

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO-UFRJ
INSTITUTO DE MATEMÁTICA-IM



UFRJ

SOBRE O PROBLEMA DE CAUCHY ASSOCIADO À EQUAÇÃO NÃO
LINEAR DE SCHRÖDINGER COM DADOS EM $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$

Lindolfo Paul Mallqui Espinoza

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-graduação em Matemática,
da Universidade Federal do Rio de Janeiro,
como parte dos requisitos necessários à
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Adán José Corcho Fernández
D.Sc.

Rio de Janeiro
Julho de 2019

SOBRE O PROBLEMA DE CAUCHY ASSOCIADO À EQUAÇÃO NÃO
LINEAR DE SCHRÖDINGER COM DADOS EM $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$

Lindolfo Paul Mallqui Espinoza

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE
MATEMÁTICA DE PÓS-GRADUAÇÃO (IM) DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MATEMÁTICA.

Examinada por:

Prof. Adán José Corcho Fernández, UFRJ, Presidente.

Prof. Miguel Ángel Alejo, UFSC.

Prof. Ademir Fernando Pazoto, UFRJ.

Prof. Xavier Carvajal Paredes, UFRJ, (Suplente).

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JULHO DE 2019

SOBRE O PROBLEMA DE CAUCHY ASSOCIADO À EQUAÇÃO NÃO
LINEAR DE SCHRÖDINGER COM DADOS EM $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$

Lindolfo Paul Mallqui Espinoza

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE
MATEMÁTICA DE PÓS-GRADUAÇÃO (IM) DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MATEMÁTICA.

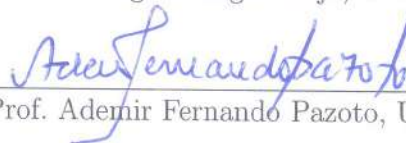
Examinada por:



Prof. Adán José Corcho Fernández, UFRJ, Presidente.



Prof. Miguel Ángel Alejo, UFSC.



Prof. Ademir Fernando Pazoto, UFRJ.

Prof. Xavier Carvajal Paredes, UFRJ, (Suplente).

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JULHO DE 2019

CIP - Catalogação na Publicação

E77s Espinoza, Lindolfo
Sobre o problema de Cauchy associado à equação não linear de Schrödinger com dados em RXT / Lindolfo Espinoza. -- Rio de Janeiro, 2019.
65 f.

Orientador: Adán Fernández.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

1. Equação não linear de Schrödinger. 2. Problema de Cauchy. 3. Boa colocação local e global. I. Fernández, Adán, orient. II. Título.

*Aos meus pais Eugenia Espinoza
e Paulo Mallqui, às minhas
irmãs e aos meus irmãos, e a
minha filha Avril.*

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Eugenia Espinoza e Paulo Mallqui, que são as pessoas mais importantes na minha vida, do mesmo jeito agradeço às minhas irmãs e aos meus irmãos pelo amor que me dão. Agradeço ainda aos demais familiares, por seu apoio e porque sempre estiveram presentes para mim.

Queria agradecer com toda gratidão ao meus amigos e colegas feitos ao longo da minha vida acadêmica, em especial durante o mestrado, com os quais compartilhei alegrias e frustrações.

À minha namorada, Angélica Miluzca, por ter caminhado ao meu lado, pela força transmitida, pela paciência e pelo amor demonstrado em todo o caminho que já percorremos juntos.

Ao meu orientador Adán J. Corcho, dedico meus agradecimentos. Não só pela excelente orientação matemática, mas também pela confiança que depositou em mim desde a nossa primeira conversa. Sem dúvida, foi uma das pessoas responsáveis pelo sucesso deste trabalho.

Concluo agradecendo à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada ao IM/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SOBRE O PROBLEMA DE CAUCHY ASSOCIADO À EQUAÇÃO NÃO
LINEAR DE SCHRÖDINGER COM DADOS EM $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$

Lindolfo Paul Mallqui Espinoza

Julho/2019

Orientador: Adán José Corcho Fernández D.Sc.

Programa: Matemática

Resumo.

Neste trabalho, apresentamos resultados de boa colocação local e global para o Problema de Valor Inicial (PVI), também conhecido como problema de Cauchy, associado a uma equação de Schrödinger não linear com dados definidos no cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. De maneira mais precisa, consideramos o modelo

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = \pm |u|^{p-1}u, & 1 < p \leq 3, \\ u(0; x, y) = \phi(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

onde $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $x \in \mathbb{R}$ e para cada x a função $u(x, \cdot)$ é 2π -periódica na variável y , o que denotamos por $y \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Os dados iniciais são considerados no espaço das funções que são de quadrado integrável em $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$, isto é, $\phi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$. A *boa colocação local* do PVI (1) significa a existência de um fluxo de soluções associado ao modelo com as seguintes propriedades:

- para cada ϕ existe um única solução $u(t; \cdot, \cdot)$ num intervalo de tempo $[-\delta, \delta]$, com δ dependendo de ϕ e p ,
- $u \in \mathcal{C}([-\delta, \delta]; \mathcal{W})$, onde \mathcal{W} é um subespaço de $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$,
- há dependência contínua dos dados iniciais, o que a grosso modo significa que para dados iniciais próximos as soluções se mantêm próximas num intervalo de tempo apropriado, $[-\delta', \delta']$.

No caso em que as propriedades acima podem ser transferidas para todo $t \in \mathbb{R}$, dizemos então que há *boa colocação global* em $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ para o modelo.

De forma mais precisa, neste trabalho mostramos que o PVI (1) é globalmente bem posto para o caso L^2 - subcrítico ($1 < p < 3$). Por outro lado, no caso L^2 - crítico ($p = 3$), mostramos que há boa colocação local para qualquer dado. Porém, as soluções globais em tempo ficam restritas a dados com norma quadrática suficientemente pequena.

Este trabalho toma como referência principal os resultados publicados por H. Takaoka e N. Tzvetkov em [19].

Palavras-chave: Equação não linear de Schrödinger, Problema de Cauchy, Boa colocação local e global.

Abstract.

In this work we show some results about local and global well-posedness for the Initial Value Problem (IVP), or Cauchy problem, associated to the nonlinear Schrödinger equation with data defined on the cylinder $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. More precisely, we consider the model

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = \pm |u|^{p-1}u, & 1 < p \leq 3, \\ u(0; x, y) = \phi(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

where $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $x \in \mathbb{R}$ and for each x the function $u(x, \cdot)$ is 2π -periodic on the y variable, that is, $y \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

The initial data ϕ are considered in the space $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$. *Local well-posedness* for the IVP (2) means the existence of a flux of solutions associated to the model with the following properties:

- for each ϕ there exists a unique solution $u(t; \cdot, \cdot)$ defined on a time interval $[-\delta, \delta]$, with δ depending on ϕ and p ,
- $u \in \mathcal{C}([-\delta, \delta]; \mathcal{W})$, where \mathcal{W} is a subspace of $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$,
- continuous dependence on the initial data.

If the above properties can be extended for all $t \in \mathbb{R}$ we say that the model is *globally well-posed* in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$.

For data in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ we prove that the IVP (2) is globally well-posed for $1 < p < 3$. On the other hand, in the case $p = 3$, we show that the IVP (2) is locally well-posed for all data; however, globally well-posed is obtained only under smallness assumption on the data.

This work is based on the results previous published by H. Takaoka and N. Tzvetkov in [19].

Key words: Nonlinear Schrödinger equation, Cauchy problem, Locally and Global well-posedness.

Introdução

Consideremos o Problema de Valor Inicial (PVI), ou simplesmente problema de Cauchy, associado a uma equação de Schrödinger não linear num domínio cilíndrico, isto é

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = \pm |u|^{p-1}u, & 1 < p \leq 3, \\ u(0; x, y) = \phi(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

onde $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ é o clássico operador de Laplace e $u(t; x, y)$ é uma função que assume valores complexos para cada $(t; x, y) \in [-\delta, \delta] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, com $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Portanto, estamos considerando soluções que são periódicas, de período 2π na direção y , ou seja,

$$u(t; x, y) = u(t; x, y + 2\pi),$$

para todo $(t; x, y) \in [-\delta, \delta] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

O modelo (3) com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ aparece na modelagem de vários fenômenos físicos, especialmente nas áreas de mecânica quântica e óptica não linear. Para ver a derivação do modelo, assim como aplicações específicas, indicamos os excelentes textos [6, 18].

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer resultados de *boa colocação local e global* para o PVI (3) no caso em que os dados iniciais são considerados no espaço $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ das funções quadrado integrável no cilindro. A *boa colocação local* de (3) significa a existência de um fluxo de soluções associado ao modelo com as seguintes propriedades:

- para cada ϕ existe uma *única* solução $u(t; \cdot, \cdot)$, definida num intervalo de tempo $[-\delta, \delta]$, com $\delta = \delta(\phi, p)$ dependendo de ϕ e p ,
- $u \in C([-\delta, \delta]; \mathcal{W})$, onde \mathcal{W} é um subespaço de $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$,
- há dependência contínua dos dados iniciais, o que a grosso modo significa que para dados iniciais próximos em $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ as soluções correspondentes se mantêm próximas, na mesma norma, num intervalo de tempo apropriado $[-\delta', \delta']$, com $\delta' \leq \delta$.

O estudo da boa colocação para a equação não linear de Schrödinger tem sido objeto de intenso estudo de vários matemáticos nas últimas décadas. No caso do ambiente espacial bi-dimensional, onde se foca nosso estudo, há um grande interesse em entender bem a dinâmica do modelo, devido às aplicações físicas relevantes que o mesmo possui.

No caso em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com dados iniciais ϕ pertencendo ao espaço $L^2(\mathbb{R}^2)$, a teoria está bem estabelecida e valem os seguintes resultados:

- boa colocação *global* em $L^2(\mathbb{R}^2)$, para $1 < p < 3$,
- boa colocação *local* em $L^2(\mathbb{R}^2)$, para $p = 3$ e, além disso, as soluções podem ser estendidas globalmente para dados com norma $\|\phi\|_{L^2} < \varepsilon_0$, com ε_0 suficientemente pequeno,
- os resultados de boa colocação global são consequência da teoria local combinados com a lei de conservação da norma $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ da solução, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t; x, y)|^2 dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x, y)|^2 dx dy. \quad (4)$$

Estes resultados podem ser encontrados em [5, 8, 16, 17, 21]. O ingrediente principal usado na prova dos mesmos é a desigualdade

$$\|e^{-it(\partial_x^2 + \partial_y^2)} \phi\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq c \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad (5)$$

onde $e^{-it(\partial_x^2 + \partial_y^2)}$ denota o grupo unitário associado às soluções da equação linear

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = 0, & t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0; x, y) = \phi(x, y). \end{cases} \quad (6)$$

A desigualdade (5) é conhecida como *Estimativa de Strichartz*, a qual é obtida a partir da estimativa de decaimento

$$\|e^{-it(\partial_x^2 + \partial_y^2)} \phi\|_{L_{x,y}^\infty} \leq c \frac{1}{|t|} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)},$$

que é consequência da dispersão do modelo.

Por outro lado, o cenário no ambiente periódico nas duas direções, quando $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, é mais complicado, pois a desigualdade (5) não é válida, visto que as soluções lineares são periódicas com repeteito ao tempo. Nesta direção, os resultados que se conhecem são os dados em [2, 3], que asseguram boa colocação local em espaços de Sobolev com regularidade positiva e, portanto, não se conhece a existência de soluções em $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$.

O objetivo principal do trabalho que aqui desenvolvemos é apresentar de forma detalhada os resultados apresentados em [19] relativos ao caso do ambiente cilíndrico, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, onde os autores aproveitam a direção contínua, $x \in \mathbb{R}$, e usam a técnica empregada no caso de $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ para fornecer uma versão localizada de desigualdade de tipo Strichartz melhor que a obtida através do método usado em [2, 3]. De forma mais precisa, provaremos os seguintes resultados.

Teorema A. Seja $1 < p < 3$. O problema de Cauchy (3) é globalmente bem posto em $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$.

Teorema B. Seja $p = 3$. O problema de Cauchy (3) é globalmente bem posto para dados iniciais em $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ suficientemente pequenos.

Os resultados estabelecidos nos teoremas acima serão enunciados com maior precisão no Capítulo 5.

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Alguns resultados de análise funcional e medida	1
2	Espaços Funcionais	6
2.1	Espaços de Sobolev em \mathbb{T}	6
2.1.1	Distribuições Periódicas	6
2.1.2	Séries de Fourier em \mathcal{P}'	8
2.1.3	Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$	8
2.2	Espaços de Sobolev em \mathbb{R}^n	10
2.2.1	A transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$	10
2.2.2	A transformada de Fourier no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	12
2.2.3	Distribuições temperadas	13
2.2.4	Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$	13
2.3	Espaços de Sobolev no cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$	14
3	Equação linear de Schrödinger num domínio cilíndrico	16
3.1	Espaços de Bourgain associados à equação linear de Schrödinger	18
4	Uma desigualdade de tipo Strichartz	30
4.1	Resultados auxiliares	30
4.2	Prova da Proposição 4.1	42
5	Equação não linear de Schrödinger num domínio cilíndrico	45
5.1	Prova do Teorema 5.1.	46
5.2	Prova do Teorema 5.2	49
	Referências Bibliográficas	53

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados de Análise Matemática que servirão como base teórica para a obtenção dos resultados principais.

1.1 Alguns resultados de análise funcional e medida

Teorema 1.1 (Medida Produto). *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) e (X, \mathcal{B}, ν) espaços de medida σ -finitos. Existe uma única medida π , chamada de medida produto, definida na σ -álgebra produto $\sigma(X \times Y)$, tal que $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$, para todo $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$. Denotemos $\pi = \mu \times \nu$.*

Demonstração. Ver Teorema 2.36, página 66 de [7]. □

Teorema 1.2 (Teorema de Fubini-Tonelli). *Suponhamos que (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) sejam espaços mensuráveis σ -finitos.*

(a) (Tonelli). *Se $f \in L^+(X \times Y)$, então as funções $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu$ e $h(y) = \int_X f(x, y) d\mu$ estão em $L^+(X)$ e $L^+(Y)$, respectivamente, e valem as igualdades*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y)$$

(b) (Fubini). *Se $f \in L^1(X \times Y)$, então $f(x, y) \in L^1(\nu)$ para quase todo ponto $x \in X$ e $f(x, y) \in L^1(\mu)$ para quase todo ponto $y \in Y$. Além disso, as funções $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu$ e $h(x) = \int_X f(x, y) d\mu$ estão definidas em quase todo ponto em $L^1(\mu)$ e $L^1(\nu)$, respectivamente, e mantém-se a conclusão de (a).*

Demonstração. Ver Teorema 2.37, página 67 de [7]. □

Lema 1.3. *Sejam X e Y espaços de Banach e assumamos que $K(t, t')$ é uma função contínua que toma valores em $\mathcal{B}(X, Y)$, o espaço de aplicações lineares limitadas de X em Y . Suponha que $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e consideremos o operador*

$$Tf(t) = \int_a^b K(t, t')f(t')dt'.$$

Assuma ainda que

$$\|Tf\|_{L^q([a,b],Y)} \leq C\|f\|_{L^p([a,b],X)}$$

e consideremos

$$Wf(t) = \int_a^t K(t, t')f(t')dt'.$$

Então, para $1 \leq p < q \leq \infty$ tem-se

$$\|Wf\|_{L^q([a,b],Y)} \leq \frac{2^{-2(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}2C}{1-2^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}}\|f\|_{L^p([a,b],X)}.$$

Demonstração. Ver Lema 3.1 de [15]. □

Observe que no caso em que $K(t, t') = \frac{1}{t-t'}$, o Lema 1.3 não vale para $p = q \in (1, \infty)$.

Teorema 1.4 (Interpolação de Riesz-Thorin). *Sejam $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$, $p_0 \neq p_1$ e T um operador linear, limitado de L^{p_0} em L^{q_0} com $\|Tf\|_{L^{q_0}} \leq M_0\|f\|_{p_0}$ e de L^{p_1} em L^{q_1} com $\|Tf\|_{L^{q_1}} \leq M_1\|f\|_{p_1}$. Então, para todo $\theta \in (0, 1)$, o operador T é limitado de L^p em L^q , com*

$$\|Tf\|_q \leq M\|f\|_p, \quad M \leq M_0^\theta M_1^{1-\theta},$$

onde

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}.$$

Demonstração. Ver Teorema 2.2, página 29 de [13]. □

Teorema 1.5 (Desigualdade de Hölder). *Suponhamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ seja aberto, limitado e de bordo bem regular. Seja $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e vale a desigualdade*

$$\int_{\Omega} |uv|dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Ver Inequação de Hölder 6.2, página 182 de [7]. □

Corolário 1.6 (Desigualdade de Hölder generalizada). *Para $p > 1$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, sejam $u \in L^p$ e $g \in L^q$. Então, $uv \in L^r$ e $\|uv\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$.*

Demonstração. Basta aplicar a desigualdade de Hölder com $p_1 = \frac{1}{p/r}$ e $q_1 = \frac{1}{q/r}$. \square

Corolário 1.7 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se $u, v \in L^2$, então $uv \in L^1$ e $|uv| \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$.*

Demonstração. Para a prova, ver o corolário acima. \square

Teorema 1.8 (Um Teorema de Interpolação). *Sejam $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$, tais que*

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}, \text{ com } \theta \in (0, 1).$$

Suponhamos que $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$. Então, $f \in L^r(X)$ e, além disso, vale

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\theta \|f\|_{L^q}^{1-\theta},$$

para $\theta \in (0, 1)$.

Demonstração. Seja $\theta \in (0, 1)$ e notemos que $\frac{p}{\theta r}$ e $\frac{q}{(1-\theta)r}$ são conjugados. Logo,

$$\begin{aligned} \int_X |f|^r dx &= \int_X |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} dx \\ &\leq \left(\int_X |f|^{\theta r \frac{p}{\theta r}} dx \right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_X |f|^{(1-\theta)r \frac{q}{(1-\theta)r}} dx \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}} \\ &= \left(\int_X |f|^p dx \right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_X |f|^q dx \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da desigualdade acima à potência $1/r$ temos o resultado. \square

Lema 1.9. *Sejam $a, b \in [0, \infty)$ e $s \geq 0$. Então, existem constantes positivas m_s e M_s , dependendo apenas de s , tais que*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a + b)^s \leq M_s(a^s + b^s). \quad (1.1)$$

Demonstração. Se $a = 0$ a desigualdade é trivial. Assuma $a > 0$. Então, (1.1) é equivalente a

$$m_s \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^s \right] \leq \left(1 + \frac{b}{a} \right)^s \leq M_s \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^s \right],$$

então é suficiente mostrar que existem m_s e M_s , tais que

$$m_s(1 + r^s) \leq (1 + r)^s \leq M_s(1 + r^s), \forall r \in [0, \infty).$$

Isso ocorre do fato da função $f(r) = \frac{(1+r)^s}{1+r^s}$ ser limitada. Com efeito, observe que para todo $r, s \geq 0$, tem-se

$$1 \leq (1+r)^s \quad e \quad r^s \leq (1+r)^s,$$

logo,

$$1 + r^s \leq 2(1+r)^s,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(1+r)^s}{1+r^s}.$$

Agora, para $r > 1$ tem-se

$$(1+r)^s \leq (r+r)^s = (2r)^s;$$

portanto

$$(1+r)^s \leq 2^s(1+r^s),$$

ou seja,

$$\frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq 2^s.$$

Observe que a função $r \mapsto \frac{(1+r)^s}{1+r^s}$ é contínua em $[0, 1]$ e não se anula nesse intervalo. Logo, existe $C_1 = \min_{r \in [0,1]} \left\{ \frac{(1+r)^s}{1+r^s} \right\} > 0$. Tomando $C = \max\{2^s, C_1\}$, vemos que

$$\frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq C.$$

Isso conclui a prova. □

Lema 1.10. *Seja $g : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ definida por $g(z) = |z|^p z$, $1 < p$. Então,*

$$\left| |z_1|^p z_1 - |z_2|^p z_2 \right| \leq C(|z_1|^p + |z_2|^p) |z_1 - z_2|.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade suponhamos que $|z_1| < |z_2|$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left| |z_1|^p z_1 - |z_2|^p z_2 \right| &= \left| |z_1|^p z_1 - |z_1|^p z_2 + |z_1|^p z_2 - |z_2|^p z_2 \right| \\ &\leq |z_1|^p |z_1 - z_2| + |z_2| (|z_1|^p - |z_2|^p). \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio à função $|z|^p$, obtemos $\theta \in (0, 1)$, tal que

$$\begin{aligned} \left| |z_1|^p z_1 - |z_2|^p z_2 \right| &\leq |z_1|^p |z_1 - z_2| + |z_2| p ((1-\theta)|z_1| + \theta|z_2|)^{p-1} |z_1 - z_2| \\ &\leq |z_1|^p |z_1 - z_2| + |z_2| p |z_2|^{p-1} |z_1 - z_2| \\ &\leq p (|z_1|^p + |z_2|^p) |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

□

Por último, mostraremos uma propriedade de cálculo elementar que será útil.

Lema 1.11. *Para cada $\theta \in [0, \pi/2]$, existe uma constante $R > 0$, tal que*

$$\theta \leq \sin \theta + R \sin^2 \theta.$$

Demonstração. Seja $f(\theta) = \theta - \sin \theta - R \sin^2 \theta$, com $R > 0$. Note que $f(0) = 0$ e

$$f'(\theta) = 1 - \cos \theta - R \sin 2\theta.$$

Basta provar então que $f' < 0$, para algum R , pois nesse caso $f(\theta) \leq f(0) = 0$.

Para isso, notamos que $\frac{1 - \cos \theta}{\sin 2\theta}$ é limitado em $(0, \pi/2)$. De fato: a fração é contínua no intervalo $(0, \pi)$ e além disso,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \theta}{\sin 2\theta} = 0 \quad e \quad \lim_{h \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \cos \theta}{\sin 2\theta} = -1.$$

Portanto, existe um $M > 0$, tal que $\frac{1 - \cos \theta}{\sin 2\theta} \leq M$, para todo $\theta \in (0, \pi/2)$.

Agora é suficiente tomar $R = M + 1$.

□

Capítulo 2

Espaços Funcionais

2.1 Espaços de Sobolev em \mathbb{T}

Todos os resultados enunciados nesta seção são básicos. Por isso suas demonstrações serão omitidas. Algumas referências excelentes que contém em detalhes o desenvolvimento destas teorias básicas sobre as séries de Fourier para distribuições periódicas são os textos [10, 13], onde o leitor poderá encontrar as provas de todos os resultados.

2.1.1 Distribuições Periódicas

Para simplificar a exposição usaremos a notação $C_{per}^k(-\pi, \pi) = C^\infty(\mathbb{T})$, onde \mathbb{T} representa o toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, para denotar a classe das funções com k derivadas contínuas em \mathbb{R} e periódicas de período 2π .

Particularmente, denotamos por $\mathcal{P} = C^\infty(-\pi, \pi)$ a coleção de todas as funções $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que são $C^\infty(\mathbb{R})$ e periódicas de período 2π .

O espaço vetorial \mathcal{P} não é completo em relação às normas naturais de $C^k(\mathbb{T})$. No entanto, a aplicação

$$d(\phi, \psi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \frac{\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{1 + \|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}, \quad \phi, \psi \in \mathcal{P},$$

define uma métrica em \mathcal{P} .

Teorema 2.1. *(\mathcal{P}, d) é um espaço métrico completo. Além disso, se consideramos $\{\phi_n\} \subset \mathcal{P}$ e $\phi \in \mathcal{P}$, temos que*

$$\phi_n \xrightarrow{d} \phi \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n^{(j)} - \phi^{(j)}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 0 \quad \text{para todo } j \geq 0.$$

Demonstração. Ver Teorema 3.1, página 133 de [10]. □

Denotaremos por $S(\mathbb{Z})$ o espaço das seqüências que decrescem rapidamente, isto é, o conjunto de todas seqüências complexas $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, tais que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^j |\alpha_k| < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Observe que d_1 definida por

$$d_1(\alpha, \beta) = \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \frac{\|\alpha^{(j)} - \beta^{(j)}\|_{\infty, j}}{1 + \|\alpha^{(j)} - \beta^{(j)}\|_{\infty, j}} \quad \alpha, \beta \in S(\mathbb{Z}),$$

onde

$$\|\alpha\|_{\infty, j} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} (|\alpha_k| |k|^j),$$

também define uma métrica em $S(\mathbb{Z})$. Assim, $S(\mathbb{Z})$ é um espaço métrico completo.

Dada uma função $f \in \mathcal{P}$, lembramos que a transformada de Fourier de f é dada pela seqüência $\hat{f} := (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, com

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.1)$$

Teorema 2.2. *A transformada de Fourier $\hat{\cdot} : (\mathcal{P}, d) \longrightarrow (S(\mathbb{Z}), d_1)$ é um isomorfismo linear e um homeomorfismo, ou seja, é uma bijeção linear contínua com inversa contínua em relação às métricas d e d_1 .*

Demonstração. Ver Teorema 3.6, página 135 de [10]. □

Teorema 2.3. *Seja $f \in \mathcal{P}$. Então, valem as seguintes igualdades:*

$$(a) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = 2\pi \|\hat{f}\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2,$$

$$(b) \quad \int_{\mathbb{T}} f(x) \bar{g}(x) dx = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \bar{\hat{g}}(k),$$

conhecidas como identidades de Parseval.

Demonstração. Ver Teorema 3.166, página 187 de [10]. □

Um funcional linear $T : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}$ é chamado uma *distribuição periódica* se existe uma seqüência $(\psi_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}$, tal que

$$T(\phi) = \langle T, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{P}.$$

Denotaremos por \mathcal{P}' o dual topológico de \mathcal{P} , isto é, o espaço de todos os funcionais lineares contínuos de \mathcal{P} em \mathbb{C} ; também chamamos \mathcal{P}' o espaço das distribuições periódicas.

Dado um elemento $f \in \mathcal{P}'$, sua *derivada distribucional* $f' \in \mathcal{P}'$ é definida pela relação

$$\langle f', \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle, \quad \phi \in \mathcal{P}.$$

Em geral, temos

$$\langle f^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \langle f, \phi^{(n)} \rangle.$$

2.1.2 Séries de Fourier em \mathcal{P}'

Dado $f \in \mathcal{P}'$, como cada função $\phi_k = e^{-ikx} \in \mathcal{P}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, definimos de forma natural a *transformada de Fourier* de f em \mathcal{P}' como sendo a função $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{f}(k) = \langle f, \phi_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e a *n-ésima soma parcial da série de Fourier* associada a f é dada por

$$S_n[f](x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx} \in \mathcal{P}.$$

Teorema 2.4. *Sejam $\phi \in \mathcal{P}$ e $f \in \mathcal{P}'$. Então, $S_n[\phi] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} \phi$ e $S_n[f] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}'} f$. Consequentemente, vale a igualdade*

$$\langle f, \phi \rangle = 2\pi \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) \hat{\phi}(-k).$$

Demonstração. Ver Teorema 3.166 e Corolário 3.167 da página 187 de [10]. □

2.1.3 Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$

Para cada $s \in \mathbb{R}$, o *espaço de Sobolev* de ordem s , em \mathbb{T} , é definido pelas distribuições $f \in \mathcal{P}'$ que satisfazem

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)^s |\hat{f}(n)|^2 < \infty.$$

Mais concretamente, $H^s(\mathbb{T}) = \{f \in \mathcal{P}' : \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} < \infty\}$, onde

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T})} = \|(1 + n^2)^{s/2} \hat{f}\|_{\ell_n^2}.$$

Observação 2.5. $H^0(\mathbb{T})$ é também denotado por $L_{per}^2[-\pi, \pi]$ e pode ser caracterizado como a coleção das distribuições em \mathcal{P}' que são limites (no sentido de \mathcal{P}') de

sequências $(\psi_n) \subset \mathcal{P}$ de Cauchy em relação à norma usual L^2 .

O espaço $H^s(\mathbb{T})$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^s(\mathbb{T})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)^s \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}.$$

Da definição dos espaços de Sobolev tem-se os seguintes resultados:

Proposição 2.6. *Sejam $s, r \in \mathbb{R}$.*

(a) *Se $s > r$. Então $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T})$, isto é, $H^s(\mathbb{T})$ é continuamente e densamente mergulhado em $H^r(\mathbb{T})$ e*

$$\|f\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{T})}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{T}).$$

(b) *Para $s \in \mathbb{R}$, $(H^s(\mathbb{T}))'$ é o dual topológico de $H^s(\mathbb{T})$, que é isometricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{T})$.*

(c) *(Lema de Sobolev). Se $s > \frac{1}{2}$, então $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T})$ e*

$$\|f\|_{\infty} \leq \|\widehat{f}\|_{l^1} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{T})}.$$

(d) *Se $s > 1/2$, $H^s(\mathbb{T})$ é uma álgebra de Banach. Em particular, existe uma constante $C_s \geq 0$, (dependendo apenas de s), tal que*

$$\|fg\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C_s \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} \|g\|_{H^s(\mathbb{T})}, \quad \forall f, g \in H^s(\mathbb{T}).$$

Demonstração. Ver páginas 201-208 de [10]. □

Teorema 2.7 (Identidade de Parseval). *A série de Fourier estabelece uma bijeção entre $L^2_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ e $\ell^2(\mathbb{Z})$. Além disso, vale a identidade de Parseval*

$$\|f\|_{L^2}^2 := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 =: \|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2,$$

onde $L^2_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ denota o espaço das funções 1-periódicas que são de quadrado integráveis no intervalo $[-\pi, \pi]$ e $\widehat{f} := \{\widehat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Demonstração. Ver Corolário 3.167, página 188 de [10]. □

2.2 Espaços de Sobolev em \mathbb{R}^n

2.2.1 A transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a *transformada de Fourier* de f como sendo

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$, é o produto interno usual em \mathbb{R}^n .

Apresentaremos algumas propriedades básicas da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.8. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então*

(a) $f \mapsto \widehat{f}$ define uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1.$$

(b) \widehat{f} é contínua.

(c) $\widehat{f} \rightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ (Riemann-Lebesgue).

(d) Seja $\tau_h f(x) = f(x - h)$ a traslação por $h \in \mathbb{R}^n$, então

$$\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-ih \cdot \xi} \widehat{f}(\xi).$$

(e) Seja $\delta_a f(x) = f(ax)$ a dilatação por $a > 0$, então

$$\widehat{(\delta_a f)}(\xi) = \frac{1}{a^n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

(f) Se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f * g$ denota a convolução de f e g . Então,

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi).$$

(g) Se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{g}(y) dy.$$

Demonstração. Ver páginas 1-3 de [13]. □

Denotemos para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Proposição 2.9. *Sejam $\alpha, k \in \mathbb{Z}$. Então,*

(a) *se $x^\alpha f \in L^1$, $|\alpha| \leq k$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, então, $\widehat{f} \in C^k$ e*

$$\partial_x^\alpha \widehat{f} = ((-ix)^\alpha f)^\wedge.$$

(b) *se $f \in C^k$, $\partial^\alpha f \in L^1$, $|\alpha| \leq k$ e $\partial^\alpha f \in C_0$, então,*

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Demonstração. Ver Proposição 1.8 (página 4) e Teorema 1.10 (página 5) de [13]. \square

Proposição 2.10 (Fórmula de inversão). *Se $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então,*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Ver Proposição 1.11, página 6 de [13]. \square

Proposição 2.11 (Plancherel). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então, $f \in L^2$ e*

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Demonstração. Ver Teorema 1.12, página 7 de [13]. \square

Definição 2.12. *Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos a transformada inversa de Fourier de f como*

$$f^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/n}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição 2.13. *Sejam $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então, valem as seguintes igualdades:*

(a) $(\widehat{f^\vee}) = f = (\widehat{f})^\vee$

(b) $f^\vee(x) = \widehat{f}(-x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver página 341 de [10]. \square

2.2.2 A transformada de Fourier no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Sejam $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ e seja a seminorma $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$ definida por

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty.$$

Definimos o *espaço de Schwartz*, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, como sendo a coleção das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, tais que $\|f\|_{\alpha, \beta} < \infty$.

Seja $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ a coleção das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ e suporte compacto. Temos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, observe que, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $x^\alpha f^{(\beta)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, além disso, $x^\alpha f^{(\beta)}(x)$ tende a zero quando $|x|$ tende para infinito, para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$.

Definição 2.14. *Seja $(\varphi)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, $\varphi_n \rightarrow 0$ se, para cada $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, temos que $\|\varphi_n\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Seguem alguns resultados.

Proposição 2.15. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então:*

(a) *A transformação $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nele mesmo.*

(b)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx.$$

(c)
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

(d) *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $f^{(\alpha)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ e*

$$(f^{(\alpha)})^\widehat{(\xi)} = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Ver páginas 338-339 de [10]. □

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, defina a *transformada inversa de Fourier* pela fórmula

$$f^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{ixy}dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição 2.16. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, vale a identidade de Parseval*

$$\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle,$$

e a identidade de Plancherel

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}.$$

Demonstração. Ver teorema 7.43, página 743 de [10]. □

Definição 2.17. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f é dada por*

$$\widehat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\varphi}_n,$$

onde $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é tal que φ_n converge a f em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.2.3 Distribuições temperadas

Definição 2.18. *A transformação $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ define uma distribuição temperada se:*

(a) T é linear,

(b) T é contínua, isto é, se para cada $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tal que $\varphi_n \rightarrow 0$, então a sequência numérica $T(\varphi_n) \rightarrow 0$.

O conjunto de todas as distribuições temperadas serão denotadas por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Observação. 2.19. *Toda função limitada f define uma distribuição temperada T_f , onde*

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 2.20. *Dada $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, sua transformada de Fourier $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é definida por*

$$\widehat{\psi}(\varphi) = \psi(\widehat{\varphi}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Observação. 2.21. *Para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que $\widehat{\psi}_f = \psi_{\widehat{f}}$.*

Definição 2.22. *Seja $(\varphi)_n \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Então, $\varphi_n \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se, para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tem-se $\psi_n(\varphi) \rightarrow 0$.*

Teorema 2.23. *A transformação $\psi \mapsto \widehat{\psi}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nele mesmo.*

Demonstração. Ver Teorema 1.25, página 13 de [13]. □

2.2.4 Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

Seja $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev de ordem s , denotado por $H^s(\mathbb{R}^n)$, é definido por

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

com norma $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ definida por

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f} \right\|_{L^2_{\xi}}.$$

Proposição 2.24. *Sejam $s, r \in \mathbb{R}$.*

(a) *Se $0 \leq s < r$, então $H^r(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *$H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno*

$$\langle f, g \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s f(\xi) \bar{g}(\xi) d\xi, \text{ para cada } f, g \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

(c) *Para todo $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s > 0$.*

(d) *Se $s_1 \leq s \leq s_2$ e $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$, para $0 \leq \theta \leq 1$, então*

$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^{s_1}}^\theta \|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}.$$

Demonstração. Ver Proposição 3.6, página 48 de [13]. □

2.3 Espaços de Sobolev no cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$

Seja $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev de ordem s num domínio cilíndrico $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$, denotado por $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, é definido por

$$H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) : \|f\|_{H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} < \infty\},$$

onde a norma é definida por

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} = \left\| (1 + \xi^2 + n^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi, n) \right\|_{L_\xi^2 \ell_n^2},$$

com

$$\widehat{f}(\xi, n) = c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-ix\xi} e^{-iy n} dy dx,$$

onde c é uma constante de normalização conveniente.

Da definição do espaço de Sobolev no cilindro deduzimos as propriedades a seguir.

Proposição 2.25. *Sejam $s, r \in \mathbb{R}$.*

(a) *Se $0 \leq s < r$, então $H^r(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \subset H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$.*

(b) *$H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno*

$$\langle f, g \rangle_{H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + \xi^2 + n^2)^{s/2} f(\xi, n) (1 + \xi^2 + n^2)^{s/2} \overline{g(\xi, n)} d\xi,$$

para cada $f, g \in H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$.

(c) O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ é denso em $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

(d) Sejam $s_1 < s_2$ e $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$, com $0 \leq \theta \leq 1$. Então,

$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^{s_1}}^\theta \|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}.$$

Demonstração. Ver Proposição 3.6, página 38 de [13].

□

Capítulo 3

Equação linear de Schrödinger num domínio cilíndrico

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades básicas no cilindro, do grupo associado à equação linear de Schrödinger.

Consideremos o Problema de Valor Inicial (PVI) associado à equação linear homogênea de Schrödinger, isto é

$$\begin{cases} iu_t(t; x, y) - \Delta u(t; x, y) = 0, & t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ u(0; x, y) = \phi(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\Delta u(t; x, y) := u_{xx}(t; x, y) + u_{yy}(t; x, y)$.

Suponhamos que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$. Tomando a transformada de Fourier com respeito às variáveis espaciais (x, y) em (3.1), obtemos

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(t; \xi, n) - i(\xi^2 + n^2)\widehat{u}(t; \xi, n) = 0; \\ \widehat{u}(0; \xi, n) = \widehat{\phi}(\xi, n). \end{cases} \quad (3.2)$$

Fixando $(\xi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ reduzimos o problema de Cauchy de uma equação diferencial parcial (EDP) a um problema de valor inicial para uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem. Sabe-se que a solução da família da EDO (3.2) com parâmetro (ξ, n) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\widehat{u}(t; \xi, n) = e^{it(\xi^2 + n^2)} \widehat{\phi}(\xi, n).$$

Logo, aplicando a transformada de Fourier inversa e o item (f) da Proposição 2.8, temos

$$u(t; x, y) = (e^{it(\xi^2 + n^2)} \widehat{\phi}(\xi, n))^\vee = (e^{it(\xi^2 + n^2)})^\vee * \phi(x, y).$$

Fixando $s \in \mathbb{R}$, definimos o operador $U(t) : H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ dado por

$$U(t)(\phi) := (e^{it(\xi^2+n^2)}\widehat{\phi})^\vee \quad (3.3)$$

Proposição 3.1. *A família $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, como foi definida em (3.3), satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *Para todo $t \in \mathbb{R}$, $U(t) : L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ é uma isometria, o que implica que*

$$\|U(t)f\|_{L^2_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} = \|f\|_{L^2_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}.$$

(b) $U(t)U(t') = U(t+t')$, com $U(t)^{-1} = U(-t)$.

(c) $U(0) = I$.

(d) *Fixando $f \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, o funcional $\Phi_f : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ definido por $\Phi_f(t) = U(t)f$ é uma função contínua.*

Demonstração. (a) Seja $f \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, pelo Teorema de Plancherel, temos

$$\begin{aligned} \|U(t)f\|_{L^2_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}^2 &= \|\widehat{U(t)f}\|_{L^2_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{U(t)f}(\xi, n)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |e^{it(\xi^2+n^2)} \widehat{f}(\xi, n)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi, n)|^2 d\xi \\ &= \|\widehat{f}\|_{L^2_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}^2 \\ &= \|f\|_{L^2_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}^2. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (U(t+t')f)\widehat{(\xi, n)} &= e^{it(t+t')(\xi^2+n^2)} \widehat{f}(\xi, n) \\ &= e^{it(\xi^2+n^2)} (e^{it'(\xi^2+n^2)} \widehat{f}(\xi, n)) \\ &= e^{it(\xi^2+n^2)} \widehat{U(t')f}(\xi, n) \\ &= (U(t)U(t')f)\widehat{(\xi, n)}. \end{aligned}$$

Tomando transformada de Fourier inversa em cada lado, temos

$$U(t+t')f(x, \tau) = U(t)U(t')f(x, \tau).$$

Isto mostra o resultado.

(c) É imediato.

(d) Nesta prova usaremos o teorema da convergência dominada.

$$\begin{aligned}
\lim_{t_n \rightarrow t} \|\Phi_f(t) - \Phi_f(t_n)\|_{L^2_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} &= \lim_{t_n \rightarrow t} \|U(t)f - U(t_n)f\|_{L^2_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} \\
&= \lim_{t_n \rightarrow t} \|\widehat{U(t)f} - \widehat{U(t_n)f}\|_{L^2_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} \\
&= \lim_{t_n \rightarrow t} \|e^{it(\xi^2+n^2)}\widehat{f} - e^{it_n(\xi^2+n^2)}\widehat{f}\|_{L^2_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Em geral, a família dos operadores $\{T_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ definidos num espaço de Hilbert H e que satisfaz as propriedades de (a) - (d), dadas pela proposição acima, é chamada *grupo unitário de operadores*.

3.1 Espaços de Bourgain associados à equação linear de Schrödinger

Aqui será definido o ambiente funcional que servirá como base para estudar, no Capítulo 4, o modelo não linear.

Definição 3.2. *Seja \mathcal{A} o espaço das funções f , tais que:*

(a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$,

(b) $f(\cdot; \cdot, y) \in S(\mathbb{R}^2)$, para cada $y \in \mathbb{T}$,

(c) $f(t; x, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{T})$, para todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

Dados $s, b \in \mathbb{R}$ o espaço de Bourgain $X^{s,b}$ associados à equação de Schrödinger com dado em $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ é o complemento de \mathcal{A} com respeito à norma

$$\|f\|_{X^{s,b}} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |\xi| + |n|)^{2s} (1 + |\tau - \xi^2 - n^2|)^{2b} |\widehat{f}(\tau; \xi, n)|^2 d\tau d\xi \right\}^{1/2}.$$

Daqui em frente usaremos a seguinte notação $\langle \cdot \rangle := 1 + |\cdot|$. Então, a norma pode ser reescrita como

$$\|f\|_{X^{s,b}} = \|\langle |\xi| + |n| \rangle^s \langle \tau - \xi^2 - n^2 \rangle^b \widehat{f}(\tau; \xi, n)\|_{L^2_{\tau\xi n}}.$$

Iniciaremos apresentando a equivalência da norma definida acima.

Proposição 3.3. *A definição do espaço de Bourgain $X^{s,b}$ é tal que*

$$\|f\|_{X^{s,b}} = \|U(-t)f\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s}.$$

Demonstração. Aplicando a definição do espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, segue que

$$\begin{aligned} \|U(-t)f\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s}^2 &= \|(1 + |\xi| + |n|)^s (1 + |\tau|)^b (U(-t)f)\widehat{f}(\tau; \xi, n)\|_{L_\tau^2 L_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^2}^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |\xi| + |n|)^{2s} (1 + |\tau|)^{2b} |(U(-t)f)\widehat{f}(\tau; \xi, n)|^2 d\tau d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |\xi| + |n|)^{2s} (1 + |\tau|)^{2b} \left| \int_{\mathbb{R}} (U(-t)f)\widehat{f}(t; \xi, n) e^{-it\tau} dt \right|^2 d\tau d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |\xi| + |n|)^{2s} (1 + |\tau|)^{2b} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\xi^2 + n^2)} \widehat{f}(t; \xi, n) e^{-it\tau} dt \right|^2 d\tau d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |\xi| + |n|)^{2s} (1 + |\tau|)^{2b} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t; \xi, n) e^{-it(\tau + \xi^2 + n^2)} dt \right|^2 d\tau d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |\xi| + |n|)^{2s} (1 + |\tau|)^{2b} \left| \widehat{f}(\tau + \xi^2 + n^2; \xi, n) \right|^2 d\tau d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |\xi| + |n|)^{2s} (1 + |\tau - \xi^2 - n^2|)^{2b} |\widehat{f}(\tau; \xi, n)|^2 d\tau d\xi \\ &= \|f\|_{X^{s,b}}^2, \text{ de onde decorre a igualdade.} \quad \square \end{aligned}$$

Definimos uma função de corte, isto é, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, tal que

$$\text{supp } \psi \subset (-2, 2) \quad \text{e} \quad \psi(t) = 1, \text{ se } |t| \leq 1. \quad (3.4)$$

Além disso, $\psi_\delta(\cdot) := \psi(\frac{\cdot}{\delta})$, para $0 < \delta \leq 1$.

Proposição 3.4. *Sejam $s, b \in \mathbb{R}$. Então, vale a desigualdade*

$$\|\psi U(t)\phi\|_{X^{s,b}} \leq C \|\phi\|_{H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s}, \quad (3.5)$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração. Das definições dos espaços $X^{s,b}$ e da função ψ , bem como do fato de $U(t)$ ser un grupo unitário, ψ estar em função do tempo e ϕ em função do espaço,

podemos deduzir que

$$\begin{aligned}
\|\psi U(t)\phi\|_{X^{s,b}} &= \|U(-t)\psi U(t)\phi\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} \\
&= \|U(-t)U(t)\psi\phi\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} \\
&= \|\psi\phi\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} \\
&= \|(1 + \tau^2)^{b/2} (1 + \xi^2 + n^2)^{s/2} \widehat{\psi\phi}(\tau; \xi, n)\|_{L_{\tau\xi}^2 \ell_n^2} \\
&= \|(1 + \tau^2)^{b/2} (1 + \xi^2 + n^2)^{s/2} \widehat{\psi}(\tau) \widehat{\phi}(\xi, n)\|_{L_{\tau\xi}^2 \ell_n^2} \\
&= \|((1 + \tau^2)^{b/2} \widehat{\psi}(\tau)) ((1 + \xi^2 + n^2)^{s/2} \widehat{\phi}(\xi, n))\|_{L_{\tau\xi}^2 \ell_n^2} \\
&= \|((1 + \tau^2)^{b/2} \widehat{\psi}(\tau))\|_{L_\tau^2} \|((1 + \xi^2 + n^2)^{s/2} \widehat{\phi}(\xi, n))\|_{\ell_n^2} \\
&= \|\psi\|_{H_t^b} \|\phi\|_{H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s}.
\end{aligned}$$

Da densidade de C_0^∞ em H^s obtendo-se o resultado. \square

Apresentaremos a seguir as propriedades regularizantes dos espaços $X^{s,b}$ para a equação não homogênea

$$iu_t - \Delta u = F(t; x, y).$$

Daqui em diante usaremos as seguintes notações:

$$-i\psi_\delta(U *_R F) := -i\psi_\delta \int_0^t U(t-t') F(t'; \cdot, \cdot) dt' \quad (3.6)$$

$$(LF)(t) := -i\psi_\delta \int_0^t F(t'; \cdot, \cdot) dt'. \quad (3.7)$$

A notação em (3.6) denota a convolução retardada no tempo.

Proposição 3.5. *Para $b, b' \in \mathbb{R}$, as seguintes desigualdades são equivalentes*

$$\| -i\psi_\delta(U *_R F) \|_{X^{s,b}} \leq C \|F\|_{X^{s,b'}} \quad (3.8)$$

$$\|(LF)(t)\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} \leq C \|F\|_{H_t^{b'} H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s}, \quad (3.9)$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração. Inicialmente provaremos que (3.9) implica (3.8). Seja $F \in X^{s,b}$. Logo, por definição, $U(-t)F \in H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s$. Seja $G = U(-t)F$, sendo assim, por (3.9) temos

$$\|(LG)(t)\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} \leq C \|G\|_{H_t^{b'} H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} = C \|F\|_{X^{s,b'}}.$$

Resta provar que $\|(LG)(t)\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} = \| -i\psi_\delta(U *_R F) \|_{X^{s,b}}$.

De fato:

$$\begin{aligned}
\|(LG)(t)\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} &= \|\psi_\delta \int_0^t G(t'; \cdot, \cdot) dt'\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} \\
&= \|\psi_\delta \int_0^t U(-t') F(t'; \cdot, \cdot) dt'\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} \\
&= \|U(-t) \psi_\delta \int_0^t U(t-t') F(t'; \cdot, \cdot) dt'\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} \\
&= \|\psi_\delta \int_0^t U(t-t') F(t'; \cdot, \cdot) dt'\|_{X^{s,b}} \\
&= \|-i\psi_\delta(U *_R F)\|_{X^{s,b}}.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $G \in H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s$, note que $U(-t)U(t)G \in H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s$. Assim, pela definição de $X^{s,b}$, temos que $U(t)G \in X^{s,b}$. Consideremos $F = U(t)G$, sendo assim, por (3.8) temos

$$\|-i\psi_\delta(U *_R F)\|_{X^{s,b}} \leq C\|F\|_{X^{s,b'}} = C\|G\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s}.$$

Resta provar que $\|-i\psi_\delta(U *_R F)\|_{X^{s,b}} = \|(LG)(t)\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s}$. De fato:

$$\begin{aligned}
\|-i\psi_\delta(U *_R F)\|_{X^{s,b}} &= \|-i\psi_\delta \int_0^t U(t-t') F(t'; \cdot, \cdot) dt'\|_{X^{s,b}} \\
&= \|-i\psi_\delta \int_0^t U(t) G(t'; \cdot, \cdot) dt'\|_{X^{s,b}} \\
&= \|U(t) [-i\psi_\delta \int_0^t G(t'; \cdot, \cdot) dt']\|_{X^{s,b}} \\
&= \|-i\psi_\delta \int_0^t G(t'; \cdot, \cdot) dt'\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s} \\
&= \|(LG)(t)\|_{H_t^b H_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^s}.
\end{aligned}$$

□

Apresentamos o lema principal desta seção, o qual foi provado em [9] e será útil no Capítulo 5.

Lema 3.6. *Sejam $\tilde{b} \leq 0 \leq b \leq \tilde{b} + 1$ e $0 < \delta \leq 1$. Então,*

$$\|LF\|_{H_t^b} \leq C \left\{ \delta^{1+\tilde{b}-b} \|F\|_{H_t^{\tilde{b}}} + \delta^{1/2-b} \left\| \langle \tau \rangle^{-1} \mathcal{X}_{\{|\tau| \geq 1\}} \widehat{F} \right\|_{L_\tau^1} \right\}, \quad (3.10)$$

$$\|\psi_\delta(U *_R F)\|_{X^{s,b}} \leq C\sqrt{2} \left\{ \delta^{1/2-b} \left\| \langle |\xi| + |n| \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^2 - n^2 \rangle^{-1} \widehat{F} \right\|_{\ell_n^2 L_\tau^1} + \delta^{1+\tilde{b}-b} \|F\|_{X^{s,b}} \right\}, \quad (3.11)$$

coma mesma constante positiva C em (3.10) e (3.11).

Além disso, se $\tilde{b} > -1/2$, então

$$\|LF\|_{H_t^b} \leq C\delta^{1+\tilde{b}-b} \|F\|_{H_t^{\tilde{b}}} \quad (3.12)$$

$$\|\psi_\delta(U *_R F)\|_{X^{s,b}} \leq C\delta^{1+\tilde{b}-b} \|F\|_{X^{s,\tilde{b}}}, \quad (3.13)$$

com a mesma constante positiva C em (3.12) e (3.13).

Demonstração. Para simplificar a escrita definimos $J(t) := (LF)(t)$. A transformada de Fourier de J em relação a t é dada por

$$\widehat{J}(\tau) = C \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\gamma) \frac{\widehat{\psi}_\delta(\tau - \gamma) - \widehat{\psi}_\delta(\tau)}{\gamma} d\gamma. \quad (3.14)$$

De fato: se $G(t) = \int_0^t F(\gamma) d\gamma$, das propriedades da transformada de Fourier e de convolução, tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{J}(\tau) &= \widehat{\psi}_\delta * \left(\int_0^t F(\gamma) d\gamma \right)^\wedge(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_\delta(\tau - \gamma) \frac{\widehat{F}(\gamma)}{i\gamma} d\gamma \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\psi}_\delta(\tau - \gamma) - \widehat{\psi}_\delta(\tau)}{i\gamma} \widehat{F}(\gamma) d\gamma + \widehat{\psi}_\delta(t) \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{F}(\gamma)}{i\gamma} d\gamma \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\psi}_\delta(\tau - \gamma) - \widehat{\psi}_\delta(\tau)}{i\gamma} \widehat{F}(\gamma) d\gamma, \end{aligned}$$

pois, usando a fórmula de inversão temos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{F}(\gamma)}{i\gamma} d\gamma = \int_{\mathbb{R}} \widehat{G}(\gamma) d\gamma = \int_{\mathbb{R}} e^{i0\gamma} \widehat{G}(\gamma) d\gamma = G(0) = 0.$$

Seja $A = \{\tau \in \mathbb{R}; |\tau|\delta \geq 1\}$.

Podemos escrever $F = F_+ + F_-$ onde $\widehat{F}_+(\tau) = \widehat{F}(\tau)\mathcal{X}_A$ e $\widehat{F}_-(\tau) = \widehat{F}(\tau)\mathcal{X}_{A^c}$, e, respectivamente, $J = J_+ + J_-$ onde $\widehat{J}_+(\tau) = \widehat{J}(\tau)\mathcal{X}_A$ e $\widehat{J}_-(\tau) = \widehat{J}(\tau)\mathcal{X}_{A^c}$. Assim, a transformada de Fourier de J_- em relação a t é dada por

$$\widehat{J}_-(\tau) = C \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \widehat{F}_-(\gamma) (\widehat{\psi}_\delta)'(\tau - \lambda\gamma) d\lambda d\gamma. \quad (3.15)$$

De fato: observe que

$$\int_0^1 (\widehat{\psi}_\delta)'(\tau - \lambda\gamma) d\lambda = \frac{\widehat{\psi}_\delta(\tau - \gamma) - \widehat{\psi}_\delta(\tau)}{-\gamma}.$$

Então, tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{J}_-(\tau) &= \widehat{J}(\tau)\mathcal{X}_{A^c} \\ &= \frac{-1}{i} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\gamma)\mathcal{X}_{A^c} \frac{\widehat{\psi}_\delta(\tau - \gamma) - \widehat{\psi}_\delta(\tau)}{-\gamma} d\gamma \\ &= \frac{-1}{i} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}_-(\gamma) \int_0^1 (\widehat{\psi}_\delta)'(\tau - \lambda\gamma) d\lambda d\gamma \\ &= \frac{-1}{i} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \widehat{F}_-(\gamma) (\widehat{\psi}_\delta)'(\tau - \lambda\gamma) d\lambda d\gamma. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\langle \tau \rangle^b \leq C (\langle \gamma \rangle^b + |\tau - \lambda\gamma|^b), \quad (3.16)$$

sempre que $|\lambda| \leq 1$, pois

$$\begin{aligned} |\tau| &= |\tau - \lambda\gamma + \lambda\gamma| \\ &\leq |\tau - \lambda\gamma| + |\lambda\gamma| \\ &\leq |\tau - \lambda\gamma| + |\gamma|. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} 1 + |\tau| &\leq 1 + |\gamma| + |\tau - \lambda\gamma| \\ \langle \tau \rangle &\leq \langle \gamma \rangle + |\tau - \lambda\gamma|. \end{aligned}$$

Elevando a desigualdade acima a b , pelo Lema 1.9 temos

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle^b &\leq (\langle \gamma \rangle + |\tau - \lambda\gamma|)^b \\ &\leq C (\langle \gamma \rangle^b + |\tau - \lambda\gamma|^b). \end{aligned}$$

Multiplicando (3.15) por $\langle \tau \rangle^b$, tomando a norma L_τ^2 e usando a desigualdade de Minkowski, vemos que

$$\begin{aligned} \|J_-\|_{H_t^b} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \langle \gamma \rangle^b \widehat{F}_-(\widehat{\psi}_\delta)'(\tau - \lambda\gamma) d\lambda \right\|_{L_\tau^2} + C \left\| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |\tau - \lambda\gamma|^b \widehat{F}_-(\widehat{\psi}_\delta)'(\tau - \lambda\gamma) d\lambda \right\|_{L_\tau^2} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |\langle \gamma \rangle^b \widehat{F}_-| \|(\widehat{\psi}_\delta)'(\tau - \lambda\gamma)\|_{L_\tau^2} d\lambda + C \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |\widehat{F}_-| |\tau - \lambda\gamma|^b \|(\widehat{\psi}_\delta)'(\tau - \lambda\gamma)\|_{L_\tau^2} d\lambda \\ &= C \|(\widehat{\psi}_\delta)'\|_{L_\tau^2} \int_{\mathbb{R}} |\langle \gamma \rangle^b \widehat{F}_-| d\gamma + C \| |\cdot|^b (\widehat{\psi}_\delta)' \|_{L_\tau^2} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{F}_-| d\gamma \\ &\leq C \left(\| \langle \cdot \rangle^b \widehat{F}_- \|_{L_\gamma^1} \|(\widehat{\psi}_\delta)'\|_{L_\tau^2} + \| \widehat{F}_- \|_{L_\gamma^1} \| |\cdot|^b (\widehat{\psi}_\delta)' \|_{L_\tau^2} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_\delta(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} \psi_\delta(t) e^{-it\tau} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(t/\delta) e^{-it\tau} dt \\ &= \delta \int_{\mathbb{R}} \psi(z) e^{-i\delta\tau z} dz \\ &= \delta \widehat{\psi}(\tau\delta). \end{aligned}$$

Assim temos

$$(\widehat{\psi}_\delta)'(\tau) = \delta^2 (\widehat{\psi})'(\tau\delta).$$

Além disso, temos que

$$\|(\widehat{\psi}_\delta)'\|_{L_\tau^2} = \delta^{3/2} \|(\widehat{\psi})'\|_{L_\tau^2}. \quad (3.18)$$

De fato:

$$\begin{aligned} \|(\widehat{\psi}_\delta)'\|_{L_\tau^2} &= \left\| \delta^2 (\widehat{\psi})'(\cdot\delta) \right\|_{L_\tau^2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \delta^4 |(\widehat{\psi})'(\tau\delta)|^2 d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta^{3/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |(\widehat{\psi})'(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&= \delta^{3/2} \left\| (\widehat{\psi})' \right\|_{L^2_{\tau}}.
\end{aligned}$$

Também temos que

$$\left\| |\cdot|^b (\widehat{\psi}_{\delta})' \right\|_{L^2_{\tau}} = \delta^{3/2-b} \left\| |\cdot|^b (\widehat{\psi})' \right\|_{L^2_{\tau}}. \quad (3.19)$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\left\| |\cdot|^b (\widehat{\psi}_{\delta})' \right\|_{L^2_{\tau}} &= \left\| |\cdot|^b \delta^2 (\widehat{\psi})'(\cdot\delta) \right\|_{L^2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |t\delta|^{2b} \delta^{4-2b} |(\widehat{\psi})'(t\delta)|^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \left(\delta^{3-2b} \int_{\mathbb{R}} |t\delta|^{2b} |(\widehat{\psi})'(t\delta)|^2 dt \delta \right)^{1/2} \\
&= \delta^{3/2-b} \left(\int_{\mathbb{R}} |z|^{2b} |(\widehat{\psi})'(z)|^2 dz \right)^{1/2} \\
&= \delta^{3/2-b} \left\| |\cdot|^b (\widehat{\psi})' \right\|_{L^2_{\tau}}.
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\left\| \langle \cdot \rangle^b \widehat{F}_- \right\|_{L^1_{\gamma}} \leq \frac{\langle 2 \rangle^b}{|\delta|^b} \left\| \widehat{F}_- \right\|_{L^1_{\gamma}}, \quad (3.20)$$

pois, das propriedades do suporte de \widehat{F}_- , obtém-se

$$\langle t \rangle^b |\widehat{F}_-(t)| \leq \left\langle \frac{1}{\delta} \right\rangle^b |\widehat{F}_-(t)| = \frac{\langle \delta \rangle^b}{\delta^b} |\widehat{F}_-(t)| \leq \frac{\langle 2 \rangle^b}{\delta^b} |\widehat{F}_-(t)|.$$

De (3.18), (3.19) e (3.20) em (3.17) temos

$$\|J_-\|_{H_t^b} \leq C \delta^{3/2-b} \left(\left\| (\widehat{\psi})' \right\|_{L^2_{\tau}} + \left\| |\tau|^b (\widehat{\psi})' \right\|_{L^2_{\tau}} \right) \left\| \widehat{F}_- \right\|_{L^1_{\tau}}. \quad (3.21)$$

Provaremos ainda que

$$\left\| \widehat{F}_- \right\|_{L^1_{\tau}} \leq C \delta^{\tilde{b}-1/2} \|F_-\|_{H_t^{\tilde{b}}}. \quad (3.22)$$

De fato: aplicando a desigualdade de Hölder, as propriedades do suporte de \widehat{F}_- e

lembrando que $\tilde{b} \leq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\|\widehat{F}_-\|_{L^1_\tau} &= \left\| \frac{1}{\langle \gamma \rangle^{\tilde{b}/2}} \langle \gamma \rangle^{\tilde{b}/2} \widehat{F}_- \right\|_{L^1_\tau} \\
&\leq \left\| \langle \gamma \rangle^{-\tilde{b}/2} \right\|_{L^2_\gamma} \left\| \langle \gamma \rangle^{\tilde{b}/2} \widehat{F}_- \right\|_{L^2_\gamma} \\
&\leq (1 + \delta^{-2})^{-\tilde{b}/2} \|F_-\|_{H^{\tilde{b}}} \\
&= (1 + \delta^2)^{-\tilde{b}/2} \delta^{\tilde{b}} \|F_-\|_{H^{\tilde{b}}} \\
&\leq (1 + \delta^2)^{1/2} \delta^{\tilde{b}} \|F_-\|_{H^{\tilde{b}}} \\
&\leq (2\delta^{-1})^{1/2} \delta^{\tilde{b}} \|F_-\|_{H^{\tilde{b}}} \\
&= C\delta^{\tilde{b}-1/2} \|F_-\|_{H^{\tilde{b}}},
\end{aligned}$$

isto para qualquer $\tilde{b} < 1/2$ e, em particular, para $b \leq 0$. Combinando (3.21) com (3.22) temos

$$\|J_-\|_{H^b_\tau} \leq C\delta^{1+\tilde{b}-b} \|F_-\|_{H^{\tilde{b}}}. \quad (3.23)$$

Agora estimaremos J_+ . É fácil ver que

$$\widehat{J}_+(\tau) = C \left((\cdot)^{-1} \widehat{F}_+ \right) * \widehat{\psi}_\delta(\tau) + C\widehat{\psi}_\delta(\tau) \int_{\mathbb{R}} \gamma^{-1} \widehat{F}_+(\gamma) d\gamma. \quad (3.24)$$

Escreva $J_+ = J_1 + J_2$ onde

$$\widehat{J}_1 = C \left((\cdot)^{-1} \widehat{F}_+ \right) * \widehat{\psi}_\delta(\tau) \quad \text{e} \quad \widehat{J}_2 = C\widehat{\psi}_\delta(\tau) \int_{\mathbb{R}} \gamma^{-1} \widehat{F}_+(\gamma) d\gamma.$$

Começaremos estimando \widehat{J}_1 . Pela desigualdade de Minkowski e por (3.16) com $\lambda = 1$, vemos que

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{H^b} &= \left\| \langle \tau \rangle^b \widehat{J}_1(\tau) \right\|_{L^2_\tau} \\
&= C \left\| \langle \tau \rangle^b \left((\cdot)^{-1} \widehat{F}_+ \right) * \widehat{\psi}_\delta(\tau) \right\|_{L^2_\tau} \\
&= C \left\| \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^b (\tau - \gamma)^{-1} \widehat{F}_+(\tau - \gamma) \widehat{\psi}_\delta(\gamma) d\gamma \right\|_{L^2_\tau} \\
&\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} ((\tau - \gamma)^b + |\gamma|^b) (\tau - \gamma)^{-1} \widehat{F}_+(\tau - \gamma) \widehat{\psi}_\delta(\gamma) d\gamma \right\|_{L^2_\tau} \\
&\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} \langle \tau - \gamma \rangle^b (\tau - \gamma)^{-1} \widehat{F}_+(\tau - \gamma) \widehat{\psi}_\delta(\gamma) d\gamma \right\|_{L^2_\tau} \\
&\quad + C \left\| \int_{\mathbb{R}} |\gamma|^b (\tau - \gamma)^{-1} \widehat{F}_+(\tau - \gamma) \widehat{\psi}_\delta(\gamma) d\gamma \right\|_{L^2_\tau}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \|\langle \tau - \gamma \rangle^b (\tau - \gamma)^{-1} \widehat{F}_+(\tau - \gamma)\|_{L^2_\tau} |\widehat{\psi}_\delta(\gamma)| d\gamma \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}} \|(\tau - \gamma)^{-1} \widehat{F}_+(\tau - \gamma)\|_{L^2_\tau} |\gamma|^b |\widehat{\psi}_\delta(\gamma)| d\gamma \\
&= C \|\langle \cdot \rangle^b (\cdot)^{-1} \widehat{F}_+\|_{L^2} \|\widehat{\psi}_\delta\|_{L^1} + \|(\cdot)^{-1} \widehat{F}_+\|_{L^2} \left\| |\cdot|^b \widehat{\psi}_\delta \right\|_{L^1}. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Observe também que

$$\left\| \widehat{\psi}_\delta(\tau) \right\|_{L^1_\tau} = \|\widehat{\psi}\|_{L^1}. \tag{3.26}$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\left\| \widehat{\psi}_\delta(\tau) \right\|_{L^1_\tau} &= \left\| \delta \widehat{\psi}(\tau\delta) \right\|_{L^1_\tau} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \delta |\widehat{\psi}(\tau\delta)| d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(z)| dz \\
&= \|\widehat{\psi}\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Também temos que

$$\left\| |\tau|^b \widehat{\psi}_\delta(\tau) \right\|_{L^1_\tau} = \delta^{-b} \left\| |\cdot|^b \widehat{\psi} \right\|_{L^1}, \tag{3.27}$$

pois:

$$\begin{aligned}
\left\| |\tau|^b \widehat{\psi}_\delta(\tau) \right\|_{L^1_\tau} &= \left\| |\tau|^b \delta \widehat{\psi}(\tau\delta) \right\|_{L^1_\tau} \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\tau|^b |\widehat{\psi}(\tau\delta)| d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \delta^{-b} |z|^b |\widehat{\psi}_1(z)| dz \\
&= \delta^{-b} \left\| |\cdot|^b \widehat{\psi} \right\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Com argumentos semelhantes aos usados em (3.22), temos

$$\left\| (\cdot)^{-1} \widehat{F}_+ \right\|_{L^2} \leq 2^{-\bar{b}} \delta^{1+\bar{b}} \|F_+\|_{H^{\bar{b}}}. \tag{3.28}$$

De fato:

$$\left\| (\cdot)^{-1} \widehat{F}_+ \right\|_{L^2} = \left\| \tau^{-1} \langle \tau \rangle^{-\bar{b}} \langle \tau \rangle^{\bar{b}} \widehat{F}_+ \right\|_{L^2_\tau}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \tau^{-1} \langle \tau \rangle^{-\tilde{b}} \right\|_{L^2_\tau} \left\| \langle \tau \rangle^{\tilde{b}} \widehat{F}_+ \right\|_{L^2_\tau} \\
&\leq \left\| \tau^{-1} \langle \tau \rangle^{-\tilde{b}} \right\|_{L^2_\tau} \|F_+\|_{H^{\tilde{b}}} \\
&\leq 2^{-\tilde{b}} \delta^{1+\tilde{b}} \|F_+\|_{H^{\tilde{b}}}.
\end{aligned}$$

Analogamente como foi feito acima, tem-se

$$\begin{aligned}
\left\| \tau^{-1} \langle \tau \rangle^{\tilde{b}} \widehat{F}_+(\tau) \right\|_{L^2_\tau} &\leq \left\| (\tau)^{-1} \langle \tau \rangle^{b-\tilde{b}} \right\|_{L^2_\tau} \|F_+\|_{H^{\tilde{b}}} \\
&\leq 2^{b-\tilde{b}} \delta^{1+\tilde{b}-b} \|F_+\|_{H^{\tilde{b}}}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

De (3.26), (3.27), (3.28) e (3.29) aplicados a (3.25), temos

$$\|J_1\|_{H^b} \leq C \delta^{1+\tilde{b}-b} \|F_+\|_{H^{\tilde{b}}}. \tag{3.30}$$

Finalmente, vemos que

$$\|J_2\|_{H^b} \leq C \delta^{1/2-b} \left\| (\cdot)^{-1} \widehat{F}_+ \right\|_{L^1} \|\widehat{\psi}\|_{L^2}. \tag{3.31}$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_{H^b} &= \| \langle \cdot \rangle \widehat{J}_2 \|_{L^2} \\
&= \| \langle \tau \rangle^b c \widehat{\psi}_\delta(\tau) \int_{\mathbb{R}} \gamma^{-1} \widehat{F}_+(\gamma) d\gamma \|_{L^2_\tau} \\
&\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} \gamma^{-1} \widehat{F}_+(\gamma) d\gamma \right\| \| \langle \tau \rangle^b \widehat{\psi}_\delta(\tau) \|_{L^2_\tau} \\
&\leq C \| (\cdot)^{-1} \widehat{F}_+ \|_{L^1} \| \langle \tau \rangle^b \delta \widehat{\psi}(\tau \delta) \|_{L^2_\tau} \\
&= C \| (\cdot)^{-1} \widehat{F}_+ \|_{L^1} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \langle \tau \rangle^b \delta \widehat{\psi}(\tau \delta) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq C \| (\cdot)^{-1} \widehat{F}_+ \|_{L^1} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \langle \tau \delta \rangle^b \delta^{1-b} \widehat{\psi}(\tau \delta) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&= C \delta^{1/2-b} \| (\cdot)^{-1} \widehat{F}_+ \|_{L^1} \|\widehat{\psi}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Combinando (3.23), (3.30) e (3.31), obtemos (3.10).

Para provar (3.12) observamos que para $\tilde{b} > -1/2$ a desigualdade de Cauchy-Schwarz e propriedades do suporte de \widehat{F}_+ implicam que

$$\| \tau^{-1} \widehat{F}_+ \|_{L^1_\tau} \leq C \delta^{1/2+\tilde{b}} \|F_+\|_{H^{\tilde{b}}}. \tag{3.32}$$

Agora, de (3.32) junto com (3.23), (3.30) e (3.31), obtemos a desigualdade dada

em (3.12).

As desigualdades (3.11) e (3.13) são obtidas multiplicando (3.10), (3.12) por $\langle n \rangle^{2s}$, para um n fixo, tomando a norma ℓ_n^2 e aplicando a Proposição 3.5.

□

Capítulo 4

Uma desigualdade de tipo Strichartz

Este capítulo é destinado a provar uma importante estimativa para o grupo linear de Schrödinger no cilindro, que será o ingrediente teórico fundamental para obter os resultados principais de boa colocação global do modelo em $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$. De forma mais precisa, vale a desigualdade a seguir.

Proposição 4.1 (Estimativa de Strichartz). *Seja $U(t) = e^{-it(\partial_x^2 + \partial_y^2)}$ o grupo linear de Schrödinger com $(t; x, y) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo da reta. Então,*

$$\|U(t)\phi\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \lesssim C(I)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})}, \quad (4.1)$$

onde $C(I)$ é uma constante que só depende de $|I|$ (medida de I).

Antes de provar este resultado fixaremos algumas notações, bem como alguns resultados preliminares.

- Dados $f(x), g(x)$, com $x \in \mathcal{D}$, $f \lesssim g$ significará que existe uma constante positiva C , tal que $f(x) \leq Cg(x)$, para todo $x \in \mathcal{D}$.
- Dado $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x .
- Dado um conjunto A , $|A|$ denota a medida do conjunto A que, dependendo do contexto, pode ser medida de Lebesgue, contagem ou produto.
- $f \sim g$ significa que $\frac{1}{2}|f| \leq |g| \leq 2|f|$.

4.1 Resultados auxiliares

O primeiro resultado estabelece um controle uniforme para a medida de dois tipos de conjuntos em $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

Lema 4.2. *Sejam C_0 e K constantes reais, tais que $C_0, K \geq 1$. Então, valem as seguintes estimativas:*

$$|\{(\xi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : C_0 \leq \xi^2 + n^2 \leq C_0 + K\}| \lesssim K, \quad (4.2)$$

$$|\{(\xi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : C_0 \leq \xi^2 + (n - 1/2)^2 \leq C_0 + K\}| \lesssim K, \quad (4.3)$$

onde as constantes que regem as desigualdades do lado direito não dependem de C_0 .

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que vale (4.2). Seja $\alpha \geq 1$ e consideremos a função

$$h(\alpha) := |\{(\xi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : \xi^2 + n^2 \leq \alpha\}|.$$

Note que $h(\alpha)$ é uma medida produto (ver Teorema 1.1 com $\mu \times \nu$, onde μ é a medida de Lebesgue e ν denota a medida de contagem) que age sobre o disco de raio $\sqrt{\alpha}$.

Fixado $n \in \{-\lceil\sqrt{\alpha}\rceil, \dots, 0, \dots, \lceil\sqrt{\alpha}\rceil\}$ olhamos para o conjunto

$$h_n(\alpha) := |\{\xi \in \mathbb{R} : \xi^2 + n^2 \leq \alpha\}|,$$

de modo que

$$h_n(\alpha) = \mu(A_n) = 2\sqrt{\alpha - n^2},$$

onde A_n é o segmento de reta vertical ilustrado na Figura 4.1.

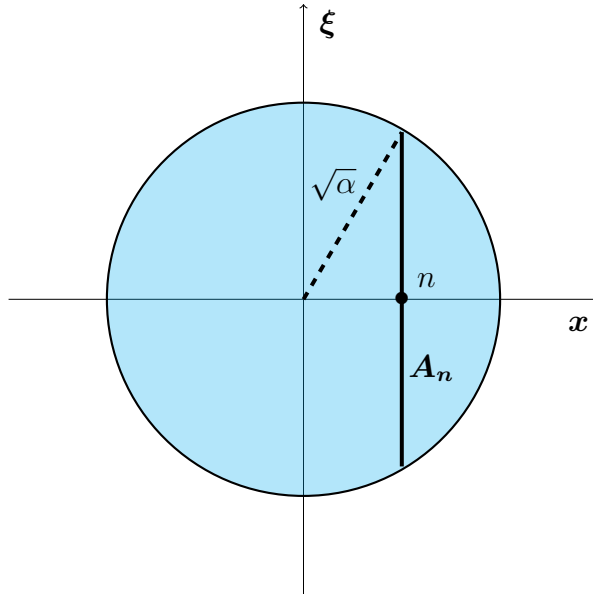


Figura 4.1: $A_n = \{\xi \in \mathbb{R} : \xi^2 + n^2 \leq \alpha\}$

Agora, notamos que

$$\{(\xi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : \xi^2 + n^2 \leq \alpha\} = \bigcup_{n=-\lceil\sqrt{\alpha}\rceil}^{\lceil\sqrt{\alpha}\rceil} \{\xi \in \mathbb{R} : \xi^2 + n^2 \leq \alpha\}.$$

Assim

$$h(\alpha) = \sum_{n=-\lfloor\sqrt{\alpha}\rfloor}^{\lfloor\sqrt{\alpha}\rfloor} \mu(A_n)\nu(\{n\}) = 4 \sum_{n=0}^{\lfloor\sqrt{\alpha}\rfloor} \sqrt{\alpha - n^2} - 2\sqrt{\alpha}. \quad (4.4)$$

Notamos agora que a medida em (4.2) pode ser tomada como a medida do disco de raio $\sqrt{C_0 + K}$ menos a medida do disco de raio $\sqrt{C_0}$ (ver Figura 4.2).

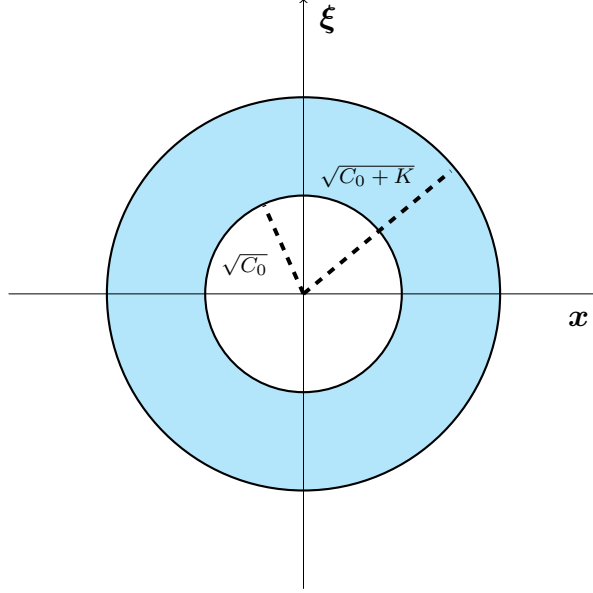


Figura 4.2:

Portanto, pondo

$$\mathcal{A}_{C_0, K} := \{(\xi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : C_0 \leq \xi^2 + n^2 \leq C_0 + K\}$$

tem-se

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{C_0, K}| &= 4 \sum_{l=0}^{\lfloor\sqrt{C_0+K}\rfloor} \sqrt{C_0 + K - l^2} - 2\sqrt{C_0 + K} - \left(4 \sum_{l=0}^{\lfloor\sqrt{C_0}\rfloor} \sqrt{C_0 - l^2} - 2\sqrt{C_0} \right) \\ &\leq 4 \left(\sum_{l=0}^{\lfloor\sqrt{C_0+K}\rfloor} \sqrt{C_0 + K - l^2} - \sum_{l=0}^{\lfloor\sqrt{C_0}\rfloor} \sqrt{C_0 - l^2} \right) \\ &\leq 4 \left(\sum_{l=0}^{\lfloor\sqrt{C_0}\rfloor} \left(\sqrt{C_0 + K - l^2} - \sqrt{C_0 - l^2} \right) + \sum_{l=\lfloor\sqrt{C_0}\rfloor+1}^{\lfloor\sqrt{C_0+K}\rfloor} \sqrt{C_0 + K - l^2} \right) \\ &= 4(S_1 + S_2), \end{aligned}$$

onde

$$S_1 := \sum_{l=0}^{\lfloor \sqrt{C_0} \rfloor} (\sqrt{C_0 + K - l^2} - \sqrt{C_0 - l^2}),$$

$$S_2 := \sum_{l=\lfloor \sqrt{C_0} \rfloor+1}^{\lfloor \sqrt{C_0+K} \rfloor} \sqrt{C_0 + K - l^2}.$$

Inicialmente, estimamos S_1 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{l=0}^{\lfloor \sqrt{C_0} \rfloor} (\sqrt{C_0 + K - l^2} - \sqrt{C_0 - l^2}) \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \sqrt{C_0} \rfloor} \frac{K}{\sqrt{C_0 + K - l^2} + \sqrt{C_0 - l^2}} \\ &\leq \sum_{l=0}^{\lfloor \sqrt{C_0} \rfloor} \frac{K}{\sqrt{C_0 - l^2}} = \sum_{l=0}^{\lfloor \sqrt{C_0} \rfloor} f(l), \quad \text{onde } f(l) = \frac{K}{\sqrt{C_0 - l^2}}, \\ &\leq \int_0^{\sqrt{C_0}} f(x) dx = \int_0^{\sqrt{C_0}} \frac{K}{\sqrt{C_0 - x^2}} dx \\ &= \frac{\pi}{2} K. \end{aligned}$$

A última desigualdade vem da comparação de áreas (ver Figura 4.3).

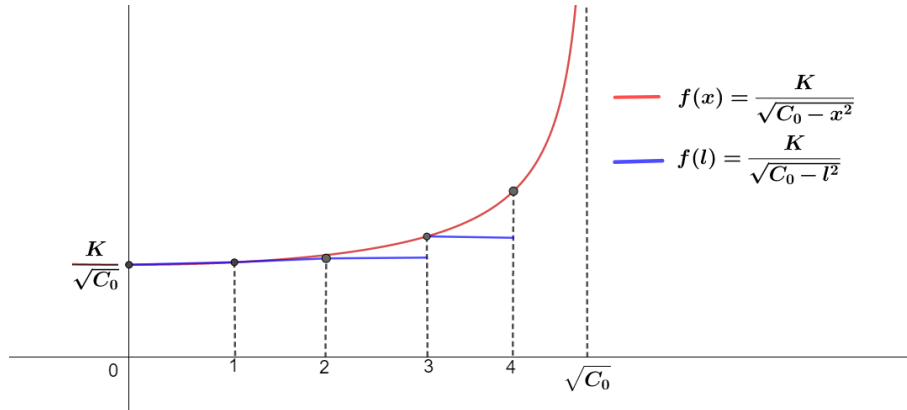


Figura 4.3:

Continuamos agora com a estimativa de S_2 :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{l=\lfloor\sqrt{C_0}\rfloor+1}^{\lfloor\sqrt{C_0+K}\rfloor} \sqrt{C_0+K-l^2} \\
&\leq \sum_{l=\lfloor\sqrt{C_0}\rfloor}^{\lfloor\sqrt{C_0+K}\rfloor} \sqrt{C_0+K-l^2} \\
&\leq \int_{\sqrt{C_0}}^{\sqrt{C_0+K}} \sqrt{C_0+K-x^2} dx.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdade vem da comparação de áreas ilustrada na Figura 4.4.

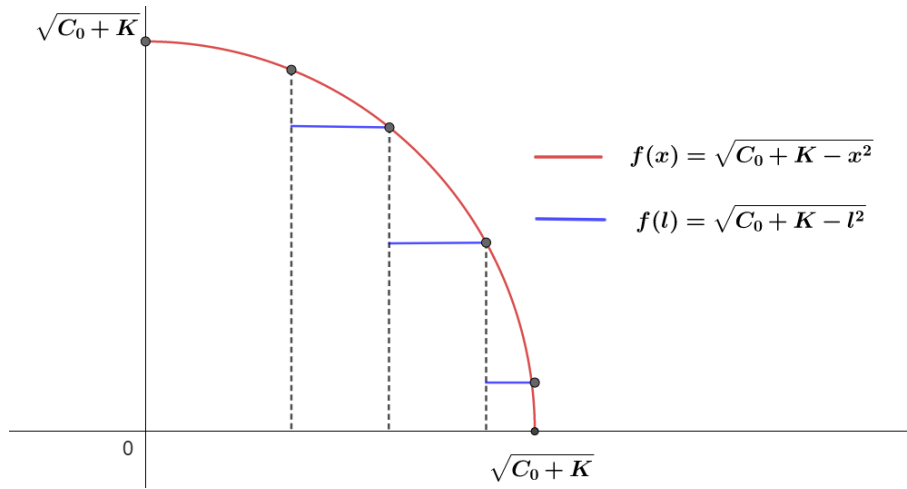


Figura 4.4:

Seja $\beta \in [0, \pi/2]$, tal que $\sin \beta = \sqrt{\frac{C_0}{C_0+K}}$. Então, fazendo a mudança de variável $x = \sqrt{C_0+K} \sin \theta$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{C_0}}^{\sqrt{C_0+K}} \sqrt{C_0+K-x^2} dx &= \int_{\beta}^{\pi/2} (C_0+K) \cos^2 \theta d\theta \\
&= \frac{C_0+K}{2} (\pi/2 - \beta - \sin \beta \cos \beta) \\
&= \frac{C_0+K}{2} (\psi - \sin \psi \cos \psi),
\end{aligned}$$

onde $\psi = \pi/2 - \beta$. Note que $\psi \in [0, \pi/2]$. Então o Lema 1.11 garante a existência de um $R > 0$, suficientemente grande, tal que

$$\psi \leq \sin \psi + R \sin^2 \psi;$$

assim,

$$\begin{aligned}
\frac{C_0 + K}{2}(\psi - \sin \psi \cos \psi) &\leq \frac{C_0 + K}{2} \left(\sin \psi + R \sin^2 \psi - \sin \psi \cos \psi \right) \\
&= \frac{C_0 + K}{2} \left(\sqrt{\frac{K}{C_0 + K}} + \frac{RK}{C_0 + K} - \frac{\sqrt{C_0 K}}{C_0 + K} \right) \\
&= \frac{RK}{2} + \frac{\sqrt{K}}{2} (\sqrt{C_0 + K} - \sqrt{C_0}) \\
&= \frac{K}{2} \left(R + \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{C_0 + K} + \sqrt{C_0}} \right) \\
&\leq K \left(\frac{R+1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Isto mostra que $S_2 \leq K \left(\frac{R+1}{2} \right)$.

Segue das estimativas feitas para S_1 e S_2 que

$$S_1 + S_2 \leq K \left(\frac{\pi + R + 1}{2} \right).$$

Conseqüentemente,

$$|\mathcal{A}_{C_0, K}| = |\{\xi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} : C_0 \leq \xi^2 + n^2 \leq C_0 + K\}| \leq 4K \left(\frac{\pi + R + 1}{2} \right).$$

Isto conclui a prova do (4.2).

Para a demonstração de (4.3) é necessário fazer uma pequena modificação no argumento usado acima. Para $\alpha \geq 1$ definimos

$$\bar{h}(\alpha) = |\{\xi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} : \xi^2 + (n - 1/2)^2 \leq \alpha\}|.$$

Note que \bar{h} age sobre o anel centrado em $(0, 1/2)$ de raio $\sqrt{\alpha} + 1/2$ e $\sqrt{C_0}$ maior e menor, respectivamente. Então, pelos mesmos argumentos usados para $h(\alpha)$ em (4.4), temos que

$$\bar{h}(\alpha) = 4 \sum_{n=1/2}^{[\sqrt{\alpha}+1/2]} \sqrt{\alpha - (n - 1/2)^2} - 2\sqrt{\alpha}. \quad (4.5)$$

Assim, a medida em (4.3) segue analogamente como o que foi feito para (4.2), isto

é,

$$\begin{aligned}
& | \{ \xi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} : C_0 \leq \xi^2 + (n - 1/2)^2 \leq C_0 + K \} | \\
& \leq 4 \left(\sum_{l=1/2}^{[\sqrt{C_0+K}+1/2]} \sqrt{C_0 + K - (l - 1/2)^2} - \sum_{l=1/2}^{[\sqrt{C_0}+1/2]} \sqrt{C_0 - (l - 1/2)^2} \right) \\
& = 4 \left(\sum_{l=1/2}^{[\sqrt{C_0}+1/2]} \left(\sqrt{C_0 + K - (l - 1/2)^2} - \sqrt{C_0 - (l - 1/2)^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=[\sqrt{C_0}+1/2]+1}^{[\sqrt{C_0+K}+1/2]} \sqrt{C_0 + K - (l - 1/2)^2} \right) \\
& = 4(S_3 + S_4),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
S_3 & := \sum_{l=1/2}^{[\sqrt{C_0}+1/2]} \left(\sqrt{C_0 + K - (l - 1/2)^2} - \sqrt{C_0 - (l - 1/2)^2} \right) \\
S_4 & := \sum_{l=[\sqrt{C_0}+1/2]+1}^{[\sqrt{C_0+K}+1/2]} \sqrt{C_0 + K - (l - 1/2)^2}.
\end{aligned}$$

Agora, estimamos S_3 usando argumentos análogos aos que foram usados para estimar S_1 .

$$\begin{aligned}
S_3 & = \sum_{l=1/2}^{[\sqrt{C_0}+1/2]} \left(\sqrt{C_0 + K - (l - 1/2)^2} - \sqrt{C_0 - (l - 1/2)^2} \right) \\
& = \sum_{l=1/2}^{[\sqrt{C_0}+1/2]} \frac{K}{\sqrt{C_0 + K - (l - 1/2)^2} + \sqrt{C_0 - (l - 1/2)^2}} \\
& \leq \sum_{l=1/2}^{[\sqrt{C_0}+1/2]} \frac{K}{\sqrt{C_0 - (l - 1/2)^2}} \\
& = \sum_{l=1/2}^{[\sqrt{C_0}+1/2]} f(l), \text{ onde } f(l) = \frac{K}{\sqrt{C_0 - (l - 1/2)^2}}, \\
& \leq \int_{1/2}^{\sqrt{C_0}+1/2} \frac{K}{\sqrt{C_0 - (x - 1/2)^2}} dx \\
& = \frac{\pi}{2} K.
\end{aligned}$$

Resta estimar S_4 . Por argumentos análogos aos que foram usados para estimar

S_2 , temos

$$\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{l=[\sqrt{C_0+1/2}]+1}^{[\sqrt{C_0+K+1/2}]} \sqrt{C_0 + K - (l - 1/2)^2} \\
&\leq \int_{\sqrt{C_0+1/2}}^{\sqrt{C_0+K+1/2}} \frac{K}{\sqrt{C_0 + K - (x - 1/2)^2}} dx \\
&\leq \frac{K}{2} \left(R + \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{C_0 + K} + \sqrt{C_0}} \right) \\
&\leq K \left(\frac{R+1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Assim, pelas estimativas de S_3 e S_4 , obtemos que:

$$S_3 + S_4 \leq K \left(\frac{\pi + R + 1}{2} \right).$$

Finalmente,

$$|\{\xi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} : C_0 \leq \xi^2 + (n - 1/2)^2 \leq C_0 + K\}| \leq 4K \left(\frac{\pi + R + 1}{2} \right).$$

Isto conclui a prova de (4.3). □

Lema 4.3. *Sejam u_1 e u_2 duas funções definidas em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, tais que*

$$|\tau - \xi^2 - n^2| \sim K_j, \text{ sempre que } (\tau; \xi, n) \in \text{supp } \hat{u}_j, \quad j = 1, 2.$$

Então, vale a desigualdade

$$\|u_1 u_2\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \lesssim (K_1 K_2)^{1/2} \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \|u_2\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}. \quad (4.6)$$

Demonstração. Fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz e do Teorema de

Plancherel, temos

$$\begin{aligned}
\|u_1 u_2\|_{L^2_{txy}}^2 &= \|\widehat{u_1 u_2}\|_{L^2_{\tau\xi n}}^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{u_1 u_2}(\tau; \xi, n)|^2 d\xi d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{u_1} * \widehat{u_2}(\tau; \xi, n)|^2 d\xi d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \widehat{u_1}(\tau_1; \xi_1, n_1) \widehat{u_2}(\tau - \tau_1; \xi - \xi_1, n - n_1) d\xi_1 d\tau_1 \right|^2 d\xi d\tau. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Note que $(\tau_1; \xi_1, n_1) \in \text{supp } \widehat{u_1}$ e $(\tau - \tau_1; \xi - \xi_1, n - n_1) \in \text{supp } \widehat{u_2}$. Então, de (4.7) obtemos

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \chi_{A_{\tau\xi n}}(\tau_1, \xi_1, n_1) \widehat{u_1}(\tau_1, \xi_1, n_1) \times \right. \\
&\quad \left. \widehat{u_2}(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1, n - n_1) d\xi_1 d\tau_1 \right|^2 d\xi d\tau,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{\tau\xi n} &= \{(\tau_1, \xi_1, n_1) : (\tau_1, \xi_1, n_1) \in \text{supp } \widehat{u_1}; (\tau - \tau_1, \xi - \xi_1, n - n_1) \in \text{supp } \widehat{u_2}\} \\
&= \{(\tau_1, \xi_1, n_1) : |\tau_1 - \xi_1^2 - n_1^2| \sim K_1; |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 - (n - n_1)^2| \sim K_2\}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, os teoremas de Fubini e de Plancherel na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} |\chi_{A_{\tau\xi n}}(\tau_1, \xi_1, n_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \times \right. \\
&\quad \left. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} |\widehat{u_1}(\tau_1, \xi_1, n_1) \widehat{u_2}(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1, n - n_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \right|^2 d\xi d\tau \\
&\leq \sup_{\tau\xi n} |A_{\tau\xi n}| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} |\widehat{u_1}(\tau_1, \xi_1, n_1)|^2 |\widehat{u_2}(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1, n - n_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \\
&\leq \sup_{\tau\xi n} |A_{\tau\xi n}| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} |\widehat{u_1}(\tau_1, \xi_1, n_1)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{u_2}(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1, n - n_1)|^2 d\xi d\tau d\xi_1 d\tau_1 \\
&= \sup_{\tau\xi n} |A_{\tau\xi n}| \|\widehat{u_1}\|_{L^2_{\tau_1 \xi_1 n_1}}^2 \|\widehat{u_2}\|_{L^2_{\tau\xi n}}^2 \\
&= \sup_{\tau\xi n} |A_{\tau\xi n}| \|u_1\|_{L^2_{txy}}^2 \|u_2\|_{L^2_{txy}}^2.
\end{aligned}$$

Então, temos a seguinte desigualdade

$$\|u_1 u_2\|_{L^2_{txy}}^2 \leq \sup_{\tau \xi n} |A_{\tau \xi n}| \|u_1\|_{L^2_{txy}}^2 \|u_2\|_{L^2_{txy}}^2. \quad (4.8)$$

Por outro lado, para $(\tau_1, \xi_1, n_1) \in A_{\tau \xi n}$ se mostra que

$$|\tau_1 - \xi_1^2 - n_1^2| \leq 2K_1 \quad e \quad |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 - (n - n_1)^2| \leq 2K_2.$$

Aplicando a desigualdade triangular, obtemos

$$|\tau - \xi_1^2 - (\xi - \xi_1)^2 - n_1^2 - (n - n_1)^2| \leq 2(K_1 + K_2).$$

Assim, consideramos o conjunto

$$\begin{aligned} B_{\tau \xi n} &= \{(\xi_1, n_1) : |\tau - \xi_1^2 - (\xi - \xi_1)^2 - n_1^2 - (n - n_1)^2| \lesssim K_1 + K_2\} \\ &= \left\{ (\xi_1, n_1) : \left| (\xi_1 - \frac{\xi}{2})^2 + (n_1 - \frac{n}{2})^2 - (\frac{\tau}{2} - \frac{\xi^2}{4} - \frac{n^2}{4}) \right| \lesssim K_1 + K_2 \right\}. \end{aligned}$$

Note que $B_{\tau \xi n}$ só depende de ξ_1 e n_1 .

Para $(\tau_1, \xi_1, n_1) \in A_{\tau \xi n}$ temos que $|\tau_1 - \xi_1^2 - n_1^2| \leq 2K_1$. Então, $\tau_1 \in [-2K_1 + \xi_1^2 + n_1^2, 2K_1 + \xi_1^2 + n_1^2] := I_1$. Além disso, $|I_1| = 4K_1$.

Também, para $(\tau_1, \xi_1, n_1) \in A_{\tau \xi n}$ temos que $|\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^2 - (n - n_1)^2| \leq 2K_2$. Então, $\tau_1 \in [-2K_2 + \tau - (\xi - \xi_1)^2 - (n - n_1)^2, 2K_2 + \tau - (\xi - \xi_1)^2 - (n - n_1)^2] := I_2$. Além disso, $|I_2| = 4K_2$.

Assim $\tau_1 \in I := I_1 \cap I_2$, tal que $|I| \leq 4\min\{K_1, K_2\}$. Logo, tem-se

$$A_{\tau \xi n} \subset \bar{I} \times B_{\tau \xi n}.$$

Tomando a medida na inclusão de conjuntos acima, temos

$$|A_{\tau \xi n}| \leq |\bar{I}| |B_{\tau \xi n}| \leq 4\min\{K_1, K_2\} |B_{\tau \xi n}|.$$

Agora, estimamos a medida de $B_{\tau \xi n}$ usando o Lema 4.2, o qual garante que existe uma constante $C_1 > 0$, tal que $|B_{\tau \xi n}| \leq C_1(K_1 + K_2) \lesssim C_1 \max\{K_1, K_2\}$.

Assim $|A_{\tau \xi n}| \leq 4C_1 \min\{K_1, K_2\} \max\{K_1, K_2\} = 4C_1 K_1 K_2$. Combinando este último fato com (4.8), temos

$$\|u_1 u_2\|_{L^2_{txy}}^2 \leq \sup_{\tau \xi n} |A_{\tau \xi n}| \|u_1\|_{L^2_{txy}}^2 \|u_2\|_{L^2_{txy}}^2 \leq 4C_1 K_1 K_2 \|u_1\|_{L^2_{txy}}^2 \|u_2\|_{L^2_{txy}}^2.$$

Seque então que

$$\|u_1 u_2\|_{L^2_{txy}} \leq 2\sqrt{C_1}(K_1 K_2)^{1/2} \|u_1\|_{L^2_{txy}} \|u_2\|_{L^2_{txy}}.$$

Isto conclui a prova. \square

Como uma consequência do Lema 4.3, veremos ainda a estimativa de u , de $X^{0,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ em $L^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Lema 4.4. *Seja u uma função definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Então,*

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \lesssim \|u\|_{X^{0,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})},$$

para todo $b > 1/2$.

Demonstração. Seja u uma função suave definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Fazemos primeiro uma decomposição diádica de u , isto é, denotando $K = 2^k$, com $k \in \mathbb{N}$, definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} D_0 &= \{(\tau; \xi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : 0 \leq |\tau - \xi^2 - n^2| \leq 1\}, \\ D_K &:= \{(\tau; \xi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : K/2 \leq |\tau - \xi^2 - n^2| \leq K\}. \end{aligned}$$

Procedimentos similares à construção de uma partição da unidade nos garantem a existência de uma sequência de funções regulares, φ_K , tal que $\widehat{\varphi}_K(\tau; \xi, n)$ tem suporte compacto, com $\text{supp}(\widehat{\varphi}_K) \subset D_K$ e, além disso,

$$\widehat{u}(\tau; \xi, n) = \sum_{K \in 2^{\mathbb{N}}} \widehat{u}(\tau; \xi, n) \widehat{\varphi}_K(\tau; \xi, n),$$

onde $2^{\mathbb{N}} = \{2^k, k \in \mathbb{N}\}$. Definimos $\widehat{u}_K(\tau; \xi, n) := \widehat{u}(\tau; \xi, n) \widehat{\varphi}_K(\tau; \xi, n)$. Então, escrevemos u da forma

$$u(t; x, y) = \sum_{K \in 2^{\mathbb{N}}} u_K(t; x, y).$$

Notamos que $|\tau - \xi^2 - n^2| \sim K$ em cada D_K . Fazendo a decomposição diádica para duas funções u_i , $1 \leq i \leq 2$, temos então

$$\frac{1}{\langle \tau - \xi^2 - n^2 \rangle^b} \lesssim \frac{2^b}{K_i^b}, \quad i = 1, 2. \quad (4.9)$$

Além disso,

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \geq \|\langle \tau - \xi^2 - n^2 \rangle^b \widehat{u}_{K_i}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}, \quad i = 1, 2. \quad (4.10)$$

Pelo Lema 4.3 e o Teorema de Plancherel, tem-se

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}^2 &= \|u^2\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&= \|uu\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&= \left\| \sum_{K_1 \in 2^{\mathbb{N}}} u_{K_1} \sum_{K_2 \in 2^{\mathbb{N}}} u_{K_2} \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&= \left\| \sum_{K_1, K_2} u_{K_1} u_{K_2} \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&\leq \sum_{K_1, K_2} \|u_{K_1} u_{K_2}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&\lesssim \sum_{K_1, K_2} (K_1 K_2)^{1/2} \|u_{K_1}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \|u_{K_2}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&= \sum_{K_1, K_2} (K_1 K_2)^{1/2} \|\widehat{u}_{K_1}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \|\widehat{u}_{K_2}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Também de (4.9) e (4.10) obtemos

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}_{K_1}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} &= \left\| \frac{1}{\langle \tau - \xi^2 - n^2 \rangle^b} \langle \tau - \xi^2 - n^2 \rangle^b \widehat{u}_{K_1} \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&\leq \frac{2^b}{K_1^b} \|\langle \tau - \xi^2 - n^2 \rangle^b \widehat{u}_{K_1}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&\leq \frac{2^b}{K_1^b} \|\langle \tau - \xi^2 - n^2 \rangle^b \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&\leq \frac{2^b}{K_1^b} \|u\|_{X^{0,b}}.
\end{aligned}$$

Analogamente, tem-se

$$\|\widehat{u}_{K_2}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \leq \frac{2^b}{K_2^b} \|u\|_{X^{0,b}}.$$

Levando isto em (4.11) temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}^2 &\lesssim \sum_{K_1, K_2} (K_1 K_2)^{1/2-b} \|u\|_{X^{0,b}}^2 \\
&= \sum_{K_1} (K_1)^{1/2-b} \sum_{K_2} (K_2)^{1/2-b} \|u\|_{X^{0,b}}^2 \\
&\lesssim \|u\|_{X^{0,b}}^2.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdade segue de

$$\sum_{K_i} (K_i)^{1/2-b} = \frac{2^{b-1/2}}{2^{b-1/2} - 1}, \quad b > 1/2, \quad i = 1, 2.$$

□

Agora, provaremos a proposição principal desta seção.

4.2 Prova da Proposição 4.1

Seja ψ , a função de corte, definida em (3.4) e $\psi_\delta(\cdot) := \psi(\frac{\cdot}{\delta})$, para $0 < \delta \leq 1$. Note claramente, pela definição, que $\psi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\text{supp } \psi_\delta \subset (-2\delta, 2\delta) \quad \text{e} \quad \psi_\delta(t) = 1 \text{ se } |t| \leq \delta.$$

Então, sua transformada de Fourier vem dada por

$$\widehat{\psi}_\delta(\tau) = \delta \widehat{\psi}(\delta\tau), \quad (4.12)$$

pois:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_\delta(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} \psi_\delta(t) e^{-it\tau} dt = \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{t}{\delta}\right) e^{-it\tau} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{t}{\delta}\right) e^{-i\frac{t}{\delta}\delta\tau} \delta d\frac{t}{\delta} = \delta \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{t}{\delta}\right) e^{-i\frac{t}{\delta}(\delta\tau)} d\frac{t}{\delta} \\ &= \delta \widehat{\psi}(\delta\tau), \end{aligned}$$

e para $b > 0$, temos

$$\|\psi_\delta\|_{\dot{H}_t^b} \lesssim \delta^{1/2} \|\psi\|_{L_t^2} + \delta^{1/2-b} \|\psi\|_{\dot{H}_t^b}, \quad (4.13)$$

onde \dot{H}_t^b é o espaço homogêneo de Sobolev.

De fato, pelo Lema 1.9 e (4.12), segue que

$$\begin{aligned} \|\psi_\delta\|_{\dot{H}_t^b} &= \|(1 + |\tau|^2)^{\frac{b}{2}} \widehat{\psi}_\delta\|_{L_\tau^2} \\ &\leq \|M(1 + |\tau|^b) \widehat{\psi}_\delta\|_{L_\tau^2} \\ &\leq M \|\widehat{\psi}_\delta\|_{L_\tau^2} + M \|\tau|^b \widehat{\psi}_\delta\|_{L_\tau^2} \\ &= M \|\delta \widehat{\psi}(\delta\tau)\|_{L_\tau^2} + M \|\tau|^b \delta \widehat{\psi}(\delta\tau)\|_{L_\tau^2} \\ &= M \left\{ \int_{\mathbb{R}} \delta^2 |\widehat{\psi}(\delta\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} + M \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} \delta^2 |\widehat{\psi}(\delta\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\ &= M \delta^{1/2} \|\widehat{\psi}\|_{L_\tau^2} + M \delta^{1/2-b} \|\tau|^b \widehat{\psi}\|_{L_\tau^2} \\ &= M \left(\delta^{1/2} \|\psi\|_{L_t^2} + \delta^{1/2-b} \|\psi\|_{\dot{H}_t^b} \right). \end{aligned}$$

Agora, estimamos o espaço homogêneo de Sobolev, isto é,

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{\dot{H}_t^b} &= \|\tau|{}^b\widehat{\psi}\|_{L_\tau^2} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} |\widehat{\psi}(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|^2)^b |\widehat{\psi}(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \\
&= \|(1 + |\tau|^2)^{b/2}\widehat{\psi}\|_{L_\tau^2} \\
&= \|\psi\|_{H_t^b}.
\end{aligned}$$

Combinando a identidade acima e (4.13), temos

$$\|\psi_\delta\|_{H_t^b} \lesssim \delta^{1/2}\|\psi\|_{L_t^2} + \delta^{1/2-b}\|\psi\|_t^b. \quad (4.14)$$

Inicialmente, consideramos o intervalo $I = [-\delta, \delta]$. Note que $H^0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) = L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ e considerando $u = \psi_\delta(t)U(t)\phi$, segue do Lema 4.4, da Proposição 3.3 e de (4.14) que

$$\begin{aligned}
\|U(t)\phi\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})} &= \|\psi_\delta(t)U(t)\phi\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&\lesssim \|\psi_\delta(t)U(t)\phi\|_{X^{0,b}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}, \quad \text{para } b > 1/2, \\
&= \|U(-t)\psi_\delta(t)U(t)\phi\|_{H_t^b L_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^2} \\
&= \|U(-t)U(t)\psi_\delta(t)\phi\|_{H_t^b L_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^2} \\
&= \|\psi_\delta(t)\phi\|_{H_t^b L_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^2} \\
&= \|\psi_\delta\|_{H_t^b} \|\phi\|_{L_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^2} \\
&\leq (\delta^{1/2}\|\psi\|_{L_t^2} + \delta^{1/2-b}\|\psi\|_t^b) \|\phi\|_{L_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}^2}.
\end{aligned}$$

Segue da densidade de C_0^∞ em L^2 e H^b , $b > 0$, que existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que

$$\begin{aligned}
\|U(t)\phi\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})} &\leq (\delta^{1/2}C_1 + \delta^{1/2-b}C_2) \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&\lesssim (\delta^{1/2} + \delta^{1/2-b}) \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&= C(I)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})},
\end{aligned} \quad (4.15)$$

onde $C(I) := \delta^{1/2} + \delta^{1/2-b}$. Isto prova o teorema para $I = [-\delta, \delta]$.

Agora, vejamos para um intervalo qualquer $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Para isso, consideremos

$$U(t)\phi = U\left(t - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)U\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\phi = U\left(t - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)\Phi,$$

onde $\Phi := U\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\phi$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} &= \|U(t)\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&= \|U(t - \frac{\alpha + \beta}{2})\Phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&= \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Se $t \in [\alpha, \beta]$, então $-\frac{\beta-\alpha}{2} \leq t - \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \frac{\beta-\alpha}{2}$. Agora, é suficiente considerar $\delta = \frac{\beta-\alpha}{2}$. Logo como em (4.15), segue-se

$$\begin{aligned}
\|U(t)\phi\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} &= \|U(t - \frac{\alpha + \beta}{2})\Phi\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&\lesssim C(I)\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\
&= C(I)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Isto conclui a prova do teorema.

Capítulo 5

Equação não linear de Schrödinger num domínio cilíndrico

Consideramos neste capítulo o problema de valor inicial (PVI), ou simplesmente problema de Cauchy, associado à equação não linear de Schrödinger no cilindro, definido por

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = \pm |u|^{p-1}u, & (t; x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \quad 1 < p \leq 3, \\ u(0; x, y) = \phi(x, y), \end{cases} \quad (5.1)$$

onde Δ denota o clássico operador de Laplace $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Usando o princípio de Duhamel entenderemos por uma solução de (5.1) uma função u que satisfaça a equação integral

$$u(t) = U(t)\phi \pm i \int_0^t U(t-t')|u|^{p-1}u(t')dt', \quad (5.2)$$

onde $U(t) = e^{-it(\partial_x^2 + \partial_y^2)}$ denota o grupo unitário associado à solução do modelo linear

$$\begin{cases} iu_t(t; x, y) - \Delta u(t; x, y) = 0, & (t; x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ u(0; x, y) = \phi(x, y). \end{cases} \quad (5.3)$$

O método que usaremos para encontrar as soluções exige fazer uma localização em tempo da equação integral. Para isso, escolhemos uma função de corte ψ , como a que foi definida em (3.4), e consideremos a versão localizada em tempo da equação (5.2):

$$u(t) = \psi(t)U(t)\phi \pm i\psi_\delta(t) \int_0^t U(t-t')|u|^{p-1}u(t')dt'. \quad (5.4)$$

Neste capítulo, vamos mostrar os principais resultados, ou seja, os Teoremas A e B descritos na introdução, agora escritos de forma mais precisa.

Teorema 5.1. *Seja $1 < p < 3$. Então, para cada $\phi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, existe $\delta = \delta(\|\phi\|_{L^2}, p) > 0$ e uma única solução da equação integral (5.4), no intervalo de tempo $[-\delta, \delta]$, tal que*

(a) $u \in \mathcal{C}([-\delta, \delta] : L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})) \cap L^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})$, para todo r verificando $2 \leq r \leq 4$ com $r = pq$ e $4/3 \leq q \leq 2$.

(b) A aplicação dado-solução $\phi \mapsto u(t; \cdot, \cdot)$ é localmente lipschitziana.

Teorema 5.2. *Seja $p = 3$. Então, para cada $\phi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, suficientemente pequeno, existe uma única solução da equação integral (5.2) no intervalo de tempo I , tal que*

$$u \in L_t^\infty(L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})) \cap L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}). \quad (5.5)$$

Além disso, para tais dados as soluções podem ser estendidas globalmente.

5.1 Prova do Teorema 5.1.

Nesse caso, usaremos a estrutura dos espaços de Bourgain a fim de executar o argumento de ponto fixo.

Fixamos inicialmente números positivos $a > 0$ e $\delta > 0$. Definimos o seguinte conjunto

$$E_a := \left\{ u \in \mathcal{C}([-\delta, \delta] : L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})) \cap L^r(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}) : \|u\| = \sup_t \|u\|_{L^2} + \|u\|_{L^r} \leq a \right\},$$

onde r será determinado ao longo da prova do teorema.

Assim definido, E_a claramente é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|$. Para maiores detalhes recomendamos [12].

Além disso, para cada $u \in E_a$ definimos o operador T como segue

$$T(u)(t) := \psi(t)U(t)\phi \pm i\psi_\delta(t) \int_0^t U(t-t')|u|^{p-1}u(t')dt'. \quad (5.6)$$

Faremos a prova em 3 passos.

Passo 1. $T(u) \in E_a$, para cada $u \in E_a$.

De fato: queremos mostrar que $\|Tu\| = \sup_t \|Tu\|_{L^2} + \|Tu\|_{L^r} \leq a$.

$$\text{i) } \|Tu\|_{L^r} \leq \|\psi(t)U(t)\phi\|_{L^r} + \|\psi_\delta(t) \int_0^t U(t-t')|u|^{p-1}u(t')dt'\|_{L^r}.$$

Estimaremos inicialmente o primeiro membro da parte direita de i). Como $\phi \in L^2$, então $\psi U(t)\phi \in L^2$ e $\psi U(t)\phi \in X^{0,b}$. Logo, pelo Lema 4.4, obtemos $\psi U(t)\phi \in L^4$.

Além disso, o teorema de interpolação garante que existe $2 \leq r \leq 4$, tal que

$$\|\psi(t)U(t)\phi\|_{L^r} \leq \|\psi(t)U(t)\phi\|_{L^2}^\theta \|\psi(t)U(t)\phi\|_{L^4}^{1-\theta}, \quad \theta \in [0, 1].$$

Segue então do Lema 4.4, combinado com $\|u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{X^{0,b}}$ e a Proposição 3.5, que

$$\begin{aligned} \|\psi(t)U(t)\phi\|_{L^r} &\lesssim C\|\psi(t)U(t)\phi\|_{X^{0,b}}, \quad b > 1/2 \\ &\leq C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Agora, estimaremos o segundo membro da parte direita de i). Usando (3.13), segue que

$$\begin{aligned} \|\psi_\delta(t) \int_0^t U(t-t')|u|^{p-1}u(t')dt'\|_{L^r} &= \|\psi_\delta(t)(U *_R |u|^{p-1}u)\|_{L^r} \\ &\leq C\|\psi_\delta(t)(U *_R |u|^{p-1}u)\|_{X^{0,b}}, \quad b > 1/2 \\ &\leq C\delta^{1+\tilde{b}-b}\| |u|^{p-1}u \|_{X^{0,\tilde{b}}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $-1/2 < \tilde{b} \leq 0 \leq b \leq \tilde{b} + 1$.

Por outro lado, dualizando o Lema 4.4, temos

$$\|u\|_{X^{0,-b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \leq C\|u\|_{L^{4/3}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}, \quad b > 1/2. \quad (5.9)$$

Pelo teorema Riesz-Thorin, aplicado em (5.9) com a seguinte identidade

$$\|u\|_{X^{0,0}} = \|u\|_{L^2},$$

segue que para cada $q \in (4/3, 2]$ existe $b' \in (-1/2, 0)$, tal que

$$\|u\|_{X^{0,b'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \leq C\|u\|_{L^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}. \quad (5.10)$$

Agora, combinando (5.10) e (5.7) obtemos

$$\begin{aligned} \|\psi_\delta(t) \int_0^t U(t-t')|u|^{p-1}u(t')dt'\|_{L^r} &\leq C\delta^{1+\tilde{b}-b}\| |u|^{p-1}u \|_{L^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\ &\leq C\delta^{1+\tilde{b}-b}\| |u|^p \|_{L^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\ &\leq C\delta^{1+\tilde{b}-b}\|u\|_{L^{pq}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}^p, \end{aligned}$$

basta fazer $r = pq$, assim $r \in [2, 4]$ com $q \in (4/3, 2]$. Então, da desigualdade acima

obtemos

$$\|\psi_\delta(t) \int_0^t U(t-t')|u|^{p-1}u(t')dt'\|_{L^r} \leq C\delta^{1+\tilde{b}-b}\|u\|_{L^r}^p. \quad (5.11)$$

De (5.7) e (5.11) tem-se

$$\|Tu\|_{L^r} \leq C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + C\delta^{1+\tilde{b}-b}\|u\|_{L^r}^p, \quad (5.12)$$

o que conclui a demonstração de i).

ii) Note que $\sup_t \|Tu\|_{L^2} \leq C\|Tu\|_{X^{0,b}}$. Continuando com os mesmos argumentos usados em i), temos que

$$\|Tu\|_{L^2} \leq C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + C\delta^{1+\tilde{b}-b}\|u\|_{L^r}^p. \quad (5.13)$$

Logo, de (5.12) e (5.13), tem-se

$$\begin{aligned} \|Tu\| &\leq C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + C\delta^{1+\tilde{b}-b}\|u\|_{L^r}^p \\ &\leq C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + C\delta^{1+\tilde{b}-b}a^p. \end{aligned}$$

Agora, é suficiente considerar $a = 2C\|\phi\|_{L^2}$, tal que $\delta^{1+\tilde{b}-b}2^p C^{p-1}\|\phi\|_{L^2}^{p-1} < 1$. Isso garante que $\|Tu\| \leq a$. Assim, $T(u) \in E_a$ para cada $u \in E_a$.

Passo 2. $T : E_a \mapsto E_a$ é uma contração.

De fato: tomamos $u, v \in E_a$. Logo, de (5.12) e do Lema 1.10, temos

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\| &\leq C\delta^{1+\tilde{b}-b}\||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\|_{L^r} \\ &\leq C\delta^{1+\tilde{b}-b}(\||u|^{p-1}|u-v|\|_{L^r} + \||v|^{p-1}|u-v|\|_{L^r}) \\ &\leq C\delta^{1+\tilde{b}-b}(\||u|^{p-1}\|_{L^r}\|u-v\|_{L^r} + \||v|^{p-1}\|_{L^r}\|u-v\|_{L^r}) \\ &\leq C\delta^{1+\tilde{b}-b}\|u-v\|_{L^r}(\|u\|_{L^r}^{p-1} + \|v\|_{L^r}^{p-1}) \\ &\leq 2C\delta^{1+\tilde{b}-b}a^{p-1}\|u-v\|_{L^r}. \end{aligned}$$

Agora, é suficiente considerar $a \leq 2C\|\phi\|_{L^2}$, tal que $2C\delta^{1+\tilde{b}-b}a^{p-1} < 2^p\delta^{1+\tilde{b}-b}C^p\|\phi\|_{L^2}^{p-1} < 1$. Assim, $T(u)$ é uma contração.

Passo 3. $T(u)(t)$ depende continuamente de ϕ .

De fato: sejam u, v soluções de (5.6) com dados iniciais ϕ e φ , respetivamente. De (5.12), temos

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\| &\leq C\|\phi - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + C\delta^{1+\tilde{b}-b}\|u-v\|_{L^r}^p \\ &\leq C\|\phi - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + C\delta^{1+\tilde{b}-b}a^p. \end{aligned}$$

Agora, é suficiente considerar $a = 2C\|\phi - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})}$, tal que $2^p \delta^{1+\tilde{b}-b} C^p \|\phi - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})}^{p-1} < 1$. Assim, para dados iniciais muito próximos temos o resultado.

Concluindo: dos Passos 1, 2 e do teorema do ponto fixo temos a existência e unicidade da solução. Além disso, temos a persistência da solução e do Passo 3 segue a dependência contínua da solução.

Seque então que o problema de Cauchy (5.1), para $1 < p < 3$, é localmente bom-posto. Isto prova o Teorema 5.1.

Resta provar que o problema de Cauchy (5.1), para $1 < p < 3$, é globalmente bom-posto. Para isso, fazemos um reescalonamento da solução, isto é definimos

$$u^\lambda(t, x, y) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta t, \lambda x, \lambda y),$$

com dado inicial

$$u^\lambda(0, x, y) = \lambda^\alpha \phi(\lambda x, \lambda y),$$

u_λ assim definida para $(\alpha, \beta) = (\frac{2}{p-1}, 2)$ é também uma solução. Então, para λ suficientemente pequeno, podemos estender a solução para qualquer intervalo de tempo.

Concluimos então que o problema de Cauchy (5.1), para $1 < p < 3$, é globalmente bem-posto.

5.2 Prova do Teorema 5.2

Aplicaremos o argumento de ponto fixo à equação integral correspondente da (5.2) para $p = 3$, isto é,

$$u(t) = U(t)\phi \pm i \int_0^t U(t-t')|u|^2 u(t') dt'. \quad (5.14)$$

O lema a seguir será útil para obter o controle desejado do segundo termo de (5.14).

Lema 5.3. *Seja $f \in L^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, tal que $0 \in I$. Então,*

$$\left\| \int_0^t U(t-t') f(t'; \cdot) dt' \right\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \lesssim C_1(I) \|f\|_{L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}.$$

Demonstração. Vamos definir o operador linear $A : L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \mapsto L^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})$ como sendo $A\phi := U(t)\phi$. Assim, pela Proposição 4.1, o operador A é limitado, i.e.,

$$\|U(t)\phi\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \leq C(I) \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})},$$

onde $C(I)$ é uma constante que só depende da medida de I .

Se A^* denota o adjunto de A , então ele vem dado por

$$A^*(f) = \int_I U(-t')f(t'; \cdot)dt',$$

pois

$$\begin{aligned} \langle \phi, A^*f \rangle &= \phi \int_I U(-t')f(t'; \cdot)dt' \\ &= \int_I U(-t')\phi f(t'; \cdot)dt' \\ &= \int_I \overline{U(t')\phi} f(t'; \cdot)dt' \\ &= \int_I \overline{A\phi} f(t'; \cdot)dt' \\ &= \langle A\phi, f \rangle. \end{aligned}$$

Além disso, A^* é limitado de $L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})$ em $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, isto é,

$$\left\| \int_I U(-t')f(t'; \cdot)dt' \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \lesssim C(I) \|f\|_{L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}. \quad (5.15)$$

De fato, usando o teorema de Fubini e a Proposição 4.1, tem-se

$$\begin{aligned} \left\| \int_I U(-t')f(t'; \cdot)dt' \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} &= \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}} \int_I U(-t')f(t'; \cdot)dt' g(x, y) dx dy \right| \\ &= \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \leq 1} \left| \int_{I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}} U(-t')g(x, y)f(t'; \cdot) dx dy dt' \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \leq 1} \|U(-t')g\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \|f\|_{L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\ &\leq \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \leq 1} C(I) \|g\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \|f\|_{L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\ &= C(I) \|f\|_{L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Note também que

$$AA^* = \int_I U(t-t')f(t'; \cdot)dt',$$

e que AA^* é limitado de $L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})$ a $L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})$, isto é,

$$\left\| \int_I U(t-t')f(t'; \cdot)dt' \right\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \lesssim C_1(I) \|f\|_{L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}. \quad (5.16)$$

De fato, segue da Proposição 4.1 e de (5.15) que

$$\begin{aligned} \left\| \int_I U(t-t')f(t'; \cdot)dt' \right\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} &= \left\| U(t) \int_I U(-t')f(t'; \cdot)dt' \right\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\ &\lesssim C(I) \left\| \int_I U(-t')f(t'; \cdot)dt' \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\ &\lesssim C^2(I) \|f\|_{L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Para a conclusão da prova identificamos $X = Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $k(t, t')$ com $U(t-t')$ e tomemos $p = 4/3$ e $q = 4$ no Lema 1.3. Deste último e de (5.16) tem-se

$$\left\| \int_0^t U(t-t')f(t'; \cdot)dt' \right\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \lesssim C_1(I) \|f\|_{L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})},$$

onde $C_1(I) := C^2(I)$. Isto conclui a prova. \square

Lembre que as constantes $C(I)$ e $C_1(I)$ na Proposição 4.1 e o Lema 5.3 só dependem da medida do intervalo I .

Agora, estamos em condições de provar o Teorema 5.2.

Definimos a sequência $\{u_n\}$ como sendo

$$\begin{aligned} u_0 &= U(t)\phi, \\ u_{n+1} &= U(t)\phi \pm i \int_0^t U(t-t')|u_n(t')|^2 u_n(t') dt'. \end{aligned}$$

Consideremos $I = [-1, 1]$, fixamos inicialmente $a > 0$ e definimos o conjunto

$$E_a = \{u \in L_t^\infty(L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})) \cap L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}) : \|u\| = \sup_t \|u\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} + \|u\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \leq a\}.$$

i) Seja $u_n \in E_a$. Então, da Proposição 4.1 e do Lema 5.3, temos que

$$\|u_{n+1}\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \lesssim C(I) \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} + C_1(I) \|u_n\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}^3.$$

ii) Segue de (5.15) e do Lema 5.3 que

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} &\leq \|U(t)\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} + \left\| \int_0^t U(t-t')|u_n(t')|^2 u_n(t') dt' \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\ &= \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} + \left\| \int_0^t U(-t')|u_n(t')|^2 u_n(t') dt' \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\ &\leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} + C_1(I) \| |u_n|^2 u_n \|_{L^{4/3}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})} \\ &= \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} + C_1(I) \|u_n\|_{L^4(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})}^3. \end{aligned}$$

Segue então de i) e ii), que

$$\|u_{n+1}\| \leq C_1(I)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + C_1(I)\|u_n\|_{L^4(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}^3.$$

Como u_n pertence a E_a , tem-se

$$\|u_{n+1}\| \leq C_1(I)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + C_1(I)a^3.$$

Agora é suficiente considerar $a = 2C_1(I)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}$ tal que $8C_1(I)^2\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}^2 < 1$ para ter que $u_n : E_a \rightarrow E_a$.

Além disso, dos Lemas 1.10, 5.3 e do teorema de Hölder, segue-se que

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\| &\lesssim \left\| \int_0^t U(t-t') (|u_n|^2 u_n - |u_{n-1}|^2 u_{n-1}) dt' \right\|_{L^4(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \\ &\lesssim C_1(I) \| |u_n|^2 u_n - |u_{n-1}|^2 u_{n-1} \|_{L^{4/3}(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \\ &\leq C_1(I) (\| |u_n|^2 |u_n - u_{n-1}| \|_{L^{4/3}} + \| |u_{n-1}|^2 |u_n - u_{n-1}| \|_{L^{4/3}}) \\ &\leq C_1(I) (\| |u|^2 \|_{L^2} \|u_n - u_{n-1}\|_{L^4} + \| |u_{n-1}|^2 \|_{L^2} \|u_n - u_{n-1}\|_{L^4}) \\ &\leq C_1(I) \|u_n - u_{n-1}\|_{L^4} \times (\|u_n\|_{L^4(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}^2 + \|u_{n-1}\|_{L^4(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}^2). \end{aligned}$$

Como u_n pertence a E_a , temos que

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq 2C_1(I)a^2 \|u_n - u_{n-1}\|_{L^4(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})}.$$

Agora, é suficiente considerar $a \leq 2C_1(I)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}$, tal que $2C_1(I)a^2 < 8C_1(I)^3\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}^3 < 1$. Assim, temos que u_n é uma sequência contrativa.

Portanto, tomando $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}$ suficientemente pequena temos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy numa bola fechada centrada na origem de $L_t^\infty(L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})) \cap L^4(I\times\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, similar ao caso subcrítico. Portanto, $\{u_n\}$ converge a uma solução local do problema de Cauchy (5.1) no intervalo de tempo $[-1,1]$. Logo, devido à lei de conservação da norma $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, como em (4), uma última iteração do processo nos leva estender soluções locais a soluções globais no tempo.

Referências Bibliográficas

- [1] R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley Online Library, **27** (1995).
- [2] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations I, Schrödinger equations*. *Geom. Funct. Anal*, **3** (1993), 107–156.
- [3] J. Bourgain, *Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations*. AMS Colloquium Publications, **46**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1999).
- [4] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*. Courant Lecture Notes in Mathematics, **10**. American Mathematical Society, Providence, (2003).
- [5] T. Cazenave and F. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equations in H^s* . *Nonlinear Anal*, **14**. American Mathematical Society, Providence, (1990), 807–836.
- [6] G. Fibich, *The nonlinear Schrödinger equation*. Springer, Applied Mathematical Sciences, **192** (2015).
- [7] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, INC **2** (1999).
- [8] J. Ginibre and G. Velo, *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations*. *J. Math. Pure Appl*, **64** (1985), 363–401.
- [9] J. Ginibre, Y. Tsutsumi and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system*. *Journal of Functional Analysis*, **151** (1997), 384–436.
- [10] R. Iorio Jr. and V. Iorio, *Fourier analysis and partial differential equations*. Cambridge University Press, **70** (2001).
- [11] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. Wiley New York, **1** (1978).

- [12] E. L. Lima, *Espaços métricos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, **4** (1983).
- [13] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*. IMPA - Rio de Janeiro, **2** (2006).
- [14] T. Ozawa and Y. Tsutsumi, *Lectures on nonlinear dispersive equations I*. Technical Report Series of Department of Mathematics, Hokkaido University (2004).
- [15] H. F. Smith and C. D. Sogge, *Global strichartz estimates for nontrapping perturbations of the laplacian: Estimates for nontrapping perturbations*. Communications in Partial Differential Equations, **25** (2000), 2171–2183.
- [16] W. Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*. J. Funct. Anal, **41** (1981), 110–133.
- [17] W. Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy: sequel*. J. Funct. Anal, **43** (1981), 281–293.
- [18] C. Sulem and P. L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse*. Springer, Applied Mathematical Sciences, **139** (1999).
- [19] H. Takaoka and N. Tzvetkov, *On 2D nonlinear Schrödinger equations with data on $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$* . Journal of Functional Analysis, **182** (2001), 427–442.
- [20] T. Tao, *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*. American Mathematical Soc., **106** (2006).
- [21] Y. Tsutsumi, *L^2 solutions for nonlinear Schrödinger equation and nonlinear groups*. Funkcial Ekvac, **30** (1987), 115–125.