

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

O Nullstellensatz Efetivo

Mariana Neumann de Souza

Rio de Janeiro

2018

O Nullstellensatz Efetivo

por

Mariana Neumann de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadores: Cecília Salgado Guimarães da Silva e S. Hamid Hassanzadeh

Aprovada por:

Cecília Salgado Guimarães da Silva, IM-UFRJ

S. Hamid Hassanzadeh, IM-UFRJ

Luciane Quoos Conte, IM-UFRJ

Carolina Bhering de Araújo, IMPA

Rodrigo Salomão, UFF

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e a minha irmã, pelo apoio durante todas as fases do meu aprendizado. Agradeço a todos que me ajudaram com seu apoio e suas sugestões, entre os quais, não posso deixar de citar meus orientadores, a professora Cecília Salgado e o professor Seyed Hamid Hassanzadeh.

Resumo

Este trabalho, baseado no artigo *Bounds for the degree in the Nullstellensatz*, de W. Dale Brownawell, publicado em *Annals of Mathematics* (1987), tem como objetivo estudar os métodos utilizados por esse autor para obter uma cota superior nos graus dos coeficientes na equação no Hilbert Nullstellensatz. W. D. Brownawell utilizou resultados da teoria dos números transcendentais, análise complexa e álgebra comutativa e obteve uma cota superior para o Nullstellensatz efetivo, que é simplesmente exponencial no número de variáveis, válida apenas em característica 0. Exploraremos o uso de formas de Chow de ideais unmixed, seguindo as ideias de Yu. V. Nesterenko em [8]- [10], assim como as propriedades de resultantes entre dois polinômios. Encontraremos uma cota inferior no módulo máximo de uma sequência regular sem zeros em comum e, a partir de estimativas de várias variáveis complexas, obteremos a cota superior nos graus de uma solução.

Palavras-chave: Nullstellensatz efetivo; formas de Chow; cotas nos graus; anéis polinomiais; ideais.

Abstract

This work, based on the paper *Bounds for the degree in the Nullstellensatz*, by W. Dale Brownawell, published in the Annals of Mathematics (1987), is devoted to the study of the methods used by this author to obtain an upper bound on the degrees of the coefficients in the Hilbert Nullstellensatz equation. W. Brownawell used results from the theory of transcendental numbers, complex analysis and commutative algebra and gave an upper bound for the effective Nullstellensatz, that is simply exponential in the number of variables, valid only in characteristic 0. We will explore the use of Chow forms of unmixed ideals, following the ideas of Yu. V. Nesterenko in [8] - [10], as well as the properties of resultant between two polynomials. We will find a lower bound on the maximum modulus of a regular sequence having no common zeros and, from estimates of several complex variables, we will obtain the upper bound on the degrees of one solution.

Keywords: effective Nullstellensatz; Chow forms; degree bounds; polynomial rings; ideals.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	4
2 Formas de Chow	12
3 Valor absoluto de formas de Chow	23
4 Prova de teoremas	34
Bibliografia	46

Introdução

Em 1893 D. Hilbert provou seu famoso teorema mostrando como os zeros (Nullstellen) de um polinômio determinam se ele possui uma potência em um dado ideal:

Hilbert Nullstellensatz: *Se o polinômio Q se anula em todos os zeros comuns de $P_1, \dots, P_m$ em $\mathbb{C}^n$, então para algum $e \in \mathbb{N}$, temos $Q^e \in (P_1, \dots, P_m)$.*

Este teorema formou um dos três pilares sob os quais Hilbert baseou sua teoria de invariantes e ideais polinomiais. Como os outros dois membros desta tripla, que são o polinômio de Hilbert e o fato de ideais polinomiais sobre corpos serem finitamente gerados, o Nullstellensatz também não era efetivo; ou seja, nenhum procedimento foi dado para determinar ou o expoente e ou os coeficientes usados para expressar Q^e em termos dos geradores $P_1, \dots, P_m$.

Em 1929, J. L. Rabinowitsch mostrou que o Hilbert Nullstellensatz seguia do seguinte caso especial que também é considerado como o Nullstellensatz.

Nullstellensatz: Se o ideal $(P_1, \dots, P_m)$ em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ não possui zero em $\mathbb{C}^n$, então existem $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ com

$$A_1 P_1 + \dots + A_m P_m = 1. \quad (1)$$

Em 1980, D. W. Masser e G. Wüstholz usaram métodos clássicos de G. Hermann para mostrar que pode-se ter

$$\deg A_i \leq 2(2D)^{2^{n-1}},$$

onde $D \geq 1$ é o grau máximo de $P_1, \dots, P_m$.

Obtendo qualquer cota superior para $\deg A_i$ teremos uma cota superior para e usando o truque de Rabinowitsch.

E. Mayr e A. Meyer mostraram que a ordem de crescimento duplamente exponencial para $\deg A_i$ obtida pelo método de Hermann é inevitável, pois até para expressar elementos lineares de $(P_1, \dots, P_m)$ em termos dos geradores P_i temos essa cota inferior, como mostra o próximo exemplo. Para $k, D \in \mathbb{N}, D \geq 5$, Mayr e Meyer construíram polinômios $P_1, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n], n = 10k$, tais que $x_1 - x_n \in (P_1, \dots, P_{n+1})$ e mostraram que para qualquer solução $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ com $x_1 - x_n = A_1 P_1 + \dots + A_{n+1} P_{n+1}$ devemos ter $\deg A_i > (D-2)^{2^{k-1}}$.

Mas, era esperado que a situação no Nullstellensatz fosse diferente e que os A_i pudessem ser encontrados com graus mais próximos da cota inferior $\deg A_i \geq D^n - D^{n-1}$, como mostra o seguinte exemplo de Masser e Philippon com os P_i dados por

$$x_1^D, x_1 - x_2^D, \dots, x_{n-2} - x_{n-1}^D, 1 - x_{n-1} x_n^{D-1}.$$

Especializando em

$$x_1 = t^{(D-1)D^{n-2}}, x_2 = t^{(D-1)D^{n-3}}, \dots, x_{n-1} = t^{D-1}, x_n = t^{-1},$$

para $t \neq 0$, obtemos para qualquer solução de (1)

$$1 = A_1 \left(t^{D-1} D^{n-2}, \dots, t^{D-1} D, t^{D-1}, \frac{1}{t} \right) t^{(D-1)D^{n-1}},$$

que implica que $\deg_{x_n} A_1 \geq (D-1)D^{n-1}$.

Em 1987, W.D. Brownawell, usando resultados de teoria transcendental de números, mostrou que

$$\deg A_i \leq \min\{m, n\} n D^{\min\{m, n\}} + \min\{m, n\} D. \quad (2)$$

Um ano depois, János Kollár apresentou uma prova puramente algébrica, válida em qualquer característica, refinando a cota de Brownawell. Kollár obteve

$$\deg A_i P_i \leq \max\{3, D\}^n,$$

que é ótima no caso $D \geq 3$ e $m \leq n$.

Neste trabalho vamos explicar, com mais detalhes e exemplos, o processo que Brownawell seguiu para obter a cota (2). Para isso, destinamos o primeiro capítulo para apresentar ao leitor os principais resultados da álgebra comutativa que usaremos no texto.

O Capítulo 2 tem como objetivo definir formas de Chow e apresentar propriedades a elas relacionadas. O leitor perceberá que substituímos os Lemas 3,4 e 5 de [8] pelo Lema 2.8, que já é suficiente para provarmos a Proposição 2.9 (Proposição 1 de [8]). Também apresentamos a ferramenta básica da nossa investigação: a Resultante entre dois polinômios.

O Capítulo 3 desenvolve o artigo principal para obter cotas nos valores absolutos de formas de Chow e de resultantes. As propriedades de resultantes e de normas aparecerão analogamente aos resultados familiares de resultantes clássicas. Uma diferença principal é que agora a resultante não elimina variáveis específicas a menos que a forma de Chow original seja de dimensão 0.

O Capítulo 4 aplica os resultados dos capítulos anteriores para obter uma cota inferior no módulo máximo de uma sequência regular sem zeros em comum. Então, a partir de estimativas de várias variáveis complexas, obtemos uma cota superior nos graus de uma solução.

Capítulo 1

Preliminares

Provamos alguns resultados, mas omitimos as demonstrações de certos lemas e teoremas clássicos. Suas provas, assim como mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [2] ou [1]. Seja R um anel comutativo com elemento unidade 1.

Definição 1.1. *Um anel R é noetheriano se qualquer conjunto de ideais de R possui um elemento maximal com respeito a inclusão.*

Proposição 1.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- R é noetheriano;
- Todo ideal de R é finitamente gerado;
- Toda cadeia ascendente de ideais de R para.

Exemplo 1.3. *Um domínio de ideais principais é noetheriano. Logo, se k é corpo, então $k[x]$ é noetheriano.*

Teorema 1.4. *(Base de Hilbert) Seja R um anel Noetheriano. Então o anel polinomial $R[x]$ é noetheriano.*

Corolário 1.5. *Seja k um corpo. Então $k[x_1, \dots, x_n]$ é noetheriano.*

Notações:

- $\text{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \subseteq R ; \mathfrak{p} \text{ é primo}\}.$
- $\text{Max}(R) = \{\mathfrak{m} \subseteq R ; \mathfrak{m} \text{ é maximal}\}.$

Definição 1.6. Dado $I \subseteq R$ ideal, o **radical** de I é o conjunto

$$\sqrt{I} = \{x \in R ; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n \in I\}.$$

Definição 1.7. Sejam I e J ideais de R . O **ideal quociente** de I por J é o conjunto:

$$(I :_R J) = \{r \in R ; rJ \subseteq I\}.$$

Definição 1.8. Um ideal $\mathfrak{q} \subseteq R$ é **primário**, se $xy \in \mathfrak{q}$ implica $x \in \mathfrak{q}$ ou $y^n \in \mathfrak{q}$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.9. Se $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, então $\mathfrak{p}$ é primário.

