterior para todo $\delta > 0$ e daí que HD^s é uma medida exterior métrica, isto é

Se $\text{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$, então

$$HD^s(A \cup B) = HD^s(A) + HD^s(B).$$

A seguinte proposição vai motivar a definição de dimensão de Hausdorff.

Proposição 3.10. Sejam A um subconjunto do espaço métrico (X, d) , e números reais $s' > s > 0$, se $HD^s(A) < \infty$, então $HD^{s'}(A) = 0$.

Assim podemos definir a dimensão de Hausdorff de A como:

$$HD(A) = \sup\{s > 0 \text{ tais que } HD^s(A) = 0\} = \inf\{s > 0 \text{ tais que } HD^s(A) = \infty\} \quad (3.2)$$

Observação 3.11. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Pela definição de HD^s , é fácil demonstrar que

$$HD^s(f(A)) = a^s HD(A).$$

A dimensão de Hausdorff tem algumas propriedades importantes.

Proposição 3.12.

- i) Se $A \subset B$, então $HD(A) \leq HD(B)$;
- ii) Se $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, é uma sequência monótona crescente contável de subconjuntos de X , então

$$HD\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \sup_k \{HD(X_k)\};$$

- iii) Se U é um aberto de \mathbb{R}^n então $HD(U) = n$.
- iv) Se $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ é uma função Hölder contínua com expoente $\theta \in (0, 1]$ (se $\theta = 1$, então f diz-se Lipschitz), isto é $[d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d_1(x_1, x_2)^\theta]$, então $HD(f(X)) \leq HD(X)/\theta$;
- v) Se f em iv) é bi-Lipschitz, isto é, f e f^{-1} são Lipschitz, então $HD(X) = HD(f(X))$.

Notemos que a dimensão de Hausdorff de um ponto é zero e portanto ii) implica que a dimensão de Hausdorff de um conjunto contável é zero.

Vejamos a seguir um exemplo sobre a medida de Hausdorff.

Exemplo 3.13. Vamos calcular $HD(C_3)$ e vamos seguir as ideias de [14]. Se definirmos $C_e = C_3 \cap [0, 1/3]$ e $C_d = C_3 \cap [2/3, 1]$ obtemos que $C_3 = C_e \cup C_d$, a qual é uma união disjuntas de conjuntos compactos em \mathbb{R} e portanto $dist(C_e, C_d) > 0$. Se definirmos $f_1(x) = (1/3)x$ e $f_2(x) = (1/3)x + 2/3$, então $f_1(C_3) = C_e$ e $f_2(C_3) = C_d$. Como HD^s é uma medida exterior métrica, temos que $HD^s(C_3) = HD^s(C_e) + HD^s(C_d) = (1/3)^s HD^s(C_3) + (1/3)^s HD^s(C_3) = 2(1/3)^s HD(C_3)$. Esta última igualdade decorre da observação 3.11. Suponha que $HD^s(C_3) \neq 0$ se $s = HD(C_3)$, então $1 = 2(1/3)^s$, $s = \log 2 / \log 3$.

Note que para concluir o cálculo, pela proposição 3.10, é suficiente provar que $1/2 \leq HD^s(C_3) \leq 1$, se $s = \log 2 / \log 3$. Seja $s = \log 2 / \log 3$, considerando a segunda construção de C_3 , temos que C^n possui de 2^n intervalos de comprimento 3^{-n} , chamemos estes de intervalos do n -ésimo nível.

Se consideramos os intervalos do n -ésimo nível como uma cobertura para C_3 , obtemos que $HD_{3^{-k}}^s(C_3) \leq 2^k 3^{-ks} \leq 1$. Ao fazer $k \rightarrow \infty$, obtemos que $HD^s(C_3) \leq 1$.

Para provar que $HD^s(C_3) \geq 1/2$, mostremos que

$$\sum_i |U_i|^s \geq 1/2 = 3^{-s}, \quad (3.3)$$

para toda cobertura $\{U_i\}$ de C_3 .

Note que podemos supor que os U_i são subintervalos compactos do intervalo $[0, 1]$ e todos intersectam C_3 . Para cada U_i seja k_i o número inteiro tal que $3^{-(k_i+1)} \leq |U_i| < 3^{-k_i}$. Então, U_i intersecta no máximo um intervalo dos intervalos do k_i -ésimo nível, pela segunda definição de C_3 para $j \geq k_i$, U_i intersecta no máximo $2^{j-k_i} = 2^j 3^{-k_i s} \leq 2^j 3^s$ intervalos dos intervalos do j -nível. Tomemos j o suficientemente grande de modo que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ para todo U_i . Dado que $\cup U_i$ intersecta todos os 2^j j -níveis intervalos os quais têm comprimento 3^{-j} . Contando intervalos obtemos que $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ que é equivalente a 3.3.

Podemos definir também outra dimensão fractal para conjuntos de Cantor, a capacidade limite, como segue:

Definição 3.14. Se K é subconjunto de Cantor de \mathbb{R} , definimos $N_\epsilon(K)$ = como o número mínimo de intervalos de comprimento $\epsilon > 0$ necessários para cobrir K . A capacidade limite de K é, por definição.

$$d(K) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon(K)}{-\log(\epsilon)}.$$

Exemplo 3.15. De novo, tomemos o conjunto de Cantor ternário C_3 e usemos a notação usada na sua segunda definição. Consideremos a cobertura pelos intervalos do n -ésimo nível, os quais têm comprimento 3^{-k} , deduzimos que se $3 - k < \epsilon \leq 3^{-(k-1)}$, então $N_\epsilon(C_3) \leq 2^k$. Portanto

$$d(C_3) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N_\epsilon(C_3)}{-\log \epsilon} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Temos também que qualquer intervalo de comprimento ϵ , com $3^{-(k+1)} \leq \epsilon$, intersecta pelo menos um dos k -níveis intervalos de comprimento 3^{-k} . Dado que existem 2^k de tais intervalos, pelo menos 2^k intervalos de comprimento ϵ são necessários para cobrir C_3 pelo qual $N_\epsilon(C_3) \leq 2^{-k}$. Portanto $[d(C_3) \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N_\epsilon(C_3)}{-\log \epsilon} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}]$. Daí $d(C_3) = HD(C_3) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Nem sempre o limite de capacidade é igual á dimensão de Hausdorff. Além disso, a definição de limite de capacidade pode ser estendida a conjuntos compactos. A seguir, damos um exemplo de um conjunto com limite de capacidade estritamente maior á dimensão de Hausdorff.

Exemplo 3.16. Seja $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ dado que F é contável $HD(F) = 0$, mas $d(F) = \frac{1}{2}$.

Agora vamos a estimar a medida de Lebesgue da diferença entre conjuntos de Cantor. Definimos a diferença de dois conjuntos como

$$K_1 - K_2 = \{t \in \mathbb{R} : \exists k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, t = k_1 - k_2\}$$

Teorema 3.17. Sejam $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$ conjuntos de Cantor com capacidade limite d_1 e d_2 . Se $d_1 + d_2 < 1$, então a medida de Lebesgue de $K_1 - K_2$ é zero.

Demonstração. Sejam $d_1 < \tilde{d}_1$ e $d_2 < \tilde{d}_2$ tais que $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 < 1$, Por definição, existe $\tilde{\epsilon} > 0$ tal que $\forall \epsilon < \tilde{\epsilon}$ se cumpre que:

$$\frac{\log(N_\epsilon(K_i))}{-\log(\epsilon)} < \tilde{d}_i.$$

Logo

$$N_\epsilon(K_i) < \epsilon^{\tilde{d}_i}.$$

Por outro lado, note que a diferença de dois intervalos de comprimento ϵ como foi definido acima é outro intervalo de comprimento 2ϵ .

Logo $K_1 - K_2$ pode ser coberto por uma quantidade menor que $\epsilon^{-\tilde{d}_1} \epsilon^{-\tilde{d}_2}$ intervalos de comprimento 2ϵ . Portanto sua medida de exterior é menor que $2\epsilon \epsilon^{-\tilde{d}_1} \epsilon^{-\tilde{d}_2} = 2\epsilon^{1-\tilde{d}_1+\tilde{d}_2}$. Assim $K_1 - K_2$ tem, medido de Lebesgue zero. ■

O exemplo 3.16 mostra como a capacidade limite e a dimensão de Hausdorff nem sempre são iguais, porém, se cumpre uma desigualdade.

Proposição 3.18. Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Cantor. Então $d(K) \geq HD(K)$.

Demonstração. Para todo $\tilde{d} > d(K)$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma cobertura U de K com $\epsilon^{-\tilde{d}}$ intervalos de comprimento ϵ . Para essa cobertura U , e $\tilde{d} > \tilde{d}$, temos que

$HD_{\tilde{d}}(K) \geq \epsilon^{-\tilde{d}} \tilde{d}$. Como $\epsilon^{-\tilde{d}} \tilde{d}$ converge para zero quando ϵ vai para zero, temos que para $\tilde{d} > d(K)$, a medida \tilde{d} de Hausdorff de K é zero e assim $d(K) \geq HD(K)$ ■

Note que usando o mesmo argumento da proposição 3.18 podemos provar que

$$HD(K) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N_\epsilon(K))}{-\log(\epsilon)}.$$

Em particular, se temos que $HD(K) = d(K)$, então

$$d(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N_\epsilon(K))}{-\log(\epsilon)}.$$

Existe uma categoria para a qual a desigualdade da proposição acima se torna uma igualdade.

Teorema 3.19. *Se K é um conjunto de Cantor dinamicamente definido então $d(K) = HD(K)$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.18, basta provar que $d(K) \leq HD(K)$. Para isso, vamos seguir [14]. Sejam $\mathcal{R}^1 = \{R_1, \dots, R_m\}$ uma partição de Markov de K , e para $n > 1$, \mathcal{R}^n o conjunto de componentes conexas dos $\psi^{1-n}(K_i)$, $K_i \in \mathcal{R}$, para $R \in \mathcal{R}^n$. Sejam também $\lambda_{n,R} = \inf |(\psi^n)'|_R$ e $\Lambda_{n,R} = \sup |(\psi^n)'|_R$. Definamos α_n, β_n por

$$\sum_{R \in \mathcal{R}^n} (\Lambda_{n,R})^{-\alpha_n} = C \text{ e } \sum_{R \in \mathcal{R}^n} (\lambda_{n,R})^{-\beta_n} = 1,$$

onde C é uma constante que vai ser especialmente escolhida. Vamos demonstrar que para todo $n \geq 1$, cumpre-se que $HD(K) \geq \alpha_n$ e $d(K) \leq \beta_n$ e depois provaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$. Para fixar a constante C , lembramos que pela definição de β_n , existe $\hat{\beta}$ tal que $\beta_n \leq \hat{\beta}$. Tomamos $C = \sup |(\psi^k)'|^{\hat{\beta}}$, onde k é tal que $\psi^{k+1}(K_i \cap K) = K$ para todo $K_i \in \mathcal{R}^1$. Temos que se $\psi|_{K_i}$ é sobrejetiva para todo i , então $C = 1$.

Agora provemos que $d(K) \leq \beta_n$ para todo n . Seja $\beta > d(K)$. A definição de $d(K)$ nos permite tomar ϵ_0 tal que $0 < \epsilon \leq \epsilon_0 N_\epsilon(K) \leq \epsilon^{-\beta}$, o que implica que existe uma cobertura de K com no máximo $\epsilon^{-\beta}$ intervalos de comprimento ϵ . Para todo $R \in \mathcal{R}^n$, as imagens inversas destes intervalos pela função $\psi^n|_R$ formam uma cobertura de R por intervalos com comprimento no máximo $\epsilon \lambda_{n,R}^{-1}$. Ou seja, $N_{\epsilon \lambda_{n,R}^{-1}}(R) < \epsilon^{-\beta}$ para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, isto é, $N_\epsilon(R) \leq \lambda_{n,R}^{-\beta} \epsilon^{-\beta}$ para $0 < \epsilon \leq \lambda_{n,R}^{-1} \epsilon_0$. Segue que se $\lambda_n = \sup_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}$ então $N_\epsilon(K) \leq \epsilon^{-\beta} (\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-\beta})$. Aplicando o mesmo argumento para $k \leq 1$ obtemos que

$$N_\epsilon(K) \leq \epsilon^{-\beta} \left(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-\beta} \right)^k, \text{ se } 0 < \epsilon \leq \lambda_n^{-k} \epsilon_0,$$

portanto

$$d(K) \leq \beta + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\left(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-\beta} \right)^k \right)}{\log(\lambda_n^k \epsilon_0^{-1})} = \beta + \frac{\log \left(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-\beta} \right)}{\log \lambda_n}.$$

Agora tomando limite quando $\beta \rightarrow d(K)$, obtemos

$$d(K) \leq d(K) + \frac{\log(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-d(K)})}{\log \lambda_n}.$$

Como $\lambda_n > 1$, temos que $\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-d(K)} \geq 1$ e portanto $d(K) \leq \beta_n$.

