BOA COLOCAÇÃO E CONTROLE PARA O SISTEMA DE GEAR-GRIMSHAW

Miguel Dario Soto Vieira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Ademir Fernando Pazoto D.Sc.

Rio de Janeiro
Agosto de 2018

BOA COLOCAÇÃO E CONTROLE PARA O SISTEMA DE GEAR-GRIMSHAW

Miguel Dario Soto Vieira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE MATEMATICA DE PÓS-GRADUAÇÃO (IM) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MATEMÁTICA.

Examinada por:

Prof. Ademir Fernando Pazoto, UFRJ,Presidente

Prof. Juan Límaco Bautista Ferrel, UFF

Prof. Adám José Corcho Fernández, UFRJ

Prof. Pedro Gamboa Romero, UFRJ

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
AGOSTO DE 2018

Soto Vieira, Miguel Dario

Boa colocação e controle para o sistema de Gear-Grimshaw/Miguel Dario Soto Vieira. – Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2018.

VIII, 57 p. $29,7$cm.

Orientador: Ademir Fernando Pazoto D.Sc.

Dissertação (mestrado) – IM/UFRJ/Programa de Matemática, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 50 – 52.

1. Korteweg de Vries. 2. Desigualdade observabilidade. 3. HUM. 4. Controle exato . I. D.Sc., Ademir Fernando Pazoto. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, Programa de Matemática. III. Título.

A mis abuelos, mi madre y mis hermanas por estar conmigo en todo momento

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que, nesses últimos anos, ajudaram-me a transformar este objetivo em realidade.

Ao meu orientador, Ademir Pazoto, pelos ensinamentos e conselhos sem os quais eu não teria conseguido chegar até aqui.

Aos meus avós, pelo apoio incondicional, pelo exemplo, pelas palavras de estímulo em momentos difíceis e pelo amor que têm por mim.

Às minhas irmãs, pela ajuda e amizade.

À CAPES, pelo apoio financiero.

Ao IM-UFRJ, pela oportunidade de fazer parte dele.

À Deus, por estar sempre comigo, guiando meus passos.

Resumo da Dissertação apresentada à IM/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

BOA COLOCAÇÃO E CONTROLE PARA O SISTEMA DE GEAR-GRIMSHAW

Miguel Dario Soto Vieira

Agosto/2018

Orientador: Ademir Fernando Pazoto D.Sc.

Programa: Matemática

Neste trabalho, mostramos a propriedade de controle exato local na fronteira para um sistema não linear de duas equações de Korteweg-de Vries acopladas que modelam as interações de ondas de gravidade não lineares (veja [14]). Seguindo o método apresentado em [16], que combina a análise do sistema linear e o Teorema do ponto fixo de Banach, o problema de controlabilidade é reduzido a provar uma propriedade de continuação única das autofunções do operador diferencial correspondente. Além disso, mostramos que em alguns casos é possível obter a controlabilidade do sistema usando apenas dois controles. Isso pode ser feito dependendo do domínio espacial e do tempo de controle.

Abstract of Dissertation presented to IM/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

BOA COLOCAÇÃO E CONTROLE PARA O SISTEMA DE GEAR-GRIMSHAW

Miguel Dario Soto Vieira

August/2018

Advisor: Ademir Fernando Pazoto D.Sc.

Program: Mathematics

In this work, we show the exact local property of boundary control of a non-linear system of two coupled Korteweg-de Vries equations that model the interactions of non-linear gravity waves (see [14]). Following the method in [16], which combines the analysis of the linearized system and Banach's fixed point theorem, the controllability problem is reduced to prove a unique continuation property of the eigenfunctions of the corresponding differential operator. Also, we prove that in some cases it is possible to get the controllablity of the system by using only two controls. This can be done depending on both the spatial domain and the control time.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Em [14], Gear e Grimshaw obtiveram um modelo para descrever a interação entre duas ondas gravitacionais internas e longas em um fluido estratificado. Trata-se de um sistema que tem a estrutura de um par de equações de Korteweg de Vries (KdV) acopladas com efeitos dispersivos e não lineares, que tem sido objeto de pesquisa intensiva nos últimos anos.

Neste trabalho, estamos interessados no estudo do sistema de Gear-Grimshaw

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} + a_3 v_{xxx} + a_1 v v_x + a_2 (uv)_x = 0, & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ b_1 v_t + r v_x + v v_x + b_2 a_3 u_{xxx} + v_{xxx} + b_2 a_2 u u_x + b_2 a_1 (uv)_x = 0, & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ u(0,x) = u^0(x),\ v(0,x) = v^0(x), & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{1.1}$$

satisfazendo as seguintes condições de fronteira

$$\begin{cases} u(t,0) = 0, \quad u(t,L) = h_1(t), \quad u_x(t,L) = h_2(t), & \text{em } (0,T), \\ v(t,0) = 0 \quad v(t,L) = g_1(t), \quad v_x(t,L) = g_2(t), & \text{em } (0,T), \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, r \in \mathbb{R}$. Ao longo do trabalho, por questões técnicas assumiremos que

$$1 - a_3^2 b_2 > 0 \quad \text{e} \quad b_1 = b_2 > 0.$$

As funções h_1, g_1, h_2, g_2 são os controles e (u^0, v^0) é o dado inicial.

Nosso objetivo é verificar se é possível forçar as soluções desses sistemas a terem certas propriedades desejadas, escolhendo controle apropriados. Mais precisamente, consideraremos o seguinte problema clássico que surge na teoria de controle:

O problema de controle exato: Dado $T > 0$, $L > 0$ e $(u^0, v^0), (u^1, v^1)$ em $(L^2(0, L))^2$, pode-se encontrar controles apropriados h_1, g_1, h_2, g_2 em certos espaços funcionais, tal que a solução correspondente (u, v) de (1.1)-(1.2) satisfaz

$$u(T, \cdot) = u^1, \quad v(T.\cdot) = v^1. \tag{1.3}$$

Se a resposta para o problema acima for positiva, dizemos que o sistema é exatamente controlável.

O problema de controlabilidade que abordamos aqui tem sido intensamente estudado no contexto das equações de onda e calor, porém há menos resultados para a equação tipo KdV com condições na fronteira como em (1.1). Em [16], Rosier mostrou que a equação escalar linear

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + u_x = 0, & \text{em } (0, T) \times (0, L), \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, \ u_x(t, L) = h(t), & \text{em } (0, T), \\ u(0, x) = u^0(x), & \text{em } (0, L), \end{cases} \tag{1.4}$$

é exatamente controlável por meio de um único controle $h \in L^2(0, T)$, exceto quando L pertence a um conjunto enumerável de comprimentos críticos da forma

$$\Lambda = \left\{ \frac{2\pi}{3}\sqrt{k^2 + kl + l^2}, k, l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esse resultado foi provado fazendo uso do método de HUM (Hilbert Uniqueness Method) introduzido por J-L Lions (Veja o Apêndice) e um principio de continuação única para as autofunções do operador diferencial. Por um argumento de linearização tem-se um resultado de controlabilidade local para a equação semilinear escalar

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + u_x + uu_x = 0, & \text{em } (0, T) \times (0, L), \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, \ u_x(t, L) = h(t), & \text{em } (0, T), \\ u(0, x) = u^0(x), & \text{em } (0, L), \end{cases} \tag{1.5}$$

também provado em [18].

Até onde sabemos, os primeiros resultados de controlabilidade para o sistema (1.1) foram obtidos em [28], considerando um domínio periódico e $r = 0$. Neste caso, uma diagonalização dos termos principais permite desacoplar o sistema linear correspondente em duas equações KdV e usar os resultados anteriores disponíveis na literatura. No que diz respeito a um intervalo limitado $(0, L)$, mais tarde, Micu et al., em [29], provaram o seguinte resultado relativo à propriedade de controlabilidade exata na fronteira, que constitui a parte central desse trabalho:

Teorema 1.1. *Sejam $L > 0$ e $T > 0$. Então, existe uma constante $\delta > 0$, tal que para quaisquer dados inicial e final $(u^0, v^0), (u^1, v^1) \in (L^2(0,L))^2$, satisfazendo*

$$\left\|(u^0, v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \leq \delta \quad e \quad \left\|(u^1, v^1)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \leq \delta,$$

existem quatro controles $h_1, g_1 \in H_0^1(0,T)$ e $h_2, g_2 \in L^2(0,T)$, tal que a solução $(u, v) \in C([0,T]; (L^2(0,L))^2) \cap L^2(0,T; (H^1(0,L))^2) \cap H^1(0,T; (H^{-2}(0,L))^2)$ de (1.1)-(1.2) verifica (1.3).

A prova do Teorema 1.1 combina a análise do sistema linearizado e o Teorema do ponto fixo de Banach. Para analisar o sistema linearizado, os autores utilizaram o método HUM (veja o Apêndice) e os argumentos apresentados por Rosier em [16]. Nesse caso, mostrar a propriedade de controlabilidade exata é equivalente a mostrar uma desigualdade de observabilidade para as soluções do sistema adjunto. O problema é então reduzido a provar uma propriedade de continuação única para as autofunções do operador diferencial associado à variável espacial.

Uma melhora do Teorema 1.1 foi feita por Cerpa et al., em [30]. Os autores consideraram o sistema (1.1)-(1.2) com apenas dois controle atuando sobre as condições de fronteira, isto é,

$$\begin{cases} u(t,0) = 0, \quad u(t,L) = 0, \quad u_x(t,L) = h_2(t), & \text{em } (0,T), \\ v(t,0) = 0 \quad v(t,L) = 0, \quad v_x(t,L) = g_2(t), & \text{em } (0,T). \end{cases} \tag{1.6}$$

Neste caso, a análise do sistema linear é muito mais complicado, portanto os autores utilizaram uma abordagem direita baseada na técnica de multiplicadores que dá a desigualdade de observabilidade para pequenos valores do comprimento L e grande de tempo de controle T.

Teorema 1.2. *Sejan $L, T > 0$ satisfazendo*

$$\frac{max\left\{b, c\right\}}{min\left\{b(1-\hat{\epsilon}^2), (1-\frac{a^2 b}{\hat{\epsilon}^2})\right\}}\left\{\frac{rL^2}{3c\pi^2} + \frac{L^3}{3T\pi}\right\} < 1,$$

onde

$$\hat{\epsilon} = \sqrt{\frac{-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4a^2b^2}}{2b}}.$$

Então, existe uma constante $\delta > 0$, tal que para qualquer dados iniciais e finais

$(u^0,v^0),(u^1,v^1)\in(L^2(0,L))^2$ *verificando*

$$\left\|(u^0,v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2}\leq\delta \quad e \quad \left\|(u^1,v^1)\right\|_{(L^2(0,L))^2}\leq\delta,$$

existem dois controles $h,g\in L^2(0,T)$, *con* $h_1=g_1=0$ *tal que a solução*

$$(u,v)\in C([0,T];(L^2(0,L))^2)\cap L^2(0,T;(H^1(0,L))^2),$$

de (1.1)-(1.6) *satisfaz* (1.3).

A análise que descrevemos acima, foi organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 damos algumas definições e teoremas que serão utilizadas ao longo do trabalho. No Capítulo 3 fazemos um estudo do sistema linear homogêneo, do sistema linear não homogêneo e do sistema adjunto, obtendo a boa colocação e alguns resultados adicionais. No Capítulo 4 estudamos a controlabilidade do sistema linear, provando uma desigualdade de observabilidade fazendo uso de um princípio de continuação única. Finalmente, no Capítulo 5 provamos os resultados principais do trabalho, ou seja, a controlabilidade local do sistema não linear.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Espaço das Distribuições

Definição 2.1. *Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uma função contínua, onde Ω é um aberto. Definimos suporte de φ como o fecho em Ω do conjunto dos pontos de Ω onde φ não se anula. Vamos denotar o suporte de φ por supp(φ). Logo, temos*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Definição 2.2. *Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe C^∞ em Ω, que possuem suporte compacto em Ω.*

Dizemos que uma sequência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) *Existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$, tal que supp(φ_n) $\subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e supp(φ) $\subset K$;*

ii) *$\varphi_n^{(j)} \to \varphi^{(j)}$, uniformemente, para todo $j \in \mathbb{N}$, quando $n \to \infty$.*

Definição 2.3. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes. Denomina-se distribuição sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, se (φ_n) é uma sequência em $\mathcal{D}(\Omega)$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então*

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \ \ quando \ \ n \to \infty,$$

onde $\langle T, \varphi \rangle$ representa o valor da distribuição T na função teste φ.

Exemplo: Seja ϕ definida como

$$\phi(x) = \begin{cases} e \cdot e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se} \ \ 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{se} \ \ x \geq 1 \end{cases}$$

esta função está em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ e notamos que $\phi(0) = 1$ e $\phi(x) = 0 \; \forall x \geq 1$.

Definição 2.4. *O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado espaço das distribuições escalares sobre Ω.*
Dizemos que uma sequência de distribuições escalares (T_n) converge para a distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \;\; em \;\; \mathbb{R}, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \;\; quando \;\; n \to \infty.$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico.

Definição 2.5. *Dada uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denominamos derivada distribucional de ordem $|\alpha| \in \mathbb{N}$ de T, como sendo a distribuição $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *e* $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$.

2.2 Espaços de Sobolev

Definição 2.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto. Denotamos por $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue em Ω, que, munido da norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.
No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a Lebesgue e essencialmente limitadas em Ω, isto é, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|u(x)| \leq C, \;\; quase \; sempre \; em \; \Omega,$$

que, munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|,$$

é um espaço de Banach. Em particular, se $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert cuja norma e produto interno serão denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \;\; e \;\; \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx.$$

Dizemos que uma sequência (φ_n) *em* $L^p(\Omega)$ *converge para* φ *em* $L^p(\Omega)$ *se* $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, *quando* $n \to \infty$, *para* $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.7. *Se* p *e* q *são índices conjugados, isto é, se* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *então temos que o dual topológico de* $L^p(\Omega)$, *denotado por* $[L^p(\Omega)]'$, *é o espaço* $L^q(\Omega)$.
Além disso, se $1 \leq p < \infty$, *então* $L^p(\Omega)$ *é separável e se* $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ *é reflexivo.*

Teorema 2.8. $\mathcal{D}(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$ *para* $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. ver [2]. ∎

Lema 2.9. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam* $1 \leq p, q \leq \infty$, *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$. *Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [2]. ∎

Lema 2.10. ***(Desigualdade de Hölder generalizada)*** *Sejam* $r \geq 2$ $p_1, ..., p_r > 1$, *tais que* $\frac{1}{p_1} +, ..., + \frac{1}{p_r} = 1$ *e* $f_k \in L^{p_k}(\Omega)$ $1 \leq k \leq r$.
Então, $f_1 ... f_r \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f_1 ... f_r|\, dx \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} ... \|f_r\|_{L^{p_r}(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [1]. ∎

Definição 2.11. *Sejam* $m \in \mathbb{N}^*$, *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Definimos o espaço de Sobolev de ordem* m, *denotado por* $W^{m,p}(\Omega)$, *como sendo o espaço vetorial das (classes de) funções em* $L^p(\Omega)$, *para as quais suas derivadas de ordem* $|\alpha|$, *no sentido das distribuições, pertencem a* $L^p(\Omega)$, *para todo* $0 \leq |\alpha| \leq m$, *ou seja,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha u$ *denota a derivada fraca ou distribucional. O espaço* $W^{m,p}(\Omega)$ *munido da norma*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad se\ 1 \leq p < \infty,$$

é um espaço de Banach e, quando $p = \infty$, *definindo a norma*

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

temos que $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach.
Temos ainda que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço separável se $1 \leq p < \infty$, e reflexivo se $1 < p < \infty$. Em particular, se $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, separável e reflexivo, que é denotado por

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\ |\alpha| \leq m\},$$

cuja norma e produto interno serão denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad e \quad \langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Com a estrutura topológica acima, temos $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Definição 2.12. *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$, se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$. No caso $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.*

2.3 Espaços $L^p(0, T; X)$

Definição 2.13. *Sejam X espaço de Banach e $T > 0$. Denotamos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \to X$, fortemente mensuráveis, tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lebesgue em $(0, T)$, que, munido da norma*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach. No caso $p = 2$ e X um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é, também, um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X \, dt.$$

Se $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(0, T; X)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \to X$, fortemente mensuráveis, tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X$ pertença a $L^\infty(0, T)$, que, munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} ess \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach.

Além disso, quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, temos que $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0,T;X')$, onde p e q são índices conjugados e X' é o dual de X.

