# Transitividade no Intervalo e na Reta.

Miguel Angel Pineda Reyes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática IM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários á obtenção do título de Mestre em Matemática.

Asesor: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Rio de Janeiro

Julho de 2018

# Transitividade no intervalo e na reta.

**Miguel Angel Pineda Reyes**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática - IM da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários á obtenção do título de Mestre em Matemática.

Rio de Janeiro, 04 de julho de 2018.

Prof. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza (UFRJ)
(Orientador)

Prof. Bruno Rodrigues Santiago (UFF)

Prof. Sergio Augusto Romaña Ibarra (UFRJ)

# Resumo

Nesta dissertação de mestrado estudamos o conceito de transitividade e outras formas de mistura. Primeiramente estudamos istas propriedades no intervalo para depois estender a reta. Mostraremos que os pontos críticos e valores críticos ilimitadas de um mapa transitivo são ilimitados. Além disso mostramos sob hipóteses adicionais estas condições também são suficientes.

**Palavras Chaves:** Transitividade; mixing; pontos críticos, expansora.

# Sumário

# Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos tem sido desenvolvido nos últimos anos, dado suas aplicações em diversas áreas. Um dos méritos é a possibilidade de analisar sistemas com certas complexidades. O conceito de complexidade pode ser dado de diversas maneiras, como entropia positiva, medidas invariantes absolutamente contínuas, expoentes de Lyapunov positivos, entre outros.

Do ponto de vista topológico, podemos considerar um sistema como complexo, se ele mistura a topologia do estado. Ou seja, se dados dois abertos não vazios, algum iterado do primeiro intersecta o segundo. Tal propriedade é dita transitividade (topológica) e é o principal objeto de estudo desta dissertação.

Em espaços métricos compactos sem pontos isolados, esta propriedade é equivalente a existência de uma órbita densa. De fato, obtemos a existência de um conjunto residual de órbitas densas. Além disso, a existência de diversos exemplos vindos da teoria hiperbólica e a robustez destes aumenta a importância e riqueza do estudo de sistemas transitivos, como em Pujals [10].

Começamos o estudo da transitividade em espaços métricos gerais e também apresentamos outras propriedades mais fortes de mistura: weak mixing, mixing, transitividade total e exatidão. Em particular, adicionando a densidade de órbitas periódicas, obtemos o chamado caos no sentido de Devaney [3]. Também, obtemos um exemplo básico, porém muito instrutivo, chamado a tenda. Esta é uma dinâmica transitiva do intervalo [0,1] onde o mecanismo usado para obter a transitividade é a expansão. Este exemplo será motivador de diversas perguntas em cenários mais gerais.

Continuamos então a analisar mais propriedades de mapas transitivos no intervalo $[0, 1]$. Um fato interessante é que a densidade de órbitas periódicas decorre da transitividade, o que é falso em geral, por exemplo para rotações irracionais no círculo. Assim, como mencionado anteriormente, obtemos o caos de Devaney. Outro fato interessante é que no intervalo as propriedades de mistura mais forte, citadas anteriormente, são equivalentes. Finalmente, mostramos que todo mapa transitivo tem uma estrutura interna: ou ela é totalmente transitiva (i.e. todo iterado é transitivo) ou ela permuta dois intervalos que cobrem o intervalo, e o segundo iterado é totalmente transitivo em cada um deles.

Em seguida, nos voltamos ao tema central desta dissertação, que é o estudo de mapas na reta, do ponto de vista da transitividade. A perda de compacidade muda as teses de alguns resultados, como veremos a seguir. Porém, antes disso, analisamos os resultados sobre mapas transitivos do intervalo que permanecem verdadeiros na reta. Para este fim, precisamos adaptar as provas mencionados anteriormente. Em seguida, apresentamos resultados devido a Nagar e Sesha [8],[9] sobre propriedades necessárias de mapas transitivos da reta: o conjunto de pontos críticos e valores críticos devem ser ilimitados. Como eles são sobrejetivos, isto dá uma idéia de como devem ser tais mapas. Também estudamos resultados análogos para mapas de $[0, \infty)$.

Finalmente, observamos através de exemplos que a expansão não é suficiente para obter a transitividade de mapas na reta. Assim, apresentamos resultados mais gerais, com condições suficientes para que um mapa expansor por partes seja transitivo.

**Teorema A** Seja $(\mathbb{R}, f)$ um sistema dinâmico tal que satisfaz:

**a)** O conjunto dos pontos críticos $Crit(f)$ é contável e não limitado, isto é, $Crit(f) = \{x_n < x_{n+1} : n \in \mathbb{Z}\}$ é não limitado superiormente e inferiormente. Além disso $\eta := \sup\{x_{n+1} - x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é finito.

**b)** O conjunto dos valores críticos satisfaz

$$f(x_{2n}) \geq x_{2n} + 2\eta \text{ e } f(x_{2n+1}) \leq x_{2n+1} - 2\eta \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

**c)** A função $f$ é $\lambda$-expansora com $\lambda > 2$.

Então $([0, \infty), f)$ é topologicamente mixing.

e

**Teorema B** Seja $(\mathbb{R}, f)$ um sistema dinâmico tal que satisfaz:

**a)** $f(x) = -x$ para $x \leq 0$.

**b)** O conjunto dos pontos críticos $Crit(f)$ é contável e não limitado, isto é, $Crit(f) = \{x_n < x_{n+1} : n \geq 1\}$ é não limitado. E $\eta := \sup\{x_{n+1} - x_n : n \geq 1\}$ é finito e

$$\eta \leq \frac{(x_2 + 1)x_2}{2}$$

**c)** O conjunto dos valores críticos satisfaz

$$f(x_{2n+1}) \leq -x_{2n+1} - 2\eta \text{ e } f(x_{2n}) \geq -\frac{2\eta}{x_{2n} + 1} \text{ para } n \geq 1.$$

**d)** A função $f$ é $\lambda$-expansora com $\lambda > 2$.

Então $(\mathbb{R}, f)$ é transitiva.

Se permitimos que o domínio a reta menos um ponto, podemos obter mapas transitivos a partir da propriedade de alternância. Um exemplo importante é o mapa de Boole e apresentamos resultados devido a Munoz [7] , sobre a transitividade de tais mapas, novamente, a propriedade de expansão é explorada.

Terminamos a dissertação com problemas relacionadas ao estudo feito. Será possível reobter a transitividade a partir de uma dinâmica simbólica com infinitos símbolos? Sobre uma topologia razoável, é possível obter transitividade robusta? Ou mesmo estabilidade topológica? Os mapas considerados no teorema são metricamente transitivos, isto é, todo conjunto invariante, ou seu complementar, tem medida de Lebesgue nula? Finalmente, é possível relaxar as hipóteses do teorema de forma a aumentar a gama de exemplos?

# Capítulo 1

# Notações e Conceitos Básicos

Neste capítulo introduzimos conceitos básicos que serão necessários para a leitura está dissertação.

Nesta dissertação, $X$ sempre denotará um espaço métrico e $d$ a sua métrica. Se $Y$ é um subconjunto de $X$ consideramos $Y$ com a métrica induzida de $X$. Neste caso $Int(Y), \overline{Y}, \partial Y$ denotarão respectivamente o interior, o fecho e a fronteira de $Y$. Se $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ denotamos a bola aberta de centro $x$ e raio $\varepsilon$ como $B(x, \varepsilon)$ e a bola fechada de centro $x$ e raio $\varepsilon$ como $\overline{B}(x, \varepsilon)$.

## 1.1 Sistemas Dinâmicos

**Definição 1.1.1.**

- *Um* ***sistema dinâmico*** *é um par* $(X, f)$ *onde* $X$ *é um espaço métrico, chamado espaço de estados, e* $f : X \to X$ *um aplicação continua. A evolução do sistema esta dado pela iteração sucessiva de* $f$*,*

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-vezes}.$$

*Por convenção* $f^0$ *é a função identidade. Se pensamos* $n$ *como variável tempo, tomamos como posição inicial* $x$*, o ponto* $f^n(x)$ *representa a nova posição no tempo* $n$*.*

- *A* ***órbita*** *de um ponto* $x \in X$ *por* $f$ *é o conjunto formado por seus iterados, isto é,*

$$Orb(x, f) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}.$$

- *Se existe* $n \in \mathbb{N}$ *com* $n \geq 1$ *tal que* $f^n(x) = x$ *dizemos que* $x$ *é um* ***ponto periódico*** *e o período é menor* $k \in \mathbb{N}$ *com* $k \geq 1$ *tal que* $f^k(x) = x$*. Quando* $k = 1$ *,* $f(x) = x$*, dizemos que* $x$ *é um* ***ponto fixo****.*

- *Um* ***conjunto invariante*** *(ou* $f$*-invariante)* $Y$ *é um subconjunto de* $X$ *não vazio tal que* $f(Y) \subseteq Y$ *e é* ***fortemente invariante*** *se* $f(Y) = Y$*.*

- *Seja* $(X, f)$ *um sistema dinâmico. Se* $Y$ *é um conjunto invariante de* $X$ *denotamos* $f\,|_Y$ *a restrição de* $f$ *a* $Y$*, isto é,* $f\,|_Y : Y \to Y$*. Assim o* $(Y, f\,|_Y)$ *é um sistema dinâmico que é chamado um* ***subsistema*** *do sistema* $(X, f)$*. Chamamos de* ***subdinâmica*** *á dinâmica do sistema dinâmico* $(Y, f\,|_Y)$*.*

Já tendo definido os objetos de estudo definidos nos podemos perguntar sobre a evolução do sistema. Para o sistema dinâmico $(X, f)$ nos podemos perguntar se existem pontos periódicos, se existe uma órbita tal que se acumula em $X$ ou dito de outro jeito existe um ponto com órbita densa em $X$. Agora veremos dois exemplos onde a dinâmica esta completamente determinada.

**Exemplo 1.1.2.** *Seja $X$ um espaço métrico completo e $(X, f)$ um sistema dinâmico tal que $f$ é uma contração. Isto é que existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.*
*Se tomamos $x_0 \in X$ e consideramos a sequência $(f^n(x_0))_{n\geq 0}$ temos que é uma sequência de Cauchy. Primeiro observamos que*

$$d(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)) \leq \lambda d(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)) \leq \cdots \leq \lambda^n d(f(x_0), x_0).$$

*Assim para $n, n+k$ temos*

$$\begin{aligned} d(f^{n+k}(x_0), f^n(x_0)) &\leq d(f^{n+k}(x_0), f^{n+k-1}(x_0)) + \cdots + d(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)) \\ &\leq (\lambda^{n+k-1} + \cdots + \lambda^n) d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i+n} d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

*Como $0 \leq \lambda < 1$ temos que $\lim_{n\to\infty} d(f^{n+k}(x_0), d(f^n(x_0)) = 0$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Logo $(f^n(x_0))_{n\geq 0}$ é uma sequência de Cauchy.*
*Como $X$ é um espaço completo então existe $p \in X$ tal que $(f^n(x_0))_{n\geq 0}$ converge a $p$. Pela continuidade da $f$ notamos que*

$$f(p) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = p.$$

*Logo $p$ é um ponto fixo para $f$. Tal $p$ é único ponto fixo para $f$. Se $(X, f)$ tivesse outro ponto fixo $q$, $f(q) = q$. Teríamos $d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq \lambda d(p, q)$. Assim $(1-\lambda)d(p, q) \leq 0$ logo $d(p, q) = 0$ e $p = q$ pois $1 - \lambda > 0$.*

No exemplo anterior notamos que ele tem um único ponto fixo, é mas que isso o único ponto periódico é seu ponto fixo, e que toda orbita converge para ele. Isto motiva a seguinte definição

**Definição 1.1.3.** *Se $(X, f)$ um sistema dinâmico. Dizemos que um ponto peri dico $p \in X$ de período $j$ é um* ***ponto atrator*** *se existe uma vizinhança $U$ de $p$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f^{jn}(x) = p \text{ para todo } x \in U.$$

Damos mas um exemplo onde a dinâmica esta totalmente determinada.

**Exemplo 1.1.4.** *Seja o sistema dinâmico $(\mathbb{R}, f)$ definido por $f(x) = 2x(1-x)$. Notamos que o gráfico de $f$ é uma parábola invertida com máximo em $x = \frac{1}{2}$ e valor máximo $\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Também resolvendo $x = f(x) = 2x(1-x)$ encontramos os pontos fixos de $f$, os quais são $f(0) = 0$ e $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.*

*Se* $x < 0$ *notamos que* $f(x) = 2x(1-x) < x$*. Assim temos* $f^n(x) < \cdots < f(x) < x$*. Logo* $f^n(x) \to -\infty$ *quando* $n \to \infty$*. Porque, caso contrario temos que* $f^n(x) \to p$ *quando* $n \to \infty$*, teríamos que* $p$ *é um ponto fixo*

$$f(p) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = p \tag{1.1}$$

*o qual é um absurdo pois* $p < 0$ *e os pontos fixo de* $f$ *são* $0$ *e* $\frac{1}{2}$*. Se* $x > 1$ *temos que* $f(x) < 0$ *e pelo feito anteriormente* $f^n(x) \to -\infty$ *quando* $n \to \infty$*.*

*Se* $0 < x < \frac{1}{2}$ *temos que* $x < 2x(1-x) = f(x) \leq \frac{1}{2}$*. Assim deduzimos que* $(f^n(x))_{n\geq 0}$ *é uma sequência convergente pois é uma sequência crescente e limitada,* $x < f(x) < \cdots < f^n(x) \leq \frac{1}{2}$*. Logo existe* $p > 0$ *tal que* $f^n(x) \to p$ *quando* $n \to \infty$*. Por* (1.1) *sabemos que* $p$ *é um ponto fixo logo* $p = \frac{1}{2}$*.*

*Se* $\frac{1}{2} < x < 1$ *temos que* $0 < 2x(1-x) = f(x) \leq \frac{1}{2}$*. Logo pelo feito no paragrafo anterior temos que* $f^n(x) \to \frac{1}{2}$ *quando* $n \to \infty$*.*

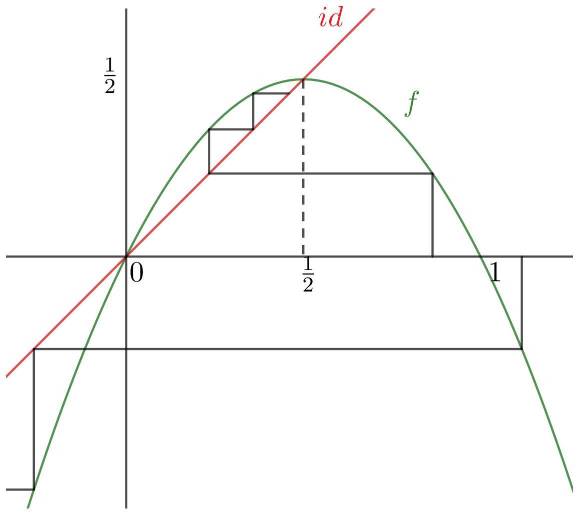


Figura 1.1: Gráfico de $f(x) = 2x(1-x)$ mostrando o comportamento assintotístico de suas órbitas

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \textit{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{se } x = 0, 1 \\ -\infty & \textit{se } x < 0 \textit{ ou } x > 1. \end{cases}$$

No exemplo anterior notamos que tem dois pontos fixos, $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$, com $x = \frac{1}{2}$ sendo um ponto atrator. Tambem notamos que $x = 0$ não pode ser um ponto atrator.

## 1.2 Mais Exemplos de Sistemas Dinâmicos

Nesta seção apresentamos alguns exemplos de sistemas dinâmicos aos quais ilustraram as definições e conceitos mais para frente.

**Exemplo 1.2.1.** ***A tenda****. Seja o intervalo* $[0, 1]$ *com a métrica usual. Consideremos a função* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *dada por* $f(x) = 1 - |1 - 2x|$ *a qual vemos que é continua. O sistema dinâmico* $([0, 1], f)$ *é chamado* ***a tenda****.*

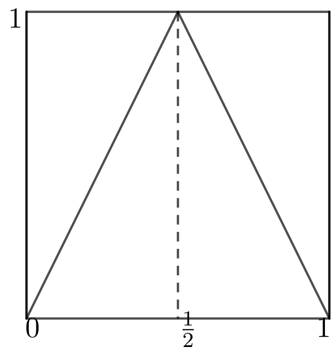

Figura 1.2: Mapa Tenda $f(x) = 1 - |1 - 2x|$

**Exemplo 1.2.2.** ***Rotações do círculo***. *Definimos em $\mathbb{R}$ a seguinte relação de equivalência*

$$x \sim y \text{ se, e somente se, } x - y \in \mathbb{Z}.$$

*Seja $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ o quociente de $\mathbb{R}$ por esta relação. Munido com a topologia quociente. Podemos identificar $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ por meio da função*

$$\Phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1; [x] \mapsto e^{2\pi xi}.$$

*Notamos que $\Phi$ esta bem definida, já que se $x, x_1 \in [x]$ então $x - x_1 = k$ com $k \in \mathbb{Z}$ assim $\Phi(x) = e^{2\pi xi} = e^{2\pi(x_1+k)i} = e^{2\pi x_1 i}e^{2\pi ki} = e^{2\pi x_1 i} = \Phi(x_1)$. Não é difícil ver que $\Phi$ é um homeomorfismo. Como $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é grupo abeliano com a operação $[x] + [y] = [x + y]$ se segue que $\Phi$ é um homomorfismo de grupos já que $\Phi([x] + [y]) = \Phi([x + y]) = e^{2\pi(x+y)i} = e^{2\pi xi}e^{2\pi yi} = \Phi([x])\Phi([y])$.*

*De fato a topologia quociente de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é equivalente a topologia gerada pela métrica*

$$d([x], [y]) = x - y \mod \mathbb{Z}.$$

*Pode-se verificar facilmente que $d$ é uma métrica em $S^1$, transformando-a em um espaço métrico compacto. Geometricamente, em $S^1$, a métrica induzida entre dois pontos no círculo é menor comprimento de arco entre eles.*

*Agora para $\theta \in \mathbb{R}$ definimos a rotação ângulo $\theta$ por*

$$R_\theta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ ; \ [x] \mapsto R_\theta([x]) = [x + \theta].$$

*Notamos que $R_\theta$ é continua, de fato é uma isometria. O sistema dinâmico $(S^1, R_\theta)$ é chamado* ***rotação*** *de ângulo $\theta$. Por comodidade escreveremos os elementos de $S^1$ como $x$ e as rotações como $R_\theta(x) = x + \theta \mod 1$.*

**Exemplo 1.2.3.** ***O shift.*** *Seja $\Sigma$ o espaço das sequências formada por zero e um, isto é,*

$$\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\geq 1} | x_i = 0 \text{ ou } 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

*Escrevemos os elementos de $\Sigma$ por $t = (t_n)_{n\geq 0}$. Em $\Sigma$ consideramos a seguinte métrica*

$$d(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2} \text{ onde } s = (s_n)_{n\geq 0} \ , t = (t_n)_{n\geq 0} \in \Sigma.$$

*Notamos que $d$ esta bem definida já que $d(s, t)$, para todo $s, t \in \Sigma$, está limitada pela série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. Pode-se ver que $d$ é de fato uma métrica. Além disso temos o seguinte lema.*

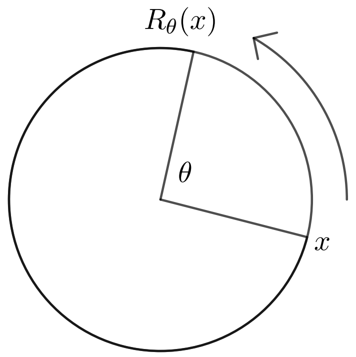


Figura 1.3: Rotação, $R_\theta(x) = x + \theta$ mod 1.

**Lema 1.2.4.** *Sejam $t, s \in \Sigma$ e $N \in \mathbb{N}$. Se $t_i = s_i$ para $i = 0, 1 \ldots, N$ então $d(t, s) \leq \frac{1}{2^N}$. Reciprocamente se $d(t, s) < \frac{1}{2^N}$ então $t_i = s_i$ para $i = 0, 1 \ldots, N$.*

*Demonstração.* Se $t_i = s_i$ para $i = 0, 1 \ldots, N$ temos que

$$d(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}.$$

Se $d(t, s) < \frac{1}{2^N}$ então $t_i = s_i$ para $i = 0, 1 \ldots, N$ porque se tivéramos $t_j \neq s_j$ para algum $j$, $0 \leq j \leq N$, temos que $d(t, s) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^N}$ o qual é absurdo pois $d(t, s) < \frac{1}{2^N}$. Logo $t_i = s_i$ para $i = 0, 1 \ldots, N$. □

*Agora consideramos a função $\sigma : \Sigma \to \Sigma$; $(t_n)_{n\geq 0} \mapsto \sigma((t_n)_{n\geq 0}) = (t_{n+1})_{n\geq 0}$. Esta função esquece o primeiro termo da sequência $(t_n)_{n\geq 0}$. Também notamos que $\sigma$ é uma função sobrejetiva e a preimagem de cada ponto em $\Sigma$ tem 2 elementos.*

**Proposição 1.2.5.** *$\sigma$ é continua.*

*Demonstração.* Dado $\varepsilon > 0$ e $s \in \Sigma$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Tomando $\delta := \frac{1}{2^{n+1}}$. Temos que se $t \in \Sigma$ tal que $d(t, s) < \frac{1}{2^{n+1}}$ implica $t_i = s_i$ para $i = 0, 1 \ldots, n+1$, pelo Lema 1.2.4. Logo $d(\sigma(t), \sigma(s)) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Portanto $\sigma$ é continua. □

*O sistema dinâmico $(\Sigma, \sigma)$ é chamado* ***o shift****.*

## 1.3 $\omega$-limite

Estamos interessados em saber o comportamento assintótico das órbitas de um sistema dinâmico. Para este fim estudamos o conjunto $\omega$-limite de um ponto. Ele guarda o comportamento assintotístico da orbita do ponto. Isto é, nos diz que acontece com um ponto quando fazemos tender as iterações ate infinito, esta não tem que convergir necessariamente.

**Definição 1.3.1.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico.*

- *Seja $(x_n)_{n\geq 0}$ uma sequência em $X$. Dizemos que $a \in X$ é um* ***valor de aderência*** *para $(x_n)_{n\geq 0}$ quando alguma subsequência de $(x_n)_{n\geq 0}$ converge para $a$.*

- *Dado $x \in X$ o conjunto $\omega(x, f)$ formado pelos valores de aderência da orbita de $x$ e é chamado **$\omega$-limite** de $x$ pela $f$, simbolicamente*

$$\omega(x, f) := \{y \in X \mid \exists (n_k)_{k\geq 0} \text{ crescente tal que } \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y\}.$$

**Observação 1.3.2.** *Se $X$ é um espaço compacto então $\omega(x, f)$ é não vazio para todo $x \in X$.*

Seguimos mostrando algumas propriedades do conjunto $\omega$-limite

**Lema 1.3.3.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico, com $X$ compacto, $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$. Então*

**i)** *$\omega(x, f)$ é um conjunto fechado e fortemente invariante,*

**ii)** $\omega(f^n(x), f) = \omega(x, f)$,

**iii)** $\omega(f^n(x), f) = f^n(\omega(x, f))$,

**iv)** $\omega(x, f) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \omega(f^i(x), f^n)$,

**v)** *Se $\omega(x, f)$ é infinito, então $\omega(f^i(x), f^n)$ é infinito para todo $i \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Os itens *i)* a *iv)* podem ser provadas a partir da definição e da observação que se $y \in \omega(x, f)$ então existe $(n_k)_{k\geq 0}$, sequência de números naturais crescente, tal que $f^{n_k}(x)$ converge a $y$ quando $k$ tende a $\infty$. Por compacidade, passando a uma subsequência de ser necessário, temos que $f^{n_k-1}(x)$ converge a $z$ para algum $z \in X$. Logo por continuidade temos que $f(z) = y$. A parte *v)* se segue-se de *iii)* e *iv)*. □

**Lema 1.3.4.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico e $x \in X$. Se $\omega(x, f)$ é um conjunto finito então é uma orbita periódica.*

*Demonstração.* Se $\omega(x, f)$ tem um só elemento temos que este é um ponto fixo porque $\omega(x, f)$ é fortemente invariante lema 1.3.3. Suponhamos que o cardinal de $\omega(x, f)$ é maior ou igual que 2. Seja $F$ um subconjunto próprio não vazio $\omega(x, f)$. Se definimos $F' := \omega(x, f) \setminus F$ temos que $F, F'$ são subconjuntos finitos, fechados, de $X$ então existem subconjuntos abertos $U, U'$ de $X$ tal que $F \subseteq U$,$F' \subseteq U'$ e $\overline{U} \cap \overline{U'} = \emptyset$ (isto porque $X$ ao ser um espaço métrico é um espaço normal). Como $\omega(x, f) = F \cup F'$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ temos que $f^n(x) \in U \cup U'$ assim existe uma sequência crescente de números naturais $(n_k)_{k\geq 0}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $f^{n_k}(x) \in U$ e $f^{n_k+1}(x) \in U'$. Por compacidade, passando a uma subsequência se é necessário, temos que exite $a \in X$ tal que $f^{n_k}(x) \to a$ quando $k \to \infty$, logo $a \in \omega(x, f) \cap \overline{U} = F$ e por a continuidade da $f$, $f(a) \in \omega(x, f) \cap F'$. Assim $f(F) \cap F' \neq \emptyset$ e $\omega(x, f)$ não contém subconjuntos próprios invariantes. Isto implica que $f$ age como uma permutação cíclica em $\omega(x, f)$ e portanto $\omega(x, f)$ é uma orbita periódica. □

## 1.4 Conjugações e Semi-conjugações

Um fato importante em sistemas dinâmicos é saber quando a estrutura das orbitas é essencialmente a mesma. O conceito que reflete é a conjugação topológica.