Agora devemos provar que $HD(K) \geq \alpha_n$, para todo n . A prova segue por contradição. Suponha que $HD(K) < \alpha_n$ para algum n . Tome α tal que $HD(K) < \alpha < \alpha_n$. Segue que existe uma cobertura finita $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de K por intervalos com comprimentos arbitrariamente pequenos para os quais $\sum_{i \in I} (\ell(U_i))^\alpha$ também é suficientemente pequeno. Suponhamos que todo elemento de \mathcal{U} intersecta a somente um $R \in \mathcal{R}^n$. Isso acontecerá se $\sum_{i \in I} (\ell(U_i))^\alpha \leq \epsilon_0$ onde $\epsilon_0 > 0$ depende apenas de n e α . Coloquemos $\mathcal{U}_R = \{U \in \mathcal{U} | U \cap R \neq \emptyset\}$. Tomemos, como anteriormente, $k \geq 0$ tal que $\psi^{k+1}(K_i \cap K) = K$ para todo $K_i \in \mathcal{R}^1$. Também podemos assumir que $(\psi^{n+k}|_R)(\mathcal{U}_R)$ é uma cobertura bem definida de K para todo $R \in \mathcal{R}^n$. Notemos que

$$\sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(\psi^{n+k}|_R(U)))^\alpha \leq (\sup |(\psi^k)'|)^\alpha \cdot \Lambda_{n,R}^\alpha \cdot \sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(U))^\alpha \leq C \cdot \Lambda_{n,R}^\alpha \cdot \sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(U))^\alpha.$$

Agora, se para todo $R \in \mathcal{R}^n$, $\sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(\psi^{n+k}|_R(U)))^\alpha > \epsilon_0$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} (\ell(U_i))^\alpha &= \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(U))^\alpha \geq C^{-1} \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} \cdot \sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(\psi^{n+k}|_R(U)))^\alpha \\ &\geq C^{-1} \left(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} \right) \cdot \epsilon_0 \geq \left(C^{-1} \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} \right) \cdot \sum_{i \in I} (\ell(U_i))^\alpha, \end{aligned}$$

o qual é uma contradição dado que $\alpha < \alpha_n$, ou seja, temos que $\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} > C$.

portanto existe $R_0 \in \mathcal{R}^n$ tal que $\sum_{U \in \mathcal{U}_{R_0}} (\ell(\psi^{n+k}|_R(U)))^\alpha \leq \epsilon_0$, e obtemos uma cobertura $\mathcal{U}' = (\psi^{n+k}|_{R_0})(\mathcal{U}_{R_0}) = \{U_i\}_{i' \in I'}$ com um número menor de elementos tal que $\sum_{i' \in I'} (\ell(U_{i'}))^\alpha \leq \epsilon_0$. Repetindo o mesmo argumento indutivamente obtemos uma cobertura de K sem elementos, o que é uma contradição. Concluimos que $HD(K) \geq \alpha_n$ como queríamos.

Resta ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$. Pela propriedade da distorção limitada existe $a > 0$ tal que $\Lambda_{n,R} \leq a \cdot \lambda_{n,R}$, para todo $n \leq 1$ e $R \in \mathcal{R}^n$. Sejam $\eta = \inf |\psi'|$ e $\theta_n = \frac{\alpha_n \log a + \log C}{-\log a + n \log \eta}$.

Assim

$$\begin{aligned} \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-\alpha-\theta_n} &\leq a^{\alpha_n+\theta_n} \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} \cdot \Lambda_{n,R}^{-\theta_n} \\ &\leq a^{\alpha_n+\theta_n} \cdot \eta^{-n\theta_n} \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} = a^{\alpha_n+\theta_n} \cdot \eta^{-n\theta_n} \cdot C = 1. \end{aligned}$$

Este último devido a definição de δ_n . Segue que $\beta_n \leq \alpha_n + \theta_n$, o que implica que

$$\beta_n - \alpha_n \leq \frac{\alpha_n \log a + \log C}{n \log \eta - \log a} \leq \frac{HD(K) \log a + \log C}{n \log \eta - \log a}.$$

Portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$ e concluímos a demonstração. ■

Para finalizar a seção daremos dois resultados que serão útil e os quais podem ser encontrados no capítulo 4 de [14].

Teorema 3.20. *Um conjunto de Cantor K dinamicamente definido por uma função classe $C^{1+\alpha}$, para $\alpha > 0$ tem dimensão de Hausdorff menor do que 1 e portanto tem medida de lebesgue 0.*

Teorema 3.21. *Se K_1 e K_2 são dois conjuntos de Cantor dinamicamente definidos, então $HD(K_1 \times K_2) = HD(K_1) + HD(K_2)$.*

3.4 Funções expansivas associadas a uma ferradura

Seja Λ uma ferradura associada a um C^2 -difeomorfismo φ em uma superfície M e considere uma coleção finita $(R_a)_{a \in \mathbb{A}}$ de retângulos disjuntos de M , que são uma partição de Markov de Λ . Considere os seguintes conjuntos:

$$W^s(\Lambda, R) = \bigcap_{n \geq 0} \varphi^{-n} \left(\bigcup_{a \in \mathbb{A}} R_a \right),$$

$$W^u(\Lambda, R) = \bigcap_{n \leq 0} \varphi^{-n} \left(\bigcup_{a \in \mathbb{A}} R_a \right).$$

Existe $r > 1$ e uma coleção de C^r -submersões $(\pi_a : R_a \rightarrow I(a))_{a \in \mathbb{A}}$ satisfazendo a propriedade que se $z, z' \in R_{a_0} \cap \varphi^{-1}(R_{a_1})$ e $\pi_{a_0}(z) = \pi_{a_1}(z')$, então

$$\pi_{a_0}(\varphi(z)) = \pi_{a_1}(\varphi(z')).$$

Em particular, as componentes conexas de $W^s(\Lambda, R) \cap R_a$ são as curvas de nível de π_a .

Podemos definir a função expansiva g^u de classe C^r (expansiva do tipo $\Sigma_{\mathbb{B}}$) pela formula

$$g^u(\pi_{a_0}(z)) = \pi_{a_i}(\varphi(z)),$$

onde $(a_0, a_1) \in \mathbb{B}$ se $z \in R_{a_0} \cap \varphi^{-1}(R_{a_1})$.

O conjunto regular de Cantor K^u definido por g^u , descreve a geometria transversal da folheação estável $W^s(\Lambda, R)$. Por outro lado, existe um único homeomorfismo $h^u : \Sigma_{\mathbb{B}}^+ \rightarrow K^u$ tal que $h^u(a) \in I(a_0)$ para $\underline{a} = (a_0, a_1, \dots) \in \Sigma_{\mathbb{B}}^+$ e $h^u \circ \sigma^+ = g^u \circ h^u$, donde $\sigma^+ : \Sigma_{\mathbb{B}}^+ \rightarrow \Sigma_{\mathbb{B}}^+$ se define como $\sigma^+((a_n)_{n \geq 0}) = (a_{n+1})_{n \geq 0}$.

Dada uma palavra finita $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n)$, defina $f_{\underline{a}}^u$, como na seção 3.2, de modo que

$$f_{\underline{a}}^u(z) = h^u(\underline{a}(h^u)^{-1}(z)).$$

De forma análoga, podemos descrever a geometria transversal da folheação instável $W^u(\Lambda, R)$, usando um conjunto regular de Cantor K^s definida pela aplicação g^s de classe C^r (expansiva do tipo $\Sigma_{\mathbb{B}}$). Além disso, existe um homeomorfismo único $h^s : \Sigma_{\mathbb{B}}^- \rightarrow K^s$ tal que $h^s(a) \in I(a_0)$ para $\underline{a} = (a_0, a_1, \dots) \in \Sigma_{\mathbb{B}}^-$ y $h^s \circ \sigma^- = g^s \circ h^s$, onde $\sigma^- : \Sigma_{\mathbb{B}}^- \rightarrow \Sigma_{\mathbb{B}}^-$ é definido como $\sigma^-((a_n)_{n \leq 0}) = (a_{n-1})_{n \leq 0}$.

Dada uma palavra finita $\underline{a} = (a_{-n}, \dots, a_0)$, defina analogamente $f_{\underline{a}}^s$, de modo que

$$f_{\underline{a}}^s(z) = h^s(h^s)^{-1}(z)a.$$

Além disso, a ferradura Λ é localmente o produto dos conjuntos de Cantor regulares K^u e K^s . Então a dimensão de Hausdorff de Λ vem dada por $HD(\Lambda) = HD(K^s \times K^u)$. Observe que pelo teorema 3.21 $HD(K^s \times K^u) = HD(K^s) + HD(K^u)$. Assim que $HD(\Lambda) = HD(K^s) + HD(K^u)$.

4 Densidade de H_φ

Neste capítulo vamos provar que um conjunto de funções em $C^1(M, \mathbb{R})$; o qual vai ser usado no teorema principal, é um conjunto grande na topologia C^1 , mais precisamente, é um conjunto aberto e denso. Particularmente este conjunto é um conjunto para o qual os espectros tem interior não vazio. Denotaremos por φ um difeomorfismo classe C^2 desde uma superfície compacta M sobre ele mesma e Λ uma ferradura de φ em M .

Antes de enunciar o teorema principal, vejamos que neste contexto, podemos provar um resultado valido para os espectros clássicos.

Teorema 4.1. *Se $f \in C^0(M, \mathbb{R})$, então*

$$L(f, \Lambda) \subset M(f, \Lambda).$$

Demonstração. Seja $a \in L(f, \Lambda)$, por definição, existe $x_0 \in \Lambda$ tal que $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(\varphi^n(x_0))$.

Como Λ é compacto temos que existe uma subsequência $(\varphi^{n_k}(x_0))$ de $(\varphi^n(x_0))$ tal que $\varphi^{n_k}(x_0) \rightarrow y_0$ e

$$a = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(\varphi^n(x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi^{n_k}(x_0)) = f(y_0).$$

Afirmamos que $f(y_0) \geq f(\varphi^n(y_0))$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De fato, se existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f(y_0) < f(\varphi^{n_0}(y_0))$. Tomando $\epsilon = f(y_0) - f(\varphi^{n_0}(y_0))$, então pela continuidade de $f \circ \varphi^{n_0}$, existe uma vizinhança U de y_0 tal que

$$f(y_0) + \frac{\epsilon}{2} < f(\varphi^{n_0}(z)), \forall z \in U.$$

Mas lembrando que $\varphi^{n_k}(x_0) \rightarrow y_0$, existe $k_0 > n_0$ tal que $\varphi^{n_k}(x_0) \in U, \forall k \geq k_0$ e portanto

$$f(y_0) + \frac{\epsilon}{2} < f(\varphi^{n_0+n_k}(x_0)), \forall k \geq k_0.$$

Logo temos uma contradição, pois

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(\varphi^n(x_0)) = a = f(y_0) < f(y_0) + \frac{\epsilon}{2} < f(\varphi^{n_0+n_k}(x_0)), \forall k \geq k_0.$$

Assim, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} f(\varphi^n(y_0)) = a$ e portanto a prova está completa. ■

Continuamos enunciando o teorema principal deste capítulo.

Teorema 4.2.

$$H_\varphi = \{f \in C^1(M, \mathbb{R}) : \#M_f(\Lambda) = 1 \text{ e para } z \in M_f(\Lambda), Df_z(e_z^{u,s}) \neq 0\}$$

é aberto e denso, donde $M_f(\Lambda) = \{z \in \Lambda : f(z) \geq f(y), \forall y \in \Lambda\}$ e $e_z^{u,s}$ são vetores unitários nos subespaços $E_z^{u,s}$ da definição de hiperbolicidade, respectivamente.