Proposição 1.10. Se $\mathfrak{q} \subseteq R$ é primário, então $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ é primo. Neste caso, dizemos que $\mathfrak{q}$ é **$\mathfrak{p}$ -primário**.

Demonstração: Sejam $x, y \in R$ com $x \cdot y \in \mathfrak{p}$ e $y \notin \mathfrak{p}$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k \in \mathfrak{q}$. Para este mesmo $k \in \mathbb{N}$ temos $y^k \notin \mathfrak{q}$ (pois $y \notin \sqrt{\mathfrak{q}}$). Como $\mathfrak{q}$ é primário, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^{nk} \in \mathfrak{q}$. Logo, $x \in \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$. $\square$

Lema 1.11. Se $\mathfrak{m} \in \text{Max}(R)$ e $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$, então $\mathfrak{q}$ é **$\mathfrak{m}$ -primário**.

Definição 1.12. 1. Um ideal $\mathfrak{q} \subseteq R$ é dito **decomponível** se $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$ onde $\mathfrak{q}_i$ é $\mathfrak{p}_i$ -primário. Neste caso dizemos que $\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$ é uma **decomposição primária** de $\mathfrak{q}$.

2. Se $\mathfrak{q} \subseteq R$ é decomponível com decomposição primária $\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s$, dizemos que tal **decomposição é minimal** se:

(a) $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ são todos distintos;

(b) $\cap_{i \neq j} \mathfrak{q}_j \not\subseteq \mathfrak{q}_i, \forall i = 1, \dots, s$.

Lema 1.13. Se $\mathfrak{q} \subsetneq R$ é decomponível, então $\mathfrak{q}$ tem uma decomposição primária minimal.

Teorema 1.14 (Primeiro Teorema de Unicidade). Seja R um anel noetheriano. Se $\mathfrak{q} \subsetneq R$ é um ideal com decomposição primária minimal $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s$ tal que $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}, i = 1, \dots, s$, então

$$\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s\} = \text{Spec}(R) \cap \{\sqrt{(\mathfrak{q} : x)} ; x \in R\}.$$

Observação 1.15. Como o conjunto $\{\sqrt{(\mathfrak{q} : x)} ; x \in R\}$ depende somente de $\mathfrak{q}$, segue que os $\mathfrak{p}_i$'s não dependem da decomposição minimal de $\mathfrak{q}$, mas somente de $\mathfrak{q}$. Isso significa que tanto s quanto $\mathfrak{p}_i, i = 1, \dots, s$ são únicos.

Definição 1.16. Se $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s$ é decomposição primária minimal, com $\mathfrak{q}_i$ sendo $\mathfrak{p}_i$ -primário, então cada $\mathfrak{p}_i$ é chamado de **primo associado de $\mathfrak{q}$** . O primo $\mathfrak{p}_i$ é dito **primo associado minimal** (ou isolado) se ele for minimal (em relação à inclusão) na família $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s\}$. Os primos associados de $\mathfrak{q}$ que não são minimais são ditos imersos.

Exemplo 1.17. Sejam K um corpo, $R = K[x, y]$ e $\mathfrak{q} = (x^2, xy)$. Notemos que $\mathfrak{q} = (x) \cap (x^2, xy, y^2)$. Sejam $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1 = (x)$ e $\mathfrak{q}_2 = (x^2, xy, y^2) = \mathfrak{m}^2$, onde $\mathfrak{m} = (x, y) \in \text{Max}(R)$. Temos que $\mathfrak{q}_1$ é $\mathfrak{p}_1$ -primário e pelo Lema 1.11, $\mathfrak{q}_2$ é $\mathfrak{m}$ -primário. Temos que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ é a decomposição primária minimal de $\mathfrak{q}$ e $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{m}\}$ são os primos associados de $\mathfrak{q}$, mas somente $\mathfrak{p}_1 = (x)$ é primo isolado.

Definição 1.18. A **altura** de $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ é definida por

$$ht(\mathfrak{p}) = \sup\{n \in \mathbb{N} ; \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(R)\}.$$

Definição 1.19. *Seja I ideal próprio de R . A **altura** de I é o mínimo das alturas dos ideais primos contendo I .*

Definição 1.20. *Seja I ideal de R . Dizemos que I é **unmixed** se todos os seus primos associados são minimais e possuem a mesma altura $ht(I)$.*

Exemplo 1.21. *O ideal $I = (x^2 - yw, x^3 - zw^2) \subset R[w, x, y, z]$ é unmixed. De fato, a decomposição primária de I é:*

$$I = (y^2 - xz, xy - wz, x^2 - wy) \cap (x^2 - wy, wx, w^2)$$

e os primos associados de I são $(y^2 - xz, xy - wz, x^2 - wy)$ e (x, w) . Notamos que I possui apenas primos minimais e ambos possuem altura 2.

Exemplo 1.22. *Seja $\mathfrak{p}$ ideal primo de R . O ideal $I = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, onde $ht(\mathfrak{q}) = ht(\mathfrak{p})$ e $\mathfrak{q}$ é ideal primo, é unmixed.*

Observação 1.23. *Daqui em diante, consideraremos R como um anel noetheriano.*

Teorema 1.24. *(Ideal Principal de Krull) Se um ideal primo $\mathfrak{p}$ em R é mínimo sobre um ideal $I \subset R$, então $ht(\mathfrak{p}) \leq \mu(I)$, onde $\mu(I)$ é o número mínimo de geradores de I .*

Demonstração: Ver [2], capítulo 5, Teorema 13.5. □

Proposição 1.25. *Seja $\mathfrak{p} \subset R$ um ideal primo de altura r . Então existem elementos $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{p}$ tais que $\mathfrak{p}$ é mínimo sobre $(a_1, \dots, a_r)$ e, além disso, $ht(a_1, \dots, a_i) = i$ para todo $i, 0 \leq i \leq r$.*

Demonstração: Provaremos por indução em r . A afirmação é clara para $r = 0$, então considere $r \geq 1$. Escolha um ideal primo $\mathfrak{p}$ contendo I tal que $ht(\mathfrak{p}) = r$, e escolha uma cadeia $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$, no $\text{Spec}(R)$. Então $ht(\mathfrak{p}_{r-1}) = r - 1$.

Por indução, existem $a_1, \dots, a_{r-1} \in \mathfrak{p}_{r-1}$ tais que $\mathfrak{p}_{r-1}$ é mínimo sobre $(a_1, \dots, a_{r-1})$ e $ht(a_1, \dots, a_i) = i$ para todo $i, 0 \leq i \leq r-1$. Sejam $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ todos os ideais primos mínimos sobre $(a_1, \dots, a_{r-1})$. Então, pelo Teorema 1.24, $ht(\mathfrak{q}_j) \leq r-1$ para todo j . Por outro lado, $ht(\mathfrak{q}_j) \geq ht(a_1, \dots, a_{r-1}) = r-1$. Logo $ht(\mathfrak{q}_j) = r-1$ para todo j . Portanto, como $ht(\mathfrak{p}) = r$, $\mathfrak{p}$ não está contido em nenhum dos ideais primos $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$, logo $\mathfrak{p}$ não está contido em $\mathfrak{q}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{q}_s$ pelo Lema Prime Avoidance. Escolha um elemento $a_r \in \mathfrak{p}$ tal que $a_r \notin \mathfrak{q}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{q}_s$. Afirmamos que todo ideal primo contendo $(a_1, \dots, a_r)$ possui altura pelo menos r . Para ver isso, seja $\mathfrak{p}'$ algum ideal primo contendo $(a_1, \dots, a_r)$. Então $\mathfrak{q}_j \subseteq \mathfrak{p}'$ para algum j , e $\mathfrak{q}_j \subsetneq \mathfrak{p}'$, pois $a_r \notin \mathfrak{q}_j$. Portanto, $ht(\mathfrak{p}') \geq 1 + ht(\mathfrak{q}_j) = r$, e nossa afirmação está provada. Segue que $\mathfrak{p}$ é mínimo sobre $(a_1, \dots, a_r)$ e que $ht(a_1, \dots, a_r) = r$. $\square$

Definição 1.26. Um anel graduado é um anel R , junto com uma decomposição $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ de R em uma soma direta de grupos abelianos R_d , tais que para quaisquer $d, e \geq 0$, $R_d \cdot R_e \subseteq R_{d+e}$. Um elemento de R_d é chamado um **elemento homogêneo de grau d** .

Assim, qualquer elemento $F \in R$ pode ser escrito unicamente como uma soma finita de elementos homogêneos: $F = F_1 + \dots + F_d$, $d = \text{grau}(F)$, onde F_i é um polinômio homogêneo de grau i , ou seja, todos os monômios em F_i são de grau i .

Definição 1.27. Um ideal $I \subseteq A = R[X]$ é um **ideal homogêneo** se $I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap A_d)$.

Equivalentemente, um ideal I é homogêneo se ele possui um conjunto de geradores de elementos homogêneos.

Exemplo 1.28. O ideal $I = (x^2 + y^2 + z^2, xy + xz + yz, z^5)$ em $\mathbb{C}[x, y, z]$ é homogêneo.

Definição 1.29. Sejam $I, \mathfrak{m} \subset k[x_0, \dots, x_n]$ ideais, com $\mathfrak{m}$ primo. Então a **saturação** de I com respeito a $\mathfrak{m}$ é o conjunto $\text{sat}_{\mathfrak{m}}(I) := \bigcup_{i \geq 0} (I : \mathfrak{m}^i)$, denotado

por $(I : \mathfrak{m}^\infty)$. Se não tiver perigo de confusão, então usaremos $\text{sat}_{\mathfrak{m}}(I) = (I : \mathfrak{m}^\infty)$. Denotaremos por $\text{sat}(I)$.