**Definição 1.4.1.** *Sejam $(X, f)$ e $(Y, g)$ dois sistemas dinâmicos dizemos que $f$ e $g$ são **topologicamente conjugados** se existe $h : X \to Y$ homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$. O homeomorfismo $h$ é chamado **conjugação topológica**.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 1.4: Conjugação entre $(X, f)$ e $(Y, g)$.

É natural pensar que as propriedades preservadas pela $h$ sejam as propriedades dinâmicas do sistema. Um exemplo de uma propriedade dinâmica é a existência de pontos periódicos. Se temos dois sistemas dinâmicos $(X, f)$ e $(Y, g)$ que são topologicamente conjugados, seja $h : X \to Y$ a conjugação. Se $p$ é um ponto fixo para $f$, $f(p) = p$, então $h(p)$ é um ponto fixo para $g$. Já que $h(p) = h(f(p)) = g(h(p))$. Da mesma forma se $q$ é um ponto periódico para $f$ então $h(q)$ é um ponto periódico para $g$ com o mesmo período de $q$. Logo temos uma correspondência bijetiva entre os pontos periódicos de $f$ e os pontos periódicos de $g$. Por isto juntando com o $\omega$-limite é natural pensar que o $\omega$-limite de um ponto em $X$ é enviado no $\omega$-limite de sua imagem. Assim continuamos com a seguinte proposição.

**Proposição 1.4.2.** *Sejam $(X, f)$ e $(Y, g)$ dois sistemas dinâmicos topologicamente conjugados. Seja $h : X \to Y$ a conjugação. Então $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$ para todo $x \in X$.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que $h(\omega(x, f)) \subseteq \omega(h(x), g)$. Seja $h(z) \in h(\omega(x, f))$. Como $z \in \omega(x, f)$ existe uma sequência de números naturais crescente $\{n_k\}_{k \geq 1}$ tal que $f^{n_k}(x) \to z$ quando $k \to \infty$, por continuidade da $h$ temos que $h(z) \in \omega(h(x), g)$ já que $g^{n_k}(h(x)) = h(f^{n_k}(x)) \to h(z)$ quando $k \to \infty$. Usando o mesmo argumento para $h^{-1}$ temos $h^{-1}(\omega(y, g)) \subseteq \omega(h^{-1}(y), f)$ para todo $y \in Y$. Logo para $y = h(x)$ e aplicando $h$ temos a outra contenença. □

Um argumento permite decidir se dois sistemas dinâmicos não são conjugados rapidamente é a cardinalidade de seus pontos periódicos para um período fixo. Por exemplo, os exemplos 1.1.2 e 1.1.4 não são topologicamente conjugados pois a cardinalidade de seus pontos fixos são diferentes.

Outro exemplo de propriedade dinâmica é que exista $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$ (ser transitivo uma propriedade dinâmica que sera estudada no seguente capítulo). Se $(X, f)$ e $(Y, g)$ dois sistemas dinâmicos topologicamente conjugados, com $h : X \to Y$ a conjugação entre $f$ e $g$. Pela proposição 1.4.2 notamos que esta propriedade é preservada pela conjugação pois se $\omega(x, f) = X$ implica $Y = h(X) = h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$.

Algumas vezes saber se dois conjuntos são homeomorfos não é uma pergunta fácil de responder. Então perguntar se dois sistemas dinâmicos topologicamente conjugados pode ser uma pergunta mais difícil de responder. Mas saber que tem-se uma função continua sobrejetora que satisfaz o diagrama da figura 1.4. Sabendo informação da dinâmica de $(X, f)$ pode dar informação sobre a dinâmica de $(Y, g)$.

**Definição 1.4.3.** *Sejam $(X, f)$ e $(Y, g)$ dois sistemas dinâmicos dizemos que $f$ e $g$ são* ***topologicamente semi-conjugados*** *se exite $h : X \to Y$ função continua sobrejetora tal que $h \circ f = g \circ h$. A função $h$ é chamada* ***semi-conjugação****.*

Em este caso se temos um ponto periódico $x \in X$ de $f$ de período $n$ então sabemos que $h(p)$ é um ponto periódico para $g$ e $n$ é u múltiplo do período de $h(p)$. Também notamos que se o sistema dinâmico $(X, f)$ é transitivo então o sistemas dinâmico $(Y, g)$ também é transitivo. E temos uma proposição parecida proposição.

**Proposição 1.4.4.** *Sejam $(X, f)$ e $(Y, g)$ dois sistemas dinâmicos topologicamente semi-conjugados. Seja $h : X \to Y$ a semi-conjugação. Então $h(\omega(x, f)) \subseteq \omega(h(x), g)$ para todo $x \in X$.*

A demostração é a mesma que da proposição 1.4.2. Agora damos um exemplo de uma semi-conjugação.

**Exemplo 1.4.5.** *Existe uma semi-conjugação entre os sistemas dinâmicos mapa shift e mapa tenda.*
*Sejam $I_0 = [0, \frac{1}{2}]$ e $I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$ subintervalos de $[0, 1]$. Notamos que para qualquer subintervalo $J$ contido em $[0, 1]$ então $f^{-1}(J)$ são dois subintervalos $J_0, J_1$ de $[0, 1]$ tal que $J_0 \subseteq I_0$ e $J_1 \subseteq I_1$ e de comprimento a metade do comprimento de $J$.*

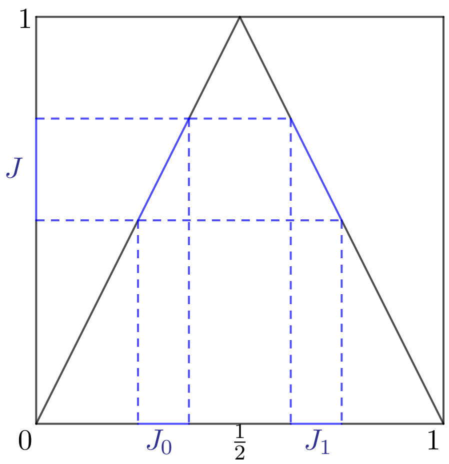


Figura 1.5: pre=imagem do intervalo $J$ pela tenda

*Para $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}$ com $t_i = 0$ ou $1$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Notamos*

$$I_{t_0 t_1 \cdots t_n} := I_{t_0} \cap f^{-1}(I_{t_1}) \cap \cdots \cap f^{-n}(I_{t_n}).$$

*Damos conta que $I_{t_0 t_1 \cdots t_n}$ é um intervalo pois*

$$I_{t_0 t_1 \cdots t_n} = I_{t_0} \cap f^{-1}(I_{t_1 \cdots t_n})$$

*e tem comprimento de $2^{-(n+1)}$. Também notamos que*

$$f(I_{t_0 t_1 \cdots t_n}) \subseteq f(I_{t_0}) \cap f(f^{-1}(I_{t_1})) \cap \cdots \cap f(f^{-n}(I_{t_n})) \subseteq I_{t_1 t_2 \cdots t_n}$$

*Seja a função $h : \Sigma \to [0, 1]$ da seguinte forma para $t = (t_n)_{n \geq 0} \in \Sigma$*

$$h(t) = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{t_0 t_1 \cdots t_n}.$$

*Notamos que $h$ esta bem definida já que é uma intersecção de intervalos encaixados fechados cujo comprimento converge a $0$.*

*Primeiro verificamos que $h \circ \sigma = f \circ h$. Seja $t = (t_n)_{n \geq 0} \in \Sigma$ temos que*

$$f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{t_0 t_1 \cdots t_n}\right) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} f(I_{t_0 t_1 \cdots t_n}) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{t_1 t_2 \cdots t_n}. \tag{1.2}$$

*Em (1.2) temos a igualdade já que em nas interseções temos um so ponto. Assim*

$$h \circ \sigma(t) = h((t_{n+1})_{n \geq 0}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{t_1 t_2 \cdots t_n} = f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{t_0 t_1 \cdots t_n}\right) = f \circ h(t).$$

*Vamos mostrar que $h$ é sobrejetiva. Para $x \in [0,1]$ construímos uma sequência $(x_n)_{n \geq 0}$ de zero e um da seguinte forma*

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{se } f^n(x) \in I_0 \\ 1 & \text{se } f^n(x) \in I_1. \end{cases}$$

*Notamos que $x \in I_{x_0 x_1 \cdots x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $h((x_n))n \geq 0) = x$.*

*Agora mostraremos que $h$ é continua. Dado $t \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n}$. Seja $\delta = \frac{1}{2^n}$. Se $d(t,s) < \delta$ então temos que $t_i = s_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, Lema 1.2.4. Logo $h(t), h(s) \in I_{t_0 t_1 \cdots t_n}$, assim $|h(t) - h(s)| \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon$.*

*Portanto $h$ é uma semi-conjugação.*

# Capítulo 2

# Transitividade e outras formas de Mistura

Neste capitulo começamos estudando o conceito de transitividade o qual diz que existe um ponto cujo $\omega$-limite é todo o espaço, ou seja existe um ponto com orbita densa. Mostramos que num sistema dinâmico onde o espaço é de Baire, separável e sem pontos isolados então ter uma orbita densa pode ser caracterizada de forma topológica. Uma consequência importante da transitividade é que o sistema dinâmico será irredutível no sentido que não pode ser decomposta em duas subdinâmicas, isto é, que não existem dois subconjuntos não vazios, disjuntos, fechados invariantes e cuja união seja todo o espaço. Também estudamos outras formas de mistura mais fortes como sistemas topologicamente mixing, weakly mixing e exatos e mostramos as respectivas implicações. Depois vemos a definição de Caos de Davaney. Na seção final vemos um teorema que descreve a estrutura dos mapas transitivos em espaços compactos localmente conexos.

## 2.1 Sistemas Transitivos

Vimos que num sistema dinâmico $(X, f)$. Se $X$ é compacto então $\omega(x, f) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Um caso particular importante é quando existe $x_0$ em $X$ tal que sua orbita é densa em todo o espaço, isto é, $\omega(x_0, f) = X$. Alguns autores tomam esta como a definição de transitividade. Mostramos que transitividade pode ser caracterizada de maneira topológica quando $X$ é um espaço de Baire, separável e não tem pontos isolados.

**Definição 2.1.1.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico. Dizemos que ele é/tem:*

**(TT)** ***Topologicamente transitivo*** *se para todo par de subconjuntos abertos não vazios $U$,$V$ de $X$ existe um numero natural $n$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ (ou equivalentemente $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$).*

**(OD)** ***Orbita densa*** *existe $x_0 \in X$ tal que sua orbita é densa em $X$.*

No seguinte teorema mostra a equivalência destas definições sobre certas condições.

**Teorema 2.1.2.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico.*

**a)** *Se $X$ é um espaço de Baire separável então $(TT)$ implica $(OD)$.*

**b)** *Se $X$ não tem pontos isolados então $(OD)$ implica $(TT)$.*

*Demonstração.* a) Pela hipótese $(TT)$ dados $U$,$V$ subconjuntos abertos não vazios de $X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$. Logo, $\cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ é denso em $X$ pois intersecta a todos os abertos não vazios de $X$. Como $X$ é separável (lembremos que num espaço métrico ser separável e segundo contável são equivalentes) logo, existe uma base numerável para sua topologia, seja $U_0, U_1, \dots$ esta base, pela observação feita anteriormente temos que $\cup_{n\geq 0} f^{-n}(U_k)$ é um conjunto aberto e denso para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora como $X$ é um espaço de Baire temos que

$$\mathcal{G} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} f^{-n}(U_k)$$

é denso em $X$. Para $x \in \mathcal{G}$ temos que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U_k$. Logo a orbita de $x$ é densa em $X$ porque esta intersecta a $U_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\{U_k\}_{k\geq 1}$ que é uma base para a topologia de $X$.

b) Por hipótese sabemos que existe $x \in X$ no qual sua orbita é densa em $X$. Se $\omega$-limite é finito então pelo lema 1.3.4 temos que $X = \omega(x, f) = \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ onde $p$ é o período de $x$, então $X$ é finito e teria pontos isolados, isto porque $X$ é um espaço métrico, o qual é uma contradição. Logo temos que $X$ é um conjunto infinito e sem pontos isolados.

Para $U$,$V$ subconjuntos abertos não vazios de $X$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in U$ pela hipótese $(OD)$. O conjunto $V \setminus \{x, f(x), \dots, f^n(x)\}$ é aberto e não é vazio porque $X$ não tem pontos isolados já que se $V \setminus \{x, f(x), \dots, f^n(x)\}$ for vazio então temos que $V$ é um conjunto finito aberto logo como $X$ é um espaço métrico teríamos que $X$ tem pontos isolados. Assim existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in V \setminus \{x, f(x), \dots, f^n(x)\}$ logo $m > n$ e $f^m(x) = f^{m-n}(f^n(x)) \in f^{m-n}(U) \cap V$ e por tanto $f$ satisfaz-se $(TT)$. □

**Observação 2.1.3.**

- *Se $X$ é um espaço compacto então ele já é um espaço de Baire separável. Então a fim que as duas definições $(TT)$ e $(OD)$ sejam equivalentes basta que $X$ seja um espaço compacto sem pontos isolados.*

- *Se $X$ é um conjunto compacto sem pontos isolados. Pela parte a) notamos que a existência de um ponto com orbita densa implica que o conjunto de pontos com a propriedade de ter orbita densa é um residual, isto é, interseção enumerável de abertos densos. Em particular denso.*

**Definição 2.1.4.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico.*

- *Dizemos que $(X, f)$ é um sistema dinâmico* ***estândar*** *quando $X$ é um espaço compacto sem pontos isolados.*

- *Dizemos que $(X, f)$ é* ***totalmente transitiva*** *se $(X, f^n)$ é topologicamente transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Agora mostraremos alguns exemplos de mapas topologicamente transitivos e totalmente transitivos.

**Exemplo 2.1.5** (As rotações com ângulo irracional são topologicamente transitivas)**.** *Seja $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Consideramos a rotação com ângulo $\theta$, $(S^1, R_\theta)$.*
*Para $x \in S^1$ a orbita de $x$ é um conjunto infinito. De fato, se a orbita de $x$ fosse*

*um conjunto finito. Então seu $\omega$-limite é a mesma orbita e pelo lema 1.3.4 é uma orbita periódica, logo existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = R_\theta^k(x) = x + k\theta \mod 1$ o que implica que $\theta = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$, para algum $m \in \mathbb{Z}$, o qual é um absurdo pois $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*
*Como $S^1$ é um espaço compacto então a orbita de $x$ tem um valor de aderência. Passando a uma subsequência, se for necessário, $(R_\theta^k(x))_{k\geq 0}$ é convergente. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq N$ então $|R_\theta^m(x) - R_\theta^n(x)| < \varepsilon$. Assim temos que*

$$0 < |R_\theta^{jN}(x) - R_\theta^{(j+1)N}(x)| < \varepsilon \text{ para } j \in \mathbb{N}.$$

*Como os pontos $x, R_\theta^N(x), R_\theta^{2N}(x), \ldots$ são uma partição do círculo em intervalos de comprimento menor a $\varepsilon$ e o $\varepsilon$ é arbitrário então a orbita de $x$ é densa em $S^1$. Portanto $(S^1, R_\theta)$ com $\theta$ irracional é topologicamente transitivo. Além disso notamos que é totalmente transitiva ja que $R_\theta^n = R_{n\theta}$ e $n\theta$ é irracional para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Exemplo 2.1.6** (O shift é topologicamente transitivo)**.** *Para facilitar a compressão escrevemos um ponto $t = (t_n)_{n\geq 0} \in \Sigma$ como $t = t_0t_1t_2\cdots$. Consideremos o ponto $s^*$ construído da seguinte forma primeiro escrevemos $0, 1$ depois todas as combinações possíveis de zero e um de dois dígitos, $00, 01, 10, 11$, depois todas as combinações possíveis de zero e um de três dígitos, $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$ e assim continuamos. Logo,*

$$s^* = \underbrace{01}_{1}\underbrace{00011011}_{2}\underbrace{000001\cdots}_{3}.$$

*A orbita de $s^*$ é densa já que para um $t \in \Sigma$ para $n \in \mathbb{N}$ existe um $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $t$ e $\sigma^m(s)$ tem as mesmos $n$ primeiros termos iguais. Pelo lema 1.2.4 temos que $d(t, \sigma^m(s)) < \frac{1}{2^m}$. Portanto $\sigma$ é topologicamente transitivo.*

**Exemplo 2.1.7** (A tenda é topologicamente transitivo)**.** *Pelo anterior exemplo temos que $\omega(s^*, \sigma) = \Sigma$. Pelo Exemplo 1.4.5 temos que*

$$[0,1] = h(\Sigma) = h(\omega(s^*, \sigma)) \subseteq \omega(h(s^*), f)$$

*logo $\omega(h(s^*), f) = [0,1]$. Portanto o mapa tenda é transitivo.*

O exemplo 1.1.2 não é topologicamente transitivo pois $\omega(x, f) = \{p\} \subsetneq X$ para todo $x \in X$.

O exemplo 1.1.4 também não tem uma orbita densa pois $\omega(x, f) \subseteq \{0, \frac{1}{2}\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Também não é topologicamente transitivo porque se tomamos $(a, b) \subseteq (-\infty, 0)$ e $(c, d) \subseteq (0, 1)$ notamos que $f^n(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora mostraremos que as condições no Teorema 2.1.2 são necessárias.
Em a) consideremos a tenda restringindo a seus pontos periódicos. Um fato que mostraremos mais para frente, proposição 3.5.2, é que na tenda os pontos periódicos são densos em $[0, 1]$. Notamos que $f(Per(f)) = Per(f)$. Como a tenda é topologicamente transitivo então o sistema dinâmico $(Per(f), f\mid_{Per(f)})$ é topologicamente transitivo. Dados $U, V$ abertos não vazios em $Per(f)$ são da forma $U = U_1 \cap Per(f)$ e $V = V_1 \cap Per(f)$ onde $U_1, V_1$ são abertos não vazios em $[0, 1]$. Logo, para $U_1, V_1$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_1 \cap f^{-n}(V_1) \neq \emptyset$ que é aberto. Assim

$$U \cap f^{-n}(V) = U_1 \cap Per(f) \cap f^{-n}(V_1 \cap Per(f)) = U_1 \cap f^{-n}(V_1) \cap Per(f) \neq \emptyset$$

porque $Per(f)$ é denso. Portanto $(Per(f), f\mid_{Per(f)})$ é topologicamente transitivo mas não tem uma orbita densa pois todo ponto é periódico.

Em b) consideremos o seguinte sistema dinâmico.

$$X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} \quad \text{e } f : X \to X; f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, f(0) = 0$$

onde $X$ tem a métrica usual da reta. Notamos que $f$ é continua já que os pontos em $X \setminus \{0\}$ são isolados. Em 0, $f$ é continua pois toda sequência que convergente a 0 tem suas imagens convergindo a $0 = f(0)$. Notamos que o sistema dinâmico $(X, f)$ tem uma orbita densa pois $\omega(1, f) = X$. Mais $(X, f)$ não é topologicamente transitivo pois para os abertos $\{1\}$ e $\{\frac{1}{2}\}$, são abertos porque são pontos isolados, temos que $f^n(\{\frac{1}{2}\}) \cap \{1\} = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quando temos um sistema dinâmico estândar topologicamente transitivo temos dois consequências sobre sua dinâmica. A primeira é que a dinâmica não pode ter pontos periódicos atratores e a segunda é a dinâmica não pode-se quebrar o dividir em duas subdinâmicas. A seguir a proposições que mostram esto.

**Proposição 2.1.8.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico estândar topologicamente transitivo. Então $(X, f)$ não tem pontos periódicos atratores.*

*Demonstração.* Se existisse $p$ ponto periódico atrator de $f$ com período $m$. Temos que existe $U$ vizinhança de $p$ tal que $f^{nm}(x) \to p$ quando $n \to \infty$ para todo $x \in U$. Notamos que $\omega(x, f) = Orb(p, f)$ para todo $x \in U$, já que pela continuidade de $f^k$ temos que $f^{nm+k}(x) \to f^k(p)$ quando $n \to \infty$. Logo $(X, f)$ não é topologicamente transitivo pois $U$ é um aberto não vazio tal que não intersecta o conjunto dos pontos com orbita densa o qual é denso observação 2.1.3. $\square$

**Proposição 2.1.9.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico topologicamente transitivo. Se $F$ é um subconjunto não vazio, fechado, invariante de $X$. Então $Int(F) = \emptyset$ ou $F = X$.*

*Demonstração.* Vamos a fazer a prova por contradição. Seja $F$ un subconjunto próprio de $X$ não vazio, fechado, invariante. Então temos $Int(F)$ e $F^c$ são abertos diferentes de vazio. Assim temos que $f^n(Int(F)) \cap F^c = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o qual é um absurdo pois $(X, f)$ é topologicamente transitivo. $\square$

**Corolário 2.1.10.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico topologicamente transitivo. Então não existem subconjuntos $A, B$ não vazios, fechados, invariantes tal que sua união seja $X$.*

Agora fechamos esta seção com algumas propriedades dos mapas transitivos.

**Proposição 2.1.11.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico estândar topológico transitivo. Então $f$ é sobrejetiva.*

*Demonstração.* Dado $y \in X$. Pela observação 2.1.3 existe $x \in X$ tal que a orbita de $x$ é densa em $X$. Logo existe $(n_k)_{k\geq 0}$ sequência crescente de números naturais tal que $f^{n_k}(x) \to y$ quando $k \to \infty$. Tomando o conjunto $\{f^{n_k-1}(x)\}_{k\geq 0}$ pela compacidade de $X$ tem uma subsequencia convergente, assim temos que $f^{n_{k_j}-1}(x) \to z$ quando $j \to \infty$. Assim pela continuidade de $f$ temos que $f^{n_{k_j}}(x) \to f(z) = y$ quando $j \to \infty$. Portanto $f$ é sobrejetiva. $\square$

**Proposição 2.1.12.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico estândar topologicamente transitivo. Para $U$ subconjunto de $X$ com interior não vazio então sua imagem um é um ponto.*

*Demonstração.* Vamos fazer esta prova por contradição. Seja $U$ subconjunto de $X$ com interior não vazio tal que sua imagem é um só ponto, $f(U) = \{y\}$. Pela observação 2.1.3 temos que o conjunto com orbita densa é denso. Seja $x \in Int(U)$, tal que la orbita de $x$ é densa em $X$. Pelo lema 1.2.4 sabemos que $f(x) = y$ também tem orbita densa em $X$ logo exite $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ tal que $f^n(y) \in Int(U)$, assim $f^{n+1}(y) = y$ o qual é uma contradição porque $y$ tem orbita densa em $X$ que é infinito pois $X$ não tem pontos isolados. $\square$

## 2.2 Sistemas Minimais

Um ponto cuja orbita é densa no espaço é chamado um ponto transitivo. Como vimos na seção anterior só basta com a existência de um ponto para que o mapa seja transitivo e que o conjunto de pontos transitivos seja denso no espaço. Quando num sistema acontece que todos seus pontos são pontos transitivos o sistema sera chamado sistema minimal.

**Definição 2.2.1.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico topologicamente transitivo é dito* ***minimal*** *quando para todo $x$ em $X$ sua orbita é densa e $x$ tal é dito ponto transitivo. Simbolicamente*

$$\omega(x, f) = X \text{ para todo } x \in X$$

Um fato que acontece com os sistemas minimais é que os únicos conjuntos fechados e invariantes são vazio e todo espaço.

**Proposição 2.2.2.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico minimal. Então se $F$ é fechado invariante $F = \emptyset$ ou $F = X$.*

*Demonstração.* Seja $F$ um subconjunto não vazio, fechado, invariante de $X$. Existe $x \in F$ tal que $Orb(x, f) \subseteq F$ pois $F$ é invariante. Também temos que $\overline{Orb(x, f)} \subseteq F$ pois $F$ é fechado. Como $(X, f)$ é minimal temos que $X = \overline{Orb(x, f)} \subseteq F$. Portanto $X = F$. $\square$

Nesta seção veremos algo interessante que acontece com os sistemas que são transitivos é que o conjunto dos pontos que não são transitivos é vazio ou é denso no espaço.

Um exemplo de um sistema dinâmico minimal são as rotações no circulo com ângulo irracional (exemplo 1.2.2). Já que em ele notamos que $x$ pôde ser arbitrário.
Um exemplo de um sistema dinâmico que não seja minimal, mais se transitivo, é qualquer sistema dinâmico com pontos periódicos. O shift (exemplo 1.2.3) não é minimal já que tem pontos periódicos pois seja $p = (p_n)_{n \geq 0}$ tal que $p_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $\sigma(p) = p$.