Teorema 2.14. ***(Aubin-Lions)*** *Sejam B_0, B e B_1, espaços de Banach tais que*

$$B_0 \hookrightarrow_c B \hookrightarrow B_1,$$

onde B_0 e B_1 são reflexivos, $\hookrightarrow$ denota imersão contínua e $\hookrightarrow_c$, imersão compacta. Defina $W = \{u \in L^p(0,T;B_0); u' \in L^q(0,T;B_1)\}$, onde $1 < p, q < \infty$ e $T < \infty$, munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^q(0,T;B_1)}.$$

Então W é um espaço de Banach e $W \hookrightarrow_c L^p(0,T;B)$.

Demonstração. Ver [8]. ∎

Observação. 2.15. *Note que, pelo Teorema de Aubin-Lions, temos o seguinte resultado: Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_1)$, então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em W, donde existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_{n_k} \to u$, forte em $L^2(0,T;B)$, quando $k \to \infty$.*

2.4 Alguns Resultados Importantes

Teorema 2.16. ***(Ponto Fixo de Banach)*** *Sejam E um espaço de Banach e $F \subset E$ um subespaço fechado de E. Se $f : F \to F$ é uma contração, então existe um único $z \in F$, tal que $f(z) = z$.*

Demonstração. Ver [10]. ∎

Teorema 2.17. *Seja X um espaço normado e $\overline{B_1(0)} \subset X$, a bola fechada unitária. Então, $\overline{B_1(0)}$ é compacta se, e somente se, X possui dimensão finita.*

Demonstração. Ver [2]. ∎

Teorema 2.18. ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Sejam (f_n) uma sequência de funções mensuráveis de Ω em X, $f : \Omega \to X$ e $g \in L^1(\Omega)$. Se*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \textit{quase sempre em} \quad \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \textit{quase sempre em} \quad \Omega,$$

então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Demonstração. Ver [4]. ■

Lema 2.19. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 0$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [3]. ■

Lema 2.20. ***(Desigualdade de Gronwall)***

i) *Seja $G(\cdot)$ função não negativa e absolutamente contínua sobre $[0, T]$, que satisfaz para quase todo t a desigualdade diferencial*

$$G'(t) \leq \varphi(t)G(t) + \phi(t),$$

onde φ e ϕ são funções integráveis não negativas sobre $[0, T]$. Então

$$G(t) \leq e^{\int_0^t \varphi(s)ds}\left[G(0) + \int_0^t \phi(s)ds\right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

ii) *Em particular, se $G' \leq \varphi G$, sobre $[0, T]$ e $G(0) = 0$, então $G \equiv 0$ sobre $[0, T]$.*

Demonstração. Ver [7]. ■

2.5 Teoria de Semigrupos

Definição 2.21. *Seja X um espaço de Banach. Uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X, se*

i) *$S(0) = I$, onde I é a aplicação identidade do espaço X;*

ii) *$S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.*

Dizemos que S é de classe C_0, ou fortemente contínuo, se

iii) $\lim\limits_{t \to 0^+} \|(S(t) - I)x\|_X = 0, \ \ \forall x \in X.$

Dizemos que S é uniformemente contínuo se

iv) $\lim\limits_{t \to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$

Teorema 2.22. *Se* $(S(t))_{t\geq 0}$ *é um semigrupo de classe* C_0*, então existem constantes* $\omega \geq 0$ *e* $M \geq 1$*, tais que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \ \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Ver [9]. ■

Corolário 2.23. *Seja* $(S(t))_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0*. Então, para cada* $x \in X$*, a aplicação*

$$t \mapsto S(t)x$$

é contínua. Equivalentemente, para cada $x \in X$*,*

$$\lim_{t\to s} S(t)x = S(s)x, \ \ \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração. Ver [9]. ■

Definição 2.24. *Se* $\|S(t)\| \leq 1, \ \ \forall t \geq 0$*, dizemos que* S *é um semigrupo de contrações.*

Definição 2.25. *O operador* A *definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \ \ \textit{existe} \right\}$$

e

$$Ax := \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo S*.*

Observação. 2.26. *Note que* A *é um operador linear e* $D(A)$ *é um subespaço de* X*.*

Teorema 2.27. *Seja* $(S(t))_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0 *e* A *seu gerador infinitesimal. Então,*

i) *Para* $x \in X$*,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x \, ds = S(t)x;$$

ii) *Para* $x \in X$*,*

$$\int_0^t S(s)x \, ds \in D(A), \quad e \ A\left(\int_0^t S(s)x \, ds \right) = S(t)x - x;$$

iii) *Para todo* $x \in D(A)$*,* $S(t)x \in D(A)$ *e* $\dfrac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax;$

iv) *Para todo $x \in D(A)$, $S(t)x - S(s)x = \int_0^t AS(\tau)x\,d\tau = \int_0^t S(\tau)Ax\,d\tau$.*

Demonstração. Ver [9]. ■

Corolário 2.28. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, então A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração. Ver [9]. ■

Proposição 2.29. *Um operador fechado com domínio denso é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0.*

Demonstração. Ver [5]. ■

Definição 2.30. *Sejam X espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^*. Para cada $x \in X$, defina*

$$J(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}.$$

Note que, pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$.

Definição 2.31. *Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \to X^*$, tal que $j(x) \in J(x)$, $\forall x \in X$, ou seja, $\langle x, j(x) \rangle = \|x\|^2 = \|j(x)\|^2$.*

Definição 2.32. *Dizemos que o operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j,*

$$Re\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \ \ \forall x \in D(A).$$

Se, além disso, existir $\lambda > 0$, tal que $Im(\lambda I - A) = X$, então dizemos que A é m-dissipativo.

Observação. 2.33. *Se X é um espaço de Hilbert, então dizemos que $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se*

$$Re\langle Ax, x \rangle \leq 0, \ \ \forall x \in D(A).$$

Notação: *Dizemos que $A \in G(M, \omega)$, quando A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, S, que satisfaz*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \ \forall t \geq 0.$$

Teorema 2.34. ***(Lumer - Phillips)***
$A \in G(1, 0)$ se, e somente se, A é m-dissipativo e possui domínio denso em X.

Demonstração. Ver em [9]. ∎

Proposição 2.35. *Seja A um operador de X espaço de Banach densamente definido, então A é fechado se, e somente se, A^* é densamente definido e $A^{**} = A$*

Demonstração. Ver [6]. ∎

Proposição 2.36. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear de X, espaço de Banach. Se $\overline{D(A)} = X$, A e A^* são dissipativos e A é fechado, então $A \in G(1, 0)$.*

Demonstração. Ver [9]. ∎

2.6 Problema de Cauchy Abstrato

Sejam X espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $(S(t))_{t\geq 0}$, e $f \in L^1(0, T; X)$.
Dado $u_0 \in D(A)$, o problema de Cauchy Abstrato consiste em determinar uma função $u(t)$, tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \ \ t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.37. *Dizemos que u é solução clássica (ou forte) de (2.1) em $[0, +\infty)$, se u satisfaz (2.1) e $u \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$.*

Teorema 2.38. *Se $A \in G(M, \omega)$ e $u_0 \in D(A)$, o problema (2.1) possui uma única solução clássica.*

Demonstração. Ver [5]. ∎

Considere, agora, o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \ \ t > 0, \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases} \tag{2.2}$$

Definição 2.39. *Uma função $u : [0, +\infty) \to X$ é uma solução clássica de (2.2) em $[0, +\infty)$ se u satisfaz (2.2) em $[0, +\infty)$ e se $u \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$. Uma função $u \in C([0, T]; X)$, dada por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t - s)f(s, u(s))\, ds,$$

é chamada de mild solution ou solução generalizada de (2.2) em $[0, T]$.

Note que se $f \equiv 0$, então $u(t) = S(t)u_0$, $u_0 \in X$, é a mild solution de (2.1).

Teorema 2.40. *Seja* $f : [0, +\infty) \times X \to X$ *uma função contínua em* t*. Suponha que, para cada* $\tau > 0$*, existe uma constante* $L = L(\tau)$*, tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

$\forall x, y \in X$ *e* $\forall t \in [0, \tau]$*. Então, para cada* $u_0 \in X$*, (2.2) possui uma única mild solution* $u \in C([0, \tau]; X)$*. Além disso, a aplicação* $u_0 \mapsto u$ *é contínua de* X *em* $C([0, \tau]; X)$*.*

Demonstração. Ver [5]. ■

Capítulo 3

O sistema linear

3.1 O sistema linear homogêneo.

Nesta seção, estudamos a existência de soluções do sistema linear homogêneo correspondente a (1)

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + av_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ cv_t + rv_x + bau_{xxx} + v_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,L) = 0, & \text{em } (0,T), \\ v(t,0) = v(t,L) = v_x(t,L) = 0, & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u^0(x),\ v(0,x) = v^0(x), & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde a, b, c, r são reais positivos, tais que

$$1 - a^2 b > 0 \text{ e } b = c.$$

Sejam $X = (L^2(0,L))^2$ munido do seguinte produto interno

$$< (u,v), (\varphi, \phi) >= \int_0^L u\varphi dx + \int_0^L v\phi dx \tag{3.2}$$

e A o operador definido por

$$\begin{cases} A : D(A) \subset X \longrightarrow X \\ D(A) = \{(u,v) \in (H^3(0,L))^2 : u(0) = v(0) = u(L) = v(L) = u_x(L) = v_x(L) = 0\} \\ A(u,v) = \begin{pmatrix} -\partial_{xxx} & -a\partial_{xxx} \\ -\frac{ba}{c}\partial_{xxx} & -\frac{r}{c}\partial_x - \frac{1}{c}\partial_{xxx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \forall (u,v) \in D(A). \end{cases} \tag{3.3}$$

Com a notação introduzida acima, o sistema (3.1) pode ser escrito como um problema de Cauchy abstrato em X:

$$\begin{cases} (u,v)_t = A(u,v), \\ (u,v)(0) = (u^0, v^0). \end{cases} \tag{3.4}$$

Com o objetivo de definir o operador adjunto A^* de A, realizamos alguns cálculos (formais). Multiplicamos a primeira equação de (3.1) por φ, a segunda por ϕ e integramos por partes. Utilizando as condições de contorno obtemos as seguintes identidades:

$$
\begin{aligned}
\int_0^L -(u_{xxx} + av_{xxx})\varphi dx &= \int_0^L (u_{xx} + av_{xx})\varphi_x dx - \varphi(u_{xx} + av_{xx})_0^L \\
&= \int_0^l -(u_x + av_x)\varphi_{xx} dx + \varphi_x(u_x + av_x)_0^L \\
&= \int_0^L (u + av)\varphi_{xxx} dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L -(\frac{r}{c}v_x + \frac{ba}{c}u_{xxx} + \frac{1}{c}v_{xxx})\phi dx \\
&= \int_0^L \frac{r}{c}v\phi_x dx - \phi(rv)_0^L + \int_0^L (\frac{ba}{c}u_{xx} + \frac{1}{c}v_{xx})\phi_x dx - \phi(\frac{ba}{c}u_{xx} + \frac{1}{c}v_{xx})_0^L \\
&= \int_0^L \frac{r}{c}v\phi_x dx - \int_0^L (\frac{ba}{c}u_x + \frac{1}{c}v_x)\phi_{xx} dx + \phi_x(\frac{ba}{c}u_x + \frac{1}{c}v_x)_0^L \\
&= \int_0^L (\frac{r}{c}v\phi_x + \frac{ba}{c}u\phi_{xxx} + \frac{1}{c}v\phi_{xxx}) dx.
\end{aligned}
$$

Assim, podemos concluir que

$$
\begin{cases}
A^* : D(A^*) \subset X \longrightarrow X \\
D(A^*) = \{(\varphi, \phi) \in (H^3(0,L))^2 : \varphi(0) = \phi(0) = \varphi(L) = \phi(L) = \varphi_x(0) = \phi_x(0) = 0\} \\
A^*(\varphi, \phi) = \begin{pmatrix} \partial_{xxx} & \frac{ba}{c}\partial_{xxx} \\ a\partial_{xxx} & \frac{r}{c}\partial_x + \frac{1}{c}\partial_{xxx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \forall (\varphi, \phi) \in D(A^*).
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

Estamos interessados nas seguintes propriedades dos operadores A e A^*:

Proposição 3.1. *O operador A e seu adjunto A^* são dissipativos.*

Demonstração. Sejam $(u, v) \in D(A)$. Então,

$$
\begin{aligned}
\int_0^L -(u_{xxx} + av_{xxx})u &= \int_0^L (u_{xx} + av_{xx})u_x dx - u(u_{xx} + av_{xx})_0^L \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L (u_x^2)_x dx + \int_0^L av_{xx}u_x dx \\
&= -\frac{1}{2}u_x^2(0) + \int_0^L av_{xx}u_x dx.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\int_0^L -(\frac{r}{c}v_x + \frac{1}{c}v_{xxx} + au_{xxx})vdx \\
&= -\int_0^L \frac{r}{c}(v^2)_x dx + \int_0^L (\frac{1}{c}v_{xx} + au_{xx})v_x dx - v(\frac{1}{c}v_{xx} + au_{xx})|_0^L \\
&= \int_0^L \frac{1}{c}(v_x^2)_x dx + a\int_0^L u_{xx}v_x dx \\
&= -\frac{1}{2c}v_x^2(0) + a\int_0^L u_{xx}v_x dx.
\end{aligned}$$

Das identidades acima, deduzimos que

$$\begin{aligned}
< A(u,v),(u,v) >= &\int_0^L (-u_{xxx} - av_{xxx})udx + \int_0^L (-\frac{r}{c}v_x - \frac{1}{c}v_{xxx} - au_{xxx})vdx \\
= &-\frac{1}{2}u_x^2(0) - \frac{1}{2c}v_x^2(0) + a\int_0^L v_{xx}u_x dx + a\int_0^L u_{xx}v_x dx \\
= &-\frac{1}{2}u_x^2(0) - \frac{1}{2c}v_x^2(0) - au_x(0)v_x(0) \\
= &-\frac{1}{2c}(cu_x^2(0) + 2acu_x(0)v_x(0) + v_x^2(0)) \\
= &-\frac{1}{2c}\left[(\sqrt{c}u_x(0) + \sqrt{a^2c}v_x(0))^2 + (1-a^2c)v_x^2(0)\right] \leq 0.
\end{aligned}$$

Assim, A é dissipativo. Para provar que A^* é dissipativo procedemos de forma análoga obtendo

$$< (u,v), A^*(u,v) >= -\frac{1}{2c}\left[(\sqrt{b}u_x(L) + \sqrt{a^2b}v_x(L))^2 + (1-a^2b)v_x^2(L)\right] \leq 0.$$

O que mostra a dissipatividade de A^*. ■

As Proposições 3.1 e 2.36 nos dão o seguinte resultado da boa colocação:

Teorema 3.2. *Se $(u^0,v^0) \in (L^2(0,L))^2$, existe uma única solução fraca $(u,v) = S(\cdot)(u^0,v^0)$ de (3.1), tal que*

$$(u,v) \in C([0,T];(L^2(0,L))^2) \cap H^1(0,T;(H^{-2}(0,L))^2).$$

Além disso, se $(u^0,v^0) \in D(A)$, então (3.1) tem uma única solução clássica (u,v), tal que

$$(u,v) \in C([0,T];D(A)) \cap C^1(0,T;(L^2(0,L))^2).$$

Um resultado de regularidade adicional para as soluções fracas de (3.1) é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Sejam* $(u^0,v^0)\in(L^2(0,L))^2$ *e* $(u,v)=S(t)(u^0,v^0)$ *a solução fraca de* (3.1). *Então* $(u,v)\in L^2(0,T,(H^1(0,L))^2)$ *e existe* c_0*, constante positiva, tal que*

$$\|(u,v)\|_{L^2(0,T;(H^1(0,L))^2)}\le c_0\left\|(u^0,v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2}. \tag{3.6}$$

Além disso, existem constantes positivas c_1 *e* c_2*, tais que*

$$\|u_x(\cdot,0),v_x(\cdot,0)\|^2_{(L^2(0,T))^2}\le c_1\left\|(u^0,v^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2}. \tag{3.7}$$

e

$$\left\|(u^0,v^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2}\le\frac{1}{T}\|(u,v)\|^2_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)}+c_2\|u_x(\cdot,0),v_x(\cdot,0)\|^2_{(L^2(0,T))^2}. \tag{3.8}$$