A próxima proposição será útil no próximo capítulo.

Proposição 1.30. *Seja $I \subset R$ com a decomposição primária minimal $I = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t \cap Q$, com Q componente $\mathfrak{m}$ -primária, $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ e $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ para todo i . Então $\text{sat}_{\mathfrak{m}}(I) = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$.*

Demonstração: $(\subseteq)$: Seja $a \in \text{sat}_{\mathfrak{m}}(I)$. Então, para algum inteiro $N \geq 0$, $a\mathfrak{m}^N \subseteq I$. Isso implica que para todo i , $a\mathfrak{m}^N \subseteq \mathfrak{q}_i$ e $a\mathfrak{m}^N \subseteq Q$. Como $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$, existe $m \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}_i$ tal que $m^N \notin \mathfrak{p}_i$. Mas $am^N \in \mathfrak{q}_i$, e como $\mathfrak{q}_i$ é $\mathfrak{p}_i$ -primário, temos que $a \in \mathfrak{q}_i$ para todo i , ou seja, $a \in \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$.

$(\supseteq)$: Seja $b \in \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$. Como Q é $\mathfrak{m}$ -primário e R é noetheriano, existe N tal que $\mathfrak{m}^N \subseteq Q$. Logo, $b\mathfrak{m}^N \in (\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t) \cap Q = I$. Portanto, $b \in (I : \mathfrak{m}^N) \subseteq \text{sat}(I)$. $\square$

Lema 1.31 (Lema 2-(Ne1)). *Seja $R[x]$ o anel de polinômios em uma variável sobre R . Para cada ideal I de R , considere $I[x]$ como a extensão de I a $R[x]$ por um homomorfismo $f : R \rightarrow R[x]$.*

1. *Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo em R , então $\mathfrak{p}[x]$ é primo em $R[x]$.*
2. *Se I é um ideal $\mathfrak{p}$ -primário em R , então $I[x]$ é $\mathfrak{p}[x]$ -primário em $R[x]$, e o expoente de $I[x]$ é igual ao expoente de I .*
3. *Se $I = \bigcap_{k=1}^t I_k$ é a decomposição primária minimal em R , então $I[x] = \bigcap_{k=1}^t I_k[x]$ é a decomposição primária minimal em $R[x]$.*
4. *Sejam $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{x}$ ideais primos, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{x}$. Então, $(\mathfrak{p} : \mathfrak{x}^N) = \mathfrak{p}$ para todo N , ou seja, $\text{sat}_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.*
5. *$ht(\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p}[x])$.*

6. Se $f : R_1 \longrightarrow R_2$ é um homomorfismo de anéis e $J = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s$ é a decomposição primária de J em R_2 , então $f^{-1}(J) = f^{-1}(\mathfrak{q}_1) \cap \dots \cap f^{-1}(\mathfrak{q}_s)$ é decomposição primária.

Definição: Por expoente de um ideal $\mathfrak{p}$ -primário I , queremos dizer o menor inteiro n tal que $\mathfrak{p}^n \subset I$.

Demonstração:

1. Notamos que $\mathfrak{p}[x]$ é o núcleo do homomorfismo de projeção

$$\varphi : R[x] \longrightarrow \left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right) [x]$$

Logo, $\frac{R[x]}{\mathfrak{p}[x]} \cong \left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right) [x]$. Como $\mathfrak{p}$ é primo, $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ é domínio. Se $\left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right) [x]$ não fosse um domínio, existiriam polinômios F, G tais que $F \cdot G = 0$. Mas comparando coeficientes, deduzimos que isto implicaria que os coeficientes fossem divisores de zero, os quais não são, pois $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ é domínio. Logo $\left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right) [x]$ é domínio, e consequentemente, $\frac{R[x]}{\mathfrak{p}[x]}$ é domínio e daí $\mathfrak{p}[x]$ é primo.

2. Como I é primário em R , todos os elementos de $\frac{R}{I}$ são nilpotentes. Seja $f \in \left(\frac{R}{I} \right) [x]$, então f é um polinômio em x com coeficientes em $\left(\frac{R}{I} \right)$, logo f é nilpotente. Como $\frac{R[x]}{I[x]} \cong \left(\frac{R}{I} \right) [x]$, temos que todos os elementos de $\frac{R[x]}{I[x]}$ são nilpotentes, logo $I[x]$ é primário em $R[x]$. Agora precisamos mostrar que $\sqrt{I[x]} = \mathfrak{p}[x]$. Para isso, note que $\frac{R[x]}{\mathfrak{p}[x]} \cong \left(\frac{R}{\mathfrak{p}} \right) [x] = \left(\frac{R}{\sqrt{I}} \right) [x] \cong \frac{R[x]}{\sqrt{I}[x]}$. Logo, $\sqrt{I}[x] = \mathfrak{p}[x]$.

3. $I[x] = \left(\bigcap_{k=1}^t I_k \right) [x] = \bigcap_{k=1}^t I_k[x]$ é a decomposição primária de $I[x]$ em $R[x]$. A decomposição é irredutível, pois:

- (a) $\sqrt{I_{k_1}}[x] \neq \sqrt{I_{k_2}}[x]$
(b) $I_i \not\supset \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^t I_j \Rightarrow I_i[x] \not\supset \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^t I_j[x]$.

4. Sejam $f \in \mathbf{x} \setminus \mathfrak{p}$ e $g \in (\mathfrak{p} : \mathbf{x}^N)$ para todo N . Então, $fg \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ é primo, $g \in \mathfrak{p}$, ou seja, para todo N , $(\mathfrak{p} : \mathbf{x}^N) \subseteq \mathfrak{p}$. A outra inclusão é clara.
5. Seja $r = ht(\mathfrak{p})$. Então existem $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{p}$ tais que $\mathfrak{p}$ é um primo minimal contendo o ideal $(a_1, \dots, a_r)$ pela Proposição 1.25. Afirmamos que o ideal primo $\mathfrak{p}[x]$ é mínimo sobre o ideal $(a_1, \dots, a_r)[x]$. Para ver isto, considere $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(\mathbf{R})[x]$ tal que $(a_1, \dots, a_r)[x] \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}[x]$. Então, tomando a contração desses ideais pelo homomorfismo $f : R \rightarrow R[x]$, obtemos $(a_1, \dots, a_r) \subseteq \mathfrak{q}^c \subseteq \mathfrak{p}$, com $\mathfrak{q}^c$ primo. Como $\mathfrak{p}$ era mínimo sobre $(a_1, \dots, a_r)$, temos $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$. Agora, considerando a extensão, $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{q}^{ce} = \mathfrak{p}[x]$, e concluimos que $\mathfrak{p}[x] = \mathfrak{q}$, ou seja, $\mathfrak{p}[x]$ é mínimo sobre $(a_1, \dots, a_r)[x]$. Portanto, $ht(\mathfrak{p}[x]) \leq r$ pelo Teorema 1.24. Por outro lado, uma cadeia de ideais primos $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$ implica em uma cadeia $\mathfrak{p}_0[x] \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}_r[x] = \mathfrak{p}[x]$, portanto $ht(\mathfrak{p}[x]) \geq r$. Assim, $ht(\mathfrak{p}[x]) = ht(\mathfrak{p})$.
6. $\mathfrak{q}_i$ é $\mathfrak{p}_i$ -primário implica $f^{-1}(\mathfrak{q}_i)$ é $f^{-1}(\mathfrak{p}_i)$ -primário. Sejam $ab \in f^{-1}(\mathfrak{q}_i)$, $a \notin f^{-1}(\mathfrak{p}_i)$. Aplicando f , obtemos $f(a)f(b) \in \mathfrak{q}_i$ e $f(a) \notin \mathfrak{p}_i$. Como $\mathfrak{q}_i$ é $\mathfrak{p}_i$ -primário, $f(b) \in \mathfrak{q}_i$, ou seja, $b \in f^{-1}(\mathfrak{q}_i)$. $\square$

Capítulo 2

Formas de Chow

Neste capítulo definiremos as formas de Chow e apresentaremos algumas de suas propriedades. Elas aparecerão na definição de Resultante entre dois polinômios, assunto que será aprofundado no próximo capítulo. Formas de Chow, ou formas de Cayley-Chow, são uma poderosa ferramenta na eliminação efetiva. Para mais detalhes, recomendamos [8], [9] e [10].

Seja R um anel Noetheriano, e seja $A = R[x_0, \dots, x_n]$ o anel polinomial nas variáveis $x_0, \dots, x_n$ sobre R . Seja d um inteiro, $1 \leq d \leq n$. Para todo $i, 1 \leq i \leq d$, e para todo $j, 0 \leq j \leq n$, considere u_{ij} , uma nova variável sobre A .

Considere X como o vetor linha $(x_0, \dots, x_n)$. Analogamente, U denotará a matriz (u_{ij}) de ordem $d \times (n+1)$. Portanto, $R[x_0, \dots, x_n]$, $R[u_{10}, \dots, u_{dn}]$ e $R[u_{10}, \dots, u_{dn}, x_0, \dots, x_n]$ serão denotados por $R[X]$, $R[U]$ e $R[U, X]$, respectivamente.

Consideramos as formas lineares $L_1, \dots, L_d$ em $R[U, X] : L_i := \sum_{j=0}^n u_{ij}x_j$, ou em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{10} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{d0} & u_{d1} & u_{d2} & \dots & u_{dn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Seja I um ideal homogêneo em A . Considere o ideal $(I, L_1, \dots, L_d) \subset A[U]$ gerado pelas formas lineares $L_1, \dots, L_d$ e pelos elementos de I . Denotaremos por $\mathbf{x}$ o ideal em $A[U]$ gerado por $x_0, \dots, x_n$. Usaremos as notações $\tilde{I}(d)$ e $\bar{I}(d)$ para os ideais

$$\tilde{I}(d) := ((I, L_1, \dots, L_d) : \mathbf{x}^M) \subset A[U], \text{ onde } M \text{ é um inteiro;}$$

$$\bar{I}(d) := \tilde{I}(d) \cap R[U].$$

Observação 2.1. Quando não tiver risco de confusão, iremos denotar $\tilde{I}(d)$ e $\bar{I}(d)$ apenas por $\tilde{I}$ e $\bar{I}$, respectivamente.