**Definição 2.2.3.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico. Dizemos que $x \in X$ é um* ***ponto transitivo*** *se sua orbita é densa no espaço. Isto é, $\omega(x, f) = X$. Escrevemos o conjunto de todos os pontos transitivos por $TR(f)$.*

Se $(X, f)$ é um sistema dinâmico, com $X$ compacto, topologicamente transitivo então $TR(f)$ é não vazio. Pela observação 2.1.3 ele denso em $X$. Um fato interessante que acontece com os sistemas dinâmico é que o conjunto $X \setminus TR(f)$ é denso ou é vazio, se $X \setminus TR(f)$ é vazio implica que é sistema é minimal.

**Teorema 2.2.4.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico, com $X$ compacto. Então $X \setminus TR(f)$ é vazio, o sistema é minimal, ou $X \setminus TR(f)$ é denso.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que dado qualquer aberto de $X$ o conjunto $X \setminus TR(f)$ o intersecta. Para isto mostraremos que dado $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ e $a \in X$ para bola $B(a, \varepsilon)$ existe $x \in X$ e uma sequência de números naturais $(n_k)_{k \geq 0}$ tais que

$$d(a, f^{n_k}(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } d(a, f^{n_k+j}(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } j = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.1}$$

E pela compacidade de $X$ a sequência $(f^{n_k}(x))_{k \geq 0}$ tem uma subsequência convergente. Seja $(f^{n_{k_l}}(x))_{l \geq 0}$ esta subsequência e $x_0$ o ponto para o qual converge. Pela equação (2.1) temos que

$$d(a, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } d(a, f^j(x_0)) \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } j = 1, 2, \ldots.$$

Logo $x_0 \in B(a, \varepsilon) \cap X \setminus TR(f)$ porque a orbita de $f(x_0)$ não intersecta $B(a, \frac{\varepsilon}{2})$. O que termina a prova.

Agora vamos mostrar que dado $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ e $a \in X$ para bola $B(a, \varepsilon)$ existe $x \in X$ e uma sequência de números naturais $(n_k)_{k \geq 0}$ que satisfazem (2.1).

Primeiro vamos sair dos casos triviais. Se o sistema $(X, f)$ não é topologicamente transitivo então $X \setminus TR(f) = X$ e satisfaz-se trivialmente o teorema. Se $(X, f)$ é minimal então $X \setminus TR(f) = \emptyset$ e o teorema satisfaz-se.

Supomos que o sistema $(X, f)$ é topologicamente transitivo. Como $f$ não é minimal existe $y \in X$ tal que $\omega(y, f)$ esta estritamente contido em $X$, dito de outro jeito $y \in X \setminus TR(f)$. Notamos que $f^n(y) \in X \setminus TR(f)$ porque $\omega(y, f) = \omega(f^n(y), f)$ (lema 1.2.4-*ii*)). Se a orbita de $y$ intersecta a bola $B(a, \varepsilon)$ não há nada a provar porque existiria $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) \in B(a, \varepsilon) \cap X \setminus TR(f)$.

Agora suponhamos que a orbita de $y$ não intersecta $B(a, \varepsilon)$, $d(a, f^n(y)) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $X$ é compacto e é $f$ contínua então $f$ é uniformemente contínua, o mesmo acontece para $f^n$. Logo para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se

$$d(x, z) < \delta \text{ implica } d(f^i(x), f^i(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall \ \ i = 1, 2 \ldots, k \ \forall x, z \in X. \tag{2.2}$$

Como $(X, f)$ é topologicamente transitivo implica que $TR(f)$ é denso, observação 2.1.3. Logo existe $x \in B(a, \varepsilon) \cap TR(f)$. Como a orbita de $x$ é densa em $X$ para $B(y, \delta)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in B(y, \delta)$ logo usando (2.2), em particular para $y$, temos que

$$d(f^i(y), f^{n+i}(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Pela desigualdade triangular temos

$$\varepsilon \leq d(a, f^j(y)) \leq d(a, f^{n+j}(x)) + d(f^{n+j}(x), f^j(y)) < d(a, f^{n+j}(x)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim temos

$$d(a, f^{n+j}(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } j = 1, 2, \ldots, k.$$

Agora tomando $j_0 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid d(a, f^j(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } j = i+1, i+2 \ldots, n+k\}$. Notamos que $0 \leq j_0 \leq n$ e $f^{j_0}(x) \in B(a, \frac{\varepsilon}{2})$. Agora variando o $k$ temos construída a sequência que satisfaz (2.1). □

Fechamos esta seção mostrando que para todo sistema dinamico contem um subsistema minimal.

**Proposição 2.2.5.** *Todo sistema dinâmico $(X, f)$, com $X$ compacto, tem um subsistema minimal $(Y, f\mid_Y)$.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{F}$ a coleção de todos os subconjuntos de $X$ fechados e invariantes diferentes de vazio. Este é parcialmente ordenado com o ordem inclusão de conjuntos. Notamos que $\mathcal{F}$ é não vazio pois $X \in \mathcal{F}$. Seja $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma cadeia em $\mathcal{F}$ então $Y = \cap_{\alpha\in J} Y_\alpha$ é fechado e invariante e uma cota inferior de $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ em $(\mathcal{F}, \subseteq)$. Notamos que $Y$ é não vazio já que $Y$ é uma interseção de fechados encaixados em um conjunto compacto. Logo pelo lema de Zorn existe $Y_0$ fechado invariante que é minimal em $(\mathcal{F}, \subseteq)$. O sistema dinamico $(Y_0.f\mid_{Y_0})$ ja que para $y \in Y_0$ temos que $\omega(y, f) \subseteq Y_0$ pois $Y_0$ é invariante e fechado. Como $Y_0$ é compacto pois é um subconjunto fechado de um conjunto compacto. Logo $\omega(y, f)$ é não vazio, observação 1.3.2. Pela minimelidade de $Y_0$ temos que $\omega(y, f) = Y_0$. □

## 2.3 Sistemas Mixing e Weakly Mixing

Nesta seção estudamos dois conceitos mais fortes que o topologicamente transitiva que são topologicamente mixing e topologicamente weakly mixing. Mostramos que topologicamente mixing implica topologicamente weakly mixing e este a sua vez implica totalmente transitivo.

Para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ denotamos a função produto de $f$ $k$-vezes como

$$f^{\times k} := \underbrace{f \times \cdots \times f}_{k-vezes} : X^k \to X^k;\ (x_1, \ldots x_k) \longmapsto f^{\times k}(x_1, \ldots x_k) = (f(x_1), \ldots, f(x_k))$$

onde consideramos $X^k$ com a topologia produto.

**Definição 2.3.1.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico.*

- *Dizemos que $(X, f)$ é **topologicamente weakly mixing** se $(X^2, f^{\times 2})$ é topologicamente transitiva.*
- *Dizemos que $(X, f)$ é **topologicamente mixing** se para qualquer $U$,$V$ subconjuntos abertos não vazios de $X$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.*

**Proposição 2.3.2.** *Seja $(X, f)$ um sistema dinâmico topologicamente mixing então $f$ é topologicamente weakly mixing.*

*Demonstração.* Dados $W, W'$ abertos de $X\times X$. Existem $U$, $V$, $U'$, $V'$ abertos de $X$ tal que $U\times V$,$U'\times V'$ estão contidos em $W$,$W'$ respetivamente. Como $f$ é topologicamente mixing existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então $f^n(U)\cap U' \neq \emptyset$ e $f^n(V)\cap V' \neq \emptyset$ logo $f^n(W)\cap W' \neq \emptyset$. Portanto o sistema dinâmico $(X, f)$ é topologicamente weakly mixing. □

**Proposição 2.3.3.** *Se o sistema dinâmico $(X, f)$ é topologicamente weakly mixing então $(X^k, f^{\times k})$ é topologicamente transitiva para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 1$.*

*Demonstração.* Para subconjuntos abertos $U$,$V$ de $X$ definimos

$$N(U,V) := \{n \in \mathbb{N} : U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset\}.$$

Sejam $U_1$, $U_2$, $V_1$, $V_2$ subconjuntos abertos não vazios de $X$ como $(X^2, f^{\times 2})$ é topologicamente transitiva então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(U_1 \times V_1) \cap (f \times f)^{-n}(U_2 \times V_2) \neq \emptyset$. Assim temos $U_1 \cap f^{-n}(U_2) \neq \emptyset$ e $V_1 \cap f^{-n}(V_2) \neq \emptyset$. Logo para qualquer $U_1$, $U_2$ subconjuntos abertos não vazios de $X$ temos que $N(U_1, U_2) \neq \emptyset$.
Agora mostraremos que existem $U$,$V$ abertos tal que

$$N(U,V) \subseteq N(U_1,U_2) \cap N(V_1,V_2).$$

Sejam $U := U_1 \cap f^{-n}(U_2)$ e $V := V_1 \cap f^{-n}(V_2)$ se $m \in N(U,V)$ temos

$$U_1 \cap f^{-m}(V_1) \cap f^{-n}(U_2 \cap f^{-m}(V_2)) = U_1 \cap f^{-n}(U_2) \cap f^{-m}(V_1 \cap f^{-n}(V_2)) \neq \emptyset.$$

Assim temos que $U_1 \cap f^{-m}(V_1) \neq \emptyset$ e $U_2 \cap f^{-m}(V_2) \neq \emptyset$ sempre que $m \in N(U_1,U_2) \cap N(V_1,V_2)$. Agora por indução podemos provar que para $U_1$, ..., $U_k$, $V_1$, ..., $V_k$ abertos não vazios existem $U$, $V$ abertos não vazios tal que

$$N(U,V) \subseteq N(U_1,V_1) \cap \ldots \cap N(U_k,V_k)$$

portanto $(X^k, f^{\times k})$ é topologicamente transitiva. □

**Proposição 2.3.4.** *Seja $(X,f)$ um sistema dinâmico topologicamente weakly mixing então é totalmente transitivo.*

*Demonstração.* Vamos provar que $(X,f)$ é totalmente transitiva utilizando a proposição 2.3.3. Então vamos provar que $(X,f^n)$ é topologicamente weakly mixing para $n \in \mathbb{N}$ fixo, logo $(X,f^n)$ é topologicamente transitiva.
Dados $U$, $U'$, $V$, $V'$ subconjuntos abertos não vazios de $X$. Definimos

$$W := U \times f^{-1}(U) \times \cdots \times f^{-(n-1)}(U) \times V \times f^{-1}(V) \times \cdots \times f^{-(n-1)}(V)$$

e

$$W' := \underbrace{U' \times \cdots \times U'}_{n-vezes} \times \underbrace{V' \times \cdots \times V'}_{n-vezes}.$$

Os conjuntos $W, W'$ são abertos não vazios em $X^{2n}$. Como $(X,f)$ é topologicamente weakly mixing, pela proposição 2.3.3, temos que $(X^{2n}, f^{\times 2n})$ é topologicamente transitivo, assim temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f^{\times 2n})^{-k}(W) \cap W' \neq \emptyset$. Isto implica que

$$f^{-(k+i)}(U) \cap U' \neq \emptyset \text{ e } f^{-(k+i)}(V) \cap V' \neq \emptyset \text{ para } i = 0,1,\ldots,n$$

temos que deve existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $k+i = np$ para algum $i = 0,1,\ldots,n$. Assim para este $i$ temos $((f^n)^{\times 2})^{-p}(U \times V) \cap (U' \times V') \neq \emptyset$ e portanto $(X, f^{n)}$ é topologicamente weakly mixing. □

**Exemplo 2.3.5** (O shift é mixing)**.** *Vamos ver que para $t,s \in \Sigma$ e $\varepsilon, \eta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^n(B(t,\varepsilon)) \cap B(s,\eta) \neq \emptyset$. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Logo se construímos $r \in \Sigma$ do seguinte jeito $r = t_0 t_1 \cdots t_m s_0 s_1 \cdots$, assim pelo lema 1.2.4 temos que $r \in B(t,\varepsilon)$ e $\sigma^{m+1}(r) \in B(s,\eta)$. Portanto $\sigma^{m+1}(B(t,\varepsilon)) \cap B(s,\eta) \neq \emptyset$.*

**Exemplo 2.3.6** (As rotações do circulo não são mixing)**.** *Para* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*. Sabemos que* $(S^1, R_\theta)$ *é transitivo vamos supor que é* $(S^1, R_\theta)$ *mixing e chegaremos a uma contradição. Tomando como* $U = (x, y)$ *o segmento de* $x$ *a* $y$ *com comprimento menor a* $\frac{1}{4}$ *e* $V = (0, z)$ *o segmento de* $0$ *a* $z$ *com comprimento menor a* $\frac{1}{4}$ *temos que existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n \geq N$ *então* $R^n_\theta(U) \cap V \neq \emptyset$*. Se consideramos* $W = \cup_{n=N}^{\infty} R^n_\theta(U)$*. Notamos que* $W$ *é* $R^n_\theta(U)$*-invariante pois*

$$R^n_\theta(W) = R^n_\theta \left( \bigcup_{n=N}^{\infty} R^n_\theta(U) \right) = \bigcup_{n=N+1}^{\infty} R^n_\theta(U) \subseteq W$$

*e é um intervalo de comprimento menor ou igual* $\frac{3}{4}$ *porque* $R_\theta$ *é uma isometria e* $R^n_\theta(U) \cap V \neq \emptyset$ *para* $n \geq N$*, ou seja um conjunto próprio invariante com interior não vazio o qual é uma contradição pois* $(S^1, R_\theta)$ *é transitivo.*

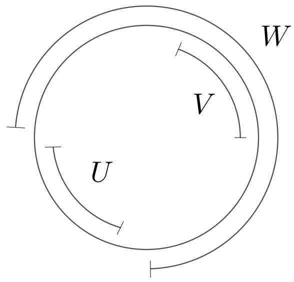


Figura 2.1: $R_\theta$ não é mixing.

## 2.4 Sistemas Exatos

**Definição 2.4.1.** *Dizemos que o sistema dinâmico* $(X, f)$ *é* ***exato*** *quando para todo subconjunto* $U$ *de* $X$ *aberto e não vazio existe* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 1$ *tal que* $f^n(U) = X$

Claramente vemos que se $(X, f)$ é um sistema dinâmico exato então $(X, f)$ é topologicamente mixing.

**Exemplo 2.4.2** (A tenda é exata)**.** *Para* $k \in \mathbb{N}$ *escrevemos os intervalos*

$$I_{l,k} := \left[ \frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k} \right] \text{ para } l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$$

*Vamos provar por indução sobre* $k \in \mathbb{N}$

$$f^k(I_{l,k}) = [0, 1] \text{ para } l = 0, l, \ldots 2^k - 1.$$

*Para* $k = 1$ *é claro que* $f(I_{0,1}) = [0, 1]$ *e* $f(I_{1,1}) = [0, 1]$*. Agora suponha que é valido*

$$f^j(I_{l,j}) = [0, 1] \text{ para } j = 1, 2, \ldots, k \text{ para } l = 0, l, \ldots 2^k - 1.$$

*Vamos ver que para* $j = k + 1$ *também se-satisfaz*

$$f^{k+1}(I_{l,k+1}) = [0, 1] \text{ para } l = 01, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1.$$

*Temos que $I_{l,k+1}$ esta contido em $I_{0,1}$ ou $I_{1,1}$. Se $I_{l,k+1}$ esta contido em $I_{0,1}$ então $l \in \{0,1,\ldots,2^k-1\}$, assim $f(I_{l,k+1}) = I_{l,k}$. Se $I_{l,k+1}$ esta contido em $I_{1,1}$ então $l \in \{2^k, 2^k+1,\cdots,2^{k+1}-1\}$, assim $f(I_{l,k+1}) = I_{l',k}$ para algum $l' \in \{0,1,\ldots,2^k-1\}$. Nos dois casos anteriores temos que $f(I_{l,k+1}) = I_{l',k}$ para algum $l' \in \{0,1,\ldots,2^k-1\}$, logo aplicando a hipótese de indução temos*

$$f^{k+1}(I_{l,k+1}) = f^k(f(I_{l,k+1})) = f^k(I_{l',k}) = [0,1].$$

*Dado $U$ aberto de $[0,1]$ temos que existe $I_{l,k}$ que está contido em $U$ para $k$ suficientemente grande e para algum $l = 0,1,\ldots,2^k-1$. Assim*

$$f^k(U) \supseteq f^k(I_{l,k}) = [0,1].$$

*Portanto $(X,f)$ é exato.*

Exemplo de $f$ transitiva e $f^2$ não é transitiva rotação irracional é um exemplo de totalmente transitivo.

## 2.5 Caos de Devaney

Em 1989 Devaney em [3] deu uma definição caos, quando um sistema é caótico. Um sistema é caótico se satisfaz três condições:$i)$ o sistema dinâmico é topologicamente transitivo transitivo, $ii)$ o conjunto de pontos periódicos é denso no espaço e $iii)$ o sistema dinâmico é sensível nas condições iniciais. No começo se achava que as condições eram independentes mas apos se mostro que $i)$ e $ii)$ implicam $iii)$.

**Definição 2.5.1.** *Dizemos que o sistema dinâmico $(X,f)$ é **sensível as condições iniciais** se existe $\delta > 0$ tal que para todo $x$ em $X$ e para toda $U$ vizinhança de $x$ tem-se que existe $y$ em $U$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$.*

As condições $i)$ e $ii)$ são preservadas por conjugações mas a $iii)$ não é preservada por conjugação $((1,\infty), f)$ definido por $f(x) = 2x$ é sensível. $((0,\infty), g)$ definida por $g(x) = \log 2 + x$ não é sensível, traslação. $((1,\infty), f)$ e $((0,\infty), g)$ são conjugados $h : (1,\infty) \to (0,\infty)$ definida por $h(x) = \log x$ definição de caos de Devaney.

**Definição 2.5.2.** *Dizemos que $(X,f)$ um sistema dinâmico é **caótica** se satisfaz a seguintes condições*

**i)** *$(X,f)$ é topologicamente transitiva.*

**ii)** *O conjunto de pontos periódicos de $f$ é denso em $X$.*

**iii)** *$(X,f)$ é sensível a condições iniciais.*

No começo se acreditava que as três condições eram independentes mas depois descobre-se que $i)$,$ii)$ implicam $iii)$.

**Teorema 2.5.3.** *Seja $(X,f)$ um sistema dinâmico topologicamente transitiva e com os pontos periódicos densos. Então $(X,f)$ é sensível nas condições iniciais.*

*Demonstração.* Primeiro vamos a mostrar o seguinte fato.

FATO: existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $x \in X$, existe um ponto periódico $q \in X$ cuja orbita esta uma distância de $x$ maior ou igual a $\delta_0/2$.
Façamos isto por contradição suponha que para todo $\delta > 0$ existe um $x_0 \in X$ tal que para qualquer ponto periódico $q$ tem-se que a distância de $x_0$ a orbita de $q$ é menor que $\delta/2$. Sejam $q_1$ e $q_2$ pontos periódicos com órbitas disjuntas. Seja $\delta_0 > 0$ a distância entre essas duas órbitas. Como a distância de $x_0$ a orbita de $q_1$ e $q_2$ é menor que $\delta_0/2$ sejam $m, n \in \mathbb{N}$ , com $m, n \geq 1$, tais que a distância de $x$ a $f^m(q_1)$ e $f^n(q_2)$ é menor que $\delta_0/2$ então teríamos

$$\delta_0 \leq d(f^m(q_1), f^n(q_2)) \leq d(f^m(q_1), x) + d(x, f^n(q_2)) < \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0,$$

o qual é uma contradição, ficando desta forma provado o fato.

Agora vamos mostrar que $f$ é sensível as condições iniciais, com constante $\delta := \delta_0/8$. Seja $x \in X$ arbitrário e seja $W$ uma vizinhança qualquer de $x$. Se $U = W \cap B(x, \delta)$ onde $B(x, \delta)$ é a bola aberta de centro $x$ e raio $\delta$, pela densidade dos pontos periódicos de $f$ existe $p \in U$ ponto periódico, digamos de período $n$; pelo fato provado acima, para esse ponto $x$ tomado, existe um ponto periódico $q \in X$ cuja orbita esta a uma distância de $x$ maior ou igual a $a\delta$. Seja

$$V = \cap_{i=0}^{n} f^{-i}(B(f^i(q), \delta)).$$

Temos que $V$ é um aberto e $q$ esta nele. Pela transitividade de $f$, existem $y \in U$ e $k \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$, tal que $f^k(y) \in V$. Seja $j$ a parte inteira de $k/n + 1$, isto é, $\frac{k}{n} + 1 = j + c$ com $c \in [0, 1)$. Então $k + n = nj + nc$, que implica $0 < nj - k \leq n$, e portanto $1 \leq nj - k \leq n$. Disso concluímos que $f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V)$, pois $f^{nj-k}(V)$. Agora,

$$f^{nj-k}(V) \subseteq \bigcap_{i=0}^{n} f^{nj-k}(f^{-i}(B(f^i(q), \delta))) =$$

$$f^{nj-k}(f^{-(nj-k)}(B(f^{nj-k}(q), \delta)) \cap \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \neq nj-k}} f^{nj-k}(f^{-i}(B(f^i(q), \delta)))$$

e esta última expressão esta contida em $B(f^{nj-k}(q), \delta)$. Portanto $f^{nj}(y) \in B(f^{nj-k}(q), \delta)$. Como $p$ tem período $n$, temos que $f^{nj}(p) = p$. Usando a desigualdade triangular,

$$d(x, f^{nj-k}(q)) \leq d(x, p) + d(p, f^{nj}(y)) + d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)),$$

de onde obtemos

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) = d(p, f^{nj}(y)) \geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(x, p) - d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Assim,

$$2\delta < d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) \leq d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)).$$

Temos portanto que $d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) > \delta$ ou $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$, e isso mostra que $f$ é sensível as condições iniciais. □

Agora vejamos que o shift é caótico.

**Exemplo 2.5.4** (O shift é caótico). *Pelo exemplo* 2.1.6 *temos que i) é satisfeita. Para mostrar ii) seja* $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Vamos ver que dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $p \in \Sigma$ *ponto periódico tal que* $d(t,p) < \varepsilon$. *Tomando* $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$ *pelo lema 1.2.4 temos que se* $d(t,s) < \frac{1}{2^N}$ *então* $t_i = s_i$ *para* $i = 0, 1, \ldots, N$. *Assim basta considerar*

$$p = p_0p_1\cdots p_Np_0p_1\cdots p_Np_0p_1\cdots p_N\cdots$$

*o qual é um ponto periódico de período* $N+1$. *Para mostrar iii) notamos que se* $t, s \in \Sigma$ *com* $t \neq s$ *então existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $t_n \neq s_n$ *assim* $d(\sigma^n(t), \sigma^n(s)) \geq 1$. *Logo na definição de sensivel as condições iniciais basta tomar* $\delta = 1$.

Uma observação do anterior exemplo é que a tenda também tem pontos periódicos densos pois é semi-conjugado ao shift. Logo

$$[0,1] = h(\Sigma) = h(\overline{Per(\sigma)}) \subseteq \overline{h(Per(\sigma))} \subseteq \overline{Per(f)}.$$

Um exemplo de uma função que não é caótica são as rotações com angulo irracional pois o conjunto de pontos periódicos é vazio.

## 2.6 Teorema da Descomposição de um Mapa Transitivo.

Nesta seção mostraremos um resultado de Alseda , del Rio, Rodriguez [1]. para mapas transitivos sobre espaços métricos localmente conexos e compactos. Esta é uma generalização de resultado de Bargue e Martin [2] para mapas transitivos sobre o intervalo e complementa o teorema de descomposição de Block para grafos.

**Teorema 2.6.1.** *Seja* $(X, f)$ *um sistema dinâmico topologicamente transitivo e* $X$ *localmente conexo. Então tem-se algum dos seguintes casos.*

**a)** $(X, f)$ *é totalmente transitivo ou*

**b)** *Existe* $k \in \mathbb{N}$, *com* $k > 1$ *e* $X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}$ *subconjuntos fechados conexos de* $X$ *com interior não vazio tal que* $X = \bigcup_{i=0}^{k-1} X_i$, $Int(X_i) \cap X_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$ *e* $f(X_i) = X_{i+1 \ mod\ (k)}$. *Além disso* $f^k|_{X_i}$ *é transitiva para todo* $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

*Demonstração.* Notamos que temos a condição b) quando $(X, f)$ não é totalmente transitiva porque $(X^k, f^k)$ não é topologicamente transitiva (os subconjuntos próprios $X_i$ com $i = 1, 2, \ldots, k$ são fechados, invariantes e tem interior não vazio). Para mostrar o teorema vamos assumir que $(X, f)$ não é totalmente transitiva e provaremos que obrigatoriamente se deve satisfazer *b*).

