

UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA



Glauber Moreno Barbosa

**Redução Simplética e
Reconstrução da Dinâmica
em Sistemas Mecânicos**

Rio de Janeiro
março de 2020

Redução Simplética e Reconstrução da Dinâmica em Sistemas Mecânicos

Glauber Moreno Barbosa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários á obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alejandro Cabrera

Rio de Janeiro

março de 2020

CIP - Catalogação na Publicação

MB238r Moreno Barbosa, Glauber
Redução Simplética e Reconstrução da Dinâmica em
Sistemas Mecânicos / Glauber Moreno Barbosa. -- Rio
de Janeiro, 2020.
141 f.

Orientador: Alejandro Cabrera.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Geometria Simplética. 2. Sistemas
Hamiltonianos. 3. Simetrias. 4. Redução Simplética.
5. Reconstrução da Dinâmica. I. Cabrera, Alejandro,
orient. II. Título.

Redução Simplética e Reconstrução da Dinâmica em Sistemas Mecânicos

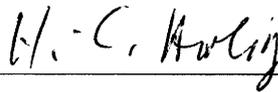
Glauber Moreno Barbosa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários á obtenção do título de Mestre em Matemática.

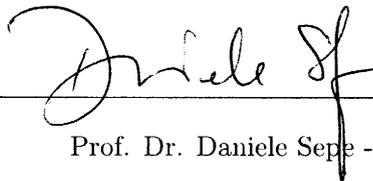
Aprovada por:



Prof. Dr. Alejandro Cabrera - IM/UFRJ, (Presidente)



Prof. Dr. Hans-Christian Herbig - IM/UFRJ



Prof. Dr. Daniele Sepe - IME/UFF

Rio de Janeiro

março de 2020

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Alejandro Cabrera, pela sua atenção e sempre disponibilidade em tirar as minhas dúvidas, que foram fundamentais para minha compreensão melhor do assuntos deste trabalho.

A minha família, em especial a minha mãe Edna da Costa Barbosa e ao meu pai Dr. Carlos Alberto Moreno Barbosa, que sempre me apoiaram nesta jornada.

Aos membros da banca por terem aceito avaliar este trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro e aos demais professores do Instituto de Matemática da UFRJ que contribuíram com a minha formação.

Resumo

Nesta dissertação, exploraremos as simetrias dos sistemas mecânicos através das suas quantidades conservadas, na busca pelas propriedades qualitativas e quantitativas do sistema. Para isso, estudaremos com detalhes o Teorema de Redução Simplética, que nos permite reduzir o espaço de fase do problema original, a um sistema físico num espaço de fases de dimensão inferior. Uma vez obtida a solução das equações de movimento neste espaço reduzido, aplicaremos o Método de Reconstrução da Dinâmica para obtermos as soluções do problema no espaço de fase original.

Ao longo do trabalho, apresentaremos exemplos clássicos de sistemas mecânicos que admitem simetria, em especial o Problema de Kepler e do Corpo Rígido, que utilizaremos para exemplificar a teoria desenvolvida ao longo do texto. Na última seção, faremos um estudo de uma variação do problema do Corpo Rígido, adicionando um potencial ao sistema, onde iremos obter a 2-forma simplética associada, o colchete de Poisson que nos fornece as equações de movimento, a fórmula do ângulo de fase e um estudo da estabilidade.

Palavras-chave: Geometria Simplética, Sistemas Hamiltonianos, Simetrias, Redução Simplética, Reconstrução da Dinâmica, Problema de Kepler, Corpo Rígido.

Abstract

In this dissertation, we will explore the symmetries of mechanical systems through their conserved quantities, in the search for the qualitative and quantitative properties of the system. For this purpose, the Symplectic Reduction Theorem will be studied in detail, allowing us to reduce the phase space of the original problem to a physical system in a phase space of lower dimension. Once the equations of motion are solved in this reduced space, it will be applied the Dynamics Reconstruction Method in order to obtain the solutions of the problem in the original phase space.

Throughout this work, it will be presented classic examples of mechanical systems that admit symmetry, particularly the Kepler and Rigid Body Problems, which will be used to exemplify the theory developed throughout the dissertation. In the last section, a variation of the Rigid Body problem will be studied, adding a potential to the system, whereby it will be obtained the associated symplectic 2-form, the Poisson bracket, that gives us the motion equations, the phase angle formula and a stability study.

Keywords: Symplectic Geometry, Hamiltonian Systems, Symmetries, Symplectic Reduction, Dynamics Reconstruction, Kepler Problem, Rigid Body.

Sumário

Introdução	1
1 Elementos de Geometria Simplética	3
1.1 Variedades Suaves	3
1.2 Formas Diferenciais	7
1.3 Derivadas de Lie	12
1.4 Álgebras e Grupos de Lie	17
1.5 Geometria Simplética	20
1.5.1 Álgebra Linear Simplética	20
1.5.2 Variedades Simpléticas	25
2 Mecânica Hamiltoniana	29
2.1 Campos Hamiltonianos	29
2.2 Ações de Grupos de Lie	33
2.3 Mapa Momento	38
2.4 Colchetes de Poisson	45
2.4.1 Colchete de Poisson em $SO(3) \times \mathbb{R}^3$	52
3 Redução Simplética e Reconstrução da Dinâmica	55
3.1 Teorema de Redução Simplética	55
3.2 Redução da Dinâmica	62
3.3 Reconstrução da Dinâmica	63
3.4 Redução e Órbitas Coadjuntas	69
3.4.1 Identificação com as Órbitas Coadjuntas	70
3.4.2 Estrutura Simplética nas Órbitas Coadjuntas	72
4 Exemplos de Sistemas com Simetria	75
4.1 Pêndulo Simples	75
4.2 Oscilador Harmônico	78
4.3 Problema de Kepler	80
4.3.1 Motivação ao Vetor de Runge-Lenz	80
4.3.2 Vetor de Runge-Lenz e Simetria da álgebra de Lie $\mathfrak{o}(4)$	82
4.3.3 Interpretação da Simetria e Equações de Movimento	85
4.4 Corpo Rígido Livre	89
4.4.1 Equações de Movimento	95
4.4.2 Redução Simplética e Reconstrução	97
4.4.3 Fórmula de Montgomery	100

4.4.4	Solução Analítica da Equação de Euler	102
4.4.5	Estabilidade Relativa	106
4.5	Corpo Rígido Simétrico sob Potencial	107
A	Álgebras de Lie $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{o}(4)$	115
B	Princípio Variacional	118
C	Conexões em Fibrados Principais e Holonomia	122
D	Estabilidade de Pontos de Equilíbrio	126
E	Cálculos Auxiliares	128

Introdução

Ao estudar sistemas físicos, estamos em geral interessados em determinar as equações de movimento. Para isso, podemos procurar por quantidades conservadas que nos fornecem novas equações para o sistema, diminuindo assim a complexidade do problema. O Teorema de Noether (apresentado no Capítulo 2 e com mais detalhes em [15]), nos diz que existe uma bijeção entre o conjunto das quantidades conservadas e as simetrias do sistema. Por simetria, queremos dizer funções do sistema (por exemplo a energia) que são invariante por alguma transformação. Por exemplo, a invariância da função Hamiltoniana pela ação de translação esta relacionada com a conservação do momento linear e a invariância por rotações com a do momento angular.

O objetivo deste trabalho é estudarmos sistemas que admitem simetria (da função Hamiltoniana) e relacionar com as suas respectivas quantidades conservadas (mapa momento dada pelo Teorema 2.38). Existem muitas formas de explorarmos as simetrias do sistema, mas nos focaremos na teoria de Redução Simplética apresentada por Marsden e Weinstein em [23]. Este resultado nos diz que dada uma variedade simplética (P, ω) , podemos induzir uma estrutura simplética no espaço de dimensão inferior $(P_\mu = P/G_\mu, \omega_\mu)$, onde teoricamente podemos fazer um estudo da dinâmica com mais facilidade. Veremos ainda o caso especial da redução dada pelo Teorema de Kirillov-Kostant-Souriau, onde o espaço de fase é um fibrado cotangente de grupo de Lie, $P = T^*G$. Neste caso, o espaço reduzido pode ser identificado com as órbitas coadjuntas $G \cdot \mu$. Além disso, uma vez determinada as soluções das equações de movimento no espaço reduzido (P_μ, ω_μ) , podemos obter as soluções no espaço de fase original através do método de Reconstrução da Dinâmica. Além disso, podemos obter outras propriedades interessantes do sistema, como a fase geométrica do sistema [21] e fazer um estudo da estabilidade relativa dos pontos de equilíbrios.

O texto foi estruturado da seguinte forma:

O Capítulo 1 é dedicado a uma revisão básico dos conceitos de variedade, álgebras e grupos de Lie e também uma introdução rápida a geometria simplética, que é a linguagem natural para o desenvolvimento da mecânica.

No Capítulo 2 iniciamos apresentando uma breve descrição da mecânica Hamiltoniana e a sua relação com a geometria simplética apresentada no capítulo anterior. Além disso, definiremos o conceito de ações de grupos que está relacionada com o estudo da simetria dos sistemas e o mapa momento $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que generaliza e abstrai os conceitos de momento linear e momento angular da mecânica clássica. No final do capítulo, apresentamos os

colchetes de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ que nos fornecem uma estrutura de álgebra nas funções $C^\infty(P)$, de onde também podemos descrever as equações de movimento.

O Capítulo 3 é o mais técnico e tem como referência principal o livro [1]. Apresentaremos o Teorema de Redução Simplética e da Reconstrução da Dinâmica com bastante detalhes, que em geral são omitidos nos principais textos de mecânica e geometria simplética. Veremos sob determinadas hipóteses, que dada uma variedade simplética (P, ω) com um mapa momento \mathbf{J} , podemos obter uma variedade simplética (P_μ, ω_μ) de dimensão inferior, onde as 2-formas simpléticas estão relacionadas por $i_\mu^* \omega = \pi_\mu^* \omega_\mu$. Determinada a solução das equações de movimento no espaço reduzido P_μ , podemos aplicar o método de reconstrução e obtermos a solução na subvariedade $\mathbf{J}^{-1}(\mu) \subset P$. Durante este capítulo são apresentados diversos exemplos que ilustram a teoria desenvolvida neste capítulo.

Por fim, o Capítulo 4 é dedicado a apresentação de exemplos de sistemas com simetria mais elaborados, onde falaremos com bastante detalhes do Problema de Kepler e do problema do Corpo Rígido. No problema de Kepler seguiremos a construção feita em [10], que é uma abordagem não muito tradicional na literatura, onde veremos que a conservação do vetor de Runge-Lenz está relacionada com Lei do Inverso do Quadrado da atração entre dois corpos e que a simetria corresponde é da álgebra de Lie $\mathfrak{o}(4)$. Faremos ainda uma interpretação desta simetria, relacionando com as rotações das 3-esferas em \mathbb{R}^4 .

No exemplo do Corpo Rígido Livre, partiremos do estudo de um sistema de partículas, onde faremos um estudo progressivo relacionando com a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, tornando este exemplo um dos mais importantes do texto. Veremos ainda neste exemplo, a Fórmula de Montgomery para Fase Geométrica (que pode ser vista com mais detalhes em [21]) e um estudo da estabilidade relativa do sistema seguindo [22]. Para finalizar, estudaremos uma pequena variação do exemplo anterior, adicionando ao sistema um potencial, de onde obteremos alguns resultados.

Este trabalho foi escrito tendo em mente ser acessível a leitores menos experientes, apresentando as definições matemáticas e as demonstrações dos principais resultados, além de diversos exemplos. Espero com isso, que este texto possa auxiliar estudantes que estejam iniciando o estudo de simetrias em física-matemática. Boa leitura!

Capítulo 1

Elementos de Geometria Simplética

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados básicos que utilizaremos ao longo do texto. Este capítulo não tem como finalidade ser um texto completo e detalhado sobre os temas mostrados, mas apenas um guia, onde assumiremos que o leitor já tenha uma familiaridade com os tópicos estudados neste capítulo. Para mais detalhes sobre os assuntos abordados, o leitor pode consultar os textos [2],[22], [1], [10] e [18].

1.1 Variedades Suaves

Uma **variedade** M é um espaço topológico Hausdorff, segundo contável (ver o Capítulo 1 de [1]) e localmente homeomorfo a um espaço euclidiano n -dimensional, isto é, para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ e um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Chamamos o par (U, φ) de **carta local** do ponto p e U de **vizinhança coordenada**.

Exemplo 1.1. *O exemplo mais trivial de variedade é o espaço euclidiano \mathbb{R}^n , que tem uma carta $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ que cobre todo o espaço.*

Para que possamos fazer cálculo numa variedade, é necessário adicionar uma estrutura diferenciável a ela e que não dependa da escolha das cartas. Assim, dizemos que duas cartas locais (U, φ) e $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ do ponto $p \in M$ são C^∞ -**compatíveis** se $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ e se os mapas de mudança de cartas

$$\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}|_{\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})} \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap \tilde{U})}$$

são de classe C^∞ .

Com estes conceitos, definimos um **atlas** C^∞ de M , como uma coleção de cartas C^∞ -compatíveis $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ tal que $M = \cup_\alpha U_\alpha$. Dizemos ainda que um atlas \mathcal{M} é **maximal** se para qualquer outro atlas \mathcal{U} tivermos $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}$ implicar que $\mathcal{U} = \mathcal{M}$. Vamos agora definir a estrutura base para todo o texto.

Definição 1.2. *Uma variedade **suave** ou C^∞ é um par (M, \mathcal{M}) composto por um espaço topológico M e um atlas maximal \mathcal{M} . Dizemos ainda que $S \subset M$ é uma **subvariedade** de dimensão k , se para cada ponto $s \in S$ existe uma carta (U, φ) em \mathcal{M} tal que*

$$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Observação 1.3. *Vamos considerar no texto todas as variedades como sendo suaves, a menos que seja dito o contrário.*

Exemplo 1.4. *O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é um exemplo trivial de variedade diferenciável. Outro exemplo simples é a esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, onde o atlas é dado pelas projeções estereográficas. Considerando os pontos polo Norte $N = (0, 0, 1)$ e o polo Sul $S = (0, 0, -1)$, a projeção estereográfica em relação ao polo Norte do ponto $p \in S^2$, consiste em determinar a interseção da reta ligando os pontos p e N com o plano xy e de forma análoga em relação ao polo Sul. Definindo os conjuntos abertos*

$$U_+ = S^2 - \{S\} \quad e \quad U_- = S^2 - \{N\},$$

podemos determinar as cartas (U_+, φ_+) e (U_-, φ_-) que são dadas por

$$\varphi_+(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \quad e \quad \varphi_-(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Pode-se verificar ainda que a mudança de cartas $\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}$ é suave em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Observe que este atlas não é maximal, mas ele gera um atlas maximal.

Exemplo 1.5. *Dizemos que uma variedade G é um **grupo de Lie** se admite uma estrutura de grupo, tal que as aplicações de multiplicação e inversão são suaves. Veremos com detalhes na Seção 2.2.*

O próximo passo no estudo das variedades suaves, é introduzirmos os conceitos de vetores tangentes. Fisicamente, podemos pensar numa partícula se movendo sob uma variedade de configuração, onde o vetor tangente representa a sua velocidade instantânea.

Considere uma variedade suave M e uma carta local (U, φ) numa vizinhança do ponto $p \in M$. Dizemos que duas curvas suaves $c_1, c_2 : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ com $\delta > 0$ são equivalentes se

$$c_1(0) = c_2(0) = p \quad e \quad (\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$$

e denotamos esta classe de equivalência por $[c_1]$. Observe ainda que esta definição de equivalência não depende da escolha da carta. Desta forma, definimos o **espaço tangente** em p como o conjunto

$$T_p M := \{[c] \mid c : (-\delta, \delta) \rightarrow M \text{ curva suave com } c(0) = p\}.$$

Além disso, definimos o **fibrado tangente** da variedade M como o conjunto da união dos espaços tangentes

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) \mid p \in M \text{ e } v \in T_p M\}.$$

Observação 1.6. *Os fibrados tangentes TM admitem uma estrutura de variedades diferenciáveis de dimensão $2n$, tal que a projeção canônica $\pi : TM \rightarrow M$ é suave.*

Exemplo 1.7. *Um exemplo bem simples é pensar no fibrado tangente da circunferência, TS^1 . Dado um ponto $p = (\cos \theta_p, \sin \theta_p) \in S^1$, então*

$$T_p S^1 = \{[c] \mid c(t) = (\cos(\omega t + \theta_p), \sin(\omega t + \theta_p)) \text{ com } t \in (-\delta, \delta)\} \simeq \mathbb{R}.$$

Desta forma, podemos fazer a identificação $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.

Exemplo 1.8. *Um dos mais simples exemplos de fibrados tangentes é o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ que tem como base S^1 e fibra $\{p\} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ com $p \in S^1$.*

Considerando que uma partícula esteja no instante inicial $t = 0$ no ponto $p_0 \in M$ e que a variedade admita um vetor velocidade específico em cada ponto, uma pergunta natural que podemos fazer é: qual a trajetória da evolução da partícula com este ponto inicial? Isso nos motiva para as definições de campos de vetores, curvas integrais e fluxos que veremos agora.

Definição 1.9. *Seja M uma variedade suave, um **campo de vetores** é um mapa suave $X : M \rightarrow TM$ tal que para cada $p \in M$ associamos um $X(p) \in T_pM$. Uma **curva integral** do campo X com condição inicial p no tempo $t = 0$, é uma curva $c : (a, b) \rightarrow M$ com $c(0) = p$ e $c'(t) = X(c(t))$ para todo t . Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores em M .*

Considerando uma n -variedade suave M e um sistema de coordenadas locais $\{U, x^1, \dots, x^n\}$ do ponto p , denotaremos por $\{\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p\}$ a base do espaço tangente T_pM . Desta forma, um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser escrito em coordenadas como

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} =: X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde utilizaremos também a **notação de Einstein** que omite o somatório quando o índice da soma aparece tanto na parte superior quanto na inferior dos termos. Desta forma, o campo aplicado numa função suave $f \in C^\infty(M)$ pode ser escrita como

$$X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Observe agora que para quaisquer dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e funções suaves $f, g \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X(Y(fg)) \\ &= X(fY(g) + gY(f)) \\ &= X(f)Y(g) + fXY(g) + X(g)Y(f) + gXY(f), \end{aligned}$$

o que nos mostra que o produto de dois campos de vetores não é um campo de vetores, devido aos termos cruzados da forma $X(f)Y(g)$. Isso nos motiva a definir uma operação entre dois campos de vetores que nos forneça um novo campo. Desta forma, definimos o **colchete de Lie** dos campos X e Y como um novo campo em M dado por

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.1)$$

Pense agora num sistema físico composto por uma partícula num campo de vetores que corresponde a velocidade instantânea em cada ponto da trajetória. Gostaríamos de descrever a evolução do sistema em função do ponto inicial de onde a partícula foi solta neste campo. Desta forma, definimos o **fluxo de um campo** X como uma família de mapas $\{\varphi : U \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M \text{ suaves}\}$ com U aberto, tal que o mapa $t \mapsto \varphi_t(p)$ é a curva integral para cada ponto $p \in M$ com $\varphi_0(p) = p$ e que satisfaz $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. Se pudermos definir o fluxo em toda a reta real, $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, dizemos que ele é **completo**.

Exemplo 1.10. O cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ com o campo $X(p) = \mathbf{e}_3$ para todo ponto $p \in M$, tem como fluxo completo associado $\varphi_t(p) = p + t\mathbf{e}_3$ com $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.11. Um exemplo simples é o campo de vetores no plano \mathbb{R}^2 dada por $X(x, y) = (-y, x)$. Tomando um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ com $x_0 \neq 0$ e definindo o ângulo inicial $\theta_0 := \arctan(y_0/x_0)$, temos que o fluxo completo é dado por

$$\varphi_t(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$$

onde a trajetória é uma circunferência centrada na origem de raio $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

Além dos espaços tangentes, podemos definir os espaços cotangente que correspondem ao dual do espaço tangente, isto é, transformações lineares da forma $T_p M \rightarrow \mathbb{R}$.

Considerando uma variedade suave M , definimos o **espaço cotangente** no ponto $p \in M$ como

$$T_p^* M := \{f : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}$$

onde os seus elementos são chamados de **covetores**. O **fibrado cotangente** é dada pela coleção dos espaços cotangentes

$$T^* M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M.$$

Para um sistema de coordenadas locais (U, x^1, \dots, x^n) do ponto $p \in M$, definimos a base do espaço dual $T_p^* M$ como $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$, onde $dx^i|_p(\partial/\partial x^j|_p) = \delta_j^i$.

Observação 1.12. Em mecânica, podemos descrever o estado de um sistema apenas pela posição e velocidade do corpo em cada ponto, neste caso, temos a descrição do sistema nos fibrados tangente $(q, \dot{q}) \in TQ$. Outra forma de descrever o sistema, é pela posição e pelo momento $(q, p) \in T^*Q$. Uma das vantagens da formulação mecânica nos fibrados cotangentes, é que ideias e resultados podem ser estendidos a mecânica quântica através dos processos de quantização.

Lembrando que dizemos que uma função entre variedades suaves $f : M \rightarrow N$ é dita **suave**, se para qualquer ponto $p \in M$, existem vizinhanças coordenadas (U, φ) de p e $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ de $f(p)$ tal que o mapa $\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1} : U \cap f^{-1}(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ seja suave. Neste caso, definimos a **derivada** no ponto $p \in M$, como o mapa linear $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ definido por

$$T_p f(v) := \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0}$$

onde $c : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ é uma curva suave com $c(0) = p$ e $c'(0) = v \in T_p M$. Podemos ainda definir a derivada de ordem $k > 1$ como $T_p^k f := T(T_p^{k-1} f)$. Se a função f for invertível com f^{-1} de classe C^∞ , diremos que f é um **difeomorfismo**. Além disso, se para todo ponto $p \in M$ tivermos que $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ sobrejetora, então diremos que f é uma **submersão** e se for injetora em todo ponto p , diremos que f é uma **imersão**.

Exemplo 1.13. Um exemplo trivial de submersão, é a projeção do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 sobre o plano xy dado por $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Veremos agora como construir subvariedades diferenciáveis como conjuntos de nível através da regularidade da derivada. Os conceitos apresentados a seguir, generalizam a ideia se superfícies regulares da geometria diferencial em \mathbb{R}^3 .

Definição 1.14. Dizemos que $q \in N$ é um **valor regular** da função suave $f : M \rightarrow N$, se para todo ponto $p \in f^{-1}(\{q\})$ a derivada $T_p f : T_p M \rightarrow T_c N$ for sobrejetora.

Teorema 1.15 (Teorema do Valor Regular). Seja $f : M \rightarrow N$ uma função suave e $q \in N$ um valor regular, então o conjunto de nível

$$f^{-1}(\{q\}) = \{p \in M \mid f(p) = q\}$$

é uma subvariedade de M , com o espaço tangente $T_p f^{-1}(\{q\}) = \ker T_p f$.

Demonstração. Ver a Seção 3.5 de [2]. □

Exemplo 1.16. Considerando a função suave $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 1$ com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, temos que $T_p f = \nabla f(p) \neq 0$ para todo ponto $p \in f^{-1}(\{0\})$. Desta forma, 0 é um valor regular e $f^{-1}(\{0\}) = S^2$ é uma subvariedade de \mathbb{R}^3 .

1.2 Formas Diferenciais

As formas diferenciais nos permite definir localmente numa variedade suave um elemento de volume k -dimensional para qualquer k , no seu espaço tangente. Iniciamos lembrando de alguns conceitos básicos.

Considere um espaço vetorial V de dimensão finita, definimos o espaço vetorial $\bigwedge^k(V^*)$ dos **k-tensores alternados** como o conjunto das transformações k -lineares $f : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) f(v_1, \dots, v_k), \quad (1.2)$$

onde $\text{sgn} : S_k \rightarrow \{-1, 1\}$ é a função sinal da permutação, que é igual a 1 se a permutação é um produto de um número par de permutações e -1 caso contrário.

Exemplo 1.17. A função determinante $\det : \text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é um exemplo de um elemento de $\bigwedge^k(\mathbb{R}^k)$, pois

$$\det(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \det(v_1, \dots, v_k).$$

Lembrando que o determinante corresponde ao volume (com sinal) de um paralelepípedo k -dimensional de arestas v_1, \dots, v_k

Gostaríamos de poder transferir esta estrutura aos espaços tangente $T_p M$ de uma variedade suave M . Para isso, definimos uma **k-forma** ω em uma variedade suave M como uma aplicação suave ($\bigwedge^k(T^* M) \rightarrow M$ define um fibrado, e em particular, o espaço total admite uma estrutura de variedade diferenciável) que associa a cada ponto da variedade um k -tensor alternado

$$p \in M \mapsto \omega(p) \in \bigwedge^k(T_p^* M).$$

Denotaremos por $\Omega^k(M)$ o conjunto das k -formas em M .

Exemplo 1.18. As 0-formas são as funções suaves, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. As 1-formas corresponde as transformações lineares no espaço tangente, isto é, se $\omega \in \Omega^1(M)$, então para qualquer $p \in M$, temos $\omega(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Ou ainda, dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos pensar como $\omega(X) \in C^\infty(M)$.

Considere a função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos definir a 1-forma $df \in \Omega^1(M)$ por

$$df(X) := X(f)$$

com $X \in \mathfrak{X}(M)$. Considerando um sistema de coordenadas locais $\{x^i\}$ de um ponto p , vemos que $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ é uma base para $T_p^* M$. Assim, podemos escrever

$$df = \sum_i^n a_i dx^i.$$

Aplicando os elementos da base $\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n\}$ em df , obtemos que $a_i = \partial f/\partial x^i$ e portanto

$$df = \sum_i^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

O passo seguinte, é definir uma operação entre duas formas que nos forneça uma nova forma diferencial. Assim, dada uma k -forma α e uma l -forma β em M , definimos o **produto exterior** que nos fornece uma $(k+l)$ -forma $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(M)$ pela seguinte relação

$$(\alpha \wedge \beta)(p)(v_1, \dots, v_{k+l}) := \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \alpha(p)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(p)(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

onde $v_i \in T_p M$. Não é difícil verificar que de fato $\alpha \wedge \beta$ é anti-simétrico.

Exemplo 1.19. Considerando uma k -forma $\alpha \in \Omega^k(M)$, então

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \alpha)(p)(v_1, \dots, v_{2k}) &= \sum_{\sigma \in S_{2k}} \alpha(p)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \alpha(p)(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(2k)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{2k}} \alpha(p)(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(2k)}) \alpha(p)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= (\alpha \wedge \alpha)(v_{k+1}, \dots, v_{2k}, v_1, \dots, v_k) \\ &= (-1)^k (\alpha \wedge \alpha)(p)(v_1, \dots, v_{2k}). \end{aligned}$$

Portanto, se k for ímpar, temos $\alpha \wedge \alpha \equiv 0$.

Exemplo 1.20. Para $\alpha \in \Omega^2(M)$ e $\beta \in \Omega^1(M)$, o seu produto exterior $\alpha \wedge \beta$ num ponto $p \in M$ é

$$(\alpha \wedge \beta)(p)(v_1, v_2, v_3) = \alpha(p)(v_1, v_2) \beta(p)(v_3) - \alpha(p)(v_1, v_3) \beta(p)(v_2) + \alpha(p)(v_2, v_3) \beta(p)(v_1).$$

com $v_i \in T_p M$. Observe a semelhança da expressão acima com a do determinante das matrizes $Mat_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. De fato, considerando $M = \mathbb{R}^3$ com o espaço tangente $T_p \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$, se definirmos as formas $\alpha(p)(u, w) = u^2 w^3 - w^2 u^3$ e $\beta(p)(u) = u^1$ com $u = (u^1, u^2, u^3)$ e $w = (w^1, w^2, w^3)$, então

$$(\alpha \wedge \beta)(p)(v_1, v_2, v_3) = \det(v_1, v_2, v_3),$$

que corresponde ao volume do paralelepípedo de arestas v_1, v_2 e v_3 . A definição de produto exterior, é feita desta forma para que coincida com as noções de área e de volume usuais.

Exemplo 1.21. Dado um sistemas de coordenadas locais $\{x^i\}$ do ponto $p \in M$, o produto exterior entre as 1-formas $dx^i \in \Omega^1(M)$ é

$$dx^i \wedge dx^j = dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i.$$

Lembrando que calculamos o produto exterior acima nos vetores $X(p), Y(p) \in T_p M$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (dx^i \wedge dx^j)|_p(X(p), Y(p)) &= (dx^i \otimes dx^j)|_p(X(p), Y(p)) - (dx^j \otimes dx^i)|_p(X(p), Y(p)) \\ &= dx^i|_p(X(p))dx^j|_p(Y(p)) - dx^j|_p(Y(p))dx^i|_p(X(p)) \\ &= X^i(p)Y^j(p) - Y^i(p)X^j(p). \end{aligned}$$

Exemplo 1.22. Dada um sistema de coordenadas locais (U, x^1, \dots, x^n) do ponto $p \in M$, o conjunto

$$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$$

é uma base para o espaço $\Omega^k(U)$. Desta forma, para qualquer k -forma $\omega \in \Omega^k(M)$, existe uma família de funções suaves $\{\omega_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$, onde podemos escrever

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

na vizinhança coordenada U .

Dada uma variedade suave M , a **derivada exterior** de uma k -forma é uma aplicação linear que nos fornece uma $(k+1)$ -forma

$$\mathbf{d} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

que satisfaz:

1. $\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathbf{d}\beta$, para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$;
2. $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$;
3. para $U \subseteq M$ aberto, então $\mathbf{d}(\alpha|_U) = \mathbf{d}\alpha|_U$.

Observação 1.23. Estas condições que desejamos que a derivada exterior satisfaça, são generalizações de conceitos de derivada de funções reais. Por exemplo, o item (2) esta relacionada com o fato que a derivada parciais de segunda ordem de funções suaves comutam

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = 0.$$

Já o item (1) é uma generalização da regra de Leibniz para funções, $\mathbf{d}(fg) = (\mathbf{d}f)g + f(\mathbf{d}g)$.

Teorema 1.24. Existe uma única aplicação $\mathbf{d} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ que satisfaz as três propriedades anteriores.

Demonstração. Ver a Seção 6.4 de [2]. □

Exemplo 1.25. Considerando as formas no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , temos que a derivada exterior coincide com as operações usuais:

- *gradiente* : $\mathbf{d} : \Omega^0(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^3)$
- *rotacional* : $\mathbf{d} : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^3)$
- *divergente* : $\mathbf{d} : \Omega^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^3(\mathbb{R}^3)$

Dizemos que uma k -forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ é **exata**, se existe $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\alpha = \mathbf{d}\beta$. Se $\mathbf{d}\alpha = 0$, dizemos que α é uma **k-forma fechada**.

Exemplo 1.26. As 1-formas coordenadas $\{dx^i\}$ são fechadas, $\mathbf{d}(dx^i) = 0$.

Observação 1.27.

- Pela definição da derivada exterior, temos que toda forma exata é fechada;
- Veremos mais adiante que toda forma fechada é localmente exata (Lema de Poincaré).

Exemplo 1.28. Para uma função suave $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3)$, podemos escrever a sua derivada exterior em coordenadas como

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

e a 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ como

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

onde $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves. Lembrando que $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$, temos a derivada exterior da primeira componente

$$\mathbf{d}(Pdx) = \mathbf{d}P \wedge dx + P \wedge \mathbf{d}dx = -\frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy - \frac{\partial P}{\partial z}dx \wedge dz.$$

Calculando de forma análoga as derivadas exteriores $\mathbf{d}(Qdy)$ e $\mathbf{d}(Rdz)$, obtemos

$$\mathbf{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz.$$

Observe a equivalência da relação da derivada exterior $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$ com a do cálculo vetorial $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$.

O próximo resultado nos fornece uma fórmula útil no cálculo da derivada exterior de formas diferenciais, que aplicaremos no Exemplo 2.58.

Proposição 1.29. Para uma k -forma $\alpha \in \Omega^k(M)$ e campos de vetores $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}\alpha)(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \alpha(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Demonstração. Consultar o Capítulo 4 de [22]. □

Considere agora um mapa suave entre variedades $\psi : M \rightarrow N$ e uma k -forma α em N . Podemos pelo **pull-back de formas** $\psi^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ definir uma k -forma $\psi^*\alpha$ em M pela relação

$$(\psi^*\alpha)(p)(v_1, \dots, v_k) := \alpha(\psi(p))(T_p\psi(v_1), \dots, T_p\psi(v_k)).$$

Se ψ for um difeomorfismo, então dada uma k -forma em M , podemos definir uma k -forma em N pelo **pushforward** $\psi_* := (\psi^{-1})^*$.

Observação 1.30. Também podemos definir o pull-back de campos de vetores $\psi^* : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ como

$$(\psi^*Y)(p) = T_{\psi(p)}\psi^{-1}(Y(\psi(p))) \in T_pM.$$

Exemplo 1.31. Considere o mapa suave $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\psi(x, y, z) = (xe^y, y)$ e a 2-forma $\omega = udu \wedge dv$ em \mathbb{R}^2 . Então,

$$\begin{aligned} \psi^*\omega &= (x + e^y)d(xe^y) \wedge d(y) \\ &= (x + e^y) \left[\frac{\partial(xe^y)}{\partial x} dx + \frac{\partial(xe^y)}{\partial y} dy \right] \wedge dy \\ &= (xe^y + e^{2y})dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Proposição 1.32. Se $\psi : M \rightarrow N$ é uma submersão sobrejetiva, então o pull-back de formas $\psi^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ é um homomorfismo de álgebras injetivo.

Demonstração. Para provarmos que o pull-back é injetivo, basta verificarmos que $\ker \psi^* = \{0\}$. Considere a k -forma $\omega \in \Omega^k(N)$ tal que $\psi^*\omega = 0 \in \Omega^k(M)$, o ponto $q \in N$ e os vetores $v_1, \dots, v_k \in T_qN$. Como ψ é sobrejetora, então existe $p \in M$ tal que $\psi(p) = q$. Como ψ é uma submersão em p , existem vetores $w_1, \dots, w_k \in T_pM$ tal que o pushforward $(\psi_*)_q(w_i) = v_i$ para cada $i = 1, \dots, k$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= (\psi^*\omega)(p)(w_1, \dots, w_k) \\ &= \omega(\psi(p))(\psi_*w_1, \dots, \psi_*w_k) \\ &= \omega(q)(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

para todo ponto $q \in N$ e vetores $v_1, \dots, v_k \in T_qN$. Portanto $\omega \equiv 0$ e o pull-back ψ^* é injetivo. \square

Proposição 1.33. Seja $\psi : N \rightarrow M$ um difeomorfismo entre variedades suaves e uma k -forma $\omega \in \Omega^k(M)$, então

$$\mathbf{d}(\psi^*\omega) = \psi^*(\mathbf{d}\omega),$$

isto é, o pull-back comuta com a derivada exterior.

Demonstração. Tome (U, φ) uma carta local do ponto $p \in M$ e $V = \psi^{-1}(U) \subset N$. Escrevendo a k -forma ω em coordenadas

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

com $\omega_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ suave e aplicando o pull-back

$$\psi^*\omega|_U = (\psi^*\omega_{i_1 \dots i_k}|_U)\psi^*dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \psi^*dx^{i_k}.$$

Observe ainda que se $\alpha \in \Omega^0(M)$, então $\mathbf{d}(\psi^*\alpha) = \psi^*(\mathbf{d}\alpha)$ e como $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\psi^*\omega|_U) &= \mathbf{d}(\psi^*\omega_{i_1 \dots i_k})|_V \wedge \psi^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \psi^* dx^{i_k} \\ &= \psi^*(\mathbf{d}\omega_{i_1 \dots i_k})|_V \wedge \psi^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \psi^* dx^{i_k} \\ &= \psi^*(\mathbf{d}\omega)|_V \\ &= \psi^*(\mathbf{d}\omega|_U). \end{aligned}$$

□

Para finalizar esta seção, apresentaremos o Teorema de Stokes para integração de formas diferenciais em variedades suaves. Para isso, lembre que uma **orientação** para uma n -variedade suave M , é uma classe de equivalência de um elemento $\omega \in \Omega^n(M)$ que não se anula, onde $\omega \sim \omega'$ se existe uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\omega = f\omega'$. Se uma variedade admite uma orientação, dizemos que ela é **orientável**.

Observação 1.34. *Se M for uma variedade conexa e orientável, então existe exatamente duas orientações possíveis.*

Exemplo 1.35. *O espaço euclidiano \mathbb{R}^n admite uma orientação canônica dada em coordenadas por $[dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n]$. A outra possível orientação é $-[dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n]$.*

Teorema 1.36 (Stokes). *Seja M uma n -variedade orientada, compacta e com fronteira ∂M . Se $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$, então*

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_M \mathbf{d}\alpha.$$

Demonstração. Ver a Seção 2.6 de [1].

□

1.3 Derivadas de Lie

As derivadas de Lie generalizam o conceito de derivadas usual. Por exemplo, para calcularmos a derivada de uma função suave f num campo X , basta determinarmos $X(f)$. Para estruturas mais gerais, como formas diferenciais e campo de vetores, essa noção de derivada não faria sentido. Mas neste caso, podemos utilizar os fluxos do campo para determinar a sua variação.

Considerando uma variedade suave M , a **derivada de Lie** de uma k -forma em relação ao campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dada pelo mapa linear $L_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ definido por

$$L_X \alpha := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \alpha,$$

onde $\varphi_t : M \rightarrow M$ é o fluxo do campo X .

Exemplo 1.37. *Vamos calcular a derivada de Lie da função suave $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ em relação a um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Considerando φ_t o fluxo do campo X , então para um ponto $p \in M$, temos a derivada de Lie*

$$L_X f(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* f)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\varphi_t(p)) = T_p f(X(p)) = X(f)(p).$$

Em particular, para o espaço euclidiano $M = \mathbb{R}^n$ e o campo constante $X \equiv \mathbf{e}_i$, temos que a derivada de Lie corresponde a derivada parcial

$$L_X f(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Observe ainda que $\mathbf{d}L_X f = L_X \mathbf{d}f$. De fato, basta derivar em $t = 0$ a relação $\mathbf{d}(\varphi_t^* f) = \varphi_t^*(\mathbf{d}f)$ obtida na Proposição 1.33.

Exemplo 1.38. Considere o campo de vetores $X(x, y) = (x, y)$ em \mathbb{R}^2 com o fluxo $\varphi_t(x, y) = (e^t x, e^t y)$ e a 1-forma $\alpha = y dx$. Observe que

$$\varphi_t^* dx = \mathbf{d}(x \circ \varphi_t) = \frac{\partial(x \circ \varphi_t)}{\partial x} dx + \frac{\partial(x \circ \varphi_t)}{\partial y} dy = e^t dx + 0 dy = e^t dx,$$

logo o pull-back da 1-forma é

$$(\varphi_t^* \alpha)(x, y) = (e^t y) \varphi_t^* dx = e^{2t} y dx.$$

Com este resultado, obtemos a derivada de Lie de α em relação ao campo X

$$L_X \alpha = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \alpha = 2y dx.$$

Proposição 1.39. Seja M uma variedade e as formas $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $\beta \in \Omega^l(M)$, então a derivada de Lie em relação ao campo X se distribui pelo produto exterior

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X \beta).$$

Demonstração. Considere φ_t o fluxo do campo X e I um intervalo contendo o zero. Definimos a função $\psi : I \times I \rightarrow \Omega^{k+l}(M)$ por $\psi(t, s) = \varphi_t^* \alpha \wedge \varphi_s^* \beta$ e aplicação diagonal $\lambda : I \rightarrow I \times I$ por $\lambda(t) = (t, t)$. Como $\varphi_t^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi_t^* \alpha \wedge \varphi_t^* \beta$, segue da definição de derivada de Lie que

$$\begin{aligned} L_X(\alpha \wedge \beta) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\psi \circ \lambda)(t) = T_{(0,0)} \psi \cdot \lambda'(0) = T_{(0,0)} \psi(1, 0) + T_{(0,0)} \psi(0, 1) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi(t, 0) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi(0, t) \\ &= (L_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X \beta). \end{aligned}$$

□

Muitas vezes é difícil determinar explicitamente o fluxo associado a um determinado campo de vetores. A Fórmula Mágica de Cartan, nos permite calcular a derivada de Lie apenas conhecendo o campo e a forma. Mas antes disso, lembremos que o **produto interior** é o mapa linear

$$i_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

definido por

$$(i_X \alpha)(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \alpha(p)(X(p), v_1, \dots, v_{k-1}) \quad \text{com } p \in M \quad \text{e } v_i \in T_p M.$$

Teorema 1.40 (Fórmula Mágica de Cartan). *Seja M uma variedade suave e ω uma k -forma em M , então a derivada de Lie em relação ao campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz*

$$L_X \alpha = i_X \mathbf{d}\alpha + \mathbf{d}i_X \alpha.$$

Demonstração. Faremos indução sobre a ordem k . Observe que para $k = 0$ a relação é satisfeita, pois $L_X \alpha = i_X \mathbf{d}\alpha$. Suponha agora que seja verdade para k . Podemos escrever uma $k + 1$ forma como $\alpha = \sum_i \mathbf{d}f_i \wedge \beta_i$ onde $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis e β_i são k -formas em M . Então basta provarmos a relação para $\mathbf{d}f \wedge \beta$ com $\beta \in \Omega^k(M)$. Pela Proposição 1.39, a derivada de Lie satisfaz $L_X(\mathbf{d}f \wedge \beta) = L_X \mathbf{d}f \wedge \beta + \mathbf{d}f \wedge L_X \beta$ e pelo Exemplo 1.37 temos

$$\begin{aligned} i_X \mathbf{d}(\mathbf{d}f \wedge \beta) + \mathbf{d}i_X(\mathbf{d}f \wedge \beta) &= -i_X(\mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}\beta) + \mathbf{d}(i_X \mathbf{d}f \wedge \beta - \mathbf{d}f \wedge i_X \beta) \\ &= \mathbf{d}f \wedge L_X \beta + \mathbf{d}L_X f \wedge \beta \\ &= \mathbf{d}f \wedge L_X \beta + L_X \mathbf{d}f \wedge \beta \\ &= L_X(\mathbf{d}f \wedge \beta). \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula também vale para $k + 1$ e desta forma, podemos concluir por indução que vale para todo natural k . \square

Exemplo 1.41. *Vamos verificar a validade da Fórmula Mágica de Cartan acima para o campo $X = (x, y)$ e a 1-forma $\alpha = ydx$ do Exemplo 1.38.*

$$i_X \mathbf{d}\alpha = i_X(dy \wedge dx) = ydx - xdy \quad e \quad \mathbf{d}i_X \alpha = \mathbf{d}(xy) = ydx + xdy.$$

Pela Fórmula Mágica de Cartan

$$L_X \alpha = i_X \mathbf{d}\alpha + \mathbf{d}i_X \alpha = 2ydx$$

que coincide com o resultado obtido no Exemplo 1.38.

Teorema 1.42 (Teorema da Derivada de Lie). *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores com fluxo φ_t e $\alpha \in \Omega^k(M)$, então*

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha = \varphi_t^* L_X \alpha.$$

Demonstração. Como o pull-back dos fluxos do campo X comutam

$$\varphi_t^* \circ \varphi_s^* = (\varphi_t \circ \varphi_s)^* = \varphi_{t+s}^* = \varphi_s^* \circ \varphi_t^*,$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_{t+s}^* \alpha = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_t^* (\varphi_s^* \alpha) = \varphi_t^* L_X \alpha.$$

\square

Corolário 1.43 (Lema de Poincaré). *Seja $\omega \in \Omega^k(M)$ fechada, então para cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança aberta U de p tal que $\omega|_U \in \Omega^k(U)$ é exata.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos demonstrar para uma bola aberta $B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$. Considere a família de funções suaves $\{\psi_t : B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R} \mid \psi_t(u) = tu\}_{t>0}$ que tem como campo

$$X_{\psi_t}(u) = \frac{u}{t}.$$

Como ω é fechada, segue do Teorema da Derivada de Lie (Teorema 1.42) e da Fórmula Mágica de Cartan (Teorema 1.40) que

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^*L_{X_t}\omega = \mathbf{d}(\psi_t^*i_{X_{\psi_t}}\omega).$$

Portanto, tomando $0 < t_0 \leq 1$ e integrando a relação acima em relação a t

$$\omega - \psi_{t_0}^*\omega = \psi_1^*\omega - \psi_{t_0}^*\omega = \mathbf{d} \int_{t_0}^1 \psi_t^*i_{X_{\psi_t}}\omega dt$$

e fazendo $t_0 \rightarrow 0$ na expressão acima, obtemos

$$\omega = \mathbf{d} \int_0^1 \psi_t^*i_{X_{\psi_t}}\omega dt.$$

O que demonstra que ω é localmente exata. \square

Observação 1.44. *O resultado acima generaliza o seguinte resultado para espaços vetoriais euclidianos: se $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ for uma função suave tal que o rotacional $(\text{rot } F)(\mathbf{x}) = 0$, então existe uma vizinhança U de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e uma função suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F|_U = \text{grad } f$.*

Lema 1.45. *Seja a 1-forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ e os campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então a derivada exterior da 1-forma satisfaz*

$$(\mathbf{d}\alpha)(X, Y) = X[\alpha(Y)] - Y[\alpha(X)] - \alpha([X, Y]).$$

Demonstração. Considerando um sistema de coordenadas locais (U, x^1, \dots, x^n) , podemos escrever a 1-forma como $\alpha = \sum a_i dx^i$. Pela \mathbb{R} -linearidade da 1-forma α , basta provarmos que a relação é verdadeira para um $\alpha = f\mathbf{d}g$ com $f, g \in C^\infty(U)$. Usando o fato que $\mathbf{d}\alpha = \mathbf{d}(f\mathbf{d}g) = \mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}g$, podemos calcular cada componente da relação acima

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\alpha(X, Y) &= \mathbf{d}f(X)\mathbf{d}g(Y) - \mathbf{d}f(Y)\mathbf{d}g(X) = (Xf)(Yg) - (Yf)(Xg), \\ X\alpha(Y) &= X(f\mathbf{d}g(Y)) = X(fYg) = (Xf)(Yg) + fXYg, \\ Y\alpha(X) &= Y(f\mathbf{d}g(X)) = Y(fXg) = (Yf)(Xg) + fYXg, \\ \alpha([X, Y]) &= f\mathbf{d}g([X, Y]) = f(XY - YX)g. \end{aligned}$$

Basta agora combinarmos estas relações para obtermos a expressão desejada. \square

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, definimos a derivada de Lie de campos de vetores $L_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ como

$$L_X Y := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* Y,$$

onde φ_t é o fluxo do campo X . Vamos verificar que esta definição coincide com a definição do colchete de Lie de campos de vetores (equação 1.1).

Proposição 1.46. *Para quaisquer dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$L_X Y = [X, Y].$$

Demonstração. Considerando φ_t o fluxo do campo X e uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, então

$$\varphi_t^*(Y)(f \circ \varphi_t) = Y(f) \circ \varphi_t.$$

Observe agora que podemos escrever

$$\frac{\varphi_t^*(Y)(f) - Y(f)}{t} = \underbrace{\frac{\varphi_t^*(Y)(f) - \varphi_t^*(Y(f \circ \varphi_t))}{t}}_{\alpha_t} + \underbrace{\frac{Y(f) \circ \varphi_t - Y(f)}{t}}_{\beta_t}.$$

Pelo Exemplo 1.37 temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \beta_t = L_X(Y(f)) = XY(f)$$

e também

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_t = \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_t^* Y) \left(\frac{f - f \circ \varphi_t}{t} \right) = Y(-L_X f) = -YX(f).$$

Combinando as duas equações anteriores, obtemos a relação desejada. \square

Proposição 1.47. *O pull-back se distribui pelo colchete de Lie, isto é, dado um difeomorfismo $\psi : M \rightarrow M$ e dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\psi^*[X, Y] = [\psi^*X, \psi^*Y].$$

Demonstração. Seja φ_t o fluxo do campo de vetores X , podemos escrever o fluxo do campo ψ^*X como $\varphi_t = \psi^{-1} \circ \varphi_t \circ \psi$. Desta forma, os pull-back satisfazem

$$\varphi_t^*(\psi^*Y) = \psi^*(\varphi_t)^*Y.$$

Calculando o colchete de Lie

$$[\psi^*X, \psi^*Y] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t^*(\psi^*Y) = \psi^* \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t^*Y = \psi^*[X, Y],$$

que corresponde a relação desejada. \square

Proposição 1.48. *Considere dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ que **comutam**, isto é $[X, Y] = 0$. Supondo ainda que os respectivos fluxos φ_t^X e φ_s^Y sejam completos, então os fluxos comutam, $\varphi_t^X \circ \varphi_s^Y = \varphi_s^Y \circ \varphi_t^X$.*

Demonstração. Segue do Teorema da Derivada de Lie (Teorema 1.42) que

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^X)^*Y = (\varphi_t^X)^*[X, Y] = 0.$$

Logo $(\varphi_t^X)^*Y$ é constante e portanto $(\varphi_t^X)^*Y = Y$ para todo t . Observe ainda que podemos escrever

$$Y = (\varphi_t^X)^*Y = \frac{d}{dt} \varphi_{-t}^X \circ \varphi_s^Y \circ \varphi_t^X.$$

Segue da unicidade dos fluxos que $\varphi_s^Y = \varphi_{-t}^X \circ \varphi_s^Y \circ \varphi_t^X$, o que conclui a demonstração. \square

1.4 Álgebras e Grupos de Lie

Uma **álgebra de Lie** \mathfrak{g} , é um espaço vetorial com uma operação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ chamada de **colchete de Lie** que é:

1. anti-simétrica, isto é, $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$;
2. satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Denotaremos a álgebra de Lie como $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$.

Exemplo 1.49. O espaço de campo de vetores $\mathfrak{X}(M)$ com o colchete de Lie $[X, Y] = XY - YX$ que foi definido na equação (1.1), forma uma álgebra de Lie de dimensão infinita.

Exemplo 1.50. O espaço vetorial euclidiano \mathbb{R}^3 é uma álgebra de Lie com o colchete de Lie dado pelo produto vetorial

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] := \mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad \text{com} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Exemplo 1.51. O espaço das matrizes quadradas reais $Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Lie, com o colchete de Lie dado pelo comutador

$$[A, B] := AB - BA \quad \text{com} \quad A, B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

Muitas vezes estamos interessados na relação entre duas álgebras de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ e $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}})$. Assim, dizemos que o mapa $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um **morfismo de álgebras de Lie** se para todo $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ tivermos

$$\rho([\xi, \eta]_{\mathfrak{g}}) = [\rho(\xi), \rho(\eta)]_{\mathfrak{h}}.$$

Se além disso ρ for bijetiva, então dizemos que ela é um **isomorfismo de álgebras de Lie** e escreveremos $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}$.

Exemplo 1.52. O espaço euclidiano \mathbb{R}^3 e a álgebra de Lie das matrizes anti-simétricas $\mathfrak{so}(3) = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A^T + A = 0\}$ admitem o seguinte isomorfismo de álgebras de Lie

$$\widehat{\varphi} : (\mathbb{R}^3, \times) \rightarrow (\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$$

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \mapsto \widehat{\mathbf{x}} := \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}$$

que pode ser visto com mais detalhes no Anexo A.