Um dos objetivos deste capítulo é obter o seguinte:

Seja k um corpo algebricamente fechado com característica zero. Seja I um ideal homogêneo unmixed de $k[X]$ tal que $ht(I) = n + 1 - d$. Então $\bar{I}$ é um ideal principal em $k[U]$.

Definição 2.2. Chamamos qualquer gerador F de $\bar{I}$ uma **forma de Chow** para I .

Observação 2.3. Pela simetria da definição, vemos que F é homogêneo e de mesmo grau em cada um dos d conjuntos de variáveis $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_d$, e é invariante a menos de um fator constante sobre permutações de $u_1, \dots, u_d$. O grau de Chow é o grau total de F , denotado por $\delta_I = \delta_F$, com respeito a, digamos, $u_{10}, \dots, u_{1n}$. (No caso onde R é um corpo, F coincide com o grau da variedade projetiva definida pelo ideal I).

Para provarmos o resultado acima, precisaremos de alguns lemas. Primeiro, considere as d matrizes antissimétricas $S^{(i)} = (s_{jk}^{(i)})$, $j, k = 0, 1, \dots, n; i = 1, \dots, d$, e exceto pela relação de antissimetria $s_{jk}^{(i)} + s_{kj}^{(i)} = 0$, as variáveis $s_{jk}^{(i)}$ não estão

conectadas por nenhuma relação algébrica sobre A .

$$S^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & s_{01}^{(i)} & s_{02}^{(i)} & \dots & s_{0m}^{(i)} \\ s_{10}^{(i)} & 0 & s_{12}^{(i)} & \dots & s_{1m}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n0}^{(i)} & s_{n1}^{(i)} & s_{n2}^{(i)} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere o anel $A[S]$ obtido adjuntando a A todos os elementos $s_{jk}^{(i)}$. Vamos definir um homomorfismo $\theta : A[U] \rightarrow A[S]$, que atua como a identidade em A , e é dado por $\theta(u_{ij}) = \sum_{k=0}^n s_{jk}^{(i)} \cdot x_k$. Como os u_{ij} são algebricamente independentes sobre A , segue que θ pode ser estendido a todo $A[U]$. Uma propriedade desta aplicação que será importante para nós é que $\theta(L_i) = 0$ para $i = 1, \dots, d$. De fato,

$$\theta(L_i) = \sum_{j=0}^n \theta(u_{ij}) \cdot x_j = \sum_{j=0}^m x_j \cdot \sum_{k=0}^n s_{jk}^{(i)} \cdot x_k = \sum_{0 \leq j < k \leq n} x_j x_k (s_{jk}^{(i)} + s_{kj}^{(i)}) = 0.$$

Observação 2.4. *O anel $A[S]$ é isomorfo a um anel polinomial $A[s_1, \dots, s_q]$. Considere $I[S]$ como o conjunto de todos os polinômios em $A[S]$ com coeficientes em I . Por indução no número de variáveis, temos que os itens (1), (2) e (3) do Lema 1.31 valem para o anel $A[S]$.*

Temos o seguinte diagrama de mapas.

$$\begin{array}{ccccc} R & \hookrightarrow & R[X] = A & \hookrightarrow & A[S] \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow \theta & \\ R[U] & \hookrightarrow & A[U] & & \end{array}$$

O próximo Lema é uma importante caracterização para $\tilde{I} \subset A[U]$.

Lema 2.5 (Lema 1 de [8]). *Seja $G \in A[U]$. Então, $G \in \tilde{I}(d)$ se, e somente se,*

$$\theta(G) \cdot \mathbf{x}^M \subset I[S].$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $G \in \tilde{I}(d)$, então $G \cdot \mathbf{x}^M \subset (I, L_1, \dots, L_d)$. Ou seja,

$$G \cdot \mathbf{x}^M = b_1 f_1 + \dots + b_l f_l + a_1 L_1 + \dots + a_d L_d, \quad (2.1)$$

onde $a_i, b_i \in A[U]$, $I = (f_1, \dots, f_l)$. Aplicando θ em ambos os lados de (2.1), obtemos

$$\theta(G) \cdot \theta(\mathbf{x}^M) = \theta(b_1) \cdot \theta(f_1) + \dots + \theta(b_l) \cdot \theta(f_l) + \theta(a_1) \cdot \theta(L_1) + \dots + \theta(a_d) \cdot \theta(L_d)$$

$$\theta(G) \cdot \mathbf{x}^M = b'_1 \cdot f_1 + \dots + b'_l \cdot f_l + a'_1 \cdot 0 + \dots + a'_d \cdot 0 = b'_1 \cdot f_1 + \dots + b'_l \cdot f_l, \text{ onde } a'_i, b'_i \in A[S].$$

Ou seja, $\theta(G) \cdot \mathbf{x}^M \subset I[S]$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\theta(G) \cdot \mathbf{x}^M \subset I[S]$. Considere $p_0, \dots, p_n \in R$, nem todos iguais a zero, e denote por $g = \sum_{t=0}^n p_t \cdot x_t$. Seja $T = \{g^m\}$ o sistema multiplicativo no anel $A[U]$. Definimos um homomorfismo

$$\psi : A[S] \rightarrow T^{-1}A[U]$$

enviando

$$\psi(s_{jk}^{(i)}) = \frac{u_{ij} \cdot p_k - u_{ik} \cdot p_j}{g}$$

e considerando que a aplicação ψ atua como a identidade nos elementos de A . Essa aplicação pode ser estendida a um homomorfismo de anéis.

Agora, considere as composições:

$$A[U] \xrightarrow{\theta} A[S] \xrightarrow{\psi} T^{-1}A[U].$$

Temos

$$\psi \circ \theta(u_{ij}) = \psi \left(\sum_{k=0}^n s_{jk}^{(i)} \cdot x_k \right) = \frac{1}{g} \cdot \sum_{k=0}^n (u_{ij} \cdot p_k \cdot x_k - u_{ik} \cdot p_j \cdot x_k) = u_{ij} - \frac{p_j}{g} \cdot L_i. \quad (2.2)$$

Vemos que

$$\psi \circ \theta(u_{ij}) = u_{ij} + \beta, \text{ onde } \beta \in T^{-1}(L_1, \dots, L_d) \subset T^{-1}(I, L_1, \dots, L_d).$$

Como o homomorfismo $\psi \circ \theta$ é a identidade em A e $G \in A[U]$, a equação (2.2) implica que

$$\psi \circ \theta(G) = G + \beta', \quad (2.3)$$

onde $\beta' \in T^{-1}(I, L_1, \dots, L_d)$. Multiplicando ambos os lados de (2.3) por $\mathbf{x}^M$, obtemos

$$\psi(\theta(G)) \cdot \mathbf{x}^M = (G + \beta') \cdot \mathbf{x}^M = G\mathbf{x}^M + \beta'\mathbf{x}^M.$$

Como ψ é identidade em A , $\psi(\theta(G)) \cdot \mathbf{x}^M = \psi(\theta(G)) \cdot \psi(\mathbf{x}^M) = \psi(\theta(G) \cdot \mathbf{x}^M)$. Por hipótese, $\theta(G) \cdot \mathbf{x}^M \in I[S]$, e portanto

$$\psi(\theta(G) \cdot \mathbf{x}^M) \subset \psi(I[S]) \subset IT^{-1}A[U] = T^{-1}I \subset T^{-1}(I, L_1, \dots, L_d).$$

E como $\beta'\mathbf{x}^M \in T^{-1}(I, L_1, \dots, L_d)$, temos que $G \cdot \mathbf{x}^M \in T^{-1}(I, L_1, \dots, L_d)$, e se multiplicarmos por g^N , para N suficientemente grande, obtemos $G \cdot g^N \cdot \mathbf{x}^M \in (I, L_1, \dots, L_d)$. Mas, $g = \sum_{t=0}^n p_t \cdot x_t$, e notando que o argumento vale para quaisquer $p_0, \dots, p_n$ em R , temos $G \cdot \mathbf{x}^{M+N} \in (I, L_1, \dots, L_d)$. Logo, $G \in \tilde{I}(d)$. $\square$

Observação 2.6. *Note que o Lema 2.5 está nos dizendo que:*

$$\tilde{I} = \theta^{-1}(\text{sat}(I[S])),$$

onde $\text{sat}(I[S])$ é a saturação de $I[S]$ com respeito ao ideal $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$.

Observação 2.7. *Quando $\mathbf{x} \subseteq \sqrt{I}$, temos $\tilde{I}(d) = A[U]$. Pois, se $\mathbf{x} \subseteq \sqrt{I}$, então*

$$\mathbf{x}[S] \subseteq \sqrt{I[S]} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \supseteq I[S] \\ \text{min}}} \mathfrak{p},$$

ou seja, todos os primos associados de $I[S]$ contém $\mathbf{x}$ e, pela Proposição 1.30, vamos ter $\text{sat}_{\mathbf{x}}(I[S]) = (1)$, logo $\tilde{I}(d) = \theta^{-1}(A[S]) = A[U]$.