Se $(X, f)$ é topologicamente transitiva então existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$. Como $(X, f)$ não é totalmente transitiva seja $s \in \mathbb{N}$ o menor número natural positivo tal que $(X, f^s)$ não é topologicamente transitiva, notamos que $s \geq 2$.
Definimos os conjuntos $B_i = \omega(f^i(x), f^s)$ para $i = 0, 1, \ldots, s-1$. Agora vejamos algumas propriedades que satisfazem:

**(b.1)** Os conjuntos $B_i$ são fechados e $f^s(B_i) = B_i$ para $i = 0, 1, \ldots, s-1$.

**(b.2)** $X = \bigcup_{i=0}^{s-1} B_i$.

**(b.3)** $f(B_i) = B_{i+1(mod\ s)}$ para $i = 0, 1, \ldots, s-1$.

**(b.4)** Se $Int(B_i) \cap B_j \neq \emptyset$ para alguns $i, j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ então $B_j \subseteq B_i$.

**(b.5)** Para cada $i = 0, 1, \ldots, s-1$ temos que

$$f^{-1}(Int(B_{i+1(mod\ s)})) \subseteq Int(B_i) \text{ e } f(\partial B_i) \subseteq \partial B_{i+1(mod\ s)}.$$

**(b.6)** Cada $B_i$ tem interior não vazio.

**(b.7)** Se $i \neq j$ então $B_i \neq B_j$.

**(b.8)** $Int(B_i) \cap B_j \neq \emptyset$ se, e somente se, $i = j$.

As propriedades (b.1),(b.2) e (b.3) se seguem das partes $i), iv)$ e $iii)$ do lema 1.2.4 pela definição de $B_i$.

Agora vamos provar (b.4). Se $Int(B_i) \cap B_j \neq \emptyset$ para alguns $i, j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ então $f^{sl+j}(x) \in B_i$ para algum $l \in \mathbb{N}$ com $l \geq 1$. Como $B_j = \omega(f^{sl+j}(x), f^s)$ temos que (b.4) se satisfaz pela $f^s$-invariância de $B_i$, veja (b.1).

Para provar (b.5), como $f$ é uma função continua só basta provar que

$$f^{-1}(Int(B_{i+1(mod\ s)})) \subseteq B_i$$

porque o interior de um conjunto é o maior conjunto aberto que esta contido nele. A prova deste fato sera feita por contradição. Suponhamos que existe $f(z) \in Int(B_{i+1(mod\ s)})$ e $z \notin B_i$. Por (b.2) existe $j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$, com $j \neq i$, tal que $z \in B_j$ (em particular mostra que $B_j \nsubseteq B_i$ ). Assim por (b.3)

$$f(z) \in f(B_j) \cap Int(B_{i+1(mod\ s)}) = B_{j+1(mod\ s)} \cap Int(B_{i+1(mod\ s)}).$$

Por (b.4) temos que $B_{j+1(mod\ s)} \subseteq B_{i+1(mod\ s)}$ e por (b.3) aplicando $f^{s-1}$ temos

$$B_j = f^{s-1}(B_{j+1(mod\ s)}) \subseteq f^{s-1}(B_{i+1(mod\ s)}) = B_i,$$

o qual é uma contradição.

Agora para provar que $f(\partial B_i)$ está contido em $\partial B_{i+1(mod\ s)}$. Seja $x \in \partial B_i$ então existem sequências $(x_n)_{n\geq 0}$ em $B_i$ e $(y_n)_{n\geq 0}$ em $B_i^c$ tal que $x_n \to x$, $y_n \to x$ quando $n \to \infty$. Pela continuidade de $f$ notamos que $(f(x_n))_{n\geq 0}$ é uma sequência em $B_{i+1}$ tal que $f(x_n) \to f(x)$ quando $n \to \infty$. Como a sequência $(y_n)_{n\geq 0}$ esta em $B_i^c$ temos que a sequência $(f(y_n))_{n\geq 0}$ esta em $B_{i+1}^c$ já que $f(B_i^c)$ esta contido em $f(B_i)^c = B_{i+1}^c$ porque a $f$ é sobrejetiva. Assim temos duas sequências $(f(x_n))_{n\geq 0}$ em $B_{i+1}$ e $(f(y_n))_{n\geq 0}$ em $B_{i+1}^c$ tais que $f(x_n) \to f(x)$, $f(y_n) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ o que mostra a afirmação.
Temos que (b.6) se segue de (b.5), (b.2) e de que $X$, por ser um espaço métrico completo, satisfaz o Teorema de Baire. De fato por $(b.2)$ temos que $X$ é união de conjuntos fechados. Se tivéssemos que $Int(B_i) = \emptyset$ para todo $i = 0, 1, \ldots, s-1$ então pelo teorema de Baire teríamos que $X$ tem interior vazio, o qual é impossível. Logo temos que existe $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tal que o interior de $B_i$ é não vazio e isto combinado com $(b.5)$ temos $(b.6)$.

Para mostrar (b.7), o fazemos por contradição. Suponhamos que existem $i < j$ tais que $B_i = B_j$. Então $f^{j-i}(B_i) = B_j = B_i$. Como $0 < j - i < s$ temos que $f^{j-i}$ é transitiva pela minimalidade de $s$. Como $B_i$ é um conjunto fechado, invariante para $f^{j-i}$ e com interior não vazio, usando a transitividade de $f^{j-i}$ temos que $B_i = X$. Assim $\omega(f^i(x), f^s) = B_i = X$ logo $(X, f^s)$ é topologicamente transitiva o qual é uma contradição.

Por fim, para mostrar (b.8) notamos que se $Int(B_i) \cap B_j \neq \emptyset$ por (b.4) temos que $B_j \subseteq B_i$. Como $Int(B_j) \neq \emptyset$ por (b.6) assim $\emptyset \neq Int(B_j) \subseteq B_i$ e por $(b.4)$ $B_i \subseteq B_j$. Portanto $B_i = B_j$ e fica provado (b.8).

Apesar dos $B_i$'s formarem uma decomposição dinâmica natural, estes poderiam não ser conexos. A ideia então é considerar as componentes conexas destes. Porém, para obter a ciclicidade precisamos mostrar que o número de componentes conexas de cada $B_i$ é o mesmo. A seguir iremos explicitar estas componentes conexas.

Sabemos que os conjuntos $B_i$, para $i = 0, 1, \ldots s-1$, são compactos, com interior não vazio e invariantes para $f^s$, isto por (b.1) e (b.6). Para $i = 0, 1, \ldots s-1$ os conjuntos $B_i$ são localmente conexos, porque ser localmente conexo é preservado para subespaços, então suas componentes conexas são abertas e por ser este compacto temos que suas componentes conexas são finitas. Sejam $A_{i,1}, \ldots, A_{i,n(i)}$ as componentes conexas de $B_i$ com $i = 0, 1, \ldots, s-1$. Como $(B_i, f^s |_{B_i})$ é topologicamente transitiva temos que $f^s$ permuta os conjuntos $A_{i,1}, \ldots, A_{i,n(i)}$ de forma cíclica. De fato, cada componente conexa é aberta então deve ter um ponto transitivo e este deve percorrer todas as componentes. Logo, temos que $f^s(A_{i,l}) = A_{i,l+1(mod\ n(i))}$. A igualdade segue porque $(B_i f^s |_{B_i})$ ao ser topologicamente transitiva é sobrejetiva.

O teorema segue então dos próximos três lemas.

**Lema 2.6.2.** *Cada componente conexa $A_{i,m}$ tem interior não vazio.*

*Prova do lema 2.6.2.* Agora vamos mostrar que cada $A_{i,m}$ tem interior não vazio. A ideia é similar a prova de (b.6). Como $B_i$ é completo ele satisfaz o teorema de Baire então como na prova de (b.6) vai ser suficiente provar que

$$f^{-s}(Int(A_{i,m+1(mod\ n(i))})) \subseteq A_{i,m}$$

para todo $i = 0, 1, \ldots, s-1$ e $m = 0, 1, \ldots, n(i)-1$. Da mesma forma que em (b.5) vamos fazer a prova por contradição. Seja $z \in X$ tal que $f^s(z) \in Int(A_{i,m+1(mod\ n(i))})$ e $z \notin A_{i,m}$. Se $z \in B_j$ para algum $j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ com $j \neq i$ de (b.1) temos

$$f^s(z) \in B_j \cap Int(A_{i,m+1(mod\ n(i))}) \subseteq B_j \cap Int(B_i),$$

o qual é uma contradição por (b.8). □

**Lema 2.6.3.** *Existe $n$ tal que para todo $i = 0, \ldots, s-1$ temos $n(i) = n$. Em particular a quantidade total de componentes conexas é $k = ns$. Assim, se denotamos por $\{X_i\}_{i=0}^{k-1}$ essas componentes, temos que elas são compactas com interior não vazio e são permutadas por $f^k$.*

*Prova do lema 2.6.3.* Por (b.2) temos que $z \in B_i$ então existe um numero natural $l \in \{0, 1, \ldots, n(i)\}$ com $l \neq m$ tal que $z \in A_{i,l}$ logo $f^s(z) \in A_{i,l+1} = f^s(A_{i,l})$. Assim $l+1 = m + 1(modn(i))$ então $l = m$ o qual é uma contradição.

Usando (b.3) e o fato que $A_{i,m}$ sejam as componentes conexas de $B_i$ temos que existe uma função sobrejetiva

$$\phi_i : \{0, 1, \dots, n(i) - 1\} \to \{0, 1, \dots, n(i + 1(mod\ s)) - 1\}$$

tal que $f(A_{i,m}) \subseteq A_{i+1(mod\ s),\phi_i(m)}$, a sobrejetividade de $f$ nos diz que $B_i$ tem um numero maior ou igual de componentes conexas que o numero de componentes conexas que $B_{i+1}$ seguindo este argumento temos que $n(0) \geq n(1) \geq \cdots \geq n(s-1) \geq n(0)$ donde $n(0) = n(1) = \cdots = n(s-1)$. Seja $n = n(0)$ logo, todas as $\phi_i$ são bijetivas e $f(A_{i,m}) = A_{i+1(mod\ s),\phi_i(m)}$ para $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Além disso, $f^s(A_{i,m}) = A_{i,m+1(mod\ n)}$ para $i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ e $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Consideremos o conjunto

$$\{A_{i,m} : i = 0, 1, \dots, s-1 \text{ e } m = 0, 1, \dots, n-1\}$$

que tem cardinalidade $k = ns$ por (b.8) e podemos escrever ele como $\{X_i : i = 0, 1, \dots, k-1\}$ tal que $X_i \subseteq B_{i(mod\ s)}$ e $f(X_i) = X_{i+1(mod\ k)}$.
Lembre que os conjuntos $X_i$ são conexos, interior não vazio e fechados, pois são componentes conexas então são fechados. De (b.8) se segue que $Int(X_i) \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e de $(b.2)$

$$X = \bigcup_{i=0}^{s-1} B_i = \bigcup_{i=0}^{s-1} \bigcup_{m=0}^{n-1} A_{i,m} = \bigcup_{i=0}^{k-1} X_i.$$

□

**Lema 2.6.4.** *O sistema $(X_i, f^k|_{X_i})$ é topologicamente transitivo.*

*Prova do Lema 2.6.4.* Primeiro fixemos $i$, com $i = 0, 1, \dots, k-1$, mostraremos que existe $x^* \in X_i$ tal que $X_i$ esta contido em $\omega(x^*, f^k)$. Como $X_i$ está contido em $B_{i(mod\ s)}$, $Int(X_i) \neq \emptyset$ e $(B_i, f^s\ |_{B_i})$ é topologicamente transitiva então existe $x^* \in Int(X_i) \cap Orb(f^{i(mod\ s)}(x^*), f^s)$. Então

$$x^* \in X_i \subseteq B_{i(mod\ s)} = \omega(f^{i(mod\ s)}(x), f^s) = \omega(x^*, f_s).$$

Para $z \in X_i$ então existe uma subsequência $(f^{n'_j s}(x^*))_{n \geq 0}$ em $X_i$ tal que $f^{n'_j s}(x^*) \to z$ quando $j \to \infty$. Como $k$ é múltiplo de $s$ notamos

$$f^{n'_j s}(x^*) \in f^{n'_j s}(X_i) = X_{i+n'_j s(mod\ k)} \subseteq B_{(i+n'_j s(mod\ k))(mod\ s)} = B_{i(mod\ s)}$$

para todo $j \geq 0$. Como $B_i$ contém finitos subconjuntos $X_i$ compactos e disjuntos dois a dois logo existe uma subsequência $(f^{n_j s}(x^*))_{n \geq 0}$ em $X_i$ de $(f^{n'_j s}(x^*))_{n \geq 0}$. Para mostrar que a sequência $(f^{n_j s}(x^*))_{n \geq 0}$ está contida em $Orb(x^*, f^k)$ só basta ver que $n_j s \equiv 0(mod\ k)$. Como

$$f^{n_j s}(x^*) \in X_i \cap X_{i+n_j s(mod\ k)} \text{ e } X_i, X_{i+n_j s(mod\ k)} \subseteq B_{i(mod\ s)},$$

temos que $X_i = X_{i+n_j s(mod\ k)}$ sempre que $i \equiv i + n_j s(mod\ k)$ logo $0 \equiv n_j s(mod\ k)$. □

A prova do teorema está completa pois

$$X = \bigcup_{i=0}^{s-1} B_i = \bigcup_{i=0}^{s-1} \bigcup_{m=0}^{n-1} A_{i,m} = \bigcup_{i=0}^{k-1} X_i.$$

□

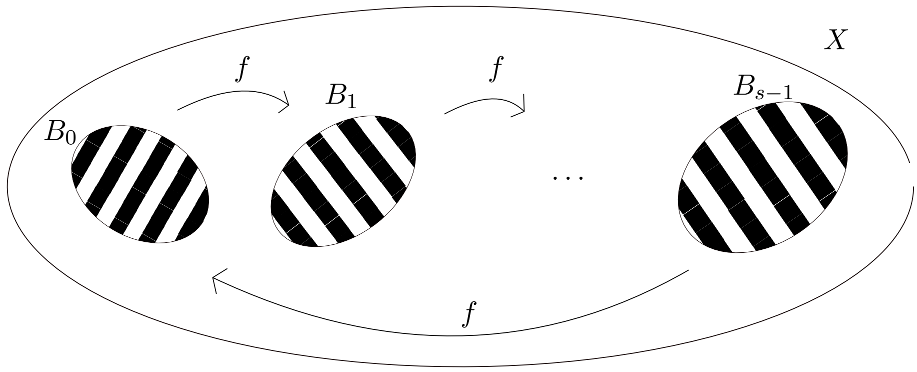


Figura 2.2: Sistema dinâmico $(X, f)$ transitivo

Como exemplo da parte $a)$ do teorema 2.6.1 é a tenda exemplo tenda a qual provamos que é exata exemplo 2.4.2. Logo, é totalmente transitiva. Como exemplo da parte $b)$ do teorema 2.6.1 consideramos seguinte exemplo no intervalo $[-1, 1]$

**Exemplo 2.6.5.** *Seja* $([-1, 1], f)$ *um sistema dinâmico definido*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |1 + 2x| & se \ -1 \leq x \leq 0 \\ -x & se \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

*para mostrar que* $f$ *é transitiva de modo mais simples precisamos calcular* $f^2$ *e suas gráficos, que seguem a continuação*

$$f^2(x) = \begin{cases} -1 + |1 + 2x| & se \ -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + |1 - 2x| & se \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

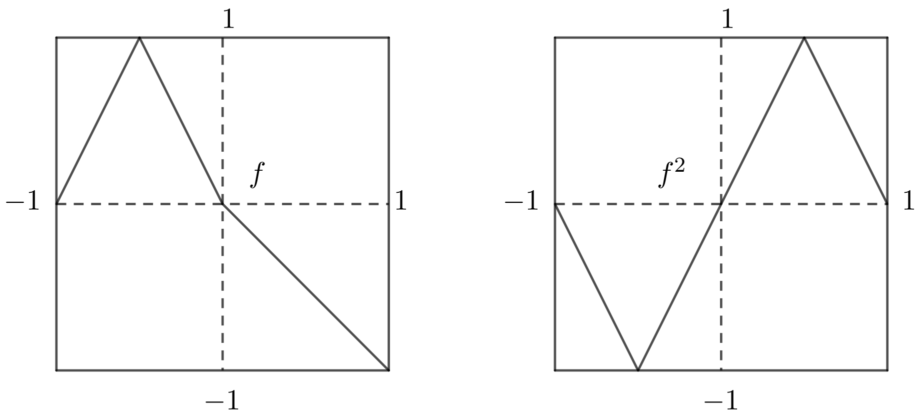


Figura 2.3: Mapa $f$ transitivo e $f^2$ não é transitivo

*Vejamos que* $f$ *é transitiva. Notamos que* $x = 0$ *é seu único ponto fixo e que*

$$f([0, 1]) = [-1, 0] \ e \ f([-1, 0]) = [0, 1].$$

*Além disso, vemos que* $([0, 1], f^2 \mid_{[0,1]}$ *é o exemplo a tenda que é transitiva. Logo, existe* $x_0 \in [0, 1]$ *tal que* $\omega(x_0, f^2) = [0, 1]$*, assim para todo* $\varepsilon > 0$ *e* $y \in [0, 1]$ *existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|f^{2k}(x_0) - y| < \varepsilon.$$

*Vejamos que* $\omega(f(x_0), f^2) = [-1, 0]$. *Para* $\varepsilon > 0$ *e* $z \in [-1, 0]$, *por* $\omega(x_0, f^2) = [0, 1]$, *existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $|-z - f^{2l}(x_0)| < \varepsilon$ *assim*

$$|z - f^{2l+1}(x_0)| = |z - (-f^{2l}(x_0)| = | - z - f^{2l}(x_0)| < \varepsilon.$$

*Logo temos que* $f$ *é transitiva pelo lema* 1.2.4-*iv) pois*

$$\omega(x_0, f) = \omega(x_0, f^2) \cup \omega(f(x_0), f^2) = [0, 1] \cup [-1, 0] = [-1, 1].$$

*Vemos que* $f$ *não totalmente transitiva pois vendo o gráfico de* $f^2$ *vemos que os intervalo* $[-1, 0]$ *e* $[0, 1]$ *são* $f^2$*-invariantes.*

# Capítulo 3

# Transitividade no Intervalo [0,1] e suas consequências

Vimos no exemplo 2.6.5 um mapa transitivo $f$ no intervalo tal que $f^2$ não era transitivo. Porém $f^2$ tinha dois subintervalos invariantes cada um contendo uma espécie de tenda, e portanto $f$ não é totalmente transitivo. Mostraremos que esta propriedade não é especial deste exemplo, e sim de qualquer mapa transitivo no intervalo.

Depois mostraremos que as propriedades de mistura mixing, weakly mixing e totalmente transitiva são equivalentes no intervalo $[0, 1]$. E mostraremos com um exemplo que os mapas mixinig e exatos não são equivalentes. Para ter a equivalência precisaremos da hipótese de que os pontos 0 e 1 sejam pontos acessíveis.

Vimos que existem mapas transitivos sem órbitas periódicas, a saber a rotação irracional. Mostraremos abaixo que isto não pode ocorrer no intervalo. De fato, se um mapa no intervalo for transitivo, o conjunto de órbitas periódicas deve ser denso. Em particular, como vimos antes o teorema 2.5.3, ele deve ser sensível as condições iniciais.

Uma observação que notamos é que basta considerar as funções no intervalo $[0, 1]$, já que para $f : [a, b] \to [a, b]$ sempre existe $g : [0, 1] \to [0, 1]$ conjugada a $f$. Seja $h : [0, 1] \to [a, b]$; $h(x) = a + (b - a)x$ sabemos que $h$ é um homeomorfismo entre $[a, b]$ e $[0, 1]$ temos que si definimos $g := h \circ f \circ h^{-1}$ que é conjugada a $f$.

## 3.1 Resultados Previos

Nesta seção notamos que qualquer sistema dinâmico de $([0, 1], f)$ tem pelo menos um ponto fixo. Para isto lembramos o teorema do valor intermediário.

**Teorema 3.1.1** (Teorema do valor intermediário). *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função continua. Se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$, ou $f(b) < d < f(a)$. Então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$*

**Lema 3.1.2.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função continua. Se $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ ou $[a, b] \subseteq f([a, b])$. Então $f$ tem um ponto fixo.*

*Demonstração.* Aplicar o Teorema do valor intermediário a função $g(x) := f(x) - x$. □

Como o sistema dinâmico $([0,1], f)$ sempre tem ponto fixo então não existem sistemas minimais no intervalo.

## 3.2 Sistemas Transitivos em $[0, 1]$

Neste seção damos uma prova para o teorema de decomposição de um mapa transitivo em $[0, 1]$, não aplicamos o teorema 2.6.1 pois na prova não faz uso da hipótese de compacidade do intervalo, fato pelo qual a mesma prova pode ser feita para prova um teorema análogo para $\mathbb{R}$.

**Teorema 3.2.1.** *Seja $([0,1], f)$ um sistema dinâmico topologicamente transitivo. Então só acontece um dos seguintes casos :*

**i)** *$([0,1], f)$ é totalmente transitiva ou*

**ii)** *Existe um único ponto fixo $c \in (0,1)$ tal que $f([0,c]) = [c,1]$ e $f([c,1]) = [0,c]$. Além disso $f^2 |_{[0,c]}$ e $f^2 |_{[c,1]}$ são totalmente transitivas.*

*Demonstração.* Como $([0,1], f)$ é topologicamente transitiva pela observação 2.1.3 existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $\omega(x_0, f) = [0,1]$. Fixamos $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$. Seja $W_i^n := \omega(f^i(x_0), f^n)$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ pela demostração dos fatos (b.1), (b.2), (b,3), (b.6) e (b.8) do teorema 2.6.1 temos que

**a)** Os conjuntos $W_i^n$ são fechados e $f^n(W_i^n) = W_i^n$ para $i = 0, 1, \ldots, s-1$.

**b)** $[0,1] = \bigcup_{i=0}^{n-1} W_i^n$.

**c)** $f(W_i^n) = W_{i+1(mod\ n)}^n$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

**d)** Cada $W_i^n$ tem interior não vazio.

**e)** $Int(W_i^n) \cap W_j^n \neq \emptyset$ se e somente se $i = j$.

Notamos quem em princípio o interior dos conjuntos $W_i^n$ poderiam ser formados por intervalos que são permutados entre si. Portanto, definimos $\mathcal{E}_n$ a coleção de todas as componentes conexas de $Int(W_i^n)$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Notamos que a tese do teorema implicaria que esta coleção tem no máximo dois elementos. Primeiramente mostraremos que esta coleção é finita.

A ideia da prova é que como os interiores são abertos, a orbita densa deve passar por todos eles. Mas como esses elementos são permutados pela dinâmica, se fossem infinitos, a orbita nunca regressaria ao inicial. Mas como é densa, deve retorna em algum tempo. Agora, mostraremos com detalhes tal ideia.

**Lema 3.2.2.** *O conjunto $\mathcal{E}_n$ é finito*

*Prova do lema.* Pelo e) os elementos de $\mathcal{E}_n$ são intervalos disjuntos. Para $C \in \mathcal{E}_n$ temos que $f(\overline{C})$ é um intervalo não degenerado. Como $W_i^n$ são conjuntos fechados para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ então $f(\overline{C}) \subseteq W_i^n$ para algum $i = 0, 1, \ldots, n-1$, como este é conexo existe $C' \in \mathcal{E}_n$ tal que $f(\overline{C}) \subseteq \overline{C'}$. Como a orbita de $x_0$ é densa em $[0,1]$ e para todo $C \in \mathcal{E}_n$ tem interior não vazio então para todo $C, C' \in \mathcal{E}_n$ existe $k \geq 1$ tal que $f^k(\overline{C}) \cap \overline{C'} \neq \emptyset$ por o qual $f^k(\overline{C}) \subseteq \overline{C'}$, de isto se segue que $\mathcal{E}_n$ é um conjunto finito e seus elementos são permutados pela $f$. $\square$

Se $\mathcal{E}_n = \{C_1, C_2, \dots, C_{p_n}\}$ para algum $p_n \in \mathbb{N}$ com $p_n \geq 1$ e $f(\overline{C_i}) \subseteq \overline{C_{i+1}}$ para $i = 0, 1, \dots, p_n - 1$ e $f(\overline{C_{p_n}}) \subseteq \overline{C_1}$. Como a orbita de $x_0$ é densa em $[0,1]$ então $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{p_n}$ também é denso e $C_1, C_2, \dots, C_{p_n}$ são disjuntos dois a dois assim se deduze que $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{p_n}$ é o intervalo $[0,1]$ menos um número de pontos finitos.

**Lema 3.2.3.** *Se $p_n = 1$ para todo $n \geq 1$. Então $([0,1], f)$ é totalmente transitivo*

*Prova do lema.* Se $p_n = 1$ para todo $n \geq 1$ temos que $\mathcal{E}_n = \{C\}$ então $W_0^n = W_1^n = \dots = W_{n-1}^n$ e $\omega(x_0, f^n) = [0,1]$. Logo $([0,1], f^n)$ é topologicamente transitivo e portanto $([0,1], f)$ é totalmente transitivo. □

**Lema 3.2.4.** *Se $p_n \geq 2$ para algum $n \geq 1$. Então $p_n = 2$.*

*Demonstração.* Pela proposição 2.1.11 $f$ é sobrejetiva e pelo lema 3.1.2 então existe $c \in [0,1]$ ponto fixo, $f(c) = c$. Se $c \in C$ para algum $C \in \mathcal{E}_n$ então temos $f(\overline{C}) \subseteq \overline{C}$ e assim $p_n = 1$ o qual é uma contradição. Se suporemos que $c$ é um ponto extremo de $[0,1]$ também deduzimos que $p_n = 1$. Logo temos que $c \in (0,1)$ e $c \notin C$ para todo $C \in \mathcal{E}_n$. Então o único modo para que $f$ permute os elementos de $\mathcal{E}_n$ é que $\mathcal{E}_n = \{C, C'\}$ tal que $f(\overline{C}) = \overline{C'}$ e $f(\overline{C'}) = \overline{C}$. □

Assim

$$\mathcal{E}_n = \{[0,c), (c,1]\}, f([0,c]) = [c,1] \quad e \quad f([c,1]) = [0,c] \tag{3.1}$$

isto implica que $c$ é o único ponto fixo de $f$.