O próximo exemplo ilustra a álgebra de Lie $\mathfrak{o}(3, 1)$ que aparece no início do estudo do Problema de Kepler (Seção 4.3).

Exemplo 1.53. Definindo a álgebra de Lie (ver o texto [10])

$$\mathfrak{o}(3, 1) := \left\{ (A, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & 0 \end{bmatrix} \mid A \in \mathfrak{o}(3) \text{ e } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset Mat_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

com o colchete de Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{o}(3,1)}$ dada pelo o comutador de matrizes. Pode-se provar que este colchete satisfaz

$$\begin{aligned} [(A_1, 0), (A_2, 0)]_{\mathfrak{o}(3,1)} &= ([A_1, A_2]_{\mathfrak{o}(3)}, 0), \\ [(0, \mathbf{b}_1), (0, \mathbf{b}_2)]_{\mathfrak{o}(3,1)} &= (-[\widehat{\mathbf{b}}_1, \widehat{\mathbf{b}}_2]_{\mathfrak{o}(3)}, 0), \\ [(A_1, 0), (0, \mathbf{b}_2)]_{\mathfrak{o}(3,1)} &= (0, \widehat{\varphi}^{-1}(A) \times \mathbf{b}_2). \end{aligned}$$

Veremos agora os **grupos de Lie**, que são variedades suaves de dimensão finita que admitem uma estrutura de grupos, onde os mapas de multiplicação e inversão são suaves

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G & \text{e} & \quad \text{}^{-1} : G \rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh & & \quad g \mapsto g^{-1}. \end{aligned}$$

A importância de estudarmos grupos de Lie está relacionada a seu papel como conjuntos de transformações de simetria. Veremos que a multiplicação por um elemento induz um difeomorfismo no próprio grupo e que cada ponto do grupo de Lie se comporta localmente como uma vizinhança da identidade do grupo, onde o espaço tangente na identidade admite uma estrutura de álgebra de Lie.

Exemplo 1.54. Considere a função determinante $\det : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua e o **grupo linear** das matrizes invertíveis $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$. Como $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$, segue que $GL(n, \mathbb{R})$ é uma variedade suave. Pode-se provar ainda que o produto de matrizes e a inversão são funções suaves.

Dado um grupo de Lie G , definimos as aplicações $L, R : G \times G \rightarrow G$ por

$$L_g(h) = gh \quad \text{translação pela esquerda,} \quad (1.3)$$

$$R_g(h) = hg \quad \text{translação pela direita.} \quad (1.4)$$

Dizemos que $X \in \mathfrak{X}(G)$ é um campo **invariante a esquerda** se $(L_g)_*X = X$ para todo $g \in G$, isto é,

$$T_h L_g X(h) = X(gh) \quad \text{para todo } g, h \in G.$$

Denotaremos por $\mathfrak{X}_L(G)$ o conjunto dos campos invariantes pela esquerda em G . Segue da Proposição 1.47 que campos invariantes pela esquerda são fechados pelo colchetes de Lie

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y] \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}_L(G).$$

Lema 1.55. O espaço vetorial dos campos invariantes pela esquerda $\mathfrak{X}_L(G)$ é isomorfo ao espaço tangente $T_e G$.

Demonstração. Definimos os mapas $\psi_1 : \mathfrak{X}_L(G) \rightarrow T_e G$ e $\psi_2 : T_e G \rightarrow \mathfrak{X}_L(G)$ como $\psi_1(X) = X(e)$ e $\psi_2(\xi) = X_\xi$ tal que $X_\xi(g) = T_e L_g \xi$. Observe que $(\psi_1 \circ \psi_2)(\xi) = \psi_1(X_\xi) = \xi$ e $(\psi_2 \circ \psi_1)(X) = \psi_2(X(e)) = X$, portanto $\psi_1 \circ \psi_2 = \text{id}_{T_e G}$ e $\psi_2 \circ \psi_1 = \text{id}_{\mathfrak{X}_L(G)}$ e assim obtemos o isomorfismo entre os espaços. \square

O lema anterior nos diz que para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ existe um único campo invariante pela esquerda $X_\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$. Como o colchete de Lie também é fechado em relação aos campos invariantes pela esquerda, podemos definir a álgebra de Lie $(\mathfrak{g} := T_e G, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ com

$$[\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} := [X_\xi, X_\eta](e)$$

para quaisquer $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.56. *O Grupo de Lorentz definido por*

$$O(3, 1) := \{A \in GL(4, \mathbb{R}) \mid A^T \eta A = \eta \text{ para todo } \eta \in \mathbb{R}^4\}$$

é um grupo de Lie com álgebra de Lie dada no Exemplo 1.53.

Veremos agora como transferir as propriedades locais da álgebra de Lie \mathfrak{g} para o grupo de Lie G através do mapa exponencial.

Proposição 1.57. *Se X_ξ é um campo invariante pela esquerda, então ele é completo, isto é, o fluxo $\varphi_t^{X_\xi}$ associado ao campo está definido em todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Ver a Seção 4 de [1]. □

Pela Proposição 1.57, existe uma única curva integral $\gamma_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ associada ao campo X_ξ , tal que $\gamma_\xi(0) = e$ e $\gamma'_\xi(t) = X_\xi(\gamma_\xi(t))$ para todo t . A curva $\gamma_\xi(t)$ é chamada de **curva integral** associada ao campo X_ξ .

Proposição 1.58. *Se X_ξ um campo invariante pela esquerda e γ_ξ a curva integral completa visto acima, então para todo $t, s \in \mathbb{R}$ temos $\gamma_\xi(t + s) = \gamma_\xi(t)\gamma_\xi(s)$.*

Demonstração. Fixemos $s \in \mathbb{R}$ e definimos as curvas $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow G$ por $\gamma_1(t) = \gamma_\xi(s)\gamma_\xi(t) = L_{\gamma_\xi(s)}\gamma_\xi(t)$ e $\gamma_2(t) = \gamma_\xi(t + s)$. Observe que as duas curvas possuem a mesma condição inicial $\gamma_1(0) = \gamma_\xi(s) = \gamma_2(0)$ e γ_2 é a curva integral de X_ξ reparametrizada por uma translação de γ_ξ . Vamos verificar agora que γ_1 é também uma curva integral de X_ξ . De fato, como o campo X_ξ é invariante pela esquerda

$$\gamma'_1(t) = T_{\gamma_\xi(t)}L_{\gamma_\xi(s)}\gamma'_\xi(t) = T_{\gamma_\xi(t)}L_{\gamma_\xi(s)}X_\xi(\gamma_\xi(t)) = X_\xi(\gamma_\xi(s)\gamma_\xi(t)) = X_\xi(\gamma_1(t)).$$

Portanto γ_1 e γ_2 são curvas integrais de X_ξ . Pela unicidade da solução, segue que $\gamma_1 \equiv \gamma_2$. □

Observação 1.59. *Os dois últimos resultados nos diz que a curva $\gamma_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ é um subgrupo a 1-parâmetro, isto é, γ_ξ é um homomorfismo de grupos de classe C^∞ .*

Estes resultados nos permite definir o **mapa exponencial**

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ \xi &\mapsto \gamma_\xi(1) \end{aligned}$$

que em essência, transporta a estrutura da álgebra de Lie \mathfrak{g} desde o espaço tangente para todo grupo de Lie G .

Proposição 1.60. *O mapa exponencial definido acima satisfaz $\exp(t\xi) = \gamma_\xi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Considere a curva $c(s) = \gamma_\xi(ts)$, observe que ela satisfaz a condição inicial $c(0) = e$ e que

$$\frac{d}{ds}c(s) = tX_\xi(\gamma_\xi(ts)) = X_{t\xi}(\gamma_\xi(ts)).$$

Como a curva $\gamma_{t\xi}(s)$ também satisfaz a equação diferencial acima e $\gamma_{t\xi}(0) = e$, segue da unicidade que $\gamma_{t\xi}(s) = \gamma_\xi(ts)$ e portanto para $s = 1$ obtemos $\exp(t\xi) = \gamma_\xi(t)$. □

Exemplo 1.61. Dada uma matriz $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, definimos a curva $\gamma_A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$\gamma_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k,$$

que satisfaz $\gamma_A(0) = Id_n$ e $\gamma'_A(t) = \gamma_A(t)A$. Portanto γ_A é um grupo de 1-parâmetro e a exponencial é dada por

$$\exp(A) = \gamma_A(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Exemplo 1.62. Considere a curva $R(t)$ no **grupo especial ortogonal** $SO(n) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T A = A A^T = Id_n \text{ e } \det A = 1\}$, com condição inicial $R(0) = Id_n$. Derivando a relação $R(t)R(t)^T = Id_n$

$$0 = R'(0)R(0)^T + R(0)R'(0)^T = R'(0) + R'(0)^T$$

e portanto o espaço tangente $T_{Id_n}SO(n)$ é um subespaço vetorial das matrizes anti-simétricas. Por outro lado, se A é uma matriz anti-simétrica, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\exp(tA)(\exp tA)^T] &= \frac{d}{dt}[\exp(tA)(\exp tA^T)] \\ &= A \exp(tA)(\exp tA)^T + (\exp tA)A^T(\exp tA^T) \\ &= (\exp tA)(A + A^T)(\exp tA^T) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e portanto $\exp(tA)(\exp tA)^T$ é constante. Como $\exp(0A)(\exp 0A)^T = Id_n$ segue que

$$\exp(tA)(\exp tA)^T = Id_n.$$

Portanto, o espaço tangente $T_{Id_n}SO(n)$ corresponde exatamente ao espaço das matrizes anti-simétricas de ordem n . Isso mostra que a exponencial de matrizes leva a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n) := T_{Id_n}SO(n)$ em $SO(n)$.

1.5 Geometria Simplética

Apresentaremos de forma abstrata os conceitos básicos de geometria simplética que necessitaremos ao longo do texto. No próximo capítulo, quando estudarmos Sistemas Hamiltonianos, será apresentada uma justificativa para tais definições. Esta seção segue como referências principais os textos [8], [5] e [24].

1.5.1 Álgebra Linear Simplética

Definição 1.63. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, uma 2-forma $\omega \in \wedge^2(V^*)$ é dita **simplética** se é não-degenerada, isto é,

$$\omega(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in V \Rightarrow v = 0.$$

O par (V, ω) é chamado **espaço vetorial simplético**. Veremos mais a frente que a dimensão de V deve ser par para que se tenha esta estrutura.

Exemplo 1.64. O espaço vetorial euclidiano \mathbb{R}^{2n} com a forma $\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\omega_0(v, w) = v \cdot J_0 w$ onde

$$J_0 := \begin{bmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial simplético. A forma ω_0 é chamada de **forma canônica**.

Exemplo 1.65. Seja V um espaço vetorial qualquer e V^* o seu dual, podemos definir uma forma simplética ω_{\oplus} no espaço $V \oplus V^*$ como

$$\omega_{\oplus}((w, \mu), (v, \eta)) = \eta(w) - \mu(v),$$

onde $v, w \in V$ e $\eta, \mu \in V^*$. Este exemplo nos mostra que todo espaço vetorial da forma $V \oplus V^*$ admite uma forma simplética.

Definição 1.66. Sejam (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) dois espaços vetoriais simpléticos, uma aplicação linear $\psi : V_1 \rightarrow V_2$, é chamada de **simplética** se

$$\omega_1(v, w) = \omega_2(\psi(v), \psi(w)).$$

Se ψ for um isomorfismo, então ela é chamada de **simplectomorfismo**.

Proposição 1.67. Considerando um espaço vetorial simplético qualquer (V, ω) , o conjunto dos simplectomorfismos

$$Sp(V, \omega) = \{\psi \in GL(V) \mid \psi \text{ é simplético}\}$$

é um grupo e é chamado de **grupo simplético** de (V, ω) .

Demonstração. Segue diretamente da definição de simplectomorfismo. \square

Exemplo 1.68. Considerando o espaço vetorial simplético $(W = V \oplus V^*, \omega_{\oplus})$, então o isomorfismo de espaços vetoriais $T : V \rightarrow V$ induz um simplectomorfismo $T \oplus (T^{-1})^* : (W, \omega_{\oplus}) \rightarrow (W, \omega_{\oplus})$.

Exemplo 1.69. Considere o espaço vetorial simplético $V_1 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ do Exemplo 1.64 e o espaço $V_2 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_-)$ com a forma simplética

$$\omega_-(v, w) = v \cdot (-J_0)w \quad \text{com } v, w \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Então o mapa $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definido por

$$\psi(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n)$$

é um simplectomorfismo entre os espaços V_1 e V_2 .

De forma análoga aos espaços vetoriais com um produto interno, podemos definir uma noção de ortogonalidade através da forma simplética da seguinte forma:

Definição 1.70. Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético e $W \subseteq V$ um subespaço vetorial. Definimos o **ortogonal simplético** de W como subespaço

$$W^{\omega} := \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}.$$

Estas definições nos permitem classificar os subespaços especiais W da seguinte maneira:

1. **isotrópico** se $W \subseteq W^\omega$;
2. **coisotrópico** se $W^\omega \subseteq W$;
3. **Lagrangiano** se $W = W^\omega$;
4. **simplético** se $W \cap W^\omega = \{0\}$.

Proposição 1.71. *Se (V, ω) um espaço vetorial simplético e $W \subseteq V$ um subespaço vetorial, então:*

1. $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$;
2. $(W^\omega)^\omega = W$;
3. W é isotrópico se e somente se W^ω é coisotrópico;
4. W é simplético se e somente se $W \oplus W^\omega = V$.

Demonstração. Para demonstrarmos o item (1), definimos a aplicação linear

$$\begin{aligned} i_\omega : V &\rightarrow W^*v & (1.5) \\ v &\mapsto \omega(v, \cdot)|_W. \end{aligned}$$

Não é difícil observar que $\ker i_\omega = W^\omega$ e $i_\omega(V) \simeq W$. Segue do Teorema do Núcleo e Imagem a relação desejada

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}(i_\omega) + \dim \ker(i_\omega) = \dim W + \dim W^\omega.$$

Os demais itens seguem diretamente de (1) e os detalhes podem ser visto no Capítulo 2 da referência [24]. \square

Observação 1.72. *Segue da proposição anterior, que se W for um subespaço:*

- *Lagrangiano, então $2 \dim W = \dim V$;*
- *isotrópico, então $2 \dim W \leq \dim V$;*
- *coisotrópico então $2 \dim W^\omega \leq \dim V$.*

Exemplo 1.73. *Considere o espaço euclidiano \mathbb{R}^{2n} munido com a 2-forma canônica ω_0 . O subespaço $W = \{(q^1, \dots, q^k, 0, \dots, 0) \mid q^i \in \mathbb{R}\}$ é isotrópico se $k < n$, $W = \{(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_{k-n}, \dots, 0) \mid q^i \in \mathbb{R}\}$ é coisotrópico se $k > n$ e Lagrangiano se $k = n$.*

Exemplo 1.74. *Considerando dois espaços vetoriais simpléticos (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) , podemos definir uma forma simplética no produto $V_1 \times V_2$ por*

$$(\omega_1 \oplus (-\omega_2))((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = \omega_1(v_1, w_1) - \omega_2(v_2, w_2).$$

Se $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ é um isomorfismo, então ψ é um symplectomorfismo se e somente se o gráfico

$$\Gamma_\psi = \{(v, \psi(v)) \mid v \in V_1\} \subset V_1 \times V_2$$

for um subespaço Lagrangiano de $(V_1 \times V_2, \omega_1 \oplus (-\omega_2))$. Vamos verificar esta afirmação:

(\Rightarrow) Suponha que ψ seja um symplectomorfismo e considere um ponto qualquer $(v, w) \in \Gamma_\psi^\omega$. Assim, para $(v', \psi(v')) \in \Gamma_\psi$, temos

$$0 = (\omega_1 \oplus (-\omega_2))((v, w), (v', \psi(v'))) = \omega_1(v, v') - \omega_2(w, \psi(v')).$$

Como ψ é um symplectomorfismo, então $\psi(v) = w$ e obtemos $\Gamma_\psi^\omega \subseteq \Gamma_\psi$. Por outro lado, temos que

$$(\omega_1 \oplus (-\omega_2))((v, \psi(v)), (w, \psi(w))) = \omega_1(v, w) - \omega_2(\psi(v), \psi(w)) = 0$$

o que nos mostra que $\Gamma_\psi \subseteq \Gamma_\psi^\omega$. Concluindo portanto que Γ_ψ é um subespaço Lagrangiano.

(\Leftarrow) Supondo agora que o subespaço Γ_ψ seja Lagrangiano, então para quaisquer $v, w \in V_1$

$$0 = (\omega_1 \oplus (-\omega_2))((v, \psi(v)), (w, \psi(w))) = \omega_1(v, w) - \omega_2(\psi(v), \psi(w))$$

e portanto ψ é um symplectomorfismo.

Esse resultado pode ser generalizado para as variedades simpléticas que veremos mais a frente.

Proposição 1.75. *Todo espaço vetorial simplético (V, ω) de dimensão $2n$, admite uma base $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ que satisfaz*

$$\omega(e_i, e_j) = 0, \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \quad \omega(f_i, f_j) = 0.$$

A base definida acima é chamada de **base simplética**.

Demonstração. Escolhendo um vetor $e_1 \neq 0$, como ω é não-degenerada, existe um $f_1 \in V$ normalizado se necessário, tal que $\omega(e_1, f_1) = 1$. Seja W_1 o subespaço vetorial gerado por $\{e_1, f_1\}$, então $V = W_1 \oplus W_1^\omega$. Como W_1^ω é simplético, continuar o processo e obter uma decomposição

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$$

onde W_i é gerado por $\{e_i, f_i\}$ e que satisfazem $\omega(e_i, f_i) = 1$. Para $i < j$ temos que $W_j \subseteq W_i^\omega$ e portanto a base $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ satisfaz as condições da proposição. \square

Corolário 1.76. *Todo espaço vetorial simplético (V, ω) é de dimensão par. Além disso, existe um número natural n tal que (V, ω) é symplectomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

Corolário 1.77. *Seja V um espaço vetorial $2n$ -dimensional e $\omega \in \bigwedge^2(V^*)$. Então ω é não-degenerada se e somente se $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ é uma forma de volume.*

Demonstração. Supondo que ω seja degenerada, então existe um $v \neq 0$ tal que $\omega(v, w) = 0$ para todo $w \in V$. Tomando uma base $\{v = v_1, \dots, v_{2n}\}$ de V , então $\omega^n(v_1, \dots, v_{2n}) = 0$ e desta forma $\omega^n \equiv 0$. Suponha agora que ω seja não-degenerada. Então existe uma base simplética $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ tal que $\omega^n(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n) \neq 0$. \square

Corolário 1.78. *Qualquer espaço vetorial simplético (V, ω) admite um subespaço Lagrangiano.*

Demonstração. Admitindo $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ a base simplética de V , podemos tomar o subespaço gerado pelos vetores $\{e_1, f_2, e_3, f_4, \dots\}$ que é claramente Lagrangiano ou ainda o subespaço gerado por $\{e_1, \dots, e_n\}$. \square

Lema 1.79. *Toda base de um subespaço vetorial Lagrangiano pode ser estendida a uma base simplética de (V, ω) .*

Demonstração. Podemos considerar sem perda de generalidade que $V = \mathbb{R}^{2n}$. Considerando W o subespaço Lagrangiano com base $\{w_1, \dots, w_n\}$, temos que $W' = J_0W$ também é um subespaço Lagrangiano que pode ser identificado com o espaço dual W^* pelo isomorfismo $i_{\omega_0} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow (\mathbb{R}^{2n})^*$ definido em (1.5). Desta forma, podemos escolher $\{u_1, \dots, u_n\} \subset W'$ como a base dual de $\{w_1, \dots, w_n\}$ e portanto $\{w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_n\}$ é uma base simplética de V . \square

A seguir apresentamos a versão linear do Teorema de Redução simplética que veremos com detalhes no Capítulo 3.

Teorema 1.80 (Redução Linear). *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético e $W \subseteq V$ um subespaço vetorial coisotrópico, $W^\omega \subseteq W$. Então:*

1. *existe uma forma simplética ω' associada ao espaço quociente $V' = W/W^\omega$;*
2. *se $L \subseteq V$ é um subespaço Lagrangiano, então $L' = ((L \cap W) + W^\omega)/W^\omega$ é um subespaço Lagrangiano de V' .*

Demonstração. (1) De fato, seja $[w] = w + W^\omega \in V'$ com $w \in W$. Podemos definir uma estrutura simplética ω' em V' por

$$\omega'([w], [v]) = \omega(w, v)$$

Observe que ω' está bem definida, pois se $w', v' \in W^\omega$ temos

$$\omega(w + w', v + v') = \omega(w, v + v') + \omega(w', v + v') = \omega(w, v + v') = \omega(w, v) + \omega(w, v') = \omega(w, v)$$

e ω' é bilinear e anti-simétrica e portanto ω' é simplética.

(2) Iniciamos provando que $(L \cap W) + W^\omega$ é um subespaço Lagrangiano de V . De fato

$$\begin{aligned} ((L \cap W) + W^\omega)^\omega &= (L \cap W)^\omega \cap W \\ &= (L + W^\omega) + W^\omega \\ &= (L \cap W) + W^\omega. \end{aligned}$$

Considere agora $w \in W$ tal que $\omega'([w], [v]) = 0$ para quaisquer $[v] \in L'$. Então pela definição da forma reduzida, temos que $\omega(w, v) = 0$ para todo $v \in (L \cap W) + W^\omega$ e portanto $w \in (L \cap W) + W^\omega$. Logo $[w] \in L'$ o que prova que L' é Lagrangiana. \square

Veremos no Capítulo 3 uma versão do teorema de redução para variedades simpléticas e aplicaremos ao estudo de sistemas mecânicos.

1.5.2 Variedades Simpléticas

Seja M uma variedade suave, uma **variedade simplética** é um par (M, ω) tal que para cada ponto $p \in M$ o par $(T_p M, \omega_p)$ é um espaço vetorial simplético e ω é uma 2-forma fechada, $d\omega = 0$.

Observação 1.81. Se na definição de variedade simplética assumíssemos que a 2-forma simplética fosse exata, $\omega = d\alpha$, e se M fosse compacta sem bordo, com $\dim M = 2n$, então teríamos pelo Teorema de Stokes (Teorema 1.36) que

$$0 \neq \int_M \omega^n = \int_{\partial M} \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0,$$

o que seria uma contradição. Desta forma, não poderíamos ter uma variedade simplética compacta e exata.

Exemplo 1.82. A esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade simplética com a 2-forma simplética $\omega \in \Omega^2(S^2)$ definida por

$$\omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathbf{x} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

onde $\mathbf{x} \in S^2$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}S^2$.

Exemplo 1.83. Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas, podemos definir a variedade simplética produto $(M_1 \times M_2, \omega)$ com a 2-forma simplética

$$\omega = \pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_2,$$

onde $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ é a projeção canônica.

Em mecânica, o espaço de fases P onde descrevemos a evolução do sistema, são dados por fibrados cotangentes de uma variedade de configuração Q , isto é, $P = T^*Q$. Veremos que todo fibrado cotangente admite uma 2-forma simplética induzida pela 1-forma tautológica.

Definição 1.84. Seja Q uma variedade e $\pi : T^*Q \rightarrow Q$ a projeção canônica. Definimos a **1-forma tautológica** $\theta_0 \in \Omega^1(T^*Q)$ por

$$\theta_0(\alpha_q)v_{\alpha_q} := \langle \alpha_q, T\pi(v_{\alpha_q}) \rangle$$

onde $\alpha_q \in T_q^*Q$ e $v_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}(T^*Q)$.

Proposição 1.85. A 2-forma $\omega_0 \in \Omega^2(T^*Q)$ definida por $\omega_0 := -d\theta_0$ é simplética. Chamamos ω_0 de **2-forma canônica**.

Demonstração. Considere um sistema de coordenadas locais $(U, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ numa vizinhança do ponto $(q, p) \in T^*Q$. Desta forma, podemos escrever a 1-forma tautológica como

$$\theta_0(q, p) = \sum_{i=1}^n a_i(q, p) dq^i + b_i(q, p) dp_i,$$

com $a_i, b_i : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves. Para calcularmos os coeficientes da 1-forma acima, basta aplicarmos os vetores tangentes na definição de 1-forma tautológica

$$a_j(q, p) = \theta_0(q, p) \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \right) = \left\langle p, \frac{\partial}{\partial q^j} \right\rangle = p_j \quad \text{e} \quad b_j(q, p) = \theta_0(q, p) \left(\frac{\partial}{\partial p_j} \right) = \langle p, 0 \rangle = 0.$$

Portanto, a 1-forma tautológica pode ser escrita em coordenadas da seguinte maneira

$$\theta_0(q, p) = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$$

e a 2-forma

$$\omega_0(q, p) = -d\theta_0(q, p) = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$$

que claramente é simplética. \square

Dada duas variedades simpléticas quaisquer, uma pergunta interessante é: qual a relação entre as suas 2-formas simpléticas associadas? Veremos que sempre é possível relacionar com a 2-forma canônica de algum espaço euclidiano.

Definição 1.86. *Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) duas variedades simpléticas. Uma aplicação $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ suave é dita **simplética** se*

$$\psi^* \omega_2 = \omega_1,$$

isto é, se para todo ponto $p \in M_1$ e vetores $u, v \in T_p M_1$ tivermos

$$\omega_1(p)(u, v) = \omega_2(\psi(p))(T_p \psi \cdot u, T_p \psi \cdot v).$$

Além disso, se ψ for um difeomorfismo, dizemos que ψ é um **simplectomorfismo**.

Observação 1.87. *Seja θ_i a 1-forma canônica em T^*Q_i para $i = 1, 2$ e se existe um difeomorfismo $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $\psi^* \theta_2 = \theta_1$, então segue da Proposição 1.33 que*

$$\omega_1 = -d\theta_1 = -d(\psi^* \theta_2) = -\psi^* d\theta_2 = \psi^* \omega_2,$$

isto é, ψ é um simplectomorfismo.

A seguir, apresentamos alguns resultados que relacionam os fibrados cotangentes T^*Q e os simplectomorfismos induzidos pelos levantamentos cotangentes definidos a seguir.

Definição 1.88. *Seja $\psi : Q_1 \rightarrow Q_2$ um difeomorfismo entre variedades, definimos o **levantamento cotangente** $\psi^{T^*} : T^*Q_2 \rightarrow T^*Q_1$ pela relação*

$$\langle \psi^{T^*}(\alpha_p), v \rangle = (\psi^* \alpha)(q)(v),$$

onde $\psi(q) = p$, $\alpha \in \Omega^1(T^*Q_2)$ e $v \in T_q Q_1$.

Observação 1.89. *De forma análoga, poderíamos também definir o **levantamento tangente** $\psi^T : TQ \rightarrow TQ$ por $\psi^T(q, v_q) = (\psi(q), T\psi(v_q))$.*

Um critério útil para sabermos se uma aplicação é simplética é a seguinte proposição:

Proposição 1.90. *O difeomorfismo $\psi : T^*Q_2 \rightarrow T^*Q_1$ preserva a 1-forma tautológica, $\psi^* \theta_1 = \theta_2$ com $\theta_i \in \Omega^1(T^*Q_i)$ se e somente se ψ é o levantamento cotangente de algum difeomorfismo $\varphi : Q_1 \rightarrow Q_2$, isto é, $\psi = \varphi^{T^*}$.*

Demonstração. Considerando que $\psi = \varphi^{T^*}$, pela definição de 1-forma tautológica, temos $\theta_i(\alpha_{q_i}) = T^*\pi \cdot \alpha_{q_i}$ onde $\alpha_{q_i} \in T^*M_i$. Como $\pi \circ \varphi^{T^*} = \varphi \circ \pi$ e $(T_{\alpha_{q_2}}\varphi)^*\alpha_{q_1} = \alpha_{q_2}$ temos

$$\begin{aligned} (T_{\alpha_{q_2}}\varphi^{T^*})^*\theta_1(\alpha_{q_1}) &= (T_{\alpha_{q_2}}\varphi^{T^*})^*(T_{\alpha_{q_1}}\pi)^*\alpha_{q_1} \\ &= (T_{\alpha_{q_1}}(\pi \circ \varphi^{T^*}))^*\alpha_{q_1} \\ &= (T_{\alpha_{q_1}}\pi)^*(T_{\alpha_{q_2}}\varphi)^*\alpha_{q_1} \\ &= \theta_2(\alpha_{q_2}). \end{aligned}$$

Para demonstrar a volta, o leitor pode consultar a Seção 6.3 da referência [22]. \square

Corolário 1.91. *O levantamento cotangente $\psi^{T^*} : T^*Q_2 \rightarrow T^*Q_1$ é uma aplicação simplética*

$$\psi^{T^*}\omega_1 = \omega_2,$$

onde $\omega_i := -d\theta_i$ e $\theta_i \in \Omega^1(T^*Q_i)$ a 1-forma tautológica.

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 1.90 e da Observação 1.87. \square

Para finalizar esta seção, apresentamos um resultado que diz que em essência toda variedade simplética se comporta como algum espaço euclidiano com a 2-forma canônica, isto é, sempre existe um simplectomorfismo entre estas duas variedades.

Teorema 1.92 (Truque de Moser - Versão Local). *Seja M uma variedade suave e $Q \subset M$ uma subvariedade compacta. Se as 2-formas simpléticas $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$ satisfazem $\omega_0|_Q = \omega_1|_Q$, então existem vizinhanças U_0 e U_1 de Q em M e um difeomorfismo $\psi : U_0 \rightarrow U_1$ tal que $\psi|_Q = id_Q$ e $\psi^*\omega_1 = \omega_0$.*

Demonstração. Ver a Seção 7.3 de [8]. \square

Corolário 1.93 (Teorema de Darboux). *Seja (M, ω) uma variedade simplética e um ponto $p \in M$, então existe uma carta local (U, φ) centrada em p tal que*

$$\omega|_U = \varphi^*(\omega_0|_{\varphi(U)}).$$

Demonstração. Basta aplicar o Truque de Moser, considerando a subvariedade compacta Q como sendo apenas um ponto em M . \square

De forma análoga ao que vimos em espaço vetoriais simpléticos, podemos classificar as subvariedades especiais de uma variedade simplética (M, ω) . Dizemos que uma subvariedade $N \subset M$ é **simplética** (ou **isotrópica**, **coisotrópica**, **Lagrangiana**) se para todo $q \in N$, o espaço tangente T_qN é um subespaço vetorial simplético (ou isotrópica, coisotrópica, Lagrangiana) de $(T_qM, \omega(q))$.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de subvariedades que são apenas ilustrativas, eles não são relevantes para a compreensão dos demais capítulos.

Exemplo 1.94. *Considerando a variedade simplética dada pelo fibrado cotangente com a 2-forma simplética canônica (T^*Q, ω_0) e L uma subvariedade Lagrangiana de T^*Q , então $\omega_0|_L = 0$. Além disso, se $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ for suave, podemos definir a subvariedade Lagrangiana*

$$L_f = \{(q, df(q)) \mid q \in Q\} \subset T^*Q.$$

Neste caso, a 1-forma tautológica é $\theta_0|_{L_f} = df$ e portanto L_f é uma "subvariedade exata". Chamamos f de **função geradora**.

Exemplo 1.95. *Seja M uma variedade diferenciável, podemos ver M como uma subvariedade do fibrado cotangente T^*M através da identificação com a seção nula, $0_{T^*M} \simeq M$. Pela definição da 2-forma simplética canônica ω_0 visto acima, temos que M é uma subvariedade isotrópica. Como $2 \dim M = \dim T^*M$, temos que M é uma subvariedade Lagrangiana.*

*Fixando um ponto $p \in M$, o espaço cotangente T_p^*M é uma subvariedade de T^*M tal que $2 \dim T_p^*M = \dim T^*M$. Considerando a projeção canônica $\pi : T^*M \rightarrow M$, temos que $T\pi|_{T_p^*M} = 0$ e portanto $\theta_0|_{T_p^*M} \equiv 0$. Desta forma, T_p^*M também é uma subvariedade Lagrangiana.*

Antes do próximo exemplo, enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 1.96. *Dada uma variedade simplética (M, ω) e $L \subset M$ uma subvariedade Lagrangiana. Então existe vizinhanças U de L e U' da seção nula em T^*L , e um difeomorfismo $\psi : U' \rightarrow U$ tal que $\psi(0_p) = p$ para todo ponto $p \in L$ e $\psi^*\omega_U = \omega_0 \in \Omega^2(U')$.*

Demonstração. Ver a Seção 3.3 de [24]. □

Exemplo 1.97. *Considerando a variedade simplética (M, ω) , temos que a diagonal $\Delta \subset (M \times \overline{M}, \omega_- := \omega \oplus (-\omega))$ é uma subvariedade Lagrangiana. De fato para um ponto $(x, x) \in \Delta$ e os vetores tangentes $(v, v), (w, w) \in T_{(x,x)} \in \Delta$, temos*

$$(\omega_-)(x, x)((v, v), (w, w)) = 0$$

e portanto Δ é um subespaço isotrópico. Como $2 \dim \Delta = \dim(M \times \overline{M})$, então Δ é um subespaço Lagrangiano.

*Considere o difeomorfismo $F : \Delta \rightarrow M$ definido por $F(x, x) = x$. Pelo teorema anterior, F pode ser estendido a uma vizinhança de Δ de M . Tomando $\psi \in Sp(M, \omega)$, temos de forma análoga ao Exemplo 1.74, que o gráfico $\Gamma_\psi = \{(x, \psi(x)) \mid x \in M\} \subset M \times \overline{M}$ é uma subvariedade Lagrangiana. Supondo que ψ é suficientemente próxima da identidade $id_M : M \rightarrow M$, então $L := F(\Gamma_\psi) \subset T^*M$ é Lagrangiana. Pode-se ainda provar que existe uma 1-forma $\theta \in \Omega^1(M)$ suficientemente próxima da 1-forma nula tal que $L = \text{Im}\theta$ e portanto, o número de pontos fixos de ψ é igual ao número de zeros de θ . Isso nos fornece uma cota inferior para os pontos fixos de ψ pela característica de Euler de M , que é de natureza topológica. O leitor pode ver mais detalhes na Conjectura de Arnold, apresentada no Capítulo 11 de [24].*

Capítulo 2

Mecânica Hamiltoniana

Neste capítulo, formalizaremos os conceitos de mecânica Hamiltoniana, definindo os conceitos de campos Hamiltonianos, ações de Grupos de Lie, mapa momento e colchetes de Poisson.

2.1 Campos Hamiltonianos

Iniciamos este capítulo relacionando a mecânica clássica com a teoria abstrata da geometria simplética desenvolvida anteriormente.

Considere uma partícula de massa m se movendo na subvariedade de configuração $Q \subset \mathbb{R}^3$ sob o efeito de uma força conservativa, isto é, $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = -\nabla V(\mathbf{q})$ para uma função potencial $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$ suave. A Segunda Lei de Newton nos fornece uma equação diferencial de segunda ordem para o movimento da partícula

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\frac{1}{m}\nabla V(\mathbf{q}(t)).$$

Definindo o momento linear $\mathbf{p} := m\dot{\mathbf{q}}$, podemos reescrever a equação acima, como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem no **espaço de fases** $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*Q \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (ver Anexo B) por

$$\dot{q}^i = \frac{1}{m}p_i \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial V(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q^i}. \quad (2.1)$$

Considerando a função **função Hamiltoniana** (energia) $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + V(\mathbf{q}),$$

podemos reescrever as equações (2.1) como

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q^i}. \quad (2.2)$$

As equações acima são chamadas de **equações de Hamilton** e coincidem com as obtidas no Anexo B, onde as equações foram deduzidas de dois princípios mais gerais, o **Princípio Variacional** e o da **Mínima Ação**. Este resultado, nos mostra a equivalência entre o formalismo Newtoniano e Hamiltoniano da mecânica, isto é, estas duas formas de descrever a mecânica nos fornecem as mesmas equações de movimento.

As equações de Hamilton são equivalentes ao **campo de vetores Hamiltoniano** X_H definido por

$$X_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), -\frac{\partial H}{\partial q^i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & Id_3 \\ -Id_3 & 0 \end{bmatrix}}_{J_0} \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = J_0 \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

e portanto, as equações de movimento podem ser escrita como

$$(\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{p}}(t)) = X_H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)).$$

Dada uma condição inicial $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in T^*Q$, a curva $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \in T^*Q$ que satisfaz a equação acima com $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ e $(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0)) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$, é chamada de **curva integral do sistema**. Uma consequência direta destas definições, é a **Conservação de Energia** que vem da anti-simetria de J_0

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) &= \nabla H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \cdot (\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{p}}(t)) \\ &= \underbrace{J_0^{-1}}_{-J_0} (\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{p}}(t)) \cdot (\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{p}}(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observe que a matriz J_0 define uma forma bilinear, anti-simétrica e não-degenerada $\omega_0 \in \bigwedge^2(T^*\mathbb{R}^3)$ dada por

$$\omega_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot J_0 \mathbf{v},$$

o que justifica os conceitos abstratos apresentados na Seção 1.5 sobre geometria simplética.

A construção acima, serve como motivação para a formalização mais abstrata dos conceitos que serão apresentados agora.

Definição 2.1. *Seja (P, ω) uma variedade simplética, um campo de vetores X em P é dito **Hamiltoniano** se existe uma função $H \in C^\infty(P)$ tal que*

$$i_X \omega = \mathbf{d}H.$$

*Neste caso, dizemos que (P, ω, H) é um **sistema Hamiltoniano**.*

Exemplo 2.2. *Considere a variedade simplética $(T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \omega_0)$ mostrada anteriormente e um campo $X \in \mathfrak{X}(T^*\mathbb{R}^3)$ escrito em coordenadas*

$$X = X_{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + X_{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}.$$

Para que o campo acima seja Hamiltoniano, precisamos determinar uma função $H \in C^\infty(T^\mathbb{R}^3)$ que satisfaça $i_X \omega_0 = \mathbf{d}H$. Considerando o campo escrito em coordenadas $Y = Y_{\mathbf{q}} \partial / \partial \mathbf{q} + Y_{\mathbf{p}} \partial / \partial \mathbf{p}$ e aplicando na condição do campo ser Hamiltoniano, temos*

$$X_{\mathbf{q}} Y_{\mathbf{p}} - X_{\mathbf{p}} Y_{\mathbf{q}} = (X_{\mathbf{q}}, X_{\mathbf{p}}) \cdot J_0 (Y_{\mathbf{q}}, Y_{\mathbf{p}}) = i_X \omega_0(Y) = \mathbf{d}H(Y) = Y_{\mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + Y_{\mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

o que nos fornece as relações

$$X_{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad e \quad X_{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$$

que correspondem as equações de Hamilton.

Exemplo 2.3. Considere a variedade simplética S^2 , com um sistema de coordenadas locais (θ, h) , onde h corresponde a altura. Desta forma, podemos escrever a 2-forma simplética nestas coordenadas como $\omega = d\theta \wedge dh$. Considere agora o campo de vetores $X = \partial/\partial\theta$, podemos tomar a função Hamiltoniana $H(\theta, h) = h$ que satisfaz $i_{X_H}\omega = \mathbf{d}H$.

A seguir, mostramos que o fluxo de campos Hamiltonianos são transformações simpléticas. Este resultado é explorado diversas vezes ao longo do texto.

Proposição 2.4. Seja (P, ω) uma variedade simplética, então o fluxo φ_t de um campo Hamiltoniano X é uma transformação simplética.

Demonstração. Segue dos Teoremas da Derivada de Lie (Teorema 1.42) e da Fórmula Mágica de Cartan (Teorema 1.40) que

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega = \varphi_t^*L_X\omega = \varphi_t^*(i_X\mathbf{d}\omega + \mathbf{d}i_X\omega) = \varphi_t^*\mathbf{d}i_X\omega = \varphi_t^*\mathbf{d}(\mathbf{d}H) = 0,$$

e portanto $\varphi_t^*\omega = \varphi_0^*\omega = \omega$ para todo t . □

Corolário 2.5 (Teorema do Volume Liouville). Seja (P, ω, H) um sistema Hamiltoniano, então o fluxo φ_t correspondente ao campo X_H preserva o volume simplético $\omega^n/n!$ no espaço de fases.

Demonstração. Segue da Proposição 2.4 que a 2-forma simplética é invariante pelo pull-back do fluxos de campos Hamiltoniano, $\varphi_t^*\omega = \omega$. Como o pull-back se distribui pelo produto exterior

$$\begin{aligned}\varphi_t^*\omega^n &= \varphi_t^*(\omega \wedge \dots \wedge \omega) \\ &= \varphi_t^*\omega \wedge \dots \wedge \varphi_t^*\omega \\ &= \omega \wedge \dots \wedge \omega\end{aligned}$$

e portanto preserva volume. □

Corolário 2.6 (Teorema da Recorrência de Poincaré). Seja (P, ω, H) um sistema Hamiltoniano com P compacto. Então para cada $U \subset P$ aberto e $t \geq 0$, existe algum $s \geq t$ tal que $U \cap \varphi_s(U) \neq \emptyset$.

Demonstração. Pelo Teorema de Volume de Liouville, os conjuntos

$$U, \varphi_t(U), \varphi_{2t}(U), \varphi_{3t}(U), \dots, \varphi_{nt}(U), \dots$$

possuem volumes iguais. Se estes conjuntos não se intersectam, então P teria volume infinito, contrariando a compacidade. Logo existe $k, l \in \mathbb{N}$ com $k \geq l$ tal que

$$\varphi_{kt}(U) \cap \varphi_{lt}(U) \neq \emptyset.$$

Logo $U \cap \varphi_{(k-l)t}(U) \neq \emptyset$. □

Exemplo 2.7. Considere uma partícula de massa $m = 1$ se movendo livremente sobre o 2-toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, cuja a Hamiltoniana é dada apenas pela energia cinética. Com a identificação do momento p_{θ_i} com a frequência angular ω_i , $p_{\theta_i} \simeq \omega_i$ podemos escrever

$$H(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2),$$

e o fluxo do campo X_H é dado por

$$\begin{aligned} \varphi_t : \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto (\theta_1 + t\omega_1, \theta_2 + t\omega_2). \end{aligned}$$

Como o fluxo φ_t é simplética, então ele preserva área. Observe ainda que se a razão das frequências das velocidades angulares ω_1/ω_2 for irracional, a órbita de φ_t é densa no toro \mathbb{T}^2 . De fato, se a razão das frequências for racional, isto é, se existe $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$ tais que $\omega_1/\omega_2 = m/n$, então para todo ponto $x \in \mathbb{T}^2$ temos $\varphi_{2\pi m/\omega_1}(x) = \varphi_0(x)$ e portanto a órbita é periódica. Se a razão ω_1/ω_2 for irracional, então para cada ponto $x \in \mathbb{T}^2$ e qualquer vizinhança aberta $U \subset \mathbb{T}^2$, temos pelo Teorema da Recorrência de Poincaré que em um tempo finito $s > 0$ que $\varphi_s(x) \in U$ e portanto a órbita é densa. Um resultado similar pode ser provado para o toro n -dimensional \mathbb{T}^n .

Outra propriedade importante, é de que as funções Hamiltonianas são invariantes pelos seus fluxos. Este resultado aparece em sistemas conservativos, onde a energia do sistema permanece constante ao longo do tempo.

Proposição 2.8 (Conservação de Energia). Seja (P, ω, H) um sistema Hamiltoniano, com φ_t o fluxo do campo X_H , então $H \circ \varphi_t = H$ para todo tempo t .

Demonstração. De fato, seja $p \in P$ um ponto qualquer, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(\varphi_t(p))) &= \mathbf{d}H(\varphi_t(p)) \cdot X_H(\varphi_t(p)) \\ &= \omega(X_H(\varphi_t(p)), X_H(\varphi_t(p))) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e portanto $H(\varphi_t(p)) = H(p)$ para todo ponto $p \in P$. □

O próximo resultado nos mostra como induzir um campo Hamiltoniano em uma nova variedade simplética através de um symplectomorfismo.

Proposição 2.9. Sejam (P_1, ω_1) , (P_2, ω_2) variedades simpléticas e $\psi : P_1 \rightarrow P_2$ um mapa simplético, então

$$\psi^* X_H = X_{H \circ \psi}$$

para qualquer função $H : P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave.

Demonstração. Considere um ponto qualquer $p \in P_1$, segue da definição de pull-back de campos de vetores que

$$\varphi^*(X_H)(p) = (\psi^{-1})_*(X_H(\psi(p))) = T_{\psi(p)}\psi^{-1} \cdot X_H(\psi(p)).$$

Observe ainda que podemos escrever

$$T_p\psi \circ T_{\psi(p)}\psi^{-1} = T_{\psi(p)}(\psi \circ \psi^{-1}) = T_{\psi(p)}(Id_{P_2})$$

e portanto

$$T_p\psi \circ T_{\psi(p)}\psi^{-1}X_H(\psi(p)) = X_H(\psi(p)).$$

Como ψ é simplético, segue da relação anterior que

$$\begin{aligned} \omega_2(\psi(p))(T_p\psi \cdot X_{H \circ \psi}(p), T_p\psi \cdot v) &= \omega_1(p)(X_{H \circ \psi}(p), v) \\ &= \mathbf{d}(H \circ \psi)(p) \cdot v \\ &= \mathbf{d}H(\psi(p)) \cdot [T_p\psi \cdot v] \\ &= \omega_2(\psi(p))(X_H(\psi(p)), T_p\psi \cdot v) \\ &= \omega_2(\psi(p))(T_p\psi \circ T_{\psi(p)}\psi^{-1}X_H(\psi(p)), T_p\psi \cdot v). \end{aligned}$$

Como a relação acima vale para todo $p \in P_1$ e todo $v \in T_pP_1$ e pelo fato da 2-forma ω_2 ser simplética, segue que $X_{H \circ \psi}(p) = T_{\psi(p)}\psi^{-1}X_H(\psi(p)) = \psi^*X_H(p)$. \square

Observação 2.10. Lembrando que o fluxo $\varphi_t : P \rightarrow P$ de um campo Hamiltoniano é simplético, então $\varphi_t^*X_H = X_{H \circ \varphi_t}$.

2.2 Ações de Grupos de Lie

Para estudarmos a simetria de sistemas físicos, é natural tentarmos analisar o comportamento do espaço de fases sob determinadas transformações. Isso nos leva a definição de ação de grupo que veremos agora.

Definição 2.11. Seja M uma variedade suave, uma **ação** do grupo de Lie G em M é um mapa $\phi : G \times M \rightarrow M$ suave que satisfaz:

1. $\phi(e, x) = x$ para todo $x \in M$;
2. $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$ para todo $g, h \in G$ e $x \in M$.

Também denotaremos $\phi_g(x) := \phi(g, x)$. Para indicar uma ação sem especificar o mapa, escreveremos simplesmente $G \curvearrowright M$.

Dada uma ação $\phi : G \times M \rightarrow M$, estamos interessados em estudar o comportamento da evolução de um ponto $x \in M$ pela ação. Assim, definimos a **órbita** do ponto $x \in M$

$$G \cdot x := \{\phi_g(x) \mid g \in G\}.$$

Além disso, também estamos interessados nos elementos do grupo de Lie G mantém um ponto $x \in M$ fixo. Isso nos leva a definir o **subgrupo de isotropia**

$$G_x := \{g \in G \mid \phi_g(x) = x\} \subset G.$$

Podemos ainda classificar as ações da seguinte maneira:

1. **transitiva** se existe apenas uma órbita, isto é, $G \cdot x = G \cdot y$ para todo $x, y \in M$;

2. **livre** se não existe pontos fixos, então se $\phi_g(x) = x$ temos $g = e$;

3. **própria** se o mapa

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \times M \\ (g, x) &\mapsto (\phi_g(x), x) \end{aligned}$$

for uma função própria, isto é, a pré-imagem de todo conjunto compacto é compacto.

Definição 2.12. Dada uma variedade simplética (M, ω) , dizemos que $\phi : G \times M \rightarrow M$ é uma **ação simplética** se $\phi_g : M \rightarrow M$ for um symplectomorfismo para todo $g \in G$.

Exemplo 2.13. As ações de translação a esquerda e a direita $L, R : G \times G \rightarrow G$, definidas pela relação $L_g(h) = gh$ e $R_g(h) = hg$ para todo $g, h \in G$ são exemplos de ações livres e transitivas.

Exemplo 2.14. Os fluxos completos $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ são exemplos de ações transitivas do grupo de Lie $(\mathbb{R}, +)$.

Exemplo 2.15. Considere o grupo de Lie $(S^1, \cdot) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, onde o produto é a multiplicação usual de números complexos. Podemos definir uma ação em S^1 por

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (t, e^{i\theta}) &\mapsto e^{i(\theta+t)}. \end{aligned}$$

Observe que esta ação é transitiva mas não é livre. De fato, temos a órbita $\mathbb{R} \cdot e^{i\theta} = S^1$ para todo $e^{i\theta} \in S^1$ e que $\phi(t, e^{i\theta}) = \phi(t + 2k\pi, e^{i\theta})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Observação 2.16. A ação do grupo de Lie das rotações $SO(3)$ no espaço $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\Lambda, (R, \Pi)) \mapsto (\Lambda R, \Pi)$$

é livre e própria. Além disso, como $SO(3) = \det^{-1}(\{1\})$, temos que $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow (SO(3) \times \mathbb{R}^3)/SO(3)$ é um $SO(3)$ -fibrado principal. Para mais detalhes sobre fibrado principais, consultar ao Anexo C.

Dada uma ação de grupo $G \curvearrowright M$, definimos o **espaço quociente**

$$M/G := \{G \cdot x \mid x \in M\} \tag{2.3}$$

e a **projeção canônica** $\pi : M \rightarrow M/G$ por $\pi(x) = G \cdot x$.

Definição 2.17. Considerando as ações de grupo $\phi_M : G \times M \rightarrow M$ e $\phi_P : G \times P \rightarrow P$, dizemos que a função $\psi : M \rightarrow P$ é **G -equivariante** se $\psi(\phi_M(g, x)) = \phi_P(g, \psi(x))$ para todo $g \in G$ e $x \in M$.

Observação 2.18. a Pode-se provar que existe uma única função $\bar{\psi} : M/G \rightarrow P/G$ que faz o diagrama abaixo comutar, isto é, $\pi_P \circ \psi = \bar{\psi} \circ \pi_M$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & P \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_P \\ M/G & \xrightarrow{\bar{\psi}} & P/G \end{array}$$

O próximo resultado nos fornece uma caracterização do quociente de uma variedade pelo grupo de Lie. Utilizaremos este resultado no Capítulo 3.

Proposição 2.19. *Se uma ação suave $\phi : G \times M \rightarrow M$ for livre e própria, então o quociente M/G admite uma única estrutura de variedade suave tal que a projeção canônica $\pi : M \rightarrow M/G$ é um G -fibrado principal (ver Anexo C).*

Demonstração. Ver a Proposição 4.1.23 de [1]. □

Corolário 2.20. *Pelas condições da proposição anterior e supondo que o mapa $\psi : M \rightarrow P$ da Observação 2.18 seja um difeomorfismo G -equivariante, então $\bar{\psi} : M/G \rightarrow P/G$ também é um difeomorfismo.*

Apresentaremos agora alguns exemplos de ações que desempenham um papel importante no estudo do corpo rígido na Seção 4.4.

Exemplo 2.21. *Seja G grupo de Lie, definimos a ação de conjugação por*

$$\begin{aligned} I : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

que também pode ser escrita como $I_g(h) = (L_g \circ R_{g^{-1}})(h) = (R_{g^{-1}} \circ L_g)(h)$. A ação de conjugação induz a ação adjunta na álgebra de Lie \mathfrak{g} por

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (g, \xi) &\mapsto \text{Ad}_g(\xi) := T_e I_g \cdot \xi. \end{aligned}$$

Observação 2.22. *Pra todo $g, h \in G$, temos que ação adjunta satisfaz*

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \text{Ad}_{h^{-1}} &= T_e I_{g^{-1}} \circ T_e I_{h^{-1}} \\ &= T_e (I_{g^{-1}} \circ I_{h^{-1}}) \\ &= T_e I_{g^{-1}h^{-1}} = \text{Ad}_{g^{-1}h^{-1}}. \end{aligned}$$

Utilizaremos esta relação na demonstração do Lema da Redução Simplética (Lema 3.1).

Exemplo 2.23. *Considere o grupo de Lie das matrizes invertíveis $GL(n, \mathbb{R})$ e uma curva $B(t) \in G$ que satisfaz $B(0) = \text{Id}$ e $B'(0) = \xi \in \mathfrak{gl}(n)$. Então a ação adjunta para o grupo das matrizes invertíveis é dada por*

$$\text{Ad}_R \xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} I_R(B(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} RB(t)R^{-1} = R\xi R^{-1}.$$

Em particular, para o grupo de Lie das rotações $G = SO(3)$, com $R \in SO(3)$, $\widehat{\Omega} \in \mathfrak{so}(3)$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, temos

$$(\text{Ad}_R \widehat{\Omega})\mathbf{w} = (R\widehat{\Omega}R^{-1})\mathbf{w} = R(\widehat{\Omega} \times R^{-1}\mathbf{w}) = R\widehat{\Omega} \times \mathbf{w} = \widehat{R\Omega} \cdot \mathbf{w},$$

onde utilizamos as propriedades do isomorfismo $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$ da Proposição A.1. Portanto

$$\text{Ad}_R \widehat{\Omega} = \widehat{R\Omega}$$

ou $\text{Ad}_R \Omega = R\Omega$ vendo a expressão acima como vetores de \mathbb{R}^3 .

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, podemos definir a **ação coadjunta** $\text{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ pela relação

$$\langle \text{Ad}_g^*(\mu), \xi \rangle = \langle \mu, \text{Ad}_{g^{-1}}(\xi) \rangle,$$

onde $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$ e a **órbita coadjunta** por

$$G \cdot \mu := \{\text{Ad}_g^* \mu \mid g \in G\}$$

que tem um papel importante na teoria de redução simplética.

Observação 2.24. *Esta convenção na definição da ação coadjunta, é adota para que tenhamos $\text{Ad}_{gh}^* = \text{Ad}_g^* \circ \text{Ad}_h^*$ para todo $g, h \in G$.*

Exemplo 2.25. *Considerando o Exemplo 2.23, com $R \in SO(3)$, $\widehat{\Omega} \in \mathfrak{so}(3)$ e $\widetilde{\Pi} \in \mathfrak{so}(3)^*$, temos*

$$\langle \text{Ad}_R^*(\widetilde{\Pi}), \widehat{\Omega} \rangle = \langle \widetilde{\Pi}, \text{Ad}_{R^{-1}} \widehat{\Omega} \rangle = \langle \widetilde{\Pi}, \widehat{R^{-1}\Omega} \rangle = \Pi \cdot R^{-1}\Omega = R\Pi \cdot \Omega$$

e portanto a ação coadjunta é dada por $\text{Ad}_R^* \simeq R$. Para esta ação, a órbita coadjunta do ponto $\mu \in \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)^*$ é

$$\begin{aligned} SO(3) \cdot \mu &= \{R\mu \mid R \in SO(3)\} \\ &= S_{\|\mu\|}^2 = 2\text{-esfera de raio } \|\mu\| \end{aligned}$$

e o subgrupo de isotropia

$$\begin{aligned} SO(3)_\mu &= \{R \in SO(3) \mid R\mu = \mu\} \\ &= \{\text{rotações ao redor do vetor } \mu\} \\ &\simeq S^1. \end{aligned}$$

Para finalizar esta seção, vamos induzir uma ação no fibrado cotangente T^*Q a partir de uma ação no espaço de configurações Q . Considerando a ação $\phi_g : Q \rightarrow Q$ como um difeomorfismo para todo $g \in G$, então ela induz uma ação simplética $\phi_g^{T^*} : T^*Q \rightarrow T^*Q$ definida por

$$\phi_g^{T^*}(\alpha_q) = T_{\phi_g(q)}^*(\phi_{g^{-1}})(\alpha_q). \quad (2.4)$$

A seguir apresentamos exemplos de ações induzidas no fibrado cotangente pela ação de translação e rotação.

Exemplo 2.26. *Lembrando da ação de translação vista no Exemplo 2.36*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3N} &\rightarrow \mathbb{R}^{3N} \\ (\mathbf{x}, q = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)) &\mapsto (\mathbf{q}_1 + \mathbf{x}, \dots, \mathbf{q}_N + \mathbf{x}), \end{aligned}$$

vamos calcular a ação induzida no fibrado cotangente $\phi^{T^*} : T^*\mathbb{R}^{3N} \rightarrow T^*\mathbb{R}^{3N}$, lembrando que $T^*\mathbb{R}^{3N} \simeq \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$. Escrevendo a derivada da ação

$$T_q \phi_{\mathbf{x}}(v = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \phi_{\mathbf{x}}(q + sv) = v \in T_q \mathbb{R}^{3N} \simeq \mathbb{R}^{3N},$$

podemos definir um mapa no fibrado tangente como

$$\begin{aligned} T\phi_{\mathbf{x}} : T\mathbb{R}^{3N} &\rightarrow T\mathbb{R}^{3N} \\ (q, v) &\mapsto ((\mathbf{q}_1 + \mathbf{x}, \dots, \mathbf{q}_N + \mathbf{x}), v). \end{aligned}$$

O mapa tangente acima induz um mapa no fibrado cotangente $T^*\mathbb{R}^{3N}$ pela seguinte relação

$$T_{\phi_{\mathbf{x}}(q)}^* \phi_{-\mathbf{x}}(p = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N))(v) = \langle p, T_{\phi_{\mathbf{x}}(q)} \phi_{-\mathbf{x}}(v) \rangle = p \cdot v$$

e portanto $T_{\phi_{\mathbf{x}}(q)}^* \phi_{-\mathbf{x}}(p) = p$. Pela definição do levantamento cotangente $\phi_{\mathbf{x}}^{T^*}$, obtemos a ação induzida

$$\phi_{\mathbf{x}}^{T^*}(q, p) = (\phi_{\mathbf{x}}(q), T_{\phi_{\mathbf{x}}(q)}^* \phi_{-\mathbf{x}}(p)) = (\phi_{\mathbf{x}}(q), p).$$

Observe que a ação induzida por translações age apenas na variável posição. Assim, muitas vezes escreveremos a ação induzida em $T^*\mathbb{R}^{3N}$ como

$$\tau_{\mathbf{x}}(q, p) = (q + \mathbf{x}, p).$$

Exemplo 2.27. Considerando a ação de rotação

$$\begin{aligned} \phi : SO(3) \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (R, \mathbf{q}) &\mapsto R\mathbf{q}, \end{aligned}$$

vamos induzir a ação em $T^*\mathbb{R}^3$. Seguindo os passos do exemplo anterior, calculamos a derivada

$$T_{\phi_R(\mathbf{q})} \phi_{R^{-1}}(\dot{\mathbf{q}}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{R^{-1}}(R\mathbf{q} + t\dot{\mathbf{q}}) = R^{-1}\dot{\mathbf{q}}$$

que induz um mapa no fibrado cotangente

$$T_{\phi_R(\mathbf{q})}^* \phi_{R^{-1}}(\mathbf{p})(\dot{\mathbf{q}}) = \langle \mathbf{p}, T_{\phi_R(\mathbf{q})} \phi_{R^{-1}}(\dot{\mathbf{q}}) \rangle = \langle \mathbf{p}, R^{-1}\dot{\mathbf{q}} \rangle = \langle R\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle.$$

Portanto $T_{\phi_R(\mathbf{q})}^* \phi_{R^{-1}}(\mathbf{p}) = R\mathbf{p}$ e a ação induzida no fibrado cotangente é

$$\phi_R^{T^*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T_{\phi_R(\mathbf{q})}^* (\phi_{g^{-1}})(\mathbf{p}) = (\phi_R(\mathbf{q}), R\mathbf{p}) = (R\mathbf{q}, R\mathbf{p}).$$

A ação induzida por rotações age tanto na variável posição, quanto na variável momento. Muitas vezes escreveremos esta ação como

$$R \cdot (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (R\mathbf{q}, R\mathbf{p}).$$

Exemplo 2.28. Considerando a ação de translação pela esquerda $L : G \times G \rightarrow G$, o seu levantamento cotangente $L_h^{T^*} : T^*G \rightarrow T^*G$ é dado por

$$L_h^{T^*}(\alpha_g) = T_{hg}^* L_{h^{-1}}(\alpha_g) = \alpha_g \circ T_{hg} L_{h^{-1}},$$

onde $\alpha_g \in T_g^*G$. Em particular para o grupo de Lie das rotações $SO(3)$ e pela identificação $T^*SO(3) \simeq SO(3) \times \mathbb{R}^3$, temos a ação induzida

$$\begin{aligned} SO(3) \times (SO(3) \times \mathbb{R}^3) &\rightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^3 \\ (\Lambda, (R, \mathbf{v})) &\mapsto (\Lambda R, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

2.3 Mapa Momento

Dada uma ação $\phi : G \times M \rightarrow M$ qualquer, ela induz um campo de vetores em M dado pelos geradores infinitesimais da ação que definimos a seguir.

Definição 2.29. *Seja $\phi : G \times M \rightarrow M$ uma ação, definimos o **gerador infinitesimal** correspondente a $\xi \in \mathfrak{g}$ no ponto $x \in M$ por*

$$\xi_M(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{\exp t\xi}(x).$$

Exemplo 2.30. *Considere $L : G \times G \rightarrow G$ a ação de translação pela esquerda, então podemos associar um campo de vetores que é dado no ponto $g \in G$ por*

$$\xi_G(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_{\exp t\xi}(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp t\xi)g = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_g(\exp t\xi) = T_e R_g(\xi).$$

Em particular, para o grupo de rotações $G = SO(3)$, podemos expressar o gerador infinitesimal de $\xi \in \mathfrak{so}(3)$ como

$$\xi_{SO(3)}(R) = \xi R.$$

Observação 2.31. *O campo gerado pela ação de translações a esquerda (direita) é invariante por translações a direita (esquerda). De fato para todo $g, h \in G$ e $\xi \in \mathfrak{g}$, temos*

$$(TR_h)_*(\xi_G(g)) = T_g R_h(\xi_G(g)) = T_g R_h \circ T_e R_g(\xi) = T_e R_{gh}(\xi) = \xi_G(gh).$$

Considerando $\xi \in \mathfrak{g}$, definimos a **representação adjunta** $\text{ad}_\xi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ como sendo os geradores infinitesimais da ação $\text{Ad}_{\exp t\xi} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$

$$\text{ad}_\xi(\eta) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp t\xi} \eta. \quad (2.5)$$

De forma análoga, podemos definir os geradores da ação coadjunta $\text{Ad}_{\exp t\xi}^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ pela **representação coadjunta** $\text{ad}_\xi^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que satisfaz a relação

$$\langle \text{ad}_\xi^* \mu, \eta \rangle = -\langle \mu, \text{ad}_\xi \eta \rangle \quad (2.6)$$

com $\eta \in \mathfrak{g}$ e $\mu \in \mathfrak{g}^*$.

O próximo resultado, nos mostra que a representação adjunta definida acima é equivalente ao colchete de Lie em \mathfrak{g} .

Proposição 2.32. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$, então para todo $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ temos*

$$\text{ad}_\xi \eta = [\xi, \eta].$$

Demonstração. Seja $\varphi_t(g) = g \exp t\xi = R_{\exp t\xi} g$ o fluxo do campo X_ξ , segue da definição do colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ que

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= [X_\xi, X_\eta](e) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* X_\eta(e) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} T_{\varphi_t(e)} \varphi_{-t}(X_\eta(\varphi_t(e))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} T_{\exp t\xi} R_{\exp -t\xi} T_e L_{\exp t\xi} \eta \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp t\xi} \eta, \end{aligned}$$

provando assim a relação. □

Proposição 2.33. Para a ação coadjunta $\text{Ad}_g^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, o seu gerador infinitesimal para $\xi \in \mathfrak{g}$ no ponto $\nu \in \mathfrak{g}^*$ é

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(\nu) = \text{ad}_\xi^*(\nu).$$

Demonstração. De fato, se $\eta \in \mathfrak{g}$ e pela definição de geradores infinitesimais, segue que

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(\nu)(\eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\text{Ad}_{\exp t\xi}^* \nu \right)(\eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \nu, \text{Ad}_{-\exp t\xi}(\eta) \rangle = -\langle \nu, [\xi, \eta] \rangle = \text{ad}_\xi^* \nu(\eta).$$

□

Vamos apresentar a seguir a definição de mapa momento. Veremos nos exemplos, que esta definição abstrata coincide com os conceitos físicos de momento linear para ações de translação e momento angular para ações de rotação.

Definição 2.34. Seja (P, ω) uma variedade simplética conexa e $\phi : G \times P \rightarrow P$ uma ação simplética. Suponha que existe um mapa linear $J : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(P)$ tal que $X_{J(\xi)} = \xi_P$ (ou equivalentemente $\mathbf{d}(J(\xi)) = i_{\xi_P} \omega$) para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Definimos um **mapa momento** $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ pela relação

$$\langle \mathbf{J}(x), \xi \rangle = J(\xi)(x),$$

onde $\xi \in \mathfrak{g}$ e $x \in P$.

Exemplo 2.35. Seja (P, ω) uma variedade simplética com a 2-forma exata, $\omega = -\mathbf{d}\alpha$, onde α é uma 1-forma G -invariante. Então o mapa $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definido por $\mathbf{J}(x)\xi = \alpha(x)(\xi_P(x))$ com $\xi \in \mathfrak{g}$ e $x \in P$ é um mapa momento. De fato, pela Fórmula Mágica de Cartan (Teorema 1.40)

$$L_{\xi_P} \alpha = i_{\xi_P} \mathbf{d}\alpha + \mathbf{d}i_{\xi_P} \alpha$$

e como $L_{\xi_P} \alpha = 0$ pela G -invariância, temos

$$\mathbf{d}(J(\xi)) = \mathbf{d}i_{\xi_P} \alpha = -i_{\xi_P} \mathbf{d}\alpha = i_{\xi_P} \omega.$$

Portanto \mathbf{J} satisfaz as condições de mapa momento.

Exemplo 2.36. Considere um sistema de N partículas no espaço de fases $T^*\mathbb{R}^{3N} \simeq \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ e a ação de translação

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}) &\rightarrow \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \\ (\mathbf{x}, q = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N), p = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)) &\mapsto (\mathbf{q}_1 + \mathbf{x}, \dots, \mathbf{q}_N + \mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N). \end{aligned}$$

Os geradores infinitesimais desta ação são da forma

$$\xi_{\mathbb{R}^{6N}}(q, p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tau(t\xi, (q, p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathbf{q}_1 + t\xi, \dots, \mathbf{q}_N + t\xi, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = (\xi, \dots, \xi, 0, \dots, 0).$$

De forma análoga ao exemplo anterior, como o campo $X_{J(\xi)} = \xi_{\mathbb{R}^{6N}}$ é Hamiltoniano, ele deve satisfazer as equações de Hamilton

$$\frac{\partial J(\xi)}{\partial \mathbf{p}_j} = \xi \quad e \quad \frac{\partial J(\xi)}{\partial \mathbf{q}_j} = 0.$$

Resolvendo este sistema, obtemos

$$J(\xi)(q, p) = \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j \right) \cdot \xi$$

e portanto $\mathbf{J}(q, p) = \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j$, isto é, o mapa momento do sistema é o somatório dos momentos lineares das N partículas.

Exemplo 2.37. Considere uma partícula se movendo no espaço de fase $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ sob a ação de rotações $R \in SO(3)$ dada por

$$R(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (R\mathbf{q}, R\mathbf{p}).$$

Seja $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ a velocidade angular da partícula e o seu gerador infinitesimal $\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \xi \in \mathfrak{so}(3)$. Considerando a curva $R(t) = \exp(t\xi)$ em $SO(3)$, podemos calcular o gerador infinitesimal

$$\xi_{T^*\mathbb{R}^3}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R(t)(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R(t)\mathbf{q}, R(t)\mathbf{p}) = (\xi\mathbf{q}, \xi\mathbf{p}).$$

Como o campo $\xi_{T^*\mathbb{R}^3}$ é Hamiltoniano, ele deve satisfazer as equações de Hamilton e portanto

$$\xi_{T^*\mathbb{R}^3}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{\partial J(\xi)}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), -\frac{\partial J(\xi)}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right) = (\xi\mathbf{q}, \xi\mathbf{p}).$$

Resolvendo o sistema de equações acima e pelo isomorfismo $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$ da Proposição A.1 obtemos

$$J(\xi)(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\xi\mathbf{q}) \cdot \mathbf{p} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Portanto, o mapa momento correspondente a ação de rotação é

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \times \mathbf{p},$$

que corresponde ao momento angular de uma partícula.

O próximo resultado relaciona a simetria da função Hamiltoniana com a conservação do mapa momento.

Teorema 2.38 (Teorema de Noether Hamiltoniano). Considerando a ação simplética $\phi : G \times (P, \omega) \rightarrow (P, \omega)$ e um mapa momento $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Se a função Hamiltoniana $H : P \rightarrow \mathbb{R}$ for invariante pela ação, isto é,

$$H(x) = H(\phi_g(x)) \text{ para todo } x \in P \text{ e } g \in G,$$

então o mapa momento \mathbf{J} é constante ao longo dos fluxos φ_t do campo X_H

$$\mathbf{J}(\varphi_t(x)) = \mathbf{J}(x).$$

Demonstração. Tomando $\xi \in \mathfrak{g}$, segue da invariância da Hamiltoniana que $H(\phi_{\exp t\xi} x) = H(x)$ para todo $x \in P$. Diferenciando esta relação em $t = 0$

$$\mathbf{d}H(x) \cdot \xi_P(x) = 0$$

e aplicando a definição de mapa momento, obtemos

$$0 = i_{X_H}\omega(\xi_P) = \omega(X_H, X_{J(\xi)}) = \{H, J(\xi)\}.$$

Segue do Lema 2.63 que para todo $x \in P$

$$J(\xi)(\varphi_t(x)) = J(\xi)(x)$$

ou equivalentemente

$$\langle \mathbf{J} \circ \varphi_t(x), \xi \rangle = \langle \mathbf{J}(x), \xi \rangle.$$

□

Observação 2.39. *O resultado acima nos diz que se a Hamiltoniana for invariante pela ação, o mapa momento será uma constante de movimento do sistema. Além disso, se $\mu \in \mathfrak{g}^*$ for um valor regular do mapa momento, então o campo de vetores $X_H|_{\mathbf{J}^{-1}(\mu)}$ é tangente a subvariedade $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$. Portanto, se uma trajetória $\gamma(t) \in P$ tiver condição inicial $\gamma(t_0) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$, então $\gamma(t) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ para todo t .*

Observação 2.40. *Existe uma versão Lagrangiana do Teorema de Noether que diz: Se a função Lagrangiana $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ for invariante pela ação do levantamento tangente do fluxo completo $\varphi : \mathbb{R} \times Q \rightarrow Q$, então a 1-forma $\theta_L \in \Omega^1(TQ)$ definida por*

$$\theta_L(q, \dot{q})(\delta q) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i \right) (\delta q)$$

é uma quantidade conservada.

Além disso, se a Lagrangiana L for hiper-regular e $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ for a Hamiltoniana associada (ver Anexo B), então L é invariante pelo levantamento tangente φ^T se e somente se H for invariante pelo levantamento cotangente φ^{T*} .

Exemplo 2.41. *Considere um sistema de N partículas livres, isto é, a Hamiltoniana é apenas a energia cinética*

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \|\mathbf{p}_i\|^2,$$

que é invariante pela ação de translação $\tau^{T*} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$. Portanto o seu momento linear $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$ é uma quantidade conservada.

A importância da definição a seguir ficará mais clara quando estudarmos a redução simplética no próximo capítulo.

Definição 2.42. *Dizemos que o mapa momento $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ é **Ad*-equivariante** se para todo $g \in G$ o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\mathbf{J}} & \mathfrak{g}^* \\ \phi_g \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_g^* \\ P & \xrightarrow{\mathbf{J}} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

isto é, $\mathbf{J}(\phi_g(x)) = \text{Ad}_g^* \mathbf{J}(x)$ para todo $x \in P$ e $g \in G$.

Exemplo 2.43. Lembrando que a ação coadjunta em relação ao grupo de Lie das rotações $SO(3)$ com a identificação $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$ é $\text{Ad}_R^* = R$ e o mapa momento $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, então

$$\text{Ad}_R^*(\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) = R \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) = R\mathbf{q} \times R\mathbf{p} = \mathbf{J}(R \cdot (\mathbf{q}, \mathbf{p})).$$

A seguir apresentamos uma condição suficiente para que o mapa momento seja Ad^* -equivariante.

Proposição 2.44. Sejam (P, ω) uma variedade simplética, $\phi : G \times P \rightarrow P$ uma ação simplética com um mapa momento $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Então o mapa definido por

$$\begin{aligned} \psi_{g, \xi} : P &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle \mathbf{J}(\phi_g(x)), \xi \rangle - \langle \text{Ad}_g^* \mathbf{J}(x), \xi \rangle \end{aligned}$$

com $g \in G$ e $\xi \in \mathfrak{g}$ é constante em cada componente conexa.

Demonstração. Lembrando da definição de mapa momento que $\mathbf{J}(x)\xi = J(\xi)(x)$ com $J : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(P)$, começamos calculando a derivada de $\psi_{g, \xi}$

$$\begin{aligned} \psi_{g, \xi}(x) &= \mathbf{d}J(\xi)(\phi_g(x)) \cdot T_x \phi_g(x) - \mathbf{d}J(\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)(x) \\ &= i_{\xi_P} \omega(\phi_g(x)) \cdot T_x \phi_g(x) - i_{(\text{Ad}_{g^{-1}})_\xi} \omega(x). \end{aligned}$$

Segue do Lema E.3 que nos diz $(\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_P = \phi_g^* \xi_P$ que

$$\mathbf{d}\psi_{g, \xi}(x) = \phi_g^*(i_{\xi_P})(x) - i_{\phi_g^* \xi_P} \omega(x).$$

Pela hipótese da ação ϕ_g ser simplética, temos

$$\phi_g^*(i_{\xi_P})\omega = i_{\phi_g^* \xi_P} \phi_g^* \omega = i_{\phi_g^* \xi_P} \omega$$

que combinada com as duas últimas relações, obtemos $\mathbf{d}\psi_{g, \xi} = 0$. Portanto, $\psi_{g, \xi}$ é constante em cada componente conexa. \square

Corolário 2.45. Supondo que P seja conexo na hipótese da proposição anterior e definindo o **co-ciclo** $\sigma : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ por $\sigma(g) \cdot \xi = \psi_{g, \xi}(x)$ com $x \in P$ e $\xi \in \mathfrak{g}$, isto é

$$\sigma(g) = \mathbf{J}(\phi_g(x)) - \text{Ad}_g^* \mathbf{J}(x).$$

Se G for conexo, então o co-ciclo $\sigma \equiv 0$ ou equivalentemente, o mapa momento \mathbf{J} é Ad^* -equivariante.

Demonstração. De fato, basta observar que $\sigma(e) = 0$. Como G é conexo, segue que $\sigma(e) = \sigma(g)$ para todo $g \in G$ e portanto $\mathbf{J}(\phi_g(x)) = \text{Ad}_g^* \mathbf{J}(x)$ para todo $g \in G$ e $x \in P$. \square

Observação 2.46. A hipótese do mapa momento \mathbf{J} ser Ad^* -equivariante, nos garante que o mapa associado $J : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(P)$ seja um morfismo de álgebras de Lie como veremos a seguir ou equivalentemente, o mapa momento \mathbf{J} é um mapa de Poisson, que veremos na Proposição 2.68 mais a frente.

Lema 2.47. *Se o mapa momento \mathbf{J} for Ad^* -equivariante, então o mapa $J : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(P)$ da Definição 2.34 é um morfismo de álgebras de Lie, isto é, satisfaz a relação*

$$J([\xi, \eta])(x) = \{J(\xi), J(\eta)\}(x)$$

para quaisquer $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ e $x \in P$.

Demonstração. Considerando o ponto $x \in P$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, temos pela definição do colchete de Poisson canônico que

$$\{J(\xi), J(\eta)\}(x) = \mathbf{d}(J(\xi))(x) \cdot X_{J(\eta)}(x) = \langle T_x \mathbf{J} \cdot \eta_P(x), \xi \rangle$$

e pela definição de mapa momento

$$J([\xi, \eta])(x) = \langle \mathbf{J}(x), [\xi, \eta] \rangle = \langle \text{ad}_\eta^* \mathbf{J}(x), \xi \rangle.$$

Nosso objetivo agora é verificarmos a igualdade entre as duas relações acima. Para isso, basta lembrarmos da definição da representação coadjunta ad^* na equação (2.6)

$$\begin{aligned} \langle T_x \mathbf{J} \cdot \eta_P(x), \xi \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbf{J}(\phi_{\exp t\eta}(x)), \xi \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \text{Ad}_{\exp t\eta}^* \mathbf{J}(x), \xi \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \mathbf{J}(x), \text{Ad}_{-\exp t\eta} \xi \rangle \\ &= \langle \mathbf{J}(x), -\text{ad}_\eta \xi \rangle = \langle \text{ad}_\eta^* \mathbf{J}(x), \xi \rangle. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.48. *Considerando o mapa momento dado pelo momento angular $\mathbf{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, temos que para qualquer rotação $R \in SO(3)$, a ação coadjunta satisfaz*

$$\text{Ad}_R^* \mathbf{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = R(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) = R\mathbf{q} \times R\mathbf{p} = \mathbf{L}(R\mathbf{q}, R\mathbf{p})$$

e portanto \mathbf{L} é Ad^* -equivariante. Definindo a função

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^3 &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^6) \\ \mathbf{e}_k &\mapsto L_k \end{aligned}$$

onde $L_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = [\mathbf{q} \times \mathbf{p}]_k = \sum_{i,j} \epsilon_{kij} q^i p_j$. Assim, considerando o colchete de Poisson canônico em \mathbb{R}^6

$$\{L(\mathbf{e}_i), L(\mathbf{e}_j)\}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \{L_i, L_j\}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i,j} \epsilon_{kij} L_k = L \left(\sum_{i,j} \epsilon_{kij} \mathbf{e}_k \right) = L(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j),$$

o que mostra que L é um morfismo de álgebras de Lie.

O próximo Teorema nos diz que se a 2-forma simplética for exata, então ela admite um mapa momento Ad^* -equivariante.

Teorema 2.49. *Considerando a ação simplética $\phi : G \times (P, \omega) \rightarrow (P, \omega)$ e supondo que a 2-forma simplética ω seja exata, isto é, existe $\theta \in \Omega^1(P)$ tal que $\omega = -\mathbf{d}\theta$ e que $\phi_g^*\theta = \theta$ para todo $g \in G$. Então podemos definir um mapa momento Ad^* -equivariante \mathbf{J} como*

$$\mathbf{J}(x)(\xi) = (i_{\xi_P}\theta)(x),$$

para todo $x \in P$ e $\xi \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Seja $\xi \in \mathfrak{g}$, derivando a relação $\phi_{\exp t\xi}^*\theta = \theta$ em relação a t e pela Fórmula Mágica de Cartan (Teorema 1.40)

$$\mathbf{d}(i_{\xi_P}\theta) + i_{\xi_P}\mathbf{d}\theta = L_{\xi_P}\theta = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{\exp t\xi}^*\theta = 0$$

e portanto $\mathbf{d}(i_{\xi_P}\theta) = i_{\xi_P}\omega$. Considerando o mapa $J : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(P)$ da Definição 2.34, temos $\mathbf{d}(J(\xi)) = i_{\xi_P}\omega$ ou equivalentemente $X_{J(\xi)} = \xi_P$, o que mostra que \mathbf{J} satisfaz as definições de mapa momento. Falta verificarmos que \mathbf{J} é Ad^* -equivariante. Tomando $g \in G$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\phi_g(x)) \cdot \xi - \text{Ad}_g^* \mathbf{J}(x) \cdot \xi &= J(\xi)(\phi_g(x)) - J(\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)(x) \\ &= i_{\xi_P}\theta(\phi_g(x)) - (i_{(\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_P}\theta)(x) \\ &= i_{\xi_P}\theta(\phi_g(x)) - (i_{\phi_g^* \xi_P} \phi_g^*\theta)(x) \\ &= i_{\xi_P}\theta(\phi_g(x)) - (\phi_g^*(i_{\xi_P}\theta))(x) \\ &= i_{\xi_P}\theta(\phi_g(x)) - i_{\xi_P}\theta(\phi_g(x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde na terceira linha utilizamos o Lema E.3 que nos diz que $(\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_P = \phi_g^* \xi_P$ e a invariância da 1-forma θ pela ação ϕ . \square

Observação 2.50. *Dada uma ação $\phi : G \times Q \rightarrow Q$, temos pela Proposição 1.90 que a ação dada pelo levantamento $\phi^{T^*} : G \times T^*Q \rightarrow T^*Q$ preserva a 1-forma tautológica $\theta_0 \in \Omega^1(T^*Q)$, isto é, $\phi_g^{T^*}\theta_0 = \theta_0$ para todo $g \in G$. Portanto pelo teorema anterior, todo fibrado cotangente T^*Q admite um mapa momento Ad^* -equivariante que é dado pelo corolário a seguir.*

Corolário 2.51. *Considerando $\phi^{T^*} : G \times T^*Q \rightarrow T^*Q$ uma ação induzida no fibrado cotangente, então podemos definir um mapa momento $\mathbf{J} : T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$ Ad^* -equivariante por*

$$\mathbf{J}(\alpha_q)(\xi_Q) = \langle \alpha_q, \xi_Q(q) \rangle.$$

Demonstração. Seja $\pi_Q^* : T^*Q \rightarrow Q$ a projeção canônica, temos que ela comuta com a ação induzida ϕ^{T^*} , isto é, para $\xi \in \mathfrak{g}$ temos

$$\pi_Q^* \circ \phi_{\exp t\xi}^{T^*} = \phi_{\exp t\xi} \circ \pi_Q^*,$$

cujas derivadas em $t = 0$ é

$$T\pi_Q^* \circ \xi_P = \xi_Q \circ \pi_Q^*.$$

Segue do Teorema 2.49 e da relação acima, que para todo $\alpha_q \in T^*Q$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\alpha_q)(\xi) &= (i_{\xi_{T^*Q}} \theta)(\alpha_q) \\ &= \langle \alpha_q, T\pi_Q^* \circ \xi_{T^*Q}(\alpha_q) \rangle \\ &= \langle \alpha_q, \xi_Q \circ \pi_Q^*(\alpha_q) \rangle \\ &= \langle \alpha_q, \xi_Q(q) \rangle. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.52. Tomando $\phi : G \times G \rightarrow G$ a ação de translação pela esquerda, então o mapa momento Ad^* -equivariante $\mathbf{J} : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ é dado por

$$\mathbf{J}(\alpha_g)(\xi) = \alpha_g(T_e R_g(\xi))$$

com $g \in G$ e $\xi \in \mathfrak{g}$.

Corolário 2.53. Considerando a ação

$$\begin{aligned} \phi^{T^*} : G \times (G \times \mathfrak{g}^*) &\rightarrow G \times \mathfrak{g}^* \\ (g, (h, \mu)) &\mapsto (gh, \mu) \end{aligned}$$

temos o mapa momento Ad^* -equivariante $\mathbf{J} : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dado por

$$\mathbf{J}(g, \mu) = \text{Ad}_g^* \mu.$$

Exemplo 2.54. Considerando o grupo de Lie das rotações $SO(3)$ com a identificação dada pelo isomorfismo

$$\begin{aligned} SO(3) \times \mathfrak{so}(3)^* &\rightarrow T^*SO(3) \\ (R, \nu) &\mapsto (R, \nu \circ T_R L_{R^{-1}}) \end{aligned}$$

e a ação de translação pela esquerda, temos pelo Corolário 2.52 que podemos definir um mapa momento $\mathbf{J} : SO(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ como

$$\mathbf{J}(R, \nu)(\eta) = \langle \nu, (T_R L_{R^{-1}} \circ T_e R)(\eta) \rangle = \langle \nu, \text{Ad}_{R^{-1}} \eta \rangle = \langle \nu, R^{-1} \eta \rangle = \langle R\nu, \eta \rangle$$

e portanto $\mathbf{J}(R, \nu) = R\nu$.

2.4 Colchetes de Poisson

Variiedades de Poisson são variedades que admitem uma estrutura de álgebras de Lie em $C^\infty(M)$, chamadas de colchetes de Poisson. Veremos que elas são úteis na descrição das equações de movimentos de sistemas físicos, além de nos fornecer uma estrutura de álgebra de Lie das funções geradores da ação.

Definição 2.55. Um *colchete de Poisson* em uma variedade M é uma operação bilinear $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ tal que:

1. $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ é uma álgebra de Lie sob o corpo dos reais \mathbb{R} ;

2. o colchete de Poisson é uma derivação em cada argumento, isto é, para quaisquer funções $f, g, h \in C^\infty(M)$ ela satisfaz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g.$$

Neste caso, dizemos que $(M, \{\cdot, \cdot\})$ é uma **variedade de Poisson**.

Exemplo 2.56. Dada duas variedades de Poisson $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_{M_1})$ e $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_{M_2})$, podemos definir um colchete no espaço produto $M_1 \times M_2$ como

$$\{f, g\}_{M_1 \times M_2}(x, y) = \{f(\cdot, y), g(\cdot, y)\}_{M_1}(x) + \{f(x, \cdot), g(x, \cdot)\}_{M_2}(y)$$

para $f, g : M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ suaves e $(x, y) \in M_1 \times M_2$.

Antes do próximo exemplo, mostraremos um resultado que relaciona os colchetes de Lie de campos de vetores com os colchetes de Poisson.

Proposição 2.57. Para quaisquer funções $f, g \in C^\infty(M)$, os colchetes de Lie e de Poisson satisfazem

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}.$$

Demonstração. A relação segue diretamente da definição do colchete de Lie de campos de vetores e da identidade de Jacobi do colchete de Poisson

$$\begin{aligned} [X_f, X_g](H) &= X_f X_g(H) - X_g X_f(H) \\ &= X_f(\{H, g\}) - X_g(\{H, f\}) \\ &= \{\{H, g\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} \\ &= -\{H, \{f, g\}\} \\ &= -X_{\{f, g\}}(H). \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.58. Toda variedade simplética (M, ω) admite um colchete de Poisson induzido pela 2-forma simplética. De fato, podemos definir um colchete de Poisson em M pela relação

$$\{f, g\}(x) := \omega(x)(X_f(x), X_g(x))$$

com $f, g \in C^\infty(M)$ e $x \in M$. A bilinearidade e anti-simetria seguem diretamente da definição de 2-formas. Para a derivação em cada argumento, basta observar que para qualquer $h \in C^\infty(M)$

$$\{fg, h\} = \mathbf{d}(fg)(X_h) = g\mathbf{d}f(X_h) + f\mathbf{d}g(X_h) = \{f, h\}g + f\{g, h\}.$$

Para verificarmos a identidade de Jacobi, utilizaremos a propriedade da 2-forma simplética ser fechada, $\mathbf{d}\omega = 0$. Pela Proposição 1.29 e considerando os campos X_f, X_g, X_h , podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{d}\omega(X_f, X_g, X_h) &= X_f\omega(X_g, X_h) - X_g\omega(X_f, X_h) + X_h\omega(X_f, X_g) \\ &\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f). \end{aligned}$$

Da relação $[X_g, X_h] = -X_{\{g, h\}}$ (Proposição 2.57) também temos

$$\begin{aligned} X_f \omega(X_g, X_h) &= X_f(\{g, h\}) = \mathbf{d}(\{g, h\})(X_f) \\ &= i_{[X_g, X_h]} \omega(X_f) = \omega(X_f, [X_g, X_h]) = -\{f, \{g, h\}\}. \end{aligned}$$

Combinando as duas relações anteriores obtemos

$$0 = \mathbf{d}\omega(X_f, X_g, X_h) = 2(\{f, \{g, h\}\}) + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\},$$

o que demonstra a identidade de Jacobi.

Exemplo 2.59. Para a variedade simplética $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \omega_0)$ onde ω_0 é a 2-forma simplética canônica, segue do exemplo anterior que o colchete em coordenadas

$$\{f, g\}(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(q, p)}{\partial q^i} \frac{\partial g(q, p)}{\partial p_i} - \frac{\partial g(q, p)}{\partial q^i} \frac{\partial f(q, p)}{\partial p_i},$$

onde $f, g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves.

Observação 2.60. Estruturas de Poisson podem ser degeneradas e portanto nem toda variedade de Poisson define uma estrutura simplética. Entretanto, o Teorema Splitting de Weinstein (ver o livro 'Geometric Models for Noncommutative Algebras' de Ana Cannas Silva e Alan Weinstein) nos diz que toda variedade de Poisson pode ser escrita localmente como o produto de uma variedade simplética com uma variedade de Poisson singular.

Exemplo 2.61. Também é possível definir um colchete no dual de uma álgebra de Lie, \mathfrak{g}^* . Dada uma função suave $f : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$, temos que o mapa tangente $T_\mu f \in L(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Desta forma, definimos o colchete de Poisson em \mathfrak{g}^* como

$$\{f, g\}_{\mathfrak{g}^*}(\mu) := -\langle \mu, [T_\mu f, T_\mu g]_{\mathfrak{g}} \rangle, \quad (2.7)$$

onde $f, g : \mathfrak{g}^* \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$. Observe ainda que para funções lineares da forma $f_\xi(\mu) = \langle \mu, \xi \rangle$ com $\xi \in \mathfrak{g}$, o colchete de Poisson é simplesmente dado por

$$\{f_{\xi_1}, f_{\xi_2}\}_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = -\langle \mu, [\xi_1, \xi_2] \rangle = -f_{[\xi_1, \xi_2]}(\mu).$$

Exemplo 2.62. Considerando a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ no exemplo anterior e lembrando do isomorfismo $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ definido nas Proposições A.1 e A.2, podemos escrever

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\}_{\mathfrak{so}(3)^*}(\tilde{\mathbf{x}}) = -\langle \tilde{\mathbf{x}}, [T_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{f}, T_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{g}] \rangle = -\langle \tilde{\mathbf{x}}, [T_{\tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{f} \circ \tilde{\varphi})(\mathbf{x}), T_{\tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{g} \circ \tilde{\varphi})(\mathbf{x})] \rangle.$$

Desta forma, podemos definir um colchete de Poisson em \mathbb{R}^3 como

$$\{f, g\}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \times \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})], \quad (2.8)$$

onde $f := \tilde{f} \circ \tilde{\varphi}$ e $g := \tilde{g} \circ \tilde{\varphi}$.

Além de nos fornecer uma estrutura de álgebras de Lie, os colchetes de Poisson nos fornece uma descrição simples das equações de movimento como veremos agora.

Lema 2.63. *Seja (M, ω) uma variedade simplética com o colchete de Poisson induzido pela 2-forma simplética, então para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$ temos $\dot{f} = \{f, g\}$ ao longo do fluxo do campo X_g .*

Demonstração. Seja φ_t o fluxo do campo X_g , segue do Teorema da Derivada de Lie (Teorema 1.42) que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t) = \varphi_t^* L_{X_g} f = \varphi_t^* i_{X_g} \mathbf{d}f = \varphi_t^* i_{X_g} i_{X_f} \omega = \varphi_t^* \{f, g\}$$

e portanto, para $t = 0$ obtemos $\dot{f}(x) = \{f, g\}(x)$ para todo $x \in M$. \square

Definição 2.64. *Dizemos que duas funções $f, g \in C^\infty(M)$ estão em **involução** ou **comutam** se $\{f, g\} = 0$, isto é, a função f é constante ao longo do campo X_g .*

Observação 2.65. *Pela anti-simetria do colchete de Poisson, uma função f é constante ao longo do campo X_g se e somente se g é constante ao longo do campo X_f .*

Lembrando que um mapa $\psi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ é dito simplético se $\psi^* \omega_2 = \omega_1$, veremos que também podemos caracterizar mapas simpléticos através dos colchetes de Poisson.

Proposição 2.66. *Um difeomorfismo $\psi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ é simplético, se e somente se*

$$\{f, g\}_{M_2} \circ \psi = \{f \circ \psi, g \circ \psi\}_{M_1}$$

para todo $f, g \in C^\infty(M_2)$. De forma geral, o mapa ψ que satisfaça a relação acima é chamado de **mapa de Poisson**.

Demonstração. Tomando um ponto $p \in M_1$ e supondo que ψ seja simplética, então

$$\psi^* \omega_2(p)(X_{f \circ \psi}, X_{g \circ \psi}) = \omega_1(p)(X_{f \circ \psi}, X_{g \circ \psi}) = \{f \circ \psi, g \circ \psi\}_{M_1}(p).$$

Por outro lado, pela Proposição 2.9 temos que $\psi^* X_f = X_{f \circ \psi}$ e portanto

$$\begin{aligned} \psi^* \omega_2(p)(X_{f \circ \psi}, X_{g \circ \psi}) &= \psi^* \omega_2(p)(\psi^* X_f, \psi^* X_g) \\ &= \psi^* \omega_2(p)(T_\psi \psi^{-1} X_f, T_\psi \psi^{-1} X_g) \\ &= \omega_2(\psi(p))(T_p \psi \circ T_\psi \psi^{-1} X_f, T_p \psi \circ T_\psi \psi^{-1} X_g) \\ &= \omega_2(\psi(p))(X_f, X_g) \\ &= \{f, g\}_{M_2} \circ \psi(p). \end{aligned}$$

A volta é análoga. \square

Corolário 2.67. *Seja $\psi : Q_1 \rightarrow Q_2$ um difeomorfismo entre variedades, então o levantamento cotangente $\psi^{T^*} : T^*Q_2 \rightarrow T^*Q_1$ preserva os colchetes canônicos de Poisson*

$$\{f, g\}_{T^*Q_1} \circ \psi^{T^*} = \{f \circ \psi^{T^*}, g \circ \psi^{T^*}\}_{T^*Q_2}$$

onde $f, g : T^*Q_1 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves.

Demonstração. Segue diretamente das Proposições 1.90 e 2.66. \square

Veremos agora que os mapas momento \mathbf{J} (Definição 2.34) Ad^* -equivariante são mapas de Poisson em relação à estrutura de Poisson em \mathfrak{g}^* definida no Exemplo 2.61.

Proposição 2.68. *Seja (P, ω) uma variedade simplética com um mapa momento $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ Ad^* -equivariante. Então o mapa momento \mathbf{J} é um mapa de Poisson*

$$\{f, g\}_{\mathfrak{g}^*} \circ \mathbf{J} = \{f \circ \mathbf{J}, g \circ \mathbf{J}\}_P$$

para todo $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

Demonstração. Considerando o ponto $x \in P$, a definição do colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\mathfrak{g}^*}$ no Exemplo 2.61 e do homomorfismo de álgebras de Lie $J : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(P)$ do Lema 2.47, temos

$$\{f, g\}_{\mathfrak{g}^*}(\mathbf{J}(x)) = \langle \mathbf{J}(x), [\xi, \eta] \rangle = J([\xi, \eta])(x) = \{J(\xi), J(\eta)\}_P(x) \quad (2.9)$$

onde $\xi := \delta f(\mu)/\delta \mu, \eta := \delta g(\mu)/\delta \mu \in \mathfrak{g}$ com $\mu = \mathbf{J}(x)$. Considerando um vetor tangente $v \in T_x P$

$$\mathbf{d}(f \circ \mathbf{J})(x)v = \mathbf{d}f(\mu) \cdot T_x \mathbf{J}(v) = \langle T_x \mathbf{J}(v), \xi \rangle = \mathbf{d}J(\xi)(x)v$$

e portanto $\mathbf{d}(f \circ \mathbf{J}) = \mathbf{d}J(\xi)$. Como o colchete de Poisson só depende da primeira derivada, obtemos

$$\begin{aligned} \{f \circ \mathbf{J}, g \circ \mathbf{J}\}_P(x) &= \mathbf{d}(f \circ \mathbf{J})(x)X_{g \circ \mathbf{J}}(x) \\ &= \mathbf{d}J(\xi)(x)X_{g \circ \mathbf{J}}(x) \\ &= \{J(\xi), g \circ \mathbf{J}\}_P(x) \\ &= \{J(\xi), J(\eta)\}_P(x) \\ &= \{f, g\}_{\mathfrak{g}^*}(\mathbf{J}(x)). \end{aligned}$$

□

Vimos que dada uma variedade simplética (M, ω) , sempre é possível definir um colchete de Poisson induzido pela 2-forma simplética. Uma pergunta natural é como o colchete canônico de uma subvariedade simplética $S \subset M$ está relacionada com o colchete de M ? Esta relação é dada pela Fórmula de Dirac que veremos a seguir.

Proposição 2.69 (Fórmula de Dirac). *Dada uma $2n$ -variedade simplética M com o colchete de Poisson canônico e considerando as funções $C_i \in C^\infty(M)$ com $i = 1, \dots, 2k < 2n$, que definem a subvariedade*

$$S = \bigcap_{i=1}^{2k} \{x \in M \mid C_i(x) = 0\},$$

e a matriz $W = [W_{ij}]$, que tem como elementos $W_{ij} = \{C_i, C_j\}_M$. Então se S é uma subvariedade simplética de M , o colchete de Poisson simplético em S é dada pela relação

$$\{f|_S, g|_S\}_S = \{f, g\}_M - \sum_{i,j=1}^{2k} \{f, C_i\}_M W^{ij} \{C_j, g\}_M,$$

onde $[W^{ij}]$ é a matriz inversa de W e $f, g \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função qualquer, a demonstração se baseia em projetar ortogonalmente o campo $X_f(x)$ ao plano tangente $T_x S$, determinado um campo tangente a superfície S dado por

$$X_{f|_S} = X_f - \sum_{i,j=1}^{2k} \{f, C_i\}_M W^{ij} \{C_j, g\}_M.$$

Este processo é semelhante ao que é feito na ortogonalização de vetores. Para a demonstração completa, o leitor pode consultar a Seção 8.5 de [22]. \square

Exemplo 2.70. Considere a variedade simplética $T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e duas funções de restrição $C_1, C_2 : T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$C_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{q}\|^2 - \frac{1}{2} \quad e \quad C_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}.$$

Seguindo as definições da proposição anterior, temos a subvariedade $S \simeq T^*S^2$ e a matriz

$$[W^{ij}] = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então para quaisquer funções $f, g \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^3)$, a fórmula de Dirac da Proposição anterior nos fornece

$$\begin{aligned} \{f|_S, g|_S\}_S &= \{f, g\}_{\mathbb{R}^6} - \sum_{i,j=1}^2 \{f, C_i\}_{\mathbb{R}^6} W^{ij} \{C_j, g\}_{\mathbb{R}^6} \\ &= \{f, g\}_{\mathbb{R}^6} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} (-\{f, C_1\}_{\mathbb{R}^6} \{C_2, g\}_{\mathbb{R}^6} + \{f, C_2\}_{\mathbb{R}^6} \{C_1, g\}_{\mathbb{R}^6}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podemos pensar agora em determinar através do colchete de Dirac, as equações de movimento de uma partícula de massa m que se move sobre a 2-esfera S^2 , com a função Hamiltoniana $H : T^*S^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}\|^2 + V(\mathbf{q}).$$

Aplicando a relação (2.10), obtemos as equações de movimento da partícula restrito a superfície da 2-esfera

$$\dot{q}^i = \{q^i, H|_S\}_{S^2}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{p_i}{m} - \frac{q^i}{m\|\mathbf{q}\|^2} \sum_{k=1}^3 q^k p_k,$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H|_S\}_{S^2}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q^i} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \left[q^i \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{m} p_k^2 - q^k \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q^k} \right) - \frac{p_i}{m} \sum_{k=1}^3 q^k p_k \right].$$

Veremos agora que dada uma ação de G numa variedade de Poisson M , é possível obtermos no quociente M/G uma estrutura Poisson induzida.

Definição 2.71. Dizemos que uma ação $\phi : G \times (M, \{\cdot, \cdot\}_M) \rightarrow (M, \{\cdot, \cdot\}_M)$ é *canônica* se ϕ_g é um mapa de Poisson para cada $g \in G$

$$\{f, g\}_M \circ \phi_g = \{f \circ \phi_g, g \circ \phi_g\}_M \quad \text{com} \quad f, g \in C^\infty(M).$$

Teorema 2.72 (Redução de Poisson). *Supondo que o grupo de Lie G age canonicamente na variedade de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$ e que o quociente M/G é uma variedade suave com a projeção $\pi : M \rightarrow M/G$ sendo uma submersão. Então existe um único colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{M/G}$ em M/G chamado de **colchete de Poisson reduzido** tal que π seja um mapa de Poisson*

$$\{f, g\}_{M/G} \circ \pi = \{f \circ \pi, g \circ \pi\}_M \quad \text{para todo } f, g \in C^\infty(M/G).$$

Além disso, se $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função suave G -invariante, definimos a função $\tilde{H} : M/G \rightarrow \mathbb{R}$ por $H = \tilde{H} \circ \pi$. Seja φ_t e $\tilde{\varphi}_t$ os fluxos dos campos X_H e $X_{\tilde{H}}$, então

$$\tilde{\varphi}_t \circ \pi = \pi \circ \varphi_t \quad \text{para todo } t.$$

Demonstração. Veremos na Seção 3.2 uma demonstração para variedades simpléticas, com o colchete de Poisson induzido pela 2-forma simplética. \square

Para finalizar esta seção, veremos as funções de Casimir, que são funções onde o colchete de Poisson comuta com todas as outras funções e desempenham um papel importante no estudo da estabilidade corpo rígido da Seção 4.4.