Mais um Lema sobre $\tilde{I}$:

Lema 2.8 (Lema 3 de [8]). *Seja I um ideal homogêneo em A .*

1. *Se I é primo, então $\tilde{I}$ é primo em $A[U]$.*
2. *Se I é $\mathfrak{p}$ -primário e $\mathbf{x} \notin \mathfrak{p}$, então $\tilde{I}$ é $\tilde{\mathfrak{p}}$ -primário em $A[U]$, e os expoentes de I e $\tilde{I}$ são iguais.*
3. *Se $I = \bigcap_{k=1}^t I_k$ é a decomposição primária minimal em A , então $\tilde{I} = \bigcap_{k=1}^t \tilde{I}_k$.*

Demonstração:

1. Sem perda, suponha que $I \neq \mathbf{x}$, então $I[S] \neq \mathbf{x}[S]$. Se I é primo, então $I[S]$ é primo, pelo Lema 1.31, item (1). Agora, pelo item (4) do mesmo lema, $\text{sat}_{\mathbf{x}[S]}(I[S]) = I[S]$. Como $\theta : A[U] \rightarrow A[S]$ é homomorfismo de anéis, temos $\tilde{I} = \theta^{-1}(\text{sat}_{\mathbf{x}[S]}(I[S]))$ é primo.
2. Temos $I = \mathfrak{q}$, onde $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ é o único primo associado a I . Logo, $I[S] = \mathfrak{q}[S]$ e como $\mathbf{x} \notin \mathfrak{p}$ temos, pela Proposição 1.30, $\text{sat}(I[S]) = \mathfrak{q}[S]$. Agora, pelo Lema 1.31, $\mathfrak{q}[S]$ é $\mathfrak{p}[S]$ -primário em $A[S]$ e $\theta^{-1}(\mathfrak{q}[S])$ é $\theta^{-1}(\mathfrak{p}[S])$ -primário. Mas $\theta^{-1}(\mathfrak{p}[S]) = \theta^{-1}(\text{sat}(\mathfrak{p}[S])) = \tilde{\mathfrak{p}}$. Para demonstrar que os expoentes de I e $\tilde{I}$ são iguais, considere $a = \text{expoente}(I)$. Como $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$, temos, pelo Lema 1.31, $\mathfrak{p}[S]^a \subseteq \mathfrak{q}[S]$. Aplicando θ^{-1} , obtemos $\tilde{\mathfrak{p}}^a = \theta^{-1}(\mathfrak{p}[S])^a \subseteq \theta^{-1}(\mathfrak{p}[S]^a) \subseteq \theta^{-1}(\mathfrak{q}[S]) = \tilde{I}$ e isto prova que $\text{expoente}(\tilde{I}) \leq \text{expoente}(I)$. Agora vamos provar que $\text{expoente}(I) \leq \text{expoente}(\tilde{I}) = b$. Para isso, note que como $\tilde{\mathfrak{p}} = \theta^{-1}(\mathfrak{p}[S])$, temos $\theta(\tilde{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}[S]$. Logo, $\mathfrak{p}[S]^b = \theta(\tilde{\mathfrak{p}})^b \subseteq \text{sat}(I[S]) = I[S]$ e, assim, $\mathfrak{p}^b \subseteq I$, ou seja, $\text{expoente}(I) \leq b$.
3. Se $I = \bigcap_{k=1}^t I_k$ em A , então $I[S] = \bigcap_{k=1}^t I_k[S]$ em $A[S]$, pelo Lema 1.31. Agora, considerando a saturação do ideal $I[S]$ em relação ao ideal $(\mathbf{x})$, teremos, pela Proposição 1.30, $\text{sat}(I[S])$ igual a interseção dos ideais $I_k[S]$ tais que $(\mathbf{x}) \not\subseteq \sqrt{I_k[S]}$. Logo, $\tilde{I} = \theta^{-1}(\text{sat}(I[S])) = \bigcap \theta^{-1}(I_k[S])$. Pelo demonstração do item anterior, $I_k[S] = \text{sat}(I_k[S])$, portanto, $\tilde{I} = \tilde{I}$. $\square$

Pelos Lemas acima, obtemos propriedades para $\bar{I}$, como mostra a seguinte Proposição:

Proposição 2.9 (Proposição 1 de [8]). *Sejam I um ideal homogêneo e $\mathfrak{p}$ um ideal primo em A .*

1. *Se I é primo, então $\bar{I}$ é primo em $R[U]$.*
2. *Se I é $\mathfrak{p}$ -primário, então $\bar{I}$ é $\bar{\mathfrak{p}}$ -primário.*
3. *Se $I = I_1 \cap \dots \cap I_t$ é a decomposição primária minimal, então $\bar{I} = \bar{I}_1 \cap \dots \cap \bar{I}_t$.*

Demonstração: Seja $f : R[U] \rightarrow A[U]$ homomorfismo de anéis. Notamos que $\bar{I} = \tilde{I} \cap R[U]$ é a contração do ideal $\tilde{I}$ por f . Todas as afirmações seguem do Lema 2.8. $\square$

Observação 2.10. *Suponha que R é um corpo. Neste caso, denotaremos ele por k , e $\bar{k}$ denotará seu fecho algébrico. O espaço projetivo $\mathbb{P}_k^n$ será denotado simplesmente por $\mathbb{P}^n$.*

No próximo Lema, vamos ver uma relação geométrica entre $\tilde{I}$ e $\bar{I}$.

Lema 2.11. (Lema 4 de [8]) *Seja $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo, tal que $\mathbf{x} \notin I$. Então, $\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_d\} \subset \mathbf{Z}(\bar{I})$ se, e somente se, $\mathbf{Z}(H_1, \dots, H_d) \cap \mathbf{Z}(I) \neq \emptyset$, onde $\bar{\xi}_i = (\xi_{i0} : \dots : \xi_{in}) \subset \mathbb{P}^n$ e $H_i = \sum_{j=0}^n \xi_{ij}x_j$ hiperplano.*

Demonstração: Considere a variedade Γ dos zeros do ideal $(I, L_1, \dots, L_d)$, ou, equivalentemente, do ideal $\tilde{I}$ em $\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^d$, onde o primeiro fator corresponde às variáveis $x_0, \dots, x_n$, e o k -ésimo fator em $(\mathbb{P}^n)^d = \underbrace{\mathbb{P}^n \times \dots \times \mathbb{P}^n}_{d \text{ vezes}}$ corresponde às variáveis $u_{k0}, \dots, u_{kn}$. Seja φ a projeção

$$\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^d \rightarrow (\mathbb{P}^n)^d.$$

O conjunto $\varphi(\Gamma)$ é fechado na topologia de Zariski (ver [3], Capítulo I, seção 5, Teorema 3). Afirmamos que $\varphi(\Gamma)$ é denso na variedade de zeros do ideal $\bar{I}$. Para ver isto, primeiro note que $\varphi(\Gamma) \subseteq Z(\bar{I})$, pois como

$$\Gamma = Z(\tilde{I}) = \{(\underline{x}, \bar{\xi}) \in \mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^d \mid g(\underline{x}, \bar{\xi}) = 0 \text{ para todo } g \in \tilde{I}\}$$

temos

$$\varphi(\Gamma) = \{\bar{\xi} \in (\mathbb{P}^n)^d \mid \exists \underline{x} \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } g(\underline{x}, \bar{\xi}) = 0 \text{ para todo } g \in \tilde{I}\}$$

e como $\bar{I} \subset \tilde{I}$, $\varphi(\Gamma) \subseteq Z(\bar{I})$. Agora, considere o aberto $Z(\bar{I}) \setminus Z(J)$, onde J é um ideal homogêneo tal que $\bar{I} \subseteq J \subseteq R[U]$ e $\sqrt{\bar{I}} \subsetneq \sqrt{J}$. Suponha por absurdo que $\varphi(\Gamma) \subseteq Z(J)$, então $Z(I, L_1, \dots, L_d) \subseteq Z(I, L_1, \dots, L_d, J)$. De fato, seja $(\underline{x}, \bar{\xi}) \in Z(I, L_1, \dots, L_d)$. Então $\bar{\xi} \in \varphi(\Gamma)$ pela definição de $\varphi(\Gamma)$ que, por hipótese, está contida em $Z(J)$. Logo $\bar{\xi} \in Z(J)$ e, assim, $(\underline{x}, \bar{\xi}) \in Z(I, L_1, \dots, L_d, J)$. Além disso, como $(I, L_1, \dots, L_d) \subseteq (I, L_1, \dots, L_d, J)$, temos $Z(I, L_1, \dots, L_d, J) \subseteq Z(I, L_1, \dots, L_d)$. Ou seja, se $\varphi(\Gamma) \subseteq Z(J)$, então

$$Z(I, L_1, \dots, L_d, J) = Z(I, L_1, \dots, L_d).$$

Lembramos que $Z(I, L_1, \dots, L_d)$ pertence ao espaço projetivo sobre $\bar{k}$, então pelo Nullstellensatz,

$$\begin{aligned} \sqrt{(I, L_1, \dots, L_d, J)} &= \sqrt{Z(I, L_1, \dots, L_d)} \\ J &\subseteq \sqrt{(I, L_1, \dots, L_d)} \\ J^m &\subseteq (I, L_1, \dots, L_d) \cap R[U] = \bar{I} \\ \sqrt{J} &\subseteq \sqrt{\bar{I}}, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, logo $\varphi(\Gamma) \not\subseteq Z(J)$. Portanto, $\varphi(\Gamma)$ é denso em $Z(\bar{I})$, como afirmamos. $\square$

No próximo Lema, provamos a importante propriedade de $\bar{I}$ em $k[U]$, onde k é um corpo algebricamente fechado, que será útil para os próximos resultados do trabalho.

Lema 2.12 (Lema 5 de [8]). *Seja I um ideal primário homogêneo em $k[x_0, \dots, x_n]$. Então,*

1. *Se $ht(I) \leq n - d$, então $\bar{I} = (0)$*
2. *Se $ht(I) \geq n - d + 1$, então $\bar{I} \neq (0)$.*
3. *Se $ht(I) = n - d + 1$, então $\bar{I}$ é um ideal principal em $k[U]$.*

Demonstração: Se I é primário, então $\bar{I}$ é primário, pela Proposição 2.9. Logo, podemos assumir que I é um ideal primo. Pela demonstração do Lema 2.11 a variedade dos zeros de $\bar{I}$ coincide com $\varphi(\Gamma)$. Seja $X = \mathbf{Z}(I)$.