**Lema 3.2.5.** *$f^2|_{[0,c]}$ e $f^2|_{[c,1]}$ são totalmente transitivas.*

*Prova do lema.* Seja $\mathcal{N} = \{i \in \mathbb{N} \mid C \subseteq W_i^n\}$ e $\mathcal{N}' = \{i \in \mathbb{N} \mid C' \subseteq W_i^n\}$. Os conjuntos $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ são não vazios e sua união é $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Se $C \cup C' \subseteq W_i^n$ para algum $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ então $\overline{C \cup C'}$ esta contido em $W_i^n$ esto contradiz que $C, C' \in \mathcal{E}_n$ são elementos diferentes, logo $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ são conjuntos disjuntos. Como $f$ permuta os elementos de $\mathcal{E}_n$ pela $f$ então para $i \in \mathcal{N}$, $W_i^n$ é enviado em $W_j^n$ com $j \in \mathcal{N}'$ por isto $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ tem o mesmo numero de elementos e portanto $n$ debe ser par. Como $\omega(x_0, f^n) \subseteq \omega(x_0, f^2)$ combinando com (3.1) temos $\{W_0^2, W_1^2\} = \{[0,c], [c,1]\}$ isto implica que $f^2|_{[0,c]}$ e $f^2|_{[c,1]}$ são topologicamente transitivas de fato são totalmente transitivas já que se não for assim aplicando o mesmo raciocínio feito para $f$ em $[0,1]$ para $f^2|_{[0,c]}$ debe ter um único ponto fixo e estar em $(0,c)$ o qual é falso por que $c$ e ponto fixo. □

Portanto temos que $f^2|_{[0,c]}$ e $f^2|_{[c,1]}$ são totalmente transitivas. □

## 3.3 Propriedades misturadoras em [0,1]

Do capitulo 2 sabemos que em qualquer sistema dinâmico

$$\text{Mixing} \Rightarrow \text{Weak Mixing} \Rightarrow \text{Totalmente Transitivo.}$$

Nesta seção mostraremos que para $([0,1], f)$ estos três conceitos são equivalentes, provaremos que totalmente transitivo implica mixing. Em geral esto não tem porque ser certo por exemplo as rotações do circulo de angulo irracional são totalmente transitivas mas não são topologicamente mixing.

Para fazer esto usaremos a seguente proposição que nos da uma caracterização de ser mixing no intervalo.

**Proposição 3.3.1.** *Seja* $([0,1], f)$ *um sistema dinâmico.* $([0,1], f)$ *é topologicamente mixing se e somente se para todo* $\varepsilon > 0$ *e qualquer subintervalo* $J$ *não degenerado de* $[0,1]$*, existe* $N \in \mathbb{N}$*, com* $N \geq 1$*, tal que* $f^n(J) \supseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *para todo* $n \geq N$*.*

*Demonstração.* Sejam $\varepsilon > 0$ e $J$ um subintervalo não degenerado de $[0,1]$. Tome $J_1$ um subintervalo aberto não vazio de $J$. Seja $U_1 := (0, \varepsilon)$ e $U_2 := (1-\varepsilon, 1)$. Como $([0,1], f)$ é topologicamente mixing existe $N_1 \geq 1$ tal que $f^n(J_1) \cap U_1 \neq \emptyset$ para todo $n \geq N_1$. Da mesma forma existe $N_2 \geq 1$ tal que $f^n(J_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ para todo $n \geq N_2$. Tomando $N = max\{N_1, N_2\}$ temos, pela conexidade de $J_1$, que $f^n(J_1) \supseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ para todo $n \geq N$. Como $J \supseteq J_1$ então $f^n(J) \supseteq f^n(J_1) \supseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ para todo $n \geq N$.

Agora suponhamos para todo $\varepsilon > 0$ e qualquer subintervalo $J$ não degenerado de $[0,1]$, existe $N \geq 1$ tal que $f^n(J) \supseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ para todo $n \geq N$. Sejam $U, V$ dois subconjuntos abertos, não vazio, de $[0,1]$. Tomemos dois subintervalos abertos, não vazios, $J, K$ tais que $0, 1$ não pertencem a $J, K$ e $J \subseteq U$, $K \subseteq V$. Como $0$ e $1$ não pertencem a $K$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $K \subseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Por hipótese, para $\varepsilon > 0$ e $J$ existe $N \geq 1$ tal que $f^n(J) \supseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon] \supseteq K$ para todo $n \geq N$. Logo $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Portanto $([0,1], f)$ é topologicamente mixing □

**Teorema 3.3.2.** *Se* $([0,1], f)$ *é um sistema dinâmico totalmente transitiva então ele é topologicamente mixing.*

*Demonstração.* Agora para provar o teorema vamos utilizar a proposição 3.3.1. Seja $\varepsilon > 0$ e $J$ um subintervalo não degenerado de $[0,1]$. Como $([0,1], f)$ é topologicamente transitivo pelo proposição 3.5.2(seguente seção) temos que o conjunto dos pontos periódicos de $f$ são densos em $[0,1]$. Seja $x, x_1, x_2$ pontos periódicos tais que $x \in J$, $x_1 \in (0, \varepsilon)$ e $x_2 \in \varepsilon$. Podemos escolher os pontos $x_1, x_2$ tais que suas órbitas estão contidas em $(0,1)$ isto porque $0$ (resp. $1$) estão contidos no máximo em uma orbita periódica. Consideremos

$$y_i = \min\{f^n(x_i) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ e } z_i = \max\{f^n(x_i) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ para } i = 1, 2.$$

Notamos que $y_1 \in (0, x_1] \subseteq (0, \varepsilon)$, $z_2 \in [x_2, 1) \subseteq (1-\varepsilon, 1)$, $y_2, z_1 \in (0,1)$. Seja $k \in \mathbb{N}$ o minimo múltiplo comum dos períodos de $x, y_1$ e $y_2$. Se escrevemos $g := f^k$ e considere

$$K := \bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(J).$$

O ponto $x \in J$ é um ponto fixo para $g$, então $x \in g^n(J)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que $K$ é um intervalo. Além disso, $K$ é denso em $[0,1]$ porque como $g$ é transitiva e $J$ é não degenerado existe um ponto transitivo $w \in J$ e assim $Orb(w, f)$ está contida em $K$. Logo $K$ é denso.

Como $K$ é denso e conexo em $[0,1]$ temos que $K \supseteq (0,1)$. Dai segue que $y_1, y_2, z_1, z_2 \in K$. Para $i = 1, 2$ sejam $p_i, q_i$ números inteiros positivos tais que $y_i \in g^{p_i}(J)$ e $z_i \in g^{q_i}(J)$. Tomando $N := \max\{p_1.p_2, q_1, q_2\}$. Notamos que $y_1, y_2, z_1, z_2$ são pontos fixos de $g$ e todos pertencem a $g^N(J)$, que é conexo, logo $[y_i, z_i]$ esta contido em $g^N(J) = f^{kN}(J)$. Como $[y_i, z_i]$ contém a órbita de $x_i$ para $i = 1, 2$ então

$$[y_1, z_1] \cup [y_2, z_2] \subseteq f^n(J) \text{ para } i = 1, 2 \text{ e para todo } n \geq kN.$$

Como $y_1 < \varepsilon$ e $z_2 > 1-\varepsilon$ e o fato de que $f^n(J)$ é conexo temos que $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \subseteq f^n(J)$ para todo $n \geq kN$. Isto conclui a prova pela Proposição 3.3.1. □

## 3.4 Sistemas Exatos em $[0,1]$

Do capitulo 2 sabemos que se um sistema dinâmico é exato então ele é mixing. Nesta seção mostremos que se um sistema dinâmico $([0,1], f)$ é mixing e 0 e 1 são pontos acessíveis no intervalo então ele é exato.

**Definição 3.4.1.** *Seja $([0,1], f)$ um sistema dinâmico. Dizemos que 0 (resp. 1) é um ponto acessível se existe $x \in (0,1)$ e $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = 0$ (resp. $f^n(x) = 1$)*

A tenda é um exemplo de um sistema dinâmico topologicamente mixing onde 0 e 1 são pontos acessíveis pois $f(\frac{1}{2}) = 1$ e $f^2(\frac{1}{2}) = 0$.

**Teorema 3.4.2.** *Seja $([0,1], f)$ topologicamente mixing. $([0,1], f)$ é exato se, e somente se, 0 e 1 são pontos acessíveis.*

*Demonstração.* Como $([0,1], f)$ é exato tomando em particular o aberto $(0,1)$ existe $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$ tal que $f^n((0,1)) = [0,1]$. Logo existem $x, y \in (0,1)$ tal que $f^n(x) = 0$ e $f^n(y) = 1$.

Vamos provar a reciproca. Existem $x, y \in (0,1)$ e $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n \geq 1$ tal que $f^m(x) = 0$ e $f^n(y) = 1$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\langle x, y \rangle \subseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Dado $J$ subintervalo aberto não vazio de $[0,1]$. Como $([0,1], f)$ é topologicamente mixing então existe $N \in \mathbb{N}$, com $N \geq 1$, tal que $f^n(J) \supseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon] \supseteq \langle x, y \rangle$ para todo $n \geq N$ pela proposição 3.3.1. Assim $0, 1 \in f^{N+1}(J)$ e pela conexidade de $J$ e continuidade de $f^{N+1}$ temos que $f^{N+1}(J) = [0,1]$. Dado $U$ aberto não vazio arbitrário de $[0,1]$. Tomamos $J$ subintervalo aberto não vazio de $U$ pelo feito anteriormente temos que existe $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$, tal que $[0,1] \subseteq f^n(J) \subseteq f^n(U)$ logo $f^n(U) = [0,1]$. Portanto $([0,1], f)$ é exata. □

Agora mostraremos um exemplo de um sistema dinâmico $([0,1], f)$ topologicamente mixing onde 0 e 1 não são pontos acessíveis

**Definição 3.4.3.** *Seja o sistema dinâmico $([0,1], f)$ dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um* ***ponto critico*** *se para toda vizinhança $V$ de $c$ existem $y, z$ em $V$, com $y \neq z$, tal que $f(y) = f(z)$.*

**Definição 3.4.4.** *Seja o sistema dinâmico $([0,1], f)$ e $\lambda > 1$. Suponhamos que $f$ tem finitos ou contáveis pontos críticos. Então $f$ é chamada* ***$\lambda$-expansora*** *se para todo $I$ intervalo não degenerado tal que $f$ é monótona temos que para todo $x, y \in I$ então*

$$|f(x) - f(y)| \geq \lambda |x - y|.$$

**Lema 3.4.5.** *Seja um sistema dinâmico $([0,1], f)$ tal que $f$ é $\lambda$-expansora com $\lambda > N$, onde $N \in \mathbb{N}$. Então para todo intervalo $J$ não degenerado existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(J)$ contem $N$ pontos críticos deferentes.*

*Demonstração.* Seja $C_f$ o conjunto dos pontos críticos de $f$. Seja $\alpha := \lambda/N > 1$. Consideremos um subintervalo $J$ aberto não vazio. Se $J$ contem exatamente $k$, com $k < N$, pontos críticos diferentes, então $J \backslash C_f$ tem $k+1$ componentes conexas, sejam $J_0, J_1, \ldots, J_k$ estos, temos que $|J_0| + |J_1| + \cdots + |J_k| = |J|$. Pelo principio da casa dos pombos temos que $|J_i| \geq \frac{|J|}{k+1} \geq \frac{|J|}{N}$ para algum $i = 0, 1, \ldots, k$. Como $J_i$ não contem pontos críticos logo, $f|_{J_i}$ é monótona. Assim $|f(J_i)| \geq \lambda |J_i|$ e

$$|f(J)| \geq |f(J_i)| \geq \lambda |J_i| \geq \alpha |J|. \tag{3.2}$$

Suponhamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n(J)$ contém estritamente menos de $N$ pontos críticos. Então $|f^n(J)| \geq \alpha^n |J|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por 3.2. Mais esto é impossível pois $|f^n(J)|$ esta limitado por 1 e $\alpha^n |J| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Portanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(J)$ contem $N$ pontos críticos diferentes. □

**Exemplo 3.4.6.** *Vamos construir $f : [0,1] \to [0,1]$ continua do seguente modo. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sequencia de pontos em $(0,1)$ crescente tal que*

$$\lim_{n \to -\infty} a_n = 0 \ \ e \ \ \lim_{n \to \infty} a_n = 1. \tag{3.3}$$

*Para $n \in \mathbb{Z}$, seja $I_n := [a_n, a_{n+1}]$ e definimos $f_n : I_n \to I_{n-1} \cup I_n \cup I_{n+1}$ por $f_n(a_n) := a_n$, $f_n(a_{n+1}) := a_{n+1}$,*

$$f_n\left(\frac{2a_n + a_{n+1}}{3}\right) := a_{n+2}, \ f_n\left(\frac{a_n + 2a_{n+1}}{3}\right) := a_{n-1}$$

*e $f_n$ é linear entre os pontos onde já esta esta definida. Logo definimos $f : [0,1] \to [0,1]$ por*

$$f(0) := 0, \quad f(1) := 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall x \in I_n, \ f(x) := f_n(x).$$

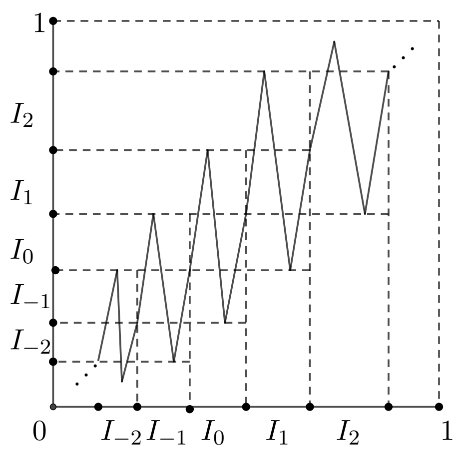


Figura 3.1: Mapa em $[0,1]$ que mixing e não exato

*É fácil mostrar que $f$ é continua e que os pontos 0 e 1 não são acessíveis. Notamos que para $I_k$ temos que*

$$f^m(I_k) \supseteq [a_{k-m}, a_{k+m+1}] \ \text{para todo} \ k \in \mathbb{Z} \ \text{e para todo} \ m \in \mathbb{N}.$$

*Assim para $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que*

$$f^m(I_k) \supseteq [a_{k-m}, a_{k+m+1}] \supseteq [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \ \text{para} \ m \geq M$$

*por* (3.3). *Logo para mostrar que* $([0,1], f)$ *é topologicamente mixing basta mostrar que para qualquer* $J$ *intervalo não degenerado existe* $k \in \mathbb{Z}$ *e* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^l(J) \supseteq I_k$*, assim para* $m \geq M + l$ *temos que*

$$f^m(J) \supseteq f^{m-l}(I_k) \supseteq [\varepsilon, 1-\varepsilon] \text{ para } m \geq M + l$$

*e portanto temos que* $([0,1], f)$ *é topologicamente mixing pela proposição 3.3.1.*
*Notamos que* $f$ *é 3-expansora logo para* $J$ *intervalo não degenerado temos que existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^l(J)$ *cotem 2 pontos críticos diferentes pelo lema 3.4.5. Logo* $f^l(J) \supseteq I_k$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$.

## 3.5 Transitividade e Caos

Na seção 1.5 vimos o conceito de sensibilidade nas condições iniciais um fato interessante que acontece com os mapas transitivos no intervalo é que esta é condição suficiente para definir caos porque vamos ver se um mapa é transitivo então tem órbitas densas.

**Lema 3.5.1.** *Seja* $f : I \to I$ *uma função continua,* $x, y \in I$ *e* $m, n \in \mathbb{N}$*. Seja* $J$ *um subintervalo de* $I$ *tal que não contém pontos periódicos de* $f$ *e suponha que* $x, y, f^m(x), f^n(y) \in J$*. Se* $x < f^m(x)$ *então* $y < f^n(y)$.

*Demonstração.* Denotamos $g := f^m$ vamos mostrar por indução sobre $k \in \mathbb{N}$ que $g^k(x) > x$ para todo $k \geq 1$. Por hipótese satisfaz-se para $k = 1$. Suponhamos que para um $k \geq 1$ temos que $g^i(x) > x$ para $i = 1, \ldots, k-1$ e $g^k(x) \leq x$. Escrevemos

$$\{g^i(x) \mid i = 0, 1, \ldots, k-1\} = \{x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{k-1}\}.$$

Notamos que $x = x_0$ e $x \neq x_1$ porque $x$ não é um ponto periódico. Temos que

$$g^k(x) \leq x = x_0 < x_1 \leq \cdots x_{k-1}.$$

Existe $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ tal que $g^j(x) = x_1$. Daí segue

$$g^{n-j}([x_0, x_1]) \supseteq [g^k(x), g^{k-j}(x)] \supseteq [x_0, x_1].$$

Logo pelo lema 3.1.2, $g$ tem um ponto periódico em $[x_0, x_1]$. Temos $[x_0, x_1] \subseteq J$ porque $x_1 = \min\{g^j(x) \mid j = 1, \ldots, k-1\} \leq g(x)$. Isto é uma contradição porque $J$ não contém pontos periódicos para $f$. Assim temos que $g^k(x) > x$ para todo $k \geq 1$.

Se suponhamos que $f^n(y) < y$ usando o mesmo argumento anterior (com o ordem inverso) mostra-se que $f^{kn}(y) < y$ para todo $k \leq 1$. Logo

$$f^{mn}(y) < y \text{ e } x < f^{mn}(x).$$

Notamos que $f^{mn}(\langle x, y \rangle) \supseteq \langle x, y \rangle$, onde $\langle x, y \rangle$ é $[x, y]$ ou $[y, x]$, pelo o lema 3.1.2 tem um ponto fixo em $\langle x, y \rangle \subseteq J$ o qual é uma contradição porque em $J$ $f$ não tem pontos periódicos. Portanto $f^n(y) > y$, não tem igualdade porque em $J$ não tem pontos periódicos. □

**Proposição 3.5.2.** *Seja* $([0,1], f)$ *um sistema dinâmico topologicamente transitiva. Então o conjunto de pontos periódicos é denso em* $[0,1]$

*Demonstração.* Se o conjunto dos pontos periódicos é denso então este intersecta qualquer aberto não vazio. Vamos a fazer a prova por contradição. Suponhamos que existem $a, b \in I$, com $a < b$, tal que $(a, b)$ não tem pontos periódicos. Como $f$ é transitiva pela observação 2.1.3 o conjunto dos pontos transitivos é denso. Seja $x \in (a, b)$ tal que $x$ tem orbita densa. Assim existem $m \in \mathbb{N}$ e $0 < p < q$ tais que $x < f^m(x) < b$ e $a < f^p(x) < f^q(x) < x$. Se tomamos $y := f^{q-p}(x)$ temos que

$$a < f^{q-p}(y) < y < x < f^m(x) < b.$$

Mas isto é impossível pelo lema anterior aplicado a $J = (a, b)$. Portanto o conjunto dos pontos periódicos é denso em $I$. $\square$

observação que transitividade em $[0, 1]$ implica caos.
cota do $\delta$ da definição de sensibilidade nas condições iniciais

**Definição 3.5.3.** *Seja $([0, 1], f)$ um sistema dinâmico e $\varepsilon > 0$. Um ponto $x \in [0, 1]$ é **$\varepsilon$-instável** (no sentido de Lyapunov), se para toda vizinhança $U$ de $x$ existe $y \in U$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| \geq \varepsilon$. Denotamos o conjunto dos pontos $\varepsilon$-instável por $U_\varepsilon(f)$.*

Notamos que se $U_\varepsilon(f) = [0, 1]$ para algum $\varepsilon > 0$ então $f$ é sensivel as condições inicias. No seguinte lema vemos umas propriedades básicas de $U_\varepsilon(f)$.

**Lema 3.5.4.** *Seja $([0, 1], f)$ um sistema dinâmico $\varepsilon > 0$. Temos a seguintes propriedades:*

**i)** *Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$, $U_\varepsilon(f^n) \subseteq U_\varepsilon(f)$.*

**ii)** *Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$, existe $\delta > 0$ tal que $U_\varepsilon(f) \subseteq U_\delta(f^n)$.*

**iii)** *$f(U_\varepsilon(f)) \subseteq U_\varepsilon(f)$*

*Demonstração.* i)Trivial.

ii)A função $f$ é uniformemente continua porque $[0, 1]$ é compacto. Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } |x - y| < \delta \text{ implica } |f^i(x) - f^i(y)| < \varepsilon \text{ para } i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.4}$$

Se $x \notin U_\delta(f^n)$. Então existe uma vizinhança $U$ de $x$ tal que para todo $y \in U$ e $k \in \mathbb{N}$ temos que $|f^{kn}(x) - f^{kn}(y)| < \delta$. Logo (3.4) implica $|f^{kn+i}(x) - f^{kn+i}(y)| < \varepsilon$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ e para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim $x \notin U_\varepsilon(f)$. Isto prova que $U_\varepsilon(f) \subseteq U_\delta(f^n)$.

iii)Seja $x \in U_\varepsilon(f)$ e $V$ uma vizinhança de $x$. Primeiramente provaremos

$$\text{existem infinitos } n \in \mathbb{N} \text{ tal que existe } y \in V \text{ e } |f^n(x) - f^n(y)| \geq \varepsilon. \tag{3.5}$$

Suponhamos o contrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $|f^n(x) - f^n(y)| \geq \varepsilon$ para algum $y \in V$ e $n \in \mathbb{N}$ então $n \leq n_0$. Pela continuidade das funções $f, f^2, \ldots, f^{n_0}$ no ponto $x$ temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } |x-y| < \delta \text{ implica } |f^k(x) - f^k(y)| < \varepsilon \text{ para todo } y \in [0, 1] \text{ e para } k = 0, \ldots, n_0. \tag{3.6}$$

Seja $W := V \cap B(x, \delta)$ é uma vizinhança de $x$. Seja $y \in W$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $n \leq n_0$ temos que $|f^n(x) - f^n(y)| < \varepsilon$ por (3.6). Se $n > n_0$ então $|f^n(x) - f^n(y)| < \varepsilon$ pela escolha de $n_0$. Isto é uma contradição porque $x$ é um ponto $\varepsilon$-estável. Logo temos (3.5).

Agora consideremos um conjunto aberto $V$ contendo $f(x)$. temos que $U := f^{-1}(V)$ é um aberto que contém $x$. Por (3.5) temos que existe $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, e $y \in U$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| \geq \varepsilon$. Se tomamos $z := f(y)$ temos que $|f^{n-1}(f(x)) - f^{n-1}(z)| \geq \varepsilon$. Por tanto $f(x) \in U_\varepsilon(f)$. □

**Proposição 3.5.5.** *Seja* $([0,1], f)$ *um sistema dinâmico. Então*

**a)** *Se* $([0,1], f)$ *é topologicamente mixing então* $f$ *é* $\delta$*-sensível para todo* $\delta \in (0, \frac{1}{2})$.

**b)** *Se* $([0,1], f)$ *é topologicamente transitivo então* $f$ *é* $\delta$*-sensível para todo* $\delta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

*Demonstração.* a) Seja $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, $x \in [a, b]$ e $U$ uma vizinhança de $x$. Pelo teorema 3.3.1, exite $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \supseteq [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Assim existem $y, z \in U$ tal que $f(y) = \varepsilon$ e $f(z) = 1 - \varepsilon$. Isto implica

$$\max\{|f^n(x) - f^n(y)|, |f^n(z) - f^n(x)|\} \geq \frac{1 - 2\varepsilon}{2} = \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Logo $x$ é $\delta$-estável para $\delta := \frac{1}{2} - \varepsilon$. Como $\varepsilon$ é arbitrário temos que $f$ é $\delta$-sensível para $\delta \in (0, \frac{1}{2})$.

b) Agora se $([0,1], f)$ é topologicamente transitivo e não topologicamente mixing. Pelo teorema 3.2.1, existe $c \in (0,1)$ tal que $f([0,c]) = [c,1]$, $f([c,1]) = [0,c]$ e $f^2\mid_{[0,c]}$, $f^2\mid_{[c,1]}$ são topologicamente mixing. Fazendo um argumento similar da parte $a$) temos $f^2\mid_{[0,c]}$ é $\delta$-sensível para $\delta \in (0, \frac{c}{2})$. Pelo lema 3.5.4 temos que $[0,c] \subseteq U_\delta(f)$ e $f([0,c]) = [c,1] \subseteq U_\delta(f)$. Assim $f$ é $\delta$-sensível para todo $\delta \in (0, \frac{c}{2})$. Da mesma forma $f$ é $\delta$-sensível para todo $\delta \in (0, \frac{1-c}{2})$. Finalmente concluímos que $f$ é $\delta$-sensível para todo $\delta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ já que $\max\{c, 1-c\} \geq \frac{1}{4}$

□

# Capítulo 4

# Mapas Transitivos em $\mathbb{R}$ e $[0, \infty)$

O objetivo deste capítulo é estudar sistemas dinâmicos na reta($\mathbb{R}$) e na semi-reta($[0, \infty)$). Para isto começamos vendo quais teoremas do capítulos 3 seguem valendo para tais. Depois mostramos que um sistema é transitivo então os pontos críticos e valores críticos são não limitados [8]; mostraremos, através de exemplos, que a reciproca deste resultado não vale em geral. Por fim, mostraremos sob quais hipóteses adicionais temos a validade da reciproca do resultado acima.