Definição 2.73. *Uma função $C \in C^\infty(M)$ é chamada de **Casimir** se o colchete de Poisson comuta com qualquer outra função, isto é,*

$$\{C, g\} = 0 \quad \text{para todo } g \in C^\infty(M).$$

Observação 2.74. *A definição acima, nos diz que qualquer dinâmica Hamiltoniana ficará dentro de um conjunto de nível de C , isto é, C sempre será uma quantidade conservada.*

Exemplo 2.75. *Vamos determinar as funções de Casimir em \mathbb{R}^3 com o colchete de Poisson*

$$\{f, g\}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \times \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})) \quad \text{com } f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Para que uma função suave $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ seja de Casimir, uma condição suficiente é que o gradiente $\nabla_{\mathbf{x}} C(\mathbf{x})$ seja paralela ao vetor \mathbf{x} . Escrevendo $C(\mathbf{x}) = (\Phi \circ \psi)(\mathbf{x})$ com $\psi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ e $\Phi : \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, temos

$$\nabla_{\mathbf{x}} C = \Phi' \nabla_{\mathbf{x}} \psi$$

e portanto queremos que $\nabla_{\mathbf{x}} \psi = \mathbf{x}$. Uma função que satisfaz esta condição é

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2.$$

Desta forma, obtemos uma família de funções de Casimir

$$C(\mathbf{x}) = C_\Phi(\mathbf{x}) := \Phi\left(\frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2\right).$$

2.4.1 Colchete de Poisson em $SO(3) \times \mathbb{R}^3$

O objetivo desta seção é calcular a expressão do colchete de Poisson no espaço de fases $P_{CR} = SO(3) \times \mathbb{R}^3$, que aparece no estudo do corpo rígido da Seção 4.4. Para isso, vamos primeiramente determinar a 2-forma simplética em P_{CR} .

Lembrando que para um grupo de Lie G qualquer, definimos a 1-forma tautológica θ_0 em T^*G por

$$\theta_0(\alpha_g) = T^*\pi\alpha_g,$$

onde $\alpha_g \in T_g^*G$. Desta forma, podemos definir uma 2-forma simplética $\omega = -\mathbf{d}\theta_0$. Vimos também que existe um difeomorfismo entre o fibrado cotangente T^*G e $G \times \mathfrak{g}^*$ dado pela **trivialização pela esquerda**

$$\begin{aligned} \psi_L : T^*G &\rightarrow G \times \mathfrak{g}^* \\ (g, \alpha_g) &\mapsto (g, \alpha_g \circ T_e L_g). \end{aligned} \quad (2.11)$$

O difeomorfismo acima induz uma 1-forma em $G \times \mathfrak{g}^*$ por $\theta_B := (\psi_L)_*\theta_0 \in \Omega^1(G \times \mathfrak{g}^*)$ e a 2-forma simplética $\omega_B := -\mathbf{d}\theta_B \in \Omega^2(G \times \mathfrak{g}^*)$.

Proposição 2.76. *Considerando a 1-forma θ_B e a 2-forma simplética ω_B em $G \times \mathfrak{g}^*$ definidas acima, temos*

1. $\theta_B(g, \eta)(v, \rho) = \langle \eta, T_g L_{g^{-1}} v \rangle$;
2. $\omega_B(g, \eta)((v, \rho), (w, \sigma)) = \langle \eta, [T_g L_{g^{-1}} v, T_g L_{g^{-1}} w]_{\mathfrak{g}} \rangle - \langle \rho, T_g L_{g^{-1}} w \rangle + \langle \sigma, T_g L_{g^{-1}} v \rangle$,

onde $(g, \eta) \in G \times \mathfrak{g}^*$ e $(v, \alpha), (w, \beta) \in T_{(g, \eta)}(G \times \mathfrak{g}^*) \simeq T_g G \times \mathfrak{g}^*$.

Demonstração. (1) Da definição da 1-forma tautológica em T^*G (Definição 1.84), obtemos

$$\begin{aligned} \theta_B(g, \eta)(v, \rho) &= (\psi_L)_*\theta_0(g, \eta)(v, \rho) \\ &= \langle \psi_L^{-1}(g, \eta), T_{\psi_L^{-1}(g, \rho)} \pi(T\psi_L^{-1}(v, \rho)) \rangle \\ &= \langle \eta \circ T_g L_{g^{-1}}, T_{(g, \rho)}(\pi \circ \psi_L^{-1})(v, \rho) \rangle \\ &= \langle \eta, T_g L_{g^{-1}} v \rangle. \end{aligned}$$

(2) Considere os campos de vetores $X = (X^1, X^2 = \rho), Y = (Y^1, Y^2 = \sigma) \in \mathfrak{X}(G \times \mathfrak{g}^*)$, com as componentes $X^1, Y^1 \in \mathfrak{X}(G)$ invariantes pela ação de translação peça esquerda. Com um pouco de cálculo, segue da definição de derivada de Lie que

$$L_X(\theta_B(Y))(g, \eta) = \langle \rho, T_g L_{g^{-1}} \cdot v \rangle \quad \text{e} \quad L_Y(\theta_B(X))(g, \eta) = \langle \sigma, T_g L_{g^{-1}} \cdot v \rangle.$$

Além disso, podemos escrever $[X, Y](g, \eta) = ([X^1, Y^1](g), [X^2, Y^2](\eta))$ e portanto

$$\begin{aligned} \theta_B(g, \eta)([X, Y]) &= \langle \eta, T_g L_{g^{-1}} [X^1, Y^1] \rangle \\ &= \langle \eta, [X^1(e), X^2(e)] \rangle \\ &= \langle \eta, [T_g L_{g^{-1}} v, T_g L_{g^{-1}} w] \rangle. \end{aligned}$$

Com estes termos calculados intermediários, a relação desejada segue diretamente do Lema 1.45 que diz

$$\mathbf{d}\theta_B(X, Y) = L_X(\theta_B(Y)) - L_Y(\theta_B(X)) - \theta_B([X, Y]).$$

□

Considere agora o ponto $(R, \tilde{\mathbf{x}}) \in SO(3) \times \mathfrak{so}(3)^*$ e os vetores tangentes $(R\widehat{\mathbf{w}}_i, \tilde{\mathbf{v}}_i) \in T_R SO(3) \times \mathfrak{so}(3)^*$, segue da proposição anterior que a 2-forma simplética em $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)^*$ é dada por

$$\begin{aligned} \omega_B(R, \tilde{\mathbf{x}})((R\widehat{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1), (R\widehat{\mathbf{w}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_2)) &= \langle \tilde{\mathbf{x}}, [\widehat{\mathbf{w}}_1, \widehat{\mathbf{w}}_2]_{\mathfrak{so}(3)} \rangle - \langle \tilde{\mathbf{v}}_1, \widehat{\mathbf{w}}_2 \rangle + \langle \tilde{\mathbf{v}}_2, \widehat{\mathbf{w}}_1 \rangle \\ &= \mathbf{x} \cdot (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2) - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde utilizamos a identificação $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)^*$ das Proposições A.1 e A.2. Vendo a 2-forma simplética ω_B como definida em $P_{CR} = SO(3) \times \mathbb{R}^3$, podemos definir o colchete de Poisson

$$\{F, G\}_{P_{CR}} := \omega_B(X_F, X_G)$$

onde $F, G : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves e X_F e X_G seus respectivos campos.

O primeiro passo para determinarmos a expressão deste colchete, é calcularmos as expressões dos campos de vetores X_F e X_G . Para isso, considere o vetor tangente $(R\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) \in T_{(R, \mathbf{x})} SO(3) \times \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{d}F(R, \mathbf{x})(R\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{s=0} F(R \exp[s\widehat{\mathbf{w}}], \mathbf{x} + s\mathbf{v}) = F_R \mathbf{w} + F_{\mathbf{x}} \mathbf{v},$$

onde os coeficientes $F_R, F_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ são dados por

$$F_R \mathbf{w} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} F(R \exp[s\widehat{\mathbf{w}}], \mathbf{x}) \quad \text{e} \quad F_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} F, \quad (2.13)$$

onde $\nabla_{\mathbf{x}} = (\partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \partial_{x^3})$. Escrevendo o campo de F como $X_F(R, \mathbf{x}) = (R\widehat{\varphi}(X_F^R), X_F^{\mathbf{x}})$, temos

$$\begin{aligned} F_R \mathbf{w} + F_{\mathbf{x}} \mathbf{v} &= \mathbf{d}F(R, \mathbf{x})(R\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) \\ &= i_{X_F} \omega_B(R, \mathbf{x})(R\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) \\ &= \omega_B(R, \mathbf{x})(X_F(R, \mathbf{x}), (R\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{v})) \\ &= \mathbf{x} \cdot (X_F^R \times \mathbf{w}) - X_F^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot X_F^R \\ &= (\mathbf{x} \times X_F^R - X_F^{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{w} + X_F^R \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pela última relação de (2.14), obtemos os coeficientes do campo X_F no ponto (R, \mathbf{x})

$$X_F^R = F_{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad X_F^{\mathbf{x}} = -F_R + \mathbf{x} \times F_{\mathbf{x}},$$

e portanto o campo é dado por

$$X_F(R, \mathbf{x}) = (R\widehat{\varphi}(F_{\mathbf{x}}), -F_R + \mathbf{x} \times F_{\mathbf{x}}).$$

De forma análoga, podemos obter a expressão do campo X_G . Aplicando os campos X_F e X_G na 2-forma simplética ω_B , obtemos a expressão para o colchete de Poisson

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{P_{CR}}(R, \mathbf{x}) &= \omega_B(R, \mathbf{x})(X_F(R, \mathbf{x}), X_G(R, \mathbf{x})) \\ &= \mathbf{x} \cdot (X_F^R \times X_G^R) - X_F^{\mathbf{x}} \cdot X_G^R + X_G^{\mathbf{x}} \cdot X_F^R \\ &= \mathbf{x} \cdot (F_{\mathbf{x}} \times G_{\mathbf{x}}) - (-F_R + \mathbf{x} \times F_{\mathbf{x}}) \cdot G_{\mathbf{x}} + (-G_R + \mathbf{x} \times G_{\mathbf{x}}) \cdot F_{\mathbf{x}} \\ &= -\mathbf{x} \cdot (F_{\mathbf{x}} \times G_{\mathbf{x}}) + F_R \cdot G_{\mathbf{x}} - G_R \cdot F_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

que pelas relações (2.13), podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{PCR}(R, \mathbf{x}) = & -\mathbf{x} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \times \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x})) + \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} F(R \exp[s\hat{\varphi}(\nabla_{\mathbf{x}} G)], \mathbf{x}) \\ & - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} G(R \exp[s\hat{\varphi}(\nabla_{\mathbf{x}} F)], \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Aplicaremos este resultado na Seção 4.4 para determinarmos as equações de movimento do corpo rígido.

Capítulo 3

Redução Simplética e Reconstrução da Dinâmica

Neste capítulo estudaremos o Teorema de Redução Simplética, também conhecido como Teorema de Redução de Marsden-Weinstein. Este teorema nos permite, sob algumas hipóteses, reduzir uma variedade simplética (P, ω) sobre a ação de um grupo de Lie G a uma outra variedade simplética (P_μ, ω_μ) de dimensão menor, onde o sistema pode ser integrado e, por um processo de reconstrução, obtermos a dinâmica de original em (P, ω) .

Veremos também o caso particular onde o espaço de fases é um fibrado cotangente de um grupo de Lie, $P = T^*G$. Neste caso o espaço reduzido pode ser identificado com as órbitas coadjuntas, $P_\mu \simeq G \cdot \mu$ as quais possuem aplicação no estudo da dinâmica do corpo rígido. Este capítulo tem como referências principais os textos [1] e [20].

3.1 Teorema de Redução Simplética

Iniciaremos apresentando alguns resultados e ideias que utilizaremos na demonstração do Teorema de Redução. O lema a seguir nos fornece um caráter geométrico do comportamento das órbitas na subvariedade $\mathbf{J}^{-1}(\mu) \subset P$.

Lema 3.1 (Lema de Redução). *Seja (P, ω) uma variedade de simplética e $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ um mapa momento Ad^* -equivariante pela ação de G em P . Então para um valor regular $\mu \in \mathfrak{g}^*$ do mapa momento \mathbf{J} e o ponto $p \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ temos:*

1. $\mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu) = G \cdot \mathbf{J}^{-1}(\mu)$;
2. $G_\mu \cdot p = (G \cdot p) \cap \mathbf{J}^{-1}(\mu)$;
3. $T_p(G_\mu \cdot p) = T_p(G \cdot p) \cap T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu))$;
4. $T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu)) = (T_p(G \cdot p))^\omega$.

Demonstração. (1) Provaremos primeiramente que $\mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu) \supset G \cdot \mathbf{J}^{-1}(\mu)$, mostrando que $\mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu)$ é G -invariante. Seja $p' \in \mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu)$, então existe algum $g \in G$ tal que $\mathbf{J}(p') = Ad_g^* \mu$. Segue da Ad^* -equivariância do mapa momento \mathbf{J} que para qualquer $h \in G$

$$\mathbf{J}(\phi_h(p')) = Ad_h^* \mathbf{J}(p') = Ad_h^* Ad_g^* \mu.$$

Observe ainda que pela definição da ação coadjunta Ad^* e pela Observação 2.22, temos para qualquer $\xi \in \mathfrak{g}$ que

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}_h^* \text{Ad}_g^* \mu, \xi \rangle &= \langle \text{Ad}_g^* \mu, \text{Ad}_{h^{-1}} \xi \rangle \\ &= \langle \mu, \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \text{Ad}_{h^{-1}} \xi \rangle \\ &= \langle \mu, \text{Ad}_{g^{-1}h^{-1}} \xi \rangle. \end{aligned}$$

Desta forma, o mapa momento satisfaz

$$\mathbf{J}(\phi_g(p')) = \text{Ad}_{hg}^* \mu$$

e portanto $p' \in G \cdot \mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu)$. Logo, a superfície $\mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu)$ é G -invariante. Como $\mathbf{J}^{-1}(\mu) \subset \mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu)$, segue que $G \cdot \mathbf{J}^{-1}(\mu) \subset \mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu)$.

Por outro lado, $p' \in \mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu)$ se e somente se existe algum $g \in G$ tal que $\mathbf{J}(p') = \text{Ad}_g^* \mu$. Assim, $\mu = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mathbf{J}(p') = \mathbf{J}(\phi_{g^{-1}}(p'))$ e portanto $\phi_{g^{-1}}(p') \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$. Como podemos escrever $p' = \phi_g(\phi_{g^{-1}}(p')) \in G \cdot \mathbf{J}^{-1}(\mu)$, segue que $\mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu) \subset G \cdot \mathbf{J}^{-1}(\mu)$, o que conclui a demonstração deste item.

(2) Como $p \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$, então da Ad^* -equivariância do mapa momento, temos as relações equivalentes

$$\begin{aligned} p' \in (G \cdot p) \cap \mathbf{J}^{-1}(\mu) &\iff \mu = \mathbf{J}(\phi_g(p)) = p' = \text{Ad}_g^* \mathbf{J}(p) \\ &\iff \mu = \text{Ad}_g^* \mu \\ &\iff g \in G_\mu. \end{aligned}$$

Portanto $p' \in (G \cdot p) \cap \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ se e somente se $p' \in G_\mu \cdot p$.

(3) Considere agora o vetor tangente $v \in T_p(G \cdot p) \cap T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu))$. Então existe $\xi \in \mathfrak{g}$ tal que podemos escrever $v = \xi_P(p)$ e pelo fato de $v \in T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu))$, temos $T_p \mathbf{J}(v) = 0$. Da Ad^* -equivariância do mapa momento, segue que

$$T_p \mathbf{J}(\xi_P(p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathbf{J} \circ \phi(\exp t\xi, p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp t\xi}^* \mathbf{J}(p) = \text{ad}_\xi^* \mathbf{J}(p)$$

o que nos fornece $\text{ad}_\xi^* \mu \equiv 0$, isto é, $\xi \in \mathfrak{g}_\mu = \{\eta \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_\eta^* \mu = 0\}$ e portanto $v \in T_p(G_\mu \cdot p)$. A inclusão $T_p(G_\mu \cdot p) \subset T_p(G \cdot p) \cap T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu))$ segue diretamente do item (2).

(4) Se $v \in (T_p(G \cdot p))^\omega$, então $\omega(p)(\xi_P(p), v) = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Pela definição de mapa momento, os campos estão relacionados por $X_{\mathbf{J}(\xi)} = \xi_P$. Então, para qualquer $\xi \in \mathfrak{g}$

$$0 = \omega(p)(\xi_P(p), v) = \langle T_p \mathbf{J}(v), \xi \rangle$$

o que implica que o vetor $v \in (T_p(G \cdot p))^\omega$ se e somente se $v \in \ker T_p \mathbf{J} = T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu))$. \square

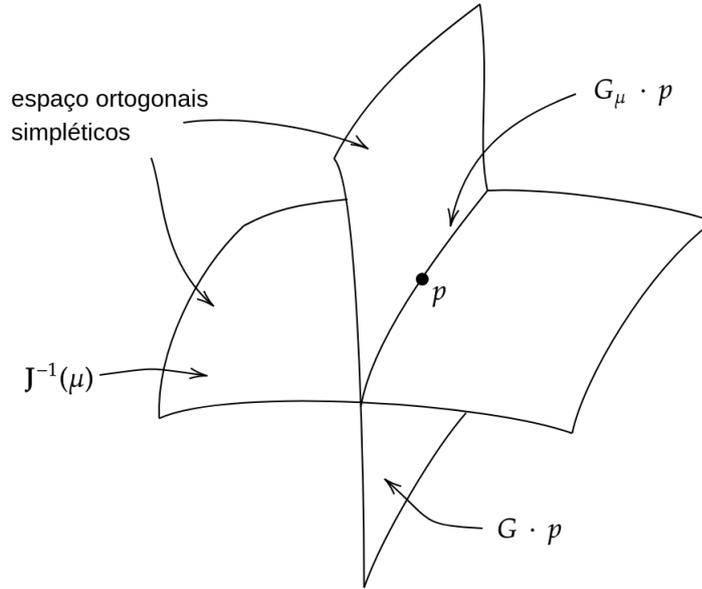


Figura 3.1: Órbitas $G_{\mu} \cdot p$ na subvariedade $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$.

Observação 3.2. *Os itens (1), (2) e (3) podem ser generalizados para variedades de Poisson. Apenas o item (4) necessita que o espaço seja simplético para que se tenha uma noção de ortogonalidade. Observe ainda que o item (3) é uma versão infinitesimal do item (2). A figura acima exemplifica graficamente os 4 resultados do Lema.*

Pelas condições do Lema 3.1, tomando o espaço vetorial $W = T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu))$, segue do item (4) que $W^{\omega} = T_p(G \cdot p)$. Se W for coisotrópico (ver a Seção 1.5.1), então do item (3) obtemos $W^{\omega} = T_p(G_{\mu} \cdot p)$ e portanto existe uma estrutura simplética no espaço quociente $T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu))/T_p(G_{\mu} \cdot p)$. Isso particulariza o que veremos no Teorema de Redução Simplética, sem a necessidade que W seja coisotrópico.

Observação 3.3. *Seja $\phi : G \times P \rightarrow P$ uma ação qualquer. Se $\mu \in \mathfrak{g}^*$ for valor regular do mapa momento \mathbf{J} , então $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ é uma subvariedade suave de P . Portanto, podemos definir uma restrição da ação ϕ por*

$$\phi' = \phi|_{G_{\mu} \times \mathbf{J}^{-1}(\mu)} : G_{\mu} \times \mathbf{J}^{-1}(\mu) \rightarrow \mathbf{J}^{-1}(\mu)$$

Observe que a necessidade de o mapa momento seja Ad^ -equivariante e que a ação seja restrita ao grupo de isotropia, vem do fato queremos que essa ação esteja bem definida. De fato, se $g \in G_{\mu}$ e $x \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$, temos*

$$(\mathbf{J} \circ \phi_g)(x) = (Ad_g^* \circ \mathbf{J})(x) = \mu$$

isto é, $\phi_g(x) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$. Se a ação ϕ' for livre e própria, segue da proposição anterior que $\mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_{\mu}$ é uma variedade suave e que a projeção $\pi_{\mu} : \mathbf{J}^{-1}(\mu) \rightarrow \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_{\mu}$ é uma submersão. O Teorema de Redução a seguir próximo nos mostra o espaço quociente admite uma estrutura simplética e portanto é uma variedade simplética.

Teorema 3.4 (Redução Simplética). *Seja (P, ω) uma variedade simplética e uma ação simplética do grupo de Lie G em P . Suponha que existe um mapa momento $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que é Ad^* -equivariante pela ação e que $\mu \in \mathfrak{g}^*$ é um valor regular de \mathbf{J} tal que a ação do grupo de isotropia G_μ em $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ seja livre e própria. Então, o espaço quociente $P_\mu := \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu$ admite uma única forma simplética ω_μ definida por*

$$\pi_\mu^* \omega_\mu = i_\mu^* \omega,$$

onde $\pi_\mu : \mathbf{J}^{-1}(\mu) \rightarrow P_\mu$ é a projeção canônica e $i_\mu : \mathbf{J}^{-1}(\mu) \hookrightarrow P$ é a inclusão. Chamaremos (P_μ, ω_μ) de **espaço simplético reduzido**.

Demonstração. Pela Proposição 2.19, temos que o espaço reduzido P_μ é uma variedade e π_μ é uma submersão. Basta portanto verificarmos que ω_μ define uma estrutura simplética.

Seja $p \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ um ponto qualquer, escreveremos sua projeção como $\pi_\mu(p) = [p] \in P_\mu$ e para o vetor $v \in T_p \mathbf{J}^{-1}(\mu)$, denotaremos a sua classe de equivalência no espaço quociente $T_p \mathbf{J}^{-1}(\mu)/T_p(G_\mu \cdot p)$ como $[v]$. Como a projeção $\pi_\mu : \mathbf{J}^{-1}(\mu) \rightarrow P_\mu$ é uma submersão sobrejetiva e o mapa tangente $T_p \pi_\mu : T_p \mathbf{J}^{-1}(\mu) \rightarrow T_{[p]} P_\mu$ é tal que $\ker T_p \pi_\mu = T_p(G_\mu \cdot p)$, temos pelo Teorema do Isomorfismo que podemos identificar o espaço $T_{[p]} P_\mu$ com o quociente dos espaços tangentes $T_p \mathbf{J}^{-1}(\mu)/T_p(G_\mu \cdot p)$. Desta forma, podemos definir a 2-forma $\omega_\mu \in \Omega^2(P_\mu)$ como

$$\omega_\mu([p])([v], [w]) = \omega(p)(v, w),$$

onde $[p] \in P_\mu$ e $v, w \in T_p \mathbf{J}^{-1}(\mu)$. Esta definição é equivalente a expressão $\pi_\mu^* \omega_\mu = i_\mu^* \omega$.

Precisamos agora verificar que a 2-forma ω_μ está bem definida, isto é, independe da escolha dos representantes da classe. Considerando a restrição da ação $\phi' = \phi|_{G_\mu \times \mathbf{J}^{-1}(\mu)}$ da Observação 3.3, tomemos o ponto $q = \phi'_g(p)$ e os vetores $v' = T_p \phi'_g(v), w' = T_p \phi'_g(w) \in T_{\phi'_g(p)} \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ tais que $[v''] = [v']$ e $[w''] = [w']$. Então $v'' - v', w'' - w' \in \ker T_{\phi'_g(p)} \pi_\mu = T_{\phi'_g(p)}(G_\mu \cdot p)$ e assim

$$\begin{aligned} \omega(q)(v'', w'') &= \omega(q)((v'' - v') + v', (w'' - w') + w') \\ &= \omega(q)(v'' - v', w'' - w') + \omega(q)(v'' - v', w') + \omega(q)(v', w'' - w') \\ &\quad + \omega(q)(v', w'). \end{aligned}$$

Pelos itens (3) e (4) do Lema da Redução 3.1 e pelo fato da ação ϕ' ser simplética, obtemos

$$\begin{aligned} \omega(q)(v'', w'') &= \omega(q)(v', w') \\ &= \omega(\phi'_g(p))(T_p \phi'_g(v), T_p \phi'_g(w)) \\ &= (\phi_g^* \omega)(p)(v, w) \\ &= \omega(p)(v, w). \end{aligned}$$

Portanto, a 2-forma ω_μ está bem definida. Vamos verificar agora que ela é fechada. Como $\mathbf{d}\omega = 0$ e o pull-back comuta com a derivada exterior da 2-forma, obtemos

$$\pi_\mu^* \mathbf{d}\omega_\mu = \mathbf{d}\pi_\mu^* \omega_\mu = \mathbf{d}i_\mu^* \omega = i_\mu^* \mathbf{d}\omega = 0.$$

Segue do fato de π_μ ser uma submersão sobrejetiva e da Proposição 1.32, que o pull-back π_μ^* é injetiva e portanto $\mathbf{d}\omega_\mu = 0$. Garantindo assim que a 2-forma ω_μ seja fechada.

Para verificarmos que ω_μ é não-degenerada, considere que $\omega_\mu([p])([v], [w]) = 0$ para todo $w \in T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu))$ e portanto $\omega(p)(v, w) = 0$ para todo $w \in T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu))$. Pelo item (4) do Lema da Redução, temos $v \in (T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu)))^\omega = T_p(G \cdot p)$ e do item (3) que $v \in T_p(G_\mu \cdot p) = T_p(\mathbf{J}^{-1}(\mu)) \cap T_p(G \cdot p)$. Portanto $[v] = 0$, o que demonstra que ω_μ é não-degenerada.

Falta ainda provarmos que a 2-forma ω_μ é única. Suponhamos que existam duas 2-formas $\omega'_\mu, \omega_\mu \in \Omega^2(P_\mu)$ que satisfaçam a relação. Como π_μ é uma submersão sobrejetiva, temos que o pull-back π_μ^* é injetivo e portanto $\ker \pi_\mu^* = \{0\}$. De $\pi_\mu^*(\omega'_\mu - \omega_\mu) = 0$ segue que $\omega'_\mu = \omega_\mu$, provando assim a unicidade. \square

Uma consequência do Teorema de Redução é que a variedade simplética (P_μ, ω_μ) é de dimensão menor que (P, ω)

$$\dim P_\mu = \dim \mathbf{J}^{-1}(\mu) - \dim G_\mu = \dim P - \dim G - \dim G_\mu.$$

Seria interessante se a partir das curvas integrais do sistema no espaço reduzido (P_μ, ω_μ) pudéssemos de alguma forma obter as integrais em (P, ω) . Veremos na Seção de Reconstrução como realizar tal processo. Antes disso, segue alguns exemplos simples da aplicação do Teorema de Redução Simplética.

Exemplo 3.5. No Teorema de Redução Simplética, dado um valor regular μ do mapa momento $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ com P simplética, então não necessariamente $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ é simplético. Mas por exemplo, se $G = \{e\}$, então $\mathfrak{g} = \{0\}$ e desta forma $\mathbf{J}^{-1}(\mu) = P$ é simplético.

Exemplo 3.6. Seja (P, ω) uma variedade simplética e suponha que a 2-forma simplética é exata, $\omega = -\mathbf{d}\alpha$ com $\alpha \in \Omega^1(P)$ e supondo que existe uma seção global $s : P_\mu \rightarrow \mathbf{J}^{-1}(\mu)$, definimos $\alpha_\mu := s^*i^*\alpha \in \Omega^1(P_\mu)$. Como $\pi_\mu \circ s = \text{id}_{P_\mu} : P_\mu \rightarrow P_\mu$ é a identidade, temos

$$\begin{aligned} \omega_\mu &= (\pi_\mu \circ s)^*\omega_\mu = s^*\pi_\mu^*\omega_\mu \\ &= s^*i_\mu^*\omega = -s^*i_\mu^*\mathbf{d}\alpha \\ &= -\mathbf{d}s^*i_\mu^*\alpha = -\mathbf{d}\alpha_\mu \end{aligned}$$

Portanto a forma reduzida ω_μ também é exata.

Exemplo 3.7. Considere a ação do círculo $S^1 \simeq \mathbb{R}$ na variedade simplética $(\mathbb{C}^{n+1}, \omega_0)$ definida por

$$\begin{aligned} \phi : S^1 \times \mathbb{C}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (e^{i\theta}, (z_1, \dots, z_{n+1})) &\mapsto (e^{i\theta}z_1, \dots, e^{i\theta}z_{n+1}), \end{aligned}$$

onde a 2-forma canônica é dada por

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{n+1} dz_k \wedge d\bar{z}_k.$$

Dado $\xi \in \mathbb{R}$, temos que o gerador infinitesimal

$$\xi(z_1, \dots, z_{n+1}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(t\xi, (z_1, \dots, z_{n+1})) = i\xi(z_1, \dots, z_{n+1})$$

Escrevendo $z_k = x_k + iy_k$ para $j = 1, \dots, n+1$, pela definição de mapa momento (Definição 2.34) temos que o campo Hamiltoniano satisfaz $X_{J(\xi)}(z) = \xi(z)$ e portanto

$$\frac{\partial J(\xi)}{\partial y_k}(z) = -\xi y_k \quad e \quad \frac{\partial J(\xi)}{\partial x_k}(z) = -\xi x_k$$

onde $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n+1}) = x + iy$. Desta forma

$$J(\xi)(z_1, \dots, z_{n+1}) = \xi \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} (x_j^2 + y_j^2) \right) = \xi \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \|z_k\|^2 \right).$$

Como o mapa momento satisfaz $\mathbf{J}(z_1, \dots, z_{n+1})\xi = J(\xi)(z_1, \dots, z_{n+1})$, temos

$$\mathbf{J}(z_1, \dots, z_{n+1}) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \|z_k\|^2.$$

É fácil ver que $-1/2$ é um valor regular para o mapa momento e que $\mathbf{J}^{-1}(-1/2) = S^{2n+1}$. Como o grupo de Lie S^1 é abeliano, o seu grupo de isotropia é o próprio grupo, $S^1_{-1/2} = S^1$. Portanto, pelo Teorema de Redução Simplética

$$\frac{\mathbf{J}^{-1}(-1/2)}{S^1_{-1/2}} = \frac{S^{2n+1}}{S^1} \simeq \mathbb{C}P^n$$

onde $\mathbb{C}P^n = \{\text{retas em } \mathbb{C}^{n+1} \text{ que passam pela origem}\}$ é o plano projetivo complexo. A 2-forma simplética em $\mathbb{C}P^n$ corresponde a 2-forma de Fubini-Study que é dada por

$$\begin{aligned} \omega_{FS} &= \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(\|\mathbf{z}\|^2) \\ &= \frac{i}{2\|\mathbf{z}\|^4} \sum_{j,k=1}^n (\|z_j\|^2 dz_k \wedge d\bar{z}_k - \bar{z}_j z_k dz_k \wedge d\bar{z}_k). \end{aligned}$$

Exemplo 3.8 (Jacobi-Liouville). Seja (P, ω) uma variedade simplética $2n$ -dimensional e $f_j \in C^\infty(P)$ funções em involução com $j = 1, \dots, k$, isto é, $\{f_i, f_j\} = 0$. Então os campos Hamiltonianos X_{f_j} associados as funções f_j comutam, isso segue da Proposição 2.57

$$[X_{f_i}, X_{f_j}] = -X_{\{f_i, f_j\}} = 0$$

e portanto os seus respectivos fluxos associados φ_t^i e φ_t^j comutam, $\varphi_t^i \circ \varphi_t^j = \varphi_t^j \circ \varphi_t^i$. Considerando que cada fluxo é completo, podemos definir uma ação do grupo de Lie $G = (\mathbb{R}^k, +)$ definida por

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^k \times P &\rightarrow P \\ ((t_1, \dots, t_k), x) &\mapsto (\varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_k}^k)(x) \end{aligned}$$

e um mapa momento $\mathbf{J}(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ com $x \in P$. Observe que a ação ϕ é simplética e se for livre e própria, ela satisfaz as condições do Teorema de Redução Simplética.

Suponha ainda que as diferenciais $\mathbf{d}f_i$ sejam linearmente independentes em todo ponto. Esta condição é necessária para que todo ponto $\mu \in \mathbb{R}^k$ seja valor regular do mapa momento. Como o grupo de Lie G é abeliano, segue que o subgrupo de isotropia $G_\mu = \mathbb{R}^k$.

Aplicando o teorema da Redução Simplética, obtemos uma variedade simplética $\mathbf{J}^{-1}(\mu)/G$ de dimensão $2n - 2k$ correspondente ao sistema reduzido. De fato se $k = n$ segue do **Teorema de Arnold-Liouville** (Seção 4.1) que se $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ for compacto e conexo, então ele é difeomorfo ao toro n -dimensional $\mathbf{J}^{-1}(\mu) \simeq \mathbb{T}^n$. Portanto o quociente nesse caso é apenas um ponto $\mathbf{J}^{-1}(\mu)/G \simeq \mathbb{T}^n/\mathbb{R}^n \simeq \{0\}$.

Por exemplo, considere o sistema Hamiltoniano $(P = T^*\mathbb{R}^3, \omega_0, H)$ referente a um sistema de forças centrais onde a Hamiltoniana é

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 + V(\mathbf{q})$$

e o potencial $V(\mathbf{q})$ é invariante sobre a ação do grupo de Lie $G = SO(3)$. Para este sistema, podemos considerar as funções $f_1 = H$, $f_2 = \|\mathbf{L}\|^2$ e $f_3 = L_3$ que são as quantidades conservadas do sistema, onde $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ é o momento angular. Existe um aberto onde as diferenciais $\mathbf{d}f_i$ são linearmente independentes e portanto nestas condições o sistema é completamente integrável.

Definição 3.9. Um sistema Hamiltoniano (P, ω, H) é chamado de **completamente integrável** se existe $n = \dim P/2$ integrais independentes de movimento $f_1 = H, \dots, f_n$ que estão 2 a 2 em involução, $\{f_i, f_j\} = 0$ para todo i, j .

Exemplo 3.10 (Modelo de Neumann). Considere uma partícula de massa $m = 1$ sobre a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ sob a ação de forças de um oscilador harmônico. O espaço de fase para o problema é

$$P = T^*S^{n-1} \simeq \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1 \text{ e } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

A Hamiltoniana $H : T^*S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ para o oscilador de Neumann é da forma

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y})$$

onde $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. A Hamiltoniana H pode ser pensada como a restrição da Hamiltoniana \tilde{H} definida por

$$\tilde{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}[\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 + \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2]$$

ao espaço T^*S^{n-1} , isto é, $H = \tilde{H}|_{T^*S^{n-1}}$. Vamos ver que este sistema é a redução simplética de outro. A Hamiltoniana \tilde{H} é invariante pela ação do grupo de 1-parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\phi_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y} + \lambda\mathbf{x})$$

que tem como mapa momento correspondente

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|^2 - 1).$$

Considere a hiper-superfície de nível

$$\mathbf{J}^{-1}(0) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

e lembrando que o grupo de isotropia de grupos abelianos são o próprio grupo, então

$$\mathbf{J}^{-1}(0)/\mathbb{R} = \{[(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \mid \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$$

onde $[(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \lambda \mathbf{x}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Com isso, podemos definir o *simplectomorfismo*

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-1}(0)/\mathbb{R} &\rightarrow T^*S^{n-1} \\ [(\mathbf{x}, \mathbf{y})] &\mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{x}) \end{aligned}$$

que relaciona o espaço de fase reduzido $\mathbf{J}^{-1}(0)/\mathbb{R}$ com espaço de fase do problema de Neumann T^*S^{n-1} . Portanto os fluxos do campo da Hamiltoniana de Neumann são a projeção ortogonal dos fluxos do campo da Hamiltoniana \tilde{H} .

3.2 Redução da Dinâmica

Uma pergunta natural que podemos fazer é que se dada uma dinâmica em (P, ω) , qual é a sua relação com a dinâmica no espaço quociente $P_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu$? Os próximos resultados vão nos ajudar a descrever a dinâmica no espaço de fase reduzido P_μ , determinando a Hamiltoniana H_μ e o colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{P_\mu}$ correspondente.

Teorema 3.11 (Redução da Dinâmica). *Pelas condições do Teorema de Redução Simplética e supondo que a Hamiltoniana $H : P \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante pela ação de G , então:*

1. o fluxo φ_t do campo X_H mantém as superfícies $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ invariantes e comuta com a ação de G_μ , induzindo um fluxo φ_t^μ em P_μ que satisfaz a relação $\pi_\mu \circ \varphi_t \circ i_\mu = \varphi_t^\mu \circ \pi_\mu$;
2. O fluxo φ_t^μ é Hamiltoniano em P_μ com a Hamiltoniana H_μ definida por $H_\mu \circ \pi_\mu = H \circ i_\mu$ que chamaremos de **Hamiltoniana reduzida**.

Demonstração. (1) Pela G -invariância da Hamiltoniana H , segue do Teorema de Noether que o fluxo φ_t deixa as componentes conexas de $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ invariantes. Temos ainda pelo fato da ação ϕ ser simplética que para todo $g \in G$

$$\phi_g^* X_H = X_H.$$

Esta relação nos garante que o fluxo φ_t e a ação ϕ comutam. E portanto o fluxo no espaço reduzido $\varphi_t^\mu : P_\mu \rightarrow P_\mu$ está bem definida pela relação $\varphi_t^\mu \circ \pi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi_t$. De fato, se $x \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ e $g \in G_\mu$

$$\varphi_t^\mu([x]) = (\varphi_t^\mu \circ \pi_\mu)(\phi_g(x)) = (\pi_\mu \circ \varphi_t)(\phi_g(x)) = (\pi_\mu \circ \phi_g \circ \varphi_t)(x).$$

(2) Vamos verificar agora que o fluxo induzido φ_t^μ é Hamiltoniano. Observe primeiramente que

$$\pi_\mu^*(\varphi_t^\mu)^*\omega_\mu = \varphi_t^*\pi_\mu^*\omega_\mu = \pi_\mu^*\omega_\mu.$$

Como π_μ^* é injetivo, segue que $(\varphi_t^\mu)^*\omega_\mu = \omega_\mu$, logo φ_t^μ é simplético e pela Proposição 2.4 segue que o fluxo é localmente Hamiltoniano em P_μ . Falta ainda verificarmos que os geradores infinitesimais associados ao fluxo reduzido φ_t^μ são globalmente Hamiltoniano. Para isso, observe primeiro que H_μ está bem definida. De fato, seja $[x] \in P_\mu$ e $y \in [x]$, então existe $g \in G_\mu$ tal que $\phi_g(x) = y$ e então pela G -invariância de H temos

$$H_\mu([x]) = H(x) = H(\phi_g(x)) = H(y) = H_\mu([y])$$

mostrando que H_μ está bem definida.

Seja $X \in \mathfrak{X}(P_\mu)$ o campo associado ao fluxo induzido φ_t^μ . Derivando em relação a t a relação $\pi_\mu \circ \varphi_t \circ i_\mu = \varphi_t^\mu \circ \pi_\mu$ obtemos

$$T\pi_\mu \circ X_H \circ i_\mu = X \circ \pi_\mu.$$

Considere o ponto $p \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ e o vetor $v \in T_p\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ qualquer, então

$$\begin{aligned} \omega_\mu(\pi_\mu(p))(X(\pi_\mu(p)), T_p\pi_\mu(v)) &= \omega_\mu(\pi_\mu(p))(T_p\pi_\mu(X_H(p)), T_p\pi_\mu(v)) \\ &= \omega(p)(X_H(p), v) \\ &= \mathbf{d}H(p) \cdot v \\ &= \mathbf{d}(H_\mu \circ \pi_\mu)(p) \cdot v \\ &= \mathbf{d}H_\mu(\pi_\mu(p))(T_p\pi_\mu(v)). \end{aligned}$$

Portanto $X = X_{H_\mu}$ e concluímos que X é um campo globalmente Hamiltoniano para a Hamiltoniana reduzida H_μ . \square

Proposição 3.12. *Pelas condições dos teoremas anteriores e para qualquer função $f \in C^\infty(P)$ G -invariante, então $\{f_\mu, H_\mu\}_{P_\mu} \circ \pi_\mu = \{f, H\} \circ i_\mu$, onde $\{\cdot, \cdot\}_{P_\mu}$ é o colchete associado a 2-forma reduzida ω_μ em P_μ e a função reduzida $f_\mu \circ \pi_\mu = f \circ i_\mu$.*

Demonstração. Para um ponto $p \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ qualquer, basta calcularmos o valor da 2-forma simplética ω_μ nos campos $X_{f_\mu}([p])$ e $X_{H_\mu}([p])$. Assim

$$\begin{aligned} \{f_\mu, H_\mu\}_{P_\mu}([p]) &= \omega_\mu([p])(X_{f_\mu}([p]), X_{H_\mu}([p])) \\ &= \omega_\mu([p])(T_p\pi_\mu(X_f(p)), T_p\pi_\mu(X_H(p))) \\ &= \omega(p)(X_f(p), X_H(p)) \\ &= \{f, H\}(p). \end{aligned}$$

\square

Com este resultado, nos obtemos a dinâmica no espaço reduzido P_μ a partir da dinâmica original no espaço de fase P . Podemos visualizar os Teoremas de Redução Simplética e o da Redução da Dinâmica no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{J}^{-1}(\mu) & \xrightarrow{\varphi_t \circ i_\mu} & \mathbf{J}^{-1}(\mu) & \xrightarrow{i_\mu} & P & \xrightarrow{H} & \mathbb{R} \\ \pi_\mu \downarrow & & \pi_\mu \downarrow & & & \nearrow H_\mu & \\ P_\mu & \xrightarrow{\varphi_t^\mu} & P_\mu & & & & \end{array}$$

3.3 Reconstrução da Dinâmica

Considere um sistema Hamiltoniano $(H, P, \omega, \mathbf{J}, \phi)$. Suponha que seja conhecida a curva integral $c_\mu(t)$ no espaço reduzido (H_μ, P_μ) . Para reconstruir a dinâmica com condição inicial $p_0 \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$, escolhamos uma curva qualquer $d(t) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ que satisfaz $d(0) = p_0$

e $[d(t)] = \pi_\mu(d(t)) = c_\mu(t) = [c(t)]$ para todo $t > 0$ e $c(t)$ a correspondente curva integral de (H, P) com $c(0) = p_0$ que desejamos determinar. Como $[d(t)] = [c(t)]$, isto é, são a mesma curva no espaço reduzido P_μ , então para cada tempo t existe um $g(t) \in G_\mu$ tal que $c(t) = \phi_{g(t)}(d(t))$. Desta forma, para determinarmos a curva integral $c(t)$, precisamos primeiramente determinar a curva $g(t)$. Pelo Lema E.1

$$\begin{aligned} X_H(c(t)) = \dot{c}(t) &= T\phi_{g(t)}\dot{d}(t) + T\phi_{d(t)}\dot{g}(t) \\ &= T\phi_{g(t)}\dot{d}(t) + T\phi_{g(t)}\left(TL_{g(t)^{-1}}\dot{g}(t)\right)(d(t)) \\ &= T\phi_{g(t)}\left(\dot{d}(t) + (TL_{g(t)^{-1}}(d(t)))\right). \end{aligned}$$

Como a Hamiltoniana é invariante pela ação, isto é, $\phi_g^*H = H$, temos pela Proposição 2.9 que $\phi_g^*X_H = X_H$. Aplicando $T\phi_{g(t)^{-1}}$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{d}(t) + (TL_{g(t)^{-1}}\dot{g}(t))_P(d(t)) &= T\phi_{g(t)^{-1}}X_H(c(t)) \\ &= T\phi_{g(t)^{-1}}X_H(\phi_{g(t)}(d(t))) \\ &= (\phi_{g(t)}^*X_H)(d(t)) \\ &= X_H(d(t)). \end{aligned}$$

Como $g(t) \in G_\mu$ para todo tempo t , então

$$TL_{g(t)^{-1}}\dot{g}(t) \in \mathfrak{g}_\mu := T_eG_\mu = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_\xi^*\mu = 0\}.$$

Portanto, queremos determinar a curva $\xi(t)_P \in \mathfrak{g}_\mu$ que satisfaça a equação

$$\xi(d(t)) = X_H(d(t)) - \dot{d}(t). \quad (3.1)$$

Com esta curva determinada, podemos obter a curva $g(t)$ resolvendo a equação diferencial

$$\dot{g}(t) = T_eL_{g(t)}\xi(t) \quad \text{com} \quad g(0) = e$$

e assim obter a curva integral $c(t) = \phi_{g(t)}(d(t))$ no espaço de fases P .

Teorema 3.13 (Reconstrução). *Seja $(P, \omega, H, \mathbf{J})$ um sistema Hamiltoniano que satisfaz as hipóteses do Teorema de Redução Simplética (Teorema 3.4). Se $c_\mu(t)$ é a solução do sistema reduzido $(P_\mu, \omega_\mu, H_\mu)$ com condição inicial $c_\mu(0) = [p_0]$, então para obtermos a solução $c(t) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ do sistema original com condição inicial $c(0) = p_0$, seguimos os seguintes passos:*

1. Escolhemos uma curva $d(t) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ tal que $\pi_\mu(d(t)) = c_\mu(t)$ e $d(0) = p_0$;
2. Determinamos $\xi(t) \in \mathfrak{g}_\mu$ (que existe e é único) que satisfaça a equação $\xi(t) = X_H(d(t)) - \dot{d}(t)$;
3. Resolvemos a equação $\dot{g}(t) = T_eL_{g(t)}\xi(t)$ com condição inicial $g(0) = e$;
4. A solução do sistema original com $c(0) = p_0$ é dado por $c(t) = \phi_{g(t)}d(t)$.

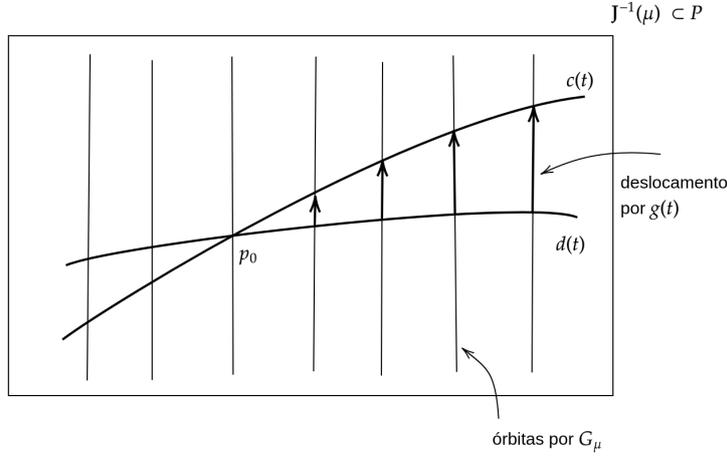


Figura 3.2: Processo de reconstrução da dinâmica em $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$.

Observação 3.14. Dado um fibrado principal $P \rightarrow P/G$ e um aberto $U \subset M$, podemos localmente (ver anexo C) fazer a identificação $\pi^{-1}(U) \simeq U \times G$. Assim, dado uma curva $x(t) \in U$ para todo t , podemos sempre considerar o levantamento horizontal $d(t) = (x(t), e) \in U \times G$.

Observação 3.15. Se $c_\mu(t) \in P_\mu$ é a solução do sistema reduzido H_μ e considerando uma 1-forma de conexão $A \in \Omega^1(\mathbf{J}^{-1}(\mu), \mathfrak{g}_\mu)$ (conforme o Anexo C), dado uma condição inicial $d(0) = d_0$, temos que existe um $d(t) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ tal que $\pi_\mu(d(t)) = c_\mu(t)$ e que $A(\dot{d}(t)) = 0$. Uma das etapas de reconstrução era determinarmos a curva $\xi(t) \in \mathfrak{g}_\mu$ que era dado pela equação (3.1). Aplicando a conexão A nesta equação, obtemos

$$\xi(t) = A(\xi(t)) = A(X_H(d(t))).$$

Assim, para determinarmos $\xi(t)$, basta resolvermos a equação acima para uma 1-forma de conexão que satisfaça as condições do Anexo C.

Observação 3.16. O método nos mostra como reconstruir a dinâmica a partir de uma curva $d(t)$ que satisfaça $\pi_\mu(d(t)) = [c(t)]$, mas ela não nos diz como devemos escolher tal curva. Dependendo da escolha de $d(t)$, pode ser difícil resolver a equação (3.1).

Exemplo 3.17. Considere um sistema de N partículas com massas m_1, \dots, m_N e configurações $q = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in Q = \mathbb{R}^{3N}$ sobre a ação do grupo de Lie $G = \mathbb{R}^3$ por translações de um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{x}} : Q &\rightarrow Q \\ q &\mapsto (\mathbf{q}_1 + \mathbf{x}, \dots, \mathbf{q}_N + \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Podemos definir o espaço de fase $P = T^*Q = \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \ni (q, p)$ onde $p = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ e cada \mathbf{p}_i é o momento linear correspondente a partícula de massa m_i . Pelo levantamento cotangente da ação $\tau_{\mathbf{x}}$, podemos definir uma ação em P por

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{x}}^{T^*} : P &\rightarrow P \\ (q, p) &\mapsto (\tau_{\mathbf{x}}(q), p). \end{aligned}$$

Considerando que a energia potencial do sistema só depende da interação entre as partículas e que esta energia é uma função apenas das distâncias $\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|$. Então podemos escrever a Hamiltoniana do sistema $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} + \sum_{i < j} V_{ij}(\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|),$$

onde V_{ij} corresponde a energia potencial entre os corpos de massas m_i e m_j . Observe ainda que neste caso, a Hamiltoniana H é invariante pela ação $\tau_{\mathbf{x}}^{T^*}$.

Vimos no Exemplo 2.36 que o mapa momento correspondente a ação $\tau_{\mathbf{x}}^{T^*}$ é a soma dos momentos lineares, isto é, $\mathbf{J}(q, p) = \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_N$. A superfície de nível do mapa momento \mathbf{J} correspondente a $\mu \in \mathbb{R}^3$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-1}(\mu) &= \{(q, p) \in T^*Q \mid \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_N = \mu\} \\ &= Q \times \Pi_\mu \end{aligned}$$

onde $\Pi_\mu = \{p \in \mathbb{R}^{3N} \mid \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_N = \mu\}$. Como o grupo $G = \mathbb{R}^3$ é abeliano, segue que o grupo de isotropia é $G_\mu = G$. Seguindo o Teorema de Redução Simplética, o espaço de fase reduzido é

$$P_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu = (Q/\mathbb{R}^3) \times \Pi_\mu.$$

Como o espaço quociente Q/\mathbb{R}^3 é um espaço abstrato, vamos mostrar que existe uma bijeção entre este quociente e um subespaço de Q . Para isto, definimos a função **função centro de massa** por

$$\begin{aligned} CM : Q &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) &\mapsto \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observe que a função centro de massa CM é equivariante, isto é, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $q \in Q$ temos $CM(\tau_{\mathbf{x}}(q)) = \tau_{\mathbf{x}}(CM(q))$. Logo, existe uma única função \widetilde{CM} que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{CM} & \mathbb{R}^3 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ Q/\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\widetilde{CM}} & \mathbb{R}^3/\mathbb{R}^3 = \{[0]\} \end{array}$$

onde π e π' são as projeções usuais relativa a ação de translação pelo grupo $G = \mathbb{R}^3$. Observe que $\pi'|_{\{0\}} : \{0\} \rightarrow \{[0]\}$ é bijetiva, assim procuramos um subconjunto $Q_0 \subset Q$ tal que $CM(Q_0) = \{0\}$. Isso nos leva a definir o subconjunto $Q_0 = \{q \in Q \mid CM(q) = 0\} \subset Q$ das coordenadas relativas ao sistema com centro de massa na origem e o mapa $\pi_0 = \pi|_{Q_0}$

$$\begin{aligned} \pi_0 : Q_0 &\rightarrow Q/\mathbb{R}^3 \\ q &\mapsto [q] \end{aligned}$$

Afirmamos que π_0 é uma bijeção. De fato, sejam $q, q' \in Q_0$ tais que $\pi_0(q) = \pi_0(q')$, então $[q] = [q']$. Logo existe um $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $q = \tau_{\mathbf{x}}(q')$ e

$$0 = CM(q) = CM(\tau_{\mathbf{x}}(q')) = \tau_{\mathbf{x}}(CM(q')) = \mathbf{x}.$$

Portanto $q = q'$ e π_0 é injetiva. Seja agora $[q] \in Q/\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{x} = CM(q)$, então basta tomarmos $q_0 = \tau_{-\mathbf{x}}(q) \in Q_0$, provando assim a sobrejetividade. Pela bijetividade do mapa π_0 temos que o quociente satisfaz a relação

$$P_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/\mathbb{R}^3 \simeq Q/\mathbb{R}^3 \times \Pi_\mu \simeq Q_0 \times \Pi_\mu$$

isto quer dizer que o espaço reduzido P_μ pode ser visto como o produto do espaço de configuração com centro de massa na origem, Q_0 , com a superfície Π_μ . A vantagem de trabalharmos com Q_0 é o fato dele ser um subconjunto de \mathbb{R}^{3N} .