1. Se $ht(I) \leq n - d$, então $ht(I, H_1, \dots, H_d) \leq n - d + d = n < n + 1$ (ver [4], exercício 1.8). Pelo Nullstellensatz, $Z(I, H_1, \dots, H_d) \neq \emptyset$, logo $Z(\bar{I}) = (\mathbb{P}^n)^d$ pelo Lema 2.11. Portanto, $\bar{I} = (0)$.
2. Se $ht(I) \geq n - d + 1$, então $\dim \left(\frac{k[x_0, \dots, x_n]}{(I, H_1, \dots, H_d)} \right) = \dim \left(\frac{k[x_0, \dots, x_n]}{I} \right) - d \leq n + 1 - (n + 1 - d) - d = 0$. Logo, $ht(I, H_1, \dots, H_d) = n + 1$. Portanto, o ideal homogêneo $(I, H_1, \dots, H_d)$ está contido no ideal $(x_0, \dots, x_n)$. Pelo Nullstellensatz, $Z(I, H_1, \dots, H_d) = \emptyset$ em $\mathbb{P}^n$. Pelo Lema 2.11, $Z(\bar{I}) \neq (\mathbb{P}^n)^d$. Novamente pelo Nullstellensatz, $\sqrt{\bar{I}} = \mathcal{I}(Z(\bar{I})) \neq \mathcal{I}((\mathbb{P}^n)^d) = (0)$. Assim, $\bar{I} \neq (0)$.
3. Suponha que $ht(I) = n - d + 1$. Suponha também que k é algebricamente fechado. Então a dimensão da fibra $\varphi^{-1}(\bar{\xi})$ sobre o ponto $\bar{\xi} \in \varphi(\Gamma)$ é igual a $\dim \Gamma - \dim \varphi(\Gamma)$ pelo Teorema 7, em [3], página 70. Como $\varphi^{-1}(\bar{\xi})$ é um conjunto finito, temos que $\dim \Gamma = \dim \varphi(\Gamma)$. Fazendo $x_0 = 1$ e $u_{i0} = 1$ para $1 \leq i \leq d$, temos que o anel coordenado afim de Γ é dado por

$$k[\Gamma] = \frac{k[x_1, \dots, x_n, u_{11}, \dots, u_{dn}]}{(I^{dh}, L_1^{dh}, \dots, L_d^{dh})},$$

onde $(I^{dh}, L_1^{dh}, \dots, L_d^{dh})$ é o ideal gerado pelas desomogeneizações em relação a x_0 e u_{i0} de $I, L_1, \dots, L_d$. Logo, $\dim \Gamma = \dim k[\Gamma] = (d+1)n - n - 1 = dn - 1$.

Portanto, $\text{codim}\Gamma = dn - (dn - 1) = 1$ e assim $\bar{I}$ é um ideal principal, pois $k[U]$ é um domínio de fatoração única. $\square$

Estamos interessados na resultante de uma forma de Chow e um polinômio. Para isso, precisaremos de uma fatoração da forma de Chow de um ideal primo homogêneo de altura $n + 1 - d$, a qual Nesterenko obteve em [9].

Teorema 2.13. *(Lema 2 de [9]). Uma forma de Chow de um ideal primo homogêneo $\mathfrak{p} \subset A$ com altura $ht(\mathfrak{p}) = n + 1 - d$ e $x_i \notin \mathfrak{p}$, pode ser escrita como*

$$F = a \prod_{\gamma \in \Gamma} (\alpha_0^\gamma u_{r0} + \alpha_1^\gamma u_{d1} + \dots + \alpha_n^\gamma u_{dn}), \quad (2.4)$$

onde $\alpha_i = 1$, $a \in k[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{d-1}] =: k_{d-1}$ e K é uma extensão finitamente gerada de k_{d-1} gerada por $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, ou seja, $K := k_{d-1}(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ tem grau $[K : k_{d-1}] = \delta_{\mathfrak{p}}$ e Γ é o conjunto das k_{d-1} -imersões de K no fecho algébrico $\overline{k_{d-1}}$ e $\alpha_i^\gamma = \gamma(\alpha_i)$.

Sejam $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ ideais primos de altura $n + 1 - d$ com respectivas formas de Chow

$$F_i = a_i \prod_{\gamma \in \Gamma_i} (\alpha_{i0}^\gamma u_{d0} + \alpha_{i1}^\gamma u_{d1} + \dots + \alpha_{in}^\gamma u_{dn}),$$

onde para cada $i = 1, \dots, s$ algum $\alpha_{ik}^\gamma = 1$ e Γ_i é o conjunto das k_{d-1} -imersões de algum $k_{d-1}(\alpha_{i0}^{\gamma_0}, \dots, \alpha_{in}^{\gamma_0})$ em $\overline{k_{d-1}}$. Sejam $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}$ e defina $F = F_1^{k_1} \dots F_s^{k_s}$. Considere $Q \in R'[\mathbf{x}]$ um polinômio homogêneo em $\mathbf{x}$, onde $R' \supset k[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{d-1}]$ é um domínio integralmente fechado.

Definição 2.14. *Com a notação acima a resultante $\text{Res}(F, Q)$ de F e Q é definida por*

$$\text{Res}(F, Q) = \prod_{i=1}^s \left(a_i^{\deg Q} \prod_{\gamma \in \Gamma_i} Q(\alpha_{i0}^\gamma, \alpha_{i1}^\gamma, \dots, \alpha_{in}^\gamma) \right)^{k_i}.$$

Observação 2.15. *Esta resultante é um produto das resultantes de Q com cada F_i . Note que a resultante é zero se, e somente se, $Q \in \cup \mathfrak{p}_i$, pois Q está sendo avaliado nos zeros genéricos dos $\mathfrak{p}_i$. Em particular, Nesterenko mostrou o importante fato que se $\text{Res}(F, Q) \neq 0$, então esta resultante é uma forma de Chow. Além disso, ele também mostrou que a $\text{Res}(F, Q)$ possui uma variável a menos que F .*

Proposição 2.16. *(Proposição 3 de [7]) Com a notação anterior,*

1. $\text{Res}(F, Q) \in R'$.
2. *Se $R' = k[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{d-1}]$ e $Q \in k[\mathbf{x}] \setminus \cup \mathfrak{p}_i$, considere $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$ todos os primos minimais, com formas de Chow $E_1, \dots, E_t$, associados aos ideais $(\mathfrak{p}_i, Q)$, $i = 1, \dots, s$. Então existem $f_1, \dots, f_t \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\text{Res}(F, Q) \sim E_1^{f_1} \cdots E_t^{f_t},$$

ou seja, $\text{Res}(F, Q)$ é uma forma de Chow de altura $d + 1$.

Demonstração: Parte (1) segue a partir do Lema 4 de [9]. Parte (2) segue a partir da prova do Lema 6 de [10].

Capítulo 3

Valor absoluto de formas de Chow

Um dos objetivos deste capítulo é obter estimativas para o valor absoluto de resultantes. Para isso, usamos a clássica desigualdade de Gelfond em [11] para a altura de polinômios fatorados.

Consideraremos $k = \mathbb{C}$. Se I é um ideal unmixed homogêneo de $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ com forma de Chow $F \in \mathbb{C}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_d]$ e se $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ é não nulo, então o *valor absoluto* de I em ω é definido da seguinte maneira: primeiro, denotamos por $H(I)$ o máximo dos valores absolutos dos coeficientes do polinômio F . Considere as d matrizes genéricas antissimétricas $S^{(i)} = (s_{jk}^{(i)}), j, k = 0, \dots, n, i = 1, \dots, d$, isto é, exceto pela relação de antissimetria $s_{jk}^{(i)} + s_{kj}^{(i)} = 0$, as variáveis $s_{jk}^{(i)}$ não possuem nenhuma relação algébrica sobre $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$. Agora, considere a aplicação polinomial $\sigma_\omega : \mathbb{C}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_d] \rightarrow \mathbb{C}[S^{(1)}, \dots, S^{(d)}]$ dada por

$$\sigma_\omega : u_{ij} \mapsto \sum_{k=0}^n s_{jk}^{(i)} \omega_k,$$

onde $\mathbb{C}[S^{(1)}, \dots, S^{(d)}]$ é o anel de polinômios com coeficientes complexos e variáveis $s_{jk}^{(i)}$.

Agora definimos

$$\|I\|_\omega := \|F\|_\omega := \frac{H(\sigma_\omega(F))}{|\omega|^{d\delta_I} H(F)},$$

onde $H(\sigma_\omega(F))$ é o máximo dos valores absolutos dos coeficientes de $\sigma_\omega(F)$, $|\omega| := \max_i \{|\omega_i|\}$ e $\delta_I = \deg_{\bar{u}_1} F$. Lembramos que F é multihomogêneo, então $\deg_{\bar{u}_i} F = \deg_{\bar{u}_1} F$. Também usamos a notação

$$\|Q\|_\omega := \frac{|Q(\omega)|}{|\omega|^{\delta_Q} H(Q)}$$

para polinômios homogêneos não nulos $Q \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ e $\omega \in \mathbb{C}^{n+1}$ não nulo. A Proposição 3.6 é o primeiro fato importante do Teorema principal. Para sua demonstração, precisaremos de alguns lemas. Os dois primeiros lemas são lemas gerais, válidos para qualquer polinômio não nulo homogêneo.

Lema 3.1. *Se $Q \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ é homogêneo não nulo de grau δ_Q , então $\|Q\|_\omega$ possui uma cota superior que não depende de $|\omega|$.*

Demonstração: Seja $Q = \sum_{|\bar{i}|=\delta_Q} q_{\bar{i}} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$, onde $\bar{i} = (i_0, \dots, i_n)$ é uma $(n+1)$ -upla de inteiros positivos e $|\bar{i}| = i_0 + \dots + i_n$. Temos

$$\|Q\|_\omega = \frac{|\sum_{\bar{i}} q_{\bar{i}} \omega_0^{i_0} \cdots \omega_n^{i_n}|}{|\omega|^{\delta_Q} H(Q)} \leq \frac{\sum_{\bar{i}} |q_{\bar{i}}| |\omega|^{\delta_Q}}{|\omega|^{\delta_Q} H(Q)} = \frac{\sum_{\bar{i}} |q_{\bar{i}}|}{H(Q)}.$$

□

Lema 3.2. *Se $Q \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ é homogêneo não nulo de grau δ_Q , então $\lim_{|\omega| \rightarrow 0} \|Q\|_\omega \neq 0$ e $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \|Q\|_\omega \neq 0$.*

Demonstração: Como Q é não nulo, existe $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $Q(y_0, \dots, y_n) \neq 0$. Se $\lim_{|\omega| \rightarrow 0} \|Q\|_\omega$ fosse 0, então seria em qualquer direção, em particular, para $\omega_n = \frac{1}{n}(y_0, \dots, y_n)$. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Q\|_{\omega_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|Q(\frac{1}{n}y_0, \dots, \frac{1}{n}y_n)|}{\max\{|\frac{1}{n}y_0|, \dots, |\frac{1}{n}y_n|\}^{\delta_Q} H(Q)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{1}{n})^{\delta_Q} |Q(y_0, \dots, y_n)|}{(\frac{1}{n})^{\delta_Q} |\mathbf{y}|^{\delta_Q} H(Q)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|Q(y_0, \dots, y_n)|}{|\mathbf{y}|^{\delta_Q} H(Q)} \neq 0. \end{aligned}$$

Analogamente, provamos o outro caso.

□

O seguinte Lema de Gelfond [11] é um lema geral com diversas aplicações na teoria dos números transcendentais.

Lema 3.3. (Gelfond) *Sejam $f_1, \dots, f_m$ polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$. Então*

$$H(f_1) \cdots H(f_m) \leq H(f_1 \cdots f_m) \exp(\Delta),$$

onde Δ é a soma dos graus em cada variável.

Mais um lema geral:

Lema 3.4. *Se $P, Q \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ são homogêneos de grau ν , então para quaisquer*

$$\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n), \theta = (\theta_0, \dots, \theta_n) \in \mathbb{C}^{n+1},$$

$$|Q(\omega)P(\theta) - Q(\theta)P(\omega)| \leq \|\theta - \omega\| c'(P, Q) |\omega|^\nu |\theta|^\nu, \quad (3.1)$$

onde

$$\|\theta - \omega\| := \frac{(\max_{j,k} |\theta_j \omega_k - \theta_k \omega_j|)}{|\omega| |\theta|}.$$

Demonstração: Considere $Q = \sum_{\bar{k}} q_{\bar{k}} x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n}$, $P = \sum_{\bar{l}} p_{\bar{l}} x_0^{l_0} \cdots x_n^{l_n}$, onde $q_{\bar{k}}, p_{\bar{l}} \in \mathbb{C}$, $\bar{k} = (k_0, \dots, k_n)$, $\bar{l} = (l_0, \dots, l_n)$, com $k_i, l_i \in \mathbb{N}$ e $|\bar{k}| = k_0 + \dots + k_n = \nu$, $|\bar{l}| = l_0 + \dots + l_n = \nu$. Sejam k, l fixos e considere a notação $\omega^{\bar{k}} = \omega_0^{k_0} \cdots \omega_n^{k_n}$ e notações análogas para $\omega^{\bar{l}}, \theta^{\bar{k}}, \theta^{\bar{l}}$. Temos

$$\begin{aligned} Q(\omega)P(\theta) - Q(\theta)P(\omega) &= \left(\sum_{|\bar{k}|=\nu} q_{\bar{k}} \omega_0^{k_0} \cdots \omega_n^{k_n} \right) \left(\sum_{|\bar{l}|=\nu} p_{\bar{l}} \theta_0^{l_0} \cdots \theta_n^{l_n} \right) - \\ &\quad \left(\sum_{|\bar{k}|=\nu} q_{\bar{k}} \theta_0^{k_0} \cdots \theta_n^{k_n} \right) \left(\sum_{|\bar{l}|=\nu} p_{\bar{l}} \omega_0^{l_0} \cdots \omega_n^{l_n} \right) \\ &= \left(\sum_{|\bar{k}|=\nu} \sum_{|\bar{l}|=\nu} q_{\bar{k}} p_{\bar{l}} \omega^{\bar{k}} \theta^{\bar{l}} \right) - \left(\sum_{|\bar{k}|=\nu} \sum_{|\bar{l}|=\nu} q_{\bar{k}} p_{\bar{l}} \theta^{\bar{k}} \omega^{\bar{l}} \right) \\ &= \sum_{|\bar{k}|=\nu} \sum_{|\bar{l}|=\nu} q_{\bar{k}} p_{\bar{l}} (\omega^{\bar{k}} \theta^{\bar{l}} - \theta^{\bar{k}} \omega^{\bar{l}}). \end{aligned}$$

Então existem inteiros i_l e $j_l, l = 1, \dots, \nu$, com $0 \leq i_l \leq n, 0 \leq j_l \leq n$ tais que $\omega^{\bar{k}}\theta^{\bar{l}} - \omega^{\bar{l}}\theta^{\bar{k}}$ pode ser escrito linearmente, ou seja,

$$\begin{aligned}\omega^{\bar{k}}\theta^{\bar{l}} - \omega^{\bar{l}}\theta^{\bar{k}} &= \prod_{l=1}^{\nu}(w_{i_l}\theta_{j_l}) - \prod_{l=1}^{\nu}(\theta_{i_l}w_{j_l}) \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \left(\prod_{1 \leq l \leq k} w_{i_l}\theta_{j_l} \cdot \prod_{k < l \leq \nu} \theta_{i_l}w_{j_l} - \prod_{1 \leq l < k} w_{i_l}\theta_{j_l} \cdot \prod_{k \leq l \leq \nu} \theta_{i_l}w_{j_l} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \left(\prod_{1 \leq l < k} w_{i_l}\theta_{j_l} \cdot \prod_{k < l \leq \nu} \theta_{i_l}w_{j_l} \cdot (w_{i_k}\theta_{j_k} - \theta_{i_k}w_{j_k}) \right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\omega^{\bar{k}}\theta^{\bar{l}} - \omega^{\bar{l}}\theta^{\bar{k}}| \leq \nu\omega^{\nu-1}\theta^{\nu-1} \max |w_{i_k}\theta_{j_k} - \theta_{i_k}w_{j_k}|.$$

e

$$|Q(\omega)P(\theta) - Q(\theta)P(\omega)| \leq \binom{\nu+n}{n}^2 H(Q)H(P)\nu\omega^{\nu-1}\theta^{\nu-1} \max |w_{i_k}\theta_{j_k} - \theta_{i_k}w_{j_k}|.$$

Isto implica a estimativa desejada. $\square$

O seguinte resultado é bem conhecido e recomendamos consultar [12] para a sua demonstração.

Lema 3.5. (*Estimativas de Cauchy*) *Seja f uma função holomorfa em um polydisco fechado $\bar{\Delta}(a, r) \subset \mathbb{C}^n$, com $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $r = (r_1, \dots, r_n)$, $f(z) = \sum c_{\alpha}(z - a)^{\alpha}$. Então*

$$|c_{\alpha}| = \frac{|D^{\alpha}f(a)|}{\alpha!} \leq \frac{M}{r^{\alpha}} = \frac{M}{r_1^{\alpha_1} \dots r_n^{\alpha_n}},$$

onde $M = \sup |f(\zeta)|$ em $T(a, r) = C(a, r_1) \times \dots \times C(a, r_n)$, com $C(a, r_i)$ sendo o círculo de centro a_i e raio r_i em $\mathbb{C}$.

A próxima proposição determina estimativas para o valor absoluto da $Res(F, Q)$.

Proposição 3.6. (Proposição 4 de [7]) Se $k = \mathbb{C}$ na Proposição 2.16 e se $\omega \in \mathbb{C}^{n+1}$ é não nulo, então

$$\|Res(F, Q)\|_\omega \leq c(F, Q) \max\{\|F\|_\omega, \|Q\|_\omega\}, \quad (3.2)$$

onde $c(F, Q)$ é uma constante dependendo apenas de F e Q , e se $d > 1$, então

$$\deg_{\bar{u}_1} Res(F, Q) = \delta_F \delta_Q.$$

Demonstração: Seja $A_i = \{\bar{\omega} \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sigma_{\bar{\omega}}(a_i) = 0 \text{ para algum } i\}$. Como A_i possui medida de Lebesgue nula, temos que o seu complementar $A_i^c = \{\omega \mid \sigma_\omega(a_i) \neq 0 \text{ para todo } i\}$ é denso em $\mathbb{C}^{n+1}$. Portanto é suficiente mostrar a desigualdade (3.2) apenas para os elementos de A_i^c . De fato, pois se $\bar{\omega} \in A_i$, podemos encontrar uma sequência $(\omega_m)_m$ com $\omega_m \in A_i^c$ tal que $\omega_m \rightarrow \bar{\omega}$ e como $\|\cdot\|_{\omega_m}$ é contínua para cada ω_m , vamos obter a desigualdade (3.2) para $\bar{\omega}$.