## 4.1 Revisitando o capitulo 3

Nesta seção observamos que teorema 3.2.1 e teorema 3.3.2 do capitulo 3 que continuam sendo válidos para sistemas dinâmicos na reta e na semi-reta.

Notamos que $\mathbb{R}$ e $[0, \infty)$ são espaços de Baire separáveis sem pontos isolados, logo pelo teorema 2.1.2 ser topologicamente transitivo e ter uma orbita densa são equivalentes. Logo dizemos que $f$ é **transitiva** se o sistemas dinâmico $(X, f)$ é topologicamente transitivo ou tem orbita densa para $X = \mathbb{R}$ ou $[0, \infty)$.

Também notamos que as propriedades totalmente transitivo, weakly mixing e topologicamente mixing são equivalentes para mapas em $\mathbb{R}$ e $[0, \infty)$. Também notamos que na reta e na semi-reta não se pode definir um análogo de mapas exatos, pois para $U$ aberto não vazio de $\mathbb{R}$ (resp. $[0, \infty)$) que esta contido num compacto $K$ então $f^n(U)$ sempre é limitada para toda $n \in \mathbb{N}$ e não pode ser todo o $\mathbb{R}$ (resp. $[0, \infty)$).

A proposição 3.2.1 continua sendo válida para $\mathbb{R}$ e $[0, \infty)$ pois na prova não usamos o fato de $[0, 1]$ ser compacto; usamos as propriedades do $\omega$-limite, a conexidade de $[0, 1]$ e que o sistema dinâmico $([0, 1], f)$ sempre tem um ponto fixo e isto continua sendo verdade para os sistemas dinâmicos em $\mathbb{R}$ e $[0, \infty)$.

**Proposição 4.1.1.** *Seja* $(\mathbb{R}, f)$ *(resp.* $([0, \infty), f)$*) um sistema dinâmico transitivo. Então* $f$ *tem pelo menos um ponto fixo.*

*Demonstração.* Como $f$ é transitiva existe $x_0 \in \mathbb{R}$(resp. $([0, \infty), f)$) tal que sua orbita é densa por isto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m+2}(x_0) < f^m(x_0) < f^{m+1}(x_0)$. Assim pelo lema 3.1.2 $f \mid_{\langle f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)\rangle}$ $f$ tem um ponto fixo, já que

$$f(\langle f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)\rangle) \supseteq \langle f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)\rangle.$$

□

Assim temos os seguintes resultados

**Teorema 4.1.2.** *Seja $(\mathbb{R}, f)$ um sistema dinâmico transitivo. Então só acontece um dos seguintes casos:*

**i)** *$(\mathbb{R}, f)$ é totalmente transitiva ou*

**ii)** *Existe um único ponto fixo $c \in \mathbb{R}$ tal que $f((-\infty, c]) = [c, \infty]$ e $f([c, \infty)) = (-\infty, c]$. Além disso, $f^2 \mid_{(-\infty,c]}$ e $f^2 \mid_{[c,\infty)}$ são totalmente transitivas.*

Notamos que $ii)$ do teorema 4.1.2 no caso de $[0, \infty)$ não faz sentido porque o sistema dinâmico $([0, \infty), f)$ não pode ter dois subintervalos da forma $[0, c]$ e $[c, \infty)$, onde $c$ é um ponto fixo de $f$, tais que $f([0, c]) = [c, \infty)$ e $f([c, \infty)) = [0, c]$ pois $f([0, c])$ é um conjunto limitado. Logo o teorema 4.1.2 no caso de $[0, \infty)$ fica

**Teorema 4.1.3.** *O sistema dinâmico $([0, \infty), f)$ é transitivo se e somente se ele é totalmente transitiva.*

**Observação 4.1.4.** *Analogamente em $\mathbb{R}$ e $[0, \infty)$, para ter caos só basta que o sistema dinâmico seja transitivo.*

A proposição 3.3.1 nos da uma caracterização de topologicamente mixing no intervalo. Com isto em mente podemos caraterizar ser topologicamente mixing em $\mathbb{R}$ e $[0, \infty)$. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sequências de números reais crescentes tais que

$$\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n\to-\infty} b_n = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

**Proposição 4.1.5.** *O sistema dinâmico $(\mathbb{R}, f)$ é topologicamente mixing se e somente se para todo $M \in \mathbb{N}$ e $J$ intervalo não degenerado existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(J) \supseteq [a_{-M}, a_M]$ para todo $n \geq N$.*

**Proposição 4.1.6.** *O sistema dinâmico $([0, \infty), f)$ é topologicamente mixing se e somente se para todo $M \in \mathbb{N}$ e $J$ intervalo não degenerado existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(J) \supseteq [b_{-M}, b_M]$ para todo $n \geq N$.*

A demonstração das proposições 4.1.5 e 4.1.6 é similar a da proposição 3.3.1.

No intervalo $[0, 1]$ o teorema 3.5.2 nos diz que se um sistema dinâmico $([0, 1], f)$ é transitivo então o conjunto de seus pontos periódicos é denso. Na prova do teorema 2.1.2 notamos que se usa a ordem em $\mathbb{R}$ e o teorema do valor intermediário. Logo esto continua sendo valido para sistemas dinâmicos em $\mathbb{R}$ e $[0, \infty)$.

**Teorema 4.1.7.** *Se o sistema dinâmico $(\mathbb{R}, f)$ (resp. $([0, \infty), f)$) é transitivo. Então o conjunto dos pontos periódicos de $f$ é denso em $\mathbb{R}$ (resp. $[0, \infty)$).*

Assim podemos provar o análogo do teorema 3.3.2 para os sistemas dinâmicos em $\mathbb{R}$ e $[0, \infty)$.

**Teorema 4.1.8.** *Os sistemas dinâmicos $(\mathbb{R}, f)$ e $([0, \infty), f)$ são topologicamente mixing se, e somente se, são totalmente transitivos.*

A prova é a mesma que a prova do teorema 3.3.1, se mostra que se o sistema dinâmico é totalmente transitiva então ele satisfaz a caracterização da proposições 4.1.5 e 4.1.6.

## 4.2 Mapas Transitivos em $[0,\infty)$

Nesta seção mostraremos algumas consequências de ter um sistema dinâmico $[0,\infty)$ transitivo como sua imagem contem o intervalo $(0,\infty)$, o conjunto de seus pontos críticos é não limitado e o conjunto dos valores críticos também não é limitado. Com estas hipóteses em mente mais outras adicionais damos um teorema recíproco.

**Proposição 4.2.1.** *Se* $([0,\infty),f)$ *é um sistema dinâmico transitivo então sua imagem contem o intervalo* $(0,\infty)$.

*Demonstração.* Como $f$ é transitiva existe $x \in [0,\infty)$ tal que sua orbita é densa em $[0,\infty)$. Para $N \in \mathbb{N}$ existem $k,l \in \mathbb{N}$ tais que $f^k(x) \leq \frac{1}{N} < N \leq f^l(x)$ logo, pela conexidade de $\mathbb{R}$, temos que

$$f(\langle f^{k-1}(x), f^{l-1}(x)\rangle) \supseteq [\frac{1}{N}, N].$$

Como $N$ é arbitrário temos que $f([0,\infty)) \supseteq (0,\infty)$. □

Para os seguintes teoremas lembremos a definição de ponto critico.

**Definição 4.2.2.** *Seja o sistema dinâmico* $([0,\infty),f)$ *dizemos que* $c \in [0,\infty)$ *é um* ***ponto critico*** *se para toda vizinhança* $V$ *de* $c$ *existem* $y,z$ *em* $V$*, com* $y \neq z$*, tal que* $f(y) = f(z)$*. Dizemos que* $f(z)$ *é um valor crítico se* $z$ *é um ponto crítico.*

**Observação 4.2.3.**

- *Notamos o conjunto dos pontos críticos por Crit(f).*
- *Para o sistema dinâmico* $([0,\infty),f)$ *os máximos e mínimos locais são pontos críticos.*
- *O conjunto dos pontos críticos é fechado.*

**Proposição 4.2.4.** *Seja* $([0,\infty),f)$ *um sistema dinâmico transitivo então o ínfimo dos valores críticos é* $0$.

*Demonstração.* Suponhamos que existe $a > 0$ tal que

$$a = \inf\{f(x) \mid x \in Crit(f)\}.$$

Vejamos que o intervalo $[a,\infty)$ é invariante, já que se $x \in [a,\infty)$ temos que $f(x) \geq f(c)$ para algum $c \in Crit(f)$, isto porque $Crit(f)$ é não limitado corolário 4.2.6, e $a \geq f(c)$ para todo $c \in Crit(f)$. Logo $f([a,\infty)) \subseteq [a,\infty)$ o qual é um absurdo porque $f$ é transitiva. □

**Teorema 4.2.5.** *Seja* $([0,\infty),f)$ *um sistema dinâmico tal que o conjunto dos pontos críticos é limitado. Então existe um intervalo próprio, fechado, não degenerado invariante.*

*Demonstração.* Se existem dois pontos fixos $x < y$ tal que entre eles não existem pontos críticos, então $f$ é monótona crescente em $[x,y]$ e o intervalo $[x,y]$ seria invariante e teorema seria provado. Seja $Fix(f)$ o conjunto dos pontos fixos e suponhamos que entre dois pontos fixos existe sempre existe um ponto critico. Como o conjunto dos pontos críticos é limitado então conjunto dos pontos fixos é limitado.

Seja $Crit(f)$ o conjunto dos pontos críticos de $f$. Como $Crit(f)$ é fechado e limitado em $[0,\infty)$ então $Crit(f)$ é compacto. Assim $f(Crit(f))$ é compacto, fechado e limitado, porque $f$ é continua. Logo existe $d > 0$ tal que

$$Crit(f) \cup f(Crit(f)) \cup Fix(f) \subseteq [0,d].$$

Em $[d, \infty)$ $f$ é estritamente monótona e sem pontos fixos.
Se $f$ é decrescente em $[d, \infty)$ então $f$ seria limitada. Seja $c$ o supremo da imagem de $f$, então o intervalo $[0, c]$ é invariante.
Se $f$ é crescente em $[d, \infty)$ temos dois casos: um no qual o gráfico de $f$ esta sobre ou debaixo da diagonal em $[d, \infty)$ . Se $f(x) > x$ para todo $x > d$ então $[d, \infty)$ é invariante. No outro caso temos que $f(x) < x$ para todo $x > d$ então $[0, d]$ é invariante □

**Corolário 4.2.6.** *Seja* $([0, \infty), f)$ *um sistema dinâmico transitivo então o conjunto dos pontos críticos não é limitado.*

**Teorema 4.2.7.** *Seja* $([0, \infty), f)$ *um sistema dinâmico tal que sua imagem contem a* $(0, \infty)$*. Se os pontos críticos de* $f$ *são limitados se e somente se seus valores críticos são não limitados.*

*Demonstração.* Seja $Crit(f)$ o conjunto dos pontos críticos de $f$. Como $Crit(f)$ é fechado e limitado em $[0, \infty)$ então $Crit(f)$ é compacto. Assim $f(Crit(f))$ é compacto, fechado e limitado, porque $f$ é continua.

Agora vamos provar a recíproca. Se $f(Crit(f))$ é limitado existe $M > 0$ tal que $f(Crit(f)) \subseteq [0, M]$. Seja

$$A = \cup\{[a, b] : a < b \text{ com } a, b \in Crit(f)\}.$$

Logo $f(A) \subseteq [0, M]$ porque para $a$ e $b$ pontos críticos temos que $f([a, b]) \subseteq [0, M]$ pois o máximo e minimo de $f$ em $[a, b]$ são pontos críticos e seu valor esta limitado por $M$. Se $Crit(f)$ é não limitado, então $A = \mathbb{R}$ o que nos diz que a imagem de $f$ é limitada o qual é um absurdo porque $f$ é sobrejetiva. Portanto $Crit(f)$ é limitado. □

Até agora temos que se um sistema dinâmico $([0, \infty), f)$ é transitivo então o conjunto de seus pontos críticos é não limitado (corolario 4.2.6), conjunto de seus valores críticos é não limitado (teorema 4.2.7) e seu ínfimo é zero (proposição 4.2.4). Esta condições ainda não são suficientes para ter um teorema de volta pois podemos construir um mapa que satisfaz estas condições e não é transitivo pois tem um intervalo próprio, fechado com interior não vazio e invariante. Além disso também notamos que $f$ a pode ser expansora.

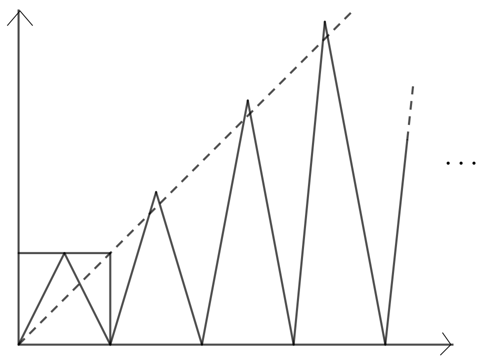


Figura 4.1: Mapa não transitivo satisfazendo sobrejetiva, 2-expansora, pontos e valores críticos não limitados.

**Teorema 4.2.8.** *Seja* $([0, \infty), f)$ *um sistema dinâmico tal que satisfaz:*

**a)** *O conjunto dos pontos críticos* $Crit(f)$ *é contável e não limitado, isto é,* $Crit(f) = \{x_n < x_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ *é não limitado. E* $\eta := \sup\{x_{n+1} - x_n : n \geq 1\}$ *é finito e*

$$\eta \leq \frac{(x_2+1)x_2}{2} \tag{4.1}$$

**b)** *O conjunto dos valores críticos satisfaz*

$$f(x_0) < 2\eta, \ f(x_{2n-1}) \geq x_{2n-1} + 2\eta \ e \ f(x_{2n}) \leq \frac{2\eta}{x_{2n}+1} \ para\ n \geq 1.$$

**c)** *A função* $f$ *é* $\lambda$*-expansora com* $\lambda > 2$*, isto é, para todo* $x, y \in I$ *onde* $f$ *é monótona em* $I$ *temos que*

$$|f(x) - f(y)| \geq \lambda |x - y|.$$

*Então* $([0,\infty), f)$ *é topologicamente mixing.*

*Demonstração.* Notamos de $a)$ e $b)$ os seguintes limites

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} f(x_{2n+1}) = \infty \ e \ \lim_{n\to\infty} f(x_{2n}) = 0. \tag{4.2}$$

Vejamos que os pontos críticos de $f$ são mínimos ou máximos locais. Como $f$ não pode ser constante num subintervalo de $[0,\infty)$ porque se fosse assim então o conjunto dos pontos críticos seria infinito não contável. Vemos que $x_0 = 0$ e que como $f(0) < 2\eta$ então $x_0$ é um minimo local, de ai temos que $x_1$ é um máximo local e $x_2$ é minimo local de aqui deduzimos que os pontos críticos $\{x_{2n}\}_{n\geq 1}$ são mínimos locais e $\{x_{2n+1}\}_{n\geq 1}$ são máximos locais.

O conjunto dos pontos críticos de $f$ é um conjunto discreto ou seja que não tem pontos de acumulação pois se tivesse um ponto de acumulação $z$ então existe uma subsequência de máximos locais convergente, isto é, $x_{2n_j+1} \to z$ quando $j \to \infty$. Logo, o conjunto dos valores críticos $\{f(x_{2n+1})\}_{n\geq 1}$ teria uma subsequência convergente, isto é, $f(x_{2n_j+1}) \to f(z)$ quando $j \to \infty$ o qual é uma contradição por (4.2).

Vejamos que $([0,\infty), f)$ é topologicamente mixing. Notamos que nos intervalos $[x_n, x_{n+1}]$ para $n \geq 0$ temos que $f$ é monótona. De (4.1) temos que

$$\frac{2\eta}{x_{2n}+1} \leq \frac{2\eta}{x_2+1} \leq x_2 \leq x_{2n} \text{ para } n \geq 1$$

assim

$$f((x_0, x_1)) \supseteq (2\eta, x_1 + 2\eta) \supseteq (x_1, x_3),$$

$$f((x_{2n}, x_{2n+1})) \supseteq \left(\frac{2\eta}{x_{2n}+1}, x_{2n+1} + 2\eta\right) \supseteq (x_{2n+2}, x_{2n+3})$$

e

$$f((x_{2n-1}, x_{2n})) \supseteq \left(\frac{2\eta}{x_{2n}+1}, x_{2n-1} + 2\eta\right) \supseteq (x_{2n}, x_{2n+1})$$

logo

$$(x_{2n}, x_{2n+1}) \xrightarrow{f} \left(\frac{2\eta}{x_{2n}+1}, x_{2n+3}\right) \xrightarrow{f} \left(\frac{2\eta}{x_{2n+2}+1}, x_{2n+5}\right) \xrightarrow{f} \cdots$$

e

$$(x_{2n-1}, x_{2n}) \xrightarrow{f} \left(\frac{2\eta}{x_{2n}+1}, x_{2n+1}\right) \xrightarrow{f} \left(\frac{2\eta}{x_{2n+2}+1}, x_{2n+3}\right) \xrightarrow{f} \cdots .$$

Em resumo, notamos que cada iteração do intervalo $(x_n, x_{n+1})$, para $n \geq 1$, contém ele mesmo e vai crescendo cada vez mais ate intersectar qualquer intervalo da semi-reta, por isto uma vez que intersecta continua intersectando nas seguintes iteradas.

Logo para mostrar que $([0,\infty), f)$ é topologicamente mixing usando a proposição 4.1.6 basta que para qualquer $J$ intervalo não degenerado exista $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(J) \supseteq (x_n, x_{n+1})$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Notamos que $f$ é $\lambda$-expansora com $\lambda > 2$ então $(\frac{\lambda}{2})^n \to \infty$ quando $n \to \infty$, assim existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|J|\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k > 2\eta. \tag{4.3}$$

Suponhamos que $J$ não contém pontos críticos, logo $f$ é monótona em $J$, assim temos $|f(J)| \geq \lambda|J|$. Se $f(J)$ contém dois pontos críticos pela conexidade de $f(J)$ este contém dois pontos críticos consecutivos e terminamos a prova. Se $f(J)$ contém um único ponto crítico então podemos dividir $J$ em dois subintervalos disjuntos $J_1$ e $J_2$ tal que $J_1 \cup J_2 = J$. Temos que $f$ é monótona em cada intervalo $J_1$ e $J_2$ e

$$|J_i| \geq \frac{|J|}{2} \text{ e } |f(J_i)| \geq \lambda|J_i| \geq \lambda\frac{|J|}{2} \text{ para algum } i = 1,2.$$

Assim continuando recursivamente com este processo em caso de que $J$, $f(J)$, $f^2(J)$, ..., $f^k(J)$ não contem dois ou mais pontos críticos então existe $J'$ subintervalo não degenerado de $J$ tal que

$$|f^l(J')| \geq |J|\left(\frac{\lambda}{2}\right)^l \text{ para } l = 0,1,\ldots,k. \tag{4.4}$$

Logo juntando (4.4) e (4.3) tem-se que $f^k(J')$ deve conter dois pontos críticos consecutivos. Portanto o sistema dinâmico $([0,\infty), f)$ é topologicamente mixing. □

**Exemplo 4.2.9.** *Seja $([0,\infty), f)$ um sistema dinâmico definido da seguente forma para $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$f(n) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \textit{se } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \textit{se } n \textit{ é par e } n \neq 0 \\ n+2 & \textit{se } n \textit{ é impar} \end{cases}$$

*e em $[n.n+1]$ de modo linear para $n \in \mathbb{N}$.*

*Vejamos que $([0,\infty), f)$ satisfaz as hipóteses do teorema 4.2.8*

**a)** *Pela definição da $f$ temos que $Crit(f) = \{x_n = n \mid n \in \mathbb{N}\}$ que é contável e não limitado,*

$$\eta = \sup\{x_{n+1} - x_n \mid x_n \in Crit(f), x_n < x_{n+1}\} = 1 \leq \frac{(x_2+1)x_2}{2} = 3.$$

**b)** *O conjunto dos valores críticos satisfaz*

$$f(x_0) = \frac{1}{2} < 2 = 2\eta,$$

$$f(x_{2n-1}) = 2n+3 \geq x_{2n-1} + 2\eta \textit{ e } f(x_{2n}) = \frac{1}{2n} \leq \frac{2}{2n+1} = \frac{2\eta}{x_{2n}+1} \textit{ para } n \geq 1.$$

**c)** *A função $f$ é $\lambda$-expansora com $\lambda > 2$. Como $f$ é linear em $[n, n+1]$ pelo teorema do valor meio só basta calcular a pendente em $[0,1]$, $[2n-1, 2n]$ e $[2n, 2n+1]$, assim*

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\frac{f(2n) - f(2n-1)}{2n - (2n-1)} = \frac{1}{2n} - (2n+1) \leq -\frac{5}{2} \text{ para } n \geq 1 \text{ e}$$

$$\frac{f(2n+1) - f(2n)}{2n+1-2n} = 2n + 3 - \frac{1}{2n} \geq 2n + 2 > \frac{5}{2} \text{ para } n \geq 1.$$

*Assim $f$ é $\frac{5}{2}$-expansora. Logo pelo teorema 4.2.8 o sistema dinâmico $([0, \inf), f)$ é mixing.*

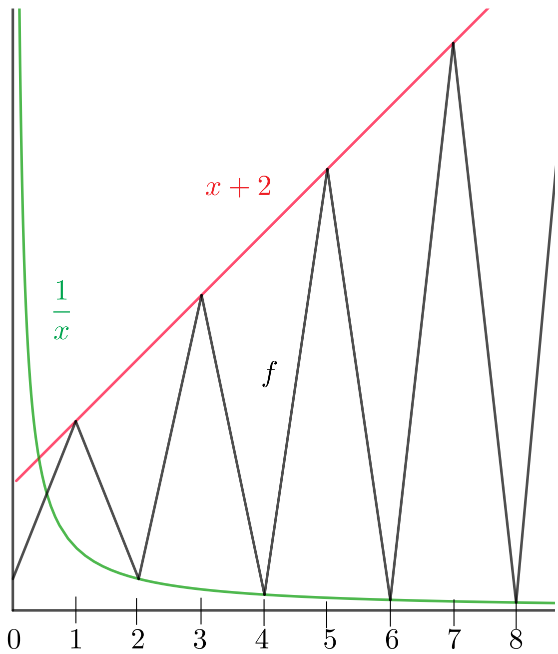


Figura 4.2: Mapa mixing em $[0, \infty)$

**Observação 4.2.10.** *O exemplo* 4.2.9 *é sistema dinâmico transitivo onde $f$ não é sobrejetiva pois $f([0, \infty)) = (0, \infty)$*

## 4.3 Mapas Transitivos em $\mathbb{R}$

Nesta seção de forma similar que na seção anterior veremos que se $(\mathbb{R}, f)$ um sistema dinâmico é transitivo então o conjunto de pontos críticos e valores críticos não é limitada, as provas são similares mas no caso da reta desprendem mais casos. E tambem damos condiciones sufientes para ter um mapa transitivo.

Da mesma forma que na seção anterior denotaremos por $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos críticos de $f$. Notamos que a proposição 2.1.11 continua sendo valida na reta. Lembramos do exemplo 4.2.9 que na semi-reta isto não é valido.

**Proposição 4.3.1.** *Se $(\mathbb{R}, f)$ é um sistema dinâmico transitivo então ele é sobrejetivo.*

*Demonstração.* Como $f$ é transitiva existe $x \in \mathbb{R}$ tal que sua orbita é densa em $\mathbb{R}$. Para $N \in \mathbb{N}$ existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que $f^k(x) \leq -N < N \leq f^l(x)$ logo, pela conexidade de $\mathbb{R}$, temos que

$$f(\langle f^{k-1}(x), f^{l-1}(x) \rangle) \supseteq [-N, N].$$

Como $N$ é arbitrário temos que $f$ é sobrejetiva. $\square$

**Teorema 4.3.2.** *Seja $(\mathbb{R}, f)$ um sistema dinâmico. Se $Crit(f)$ é limitado então existem $p < q$ em $\mathbb{R}$ tal que $[p, q]$ ou $(-\infty, p]$ ou $[q, \infty)$ ou $(-\infty, p) \cup (q, \infty)$ é invariante.*

*Demonstração.* Se existem dois pontos fixos $x < y$ tal que entre eles não existem pontos críticos, então $f$ é monótona crescente em $[x, y]$ e o intervalo $[x, y]$ seria invariante e teorema estaria provado.
Se não temos o caso anterior, então temos que $Fix(f)$, o conjunto de todos os pontos fixos de $f$, é limitado pois $Crit(f)$ é limitado. Como $Crit(f)$ é um conjunto compacto, já que é fechado e limitado em $\mathbb{R}$. Logo, $f(Crit(f))$ é compacto pois $f$ é continua. Então existem números reais $c < d$ tais que

$$(Crit(f) \cup f(Crit(f)) \cup Fix(f)) \subseteq [c, d].$$

Agora consideramos três casos.