Para provar o teorema acima vamos precisar provar alguns lemas prévios.

Lema 4.3. *O conjunto*

$$\mathcal{A}' = \{f \in C^2(M, \mathbb{R}) : \text{existe } z \in M_f(\Lambda) \text{ com } Df_z(e_z^{s,u}) \neq 0\}$$

é denso em $C^2(M, \mathbb{R})$.

Demonstração. Pelo teorema 7.4 o conjunto das funções de Morse, que denotamos por \mathcal{M} , é um subconjunto denso em $C^2(M, \mathbb{R})$, portanto é suficiente provar que o conjunto \mathcal{A}' é denso no conjunto das funções Morse.

Seja $f_1 \in \mathcal{M}$, logo como Λ é compacto, temos que $\#(\text{crit}(f)) \cap \Lambda < \infty$. Além disso, sendo Λ localmente o produto de dois conjuntos de Cantor, usando os teoremas 3.20 e 3.21, obtemos que $HD(\Lambda) < 2$ e portanto tem medida de lebesgue 0, logo $\text{int}(\Lambda) = \emptyset$. Pelo lema 7.5 temos que existe $f \in \mathcal{M}$ C^2 - perto de f_1 tal que $M_f(\Lambda) \cap \text{crit}(f) = \emptyset$. Logo, se $z \in M_f(\Lambda)$, z não é ponto crítico de f e portanto temos que $Df_z(e_z^s) \neq 0$ ou $Df_z(e_z^u) \neq 0$.

Se para todo $z \in M_f(\Lambda)$ tanto $Df_z(e_z^s)$ quanto $Df_z(e_z^u)$ são diferentes de zero, então $f \in \mathcal{A}'$.

Caso contrário, suponha sem perda de generalidade que $Df_z(e_z^s) = 0$ e $Df_z(e_z^u) \neq 0$. Logo como f_1 é C^2 , existem vizinhanças \mathcal{V} de f e U de z tal que se $x \in U \cap \Lambda$ e $g \in \mathcal{V}$ então $Dg_x(e_x^u) \neq 0$. Seja R uma partição de Markov de Λ tal que o elemento R_z de R contendo z é contido em U . Lembrando que como Λ é uma ferradura, existem partições de Markov disjuntas e arbitrariamente pequenas, assim que, podemos assumir sem perda de generalidade que U está contido em uma carta local C^2 $\phi : \bar{U} \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ com $U \subset \bar{U}$ e $R' \cap \bar{U} = \emptyset$, para todo $R' \in R - R_z$. Observe que como $Df_z(e_z^s) = 0$, $z \in \partial_s \Lambda$, pois, o vetor $\nabla f(z)$ é paralelo ao vetor e_z^u , ou seja a função cresce nessa direção ou na direção oposta, mas $z \in M_f(\Lambda)$, portanto a variedade instável não se acumula na direção de $\nabla f(z)$ em Λ . Além disso, o vetor gradiente nos pontos de $\Lambda \cap R_z$ aponta para dita região, assim os possíveis máximos de f em $\Lambda \cap R_z$ estão em $W_{loc}^s(z) \cap \Lambda := K^s$ o qual é um conjunto regular de Cantor e tem medida de lebesgue zero. Consideremos agora a função $\psi^s : K^s \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\psi^s(x, \alpha) = \nabla (f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) - \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D\phi_x(e_x^s).$$

Note que a matriz acima é a rotação ortogonal em \mathbb{R}^2 . Claramente ψ^s pode ser estendida a uma função classe C^1 , logo a medida de Lebesgue de $\psi^s(K^s \times \mathbb{R})$ é zero. Assim, existe $v \in \mathbb{R}^2$ com norma arbitrariamente pequena tal que $v \notin \psi^s(K^s \times \mathbb{R})$, pois $\psi^s(K^s \times \mathbb{R})$ tem interior vazio. Consideremos $h(y) = f \circ \phi^{-1}(y) - \langle v, y \rangle$ para $y \in V$. Note que $D(h \circ \phi)_x e_x^s = Dh_{\phi(x)} D\phi_x e_x^s \neq 0$ para todo $x \in K^s$, caso contrário, se $x \in K^s$ tal que $Dh_{\phi(x)} D\phi_x e_x^s = 0$ o que implicaria que os vetores $Dh_{\phi(x)}$ e $D\phi_x e_x^s$ são ortogonais, logo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $Dh_{\phi(x)} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D\phi_x(e_x^s)$ o qual implica que $v = \nabla(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) - \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D\phi_x(e_x^s)$ (absurdo), logo $D(h \circ \phi)_x e_x^s = 0$.

Como v pode ser escolhido com norma arbitrariamente pequena, $h \circ \phi$ está perto na topologia classe C^2 de f e como toda função cresce na direção de seu gradiente, o ponto onde h alcança seu máximo $\Lambda \cap R_z$ deve estar em K^s . Assim h cumpre as condições do lema. ■

Lema 4.4. *Seja $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ e $z \in M_f(\Lambda)$ tal que $Df_z(e_z^{s,u}) \neq 0$, então $z \in \partial_s \Lambda \cap \partial_u \Lambda$.*

Demonstração. Usando coordenadas em z podemos assumir que estamos sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Por hipóteses temos que $Df_z \neq 0$ logo, sem perda de generalidade como f é C^1 , podemos assumir que $f(z)$ é um valor regular de f dentro de U , então $\alpha = f^{-1}\{f(z)\}$ é uma C^1 -curva transversal a variedade estável e instável de z em z , pois $Df_z(e_z^{s,u}) \neq 0$. Além disso, o vetor gradiente ∇f é ortogonal a curva α no ponto z .

Considerando U suficientemente pequeno, então α divide U em duas regiões que denotaremos por U_1 e U_2 . Vamos supor que ∇f aponta na direção de U_1 , então na região **I,II,III,IV** e **V** não contém pontos de Λ (ver figura 4).

De fato, como uma função cresce na direção de seu gradiente, temos que não tem pontos de Λ nas regiões **II, III** e **IV** pois $z \in M_f(\Lambda)$. Se existe um ponto y de Λ na região **I**, então pela estrutura de produto local fazendo o produto $[y, z]$ é um ponto de Λ na região **II**. Analogamente, ter um ponto na região **V** implicaria a existência de um ponto de Λ na região **IV**. Em conclusão, só pode ter pontos de Λ na região **VI** e assim $z \in \partial_s \cap \partial_u$. ■

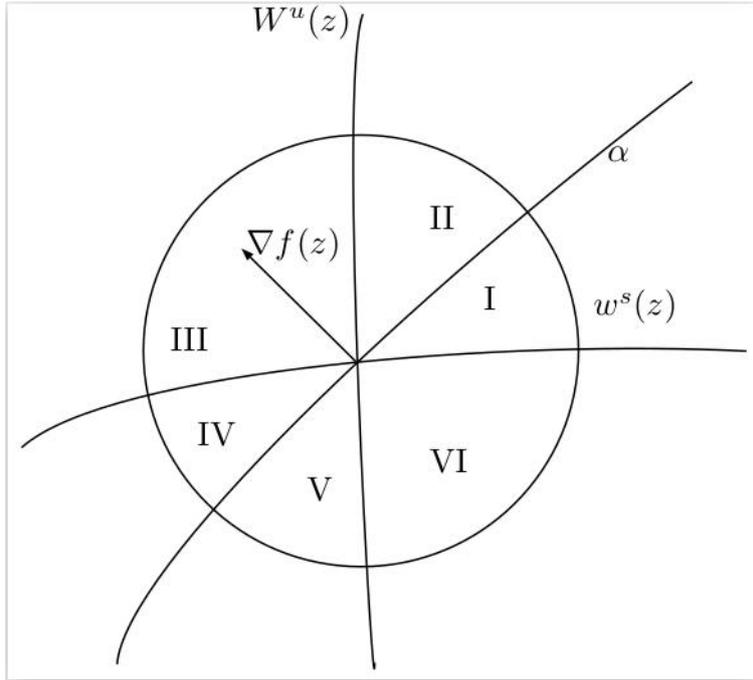
Lema 4.5. *O conjunto*

$$H_1 = \{f \in C^2(M, \mathbb{R}) : \#M_f(\Lambda) = 1 \text{ e para todo } z \in M_f(\Lambda), Df_z(e^{u,s}) \neq 0\}$$

é denso em $C^2(M, \mathbb{R})$ e portanto denso em $C^1(M, \mathbb{R})$.

Demonstração. Pelo Lema 4.3 é suficiente provar que H_1 é denso em \mathcal{A}' . Seja $f \in \mathcal{A}'$, então existe $z \in M_f(\Lambda)$ tal que $Df_z(e_z^{s,u}) \neq 0$. Considere uma vizinhança de z e $\epsilon > 0$

Figura 4 - .



pequeno. Seja $\phi_\epsilon \in C^2(M, \mathbb{R})$ tal que ϕ_ϵ está C^2 perto da função constante zero, no sentido de que $\phi_\epsilon(z) = 0$ se $z \in M - U$ e $\phi_\epsilon(z) = \epsilon$ o qual vai ser o único ponto máximo de ϕ_ϵ . Note que $\phi_\epsilon \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ no espaço $C^2(M, \mathbb{R})$.

Defina $g_\epsilon = f + \phi_\epsilon$. claramente $g_\epsilon \rightarrow f$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ na topologia $C^2(M, \mathbb{R})$. Como $z \in M_f(\Lambda)$, temos que $g_\epsilon(z) = f(z) + \epsilon > f(x) + \phi_\epsilon(x)$ para todo $x \in \Lambda - \{z\}$. Logo $z \in M_{g_\epsilon}(\Lambda)$ e $\#M_{g_\epsilon}(\Lambda) = 1$.

Também observemos que $Dg_\epsilon(e_z^{u,e}) = Df_z(e_z^{u,s}) \neq 0$, isto é $g_\epsilon \in H_1$. ■

Lema 4.6. *O conjunto H_φ definido no lema 4.3 é aberto.*

Demonstração. Seja $f \in H_\varphi$, logo existe um único $z \in M_f(\Lambda)$ com $Df_z(e_z^{s,u}) \neq 0$, aonde $e_z^{s,u} \in E^{s,u}$. Note que podemos escolher $e_z^{s,u}$ de tal maneira que $\frac{\partial f}{\partial e_z^{s,u}} = \langle \nabla f(z), e_z^{u,s} \rangle = Df_z(e_z^{u,s}) > 0$ onde o $\nabla f(z)$ é o vetor gradiente de f em z , pois $\nabla f(z)$ não é ortogonal a variedade estável nem instável.

Como f é C^1 podemos escolher $\mathcal{U} \subset C^1(M, \mathbb{R})$ uma vizinhança de f tal que, para todo $g \in \mathcal{U}$, $\frac{\partial g}{\partial e_z^{s,u}} > 0$. Sabemos que o conjunto $\{e_z^u, e_z^s\}$ é uma base para $T_p M$.

Seja

$$V = \{V \in T_p M : v = a_v e_z^u + b_v e_z^s, a_v, b_v \geq 0\}.$$

Assim, se tomamos $v \in V - \{0\}$, então $\frac{\partial g}{\partial v}(z) > 0$, assim, o vetor gradiente de g no ponto z também está dentro da região **III**, logo, pelo lema 4.4 $z \in \partial_s \Lambda \cap \partial_u \Lambda$, isto

implica que existe um conjunto aberto de U tal que $g(z) > g(x)$ para todo $g \in \mathcal{U}$ e todo $x \in (U \cap \Lambda) - \{z\}$.

Como $\Lambda - U$ é compacto, e f tem um único máximo no interior de U , existe um $\epsilon > 0$ tal que $|f(z) - f(x)| > \frac{\epsilon}{2}$, para todo $x \in \Lambda$. ■

Demonstração. Teorema 4.2. Como $H_1 \subset H_\varphi$ e, pelo lema 4.5, o conjunto H_1 é denso em $C^1(M, \mathbb{R})$, o conjunto H_φ é denso e aberto em $C^1(M, \mathbb{R})$. ■

5 Imagem de subferradura

O objetivo deste capítulo é provar que os espectros dinâmicos de Lagrange e de Markov contém a imagem de uma subferradura através de uma função real de H_φ .