Observação 3.18. O Teorema de Redução Simplética aplicado a simetrias de translação num sistema de N -corpos, nada mais é que a translação do centro de massa do sistema a origem, que fazemos com frequência em problemas de mecânica clássica. A reconstrução nada mais é que a translação para o sistema de referência original.

Para ilustrar o processo de reconstrução, considere um sistema de duas partículas, $N = 2$, com massas m e m' que interagem entre si apenas pela força gravitacional. O espaço de fase $(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') \in P = Q \times \mathbb{R}^6$ onde $Q = \mathbb{R}^6 - \Delta$ é o espaço de configuração e $\Delta = \{(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3\}$ é a diagonal de Q . Este sistema é conhecido como **Problema de dois Corpos** ou **Problema de Kepler**. A Hamiltoniana do sistema corresponde a energia cinética somada com a energia potencial que depende inversamente da distância entre as partículas

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}\|^2 + \frac{1}{2m'} \|\mathbf{p}'\|^2 + \frac{\alpha}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}'\|}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante. Observe que a Hamiltoniana H é invariante pela ação de translação $\tau_{\mathbf{x}}^{T^*}$ e portanto podemos aplicar a redução da dinâmica ao problema.

Considere o problema de resolver o sistema Hamiltoniano (H, P) com as condições iniciais $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}'_0, \mathbf{p}_0, -\mathbf{p}_0) \in \mathbf{J}^{-1}(0) = Q \times \Pi_{\mu=0}$. Pelo resultado anterior, podemos resolvermos o sistema Hamiltoniano $(H_0, Q_0 \times \Pi_0)$ com condições iniciais $(\mathbf{q}_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{q}'_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0, -\mathbf{p}_0) \in Q_0 \times \Pi_0$ onde $\mathbf{x}_0 = CM(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}'_0)$. Como

$$Q_0 = \{(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \in Q \mid CM(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 0\} = \left\{ \left(\mathbf{q}, -\frac{m\mathbf{q}}{m'} \right) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \right\} \simeq \mathbb{R}^3 - \{0\}$$

e

$$\Pi_0 = \{(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0\} = \{(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3\} \simeq \mathbb{R}^3$$

podemos reduzir o sistema $(H_0, Q_0 \times \Pi_0)$ ao sistema $(\tilde{H}, (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3)$ com Hamiltoniana

$$\tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} + \left(\frac{m+m'}{m'} \right) \frac{\alpha}{\|\mathbf{q}\|}.$$

Seja $\tilde{d}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ a solução do sistema $(\tilde{H}, (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3)$ com condições iniciais $(\mathbf{q}_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$, então a curva

$$d(t) = \left(\mathbf{q}(t), -\frac{m\mathbf{q}(t)}{m'}, \mathbf{p}(t), -\mathbf{p}(t) \right) \in Q_0 \times \Pi_0$$

é uma solução para o sistema $(H_0, Q_0 \times \Pi_0)$ com condições iniciais $(\mathbf{q}_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{q}'_0 - \mathbf{x}'_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}'_0)$. Para determinarmos a solução para $(H, Q \times \mathbb{R}^6)$, basta trasladarmos $d(t)$ pelo vetor do centro de massa das condições iniciais \mathbf{x}_0 , obtendo

$$c(t) = \tau_{\mathbf{x}_0}^{T*}(d(t)) = \left(\mathbf{q}(t) + \mathbf{x}_0, -\frac{m\mathbf{q}(t)}{m'} + \mathbf{x}_0, \mathbf{p}(t), -\mathbf{p}(t) \right) \in Q \times \Pi_0$$

que é a solução de H com as condições iniciais originais $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}'_0, \mathbf{p}_0, -\mathbf{p}_0)$.

Observação 3.19. Definindo $\lambda := m'/(m + m')$, então o difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) &\mapsto \left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{q}, \sqrt{\lambda}\mathbf{p} \right) \end{aligned}$$

é um symplectomorfismo. De fato, lembrando que a forma simplética canônica em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ é dada por $\omega_0 = \sum_{i=1}^3 dq^i \wedge dp_i$ segue que $\varphi^*\omega_0 = \omega_0$. Podemos portanto definir uma nova Hamiltoniana associada a este symplectomorfismo φ dada por

$$\widehat{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\widetilde{H} \circ \varphi)(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} + \frac{\alpha}{\|\mathbf{q}\|}$$

com $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3$. A nova Hamiltoniana \widehat{H} é a Hamiltoniana do Problema de Kepler correspondente ao problema reduzido a um corpo.

Exemplo 3.20 (Pêndulo Acoplado). Considere um sistema físico livre do campo gravitacional, composto por dois pêndulos de massa $m = 1$, acoplados por uma mola e cuja as distâncias a origem do sistema sejam iguais a 1 e fazendo ângulos θ_1 e θ_2 com a horizontal conforme a figura abaixo.

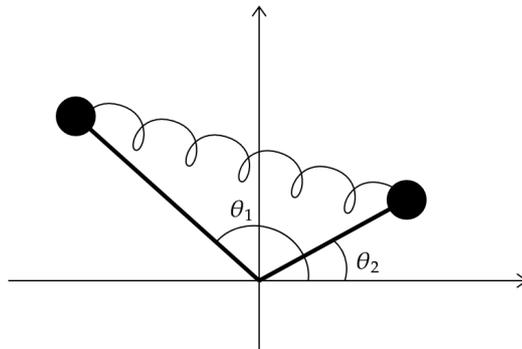


Figura 3.3: Pêndulo acoplado.

O espaço de configuração deste sistema é o toro, $Q = \mathbb{T}^2 \simeq S^1 \times S^1$ com a ação dada pela rotação ao redor da origem $R_\theta(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \theta, \theta_2 + \theta)$. A Lagrangiana pode ser

escrita como

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - V(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 \right] - V(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned}$$

onde V é a energia potencial elástica da mola que só depende da diferença entre os ângulos. A expressão acima nos induz a pensarmos na seguinte mudança de variáveis dada pelo difeomorfismo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + \theta_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - \theta_2) \right) \end{aligned}$$

Definimos agora uma nova ação $\tilde{R} : \mathbb{R} \times Q \rightarrow Q$ tal que $f \circ R_\theta = \tilde{R}_{\sqrt{2}\theta} \circ f$. Essa nova ação age da forma $\tilde{R}_\theta(\varphi, \psi) = (\varphi + \theta, \psi)$ e induz a ação no espaço de fase $T^*\mathbb{T}^2$ pelo levantamento cotangente $\tilde{R}_\theta^{T^*}(\varphi, \psi, p_\varphi, p_\psi) = (\varphi + \theta, \psi, p_\varphi, p_\psi)$. Observe que a Hamiltoniana do sistema nesse novo sistema de coordenadas é

$$H(\varphi, \psi, p_\varphi, p_\psi) = \frac{1}{2}(p_\varphi^2 + p_\psi^2) + V(\sqrt{2}\psi)$$

que é invariante pela ação $\tilde{R}_\theta^{T^*}$. O mapa momento $\mathbf{J} : T^*\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ correspondente a esta ação é $\mathbf{J}(\varphi, \psi, p_\varphi, p_\psi) = p_\varphi$. Considere o problema de obtermos a dinâmica do sistema associado a H com condições iniciais $(\varphi_0, \psi_0, p_{\varphi_0} = \mu, p_{\psi_0})$. Neste caso, superfície de nível $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ admite a seguinte identificação

$$\mathbf{J}^{-1}(\mu) \simeq \mathbb{T}^2 \times \{(\psi, p_\psi) \mid \psi \in S^1, p_\psi \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, temos pelo Teorema da Redução Simplética que $\mathbf{J}^{-1}(\mu)/S^1 \simeq \{(\psi, p_\psi)\}$ e a Hamiltoniana reduzida é

$$H_\mu(\psi, p_\psi) = \frac{1}{2}p_\psi^2 + \frac{1}{2}\mu^2 + V(\sqrt{2}\psi)$$

com as equações de Hamilton

$$\dot{\psi} = p_\psi \quad e \quad \dot{p}_\psi = -\sqrt{2}V'(\sqrt{2}\psi).$$

Se $(\psi(t), p_\psi(t))$ for a solução do sistema acima com condições iniciais (ψ_0, p_{ψ_0}) , podemos tomar a curva $d(t) = (\varphi_0, \psi(t), \mu, p_\psi(t))$ que satisfaz a condição $\pi_\mu(d(t)) = (\psi(t), p_\psi(t))$. Como $\dot{\varphi}(t) = \mu$ e $\varphi(0) = 0$ segue que $\varphi(t) = \mu t$. Portanto, a solução do sistema associado a Hamiltoniana H é

$$c(t) = \tilde{R}_{\theta(t)}^{T^*}(d(t)) = (\varphi_0 + \mu t, \psi(t), \mu, p_\psi(t)).$$

3.4 Redução e Órbitas Coadjuntas

Vamos estudar nesta seção a Redução Simplética para o espaço de fase da forma $P = T^*G$ para algum grupo de Lie G . Veremos que existe uma identificação entre o espaço reduzido P_μ e as órbitas co-adjuntas $G \cdot \mu \subset \mathfrak{g}^*$ dada pelo Teorema de Teorema Kirillov-Kostant-Souriau e calcularemos explicitamente a 2-forma simplética neste espaço reduzido.

3.4.1 Identificação com as Órbitas Coadjuntas

Considere a translação pela esquerda $L : G \times G \rightarrow G$. Vimos que ela induz uma ação no fibrado cotangente T^*G dado pelo levantamento cotangente

$$\begin{aligned} L_h^{T^*} : T^*G &\rightarrow T^*G \\ \alpha_g &\mapsto T_{hg}L_{h^{-1}}(\alpha_g) \end{aligned}$$

com $h \in G$. Como L é um difeomorfismo, temos pela Proposição 1.90 que a ação L^{T^*} é simplética, além disso, ela é livre e própria. Portanto satisfaz as condições do Teorema de Redução Simplética. Vimos no Corolário 2.51 que o mapa momento $\mathbf{J} : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ relativo à ação L^{T^*} é dado por

$$\mathbf{J}(\alpha_g)(\xi) = \alpha_g(\xi_G(g)) = \alpha_g(T_e R_g \cdot \xi) = (T_e R_g)^* \alpha_g(\xi)$$

onde $\alpha_g \in T^*G$ e $\xi \in \mathfrak{g}$. Vamos verificar agora que todo $\mu \in \mathfrak{g}^*$ é valor regular do mapa momento \mathbf{J} . Para isso, considere o difeomorfismo

$$\begin{aligned} \zeta : T^*G &\rightarrow G \times \mathfrak{g}^* \\ (g, \alpha_g) &\mapsto (g, T_e^* R_g \alpha_g). \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever o mapa momento como $\mathbf{J} = \pi_{\mathfrak{g}^*} \circ \zeta$ onde $\pi_{\mathfrak{g}^*} : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ é a projeção canônica. Dado $\mu \in \mathfrak{g}^*$, então

$$\mathbf{J}^{-1}(\mu) = (\pi_{\mathfrak{g}^*} \circ \zeta)^{-1}(\mu) = \zeta^{-1}(\pi_{\mathfrak{g}^*}^{-1}(\mu)) = \zeta^{-1}(G \times \{\mu\})$$

como ζ é um difeomorfismo, segue que todo $\mu \in \mathfrak{g}^*$ é valor regular do mapa momento \mathbf{J} . Podemos ainda escrever a superfície de nível como

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-1}(\mu) &= \{\alpha_g \in T^*G \mid \alpha_g(T_e R_g \xi) = \mu(\xi) \text{ para todo } \xi \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{T_g^* R_{g^{-1}}(\mu) \mid g \in G\}, \end{aligned}$$

isto é, a superfície de nível é o gráfico da 1-forma

$$\begin{aligned} \alpha_\mu : G &\rightarrow T^*G \\ g &\mapsto T_g^* R_{g^{-1}} \mu. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vamos verificar agora que α_μ é G_μ -equivariante. Para $g \in G$ e $h \in G_\mu$, temos

$$\begin{aligned} (L_h^{T^*} \circ \alpha_\mu)(g) &= L_h^{T^*}(T_g^* R_{g^{-1}} \mu) = T_{hg}^* L_{h^{-1}} T_g^* R_{g^{-1}} \mu \\ &= T_{hg}^* R_{g^{-1}} T_h^* R_{h^{-1}} T_e^* R_h T_h^* L_{h^{-1}} \mu = T_{hg}^* R_{(hg)^{-1}} \text{Ad}_h^* \mu \\ &= T_{hg}^* R_{(hg)^{-1}} \mu = \alpha_\mu(hg) = \alpha_\mu(L_h(g)) \end{aligned}$$

e portanto $L_h^{T^*} \circ \alpha_\mu = \alpha_\mu \circ L_h$ para todo $h \in G_\mu$. Isso nos permite definir o seguinte difeomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_\mu : G/G_\mu &\rightarrow (T^*G)_\mu \\ G_\mu \cdot g &\mapsto (\pi_\mu \circ \alpha_\mu)(g) \end{aligned}$$

onde $G/G_\mu := \{G_\mu \cdot g \mid g \in G\}$. Para verificarmos que está bem definido considere $G_\mu \cdot g = G_\mu \cdot g'$. Então existe algum $h \in G_\mu$ tal que $L_h g' = g$ e pela G_μ -equivariante de α_μ

$$\alpha_\mu(g') = \alpha_\mu(hg) = L_h^{T^*}(\alpha_\mu(g))$$

obtemos que $\alpha_\mu(g')$ e $\alpha_\mu(g)$ estão na mesma órbita. Portanto $\pi_\mu(\alpha_\mu(g)) = \pi_\mu(\alpha_\mu(g'))$ e temos que $\bar{\alpha}_\mu$ está bem definida.

Considere o seguinte difeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi_\mu : G/G_\mu &\rightarrow G \cdot \mu \\ G_\mu \cdot g &\mapsto \text{Ad}_g^* \mu. \end{aligned}$$

Sabemos pelo teorema da Redução Simplética que o espaço reduzido $(T^*G)_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu$ é uma variedade simplética e portanto, pelo difeomorfismo $\bar{\sigma}_\mu := \psi_\mu \circ (\bar{\alpha}_\mu)^{-1} : (T^*G)_\mu \rightarrow G \cdot \mu$ segue que as órbitas coadjuntas $G \cdot \mu$ também são variedades simpléticas. Este é uma das afirmações do **Teorema Kirillov-Kostant-Souriau**.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu & \xrightarrow{(\bar{\alpha}_\mu)^{-1}} & G/G_\mu & \xrightarrow{\psi_\mu} & G \cdot \mu \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \bar{\sigma}_\mu & & \end{array}$$

Pelo mapa

$$\begin{aligned} \sigma_\mu := \bar{\sigma}_\mu \circ \pi_\mu : \mathbf{J}^{-1}(\mu) &\rightarrow G \cdot \mu \\ \alpha_\mu(g) &\mapsto \text{Ad}_g^* \mu \end{aligned} \quad (3.4)$$

e pelo Teorema de Redução Simplética, segue que a 2-forma ω_μ em $G \cdot \mu$ satisfaz

$$\sigma_\mu^* \omega_\mu = i_\mu^* \omega.$$

Utilizaremos esta relação para calcularmos explicitamente a 2-forma ω_μ através dos geradores infinitesimais em $G \cdot \mu \subset \mathfrak{g}^*$ na próxima seção. Enunciamos assim a seguinte proposição:

Proposição 3.21. *Considerando o sistema $(T^*G, \omega, \mathbf{J})$, onde ω é a 2-forma simplética canônica e \mathbf{J} o mapa momento dado pelo Corolário 2.51, então dado $\mu \in \mathfrak{g}^*$ (que é um valor regular de \mathbf{J}), temos a identificação*

$$P_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq G \cdot \mu.$$

Observação 3.22. *Pelas condições do Teorema anterior e considerando a Hamiltoniana $H : T^*G \rightarrow \mathbb{R}$ invariante pela esquerda, isto é, $H \circ T^*L_g = H$ para todo $g \in G$. Então a Hamiltoniana reduzida $H_\mu : G \cdot \mu \rightarrow \mathbb{R}$ é definida pela relação*

$$H_\mu(\text{Ad}_g^* \mu) = H(T_g^* R_{g^{-1}}(\mu)). \quad (3.5)$$

Exemplo 3.23 (Corpo Rígido Livre). *Calculamos no Exemplo 2.54 o mapa momento para ação de rotação pelo grupo de Lie $SO(3)$ que é dado por*

$$\begin{aligned} \mathbf{J} : SO(3) \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (R, \mathbf{\Pi}) &\mapsto \mathbf{L} = R\mathbf{\Pi} \end{aligned}$$

Portanto, para $\mu \in \mathbb{R}^3$ temos a superfície dada pela pré-imagem do mapa momento

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-1}(\mu) &= \{(R, \mathbf{\Pi}) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3 \mid R\mathbf{\Pi} = \mu\} \\ &= \{(R, R^{-1}\mu) \mid R \in SO(3)\} \\ &\simeq SO(3) \end{aligned}$$

e do Exemplo 2.25 segue que a órbitas coadjuntas e o subgrupo de isotropia são respectivamente

$$SO(3) \cdot \mu = S_{\|\mu\|}^2 \quad e \quad SO(3)_\mu = \{\text{rotações ao redor do vetor } \mu\}.$$

Portanto da Proposição 3.21 temos a identificação

$$P_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/SO(3)_\mu \simeq SO(3) \cdot \mu = S_{\|\mu\|}^2.$$

3.4.2 Estrutura Simplética nas Órbitas Coadjuntas

Na seção anterior, vimos que existe uma estrutura simplética em $G \cdot \mu$ induzida pelo espaço reduzido P_μ . Utilizando esta identificação e o Teorema da Redução Simplética vamos calcular explicitamente esta 2-forma simplética. Antes disso, lembre que os geradores infinitesimais em \mathfrak{g}^* foi calculado na Proposição 2.33 e é dado por

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(\nu) = \text{ad}_\xi^*(\nu),$$

onde $\xi \in \mathfrak{g}$ e $\nu \in \mathfrak{g}^*$.

Teorema 3.24. *Pelas condições da Proposição 3.21 e tomando $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ e $\nu \in G \cdot \mu \subset \mathfrak{g}^*$, a expressão para a 2-forma simplética $\omega_\mu \in \Omega^2(G \cdot \mu)$ é dada por*

$$\omega_\mu(\nu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\nu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\nu)) = -\langle \nu, [\xi, \eta] \rangle. \quad (3.6)$$

Demonstração. Pela definição da 1-forma α_μ em (3.3) e considerando o mapa tangente

$$\begin{aligned} T_g \alpha_\mu : T_g G &\rightarrow T_{\alpha_\mu}(T^*G) \\ \xi_G(g) &\mapsto T_g \alpha_\mu(\xi_G(g)), \end{aligned}$$

temos que o espaço tangente a superfície $\mathbf{J}^{-1}(\mu) = \{\alpha_\mu(g) \mid g \in G\}$ no ponto α_μ é

$$\begin{aligned} T_{\alpha_\mu(g)} \mathbf{J}^{-1}(\mu) &= \{T\alpha_\mu \cdot \xi_G(g) \mid \xi \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{T\alpha_\mu \cdot T_e R_g \xi \mid \xi \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Calculando a 2-forma ω nos vetores $T_g\alpha_\mu \cdot T_eR_g\xi, T_g\alpha_\mu \cdot T_eR_g\eta \in T_{\alpha_\mu(g)}\mathbf{J}^{-1}(\mu)$

$$\begin{aligned}
(i_\mu^*\omega)(T_g\alpha_\mu \cdot T_eR_g\xi, T_g\alpha_\mu \cdot T_eR_g\eta) &= (\alpha_\mu^*\omega)(TR_g\xi, TR_g\eta) \\
&= -\mathbf{d}\alpha_\mu(TR_g\xi, TR_g\eta) \\
&= -\mathbf{d}\alpha_\mu(X_\xi, X_\eta)(g) \\
&= -\{X_\xi(\alpha_\mu(X_\eta)) - X_\eta(\alpha_\mu(X_\xi)) - \alpha_\mu([X_\xi, X_\eta])\}(g) \\
&= \alpha_\mu([X_\xi, X_\eta])(g) \\
&= \alpha_\mu(-X_{[\xi, \eta]})(g) \\
&= -\langle \mu, [\xi, \eta] \rangle
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde na segunda e sexta igualdades usamos as Proposições 1.33 e 2.57 respectivamente e na quarta o Lema 1.45. Na quinta a relação usamos

$$\alpha_\mu(X_\eta)(g) = \mu(T_gR_{g^{-1}}(T_eR_g\eta)) = \langle \mu, \eta \rangle \tag{3.8}$$

que nos mostra que $\alpha_\mu(X_\eta)(g)$ é constante.

Vamos agora calcular o valor de $\sigma_\mu^*\omega_\mu$ nos vetores definidos acima, onde $\sigma_\mu(\alpha_\mu(g)) = \text{Ad}_g^*\mu$ foi definido em (3.4)

$$\begin{aligned}
(\sigma_\mu^*\omega_\mu)(\alpha_\mu(g))(T_g\alpha_\mu \cdot T_eR_g\xi, T_g\alpha_\mu \cdot T_eR_g\eta) \\
&= \omega_\mu(\text{Ad}_g^*\mu)(T_{\alpha_\mu}\pi_\mu \cdot T_g\alpha_\mu \cdot T_eR_g\xi, T_{\alpha_\mu}\pi_\mu \cdot T_g\alpha_\mu \cdot T_eR_g\eta) \\
&= \omega_\mu(\text{Ad}_g^*\mu)(T_g(\text{Ad}_g^*\mu) \cdot T_eR_g\xi, T_g(\text{Ad}_g^*\mu) \cdot T_eR_g\eta).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Pelos Lemas E.2 e E.3 podemos escrever os vetores tangentes da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
T_g(\text{Ad}_g^*\mu) \cdot T_eR_g\xi &= \text{Ad}_g^*(\text{ad } \xi)^*\mu \\
&= -\text{Ad}_g^*(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) \\
&= -(\text{Ad}_{g^{-1}}\xi)_{\mathfrak{g}^*}(\text{Ad}_g^*\mu).
\end{aligned}$$

Portanto, das relações (3.7), (3.8) e (3.9) e do Teorema de Redução Simplética segue que a 2-forma simplética é dada por

$$\omega_\mu(\text{Ad}_g^*\mu)\left((\text{Ad}_{g^{-1}}\xi)_{\mathfrak{g}^*}(\text{Ad}_g^*\mu), (\text{Ad}_{g^{-1}}\eta)_{\mathfrak{g}^*}(\text{Ad}_g^*\mu)\right) = -\langle \mu, [\xi, \eta] \rangle.$$

Fazendo as mudanças de variáveis $\text{Ad}_{g^{-1}}\xi = \xi'$, $\text{Ad}_{g^{-1}}\eta = \eta'$ e $\text{Ad}_g^*\mu = \nu'$, obtemos a 2-forma simplética nas órbitas coadjuntas $G \cdot \mu$

$$\omega_\mu(\nu)(\xi'_{\mathfrak{g}^*}(\nu'), \eta'_{\mathfrak{g}^*}(\nu')) = -\langle \nu', [\xi', \eta'] \rangle.$$

□

A seguir apresentamos o Teorema de Kirillov-Kostant-Souriau que resume os resultados obtidos nesta seção.

Teorema 3.25 (Kirillov-Kostant-Souriau). *Considere um sistema $(T^*G, \omega, \mathbf{J})$ que satisfaça as condições da Proposição 3.21. Então para qualquer ponto $\mu \in \mathfrak{g}^*$, o espaço de fases reduzido P_μ pode ser identificado com as órbitas coadjuntas $G \cdot \mu$*

$$P_\mu = \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq G \cdot \mu$$

e a 2-forma simplética em $G \cdot \mu$ é dada por

$$\omega_\mu(\nu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\nu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\nu)) = -\langle \nu, [\xi, \eta] \rangle,$$

onde $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ e $\nu \in G \cdot \mu \subset \mathfrak{g}^*$.

Corolário 3.26. *O colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{G \cdot \mu}$ nas órbitas coadjuntas induzido pela 2-forma simplética ω_μ do Teorema 3.24 é*

$$\{f_1|_{G \cdot \mu}, f_2|_{G \cdot \mu}\}_{G \cdot \mu}(\nu) = -\langle \nu, [T_\nu f_1, T_\nu f_2] \rangle$$

onde $f_1, f_2 : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves e $\nu \in G \cdot \mu$.

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções suaves, vamos iniciar calculando a expressão do campo $X_{f_1|_{G \cdot \mu}}$ relativo a função f_1 nas órbitas coadjuntas. Tomando $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ e $\nu \in G \cdot \mu$, segue do Teorema 3.24 que

$$\omega_\mu(\nu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\nu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\nu)) = -\langle \nu, [\xi, \eta] \rangle = \langle \nu, \text{ad}_\eta \xi \rangle = -\langle \text{ad}_\eta^* \nu, \xi \rangle.$$

Tomando $\xi = T_\nu f_1$ e η arbitrário na 2-forma acima, obtemos

$$\omega_\mu(\nu)(\text{ad}_{T_\nu f_1}^* \nu, \text{ad}_\eta^* \nu) = -\langle \text{ad}_\eta^* \nu, T_\nu f_1 \rangle = -\mathbf{d}f_1(\nu)(\text{ad}_\eta^* \nu)$$

e portanto $X_{f_1|_{G \cdot \mu}}(\nu) = -\text{ad}_{T_\nu f_1}^* \nu$. Aplicando os campos na 2-forma simplética

$$\begin{aligned} \{f_1|_{G \cdot \mu}, f_2|_{G \cdot \mu}\}(\nu) &= \omega_\mu(\nu)(X_{f_1|_{G \cdot \mu}}(\nu), X_{f_2|_{G \cdot \mu}}(\nu)) \\ &= \omega_\mu(\nu)(\text{ad}_{T_\nu f_1}^* \nu, \text{ad}_{T_\nu f_2}^* \nu) \\ &= -\langle \nu, [T_\nu f_1, T_\nu f_2] \rangle \end{aligned}$$

que corresponde a relação desejada. \square

Observação 3.27. *O colchete de Poisson do Corolário 3.26 e do Exemplo 2.61 são compatíveis, isto é, para $f, g : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves temos*

$$\{f|_{G \cdot \mu}, g|_{G \cdot \mu}\}_{G \cdot \mu} = \{f, g\}_{\mathfrak{g}^*}|_{G \cdot \mu}.$$

Uma forma análoga de enunciar a relação acima, é observar que o mapa inclusão $i : G \cdot \mu \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ é um morfismo de Poisson. Além disso, cada órbita coadjunta é uma folha simplética em \mathfrak{g}^* .

Exemplo 3.28. *Vamos calcular agora a 2-forma simplética e o colchete nas órbitas coadjuntas $SO(3) \cdot \mu = S_{\|\mu\|}^2$. Para $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{\Pi} \in S_{\|\mu\|}^2$, segue do Teorema 3.24 que a 2-forma simplética na esfera $S_{\|\mu\|}^2$ é dada por*

$$\omega_\mu(\mathbf{\Pi})(\xi_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{\Pi}), \eta_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{\Pi})) = -\frac{1}{\|\mu\|} \mathbf{d}S(\mathbf{\Pi})(\xi_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{\Pi}), \eta_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{\Pi})) = -\mathbf{\Pi} \cdot (\xi \times \eta)$$

onde $\mathbf{d}S$ é o elemento de área da esfera. Pela Observação 3.27, o colchete de Poisson nas órbitas coadjuntas é a restrição do colchete de \mathbb{R}^3 na esfera $S_{\|\mu\|}^2$

$$\{f|_{S_{\|\mu\|}^2}, g|_{S_{\|\mu\|}^2}\}_{S_{\|\mu\|}^2}(\mathbf{\Pi}) = \{f, g\}_{\mathbb{R}^3}|_{S_{\|\mu\|}^2}(\mathbf{\Pi}) = -\mathbf{\Pi} \cdot (\nabla_{\mathbf{\Pi}} f(\mathbf{\Pi}) \times \nabla_{\mathbf{\Pi}} g(\mathbf{\Pi}))$$

com $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves.

Capítulo 4

Exemplos de Sistemas com Simetria

Este capítulo é dedicado a apresentação de exemplos de sistemas físicos clássicos que apresentam simetria. Veremos primeiramente dois exemplos mais simples, o problema do Pêndulo Simples e do Oscilador Harmônico. Estes dois exemplos apresentam apenas a simetria correspondente a conservação da energia e servem como preparação para os exemplos seguintes. O Problema de Kepler e do Corpo Rígido livre e sob potenciais ilustram as definições e propriedades tratadas nos Capítulos 2 e 3, em especial a teoria de redução e reconstrução da dinâmica.

A Seção 4.3 (Problema de Kepler) segue como base os textos [10] e [26], a Seção 4.4 (Corpo Rígido Livre) os textos [1], [22], [21], [6] e [19] e a Seção 4.5 (Corpo Rígido Simétrico sob Potencial) os textos [9] e [22].

4.1 Pêndulo Simples

Considere um corpo pontual de massa m conectado a um ponto fixo (pivô) por um fio de massa desprezível e inextensível que faz um ângulo θ com a vertical. Podemos considerar o espaço de fases $P = S^1 \times \mathbb{R} \ni (\theta, p)$ e a Hamiltoniana

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2m} - mgl \cos \theta,$$

onde p é a norma do vetor momento linear. As equações de Hamilton para o sistema nos fornece um sistema de EDO's não lineares

$$f(\theta, p) := \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \text{e} \quad g(\theta, p) := \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta. \quad (4.1)$$

Vimos na Proposição 2.8 que toda Hamiltoniana é uma quantidade conservada do sistema. Como a dimensão do espaço de fases é 2, segue do Exemplo 3.8 sobre Jacobi-Liouville que o sistema é completamente integrável.

Seja E_0 um nível de energia qualquer, segue da conservação de energia que $H(\theta(t), p(t)) = E_0$ para todo $t \geq 0$ e portanto o momento linear pode ser escrito como

$$p(t) = \pm \sqrt{2m(E_0 + mgl \cos \theta(t))}.$$

Considere θ_{\max} o maior ângulo assumido pelo pêndulo durante a sua trajetória. Se $E_0 > mgl$, então $p(t) \neq 0$ para todo tempo $t \geq 0$, isto é, a velocidade do pêndulo nunca se anula e $\theta_{\max} = \pm\pi$. Nesta caso, o pêndulo realiza um movimento de rotação completo ao longo do eixo do pivô. Se $E_0 < mgl$ então existe um θ_{\max} tal que $E_0 = -mgl \cos \theta_{\max}$ e portanto a velocidade do pêndulo se anula em um ponto da trajetória, e assim temos um movimento periódico. As curvas $(\theta(t), p(t))$ com energia $E_0 = mgl$, isto é, $H(\theta(t), p(t)) = E_0$ são chamadas de **curvas separatrizes** e dividem o espaço de fases em duas regiões conforme a figura abaixo.

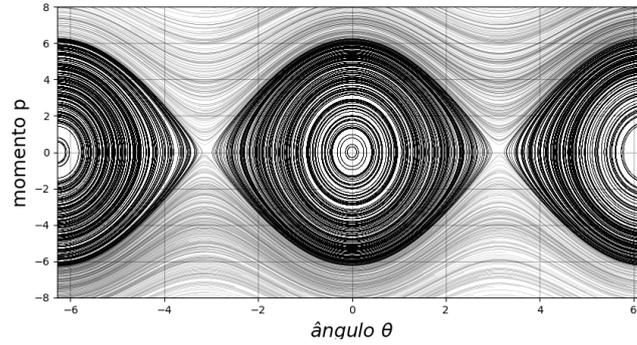


Figura 4.1: Espaço de fases (θ, p) do pêndulo.

Seja $(\theta^*, p^*) \in S^1 \times \mathbb{R}$ um ponto de equilíbrio das equações (4.1), $f(\theta^*, p^*) = g(\theta^*, p^*) = 0$, então $(\theta^*, p^*) = (n\pi, 0)$ com $n \in \mathbb{Z}$. Considerando a matriz Jacobiana

$$M(\theta, p) = \begin{bmatrix} f_\theta & f_p \\ g_\theta & g_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m^{-1} \\ mgl \cos \theta & 0 \end{bmatrix},$$

temos os seguintes casos:

- Se $(\theta^*, p^*) = ((2n - 1)\pi, 0)$ para $n \in \mathbb{Z}$, então os autovalores de $M(\theta^*, p^*)$ são $\pm\sqrt{gl}$ e portanto é um ponto de equilíbrio instável, que corresponde ao ponto de maior energia, $\theta = \pi$;
- Se $(\theta^*, p^*) = (2n\pi, 0)$ para $n \in \mathbb{Z}$, então os autovalores de $M(\theta^*, p^*)$ são $\pm i\sqrt{gl}$ e portanto é um ponto de equilíbrio estável, que corresponde a posição de menor energia, $\theta = 0$.

Vamos agora obter uma expressão para a solução do sistema. Da definição do momento linear $p(t) = ml\dot{\theta}$, a Hamiltoniana pode ser escrita como

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta,$$

o que nos fornece a seguinte equação de movimento

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} \left(\frac{E_0}{mgl} + \cos \theta \right)}. \quad (4.2)$$

Considerando T o período do pêndulo, temos que $\theta(T/4) = 0$ e $\dot{\theta}(t) < 0$ para $t \in [0, T/4]$, isto é, a função ângulo $\theta(t)$ é estritamente decrescente neste intervalo. Portanto, existe uma inversa $t = t(\theta)$ e o sinal da expressão (4.2) é negativo.

Seja $0 < \theta(0) = \theta_0 < \pi$ o ângulo inicial e $0 \leq \theta_f \leq \theta_0$ o ângulo final, podemos integrar a expressão (4.2) em $[\theta_f, \theta_0]$ e obtermos a expressão do tempo de deslocamento entre a posição θ_0 e θ_f . Considerando $t(\theta_0) = 0$ e a partícula inicialmente em repouso, com energia $E_0 = -mgl \cos \theta_0$, temos

$$t(\theta_f, \theta_0) = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int_{\theta_f}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{E_0 + mgl \cos \theta}} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_f}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (4.3)$$

Definindo $k(\theta_0) = \sin(\theta_0/2)$ e uma nova variável $x \in [\phi, \pi/2]$ que satisfaz a relação

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k(\theta_0) \sin x \quad \text{e} \quad \phi(\theta_f, \theta_0) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{k(\theta_0)} \sin\left(\frac{\theta_f}{2}\right)\right), \quad (4.4)$$

podemos escrever

$$\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} = \sqrt{2 \left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right]} = \sqrt{2} k(\theta_0) \cos x. \quad (4.5)$$

Derivando a primeira relação de (4.4) em relação a x

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{d\theta}{dx} = k(\theta_0) \cos x, \quad (4.6)$$

e aplicando as relações (4.5) e (4.6) em (4.3), obtemos a expressão para o tempo

$$t(\theta_f, \theta_0) = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\phi(\theta_0, \theta_f)}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2(\theta_0) \sin^2 x}}.$$

A integral acima é do tipo elíptica e portanto não pode ser expressa em termo de funções elementares. Vamos obter agora a expressão em série para o caso do ângulo final $\theta_f = 0$, que corresponde a $t(0) = T/4$. Para este caso, o período de oscilação é dado pela integral

$$T(\theta_0) = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2(\theta_0) \sin^2 x}}.$$

Lembrando do Teorema Binomial, o termo da integral acima pode ser expandido na seguinte série

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right] k^{2n} \sin^{2n} x,$$

e do Cálculo, temos a integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Desta forma, a expansão em série para o período T de oscilação em função do ângulo inicial θ_0 é dado pela série

$$T(\theta_0) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \cdots \right].$$

Observe que o período de oscilação se aproxima de $2\pi\sqrt{l/g}$ quando $k \rightarrow 0$, isto é, para ângulos iniciais θ_0 suficientemente próximos de 0, temos $T \approx 2\pi\sqrt{l/g}$.

4.2 Oscilador Harmônico

Considere um sistema composto por n osciladores harmônicos unidimensionais independentes com massas m_i e com constante elástica $k_i > 0$. Para $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$ que corresponde a posição e ao momento linear temos que a Hamiltoniana do sistema é dada por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} k_i (q^i)^2 \quad (4.7)$$

com as equações de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = -k_i q^i. \quad (4.8)$$

Como os osciladores harmônicos são independentes, podemos analisar cada componente do oscilador de forma independente e com um determinado nível de energia. Para cada $i = 1, \dots, n$ definimos as integrais primeiras

$$H_i(q^i, p_i) = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} k_i (q^i)^2$$

que corresponde a energia do i -ésimo oscilador e que satisfaz $H = \sum_{i=1}^n H_i$. Se considerarmos um nível de energia $E_i > 0$, as soluções estão contidas na elipse

$$(q^i, p_i) \in \mathcal{E}_i := \{(q^i, p_i) \in \mathbb{R}^2 \mid H_i(q^i, p_i) = E_i\}.$$

e são dadas analiticamente por

$$q^i(t) = \sqrt{\frac{2E_i}{k_i}} \cos(\omega_i t + \theta_i^0) \quad \text{e} \quad p_i(t) = -\sqrt{2E_i m_i} \sin(\omega_i t + \theta_i^0).$$

onde $\omega_i = \sqrt{k_i/m_i}$ é a velocidade angular e $\theta_i^0 \in [0, 2\pi)$ é a condição inicial.

Para o sistema correspondente ao sistema com n molas, considerando uma constante $\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_n)$ com cada $E_i > 0$, a solução do sistema (4.8) está contido na subvariedade

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{E}} &= \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid H_i(q^i, p_i) = E_i \text{ para } i = 1, \dots, n\} \\ &= \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_n \\ &\simeq \mathbb{T}^n, \end{aligned}$$

onde \mathbb{T}^n é o toro n -dimensional. O difeomorfismo $M_{\mathbf{E}} \simeq \mathbb{T}^n$ é uma propriedade geral de sistemas Hamiltonianos que possuem integrais primeiras em involução, conforme é mostrado no próximo teorema.

Teorema 4.1 (Arnold-Liouville). *Seja (M, ω) uma $2n$ -variedade simplética com n funções em involução*

$$f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M) \quad \text{com} \quad \{f_i, f_j\} = 0 \text{ para todo } i, j.$$

Tomando um vetor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, definimos o conjunto

$$M_{\mathbf{c}} = \{x \in M \mid f_i(x) = c_i \text{ para } i = 1, \dots, n\},$$

e supondo que $\{\mathbf{d}f_1(x), \dots, \mathbf{d}f_n(x)\}$ são linearmente independentes para todo ponto $x \in M_{\mathbf{c}}$, então:

1. O conjunto $M_{\mathbf{c}}$ é uma subvariedade suave de M e é invariante pela função Hamiltoniana $H = f_1$;
2. Se $M_{\mathbf{c}}$ for compacta e conexa, então ele é difeomorfo ao toro n -dimensional

$$\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1;$$

3. O fluxo da Hamiltoniana $H = f_1$ determina um movimento quase periódico em $M_{\mathbf{c}}$, então se $\theta_1, \dots, \theta_n$ forem as coordenadas ângulo em $M_{\mathbf{c}}$, elas satisfazem

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i$$

onde $\omega_i = \omega_i(\mathbf{c}) \in \mathbb{R}$ são constantes;

4. As soluções das equações de movimento podem ser obtidas por quadraturas, isto é, apenas com a integração e a inversão de funções elementares.

Demonstração. Apresentaremos apenas um esboço da demonstração dos itens (1) e (2). Para a demonstração dos itens (3) e (4) e detalhes técnicos, o leitor pode consultar a Seção 49 do Capítulo 10 de [3].

(1) Como $\mathbf{d}f_1(x), \dots, \mathbf{d}f_n(x)$ são linearmente independentes em todo ponto $x \in M_{\mathbf{c}}$, segue do Teorema da Função Implícita que $M_{\mathbf{c}}$ é uma subvariedade de dimensão n . Considere agora um ponto $x_0 \in M_{\mathbf{c}}$ e o fluxo φ_t^1 do campo Hamiltoniano $X_{H=f_1}$, então

$$\frac{d}{dt} f_i(\varphi_t^1) = \{f_i, f_1\} = 0,$$

o que nos mostra que $f_i(\varphi_t(x_0)) = f_i(x_0) = c_i$. Logo a subvariedade $M_{\mathbf{c}}$ é invariante pelo fluxo do campo Hamiltoniano.

(2) Apresentaremos apenas a ideia da demonstração. Definindo φ_t^i como o fluxo do campo X_{f_i} , segue da Proposição 2.57 que $[X_{f_i}, X_{f_j}] = -X_{\{f_i, f_j\}} = 0$ e da Proposição 1.48 que os fluxos $\varphi_{t_i}^i$ e $\varphi_{t_j}^j$ comutam. Definimos agora a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n \times M_{\mathbf{c}} &\rightarrow M_{\mathbf{c}} \\ (\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n), x) &\mapsto (\varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_n}^n)(x) \end{aligned}$$

Fixando um ponto $x_0 \in M_{\mathbf{c}}$, definimos o mapa $\varphi(\cdot, x_0)$ que é localmente uma bijeção (φ é localmente transitiva). De fato, para um vetor tempo suficientemente pequeno podemos escrever

$$x = x_0 + \sum_i X_{f_i}(x_0)t_i + O(t^2)$$

e como os campos X_{f_i} são linearmente independente, segue que o ponto x perto de x_0 é unicamente determinado. Além disso, a matriz $[X_{f_i}^j]$ é invertível e portanto podemos usar o Teorema da Função Inversa e escrever

$$\mathbf{t} = [X_{f_i}^j]^{-1}(x - x_0).$$

Observe que o mapa $\varphi(\cdot, x_0)$ não pode ser globalmente uma bijeção, pois \mathbb{R}^n não é compacto, logo existe um $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_t(x_0) = x_0$. Definimos o subgrupo de isotropia por

$$\Gamma_{x_0} = \left\{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_{\mathbf{t}}(x_0) = x_0 \right\}.$$

que é um subgrupo discreto, e portanto existem k vetores linearmente independentes $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\Gamma_{x_0} = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{u}_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Portanto existe a identificação

$$\mathbb{R}^n / \Gamma_{x_0} \simeq \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^k \simeq \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \simeq \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

e podemos definir uma parametrização por

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) &\mapsto (\boldsymbol{\theta} \pmod{2\pi}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Considere agora os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ onde $(\mathbf{v}_i)_l = 2\pi\delta_{il}$, podemos definir um isomorfismo $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz $A(\mathbf{v}_i) = \mathbf{u}_i$ para todo i .

Pode-se provar que o mapa $\tilde{A} : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow M_{\mathbf{c}}$ que satisfaz a relação $\varphi \circ A = \tilde{A} \circ p$ é um difeomorfismo. Como por hipótese a subvariedade $M_{\mathbf{c}}$ é compacta, segue que $k = n$ e portanto $M_{\mathbf{c}} \simeq \mathbb{T}^n$. \square

4.3 Problema de Kepler

Vimos no Capítulo 3, que o problema de dois corpos pode ser reduzido ao problema de um corpo relativo a um ponto fixo (com centro de massa do sistema na origem). Estudaremos nesta seção o sistema reduzido. Deduziremos que o vetor de Runge-Lenz é uma quantidade conservada, cuja a simetria correspondente são as rotações do grupo de Lie $SO(4)$. Com esta simetria determinada, iremos obter as integrais de movimento do sistema.

A dedução da simetria do vetor de Runge-Lenz segue como base a referência [10] e a interpretação da simetria o texto [26].

4.3.1 Motivação ao Vetor de Runge-Lenz

Vamos iniciar estudando um sistema mais simples. Considere uma partícula livre de massa m e posição $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, cuja a Hamiltoniana é simplesmente a energia cinética

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}\|^2 \quad (4.9)$$

com $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Observe que esta Hamiltoniana admite simetria por translações e rotações.

O mapa momento correspondente a rotação deste sistema é o momento angular $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, que é uma quantidade conservada. De fato, escrevendo as componentes do momento angular como $L_i = \sum_{r,s} \epsilon_{irs} q^r p_s$ com $i = 1, 2, 3$ temos

$$\{L_i, \|\mathbf{p}\|^2\} = \sum_{r,s} \epsilon_{irs} \{q^r p_s, \|\mathbf{p}\|^2\} = \sum_{r,s} \epsilon_{irs} \left[\sum_k \delta_{rk} p_s 2p_k \right] = 2 \sum_{r,s} \epsilon_{irs} p_r p_s = 0$$

e portanto $\dot{L}_i = \{L_i, H\} = 0$ para cada $i = 1, 2, 3$. Provando assim que \mathbf{L} é uma quantidade conservada. Este resultado também poderia ser obtido aplicando o Teorema de Noether 2.38.

Definindo agora o vetor $\mathbf{G} := \mathbf{p} \times \mathbf{L} = \|\mathbf{p}\|^2 \mathbf{q} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{p}$, vamos verificar que ele é uma quantidade conservada. De fato, calculando as componentes de $\{G_i, H\}$

$$\begin{aligned} \{G_i, \|\mathbf{p}\|^2\} &= \{\|\mathbf{p}\|^2 q^i - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_i, \|\mathbf{p}\|^2\} \\ &= \{\|\mathbf{p}\|^2 q^i, \|\mathbf{p}\|^2\} - \{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_i, \|\mathbf{p}\|^2\} \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 \{q^i, \|\mathbf{p}\|^2\} - \{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_i, \|\mathbf{p}\|^2\} \\ &= 2\|\mathbf{p}\|^2 p_i - \sum_k p_i p_k 2p_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\dot{G}_i = \{G_i, H\} = 0$ para cada $i = 1, 2, 3$, mostrando que \mathbf{G} é uma quantidade conservada.

Estamos interessados em identificar a estrutura de álgebra de Lie dos colchetes de Poisson das componentes do vetor \mathbf{G} e do momento angular \mathbf{L} satisfazem. Para isso, iremos calcular os colchetes $\{L_i, G_j\}$ e $\{G_i, G_j\}$. Escrevendo $G_j = \sum_{r,s} \epsilon_{jrs} p_r L_s$ e como $\{L_i, p_r\} = \sum_k \epsilon_{kir} p_k$, temos

$$\begin{aligned} \{L_i, G_j\} &= \sum_{r,s} \epsilon_{jrs} \{L_i, p_r L_s\} = \sum_{r,s} \epsilon_{jrs} p_r \{L_i, L_s\} + \sum_{r,s} \epsilon_{jrs} L_s \{L_i, p_r\} \\ &= \sum_{k,r,s} \epsilon_{jrs} \epsilon_{kis} p_r L_k + \sum_{k,r,s} \epsilon_{jrs} \epsilon_{kir} L_s p_k = \sum_k \epsilon_{kij} G_k. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Vamos agora calcular $\{G_i, G_j\}$. Faremos primeiramente alguns cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \{p_r, G_j\} &= \sum_{m,n} \epsilon_{jmn} \{p_r, p_m L_n\} = \sum_{m,n,a,b} \epsilon_{jmn} \epsilon_{nab} \{p_r, p_m q^a p_b\} \\ &= \sum_{m,n,b} \epsilon_{jmn} \epsilon_{nrb} p_m p_b = \sum_{m,n,b} \epsilon_{jmn} \epsilon_{nrb} (\delta_{jn} \delta_{mr} - \delta_{jr} \delta_{mn}) p_m p_n \\ &= p_r p_j - \|\mathbf{p}\|^2 \delta_{rj} \end{aligned}$$

e aplicando este resultado no cálculo de $\{G_i, G_j\}$

$$\begin{aligned} \{G_i, G_j\} &= \sum_{r,s} \epsilon_{irs} \{p_r L_s, G_j\} = \sum_{r,s} \epsilon_{irs} p_r \{L_s, G_j\} + \sum_{r,s} \epsilon_{irs} L_s \{p_r, G_j\} \\ &= \sum_{k,r,s} \epsilon_{irs} \epsilon_{ksj} p_r G_k + \sum_{r,s} \epsilon_{irs} L_s [p_r p_j - \|\mathbf{p}\|^2 \delta_{rj}] \\ &= -\|\mathbf{p}\|^2 \sum_{kij} \epsilon_k L_k \\ &= -2mH \sum_k \epsilon_{kij} L_k. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para $\mathbf{p} \neq 0$, podemos definir o vetor $\mathbf{E} := \mathbf{G}/\|\mathbf{p}\|$, cujo o colchete de Poisson das suas

componentes determinam a álgebra de Lie

$$\begin{aligned}\{L_i, L_j\} &= \sum_k \epsilon_{kij} L_k, \\ \{E_i, E_j\} &= -\sum_k \epsilon_{kij} F_k, \\ \{L_i, E_j\} &= \sum_k \epsilon_{kij} E_k,\end{aligned}$$

que é isomorfa a álgebra de Lie $\mathfrak{o}(3, 1)$, visto no Exemplo 1.53.

4.3.2 Vetor de Runge-Lenz e Simetria da álgebra de Lie $\mathfrak{o}(4)$

Na seção anterior, vimos que o vetor $\mathbf{G} = \mathbf{p} \times \mathbf{L}$ era uma quantidade conservada para um sistema de uma partícula livre com simetria de rotação e translação. Supondo agora que a Hamiltoniana tenha apenas a simetria de rotação, vamos procurar uma quantidade conservada da forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + f(r)\mathbf{q}.$$

A condição de \mathbf{F} ser uma quantidade conservada, junto com a equação (4.12) abaixo, fixará as função f e a Hamiltoniana H .

Seguindo a seção anterior, a primeira relação que \mathbf{F} deve satisfazer é uma análoga a (4.11). Para todo $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ queremos que

$$\{F_i, F_j\} = -2mH \sum_k \epsilon_{kij} L_k. \quad (4.12)$$

Vamos calcular explicitamente o colchete acima. Escrevendo $\mathbf{F} = \|\mathbf{p}\|^2 \mathbf{q} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{p} + f(r)\mathbf{q}$, para quaisquer $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ fixos, temos

$$\begin{aligned}\{F_i, F_j\} &= \{\|\mathbf{p}\|^2 q^i - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_i + f(r)q^i, \|\mathbf{p}\|^2 q^j - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_j + f(r)q^j\} \\ &= \{G_i, G_j\} + \{G_i, f(r)q^j\} + \{f(r)q^j, G_j\},\end{aligned}$$

onde G_i são as componentes do vetor $\mathbf{G} = \mathbf{p} \times \mathbf{L}$. Já determinamos em (4.11) que $\{G_i, G_j\} = -\|\mathbf{p}\|^2 \sum_k \epsilon_{kij} L_k$. Precisamos agora calcular o valor de $\{G_i, f(r)q^j\}$. Para isto, faremos alguns cálculos intermediários

$$\begin{aligned}\{\|\mathbf{p}\|^2, f(r)q^j\} &= \sum_k -\frac{\partial \|\mathbf{p}\|^2}{\partial p_k} \frac{\partial (q^j f(r))}{\partial q^k} = -\sum_k 2p_k q^j \frac{f'(r)}{r} q^k - 2p_j f(r) \\ &= -2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})q^j \frac{f'(r)}{r} - 2p_j f(r),\end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\{-(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}), q^i f(r)\} = \sum_k \delta_{jk} q^k f(r) + q^j q^k \frac{f'(r)}{r} = q^j f(r) + q^j \mathcal{E}(f)(r), \quad (4.14)$$

$$\{p_i, q^j f(r)\} = -\sum_k \delta_{ki} q^j q^k \frac{f'(r)}{r} = -q^j q^i \frac{f'(r)}{r}, \quad (4.15)$$

onde \mathcal{E} é a derivada de Euler (Definição E.4). Somando as relações (4.13), (4.14) e (4.15)

$$\begin{aligned} \{G_i, f(r)q^j\} &= \{\|\mathbf{p}\|^2 q^i - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_i, f(r)q^j\} \\ &= q^i \{\|\mathbf{p}\|^2, f(r)q^j\} + p_i \{-(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_i, f(r)q^j\} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\{q^i, f(r)q^j\} \\ &= q^i \left[-2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})q^j \frac{f'(r)}{r} - 2p_j f(r) \right] + p_i [q^j f(r) + q^j \mathcal{E}(f)(r)] \\ &\quad + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})q^j q^i \frac{f'(r)}{r}. \end{aligned}$$

Pela anti-simetria do colchete de Poisson, os termos envolvendo $q^i q^j$ se cancelam

$$\begin{aligned} \{G_i, f(r)q^j\} + \{f(r)q^i, G_j\} &= \{G_i, f(r)q^j\} - \{G_j, f(r)q^i\} \\ &= [-2q^i p_j + p_i q^j + 2q^j p_i - p_j q^i] f(r) + [p_i q^j - p_j q^i] \mathcal{E}(f)(r) \\ &= [p_i q^j - p_j q^i] (\mathcal{E}(f)(r) + 3f(r)) \\ &= (\mathcal{E}(f)(r) + 3f(r)) \sum_k \epsilon_{kij} L_k. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Com as relações (4.12) e (4.16) obtemos a expressão para a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}\|^2 + \frac{1}{2m} (\mathcal{E}(f)(r) + 3f(r)).$$

Para efeitos de contas, definimos as variáveis auxiliares $h = 2mH$ e $W(r) = \mathcal{E}(f)(r) + 3f(r)$. Nosso objetivo agora é determinar o valor da função $f(r)$ e conseqüentemente a expressão da Hamiltoniana H . Para isso, utilizaremos a outra relação que desejamos que o vetor \mathbf{F} satisfaça, $\{F_i, h\} = 0$ para cada $i = 1, 2, 3$. Calculando cada termo deste colchete

$$\{\|\mathbf{p}\|^2 q^i, \|\mathbf{p}\|^2\} = \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \|\mathbf{p}\|^2 2p_k = 2\|\mathbf{p}\|^2 p_i, \quad (4.17)$$

$$\{\|\mathbf{p}\|^2 q^i, W(r)\} = \sum_{k=1}^3 -2p_k q^i \frac{W'(r)}{r} q^k = -2 \left[\frac{W'(r)}{r} \right] (q^k p_k) q^i, \quad (4.18)$$

$$\{-(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_i, \|\mathbf{p}\|^2\} = p_i \sum_{k=1}^3 q^k \frac{\partial W(r)}{\partial q^k} + \left[\frac{W'(r)}{r} \right] (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) q^i, \quad (4.19)$$

$$\{f(r)q^i, \|\mathbf{p}\|^2\} = 2f(r)p_i + 2 \left[\frac{f'(r)}{r} \right] (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) q^i, \quad (4.20)$$

e somando as 4 relações acima

$$\begin{aligned} 0 = \{F_i, h\} &= \{\|\mathbf{p}\|^2 q^i - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_i + f(r)q^i, \|\mathbf{p}\|^2 + W(r)\} \\ &= \left[\frac{-W' + 2f'}{r} \right] (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) q^i + [\mathcal{E}(W)(r) + 2f(r)] p_i. \end{aligned}$$

Fazendo o somatório sobre o índice i da identidade acima

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \{F_i, h\} \mathbf{e}_i \\ &= \sum_i \left(\left[\frac{-W' + 2f'}{r} \right] (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) q^i + [\mathcal{E}(W)(r) + 2f(r)] p_i \right) \\ &= \left[\frac{-W' + 2f'}{r} \right] (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q} + [\mathcal{E}(W)(r) + 2f(r)] \mathbf{p}, \end{aligned}$$

obtemos as relações

$$\begin{aligned} -W' + 2f' &= 0 \Rightarrow W = 2f + \text{const}, \\ \mathcal{E}(W) + 2f &= 0 \Rightarrow \mathcal{E}(W) = -2f. \end{aligned}$$

Aplicando a derivada de Euler na primeira relação e combinando com a segunda, obtemos que $\mathcal{E}(f) = -f$. Segue da Proposição E.5 que f é homogênea de grau -1 , isto é, existe constante $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f = m\alpha/r$. Temos ainda que $W = 2f = 2m\alpha/r$. Obtemos desta forma as expressões para a Hamiltoniana H e a do vetor de Runge-Lenz \mathbf{F}

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} + \frac{\alpha}{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + \frac{m\alpha}{r} \mathbf{q}. \quad (4.21)$$

Observe que a Hamiltoniana acima corresponde a mesma que vimos na Observação 3.19.

Observação 4.2. *A norma da força correspondente ao potencial é da forma α/r^2 . Este resultado é conhecida como **Lei do Inverso do Quadrado**.*

Poderíamos ter definido o vetor de Runge-Lenz e mostrado diretamente que ele é uma quantidade conservada. O que mostramos foi que quantidades conservadas da forma $\mathbf{F} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + f(r)\mathbf{q}$ junto com a equação (4.12) implicam em sistemas que satisfazem a Lei do Inverso do Quadrado.

O vetor momento angular é ortogonal ao plano das órbitas, pois $\mathbf{q} \cdot \mathbf{L} = 0$ e portanto $\mathbf{L} \cdot \mathbf{F} = 0$. Desta forma, o vetor de Runge-Lenz também pertence ao plano que contem as órbitas $\mathbf{q}(t)$. Temos ainda $\mathbf{F} \cdot \mathbf{q} = \|\mathbf{L}\|^2 + m\alpha r$, o que nos fornece a equação de cônica

$$r = \frac{\|\mathbf{L}\|^2}{\|\mathbf{F}\| \cos \theta - m\alpha} = \frac{-\frac{\|\mathbf{L}\|^2}{m\alpha}}{1 - \frac{\|\mathbf{F}\|}{m\alpha} \cos \theta} \quad \text{onde} \quad \theta = \angle(\mathbf{F}, \mathbf{q}). \quad (4.22)$$

As componentes dos vetores de Runge-Lenz \mathbf{F} , do momento angular \mathbf{L} e a função Hamiltoniana H , nos fornecem no total 7 quantidades conservadas. Considerando sem perda de generalidade que $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_3$ e que $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$, segue da relação

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\|^2 &= \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{L}\|^2 + \frac{2m\alpha}{r} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{q} + m^2 \alpha^2 \\ &= 2m \|\mathbf{L}\| \left(\frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} + \frac{\alpha}{r} \right) + m^2 \alpha^2 \\ &= 2m \|\mathbf{L}\|^2 H + m^2 \alpha^2, \end{aligned}$$

que as quantidades conservadas satisfazem

$$F_1^2 + F_2^2 = 2mL_3^2 H + m^2 \alpha^2,$$

o que mostra que 3 destas quantidades são independentes e portanto o sistema é completamente integrável.

Considerando o sistema com energia negativa $H < 0$ e a constante $\alpha < 0$ obtemos

$$\|\mathbf{F}\|^2 = 2m \|\mathbf{L}\|^2 H + m^2 \alpha^2 < m^2 \alpha^2 \Rightarrow 0 < -\frac{\|\mathbf{F}\|}{m\alpha} < 1$$

e portanto a cônica dada pela equação (4.22) é uma elipse. Este resultado é conhecido como **Primeira Lei de Kepler**.

Definindo \mathbf{S} como o elemento de área

$$d\mathbf{S} := \frac{1}{2} \mathbf{q} \times d\mathbf{q},$$

então

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2m} \mathbf{q} \times \mathbf{p} = \frac{\mathbf{L}}{2m}.$$

Como o momento angular \mathbf{L} é uma quantidade conservada, segue que o vetor posição $\mathbf{q}(t)$ percorre áreas iguais em tempos iguais, está é a afirmação da **Segunda Lei de Kepler**.

Vimos que o colchete de Poisson das componentes do vetor de Runge-Lenz \mathbf{F} e do momento angular \mathbf{L} satisfazem

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \sum_k \epsilon_{kij} L_k, \\ \{F_i, F_j\} &= -2mH \sum_k \epsilon_{kij} L_k, \\ \{L_i, F_j\} &= \sum_k \epsilon_{kij} F_k. \end{aligned}$$

Nosso objetivo é identificar as relações acima como alguma álgebra de Lie conhecida. Considerando o caso com energia negativa $H < 0$, podemos definir os seguintes vetores

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{L} + \frac{1}{\sqrt{-2mH}} \mathbf{F} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{L} - \frac{1}{\sqrt{-2mH}} \mathbf{F} \right),$$

cujo o colchete de Poisson das suas componentes satisfazem

$$\begin{aligned} \{A_i, A_j\} &= \sum_k \epsilon_{kij} A_k, \\ \{B_i, B_j\} &= \sum_k \epsilon_{kij} B_k, \\ \{A_i, B_j\} &= 0. \end{aligned}$$

As relações acima são equivalentes às equações (A.1) e (A.2), e portanto definem uma álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{o}(4) \simeq \mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{o}(3)$. Temos também que \mathbf{A} e \mathbf{B} são quantidades conservadas, pois para cada i

$$\{A_i, H\} = \{B_i, H\} = 0.$$

Isso nos diz que a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4)$ corresponde à simetria do problema de Kepler. Veremos na próxima seção, como interpretar esta simetria no espaço de fases $T^*\mathbb{R}_0^3 = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}_0^3 \times \mathbb{R}^3 \mid H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) < 0\} \subset \mathbb{R}^6$ e determinaremos a solução do problema.

4.3.3 Interpretação da Simetria e Equações de Movimento

Nosso objetivo agora é relacionar a simetria da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4)$ com as rotações das 3-esferas em \mathbb{R}^4 . Para isso, começamos estudando um sistema cuja a Hamiltoniana $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \|\xi\|^2 \|\eta\|^2, \tag{4.23}$$

onde $\xi = (x_0, \mathbf{x}), \eta = (y_0, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^4$. Observe que Φ é claramente invariante pelas rotações $SO(4)$ e as equações de Hamiltoniano dado pelo colchete canônico do sistema são

$$\frac{d\xi}{ds} = \|\xi\|^2 \eta \quad \text{e} \quad \frac{d\eta}{ds} = -\|\eta\|^2 \xi.$$

Segue das equações acima que

$$\frac{d(\xi \cdot \eta)}{ds} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\|\xi\|^2}{ds} = 2\|\xi\|^2 \xi \cdot \eta.$$

Portanto, o fibrado cotangente da 3-esfera $T^*S^3 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mid \|\xi\| = 1 \text{ e } \xi \cdot \eta = 0\}$ é preservado pelos fluxos. As equações do sistema restrito a T^*S^3 são

$$\frac{d\xi}{ds} = \eta \quad \text{e} \quad \frac{d\eta}{ds} = -\|\eta\|^2 \xi. \quad (4.24)$$

A solução para o sistema $\Phi|_{T^*S^3}$ são os grandes círculos, que correspondem as geodésicas na esfera (ver a Seção 8.4.2 de [30]). Para simplificar a notação, escreveremos $\Phi \equiv \Phi|_{T^*S^3}$. Nosso objetivo é determinar um symplectomorfismo entre o espaço (T^*S^3, Φ) onde as soluções são geodésicas e o espaço $(T^*\mathbb{R}_0^3, H)$ do problema de Kepler (4.21) original. Uma maneira natural de se fazer isso, é através da projeção estereográfica.

Sejam $N = (1, 0, 0, 0)$ o polo norte da 3-esfera e $S_N = S^3 - \{N\} \subset \mathbb{R}^4$, a projeção estereográfica é dada por

$$\begin{aligned} \pi : S_N &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \xi &\mapsto \frac{1}{1 - x_0} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Esta projeção induz o difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : T^*S_N &\rightarrow T^*\mathbb{R}^3 \\ (\xi, \eta) &\mapsto \left(\frac{1}{1 - x_0} \mathbf{x}, (1 - x_0)\mathbf{y} + y_0\mathbf{x} \right) = (\mathbf{w}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Para verificarmos que φ é um symplectomorfismo, basta verificarmos que ele preserva as 1-formas, $\theta_{S_N} = \varphi^* \theta_{\mathbb{R}^3}$, onde $\theta_{\mathbb{R}^3}$ é a 1-forma canônica em \mathbb{R}^3 e $\theta_{S_N} = \theta_{\mathbb{R}^4}|_{S_N}$. Podemos escrever ainda em coordenadas $\theta_{\mathbb{R}^3} = \mathbf{z} \cdot d\mathbf{w}$ e $\theta_{S_N} = \eta \cdot d\xi$. Pela definição do difeomorfismo φ , temos

$$d\mathbf{w} = \frac{1}{1 - x_0} d\mathbf{x} + \frac{dx_0}{(1 - x_0)^2} \mathbf{x}.$$

Logo o pull-back da 1-forma em $\theta_{\mathbb{R}^3}$ é

$$\begin{aligned} \varphi^* \theta_{\mathbb{R}^3} &= [(1 - x_0)\mathbf{y} + y_0\mathbf{x}] \cdot \left[\frac{1}{1 - x_0} d\mathbf{x} + \frac{dx_0}{(1 - x_0)^2} \mathbf{x} \right] \\ &= \mathbf{y} d\mathbf{x} + \frac{dx_0}{1 - x_0} \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \frac{y_0}{1 - x_0} \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} + \frac{y_0 dx_0}{(1 - x_0)^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Para $(\xi, \eta) \in T^*S_N$, temos as seguintes relações

$$0 = \xi \cdot \eta = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + y_0 x_0, \quad (4.26)$$

$$0 = \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} + x_0 dx_0, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1 - x_0^2. \quad (4.28)$$

Substituindo as 3 relações acima em (4.25)

$$\begin{aligned}\varphi^*\theta_{\mathbb{R}^3} &= \mathbf{y}d\mathbf{x} - \frac{dx_0}{1-x_0}y_0x_0 - \frac{y_0}{1-x_0}x_0dx_0 + \frac{y_0dx_0}{1-x_0}(1+x_0) \\ &= \mathbf{y}d\mathbf{x} + y_0dx_0 \\ &= \eta \cdot d\xi \\ &= \theta_{S_N}.\end{aligned}$$

Como φ preserva as 1-formas canônicas, então é um symplectomorfismo.

O próximo passo, é expressarmos a Hamiltoniana Φ em função das coordenadas $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in T^*\mathbb{R}^3$. Para isso, precisamos determinar a função inversa $\varphi^{-1}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\xi, \eta)$. Iniciamos observando que temos as relações

$$\begin{aligned}\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} &= (1-x_0)\mathbf{y} \cdot \mathbf{w} + y_0\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} \\ &= (1-x_0)\mathbf{y} \cdot \frac{\mathbf{x}}{1-x_0} + y_0\mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{x}}{1-x_0} \\ &= y_0,\end{aligned}\tag{4.29}$$

e

$$\mathbf{y} = \frac{1}{1-x_0}[\mathbf{z} - y_0\mathbf{x}] = \frac{1}{1-x_0}[\mathbf{z} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z})\mathbf{x}] = \frac{1}{2}(1 + \|\mathbf{z}\|^2)\mathbf{z} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}.\tag{4.30}$$

Segue da combinação das relações (4.29) e (4.30) que

$$\begin{aligned}\|\eta\|^2 &= y_0^2 + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{w})^2 + \frac{1}{4}(1 + \|\mathbf{w}\|^2)^2(\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}) + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) - (1 + \|\mathbf{w}\|^2)(\mathbf{z} \cdot \mathbf{w})^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 + \|\mathbf{w}\|^2)^2\|\mathbf{z}\|^2.\end{aligned}$$

Podemos definir desta forma uma função energia $E : T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$E(\mathbf{w}, \mathbf{z}) := (\Phi \circ \varphi^{-1})(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \frac{1}{8}(\|\mathbf{w}\|^2 + 1)^2\|\mathbf{z}\|^2.$$

Considere uma função $\psi : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave com U aberto e que $E(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in U$ para todo $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in T^*\mathbb{R}^3$. Diferenciando $\psi(E) = \psi \circ E$, obtemos pela regra da cadeia que

$$i_{X_{\psi(E)}}\omega = \mathbf{d}(\psi(E)) = \psi'(E)\mathbf{d}E.$$

Mas $i_{\psi'(E)X_E}\omega = \psi'(E)i_{X_E}\omega = \psi'(E)\mathbf{d}E$, portanto

$$X_{\psi(E)} = \psi'(E)X_E.$$

A relação acima nos diz que na superfície $\{E = \text{const.}\}$, os campos de vetores de E e $\psi(E)$ são o mesmo a menos do múltiplo $\psi'(E)$. Se escolhermos a função ψ de tal forma que a derivada $\psi'(E) = 1$, então os campos coincidem, $X_{\psi(E)} = X_E$ e desta forma o sistema possui a mesma evolução da dinâmica. Considerando em particular a função $\psi(x) = \sqrt{2x} - 1$, então

$$\psi(E)(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}(1 + \|\mathbf{w}\|^2)\|\mathbf{z}\| - 1.$$

Observe que a superfície $\{E = 1/2\}$ é a mesma que a superfície $\{\psi(E) = 0\}$ e que $\psi'(1/2) = 1$. Portanto os campos de vetores $X_{\psi(E)}$ e X_E coincidem.

Vamos agora relacionar esses resultados com a Hamiltoniana H do problema de Kepler. Observe que para para $\|\mathbf{z}\| \neq 0$ podemos escrever

$$\frac{1}{\|\mathbf{z}\|} \psi(E)(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{z}\|} = \tilde{H}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) + \frac{1}{2},$$

onde $\tilde{H}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{w}\|^2/2 - 1/\|\mathbf{z}\|$. Definindo a função $f(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\|$, podemos escrever $\psi(E) = f(\tilde{H} + 1/2)$. Logo as superfícies $\{\tilde{H} = -1/2\}$ e $\{\psi(E) = 0\}$ coincidem, além disso

$$\mathbf{d}(\psi(E)) = \mathbf{d}f\left(\tilde{H} + \frac{1}{2}\right) + f\mathbf{d}\left(\tilde{H} + \frac{1}{2}\right) = f\mathbf{d}\tilde{H},$$

que nos diz que os campos $X_{\psi(E)} = fX_{\tilde{H}}$ e que $f(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\| = dt/ds$, onde t é a variável independente do sistema $(\tilde{H}, \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 - \{0\}))$. Definindo o difeomorfismo

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 - \{0\}) &\rightarrow (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3 = T^*\mathbb{R}_0^3 \\ (\mathbf{w}, \mathbf{z}) &\mapsto (-\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (\mathbf{q}, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

temos que $\mathbf{d}\mathbf{w} \wedge \mathbf{d}\mathbf{z} = \mathbf{d}\mathbf{p} \wedge \mathbf{d}(-\mathbf{q}) = \mathbf{d}\mathbf{q} \wedge \mathbf{d}\mathbf{p}$ e portanto ρ é um symplectomorfismo. Desta forma, obtemos a Hamiltoniana para o Problema de Kepler

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\tilde{H} \circ \rho^{-1})(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} \quad (4.31)$$

com $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3 \cap \{\rho(\{\tilde{H} = -1/2\})\}$. Esta Hamiltoniana coincide com a da equação (4.21) para $\alpha = 1$.

Poderíamos ter considerado qualquer nível de energia negativa para a Hamiltoniana. De fato, é simples através da transformação de Lie levarmos a solução do nível de energia $H = -1/2$ para uma solução com qualquer nível energia negativa. Para $\lambda > 0$, definimos **transformação de Lie**

$$\begin{aligned} T_\lambda : T^*\mathbb{R}_0^3 \times \mathbb{R}_{>0} &\rightarrow T^*\mathbb{R}_0^3 \times \mathbb{R}_{>0} \\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &\mapsto (\lambda^2 \mathbf{q}, \lambda^{-1} \mathbf{p}, \lambda^3 t) = (\mathbf{q}', \mathbf{p}', t'). \end{aligned}$$

Pode-se verificar que T_λ leva soluções do problema de Kepler em soluções $H(\mathbf{q}', \mathbf{p}') = \lambda^{-2}H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, com o tempo reparametrizado e com colchete de Poisson canônico. Um resultado imediato da transformação de Lie é a **Terceira Lei de Kepler**. Sejam T o período e a o semi-eixo maior da elipse para o sistema $(T^*\mathbb{R}_0^3, H)$, pela transformação de Lie $\bar{T} = \lambda^3 T$ e $\bar{a} = \lambda^2 a$ são o período e o semi-eixo maior respectivamente para o sistema de energia $\lambda^{-2}H$, então

$$\frac{\bar{T}^2}{\bar{a}^3} = \frac{\lambda^6 T^2}{\lambda^6 a^3} = \frac{T^2}{a^3}.$$

Vamos obter agora a solução para o problema de Kepler. Seja $(\xi(s), \eta(s))$ solução do sistema (T^*S_N, Φ) , ele se relaciona com as soluções do problema de Kepler através da composição dos symplectomorfismos

$$(\mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) = (\rho \circ \varphi)(\xi(s), \eta(s)), \quad (4.32)$$

onde os parâmetros s e t estão relacionados por (detalhes na Seção 7 de [10])

$$\frac{dt}{ds} = \|\mathbf{q}\|. \quad (4.33)$$

Pela simetria do sistema (T^*S_N, Φ) pelas rotações de $SO(4)$, podemos considerar sem perda de generalidade que $x_3(s) = 0$ para todo s . As soluções da equação $\xi'' + \xi = 0$ que corresponde a (4.24) parametrizada pelo comprimento de arco ($\|\eta\| = 1$), são os grandes círculos na 3-esfera onde, as coordenadas podem ser parametrizadas da seguinte forma

$$x_0 = \sin \alpha \cos s, \quad x_1 = \sin s, \quad x_2 = -\cos \alpha \cos s, \quad x_3 = 0.$$

Como $\eta = d\xi/ds$, obtemos as coordenadas dos vetores tangentes

$$y_0 = -\sin \alpha \sin s, \quad y_1 = \cos s, \quad y_2 = \cos \alpha \sin s, \quad y_3 = 0.$$

Segue do symplectomorfismo (4.32) que as soluções do sistema (4.31) são

$$q^1(s) = e - \cos s, \quad q^2(s) = -\sqrt{1 - e^2} \sin s, \quad q^3(s) = 0, \quad (4.34)$$

$$p_1(s) = \frac{\sin s}{1 - e \cos s}, \quad p_2(s) = \frac{-\sqrt{1 - e^2} \cos s}{1 - e \cos s}, \quad p_3(s) = 0, \quad (4.35)$$

onde $e = \sin \alpha$ é a excentricidade da elipse de coordenadas $\mathbf{q}(t)$. Pelas soluções obtidas acima, obtemos que a norma da posição satisfaz $\|\mathbf{q}\|^2 = (1 - e \cos s)^2$. Integrando (4.33), obtemos a relação explícita entre s e o tempo t

$$t = \int_0^s \|\mathbf{q}\| dv = \int_0^s (1 - e \cos v) dv = s - e \sin s, \quad (4.36)$$

que é conhecida como **equação de Kepler**.

Observação 4.3. Considerando o Exemplo 3.17 sobre a redução do problema de 2 corpos de massas m e m' , onde a Hamiltoniana $H : (\mathbb{R}^6 - \Delta) \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ era dada por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{2m} \|\mathbf{p}\|^2 + \frac{1}{2m'} \|\mathbf{p}'\|^2 + \frac{1}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}'\|}.$$

Com as condições iniciais $(\mathbf{q}_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{q}'_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0, -\mathbf{p}_0) \in \mathbf{J}^{-1}(0)$, onde $\mathbf{x}_0 = CM(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}'_0)$ e considerando a solução do problema de Kepler (4.34), podemos obter através do método de reconstrução a solução em $(\mathbb{R}^6 - \Delta) \times \mathbb{R}^6$

$$c(t) = \left(\frac{m'}{m + m'} \mathbf{q}(t) + \mathbf{x}_0, -\frac{m}{m + m'} \mathbf{q}(t) + \mathbf{x}_0, \sqrt{\frac{m + m'}{m'}} \mathbf{p}(t), -\sqrt{\frac{m + m'}{m'}} \mathbf{p}(t) \right).$$

4.4 Corpo Rígido Livre

Vamos iniciar este exemplo estudando um modelo mais simples, o sistema de partículas. Considere um sistema composto por N partículas de massas $m_l > 0$ se movendo no espaço euclidiano tri-dimensional \mathbb{R}^3 , com as posições dadas por $q = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$.

Definindo \mathbf{F}_{ln} como a **força de interação** entre a l -ésima e a n -ésima partícula, podemos expressar a força total sobre a l -ésima partícula como

$$\mathbf{F}_l^{\text{total}} = \sum_{n \neq l} \mathbf{F}_{ln} + \mathbf{E}_l,$$

onde \mathbf{E}_l é uma força externa qualquer. Podemos ainda classificar a força de interação da seguinte forma:

Definição 4.4. Dizemos que um sistema de partículas satisfaz o **princípio ação e reação fraca** se $\mathbf{F}_{ln} = -\mathbf{F}_{nl}$ para todo $l \neq n$. Além disso, se a força \mathbf{F}_{ln} é paralela ao vetor $\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_n$ para todo $l \neq n$, então dizemos que o sistema satisfaz o **princípio de ação e reação forte**.

Lembrando agora da definição da função centro de massa $CM : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que é dada por

$$CM(q = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)) = \frac{1}{M} \sum_l m_l \mathbf{x}_l, \quad (4.37)$$

onde $M := \sum_l m_l$ é a **massa total** do sistema e definindo o **momento linear total** do sistema

$$\mathbf{p} := \sum_l m_l \dot{\mathbf{x}}_l \in \mathbb{R}^3,$$

obtemos o seguinte resultado sobre o comportamento global do sistema:

Proposição 4.5. Se o sistema satisfaz o princípio de ação reação fraca, $\mathbf{F}_{ln} = -\mathbf{F}_{nl}$ para todo $l \neq n$, então a curva que descreve a evolução do sistema $q(t) \in \mathbb{R}^{3N}$ satisfaz

$$M \frac{d^2}{dt^2} CM(q(t)) = \sum_l \mathbf{E}_l.$$

Demonstração. Derivando duas vezes em relação ao tempo a definição da função centro de massa (4.37), obtemos

$$\dot{\mathbf{p}} = M \frac{d^2}{dt^2} CM(q(t)) = \sum_l m_l \ddot{\mathbf{x}}_l = \sum_l \left[\sum_{n \neq l} \mathbf{F}_{ln} + \mathbf{E}_l \right] = \sum_l \mathbf{E}_l,$$

que corresponde a identidade desejada. \square

A proposição anterior, nos diz que o centro de massa do sistema evolui como uma partícula de massa M , cuja a força correspondente é a força externa total sobre o sistema.

Observação 4.6. Se a soma das forças externas é nula, $\sum_l \mathbf{E}_l = 0$, então o centro de massa $CM(q(t))$ descreve um movimento retilíneo uniforme. Desta forma, podemos escolher um sistema de referência em que a origem coincida com o centro de massa $CM(q(t))$ para todo tempo t . De fato, como

$$\dot{\mathbf{p}} = M \frac{d^2}{dt^2} CM(q(t)) = 0,$$

temos que a equação que descreve o movimento do centro de massa satisfaz

$$CM(q(t)) = \frac{1}{M} \mathbf{p}(t_0)(t - t_0) + \text{const.}$$

e portanto o centro de massa realiza um movimento retilíneo uniforme.

Proposição 4.7. Se o sistema satisfaz o princípio de ação e reação forte, então a derivada do momento angular total \mathbf{L} satisfaz

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_l \mathbf{x}_l \times \mathbf{E}_l.$$

Demonstração. Observe inicialmente que para $l \neq n$, a condição de ação e reação forte nos fornece

$$\mathbf{x}_l \times \mathbf{F}_{ln} + \mathbf{x}_n \times \mathbf{F}_{nl} = [\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_n] \times \mathbf{F}_{ln} = 0.$$

Segue da definição do momento angular $\mathbf{L}_l = \mathbf{x}_l \times (m_l \dot{\mathbf{x}}_l)$ que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \sum_l \dot{\mathbf{L}}_l = \sum_l m_l [\dot{\mathbf{x}}_l \times \dot{\mathbf{x}}_l] + \sum_l m_l [\mathbf{x}_l \times \ddot{\mathbf{x}}_l] = \sum_l m_l [\mathbf{x}_l \times \ddot{\mathbf{x}}_l] \\ &= \sum_l \mathbf{x}_l \times \mathbf{F}_l^{\text{total}} = \sum_l \mathbf{x}_l \times \left[\sum_{n \neq l} \mathbf{F}_{ln} \right] + \sum_l \mathbf{x}_l \times \mathbf{E}_l \\ &= \sum_l \mathbf{x}_l \times \mathbf{E}_l. \end{aligned}$$

□

Pela proposição anterior, uma condição suficiente para que o momento angular total \mathbf{L} seja uma quantidade conservada, é que cada força externa seja nula, $\mathbf{E}_l = 0$ para cada índice l . Sistemas que não possuem forças externas, são chamados de **livre**.

Considerando um sistema de partículas livre, segue das Proposições 4.5 e 4.7 que:

1. O momento linear total \mathbf{p} é uma quantidade conservada e portanto, o centro de massa $CM(q(t))$ segue um movimento retilíneo uniforme;
2. O momento angular total \mathbf{L} é uma quantidade conservada, isto é, $\dot{\mathbf{L}} = 0$;
3. A energia cinética total do sistema

$$E(q(t), p(t)) := \sum_l \frac{1}{2m_l} \|\mathbf{p}_l\|^2$$

também é uma quantidade conservada, onde $(q = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N), p = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)) \in \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$.

Para um sistema livre, temos 4 quantidades conservadas, que corresponde a cada componente do momento angular \mathbf{L} e a energia do sistema E . Vamos agora incorporar o vínculo de rigidez ao problema.

Definição 4.8. Um sistema de partículas é chamado de **corpo rígido** se para todo tempo $t \geq t_0$, existe uma rotação $R(t) \in SO(3)$ e uma translação $\tau_{\mathbf{x}(t)} : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ tal que

$$\mathbf{x}_l(t) = (\tau_{\mathbf{x}(t)} \circ R(t))(\mathbf{x}_l(t_0)) = R(t)\mathbf{x}_l(t_0) + \mathbf{x}(t) \quad \text{para todo } l = 1, 2, \dots, N \text{ e } t \geq t_0.$$

Observação 4.9. Para $N > 2$, um sistema é um corpo rígido se e somente se a distância entre as partículas é constante, isto é, $\|\mathbf{x}_l(t) - \mathbf{x}_n(t)\| = \text{const.}$ para $t \geq t_0$ e $l \neq n$. De fato, para $l \neq n$ temos

$$\|\mathbf{x}_l(t) - \mathbf{x}_n(t)\| = \|R(t)\mathbf{x}_l(t_0) + \mathbf{x}(t) - R(t)\mathbf{x}_n(t_0) - \mathbf{x}(t)\| = \|\mathbf{x}_l(t_0) - \mathbf{x}_n(t_0)\| = \text{const.}$$

A volta pode ser vista em [1]. Podemos considerar que a condição de rigidez é implementado pelas forças de interação (forças de vínculo) entre as partículas que satisfazem o princípio de ação e reação forte.

Considerando uma configuração de referência (ou inicial) $q_0 := q(t_0) \in \mathbb{R}^{3N}$, segue da equivariância da função centro de massa CM pelas ações de rotação e translação que

$$CM(q(t)) = CM((\tau_{\mathbf{x}}(t) \circ R(t))q(t_0)) = R(t)CM(q(t_0)) + \mathbf{x}(t).$$

Escolhendo um sistema de referência onde o centro de massa esteja na origem no tempo inicial $CM(q(t_0)) = 0$, obtemos que o centro de massa realiza apenas movimentos de translação

$$CM(q(t)) = \mathbf{x}(t) \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Se ainda o corpo rígido for livre, segue da Observação 4.6 que

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{M} \mathbf{p}(t_0)(t - t_0),$$

e portanto o centro de massa do sistema realiza um movimento retilíneo uniforme. Logo, podemos adotar um sistema de referencia inercial onde o centro de massa esteja sempre na origem do sistema, $CM(q(t)) = 0$ para todo tempo t . Neste sistema de referência, a condição de rigidez do sistema é apenas dada pela rotação

$$q(t) = R(t)q(t_0) = (R(t)\mathbf{x}_1(t_0), \dots, R(t)\mathbf{x}_N(t_0)) \quad \text{para todo } t \geq t_0, \quad (4.38)$$

que nos diz que as posições das partículas ficam completamente determinadas por uma configuração inicial $q(t_0)$ e pelas rotações $R(t) \in SO(3)$. Derivando a relação acima e observando que $\dot{R}(t)R^{-1}(t) \in \mathfrak{so}(3)$, temos

$$\dot{q}(t) = \dot{R}(t)q_0 = \dot{R}(t)R^{-1}(t)q(t) \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} &= (\dot{R}(t)R^{-1}(t)\mathbf{x}_1(t), \dots, \dot{R}(t)R^{-1}(t)\mathbf{x}_N(t)) \\ &= (\widehat{\varphi}(\dot{R}(t)R^{-1}(t)) \times \mathbf{x}_1(t), \dots, \widehat{\varphi}(\dot{R}(t)R^{-1}(t)) \times \mathbf{x}_N(t)), \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde $\widehat{\varphi} : (\mathbb{R}^3, \times) \rightarrow (\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$ é o isomorfismo de álgebras de Lie definido na Proposição A.1. A relação acima nos leva a definirmos o **vetor velocidade angular no sistema de coordenadas espaço** $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ por

$$\boldsymbol{\omega}(t) := \widehat{\varphi}^{-1}(\dot{R}(t)R^{-1}(t)).$$

De forma análoga, podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \dot{R}(t)q_0 = R(t)R^{-1}(t)\dot{R}(t)q_0 \\ &= R(t)(\widehat{\varphi}(R^{-1}(t)\dot{R}(t)) \times \mathbf{x}_1(t_0), \dots, \widehat{\varphi}(R^{-1}(t)\dot{R}(t)) \times \mathbf{x}_N(t_0)), \end{aligned} \quad (4.41)$$

o que nos leva a definir o **vetor velocidade angular no sistema de referência corpo** $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ por

$$\boldsymbol{\Omega}(t) := \widehat{\varphi}^{-1}(R^{-1}(t)\dot{R}(t)). \quad (4.42)$$

As velocidades angulares no sistema de coordenadas espaço e corpo estão relacionadas da seguinte forma

$$R^{-1}\boldsymbol{\omega} = R^{-1}\widehat{\varphi}^{-1}(\dot{R}R^{-1}) = \widehat{\varphi}^{-1}(R^{-1}\dot{R}R^{-1}R) = \boldsymbol{\Omega}.$$

Até agora, apenas as quantidades totais do sistema desempenharam um papel no estudo da dinâmica do sistema de partículas. Veremos agora a importância que a distribuição

de massa pelo sistema de partículas desempenha. Da equação (4.41), podemos escrever o momento angular total \mathbf{L} como

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum_{l=1}^N \mathbf{L}_l = \sum_l \mathbf{x}_l \times m_l \dot{\mathbf{x}}_l \\ &= \sum_l m_l (R(t)\mathbf{x}_l(t_0)) \times (R(t)(\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{x}_l(t_0))) \\ &= R(t) \left(\sum_l m_l \mathbf{x}_l(t_0) \times (\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{x}_l(t_0)) \right).\end{aligned}$$

Desta forma, definimos o **tensor de inércia** no ponto $q \in \mathbb{R}^{3N}$ como a transformação linear

$$\begin{aligned}\mathbb{I}(q) : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbb{I}(q = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N))(\mathbf{v}) := \sum_l m_l \mathbf{x}_l(t) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{x}_l(t)),\end{aligned}\quad (4.43)$$

que contém informação sobre a distribuição de massa do sistema. Assim, podemos escrever o momento angular total como

$$\mathbf{L}(t) = R(t) \cdot \mathbb{I}(q_0)\boldsymbol{\Omega}(t). \quad (4.44)$$

Proposição 4.10. *Para todo $q \in \mathbb{R}^{3N}$ e $R \in SO(3)$, o tensor de inércia $\mathbb{I} : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaz as propriedades:*

1. $\mathbb{I}(q)$ é uma matriz simétrica;
2. $\mathbb{I}(Rq) = R\mathbb{I}(q)R^{-1}$.

Demonstração. (1) Considere $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 e o vetor $q \in \mathbb{R}^{3N}$. Para provarmos que $\mathbb{I}(q)$ é simétrica, precisamos verificar que para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$ temos

$$\mathbb{I}(q)_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbb{I}(q)(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j \cdot \mathbb{I}(q)(\mathbf{e}_i) = \mathbb{I}(q)_{ji}.$$

Para isso, vamos provar que para todo i e j vale a seguinte relação

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbb{I}(q)(\mathbf{e}_j) = \sum_l m_l (\delta_{ij} \|\mathbf{x}_l(t)\|^2 - (\mathbf{x}_l(t))_i (\mathbf{x}_l(t))_j).$$

Lembrando que para quaisquer vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$, e aplicando esta relação na definição do tensor de inércia (4.43)

$$\mathbb{I}(q)(\mathbf{e}_j) = \sum_l m_l \mathbf{x}_l(t) \times (\mathbf{e}_j \times \mathbf{x}_l(t)) = \sum_l m_l (\|\mathbf{x}_l(t)\|^2 \mathbf{e}_j - (\mathbf{x}_l(t) \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{x}_l(t)).$$

Fazendo o produto interno com o vetor \mathbf{e}_i

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i \cdot \mathbb{I}(q)(\mathbf{e}_j) &= \sum_l m_l (\|\mathbf{x}_l(t)\|^2 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j - (\mathbf{x}_l(t))_i (\mathbf{x}_l(t))_j) \\ &= \sum_l m_l (\delta_{ij} \|\mathbf{x}_l(t)\|^2 - (\mathbf{x}_l(t))_i (\mathbf{x}_l(t))_j) \\ &= \mathbf{e}_j \cdot \mathbb{I}(q)(\mathbf{e}_i),\end{aligned}$$

que corresponde a relação desejada.

(2) Considerando a rotação $R \in SO(3)$ e o vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, então

$$\begin{aligned} R\mathbb{I}(q)(R^{-1}\mathbf{v}) &= R \left[\sum_l m_l \mathbf{x}_l(t) \times (R^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{x}_l(t)) \right] \\ &= \sum_l m_l R\mathbf{x}_l(t) \times R(R^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{x}_l(t)) \\ &= \sum_l m_l R\mathbf{x}_l(t) \times (\mathbf{v} \times R\mathbf{x}_l(t)) \\ &= \mathbb{I}(Rq)\mathbf{v}. \end{aligned}$$

□

Observação 4.11. Dada uma configuração de referência $q_0 := q(t_0)$, segue da Proposição (4.10) e do Teorema Espectral para matrizes simétricas, que existe uma base ortonormal de autovetores $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ com autovalores estritamente positivos $\{I_1, I_2, I_3\}$, tal que nesta base o tensor de inércia pode ser escrito como

$$\mathbb{I}_0 := \mathbb{I}(q_0) = \text{diag}(I_1, I_2, I_3) = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores $\{I_1, I_2, I_3\}$ são chamados de **momentos principais de inércia**.

Observação 4.12. O tensor de inércia \mathbb{I} nos permite definir uma métrica em $SO(3)$ invariante por translações pela esquerda da seguinte forma, para os vetores $v, w \in T_R SO(3)$ definimos a métrica no ponto $R \in SO(3)$ como

$$\langle u, v \rangle_R = u \cdot \mathbb{I}(Rq_0)v.$$

Com a identificação $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$, existem $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ tais que $v = R\xi$ e $w = R\eta$. Pela propriedade 2 da Proposição 4.10

$$\langle R\xi, R\eta \rangle_R = R\xi \cdot \mathbb{I}(Rq_0)R\eta = \xi \cdot R^{-1}\mathbb{I}(Rq_0)R\eta = \xi \cdot \mathbb{I}_0\eta = \langle \xi, \eta \rangle_e$$

mostrando que essa métrica é invariante por translações a esquerda.

Observação 4.13. Para o caso do corpo rígido contínuo, isto é, onde o corpo é uma variedade conexa $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ e a distribuição de massa é dada pela função suave densidade $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, podemos definir o tensor de inércia $\mathbb{I} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$\mathbb{I}_{ij} = \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{X}) (\delta_{ij} \|\mathbf{X}\|^2 - X_i X_j) dV,$$

que claramente é simétrica e satisfaz propriedades análogas ao tensor de inércia do sistema de partículas.

4.4.1 Equações de Movimento

Vamos agora obter as equações de movimento a partir da conservação do momento angular total do sistema. Com um pouco de cálculo e considerando o tensor de inércia na configuração de referência $\mathbb{I}_0 = \mathbb{I}(q_0)$, obtemos uma equação equivalente a $\dot{\mathbf{L}} = 0$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} = 0 &\iff \frac{d}{dt}(R(t) \cdot \mathbb{I}_0 \boldsymbol{\Omega}(t)) = 0 \\ &\iff \dot{R}(t) \mathbb{I}_0 \boldsymbol{\Omega}(t) + R(t) \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_0 \boldsymbol{\Omega}(t)) = 0 \\ &\iff R^{-1}(t) \dot{R}(t) \mathbb{I}_0 \boldsymbol{\Omega}(t) + \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_0 \boldsymbol{\Omega}(t)) = 0 \\ &\iff \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_0 \boldsymbol{\Omega}(t)) = -\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbb{I}_0 \boldsymbol{\Omega}(t), \end{aligned}$$

onde a última relação é chamada de **equação de Euler**. Definindo o **momento angular total no sistema de referência corpo** $\boldsymbol{\Pi}(t) \in \mathbb{R}^3$ como

$$\boldsymbol{\Pi}(t) := \mathbb{I}_0 \boldsymbol{\Omega}(t), \quad (4.45)$$

podemos reescrever a equação de Euler e a equação (4.42) como

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}}(t) = \boldsymbol{\Pi}(t) \times \mathbb{I}_0^{-1} \boldsymbol{\Pi}(t) \quad \text{equação de Euler} \quad (4.46)$$

$$\dot{R}(t) = R \hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1} \boldsymbol{\Pi}) \quad \text{equação de reconstrução} \quad (4.47)$$

Para determinarmos a solução $(R(t), \boldsymbol{\Pi}(t)) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ do corpo rígido, precisamos primeiramente resolver a equação de Euler que depende apenas do momento angular $\boldsymbol{\Pi}(t)$ e depois determinamos a curva $R(t) \in SO(3)$ pela equação de reconstrução. Repare na semelhança entre as equações acima e as do Teorema 3.13 (Reconstrução da Dinâmica).

Exemplo 4.14. *Para ilustrar este procedimento, considere um sistema com condição inicial $\boldsymbol{\Pi}(t_0) = \|\mathbf{L}\| \mathbf{e}'_i$, lembrando que $\|\mathbf{L}\|$ é constante e \mathbf{e}'_i é um eixo principal de inércia, isto é, um autovetor normalizado do tensor de inércia \mathbb{I}_0 (ver Observação 4.11). Observe que $\boldsymbol{\Pi}(t_0)$ é ponto fixo da equação de Euler, pois*

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}}(t_0) = \boldsymbol{\Pi}(t_0) \times \mathbb{I}_0^{-1} \boldsymbol{\Pi}(t_0) = \|\mathbf{L}\|^2 (-I_i^{-1} \mathbf{e}'_i \times \mathbf{e}'_i) = 0$$

e portanto a solução é constante ao longo do tempo

$$\boldsymbol{\Pi}(t) = \boldsymbol{\Pi}(t_0) = \|\mathbf{L}\| \mathbf{e}'_i \quad \text{para todo } t.$$

Neste caso, a solução da equação de reconstrução (4.47) é

$$R(t) = R(t_0) \exp[(t - t_0) \hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1} \boldsymbol{\Pi}(t_0))] = R(t_0) \exp[(t - t_0) I_i^{-1} \|\mathbf{L}\| \hat{\varphi}(\mathbf{e}'_i)],$$

que corresponde a uma rotação ao redor do eixo $\hat{\varphi}(\mathbf{e}'_i)$. Desta forma, obtemos a solução do problema do corpo rígido em $SO(3) \times \mathbb{R}^3$

$$(R(t), \boldsymbol{\Pi}(t)) = (R(t_0) \exp[(t - t_0) \hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1} \boldsymbol{\Pi}(t_0))], \boldsymbol{\Pi}(t_0)).$$

Vamos agora obter a expressão da função Hamiltoniana deste sistema. Vimos que a posição $\mathbf{x}_l(t)$ e o momento linear $\mathbf{p}_l(t)$ da l -ésima partícula, podem ser expressas apenas em função da rotação $R(t) \in SO(3)$ e do momento angular $\mathbf{\Pi}(t) \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x}_l(R(t), \mathbf{\Pi}(t)) = R(t)\mathbf{x}_l(t_0), \quad (4.48)$$

$$\mathbf{p}_l(R(t), \mathbf{\Pi}(t)) = m_l \dot{\mathbf{x}}_l(R(t), \mathbf{\Pi}(t)) = m_l R(t)(\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi}(t) \times \mathbf{x}_l(t_0)). \quad (4.49)$$

Com estas relações, podemos expressar a Hamiltoniana $H : P_{CR} := SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ do corpo rígido

$$\begin{aligned} H(R(t), \mathbf{\Pi}(t)) &= \sum_l \frac{1}{2m_l} \|\mathbf{p}_l(R, \mathbf{\Pi})\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_l m_l R(t)(\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi}(t) \times \mathbf{x}_l(t_0)) \cdot R(t)(\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi}(t) \times \mathbf{x}_l(t_0)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_l m_l (\mathbf{x}_l(t_0) \times (\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi}(t) \times \mathbf{x}_l(t_0))) \cdot \mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi}(t) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}(t) \cdot \mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi}(t). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Vamos verificar que as equações obtidas pelo colchete de Poisson no espaço de fases $P_{CR} := SO(3) \times \mathbb{R}^3$ visto na Seção 2.4.1, coincidem com as equações de Euler e de reconstrução vista anteriormente. Para isso, considere o sistema Hamiltoniano $(SO(3) \times \mathbb{R}^3, \omega_B, H)$ com a 2-forma simplética ω_B dada pela Proposição 2.76.

Proposição 4.15. *Considerando a função Hamiltoniana $H : P_{CR} = SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida acima e o colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{P_{CR}}$ definida pela equação (2.15), temos*

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_i &= \{\Pi_i, H\}_{P_{CR}} = [\mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi}]_i, \\ \dot{R}_{ij} &= \{R_{ij}, H\}_{P_{CR}} = [R\hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi})]_{ij}, \end{aligned}$$

para cada $i, j = 1, 2, 3$.

Demonstração. Para a primeira relação, basta aplicarmos a definição do colchete de Poisson $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ definido na Seção 2.4.1

$$\dot{\Pi}_i = \{\Pi_i, H\}_{P_{CR}}(\mathbf{\Pi}, R) = -\mathbf{\Pi} \cdot (\mathbf{e}_i \times \nabla_{\mathbf{\Pi}} H) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi})$$

que corresponde aos termos da da equação de Euler $\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi}$. Para a segunda relação, observe que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} R_{ij}(R \exp[s\hat{\varphi}(\nabla_{\mathbf{\Pi}} H)], \mathbf{\Pi}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} [R \exp[s\hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi})]]_{ij} = [R\hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi})]_{ij}$$

e portanto

$$\dot{R}_{ij} = \{R_{ij}, H\}_{P_{CR}} = -0 + [R\hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi})]_{ij} - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{2} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi} = [R\hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi})]_{ij}$$

que corresponde aos termos da equação de reconstrução $\dot{R} = R\hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi})$. \square

Proposição 4.16 (Conservação da Energia). *A Hamiltoniana H definida pela equação (4.50) é uma quantidade conservada.*

Demonstração. Este resultado foi obtido de forma geral na Proposição 2.8. \square

4.4.2 Redução Simplética e Reconstrução

Nosso objetivo agora é aplicar a teoria de Redução Simplética do Capítulo 3 ao problema do corpo rígido livre. Iniciamos lembrando do isomorfismo $T^*SO(3) \simeq SO(3) \times \mathbb{R}^3$ dada pela relação (2.11) e da ação

$$\begin{aligned} \phi : SO(3) \times (SO(3) \times \mathbb{R}^3) &\rightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^3 \\ (\Lambda, (R, \mathbf{\Pi})) &\mapsto (\Lambda R, \mathbf{\Pi}) \end{aligned}$$

que deixa a Hamiltoniana H invariante. Não é difícil verificar que para qualquer $0 \neq \mu \in \mathbb{R}^3$, esta ação restrita ao subgrupo de isotropia

$$SO(3)_\mu = \{\exp[\theta \hat{\mu}] \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

é livre e própria em $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$. O mapa momento associado a esta ação $\mathbf{J} : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ver o Exemplo 2.54) é

$$\mathbf{J}(R, \mathbf{\Pi}) = R\mathbf{\Pi},$$

que para quaisquer $\Lambda \in SO(3)$ e $(R, \mathbf{\Pi}) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ satisfaz

$$\text{Ad}_\Lambda^* \mathbf{J}(R, \mathbf{\Pi}) = \Lambda R \mathbf{\Pi} = \mathbf{J}(\phi_\Lambda(R, \mathbf{\Pi})),$$

isto é, este mapa momento é Ad^* -equivariante. Temos ainda que qualquer $\mu \in \mathbb{R}^3$ é valor regular do mapa momento. Desta forma, podemos aplicar o Teorema de Kirillov-Kostant-Souriau (Teorema 3.25) e o Exemplo 3.23 e obter a identificação entre o espaço reduzido com a 2-esfera de raio $\|\mu\|$

$$\mathbf{J}^{-1}(\mu)/SO(3)_\mu \simeq SO(3) \cdot \mu = S_{\|\mu\|}^2.$$

Neste caso, a Hamiltoniana reduzida $H_\mu : S_{\|\mu\|}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é simplesmente

$$H_\mu(\mathbf{\Pi}) = \frac{1}{2} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi},$$

onde a equação de movimento é dada pelo colchete de Poisson em \mathbb{R}^3 e que coincide com a equação de Euler (4.46).

Como existe uma base ortonormal $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ em que o tensor de inércia pode ser escrito como uma matriz diagonal $\mathbb{I}_0 = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$, a função Hamiltoniana H_μ nesta base nos fornece uma forma quadrática

$$H_\mu(\mathbf{\Pi}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Pi_1^2}{I_1} + \frac{\Pi_2^2}{I_2} + \frac{\Pi_3^2}{I_3} \right). \quad (4.51)$$

Para um nível de energia $E_0 > 0$, a superfície $H_\mu^{-1}(E_0)$ corresponde a um elipsoide, chamado de **elipsoide de inércia** e as direções definidas pelos autovetores são chamadas de **eixos principais do elipsoide de inércia**. O próximo resultado, nos fornece uma descrição geométrica do movimento do corpo rígido através do elipsoide de inércia.

Teorema 4.17 (Teorema de Poinot). *O elipsoide de inércia no sistema de coordenadas espaço $\mathcal{E} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} \cdot R \mathbb{I}_0 R^{-1} \mathbf{u} = 2E_0\}$ rola sem deslizar ao longo do plano estacionário*

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \cdot \mu = 2E_0\},$$

que tem como vetor normal $\mu \in \mathbb{R}^3$ e que dista $2E_0/\|\mu\|$ da origem.

Demonstração. Considere a função auxiliar $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot R \mathbb{I}_0 R^{-1} \mathbf{u}$$

e a curva $\boldsymbol{\omega}(t) = \widehat{\varphi}(\dot{R}R^{-1}) \in \mathcal{E}$ com $\boldsymbol{\omega}(0) \in \mathcal{P}$. Tomando o gradiente de ψ no ponto $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}$, obtemos

$$\nabla \psi(\boldsymbol{\omega}(t)) = R(t) \mathbb{I}_0 R^{-1}(t) \boldsymbol{\omega}(t) = R(t) \mathbb{I}_0 \boldsymbol{\Omega}(t) = R(t) \boldsymbol{\Pi}(t) = \boldsymbol{\mu}$$

para todo tempo t . O que nos diz que o plano tangente ao elipsoide de inércia \mathcal{E} no ponto $\boldsymbol{\omega}(t)$ é paralelo ao plano \mathcal{P} . Como $\boldsymbol{\omega}(0) \in \mathcal{P}$, segue que $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathcal{P}$ para todo tempo t .

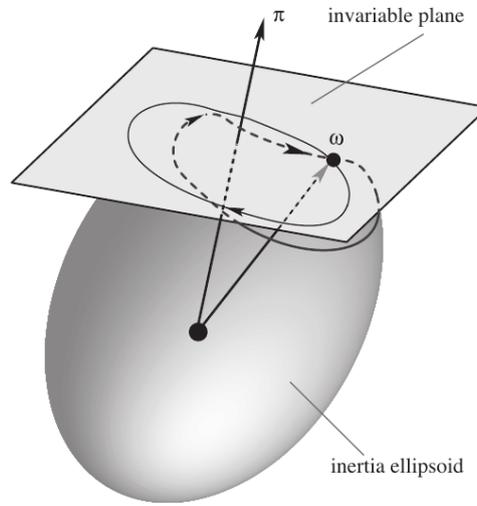


Figura 4.2: Movimento do elipsoide de inércia sobre o plano invariante. (Fonte: [22])

□

Observação 4.18. *O Teorema de Poinsot pode ser generalizado para qualquer grupo de Lie G , o que pode ser visto no Teorema 4.4.4 da referência [1].*

Lembrando da conservação do momento angular $\mathbf{L}(t) = \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^3$, obtemos

$$\|\boldsymbol{\Pi}(t)\| = \|R^{-1}(t)\mathbf{L}(t)\| \Rightarrow \boldsymbol{\Pi}(t) \in S_{\|\boldsymbol{\mu}\|}^2,$$

que nos diz que as soluções da equação de Euler $\dot{\boldsymbol{\Pi}} = \boldsymbol{\Pi} \times \mathbb{I}^{-1} \boldsymbol{\Pi}$ estão contidas na interseção do elipsoide de inércia $H_{\boldsymbol{\mu}}^{-1}(E_0)$ com a esfera $S_{\|\boldsymbol{\mu}\|}^2$, isto é, $\boldsymbol{\Pi}(t) \in H_{\boldsymbol{\mu}}^{-1}(E_0) \cap S_{\|\boldsymbol{\mu}\|}^2$ para todo tempo t , conforme é mostrado na figura abaixo.

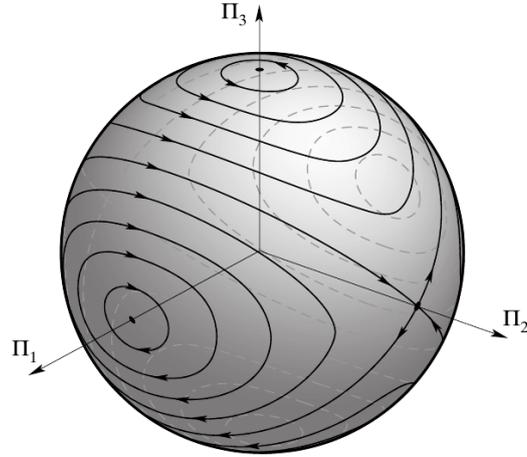


Figura 4.3: Trajetórias do momento angular $\mathbf{\Pi}(t) \in H_\mu^{-1}(E_0) \cap S_{\|\mu\|}^2$ para $I_1 < I_2 < I_3$. (Fonte: [22])

Suponha agora que seja conhecida a solução no espaço reduzido, $c_\mu(t) = \mathbf{\Pi}(t) \in S_{\|\mu\|}^2$ com condição inicial $c_\mu(0) = \mu$. Desta forma, podemos aplicar o método de Reconstrução da Dinâmica (Teorema 3.13) para determinarmos a solução em $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ e em particular, a rotação $R(t)$. Para isso, considere a 1-forma de conexão

$$A = \frac{\widehat{\mu}}{\|\mu\|^2} i_\mu^* \theta_B$$

definida pela equação (C.2), que nos fornece o único levantamento horizontal

$$d(t) = (R_0(t), \mathbf{\Pi}(t)) = (R_0(t), R_0^{-1}(t)\mu) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu),$$

com $R_0(0) = Id$ e $\pi_\mu(d(t)) = c_\mu(t)$.

Nosso primeiro objetivo na reconstrução, é determinarmos a curva $\xi(t) \in \mathfrak{so}(3)_\mu$ que satisfaça a relação $\xi(t) = A(X_H(d(t)))$ (ver a Observação 3.15). Aplicando o campo Hamiltoniano

$$X_H(R, \mathbf{\Pi}) = (R\widehat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi}), \mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi})$$

na 1-forma $\theta_B \in \Omega^1(SO(3) \times \mathbb{R}^3)$ (ver a Proposição 2.76), obtemos

$$i_\mu^* \theta_B(X_H(R_0(t), R_0^{-1}(t)\mu)) = R_0^{-1}(t)\mu \cdot \mathbb{I}_0^{-1}\mathbf{\Pi}(t) = 2E_0 \quad (4.52)$$

e portanto

$$\xi(t) = A(X_H(R_0(t), R_0^{-1}(t)\mu)) = \frac{2E_0}{\|\mu\|^2} \widehat{\mu} \in \mathfrak{so}(3)_\mu.$$

O próximo passo, é determinarmos a curva $R(t) \in SO(3)$ que satisfaça a equação $\dot{R} = R\xi$ com condição inicial $R(0) = Id$. Esta equação tem como solução

$$R(t) = \exp \left[\frac{2E_0}{\|\mu\|^2} \widehat{\mu} t \right] \quad (4.53)$$

e portanto, a solução $c(t) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ do problema do corpo rígido é

$$c(t) = R(t) \cdot d(t) = \left(\exp \left[\frac{2E_0}{\|\mu\|^2} \widehat{\mu} t \right] R_0(t), R_0^{-1}(t)\mu \right).$$

4.4.3 Fórmula de Montgomery

Considere agora a curva $c(t) = (R(t), \mathbf{\Pi}(t)) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ como a solução do problema do corpo rígido, com condição inicial $c(0) = (Id, \mu)$ e que $\mathbf{\Pi}(t) \in H_\mu^{-1}(E_0) \cap S_{\|\mu\|}^2$ seja periódica de período T , $\mathbf{\Pi}(0) = \mathbf{\Pi}(T) = \mu$. Segue da equação (4.44) que

$$\mu = R(0)\mathbf{\Pi}(0) = R(T)\mathbf{\Pi}(T) \Rightarrow R(T)\mu = \mu,$$

e portanto $R(T) \in SO(3)$ é uma rotação ao redor do vetor $\mu \in \mathbb{R}^3$. Observe ainda que

$$R(T) \cdot c(0) = (R(T)R(0), \mathbf{\Pi}(0)) = (R(T), \mathbf{\Pi}(T)) = c(T),$$

o que nos mostra que a configuração do corpo rígido $c(T)$ é obtido através de uma rotação ao redor do vetor μ da condição inicial $c(0)$.

Desta forma, definimos a **fase de rotação do corpo rígido** $\Delta\theta$ como sendo o módulo 2π do ângulo que o corpo rígido roda a tempo T ao redor do vetor μ , que pode ser definido pela equação

$$R(T) = \exp \left[\Delta\theta \frac{\hat{\mu}}{\|\mu\|} \right] \in SO(3).$$

Vamos demonstrar que para o corpo rígido livre, o ângulo de fases é dada pela **Fórmula de Montgomery**

$$\Delta\theta = \underbrace{-\frac{\text{Área}(D)}{\|\mu\|^2}}_{\Delta\theta_G} + \underbrace{\frac{2E_0}{\|\mu\|}}_{\Delta\theta_D} T, \quad (4.54)$$

onde D é a casca esférica em $S_{\|\mu\|}^2$ delimitada pela curva $\mathbf{\Pi}(t)$ e E_0 o nível de energia do corpo rígido. Chamamos a componente $\Delta\theta_G$ de **Fase Geométrica**, pois depende apenas da geometria do problema e $\Delta\theta_D$ de **Fase Dinâmica**, pois ela depende do período T e do nível de energia E_0 . Para determinarmos o ângulo de fases $\Delta\theta$, começamos definindo a curva

$$\begin{aligned} \tilde{c} : [0, \Delta\theta] &\rightarrow \mathbf{J}^{-1}(\mu) \\ \theta &\mapsto \left(\exp \left[\theta \frac{\hat{\mu}}{\|\mu\|} \right], \mu \right), \end{aligned}$$

que corresponde a uma rotação ao redor do eixo μ e que satisfaz $\tilde{c}(0) = c(0)$ e $\tilde{c}(\Delta\theta) = c(T)$. Desta forma, podemos aplicar o Teorema de Stokes (Teorema 1.36) na superfície compacta 2-dimensional $\Sigma \subset \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ delimitada pelas curvas c e \tilde{c} e a casca esférica $\pi_\mu(\Sigma) =: D \subset S_{\|\mu\|}^2$ escolhida de tal forma que o ângulo sólido tenha orientação positiva (pela regra da mão direita). Para mais detalhes de que de fato a região compacta delimitada pelas curvas c e \tilde{c} definem uma superfície, o leitor pode consultar o artigo [25].

Considerando a inclusão $i_\mu : \mathbf{J}^{-1}(\mu) \hookrightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^3$ e a 1-forma $\theta_B \in \Omega^1(SO(3) \times \mathbb{R}^3)$ (ver Proposição 2.76), podemos escrever

$$\int_c i_\mu^* \theta_B - \int_{\tilde{c}} i_\mu^* \theta_B = \iint_\Sigma \mathbf{d}(i_\mu^* \theta_B). \quad (4.55)$$

Calculando a primeira integral, obtemos de (4.52) que

$$\int_c i_\mu^* \theta_B = \int_0^T i_\mu^* \theta_B(c(t))(X_H(c(t))) dt = 2E_0 T. \quad (4.56)$$

Para a segunda integral, observe que $X_{\tilde{c}}(\theta) = (\hat{\mu}/\|\mu\|, 0)$ é o campo de velocidade associado a curva \tilde{c} e portanto

$$\int_{\tilde{c}} i_{\mu}^* \theta_B = \int_0^{\Delta\theta} \theta_B(\tilde{c}(\theta))(X_{\tilde{c}}(\theta)) d\theta = \int_0^{\Delta\theta} \|\mu\| d\theta = \|\mu\| \Delta\theta. \quad (4.57)$$

Para a terceira e última integral da fórmula de Stokes, lembre que ω_{μ} é a 2-forma simplética na esfera $S_{\|\mu\|}^2$ (ver Exemplo 3.28) e que $\pi_{\mu}^* \omega_{\mu} = -\mathbf{d}(i_{\mu}^* \theta_B)$, então

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{d}(i_{\mu}^* \theta_B) = \iint_{\Sigma} -\pi_{\mu}^* \omega_{\mu} = \iint_D \frac{1}{\|\mu\|} \mathbf{dS} = \frac{1}{\|\mu\|} \text{Área}(D). \quad (4.58)$$

Aplicando os resultados (4.56), (4.57) e (4.58) em (4.55) obtemos a relação desejada

$$2E_0T - \|\mu\| \Delta\theta = \frac{1}{\|\mu\|} \text{Área}(D).$$

A figura a seguir, ilustra o levantamento horizontal da curva solução $c_{\mu}(t)$ do espaço reduzido $P_{\mu} = S_{\|\mu\|}^2$ e a defasagem pelo ângulo de fases $\Delta\theta = \Delta\theta_G + \Delta\theta_D$ entre a trajetória levantada $d(t)$ e a solução real problema $c(t)$.

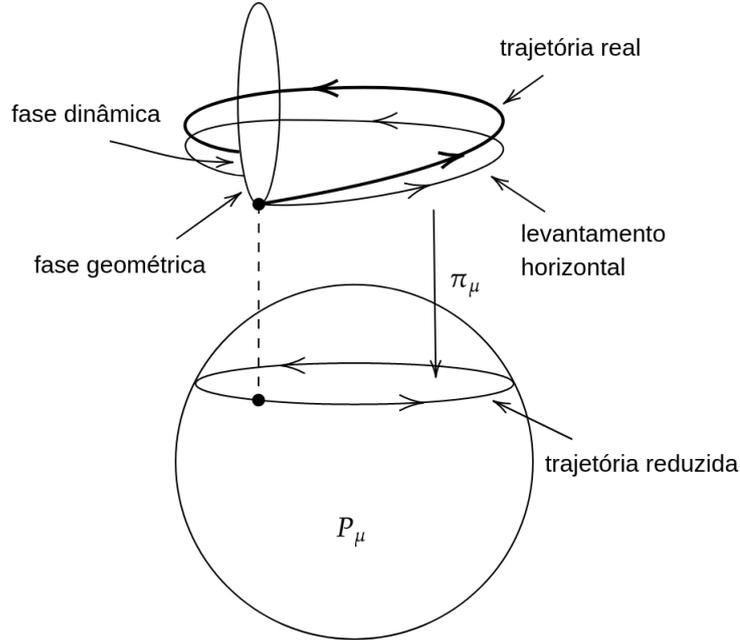


Figura 4.4: Reconstrução e fases geométrica e dinâmica do corpo rígido.

Observação 4.19. Calculamos acima a fase geométrica para o corpo rígido de forma bem elementar. Estas ideias podem ser generalizadas através do conceito de conexões e holonomia apresentadas de forma resumida no Anexo C, que nos diz que a fase geométrica de sistemas mecânicos é obtida de forma mais geral por

$$\Delta\theta_G = -\log(\text{holonomia}).$$

4.4.4 Solução Analítica da Equação de Euler

Falta determinarmos a solução da equação de Euler no espaço reduzido $P_\mu = S_{\|\mu\|}^2$ para obtermos uma descrição completa do problema do corpo rígido livre. Para isso, seguiremos a construção feita na referência [22].

Escrevendo a equação de Euler como um sistemas de equações diferenciais, usando coordenadas lineares relativas aos eixos principais

$$\dot{\Pi}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \Pi_2 \Pi_3, \quad (4.59)$$

$$\dot{\Pi}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} \Pi_1 \Pi_3, \quad (4.60)$$

$$\dot{\Pi}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} \Pi_1 \Pi_2, \quad (4.61)$$

e considerando sem perda de generalidade que os coeficientes do tensor de inércia satisfazem $I_1 \geq I_2 \geq I_3 > 0$, vamos analisar os seguintes casos:

Caso 1: $I_1 = I_2 = I_3$. Nesta situação, a forma quadrática da energia $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi} = 2E_0$ corresponde a uma esfera de raio I_1 . Logo, o problema só admite solução se $I_1 = \|\mu\|$ e portanto $H_\mu^{-1}(E_0) = S_{\|\mu\|}^2$. Pelo sistema acima, o momento angular $\mathbf{\Pi}(t)$ é constante, $\mathbf{\Pi}(t) = \mathbf{\Pi}(0)$ para todo tempo t e todos os pontos da esfera $S_{\|\mu\|}^2$ são pontos fixos.

Caso 2: $I_1 = I_2 > I_3$. Neste caso, \mathbf{E}_3 é o eixo de simetria do corpo e pela equação (4.60), obtemos $\dot{\Pi}_3 = 0$ e portanto $\Pi_3(t) = \Pi_3(0)$ para todo tempo t . Das outras duas equações do sistema obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_1 - \left(\Pi_3(0) \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \right) \Pi_2 &= 0, \\ \dot{\Pi}_2 + \left(\Pi_3(0) \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \right) \Pi_1 &= 0. \end{aligned}$$

As equações acima são facilmente integráveis, obtendo assim a solução da equação de Euler

$$\begin{aligned} \Pi_1(t) &= \Pi_1(0) \cos \left(\Pi_3(0) \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} t \right) + \Pi_2(0) \sin \left(\Pi_3(0) \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} t \right), \\ \Pi_2(t) &= \Pi_2(0) \cos \left(\Pi_3(0) \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} t \right) - \Pi_1(0) \sin \left(\Pi_3(0) \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} t \right), \\ \Pi_3(t) &= \Pi_3(0). \end{aligned}$$

Nesta solução, $\mathbf{\Pi}(t)$ descreve um movimento de rotação ao redor do eixo de simetria do corpo rígido, com velocidade angular $\Pi_3(0)(I_2 - I_3)/I_2 I_3$.

Caso 3: $I_1 > I_2 = I_3$. A solução é análoga ao **Caso 2**.

Caso 4: $I_1 > I_2 > I_3$. Começamos este caso definindo as variáveis auxiliares

$$a = \frac{\|\mathbf{\Pi}_0\|^2}{2E_0} \quad \text{e} \quad b = \frac{2E_0}{\|\mathbf{\Pi}_0\|}, \quad (4.62)$$

onde $\mathbf{\Pi}_0 := \mathbf{\Pi}(0)$. Pela conservação da energia H_μ e da norma do momento angular $\|\mathbf{\Pi}(t)\| = \|\mathbf{\Pi}_0\|$, podemos escrever

$$I_1^{-1}\Pi_1^2 + I_2^{-1}\Pi_2^2 + I_3^{-1}\Pi_3^2 = 2E_0 = ab^2 \quad \text{Energia Cinética,} \quad (4.63)$$

$$\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2 = \|\mathbf{\Pi}_0\|^2 = a^2b^2 \quad \text{Momento Angular.} \quad (4.64)$$

Pelo sistema anterior, podemos expressar as componentes Π_1 e Π_3 em função de Π_2 como

$$\Pi_1^2 = \frac{I_1(I_2 - I_3)}{I_2(I_1 - I_3)}(\alpha^2 - \Pi_2^2) \quad \text{e} \quad \Pi_3^2 = \frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_2(I_1 - I_3)}(\beta^2 - \Pi_2^2), \quad (4.65)$$

onde

$$\alpha^2 = \frac{aI_2(a - I_3)b^2}{I_2 - I_3} \quad \text{e} \quad \beta^2 = \frac{aI_2(I_1 - a)b^2}{I_1 - I_2}. \quad (4.66)$$

Da hipótese $I_1 > I_2 > I_3$, temos a seguinte desigualdade

$$2E_0I_3 = I_3 \left(I_1^{-1}\Pi_1^2 + I_2^{-1}\Pi_2^2 + I_3^{-1}\Pi_3^2 \right) \leq \|\mathbf{\Pi}_0\|^2 \leq I_1 \left(I_1^{-1}\Pi_1^2 + I_2^{-1}\Pi_2^2 + I_3^{-1}\Pi_3^2 \right) = 2E_0I_1,$$

que combinada com a equação (4.62) nos fornece

$$I_3 \leq a \leq I_1.$$

Se $a = I_3$, segue da equação (4.66) que $\alpha = 0$ e da equação (4.65) que

$$\Pi_1^2 = -\frac{I_1(I_2 - I_3)}{I_2(I_1 - I_3)}\Pi_2^2,$$

portanto a única solução real é $\Pi_1(t) = \Pi_2(t) = 0$ e $\Pi_3(t) = \Pi_3(0)$ para todo tempo t . De forma análoga se $a = I_1$, então $\beta = 0$ e neste caso $\Pi_2(t) = \Pi_3(t) = 0$ e $\Pi_1(t) = \Pi_1(0)$ para todo tempo t .

Vamos agora considerar o caso em que $I_3 < a < I_1$. Podemos reescrever (4.65) como

$$\dot{\Pi}_2^2 = \frac{I_2 - I_3}{I_2I_3} \cdot \frac{I_1 - I_2}{I_1I_2} (\alpha^2 - \Pi_2^2)(\beta^2 - \Pi_2^2). \quad (4.67)$$

Integrando a equação diferencial acima, obtemos de forma implícita a expressão de Π_2 dada pela integral

$$t = \sqrt{\frac{I_2I_3}{I_2 - I_3} \cdot \frac{I_1I_2}{I_1 - I_2}} \int_{\Pi_2(0)}^{\Pi_2} \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 - u^2)(\beta^2 - u^2)}} du. \quad (4.68)$$

Se $\alpha \neq \beta$, a integral acima é do tipo elíptica e portanto não $\Pi_2(t)$ pode ser expresso através de funções elementares. Vamos analisar primeiramente o caso em que $\alpha = \beta$. Das equações (4.65), obtemos

$$0 = \beta^2 - \alpha^2 = \frac{ab^2I_2(I_1 - I_3)(I_2 - a)}{(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}$$

e portanto $a = I_2$. Combinando as equações (4.62), (4.63) e (4.66), obtemos

$$\alpha = \beta = ab = \|\mathbf{\Pi}_0\| = \sqrt{2E_0I_2}.$$

Observe que o semi-eixo intermediário da forma quadrática $H_\mu(\mathbf{\Pi}) = E_0$ e o radio da esfera em (4.63) possuem o mesmo valor $2E_0I_2$ e portanto a interseção $H_\mu^{-1}(E_0) \cap S_{\|\mu\|}^2$

são apenas duas circunferências ao redor do eixo OY no sistema de referência do corpo. desta forma, a equação (4.67) fica

$$\dot{\Pi}_2^2 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \cdot \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} (\|\mathbf{\Pi}_0\|^2 - \Pi_2^2)^2, \quad (4.69)$$

que tem como pontos fixos $\Pi_2 = \pm\|\mathbf{\Pi}_0\|$ e neste caso, as soluções fixas da equação de Euler são $\mathbf{\Pi}(t) = (0, \pm\|\mathbf{\Pi}_0\|, 0)$.

Vamos agora obter as outras soluções de (4.69) com condição inicial $\Pi_2(0) = 0$. Para isso, considere a equação (4.68) com $\alpha = \beta$

$$t = -\sqrt{\frac{I_2 I_3}{I_2 - I_3} \cdot \frac{I_1 I_2}{I_1 - I_2}} \int_0^{\Pi_2} \frac{1}{\|\mathbf{\Pi}_0\|^2 - u^2} du = -\sqrt{\frac{I_2 I_3}{I_2 - I_3} \cdot \frac{I_1 I_2}{I_1 - I_2}} \frac{1}{\|\mathbf{\Pi}_0\|} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\Pi_2}{\|\mathbf{\Pi}_0\|}\right),$$

que invertendo nos fornece a expressão para a componente Π_2

$$\Pi_2(t) = \pm\|\mathbf{\Pi}_0\| \tanh\left(-\sqrt{\frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \cdot \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}} \|\mathbf{\Pi}_0\| t\right). \quad (4.70)$$

Para determinarmos Π_1 e Π_3 , observe que a condição $\alpha = \beta$ na equação (4.65) nos fornece

$$\Pi_3 = \pm\Pi_1 \sqrt{\frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_1(I_2 - I_3)}}, \quad (4.71)$$

que combinada com as equações (4.70) e (4.63)

$$\Pi_1^2 + \Pi_3^2 = \Pi_1^2 \left[1 + \frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_1(I_2 - I_3)}\right] = \|\mathbf{\Pi}_0\|^2 - \Pi_2^2 = \|\mathbf{\Pi}_0\|^2 \operatorname{sech}^2\left(-\sqrt{\frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \cdot \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}} \|\mathbf{\Pi}_0\| t\right).$$

Considerando o sinal $+$ na equação (4.71), obtemos como solução da equação de Euler

$$\begin{aligned} \Pi_1(t) &= \pm\|\mathbf{\Pi}_0\| \sqrt{\frac{I_1(I_2 - I_3)}{I_2(I_1 - I_3)}} \operatorname{sech}\left(-\sqrt{\frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \cdot \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}} \|\mathbf{\Pi}_0\| t\right), \\ \Pi_2(t) &= \pm\|\mathbf{\Pi}_0\| \tanh\left(-\sqrt{\frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \cdot \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}} \|\mathbf{\Pi}_0\| t\right), \\ \Pi_3(t) &= \pm\|\mathbf{\Pi}_0\| \sqrt{\frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_2(I_1 - I_3)}} \operatorname{sech}\left(-\sqrt{\frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \cdot \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}} \|\mathbf{\Pi}_0\| t\right). \end{aligned}$$

Para o sinal $-$ na equação (4.71), temos as soluções

$$\Pi_1^-(t) = \Pi_1(-t), \quad \Pi_2^-(t) = \Pi_2(-t), \quad \Pi_3^-(t) = \Pi_3(-t).$$

Observe que estas soluções conectam as duas soluções fixas do sistema $(0, \pm\|\mathbf{\Pi}_0\|, 0)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{\Pi}(t) = (0, \mp\|\mathbf{\Pi}_0\|, 0) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{\Pi}(t) = (0, \pm\|\mathbf{\Pi}_0\|, 0).$$

As órbitas que admitem a propriedade acima, são chamadas de **órbitas heteroclínicas**.

Vamos analisar agora o caso em que $\alpha < \beta$ (ou equivalentemente $I_1 > I_2 > a > I_3$) com condição inicial $\Pi_2(0) = 0$ na integral (4.68). Para isso, utilizaremos as chamadas **Funções elípticas de Jacobi**, que podem ser vistas com detalhes na referência [17]. Definimos a função $\operatorname{sn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pela série

$$\operatorname{sn}(u) = u - \frac{1}{3!}(1 + k^2)u^3 + \frac{1}{5!}(1 + 14k^2 + k^4)u^5 - \dots,$$

onde k é chamado de **módulo da função** e cuja a inversa é dada pela integral

$$\operatorname{sn}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} ds, \quad \text{com } 0 \leq x \leq 1. \quad (4.72)$$

Definimos também as funções $\operatorname{cn}, \operatorname{dn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pelas relações

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u \quad \text{e} \quad \operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

que satisfazem

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn}(u) = \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u).$$

Definindo

$$s := u/\alpha \quad \text{e} \quad k := \alpha/\beta = \left[\frac{(I_1 - I_2)(a - I_3)}{(I_1 - a)(I_2 - I_3)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

podemos escrever a integral (4.68) como

$$t = \gamma \int_0^{\Pi_2} \frac{\alpha\beta}{(1-u^2/\alpha^2)(1-u^2/\beta^2)} du = \alpha^2 \beta \gamma \int_0^{\Pi_2/\alpha} \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} ds = \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\Pi_2}{\alpha} \right),$$

onde

$$\gamma = \sqrt{\frac{I_2 I_3}{I_2 - I_3} \cdot \frac{I_1 I_2}{I_1 - I_2}}.$$

Invertendo a integral acima, obtemos a expressão para Π_2 em termos das funções elípticas de Jacobi

$$\Pi_2(t) = \alpha \operatorname{sn}(\kappa t) \in [-\alpha, \alpha],$$

onde $\kappa = 1/(\alpha^2 \beta \gamma)$. Segue da equação (4.65), as expressões para as componentes Π_1 e Π_3

$$\begin{aligned} \Pi_1^2 &= \frac{I_1(I_2 - I_3)}{I_2(I_1 - I_3)} \alpha^2 (1 - \operatorname{sn}^2(\kappa t)) = \frac{I_1(I_2 - I_3)}{I_2(I_1 - I_3)} \alpha^2 \operatorname{cn}^2(\kappa t), \\ \Pi_3^2 &= \frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_2(I_1 - I_3)} \beta^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \operatorname{sn}^2(\kappa t) \right) = \frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_2(I_1 - I_3)} \beta^2 \operatorname{dn}^2(\kappa t). \end{aligned}$$

Observe agora que a relação (4.65) nos diz que Π_3^2 assume valor mínimo quando $\Pi_2 = \pm\alpha$

$$\Pi_3^2 = \frac{ab^2 I_3 (I_2 - a)}{I_2 - I_3} > 0,$$

e um valor máximo quando $\Pi_2 = 0$

$$\Pi_3^2 = \frac{ab^2 I_3 (I_1 - a)}{I_1 - I_3} > 0.$$

Portanto, como $I_1 > I_2 > a > I_3 > 0$, a função $\Pi_3(t)$ não muda de sinal ao longo do tempo. De fato, se $\Pi_3(t)$ assumisse valores tanto negativos como positivos, teríamos que o valor mínimo de $\Pi_3^2(t)$ seria zero.

Considerando $\Pi_3(t) > 0$ e $\dot{\Pi}_2(0) > 0$, segue da equação (4.60) que $\Pi_1(0) < 0$ e para este caso, obtemos a solução do problema

$$\Pi_1(t) = -\alpha \sqrt{\frac{I_1(I_2 - I_3)}{I_2(I_1 - I_3)}} \operatorname{cn}(\kappa t), \quad \Pi_2(t) = \alpha \operatorname{sn}(\kappa t), \quad \Pi_3(t) = \beta \sqrt{\frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_2(I_1 - I_3)}} \operatorname{dn}(\kappa t).$$

Os casos omitidos são análogos aos que foram feitos anteriormente.

4.4.5 Estabilidade Relativa

Vamos estudar agora a estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação de Euler $\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi}$, que correspondem aos autovetores da matriz \mathbb{I}_0^{-1} . Pela simetria do problema, podemos supor sem perda de generalidade que os autovetores coincidem com os eixos de coordenadas e que $\|\mu\| = 1$, isto é, $S_{\|\mu\|}^2 = S^2$. Considerando o ponto de equilíbrio $\mathbf{\Pi}_e = (1, 0, 0)$, nosso objetivo é determinar uma função de Casimir C_Φ (Definição 2.73) que satisfaça as condições do Teste Energia-Casimir (Teorema D.4). Para isso, definimos a função auxiliar

$$H_\Phi(\mathbf{\Pi}) := (H_\mu + C_\Phi)(\mathbf{\Pi}) = \frac{1}{2} \sum_i I_i^{-1} \Pi_i^2 + \Phi\left(\frac{1}{2} \|\mathbf{\Pi}\|^2\right) \quad (4.73)$$

onde $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave qualquer. Calculando a primeira derivada de H_Φ no ponto crítico $\mathbf{\Pi}_e$, obtemos

$$0 = \mathbf{D}H_\Phi(\mathbf{\Pi}_e) = \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi}_e + \Phi'\left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{\Pi}_e \Rightarrow \Phi'\left(\frac{1}{2}\right) = -I_1^{-1}. \quad (4.74)$$

Considerando o resultado anterior e calculando a matriz $\mathbf{D}^2 H_\Phi(\mathbf{\Pi}_e)$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 H_\Phi(\mathbf{\Pi}_e) &= [\partial_{\Pi_j} \mathbf{D}H_{\Phi_i}(\mathbf{\Pi}_e)]_{ij} = \left[\delta_{ij} \left[I_i^{-1} + \Phi'\left(\frac{1}{2} \|\mathbf{\Pi}_e\|^2\right) \right] + \Phi''\left(\frac{1}{2} \|\mathbf{\Pi}_e\|^2\right) (\Pi_e)_i (\Pi_e)_j \right]_{ij} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi''\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & I_2^{-1} - I_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_3^{-1} - I_1^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando um vetor $0 \neq \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, obtemos a seguinte forma quadrática

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 H_\Phi(\mathbf{\Pi}_e)(\mathbf{w}, \mathbf{w}) &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{D}^2 H_\Phi(\mathbf{\Pi}_e)(\mathbf{w}) \\ &= \Phi''\left(\frac{1}{2}\right) w_1^2 + \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) w_2^2 + \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right) w_3^2. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Vamos analisar os casos onde a forma quadrática acima é positiva definida e negativa definida, que correspondem as condições do Teste de Energia-Casimir.

Caso 1: Positiva definida $(\mathbf{D}^2 H_\Phi(\mathbf{\Pi}_e)(\mathbf{w}, \mathbf{w}) > 0$ para todo $0 \neq \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$). Para este caso, é suficiente que os coeficientes da forma quadrática satisfaçam

$$\Phi''\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \quad I_1 > I_2 \quad \text{e} \quad I_1 > I_3. \quad (4.76)$$

Uma função suave $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça as equações (4.74) e (4.76) é

$$\Phi(x) = -\frac{1}{I_1} x + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Portanto H_Φ definida em (4.73) satisfaz as hipóteses da Proposição D.4 e portanto o ponto $\mathbf{\Pi}_e$ que corresponde ao menor eixo de simetria do elipsoide de inércia é um ponto de equilíbrio estável.

Caso 2: Negativa definida ($\mathbf{D}^2 H_{\Phi}(\mathbf{\Pi}_e)(\mathbf{w}, \mathbf{w}) < 0$ para todo $0 \neq \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$). De forma análoga, uma condição suficiente neste caso é

$$\Phi''\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \quad I_2 > I_1 \quad \text{e} \quad I_3 > I_1. \quad (4.77)$$

Uma função suave Φ que satisfaça as condições (4.74) e (4.77) é

$$\Phi(x) = -\frac{1}{I_1}x - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Neste caso, o ponto $\mathbf{\Pi}_e$ corresponde ao maior eixo de simetria do elipsoide de inércia, que também é um ponto de equilíbrio estável.

Para o caso do eixo intermediário, isto é, quando os coeficientes do tensor de inércia satisfazem

$$I_1 > I_2 \text{ e } I_3 > I_1 \quad \text{ou} \quad I_1 < I_2 \text{ e } I_3 < I_1, \quad (4.78)$$

o Teste da Energia-Casimir é inconclusivo. Neste caso, podemos analisar os autovalores do sistema linearizado.

Escrevendo $X(\mathbf{\Pi}) = \mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi}$, o sistema linearizado correspondente é $\delta \dot{\mathbf{\Pi}} = X'(\mathbf{\Pi}) \delta \mathbf{\Pi}$, onde $\delta \mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^3$ e a matriz é dada por

$$X'(\mathbf{\Pi}_e) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}(\mathbf{\Pi}_e)_3 & \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}(\mathbf{\Pi}_e)_2 \\ \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3}(\mathbf{\Pi}_e)_3 & 0 & \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3}(\mathbf{\Pi}_e)_1 \\ \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}(\mathbf{\Pi}_e)_2 & \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}(\mathbf{\Pi}_e)_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} \\ 0 & \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores da matriz acima são

$$0, \pm \frac{1}{I_1} \sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}},$$

e pela condição (4.78), temos que $(I_3 - I_1)(I_1 - I_2) > 0$. Desta forma, segue da Observação D.6 que o sistema é instável no eixo intermediário. Com estes resultados, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.20 (Estabilidade Relativa do Corpo Rígido Livre). *Considere o sistema reduzido do corpo rígido livre, dado pela equação de Euler $\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi}$. Então os pontos de equilíbrio correspondente ao maior e menor eixo principais do elipsoide de inércia, são estáveis no sentido de Lyapunov. Enquanto o ponto de equilíbrio correspondente ao eixo intermediário é instável.*

4.5 Corpo Rígido Simétrico sob Potencial

Considere um corpo rígido simétrico ($I_1 = I_2$) apoiado sobre um plano por um ponto que permanece fixo durante o movimento de rotação induzido por um campo vertical. Denotando $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ como a base do sistema de referência espacial e $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ a do sistema de referência corpo (o corpo rígido permanece fixo neste sistema), onde \mathbf{E}_3 pertence ao eixo de simetria do corpo rígido. Lembrando que dada uma configuração de referência \mathbf{x}_0 no sistema de coordenadas espaço, a sua evolução temporal no sistema corpo é $\mathbf{X}(t) = R(t)^{-1} \mathbf{x}_0$, com $R(t) \in SO(3)$ (veja o Capítulo 15 de [22]).

Considerando que o campo não dependa da posição e nem do tempo, podemos escrever a energia potencial como $V(R) = \alpha R^T \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3$ com $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Desta forma, a Lagrangiana do sistema $L : TSO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2} \langle \dot{R}, \dot{R} \rangle_R - \alpha R^T \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ é a métrica invariante pela esquerda em $TSO(3)$ definida na Observação 4.12.

Nosso objetivo agora é determinarmos a função Hamiltoniana para o sistema. Para isso, começamos calculando a transformada de Legendre $\mathbb{F}L : TSO(3) \rightarrow T^*SO(3)$ (ver o Anexo B e a referência [19])

$$\mathbb{F}L(R, \dot{R})(R, \delta R) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(R, \dot{R} + s\delta R) = \langle \dot{R}, \delta R \rangle_R$$

com $\dot{R}, \delta R \in T_R SO(3)$. Portanto

$$\mathbb{F}L(R, \dot{R}) = \langle \dot{R}, \cdot \rangle_R \in T_R^* SO(3).$$

Lembrando que podemos escrever $\dot{R} = R\hat{\Omega}$ e que a métrica satisfaz $\langle R\hat{\Omega}, R\hat{\Omega} \rangle_R = \langle \hat{\Omega}, \hat{\Omega} \rangle_e$, obtemos a Hamiltoniana do sistema

$$\begin{aligned} H(R, R\hat{\Omega}) &= \mathbb{F}L(R, \dot{R})\dot{R} - L(R, \dot{R}) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\Omega} \cdot \mathbb{I}_0 \hat{\Omega} + \alpha R^T \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

Com a identificação $T^*SO(3) \simeq SO(3) \times \mathbb{R}^3$ e pela definição do momento angular $\mathbf{\Pi} = \mathbb{I}_0 \hat{\Omega}$, obtemos a Hamiltoniana do sistema $H : P_{CR} = SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(R, \mathbf{\Pi}) = \frac{1}{2} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi} + \alpha R^T \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3. \quad (4.79)$$

As equações de movimento são dadas pelo colchete de Poisson em $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ (ver a Seção 2.4.1), que nos fornece

$$\begin{aligned} \{R_{ij}, H\}_{P_{CR}}(R, \mathbf{\Pi}) &= [R\hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi})]_{ij} + \underbrace{\{R_{ij}, \alpha R^T \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3\}_{P_{CR}}}_{=0} \\ &= [R\hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi})]_{ij} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \{\mathbf{\Pi}_i, H\}_{P_{CR}}(R, \mathbf{\Pi}) &= [\mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi}]_i - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} H(R \exp[s\hat{\mathbf{e}}_i], \mathbf{\Pi}) \\ &= [\mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi}]_i + \alpha \hat{\mathbf{e}}_i R^T \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3 \\ &= [\mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi}]_i + \mathbf{e}_i \cdot (\alpha R^T \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_3). \end{aligned}$$

Portanto, as equações de movimento em $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ para o corpo rígido sob um potencial da forma $V = -\alpha R^T \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3$ são

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R\hat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi}), \\ \dot{\mathbf{\Pi}} &= \mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi} + \alpha R^T \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

Exemplo 4.21. *A formulação acima, generaliza dois sistemas clássicos:*

- **Pião simétrico:** *consistindo de um corpo de massa M , cuja a distância entre o ponto fixo de rotação ao centro de massa é l . Assumindo que o corpo esteja num campo gravitacional $-g\mathbf{e}_3$, neste temos a constante $\alpha = Mgl$;*
- **Corpo rígido ferromagnético:** *consistindo de um corpo rígido com momento de dipolo $\boldsymbol{\lambda} = \lambda\mathbf{E}_3$ e sob a ação apenas do campo magnético $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$, temos $\alpha = \lambda B$.*

Vamos agora aplicar a Teoria de Redução Simplética ao corpo rígido sob potenciais. Considere o subgrupo de isotropia de $SO(3)$ correspondente as rotações que deixam invariante o vetor \mathbf{e}_3

$$\begin{aligned} SO(3)_{\mathbf{e}_3} &= \{\Lambda \in SO(3) \mid \Lambda\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\} \\ &= \{\exp[\theta\widehat{\mathbf{e}}_3] \mid \theta \in \mathbb{R}\} \\ &\simeq S^1. \end{aligned}$$

Observe que $SO(3)_{\mathbf{e}_3}$ é abeliano e tem como álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)_{\mathbf{e}_3} = \{\theta\widehat{\mathbf{e}}_3 \mid \theta \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$. Desta forma, a função Hamiltoniana H é invariante pela ação

$$\begin{aligned} \phi : SO(3)_{\mathbf{e}_3} \times (SO(3) \times \mathbb{R}^3) &\rightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^3 \\ (\Lambda, (R, \boldsymbol{\Pi})) &\mapsto (\Lambda R, \boldsymbol{\Pi}), \end{aligned}$$

que tem $(\widehat{\mathbf{e}}_3)_{SO(3)}(R) = \widehat{\mathbf{e}}_3 R$ como geradores infinitesimais. Do Corolário 2.51, temos o mapa momento $\mathbf{J} : T^*SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ correspondente a esta ação

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(R, R\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}) &= \langle R\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}, \widehat{\mathbf{e}}_3 R \rangle \\ &= \langle \widetilde{\boldsymbol{\Pi}}, R^T \widehat{\mathbf{e}}_3 R \rangle \\ &= \langle \widetilde{\boldsymbol{\Pi}}, \widehat{R^T \mathbf{e}_3} \rangle, \end{aligned}$$

que pode ser visto como um mapa momento em $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \simeq T^*SO(3)$

$$\mathbf{J}(R, \boldsymbol{\Pi}) = \boldsymbol{\Pi} \cdot R^T \mathbf{e}_3.$$

De forma análoga ao que foi feito para o corpo rígido livre, este mapa momento é Ad^* -equivariante e qualquer $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ é um valor regular do mapa momento. Assim, pelo Teorema de Redução Simplética, o espaço reduzido é dado pelo seguinte quociente

$$\mathbf{J}^{-1}(\mu)/S^1 = \{[(R, \boldsymbol{\Pi})] \mid \boldsymbol{\Pi} \cdot R^T \mathbf{e}_3 = \mu\},$$

onde as classes de equivalência relativas a ação de ϕ são

$$[(R, \boldsymbol{\Pi})] = \{(\Lambda R, \boldsymbol{\Pi}) \mid \Lambda \in SO(3)_{\mathbf{e}_3}\}.$$

Observação 4.22. *Para $\mu = 0$, se a curva $(R(t), \boldsymbol{\Pi}(t)) \in \mathbf{J}^{-1}(0) = SO(3) \times \{0\}$, então o momento angular $\boldsymbol{\Pi}(t) = 0$ para todo tempo t , o que fisicamente nos diz que o corpo rígido permanece em repouso. Como $\dot{R} = \widehat{\varphi}(\mathbb{I}_0^{-1}\boldsymbol{\Pi}) = 0$ segue que $R(t) = R(0)$ para todo t . Portanto, a solução corresponde a apenas um ponto $(R(t), \boldsymbol{\Pi}(t)) = (R(0), 0)$.*

Podemos relacionar o espaço reduzido $\mathbf{J}^{-1}(\mu)/S^1$ com um subespaço $P_\mu \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (de dimensão 4) pelo simplectomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbf{J}^{-1}(\mu)/S^1, \omega_\mu) &\rightarrow (P_\mu := \{(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{\Gamma}\| = 1 \text{ e } \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Gamma} = \mu\}, \omega_{P_\mu}) \\ [(R, \mathbf{\Pi})] &\mapsto (\mathbf{\Gamma} = R^T \mathbf{e}_3, \mathbf{\Pi}), \end{aligned}$$

onde a 2-forma simplética $\omega_{P_\mu} \in \Omega^2(P_\mu)$ é dado por

$$\begin{aligned} \omega_{P_\mu}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi})((\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{x}, \mathbf{\Pi} \times \mathbf{x} + \mathbf{\Gamma} \times \mathbf{y}), (\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{x}', \mathbf{\Pi} \times \mathbf{x}' + \mathbf{\Gamma} \times \mathbf{y}')) \\ = -\mathbf{\Pi} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{x}') - \mathbf{\Gamma} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}' - \mathbf{x}' \times \mathbf{y}), \end{aligned}$$

com $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \in P_\mu$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

Observação 4.23. *Considerando o vetor tangente $(v, w) \in T_{(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi})}P_\mu$, então $v = \mathbf{\Gamma} \times \mathbf{x}$ para algum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, pois $v \in T_{\mathbf{\Gamma}}S^2$. Derivando a relação $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Gamma} = \mu$, obtemos*

$$\mathbf{\Pi}' \cdot \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Gamma}' = 0$$

o que nos permite concluir que $\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi} \times \mathbf{x} + \mathbf{\Gamma} \times \mathbf{y}$ para algum $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

Não é difícil provar que ψ está bem definida e é um difeomorfismo. Para verificarmos que é um simplectomorfismo, lembre do Teorema de Redução Simplética, de onde temos $\pi_\mu^* \omega_\mu = i_\mu^* \omega_B$ com a 2-forma simplética ω_B definida na Proposição 2.76. Desta forma, basta provarmos que $i_\mu^* \omega_B = \pi_\mu^* \psi^* \omega_{P_\mu}$. Tomando os vetores $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e a rotação $R \in SO(3)$, podemos escrever os vetores tangentes em P_μ como

$$\begin{aligned} T_{[(R, \mathbf{\Pi})]} \psi(R\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi([(R \exp[t\widehat{\mathbf{w}}], \mathbf{\Pi} + t\mathbf{v})]) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp[t\widehat{\mathbf{w}}^T] R^T \mathbf{e}_3, \mathbf{\Pi} + t\mathbf{v}) \\ &= (\widehat{\mathbf{w}}^T R^T \mathbf{e}_3, \mathbf{v}) \\ &= (R^T \mathbf{e}_3 \times \mathbf{w}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

onde na última relação usamos a Proposição A.1. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \psi^* \omega_{P_\mu}([(R, \mathbf{\Pi})])((R\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{v}), (R\widehat{\mathbf{w}}', \mathbf{v}')) &= \omega_{P_\mu}(R^T \mathbf{e}_3, \mathbf{\Pi})((R^T \mathbf{e}_3 \times \mathbf{w}, \mathbf{v}), (R^T \mathbf{e}_3 \times \mathbf{w}', \mathbf{v}')) \\ &= -\mathbf{\Pi} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{w}') - \mathbf{w}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}' \\ &= \omega_B(R, \mathbf{\Pi})((R\widehat{\mathbf{w}}, \mathbf{v}), (R\widehat{\mathbf{w}}', \mathbf{v}')), \end{aligned}$$

o que prova que ψ é um simplectomorfismo.

Determinada a expressão da 2-forma simplética ω_{P_μ} , podemos de forma análoga ao que foi feito para $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ (Seção 2.4.1), obter a expressão do colchete de Poisson induzido

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{P_\mu}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) &= -\mathbf{\Pi} \cdot (\nabla_{\mathbf{\Pi}} F(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \times \nabla_{\mathbf{\Pi}} G(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi})) - \mathbf{\Gamma} \cdot (\nabla_{\mathbf{\Pi}} F(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \times \nabla_{\mathbf{\Gamma}} G(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \\ &\quad - \nabla_{\mathbf{\Pi}} G(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \times \nabla_{\mathbf{\Gamma}} F(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi})), \end{aligned}$$

onde $F, G : P_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves. A Hamiltoniana reduzida $H_\mu : P_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ é dada simplesmente pela expressão

$$H_\mu(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) = \frac{1}{2} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi} + \alpha \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{E}_3, \quad (4.80)$$

cuja as equações de movimento seguem diretamente da definição do colchete $\{\cdot, \cdot\}_{P_\mu}$ acima

$$\dot{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} \times \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi}, \quad (4.81)$$

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{\Pi} \times \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi} + \alpha \mathbf{\Gamma} \times \mathbf{E}_3. \quad (4.82)$$

Uma vez determinada a solução no espaço reduzido P_μ , podemos aplicar o Método de Reconstrução da Dinâmica (ver a Seção 4.4.3) para obtermos a solução do problema para o corpo rígido sob potencial e um análogo da Fórmula de Montgomery.

Iniciamos considerando a 1-forma de conexão $A \in \Omega^1(\mathbf{J}^{-1}(\mu), \mathbb{R})$ (ver a Seção 5D da referência [21])

$$A(R, \mathbf{\Pi})(R\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\mu} \theta_B(R, \mathbf{\Pi})(R\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{x}$$

e a curva solução $c_\mu(t) = (\mathbf{\Gamma}(t), \mathbf{\Pi}(t)) \in P_\mu$ no espaço reduzido com condição inicial $c_\mu(0) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{\Pi}(0))$ e $d(t) = (R_0(t), \mathbf{\Pi}(t)) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ como o levantamento horizontal de c_μ , que satisfaz a relação

$$(\psi \circ \pi_\mu)(d(t)) = c_\mu(t) \quad \text{ou equivalentemente} \quad R_0^T(t) \mathbf{e}_3 = \mathbf{\Gamma}(t).$$

Aplicando o método de Reconstrução (Seção 3.3) e a Observação 3.15, determinamos a curva $\xi(t) \in \mathbb{R}$ pela relação

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A(X_H(d(t))) \\ &= A(R_0, \mathbf{\Pi})(X_H(R_0, \mathbf{\Pi})) = \frac{1}{\mu} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi} \\ &= \frac{1}{\mu} (2E_0 - 2\alpha R_0^T(t) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

O próximo passo é resolvermos a equação $\dot{R} = R\xi$, que tem como solução

$$R(t) = \exp \left[\frac{1}{\mu} \left(2E_0 t - 2\alpha \int_0^t R_0^T(s) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3 ds \right) \hat{\mathbf{e}}_3 \right].$$

Portanto, a solução do problema do corpo rígido sob potencial no subespaço $\mathbf{J}^{-1}(\mu) \subset SO(3) \times \mathbb{R}^3$ é

$$c(t) = R(t) \cdot (R_0(t), \mathbf{\Pi}(t)) = \left(\exp \left[\frac{1}{\mu} \left(2E_0 t - 2\alpha \int_0^t R_0^T(s) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_3 ds \right) \hat{\mathbf{e}}_3 \right] R_0(t), \mathbf{\Pi}(t) \right).$$

Vamos agora obter a fórmula para o ângulo de fase do corpo rígido sob potencial. Considerando que a curva $c_\mu(t)$ seja periódica de período T , então $\mathbf{\Gamma}(t)$ também é periódica, $\mathbf{\Gamma}(T) = \mathbf{\Gamma}(0)$. Lembrando que $\mathbf{\Gamma}(t) = R^T(t) \mathbf{e}_3$, temos

$$R(T)R(0)^T \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$$

e portanto $R(T)R(0)^T \in SO(3)$ é uma rotação ao redor do eixo \mathbf{e}_3 .

Definimos o ângulo de fases $\Delta\theta$, como o módulo 2π do ângulo que o corpo rígido rotaciona ao redor do eixo \mathbf{e}_3 no intervalo de tempo $[0, T]$, que é dado pela relação

$$R(T)R(0)^T = \exp[\Delta\theta \hat{\mathbf{e}}_3].$$

Seguindo exatamente a mesma construção feita na Seção 4.4.3, onde cosntruimos duas curvas que formam um caminho fechado e aplicando o Teorema de Stokes sobre a região delimitada por elas, obtemos

$$\left(2E_0T - 2\alpha \int_0^T \mathbf{\Gamma}(s) \cdot \mathbf{E}_3 ds\right) - \mu\Delta\theta = \iint_{\Sigma} \mathbf{d}(i^*\theta_B) = - \iint_D \omega_{P_\mu},$$

onde neste caso $(\psi \circ \pi_\mu)(\Sigma) =: D \subset P_\mu$. Assim, obtemos a expressão para o ângulo de fase do corpo rígido sob potencial

$$\Delta\theta = \underbrace{\frac{1}{\mu} \iint_D \omega_{P_\mu}}_{\text{Fase Geométrica}} + \underbrace{\frac{1}{\mu} \left[2E_0T - 2\alpha \int_0^T \mathbf{\Gamma}(s) \cdot \mathbf{E}_3 ds\right]}_{\text{Fase Dinâmica}}.$$

Observação 4.24. *Um resultado mais geral sobre a fórmula de fase para sistemas mecânicos com S^1 -simetria que engloba o resultado acima, pode ser vista na Seção 5B de [21].*

Para finalizar, apresentamos um estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio de forma semelhante a Seção 4.4.5. A intuição física nos diz que se o corpo rígido simétrico rotaciona com uma velocidade angular suficientemente grande e suficientemente próximo da posição vertical, então ele tende a permanecer em rotação. Considere o ponto de equilíbrio $(\mathbf{\Gamma}_e, \mathbf{\Pi}_e)$ do sistema de equações (4.81) e 4.82

$$\mathbf{\Pi}_e = (0, 0, \mu) \neq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma}_e = \mathbf{E}_3,$$

que corresponde a rotação do corpo rígido na posição vertical. Fisicamente isso fica mais claro, considerando que no tempo inicial $t = 0$ os eixos no sistema de coordenadas espaço \mathbf{e}_3 e no sistema corpo \mathbf{E}_3 coincidam. Logo $R(t) = \exp([\mathbb{I}_0^{-1} \mathbf{\Pi}_e \hat{\mathbf{e}}_3]t)$, o que nos diz que os eixos \mathbf{e}_3 e \mathbf{E}_3 nos dois sistemas coincidem para todo tempo, isto é, o corpo rígido permanece na posição vertical.

Observe agora que as funções de Casimir $C_\Phi : P_\mu \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ para o colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{P_\mu}$ são da forma

$$C_\Phi(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) = \Phi(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Gamma}, \|\mathbf{\Gamma}\|^2)$$

onde $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função suave. De fato, calculando os gradientes da função

$$\nabla_{\mathbf{\Gamma}} C_\Phi(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) = \mathbf{D}_1 \Phi(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \mathbf{\Pi} + 2\mathbf{D}_2 \Phi(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \mathbf{\Gamma} \quad \text{e} \quad \nabla_{\mathbf{\Pi}} C_\Phi(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) = \mathbf{D}_1 \Phi(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \mathbf{\Gamma}$$

e considerando uma função qualquer $F \in C^\infty(P_\mu)$, então

$$\begin{aligned} \{F, C_\Phi\}_{P_\mu}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) &= -\mathbf{\Pi} \cdot (\nabla_{\mathbf{\Pi}} F(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \times \mathbf{D}_1 \Phi(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \mathbf{\Gamma}) - \mathbf{\Gamma} \cdot (\nabla_{\mathbf{\Pi}} F(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \times \mathbf{D}_1 \Phi(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) \mathbf{\Pi}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que nos mostra que C_Φ comuta com qualquer função em $(P_\mu, \{\cdot, \cdot\}_{P_\mu})$. Considere agora a função auxiliar $H_{\Phi, \varphi} : P_\mu \rightarrow \mathbb{R}$

$$H_{\Phi, \varphi}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) := H_\mu(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Pi}) + \Phi(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Gamma}, \|\mathbf{\Gamma}\|^2) + \varphi(\Pi_3)$$

que é uma quantidade conservada, $\{H_{\Phi, \varphi}, H\}_{P_\mu} = 0$ e que desejamos que satisfaça as condições do Teste Energia-Casimir (Proposição D.4). A primeira relação que ela precisa

satisfazer, é que o ponto de equilíbrio (Γ_e, Π_e) seja um ponto crítico, $\mathbf{D}H_{\Phi, \varphi}(\Gamma_e, \Pi_e) = 0$, de onde obtemos

$$\mathbf{D}_1\Phi(\mu, 1) = -\left(\frac{1}{I_3} + \frac{\varphi'(\mu)}{\mu}\right)\mu, \quad (4.83)$$

$$\mathbf{D}_2\Phi(\mu, 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_3} + \frac{\varphi'(\mu)}{\mu}\right)\mu^2 - \frac{1}{2}\alpha. \quad (4.84)$$

A outra relação que desejamos, é que a matriz $\mathbf{D}^2H_{\Phi, \varphi}(\Gamma_e, \Pi_e)$ seja positiva definida

$$\mathbf{D}^2\Phi(\mu, 1) = \begin{bmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 & \mathbf{D}_1\Phi(\mu, 1) & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_1 & 0 & 0 & \mathbf{D}_1\Phi(\mu, 1) & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ \mathbf{D}_1\Phi(\mu, 1) & 0 & 0 & 2\mathbf{D}_2\Phi(\mu, 1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_1\Phi(\mu, 1) & 0 & 0 & 2\mathbf{D}_2\Phi(\mu, 1) & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= 1/I_3 + \varphi''(\mu) + \mathbf{D}_1^2\Phi(\mu, 1), \\ b &= \mathbf{D}_1\Phi(\mu, 1) + \mu\mathbf{D}_1^2\Phi(\mu, 1) + 2\mathbf{D}_1\Phi(\mu, 1), \\ c &= 2\mathbf{D}_2\Phi(\mu, 1) + 4\mathbf{D}_2^2\Phi(\mu, 1) + \mu^2\mathbf{D}_1^2\Phi(\mu, 1) + 2\mu\mathbf{D}_{1,2}^2\Phi(\mu, 1). \end{aligned}$$

Escrevendo a matriz acima na forma

$$\mathbf{D}^2\Phi(\mu, 1) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

e considerando $A \in GL(3, \mathbb{R})$, isto é $a \neq 0$, podemos escrever o determinante como

$$\det \mathbf{D}^2\Phi(\mu, 1) = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

Observação 4.25. *Considerando A invertível, a relação do determinante acima segue diretamente de*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id & -A^{-1}B \\ 0 & Id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Para que a matriz acima seja positiva definida, basta que todos os autovalores sejam positivos. Assim, com um pouco de cálculo e analisando algumas situações, obtemos a condição

$$\frac{2}{I_1}\mathbf{D}_2\Phi(\mu, 1) - [\mathbf{D}_1\Phi(\mu, 1)]^2 > 0$$

que combinada com as equações (4.83) e (4.84) nos fornece a relação

$$\frac{1}{I_1} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{I_3} + \frac{\varphi''(\mu)}{\mu}\right)\mu^2 - \alpha}_y \right] - \underbrace{\left(\frac{1}{I_3} + \frac{\varphi''(\mu)}{\mu}\right)^2}_{y^2} \mu^2 > 0.$$

Para que a forma quadrática em y acima seja positiva, basta a condição de que o discriminante seja positivo, o que nos fornece a desigualdade

$$\mu^2 > 4\alpha I_1.$$

Portanto, se a norma do momento angular satisfaz $\|\mathbf{\Pi}_e\| > 2\sqrt{\alpha I_1}$, então o ponto de equilíbrio $(\mathbf{\Gamma}_e, \mathbf{\Pi}_e)$ é estável. Uma interpretação física, é que para velocidades angulares suficientemente grandes, o corpo rígido permanecerá em rotação ao redor do eixo de simetria.

Para um estudo mais detalhado sobre os resultados mostrado nesta seção, o leitor pode consultar o artigo [19] e a Seção 15.10 de [22].

Apêndice A

Álgebras de Lie $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{o}(4)$

Nosso objetivo neste anexo, é apresentarmos as álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{o}(4)$ necessárias para o estudo do problema do corpo rígido (Seção 4.4) e do problema de Kepler (Seção 4.3) respectivamente.

Iniciamos lembrando da álgebra de Lie das matrizes anti-simétricas

$$\mathfrak{so}(3) := \{A \in Mat_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\},$$

com o colchete de Lie dado pelo comutadores de matrizes. Veremos agora que existe um isomorfismo de álgebras de Lie entre $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$ e (\mathbb{R}^3, \times) . Para isso, consideraremos a base $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ de $\mathfrak{so}(3)$, onde $(\delta_k)_{ij} = -\epsilon_{kij}$, com ϵ_{ijk} sendo o **símbolo de Levi-Civita** que é definido por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1, & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)\} \\ 0, & \text{se } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } i = k. \end{cases}$$

Proposição A.1. *A aplicação definida por*

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} : (\mathbb{R}^3, \times) &\rightarrow (\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot]) \\ \mathbf{e}_k &\mapsto \delta_k \end{aligned}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie. Além disso, para quaisquer vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ e rotação $R \in SO(3)$, ela satisfaz:

1. $\widehat{\varphi}(\mathbf{w})\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$;
2. $R\widehat{\varphi}(\mathbf{w})R^T = \widehat{\varphi}(R\mathbf{w})$.

Também denotaremos $\widehat{\mathbf{v}} := \widehat{\varphi}(\mathbf{v})$.

Demonstração. Para verificarmos que a aplicação $\widehat{\varphi}$ é um isomorfismo de álgebras de Lie, basta observar que para quaisquer índices $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ela satisfaz

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = \widehat{\varphi}(\epsilon_{kij}\mathbf{e}_k) = \epsilon_{kij}\delta_k = [\delta_i, \delta_j].$$

Para o item (1), observe que para qualquer vetor $\mathbf{w} = \sum_k w_k \mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^3$ e rotação $R \in SO(3)$

$$R\widehat{\varphi}(\mathbf{w})R^T + (R\widehat{\varphi}(\mathbf{w})R^T)^T = R\widehat{\varphi}(\mathbf{w})R^T - R\widehat{\varphi}(\mathbf{w})R^T = 0,$$

portanto $R\hat{\varphi}(\mathbf{w})R^{-1} \in \mathfrak{so}(3)$. Podemos ainda escrever cada elemento da matriz $\hat{\varphi}(\mathbf{w})$ como $\hat{\varphi}(\mathbf{w})_{ij} = \sum_k -\epsilon_{kij}w_k$. Logo

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{w})\mathbf{v}]_l = \sum_r \hat{\varphi}(\mathbf{w})_{lr}v_r = \sum_r \left(\sum_k -\epsilon_{klr}w_k \right) v_r = \sum_{r,k} \epsilon_{lkr}w_kv_r = [\mathbf{w} \times \mathbf{v}]_l,$$

o que prova o item (1).

Para o item (2), basta observar que para quaisquer vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$

$$\hat{\varphi}^{-1}(R\hat{\varphi}(\mathbf{w})R^{-1}) \times \mathbf{v} = (R\hat{\varphi}(\mathbf{w})R^{-1})\mathbf{v} = R\hat{\varphi}(\mathbf{w})(R^{-1}\mathbf{v}) = R(\mathbf{w} \times R^{-1}\mathbf{v}) = R\mathbf{w} \times \mathbf{v}.$$

Portanto $R\hat{\varphi}(\mathbf{w})R^{-1} = \hat{\varphi}(R\mathbf{w})$ para qualquer $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ e $R \in SO(3)$, o que conclui a demonstração. \square

Proposição A.2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathfrak{so}(3)^* := \{f : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ linear}\} \\ \mathbf{e}_k &\mapsto \tilde{\mathbf{e}}_k := \delta_k^* \end{aligned}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie, onde $\{\delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*\}$ é a base de $\mathfrak{so}(3)^*$ que satisfaz $\delta_i^*(\delta_j) = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e igual a $\delta_{ij} = 0$ caso contrário. Temos ainda que para quaisquer vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$

$$\langle \tilde{\varphi}(\mathbf{v}), \hat{\varphi}(\mathbf{w}) \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Também denotaremos $\tilde{\mathbf{v}} := \tilde{\varphi}(\mathbf{v})$.

Demonstração. Segue diretamente da definição da aplicação $\tilde{\varphi}$. \square

Observação A.3. *Uma definição equivalente do isomorfismo $\tilde{\varphi}$ é o mapa*

$$\mathbf{v} \mapsto \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\mathbf{v}}^T \cdot) \in \mathfrak{so}(3)^*.$$

De fato, basta observar que para quaisquer $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\delta_i^T \delta_j) = \delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$

Observação A.4. *Para um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, a exponencial $\exp \hat{\mathbf{v}}$ é uma rotação ao redor do vetor \mathbf{v} . De fato, temos que $\delta_k \mathbf{e}_k = 0$ para todo k , assim $\hat{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0$ e portanto segue que $(\exp \hat{\mathbf{v}})\mathbf{v} = \mathbf{v}$.*

Para o problema de Kepler, temos a simetria da álgebra de Lie $\mathfrak{o}(4)$ que é composta por matrizes anti-simétricas de $Mat_{4 \times 4}(\mathbb{R})$

$$\mathfrak{o}(4) := \left\{ (X, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} X & \mathbf{v} \\ -\mathbf{v}^T & 0 \end{bmatrix} \mid X \in \mathfrak{o}(3), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

O colchete de Lie em $\mathfrak{o}(4)$ é dada pelo comutador $[A, B]_{\mathfrak{o}(4)} = AB - BA$ que pode ainda ser escrito como

$$[(X, \mathbf{v}), (Y, \mathbf{w})]_{\mathfrak{o}(4)} = \left([X, Y]_{\mathfrak{o}(3)} + [\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}]_{\mathfrak{o}(3)}, \hat{\varphi}^{-1}([X, \hat{\mathbf{w}}]_{\mathfrak{o}(3)} - [Y, \hat{\mathbf{v}}]_{\mathfrak{o}(3)}) \right),$$

onde $\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ é o isomorfismo da Proposição A.1. Em particular temos as relações

$$\begin{aligned} [(X, 0), (Y, 0)]_{\mathfrak{o}(4)} &= ([X, Y]_{\mathfrak{o}(3)}, 0), \\ [(X, 0), (0, \mathbf{w})]_{\mathfrak{o}(4)} &= (0, \widehat{\varphi}^{-1}(X) \times \mathbf{w}), \\ [(0, \mathbf{v}), (0, \mathbf{w})]_{\mathfrak{o}(4)} &= ([\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{w}}]_{\mathfrak{o}(3)}, 0), \end{aligned}$$

que aparecem no estudo do Problema de Kepler. Podemos ainda definir os subespaços $\Delta, \Delta' \subset \mathfrak{o}(4)$ como

$$\Delta := \left\langle a_i = \frac{1}{2}(\delta_i, \mathbf{e}_i) \mid i = 1, 2, 3 \right\rangle \quad \text{e} \quad \Delta' := \left\langle b_j = \frac{1}{2}(\delta_j, -\mathbf{e}_j) \mid i = 1, 2, 3 \right\rangle$$

que são fechados sobre os colchetes $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{o}(4)}$, pois os elementos geradores satisfazem

$$[a_i, a_j]_{\mathfrak{o}(4)} = \sum_k \epsilon_{kij} a_k \quad \text{e} \quad [b_i, b_j]_{\mathfrak{o}(4)} = \sum_k \epsilon_{kij} b_k. \quad (\text{A.1})$$

Temos ainda que os elementos geradores a_i e b_j são linearmente independente

$$[a_i, b_j]_{\mathfrak{o}(4)} = 0 \quad \text{para todo} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (\text{A.2})$$

Portanto, como $\dim \mathfrak{o}(4) = 6$, obtemos que $\mathfrak{o}(4) = \Delta \oplus \Delta'$. Vamos verificar agora que $\Delta \simeq \mathfrak{o}(3)$. Definindo o mapa

$$\begin{aligned} \phi : (\Delta, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{o}(4)}) &\rightarrow (\mathfrak{o}(3), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{o}(3)}) \\ a_i &\mapsto \delta_i \end{aligned}$$

temos claramente ϕ é uma bijeção. Para verificarmos que é um homomorfismo, basta ver que

$$\begin{aligned} \phi([a_i, a_j]_{\mathfrak{o}(4)}) &= \phi([\delta_i, \delta_j]_{\mathfrak{o}(3)}, \widehat{\varphi}^{-1}([\delta_i, \delta_j]_{\mathfrak{o}(3)})) \\ &= [\delta_i, \delta_j]_{\mathfrak{o}(3)} \\ &= [\phi(a_i), \phi(a_j)]_{\mathfrak{o}(4)} \end{aligned}$$

e portanto $\Delta \simeq \mathfrak{o}(3)$. De forma análoga, obtemos também que $\Delta' \simeq \mathfrak{o}(3)$. O isomorfismo $\mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{o}(3) \simeq \mathfrak{o}(4)$ é dado pelo seguinte mapa

$$\begin{aligned} \zeta : \mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{o}(3) &\rightarrow \mathfrak{o}(4) \\ (X, X') &\mapsto \begin{bmatrix} X & \widehat{\varphi}^{-1}(X') \\ -\widehat{\varphi}^{-1}(X')^T & 0 \end{bmatrix} = (X, \widehat{\varphi}^{-1}(X')). \end{aligned}$$

Apêndice B

Princípio Variacional

Considere a **variedade de configuração** Q que descreve o estado do sistema, nosso objetivo é entender como ocorre a evolução do sistema, de uma configuração inicial q_i a uma configuração final q_f . O primeiro passo neste sentido, é introduzirmos a função suave Lagrangiana $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, que corresponde a diferença entre as energias cinética e potencial do sistema

$$L = E_{\text{cinética}} - E_{\text{potencial}}.$$

Observação B.1. *Estaremos considerando apenas o caso onde a função Lagrangiana não dependa explicitamente do tempo.*

Considerando o conjunto $C([t_i, t_f]; q_i, q_f) = \{q : [t_i, t_f] \rightarrow Q \text{ suave} \mid q(t_i) = q_i \text{ e } q(t_f) = q_f\}$ que corresponde a todas as evoluções possíveis do sistema com condição inicial q_i e final q_f . Definimos o **funcional de ação** $\mathcal{S}_L : C([t_i, t_f]; q_i, q_f) \rightarrow \mathbb{R}$ como a integral da Lagrangiana

$$\mathcal{S}_L[q] = \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

Existe um conceito físico fundamental chamado de **Princípio da Mínima Ação**, que afirma que a curva $q(t) \in C([t_i, t_f]; q_i, q_f)$ que descreve a evolução física do sistema é a que minimiza o funcional de ação \mathcal{S}_L .

Matematicamente falando, dada uma família de curvas $q(t, \epsilon) \in C([0, T]; q_i, q_f)$ com $\epsilon \in I$ um intervalo contendo o zero, então a curva $q(t, 0)$ que minimiza o funcional de ação \mathcal{S}_L deve satisfazer

$$\left. \frac{d\mathcal{S}_L[q(t, \epsilon)]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Denotando a derivada como $\delta \equiv d/d\epsilon|_{\epsilon=0}$ que é muito usual em textos físicos, podemos reescrever a relação acima como

$$\delta \mathcal{S}_L \equiv \delta \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt = \int_{t_i}^{t_f} \delta L(q, \dot{q}) dt = 0$$

onde a derivada da Lagrangiana δL pode ser escrita da seguinte maneira (omitindo o somatório sobre k)

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k.$$

Podemos escrever ainda o segundo termo como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \delta q^k = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right] - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right] \delta q^k$$

e portanto a variação da Lagrangiana é

$$\delta L = \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right] \delta q^k + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right].$$

Integrando δL no intervalo $[t_i, t_f]$ e lembrando que os pontos finais das curvas $q(t, \epsilon)$ são fixos e portanto $\delta q^k(t_i) = \delta q^k(t_f) = 0$, segue que

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right] \delta q^k dt + \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right] dt}_{\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right|_{t_i}^{t_f} = 0}$$

Como a expressão acima vale para qualquer variação δq^k , obtemos a chamada **equação de Euler-Lagrange** que descreve a evolução do sistema

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = 0.$$

Observação B.2. A equação de Euler-Lagrange é uma condição necessária e suficiente para que a curva $q(t)$ seja um ponto crítico do funcional de ação S_L . Mas para que ela seja de fato uma curva que minimize a ação, precisamos que o determinante da matriz Hessiana seja positivo

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right]_{ij} > 0.$$

Exemplo B.3. Considere uma partícula de massa $m > 0$ com posição $\mathbf{q} \in Q = \mathbb{R}^3$ e suponha que a energia potencial so dependa da posição da partícula $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Desta forma, a função Lagrangiana do sistema é

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - V(\mathbf{q}),$$

com a equação de Euler-Lagrange correspondente

$$\sum_{k=1}^3 -\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q^k} - m\ddot{q}^k = 0.$$

A equação acima é equivalente a segunda Lei de Newton para sistemas conservativos, $m\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$.

Exemplo B.4. Sabemos experimentalmente que a velocidade de um raio de luz depende do meio em que ele está contido. O Princípio de Fermat nos diz que o raio de luz percorre a trajetória entre dois pontos quaisquer de tal forma que minimize o tempo. Neste caso a Lagrangiana óptica é o tempo de percurso do raio de luz entre estes dois pontos.

Definindo o coeficiente de refração como a razão $n := c/v$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e v a velocidade da luz no meio e supondo que o vetor posição do raio de luz

seja da forma $\mathbf{r}(z) = (x(z), y(z), z) \in \mathbb{R}^3$, então a função Lagrangiana $L : T\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ correspondente é

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, z) = n(x, y, z) \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Escrevendo ainda $\mathbf{q}(z) := (x(z), y(z))$, segue da equação de Euler-Lagrange a equação que descreve os caminhos ópticos

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \|\dot{\mathbf{q}}\|^2}} \frac{d}{dz} \left[\frac{n(\mathbf{q}, z)}{\sqrt{1 + \|\dot{\mathbf{q}}\|^2}} \right] \frac{d\mathbf{q}}{dz} = \frac{dn}{d\mathbf{q}}.$$

Além da formulação Lagrangiana para um sistema físico em termos das variáveis posição q e velocidade \dot{q} , podemos descrever o sistema na formulação Hamiltoniana, em termos da posição e do momento. Veremos agora como obter esta formulação a partir da Lagrangiana.

Definimos a **Transformada de Legendre** ou **derivada na fibra** da função Lagrangiana $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, como o mapa suave $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ dado por

$$\mathbb{F}L(q, v_q)(w_q) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} L(q, v_q + \epsilon w_q) \quad \text{com } v_q, w_q \in T_qQ.$$

Considerando um sistema de coordenadas locais (q, \dot{q}) em TQ e vetores $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \in T_qQ$, podemos escrever a transformada de Legendre em coordenadas

$$\langle \mathbb{F}L(q, \dot{q}_1), (q, \dot{q}_2) \rangle = \left(q, \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} L(q, \dot{q}_1 + \epsilon \dot{q}_2) \right) = \left(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}_1) \cdot \dot{q}_2 \right).$$

Para que possamos descrever o sistema no fibrado cotangente T^*Q , necessitamos que a transformada de Legendre $\mathbb{F}L$ seja invertível. Para isso, basta que a matriz derivada

$$\mathbf{D}\mathbb{F}L(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \end{bmatrix}$$

seja invertível, que ocorre se e somente se a matriz $\partial^2 L / \partial \dot{q}^2$ for invertível. Assim, vamos supor que a transformada de Legendre $\mathbb{F}L$ seja um difeomorfismo e neste caso, dizemos que $\mathbb{F}L$ é **hiper-regular**.

Com estas hipóteses, podemos definir de forma abstrata a **função Energia** $E : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ associada a função Lagrangiana L como a diferença

$$E(q, v_q) := \langle \mathbb{F}L(q, v_q), v_q \rangle - L(q, v_q)$$

e a **função Hamiltoniana** $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ como a composta

$$H := E \circ \mathbb{F}L^{-1}.$$

Veremos no próximo exemplo, que estas definições abstratas coincidem com as definições que desejamos que satisfaça na mecânica clássica. Antes disso, considerando o sistema de coordenadas locais (q, \dot{q}) em TQ , podemos escrever a função energia como

$$E(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L(q, \dot{q}).$$

Definindo o **momento linear generalizado** $p(q, \dot{q}) := \mathbb{F}L(q, \dot{q})$ e como a transformada de Legendre é invertível, podemos escrever as velocidades em função da posição e do momento, $\dot{q} = \dot{q}(q, p)$. Desta forma, a função Hamiltoniana é dada em coordenadas

$$H(q, p) = p \cdot \dot{q}(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)).$$

Exemplo B.5. Considere uma partícula de massa m se movendo sob uma reta com a função Lagrangiana $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q).$$

A transformada de Legendre para este sistema é $\mathbb{F}L(q, \dot{q}) = m\dot{q}$, com função energia

$$E(q, \dot{q}) = m\dot{q}^2 - \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right) = \frac{m\dot{q}^2}{2} + V(q)$$

que corresponde a energia usual e a Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Da mesma forma que obtemos as equações de Euler-Lagrange que descrevem o sistema na formulação Lagrangiana, podemos obter equações equivalentes na descrição Hamiltoniana, que é dada pelo teorema abaixo.

Teorema B.6. Considerando a Lagrangiana hiper-regular $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ e a função Hamiltoniana associada $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$, então as equações de Euler-Lagrange nas coordenadas locais (q, \dot{q}) em TQ são equivalentes as **equações de Hamilton**

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad e \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

nas coordenadas (q, p) de T^*Q , onde $p = \mathbb{F}L(q, \dot{q})$.

Demonstração. Veja a Seção 4.2 de [14] □

Exemplo B.7. Voltando ao Exemplo B.4, o momento óptico \mathbf{p} é dado por

$$\mathbf{p} = \mathbb{F}L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{n(\mathbf{q}, z)}{\sqrt{1 + \|\dot{\mathbf{q}}\|^2}} \dot{\mathbf{q}}.$$

Neste caso, a transformada de Legendre $\mathbb{F}L$ é invertível se $n^2(\mathbf{q}, z) - \|\mathbf{p}\|^2 > 0$. Supondo esta hipótese, obtemos a Hamiltoniana do sistema

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{dz} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, z) = -\sqrt{n^2(\mathbf{q}) - \|\mathbf{p}\|^2}.$$

Para mais detalhes sobre o Princípio de Fermat e o princípio variacional em óptica, o leitor pode consultar o Capítulo 1 da referência [12].

Apêndice C

Conexões em Fibrados Principais e Holonomia

Apresentaremos apenas um esboço sobre a teoria de conexões necessárias para a compreensão do processo de reconstrução da dinâmica e na obtenção da Fórmula de Montgomery. Para mais detalhes sobre o conteúdo mostrado, o leitor deve consultar [16] e [21].

Começamos definindo uma classe de variedades que podem ser localmente trivializadas em um produto cartesiano, isto é, como uma fibra. Considere uma ação $G \curvearrowright P$, dizemos que P é um **G -fibrado principal** sobre uma variedade M com grupo de Lie G se satisfaz as seguintes condições:

1. a ação de G em P é livre;
2. M é o quociente de P pela relação de equivalência induzida por G , $M = P/G$ e a projeção canônica $\pi : P \rightarrow M$ é suave;
3. P é localmente trivial, isto é, para todo ponto $x \in M$, existe uma vizinhança $x \ni U \subset M$ tal que $\pi^{-1}(U)$ é isomorfo a $U \times G$.

Escreveremos $P \rightarrow M$ é um G -fibrado principal. Observe neste caso, dado $x \in M$ a fibra é $\pi^{-1}(\{x\}) = G \cdot x$ e o **espaço base** é M .

Exemplo C.1. Considere a ação livre da reta real \mathbb{R} sob o cilindro $P = S^1 \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times (S^1 \times \mathbb{R}) &\rightarrow S^1 \times \mathbb{R} \\ (t, (e^{i\theta}, h)) &\mapsto (e^{i\theta}, h + t). \end{aligned}$$

Para esta ação, temos o seguinte quociente

$$(S^1 \times \mathbb{R})/\mathbb{R} \simeq S^1 \times (\mathbb{R}/\mathbb{R}) \simeq S^1$$

e portanto, a projeção canônica do cilindro pode ser vista como a projeção da coordenada correspondente a circunferência S^1

$$\begin{aligned} \pi : S^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ (e^{i\theta}, h) &\mapsto e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Além disso, dado um ponto $e^{i\theta_0} \in S^1$, existe uma vizinhança U deste ponto em S^1 tal que $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}$. Portanto, $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é um \mathbb{R} -fibrado principal.

Considerando o G -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$, definimos em cada ponto $p \in P$ o **subespaço vertical** como $V_p = \ker T_p\pi \subset T_pP$. Gostaríamos de poder escolher um subespaço $H_p \subset T_pP$ em cada ponto $p \in P$ de tal forma que $T_pP = H_p \oplus V_p$ e que para cada ponto da fibra $gp \in \pi^{-1}(\{\pi(p)\})$, o vetor tangente H_{gp} fosse determinado pelo vetor H_p da seguinte forma

$$H_{gp} = T_pL_gH_p = (L_g)_*H_p \quad \text{para todo } p \in P \text{ e } g \in G, \quad (\text{C.1})$$

isto é, o campo horizontal é invariante pela esquerda (ver a Seção 1.4). Chamamos o mapa suave $p \in P \mapsto H_p \in T_pP$ que satisfaz as condições acima de **conexão** e H_p de **subespaço horizontal**.

Exemplo C.2. Lembrando da identificação do fibrado cotangente $T^*G \simeq G \times \mathfrak{g}^*$, vamos considerar a ação de G em $G \times \mathfrak{g}^*$ dada por

$$\begin{aligned} G \times (G \times \mathfrak{g}^*) &\rightarrow G \times \mathfrak{g}^* \\ (h, (g, \mu)) &\mapsto (hg, \mu). \end{aligned}$$

Neste caso, como a ação age apenas na primeira coordenada, o quociente é

$$(G \times \mathfrak{g}^*)/G \simeq G/G \times \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}^*$$

e portanto

$$\begin{aligned} \pi : G \times \mathfrak{g}^* &\rightarrow \mathfrak{g}^* \\ (g, \mu) &\mapsto \mu. \end{aligned}$$

Observe ainda que para $(g, \mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$, temos o mapa tangente $T_{(g,\mu)}\pi : T_gG \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que tem como subespaço vertical

$$V_{(g,\mu)} = \ker T_{(g,\mu)}\pi = T_gG \times \{0\} \simeq \mathfrak{g}.$$

Desta forma, podemos escrever o espaço tangente como $T_{(g,\mu)}(G \times \mathfrak{g}^*) \simeq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ e o subespaço horizontal $H_{(g,\mu)} \simeq \mathfrak{g}^*$ que satisfaz a condição C.1.

Tendo em mente o exemplo anterior e com a identificação $V_{(p,g)} = T_gG \simeq \mathfrak{g}$ dada pela exponencial, gostaríamos de poder determinar em cada ponto de P o elemento da álgebra de Lie \mathfrak{g} correspondente ao espaço tangente vertical. Para isso, considere a 1-forma $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ que nos fornece este elemento e que para todo ponto $p \in P$ satisfaz:

1. $A(p) : T_pP \rightarrow \mathfrak{g}$ é linear;
2. $A(p)|_{\ker T_p\pi} = id$ ou equivalentemente $\ker A(p) = H_p$;
3. A é equivariante, isto é, $A(gp)(T_pL_g(v)) = \text{Ad}_g A(p)(v)$ para todo $g \in G$ e $v \in T_pP$.

Proposição C.3. Existe uma única 1-forma $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ que satisfaz as condições anteriores. Chamaremos A de **1-forma de conexão**.

Demonstração. Consultar o Capítulo 2 de [16]. □

Proposição C.4. *Considerando as condições do Teorema de Reconstrução da Dinâmica (Teorema 3.13), com $P = T^*Q$ e o subgrupo de isotropia $G_\mu \simeq S^1$, podemos fazer a identificação de \mathfrak{g}_μ com \mathbb{R} com a escolha de um gerador ζ . Então, podemos definir uma 1-forma de conexão $\Omega^1(\mathbf{J}^{-1}(\mu), \mathfrak{g}_\mu)$ por*

$$A = \frac{1}{\langle \mu, \zeta \rangle} i_\mu^* \theta_0 \otimes \zeta.$$

Demonstração. Ver a Seção 2B de [21]. □

Considerando o resultado anterior, podemos determinar a 1-forma de conexão para o problema do corpo rígido livre (ver a Seção 4.4. Lembre que tínhamos a seguinte ação no espaço de fases

$$\begin{aligned} SO(3) \times (SO(3) \times \mathbb{R}^3) &\rightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^3 \\ (\Lambda, (R, \mathbf{\Pi})) &\mapsto (\Lambda R, \mathbf{\Pi}) \end{aligned}$$

com mapa momento associado $\mathbf{J}(R, \mathbf{\Pi}) = R\mathbf{\Pi}$ e que a ação do subgrupo de isotropia $SO(3)_\mu$ deixa invariante a subvariedade $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$. Desta forma, a 1-forma de conexão $A \in \Omega^1(\mathbf{J}^{-1}(\mu), \mathfrak{so}(3)_\mu)$ no fibrado principal

$$SO(3) \simeq \mathbf{J}^{-1}(\mu) \rightarrow \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu$$

é dada pela proposição anterior

$$A := \frac{\widehat{\varphi}(\mu)}{\|\mu\|^2} i_\mu^* \theta_B, \tag{C.2}$$

onde $i_\mu : \mathbf{J}^{-1}(\mu) \hookrightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^3$ é a inclusão, $\theta_B \in \Omega^1(SO(3) \times \mathbb{R}^3)$ a 1-forma da Proposição 2.76 e $\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ o isomorfismo do Anexo A.

Considere agora um G -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ de variedades conexas, um caminho suave fechado $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = \pi(p)$ e uma 1-forma de conexão $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Então existe um único levantamento horizontal $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$ associado a conexão tal que $\bar{\gamma}(0) = p$ e $\bar{\gamma}(1) = gp \in \pi^{-1}(\{p\})$ (elemento da fibra) para algum $g \in G$. Para determinarmos este g , considere a curva $g(t)$ com condição inicial $g(0) = e$ e que satisfaça a equação

$$g(t)^{-1} \dot{g}(t) = A(\bar{\gamma}(t))(\dot{\bar{\gamma}}(t)) \in \mathfrak{g}$$

vamos verificar que $g = g(1)$. De fato, como temos localmente uma trivialização, podemos escrever $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), g(t))$ o que nos diz que $\bar{\gamma}(1) = g(1)\bar{\gamma}(0)$. Considere a seção $s : U \subset M \rightarrow P$ com U aberto, pela lei de transformação de conexões (ver [16]), podemos escrever

$$A = g(s^*A)g^{-1} - (\mathbf{d}g)g^{-1}.$$

Como $\bar{\gamma}^*A = 0$, pois $\bar{\gamma}$ é horizontal, obtemos

$$\left(g(s^*A)(\dot{\gamma}(t)) - \frac{dg}{dt} \right) g^{-1} = 0 \Rightarrow \frac{dg}{dt} = g(t)(s^*A)(\dot{\gamma}(t)) \tag{C.3}$$

o que demonstra a afirmação. Considerando agora o grupo de Lie G como sendo abeliano, podemos mostrar (ver a Seção 4B de [21]) que

$$g(1) = \exp \left(\int_0^1 (s^*A)(\gamma(u))\gamma'(u)du \right) = \exp \left(\iint s^*dA \right),$$

onde a expressão da última integral so é válida se a região 2-dimensional delimitada pela curva $\gamma(t)$ em M satisfaz as condições do Teorema de Stokes (Teorema 1.36). Chamaremos o elemento $g(1)$ de **holonomia** a partir de $\bar{\gamma}(0)$ e referente a 1-forma de conexão A .

Observação C.5. *Com a identificação de $\mathfrak{so}(3)_\mu \simeq \mathbb{R}$ dada por $\lambda\hat{\mu}/\|\mu\| \mapsto \lambda$, podemos considerar a 1-forma de conexão da equação (C.2) como $A \in \Omega^1(\mathbf{J}^{-1}(\mu), \mathbb{R})$. Como $SO(3)_\mu$ é abeliano, segue do resultado anterior que a fase geométrica $\Delta\theta_G$ definida na Seção 4.4.3 é dada simplesmente por*

$$\Delta\theta_G = -\log(\text{holonomia}).$$

Apêndice D

Estabilidade de Pontos de Equilíbrio

Veremos algumas definições e resultados básicos que necessitamos para o estudo da estabilidade do corpo rígido da Seção 4.4.5 e 4.5.

Considere um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma função suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que o ponto $x_e \in U$ é um **ponto de equilíbrio** do sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ se $f(x_e) = 0$. Além disso, se para qualquer $R > 0$ existir algum $r > 0$ tal que se $\|x(0) - x_e\| < r$ implicar que $\|x(t) - x_e\| < R$ para todo $t > 0$, então dizemos que o ponto de equilíbrio x_e é **estável no sentido de Lyapunov**.

Exemplo D.1. *Considere a matriz diagonal de entradas reais $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e o sistema linear $\dot{x} = (A - \lambda_i \text{Id}_n)x$. Claramente, o autovetor v_i associado ao autovalor λ_i é um ponto de equilíbrio. Se para algum $j \neq i$ tivermos $\lambda_j - \lambda_i > 0$, temos que o ponto é de equilíbrio instável.*

Observação D.2. *Considerando um sistema Hamiltoniano (P, H) que satisfaça as condições do Teorema de Redução Simplética (Teorema 3.4) e da redução da dinâmica (Teorema 3.11). Dizemos que $p \in P$ é um **ponto de equilíbrio relativo** se o ponto $\pi_\mu(p)$ for um ponto crítico do sistema reduzido (H_μ, P_μ) . Além disso, dizemos que o ponto p é **relativamente estável** se $\pi_\mu(p)$ for estável no sentido de Lyapunov.*

O teorema a seguir nos fornece uma condição para verificarmos se o ponto de equilíbrio é estável.

Teorema D.3 (Critério de Lyapunov). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável. Considere $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio do sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$. Se $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave num aberto com $x_e \in W \subset U$ e diferenciável em $W - \{x_e\}$ tal que:*

1. $V(x_e) = 0$ e $V(x) > 0$ para todo $x \neq x_e$;
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in W - \{x_e\}$,

então x_e é um ponto de equilíbrio estável do sistema. A função V acima que satisfaz as condições 1 e 2 é chamada de **função de Lyapunov**.

Demonstração. Tomando um $\delta > 0$ tal que a bola fechada $\overline{B}_\delta(x_e) \subset W$ e V_{min} o valor mínimo da função V na fronteira de $\overline{B}_\delta(x_e)$. Pela condição (1), temos $V_{min} > 0$ e portanto o conjunto $W' = \{x \in \overline{B}_\delta(x_e) \mid V(x) < V_{min}\} \neq \emptyset$. Como pela condição (2) temos que V é não-crescente nas curvas soluções, então qualquer solução que inicie em W' não sai da bola fechada $\overline{B}_\delta(x_e) \subset W$, o que demonstra a estabilidade. \square

O Critério de Lyapunov nos diz que para determinar se um ponto de equilíbrio é estável, basta construirmos uma função V que satisfaça as condições acima. Veremos que dada uma Hamiltoniana, é possível determinar uma função V através das chamadas funções de Casimir (ver a Definição 2.73).

Proposição D.4 (Teste Energia-Casimir). *Sejam $H, C : P \rightarrow \mathbb{R}$ as funções Hamiltoniana e de Casimir respectivamente e $x_e \in P$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x}_i = \{x_i, H\}$ que satisfaz:*

1. $D(H + C)(x_e) = 0$;
2. $D^2(H + C)(x_e)(w, w) > 0$ para todo $0 \neq w \in T_{x_e}P$ (ou < 0).

Então x_e é um ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov.

Demonstração. Definindo a função $V(x) = (H + C)(x) - (H + C)(x_e)$, segue das hipóteses do teorema, x_e é ponto de mínimo local e portanto existe uma vizinhança W de x_e tal que $V(x) > 0$ para todo $x \in W - \{x_e\}$. Como $H + C$ é uma quantidade conservada ao longo das trajetórias segue que $\dot{V}(x) = 0$ para todo $x \in W - \{x_e\}$. Portanto V satisfaz as condições do Critério de Lyapunov (Teorema D.3) e x_e é um ponto de equilíbrio estável. \square

A proposição anterior, nos fornece um critério suficiente para verificarmos se um ponto de equilíbrio é estável e pode ser visto com mais detalhes em [13]. Para verificarmos que um ponto de equilíbrio é instável, podemos analisar o sistema linearizado.

Teorema D.5. (Teorema de Linearização de Hartman-Grobman) *Seja o sistema $\dot{x} = f(x)$ com $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave. Se x_e for um ponto de equilíbrio, então existe uma vizinhança W de x_e tal que existe uma mudança de variáveis que leva as órbitas do sistema linearizado $\dot{x} = f'(x)$ nas órbitas do sistema não-linear.*

Demonstração. Ver a Seção 4.3 da referência [2]. \square

Observação D.6. *O teorema anterior nos diz que para verificarmos a instabilidade de um ponto de equilíbrio do sistema, basta verificarmos se o sistema linearizado é instável neste ponto, isto é, se algum dos autovalores da matriz $f'(x_e)$ possui a parte real positiva.*

Apêndice E

Cálculos Auxiliares

Este anexo é dedicado a demonstração de alguns resultados omitidos no Capítulo 3 e na Seção 4.3. Denotaremos G como um grupo de Lie, com sua respectiva álgebra de Lie \mathfrak{g} e P uma variedade suave.

Lema E.1. *Seja $\phi : G \times P \rightarrow P$ uma ação, então para qualquer $\xi \in \mathfrak{g}$ temos*

$$T_g\phi(g, p)\xi_g = T_p\phi_g(T_eL_{g^{-1}}\xi_g)_P(p)$$

onde $\xi_g = T_eL_g\xi$ é o gerador infinitesimal do campo no ponto $g \in G$.

Demonstração. Fixando um ponto $p \in P$ e calculando a derivada da ação na variável $g \in G$

$$\begin{aligned} T_g\phi(h, p)\xi_g &= T_g\phi(h, p)T_eL_g\xi \\ &= T_e(\phi(L_g h, p))\xi \\ &= T_e(\phi_{gh}(p))\xi \\ &= T_e(\phi_g(\phi(h, p)))\xi \\ &= T_p\phi_g(\phi(h, p)) \circ T_e\phi(h, p)\xi. \end{aligned} \tag{E.1}$$

Da definição de geradores infinitesimais (Definição 2.29), segue que

$$T_e\phi(g, p)(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(\exp t\xi, p) = \xi_P(p). \tag{E.2}$$

Combinando as relações E.1 e E.2

$$T_g\phi(g, p)\xi_g = T_p\phi_g \circ T_e\phi_p(\xi) = T_p\phi_g \cdot \xi_P(p) = T_p\phi_g(T_eL_{g^{-1}}\xi_g)_P(p),$$

que corresponde a relação desejada. \square

Lema E.2. *Considerando a ação adjunta $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definida no Exemplo 2.21, então para quaisquer $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$ e $\mu \in \mathfrak{g}^*$ temos*

$$T_g(\text{Ad}^* \mu)(\xi_g) = \text{Ad}_g^* \text{ad}(T_gR_{g^{-1}}\xi_g)^* \mu.$$

Demonstração. Lembrando que o campo gerado por $\xi \in \mathfrak{g}$ no ponto $g \in G$ é dado por

$$\xi(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_{\exp t\xi}(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_g(\exp t\xi) = T_e R_g(\xi),$$

então para $\eta \in \mathfrak{g}$ e pelo fato que $\text{Ad}_{hg}^* = \text{Ad}_g^* \circ \text{Ad}_h^*$ para todo $g, h \in G$, temos

$$\begin{aligned} T_g(\text{Ad}^* \mu)(T_e R_g \xi)(\eta) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad}_{R_g(\exp t\xi)}^* \mu(\eta)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \text{Ad}_g^* \circ \text{Ad}_{\exp t\xi}^* \mu, \eta \rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \text{Ad}_{\exp t\xi}^* \mu, \text{Ad}_g \eta \rangle \\ &= \langle \text{ad}_\xi^* \mu, \text{Ad}_g \eta \rangle \\ &= \langle \text{Ad}_g^*(\text{ad}_\xi^* \mu), \eta \rangle, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. \square

Lema E.3. *Seja $\phi : G \times P \rightarrow P$ uma ação, então para todo $g \in G$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ temos a relação*

$$(\text{Ad}_g \xi)_P = \phi_{g^{-1}}^* \xi_P.$$

Demonstração. Seja $x \in P$, então pela definição de geradores infinitesimais

$$\begin{aligned} (\text{Ad}_g \xi)_P(x) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(\exp t \text{Ad}_g \xi, x) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(g(\exp t\xi)g^{-1}, x) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_g \circ \phi_{\exp t\xi} \circ \phi_{g^{-1}}(x) \\ &= T_{\phi_{g^{-1}}(x)} \phi_g \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(\exp t\xi, \phi_{g^{-1}}(x)) \\ &= T_{\phi_{g^{-1}}(x)} \phi_g \xi_P(\phi_{g^{-1}}(x)) \\ &= (\phi_{g^{-1}}^* \xi)_P(x). \end{aligned}$$

\square

A seguir, apresentamos um resultado que nos permite verificar se uma função é homogênea, utilizado no Problema de Kepler.

Definição E.4. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com U aberto, dizemos que f é homogênea de grau k se para todo $\lambda > 0$ e $x \in U$ tivermos que $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$.*

Proposição E.5. *A função $f : \mathbb{R}_{>0}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau k se e somente se para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 0\}$ tivermos*

$$\mathcal{E}(f)(x) := \sum_{i=1}^k x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = k f(x).$$

O operador \mathcal{E} é chamado de **derivada de Euler**.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que f seja homogênea de grau k . Para $x \in \mathbb{R}_{>0}^n$ fixado, definimos a função

$$h : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto h(\lambda) = f(\lambda x) - \lambda^k f(x).$$

Derivando h em relação a λ

$$0 = h'(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial x^i} x^i - k\lambda^{k-1} f(x)$$

e tomando $\lambda = 1$, obtemos que $\mathcal{E}(f)(x) = kf(x)$.

(\Leftarrow) Suponha agora que $\mathcal{E}(f)(x) = kf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$. Derivando a função h obtemos uma equação diferencial

$$h'(\lambda) - \frac{k}{\lambda} h(\lambda) = 0.$$

A solução geral para esta equação é $h(\lambda) = C\lambda^k$. Pela condição $h(1) = 0$, segue que $C = 0$ e portanto f é homogênea de grau k . \square

Referências Bibliográficas

- [1] ABRAHAM, R., AND MARSDEN, J. E. *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, 1978.
- [2] ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E., AND RATIU, T. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Springer-Verlag, 1988.
- [3] ARNOLD, V. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [4] BERNDT, R. *An Introduction to Symplectic Geometry*. American Mathematical Society, 2001.
- [5] BURSZTYN, H., AND MACARANI, L. *Introdução a Geometria Simplética*. XIV Escola de Geometria Diferencial, 2006.
- [6] CABRERA, A. *Fases Geométricas en Sistemas Mecánicos*. Tesis Doctor en Ciencias area Matematica, Universidad Nacional de La Plata, 2007.
- [7] CUSHMAN, R. H., AND BATES, L. M. *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Springer, 1997.
- [8] DA SILVA, A. C. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer-Verlag, 2004.
- [9] GRIGORYEVA, L., OTERGA, J.-P., AND ZUB, S. Stability of hamiltonian relative equilibria in symmetric magnetically confined rigid bodies. *The Journal of Geometric Mechanics* (2013).
- [10] GUILLEMIN, V., AND STERNBERG, S. *Variation on a Theme by Kepler*. American Mathematical Society, Colloquium Publications Volume 42, 1990.
- [11] HIRSCH, M. W., AND SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [12] HOLM, D. D. *Geometric Mechanics - Part I*. Imperial College Press, 2011.
- [13] HOLM, D. D., MARSDEN, J. E., RATIU, T., AND WEINSTEIN, A. Stability of rigid body motion using the energy-casimir method. *Fluids and Plasmas: geometry and dynamics, Contemporary Mathematics, Volume 28* (1984).
- [14] HOLM, D. D., SCHMAH, T., AND STOICA, C. *Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions*. Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics, 2009.

- [15] JOSE, J. V., AND SALETAN, E. J. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, 1998.
- [16] KOBAYASHI, S., AND NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry - Volume I*. Interscience Publishers, 1963.
- [17] LAWDEN, D. *Elliptic Function and Applications*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlang, 2010.
- [18] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics Book 218, 2012.
- [19] LEWIS, D., RATIU, T. S., SIMON, J. C., AND MARSDEN, J. E. The heavy top: a geometric treatment, nonlinearity. *Nonlinearity Volume 5* (1992).
- [20] MARSDEN, J. E., MISIOLEK, G., ORTEGA, J.-P., PERLMUTTER, M., AND RATIU, T. S. *Hamiltonian Reduction by Stages*. Springer, 2007.
- [21] MARSDEN, J. E., MONTGOMERY, R., AND RATIU, T. Reduction, symmetry and phases in mechanics. *Memoirs of the American Mathematical Society* (1990).
- [22] MARSDEN, J. E., AND RATIU, T. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer-Verlag, 2002.
- [23] MARSDEN, J. E., AND WEINSTEIN, A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. *Reports on Mathematical Physics, Volume 5* (1974).
- [24] MCDUFF, D., AND SALAMON, D. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 1998.
- [25] MONTGOMERY, R. How much does the rigid body rotate? a berry's phase from the 18th century. *American Journal of Physics, Volume 59* (1991).
- [26] MOSER, J., AND ZENNDER, E. J. *Notes on Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2005.
- [27] NGUYEN, S., AND TURSKI, L. A. Examples of the dirac approach to dynamics of systems with constraints. *Physics A: Statistical Mechanics and its Applications, Volume 290* (2001).
- [28] ORTEGA, J.-P., AND RATIU, T. *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*. Birkhäuser Basel, 2004.
- [29] SAN MARTIN, L. A. B. *Grupos de Lie*. Editora da Unicamp, 2016.
- [30] TAUBES, C. H. *Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature*. Oxford University Press, 2001.
- [31] ZEHNDER, E. *Lectures on Dynamical Systems: Hamiltonian Vector Fields and Symplectic Capacities*. European Mathematical Society, 2010.