**Caso a)** Suponha que existe $x > d$ tal que $f(x) > x$. Então temos que $f(x) > x$ para todo $x > d$ porque não existem pontos críticos e pontos fixos maiores que $d$. Logo o intervalo $[d, \infty)$ é invariante.

**Caso b)** Usando o mesmo argumento que no caso a). Se existe um $x < c$ tal que $f(x) < x$, temos que o intervalo $(-\infty, c]$ é invariante.

**Caso c)** Se o caso a) e b) não são satisfeitos temos que $f(x) > x$ para todo $x < c$ e $f(x) < x$ para todo $x > d$. Vamos considerar três subcasos. Sabemos que $f$ é monótona em $(-\infty, c]$ e em $[d, \infty)$.

**Caso c.1)** Se $f$ é crescente em $(-\infty, c] \cup [d, \infty)$. Vamos ver que $[c, d]$ é um intervalo invariante. Seja $a$ e $b$ o ínfimo e o supremo de $Crit(f)$ respetivamente. Então $f[a, b]$ esta contido em qualquer intervalo que contenha $f(C)$ já que todo os máximos e mínimos locais devem estar em $f(Crit(f))$. Além disso, se $c \leq x \leq a$ então $f(c) \leq f(x) \leq f(a)$, daí $f$ é crescente em $[c, a]$ porque em $[c, a]$ não tem pontos críticos, da mesma forma $f[b, d]$ está contido em $[c, d]$. Logo $[c, d]$ é um intervalo invariante já que a imagem de $[c, a], [a, b]$ e $[b, d]$ está contida em $[c, d]$.

**Caso c.2)** Se $f$ é crescente em $(-\infty, c]$ e decrescente em $[d, \infty)$ ou vice-versa. Então $f$ não é sobrejetiva. Suponhamos que $f$ é crescente em $(-\infty, c]$ e decrescente em $[d, \infty)$ vemos que $f$ é limitada superiormente já que $\sup f(\mathbb{R}) = \sup f[c, d]$ logo a imagem de $\mathbb{R}$ pela $f$ é um raio invariante. Da mesma forma se $f$ é decrescente em $(-\infty, c]$ e crescente em $[d, \infty)$ vemos que $f$ é limitada inferiormente já que $\inf f(\mathbb{R}) = \inf [c, d]$ logo a imagem de $\mathbb{R}$ pela $f$ é um raio invariante.

**Caso c.3)** Se $f$ é decrescente em $(-\infty, c] \cup [d, \infty)$. Vamos assumir que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

já que se a $f$ for limitada inferiormente ou superiormente não teríamos nada por provar porque já teríamos um intervalo invariante, a imagem de $f$.
Como o $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ temos que existe $x_0 > d$ tal que $f(x_0) < c$. Então no raio $[x_0, \infty)$ é crescente pela $f^2$. Suponhamos que existe $y \in [x_0, \infty)$ tal que $f^2(y) \geq y$. Então não difícil mostrar que o conjunto

$$(-\infty, f(y)] \cup [y, \infty)$$

é invariante. Como $f[y, \infty) = (-\infty, f(y)] \subseteq (-\infty, c]$ logo $f^2[y, \infty) = f(-\infty, f(y)] = [f^2(y), \infty) \subseteq [y, \infty)$. Agora se não existe $y \in [x_0, \infty)$ tal que $f^2(y) \geq y$ temos que $f^2(x) < x$ para todo $x \geq x_0$.
Afirmamos que $[f(x_0), x_0]$ é invariante. Notamos que $f$ é decrescente em $(-\infty, a]$ e $[b, \infty)$. Se $t \in [f(x_0), a]$ então $f(t) \leq f^2(x_0) < x_0$ pois $f$ é decrescente em $(-\infty, a]$, e $f(b) \geq f(a) \geq c \geq f(x_0)$. Da mesma forma, se $t \in [b, x_0]$ temos que $f(x_0) \leq f(t) \leq f(b) \leq d \leq x_0$, já que $f$ é decrescente em $[b, \infty)$. Se $t$ esta em $[a, b]$ então $f(t)$ esta em $[c, d]$ que esta contido em $[f(x_0, x_0)]$. Logo temos

$$f([f(x_0), a] \cup [a, b] \cup [b, x_0]) \subseteq [f(x_0), x_0].$$

Portanto $[f(x_0), x_0]$ é invariante.

$\square$

**Corolário 4.3.3.** *Se $(\mathbb{R}, f)$ é transitivo. Então $Crit(f)$ é não limitado. Em particular $f$ não pode ser um polinômio.*

**Teorema 4.3.4.** *Seja $(\mathbb{R}, f)$ sobrejetivo. Então se $Crit(f)$ é limitado se, e somente, se $f(Crit(f))$ é limitado.*

*Demonstração.* Notamos que se $Crit(f)$ é limitado então $f(Crit(f))$ é limitado pois $Crit(f)$ seria compacto e $f$ é continua.

Para mostrar o reciproco primeiro notemos que se $a$ e $b$ são dois pontos críticos com $a < b$ então os valores onde são atingidos o máximo e o mi mínimo são pontos críticos. Como $f$ é continua em $[a, b]$ então $f$ atinge seu máximo. Seja $c$ este, isto é, $f(c) \geq f(t)$ para todo $t$ em $[a, b]$. Se $a < c < b$ não é difícil ver que $c$ é um ponto critico. Se $c = a$ ou $c = b$ já é um ponto critico. Da mesma forma mostra-se que o valor onde atinge o minimo é ponto critico.

Se $f(Crit(f))$ é limitado existem $m < M$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(Crit(f)) \subseteq [m, M]$. Seja

$$A = \cup\{[a, b] : a < b \text{ com } a, b \in Crit(f)\}.$$

Logo $f(A) \subseteq [m, M]$ pois para $a$ e $b$ pontos críticos temos que $f([a, b]) \subseteq [m, M]$ porque o máximo e o minimo de $f$ em $[a, b]$ são pontos críticos e seu valor esta limitado por $M$ e $m$. Consideramos três casos.

**Caso a)** Se $Crit(f)$ não é limitado inferiormente e superiormente, então $A = \mathbb{R}$. Logo a imagem de $\mathbb{R}$ pela $f$ esta contida em $[M, m]$ o qual é uma contradição porque $f$ é sobrejetiva.

**Caso b)** Se $Crit(f)$ é limitada inferiormente. Seja $a = \inf Crit(f)$. Então $A = [a, \infty)$, porque senão estamos no caso a). Então $f$ é estritamente monótona em $(-\infty, a]$. Assim a imagem de $\mathbb{R}$ pela $f$ esta contida em $(-\infty, f(a)] \cup [M, m]$ se $f$ é crescente em $(-\infty, a]$ e $[m, M] \cup [f(a), \infty)$ se $f$ é decrescente em $(-\infty, a]$. Nestes casos tem-se uma contradição por que $f$ é sobrejetiva.

**Caso c)** Se $Crit(f)$ é limitada superiormente. Da mesma forma que no caso (b) mostra-se que chega a uma contradição. Finalmente temos que se $f(Crit(f))$ é limitado então $Crit(f)$ é limitado.

□

Temos que se $(\mathbb{R}, f)$ é transitivo então $f$ é sobrejetiva, o conjunto dos pontos críticos não é limitado e o conjunto dos valores críticos não é limitado. Mas esto não é suficiente para ter um teorema com a reciproca. É possível mostrar um sistema dinâmico $(\mathbb{R}, f)$ onde $f$ é sobrejetiva, o conjunto dos pontos críticos é não limitado e a imagem do conjunto dos valores críticos é não limitado e $f$ NÃO é transitiva. Exemplo figura 4.3, todas todas as órbitas são crescentes $x \leq f(x)$. Além disso é expansor

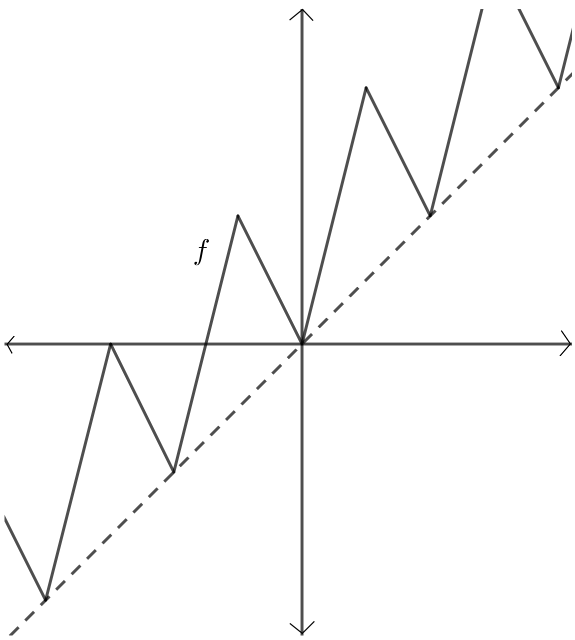


Figura 4.3: Mapa satisafazendo

Nos seguinte teorema nos da condições suficientes para que $f$ seja uma função transitiva.

**Teorema 4.3.5.** *Seja $(\mathbb{R}, f)$ um sistema dinâmico tal que satisfaz:*

**a)** *O conjunto dos pontos críticos $Crit(f)$ é contável e não limitado, isto é, $Crit(f) = \{x_n < x_{n+1} : n \in \mathbb{Z}\}$ é não limitado superiormente e inferiormente. E $\eta := \sup\{x_{n+1} - x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é finito.*

**b)** *O conjunto dos valores críticos satisfaz*

$$f(x_{2n}) \geq x_{2n} + 2\eta \text{ e } f(x_{2n+1}) \leq x_{2n+1} - 2\eta \text{ para } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

**c)** *A função $f$ é $\lambda$-expansora com $\lambda > 2$.*

*Então $([0, \infty), f)$ é topologicamente mixing.*

*Demonstração.* Da mesma forma que no teorema 4.2.8 mostramos que o conjunto dos pontos críticos são máximos e mínimos locais, além disso é discreto. Pela 4.5 notamos que os pontos críticos $x_{2n}$ são máximos locais e $x_{2n}$ são mínimos locais. Agora notamos que os intervalos $(x_n, x_{n+1})$ satisfazem a propriedade de ser mixing. De 4.5 temos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{2n}) = \infty \ e \ \lim_{n\to-\infty} f(x_{2n+1}) = -\infty. \tag{4.6}$$

Assim temos que

$$(x_{2n-1}, x_{2n}) \xrightarrow{f} (x_{2n-3}, x_{2n+2}) \xrightarrow{f} (x_{2n-5}, x_{2n+4}) \xrightarrow{f} \cdots \text{ para } n \in \mathbb{Z}$$

e

$$(x_{2n}, x_{2n+1}) \xrightarrow{f} (x_{2n-1}, x_{2n+2}) \xrightarrow{f} (x_{2n-3}, x_{2n+4}) \xrightarrow{f} \cdots \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Logo os iterados de $(x_n, x_{n+1})$ vão crescendo ate intersetar qualquer aberto na reta, por 4.6. Da mesma forma que na prova do teorema 4.2.8 mostra-se que dado $J$ intervalo aberto não degenerado de $\mathbb{R}$ temos que existem $k, n \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(J) \supseteq (x_n, x_{n+1})$ o que termina a prova. ☐

**Exemplo 4.3.6.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida do seguinte jeito. Os pontos críticos da $f$ são os números inteiros $\mathbb{Z}$. Seja $n \in \mathbb{Z}$ definimos*

$$f(n) := \begin{cases} n+2 & \textit{se } n \textit{ é par} \\ n-2 & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \end{cases}$$

*e no intervalo $[n, n+1]$ de modo linear.*

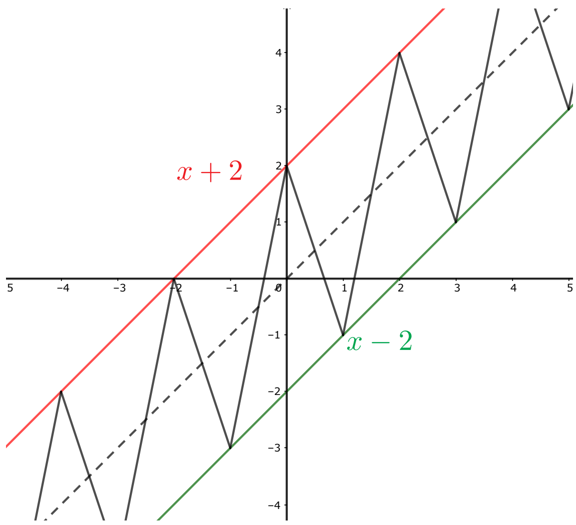


Figura 4.4: Mapa Transitivo em $\mathbb{R}$

*Para mostrar que $f$ é mixing. Vejamos que $(\mathbb{R}, f)$ satisfaz as hipóteses do teorema 4.3.5*

**a)** *Os pontos críticos de $f$ são os inteiros, $Crit(f) = \{x_n = n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e*

$$\eta = \sup\{x_{n+1} - x_n \mid n \in \mathbb{Z}\} = 1$$

**b)** *Os valores críticos satisfazem*

$$f(2n) \geq 2n + 2\eta \text{ e } f(2n+1) \leq 2n + 1 - 2\eta \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

**c)** *$f$ é $\lambda$-expansora com $\lambda > 2$. Como $f$ é linear em $[n, n+1]$ pelo teorema do valor meio só basta calcular a pendente em $[0,1]$, $[2n-1, 2n]$ e $[2n, 2n+1]$, assim*

$$\frac{f(2n) - f(2n-1)}{2n - (2n-1)} = 2n + 2 - (2n - 1 - 2) = 5 \text{ e}$$

$$\frac{f(2n+1) - f(2n)}{2n + 1 - 2n} = 2n + 1 - 2 - (2n + 2) = -3 \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

*Assim $f$ é 3-expansora. Logo pelo teorema 4.3.5 o sistema dinâmico $(\mathbb{R}, f)$ é mixing.*

**Teorema 4.3.7.** *Seja $(\mathbb{R}, f)$ um sistema dinâmico tal que satisfaz:*

**a)** *$f(x) = -x$ para $x \leq 0$.*

**b)** *O conjunto dos pontos críticos $Crit(f)$ é contável e não limitado, isto é, $Crit(f) = \{x_n < x_{n+1} : n \geq 1\}$ é não limitado. E $\eta := \sup\{x_{n+1} - x_n : n \geq 1\}$ é finito e*

$$\eta \leq \frac{(x_2+1)x_2}{2} \tag{4.7}$$

**c)** *O conjunto dos valores críticos satisfaz*

$$f(x_{2n+1}) \leq -x_{2n+1} - 2\eta \text{ e } f(x_{2n}) \geq -\frac{2\eta}{x_{2n}+1} \text{ para } n \geq 1.$$

**d)** *A função $f$ é $\lambda$-expansora com $\lambda > 2$, isto é, para todo $x, y \in I$ onde $f$ é monótona em $I$ temos que*

$$|f(x) - f(y)| \geq \lambda |x - y|.$$

*Então $(\mathbb{R}, f)$ é transitiva.*

*Demonstração.* Seja $g := f^2 \mid_{[0,\infty)}$. Notamos que $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz

- Os pontos críticos de $g$ são os pontos críticos de $f$ união $\{0\}$

$$Crti(g) = \{0\} \cup Crit(f) = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots\}.$$

- Os pontos críticos satisfazem

$$g(x_0) = 0 < 2\eta, \; g(x_{2n-1}) \geq x_{2n-1} + 2\eta \text{ e } g(x_{2n}) \leq \frac{2\eta}{x_{2n}+1} \text{ para } n \geq 1,$$

onde $\eta = \sup\{x_{n+1} - x_n : n \geq 1\}$

- $g$ é $\lambda$-expansora com $\lambda > 2$.

Fazendo o mesmo raciocínio da prova do teorema 4.2.8 temos que

$\star$) Dados $U'$, $V'$ abertos não vazios contidos em $(0, \infty)$ temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(U') \cap V' \neq \emptyset$.

Assim $U$, $V$ abertos não vazios de $\mathbb{R}$ a prova se divide em casos

**i)** Se $U \cap (0, \infty) \neq \emptyset$ e $V \cap (0, \infty) \neq \emptyset$. Escrevendo $U' = U \cap (0, \infty)$ e $V' = V \cap (0, \infty)$ temos que são abertos não vazios aos quais podemos aplicar $\star$), assim temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{2k}(U) \cap V \supseteq g^k(U') \cap V' \neq \emptyset.$$

**ii)** Se $U \cap (0, \infty) \neq \emptyset$ e $V \cap (0, \infty) = \emptyset$. Escrevemos $U' = U \cap (0, \infty)$ e $V' = f^{-1}(V) \cap (0, \infty)$, logo aplicando $\star$) a eles temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(U') \cap V' \neq \emptyset$. Assim

$$\emptyset \neq f(f^{2k}(U') \cap V') \subseteq f^{2k+1}(U') \cap f(V') \subseteq f^{2k+1}(U) \cap V.$$

**iii)** Se $U \cap (0, \infty) = \emptyset$ e $V \cap (0, \infty) \neq \emptyset$. Escrevemos $U' = f(U)$, que é aberto porque $f$ é monótona em $(\infty, 0)$ e $V' = V \cap (0, \infty)$, logo aplicando $\star$) a eles temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(U') \cap V' \neq \emptyset$. Assim

$$f^{2k+1}(U) \cap V \supseteq f^{2k}(U') \cap V' \neq \emptyset.$$

**iv)** Se $U \cap (0, \infty) = \emptyset$ e $V \cap (0, \infty) = \emptyset$. Escrevemos $U' = f(U)$, que é aberto porque $f$ é monótona em $(\infty, 0)$, e $V' = f^{-1}(V) \cap (0, \infty)$, logo aplicando $\star$) a eles temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(U') \cap V' \neq \emptyset$. Assim

$$\emptyset = f(f^{2k}(U') \cap V') \subseteq f^{2k+1}(U) \cap f(V') \subseteq f^{2k+1}(U) \cap V.$$

$\square$

**Exemplo 4.3.8.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida do seguinte jeito. Os pontos críticos da $f$ são os números naturais. Seja $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$f(x) := \begin{cases} -x & se\ x \leq 0 \\ -n-2 & se\ x = 2n+1\ para\ n \geq 1 \\ -\frac{1}{n} & se\ x = 2n\ para\ n \geq 1 \end{cases}$$

*e no intervalo $[n, n+1]$, para $n \geq 0$, de modo linear.*

*Vejamos que $f$ é transitiva. Notamos que $x = 0$ é seu único ponto fixo e que*

$$f([0, \infty)) = (-\infty, 0]\ e\ f((-\infty, 0]) = [0, \infty).$$

*Além disso, vemos que $([0, \infty), f^2 |_{[0,\infty)})$ é transitiva pelo teorema 4.2.8. Logo, existe $x_0 \in [0, \infty)$ tal que $\omega(x_0, f^2) = [0, \infty)$, assim para todo $\varepsilon > 0$ e $y \in [0, \infty)$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|f^{2k}(x_0) - y| < \varepsilon.$$

*Vejamos que $\omega(f(x_0), f^2) = (0, \infty]$. Para $\varepsilon > 0$ e $z \in (-\infty, 0]$ por $\omega(x_0, f^2) = [0, \infty)$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $|-z - f^{2l}(x_0)| < \varepsilon$ assim*

$$|z - f^{2l+1}(x_0)| = |z - (-f^{2l}(x_0)| = |-z - f^{2l}(x_0)| < \varepsilon.$$

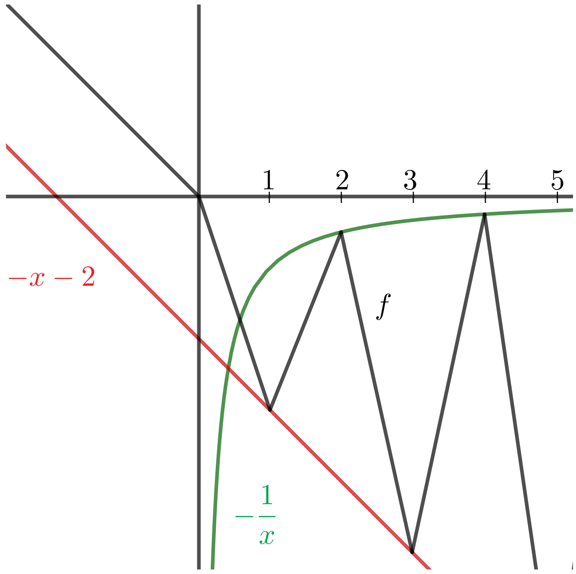


Figura 4.5: Mapa transitivo em $\mathbb{R}$ não mixing.

*Logo temos que $f$ é transitiva pelo lema 1.2.4-iv) pois*

$$\omega(x_0, f) = \omega(x_0, f^2) \cup \omega(f(x_0), f^2) = [0, \infty) \cup (-\infty, 0] = \mathbb{R}.$$

*Tambem vemos que $f$ não mixing pois $f$ não é totalmente transitiva, teorema 4.1.8.*

# Capítulo 5

# Transitividade de Mapas Alternantes em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Neste capitulo estudamos mapas transitivos na reta sem pontos críticos e sem pontos fixos na reta(para mais ser precisos num subconjunto da reta). Pelo o teorema 4.3.2 sabemos que se um sistema dinâmico $(\mathbb{R}, f)$ é transitivo então seu conjunto de pontos críticos é infinito, se $f$ fosse $C^1$ então $f'(p) = 0$ para todo $p$ ponto critico.
No estudo da robustez da transitividade, para transformações diferenciáveis na reta sem pontos críticos conhece-se o seguinte resultado ([4],Teorema 1), o qual diz; dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável e com um ponto crítico então existe uma pertubação $C^1$ $\varepsilon$-próxima com um ponto periódico atrator. Isto elimina que um mapa transitivo na reta com a topologia $C^1$ seja robustamente transitivo pela proposição 2.1.8.

Assim, se temos $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $C^1$, transitiva sem pontos críticos então temos que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in Dom(f)$, logo $f$ não pode ser definida em toda a reta pois de ser assim seria um homeomorfismo e os homeomorfismos na reta não são transitivos. Assim existe $p_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p_0 \notin Dom(f)$ e $f$ não pode ser estendida a $\mathbb{R}$. Neste capitulo estudamos transformações com só uma descontinuidade.

Na primeira seção definimos os sistemas alternantes e damos condições suficientes para ter um sistema alternante.

Na segunda seção se mostram condições necessárias e suficientes para que um sistema alternante seja transitivo. Isto é tomado da teses de Muñoz [7]

## 5.1 Sistemas Alternantes

Nesta seção apresentamos os sistemas alternantes e damos consições suficientes pra ter um sistema alternante. Como falamos no começo do capitulo estudaremos mapas da forma $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Começamos com algumas definições

**Definição 5.1.1.** *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função continua.*

- *Para $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos $sign(z)$, o sinal do $z$, por $sign(z) = \dfrac{|z|}{z} \in \{-1, 1\}$*
- *Dizemos que $f$ é **transitiva** se existe $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{p_0\}$ tal que sua orbita é densa em $\mathbb{R}$.*

- *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função continua. Dizemos que $f$ é um* ***sistema alternante*** *se satisfaz:*

  **(SA1)** *Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, $f^{-n}(0)$ é um conjunto de $2^n$ elementos diferentes dos anteriores, assim o conjunto $f^{-n+1}(0) \cup \cdots \cup f^{-1}(0) \cup \{0\}$ tem $2^n - 1$ elementos diferentes.*

  **(SA2)** *Para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $f^n(x) \neq 0$ para $n \in \mathbb{N}$ tem a seguinte propriedade: a $Orb(x, f)$ troca infinitas vezes de sinal. Para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $M \in \mathbb{N}$ com $M > N$ tal que $sign(f^M(x)) = -sign(f^N(x))$.*

**Lema 5.1.2.** *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que*

**i)** *$f$ é continua.*

**ii)** *$f$ é crescente em cada componente conexa de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, isto é, se $x < y$ então $f(x) < f(y)$.*

**iii)** $f((-\infty, 0)) = f((0, \infty)) = \mathbb{R}$.

**iv)** *O ponto $p_0 = 0$ é uma descontinuidade de explosão de $f$, isto é, a linha $x = 0$ é assíntota vertical a $f$ tal que $f(x) \to \infty$ quando $x \to 0^-$ e $f(x) \to -\infty$ quando $x \to 0^+$.*

**v)** *$f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$ e $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$*

**vi)** *O gráfico de $f$ esta sobre o gráfico da identidade em $(-\infty, 0)$ e o gráfico de $f$ esta baixo o gráfico da identidade em $(0, \infty)$.*

*Se $f$ satisfaz $i), \ldots, vi)$ então $f$ é um sistema alternante.*

*Demonstração.* Consideremos $f_- = f \mid_{(-\infty,0)}$ e $f_+ = f \mid_{(0,\infty)}$. Sabemos que estas são continuas, crescentes, bijetivas sobre $\mathbb{R}$ e não tem pontos fixos por $i), ii), iii)$ e $vi)$ respectivamente.

Pela monotocidade de $f_-$ e $f_+$ temos que $f$ satisfaz (SA1). Sejam $x_0^-, x_0^+ \in \mathbb{R}$ tais que $x_0^- < 0 < x_0^+$ e $f(x_0^-) = f(x_0^+) = 0$ (Notamos que $f$ tem unicamente dois raízes). Para $x_0^+$ e $x_0^-$ existem $x_1^-, u_1^-, u_1^+, x_1^+ \in \mathbb{R}$ tais que $u_1^- < 0 < x_1^+$, $x_1^- < 0 < u_1^+$, $f(u_1^-) = f(x_1^+) = x_0^+$ e $f(u_1^+) = f(x_1^-) = x_0^-$. Vejamos que $x_0^- < u_1^- < 0 < x_0^+ < x_1^+$. Se supomos que $x_0^+ \geq x_1^+$ é uma contradição já que $x_0^+ \geq x_1^+ > 0$ aplicando $f_+$ temos que $0 = f_+(x_0^+) \geq f_+(x_1^+) = x_0^+ > 0$ o qual é um absurdo, assim $x_0^+ < x_1^+$. Agora se $0 > x_0^- \geq u_1^-$ aplicando $f_-$ temos que $0 = f(x_0^-) \geq f(u_1^-) = x_0^+$ o qual é um absurdo, assim $x_0^- < u_1^-$. Logo $x_0^- < u_1^- < 0 < x_0^+ < x_1^+$.
Usando o mesmo argumento anterior mostra-se que $x_1^- < x_0^- < 0 < u_1^+ < x_0^+$. Assim

$$x_1^- < x_0^- < u_1^- < 0 < u_1^+ < x_0^+ < x_1^+.$$

Agora considerando a sequências do seguinte jeito
$\{x_1^+ = f_+^{-1}(x_0^+),\ x_n^+ = f_+^{-1}(x_{n-1}^+),\ n \geq 2\}$,
$\{x_1^- = f_-^{-1}(x_0^-),\ x_n^- = f_-^{-1}(x_{n-1}^-),\ n \geq 2\}$,
$\{u_1^+ = f_+^{-1}(x_0^-),\ u_n^+ = f_-^{-1}(x_{n-1}^-),\ n \geq 2\}$ e
$\{u_1^- = f_-^{-1}(x_0^+),\ x_n^- = f_+^{-1}(x_{n-1}^+),\ n \geq 2\}$.

De novo pela monotocidade de $f_-$ e $f_+$ temos que as sequências $(x_n^+)_{n\geq 1}$ e $(u_n^-)_{n\geq 1}$ são crescentes e as sequências $(x_n^-)_{n\geq 1}$ e $(u_n^+)_{n\geq 1}$ são decrescentes e

$$\cdots < x_2^- < x_1^- < x_0^- < u_1^- < u_2^- < \cdots < 0 < \cdots < u_2^+ < u_1^+ < x_0^+ < x_1^+ < x_2^+ < \cdots$$

o qual mostra que se satisfaz (SA1).

Agora para provar (SA2) so basta mostrar que

$$x_n^+ \to \infty,\ x_n^- \to -\infty \text{ e } u_n^\pm \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Sabemos que $(x_n^+)_{n\geq 1}$ é crescente. Suponhamos que existe $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ tal que $x_n^+ \to a$ quando $n \to \infty$, como $f(x_n^+) = x_{n-1}^+$ pela continuidade da $f_+$ temos que $f_+(a) = a$ o qual é um absurdo porque $f_+$ não tem pontos fixos. Logo $x_n^+ \to \infty$. Da mesma forma mostra-se que $x_n^- \to -\infty$ quando $n \to \infty$.
Por outro parte notamos que $f_-(u_n^-) = x_n^+$. Assim se existe $a \in \mathbb{R}$ com $a < 0$, se $u_n^- \to a$ então pela continuidade da $f_-$ temos que $f_-(u_n^-) = x_n^+ \to f_-(a)$ o qual é uma contradição porque $f_-(a) \neq \infty$. Logo $u_n^- \to 0$ quando $n \to \infty$. Da mesma forma mostra-se que $u_n^+ \to 0$ quando $n \to \infty$.
Para finalizar mostraremos que para $z \in \mathbb{R}$ tal que $f^n(z) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ exite $N \in \mathbb{N}$ tal que $sign(f^N(z)) = -sign(z)$. Suponhamos $z > 0$. Se $z > x_0^+$ existem $x_m^+, x_{m+1}^+$ tais que $x_m^+ < z < x_{m+1}^+$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Agora aplicando $f_+$ notamos que

$$x_{m-k}^+ = f_+^k(x_m^+) < f_+^k(z) < f_+^k(x_{m+1}^+) = x_{m+1-k}^+ \text{ para } k = 1, 2, \ldots, m.$$

Para $k = m$ temos $x_0^+ < f_+^m(z) < x_1^+$ aplicando $f_+$ temos que $0 < f^{m+1}(z) < x_0^+$, aplicando de novo $f_+$ temos que $f^{m+2}(z) < 0 = f_+(x_0^+)$. Se $0 < z < x_0^+$ aplicando $f_+$ temos que $f(z) < 0 = f_+(x_0^+)$. Da mesma forma mostra-se para $z < 0$ exite $N \in \mathbb{N}$ tal que $sign(f^N(z)) = -sign(z)$. Portanto fica provado (SA2). □

O lema anterior nos da condições necessárias para saber ter um sistema alternante. Um exemplo importante de um sistema alternante es la função de Boole $B(x) = x - \frac{1}{x}$

**Teorema 5.1.3.** *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que satisfaz*

**a)** *$f$ é transitiva.*

**b)** *Existe $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, tal que $f'(x) \geq a$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

*Então $f$ é um sistema alternante.*

*Demonstração.* Para mostrar que $f$ é um sistema alternante vamos provar que $f$ satisfaz as hipóteses do lema 5.1.2.
As hipóteses i) e ii) do lema 5.1.2 são imediatas. A hipótese v) do lema 5.1.2 se segue de b).
A hipótese vi) do lema 5.1.2 nos diz que $f$ não pode ter pontos fixos como está seu gráfico respeito com a gráfico da identidade. Já que se existira $p \in \mathbb{R}$ tal que é ponto fixo, $f(p) = p$, então por b) teríamos que $f([p, \infty)) = [p, \infty)$ se $p > 0$ e $f((-\infty, p]) = (-\infty, p]$ se $p < 0$ o qual é um absurdo porque $f$ é transitiva. Com isto em mente se $f$ não satisfaz vi) se deveria ter que

$$f(x) > x \text{ para } x > 0 \text{ ou } f(x) < x \text{ para } x < 0$$

em cada caso temos como $f$ é crescente em cada componente conexa de seu domínio temos que

$$f((0,\infty)) \subseteq (0,\infty) \text{ ou } f((-\infty,0)) \subseteq (-\infty,0)$$

o qual é uma contradição por que $f$ é transitiva. Logo $f$ satisfaz a hipótese vi) do lema 5.1.2.
Para mostrar a hipótese iv) do lema 5.1.2 o faremos por contradição. Suponhamos que existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) \to d \text{ quando } x \to 0^- \text{ ou } f(x) \to c \text{ quando } x \to 0^+.$$

Notamos que $c \leq 0 \leq d$, isto porque $f$ satisfaz a hipótese vi) do lema 5.1.2. Também temos que $c \neq 0$ ou $d \neq 0$ ja que se $c = d = 0$ teríamos que $f$ é continua em $\mathbb{R}$ sem pontos críticos o qual é um absurdo porque $f$ é transitiva. Logo temos que

$$f((c,0) \cup (0,d)) \subseteq (c,d)$$

o qual é uma contradição porque $f$ é transitiva.
A hipótese iii) do lema 5.1.2 se segue de que $f$ satisfaz as hipóteses iv) e v) do lema 5.1.2 e da conexidade de $(-\infty,0)$ e $(0,\infty)$. Portanto $f$ pelo lema 5.1.2 $f$ é um sistema alternado. $\square$

## 5.2 Sistemas Alternantes Transitivos

Existem sistemas alternantes que não são transitivos. Já que existem funções diferenciáveis $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tais que satisfazem as hipóteses do lema 5.1.2 e existe $x_0$ ponto periódico de período 2 com $f'(f(x_0)) < 1$ e $f'(x_0) < 1$. Em este caso $x_0$ é um ponto periódico atrator para $f$ (existe $A$ vizinhança de $x_0$ tal que $f(A) \subseteq A$), logo $f$ não pode ser transitiva.

**Definição 5.2.1.** *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante. Dizemos que $f$ é um **sistema alternante crescente** se satisfaz as hipóteses do lema 5.1.2.*

Todo sistema alternante crescente induz uma estrutura, chamada estrutura de Markov induzida pela $f$ e notada por

$$(f,\ (x_n^{\pm})_{n\geq 0},\ (u_n^{\pm})_{n\geq 1},\ \mathbb{P}_f,\ I,\ f_I : I \to I)$$

onde

1)As sequências $(x_n^+)_{n\geq 0}, (x_n^-)_{n\geq 0}, (u_n^+)_{n\geq 1}, (u_n^-)_{n\geq 1}$ são as construídas como no lema 5.1.2, istas sequências serão chamadas sequências induzidas pela $f$. Notamos que

$$f(u_{m+1}^-) = x_m^+,\ f^k(x_m^+) = x_{m-k}^+ \text{ e } f^{m+1}(x_m^+) = 0 \text{ para } m,k \in \mathbb{N} \text{ com } k \geq m,$$

$$f(u_{m+1}^+) = x_m^-,\ f^k(x_m^-) = x_{m-k}^- \text{ e } f^{m+1}(x_m^-) = 0 \text{ para } m,k \in \mathbb{N} \text{ com } k \geq m$$

2) $\mathbb{P}_f$ é a partição induzida pelas sequências $(x_n^{\pm})_{n\geq 0}, (u_n^{\pm})_{n\geq 1}$ e sera chamada partição induzida pela $f$ sobre $\mathbb{R}$. Consideramos os átomos da partição $\mathbb{P}_f$, isto é

$$(B_{n+1}^- = (x_{n+1}^-, x_n^-))_{n\geq 0}, (B_{n+1}^+ = (x_n^+, x_{n+1}^+))_{n\geq 0}$$

$$(I_{n+1}^- = (u_n^-, u_{n+1}^-))_{n\geq 0}, (I_{n+1}^+ = (u_{n+1}^+, u_n^-))_{n\geq 0}$$

notamos que eles tem a seguinte

$$I_{n+1}^- \xrightarrow{f} B_n^+ \xrightarrow{f} B_{n-1}^+ \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} B_1^+ \xrightarrow{f} (0, x_0^+),$$

$$I_{n+1}^+ \xrightarrow{f} B_n^- \xrightarrow{f} B_{n-1}^- \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} B_1^- \xrightarrow{f} (u_0^-, 0). \tag{5.1}$$

3) O intervalo $I = [x_0^-, x_0^+]$ sera chamado o intervalo distribuidor de $f$. Notamos que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existe $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \in I$, isto por (5.1). Logo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(I) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4) A transformação $f_I : I \to I$ definida por

$$f_I(x) := f^{n(x)}(x) \text{ para } x \in I \setminus \{f^{-n}(0) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

onde $n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1,\ f^n(x) \in I\}$. Notamos que $f_I$ está bem definida para quase todo ponto de $I$, exceto num conjunto de medida nula. A transformação $f_I$ sera chamada a transformação induzida pelo intervalo distribuidor de $f$.

Notamos que se $x \in I_n^- \cup I_n^+$, então $f_I(n) = f^n(x)$.

**Definição 5.2.2.** *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante. Dizemos que $f$ é* ***expansiva*** *se para todo $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f^n(x), f^n(y)$ esta definida para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $A \neq B$ átomos da partição $\mathbb{P}_f$ induzido pel $f$ sobre $\mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ com $N \geq 1$ tais que $f^N(x) \in A$ e $f^N(y) \in B$.*

**Teorema 5.2.3.** *Seja $f$ um sistema alternante crescente. Então $f$ é expansiva se e somente se $f$ é transitiva.*

*Demonstração.* Vamos construir uma conjugação entre o shift e a $f$. Seja $A = \mathbb{R} \setminus \{x \mid f^n(x) = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$ e $\Sigma'$ o subconjunto de sequências em $\Sigma$ exeto as que terminam num cadeia de 0's ou 1's infinitos. Definimos $h : A \to \Sigma'$ por $h(x) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } f^n(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f^n(x) < 0. \end{cases}$$

De (AS2) da definição 5.1.1 temos que se $x \in A$ então existe $a \in \Sigma$ tal que $h(x) = a$. A hipóteses implica que se $x \neq y$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) < 0 < f^n(y)$, logo $h$ é injetiva pois se $x \neq y$ então $h(x) \neq h(y)$. Vejamos que $h$ é sobrejetiva . Para $a \in \Sigma'$ denotamos $Q_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ e $Q_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. Definimos para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} A_1 &= \overline{f^{-1}(Q_{a_1}) \cap Q_{a_0}} \\ A_2 &= \overline{f^{-2}(Q_{a_2}) \cap f^{-1}(Q_{a_1}) \cap Q_{a_0}} \\ &\vdots \\ A_n &= \overline{f^{-n}(Q_{a_n}) \cap \cdots \cap f^{-1}(Q_{a_1}) \cap Q_{a_0}}. \end{aligned}$$

Se $a \in \Sigma'$ então existe $N \geq 1$ tal que $a_1, a_2, \cdots, a_{N-1} = a_0$ e $a_N = a_0 + 1(mod\ 2)$. Logo de (AS1) da definição 5.1.1, temos que $\{A_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequencia de intervalos compactos. Tomamos $x \in \cap_{n\geq 1} A_n$, assim $h(x) = a$.

A continuidade de $h$ segue-se a continuidade de $f$.

Suponhamos que $f$ é transitiva e $f$ não é expansiva. Assim existem $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $f^n(a), f^n(b)$ estão no mesmo átomo da partição $\mathbb{P}_f$ induzida por $f$ sobre $\mathbb{R}$. Logo se $U = (a, b)$ temos que

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $f^n(U)$ esta contido num átomo de partição $f$.

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $f^n(U)$ não contém preimagens de zero.

3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $f^n(U) = (f^n(a), f^n(b))$. Pela transitividade de $f$ existe $N \in \mathbb{N}$, com $N \geq 1$ tal que $U \cap f^N(U) \neq \emptyset$. Logo o conjunto

$$J = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{nN}(U)$$

é um intervalotal que $f^{K_0}(J) \subseteq J$. De 1. e 2. existe $A \in \mathbb{P}_f$ (partição de $\mathbb{R}$ induzida pela $f$ ) tal que $J \subseteq A$. Em particular, $J$ é um intervalo limitado. Então, existe um subintervalo de $J$ com interior não vazio tal que $f^{K_0}(J) \subseteq J$. Isto é uma contradição pois $f$ é transitiva. □

**Definição 5.2.4.** *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente. Dizemos que $f$ é **afim** se $f$ é um segmento de linha reta em cada intervalo da partição $\mathbb{P}_f$ induzida pela $f$ em $\mathbb{R}$. Também dizemos que $f$ é uma função **impar** se $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \neq 0$*

**Proposição 5.2.5.** *Se $f$ é um sistema alternante afim e impar então $f$ é transitiva.*

*Demonstração.* Sejam $(x_n^{\pm})_{n \geq 0}, (u_n^{\pm})_{n \geq 1}$ as sequências induzidas pela $f$, $I = (x_0^-, x_0^+)$ o intervalo distribuidor de $f$ e

$$(I_{n+1}^- = (u_n^-, u_{n+1}^-))_{n \geq 0}, \ (I_{n+1}^+ = (u_{n+1}^+, u_n^-))_{n \geq 0}$$

a partição induzida pela $f$ de $I$. No caso linear é fácil entender a transformação $f_I : I \to I$ induzida pela $f$ no intervalo distribuidor $I$. Lembrando como funciona a dinâmica

$$u_{n+1}^- \to x_n^+ \to x_n^+ \to \cdots \to x_1^+ \to x_0^+ \to 0$$

e

$$u_{n+1}^+ \to x_n^- \to x_n^- \to \cdots \to x_1^- \to x_0^- \to 0.$$

Como $f$ é afim e impar temos que $f_I$ é uma transformação expansiva em $I$, isto é, $f$ é um segmento de linha reta em cada átomo $I_n^{\pm}$ tal que $f_I(I_n^-) = (0, x_0^+)$, $f_I(I_n^+) = (x_0^-, 0)$ e $f_I'(x) > 1$ para todo $x \in I$ onde $f$ é diferenciável. Para mostrar que $f$ é expansiva vamos a mostrar que para todo $x \in I \setminus \{u_n^{\pm} \mid n \in \mathbb{N}\}$ tem uma representação única com respeito a $f_I$, ista é, para $x \in I$ e $m, n \in \mathbb{N}$ definimos a sequência

$$x_m = \begin{cases} n & \text{se } f_I^m(x) \in I_n^+ \\ -n & \text{se } f_I^m(x) \in I_n^-. \end{cases}$$

Notamos que se $x \neq y$ em $I \setminus \{u_n^{\pm} \mid n \in \mathbb{N}\}$ então as sequências $(x_n)_{n \geq 0}$ e $(y_n)_{n \geq 0}$ são diferentes. Já que se fossem iguais isso nos diz que $f^n(x)$ e $f^n(y)$ sempre estão no mesmo elemento da partição de $I$ induzido pela $f_I$ para todo $n \in \mathbb{N}$ logo aplicando o teorema do valor meio temos

$$|f^n(y) - f^n(x)| = |(f^n)'(c)||y - x| \geq \lambda^n |y - x|$$

para algum $c$ no atomo que pertencem $f^n(y)$, $f^n(x)$ e com $|f'(x)|, |f'(y)| > \lambda > 1$ assim para $n$ suficientemente grande é uma contradição pois $f^n(x)$, $f^n(y) \in I$ que é limitado. Que esta representação seja única implica que a seguinte representação também é única. Para $x \in I$ e $n \in \mathbb{N}$ definimos a sequência

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{se } f_I^n(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f_I^n(x) < 0. \end{cases}$$

Portanto $f$ é expansiva e pelo teorema 5.2.3 $f$ é transitiva. □

**Exemplo 5.2.6.** *Seja $f_a : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte maneira. Tomamos $x_0, a \in \mathbb{R}$ com $x_0 > 1$ e $1 - \varepsilon < a < 1$ para $\varepsilon > 0$ pequeno. Ponemos $u_1^- = \frac{1}{x_0}$ e $x_1^+ = \frac{x_0}{a}$.*

$$f_a(x) = \begin{cases} \textit{segmento unindo } (-x_0, 0) \textit{ com } (u_1^-, x_0) & \textit{se } u_1^- \geq x \geq -x_0 \\ -\frac{1}{x} & \textit{se } 0 > x > u_1^- \\ \textit{segmento unindo } (x_0, 0) \textit{ com } (x_0^+, x_0) & \textit{se } x_1^+ \geq x \geq x_0 \\ ax & \textit{se } x \geq x_1^+ \end{cases}$$

*e definindo $f_a$ em $(-\infty, -x_0] \cup (0, x_0]$ do jeito que $f$ seja impar.*

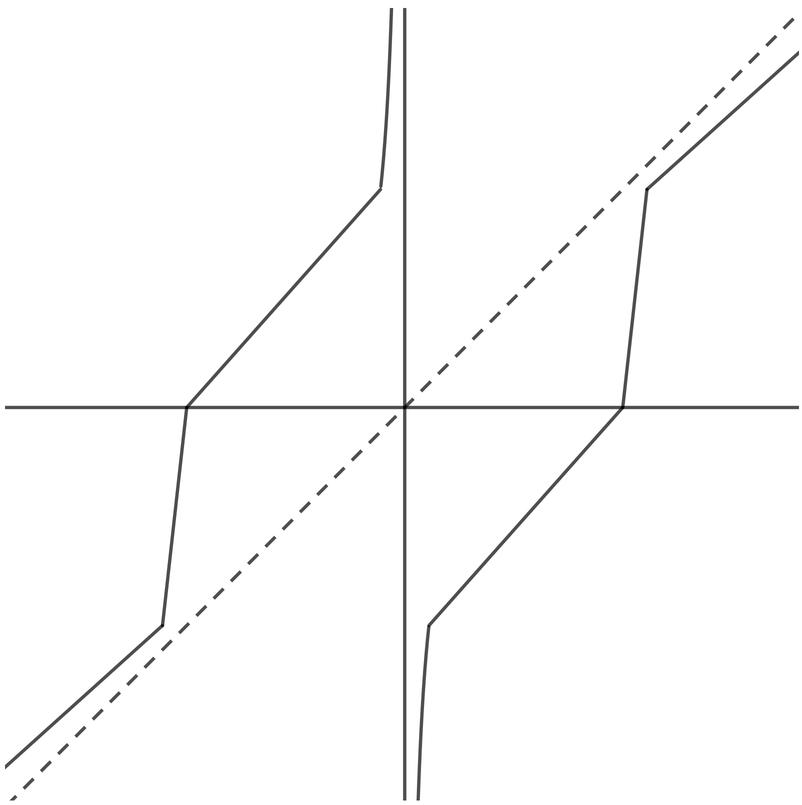

Figura 5.1: Gráfico de $f_a$

**Corolário 5.2.7.** *$f_a$ é um sistema alternante transitivo.*

*Demonstração.* Notamos que $f_a$ é um sistema alternante crescente pelo lema 5.1.2. Vamos mostrar que $f_a$ é expansiva. Observamos que

$$x_n^{\pm} = \pm\frac{x_0}{a^n} \text{ e } u_n^{\pm} = \pm\frac{a^n}{x_0} \text{ para } n \geq 1.$$

Para $n \geq 2$ fixo e $x \in I_n^-$, então $x \in (-\frac{a^{n-1}}{x_0}, -\frac{a^n}{x_0})$ e

$$(f_a)_I'(x) = f'(x)f'(f(x))\cdots f'(f^{n-1}(x)) = \frac{1}{x^2}a^{n-1} > \frac{x_0^2 a^{n-1}}{a^{2n-2}} = \frac{x_0^2}{a^{n-1}} > 1$$

onde $(f_a)_I : I \to I$ é a transformação induzida pela $f_a$ sobre o intervalo distribuidor $I$. O resto da prova se segue como no caso afim.

□

# Trabalhos Futuros

Nesta dissertação ficam alguns perguntas abertas para trabalhos futuros.

- Sera possível reobter a transitividade de um mapa real com valores reais a partir de uma dinâmica simbólica com infinitos símbolos.
- Sobre uma topologia razonável nos mapa reais de valor real, é possível obter transitividade robusta.
- Os mapa considerados nos teoremas 4.3.5 e 4.3.7 são metricamente transitivos, isto é, todo conjunto invariante, ou seu complementar, tem medida de Lebesgue nula.
- É relaxar as hipótese dos teoremas 4.3.5 e 4.3.7 para aumentar a gamma de exemplos
- É possível encontrar uma medida invariante para mapas da forma dos teoremas 4.3.5 e 4.3.7.

# Referências Bibliográficas


[1] Alsedá, Ll; Del Rio M. A; Rodriguez J. A, A Splitting Theorem for Transitive Maps, Journal of Mathematical Analysis and Applications 232, 359-375, 1999.

[2] Bargue, M; Martin J, Chaos, periodicity and snakelike continua, Trans. Amer. Math. Soc. 28, 355-365, 1985.

[3] Devaney, R.L., An Introduction an Chaotic Dynamical Systems, Addison Wesley, 1989.

[4] Jakobson, M.V. On Smooth Mappings of the Circle Into Itself, Math USSR-Sbornik, 1971.

[5] Koylada, S; Snoha, L. Some Aspects of Topological Transitivity- A Survay. 1997.

[6] Moothathu, T.K.S. Topological Dynamics. 2017. Disponível em: https://moothathu.files.wordpress.com/2017/05/tksm-topologicaldynamics-2017may.pdf

[7] Muñoz, S. *Robust transitivity and ergodicity on transformations on real line and real plane.* 2005. 54. Teses de doutorado-IMPA, 2005.

[8] Nagar, A; Kannan V., S.P. Sesha Sai, Properties of topologically transitive maps on the real line. Real Analysis Exchange, Vol 27, 325-334, 2001.

[9] Nagar, A; Sesha Sai, S.P, Some classes of transitive map on $\mathbb{R}$. Journal fo anals, Vol 8, 103-111, 2000.

[10] Pujals E. R.. On some tangent bundles dynamics and its consequences. In: International congress of mathematicians 2002, 2002, Beijing. Procedings of the ICM 2002, 2002. v. 3.

[11] Ruette, S. Chaos on the interval. 2017. Disponível em: https://www.math.u-psud.fr/ ruette/articles/chaos-int.pdf