Vamos começar pelo espectro de Markov.

5.1 O espectro de Markov contém a imagem de uma subferradura

Começamos por lembrar que sendo Λ uma ferradura para o difeomorfismo classe C^2 φ , existe uma família finita de retângulos $(R_a)_{a \in \mathbb{A}}$ disjuntos de M , os quais formam uma partição de Markov para Λ .

Seja $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}^2$ o conjunto de transições admissíveis, que consiste nos pares ordenados (a_0, a_1) tal que $\varphi(R_{a_0}) \cap R_{a_1} \neq \emptyset$. Denotamos também por B a matriz de transições a qual lembremos está definida por

$$b_{a_i a_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi(R_{a_i} \cap R_{a_j}) \\ 0 & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Por último lembremos também do capítulo 4 que existe uma conjugação topológica $\Pi : \Sigma_{\mathbb{B}} \rightarrow \Lambda$.

Seja $f \in H_\varphi$ (definido no capítulo 5) e $x_M \in M_f(\Lambda)$ o único ponto onde f alcança seu máximo em Λ . Pelo lema 4.4, $x_M \in \partial_s \Lambda \cap \partial_u \Lambda$ e pelo teorema 2.47, existem $p, q \in \Lambda$ pontos periódicos tal que

$$x_M \in W^s(p) \cap W^u(q).$$

Como p e q são periódicos, sabemos, tem representação simbólica

$$(\dots, a_1, a_2, \dots, a_r, a_1, a_2, \dots, a_r) \text{ e } (\dots, b_1, b_2, \dots, b_s, b_1, b_2, \dots, b_s \dots)$$

respectivamente. Ou seja,

$$\Pi^{-1}(p) = (\dots, a_1, a_2, \dots, a_r, a_1, a_2, \dots, a_r) \text{ e } \Pi^{-1}(q) = (\dots, b_1, b_2, \dots, b_s, b_1, b_2, \dots, b_s).$$

Além disso, existem l símbolos c_1, \dots, c_l tal que a representação simbólica de x_M é da forma

$$\Pi^{-1}(x_M) = (\dots, b_1, \dots, b_s, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t, \dots, a_1, \dots, a_r, a_1, \dots, a_r).$$

Onde c_t é a posição zero do símbolo $\Pi^{-1}(x_M)$, pois sabemos da seção de dinâmica simbólica que para um elemento pertencer a variedade estável de um outro elemento, eles devem coincidir a partir de algum momento para a direita, e o mesmo para a variedade instável, só que para a esquerda.

Seja $q_{\tilde{s}} = (q_{-\tilde{s}}, \dots, q_0, \dots, q_{\tilde{s}})$ uma palavra admissível tal que $x_M \in R_{\tilde{q}} = \bigcap_{i=-\tilde{s}}^{\tilde{s}} \varphi^{-i}(R_{q_i})$ e consideremos o conjunto $\tilde{\Lambda} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(\Lambda - R_{\tilde{q}})$ o qual, pela proposição 2.46 é uma subferradura. Assim, existe um aberto U tal que $U \cap \Lambda = \Lambda - R_{\tilde{q}}$ e

$$\tilde{\Lambda} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(U).$$

Tomando \tilde{s} suficientemente grande tal que a dimensão de Hausdorff do $\tilde{\Lambda}$ esteja perto da dimensão de Hausdorff do conjunto Λ , isto é possível pelo lema 6.8, o qual será provado posteriormente.

Como x_M é o único ponto máximo de f em Λ , fixemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que seja possível pegar $\tilde{\tilde{s}} > \tilde{s}$ e $\tilde{\tilde{q}} = (q_{-\tilde{\tilde{s}}}, \dots, q_{\tilde{\tilde{s}}})$ uma palavra admissível tal que $x_M \in R_{\tilde{\tilde{q}}} = \bigcap_{i=-\tilde{\tilde{s}}}^{\tilde{\tilde{s}}} \varphi^{-i}(R_{q_i}) \subset R_{\tilde{q}}$ e

$$\sup \tilde{f}|_{\Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})_\epsilon} < \inf \tilde{f}|_{\Pi^{-1}(R_{\tilde{q}} \cap \Lambda)}, \quad (5.1)$$

onde $\tilde{f} = f \circ \Pi$ e $\Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})_\epsilon = \{\underline{x} \in \Sigma_B : d(\underline{x}, \Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})) < \epsilon\}$.

Sejam $d \in \tilde{\Lambda}$ e $\Pi^{-1}(d) = \underline{d} = (\dots, d_{-n}, \dots, d_0, \dots, d_n, \dots)$ sua representação simbólica. Tomemos n_0 tal que $\sum_{|n| \geq n_0} 2^{-2|n|+1} < \epsilon$ e consideremos $(d_{-n_0}, \dots, d_{n_0})$, a qual é claramente uma palavra admissível finita. Definimos o cilindro $C_{\underline{d}_{n_0}} = \{\underline{w} \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} : w_i = d_i \text{ para } i = -n_0, \dots, n_0\}$ e o conjunto

$$C_{\underline{d}_{n_0}}, B := \{\underline{w} \in \Sigma_B : w_i = d_i \text{ para } i = -n_0, \dots, n_0\},$$

o qual sabemos é o conjunto dos elementos de $\Sigma_{\mathbb{B}}$ que coincide nos elementos centrais com os elementos de \underline{d} , portanto é não vazio e contém pontos periódicos.

Como uma ferradura é transitiva, temos que $N(x, y, B) > 0$ para todo $x, y \in \mathbb{A}$, assim, existem duas letras admissíveis $\underline{e} = (e_1, \dots, e_{k_0-1})$ e $\underline{f} = (f_1, \dots, f_{j_0-1})$ juntando d_0 com b_1 e a_r com d_1 respectivamente, com isso em mente fixamos $N_0 > k_0, j_0$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > N_0$ e $k(s+r) + l > \tilde{\tilde{s}}$ e definimos as palavras

$$(a_1, \dots, a_r)^k = \underbrace{(a_1, \dots, a_r, \dots, a_1, \dots, a_r)}_{k \text{ vezes}}$$

e

$$(b_1, \dots, b_s)^k = \underbrace{(b_1, \dots, b_s, \dots, b_1, \dots, b_s)}_{k \text{ vezes}}.$$

Assim, podemos definir a palavra

$$\alpha = ((b_1, \dots, b_s)^k, c_1, \dots, c_t, \dots, c_l, (a_1, \dots, a_r)^k)$$

onde c_t é a posição zero da palavra α . Agora podemos definir a seguinte função. Para todo $\underline{x} \in C_{\underline{d}_{n_0}}, B$, definimos:

$$A(\underline{x}) := (\dots, x_{-1}, x_0, e_1, \dots, e_{k_0-1}, (b_1, \dots, b_s)^k, c_1, \dots, c_t, \dots, c_l, (a_1, \dots, a_r)^k, f_1, \dots, f_{j_0}, x_1, x_2, \dots),$$

Onde c_t é a letra central da palavra $A(\underline{x})$. Note que a função pega elementos de $C_{\underline{d}_{n_0}}, B$ e encaixa no centro dele a palavra α . Podemos fazer duas observações. A primeira é que pela escolha de $\underline{e}, \underline{f}$, $A(\underline{x}) \in \Sigma_B$ e a segunda é que $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(\sigma^n(\underline{x}))$ seja atingido nas posições centrais. Vamos nos aprofundar na segunda observação.

Como $k > N_0 \geq \max\{k_0, j_0\}$,

$$|\underline{e}|, |\underline{f}|, \tilde{s} < |\alpha| = k(s+r) + l$$

Seja $\underline{x} \in C_{\underline{d}}, B \cap \Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})$

Note que $(\sigma^{l-t+kr+j_0}(A(\underline{x})))^+ = \underline{x}^+$ e definimos $\tau = l - t + kr + j_0 - 1$, logo $(\sigma^{\tau+n_0}(A(\underline{x})))_i = (\sigma^{n_0}(\underline{x}))_i \quad \forall i \geq -n_0$, logo

$$(\sigma^{\tau+n_0+n}(A(\underline{x})), \sigma^{n_0+n}(\underline{x})) < \epsilon \quad \forall n \geq 0. \quad (5.2)$$

Analogamente, se denotamos $\eta = -(t + sk + k_0 - 1)$, temos que

$$d(\sigma^{n-n_0-n}(A(\underline{x})), \sigma^{-n_0+n}(\underline{x})) < \epsilon \quad \forall n \geq 0 \quad (5.3)$$

Como $\Pi^{-1}(\bar{\Lambda})$ é um conjunto σ -invariante, se $\underline{x} \in \Pi^{-1}(\bar{\Lambda})$, temos pelas equações 5.2 e 5.3 que

$\sigma^{\tau+n_0+n}(A(\underline{x})), \sigma^{\eta-n_0-n}(A(\underline{x})) \in (\Pi^{-1}(\bar{\Lambda}))_\epsilon$ e portanto, da desigualdade 5.1 concluímos

$$\tilde{f}(\sigma^{\tau+n_0+n}(A(\underline{x}))), \tilde{f}(\sigma^{\eta-n_0-n}(A(\underline{x}))) < \inf \tilde{f}|_{\Pi^{-1}(R_{q_{\tilde{s}}}) \cap \Lambda} \quad \text{para } n \geq 0$$

A desigualdade acima implica que, para todo $\underline{x} \in C_{\underline{d}_{n_0}}, B \cap \Pi^{-1}(\bar{\Lambda})$, existe $j \in \{\eta - n_0, \dots, \tau + n_0\}$ tal que $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(\sigma^n(A(\underline{x}))) = \tilde{f}(\sigma^j(A(\underline{x})))$.

Lembrando que $\Pi^{-1}(x) = \underline{x}$, definimos o conjunto $\tilde{\Lambda}_j = \{x \in \bar{\Lambda} \cap \Pi(C_{d_{n_0}}, B)\} : \sup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(\sigma^n(A(\underline{x}))) = \tilde{f}(\sigma^j(A(\underline{x})))$.

Assim

$$\tilde{\Lambda} \cap \Pi(C_{d_{n_0}}, B) = \bigcup_{j=\eta-n_0}^{\tau+n_0} \tilde{\Lambda}_j.$$

portanto, existe $i_0 \in \{\eta - n_0, \dots, \tau + n_0\}$ tal que

$$HD(\tilde{\Lambda}) = HD(\tilde{\Lambda} \cap \Pi(C_{d_{n_0}}, B)) = HD(\tilde{\Lambda}_{i_0}), \quad (5.4)$$

daí, se $\underline{x} \in \Pi^{-1}(\tilde{\Lambda}_{i_0})$,

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(\sigma^n(A(\underline{x}))) = \tilde{f}(\sigma^{i_0}(A(\underline{x}))). \quad (5.5)$$

Agora temos como objetivo provar que $\tilde{A} = \Pi \circ A \circ \Pi^{-1}$ pode se estender para um difeomorfismo local. Primeiro, mostramos que \tilde{A} é estendível a um difeomorfismos sobre $W_{loc}^s(d)$ e $W_{loc}^u(d)$.

Como Λ é simbólicamente o produto $\Sigma_{\mathbb{B}}^- \times \Sigma_{\mathbb{B}}^+$, definimos a palavra finita $\beta = \underline{e}\alpha\underline{f}$. Usando a notação da seção 3.4 de conjuntos de Cantor, se

$$x^u \in W_{loc}^u(d) \cap \Lambda, \quad \text{então} \quad f_{\beta}^u(x^u) \in W^u(d) \cap \Lambda.$$

$$\mathbf{e} \quad \left(\Pi^{-1}(f_{\beta}^u(x^u))\right)^+ = \beta \left(\Pi^{-1}(x^u)\right)^+$$

também, se

$$x^s \in W_{loc}^s(d) \cap \Lambda, \quad \text{então} \quad f_{\beta}^s(x^s) \in W^s(d) \cap \Lambda$$

$$\mathbf{e} \quad \left(\Pi^{-1}(f_{\beta}^s(x^s))\right)^- = \left(\Pi^{-1}(x^s)\right)^- \beta,$$

a posição zero de $\Pi^{-1}(\varphi^{-|\beta|+1}(f_{\beta}^s(x^s)))$ é igual a $(\beta)_0 = e_1$ ou seja

$$\Pi^{-1}(\varphi^{-|\beta|+1}(f_{\beta}^s(x^s)))_0 = (\beta)_0 = (\Pi^{-1}(f_{\beta}^s(x^s)))_0$$

então, podemos definir a operação

$$\left[\Pi^{-1}(f_{\beta}^s(x^u)), \Pi^{-1}(\varphi^{-|\beta|+1}(f_{\beta}^s(x^s)))\right] = \left(\Pi^{-1}(x^s)^- \beta (\Pi^{-1}(x^u))\right)^+ = A \left[\Pi^{-1}(x^u), \Pi^{-1}(x^s)\right].$$

Lembrando que, para x^u, x^s suficientemente perto de d , a operação $[\Pi^{-1}(x^u), \Pi^{-1}(x^s)]$ está bem definida. Usando que Π é um morfismo da estrutura de produto local,

$$\left[f_\beta^u(x^u), \varphi^{-|\beta|+1}(f_\beta^s(x^s)) \right] = \Pi \left(\left[\Pi^{-1}(f_\beta^u(x^u)), \Pi^{-1}(\varphi^{-|\beta|+1}(f_\beta^s(x^s))) \right] \right) \quad (5.6)$$

$$= \Pi(A[\Pi^{-1}(x^u), \Pi^{-1}(x^s)]) = \tilde{A}[x^u, x^s] \quad (5.7)$$

Com o que foi feito acima podemos definir $\tilde{A}_1(x^u) = f_\beta^u(x^u)$ y $\tilde{A}_1(x^s) = \varphi^{-|\beta|+1}(f_\beta^s(x^s))$: pelo tanto, $\tilde{A}[x^u, x^s] = [\tilde{A}_1(x^u), \tilde{A}_2(x^s)]$. Assim temos o seguinte lema.

Lema 5.1. *Se φ é um C^2 -difeomorfismo, então \tilde{A} se estende para um C^1 -difeomorfismo local definido em uma vizinhança U_d de d . Podemos assumir, sem perda de generalidade (aumentando n_0 , se for necessário), que $U_d \supset \Lambda \cap \Pi(C_{\underline{d}_{n_0}} \cdot B)$.*

Demonstração. Como φ é um C^2 -difeomorfismo de uma superfície fechada então a folheação estável e instável da ferradura Λ , $F^s(\Lambda)$ e $F^u(\Lambda)$ se pode estender a C^1 invariante foliações definidas em uma vizinhança de Λ . Também, se φ es um C^2 -difeomorfismo, então f_β^s y f_β^u são ao menos C^1 . Logo, pela equação 5.6, temos o resultado. ■

Uma consciência imediata de Lema 5.1 e da equação 5.5 é o seguinte corolário.

Corolário 5.2. *Se $x \in \tilde{\Lambda}_{i_0}$, então $\sup_{n \in \mathbb{Z}} f(\varphi^n(\tilde{A}(x))) = f(\varphi^{i_0}(\tilde{A}(x)))$.*

Este corolário implica que $\{f(\varphi^{i_0}(\tilde{A}(x))) : x \in \tilde{\Lambda}_{i_0}\} \subset M(f, \Lambda)$.

Observação 5.3. *Nós temos $Df_{x_M}(e_{x_M}^{s,u}) \neq 0$, e como f é C^1 , a propriedade é válida em uma vizinhança de x_M . Assim, para todo $x \in \tilde{\Lambda}_{i_0}$, $\varphi^{i_0}(\tilde{A}(x))$ pertence a uma pequena vizinhança de x_M , logo $Df_{\varphi^{i_0}(\tilde{A}(x))}(e_{\varphi^{i_0}(\tilde{A}(x))}^{u,s}) \neq 0$, para todo $x \in \tilde{\Lambda}_{i_0}$. Além disso, $D\varphi_{\tilde{A}(x)}^{i_0}(e_{\tilde{A}(x)}^{u,s}) \in E_{\varphi^{i_0}(\tilde{A}(x))}^{s,u}$, e assim, por construção de \tilde{A} , $\frac{\partial \tilde{A}}{\partial e_x^{s,u}}$ é paralelo a $e_{\tilde{A}(x)}^{s,u}$ para cada $x \in \tilde{\Lambda}_{i_0}$ e temos que $D(f \circ \varphi^{i_0} \circ \tilde{A})_x(e_x^{s,u}) \neq 0$.*

5.2 O espectro de Lagrange contém a imagem de uma subferradura

Agora vamos provar que o espectro de Lagrange também contém a imagem de uma subferradura.

Seja ϵ, n_0 e \tilde{s} como acima e continuemos com a mesma notação. Seja $x \in \tilde{\Lambda} \cap \Pi(C_{\underline{d}_{n_0}}, B)$ e $\Pi^{-1}(x) = (\dots, x_{-n}, \dots, x_0, \dots, x_n) \dots$. Fixemos E_i uma palavra admissível, com $E_i = (e_1^i, \dots, e_{s_i}^i)$ que junta x_i com x_{i-1} e tal que $|E_i| = m_i - 1 < N_0$ para cada i , pois $A_{i,j}^{N_0} \geq 1$.

Assim podemos definir a seguinte função: Dado $x \in C_{\underline{d}_{n_0}}, B$.

$A_1(x) = (\dots, x_3, E_3, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, \beta, x_1, x_2, E_2, x_{-2}, x_{-1}, x_0, \beta, x_1, E_1, x_{-1}, x_0, \beta, x_1, x_2, E_2, x_{-2}, x_{-1}, x_0, \beta, x_1, x_2, x_3, E_3, x_{-3}, \dots)$, onde $\beta = \underline{e}\alpha\underline{f}$, como acima.

Como $|E_i| < N_0$, então o conjunto das palavras $\{E_i\}$ é finito pois nosso alfabeto é finito, logo

$$\{E_i : i \in \mathbb{N}\} = \{D_1, \dots, D_n\},$$

onde D_i é uma palavra admissível e $|D_i| < N_0$. Logo tome $k > N_0 + 2m_0$ e, se for necessário aumentamos o tamanho de \tilde{s} , temos que existe um vizinhança U_i para cada D_i tal que

$$\sup \tilde{f}|_{\sigma^r(U_i)} < \inf \tilde{f}|_{\Pi^{-1}(R_{\tilde{s}})} \text{ para } |r| \leq n_0 + |D_i| < n_0 + N_0. \quad (5.8)$$

Agora vamos caracterizar $\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(\sigma^n(A_1(\underline{x})))$ para $\underline{x} \in C_d$. Seja $m(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\sigma^{m(n)}(A_1(\underline{x})))^+ = x_1, x_2, \dots, x_n E_n x_{-n}, \dots, x_0, \dots \text{ e } n \geq 2n_0,$$

o qual é possível pela definição de A_1 .

Vamos definir k^* tal que $n - k^* = n_0$. Então pela definição n_0 ,

$$d(\sigma^{m(n)+n_0+j}(A_1(\underline{x})), \sigma^{n_0+j}(\underline{x})) < \epsilon \text{ para todo } j = 0, \dots, k^* - n_0$$

e

$$d(\sigma^{m(n)+|E_n|+n_0+j}(A_1(\underline{x})), \sigma^{-k^*+j}(\underline{x})) < \epsilon \text{ para todo } j = 0, \dots, k^* - n_0.$$

Além disso, como $\Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})$ é um σ -conjunto invariante, se $\underline{x} \in \Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})$, (5.1) implica que

$$\tilde{f}(\sigma^{m(n)+n_0+j}(A_1(\underline{x}))) < \inf \tilde{f}|_{\Pi^{-1}(R_{\tilde{s}} \cap \Lambda)} \text{ para todo } j = 0, \dots, k^* - n_0$$

e

$$\tilde{f}(\sigma^{m(n)+|E_n|+n_0+j}(A_1(\underline{x}))) < \inf \tilde{f}|_{\Pi^{-1}(R_{\tilde{s}} \cap \Lambda)} \text{ para todo } j = 0, \dots, k^* - n_0$$

ao mesmo tempo,

$$\sigma^{m(n)+k^*+s}(A_1(\underline{x})) \in \sigma^{|E_n^-|+n_0-s}(\mathcal{U}_{i(n)}) \text{ para todo } s = 0, \dots, n_0 + |E_n^-|$$

e

$$\sigma^{m(n)+n+|E_n^-|+s}(A_1(\underline{x})) \in \sigma^{-s}(\mathcal{U}_{i(n)}) \text{ para todo } s = 0, \dots, n_0 + |E_n^+|$$

onde $E_n = E_n^- E_n^+$ e $i(n) \in \{1, \dots, m\}$. a desigualdade, (5.8) implica que

$$\tilde{f}(\sigma^{m(n)+k^*+s}(A_1(\underline{x}))) < \inf \tilde{f}|_{\Pi^{-1}(R_{\tilde{s}} \cap \Lambda)} \text{ para todo } s = 0, \dots, n_0 + |E_n^-|$$

e

$$\tilde{f}(\sigma^{m(n)+n+|E_n^-|+s}(A_1(\underline{x}))) < \inf \tilde{f}|_{\Pi^{-1}(R_{\tilde{s}} \cap \Lambda)} \text{ para todo } s = 0, \dots, n_0 + |E_n^+|.$$

Note que, se $n_0 \leq n < 2n_0$, então, pela definição $k^* < n_0$ e os dois últimos casos valem. Daí, as quatro últimas desigualdades acima implicam que, para todo $\underline{x} \in C_{d_{n_0}, B} \cap \Pi^{-1}(\tilde{\Lambda})$, existe $j \in \{\eta - n_0, \dots, \tau + n_0\}$ e a sequência $n_k(j)$ com

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(\sigma^n(A_1(x))) = \sup_k \tilde{f}(\sigma^{n_k(j)}(A_1(x))) \text{ e } (\sigma^{n_k(j)}(A_1(x)))_0 = (A_1(\underline{x}))_j,$$

para todo k , onde $\eta = -(t + ks + k_0 - 1)$ e $\tau = (l - t + kr + j_0 - 1)$, são o tamanho da parte negativa e positiva da palavra $\beta = \underline{e}\alpha f$, respectivamente .

Para $\Pi^{-1}(x) = \underline{x}$, definimos o conjunto

$$\Lambda'_j := \{x \in \tilde{\Lambda} \cap \Pi(C_{\underline{d}_{n_0}, B}) : \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(\sigma^n(A_1(x))) = \sup_k \tilde{f}(\sigma^{k_k(j)}(A_1(\underline{x})))\},$$

então

$$\tilde{\Lambda} \cap \Pi(C_{\underline{d}_{n_0}, B}) = \bigcup_{j=\eta-n_0}^{\tau+n_0} \Lambda'_j.$$

Daí, existe $j_0 \in \{\eta - n_0, \dots, \tau + n_0\}$ tal que Λ'_{j_0} tem interior não vazio em $\tilde{\Lambda} \cap \Pi(C_{\underline{d}_{n_0}, B})$ e portanto

$$HD(\tilde{\Lambda}) = HD(\tilde{\Lambda} \cap \Pi(C_{\underline{d}_{n_0}, B})) = HD(\Lambda'_{j_0}). \quad (5.9)$$

Assim, para $\underline{x} \in \Pi^{-1}(\Lambda'_{j_0})$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(\sigma^n(A(\underline{x}))) = \sup_k \tilde{f}(\sigma^{n_k(j_0)}(A_1(\underline{x}))).$$

Portanto existe uma subsequência $n_{k_m}(j_0)$ quando $n_{k_m}(j_0) \rightarrow \infty$ com $m \rightarrow \infty$ tal que

$$\sup_k \tilde{f}(\sigma^{n_k(j_0)}(A_1(\underline{x}))) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}(\sigma^{n_{k_m}(j_0)}(A_1(\underline{x}))).$$

pela construção de A_1 , temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma^{n_{k_m}(j_0)}(A_1(\underline{x})) = \sigma^{j_0}(A(\underline{x})),$$

onde $A(\underline{x})$ é definido acima.

concluimos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(\sigma^n(A_1(\underline{x}))) = \tilde{f}(\sigma^{j_0}(A(\underline{x}))).$$

Como consequência imediata temos o seguinte corolário.

Corolário 5.4. *Se $x \in \Lambda'_{j_0}$, então*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(\varphi^n(\tilde{A}_1(x))) = f(\varphi^{j_0}(\tilde{A}(x))), \quad \text{onde } \tilde{A}_1 = \Pi \circ A_1 \circ \Pi^{-1}.$$

Este corolário implica que $\{f(\varphi^{j_0}(\tilde{A}(x))) : x \in \Lambda'_{j_0}\} \subset L(f, \Lambda)$.

6 Teorema Central

Agora vamos estudar a imagem do produto de dois conjuntos regulares de Cantor através de uma função real, para assim achar condições para que a imagem de ferraduras através de funções reais tenham interior não vazio.

6.1 Interseção de conjuntos regulares de Cantor

Seguindo a notação da seção 3.2. Sejam K e K' dois conjuntos regulares de Cantor que são definidos por $(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \Sigma, g)$, $(\mathbb{A}', \mathbb{B}', \Sigma', g')$ respectivamente.

Seja $r \in (1, +\infty]$. Para $a \in \mathbb{A}$, denotemos por $\mathcal{P}^r(a)$ o espaço dos C^r -mergulhos do intervalo $I(a)$ ate \mathbb{R} dotado da topologia C^r . Denotemos por $\text{Aff}(\mathbb{R})$ o grupo das funções afim com a operação composição pela esquerda. Consideremos a ação do grupo $\text{Aff}(\mathbb{R})$ sobre o conjunto $\mathcal{P}^r(a)$, e denotemos o espaço quociente por $\overline{\mathcal{P}}^r(a)$. Vamos também considerar $\mathcal{P}(a) = \bigcup_{r>1} \mathcal{P}^r(a)$ e $\overline{\mathcal{P}}(a) = \bigcup_{r>1} \overline{\mathcal{P}}^r(a)$, dotado com a topologia indutiva.

Observação 6.1. Em [11] $\mathcal{P}^r(a)$ é considerado para $r \in (1, +\infty]$, mas todas as definições e resultados que involucram $\mathcal{P}^r(a)$ podem ser obtidos considerando $r \in [1, +\infty]$.

Seja $\mathcal{A} = (\underline{\theta}, A)$, onde $\underline{\theta} \in \Sigma^-$ e A denotará agora um mergulho $I(\theta_0)$ em \mathbb{R} . Definimos a função canônica

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{P}^r = \bigcup_{\mathbb{A}} \mathcal{P}^r(a), \\ (\underline{\theta}, A) &\mapsto A \circ k^{\underline{\theta}} (\in \mathcal{P}^r(\theta_0)). \end{aligned}$$

Agora definimos, como acima, o espaço $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathbb{A}} \mathcal{P}(a)$ e $\mathcal{P}' = \bigcup_{\mathbb{A}'} \mathcal{P}(a')$.

A dupla (h, h') , $(h \in \mathcal{P}(a), h' \in \mathcal{P}'(a'))$ é chamada uma configuração suave para $K(a) = K \cap I(a)$, $K'(a') = K' \cap I(a')$. Atualmente, ao invés de trabalhar com o produto $\mathcal{P} \times \mathcal{P}'$, vamos trabalhar com o quociente Q gerado pela ação diagonal do grupo afim $\text{Aff}(\mathbb{R})$. Elementos de Q são chamados configurações suaves relativas para $K(a), K'(a')$.

Dizemos que uma configuração suave $(h, h') \in \mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}'(a')$ é:

- *Conectado* se $h(I(a)) \cap h'(I(a')) \neq \emptyset$;
- *intersectado* se $h(K(\underline{a})) \cap h'(K(\underline{a}')) \neq \emptyset$, onde $k(a) = K \cap I(a)$ e $K(a') = k \cap I(a')$; e
- *Estavelmente intersectado* se segue sendo intersectado mesmo se perturbamos ela em $\mathcal{P} \times \mathcal{P}'$ e perturbamos (g, g') em $\Omega_{\Sigma} \times \Omega_{\Sigma'}$.

Todas estas definições são invariantes pela ação do grupo de funções afim, e portanto tem sentido para configurações relativas suaves.

Como antes, podemos introduzir os espaços \mathcal{A} , \mathcal{A}' associados as geometrias limites de g , g' , respectivamente. Denotamos por \mathcal{C} o quociente de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ pela ação diagonal do grupo das funções afim. Um elemento de \mathcal{C} , representado por $(\underline{\theta}, A) \in \mathcal{A}$, $(\underline{\theta}', A') \in \mathcal{A}'$, é chamado uma configuração relativa da topologia limite determinada por $\underline{\theta}$, $\underline{\theta}'$. Temos a função canônica

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A}' &\rightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}', \\ \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{Q}, \end{aligned}$$

a qual nos permite definir uma configuração conectada, intersectada, estavelmente intersectada para $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ou \mathcal{C} .

Vamos considerar o seguinte subconjunto V de $\Omega_\Sigma \times \Omega_{\Sigma'}$ onde uma dupla (g, g') pertence a V se, para cada $[(\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', A')] \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}'$, existe uma translação R_t (em \mathbb{R}) tal que $(R_t \circ A \circ k^{\underline{\theta}}, A' \circ k'^{\underline{\theta}'})$ é uma configuração estável.

Teorema 6.2. (Veja [11])

- V é aberto em $\Omega_\Sigma \times \Omega_{\Sigma'}$, e $V \cap (\Omega_\Sigma^\infty \times \Omega_{\Sigma'}^\infty)$ é denso (para a topologia C^∞) no conjunto $\{(g, g'), HD(K) + HD(K') > 1\}$;
- Seja $(g, g') \in V$. Existe $d^* < 1$ tal que, para algum $(h, h') \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}'$, o conjunto

$$\mathcal{I}_s = \{t \in \mathbb{R}, (\mathcal{R}_t \circ h, h') \text{ é uma configuração suave estavelmente intersectada para } (g, g')\}$$

e é (aberto e) denso em

$$\mathcal{I} = \{t \in \mathbb{R}, (\mathcal{R}_t \circ h, h') \text{ é uma configuração suave intersectada para } (g, g')\}.$$

Além disso, $HD(\mathcal{I} - \mathcal{I}_s) \leq d^*$. O mesmo d^* também é válido para (\tilde{g}, \tilde{g}') em uma vizinhança de (g, g') in $\Omega_\Sigma \times \Omega_{\Sigma'}$.

Fixada a notação anterior, temos o seguinte teorema.

Teorema 6.3. *Seja K e K' dois conjuntos regulares de Cantor associado as duas funções expansoras g , g' respectivamente. Suponha que $HD(K) + HD(K') > 1$ e $(g, g') \in V$. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 com $K \times K' \subset U \subset \mathbb{R}^2$ tal que, em algum ponto de $K \times K'$, seu gradiente não é paralelo aos eixos coordenados. Então*

$$\text{int } f(K \times K') \neq \emptyset$$

Demonstração. Por hipótese, existe um ponto $(a, b) \in K \times K'$ e uma vizinhança aberta de $V_1 \times V_2$ de (a, b) em \mathbb{R}^2 tal que para todo $(x, y) \in V_1 \times V_2$ o gradiente de f em (x, y) não é

paralelo aos eixos coordenados. Sabemos que existem conjugações h e h' (veja a seção 3.2) tal que $h(V_1) \times h'(V_2)$ é um aberto de $\Sigma_B \times \Sigma'_{B'}$, logo existe um cilindro em $h(V_1) \times h'(V_2)$ o qual implica a existência de um ponto periódico em $h(V_1) \times h'(V_2)$, portanto temos p_1, p_2 de K e K' respectivamente, com representação simbólica $\bar{a}_1 = \underline{a}_1 a_1 a_1 \cdots$ e $\bar{a}_2 = \underline{a}_2 a_2 a_2 \cdots$ em $h(V_1) \times h'(V_2)$, onde \underline{a}_1 e \underline{a}_2 são palavras finitas e $\nabla f(p_1, p_2)$ não é paralelo aos eixos.

Como os conjuntos de Cantor são gerados por funções expansoras, existe uma sequência crescente de números naturais (m_k) e (n_k) tal que os intervalos $I_{\underline{a}_1}^{m_k}$ e $I'_{\underline{a}_2}^{n_k}$ definidos pelas palavras finitas $\underline{a}_1^{m_k}$ e $\underline{a}_2^{n_k}$ (veja seção 3.1), satisfazem

$$\frac{|I_{\underline{a}_1}^{m_k}|}{|I'_{\underline{a}_2}^{n_k}|} \in (C^{-1}, C) \text{ para algum } C > 1.$$

Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass para sequências reais podemos assumir que $|I_{\underline{a}_1}^{m_k}|/|I'_{\underline{a}_2}^{n_k}| \rightarrow \lambda \in [C^{-1}, C]$ quando $k \rightarrow \infty$, e definimos

$$\tilde{\lambda} := -((\partial f/\partial x(p_1, p_2))/(\partial f/\partial y(p_1, p_2)))\lambda.$$

Consideremos $A(x) = \tilde{\lambda}x$ e $A'(x) = x$. Como $(K, K') \in V$, por definição de V existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(\tilde{\lambda}k^{\bar{a}_1} + t, k'^{\bar{a}_2})$ é uma configuração de interseção estável. Assim, existe uma $\tilde{x} \in I((\underline{a}_1)_0)$ e $\tilde{y} \in I((\underline{a}_2)_0)$ tal que $x_0 = k^{\bar{a}_1}(\tilde{x})$ e $y_0 = k'^{\bar{a}_2}(\tilde{y})$ com $\tilde{\lambda}x_0 + t = y_0$, onde $(\underline{a}_i)_0$ é a posição zero das palavra finitas \underline{a}_i para $i = 1, 2$. Além disso, $\tilde{x} = g^{m_k|\underline{a}_1|^{-1}}(\bar{x})$ e $\tilde{y} = (g')^{n_k|\underline{a}_2|^{-1}}(\bar{y})$ para algum $\bar{x} \in I_{\underline{a}_1}^{m_k}$ e $\bar{y} \in I'_{\underline{a}_2}^{n_k}$.

Se tomamos k suficientemente grande, temos que $df(\bar{x}, \bar{y})$ não é paralelo a dx nem dy . Em particular, se $\partial f/\partial y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$, e pelo teorema local das submersões, existe um C^1 -difeomorfismo $H(x, y) = (x, g(x, y))$, definido em uma vizinhança de (\bar{x}, \bar{y}) , tal que $f(H(x, y)) = y$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que H está bem definida $I_{\underline{a}_1}^{m_k} \times I'_{\underline{a}_2}^{n_k}$. Pois em qualquer caso é só aumentar o tamanho de k . fixando a notação $g_s(x) := g(x, s)$; se s_0 é tal que $f(\bar{x}, \bar{y}) = s_0$, então $g_{s_0}(\bar{x}) = \bar{y}$ também, observe que $s \in f((K \cap I_{\underline{a}_1}^{m_k}) \times (K' \cap I'_{\underline{a}_2}^{n_k}))$ é equivalente a $g_s(k \cap I_{\underline{a}_1}^{m_k}) \cap (k' \cap I'_{\underline{a}_2}^{n_k}) \neq \emptyset$.

Assim, nosso problema ficou reduzido a provar que $g_s(k \cap I_{\underline{a}_1}^{m_k}) \cap (k' \cap I'_{\underline{a}_2}^{n_k}) \neq \emptyset$ tem interseção não vazia para s perto do $s_0 = f(\bar{x}, \bar{y})$.

Seja $B_k: I'_{\underline{a}_2}^{n_k} \rightarrow [0, 1]$ uma família de funções afim que preservam a orientação, dadas por $B_k(x) = 1/(b'_k - a'_k)(x - a'_k) = 1/|I'_{\underline{a}_2}^{n_k}|(x - a'_k)$ e $T_k(x) = 1/(b_k - a_k)(x - a_k) = 1/|I_{\underline{a}_1}^{m_k}|$, onde $I_{\underline{a}_1}^{m_k} = [a_k, b_k]$ e $I'_{\underline{a}_2}^{n_k} = [a'_k, b'_k]$.

Então, lembrando a definição de geometria limite e usando o Teorema 3.7, temos que, $B_k(K' \cap I'_{\underline{a}_2}^{n_k})$ converge para $K^{\bar{a}_2}(K')$ e $T_k(K \cap I_{\underline{a}_1}^{m_k})$ converge para $k^{\bar{a}_1}(K)$ como conjuntos regulares de Cantor.

$$\text{Também, } B_k(g_{s_0}(K \cap I_{\underline{a}_1}^{m_k})) = B_k \circ g_{s_0} \circ T_k^{-1}(T_k(K \cap I_{\underline{a}_1}^{m_k})).$$

Afirmção 6.4. *Claramente a função $B_k \circ g_{s_0} \circ T_k^{-1}$ converge para $\tilde{\lambda}x + t$ na topologia C^1 .*

De fato, se denotamos por $\epsilon_k = b_k - a_k = |I_{a_1}^{m_k}|$ and $\epsilon'_k = b'_k - a'_k = |I_{a_2}^{n_k}|$,

$$\begin{aligned} B_k \circ g_{s_0} \circ T_k^{-1}(x) &= \frac{1}{\epsilon'_k} (g_{s_0}(\epsilon_k x + a_k) - a'_k) \\ &= \frac{1}{\epsilon'_k} (g_{s_0}(a_k) + g'_{s_0}(a_k) \epsilon_k x + r(\epsilon_k x) - a'_k) \\ &= B_k(g_{s_0}(a_k)) + g'_{s_0}(a_k) \frac{\epsilon_k}{\epsilon'_k} x + \frac{\epsilon_k}{\epsilon'_k} \frac{r(\epsilon_k x)}{\epsilon_k}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Como $g_{s_0}(\bar{x}) = \bar{y}$, $B_k(g_{s_0}(\bar{x})) = B_k(\bar{y}) = B_k \circ (g')^{-(n_k |a_2|^{-1})}(\tilde{y})$ e lembrando a definição de geometria limite temos que $B_k(g_{s_0}(\bar{x}))$ converge para $k^{\bar{a}_2}(\tilde{y}) = y_0 = \tilde{\lambda}x_0 + t$ e $T_k(\bar{x}) = T_k \circ g^{-(m_k |a_1|^{-1})}(\tilde{x})$ converge para $k^{\bar{a}_1}(\tilde{x}) = x_0$. Pelo tanto, por (6.1),

$$B_k \circ g_{s_0}(\bar{x}) = B_k \circ g_{s_0} \circ T_k^{-1}(T_k(\bar{x})) = B_k(g_{s_0}(a_k)) + g'_{s_0}(a_k) \frac{\epsilon_k}{\epsilon'_k} T_k(\bar{x}) + \frac{\epsilon_k}{\epsilon'_k} \frac{r(\epsilon_k T_k(\bar{x}))}{\epsilon_k}.$$

Assim, se $k \rightarrow +\infty$, o lado esquerdo da equação acima converge para $\tilde{\lambda}x_0 + t$. Além disso, como g é C^r , $r > 1$ temos que $g'_{s_0}(a_k) \rightarrow -((\partial f / \partial x(p_1, p_2)) / (\partial f / \partial y(p_1, p_2)))$, $\epsilon_k / \epsilon'_k \rightarrow \lambda$, $T_k(\bar{x}) \rightarrow x_0$ e $(r(\epsilon_k T_k(\bar{x}))) / \epsilon_k \rightarrow 0$, por definição de $\tilde{\lambda}$ e da equação acima,

$$B_k \circ g_{s_0}(a_k) \rightarrow \tilde{\lambda}x_0 + t - \tilde{\lambda}x_0 = t. \quad (6.2)$$

Assim, por (6.1) e (6.2),

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B_k \circ g_{s_0} \circ T_k^{-1} = \tilde{\lambda}x + t.$$

Além disso, como g_{s_0} é uma função C^1 ,

$$(B_k \circ g_{s_0} \circ T_k^{-1})'(x) = \frac{1}{\epsilon'_k} g'_{s_0} \cdot \epsilon_k \rightarrow -\frac{\partial f / \partial x(p_1, p_2)}{\partial f / \partial y(p_1, p_2)} \lambda = \tilde{\lambda}.$$

Assim concluímos nossa Afirmação.

Logo,

$$k(g_{s_0}(K \cap I_{a_1}^{m_k})) = B_k \circ g_{s_0} \circ T_k^{-1}(T_k(K \cap I_{a_1}^{m_k})) \rightarrow \tilde{\lambda}k^{\bar{a}_1}(K) + t$$

e

$$B_k(K' \cap I'_{a_2}^{n_k}) \rightarrow k^{\bar{a}_2}(K').$$

Como $(\tilde{\lambda}k^{\bar{a}_1} + t, k^{\bar{a}_2})$ é uma configuração de interseção estável, e esta propriedade é aberta e $g_s(\cdot)$ está perto na topologia C^1 de $g_{s_0}(\cdot)$ para s perto s_0 , para k suficientemente grande, os conjuntos de Cantor $B_k(g_s(K \cap I_{a_1}^{m_k}))$ e $B_k(K' \cap I'_{a_2}^{n_k})$ tem interseção não vazia. Assim $g_s(K \cap I_{a_1}^{m_k})$ e $K' \cap I'_{a_2}^{n_k}$ tem interseção não vazia. ■

O seguinte exemplo mostra que a hipótese de estar em V no teorema 6.3 é fundamental.

Exemplo 6.5. Considere o conjunto de Cantor regular $K_\alpha := \bigcap_{n \geq 0} \psi^{-n}(I_1 \cup I_2)$, onde

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha}x & \text{se } x \in I_1 := \left[0, \frac{1-\alpha}{2}\right], \\ -\frac{2}{1-\alpha}x + \frac{2}{1-\alpha} & \text{se } x \in I_2 := \left[\frac{1-\alpha}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

$HD(K_\alpha) = -((\log 2)/(\log((1-\alpha)/2)))$ (Veja [14]). Se $\alpha < 1/2$, então $HD(K_\alpha) > 1/2$, e para $1/3 < \alpha < 1/2$ vale pelo teorema 3.17 que $K_\alpha - K_\alpha$ tem medida zero

Além disso, $HD(K_\alpha \times K_\alpha) > 1$ e $f(x, y) = x - y$, portanto satisfazem as hipóteses do teorema 6.3. Mas, para $1/3 < \alpha < 1/2$,

$$\text{int}f(K_\alpha \times K_\alpha) = \emptyset.$$

Corolário 6.6. Seja φ um difeomorfismo classe C^2 , e Λ uma ferradura associada a φ . Suponha que K^s, K^u satisfaz as hipóteses do teorema acima. 6.3. Seja

$$\mathcal{A}_\Lambda = \{f \in C^1(M, \mathbb{R}) : \exists z = (z^s, z^u) \in \Lambda \text{ tal que } Df(z).e_z^{s,u} \neq 0\}.$$

Então, para todo $f \in \mathcal{A}_\Lambda$, $\text{int}f(\Lambda) \neq \emptyset$.

É fácil provar que \mathcal{A}_Λ , definido no corolário acima, é um conjunto aberto e denso em $C^1(M, \mathbb{R})$.

6.2 Teorema Central

O seguinte teorema (veja [12]) é um resultado fundamental para conseguir elementos em V associados a duplas de conjuntos regulares de Cantor (K^s, K^u) definidos por g^s, g^u , onde g^s descreve a geometria transversal da folheação instável $W^u(\Lambda, R)$ e g^u descreve a geometria transversal da folheação estável $W^s(\Lambda, R)$, como no capítulo de conjuntos de Cantor.

Teorema 6.7. (Veja [12]) Suponha que a soma das dimensões de Hasusdorff dos conjuntos regulares de Cantor K^s, K^u , definidos por g^s, g^u é maior do que um. Se a vizinhança \mathcal{U} de φ_0 em $\text{Diff}^\infty(M)$ é suficientemente pequena, existe um conjunto aberto e denso $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$ tal que, para $\varphi \in \mathcal{U}^*$, a correspondente dupla de funções expansivas (g, g') pertence a V .

Usaremos o teorema acima para mostrar que os espectros de Lagrange e de Markov tipicamente tem interior não vazio em nosso contexto.

Lembremos que no capítulo 6, dada uma ferradura Λ associada a um difeomorfismo φ , definimos para $f \in H_\varphi$, a subferradura Λ em §4 como $\Lambda := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(\Lambda \setminus R_{\underline{q}_s})$.

O seguinte lema mostra que $HD(\tilde{\Lambda})$ não muda muito em comparação a $HD(\Lambda)$. Com mais precisão enunciamos o seguinte lema.

Lema 6.8. *Se Λ é uma ferradura associada a φ o qual é um difeomorfismo C^2 e $HD(\Lambda) > 1$, então $HD(\tilde{\Lambda}) > 1$ se escolhermos \tilde{s} suficientemente grande.*

Assumindo o lema 6.8, e lembrando (5.4) e (5.9) temos o seguinte corolário.

Corolário 6.9. *Os conjuntos $\tilde{\Lambda}_{i_0}$ e Λ'_{j_0} satisfazem $HD(\tilde{\Lambda}_{i_0}), HD(\Lambda'_{j_0}) > 1$.*

Lembrando que, como φ é um difeomorfismo classe C^2 , Λ é localmente o produto dos conjuntos de Cantor estável e instável, ou seja, $K^s \times K^u$. Então o lema acima vai ser consequência do seguinte lema.

Seja K um conjunto regular de Cantor associada a função expansora ψ e a partição de Markov $\mathcal{R} = \{I_1, \dots, I_k\}$ tal que $K = \bigcap_{n \geq 0} \psi^{-n}(\bigcup_{i=1}^k I_i)$. Considere a Matriz de transição $A = (A_{ij})_{k \times k}$ associada a partição \mathcal{R} , definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \psi(I_i) \supset I_j, \\ 0 & \text{if } \psi(I_i) \cap I_j = \emptyset. \end{cases}$$

A cada palavra admissível de tamanho finito m , ou seja, $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$ tal que $a_{b_i b_{i+1}} = 1$ para todo $i < m$, associamos o intervalo $I_{\underline{b}} = I_{b_1} \cap \psi^{-1}(I_{b_2}) \cap \psi^{-2}(I_{b_3}) \dots \cap \psi^{-(m-1)}(I_{b_m})$.

Lema 6.10. *Seja K um conjunto regular de Cantor associado a função expansora φ e a partição de Markov*

$\mathcal{R} = \{I_1, \dots, I_k\}$ tal que $K = \bigcap_{n \geq 0} \varphi^{-n}(\bigcup_{i=1}^k I_i)$. dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo m_0 tal que, para cada $m \geq m_0$ e para cada palavra finita admissível de comprimento m , $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$,

$$HD(K_{\underline{b}}) \geq HD(K) - \epsilon \text{ onde } K_{\underline{b}} = \bigcap_{n \geq 0} \psi^{-n} \left(\bigcup_{i=1}^k I_i - I_{\underline{b}} \right).$$

Demonstração. Seja \mathcal{R}^n o conjunto de todas as componentes conexas de $\varphi^{-(n-1)}(I_i)$, $I_i \in \mathcal{R}$. Seja B^n o conjunto de palavras admissível de tamanho n , tal que $\mathcal{R}^n = \{I_{\underline{b}}, \underline{b} \in B^n\}$. fixemos $\tilde{i}, \tilde{j} \leq k$ tal que $a_{\tilde{i}\tilde{j}} = 1$. Seja $X^n = \{\underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in B^n : b_1 = \tilde{i}, b_n = \tilde{j}\}$. para qualquer positivo inteiro r e $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_r \in X^n$, temos $\underline{b}_1 \underline{b}_2 \dots \underline{b}_r \in X^{nr} \subset B^{nr}$. Seja $\tilde{\mathcal{R}}^n = \{I_{\underline{b}}, \underline{b} \in X^n\}$.

Para $R \in \mathcal{R}^n$ tomemos $\Lambda_{n,R} = \sup |(\psi^n)'|_R$. Pela condição de misturador, existe $c_1 > 0$ tal que

$$\sum_{R \in \tilde{\mathcal{R}}^n} (\Lambda_n, R)^{-d} \geq c_1 \sum_{R \in \mathcal{R}^n} (\Lambda_n, R)^{-d} \text{ for all } d \geq 0, n \geq 1.$$

Por outro lado, por [PT93, pp. 69–70], segue que, se definimos d_n implicitamente por

$$\sum_{R \in \mathcal{R}^n} (\Lambda_n, R)^{-d_n} = 1,$$

então $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = HD(K)$, assim, em particular, para n grande, $d_n > HD(K)/2$. Note também, que existe $\lambda_1 > 1$ tal que $\Lambda_{n,R} \geq \lambda_1^n$ para todo $n \geq 1$.

Seja n suficientemente grande tal que $d_n > HD(k) - \epsilon/2$ e $\lambda_1^{n\epsilon/2} > 2/c_1$, e seja $m_0 = 2n - 1$. Dado $m \geq m_0$ e uma palavra admissível finita de tamanho m , $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$, definimos as palavras $\underline{C}_j = (b_j, b_{j+1}, \dots, b_{j+n-1}) \in B^n$, $1 \leq j \leq n$. Seja $L^n = \{\underline{c}_j : 1 \leq j \leq n\}$ e $\hat{\mathcal{R}}^n = \{I_{\underline{c}} : \underline{c} \in X^n \setminus L^n\}$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{R \in \hat{\mathcal{R}}^n} (\Lambda_n, R)^{-d_n} &\geq \sum_{R \in \hat{\mathcal{R}}^n} (\Lambda_n, R)^{-d_n} - n\lambda_1^{-nd_n} \geq \sum_{R \in \hat{\mathcal{R}}^n} (\Lambda_n, R)^{-d_n} - n\lambda_1^{-nHD(K)/2} \\ &\geq c_1 \sum_{R \in \hat{\mathcal{R}}^n} (\Lambda_n, R)^{-d_n} - n\lambda_1^{nHD(k)/2} = c_1 - n\lambda^{-nHD(k)/2} > C_1/2, \end{aligned}$$

e assim

$$\sum_{R \in \hat{\mathcal{R}}^n} (\Lambda_n, R)^{-(HD(K)-\epsilon)} > \sum_{R \in \hat{\mathcal{R}}^n} (\Lambda_n, R)^{-(d_n-\epsilon/2)} > 1.$$

definimos o conjunto regular de Cantor (com função expansora associada ψ^n) como

$$\tilde{K} := \bigcap_{r \geq 0} \psi^{-nr} \left(\bigcap_{\hat{I} \in \hat{\mathcal{R}}^n} \hat{I} \right).$$

Os cálculos anteriores implicam

$$\sum_{R \in \overline{\mathcal{R}}^{nr}} (\Lambda_{nr}, R)^{-(HD(K)-\epsilon)} \geq \left(\sum_{R \in \hat{\mathcal{R}}^n} (\Lambda_n, R)^{-(HD(K)-\epsilon)} \right)^r \geq 1,$$

onde $\overline{\mathcal{R}}^{nr} = \{I_{\underline{c}_1 \underline{c}_2 \dots \underline{c}_r}, \underline{C}_j \in X^n \setminus L^n, \forall j \leq r\}$. Assim concluímos (como antes) que $HD(\tilde{K}) \geq HD(K) - \epsilon$.

Para qualquer inteiro positivo r e $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_r \in X^n \setminus L^n$, a sequência $(a_1, a_2, \dots, a_{nr}) = \underline{b}_1 \underline{b}_2 \dots \underline{b}_r$ satisfaz que, para todo j , $1 \leq j \leq nr - m + 1$, $(a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+m-1}) \neq \underline{b}$, e assim $\hat{K} \subset K_{\underline{b}}$. Em particular, $HD(K_{\underline{b}}) \geq HD(\tilde{K}) \geq HD(K) - \epsilon$. ■

Prova do lema 6.8. Lembrando que a dimensão de Hausdorff de um produto cartesiano de conjuntos regulares de Cantor é igual a soma das dimensões de Hausdorff dos conjuntos regulares de Cantor, então aplicando o lema acima aos conjuntos K^s e K^u temos o resultado desejado. ■

Note que, pelo lema 6.8 e a estrutura local de $\tilde{\Lambda}$, $HD(\tilde{\Lambda} \cap U_d) = HD(\tilde{\Lambda}) > 1$, onde U_d é uma pequena vizinhança de d dada pelo lema 5.1.

Prova do teorema principal. Dada uma dupla (φ, Λ) onde φ é um difeomorfismo e Λ é uma ferradura de φ , tal que $HD(\Lambda) > 1$, definimos como no capítulo 5 o conjunto aberto e denso H_φ em $C^1(M, \mathbb{R})$. Lembremos que $\tilde{\Lambda}$ é uma subferradura de Λ , como no lema 6.8, com $HD(\tilde{\Lambda} \cap U_d) = HD(\tilde{\Lambda}) > 1$. Então pelo teorema 6.7, existe um difeomorfismo φ_0 perto

de φ , uma ferradura Λ_0 associada a φ_0 e uma subferradura $\tilde{\Lambda}_0 \subset \Lambda_0$ com $HD(\tilde{\Lambda}_0) > 1$ tal que $\tilde{\Lambda}_0$ satisfaz as hipóteses do teorema 6.3.

Para $f \in H_{\varphi_0}$, nós podemos definir um difeomorfismo local $\tilde{A}_{\varphi_0}(f)$; com a ordenas dadas pelas foliações estáveis e instáveis, nós podemos escrever, $\tilde{A}_{\varphi_0}(f)(x, y) = (\tilde{A}_{\varphi_0}^1(f)(x), \tilde{A}_{\varphi_0}^2(f)(y))$, como foi feito no capítulo 6.

Seja i_0 tal que valem o corolário 5.2 e as equações 5.5 e 5.4 para $(\varphi_0, \tilde{\Lambda}_0)$. Para $f \in H_{\varphi_0}$, a observação 5.3 implica que, para cada $x \in \tilde{\Lambda}_0$, $D(f \circ \varphi_0^{i_0} \circ \tilde{A}_{\varphi_0}(f))_x(\tilde{e}^{s,u}) \neq 0$, onde $\tilde{e}_x^{s,u}$ são os vetores unitários no fibrado estável e instável do conjunto hiperbólico $\tilde{\Lambda}_0$, respectivamente (aqui $\tilde{\Lambda}_{0,i_0}$ é definido como em 5.4, mas para $\tilde{\Lambda}_0$ no lugar de $\tilde{\Lambda}$). Assim a função $f \circ \varphi_0^{i_0} \circ \tilde{A}_{\varphi_0}(f) \in \mathcal{A}_{\tilde{\Lambda}_0}$. portanto, pelo Corolário 6.6,

$$\text{int}(f \circ \varphi_0^{i_0} \circ \tilde{A}_{\varphi_0}(f))(\tilde{\Lambda}_0) \neq \emptyset \quad (6.3)$$

Então, como no corolário 5.2 ,

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} f(\varphi_0^n(\tilde{A}_{\varphi_0}(f)(x))) = (f \circ \varphi_0^{i_0} \circ \tilde{A}_{\varphi_0}(f))(x)$$

para todo $x \in \tilde{\Lambda}_{0,i_0}$. Isto implica que $(f \circ \varphi_0^{i_0} \circ \tilde{A}_{\varphi_0}(f))(\tilde{\Lambda}_{0,i_0}) \subset M(f, \Lambda_0)$. Assim, por (6.3), $\text{int}M(f, \Lambda_0) \neq \emptyset$.

Usando o corolário 5.4 no lugar do corolário 5.2, obtemos um resultado análogo para o espectro de Lagrange. Assim concluímos a prova do teorema principal. ■

7 Apêndice: Topologia Diferencial

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados clássicos de topologia diferencial os quais serão útil para entender algumas definições e conseguir resultados importantes. Vamos sempre assumir que as variedades em questão são compactas.

Se M e N são duas variedades diferenciáveis de dimensão m e n com N não necessária compactas classes C^r , denotamos o conjunto de todas a funções desde M ate N de classe C^r por $C^r(M, N)$.

Definição 7.1. *Seja $f \in C^r(M, N)$. Sejam $(\varphi, U), (\psi, V)$ cartas sobre M e N respectivamente ; Seja $K \subset U$ tal que $f(K) \subset V$; seja $0 < \epsilon \leq \infty$, definimos uma vizinhança subbásica*

$$\mathcal{N}^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \epsilon). \quad (7.1)$$

Como o conjunto de todas as funções $g \in C^r(M, N)$ tal que $g(K) \subset V$ e $\|D^k(\psi g \varphi^{-1})(x) - D^k(\psi f \varphi^{-1})(x)\| < \epsilon$ ara todo $x \in \varphi(K)$ e todo $k = 0, 1, \dots, r$. Os conjuntos da forma de 7.1 são uma subbase e geram uma topologia a qual é chamada de topologia de Whitney.

Definição 7.2. *Seja $f \in C^r(M, \mathbb{R})$ com $r \geq 2$, f é dita Morse se todos os pontos criticos são não degenerados, denotaremos por \mathcal{M} o conjunto das funções Morses.*

Observação 7.3. *Se x é um ponto critico para f e $f \in \mathcal{M}$, então x é um ponto critico isolado de fato é so pegar uma carta local para x e usar o resultado em \mathbb{R}^n .*

Por outro lado se f é duas vezes diferenciável o conjunto de pontos criticos é fechado pois f' é .

Teorema 7.4. *O conjunto das funções Morses é aberto e denso $C^2(M, \mathbb{R})$.*

Lema 7.5. *Sejam $f_1 \in \mathcal{M}$, $\Lambda \subset \mathcal{M}$, fechado com $\text{int}(\Lambda) = \emptyset$, então existe $f \in \mathcal{M}$ perto de f_1 tal que $M_f(\Lambda) \cap \text{Crit}(f) = \emptyset$.*

Teorema 7.6. *O conjunto $C^2(M, \mathbb{R})$ é denso em $C^1(M, \mathbb{R})$.*

Referências

- [1] T. W. Cusick and M. E. Flahive. *The Markoff and Lagrange Spectra (Math Surveys and Monographs, 30)*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.
- [2] P. G. Dirichlet *Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen. Anwendungen auf die Theorie der Zahlen*, p.633-638 Bericht über die Verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1842, S. 93-95
- [3] G. A. Freiman. *Diophantine approximation and the geometry of numbers (Markov's problem)*. Kalinin.Gosudarstv. Univ. Kalink (1975).
- [4] M. Hall, *On the sum and product of continued fractions*, *Ann. of Math.* (2) 48, (1947). 966–993.
- [5] A. Hurwitz, *Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche*, *Math. Ann.* 39 (1891), no. 2, 279–284.
- [6] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54). Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [7] A. Khinchin, *Continued fractions*. The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London 1964 xi+95 pp.15. , Continued fractions.
- [8] A. Markoff, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies*, *Math. Ann.* 17 (1880), no. 3, 379–399.
- [9] C. Matheus, *THE Lagrange AND MARKOV SPECTRA FROM THE DYNAMICAL POINT OF VIEW*.
- [10] C. G. Moreira. *Conjuntos de Cantor, Dinâmica e aritmética* (22º Colóquio Brasileiro de Matemática). IMPA, Rio de Janeiro, 1999.
- [11] C. G. Moreira and J.C. Yoccoz. *Some fundamental properties of plane sets of fractional dimension*, *Ann. of Math.* (2) **154**(2001),45-96.
- [12] C. G. Moreira and J.- - Yoccoz. *Tangencies homoclines stables pour des ensembles hyperboliques de grande dimension fractale*. *Ann. Ec. Norm. Supér.* **43**(4) (2010), 1-68.
- [13] J. Plínio de O. Santos *Introdução á Teoria dos Números*, IMPA, 1998.

-
- [14] J. Palis and F. Takens. *Hyperbolicity & Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations (Fractal Dimensions and Infinitely Many Attractors)* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics,35). Cambridge University Press, Cambridge, 1993 .
- [15] S. A. Romaña and C. G. T. de A. Moreira *On the Lagrange and Markov dynamical spectra*. Ergodic Theory and Dynamical Systems.
- [16] M. Shub. *Global Stability of Dynamical Systems (with the collaboration of Albert Fathi and RemiLangevin)*. Springer, New York, 1987.
- [17] D. Sullivan. *The Mathematical Heritage of Herman Weyl (Durham, NC, 1987) (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics)*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988, 48(4) (1987),15–23.