Fixe ω tal que $\sigma_\omega(a_i) \neq 0$ para todo i . Vamos especializar as matrizes $S^{(i)}$, $1 \leq i \leq d-1$, ao conjunto aberto das matrizes antissimétricas $T^{(i)} = (t_{jk}^{(i)})$, com os $t_{jk}^{(i)} \in \mathbb{C}$ arbitrários, $j, k = 0, \dots, n; i = 1, \dots, d-1$, tais que $|t_{jk}^{(i)}| \leq 1$ e consideramos outra substituição

$$\begin{aligned} \tau_\omega : \mathbb{C}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{d-1}, \alpha_{i0}^\gamma, \dots, \alpha_{in}^\gamma] &\rightarrow \mathbb{C} \\ u_{ij} &\mapsto \sum_{k=0}^n t_{jk}^{(i)} \omega_k \\ \alpha_{ik}^\gamma &\mapsto \beta_{ik}^\gamma. \end{aligned}$$

Note que $\tau_\omega(u_{ij}) = \sigma_\omega(u_{ij})(t_{j0}^{(i)}, \dots, t_{jn}^{(i)})$. Seja $h_i^\gamma := \max\{|\beta_{i0}^\gamma|, \dots, |\beta_{in}^\gamma|\}$.

Aplicando τ_ω no produto

$$F = \prod_{i=1}^s \left(a_i \prod_{\gamma \in \Gamma_i} (\alpha_{i0}^\gamma u_{d0} + \dots + \alpha_{in}^\gamma u_{dn}) \right)^{k_i},$$

obtemos

$$\tau_\omega(F) = \prod_{i=1}^s \left(\tau_\omega(a_i) \prod_{\gamma \in \Gamma_i} (\beta_{i0}^\gamma u_{d0} + \beta_{i1}^\gamma u_{d1} + \dots + \beta_{in}^\gamma u_{dn}) \right)^{k_i}. \quad (3.3)$$

Note que $\tau_\omega(F) \in \mathbb{C}[\bar{u}_d]$. Pelo Lema (3.3)

$$\prod_{i=1}^s \left(|\tau_\omega(a_i)| \prod_{\gamma \in \Gamma_i} h_i^\gamma \right)^{k_i} \leq H(\tau_\omega(F)) \cdot \exp(\delta_F). \quad (3.4)$$

Note que $\tau_\omega(F) = F(\bar{u}'_1, \dots, \bar{u}'_{d-1}, \bar{u}_d)$, onde $\bar{u}'_i = u'_{i0} \cdots u'_{in}$ e $u'_{ij} = \sum_{k=0}^n t_{jk}^{(i)} \omega_k = \tau_\omega(u_{ij}) \in \mathbb{C}$ para $j = 0, \dots, n$. Como $F = \sum_{\bar{m}} a_{\bar{m}} \bar{u}_1^{\mathbf{m}_1} \dots \bar{u}_d^{\mathbf{m}_d}$, onde $a_{\bar{m}} \in \mathbb{C}$, $\bar{m} = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_d)$ e $\mathbf{m}_i = (m_{i0}, \dots, m_{in})$ é uma $(n+1)$ -upla de inteiros não negativos com $|\mathbf{m}_i| = m_{i0} + \dots + m_{in} = \delta_F$, para todo $i = 1, \dots, d$, temos que $\tau_\omega(F) = \sum a_{\bar{m}} \bar{u}'_1^{\mathbf{m}_1} \dots \bar{u}'_{d-1}^{\mathbf{m}_{d-1}} \bar{u}_d^{\mathbf{m}_d}$. Logo, $H(\tau_\omega(F)) = \max_{\bar{m}} \{a_{\bar{m}} \bar{u}'_1^{\mathbf{m}_1} \dots \bar{u}'_{d-1}^{\mathbf{m}_{d-1}}\}$. Como $|u'_{ij}| \leq |t_{j0}^{(i)} \omega_0| + \dots + |t_{jn}^{(i)} \omega_n| \leq |\omega| + \dots + |\omega| = (n+1)|\omega|$, temos que $|u'_i|^{\mathbf{m}_i} = |u'_{i0}^{m_{i0}} \cdot u'_{i1}^{m_{i1}} \cdots u'_{in}^{m_{in}}| \leq (n+1)^{m_{i0}} |\omega|^{m_{i0}} \cdots (n+1)^{m_{in}} |\omega|^{m_{in}} = (n+1)^{\delta_F} |\omega|^{\delta_F}$. Portanto,

$$H(\tau_\omega(F)) \leq (n+1)^{\delta_F(d-1)} |\omega|^{\delta_F(d-1)} c(F),$$

onde $c(F) > 0$ é uma constante dependendo apenas de F . Substituindo essa desigualdade na desigualdade (3.4), obtemos

$$\prod_{i=1}^s \left(|\tau_\omega(a_i)| \prod_{\gamma \in \Gamma_i} h_i^\gamma \right)^{k_i} \leq c_1(F) |\omega|^{(d-1)\delta_F}, \quad (3.5)$$

onde $c_1(F) > 0$ é uma constante que depende apenas de F . Agora consideramos a substituição

$$u_{dj} \mapsto \sum_{k=0}^n s_{jk}^{(d)} \omega_k = \sigma_\omega(u_{dj}). \quad (*)$$

Note que $\beta_{i0}^\gamma u_{d0} + \beta_{i1}^\gamma u_{d1} + \dots + \beta_{in}^\gamma u_{dn} |_* = \sum_{0 \leq j < k \leq n} s_{jk}^{(d)} (\beta_{ij}^\gamma \omega_k - \beta_{ik}^\gamma \omega_j)$.

Definindo $\rho_i^\gamma := \max_{j,k} \{|\beta_{ij}^\gamma \omega_k - \beta_{ik}^\gamma \omega_j|\} \in \mathbb{C}$, consideramos a substituição $(*)$ em ambos os lados de (3.3):

$$\prod_{i=1}^s \left(\tau_\omega(a_i) \prod_{\gamma \in \Gamma_i} \sum_{0 \leq j < k \leq n} s_{jk}^{(d)} (\beta_{ij}^\gamma \omega_k - \beta_{ik}^\gamma \omega_j) \right)^{k_i} = \tau_\omega(F) |_*.$$

Note que $\tau_\omega(F)|_* \in \mathbb{C}[S^{(d)}]$ e

$$\tau_\omega(F)|_* = F(\bar{u}'_1, \dots, \bar{u}'_{d-1}, S^{(d)}\omega) = \sigma_\omega(F)(T^{(1)}\omega, \dots, T^{(d-1)}\omega, S^{(d)}\omega) = \sum_{\bar{m}} a_{\bar{m}} T^{(1)}\omega \dots T^{(d-1)}\omega S^{(d)}\omega \text{ e } \sigma_\omega(F) = \sum_{\bar{m}} a_{\bar{m}} S^{(1)}\omega \dots S^{(d)}\omega. \text{ Aplicando o Lema (3.3)}$$

$$\prod_{i=1}^s \left(|\tau_\omega(a_i)| \prod_{\gamma \in \Gamma_i} \rho_i^\gamma \right)^{k_i} \leq H(\tau_\omega(F)|_*) c_2(F) \leq H(\sigma_\omega(F)) c_3(F). \quad (3.6)$$

Para j tal que $|\omega_j| = |\omega|$, considere o polinômio

$$T_j(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^s \left((a_i)^{\delta_Q} \prod_{\gamma} (Q(\alpha_{i0}^\gamma, \dots, \alpha_{in}^\gamma) x_j^{\delta_Q} - Q(\mathbf{x})(\alpha_{ij}^\gamma)^{\delta_Q}) \right)^{k_i}.$$

Note que α_{ij}^γ e $Q(\alpha_{i0}^\gamma, \dots, \alpha_{in}^\gamma) \in \mathbb{C}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{d-1}]$ e $T_j(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{d-1}, \mathbf{x}]$.

Calculando em ω :

$$T_j(\omega) = \prod_{i=1}^s \left((a_i)^{\delta_Q} \prod_{\gamma} (Q(\alpha_{i0}^\gamma, \dots, \alpha_{in}^\gamma) \omega_j^{\delta_Q} - Q(\omega)(\alpha_{ij}^\gamma)^{\delta_Q}) \right)^{k_i}.$$

Aplicando τ_ω

$$\tau_\omega(T_j(\omega)) = \prod_{i=1}^s \left(\tau_\omega(a_i)^{\delta_Q} \prod_{\gamma} (\tau_\omega(Q(\alpha_{i0}^\gamma, \dots, \alpha_{in}^\gamma)) \omega_j^{\delta_Q} - Q(\omega)(\beta_{ij}^\gamma)^{\delta_Q}) \right)^{k_i}.$$

Seja $c = c'(x_j^{\delta_Q}, Q)$. Então a partir de (3.1)

$$\begin{aligned} |\tau_\omega(T_j(\omega))| &\leq \prod_{i=1}^s \left(|\tau_\omega(a_i)|^{\delta_Q} \prod_{\gamma} (\rho_i^\gamma c(h_i^\gamma)^{\delta_Q-1} |\omega|^{\delta_Q-1}) \right)^{k_i} \\ &= \prod_{i=1}^s \left(|\tau_\omega(a_i)| \prod_{\gamma} \rho_i^\gamma \right)^{k_i} c^{\delta_F} |\omega|^{(\delta_Q-1)\delta_F} \\ &\times \prod_{i=1}^s \left(|\tau_\omega(a_i)| \prod_{\gamma} h_i^\gamma \right)^{k_i(\delta_Q-1)}. \end{aligned}$$

Então por (3.4) e (3.6),

$$|\tau_\omega(T_j(\omega))| \leq H(\sigma_\omega(F))|\omega|^{d\delta_F(\delta_Q-1)}c_4(F, Q). \quad (3.7)$$

Agora, efetuando o produto na expressão para $T_j(\mathbf{x})$, vemos que

$$T_j(\mathbf{x}) = x_j^{\delta_F\delta_Q} \text{Res}(F, Q) + