



INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro



UFRJ

Probabilidades Invariantes e Conjuntos Não-Errantes para Semifluxos Impulsivos

Eduardo Corrêa Pedrosa

Rio de Janeiro, Brasil

20 de julho de 2020

Probabilidades Invariantes e Conjuntos Não-Errantes para Semifluxos Impulsivos

Eduardo Corrêa Pedrosa

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientadoras: Jaqueline Siqueira Rocha, Katrin Grit Gelfert

Rio de Janeiro, Brasil
20 de julho de 2020

CIP - Catalogação na Publicação

P372p Pedrosa, Eduardo Corrêa
 Probabilidades Invariantes e Conjuntos Não
Errantes para Semifluxos Impulsivos / Eduardo
Corrêa Pedrosa. -- Rio de Janeiro, 2020.
 26 f.

 Orientadora: Jaqueline Siqueira Rocha.
 Coorientadora: Katrin Grit Gelfert.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

 1. Sistemas dinâmicos impulsivos. 2.
 Probabilidades invariantes. 3. Conjunto não
errante. I. Rocha, Jaqueline Siqueira, orient. II.
 Gelfert, Katrin Grit, coorient. III. Título.

Eduardo Corrêa Pedrosa

Probabilidades Invariantes e Conjuntos Não-Errantes para Semifluxos Impulsivos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

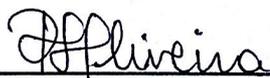
Trabalho aprovado por



Katrin Grit Gelfert
Orientadora



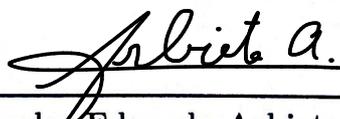
Jaqueline Siqueira Rocha
Orientadora



Regilene Delazari dos Santos Oliveira



Carlos Humberto Vasquez Ehrenfeld



Alexander Eduardo Arbieto Mendoza



Luciana Silva Salgado

Rio de Janeiro, Brasil
8 de julho de 2020

Agradecimentos

Agradeço às minhas orientadoras Jaqueline Siqueira Rocha e Katrin Grit Gelfert por todos ensinamentos, pela maturidade acadêmica e matemática que me ajudaram a adquirir, por todo incentivo e apoio dado e pela paciência.

Agradeço aos professores da banca Carlos Humberto Vasquez Ehrenfeld, Regilene Delazari dos Santos Oliveira, Luciana Silva Salgado e Alexander Eduardo Arbieto Mendoza pela disposição, pelo interesse no meu trabalho e pelos comentários e críticas construtivas. Ao último agradeço também pela sugestão do tema desta dissertação.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do IM-UFRJ por aceitar minha candidatura ao mestrado, a seus docentes e à sua secretaria.

Agradeço ao PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado) pelo incentivo ao estudo de Matemática durante minha graduação noutro curso, através de uma bolsa fornecida pelo CNPq, e pela garantia de uma bolsa de mestrado, fornecida pela CAPES. Agradeço também a ambos órgãos de fomento à pesquisa.

Agradeço aos meus colegas da pós-graduação pela amizade e pelos conhecimentos de Matemática e LaTeX a mim transmitidos. Aos meus demais amigos, agradeço a presença em minha defesa e aos elogios (por parte dos matemáticos) e comentários hilários (por parte dos não matemáticos) que a sucederam.

Agradeço a meus pais pelo carinho e apoio, pelo incentivo à carreira acadêmica e pelo orgulho que expressam. À minha mãe, em particular, agradeço pelos conselhos acadêmicos e pelo exemplo de atuação profissional em ensino e pesquisa.

Agradeço por tudo à minha namorada Mariana, corajosa enfermeira defensora do SUS e atual combatente da COVID-19, pessoa que tanto me orgulha e, por alguma razão, se orgulha de mim.

Resumo

Sistemas dinâmicos impulsivos são caracterizados por trajetórias contínuas entre impulsos, isto é, deslocamentos instantâneos entre pontos distintos. Foi provado em [3] que um tal sistema induz um semifluxo com descontinuidades, o qual chamamos semifluxo impulsivo. É natural que esse semifluxo, por conta da descontinuidade, perca propriedades em relação a um semifluxo contínuo. Este trabalho expõe os principais resultados de [1], que garantem, sob hipóteses adequadas, a existência de probabilidades invariantes pelo semifluxo impulsivo e a invariância positiva pelo mesmo de seu conjunto não-errante menos os pontos de descontinuidade.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos impulsivos, Probabilidades invariantes, Conjunto não-errante

Abstract

Impulsive dynamical systems are given by trajectories that are continuous between impulses, that being instantaneous motion from one point to another. It has been proved in [3] that such a system induces a discontinuous semiflow, which we call impulsive semiflow. It is reasonable that this semiflow, on account of its discontinuity, lacks properties compared to a continuous semiflow. This work presents the main results from [1], which ensure, under suitable assumptions, the existence of probability measures which are invariant by the impulsive semiflow and the forward invariance by this semiflow of its non-wandering set except the discontinuity points.

Keywords: Impulsive dynamical systems, Invariant probability measures, Non-wandering set

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRELIMINARES	17
2.1	Conjuntos Não-Errantes	17
2.2	Probabilidade Invariantes	18
2.3	Sistemas Dinâmicos Impulsivos	20
3	DINÂMICA NO CONJUNTO NÃO-ERRANTE	27
4	DINÂMICA NO ESPAÇO QUOCIENTE	29
5	EXISTÊNCIA DE PROBABILIDADES INVARIANTES	37
6	EXEMPLOS	47
	REFERÊNCIAS	53

1 Introdução

A evolução no tempo de diversos fenômenos estudados pelas ciências apresenta em determinados instantes mudanças abruptas de estado, onde a duração das perturbações é nula ou desprezível comparada à duração do fenômeno. A essas mudanças abruptas é dado o nome de impulsos e estes podem ser observados em fenômenos da física, biologia, economia, teoria de controle e ciência da informação, veja [11] e [16]. O conceito físico hipotético das pontes de Einstein-Rosen, ou buracos de minhoca, por exemplo admite a existência de trajetórias com impulsos, visto que as tais pontes permitem o deslocamento instantâneo entre dois pontos distintos do espaço, veja [18].

Fenômenos que apresentam caráter impulsivo podem ser modelados pelas equações diferenciais impulsivas, que são a combinação de equações diferenciais, que descrevem o período de variação contínua de estado, com condições que descrevem o efeito impulsivo. Para ilustrar este comportamento, destacamos aqui um sistema de equações diferenciais impulsivo apresentado em [8] que modela a interação entre duas espécies, predador e presa, que habitam um mesmo ambiente. O modelo descreve um processo no qual a população de presa, ao atingir determinado limiar, tem uma parcela retirada do ambiente e desencadeia a introdução de um acréscimo na população predadora (o que representa um decréscimo e um acréscimo abruptos nas populações de presa e predador respectivamente). A dinâmica populacional desse processo é governada pelas conhecidas equações predador-presa (ou de Lotka-Volterra) acompanhadas das condições de impulso:

$$\left. \begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - a_{11}x - a_{12}y), \\ \dot{y} = y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y), \end{cases} \right\} \text{ se } x \neq h, \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{cases} \Delta x = -px, \\ \Delta y = qy, \end{cases} \right\} \text{ se } x = h.$$

definidas em $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são as densidades populacionais de presa e predador respectivamente; r_1 e r_2 são as taxas de nascimento de presa e predador respectivamente; a_{ij} , com $i \neq j$, mede a interação entre as duas espécies e a_{ii} é o coeficiente de autoinibição de cada espécie. Quanto aos demais parâmetros, $p \in (0, 1)$ e $h, q > 0$. O retrato de fase do sistema com e sem efeito impulsivo pode ser observado na Figura 1¹. Note que no sistema impulsivo, a evolução temporal do par $(x(t), y(t))$ sofre uma transformação abrupta ao atingir a reta $x = 0$, 8.

A importância dos fenômenos impulsivos e das equações diferenciais impulsivas motivou o estudo dos sistemas dinâmicos impulsivos, área recente de pesquisa em sistemas dinâmicos e objeto principal deste trabalho.

Um sistema dinâmico impulsivo é determinado pela quádrupla (X, φ, D, I) , onde X é um espaço, aqui considerado métrico e compacto; φ um semifluxo contínuo nele definido; D um subconjunto fechado de X , que chamaremos conjunto impulsivo; e I uma aplicação contínua de D em X , que chamaremos impulso. Essa quádrupla define um semifluxo impulsivo da seguinte maneira: suas trajetórias, chamadas impulsivas, coincidem com as do semifluxo contínuo φ do ponto de partida até que estas eventualmente atinjam o conjunto impulsivo. A partir de então, para as trajetórias impulsivas que atingiram D , a evolução

¹ Fonte: [8].

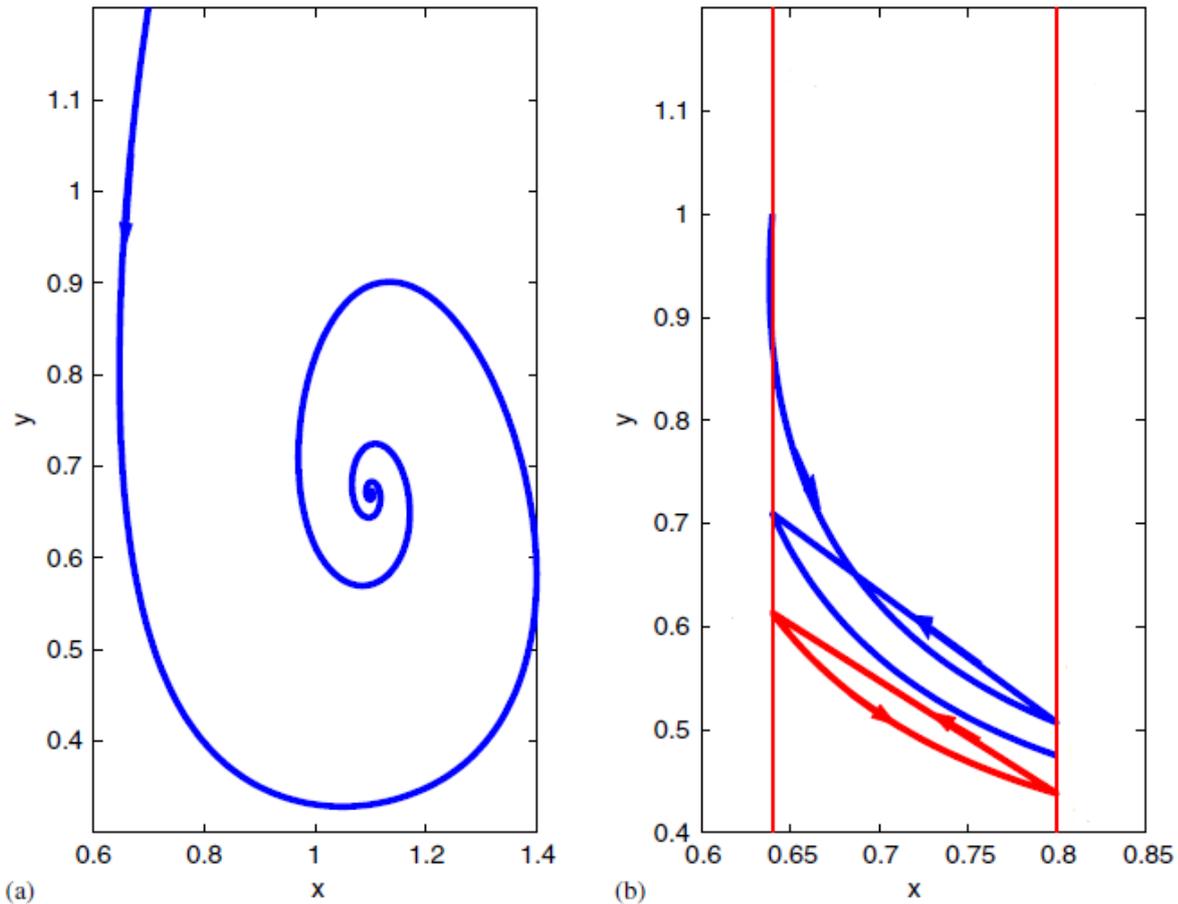


Figura 1 – (a) Retrato de fase do sistema predador-presa sem impulso (b) Retrato de fase do sistema impulsivo (1.1)

temporal se dá através de φ desde $I(D)$ até um possível retorno a D . Assim o processo se repete recursivamente, com as trajetórias impulsivas coincidindo com as de φ entre sucessivas partidas de $I(D)$ e chegadas a D .

É natural questionar quais características do sistema original são preservadas pelo sistema impulsivo. Propriedades como minimalidade, recorrência, periodicidade de órbitas, semicontinuidade e estabilidade de sistemas dinâmicos impulsivos foram estudadas em [5], [6], [9] e [10]. A adaptação de resultados clássicos da teoria de sistemas dinâmicos, como o Teorema de Poincaré-Bendixson, para sistemas impulsivos também foi estudada, veja [4].

No que se refere a existência de medidas invariantes, como o semifluxo impulsivo geralmente não é contínuo, não podemos concluir imediatamente pelo Teorema de Bogoliouboff-Kryloff que existem probabilidades por ele invariantes. O principal objetivo desta dissertação é justamente provar, sob condições adequadas, a existência de tais probabilidades. Isso será feito fundamentalmente com base em [1] e a maioria dos resultados aqui provados provém do mesmo trabalho.

A estratégia usada em [1] foi definir uma relação de equivalência em X que identificasse elementos do conjunto impulsivo com sua imagem pela função impulso e, no espaço quociente por ela definido, construir um semifluxo contínuo. Provando ser o espaço quociente métrico e compacto, concluiu-se pelo Teorema de Bogoliouboff-Kryloff que o semifluxo obtido admite probabilidades invariantes. Por fim exibiu-se uma bijeção entre

o espaço dessas probabilidades e o espaço das probabilidades invariantes pelo semifluxo impulsivo. Pôde-se então concluir que a não vacuidade do primeiro espaço implica a não vacuidade do segundo.

Para poder enunciar o principal resultado apresentado nesta dissertação, precisamos abordar a função τ_D , definida no conjunto não-errante do semifluxo impulsivo. Sua definição precisa será dada no Capítulo 2. Esta função se anula em pontos do não-errante pertencentes a D e, para cada um dos demais pontos do não-errante, é igual ao tempo de primeiro encontro da φ -trajetória com D .

O próximo teorema, central neste trabalho, garante a existência de medidas invariantes pelo semifluxo impulsivo desde que τ_D seja contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, onde Ω_ψ é o conjunto não-errante do semifluxo impulsivo.

Teorema I. *Seja ψ o semifluxo induzido por um sistema dinâmico impulsivo (X, φ, D, I) . Se τ_D for contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, então ψ possui alguma medida de probabilidade invariante. Além disso, qualquer probabilidade ψ -invariante μ tem seu suporte contido em Ω_ψ e satisfaz $\mu(D) = 0$.*

Descrevemos a seguir a estrutura do texto. Começaremos, no Capítulo 2, por definir objetos fundamentais para este trabalho, como conjunto não-errante, probabilidades invariantes e sistemas impulsivos, além de provar algumas de suas propriedades. Em seguida, no Capítulo 3, provaremos alguns resultados referentes à dinâmica do conjunto não-errante, o que nos permitirá provar que $\Omega_\psi \setminus D$ é positivamente invariante pelo semifluxo impulsivo se $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, segundo resultado principal de [1]. Como corolário deste, teremos a existência de probabilidades ψ -invariantes sob uma hipótese diferente daquelas do Teorema I. No Capítulo 4, descreveremos o espaço quociente e algumas de suas características topológicas. Mostraremos que é possível construir neste espaço, a partir da projeção do semifluxo impulsivo, um semifluxo contínuo. Para demonstrar o Teorema I, precisaremos de certos resultados, como a mensurabilidade de alguns objetos estudados, que serão provados no Capítulo 5. Por fim, no Capítulo 6, exibiremos alguns exemplos de sistemas dinâmicos impulsivos para os quais verificaremos as hipóteses do Teorema I.

2 Preliminares

2.1 Conjuntos Não-Errantes

Para definir um sistema dinâmico impulsivo é necessário, dentre outros elementos, um semifluxo contínuo. Além disso, todos os resultados principais de [1] envolvem o conceito de conjunto não-errante em suas hipóteses e teses. Nesta seção definiremos um semifluxo e seu respectivo conjunto não-errante, além de apresentar algumas de suas propriedades.

Definição 2.1. Dado um espaço métrico X , chamamos $\varphi: X \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow X$ um **semifluxo** se para todo $x \in X$ e todos $s, t \in \mathbb{R}_0^+$ temos

i) $\varphi_0(x) = x;$

ii) $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x)),$

onde $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$. Dizemos que φ é um **semifluxo contínuo** se φ for contínuo com respeito às duas variáveis x e t .

Dado $x \in X$, chamaremos de **φ -trajetória** de x a aplicação $\varphi^x: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow X$ definida por $\varphi^x(t) = \varphi(x, t)$ e de **φ -órbita** de x o conjunto $\{\varphi_t(x); t \geq 0\}$. Um conjunto $A \subset X$ é dito **positivamente invariante** por φ se $\varphi_t(A) \subset A$ para todo $t \geq 0$.

Definição 2.2. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto não-errante** com respeito ao semifluxo φ se, para todo $U \subset X$ vizinhança de x e todo $S > 0$, existe $t \geq S$ tal que $\varphi_t^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$. Definimos **conjunto não-errante** de φ como

$$\Omega_\varphi = \{x \in X; x \text{ é não-errante com respeito a } \varphi\}$$

Definição 2.3. Chamamos de conjunto **ω -limite** de um semifluxo φ em X , ou $\omega(\varphi)$, o conjunto dos pontos $q \in X$ para os quais existe algum $x \in X$ e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$, com $t_n \rightarrow \infty$, tais que $\varphi_x(t_n) \rightarrow q$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como já mencionamos, o conjunto não-errante desempenha um papel importante neste trabalho. Sendo assim, listamos algumas de suas propriedades no próximo lema.

Lema 2.4. Seja φ um semifluxo em X . Valem as seguintes afirmações:

1. Ω_φ é fechado;
2. $\omega(\varphi) \subset \Omega_\varphi$;
3. se X for compacto, então Ω_φ é não vazio e compacto;
4. se φ for contínuo, então Ω_φ é positivamente invariante.

Demonstração.

1. Se $x \in \overline{\Omega}_\varphi$, dados $U \subset X$ vizinhança de x e $S > 0$, existe $y \in \Omega_\varphi \cap U$. Como y é não-errante e U é vizinhança de y , existe $t \geq S$ tal que $\varphi_t^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$ e, portanto, $x \in \Omega_\varphi$.
2. Se $y \in \omega(x)$ para algum $x \in X$, existe sequência crescente $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+$, com $t_n \rightarrow \infty$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(x) = y$. Logo, dados $U \subset X$ vizinhança de y e $S > 0$, podemos tomar n_1 e n_2 em \mathbb{N} tais que $t_{n_2} - t_{n_1} \geq S$ e $\varphi_{t_{n_1}}(x), \varphi_{t_{n_2}}(x) \in U$, ou seja, $\varphi_{t_{n_1}}(x) \in \varphi_{t_{n_2}-t_{n_1}}^{-1}(U) \cap U$. Segue que $y \in \Omega_\varphi$.
3. O conjunto $\omega(\varphi)$ é não vazio se X for compacto. Isso ocorre, pois, dada uma sequência de pontos de uma órbita de φ , a compacidade de X implica que há subsequência convergindo para algum ponto de X . Decorre do item (2) que Ω_φ é não vazio. Além disso, se X for compacto, decorre do item (1) que Ω_φ é compacto.
4. Sejam $x \in \Omega_\varphi$ e $y = \varphi_t(x)$, onde $t > 0$. Considere $U \subset X$ vizinhança de y e $S > 0$. Pela continuidade de φ , $\varphi_t^{-1}(U)$ é vizinhança de x . Como $x \in \Omega_\varphi$, existe $s \geq S$ tal que $\varphi_s^{-1}(\varphi_t^{-1}(U)) \cap \varphi_t^{-1}(U) \neq \emptyset$. Logo

$$\begin{aligned} \emptyset \neq \varphi_t[\varphi_s^{-1}(\varphi_t^{-1}(U)) \cap \varphi_t^{-1}(U)] &\subset \varphi_t[\varphi_s^{-1}(\varphi_t^{-1}(U))] \cap \varphi_t[\varphi_t^{-1}(U)] \\ &\subset \varphi_s^{-1}[\varphi_t(\varphi_t^{-1}(U))] \cap U = \varphi_s^{-1}(U) \cap U. \end{aligned}$$

Segue que $y \in \Omega_\varphi$.

□

2.2 Probabilidade Invariantes

Nesta seção revisaremos alguns conceitos de Teoria da Medida necessários para abordar os resultados de [1]. Concluiremos a seção com a prova do conhecido Teorema de Bogoliouboff-Kryloff para semifluxos, resultado que usaremos no Capítulo 5 para demonstrar o Teorema I.

Começamos por lembrar que uma aplicação entre dois espaços de medida é dita **mensurável** se a pré-imagem de qualquer conjunto mensurável for mensurável. Em particular, se os espaços em questão forem topológicos munidos da σ -álgebra de Borel, a aplicação é mensurável se a pré-imagem de qualquer conjunto de Borel for um conjunto de Borel. Dizemos que uma aplicação invertível é **bimensurável** se tanto esta aplicação quanto sua inversa são mensuráveis.

Segue pelo Teorema de Tonelli-Cavalieri (veja [7, Capítulo 8, Seção 8.2, Teorema 8.2.1(a)]) que a mensurabilidade de um semifluxo $\varphi : X \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow X$ implica a mensurabilidade de φ_t para todo $t \geq 0$.

Definição 2.5. *Uma probabilidade μ definida na σ -álgebra de Borel de um espaço topológico X é dita **invariante** por um semifluxo φ em X (ou **φ -invariante**) se φ for mensurável e*

$$\mu(\varphi_t^{-1}(A)) = \mu(A)$$

para todo conjunto de Borel $A \subset X$ e todo $t \geq 0$. Denotamos por $\mathcal{M}(X)$ o conjunto de todas as probabilidades borelianas em X e por $\mathcal{M}_\varphi(X)$ o conjunto das probabilidades de $\mathcal{M}(X)$ invariantes por φ .

Como X é um espaço métrico compacto, $\mathcal{M}(X)$ é compacto na topologia fraca* por [19, Chapter 6, Section 6.1, Theorem 6.5].

Definição 2.6. Dada uma aplicação mensurável $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos, chamamos de **medida imagem** de f a aplicação

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{M}(X) &\rightarrow \mathcal{M}(Y) \\ \mu &\mapsto f_*\mu, \end{aligned}$$

onde $f_*\mu$ é definida por $f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ para todo boreliano $B \subset Y$.

Note que, dada $\mu \in \mathcal{M}(X)$, temos $\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X)$ se, e somente se, $(\varphi_t)_*\mu = \mu$ para todo $t \geq 0$.

Definição 2.7. Chamamos de **suporte** de uma medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$, ou $\text{Supp}(\mu)$, o conjunto de todos os pontos $x \in X$ tais que $\mu(U) > 0$ para todo $U \subset X$ vizinhança de x .

Definição 2.8. Sejam X um espaço de medida, $H : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade H -invariante em X . Dizemos que μ é **ergódica** se para todo $B \in \mathcal{X}$ mensurável tal que $H^{-1}(B) = B$, $\mu(B) \in \{0, 1\}$.

O seguinte resultado é bem conhecido para transformações contínuas em espaços métricos compactos. Para deixar esta apresentação mais completa, no caso de semifluxo contínuo apresentaremos a sua demonstração.

Teorema 2.9 (Bogoliouboff-Kryloff). *Se X é um espaço métrico compacto e φ um semifluxo contínuo em X , então existe alguma probabilidade em X invariante por φ .*

Demonstração. Como X é um espaço métrico compacto, pelo Teorema de Riesz-Markov (veja [14, Apêndice A, Seção A.3, Teorema A.3.13]) podemos definir medidas finitas em X por suas respectivas integrais de funções contínuas. Dados então $x \in X$ e $t > 0$ definimos $\mu_{t,x}$ por

$$\int f d\mu_{t,x} = \frac{1}{t} \int_0^t f(\varphi_\tau(x)) d\tau \quad \text{para todo } f \in C^0(X, \mathbb{R}).$$

Primeiramente, note que $\mu_{t,x}$ é uma probabilidade. De fato,

$$\mu_{t,x}(X) = \int 1 d\mu_{t,x} = \frac{1}{t} \int_0^t 1 d\tau = 1.$$

Em seguida, afirmamos que existe uma sequência $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, com $t_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, tal que o limite $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{t_k, x}$ existe e é uma probabilidade em X . Com efeito, pela compacidade de $\mathcal{M}(X)$ toda sequência neste conjunto possui alguma subsequência convergente para um elemento do mesmo. Mostraremos que μ é invariante por φ .

Uma medida $\nu \in \mathcal{M}(X)$ é invariante por uma transformação contínua F em X se, e somente se, $\int f \circ F d\nu = \int f d\nu$ para toda $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ (veja [19, Chapter 6, Section 6.2, Theorem 6.8]). Para provar que μ é invariante por φ , mostramos então que $|\int f \circ \varphi_t d\mu - \int f d\mu| = 0$ para toda $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ e todo $t > 0$. De fato, dados $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ e $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\left| \int f \circ \varphi_t d\mu - \int f d\mu \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int f \circ \varphi_t d\mu_{t_k, x} - \int f d\mu_{t_k, x} \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \left| \int_0^{t_k} f \circ \varphi_t(\varphi_\tau(x)) d\tau - \int_0^{t_k} f(\varphi_\tau(x)) d\tau \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \left| \int_0^{t_k} f(\varphi_{t+\tau}(x)) d\tau - \int_0^{t_k} f(\varphi_\tau(x)) d\tau \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \left| \int_t^{t_k+t} f(\varphi_\tau(x)) d\tau - \int_0^{t_k} f(\varphi_\tau(x)) d\tau \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \left| \int_0^{t_k+t} f(\varphi_\tau(x)) d\tau - \int_0^t f(\varphi_\tau(x)) d\tau - \int_0^{t_k} f(\varphi_\tau(x)) d\tau \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \left| \int_{t_k}^{t_k+t} f(\varphi_\tau(x)) d\tau - \int_0^t f(\varphi_\tau(x)) d\tau \right| \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \left(\left| \int_{t_k}^{t_k+t} f(\varphi_\tau(x)) d\tau \right| + \left| \int_0^t f(\varphi_\tau(x)) d\tau \right| \right) \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} (\|f\| \cdot t + \|f\| \cdot t) = 0.
\end{aligned}$$

Onde $\|f\| = \sup_{x \in X} |f|$. □

2.3 Sistemas Dinâmicos Impulsivos

O conceito de sistema dinâmico impulsivo, central neste trabalho, será introduzido nesta seção. Apresentaremos os ingredientes que, além de um semifluxo contínuo, são necessários para definir um sistema dinâmico impulsivo. São estes a função impulso, o conjunto, a trajetória e os tempos impulsivos, conceitos presentes na maior parte deste texto. Definido um sistema dinâmico impulsivo, provaremos que todo tal sistema induz um semifluxo, que chamaremos semifluxo impulsivo. Terminaremos a seção tratando da função τ_D .

Seja X um espaço métrico compacto. Dado um semifluxo contínuo $\varphi : X \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow X$, um conjunto fechado $D \subset X$ e uma função contínua $I : D \rightarrow X$, definimos a função **primeiro tempo impulsivo** $\tau_1 : X \rightarrow [0, \infty]$ por

$$\tau_1(x) = \begin{cases} \inf\{t > 0; \varphi_t(x) \in D\}, & \text{se } \varphi_t(x) \in D \text{ para algum } t > 0; \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Note que esta função corresponde ao tempo necessário para que a φ -trajetória de x atinja o conjunto D . Ressaltamos que neste trabalho, a hipótese de que $\tau_1(x) > 0$ inclui o caso $\tau_1(x) = \infty$.

Observe que dado $x \in X$, se $\tau_1(x) > 0$ o valor de τ_1 é decrescente ao longo da φ -trajetória de x até atingir D . Mais precisamente, para $t \in (0, \tau_1(x))$, $\tau_1(\varphi_t(x)) = \tau_1(x) - t$. Além disso, é bastante intuitivo que, se um ponto está fora de D , seja necessário um tempo positivo para sua trajetória alcançar este conjunto. Isso é o que provaremos a seguir.

Lema 2.10. *Se $x \notin D$, então $\tau_1(x) > 0$.*

Demonstração. Dado $x \in X$, se $\tau_1(x) = 0$ existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow 0$ tal que $\varphi_{t_n}(x) \in D$. Como D é fechado e $\varphi_{t_n}(x) \rightarrow \varphi_0(x) = x$ pela continuidade de φ , temos que $x \in D$. □

Outra propriedade importante da função impulso é sua semicontinuidade inferior em $X \setminus D$. Sua demonstração, devido a Ciesielski (veja [5, Theorem 3.5]), será feita a seguir.

Proposição 2.11. *A função τ_1 é semicontínua inferiormente no conjunto $X \setminus D$.*

Demonstração. Sejam $x \in X \setminus D$ e $\tau_1(x) = c$, $c > 0$. Por definição, τ_1 é semicontínua inferiormente se, e somente se, para toda sequência $y_n \rightarrow x$ com $\tau_1(y_n) \rightarrow t$, temos $t \geq c$. Suponhamos por absurdo que existe uma sequência $p_n \rightarrow x$ com $\tau_1(p_n) \rightarrow t < c$. Pela continuidade de φ , temos que $\varphi(p_n, \tau_1(p_n)) \rightarrow \varphi(x, t)$. Mas $\varphi(p_n, \tau_1(p_n)) \in D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $\varphi(x, t) \in D$ já que D é fechado. Segue da definição de τ_1 que $\tau_1(x) \leq t < c$. O que é uma contradição. \square

Suponhamos que $\tau_1(x) > 0$ para todo $x \in D$. Segue, pelo Lema 2.10, que $\tau_1(x) > 0$ para todo $x \in X$. Dado então $x \in X$ definimos sua **trajetória impulsiva** γ_x da seguinte maneira. Se $\tau_1(x) = \infty$, pomos $\gamma_x(t) = \varphi_t(x)$ para todo $t \geq 0$. Se $\tau_1(x) < \infty$ pomos

$$\gamma_x(t) = \varphi_t(x) \quad \text{para todo } t \in [0, \tau_1(x))$$

e

$$\gamma_x(\tau_1(x)) = I(\varphi_{\tau_1(x)}(x)).$$

Tomando $x_1 = I(\varphi_{\tau_1(x)}(x))$, se $\tau_1(x_1) = \infty$, pomos $\gamma_x(t) = \varphi_{t-\tau_1(x)}(x_1)$ para todo $t > \tau_1(x)$. Se $\tau_1(x_1) < \infty$, pomos

$$\gamma_x(t) = \varphi_{t-\tau_1(x)}(x_1) \quad \text{para todo } t \in (\tau_1(x), \tau_1(x) + \tau_1(x_1))$$

e

$$\gamma_x(\tau_1(x) + \tau_1(x_1)) = I(\varphi_{\tau_1(x_1)}(x_1)).$$

Tomando $x_2 = I(\varphi_{\tau_1(x_1)}(x_1))$, repetimos o processo acima a partir de x_2 e assim sucessivamente.

Pondo $x_0 = x$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função **n -ésimo tempo impulsivo** $\tau_n: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ por

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_1(x_k).$$

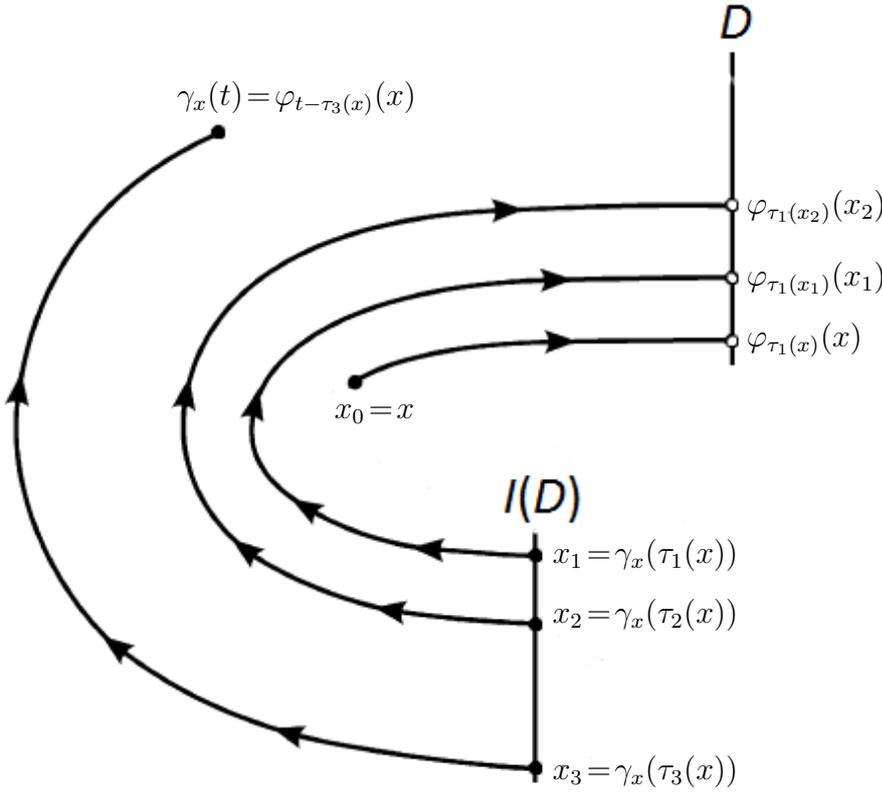
Esta corresponde ao tempo necessário para que a trajetória impulsiva de x atinja o conjunto D pela n -ésima vez. Ressaltamos que para $n = 1$ ela coincide com a função primeiro tempo impulsivo definida anteriormente. Como por hipótese τ_1 é estritamente positiva em X , segue que a sequência dos tempos impulsivos $(\tau_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente.

Por fim, definimos o **comprimento temporal** da trajetória de $x \in X$ como

$$T(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n(x)\}.$$

Ressaltamos o seguinte fato que segue imediatamente dessa definição:

Observação 2.12. Dado $x \in X$ e $t \in [0, T(x))$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_{n-1}(x) \leq t < \tau_n(x)$.

Figura 2¹ – trajetória impulsiva

Podemos agora concluir a definição de trajetória impulsiva γ_x , sendo esta a aplicação $\gamma_x : [0, T(x)) \rightarrow X$ que satisfaz a construção acima. Isto é, dado $t \in [0, T(x))$, se $t \in [\tau_n(x), \tau_{n+1}(x))$

$$\gamma_x(t) = \begin{cases} \varphi(x_n, t - \tau_n(x)), & \text{se } \tau_n(x) \leq t < \tau_{n+1}(x); \\ x_{n+1}, & \text{se } t = \tau_{n+1}(x). \end{cases}$$

Em geral, dado $x \in X$, é possível ter tanto $T(x) = \infty$ quanto $T(x) < \infty$. Neste trabalho, estudaremos apenas o primeiro caso, que implica que as trajetórias impulsivas dos pontos de X estão definidas para todo $t \geq 0$. Observamos que a hipótese de que o comprimento temporal é infinito para todos os pontos de X é razoável, visto que ela é garantida, por exemplo, se a condição $I(D) \cap D = \emptyset$ for satisfeita, como provaremos a seguir.

Lema 2.13. *Se $I(D) \cap D = \emptyset$, então $T(x) = \infty$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Supondo que $I(D) \cap D = \emptyset$, deve haver algum $\alpha > 0$ tal que $\tau_1(x) > \alpha$ para todo $x \in I(D)$. Caso contrário, haveria uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I(D)$ tal que $\tau_1(x_n) \rightarrow 0$. Mas, pela compacidade de D e continuidade de I , $I(D)$ é compacto, logo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possuiria uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo para $x_0 \in I(D)$. Como, pela Proposição 2.11, τ_1 é semicontínua inferiormente em $X \setminus D$ e por hipótese $I(D) \subset X \setminus D$, teríamos $\liminf_{k \rightarrow \infty} \tau_1(x_{n_k}) \geq \tau_1(x_0)$. Logo $\tau_1(x_0) = 0$, o que é uma contradição já que $\tau_1(x) > 0$ para todo $x \in X \setminus D$. Segue que $T(x) = \infty$ para todo $x \in X$. \square

¹ Adaptada de [3]

Podemos finalmente definir um sistema dinâmico impulsivo.

Definição 2.14. *Sejam X um espaço métrico compacto, φ um semifluxo contínuo em X , $D \subset X$ fechado, $I : D \rightarrow X$ contínua e $\tau_1 : X \rightarrow [0, \infty]$ definida pela equação (2.1). Dizemos que (X, φ, D, I) é um **sistema dinâmico impulsivo** se*

$$\tau_1(x) > 0 \text{ para todo } x \in D \text{ e } T(x) = \infty \text{ para todo } x \in X.$$

Chamamos D o **conjunto impulsivo** e I a **função impulso** do sistema.

Vale ressaltar que a hipótese de que o espaço X é compacto não é necessária para definir um sistema dinâmico impulsivo. No entanto, ela foi aqui acrescentada para garantir, pelo Lema 2.4, que o conjunto não-errante de qualquer semifluxo em X seja não vazio.

Observe também que a hipótese de que τ_1 não se anula no conjunto impulsivo implica que este não pode conter pontos fixos por φ e que a φ -trajetória de qualquer ponto em D não pode nele permanecer durante um intervalo de tempo $(0, \delta)$, para qualquer $\delta > 0$, pois em ambos casos teríamos τ_1 nulo. A hipótese implica também que D tem interior vazio. De fato, dado $x \in D$ e $U \subset X$ vizinhança de x , podemos tomar $t > 0$ tão pequeno que $t < \tau_1(x)$ e que, pela continuidade de φ , $\varphi_t(x) \in U$. Da desigualdade segue que $\varphi_t(x) \notin D$. Logo $U \not\subset D$.

O seguinte resultado, devido a Bonotto (veja [3, Proposition 2.1]), nos permitirá, sempre que for dado um sistema dinâmico impulsivo, falar em seu semifluxo impulsivo.

Proposição 2.15. *Todo sistema dinâmico impulsivo (X, φ, D, I) induz um semifluxo, sendo este definido por*

$$\begin{aligned} \psi : X \times \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow X \\ (x, t) &\mapsto \gamma_x(t), \end{aligned}$$

onde γ_x é a trajetória impulsiva determinada por (X, φ, D, I) .

Demonstração. Dados $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}_0^+$ ponhamos $t_n = \tau_n(x)$ e $x_n = \gamma_x(t_n)$ para $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Seja $\psi : X \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow X$ definida por $\psi(x, t) = \gamma_x(t)$. Logo, para $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \varphi(x_n, t - t_n), & \text{se } t_n \leq t < t_{n+1}; \\ x_{n+1}, & \text{se } t = t_{n+1}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Note que $\psi(x, 0) = \varphi(x, 0) = x$. Nos resta agora provar que, dado $s > 0$, tem-se $\psi(\psi(x, t), s) = \psi(x, t + s)$.

Afirmamos que $\tau_1(\varphi(x_n, t - t_n)) = t_{n+1} - t$. De fato,

$$\varphi(\varphi(x_n, t - t_n), t_{n+1} - t) = \varphi(x_n, t_{n+1} - t_n) = \varphi(\varphi(x, t_n), t_{n+1} - t_n) = \varphi(x, t_{n+1}) \in D.$$

Além disso, para $0 < \lambda < t_{n+1} - t$, temos $t_n \leq t < \lambda + t < t_{n+1}$, logo

$$\varphi(\varphi(x_n, t - t_n), \lambda) = \varphi(x_n, t + \lambda - t_n) = \psi(x, \lambda + t) \notin D.$$

O que prova a afirmação.

Se $0 \leq s < t_{n+1} - t$, segue que $\psi(\varphi(x_n, t - t_n), s) = \varphi(\varphi(x_n, t - t_n), s)$. Logo,

$$\psi(\psi(x, t), s) = \psi(\varphi(x_n, t - t_n), s) = \varphi(\varphi(x_n, t - t_n), s) = \varphi(x_n, t + s - t_n) = \psi(x, t + s).$$

Se por outro lado $s \geq t_{n+1} - t$, ou seja, $t + s \geq t_{n+1}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_{n+k} \leq t + s < t_{n+k+1}$. Logo

$$\psi(x, t + s) = \varphi(x_{n+k}, t + s - t_{n+k}).$$

Tomando $y = \varphi(x_n, t - t_n)$ e pondo

$$y_0 = y, \quad y_1 = \psi(y, \tau_1(y)), \quad y_2 = \psi(y, \tau_2(y)), \quad \dots, \quad y_k = \psi(y, \tau_k(y)),$$

segue que $y_1 = x_{n+1}$, $y_2 = x_{n+2}$, \dots , $y_k = x_{n+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como já foi provado,

$\tau_1(y) = t_{n+1} - t$. Pondo agora $\tau_1(y) = m_1$ e $m_k = \sum_{i=0}^{k-1} \tau_1(y_i)$, temos que

$$m_{j+1} - m_j = \sum_{i=0}^j \tau_1(y_i) - \sum_{i=0}^{j-1} \tau_1(y_i) = \tau_1(y_j) = \tau_1(x_{n+j}) = t_{n+j+1} - t_{n+j}.$$

Como $t_{n+k} \leq t + s < t_{n+k+1}$, temos que $t_{n+k} - t \leq s < t_{n+k+1} - t$. Mas

$$t_{n+k} - t = \sum_{i=2}^k (t_{n+i} - t_{n+i-1}) + (t_{n+1} - t) = \sum_{i=2}^k (m_i - m_{i-1}) + m_1 = m_k$$

e

$$t_{n+k+1} - t = \sum_{i=2}^{k+1} (t_{n+i} - t_{n+i-1}) + (t_{n+1} - t) = \sum_{i=2}^{k+1} (m_i - m_{i-1}) + m_1 = m_{k+1}.$$

Logo $m_k \leq s < m_{k+1}$ e portanto $\psi(y, s) = \varphi(y_k, s - m_k)$. Como

$$\begin{aligned} s - m_k &= s - (m_k - m_1) - m_1 = s - \sum_{i=2}^k (m_i - m_{i-1}) - m_1 = s - \sum_{i=2}^k (t_{n+i} - t_{n+i-1}) - m_1 \\ &= s - (t_{n+k} - t_{n+1}) - m_1 = s - (t_{n+k} - t_{n+1}) - (t_{n+1} - t) = t + s - t_{n+k}, \end{aligned}$$

temos então que $\varphi(y_k, s - m_k) = \varphi(y_k, t + s - t_{n+k})$. Além disso, $y = \varphi(x_n, t - t_n)$, logo

$$\begin{aligned} \psi(\psi(x, t), s) &= \psi(\varphi(x_n, t - t_n), s) = \psi(y, s) = \varphi(y_k, s - m_k) \\ &= \varphi(x_{n+k}, s + t - t_{n+k}) = \psi(x, t + s). \end{aligned}$$

□

Ao semifluxo ψ definido na Proposição 2.15 chamamos de **semifluxo impulsivo**. O mesmo é o objeto principal de estudo desta dissertação. Ressaltamos que este em geral não é contínuo. Mais precisamente, fixado $x \in X$ a transformação $\psi^x(t) = \psi(x, t)$ é contínua exceto possivelmente nos tempos impulsivos, uma vez que entre dois tais tempos consecutivos as ψ -trajetórias coincidem com alguma φ -trajetória. Se t for tempo impulsivo no entanto, digamos $t = \tau_n(x)$, temos que

$$\psi^x(t - \varepsilon) = \psi^x(\tau_n(x) - \varepsilon) = \varphi(x_{n-1}, \tau_n(x) - \varepsilon - \tau_{n-1}(x)) \rightarrow \varphi(x_{n-1}, \tau_n(x) - \tau_{n-1}(x))$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Mas $\psi^x(t) = \psi^x(\tau_n(x)) = I(\varphi(x_{n-1}, \tau_n(x) - \tau_{n-1}(x)))$. Logo ψ é contínua com respeito à variável temporal somente quando $I = \text{Id}_X$. O que é esperado, já que neste caso $\psi = \varphi$.

Concluimos esta seção definindo a função $\tau_D : \Omega_\psi \rightarrow [0, \infty]$, dada por

$$\tau_D(x) = \begin{cases} \tau_1(x), & \text{se } x \in \Omega_\psi \setminus D; \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_\psi \cap D. \end{cases}$$

Note que a continuidade de τ_D , hipótese sob a qual trabalharemos inúmeras vezes, implica que nenhuma φ -trajetória contida em Ω_ψ atravessa D . Mais precisamente, dado $x \in \Omega_\psi \cap D$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi_t(x) \notin \Omega_\psi$ para $t < \varepsilon$, o que provaremos agora.

Lema 2.16. *Se τ_D for contínua, então para cada $x \in \Omega_\psi \cap D$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi_t(x) \notin \Omega_\psi$ para todo $t \in (0, \varepsilon)$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que, para algum $x \in \Omega_\psi \cap D$, não existe tal ε .

Se $\tau_1(x) = \infty$, então $\tau_1(\varphi_t(x)) = \infty$ para todo $t > 0$. Logo

$$\tau_D(\varphi_t(x)) = \tau_1(\varphi_t(x)) \rightarrow \infty$$

quando $t \rightarrow 0$, enquanto $\tau_D(\varphi_0(x)) = \tau_D(x) = 0$. O que é uma contradição com a continuidade de τ_D .

Seja agora $\tau_1(x) < \infty$. Para todo $\delta > 0$, podemos tomar $t > 0$ tal que $\varphi_t(x) \in \Omega_\psi$ e, pela continuidade de τ_D e de φ , tal que $\tau_D(\varphi_t(x)) + t < \delta$. Como τ_1 é estritamente positiva, podemos então tomar $t > 0$ tal que $\varphi_t(x) \in \Omega_\psi$ e $\tau_D(\varphi_t(x)) + t < \tau_1(x)$. Logo $\varphi_t(x) \in \Omega_\psi \setminus D$ e, portanto, $\tau_D(\varphi_t(x)) = \tau_1(\varphi_t(x))$. Segue que $\tau_1(\varphi_t(x)) < \tau_1(x) - t = \tau_1(\varphi_t(x))$. O que é uma contradição. \square

Voltaremos a tratar de τ_D no Capítulo 4, onde supondo-a contínua provaremos resultados que nos auxiliarão a demonstrar os principais teoremas deste trabalho.

3 Dinâmica no Conjunto Não-Errante

Provamos na Seção 2.1 que o conjunto não-errante de um semifluxo é positivamente invariante desde que o último seja contínuo. Essa propriedade, porém, pode ser perdida na ausência da continuidade. O Teorema II, que provaremos neste capítulo, garante, mesmo não sendo contínuo o semifluxo impulsivo ψ , a invariância positiva de $\Omega_\psi \setminus D$ desde que $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$. Iniciamos por demonstrar dois resultados a respeito de conjuntos não-errantes que além de seu interesse intrínseco serão ferramentas importantes para a prova dos teoremas principais. O primeiro afirma que o suporte de uma medida invariante por um semifluxo está necessariamente contido em seu conjunto não-errante. O segundo afirma que, satisfeitas as hipóteses do Teorema I, a φ -trajetória de qualquer ponto em $\Omega_\psi \setminus D$ permanece em Ω_ψ até seu primeiro tempo impulsivo. Como corolário do Teorema II, provaremos ao final deste capítulo a existência de uma probabilidade invariante pelo semifluxo impulsivo em seu conjunto não-errante sob a hipótese de que $\Omega_\psi \cap D = \emptyset$.

Lema 3.1. *O suporte de uma probabilidade invariante por um semifluxo está contido em seu conjunto não-errante.*

Demonstração. Sejam ϕ um semifluxo em X , Ω_ϕ o seu conjunto não-errante e μ uma probabilidade invariante por ϕ .

Caso $\Omega_\phi = X$, a afirmação segue imediatamente.

Caso $\Omega_\phi \neq X$, seja $x \in X \setminus \Omega_\phi$. Pela definição de conjunto não-errante, existe $V \subset X$ vizinhança de x e $S > 0$ tais que

$$\phi_t^{-1}(V) \cap V = \emptyset, \quad \text{para todo } t \geq S. \quad (3.1)$$

Afirmamos que, para quaisquer dois números naturais m e n com $m > n$, temos

$$\phi_{nS}^{-1}(V) \cap \phi_{mS}^{-1}(V) = \emptyset. \quad (3.2)$$

De fato, se $z \in \phi_{nS}^{-1}(V) \cap \phi_{mS}^{-1}(V)$, então $\phi_{nS}(z) \in V$ e $\phi_{(m-n)S}(\phi_{nS}(z)) = \phi_{mS}(z) \in V$. Logo $\phi_{(m-n)S}^{-1}(V) \cap V \neq \emptyset$, o que é uma contradição com a equação (3.1), pois $m > n$ e portanto $(m-n)S > S$.

Provemos agora que $\mu(V) = 0$ e, portanto, que $x \notin \text{Supp}(\mu)$. Note que, se $\mu(V) > 0$, pela invariância de μ

$$\mu(\phi_{nS}^{-1}(V)) = \mu(V) > 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pela equação (3.2) segue que

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_{nS}^{-1}(V)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\phi_{nS}^{-1}(V)) = \infty,$$

o que é uma contradição, pois μ é uma probabilidade. □

Lema 3.2. *Seja ψ o semifluxo impulsivo de um sistema dinâmico impulsivo (X, φ, D, I) . Então $\varphi_t(x) \in \Omega_\psi$ para todo $x \in \Omega_\psi \setminus D$ e todo $0 \leq t \leq \tau_1(x)$.*

Demonstração. Seja $x \in \Omega_\psi \setminus D$. Pela continuidade de φ e por Ω_ψ ser fechado, basta provar que $\varphi_t(x) \in \Omega_\psi$ para todo $0 < t < \tau_1(x)$. Tomemos então $t \in (0, \tau_1(x))$ e seja $U \subset X$ uma vizinhança de $\varphi_t(x)$. Provemos que, dado $S > 0$, existe $s \geq S$ tal que $\psi_s^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$.

Como φ_t é contínua, $V = \varphi_t^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x . Pela semicontinuidade inferior de $\tau_1|_{X \setminus D}$ garantida pela Proposição 2.11, podemos tomar $W \subset X \setminus D$ vizinhança de x tal que $\tau_1(y)$ seja arbitrariamente próximo ou maior que $\tau_1(x)$, para todo $y \in W$. Por ser $\tau_1(x) > t$, podemos então escolher W tal que $\tau_1(y) > t$ para todo $y \in W$. Segue que $\psi_s(y) = \varphi_s(y)$ para todo $y \in W$ e todo $s \leq t$. Logo $\psi_t(V \cap W) = \varphi_t(V \cap W)$. Como $x \in \Omega_\psi$ e $V \cap W$ é uma vizinhança de x , dado $S > 0$, existe $s \geq S$ tal que $\psi_s^{-1}(V \cap W) \cap (V \cap W) \neq \emptyset$. Logo

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq \psi_t(\psi_s^{-1}(V \cap W) \cap V \cap W) \\ &\subset \psi_t(\psi_s^{-1}(V \cap W)) \cap \psi_t(V \cap W) \\ &\subset \psi_s^{-1}(\psi_t(V \cap W)) \cap \psi_t(V \cap W) \\ &= \psi_s^{-1}(\varphi_t(V \cap W)) \cap \varphi_t(V \cap W) \\ &\subset \psi_s^{-1}(U) \cap U. \end{aligned}$$

O que implica que $\varphi_t(x) \in \Omega_\psi$. □

Estamos aptos agora a provar o segundo resultado principal desta dissertação:

Teorema II. *Seja ψ o semifluxo induzido por um sistema dinâmico impulsivo (X, φ, D, I) . Se $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, então $\psi_t(\Omega_\psi \setminus D) \subset \Omega_\psi \setminus D$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Seja $x \in \Omega_\psi \setminus D$. Para todo $t \in [0, \tau_1(x))$, $\varphi_t(x) \notin D$ pela definição de τ_1 e $\varphi_t(x) \in \Omega_\psi$ pelo Lema 3.2. Segue que $\psi_t(x) = \varphi_t(x) \in \Omega_\psi \setminus D$ para todo $t \in [0, \tau_1(x))$.

Se $\tau_1(x) = \infty$, temos que $\psi_t(x) \in \Omega_\psi \setminus D$ para todo $t \geq 0$ e a prova está concluída.

Se por outro lado $\tau_1(x) < \infty$, ainda pelo Lema 3.2, $\varphi_{\tau_1(x)}(x) \in \Omega_\psi$ e, pela definição de τ_1 , segue que $\varphi_{\tau_1(x)}(x) \in \Omega_\psi \cap D$. Como por hipótese $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, temos

$$\psi_{\tau_1(x)}(x) = I(\varphi_{\tau_1(x)}(x)) \in I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D.$$

Logo $\psi_t(x) \in \Omega_\psi \setminus D$ para todo $t \in [0, \tau_1(x)]$.

Como $\psi_{\tau_1(x)}(x) \in \Omega_\psi \setminus D$, usando o mesmo argumento temos que $\psi_t(\psi_{\tau_1(x)}(x)) \in \Omega_\psi \setminus D$ para todo $t \geq 0$ se $\tau_1(\psi_{\tau_1(x)}(x)) = \infty$ e para todo $t \in [0, \tau_1(\psi_{\tau_1(x)}(x))]$ se $\tau_1(\psi_{\tau_1(x)}(x)) < \infty$. Procedendo então indutivamente, concluímos que $\psi_t(x) \in \Omega_\psi \setminus D$ para todo $t \geq 0$. □

Corolário III. *Seja ψ o semifluxo induzido por um sistema dinâmico impulsivo (X, φ, D, I) . Se $\Omega_\psi \cap D = \emptyset$, então ψ possui alguma medida de probabilidade invariante em Ω_ψ .*

Demonstração. Se $\Omega_\psi \cap D = \emptyset$, então $\Omega_\psi \setminus D = \Omega_\psi$ e $I(\Omega_\psi \cap D) = \emptyset \subset \Omega_\psi \setminus D$. Segue, pelo Teorema II, que $\psi_t(\Omega_\psi) = \psi_t(\Omega_\psi \setminus D) \subset \Omega_\psi \setminus D = \Omega_\psi$ para todo $t \geq 0$. Se d é uma métrica em X , como Ω_ψ e D são compactos disjuntos, $d(\Omega_\psi, D) > 0$. Logo todas as ψ -trajetórias de Ω_ψ estão afastadas de D e, portanto, $\psi = \varphi$ em Ω_ψ . Segue que ψ é um semifluxo contínuo no compacto Ω_ψ e, pelo Teorema 2.9, possui medida invariante. □

Note que o Corolário III já garante a existência de probabilidades invariantes pelo semifluxo impulsivo, o que é o principal objetivo deste trabalho. No entanto, o Teorema I garante a mesma existência sob hipóteses mais naturais que $\Omega_\psi \cap D = \emptyset$, como provaremos no Capítulo 5.

4 Dinâmica no Espaço Quociente

Neste capítulo daremos passos importantes na direção de provar a existência de probabilidades invariantes por semifluxos impulsivos. Como um semifluxo impulsivo ψ não é contínuo em X , não podemos usar o Teorema 2.9. Sendo assim, lançaremos mão da seguinte estratégia: definindo uma relação de equivalência em X e denotando por π a projeção de X sobre o espaço das classes de equivalência, vamos exibir, sob as hipóteses do Teorema I, uma certa semiconjugação entre o sistema impulsivo e um semifluxo contínuo $\tilde{\psi}$ no espaço quociente $\pi(\Omega_\psi)$. A partir dela construiremos uma bijeção entre o espaço das medidas invariantes por ψ em X e o das medidas invariantes por $\tilde{\psi}$ em $\pi(\Omega_\psi)$. Mostraremos que $\pi(\Omega_\psi)$ é um espaço métrico compacto, logo $\mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\pi(\Omega_\psi)) \neq \emptyset$ pelo Teorema 2.9. Como existe bijeção entre $\mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\pi(\Omega_\psi))$ e $\mathcal{M}_\psi(X)$, concluiremos que o último tampouco é vazio. A primeira parte dessa estratégia se consolida no próximo teorema. Recordamos do Capítulo 2 que a função τ_D definida em Ω_ψ é igual a zero em D e coincide com τ_1 nos demais pontos. Indicaremos por $i : \Omega_\psi \setminus D \rightarrow X$ a aplicação de inclusão.

Teorema IV. *Seja ψ o semifluxo induzido por um sistema dinâmico impulsivo (X, φ, D, I) . Se τ_D é contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, então existe um espaço métrico compacto \tilde{X} , um semifluxo contínuo $\tilde{\psi}$ em \tilde{X} e uma aplicação $h : \Omega_\psi \setminus D \rightarrow \tilde{X}$ contínua invertível e bimensurável tal que*

$$\tilde{\psi}_t \circ h = h \circ \psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D}$$

pra todo $t \geq 0$. Além disso, temos que $(i \circ h^{-1})_* : \mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{M}_\psi(X)$ é uma bijeção.

Sua demonstração, no entanto, será deixada para o Capítulo 5, onde antes será provada a mesnurabilidade de ψ e a existência da bijeção entre $\mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\pi(\Omega_\psi))$ e $\mathcal{M}_\psi(X)$. Unidos do Teorema IV, poderemos finalmente provar o Teorema I.

Nossos principais objetivos neste capítulo são provar que $\pi(\Omega_\psi)$ é um espaço métrico compacto e provar que, satisfeitas as hipóteses do Teorema I, $\pi|_{\Omega_\psi \setminus D}$ é uma bijeção contínua bimensurável sobre $\pi(\Omega_\psi)$ e existe nesse espaço um semifluxo contínuo $\tilde{\psi}$ tal que $\tilde{\psi}_t$ e $\psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D}$ são semiconjugados por essa bijeção para todo $t \geq 0$.

Começaremos por definir alguns conceitos relacionados a topologia quociente.

Definição 4.1. *Sejam A e B espaços topológicos e $p : A \rightarrow B$ uma aplicação sobrejetiva. A aplicação p é chamada **aplicação quociente** quando $U \subset B$ é aberto em B se e somente se $p^{-1}(U)$ é aberto em A . Em particular, toda aplicação quociente é contínua.*

Definição 4.2. *Sejam A um espaço topológico, B um conjunto e $p : A \rightarrow B$ uma aplicação sobrejetiva. Chamamos de **topologia quociente** induzida por p a única topologia em B para a qual p é uma aplicação quociente.*

Definição 4.3. *Sejam A um espaço topológico, A^* uma partição de A e $p : A \rightarrow A^*$ uma aplicação sobrejetiva que leva cada ponto de A no elemento de A^* que o contém. Chamamos de **espaço quociente** de A o espaço A^* munido da topologia quociente induzida por p .*

Dado um sistema dinâmico impulsivo (X, φ, D, I) , seja \sim a relação de equivalência dada por

$$x \sim y \iff x = y, \quad y = I(x), \quad x = I(y) \quad \text{ou} \quad I(x) = I(y).$$

Usaremos \tilde{x} para denotar a classe de equivalência de $x \in X$.

Seja X/\sim o conjunto das classes de equivalência de \sim em X . A aplicação $\pi : X \rightarrow X/\sim$ que associa a cada elemento $x \in X$ sua classe de equivalência $\tilde{x} \in X/\sim$ é sobrejetiva, logo induz uma topologia quociente em X/\sim . Como o mesmo conjunto é partição de X , X/\sim com esta topologia é espaço quociente de X . Vale ressaltar que para esta topologia π é aplicação quociente.

Estaremos particularmente interessados no espaço quociente $\pi(\Omega_\psi) \subset X/\sim$. Para provar que o mesmo com a topologia quociente é métrico, exibiremos uma métrica nele e mostraremos que esta gera a topologia quociente. Precisaremos do seguinte resultado:

Lema 4.4. *As classes de equivalência de \sim são compactas em X .*

Demonstração. Dado $x \in X$, note que

$$\tilde{x} = \begin{cases} \{x, I(x)\} \cup I^{-1}(\{x\}) \cup I^{-1}(\{I(x)\}), & \text{se } x \in D; \\ \{x\} \cup I^{-1}(\{x\}), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como X é um espaço métrico, todo conjunto unitário é fechado. Pela continuidade de I , temos então que $I^{-1}(\{x\})$ e $I^{-1}(\{I(x)\})$ são fechados. Logo \tilde{x} é uma união finita de conjuntos fechados e portanto é um conjunto fechado em X . Segue pela compacidade de X que \tilde{x} é compacto. Observe que as classes são compactas também em Ω_ψ pela compacidade do não-errante. \square

Seja d métrica em Ω_ψ . Definimos então a seguinte função em $\pi(\Omega_\psi) \times \pi(\Omega_\psi)$:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf\{d(x', y'); \quad x' \in \tilde{x}, \quad y' \in \tilde{y}\},$$

para $\tilde{x}, \tilde{y} \in \pi(\Omega_\psi)$. Veremos nos próximos dois lemas que essa função é uma métrica em $\pi(\Omega_\psi)$ e gera a topologia quociente neste espaço. Seguirá imediatamente que $\pi(\Omega_\psi)$ é espaço métrico compacto.

Lema 4.5. *A função \tilde{d} é uma métrica em $\pi(\Omega_\psi)$.*

Demonstração. Mostraremos que $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$ para $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ e que \tilde{d} satisfaz a desigualdade triangular. As demais condições para ser métrica são de verificação imediata.

Dados $\tilde{x}, \tilde{y} \in \pi(\Omega_\psi)$, com $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, temos que $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{x}, \tilde{y})$. Mas \tilde{x} e \tilde{y} são compactos em Ω_ψ pelo Lema 4.4 e disjuntos por serem classes de equivalência distintas. Logo $d(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$.

Sejam agora $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \pi(\Omega_\psi)$. Como d é métrica em Ω_ψ ,

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{z}) &= \inf\{d(x', z'); \quad x' \in \tilde{x}, \quad z' \in \tilde{z}\} \\ &\leq \inf\{d(x', y') + d(y', z'); \quad x' \in \tilde{x}, \quad y' \in \tilde{y}, \quad z' \in \tilde{z}\} \\ &= \inf\{d(x', y'); \quad x' \in \tilde{x}, \quad y' \in \tilde{y}\} + \inf\{d(y', z'); \quad y' \in \tilde{y}, \quad z' \in \tilde{z}\} \\ &= \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{z}). \end{aligned}$$

Logo \tilde{d} é uma métrica. \square

Lema 4.6. *A métrica \tilde{d} gera a topologia quociente em $\pi(\Omega_\psi)$.*

Demonstração. Mostraremos que a coleção de bolas $B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \delta)$, com $\tilde{x} \in \pi(\Omega_\psi)$ e $\delta > 0$ é uma base para a topologia quociente em $\pi(\Omega_\psi)$. Para isso, primeiro vamos provar que tais bolas são abertas na topologia quociente, ou seja, dada $B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \delta)$ sua pré-imagem por π é aberta em Ω_ψ . Seja então $y \in \pi^{-1}(B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \delta))$. Temos que $d(\tilde{y}, \tilde{x}) = \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{x}) < \delta$. Logo existem $y_0 \in \tilde{y}$ e $x_0 \in \tilde{x}$ tais que $d(y_0, x_0) = \delta - \varepsilon$, onde $0 < \varepsilon < \delta$.

Afirmamos que $B_d(y, \varepsilon) \subset \pi^{-1}(B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \delta))$. Com efeito, se $z \in B_d(y, \varepsilon)$ então

$$\tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{x}) \leq \tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{y}) + \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{x}) = d(\tilde{z}, \tilde{y}) + d(\tilde{y}, \tilde{x}) \leq d(z, y) + d(y_0, x_0) < \varepsilon + (\delta - \varepsilon) = \delta,$$

ou seja, $\pi(z) = \tilde{z} \in B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \delta)$. Logo $z \in \pi^{-1}(B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \delta))$, o que prova a afirmação. Segue que $\pi^{-1}(B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \delta))$ é aberto em Ω_ψ e por conseguinte que $B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \delta)$ é aberta na topologia quociente.

Dado $U \subset \pi(\Omega_\psi)$ aberto na topologia quociente e $\tilde{x} \in U$, mostraremos agora que existe uma bola $B_{\tilde{d}}$ tal que $\tilde{x} \in B_{\tilde{d}} \subset U$. Como π é uma aplicação quociente, $\pi^{-1}(U)$ é aberto e portanto $\Omega_\psi \setminus \pi^{-1}(U)$ é fechado em Ω_ψ . Logo, por a classe \tilde{x} ser compacta em Ω_ψ , existe $\lambda > 0$ tal que $d(\tilde{x}, \Omega_\psi \setminus \pi^{-1}(U)) = \lambda$. Segue que

$$\bigcup_{x' \in \tilde{x}} B_d(x', \lambda/2) \subset \pi^{-1}(U).$$

Afirmamos que $B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \lambda/2) \subset U$. Com efeito, dado $\tilde{y} \in B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \lambda/2)$, temos que $d(\tilde{y}, \tilde{x}) = \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{x}) < \lambda/2$ e portanto existem $y_0 \in \tilde{y}$ e $x_0 \in \tilde{x}$ tais que $d(y_0, x_0) < \lambda/2$. Segue que

$$y_0 \in \bigcup_{x' \in \tilde{x}} B_d(x', \lambda/2) \subset \pi^{-1}(U).$$

Logo

$$\tilde{y} = \pi(y_0) \in \pi(\pi^{-1}(U)) = U.$$

Concluimos que $B_{\tilde{d}}(\tilde{x}, \lambda/2) \subset U$. Isso termina a demonstração. \square

Lema 4.7. *O conjunto $\pi(\Omega_\psi)$ munido da topologia quociente é um espaço métrico compacto.*

Demonstração. A compacidade de $\pi(\Omega_\psi)$ segue da compacidade de Ω_ψ e da continuidade de π . Pelo Lema 4.6, a topologia quociente é uma topologia métrica. \square

Alcançado nosso primeiro objetivo, queremos agora provar, quando satisfeitas as hipóteses do Teorema I, a existência de um semifluxo contínuo $\tilde{\psi}$ em $\pi(\Omega_\psi)$ tal que $\tilde{\psi}_t$ e $\psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D}$ sejam semiconjugados por $\pi|_{\Omega_\psi \setminus D}$ para todo $t \geq 0$. Nosso candidato é a aplicação $(\tilde{x}, t) \mapsto \pi(\psi(x, t))$ com $x \in \Omega_\psi \setminus D$, ou seja, a projeção sobre o espaço quociente do semifluxo impulsivo restrito a $\Omega_\psi \setminus D$. Os próximos lemas nos auxiliarão a provar que esta aplicação é de fato um semifluxo contínuo em $\pi(\Omega_\psi)$. Para isso, definimos a transformação **n-ésimo impulso** $I_n : X \rightarrow X$ dada por $I_n(x) = \psi_{\tau_n(x)}(x)$, ou na notação usada na Seção 2.3, $I_n(x) = x_n$, e pomos $I_0 = \text{Id}_X$.

Lema 4.8. *Se τ_D é contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ a aplicação I_n é contínua em $\Omega_\psi \setminus D$.*

Demonstração. Dado $x \in \Omega_\psi \setminus D$, como $\Omega_\psi \setminus D$ é aberto, existe uma vizinhança de x contida em $\Omega_\psi \setminus D$ onde, portanto, τ_D coincide com τ_1 . Logo, se $y \rightarrow x$, pela continuidade de τ_D , $\tau_D(y) \rightarrow \tau_D(x)$ e portanto $\tau_1(y) \rightarrow \tau_1(x)$. Logo, quando $y \rightarrow x$, temos pela continuidade de φ que $\varphi(y, \tau_1(y)) \rightarrow \varphi(x, \tau_1(x))$ e pela continuidade de I que $I(\varphi(y, \tau_1(y))) \rightarrow I(\varphi(x, \tau_1(x)))$. Está portanto provada a continuidade do primeiro impulso I_1 .

Provemos agora para os sucessivos impulsos. Afirmamos que $I_1(x) \in \Omega_\psi \setminus D$. De fato, como $x \in \Omega_\psi \setminus D$, $\varphi(x, \tau_1(x)) \in \Omega_\psi$ pelo Lema 3.2 e $\varphi(x, \tau_1(x)) \in D$ pela definição de τ_1 . Logo $I_1(x) = I(\varphi(x, \tau_1(x))) \in I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$. Pela continuidade de I_1 , para y suficientemente próximo de x também temos $I_1(y) \in \Omega_\psi \setminus D$. Logo, se $y \rightarrow x$, pela continuidade de τ_D , que coincide com τ_1 em $\Omega_\psi \setminus D$, $\tau_1(I_1(y)) \rightarrow \tau_1(I_1(x))$. Pelas continuidades de φ e I , $I(\varphi(I_1(y), \tau_1(I_1(y)))) \rightarrow I(\varphi(I_1(x), \tau_1(I_1(x))))$, ou seja, $I_2(y) \rightarrow I_2(x)$.

Note que novamente temos que $I_2(x) \in \Omega_\psi \setminus D$ e $I_2(y) \in \Omega_\psi \setminus D$ para y suficientemente próximo de x . Procedendo então de forma indutiva, concluímos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_n(y) \rightarrow I_n(x)$ quando $y \rightarrow x$. \square

Lema 4.9. *Se τ_D é contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ a função τ_n é contínua em $\Omega_\psi \setminus D$.*

Demonstração. Seja $m \in \mathbb{N}$. Dado $x \in \Omega_\psi \setminus D$, lembre que existe uma vizinhança de x contida em $\Omega_\psi \setminus D$ onde, portanto, τ_D coincide com τ_1 e que $I_m(x) \in \Omega_\psi \setminus D$ e $I_m(y) \in \Omega_\psi \setminus D$ para y suficientemente próximo de x .

Se $y \rightarrow x$, temos pelo Lema 4.8 que $I_m(y) \rightarrow I_m(x)$, logo, pela continuidade de τ_1 em $\Omega_\psi \setminus D$, $\tau_1(I_m(y)) \rightarrow \tau_1(I_m(x))$.

Logo, dado $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \tau_1(I_j(y)) \rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \tau_1(I_j(x)),$$

ou seja, $\tau_n(y) \rightarrow \tau_n(x)$ quando $y \rightarrow x$. \square

Lema 4.10. *Suponha que τ_D é contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$. Dado $x \in \Omega_\psi \setminus D$ e $t > 0$, se $t \neq \tau_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então ψ_t é contínua em x .*

Demonstração. Dado $x \in \Omega_\psi \setminus D$, se $t < \tau_1(x)$, pela continuidade de τ_D , que coincide com τ_1 em $\Omega_\psi \setminus D$, podemos tomar $V \subset \Omega_\psi \setminus D$ vizinhança de x tal que $t < \tau_1(y)$ para todo $y \in V$. Logo $\psi_t = \varphi_t$ em V e o resultado segue da continuidade de φ_t .

Se $t > \tau_1(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_{n_0}(x) < t < \tau_{n_0+1}(x)$. Pelas continuidades de τ_{n_0} e τ_{n_0+1} em $\Omega_\psi \setminus D$, garantidas pelo Lema 4.9, podemos tomar $W \subset \Omega_\psi \setminus D$ vizinhança de x tal que $\tau_{n_0}(y) < t < \tau_{n_0+1}(y)$ para todo $y \in W$. Lembre que, dado $z \in X$ e $s > 0$, se $\tau_n(z) < s < \tau_{n+1}(z)$ então $\psi_s(z) = \varphi(z_n, s - \tau_n(z))$ (veja a equação (2.2)). Logo $\psi_t(y) = \varphi(y_{n_0}, t - \tau_{n_0}(y))$ para todo $y \in W$.

Note que se $y \rightarrow x$, então $y_{n_0} \rightarrow x_{n_0}$ pelo Lema 4.8 e $t - \tau_{n_0}(y) \rightarrow t - \tau_{n_0}(x)$ pelo Lema 4.9. Logo, pela continuidade de φ , $\varphi(y_{n_0}, t - \tau_{n_0+1}(y)) \rightarrow \varphi(x_{n_0}, t - \tau_{n_0+1}(x))$, isto é, $\psi_t(y) \rightarrow \psi_t(x)$ quando $y \rightarrow x$. \square

Lema 4.11. *Suponha que τ_D é contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$. Então $\pi \circ \psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D}$ é contínua para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Dado $x \in \Omega_\psi \setminus D$, pelo Lema 4.10, temos que $\pi \circ \psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D}$ é contínua para todo $t \geq 0$ que não seja tempo impulsivo. Resta-nos então provar a continuidade quando t é tempo impulsivo.

Suponhamos então que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = \tau_n(x)$. Considerando uma sequência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para x quando $k \rightarrow \infty$, sabemos pelo Lema 4.9 que $\tau_n(y_k) \rightarrow \tau_n(x)$ quando $k \rightarrow \infty$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que, para todo $k \in \mathbb{N}$, ocorre apenas um dos três casos: $\tau_n(y_k) = \tau_n(x)$, $\tau_n(y_k) > \tau_n(x)$ e $\tau_n(y_k) < \tau_n(x)$. Demonstraremos a continuidade para cada um deles:

- $\tau_n(y_k) = \tau_n(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$:

Se $y_k \rightarrow x$ e $\tau_n(y_k) = \tau_n(x)$, temos que $\psi_t(y_k) = \psi_{\tau_n(y_k)}(y_k) = I_n(y_k)$, e pelo Lema 4.8, $I_n(y_k) \rightarrow I_n(x) = \psi_t(x)$ quando $k \rightarrow \infty$.

- $\tau_n(y_k) > \tau_n(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$:

Se $y_k \rightarrow x$, $I_{n-1}(y_k) \rightarrow I_{n-1}(x)$ pelo Lema 4.8 e $\tau_{n-1}(y_k) \rightarrow \tau_{n-1}(x)$ pelo Lema 4.9. Logo, $\psi_t(y_k) = \varphi(I_{n-1}(y_k), t - \tau_{n-1}(y_k)) \rightarrow \varphi(I_{n-1}(x), t - \tau_{n-1}(x))$ pela continuidade de φ , e $\pi \circ \psi_t(y_k) \rightarrow \pi \circ \varphi(I_{n-1}(x), t - \tau_{n-1}(x))$ pela continuidade de π . Mas, como

$$t - \tau_{n-1}(x) = \tau_n(x) - \tau_{n-1}(x) = \tau_1(I_{n-1}(x)),$$

temos que

$$\begin{aligned} \varphi(I_{n-1}(x), t - \tau_{n-1}(x)) &= \varphi(I_{n-1}(x), \tau_1(I_{n-1}(x))) \\ &\sim I(\varphi(I_{n-1}(x), \tau_1(I_{n-1}(x)))) \\ &= \psi_t(x). \end{aligned}$$

Logo $\pi \circ \varphi(I_{n-1}(x), t - \tau_{n-1}(x)) = \pi \circ \psi_t(x)$ e portanto $\pi \circ \psi_t(y_k) \rightarrow \pi \circ \psi_t(x)$ quando $k \rightarrow \infty$.

- $\tau_n(y_k) < \tau_n(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$:

Se $y_k \rightarrow x$, $I_n(y_k) \rightarrow I_n(x)$ pelo Lema 4.8 e $\tau_n(y_k) \rightarrow \tau_n(x)$ pelo Lema 4.9. Por ser φ contínua, temos $\varphi(I_n(y_k), t - \tau_n(y_k)) \rightarrow \varphi(I_n(x), t - \tau_n(x))$, ou seja, $\psi_t(y_k) \rightarrow \psi_t(x)$. Logo, pela continuidade de π , $\pi \circ \psi_t(y_k) \rightarrow \pi \circ \psi_t(x)$ quando $k \rightarrow \infty$.

□

Na proposição a seguir provaremos finalmente que nosso candidato é um semifluxo contínuo em $\pi(\Omega_\psi)$ e que $\pi|_{\Omega_\psi \setminus D}$ tem as propriedades que buscávamos.

Proposição 4.12. *Suponha que τ_D é contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$. Então*

1. $\pi|_{\Omega_\psi \setminus D}$ é uma bijeção bimensurável contínua sobre $\pi(\Omega_\psi)$;
2. existe um semifluxo contínuo $\tilde{\psi} : \pi(\Omega_\psi) \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \pi(\Omega_\psi)$ tal que para todo $t \geq 0$

$$\tilde{\psi}_t \circ \pi|_{\Omega_\psi \setminus D} = \pi \circ \psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D}. \quad (4.1)$$

Demonstração.

1. Como por hipótese $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, temos que $\pi(I(\Omega_\psi \cap D)) \subset \pi(\Omega_\psi \setminus D)$ e, como $\pi(I(\Omega_\psi \cap D)) = \pi(\Omega_\psi \cap D)$, vale $\pi(\Omega_\psi \cap D) \subset \pi(\Omega_\psi \setminus D)$. Logo

$$\pi(\Omega_\psi) = \pi((\Omega_\psi \cap D) \cup \Omega_\psi \setminus D) = \pi(\Omega_\psi \cap D) \cup \pi(\Omega_\psi \setminus D) = \pi(\Omega_\psi \setminus D),$$

e portanto $\pi|_{\Omega_\psi \setminus D}$ é sobrejetiva. Além disso, dados $x, y \in \Omega_\psi \setminus D$, I não está definida nenhum desses pontos, logo, pela forma como foi definida a relação de equivalência \sim , temos que $x \sim y$ se, e somente se, $x = y$, o que prova a injetividade de $\pi|_{\Omega_\psi \setminus D}$. A continuidade decorre de π ser aplicação quociente.

Para provar a bimensurabilidade note que, como $\pi|_{\Omega_\psi \setminus D}$ injetiva, a pré-imagem de qualquer ponto é também um ponto, logo $\{v \in \pi(\Omega_\psi); \pi^{-1}(\{v\}) \text{ é não enumerável}\} = \emptyset$, e por [15, Main Theorem] a imagem por π de qualquer conjunto boreliano é também um conjunto boreliano.

2. Como por hipótese $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, pelo Teorema II temos que $\Omega_\psi \setminus D$ é positivamente invariante pelo semifluxo impulsivo ψ . Pomos então

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}, t) = \pi(\psi(x, t)),$$

onde \tilde{x} é a classe de equivalência de x , para $x \in \Omega_\psi \setminus D$, e $t \geq 0$. Lembre que $\pi(\Omega_\psi) = \pi(\Omega_\psi \setminus D)$, por isso podemos nos restringir a tomar os representantes de classe em $\Omega_\psi \setminus D$.

Afirmamos que $\tilde{\psi} : \pi(\Omega_\psi) \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \pi(\Omega_\psi)$ está bem definida. De fato, sejam $(\tilde{x}, t), (\tilde{y}, s) \in \pi(\Omega_\psi) \times \mathbb{R}_0^+$ tais que $(\tilde{x}, t) = (\tilde{y}, s)$. Temos que $t = s$ e $x \sim y$. Como $x, y \in \Omega_\psi \setminus D$, vale $x \sim y$ se, e somente se, $x = y$. Logo $(x, t) = (y, s)$ e

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}, t) = \pi(\psi(x, t)) = \pi(\psi(y, s)) = \tilde{\psi}(\tilde{y}, s).$$

Note que para todo $t \geq 0$ vale

$$\tilde{\psi}_t \circ \pi|_{\Omega_\psi \setminus D} = \pi \circ \psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D},$$

pois, dado $x \in \Omega \setminus D$,

$$\tilde{\psi}_t \circ \pi(x) = \tilde{\psi}(\tilde{x}, t) = \pi(\psi(x, t)) = \pi \circ \psi_t(x).$$

Observe que ψ é um semifluxo, pois

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}, 0) = \pi(\psi(x, 0)) = \pi(x) = \tilde{x}$$

e

$$\tilde{\psi}(\tilde{\psi}(\tilde{x}, t), s) = \tilde{\psi}(\pi(\psi(x, t)), s) = \pi(\psi(\psi(x, t), s)) = \pi(\psi(x, t+s)) = \tilde{\psi}(\tilde{x}, t+s).$$

Nos resta provar a continuidade de $\tilde{\psi}$. Para tanto tomamos para cada $\tilde{x} \in \pi(\Omega_\psi)$ a aplicação $\tilde{\psi}^{\tilde{x}} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \pi(\Omega_\psi)$ definida por

$$\tilde{\psi}^{\tilde{x}}(t) = \tilde{\psi}(\tilde{x}, t).$$

Basta então provar que, dado $\tilde{x} \in \pi(\Omega_\psi)$, $\tilde{\psi}^{\tilde{x}}$ é contínua para todo $t \geq 0$ e, dado $t \geq 0$, $\tilde{\psi}_t$ é contínua para todo $\tilde{x} \in \pi(\Omega_\psi)$.

Provemos primeiramente a continuidade de $\tilde{\psi}^{\tilde{x}}$. Tomemos $t_0 \geq 0$ que não seja um tempo impulsivo para x . Se $t_0 < \tau_1(x)$, seja V uma vizinhança de t_0 tal que $t < \tau_1(x)$ para todo $t \in V$. Temos portanto que

$$\tilde{\psi}^{\tilde{x}}(t) = \pi(\varphi(x, t)).$$

para todo $t \in V$. Se $t_0 > \tau_1(x)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_n(x) < t_0 < \tau_{n+1}(x)$. Seja $V \subset (\tau_n(x), \tau_{n+1}(x))$ uma vizinhança de t_0 . Temos então que, para todo $t \in V$,

$$\tilde{\psi}^{\tilde{x}}(t) = \pi(\varphi(x_n, t - \tau_n(x))),$$

lembrando que $x_n = \psi(x, \tau_n(x))$. Em ambos casos a continuidade de $\tilde{\psi}^{\tilde{x}}$ em t_0 é consequência das continuidades de π e φ .

Se tomarmos agora t_0 tempo impulsivo de x , digamos $t_0 = \tau_{n+1}(x)$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \tilde{\psi}^{\tilde{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \pi(\psi(x, t)) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \pi(\varphi(x_n, t - \tau_n(x))) = \pi(\varphi(x_n, t_0 - \tau_n(x))).$$

Mas

$$\varphi(x_n, t_0 - \tau_n(x)) = \varphi(x_n, \tau_{n+1}(x) - \tau_n(x)) = \varphi(x_n, \tau_1(x_n)).$$

Logo

$$\begin{aligned} \pi(\varphi(x_n, t_0 - \tau_n(x))) &= \pi(\varphi(x_n, \tau_1(x_n))) \\ &= \pi(I(\varphi(x_n, \tau_1(x_n)))) \\ &= \pi(\psi(x, t_0)) = \tilde{\psi}^{\tilde{x}}(t_0), \end{aligned}$$

donde $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \tilde{\psi}^{\tilde{x}}(t) = \tilde{\psi}^{\tilde{x}}(t_0)$. O que prova a continuidade à esquerda de $\tilde{\psi}^{\tilde{x}}$ em t_0 . A continuidade à direita, segue do fato de que, por definição, o semifluxo ψ é contínuo à direita. Isso conclui a prova da continuidade de $\tilde{\psi}^{\tilde{x}}$ em t_0 .

Finalmente, provemos a continuidade de $\tilde{\psi}_t$, para $t \geq 0$. Temos por hipótese que τ_D é contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, logo, pelo Lema 4.11, $\pi \circ \psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D}$ é contínua. Dado então $U \subset \pi(\Omega_\psi)$ aberto, $(\pi \circ \psi_t)^{-1}(U)$ é aberto em $\Omega_\psi \setminus D$ e, por conseguinte, em Ω_ψ . Pela equação (4.1), segue que $(\tilde{\psi}_t \circ \pi)^{-1}(U)$ é aberto em Ω_ψ , ou seja, $\pi^{-1}(\tilde{\psi}_t^{-1}(U))$ é aberto em Ω_ψ . Mas π é uma aplicação quociente, logo $\pi^{-1}(\tilde{\psi}_t^{-1}(U))$ é aberto se, e somente se, $\tilde{\psi}_t^{-1}(U)$ é aberto. Isso conclui a demonstração.

□

Observação 4.13. Como sob as hipóteses da Proposição 4.12 o conjunto $\Omega_\psi \setminus D$ é positivamente invariante por ψ pelo Teorema II, segue da equação (4.1) que

$$\tilde{\psi}_t \circ \pi|_{\Omega_\psi \setminus D} = \pi \circ \psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D} = \pi|_{\Omega_\psi \setminus D} \circ \psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D}.$$

Logo $\pi|_{\Omega_\psi \setminus D}$ é de fato uma semiconjugação para todo $t \geq 0$.

5 Existência de Probabilidades Invariantes

Neste capítulo concluiremos o principal resultado de [1] apresentado nesta dissertação: provaremos a existência de probabilidades invariantes pelo semifluxo impulsivo desde que τ_D seja contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$. Para tanto, daremos os passos que nos faltaram para completar nossa estratégia: mostrar que existe bijeção entre $\mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\pi(\Omega_\psi))$ e $\mathcal{M}_\psi(X)$, o que nos permitirá demonstrar o Teorema IV e com ele finalmente provar o Teorema I. Para realizar essa tarefa precisaremos antes de alguns resultados. Provaremos a mensurabilidade de ψ e que, sob hipóteses adequadas, o conjunto impulsivo D tem medida nula para probabilidades ψ -invariantes.

Para que existam probabilidades ψ -invariantes, pela definição de medida invariante, precisamos primeiramente que ψ seja mensurável. Isso será provado na próxima proposição, mas antes precisaremos demonstrar que τ_n é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$. Lembramos que se as funções-coordenada de uma aplicação forem mensuráveis, segue que esta aplicação é mensurável. Para a prova deste fato o leitor pode consultar, por exemplo, [2, Section 22, Remark 2]. Usaremos esse resultado algumas vezes nas demonstrações a seguir.

Lema 5.1. *A função τ_n é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Provemos primeiramente a mensurabilidade de τ_1 . Para tanto, é suficiente mostrar que $\tau_1^{-1}((0, t))$ é mensurável para todo $t > 0$. Se $\pi_X : X \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow X$ é a projeção na coordenada espacial, dado $t > 0$

$$\tau_1^{-1}((0, t)) = \pi_X(\{(x, s); \varphi_s(x) \in D, s < t\}) \quad (5.1)$$

Com efeito, se $x_0 \in \tau_1^{-1}((0, t))$, temos que $(x_0, \tau_1(x_0)) \in \{(x, s); \varphi_s(x) \in D, s < t\}$, logo $x_0 \in \pi_X(\{(x, s); \varphi_s(x) \in D, s < t\})$. Se por outro lado $x_0 \in \pi_X(\{(x, s); \varphi_s(x) \in D, s < t\})$, existe $s_0 < t$ tal que $\varphi_{s_0}(x_0) \in D$, logo $\tau_1(x_0) \leq s_0 < t$ e consequentemente $x_0 \in \tau_1^{-1}((0, t))$.

Denotando a união de δ -bolas centradas em D por $D_\delta = \bigcup_{x \in D} B(x, \delta)$, temos

$$\begin{aligned} \{(x, s); \varphi_s(x) \in D, s < t\} &= \{(x, s); \varphi_s(x) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_{1/n}, s < t\} \\ &= \{(x, s); x \in \varphi_s^{-1}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_{1/n}), s < t\} \\ &= \{(x, s); x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi_s^{-1}(D_{1/n}), s < t\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(x, s); x \in \varphi_s^{-1}(D_{1/n}), s < t\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Segue das equações (5.1) e (5.2) que

$$\begin{aligned} \tau_1^{-1}((0, t)) &= \pi_X\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(x, s); x \in \varphi_s^{-1}(D_{1/n}), s < t\}\right) \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi_X(\{(x, s); x \in \varphi_s^{-1}(D_{1/n}), s < t\}). \end{aligned}$$

Mas

$$\pi_X(\{(x, s); x \in \varphi_s^{-1}(D_{1/n}), s < t\}) = \bigcup_{s < t} \varphi_s^{-1}(D_{1/n}).$$

Logo, como $D_{1/n}$ é aberto e φ contínua, o conjunto $\pi_X(\{(x, s); x \in \varphi_s^{-1}(D_{1/n}), s < t\})$ é boreliano para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $\tau_1^{-1}((0, t))$ é interseção enumerável de borelianos e portanto mensurável. Isso conclui a prova da mensurabilidade de τ_1 .

Para provar a mensurabilidade de τ_n , com $n \geq 2$, lembre que dado $x \in X$

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_1(I_k(x)).$$

Note que se I_k for mensurável para todo $0 \leq k \leq n-1$, segue a mensurabilidade de τ_n .

Afirmamos que I_k é mensurável para todo $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Para provar esta afirmação definimos, para $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, a função $\omega_k : X \rightarrow X \times \mathbb{R}_0^+$ dada por $\omega_k(x) = (I_k(x), \tau_1(I_k(x)))$. Observe que se I_k for mensurável, então ω_k é mensurável.

Recorrendo a um argumento indutivo, comecemos por provar que I_1 é mensurável. De fato,

$$I_1(x) = \psi_{\tau_1(x)}(x) = I(\varphi(x, \tau_1(x))) = I \circ \varphi \circ \omega_0(x).$$

Mas I_0 é mensurável por ser a identidade em X , logo ω_0 é mensurável. Como I e φ são contínuas, segue que I_1 é mensurável.

Agora suponhamos que I_m seja mensurável para algum $m \geq 2$. Segue que ω_m é mensurável. Mas

$$I_{m+1}(x) = \psi_{\tau_{m+1}(x)}(x) = I(\varphi(I_m(x), \tau_1(I_m(x)))) = I \circ \varphi \circ \omega_m(x).$$

Logo I_{m+1} é mensurável. Isso conclui a prova da mensurabilidade de I_k para todo $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Segue que τ_n é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Observação 5.2. Vale ressaltar um resultado que provamos na demonstração do Lema 5.1: I_n é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 5.3. *Se ψ é o semifluxo impulsivo induzido por um sistema dinâmico impulsivo (X, φ, D, I) , então ψ é mensurável.*

Demonstração. Iniciamos esta prova por definir os seguintes conjuntos:

$$S_0 = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}_0^+; 0 \leq t < \tau_1(x)\}$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}_0^+; \tau_n(x) < t < \tau_{n+1}(x)\} \\ T_n &= \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}_0^+; \tau_n(x) = t\}. \end{aligned}$$

Afirmamos que estes são borelianos e, para prová-lo, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ a aplicação

$$\begin{aligned} f_n : X \times \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \\ (x, t) &\mapsto (t, \tau_n(x)). \end{aligned}$$

Esta é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que suas funções-coordenada são mensuráveis.

Note que

$$f_1^{-1}(\{(u, v) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+; u < v\}) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}_0^+; t < \tau_1(x)\} = S_0.$$

Como $\{(u, v) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+; u < v\}$ é aberto em $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ e f_1 é mensurável, segue que S_0 é boreliano.

Além disso, observe que

$$f_n^{-1}(\{(u, v) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+; u = v\}) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}_0^+; t = \tau_n(x)\} = T_n.$$

Como $\{(u, v) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+; u = v\}$ é fechado em $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, segue da mensurabilidade de f_n que T_n é boreliano.

Para provar que S_n é boreliano, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ a aplicação

$$\begin{aligned} g_n : X \times \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \\ (x, t) &\mapsto (\tau_n(x), t, \tau_{n+1}(x)), \end{aligned}$$

que por sua vez também é mensurável. Note que

$$g_n^{-1}(\{(u, v, w) \in (\mathbb{R}_0^+)^3; u < v < w\}) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}_0^+; \tau_n(x) < t < \tau_{n+1}(x)\} = S_n.$$

Como $\{(u, v, w) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+; u < v < w\}$ é aberto em $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, segue pela mensurabilidade de g_n que S_n é boreliano. Isso conclui a prova da afirmação.

Mostremos agora que, dado $A \subset X$ boreliano, a pré-imagem $\psi^{-1}(A)$ é um boreliano. Para isso, note primeiramente que, dado $(x, t) \in \mathbb{R}_0^+ \times X$, o ponto (x, t) pertence a um, e somente um, dos conjuntos S_0, S_n e T_n , com $n \geq 1$. Em outras palavras, o espaço $\mathbb{R}_0^+ \times X$ pode ser escrito como a união disjunta dos conjuntos S_0, S_n e T_n . Logo, dado $A \subset X$ boreliano, $\psi^{-1}(A)$ pode ser escrito como união disjunta de conjuntos dos tipos

$$\psi^{-1}(A) \cap S_0, \quad \psi^{-1}(A) \cap S_n \quad \text{e} \quad \psi^{-1}(A) \cap T_n, \quad n \geq 1.$$

Afirmamos que cada um destes conjuntos é boreliano.

De fato, para todo $(x, t) \in S_0$ temos que $t < \tau_1(x)$, logo $\psi_t(x) = \varphi_t(x)$. Ou seja, o semifluxo ψ restrito a S_0 coincide com φ . Segue que $\psi^{-1}(A) \cap S_0 = \varphi^{-1}(A) \cap S_0$, que é mensurável.

Para provar que $\psi^{-1}(A) \cap S_n$ é boreliano, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \eta_n : X \times \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow X \times \mathbb{R}_0^+ \\ (x, t) &\mapsto (I_n(x), t - \tau_n(x)). \end{aligned}$$

Temos que I_n é mensurável pela Observação 5.2. Além disso, se $\pi_{\mathbb{R}_0^+}$ é a projeção na coordenada temporal, temos $(x, t) \mapsto t - \tau_n(x) = \pi_{\mathbb{R}_0^+}(x, t) - \tau_n(\pi_X(x, t))$, que é uma aplicação mensurável. Portanto η_n é mensurável. Note que para todo $(x, t) \in S_n$, tem-se $\psi_t(x) = \varphi(I_n(x), t - \tau_n(x))$. Logo

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(A) \cap S_n &= \{(x, t) \in S_n; \varphi(I_n(x), t - \tau_n(x)) \in A\} \\ &= \{(x, t) \in S_n; \varphi(\eta_n(x, t)) \in A\} \\ &= S_n \cap \eta_n^{-1}(\varphi^{-1}(A)). \end{aligned}$$

Segue que $\psi^{-1}(A) \cap S_n$ é boreliano.

Para provar que $\psi^{-1}(A) \cap T_n$ é boreliano, observe para todo $(x, t) \in T_n$, tem-se $\psi_t(x) = \psi_{\tau_n(x)}(x) = I_n(x)$. Logo

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(A) \cap T_n &= \{(x, t) \in T_n; \psi_t(x) \in A\} \\ &= \{(x, t) \in T_n; I_n(x) \in A\} \\ &= \{(x, t) \in T_n; I_n(\pi_X(x, t)) \in A\} \\ &= T_n \cap \pi_X^{-1}(I_n^{-1}(A)). \end{aligned}$$

Da mensurabilidade de π_X e I_n , temos que $\psi^{-1}(A) \cap T_n$ é boreliano. Concluimos aqui a prova da nossa última afirmação.

Segue que $\psi^{-1}(A)$ pode ser escrito como união enumerável de borelianos e, portanto, é boreliano. \square

Provaremos em breve que se τ_D for contínua, o conjunto impulsivo D tem medida nula para qualquer probabilidade invariante pelo semifluxo impulsivo. No próximo lema, veremos que o mesmo ocorre se abandonarmos a hipótese de que τ_D é contínua, mas supusermos que $I(D) \cap D = \emptyset$.

Lema 5.4. *Se $I(D) \cap D = \emptyset$, então $\mu(D) = 0$ para toda μ probabilidade ψ -invariante.*

Demonstração. Dado $t > 0$ temos que ψ_t é mensurável pela Proposição 5.3 e μ é finita e ψ_t -invariante. Logo, se $\mu(D) > 0$, o Teorema de Recorrência de Poincaré fornece que para μ -quase todo $x \in D$ existem infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que $\psi_{nt}(x) \in D$. No entanto, pela forma como definimos as trajetórias impulsivas, para tempos positivos estas só podem intersectar D em tempos impulsivos, tempos nos quais elas intersectam $I(D)$ também. Mas por hipótese $I(D) \cap D = \emptyset$, logo as ψ -trajetórias não intersectam D em tempos positivos. O que é uma contradição. \square

O último lema não será usado para provar nenhum outro resultado deste trabalho. No entanto, achamos interessante apresentá-lo, pois ele ilustra como certas hipóteses na função impulso tornam o conjunto D negligenciável sob o ponto de vista de medidas invariantes. Já o próximo será utilizado na demonstração do Teorema I.

Lema 5.5. *Se τ_D é contínua, então $\mu(D) = 0$ para toda μ probabilidade ψ -invariante.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\mu(D) > 0$. Como pelo Lema 3.1 o suporte de μ está contido em Ω_ψ , temos que $\mu(X \setminus \Omega_\psi) = 0$. Logo

$$\mu((X \setminus \Omega_\psi) \cap D) \leq \mu(X \setminus \Omega_\psi) = 0,$$

o que implica que

$$\mu(\Omega_\psi \cap D) = \mu(\Omega_\psi \cap D) + \mu((X \setminus \Omega_\psi) \cap D) = \mu(D) > 0. \quad (5.3)$$

Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = \{x \in \Omega_\psi \cap D; \tau_1(x) > 1/n\}.$$

Como por hipótese τ_1 é estritamente positiva, temos que

$$\Omega_\psi \cap D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

Afirmamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $0 < \varepsilon_n < 1/n$ tal que

$$\psi_t(D_n) \cap \Omega_\psi = \emptyset \text{ para todo } 0 < t \leq \varepsilon_n. \quad (5.4)$$

Para provar esta afirmação, suponhamos por absurdo que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual não haja $0 < \varepsilon_{n_0} < 1/n_0$ satisfazendo (5.4). Isso implica que existem seqüências $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_{n_0}$ e $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, 1/n_0)$, com $t_k \rightarrow 0$, tais que $\psi_{t_k}(x_k) \in \Omega_\psi$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por serem D e Ω_ψ compactos, $\Omega_\psi \cap D$ é compacto. Como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_{n_0} \subset \Omega_\psi \cap D$, passando a uma subsequência, se necessário, temos que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para um ponto $x_0 \in \Omega_\psi \cap D$. Como $0 < t_k < 1/n_0 < \tau_1(x_k)$, temos $\psi_{t_k}(x_k) = \varphi_{t_k}(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, pela continuidade de φ , quando $k \rightarrow \infty$,

$$\psi_{t_k}(x_k) = \varphi_{t_k}(x_k) \rightarrow \varphi_0(x_0) = x_0,$$

e pela continuidade de τ_D ,

$$\tau_D(\psi_{t_k}(x_k)) \rightarrow \tau_D(x_0) = 0. \quad (5.5)$$

Sendo a última igualdade decorrente de x_0 pertencer a D . Como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_{n_0}$, devemos ter $\psi_t(x_k) \notin D$ para todo $t \in (0, 1/n_0)$. Logo $\psi_{t_k}(x_k) \in \Omega_\psi \setminus D$ para todo $k \in \mathbb{N}$, uma vez que $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, 1/n_0)$. Como $\tau_D = \tau_1$ em $\Omega_\psi \setminus D$, segue que

$$\tau_D(\psi_{t_k}(x_k)) = \tau_1(\psi_{t_k}(x_k)).$$

Além disso, por ser $\tau_1(x_k) > 1/n_0 > t_k$, temos

$$\tau_1(\psi_{t_k}(x_k)) = \tau_1(\varphi_{t_k}(x_k)) = \tau_1(x_k) - t_k > 1/n_0 - t_k,$$

donde

$$\tau_D(\psi_{t_k}(x_k)) > 1/n_0 - t_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ temos que $\tau_D(x_0) > 1/n_0$, o que é uma contradição com (5.5). Isto conclui a prova da nossa afirmação.

Por ser X espaço métrico compacto, existe base enumerável para sua topologia, e como μ é uma medida boreliana, segue por [2, Chapter IV, Section 29, Theorem 29.12] que μ é regular. Dado então $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(D_n) = \sup\{\mu(K); K \subset D_n \text{ compacto e boreliano}\}.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $K_n \subset D_n$ tal que

$$\mu(D_n) \leq \mu(K_n) + \frac{\mu(\Omega_\psi \cap D)}{2^{n+1}}.$$

Consequentemente

$$\mu(\Omega_\psi \cap D) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(D_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\mu(K_n) + \frac{\mu(\Omega_\psi \cap D)}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(K_n) + \frac{\mu(\Omega_\psi \cap D)}{2} \quad (5.6)$$

Como $\varepsilon_n < 1/n < \tau_1(x)$ para todo $x \in K_n$, ψ_{ε_n} coincide com φ_{ε_n} e portanto é contínua em K_n . Logo $\psi_{\varepsilon_n}(K_n)$ é compacto e, por conseguinte, boreliano. Temos que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(K_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\psi_{\varepsilon_n}^{-1}(\psi_{\varepsilon_n}(K_n))) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\psi_{\varepsilon_n}(K_n)),$$

onde a desigualdade decorre de $K_n \subset \psi_{\varepsilon_n}^{-1}(\psi_{\varepsilon_n}(K_n))$ e a igualdade decorre da ψ -invariância de μ . Como $\psi_{\varepsilon_n}(K_n) \subset X \setminus \Omega_\psi$ por (5.4), temos que $\mu(\psi_{\varepsilon_n}(K_n)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pelo Lema 3.1. Concluimos então de (5.6) que

$$\mu(\Omega_\psi \cap D) \leq \frac{\mu(\Omega_\psi \cap D)}{2},$$

o que contradiz (5.3). Segue que $\mu(D) = 0$. \square

Demonstraremos a seguir algumas propriedades de medidas imagem que serão úteis em breve.

Lema 5.6. *Sejam X, Y e Z espaços de medida. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções mensuráveis, então*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

2. *Se $f : X \rightarrow Y$ é invertível e bimensurável, então f_* é invertível e*

$$(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*.$$

3. *Se $f : X \rightarrow Y$ é mensurável e φ e ϕ são semifluxos em X e Y respectivamente tais que*

$$\phi_t \circ f = f \circ \varphi_t \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

então

$$\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X) \implies f_*\mu \in \mathcal{M}_\phi(Y).$$

4. *Se $f : X \rightarrow Y$ é bimensurável e φ e ϕ são semifluxos em X e Y respectivamente tais que*

$$\phi_t \circ f = f \circ \varphi_t \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

então

$$\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X) \text{ ergódica} \implies f_*\mu \in \mathcal{M}_\phi(Y) \text{ ergódica}$$

e

$$\nu \in \mathcal{M}_\phi(Y) \text{ ergódica} \implies (f^{-1})_*\nu \in \mathcal{M}_\varphi(X) \text{ ergódica}.$$

Demonstração.

1. Seja $\mu \in \mathcal{M}(X)$ e $E \subset Z$ mensurável. Temos que

$$(g \circ f)_*\mu(E) = \mu((g \circ f)^{-1}(E)) = \mu(f^{-1}(g^{-1}(E))) = f_*\mu(g^{-1}(E)) = f_* \circ g_*\mu(E)$$

2. Como $f : X \rightarrow Y$ e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ são mensuráveis, pela afirmação (1),

$$f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = (\text{Id}_Y)_*.$$

Analogamente, $(f^{-1})_* \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = (\text{Id}_X)_*$. Concluimos que f_* é invertível e $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

3. Seja $\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X)$. Logo, dado $t \geq 0$, $\mu(\varphi_t^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \subset X$ mensurável. Dado então $B \subset Y$ mensurável, temos

$$f_*\mu(\phi_t^{-1}(B)) = \mu(f^{-1} \circ \phi_t^{-1}(B)) = \mu((\varphi_t^{-1} \circ f^{-1})(B)) = \mu(f^{-1}(B)) = f_*\mu(B).$$

Logo $f_*\mu \in \mathcal{M}_\phi(Y)$.

4. Seja $t \geq 0$ e $B \subset Y$ mensurável tal que $\phi_t^{-1}(B) = B$. Logo

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\phi_t^{-1}(B)) = \varphi_t^{-1}(f^{-1}(B)).$$

Se $\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X)$ é ergódica, então $\mu(f^{-1}(B)) \in \{0, 1\}$. Logo

$$f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \in \{0, 1\}$$

e portanto $f_*\mu$ é ergódica. Dada $\nu \in \mathcal{M}_\phi(Y)$ ergódica, usando um argumento análogo concluimos que $(f^{-1})_*\nu$ é também ergódica.

□

Provaremos agora a existência de uma bijeção entre os espaços $\mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\pi(\Omega_\psi))$ e $\mathcal{M}_\psi(X)$. Seja ψ o semifluxo impulsivo de um sistema dinâmico impulsivo (X, φ, D, I) para o qual τ_D é contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$ e sejam

$$\begin{aligned} h : \Omega_\psi \setminus D &\rightarrow \pi(\Omega_\psi) \\ x &\mapsto \pi(x) \end{aligned} \tag{5.7}$$

a bijeção contínua bimensurável e $\tilde{\psi}$ o semifluxo contínuo em $\pi(\Omega_\psi)$ dados pela Proposição 4.12. Lembramos que i é a aplicação de inclusão $i : \Omega_\psi \setminus D \rightarrow X$.

Lema 5.7. *A aplicação $(i \circ h^{-1})_* : \mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\pi(\Omega_\psi)) \rightarrow \mathcal{M}_\psi(X)$ está bem definida e é uma bijeção.*

Demonstração. Mostraremos primeiro que se $\nu \in \mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\pi(\Omega_\psi))$ então $(i \circ h^{-1})_*\nu \in \mathcal{M}_\psi(X)$. Pelo Teorema II, temos que $\psi_t(\Omega_\psi \setminus D) \subset \Omega_\psi \setminus D$ para todo $t \geq 0$. Podemos então definir $\xi : \Omega_\psi \setminus D \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \Omega_\psi \setminus D$ por $\xi_t(x) = \psi_t(x)$. Como ψ_t está definido em X e ξ_t está definido em $\Omega_\psi \setminus D$, temos que

$$\psi_t \circ i = i \circ \xi_t \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{5.8}$$

Dado $t \geq 0$, lembrando que $h = \pi|_{\Omega_\psi \setminus D}$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_t \circ h &= \pi \circ \psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D} \quad \text{pela equação (4.1)} \\ &= \pi \circ \xi_t \quad \text{pela definição de } \xi \\ &= \pi|_{\Omega_\psi \setminus D} \circ \xi_t \quad \text{pois } \xi_t \text{ é transformação de } \Omega_\psi \setminus D \text{ em } \Omega_\psi \setminus D \\ &= h \circ \xi_t. \end{aligned}$$

Logo,

$$\xi_t \circ h^{-1} = h^{-1} \circ \tilde{\psi}_t \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (5.9)$$

Como $h^{-1} : \pi(\Omega_\psi) \rightarrow \Omega_\psi \setminus D$ é mensurável e vale (5.9), pelo item (3) do Lema 5.6 segue que

$$\nu \in \mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\pi(\Omega_\psi)) \implies (h^{-1})_* \nu \in \mathcal{M}_\xi(\Omega_\psi \setminus D).$$

Como $i : \Omega_\psi \setminus D \rightarrow X$ é mensurável e vale (5.8), pelo item (3) do Lema 5.6 segue que

$$(h^{-1})_* \nu \in \mathcal{M}_\xi(\Omega_\psi \setminus D) \implies i_* \circ (h^{-1})_* \nu \in \mathcal{M}_\psi(X).$$

Logo, pelo item (1) do Lema 5.6, $(i \circ h^{-1})_* \nu = i_* \circ (h^{-1})_* \nu \in \mathcal{M}_\psi(X)$. Portanto $(i \circ h^{-1})_*$ está bem definida.

Provemos agora que $(i \circ h^{-1})_*$ é bijetiva. Como $(i \circ h^{-1})_* = i_* \circ (h^{-1})_*$ e $(h^{-1})_*$ é invertível pelo item (2) do Lema 5.6, basta provar que i_* é invertível. Note que i possui inversa à esquerda por ser injetiva, logo, pelo item (1) do Lema 5.6, i_* também possui inversa à esquerda e é, portanto, injetiva.

Nos resta provar que i_* é sobrejetiva. Dada $\mu \in \mathcal{M}_\psi(X)$, seja ν a restrição de μ aos borelianos de $\Omega_\psi \setminus D$. Como $\text{Supp}(\mu) \subset \Omega_\psi$ pelo Lema 3.1 e $\mu(D) = 0$ pelo Lema 5.5, ν é uma probabilidade em $\Omega_\psi \setminus D$. Dado $A \subset \Omega_\psi \setminus D$ boreliano, pela ψ -invariância de μ e por ser $\mu(\Omega_\psi \setminus D) = 1$, temos

$$\nu(\xi_t^{-1}(A)) = \mu(\psi_t^{-1}(A) \cap (\Omega_\psi \setminus D)) = \mu(\psi_t^{-1}(A)) = \mu(A) = \mu(A \cap (\Omega_\psi \setminus D)) = \nu(A).$$

Logo $\nu \in \mathcal{M}_\xi(\Omega_\psi \setminus D)$. Além disso, dado $A \subset X$ boreliano,

$$i_* \nu(A) = \nu(i^{-1}(A)) = \nu(A \cap (\Omega_\psi \setminus D)) = \mu(A \cap (\Omega_\psi \setminus D)) = \mu(A).$$

Portanto $i_* \nu = \mu$. Segue que i_* é sobrejetiva. \square

Uma propriedade interessante da bijeção $(i \circ h^{-1})_*$ é que ela e sua inversa preservam ergodicidade de medidas.

Proposição 5.8. *As aplicações $(i \circ h^{-1})_*$ e $((i \circ h^{-1})^{-1})_*$ preservam ergodicidade.*

Demonstração. Como i e h são bimensuráveis e satisfazem as equações (5.8) e (5.9) respectivamente, temos pelo Lema 5.6, que ambas aplicações, bem como suas respectivas inversas, preservam ergodicidade. Segue que $(i \circ h^{-1})_*$ e $((i \circ h^{-1})^{-1})_*$ preservam ergodicidade. \square

Estamos finalmente aptos a provar o Teorema IV.

Demonstração. (Teorema IV) Tomando $\tilde{X} = \pi(\Omega_\psi)$, temos pelo Lema 4.7 que \tilde{X} é um espaço métrico compacto. Tomando $\tilde{\psi}$ tal como na Proposição 4.12, tem-se que $\tilde{\psi}$ é um semifluxo contínuo em \tilde{X} pelo item (2) da mesma proposição. Tomando h como em (5.7), h é uma bijeção contínua e bimensurável de $\Omega_\psi \setminus D$ em \tilde{X} pelo item (1) da Proposição 4.12. Vale que $\tilde{\psi}_t \circ h = h \circ \psi_t|_{\Omega_\psi \setminus D}$ para todo $t \geq 0$ pelo item (2) da mesma proposição. Além disso, $(i \circ h^{-1})_* : \mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{M}_\psi(X)$ é uma bijeção pelo Lema 5.7. \square

O Teorema I resulta em parte do Teorema IV. Provemo-lo.

Demonstração. (Teorema I) Se ψ é o semifluxo induzido por um sistema dinâmico impulsivo (X, φ, D, I) com τ_D contínua e $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$, pelo Teorema IV existe um espaço métrico compacto \tilde{X} , um semifluxo contínuo $\tilde{\psi}$ em \tilde{X} e uma bijeção entre $\mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\tilde{X})$ e $\mathcal{M}_\psi(X)$. Pelo Teorema 2.9 $\mathcal{M}_{\tilde{\psi}}(\tilde{X}) \neq \emptyset$. Consequentemente $\mathcal{M}_\psi(X) \neq \emptyset$. Isso prova a existência de uma medida invariante pelo fluxo impulsivo.

Dada $\mu \in \mathcal{M}_\psi(X)$, o Lema 3.1 garante que o seu suporte está contido no conjunto não-errante Ω_ψ , enquanto pelo Lema 5.5 temos que $\mu(D) = 0$. Isso conclui a prova do Teorema I. \square

6 Exemplos

Tendo concluído a exposição de toda a teoria que este trabalho visava apresentar, discutiremos neste capítulo alguns exemplos de sistemas dinâmicos impulsivos. O primeiro satisfará as hipóteses do Teorema I e portanto para ele haverá medida invariante pelo semifluxo impulsivo. O segundo não satisfará tais hipóteses e, como mostraremos, não possuirá medida invariante pelo semifluxo impulsivo. No terceiro exemplo, exibiremos um sistema dinâmico impulsivo semelhante ao sistema de Lotka-Volterra apresentado na introdução, também satisfazendo as hipóteses do Teorema I.

Exemplo 6.1. Seja X o anel

$$X = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2; \ 1 \leq r \leq 2, \ \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Definimos

$$\varphi : X \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow X$$

como o semifluxo gerado pelo campo vetorial em X dado em coordenadas polares por

$$\begin{cases} r' = 0 \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

As φ -órbitas são portanto círculos de raio entre 1 e 2 centrados na origem e com orientação no sentido anti-horário. Tomamos então o seguinte conjunto impulsivo

$$D = \{(r, 0) \in X; \ 1 \leq r \leq 2\}$$

e definimos a função impulso $I : D \rightarrow X$ por

$$I(r, 0) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}r, 0\right).$$

Note que X é um espaço métrico compacto, o semifluxo φ é contínuo, o conjunto D é fechado e a aplicação I é contínua. Para que (X, φ, D, I) seja um sistema dinâmico impulsivo, segundo a Definição 2.14, é necessário ainda que tenhamos $\tau_1(x) > 0$ para todo $x \in D$ e $T(x) = \infty$ para todo $x \in X$.

Observe que $\tau_1(x) = 2\pi$ para todo $x \in D$. Além disso,

$$I(D) \cap D = \{(r, 0) \in X; \ -3/2 \leq r \leq -1\} \cap \{(r, 0) \in X; \ 1 \leq r \leq 2\} = \emptyset,$$

logo, pelo Lema 2.13, segue que $T(x) = \infty$ para todo $x \in X$. Portanto (X, φ, D, I) é de fato um sistema dinâmico impulsivo.

Seja ψ seu semifluxo impulsivo. Afirmamos que

$$\Omega_\psi = \{(\cos \theta, \sin \theta); \ \pi \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Com efeito, sejam $r(x)$ o raio do ponto $x \in X$ e, para $n \in \mathbb{N}$, $r_n(x)$ o raio de sua ψ -órbita no intervalo de tempo $\tau_n(x) \leq t < \tau_{n+1}(x)$. Note que $r_n(x) = \frac{2^n - 1}{2^n} + \frac{r(x)}{2^n}$ e

portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 1$. Para provar que $\{(\cos \theta, \sin \theta); \pi \leq \theta \leq 2\pi\} \subset \Omega_\psi$, tomemos $x_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0) \in \{(\cos \theta, \sin \theta); \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$. Sejam $U \subset X$ uma ε -bola centrada em x_0 e $S > 0$. Dado $y \in U$, como $T(y) = \infty$, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_{n_0}(y) > S$ e, como $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(y) = 1$, tal que $r_{n_0}(y) \in (1, 1 + \varepsilon)$. Como

$$\psi_{\tau_{n_0}(y)}(y) \in I(D) \subset \{(r \cos \pi, r \sin \pi); r > 0\},$$

temos que $\psi_{\theta_0 - \pi}(\psi_{\tau_{n_0}(y)}(y)) \in \{(r \cos \theta_0, r \sin \theta_0); r > 0\}$. Logo

$$\psi_{\theta_0 - \pi}(\psi_{\tau_{n_0}(y)}(y)) = (r_{n_0}(y) \cos \theta_0, r_{n_0}(y) \sin \theta_0) \in U.$$

Segue que $x_0 \in \Omega_\psi$.

Para provar que $\Omega_\psi \subset \{(\cos \theta, \sin \theta); \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$, suponhamos por absurdo que existe $x_0 \in \Omega_\psi \setminus \{(\cos \theta, \sin \theta); \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$. Se $r(x_0) > 1$, podemos tomar $U \subset X$ uma ε -bola centrada em x_0 tal que $r(x_0) - \varepsilon > 1$, logo $r(x) > r(x_0) - \varepsilon > 1$ para todo $x \in U$. Como o raio das ψ -órbitas tende a 1, existe $S > 0$ tal que $r(\psi_t(x)) < r(x_0) - \varepsilon$ para todo $t > S$, logo $\psi_t(x) \notin U$ para todo $t > S$ e conseqüentemente $x_0 \notin \Omega_\psi$. Se por outro lado $x_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ com $\theta_0 \in (0, \pi)$, também temos que $x_0 \notin \Omega_\psi$. Com efeito, uma vez que as ψ -trajetórias atingem D , elas não mais passam pelo semiplano superior. Logo nenhum ponto neste semiplano pode pertencer a Ω_ψ .

Note que $\Omega_\psi \setminus D = \{(\cos \theta, \sin \theta); \pi \leq \theta < 2\pi\}$, logo

$$I(\Omega_\psi \cap D) = I(\{(1, 0)\}) = \{(-1, 0)\} \subset \Omega_\psi \setminus D.$$

Além disso, $\tau_D : \Omega_\psi \rightarrow [0, \infty]$ é dada para $\theta \in [\pi, 2\pi]$ por $\tau_D(\cos \theta, \sin \theta) = 2\pi - \theta$, que é contínua em Ω_ψ . São portanto satisfeitas as hipóteses do Teorema I. Logo o semifluxo impulsivo ψ tem alguma probabilidade invariante.

Exemplo 6.2. Seja novamente X o anel

$$X = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq r \leq 2, \theta \in [0, 2\pi)\}$$

mas agora definindo $\varphi : X \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow X$ como o semifluxo gerado pelo campo vetorial em X dado em coordenadas polares por

$$\begin{cases} r' = 1 - r \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

Dado $x \in X$, a solução de

$$\begin{cases} r'(t) = 1 - r(t) \\ r(0) = |x| \end{cases}$$

é dada por $r(t) = 1 + (|x| - 1)e^{-t}$ e portanto as φ -órbitas são curvas que espiralam em sentido antihorário convergindo para o círculo unitário centrado na origem S^1 . Tomamos agora o conjunto impulsivo $D = \{(1, 0)\}$ e a função impulso $I : D \rightarrow X$ definida por $I((1, 0)) = (2, 0)$.

Temos mais uma vez que X é espaço métrico compacto, φ é contínuo, D é fechado e I é contínua. Note que $(1, 0)$ é o único ponto de D e $\tau_1((1, 0)) = 2\pi$. Além disso, como

$I(D) \cap D = \{(2, 0)\} \cap \{(1, 0)\} = \emptyset$, pelo Lema 2.13, $T(x) = \infty$ para todo $x \in X$. Segue que (X, φ, D, I) é um sistema dinâmico impulsivo.

Seja ψ seu semifluxo impulsivo. Note que as trajetórias de ψ coincidem com as de φ com exceção daquelas que partem de S^1 . Estas percorrem S^1 no sentido antihorário desde seu ponto de partida até atingirem $D = \{(1, 0)\}$. A partir de então, espiralam de $I(D) = \{(2, 0)\}$ para S^1 . Afirmamos que

$$\Omega_\psi = S^1.$$

De fato, como as ψ -órbitas convergem para S^1 , não pode haver pontos em Ω_ψ com raio maior que 1, logo $\Omega_\psi \subset S^1$. Por outro lado, também por as ψ -órbitas convergirem para S^1 , dada uma vizinhança de qualquer ponto neste círculo, todos os pontos desta vizinhança retornam infinitas vezes para a mesma em tempos que vão para infinito. Logo $S^1 \subset \Omega_\psi$.

Temos então que $\Omega_\psi \setminus D = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$. Note que este conjunto não é positivamente invariante por ψ , uma vez que todas suas φ -trajetórias atingem D e portanto todas as sua ψ -trajetórias deixam $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ pela ação do impulso. Segue pelo Teorema II, que não vale a inclusão $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$. Além disso, $\tau_D : \Omega_\psi \rightarrow [0, \infty]$, que para $\theta \in (0, 2\pi]$ é dada por $\tau_D(\cos \theta, \sin \theta) = 2\pi - \theta$, não é contínua em Ω_ψ , pois $\lim_{\theta \rightarrow 0} \tau_D(\cos \theta, \sin \theta) = 2\pi$ enquanto $\tau_D(1, 0) = 0$. Concluimos então que nenhuma das hipóteses do Teorema I é satisfeita por (X, φ, D, I) .

Afirmamos que ψ não possui probabilidade invariante. Se existisse tal medida μ , pelo Lema 3.1, teríamos

$$1 = \mu(\text{Supp}(\mu)) = \mu(\Omega_\psi) = \mu(\psi_{2\pi}^{-1}(\Omega_\psi)),$$

o que é uma contradição já que $\psi_{2\pi}^{-1}(\Omega_\psi)$ é vazio.

Exemplo 6.3. Neste exemplo mostraremos que o sistema (1.1), sujeito a algumas alterações, configura um sistema dinâmico impulsivo tal como definimos e, mais ainda, satisfaz as hipóteses do Teorema I, admitindo portanto alguma probabilidade invariante pelo semifluxo impulsivo.

Considere o seguinte sistema de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + x - y) \end{cases} \quad (6.1)$$

definido em $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$. Como o campo (6.1) é C^∞ em \mathbb{R}^2 , as soluções do sistema existem, são únicas e C^∞ em \mathbb{R}^2 (veja [17, Capítulo VI, Seção 1, Teorema 1]).

Seja ϕ o semifluxo contínuo gerado por (6.1). Lembre que definimos sistemas dinâmicos impulsivos em espaços compactos. Pomos então $X = [0, 2] \times [0, 1]$ e definimos φ como a restrição de ϕ a X . Afirmamos que φ é um semifluxo. Com efeito, $\dot{x} = 0$ em $\{0\} \times [0, 1]$, $\dot{y} = 0$ em $[0, 2] \times \{0\}$, $\dot{y} = x - 2 \leq 0$ em $[0, 2] \times \{1\}$ e $\dot{x} = -2y \leq 0$ em $\{2\} \times [0, 1]$. Logo o campo na fronteira de X não aponta para fora de X .

Definimos o conjunto impulsivo D como o segmento de reta $x = 0.9$ em X e a função impulso por $I(x, y) = (x - 0.4, y)$. Note que aqui o sistema difere do (1.1) apresentado na introdução, pois ação do impulso não altera a coordenada y , que representa a população de predadores. Em outras palavras cada ponto do segmento de reta $x = 0.9$ é levado pela função impulso no ponto do segmento $x = 0.5$ com mesma coordenada y .

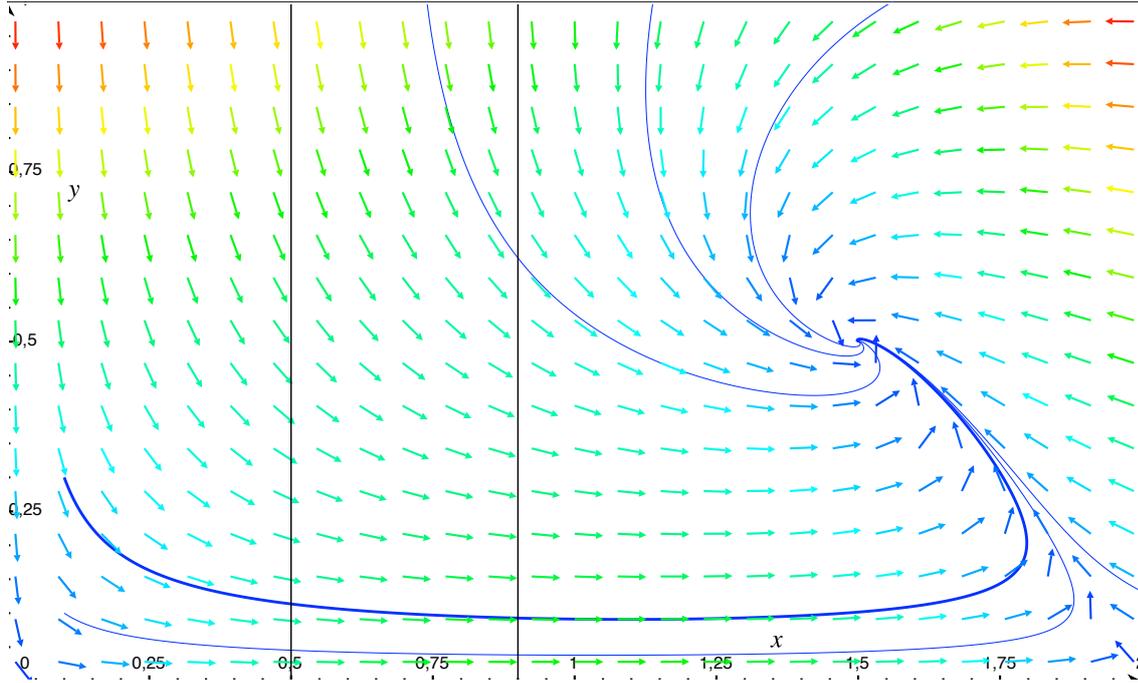


Figura 3 – Campo vetorial do sistema (6.1) restrito a X

Observe que $\dot{x} = 0.9(1.1 - y)$ é estritamente positivo em $D = \{0.9\} \times [0, 1]$. Como o campo é contínuo, segue que para cada $z \in D$ existe $U \subset X$ vizinhança de z onde $\dot{x} > 0$, o que implica que a φ -trajetória de z não retorna a D dentro de U . Logo, pelo Lema 2.10, $\tau_1(z) > 0$ para todo $z \in D$. Além disso, como o conjunto impulsivo e sua imagem são segmentos de reta paralelos, segue que $I(D) \cap D = \emptyset$ e pelo Lema 2.13, temos que $T(z) = \infty$ para todo $z \in X$. Portanto (X, φ, D, I) é de fato um sistema dinâmico impulsivo.

Provemos agora que esse sistema satisfaz as hipóteses do Teorema I, começando por mostrar que $I(\Omega_\psi \cap D) \subset \Omega_\psi \setminus D$.

Afirmamos que $\Omega_\psi = ([0.5, 0.9] \times \{0\}) \cup \{(1.5, 0.5)\}$. De fato, o sistema (6.1) possui um único nó assintoticamente estável em X , o ponto $(1.5, 0.5)$. Logo todas as ψ -trajetórias que não atingem D convergem para o ponto $(1.5, 0.5)$. As ψ -trajetórias que atingem D ficam confinadas no retângulo R delimitado por $I(D)$ e D , pois $\dot{x} = 0.5(1.5 - y)$ é estritamente positivo em $I(D)$, logo em todas as arestas com exceção de D o campo não aponta para fora deste retângulo e em D as ψ -trajetórias são transportadas pela ação do impulso para $I(D)$. Além disso, note que se $y > 0$ temos $\dot{y} = y(-1 + x - y) < 0$ se, e somente se, $(-1 + x - y) < 0$, condição que é satisfeita para todo ponto em $R \setminus ([0.5, 0.9] \times \{0\})$. Logo as ψ -trajetórias em R , e portanto todas aquelas de X que atingirem D , convergem para a órbita periódica $[0.5, 0.9] \times \{0\}$. Isso conclui a prova da nossa afirmação.

Como $I(\Omega_\psi \cap D) = I(\{(0.9, 0)\}) = \{(0.5, 0)\} \subset \Omega_\psi \setminus D$, a primeira hipótese do Teorema I está provada.

Provemos agora a continuidade de τ_D . Note que, dado $(x, y) \in [0.5, 0.9] \times \{0\}$, $\tau_D(x, y)$ coincide com $\tau_1(x, y)$, que é o tempo levado pela φ -trajetória de (x, y) para percorrer o segmento $[x, 0.9] \times \{0\}$ com velocidade $(\dot{x}, 0)$ em cada ponto dada pelo

sistema (6.1). Além disso, como $(0.9, 0) \in D$, temos que $\tau_D(0.9, 0) = 0$. Logo

$$\tau_D(x, y) = \int_x^{0.9} \frac{du}{u(2-u)}$$

para todo $(x, y) \in [0.5, 0.9] \times \{0\}$. O ponto $(1.5, 0.5)$, por sua vez, é estacionário e portanto sua φ -órbita não intersecta D , logo $\tau_D(1.5, 0.5) = \tau_1(1.5, 0.5) = \infty$. Segue que

$$\tau_D(x, y) = \begin{cases} \int_x^{0.9} \frac{du}{u(2-u)}, & \text{se } (x, y) \in [0.5; 0.9] \times \{0\}; \\ \infty, & \text{se } (x, y) \in \{(1.5; 0.5)\}. \end{cases}$$

Como $\int_x^{0.9} \frac{du}{u(2-u)}$ é contínua em $[0.5, 0.9]$, concluímos que τ_D é contínua.

Provadas as duas hipóteses acima, segue pelo Teorema I que existe probabilidade invariante pelo semifluxo impulsivo ψ . Pelo mesmo teorema, qualquer tal probabilidade tem suporte contido em $([0.5, 0.9] \times \{0\}) \cup \{(1.5, 0.5)\}$ e atribui medida nula ao conjunto $\{0.9\} \times [0, 1]$.

Referências

- [1] José F. Alves and Maria Carvalho. Invariant probability measures and non-wandering sets for impulsive semiflows. *J. Stat. Phys.*, 157(6):1097–1113, 2014.
- [2] Heinz Bauer. *Measure and integration theory*, volume 26 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2001. Translated from the German by Robert B. Burckel.
- [3] E. M. Bonotto. Flows of characteristic 0^+ in impulsive semidynamical systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 332(1):81–96, 2007.
- [4] E. M. Bonotto and M. Federson. Limit sets and the Poincaré-Bendixson theorem in impulsive semidynamical systems. *J. Differential Equations*, 244(9):2334–2349, 2008.
- [5] Krzysztof Ciesielski. On semicontinuity in impulsive dynamical systems. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 52(1):71–80, 2004.
- [6] Krzysztof Ciesielski. On stability in impulsive dynamical systems. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 52(1):81–91, 2004.
- [7] Augusto Armando de Castro Jr. *Curso de teoria da medida*. Projeto Euclides. IMPA, 2004.
- [8] Guirong Jiang and Qishao Lu. Impulsive state feedback control of a predator–prey model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200(1):193–207, 2007.
- [9] Saroop Kaul. On impulsive semidynamical systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 150(1):120–128, 1990.
- [10] Saroop K. Kaul. On impulsive semidynamical systems. II. Recursive properties. *Nonlinear Anal.*, 16(7-8):635–645, 1991.
- [11] Yongkun Li. Periodic solutions of non-autonomous cellular neural networks with impulses and delays on time scales. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 31(2):273–293, 2014.
- [12] James R Munkres. *Topology*. Prentice Hall, US, 2000.
- [13] Wladimir Neves and Valle Glauco. *Teoria da Medida, Integração e Probabilidade*. Série Didáticos. Editora UFRJ, 2014.
- [14] Krerley Oliveira and Marcelo Viana. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Coleção Fronteiras da Matemática. IMPA, 2014.
- [15] R. Purves. Bimeasurable functions. *Fund. Math.*, 58:149–157, 1966.
- [16] Gani Tr Stamov and Alexander G Stamov. On almost periodic processes in uncertain impulsive delay models of price fluctuations in commodity markets. *Applied Mathematics and Computation*, 219(10):5376–5383, 2013.

- [17] Jorge Manuel Sotomayor Tello. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1979.
- [18] Matt Visser. *Lorentzian wormholes*. AIP Series in Computational and Applied Mathematical Physics. American Institute of Physics, Woodbury, NY, 1995. From Einstein to Hawking.
- [19] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.