Demonstração. Fazendo uso de um argumento de densidade, podemos considerar $(u^0,v^0)\in D(A)$. Seja $q\in C^\infty((0,T)\times(0,L))$. Considerando os multiplicadores qu e qv e procedemos como a demonstraçao da Proposição 3.1 temos:

$$\begin{aligned}
0=&\int_0^T\int_0^L qu(u_t+u_{xxx}+av_{xxx})dxdt\\
=&\int_0^L u^2q|_0^T dx-\int_0^T\int_0^L u(qu)_t dxdt+\int_0^T qu(u_{xx}+av_{xx})|_0^L dt\\
&-\int_0^T\int_0^L (qu)_x(u_{xx}+av_{xx})dxdt\\
=&\int_0^L u^2q|_0^T dx-\int_0^T\int_0^L u(qu)_t dxdt-\int_0^T\int_0^L (qu)_x(u_{xx}+av_{xx})dxdt.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
0=&\int_0^T\int_0^L qv(cv_t+rv_x+bau_{xxx}+v_{xxx})dxdt\\
=&\int_0^L cqv^2|_0^T dx-\int_0^T\int_0^L (qv)_t cv dxdt-\int_0^T\int_0^L (qv)_x rv dxdt\\
&-\int_0^T\int_0^L (qv)_x(v_{xx}+abu_{xx})dxdt.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

Tomando $q=x$ obtemos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
0=&\int_0^T\int_0^L xu(u_t+u_{xxx}+av_{xxx})dxdt\\
=&\frac{1}{2}\int_0^L xu^2|_0^T dx-\int_0^T\int_0^L u(u+av)_{xx}dxdt-\int_0^T\int_0^L xu_x(u+av)_{xx}dxdt\\
=&\frac{1}{2}\int_0^L xu^2|_0^T dx-\int_0^T\int_0^L u_x(u+av)_x dxdt-\int_0^T\int_0^L xu_x(u+av)_{xx}dxdt
\end{aligned}\tag{3.11}$$

e

$$
\begin{aligned}
0 =& \int_0^T \int_0^L xv(cv_t + rv_x + v_{xxx} + abu_{xxx})dxdt \\
=& \frac{c}{2}\int_0^L xv^2|_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \frac{r}{2}v^2 dxdt - \int_0^T \int_0^L v(v+abu)_{xx}dxdt \\
& - \int_0^T \int_0^L xv_x(v+abu)_{xx}dxdt \\
=& \frac{c}{2}\int_0^L xv^2|_0^T - \frac{r}{2}\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt - \int_0^T \int_0^L xv_x(v+abu)_{xx}dxdt \\
& + \int_0^T \int_0^L v_x(v+abu)_x dxdt. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Multiplicando (3.11) por b e somando com (3.12), segue que

$$
\begin{aligned}
0 =& \frac{b}{2}\int_0^T \int_0^L xu^2|_0^T dx + \int_0^T \int_0^L bu_x(u+av)_x dxdt - \int_0^T \int_0^L bxu_x(u+av)_{xx}dxdt + \\
& \frac{c}{2}\int_0^T \int_0^L xv^2|_0^T dx - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L rv^2 dxdt + \int_0^T \int_0^L v_x(v+abu)_x dxdt \\
& - \int_0^T \int_0^L xv_x(v+abu)_{xx}dxdt \\
=& \frac{1}{2}\int_0^L x(bu^2 + cv^2)|_0^T dx - \frac{r}{2}\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt + \frac{3}{2}\int_0^T \int_0^L (bu_x^2 + 2abu_xv_x + v_x^2)dxdt \\
& - \frac{1}{2}\int_0^T x(bu_x^2 + 2abu_xv_x + v_x^2)|_0^L dt.
\end{aligned}
$$

Como $u_x(L) = v_x(L) = 0$, obtemos a estimativa

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}\int_0^T \int_0^L (bu_x^2 + 2abu_xv_x + v_x^2)dxdt =& \frac{r}{2}\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_0^L x(bu^2 + cv^2)|_0^T dx \\
\leq& \frac{r}{2}\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^L x(b(u^0)^2 + c(v^0)^2)dx \\
\leq& \frac{r}{2}\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt + \frac{L}{2}\int_0^L (b(u^0)^2 + c(v^0)^2)dx
\end{aligned}
$$

Escolhendo $\epsilon > 0$, tal que $\sqrt{a^2b} < \epsilon < 1$, o integrando que está à esquerda da desigualdade acima pode ser estimado da seguinte forma:

$$
bu_x^2 + 2abu + xv_x + v_x^2 \geq b(1-\epsilon^2)u_x^2 + v_x^2(1 - \frac{a^2b}{\epsilon}).
$$

Como consequência,

$$
\int_0^T \int_0^L (b(1-\epsilon^2)u_x^2 + v_x^2(1 - \frac{a^2b}{\epsilon}))dxdt \leq \frac{r}{3}\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt + \frac{L}{3}\int_0^L (b(u^0)^2 + c(v^0)^2)dx,
$$

isto é, existe uma constante positiva c_0, tal que

$$\|(u_x,v_x)\|^2_{(L^2((0,T)\times(0,L)))^2} \leq c_0(\|v\|^2_{(L^2((0,T)\times(0,L)))^2} + \|(u_0,v_0)\|^2_{(L^2((0,T)\times(0,L)))^2}).$$

Como o semigrupo gerado pelo gerador A é contínuo, podemos concluir que existe uma constante $c_0 > 0$, satisfazendo

$$\|(u_x,v_x)\|^2_{(L^2((0,T)\times(0,L)))^2} \leq c_0 \|(u_0,v_0)\|^2_{(L^2(0,L))^2}.$$

Assim, temos que

$$\|(u,v)\|^2_{L^2((0,T);(H^1(0,L))^2} \leq c_0 \|(u_0,v_0)\|^2_{(L^2(0,L))^2}.$$

Agora, para provar (3.7) tomamos $q = 1$ em (3.9) e (3.10):

$$0 = \frac{1}{2}\int_0^L (u^2(T,x) - u^2(0,x))dx - \int_0^T\int_0^L (u_{xx} + v_{xx})u_x dxdt, \tag{3.13}$$

$$0 = \frac{1}{2}\int_0^L (cv^2(T,x) - cv^2(0,x))dx - \int_0^T\int_0^L (u_{xx} + v_{xx})v_x dxdt. \tag{3.14}$$

Multiplicando (3.13) por b e somando com (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{b}{2}\int_0^L (u^2(T,x) - u^2(0,x))dx - \int_0^T\int_0^L (bu_{xx} + abv_{xx})u_x dxdt + \\
& \frac{c}{2}\int_0^L (v^2(T,x) - v^2(0,x))dx - \int_0^T\int_0^L (v_{xx} + abu_{xx})v_x dxdt \\
=& \frac{b}{2}\int_0^L (u^2(T,x) - u^2(0,x))dx + \frac{c}{2}\int_0^L (v^2(T,x) - v^2(0,x))dx + \\
& \int_0^T (\frac{b}{2}u_x^2(t,0) + abu_xv_x + \frac{1}{2}v_x^2(t,0))dt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
& \frac{b}{c}\int_0^L (u^2(T,x) - u^2(0,x))dx + \int_0^L (v^2(T,x) - v^2(0,x))dx = \\
& \int_0^T (\frac{b}{c}u_x^2(t,0) + 2\frac{ab}{c}u_xv_x + \frac{1}{c}v_x^2(t,0))dt.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\int_0^T (\frac{b}{c}u_x^2(t,0) + 2\frac{ab}{c}u_x v_x + \frac{1}{c}v_x^2(t,0))dt \leq & \frac{b}{c}\int_0^L u^2(0,x) + \int_0^L v^2(0,x))dx \\ = & \left\|(u^0,v^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2}.\end{aligned}$$

Se ϵ é uma constante, tal que $\sqrt{a^2 b} < \epsilon < 1$, então

$$\begin{aligned}2abu_x(t,0)v_x(t,0) = & 2(\sqrt{b}\epsilon u_x(t,0))(\frac{\sqrt{a\ 2b}}{\epsilon}v_x(t,0)) \\ \geq & -\epsilon^2 b u_x^2(t,0) - \frac{a^2 b}{\epsilon^2}v_x^2(t,0).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left\|(u^0,v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \geq & \frac{1}{c}\int_0^T (bu_x^2(t,0) - \epsilon^2 b u_x^2(t,0) + v_x^2(t,0) - \frac{a^2 b}{\epsilon^2}v_x^2(t,0))dt \\ \geq & \frac{1}{c}\int_0^T (b(1-\epsilon^2)u_x^2(t,0) + (1 - \frac{a^2 b}{\epsilon^2})v_x^2(t,0))dt \\ \geq & c_0\int_0^T (u_x^2(t,0) + v_x^2(t,0))dt \\ \geq & c_0 \left\|(u_x(t,0), v_x(t,0))\right\|^2_{(L^2(0,T))^2},\end{aligned}$$

donde obtemos o resultado desejado.

Para mostrar (3.8) tomamos $q = T - t$ em (3.9) e (3.10), de onde obtemos

$$\begin{aligned}0 = & \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L (bu^2 + v^2)dxdt - \int_0^L (b(u^0)^2 + (v^0)^2)dx \\ & + \int_0^T (T-t)(bu_x^2(t,0) + v_x^2(t,0) + 2abv_x(t,0)u_x(t,0))dt,\end{aligned}$$

o que implica que existe $c_2 > 0$, tal que

$$\left\|(u^0,v^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2} \leq \frac{1}{T}\left\|(u,v)\right\|^2_{L^2(0,T,(L^2(0,L))^2)} + c_2\|u_x(\cdot,0), v_x(\cdot,0)\|^2_{(L^2(0,T))^2}.$$

■

3.2 O sistema linear não homogêneo

Agora, estudaremos o sistema não homogêneo correspondente a (3.1)

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + av_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ cv_t + rv_x + bau_{xxx} + v_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ u(t,0) = 0,\ u(t,L) = h_1,\ u_x(t,L) = h_2, & \text{em } (0,T), \\ v(t,0) = 0,\ v(t,L) = g_1,\ v_x(t,L) = g_2, & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u^0(x),\ v(0,x) = v^0(x), & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{3.15}$$

assumindo que $h_1, g_1 \in H_0^1(0,T)$ e $h_2, g_2 \in L^2(0,T)$. Nessas condições, o resultado a seguir assegura a existência das soluções clássicas para (3.15).

Teorema 3.4. *Seja* $(u^0, v^0) \in D(A)$ *e*

$$h_i, g_i \in C_0^2[0,T] = \left\{ z \in C^2[0,T] : z(0) = z(T) = 0 \right\}, i = 1, 2.$$

Então, o sistema (3.15) *tem uma única solução (clássica)*

$$(u,v) \in C([0,T]; D(A)) \cap C^1([0,T]; (L^2(0,L))^2) \tag{3.16}$$

e existe uma constante positiva C*, tal que*

$$\begin{aligned} &\|(u,v)\|\|^2_{C([0,T];(L^2(0,L))^2)} + \|(u,v)\|^2_{L^2([0,T];(H^1(0,L))^2)} \\ &\leq C[\left\|(u^0,v^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2} + \sum_{i=1}^{2}(\|h_i\|^2_{H^1(0,T)} + \|g_i\|^2_{H^1(0,T)})] \end{aligned} \tag{3.17}$$

Demonstração. Como em [16], considere funções $\phi_i, \eta_i \in C^\infty([0,L])$, tais que

$$\begin{gathered} \phi_1(0) = \phi_1'(L) = \eta_1(0) = \eta_1'(0) = 0 \ \ e \ \ \phi_1(L) = \eta_1(L) = 1 \\ \phi_2(0) = \phi_2(L) = \eta_2(0) = \eta_2(L) = 0 \ \ e \ \ \phi_2'(L) = \eta_2'(L) = 1. \end{gathered}$$

Assim, a solução (u,v) de (3.15) pode ser escrita como

$$(u,v) = S(t)(u^0, v^0) + (\varphi, \psi),$$

onde $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo associado no problema homogêneo (3.1) dado pelo Teorema

(3.2) e (φ, ψ) é a solução do problema

$$\begin{cases} \varphi_t + \varphi_{xxx} + a\psi_{xxx} = F, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ c\psi_t + r\psi_x + ba\varphi_{xxx} + \psi_{xxx} = G, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ \varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \varphi_x(t,L) = 0, & \text{em } (0,T), \\ \psi(t,0) = \psi(t,L) = \psi_x(t,L) = 0, & \text{em } (0,T), \\ \varphi(0,x) = 0, \ \psi(0,x) = 0, & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{3.18}$$

onde
$F(x,t) = \widetilde{\varphi}_t + \widetilde{\varphi}_{xxx} + a\widetilde{\psi}_{xxx}, \quad G(x,t) = c\widetilde{\psi}_t + r\widetilde{\psi}_x + \hat{\psi}_{xxx} + \widetilde{\varphi}_{xxx}$
e $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$ são dadas por

$$\widetilde{\varphi}(x,t) = \sum_{i=1}^{2} \phi_i(x) g_i(t), \qquad \widetilde{\psi}(x,t) = \sum_{i=1}^{2} \eta_i(x) h_i(t).$$

Como $F, G \in C^1([0,T]; (L^2(0,L))^2)$, segue da teoria de semigrupos que (3.18) tem uma única solução

$$(\varphi, \psi) \in C([0,T]; D(A)) \cap C^1([0,T]; (L^2(0,L))^2).$$

Assim, para cada $(u^0, v^0) \in D(A)$ e $h_i, g_i \in C_0^2$ temos a solução de (3.15) com a propriedade (3.16).

Para obter a estimativa (3.17), note inicialmente que

$$\begin{aligned} \|(u,v)\|^2_{C([0,T];(L^2(0,L))^2)} \leq & \left\| S(t)(u^0,v^0) \right\|^2_{C([0,T];(L^2(0,L))^2)} + \|(\varphi,\psi)\|^2_{C([0,T];(L^2(0,L))^2)} \\ \leq & C(\left\|(u^0,v^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2} + \|(F,G)\|^2_{L^2((0,T);(L^2(0,L))^2)}), \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Como

$$\|(F,G)\|^2_{L^2((0,T);(L^2(0,L))^2)} \leq C \sum_{i=1}^{2} (\|h_i\|^2_{H^1(0,T)} + \|g_i\|^2_{H^1(0,T)}),$$

onde $C > 0$, deduzimos que

$$\|(u,v)\|^2_{C([0,T];(L^2(0,L))^2)} \leq C(\left\|(u^0,v^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2} + \sum_{i=1}^{2} (\|h_i\|^2_{H^1(0,T)} + \|g_i\|^2_{H^1(0,T)})). \tag{3.19}$$

Para obter uma estimativa na norma de $L^2(0,T; (H^1(0,L))^2)$ inicialmente usamos (3.6):

$$\begin{aligned} \|(u,v)\|^2_{L^2([0,T];(H^1(0,L))^2)} \leq & \left\| S(t)(u^0,v^0) \right\|^2_{L^2((0,T);(H^1(0,L))^2)} + \|(\varphi,\psi)\|^2_{L^2([0,T];(H^1(0,L))^2)} \\ \leq & C(\left\|(u^0,v^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2} + \|(\varphi,\psi)\|^2_{L^2((0,T);(H^1(0,L))^2)}). \end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando os multiplicadores $x\varphi$ e $x\psi$ e procedendo como na demonstração do teorema (3.3), temos que a solução de (3.18) satisfaz a identidade

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L x(bF\varphi+G\psi)dxdt =&\frac{1}{2}\int_0^L x(b\varphi^2(T,x)+c\psi^2(T,x))dx+\frac{r}{2}\int_0^T\int_0^L\psi^2dxdt\\&+\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(b\varphi_x^2+2ab\varphi_x\psi_x+\psi_x^2)dxdt.\end{aligned}$$

Tomando ϵ, tal que $a^2b<\epsilon<1$, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(b\varphi_x^2+\psi_x^2)dxdt =&-\frac{1}{2}\int_0^L x(b\varphi^2(T,x)+c\psi^2(T,x))dx-\frac{r}{2}\int_0^T\int_0^L\psi^2dxdt\\&-\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L 2ab\varphi_x\psi_xdxdt+\int_0^T\int_0^L x(bF\varphi+G\psi)dxdt\\\le&\frac{L}{2}\int_0^L(b\varphi^2(T,x)+c\psi^2(T,x))dx+\frac{r}{2}\int_0^T\int_0^L\psi^2dxdt\\&+\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L 2ab|\varphi_x\psi_x|dxdt+L\int_0^T\int_0^L(b|F\varphi|+|G\psi|)dxdt\\\le&\frac{L}{2}\int_0^L(b\varphi^2(T,x)+c\psi^2(T,x))dx+\frac{r}{2}\int_0^T\int_0^L\psi^2\\&+\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L(\frac{a^2b^2}{\epsilon}\varphi_x^2+\epsilon\psi_x^2)dxdt\\&+\frac{L}{2}\int_0^T\int_0^L(b^2F^2+\varphi^2+G^2+\psi^2)dxdt.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\frac{3b}{2}(1-\frac{a^2b}{\epsilon})\int_0^T\int_0^L\varphi_x^2dxdt+\frac{3}{2}(1-\epsilon)\int_0^T\int_0^L\psi_x^2dxdt\\\le&\frac{L}{2}\int_0^L(b\varphi^2(T,x)+c\psi^2(T,x))dx+\frac{L}{2}\int_0^T\int_0^L(b^2F^2+G^2+\varphi^2+\psi^2)dxdt.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\|(\varphi_x,\psi_x)\|^2_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)}\le& C(\|(\varphi(T),\psi(T))\|^2_{(L^2(0,L))^2}\\&+\|(F,G)\|^2_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)}+\|(\varphi,\psi)\|^2_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)}),\end{aligned}$$

e

$$\|(\varphi,\psi)\|^2_{L^2(0,T;(H^1(0,L))^2)}\le C\sum_{i=1}^2(\|h_i\|^2_{H^1(0,T)}+\|g_i\|^2_{H^1(0,T)}),$$

de onde se conclui que

$$
\begin{aligned}
&\|(u,v)\|^2_{L^2(0,T;(H^1(0,L))^2)} \\
&\leq C[\|(u^0,v^0)\|^2_{(L^2(0,L))^2} + \sum_{i=1}^{2}(\|h_i\|^2_{H^1(0,T)} + \|g_i\|^2_{H^1(0,T)})].
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Portanto, de (3.19) e (3.20) obtemos (3.17). ■

Agora vamos mostrar dois resultados de existência e regularidade da solução fraca de (3.15).

Teorema 3.5. *Existe uma única aplicação linear e contínua*

$$\Psi : (L^2(0,L))^2 \times (H_0^1(0,T))^2 \times (L^2(0,T))^2 \to \quad C([0,T];(L^2(0,L))^2) \cap L^2(0,T;(H^1(0,L))^2),$$

tal que, para qualquer $(u^0,v^0) \in D(A)$ *e* $h_1,h_2,g_1,g_2 \in C_0^2([0,T])$,

$$\Psi((u^0,v^0),(h_1,g_1,h_2,g_2)) = (u,v),$$

onde (u,v) *é a única solução clássica de* (3.15).

Observação. 3.6. *Se* $(u^0,v^0) \in (L^2(0,L))^2$, (u,v) *é a solução fraca de* (3.15).

Demonstração. Sejam $(u^0,v^0) \in D(A)$ e $h_1,g_1,h_2,g_2 \in C_0^2([0,T])$. Pelo Teorema 3.4 existe uma única solução $(u,v) \in C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T];(L^2(0,L))^2)$ de (3.15), e portanto, temos que $(u,v) \in C([0,T];(L^2(0,L))^2) \cap L^2(0,T;(H^1(0,L))^2)$. Definindo

$$\hat{\Psi} : D(A) \times C_0^2[0,T] \times C_0^2[0,T] \to C([0,T];(L^2(0,L))^2) \cap L^2(0,T;(H^1(0,L))^2)$$

por

$$\hat{\Psi}((u^0,v^0),(h_1,g_1,h_2,g_2)) = (u,v),$$

com (u,v) dada pelo Teorema 3.4, obtemos por (3.17) que $\hat{\Psi}$ é uma aplicação linear e contínua. Como $D(A)$ é denso em $(L^2(0,L))^2$, $(C_0^2([0,T]))^2$ é denso em $(H_0^1(0,T))^2$ e $(C_0^2([0,T]))^2$ também é denso em $(L^2(0,L))^2$, podemos estender $\hat{\Psi}$ continuamente a uma aplicação linear e contínua Ψ, definida em $(L^2(0,L))^2 \times (H_0^1(0,T))^2 \times (L^2(0,T))^2$. ■

3.3 O sistema adjunto

Esta seção é dedicada ao estudo das propriedades do sistema adjunto associado a (3.1)

$$\begin{cases} \varphi_t - \varphi_{xxx} - a\psi_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ c\psi_t - r\psi_x - ba\varphi_{xxx} - \psi_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ \varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \varphi_x(t,0) = 0, & \text{em } (0,T), \\ \psi(t,0) = \psi(t,L) = \psi_x(t,0) = 0, & \text{em } (0,T), \\ \varphi(0,x) = \varphi^0(x),\ \psi(0,x) = \psi^0(x), & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{3.21}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} (\varphi,\psi)_t = A^*(\varphi,\psi), \\ (\varphi,\psi)(0) = (\varphi^0,\psi^0), \end{cases}$$

onde A^* é dada por (3.5).

Observe que a mudança de variável $x \to L - x$ reduz o sistema (3.21) ao sistema (3.1). Assim sendo, as propriedades das soluções de (3.21) são similares às deduzidas no Teorema 3.3 para as soluções do sistema linear (3.1).

Permitam-nos também observar que o sistema retrógrado

$$\begin{cases} \varphi_t + \varphi_{xxx} + a\psi_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ c\psi_t + r\psi_x + ba\varphi_{xxx} + \psi_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ \varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \varphi_x(t,0) = 0, & \text{em } (0,T), \\ \psi(t,0) = \psi(t,L) = \psi_x(t,0) = 0, & \text{em } (0,T), \\ \varphi(T,x) = \varphi^1(x),\ \psi(T,x) = \psi^1(x), & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{3.22}$$

é bem posto para qualquer $(\varphi^1,\psi^1) \in (L^2(0,L))^2$ e a mudança de variável $t \to T - t$ transforma o sistema (3.22) em (3.21). Logo, os resultados dos Teoremas 3.7 e 3.8 podem ser obtidos para o sistema (3.22) também.

Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.7. *Sejam $(\varphi^0,\psi^0) \in (L^2(0,L))^2$. Existe uma única solução (φ,ψ) de (3.21), tal que*

$$(\varphi,\psi) \in C([0,T];(L^2(0,L))^2) \cap L^2(0,T;(H^1(0,T))^2)$$

que satisfaz as seguintes estimativas

$$\|(\varphi,\psi)\|_{C([0,T];(L^2(0,L))^2)} + \|(\varphi,\psi)\|_{L^2(0,T,(H^1(0,L))^2)} \leq c_0 \left\|(\varphi^0,\psi^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2}, \tag{3.23}$$

$$\|\varphi_x(\cdot,L),\psi_x(\cdot,L)\|^2_{(L^2(0,T))^2} \leq c_1 \left\|(\varphi^0,\psi^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2}, \tag{3.24}$$

e

$$\left\|(\varphi^0,\psi^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2} \leq \frac{1}{T}\left\|(\varphi,\psi)\right\|^2_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)} + c_2\|\varphi_x(\cdot,L),\psi_x(\cdot,L)\|^2_{(L^2(0,T))^2}, \quad (3.25)$$

onde c_0, c_1, c_2 são constantes positivas.

Além disso, temos a seguinte estimativa para a segunda derivada da solução na fronteira.

Teorema 3.8. *Sejam $(\varphi^0,\psi^0) \in (L^2(0,L))^2$ e (φ,ψ) a solução correspondente de (3.21). Então,*

$$\|(\varphi_{xx}(\cdot,L),\psi_{xx}(\cdot,L))\|^2_{(H^{-1}(0,T))^2} \leq C\left\|(\varphi^0,\psi^0)\right\|^2_{(L^2(0,T))^2}, \quad (3.26)$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração. Seja $(\varphi^0,\psi^0) \in D(A^*)$, então a solução $(\varphi,\psi) \in C([0,T];D(A^*))$ e portanto $(\varphi_{xx}(\cdot,L),\psi_{xx}(\cdot,L)) \in C([0,T])$. Sejam $h_1, g_1 \in C_0^2([0,T])$ e (u,v) a solução clássica do seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + av_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L),\\ cv_t + rv_x + bau_{xxx} + v_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L),\\ u(t,0) = 0,\ u(t,L) = h_1,\ u_x(t,L) = 0, & \text{em } (0,T),\\ v(t,0) = 0,\ v(t,L) = g_1,\ v_x(t,L) = 0, & \text{em } (0,T),\\ u(0,x) = 0,\ v(0,x) = 0, & \text{em } (0,L). \end{cases} \quad (3.27)$$

Multiplicando a primeira equação de (3.27) por φ, a segunda por ψ e integrando por partes obtemos

$$\int_0^L u(T)\varphi(T)dx + \int_0^T u(t)\varphi_{xx}(t)dt + a\int_0^T v(t,L)\varphi_{xx}(t,L)dt = \int_0^T\int_0^L (\varphi_t u + \varphi_{xxx}u + a\varphi_{xxx}v)dxdt \quad (3.28)$$

e

$$c\int_0^L v(T)\psi(T)dx + ab\int_0^T u(t,L)\psi_{xx}(t,L)dt + \int_0^T v(t,L)\psi_{xx}(t,L)dt = \int_0^T\int_0^L (c\psi_t v + r\psi_x v + ab\psi_{xxx}u + a\psi_{xxx}v)dxdt. \quad (3.29)$$

Multiplicando (3.28) por b e somando com (3.29), segue que

$$\begin{aligned}\int_0^L (bu(T)\varphi(T) + cv(T)\psi(T))dx &= -\int_0^T [\varphi_{xx}(t,L)(bu(t,L) + abv(t,L)) \\ &\quad +\psi_{xx}(t,L)(abu(t,L) + v(t,L)]dt \\ &= -\int_0^T [\varphi_{xx}(t,L)(bh_1(t) + abg_1(t)) \\ &\quad +\psi_{xx}(t,L)(abh_1(t) + g_1(t)]dt.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Assim, usando (3.17) e (3.23) obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^L (bu(T)\varphi(T) + cv(T)\psi(T))dx\right| \\ &\leq \int_0^L b|u(T)\varphi(T)|dx + \int_0^L c|v(T)\psi(T)|dx \\ &\leq C(\|u(T,\cdot)\|_{L^2(0,L)} \|\varphi(T,\cdot)\|_{L^2(0,L)} + \|v(T,\cdot)\|_{L^2(0,L)} \|\psi(T,\cdot)\|_{L^2(0,L)} \\ &\leq C \|(u,v)\|_{C([0,T];(L^2(0,L))^2)} \|(\varphi,\psi)\|_{C([0,T];(L^2(0,L))^2)} \\ &\leq C \left\|(\varphi^0,\psi^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2} (\|h_1\|_{H^1(0,T)} + \|g_1\|_{H^1(0,T)}),\end{aligned}$$

onde C só depende de h_1, g_1. Então, por (3.30) temos que a aplicação

$$\begin{aligned}&\gamma : (H^1(0,T))^2 \to \mathbb{R} \\ &\gamma(\hat{h_1}, \hat{g_1}) = \int_0^T \varphi_{xx}(t,L)\hat{h_1}dt + \int_0^T \psi_{xx}(t,L)\hat{g_1}dt\end{aligned}$$

satisfaz

$$|\gamma(\hat{h_1}, \hat{g_1})| \leq C \left\|(\varphi^0,\psi^0)\right\|_{(L^2(0,L))} \left\|(\hat{h_1}, \hat{g_1})\right\|_{(H^1(0,T))^2},$$

de onde se obtém (3.26). ∎

Capítulo 4

Controlabilidade do sistema linear

Esta seção é dedicada à análise da propriedade de controlabilidade exata para o sistema linear correspondente a (1.1) com controles na fronteira (1.2). Mais precisamente, dado $T > 0$ e $(u^0, v^0), (u^1, v^1) \in (L^2(0,L))^2$, estudaremos a existência de quatro controles $h_1, g_1 \in H_0^1(0,T)$ e $h_2, g_2 \in L^2(0,T)$, tal que a solução (u,v) do sistema

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + av_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ cv_t + rv_x + bau_{xxx} + v_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ u(0,x) = u^0(x),\ v(0,x) = v^0(x), & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{4.1}$$

com condições na fronteira

$$\begin{cases} u(t,0) = 0, \quad u(t,L) = h_1(t), \quad u_x(t,L) = h_2, & \text{em } (0,T), \\ v(t,0) = 0, \quad v(t,L) = g_1(t), \quad v_x(t,L) = g_2, & \text{em } (0,T), \end{cases} \tag{4.2}$$

satisfaz

$$u(T,\cdot) = u^1, \qquad v(T,\cdot) = v^1 \quad , \quad L^2(0,L). \tag{4.3}$$

Definição 4.1. *Sejam $T > 0$ e $L > 0$. O sistema (4.1) é exatamente controlável em tempo T, se para quaisquer dados inicias e finais $(u^0, v^0), (u^1, v^1) \in (L^2(0,L))^2$ existem quatro controles $h_1, g_1 \in H_0^1(0,T)$ e $h_2, g_2 \in L^2(0,T)$, tal que a solução (u,v) de (4.1) com condições (4.2) satisfaz (4.3).*

Observação. 4.2. *Sem perda de generalidade, podemos estudar a propriedade de controlabilidade exata somente para o caso $u^0 = v^0 = 0$. De fato, sejam $(u^0, v^0), (u^1, v^1) \in (L^2(0,L))^2$ e sejam $h_1, g_1 \in H_0^1(0,T)$ e $h_2, g_2 \in (L^2(0,T))^2$ os controles que levem a solução (u,v) de (4.1) do dado inicial nulo ao dado final $(u^1, v^1) - S(T)(u^0, v^0)$. Daí, segue que esses controles também levam a solução $(u,v) - S(\cdot)(u^0, v^0)$ de (4.1) de (u^0, v^0) ao dado final (u^1, v^1).*

A partir de agora consideraremos somente o caso $u^0 = v^0 = 0$ e daremos uma condição equivalente para a propriedade de controlabilidade exata.

Lema 4.3. *Seja* $(u^1, v^1) \in (L^2(0,L))^2$*. Então, existem controles* $h_1, g_1 \in H_0^1(0,T)$ *e* $h_2, g_2 \in (L^2(0,T))^2$*, tal que a solução (u,v) de* (4.1)*-*(4.2) *satisfaz* (4.3)*, se e somente se,*

$$\begin{aligned}\int_0^L (b\varphi^1(x)u^1(x) + c\psi^1(x)v^1(x))dx = &\int_0^T bh_2(t)(\varphi_x(t,L) + a\psi(t,L))dt \\ &+ \int_0^T g_2(t)(ab\varphi_x(t,L) + \psi(t,L))dt \\ &- \langle bh_1(t), \varphi_{xx}(t,L) + a\psi_{xx}(t,L)\rangle_{H_0^1 \times H^{-1}} \\ &- \langle g_1(t), ab\varphi_{xx}(t,L) + \psi_{xx}(t,L)\rangle_{H_0^1 \times H^{-1}},\end{aligned} \tag{4.4}$$

para qualquer $(\varphi^1, \psi^1) \in (L^2(0,L))^2$*, sendo* (φ, ψ) *a solução do problema retrógrado* (3.22)*.*

Demonstração. Sejam $(u^1, v^1) \in D(A)$, $(\varphi^1, \psi^1) \in D(A^*)$, $h_1, g_1, h_2, g_2 \in C_0^2([0,T])$ e (u,v) a solução de (4.1)-(4.2). Multiplicando a equação (4.1) pela solução (φ, ψ) de (3.22) obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^T \int_0^L \varphi(u_t + u_{xxx} + av_{xxx})dxdt \\ &= \int_0^L \varphi u|_0^T dx - \int_0^T \int_0^L u\varphi_t dxdt - \int_0^T \varphi_x(t,x)u_x(t,x)|_0^L dt + \int_0^T \varphi_{xx}(t,x)u(t,x)|_0^L dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^L \varphi_{xxx}udxdt - \int_0^T \varphi_x(t,x)av_x(t,x)|_0^L dt + \int_0^T \varphi_{xx}(t,x)av(t,x)|_0^L dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^L a\varphi_{xxx}vdxdt,\end{aligned} \tag{4.5}$$

e

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^T \int_0^L \psi(cv_t + rv_x + abu_{xxx} + v_{xxx})dxdt \\ &= \int_0^L c\psi v|_0^T dx - \int_0^T \int_0^L cv\psi_t dxdt + \int_0^T rv\psi|_0^L dt - \int_0^T \int_0^L rv\psi_x dxdt \\ &\quad - \int_0^T \psi_x(t,x)abu_x(t,x)|_0^L dt + \int_0^T \varphi_{xx}(t,x)abu(t,x)|_0^L dt - \int_0^T \int_0^L \psi_{xxx}udxdt \\ &\quad - \int_0^T \psi_x(t,x)v_x(t,x)|_0^L dt + \int_0^T \psi_{xx}(t,x)v(t,x)|_0^L dt - \int_0^T \int_0^L \psi_{xxx}vdxdt.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Multiplicando (4.5) por b e somando (4.6), segue que

$$\begin{aligned}\int_0^L (b\varphi(t,x)u(t,x) + c\psi(t,x)v(t,x))|_0^L dx = &\int_0^T bu_x(t,x)(\varphi_x(t,x) + a\psi_x(t,x))|_0^L dt\\ &+ \int_0^T v_x(t,x)(ab\varphi_x(t,x) + \psi_x(t,x))|_0^L dt\\ &- \int_0^T bu(t,x)(t)(\varphi_x x(t,x) + a\psi_{xx}(t,x))|_0^L dt\\ &- \int_0^T v(t,x)(t)(ab\varphi_{xx}(t,x) + \psi_{xx}(t,x))|_0^L dt,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\int_0^L (b\varphi^1(x)u(T,x) + c\psi^1(x)v(T,x))dx = &\int_0^T bh_2(t)(\varphi_x(t,L) + a\psi_x(t,L))dt\\ &+ \int_0^T g_2(t)(ab\varphi_x(t,L) + \psi_x(t,L))dt\\ &- \int_0^T bh_1(t)(\varphi_x x(t,L) + a\psi_{xx}(t,L))dt\\ &- \int_0^T g_1(t)(ab\varphi_{xx}(t,L) + \psi_{xx}(t,L))dt.\end{aligned}$$

Portanto, por um argumento de densidade temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}\int_0^L (b\varphi^1(x)u(T,x) + c\psi^1(x)v(T,x))dx = &\int_0^T bh_2(t)(\varphi_x(t,L) + a\psi(t,L))dt\\ &+ \int_0^T g_2(t)(ab\varphi_x(t,L) + \psi(t,L))dt\\ &- \langle bh_1(t), \varphi_{xx}(t,L) + a\psi_{xx}(t,L)\rangle_{H_0^1\times H^{-1}}\\ &- \langle g_1(t), ab\varphi_{xx}(t,L) + \psi_{xx}(t,L)\rangle_{H_0^1\times H^{-1}}.\end{aligned}$$

Assim, se o sistema é exatamente controlável obtemos (4.4). Por outro lado, a identidade acima e (4.4) implicam que

$$\int_0^L [b\varphi^1(x)(u(T,x) - u^1(x)) + c\psi^1(x)(v(T,x) - v^1(x))]dx = 0.$$

Como temos a identidade acima para qualquer $(\varphi^1, \psi^1) \in (L^2(0,L))^2$, o sistema é exatamente controlável com os controles $h_1, g_1 \in H_0^1(0,T)$ e $h_2, g_2 \in L^2(0,T)$. ■

Para o estudo da propriedade de controlabilidade, um resultado de observabilidade que provaremos a seguir terá um papel fundamental. Inicialmente, provaremos dois lemas que serão de muita utilidade na prova de este resultado.

Lema 4.4. *Se $(\lambda, (w, z))$ é solução do seguinte sistema*

$$\begin{cases} \lambda w - w_{xxx} - a z_{xxx} = 0, & \textit{em } (0, L), \\ c\lambda z - r z_x - ba w_{xxx} - z_{xxx} = 0, & \textit{em } (0, L), \\ w(0) = w(L) = w_x(0) = w_x(L) = w_{xx}(L) = 0, \\ z(0) = z(L) = z_x(0) = z_x(L) = z_{xx}(L) = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

então $w = z = 0$.

Demonstração. Se $\lambda = 0$, então

$$\begin{cases} w_{xxx} + a z_{xxx} = 0, & \text{em } (0, L), \\ r z_x + ba w_{xxx} + z_{xxx} = 0, & \text{em } (0, L), \\ w(0) = w(L) = w_x(0) = w_x(L) = w_{xx}(L) = 0, \\ z(0) = z(L) = z_x(0) = z_x(L) = z_{xx}(L) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Tomando $z_x = \zeta$ obtemos que ζ satisfaz o problema

$$\begin{cases} (a^2 b - 1)\zeta_{xx} - r\zeta = 0, \quad \text{em } (0, L), \\ \zeta(0) = \zeta_x(L) = 0, \end{cases} \tag{4.9}$$

para o qual a única solução é $\zeta = 0$, implicando $w = z = 0$.

Agora, tomemos $\lambda \neq 0$. Vamos introduzir as funções complexas dadas por

$$\hat{w}(\xi) = \int_0^L w(x) e^{ix\xi} dx \quad \text{e} \quad \hat{z}(\xi) = \int_0^L z(x) e^{ix\xi} dx$$

que são inteiras. Assim, multiplicando a primeira e segunda equação de (4.7) por $e^{ix\xi}$ e integrando por partes, obtemos

$$\begin{cases} (\lambda - i\xi^3)\hat{w}(\xi) - i\xi^3 \hat{z}(\xi) = \alpha + a\beta, \\ (\lambda - i\xi^3 + ir\xi) z(\xi) - iab\xi^3 \hat{w}(\xi) = ab\alpha + \beta, \end{cases} \tag{4.10}$$

onde $\alpha = -w_{xx}(0)$ e $\beta = -z_{xx}(0)$ são valores complexos. De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\int_0^L z_{xxx} e^{ix\xi} dx =& e^{ix\xi} z_{xx}|_0^L - \int_0^L i\xi e^{ix\xi} z_{xx} dx \\
=& - z_{xx}(0) - i\xi e^{ix\xi} z_x|_0^L + \int_0^L (i\xi)^2 e^{ix\xi} z_x dx \\
=& - z_{xx}(0) + (i\xi)^2 e^{ix\xi} z|_0^L - \int_0^L (i\xi)^3 e^{ix\xi} z dx \\
=& - z_{xx}(0) - (i\xi)^3 \int_0^L e^{ix\xi} z(x) dx \\
=& - z_{xx}(0) - (i\xi)^3 \hat{z}(\xi).
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos os demais termos em (4.10). Observe que α, β são unicamente determinados por $\hat{w}$ e $\hat{z}$, e consequentemente, por w e z. Portanto, provaremos que

$$\alpha = \beta = 0 \Leftrightarrow w = z = 0.$$

Eliminando $\hat{w}$ de (4.10), obtemos a seguinte igualdade

$$[(\lambda - i\xi^3)(\lambda c - i\xi^3 + ir\xi) + a^2 b \xi^6]\hat{z} = [iab\xi^3(\alpha + a\beta) + (\lambda - i\xi^3)(ab\alpha + \beta). \tag{4.11}$$

Definindo os polinômios

$$\begin{cases} P_\lambda(\xi) = (a^2 b - 1)\xi^6 + r\xi^4 - i\lambda(1 + c)\xi^3 + ir\lambda\xi + \lambda^2 c \\ Q_\lambda(\xi) = iab\xi^3(\alpha + a\beta) + (\lambda - i\xi^3)(ab\alpha + \beta) \end{cases}$$

de (4.11) temos que

$$P_\lambda(\xi)\hat{z}(\xi) = Q_\lambda(\xi).$$

Como $\hat{z}$ é uma função inteira, todas as raízes de P_λ também devem ser raízes de Q_λ. Além disso, os polinômios satisfazem as seguintes propriedades:
(1) O polinômio P_λ é de grau 6, pois $1 - a^2 b > 0$.
(2) Não existe raiz de P_λ de multiplicidade 6, pois o polinômio não contém termo de grau 5.
(3) O polinômio Q_λ é de grau 3.
(4) Não existe raiz de Q_λ de grau 3, pois o polinômio não contem termo de grau 2.
Como o grau do polinômio P_λ é maior que o grau do polinômio Q_λ, concluímos que $\hat{z}$ é uma função inteira se $Q_\lambda = 0$, o que é equivalente a ter $\alpha = \beta = 0$ e implica que $z = w = 0$. ■

Mostraremos a seguir um princípio de continuação única.

Lema 4.5. *Seja* $(w^0, z^0) \in (L^2(0,L))^2$. *Se* (w,z) *é solução de*

$$\begin{cases} w_t - w_{xxx} - az_{xxx} = 0, & em\ (0,T) \times (0,L), \\ cz_t - rz_x - baw_{xxx} - z_{xxx} = 0, & em\ (0,T) \times (0,L), \\ w(t,0) = w(t,L) = w_x(t,0) = 0, & em\ (0,T), \\ z(t,0) = z(t,L) = z_x(t,0) = 0, & em\ (0,T), \\ w(0,x) = w^0, z(0,x) = z^0, & em\ (0,L) \end{cases} \tag{4.12}$$

e satisfaz

$$w_x(\cdot, L) = z_x(\cdot, L) = w_{xx}(\cdot, L) = z_{xx}(\cdot, L) = 0, \tag{4.13}$$

então $w^0 = z^0 = 0$.

Demonstração. A regularidade adicional dada pelo Teorema 3.7 permite reduzir (4.12) e (4.13) a um princípio de continuação única para as autofunções do sistema estacionário associado. Este argumento foi usado em [19] e [16].

Seja N_T *o espaço de dados iniciais* $(w^0, z^0) \in (L^2(0,L))^2$*, tal que a correspondente solução de* (4.12)*, satisfaz* $w_x(\cdot, L) = z_x(\cdot, L) = 0$ *em* $L^2(0,T)$ *e* $w_{xx}(\cdot, L) = z_{xx}(\cdot, L) = 0$ *em* $H^{-1}(0,T)$.

O espaço N_T satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $dim N_T < \infty$.

Com efeito, seja B a bola unitária em N_T e seja (w_n^0, z_n^0) uma sequência em B, isto é, $\|(w_n^0, z_n^0)\|_{(L^2(0,L))^2} = 1$. Sejam (w_n, z_n) as soluções de (4.12) com dados iniciais (w_n^0, z_n^0) que satisfazem (4.13). Temos pelo Teorema 3.7 que (w_n, z_n) é limitada em $(L^2(0,T; H^1(0,L)))^2$, e utilizando as equações em (4.12) temos que $((w_n)_t, (z_n)_t)$ é limitada em $(L^2(0,T; H^{-2}(0,L)))^2$. Como $H^1(0,L) \subset L^2(0,L) \subset H^{-2}(0,L)$ sendo a primeira imersão compacta, temos que (w_n, z_n) é relativamente compacta, isto é, existe uma subsequência, que vamos denotar pelos mesmos índices, convergindo para (w,z) em $(L^2(0,T; (L^2(0,L))^2)$. De (3.25) e da convergência acima temos que (w_n^0, z_n^0) é uma sequência de Cauchy em $(L^2(0,L))^2$ e portanto convergente, logo (w_n^0, z_n^0) converge a $(w^0, z^0) \in (L^2(0,L))^2$. Além disso, $(w,z) \in C([0,T]; (L^2(0,L))^2)$ é a solução fraca de (3.21) e

$$w(0,\cdot) = w^0 \quad e \quad z(0,\cdot) = z^0.$$

De fato, se $(\hat{w}, \hat{z}) \in C([0,T]; (L^2(0,L))^2)$ é a solução de (3.21) com dados iniciais $(w^0, z^0) \in$

$(L^2(0,L))^2$, então

$$\begin{aligned}
&\|(\hat{w},\hat{z})-(w,z)\|_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)}\\
&\leq \|(\hat{w},\hat{z})-(w_n,z_n)\|_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)}+\|(w_n,z_n)-(w,z)\|_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)}\\
&\leq C\left\|(w^0,z^0)-(w_n^0,z_n^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2}+\|(w_n,z_n)-(w,z)\|_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)}\,.
\end{aligned}$$

Como a expressão de acima converge a zero quando n tende a infinito, obtemos o resultado desejado.

Agora vamos mostrar que (w,z) satisfaz (4.13). Com efeito, de (3.24) e (3.26) temos que

$$\begin{aligned}
(w_n)_x(\cdot,L)\to w_x(\cdot,L) \quad e \quad (z_n)_x(\cdot,L)\to z_x(\cdot,L)\in L^2(0,T)\\
(w_n)_{xx}(\cdot,L)\to w_{xx}(\cdot,L) \quad e \quad (z_n)_{xx}(\cdot,L)\to z_{xx}(\cdot,L)\in H^{-1}(0,T),
\end{aligned}$$

e como (w_n,z_n) pertecem a N_T, obtemos que $w_x(\cdot,L)=z(\cdot,L)=w_{xx}(\cdot,L)=z_{xx}(\cdot,L)=0$. Assim, a bola unitária é relativamente compacta, o que garante que N_T tem dimensão finita.

(2) $N_T\subset D(A^*)$.

Primeiro observe-se que $T_1<T$ implica $N_T\subset N_{T_1}$. Por outro lado, como N_T é um espaço de dimensão finita e como a aplicação $T\mapsto dimN_T\in\mathbb{N}$ é não crescente existem $T_1,\epsilon>0$ tal que $T_1<T_1+\epsilon$ e $N_{T_1}=N_{T_1+\epsilon}$, portanto

$$N_{T_1}=N_t,\quad \forall t\in[T_1,T_1+\epsilon].$$

Vamos mostrar que $N_T\subset D(A^*)$. Seja $y\in N_{T_1}$ e seja $(S^*(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo gerado pelo operador A^*. Assim,

$$y\in D(A^*)\Longleftrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{S^*(t)y-y}{t} \text{ existe em } (L^2(0,L))^2.$$

Inicialmente, temos que

$$\frac{S^*(t)y-y}{t}\in N_{T_1}.$$

Como $y\in N_{T_1}$ e $S^*(\tau)S^*(t)y=S^*(\tau+t)y$, para $0<t<\epsilon$ temos que $S^*(t)y\in N_{T_1+\epsilon}$. Assim, $S^*(t)y\in N_{T_1}$ para todo $t\in(0,\epsilon)$. Por outro lado, pela teoria da extrapolação (ver [20]) deduzimos que existe um espaço de Banach Y, tal que $(L^2(0,L))^2\subset Y$ e

$$S^*(\cdot)y\in C([0,T],Y),$$

donde

$$\lim_{t\to 0}\frac{S^*(t)y-y}{t}$$

existe em Y. Como $N_{T_1}\subset (L^2(0,L))^2\subset Y$ e, $dim(N_{t_1})<\infty$ as normas induzidas por $(L^2(0,L))^2$ e Y são equivalentes. Portanto,

$$\lim_{t\to 0}\frac{S^*(t)y-y}{t}$$

existe em $(L^2(0,L))^2$. Logo, $y\in D(A^*)$.
(3) Segue da propriedade (1) que se $N_T\neq(0,0)$, então $A^*:\bar{N_T}\to\bar{N_T}$ tem pelo menos um autovalor ($\bar{N_T}$ é a complexificação de N_T), ou seja,

$$\exists\ \lambda\in\mathbb{C} \text{ e } (w,z)\in N_T,\ \text{tal que } (w,z)\neq 0 \text{ e } A^*(w,z)=\lambda(w,z). \tag{4.14}$$

Note que (4.14) nos diz que existe uma solução não trivial do sistema (4.7). Porem, pelo Lema 4.4 temos que (4.7) só possui a solução trivial, ou seja, que $N_T=\{(0,0)\}$, o que implica que $w^0=z^0=0$. ∎

Para concluir nossa análise, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 4.6. *Para quaisquer $L>0$ e $T>0$ existe uma constante positiva $C=C(L,T)>0$, tal que a desigualdade*

$$\begin{aligned}C\left\|(w^1,z^1)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2}\leq{}&\|w_x(\cdot,L)+az_x(\cdot,L)\|^2_{L^2(0,T)}+\|abw_x(\cdot,L)+z_x(\cdot,L)\|^2_{L^2(0,T)}\\&+\|w_{xx}(\cdot,L)+az_{xx}(\cdot,L)\|^2_{H^{-1}(0,T)}+\|abw_{xx}(\cdot,L)+z_{xx}(\cdot,L)\|^2_{H^{-1}(0,T)},\end{aligned} \tag{4.15}$$

se verifica para qualquer $(w^1,z^1)\in(L^2(0,L))^2$, donde (w,z) é a solução de (3.22) com dado inicial (w^1,z^1).

Demonstração. A mudança de variável $t\to T-t$ transforma o sistema (3.22) em (3.21), e a desigualdade (4.15) é equivalente a

$$\begin{aligned}C\left\|(w^0,z^0)\right\|^2_{(L^2(0,L))^2}\leq{}&\|w_x(\cdot,L)+az_x(\cdot,L)\|^2_{L^2(0,T)}+\|abw_x(\cdot,L)+z_x(\cdot,L)\|^2_{L^2(0,T)}\\&+\|w_{xx}(\cdot,L)+az_{xx}(\cdot,L)\|^2_{H^{-1}(0,T)}+\|abw_{xx}(\cdot,L)+z_{xx}(\cdot,L)\|^2_{H^{-1}(0,T)},\end{aligned} \tag{4.16}$$

para qualquer $(w^0,z^0)\in(L^2(0,L))^2$, onde (w,z) é a solução do (3.21) com dado inicial (w^0,z^0). Agora, suponha que (4.16) não se verifica. Neste caso, existe uma sequência

$(w_n^0, z_n^0)_{n\geq 1} \subset (L^2(0,L))^2$, tal que

$$\begin{cases} \|(w_n^0, z_n^0)\|_{(L^2(0,L))^2} = 1, \quad \forall n \geq 1, \\ \lim_{n\to\infty}(\left\| \|(w_n)_x(\cdot, L) + a(z_n)_x(\cdot, L)\|^2_{L^2(0,T)} + \|ab(w_n)_x(\cdot, L) + (z_n)_x(\cdot, L)\|^2_{L^2(0,T)} \right\|) = 0, \\ \lim_{n\to\infty}(\|(w_n)_{xx}(\cdot, L) + a(z_n)_{xx}(\cdot, L)\|^2_{H^{-1}(0,T)} \\ + \|ab(w_n)_{xx}(\cdot, L) + (z_n)_{xx}(\cdot, L)\|^2_{H^{-1}(0,T)}) = 0, \end{cases} \tag{4.17}$$

onde (w_n, z_n) é solução de (3.21) com dados iniciais (w_n^0, z_n^0). Como $1 - a^2b > 0$, de (4.17) deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} (w_n)_x(\cdot, L) = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} (z_n)_x(\cdot, L) = 0 \ \text{ em } L^2(0,T), \tag{4.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} (w_n)_{xx}(\cdot, L) = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} (z_n)_{xx}(\cdot, L) = 0 \text{ em } H^{-1}(0,T). \tag{4.19}$$

Procedendo como na demonstração do Lema 4.5 temos que (w_n^0, z_n^0) possui uma subsequência que converge a $(w^0, z^0) \in (L^2(0,L))^2$ e por (4.17) $\|(w^0, z^0)\|_{(L^2(0,L))^2} = 1$. Por outro lado, a solução correspondente (w, z) de (3.21) pertence ao subespaço N_T, definido no Lema 4.5. Assim, $w^0 = z^0 = 0$, o que é uma contradição. Logo, a desigualdade (4.16) se verifica. ∎

O seguinte teorema resolve nosso problema de controle (4.1)-(4.3):

Teorema 4.7. *Sejam $T > 0$ e $L > 0$. O sistema (4.1)-(4.2) é exatamente controlável no tempo T.*

Demonstração. Vamos definir o seguinte funcional

$$\begin{aligned} J(w^1, z^1) =& \frac{1}{2}(\|b(w_{xx}(\cdot, L) + az_{xx}(\cdot, L))\|^2_{H^{-1}(0,T)} + \|abw_{xx}(\cdot, L) + z_{xx}(\cdot, L)\|^2_{H^{-1}(0,T)}) \\ & \frac{1}{2}(\|b(w_x(\cdot, L) + az_x(\cdot, L)\|^2_{L^2(0,T)} + \|abw_x(\cdot, L) + z_x(\cdot, L)\|^2_{L^2(0,L)}) \\ & - \int_0^L [bu^1(x)w^1(x) + cv^1(x)z^1(x)]dx, \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde $(w^1, z^1) \in (L^2(0,L))^2$ e (w, z) é a solução do sistema com retrógrado (3.22) com dado inicial (w^1, z^1).

Seja $(\hat{w}^1, \hat{z}^1) \in (L^2(0,L)^2$ um minimizante de J. Pela diferenciabilidade de J obtemos que (4.4) é satisfeita com $h_1, g_1 \in H_0^1(0,T)$ sendo as únicas soluções de

$$\langle b\hat{w}_{xx}(t, L) + a\hat{z}_{xx}(t, L), \varphi\rangle_{H^{-1}(0,T)\times H_0^1(0,T)} = \int_0^T (h_1)_t(t)\varphi_t(t)dt, \ \forall \varphi \in H_0^1(0,T)$$

$$\langle ab\hat{w}_{xx}(t, L) + \hat{z}_{xx}(t, L), \varphi\rangle_{H^{-1}(0,T)\times H_0^1(0,T)} = \int_0^T (g_1)_t(t)\varphi_t(t)dt, \ \forall \varphi \in H_0^1(0,T)$$

e $h_2(t) = b\hat{w}_x(t, L) + a\hat{z}_x(t, L)$, $g_2(t) = ab\hat{w}_x(t, L) + \hat{z}_x(t, L)$. Observe que $h_2, g_2 \in L^2(0, T)$. Para ver que J possui minimo, observe que ele é continuo, convexo e coercivo. A coercividade é obtida pela desigualdade de observabilidade provada no Teorema 4.6. $\blacksquare$

Capítulo 5

Controlabilidade do sistema não linear

5.1 Quatro controles

Agora vamos estudar a controlabilidade do sistema não linear (1.1). Note que a solução de (1.1) pode ser escrita como

$$(u, v) = S(t)(u^0, v^0) + (\varphi, \psi) + (\eta, \zeta),$$

onde $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é o semigrupo associado à parte linear do sistema (1.1) e (φ, ψ),(η, ζ) satisfazem

$$\begin{cases} \varphi_t + \varphi_{xxx} + a_3\psi_{xxx} = f_1, & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ b_1\psi_t + r\psi_x + b_2a_3\varphi_{xxx} + \psi_{xxx} = f_2, & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ \varphi(t,0) = 0,\ \varphi(t,L) = 0, \quad \varphi_x(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ \psi(t,0) = 0,\ \psi(t,L) = 0, \quad \psi_x(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ \varphi(0,x) = 0,\ \psi(0,x) = 0, & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{5.1}$$

e

$$\begin{cases} \eta_t + \eta_{xxx} + a_3\zeta_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ b_1\zeta_t + r\zeta_x + b_2a_3\eta_{xxx} + \zeta_{xxx} = 0, & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ \eta(t,0) = 0,\ \eta(t,L) = h_1 \quad \eta_x(t,L) = h_2, & \text{em } (0,T), \\ \zeta(t,0) = 0,\ \zeta(t,L) = g_1 \quad \zeta_x(t,L) = g_2, & \text{em } (0,T), \\ \eta(0,x) = 0,\ \zeta(0,x) = 0, & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{5.2}$$

respectivamente, com $f_1 = -(uu_x + a_1 vv_x + a_2(uv)_x)$ e $f_2 = -(vv_x + b_2a_2uu_x + b_2a_1(uv)_x)$. Para simplificar a notação, consideramos os seguintes espaços:

$$
\begin{aligned}
X &= L^2(0,T;(H^1(0,L))^2) \cap C([0,T];(L^2(0,L))^2) \\
Y &= L^1(0,T;(L^2(0,L))^2) \\
Z &= L^2(0,T;(H^1(0,L))^2).
\end{aligned}
$$

O seguinte resultado é necessário para o estudo das soluções de (5.1).

Teorema 5.1. *Se $u, v \in L^2(0,T;H^1(0,L))$, então $uu_x, vv_x, uv_x, vu_x \in L^1(0,T;L^2(0,L))$, a aplicação*

$$\Upsilon : L^2(0,T;(H^1(0,L)^2) \longmapsto L^1(0,T;(L^2(0,L))^4),$$

dada por

$$\Upsilon(u,v) = (uu_x, vv_x, uv_x, vu_x)$$

é contínua, e existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|(uu_x, vv_x, uv_x, vu_x)\|_{L^1(0,T;(L^2(0,L))^4)} \leq C[\|(u,v)\|_{L^2(0,T;(H^1(0,L)^2)}]. \tag{5.3}$$

Além disso, para qualquer $(f_1, f_2) \in L^1(0,T,(L^2(0,L))^2)$ existe uma única solução

$$(\varphi,\psi) \in L^2(0,T;(H^1(0,L)^2) \cap C([0,T];(L^2(0,L)^2)$$

e a aplicação $\Sigma : (f_1, f_2) \in L^1(0,T,(L^2(0,L))^2) \longmapsto (\varphi,\psi) \in L^2(0,T,(H^1(0,L)^2) \cap C([0,T];(L^2(0,L)^2)$
é continua.

Demonstração. Sejam $(u,v),(z,w) \in L^2(0,T;(H^1(0,L)^2)$ e C_1 a constante de imersão de

Sobolev $H^1(0,L) \hookrightarrow L^\infty(0,L)$. Aplicando a desigualdade triangular e de Hölder, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|(uu_x, vv_x, uv_x, vu_x) - (zz_x, ww_x, zw_x, wz_x)\|_{L^1(0,T,(L^2(0,L))^4)} \leq \\
&\int_0^T [\|(u-z)u_x\|_{L^2(0,L)} + \|z(u_x - z_x)\|_{L^2(0,L)} + \|(v-w)v_x\|_{L^2(0,L)} + \|w(v_x - w_x)\|_{L^2(0,L)} \\
&+ \|(u-z)v_x\|_{L^2(0,L)} + \|z(v_x - w_x)\|_{L^2(0,L)} + \|(v-w)u_x\|_{L^2(0,L)} + \|w(u_x - z_x)\|_{L^2(0,L)}]dt \\
&\leq \int_0^T [\|u-z\|_{L^\infty(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)} + \|z\|_{L^\infty(0,L)} \|u_x - z_x\|_{L^2(0,L)} + \|v-w\|_{L^\infty(0,L)} \|v_x\|_{L^2(0,L)} \\
&+ \|w\|_{L^\infty(0,L)} \|v_x - w_x\|_{L^2(0,L)} + \|u-z\|_{L^\infty(0,L)} \|v_x\|_{L^2(0,L)} + \|z\|_{L^\infty(0,L)} \|v_x - w_x\|_{L^2(0,L)} \\
&\|v-w\|_{L^\infty(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)} + \|w\|_{L^\infty(0,L)} \|u_x - z_x\|_{L^2(0,L)}]dt \\
&\leq C_1 \int_0^T [\|u-z\|_{H^1(0,L)} \|u\|_{H^1(0,L)} + \|z\|_{H^1(0,L)} \|u-z\|_{H^1(0,L)} + \|v-w\|_{H^1(0,L)} \|v\|_{H^1(0,L)} \\
&+ \|w\|_{H^1(0,L)} \|v-w\|_{H^1(0,L)} + \|u-z\|_{H^1(0,L)} \|v\|_{H^1(0,L)} + \|z\|_{H^1(0,L)} \|v-w\|_{H^1(0,L)} \\
&+ \|v-w\|_{H^1(0,L)} \|u\|_{H^1(0,L)} + \|w\|_{H^1(0,L)} \|u-z\|_{H^1(0,L)}]dt \\
&\leq C_1[\|u-z\|_Z (\|u\|_Z + \|z\|_Z) + \|v-w\|_Z (\|v\|_Z + \|w\|_Z) + \|u-z\|_Z (\|v\|_Z + \|w\|_Z) \\
&\|v-w\|_Z (\|u\|_Z + \|z\|_Z)].
\end{aligned}
$$

Tomando $(z,w) = (0,0)$ temos que $(uu_x, vv_x, uv_x, vu_x) \in L^1(0,T,(L^2(0,L))^4)$. Além disso, para a continuidade da aplicação Υ, tomamos $(z,w) \to (u,v)$ em Z.

Por outro lado, temos que

$$
\left\|1_{[0,t]} S(t-s)(f_1(s,\cdot), f_2(s,\cdot)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \leq \left\|(f_1(s,\cdot), f_2(s,\dot{)})\right\|_{(L^2(0,L))^2)} \in L^1(0,T),
$$

onde $1_{[0,t]}$ denota a função característica do intervalo $[0,1]$. Segue do Teorema de Lebesgue que a solução $(\varphi,\psi)(t,\cdot) = \int_0^t S(t-s)(f_1,f_2)(t,\cdot)$ pertence a $C([0,T],(L^2(0,L))^2)$. Além disso, para cada $t \in [0,T]$ temos

$$
\|(\varphi,\psi)(t,\cdot)\|_{(L^2(0,L))^2} \leq \int_0^t \|(f_1,f_2)(s,\cdot)\|_{(L^2(0,L))^2 ds} \leq \|(f_1,f_2)\|_{L^1(0,T,(L^2(0,L))^2)}.
$$

Assim, a aplicação linear $\Sigma : L^1(0,T;(L^2(0,L))^2) \to C([0,T];(L^2(0,L))^2)$ é continua. Para mostrar a continuidade da aplicação
$\Sigma : L^1(0,T;(L^2(0,L))^2) \to L^2(0,T;(H^1(0,L)^2)$, é suficiente provar que

$$
\begin{aligned}
&\exists C_2 > 0 : \forall (f,g) \in C^1([0,T];(L^2(0,L))^2), \\
&\|(\varphi,\psi)_x\|_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)} \leq C_2 \|(f,g)\|_{L^1(0,T;(L^2(0,L))^2)}.
\end{aligned}
$$

Isso pode ser feito usando integração por partes e os multiplicador $x\varphi$ e $x\psi$ com os mesmoss calculos do Teorema 3.3. Nesse caso, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^L (b(1-\epsilon^2)\varphi_x^2+\psi_x^2(1-\frac{a^2b}{\epsilon}))dxdt \le \\
&\frac{r}{3}\int_0^T\int_0^L \psi^2 dxdt+\frac{L}{3}\int_0^T\int_0^L (f_1\varphi+f_2\psi)dxdt \le \\
&\frac{rT}{3}\left\|(f_1,f_2)\right\|^2_{L^1(0,T;(L^2(0,L))^2)}+\frac{2L}{3}\int_0^T \left\|(f_1,f_2)\right\|_{((L^2(0,L))^2}\left\|(\varphi,\psi)\right\|_{(L^2(0,L))^2} dt \le \\
&\frac{rT}{3}\left\|(f_1,f_2)\right\|^2_{L^1(0,T;(L^2(0,L))^2)}+\frac{2L}{3}\left\|(f_1,f_2)\right\|_{L^1(0,T;(L^2(0,L))^2)}\left\|(\varphi\psi)\right\|_{C([0,T];(L^2(0,L))^2)} \le \\
&\frac{1}{3}(rT+2L)\left\|(f_1,f_2)\right\|^2_{L^1(0,T;(L^2(0,L))^2)},
\end{aligned}
$$

de onde segue o resultado desejado. ■

Agora, vamos definir os seguintes operadores

$$
\begin{aligned}
&\Theta_1 : L^1(0,T;(L^2(0,L))^2) \to C([0,T];(L^2(0,L))^2)\cap L^2(0,T;(H^1(0,L))^2) \\
&\Theta_1(f_1,f_2)=(\varphi,\psi)
\end{aligned}
$$

onde (φ,ψ) é a única solução de (5.1) com termos não homogêneos (f_1,f_2), e

$$
\begin{aligned}
&\Theta_2 : (H_0^1(0,T))^2\times(L^2(0,T))^2 \to C([0,T];(L^2(0,L))^2)\cap L^2(0,T,(H^1(0,L))^2) \\
&\Theta_2((h_1,g_1),(h_2,g_2))=(\eta,\zeta),
\end{aligned}
$$

onde (η,ζ) é a única solução de (5.2) com termos de fronteira não homogêneos h_1, g_1, h_2, g_2. Da Proposição 5.1 e do Teorema 3.7 segue que Θ_1 e Θ_2 são contínuos, lineares e bem definidos. Por outro lado, a existência e unicidade das soluções do sistema não linear (1.1) -(1.2) pode ser provada facilmente se os dados iniciais e as condições de fronteira são suficientemente pequenos.

Teorema 5.2. *Existe $\delta>0$, tal que, para quaisquer dados iniciais e de fronteira satisfazendo*

$$
\left\|(u^0,v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2}\le\delta,\quad \left\|(h_1,g_1)\right\|_{(H_0^1(0,T))^2},\left\|(h_2,g_2)\right\|_{(L^2(0,T))^2}\le\delta,
$$

o sistema (1.1)-(1.2) tem uma única solução

$$
(u,v)\in C([0,T];(L^2(0,L))^2)\cap L^2(0,T;(H^1(0,L))^2)\cap H^1(0,T;(H^{-2}(0,L))^2).
$$

Demonstração. Para esta demonstração vamos usar um argumento de ponto fixo. Primeiro, vamos definir a seguinte função

$$\begin{aligned}G: L^2(0,T;(H^1(0,L))^2) &\to L^2(0,T;(H^1(0,L))^2)\cap C([0,T];(L^2(0,L))^2)\\ G(u,v) &= S(\cdot)(u^0,v^0)+\Theta_1(f_1,f_2)+\Theta_2((h_1,g_1),(h_2,g_2))\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}f_1 &= -(uu_x+a_1vv_x+a_2(uv)_x),\\ f_2 &= -(vv_x+b_2a_2uu_x+b_2a_1(uv)_x)\end{aligned}$$

e Θ_1 e Θ_2 foram definidos acima. Observe que G é continua, por isso provaremos que existe $\delta>0$ tal que, se

$$\left\|(u^0,v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2}\le\delta,\quad \|(h_1,g_1)\|_{(H_0^1(0,T))^2},\|(h_2,g_2)\|_{(L^2(0,T))^2}\le\delta,$$

a função G tem um ponto fixo. Para isto, é suficiente mostrar que existe $R>0$, tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:
i) $G(\overline{B}(0,R))\subset\overline{B}(0,R)\subset L^2(0,T;(H^1(0,L))^2)$,
ii) Existe uma constante $c\in(0,1)$, tal que

$$\|G(u,v)-G(\hat{u},\hat{v})\|_X\le c\,\|(u,v)-(\hat{u},\hat{v})\|_Y,\ \forall(u,v),(\hat{u},\hat{v})\in\overline{B}(0,R),$$

onde $\overline{B}(0,R)$ é a bola fechada de raio R em $L^2(0,T:(H^1(0,L))^2)$.

Como Θ_1 e Θ_2 são contínuas, existem constastes positivas K_1,K_2,c_0, tais que

$$\begin{aligned}&\left\|S(\cdot)(u^0,v^0)\right\|_X\le c_0\left\|u^0,v^0\right\|_{(L^2(0,L))^2}\\ &\|\Theta_1(f_1,f_2)\|_X\le K_1\|(f_1,f_2)\|_Y\\ &\|\Theta_2((h_1,g_1),(h_2,g_2))\|_X\le K_2\|((h_1,g_1),(h_2,g_2))\|_{(H_0^1(0,T))^2\times(L^2(0,T))^2}.\end{aligned}$$

Assim, por (5.3),

$$\begin{aligned}\|G(u,v)\| &\le c_0\left\|(u^0,v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2}+K_1\|(f_1,f_2)\|_Y\\ &\quad+K_2\|((h_1,g_1),(h_2,g_2))\|_{(H_0^1(0,T))^2\times(L^2(0,T))^2}\\ &\le c_0\delta+K_1C\|(u,v)\|_X^2+K_2\delta\le\delta(c_0+K_2)+CK_1R^2.\end{aligned}$$

Logo, R e δ devem ser escolhidos de forma que

$$\delta(c_0+K_2)+CK_1R^2\le R.$$

Por outro lado, como

$$G(u,v) - G(\hat{u},\hat{v}) = \Theta_1((f_1,f_2) - (\hat{f}_1,\hat{f}_2))$$

obtemos que

$$\|G(u,v) - G(\hat{u},\hat{v})\|_X \leq K_1 C \|(u,v) - (\hat{u},\hat{v})\|_X^2 \leq 2CK_1R \|(u,v) - (\hat{u},\hat{v})\|_X .$$

Assim, G é uma contração se

$$2CK_1R < 1.$$

Portanto, tomando δ como segue

$$\delta = \frac{R}{2(c_0 + K_2)},$$

temos o resultado desejado. ■

Agora vamos mostrar nosso teorema principal.

Teorema 5.3. *Seja $L > 0$ e $T > 0$. Então, existe uma constante $\delta > 0$, tal que, para quaisquer dados inicial e final $(u^0, v^0), (u^1, v^1) \in (L^2(0,L))^2$, satisfazendo*

$$\left\|(u^0,v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \leq \delta \quad e \quad \left\|(u^1,v^1)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \leq \delta,$$

existem quatro controles $h_1, g_1 \in H_0^1(0,T)$ e $h_2, g_2 \in L^2(0,T)$, tal que a solução $(u,v) \in C([0,T];(L^2(0,L))^2) \cap L^2(0,T;(H^1(0,L))^2) \cap H^1(0,T;(H^{-2}(0,L))^2)$ de (1.1)-(1.2) verificam (1.3).

Demonstração. Para provar este resultado vamos usar um argumento de ponto fixo similar ao que foi usado no teorema anterior. Primeiro vamos definir

$$\Gamma : (L^2(0,L))^2 \to (H_0^1(0,T))^2 \times (L^2(0,T))^2,$$
$$\Gamma(u^1,v^1) = (\upsilon_1, \tau_1, \upsilon_2, \tau_2)$$

onde $\upsilon_1, \tau_1 \in H_0^1(0,T)$ e $\upsilon_2, \tau_2 \in L^2(0,T)$ são os controles dados pelo Teorema 4.7, que levam a solução de (4.1)-(4.2) do dado inicial $(0,0)$ ao dado final (u^1, v^1). Mais precisamente, se $(\hat{w}^1, \hat{z}^1) \in (L^2(0,L))^2$ é o minimizador do funcional J definido no Teorema 4.7 e $(\hat{w}, \hat{z})$ é a solução do sistema retrogrado (3.22) com dado inicial $(\hat{w}^1, \hat{z}^1)$, então

$\upsilon_1, \tau_1 \in H_0^1(0,T)$ e $\upsilon_2, \tau_2 \in L^2(0,T)$ vem dados por

$$\begin{aligned}
&\langle b\hat{w}_{xx}(t,L) + a\hat{z}_{xx}(t,L), \theta\rangle = \int_0^T (\upsilon_1)_t(t)\theta_t(t)dt, \quad \forall \theta \in H_0^1(0,T),\\
&\langle ab\hat{w}_{xx}(t,L) + \hat{z}_{xx}(t,L), \theta\rangle = \int_0^T (\tau_1)_t(t)\theta_t(t)dt, \quad \forall \theta \in H_0^1(0,T),\\
&\upsilon_2(t) = b\hat{w}_x(t,L) + a\hat{z}_x(t,L),\\
&\tau_2 = ab\hat{w}_x(t,L) + \hat{z}_x(t,L).
\end{aligned}$$

Como $J(\hat{w}^1, \hat{z}^1) \leq J(0,0) = 0$, temos da desigualdade de observabilidade (4.15) que Γ é contínua.

Agora vamos definir um novo operador dado por

$$F : L^2(0,T;(H^1(0,L))^2) \to L^2(0,T;(H^1(0,L))^2) \cap C([0,T];(L^2(0,L))^2)$$
$$F(u,v) = S(\cdot)(u^0,v^0) + \Theta_2 \circ \Gamma((u_1,v_1) - S(T)(u^0,v^0) + \Theta_1(-f_1,-f_2)(T,\cdot)) + \Theta_1((f_1,f_2).$$

Observe que se (u,v) é um ponto fixo do operador F, então (u,v) é solução de (1.1)-(1.2) e satisfaz (1.3), isto é, o sistema é controlável por (u^1,v^1). Como o operador F é continuo, provaremos que existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que se

$$\left\|(u^0,v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \leq \delta, \quad \|(u_1,v_1)\|_{(L^2(0,L))^2} \leq \delta,$$

o operador F tem um ponto fixo. Para isto, é suficente mostrar que existe $R > 0$, tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

i) $F(\overline{B}(0,R)) \subset \overline{B}(0,R) \subset L^2(0,T;(H^1(0,L))^2)$,

ii) Existe uma constante $c \in (0,1)$, tal que

$$\|F(u,v) - F(\hat{u},\hat{v})\|_X \leq c\,\|(u,v) - (\hat{u},\hat{v})\|_Y\,, \ \forall (u,v),(\hat{u},\hat{v}) \in \overline{B}(0,R),$$

onde $\overline{B}(0,R)$ é a bola fechada de raio R em $L^2(0,T;(H^1(0,L))^2)$.

Como Θ_1, Θ_2 e Γ são contínuas, existem constaste positivas K, K_1, K_2 tais que

$$\begin{aligned}
&\|\Theta_1(f_1,f_2)\|_X \leq K_1\,\|(f_1,f_2)\|_Y\,,\\
&\|\Theta_2((h_1,g_1),(h_2,g_2))\|_X \leq K_2\,\|((h_1,g_1),(h_2,g_2))\|_{(H_0^1(0,T))^2\times(L^2(0,T))^2}\,,\\
&\left\|\Gamma(u^1,v^1)\right\|_{(H_0^1(0,T))^2\times(L^2(0,T))^2} \leq K\left\|(u^1,v^1)\right\|_{(L^2(0,L))^2}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que se $(u,v) \in \overline{B}(0,R) \subset L^2(0,T:(H^1(0,L))^2)$, então

$$
\begin{aligned}
\|G(u,v)\| &\leq c_0 \left\|(u^0,v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2} + KK_2 \left\|(u^1,v^1) - S(T)(u^0,v^0) + \Theta_1(-f_1,-f_2)(T,\cdot)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \\
&\quad + K_1 \left\|((f_1,f_2)\right\|_Y \\
&\leq c_0\delta + 2KK_2\delta + KK_1K_2C\left\|(u,v)\right\|_X^2 + CK_1\left\|(u,v)\right\|_X^2 \\
&\leq c_0\delta + 2K_2K\delta + (KK_2+1)K_1CR^2.
\end{aligned}
$$

Logo, escolhemos δ e R satisfazendo

$$
\delta(c_0 + 2KK_2) + CK_1R^2(kK_2+1) \leq R.
$$

Por outro lado, como

$$
F(u,v) - F(\hat{u},\hat{v}) = \Theta_1((f_1,f_2) - (\hat{f}_1,\hat{f}_2)) + \Theta_2 \circ \Gamma((\hat{f}_1,\hat{f}_2) - (f_1,f_2))
$$

obtemos que

$$
\begin{aligned}
\left\|F(u,v) - F(\hat{u},\hat{v})\right\|_X &\leq K_1C\left\|(u,v) - (\hat{u},\hat{v})\right\|_X^2 + K_1K_2KC\left\|(u,v) - (\hat{u},\hat{v})\right\|_X^2 \\
&\leq 2CK_1R(1+KK_2)\left\|(u,v) - (\hat{u},\hat{v})\right\|_X,
\end{aligned}
$$

e F é uma contração se

$$
2CK_1R(1+KK_2) < 1.
$$

Agora, tomando δ como segue

$$
\delta = \frac{R}{2(c_0+K_2)},
$$

temos que F tem um ponto fixo e portanto o resultado esta provado. ■

5.2 Dois controles

Nesta seção vamos provar que quando apenas dois controles atuam na fronteira do intervalo, a controlabilidade exata vai ser obtida para valores pequenos de comprimento L e valores grandes de tempo T.

Vamos considerar o sistema (1.1) tomando $h_1, g_1 = 0$, isto é,

$$
\begin{cases}
u_t + uu_x + u_{xxx} + a_3v_{xxx} + a_1vv_x + a_2(uv)_x = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\
b_1v_t + rv_x + vv_x + b_2a_3u_{xxx} + v_{xxx} + b_2a_2uu_x + b_2a_1(uv)_x = 0, & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\
u(t,0) = 0, \quad u(t,L) = 0, \quad u_x(t,L) = h_2(t), & \text{em } (0,T), \\
v(t,0) = 0 \quad v(t,L) = 0, \quad v_x(t,L) = g_2(t), & \text{em } (0,T), \\
u(0,x) = u^0(x), \quad v(0,x) = v^0(x), & \text{em } (0,L).
\end{cases}
\tag{5.4}
$$

Neste caso, temos que a Proposição 3.1 e os Teoremas 3.2 e 3.3 continuam válidos.
A desigualdade de observabilidade provada no Lema 4.4 vai ter a seguinte forma, com restrições de comprimento L e tempo T que serão dadas mais adiante.

Teorema 5.4. *Existem $L > 0$ e $T > 0$ e uma constante $C = C(L,T) > 0$, tal que a desigualdade*

$$\left\|(u^0, v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \leq C \left\|(u_x(\cdot,0), v_x(\cdot,0))\right\|_{(L^2(0,T))^2} \tag{5.5}$$

se verifica para qualquer $(u^0, v^0) \in (L^2(0,L))^2$, onde (u,v) é solução de (3.21) com dado inicial (u^0, v^0).

Observação. 5.5. *Se usarmos a técnica usada para demonstrar o Teorema 4.6 obtemos o mesmo sistema do Lema 4.4 com as seguintes condições de fronteira:*

$$\begin{cases} w(0) = w(L) = w_x(0) = w_x(L) = 0 \\ z(0) = z(L) = z_x(0) = z_x(L) = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Porém, o princípio de continuação única não se verifica. De fato, as funções $w = -a(1 - cos(x))$ e $z = (1 - cos(x))$ satisfazem o problema quando $L = 2\pi, \lambda = 0$ e $r = 1 - a^2b$, mas não são nulas.

Demonstração. Fazendo uso da prova de Teorema 3.3 e de suas estimativas, obtemos que

$$\int_0^T \int_0^L (b(1-\epsilon^2)u_x^2 + (1 - \frac{a^2b}{\epsilon^2})v_x^2)dxdt \leq \frac{r}{3}\int_0^t \int_0^L v^2 dxdt + \frac{L}{3}\int_0^L (b(u^0)^2 + c(v^0)^2)dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^L (u_x^2 + v_x^2)dxdt \\ &\leq \frac{1}{min\left\{b(1-\epsilon^2), (1 - \frac{a^2b}{\epsilon^2})\right\}} \left(\frac{r}{3}\int_0^t \int_0^L v^2 dxdt + \frac{L}{3}\int_0^L (b(u^0)^2 + c(v^0)^2)dx \right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Além disso, do Teorema 3.3 também obtemos a identidade

$$\begin{aligned} b\int_0^L u^2(s,x)dx + c\int_0^L v^2(s,x)dx - b\int_0^L u^2(0,x)dx - c\int_0^L v^2(0,x)dx = \\ -\int_0^T [bu_x^2(s,0) + 2abv_x(s,0)u_x(s,0) + v_x^2(s,0)]dx, \end{aligned}$$

onde $s \in [0,T]$. Tomando $\epsilon \in (\sqrt{a^2b}, 1)$, obtemos

$$2abv_x(s,0)u_x(s,0) = 2(\frac{1}{\epsilon}\sqrt{a^2b}v_x(s,0))(\epsilon\sqrt{b}u_x(s,0)) \geq -b\epsilon^2 u_x^2(s,0) - \frac{a^2b}{\epsilon^2}v_x^2(s,0),$$

implicando que

$$b\int_0^L u^2(s,x)dx + c\int_0^L v^2(s,x)dx \le b\int_0^L u^2(0,x)dx + c\int_0^L v^2(0,x)dx. \tag{5.8}$$

Portanto, de (5.7) e (5.8), temos a seguinte estimativa

$$\int_0^T\int_0^L (u_x^2+v_x^2)dxdt \le c_0\left(\int_0^L (bu^2(0,x)+cv^2(0,x))dx\right), \tag{5.9}$$

onde $c_0 = \frac{1}{min\left\{b(1-\epsilon^2),(1-\frac{a^2b}{\epsilon^2})\right\}}\left(\frac{rT}{c}+\frac{L}{3}\right)$. Agora, das estimativas obtidas no Teorema 3.3, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L (bu^2(0,x)+cv^2(0,x))dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L (bu^2+v^2)dxdt + \frac{1}{T}\int_0^T (T-t)(bu_x^2(t,0)+2abu_x(t,0)v_x(t,0)+v_x^2(t,0))dt \\
&\le \frac{max\{b,c\}}{T}\|(u,v)\|^2_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)} + c_1\int_0^T (u_x^2(t,0)+v_x^2(t,0))dt,
\end{aligned}$$

onde $c_1 = max\left\{b(1+\epsilon^2),(1+\frac{a^2b}{\epsilon^2}\right\}$. Pela desigualdade de Poincaré, e por (5.9),

$$\begin{aligned}
&\int_0^L (bu^2(0,x)+cv^2(0,x))dx \\
&\le \frac{max\{b,c\}L^2}{T\pi^2}\|(u_x,v_x)\|^2_{L^2(0,T;(L^2(0,L))^2)} + c_1\int_0^T (u_x^2(t,0)+v_x^2(t,0))dt \\
&\le \frac{max\{b,c\}L^2}{T\pi^2}c_0\int_0^L (bu^2(0,x)+cv^2(0,x))dx + c_1\|(u_x(t,0),v_x(t,0))\|^2_{(L^2(0,T))^2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left\|(u^0,v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \le C\|(u_x(\cdot,0),v_x(\cdot,0))\|_{(L^2(0,T))^2},$$

onde $C = \frac{c_1}{min\{b,c\}}\left(1-\frac{L^2c_0max\{b,c\}}{T\pi^2}\right)^{-1}$. ■

Observe que a prova exige certas restrições sobre o comprimento e o tempo, isto é,

$$\frac{max\{b,c\}}{min\left\{b(1-\epsilon^2),(1-\frac{a^2b}{\epsilon^2})\right\}}\left\{\frac{rL^2}{3c\pi^2}+\frac{L^3}{3T\pi}\right\} < 1.$$

Portanto, para tomar a constante sem depender de ϵ minimizamos a parte esquerda da desigualdade acima com respeito a ϵ sobre $(a^2b,1)$. Nesse caso, obtemos que ϵ pode ser trocado por $\hat{\epsilon} = \sqrt{\frac{-(1-b)+\sqrt{(1-b)^2+4a^2b^2}}{2b}}$.

Nesse caso, provamos o resultado de controlabilidade com apenas dois controles atuando nas seguintes condições:

Teorema 5.6. *Sejam* a_1, a_2, a_3, c, b, r *constantes reais satisfazendo* $b, c > 0$ *e* $a_3^2 b < 1$. *Suponha que* L, T *satisfazem*

$$\frac{max\,\{b, c\}}{min\left\{b(1-\hat{\epsilon}^2), (1-\frac{a^2 b}{\hat{\epsilon}^2})\right\}} \left\{\frac{rL^2}{3c\pi^2} + \frac{L^3}{3T\pi}\right\} < 1,$$

onde

$$\hat{\epsilon} = \sqrt{\frac{-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4a^2 b^2}}{2b}}.$$

Então, existe uma constante $\delta > 0$, *tal que para qualquer dados iniciais e finais* $(u^0, v^0), (u^1, v^1) \in (L^2(0, L))^2$ *verificando*

$$\left\|(u^0, v^0)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \leq \delta \;\; e \;\; \left\|(u^1, v^1)\right\|_{(L^2(0,L))^2} \leq \delta,$$

existem dois controles $h, g \in L^2(0, T)$, *tal que a solução*

$$(u, v) \in C([0, T]; (L^2(0, L))^2) \cap L^2(0, T; (H^1(0, L))^2)$$

de

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} + a_3 v_{xxx} + a_1 vv_x + a_2(uv)_x = 0, & em\ (0, T) \times (0, L), \\ cv_t + rv_x + vv_x + ba_3 u_{xxx} + v_{xxx} + ba_2 uu_x + ba_1(uv)_x = 0, & em\ (0, T) \times (0, L), \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = 0, \quad u_x(t, L) = h(t), & em\ (0, T), \\ v(t, 0) = 0 \quad v(t, L) = 0, \quad v_x(t, L) = g(t), & em\ (0, T), \\ u(0, x) = u^0(x), \quad v(0, x) = v^0(x), & em\ (0, L), \end{cases} \tag{5.10}$$

satisfaz

$$u(T, \cdot) = u^1(\cdot), v(T, \cdot) = v^1(\cdot).$$

Referências Bibliográficas

[1] E. F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, (1961).

[2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, (1983).

[3] R. Cipolatti,*Cálculo Avançado I*, IM/UFRJ, (2012).

[4] G. B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley - Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts, (1999).

[5] A. M. Gomes, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações Equações de Evolução*, 2º Edição, Rio de Janeiro, UFRJ - IM, (2005).

[6] G. Helmberg, *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*, North-Holland Publishing Company, (1969).

[7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations* Graduate Studies in Mathematics, AMS, (1998).

[8] J-L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[9] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 44, (1983).

[10] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, (1976).

[11] E. Cerpa, *Exact controllability of a nonlinear Korteweg de Vries equation on a critical spatial domain*, SIAM J. Control Optim. 46 (2007), 877-899.

[12] J. Coron and E. Crepéau, *Exact boundary controllability for the nonlinear KdV equation with critical lengths*, J. Eur. Math. Soc. 6 (2004), 367-398.

[13] E. Cerpa and E. Crepéau, *Boundary controllability for the nonlinear Korteweg de Vries equation on any critical domain*, Ann. Inst. H. Poinaré Anal. Non Linéaire, 26 (2009), 457-475.

[14] J. A. Gear and R. Grimshaw, *Weak and strong interactions between internal solitary waves*, Stud. Appl. Math. 70 (1984), 235-258.

[15] S. Guerrero and O. Glass, *Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit*, Asymptot. Anal., 60 (2008), 61-100.

[16] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Kowrtweg de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM Control Optim. 2 (1997), 33-55.

[17] B. Y. Zhang, Exact boundary controllability of the Korteweg de Vries equation, SIAM J. Control Optim. 37 (1999), 543-565.

[18] R. A. Capistrano-Filho ;F. Gallego and A. F. Pazoto, *Boundary controllability of the nonlinear coupled system of two Korteweg-de Vries equations with critical size restrictions on the spatial domain*, MCSS. Mathematics of Control, Signals and Systems, 29 (2017), 1-37.

[19] J-L. Lions, *Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués*, Tome 1, Masson, Paris, (1988).

[20] T. Cazenave and A. Haraux, An introduction to Semilinear Evolution Equation, Oxford Lecture Series in Mathematics and Applications, Vol. 13, Oxford University Press, New York,(1988).

[21] J. M. Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society 136, (2007).

[22] S. Dolecki and D. L. Russell, A general theory of observation and control, SIAM J. Control Optim. 15 (1977), 185-220.

[23] J-L Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilization de systèmes distribué*, Tome 1, *Contrôlabilité exacte*, Colletion de Recherches en Mathématiques Appliquées, 8, Masson, Paris (1988).

[24] J-L. Lions, Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems, SIAM Rev. 30 (1988), 1–68.

[25] J-L. Lions and E. Magenes, *Probléms aux limites non homogènes et applications.* Vol 1, Travaux Recherches Mathemátiques, No. 17, Dunod, Paris, (1968).

[26] J. Zabczyk, *Mathematical control theory: an introduction*. Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, (1992).

[27] E. Zuazua, Contrôlabilité exacte de quelques modèles de plaques en un temps arbitrairement petit, Appendix I in [23], 465-491.

[28] S. Micu and J. H. Ortega, *On the controllability of a linear coupled system of Korteweg-de Vries equations*, Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Santiago de Compostela, 2000) SIAM, Philadelphia, PA, (2000), 1020-1024.

[29] S. Micu, J. Ortega and A. Pazoto, *On the Controllability of a Coupled system of two Korteweg-de Vries equation*, Commun. Contemp. Math, 11 (2009), 779-827.

[30] E. Cerpa and A. F. Pazoto, *A note on the paper On the controllability of a coupled system of two Korteweg-de Vries equations*, Commun. Contemp. Math, 13 (2011), 183-189.

Apêndice A

Controlabilidade para EDPs - Principais Métodos Utilizados

Estamos interessados em obter controlabilidade e estabilização para sistemas dispersivos governados por EDPs. Vamos começar tratando de dois importantes problemas relativos a controlabilidade são eles: *a controlabilidade interna e controlabilidade na fronteira para EDPs.*

Os vários conceitos de controlabilidade, que concordam em dimensão finita, mas não de um modo geral para as EDPs, são introduzidas e caracterizadas por uma abordagem de dualidade clássica (ver por exemplo [22, 23]). Nesta abordagem a controlabilidade exata de um sistema é provada ser equivalente a prova de uma *desigualdade de observabilidade* para o sistema adjunto. Tal fato é baseado no método *HUM – Hilbert Uniqueness Method* devido à J.-L. Lions (para mais detalhes ver [23–25]). Os métodos de controlabilidade dados aqui podem ser vistos como extensões naturais do critério de Kalman para sistemas de dimensão finita como mostrado em [21].

Quanto à questão da estabilização, vamos introduzir conceitos de estabilidade em dimensão infinita. Para isso, mostraremos alguns métodos que comprovam a estabilização exponencial para EDPs. A estabilização de uma EDP está relacionada fortemente com a controlabilidade anteriormente definida. Uma atenção especial é dada a EDPs com um gerador infinitesimal anti-adjunto (*skew-adjoint*) para quem os conceitos de controlabilidade e estabilidade, considerados aqui, concordem.

Precisamos inicialmente introduzir algumas notações. Vamos denotar por $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ o operador diferencial com $\mathcal{P} \in \mathbb{C}[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ e $\mathcal{D} = (-i\partial_t, -i\partial_{x_1}, \ldots, -i\partial_{x_n})$. Por exemplo, se considerarmos $\mathcal{P} = -\tau^2 + |\xi|^2$ teremos o operador da equação da onda $\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \partial_t^2 - \Delta$. De agora em diante, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será um subconjunto aberto suficientemente suave, cuja fronteira $\partial\Omega$ é denotada por Γ.

Problema de Controlabilidade Interna

Dados um subconjunto $\omega \subset \Omega$ com fronteira suave Γ e um conjunto de condições de contorno, que escreveremos como $\mathcal{B}(\mathcal{D})\, z = 0$, vamos considerar o problema de controle

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathcal{D})\, z = \mathcal{X}_\omega f & t > 0, x \in \Omega, \\ \mathcal{B}(\mathcal{D})\, z = 0 & t > 0, x \in \Gamma, \\ z(0,x) = z_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{A.1}$$

Aqui, $f = f(t,x)$ é o controle interno, $z = z(t,x)$ é a função procurada que satisfaz o sistema acima e $\mathcal{X}$ representa uma função característica. Sejam H e U dois espaços funcionais normados, dados z_0 e z_1 em H, buscamos um controle $f \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução z do sistema (A.1) satisfaz $z(T,x) = z_1(x)$.

Problema de Controlabilidade na Fronteira

Dados um subconjunto $\gamma \subset \Gamma$ e dois conjuntos de condições de contorno, que escreveremos como $\mathcal{B}_1(\mathcal{D})\, z = \mathcal{X}_\omega f$, $\mathcal{B}_2(\mathcal{D})\, z = 0$, vamos considerar o problema de controle

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathcal{D})\, z = 0 & t > 0, x \in \Omega, \\ \mathcal{B}_1(\mathcal{D})\, z = \mathcal{X}_\omega f & t > 0, x \in \gamma, \\ \mathcal{B}_2(\mathcal{D})\, z = 0 & x \in \Gamma \backslash \gamma, \\ z(0,x) = z_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{A.2}$$

Aqui, $f = f(t,x)$ é o controle de fronteira, $z = z(t,x)$ é a função procurada que satisfaz o sistema acima e $\mathcal{X}$ é uma função característica. Dados z_0 e z_1 em H, buscamos um controle $f \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução z do sistema (A.2) satisfaz $z(T,x) = z_1(x)$.

Controlabilidade e Observabilidade

Conceitos de Controlabilidade

Dados $z_0 \in H$, $u \in L^2(0,T;U)$, consideremos a solução $z : [0,T] \to H$ do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{A.3}$$

Relembremos que para qualquer $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $u \in W^{1,1}(0,T;U)$, o problema de Cauchy (A.3) admite uma única soluão $z \in C([0,T]; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(0,T;H)$ dada pela fórmula de Duhamel

$$z(t) = S(t)\, z_0 + \int_0^t S(t-s)\, Bu(s)\, ds, \; \forall t \in [0,T].$$

Para $z_0 \in H$ e $u \in L^1(0,T;U)$, a fórmula anterior define uma solução suave (*mild solution*) de (A.3).

Definição A.1. *Dizemos que o sistema (A.3) é exatamente controlável no tempo T se para qualquer $z_0, z_T \in H$, existe $u \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução do sistema (A.3) satisfaz $z(T) = z_T$.*

Definição A.2. *Dizemos que o sistema (A.3) é nulamente controlável no tempo T se para qualquer $z_0 \in H$, existe $u \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução do sistema (A.3) satisfaz $z(T) = 0$.*

Introduziremos agora o seguinte operador $\mathcal{L}_T : L^2(0,T;U) \longrightarrow H$ definido por

$$\mathcal{L}_T u = \int_0^T S(T-t)\, Bu(s)\, ds.$$

Assim, as seguintes definições de controlabilidade, acima mencionadas, são equivalentes à:

$$\text{Controlabilidade Exata em } T \Leftrightarrow \operatorname{Im} \mathcal{L}_T = H; \tag{A.4}$$

$$\text{Controlabilidade Nula em } T \Leftrightarrow S(T)\,H \subset \operatorname{Im} \mathcal{L}_T. \tag{A.5}$$

Em dimensão finita, i.é., quando $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, os dois conceitos são equivalentes, e a equivalência é uma condição puramente algébrica, a famosa condição das filas de Kalman: $rank\,(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$. Como uma consequência, o tempo T não desempenha nenhum papel, para mais detalhes podemos citar [21, 26].

Para EDPs as situações são mais complicadas do que para dimensão finita. Por exemplo:

– não existe nenhuma condição algébrica para a controlabilidade;
– o controle no tempo desempenha um papel para a EDPs hiperbólicas;
– a recíproca abaixo não é natural em geral

$$\text{Controlabilidade Exata} \;\Rightarrow\; \text{Controlabilidade a Zero.}$$

Métodos para Controlabilidade

As provas dos resultados aqui citadas são clássicas, e eles podem ser encontrados, por exemplo em [21, 23, 26, 27]. Tais provas são baseadas no método H.U.M. devido a J.-L. Lions (ver [23]). Um primeiro resultado que garante a controlabilidade pode ser dado da seguinte maneira:

Resultado A: Diremos que o sitema (A.3) é **exatamente controlável** no tempo $T > 0$

se, e somente se, existe alguma constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \|B^* S^* (t)\, y_0\|_U^2 \, dt \geq c \|y_0\|_H^2 \, , \forall y_0 \in H. \tag{A.6}$$

A desigualdade (A.6) é chamada de *desigualdade de observabilidade.* Tal desigualdade significa que a aplicação

$$\Upsilon : y_0 \longmapsto B^* S^* (\cdot)\, y_0,$$

é limitada e inversível, ou seja, temos a chamada *propriedade de observabilidade,* isto quer dizer que é possível recuperar completamente as informações sobre o estado inicial y_0, sobre uma medida em $[0, T]$, na saída dos dados $B^* [S^* (t)\, y_0]$.

Um outro resultado relacionada com uma desigualdade de observabilidade, porém em um sentido mais fraco, e assim será chamada de *desigualdade de observabilidade fraca,* nos garantirá a controlabilidade nula do sistema (A.3) e pode ser formulado como segue.

Resultado B: O sistema (A.3) é **controlável a zero ou nulamente controlável** no tempo $T > 0$ se, e somente se, existe alguma constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \|B^* S^* (t)\, y_0\|_U^2 \, dt \geq c \|S^* (T)\, y_0\|_H^2 \, , \forall y_0 \in H. \tag{A.7}$$

A desigualdade (A.7) tem um sentido fraco pelo fato de que a mesma nos dá somente que as informações de $S^* (T)\, y_0$ podem ser recuperadas, não podendo recuperar informações sobre o estado inicial do sistema y_0.

O método HUM. O método HUM. desenvolvido por J.-L. Lions é uma ferramenta de suma importância para o estudo de controlabilidade de sistemas governados por EDPs. Se considerarmos um problema de valor inicial e de contorno

$$\Sigma \qquad \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

e seu problema adjunto, obtido tomando a distribuição do operador adjunto $\partial_t - A$, à saber, $-\partial_t - A^*$:

$$\Sigma^* \qquad \begin{cases} \dot{y} = -A^* y, \\ y(T) = y_T, \end{cases}$$

podemos assumir a seguinte *Identidade Chave:* $(z(t), y_T)_H = \int_0^T (u, B^* y)_U \, dt$ e garantir a equivalência entre desigualdade de observabilidade e controlabilidade do sistema Σ. Além disso, podemos concluir que:

– A equação de evolução no *problema adjunto* $\dot{y} = -A^* y$ difere de um *operador adjunto* $\dot{y} = A^* y$ por um sinal de menos. Uma simples tranformação $t \to T - t$ faz com que a soluções do operador adjunto sejam soluções do problema adjunto;

– O método prova que o operador $\Lambda : z_T \longmapsto u$ nos dar um controle;

– Em geral, não precisamos explicitar B e B^*. Os ingredientes importantes para o método são: a *identidade chave* e a *desigualdade de observabilidade*.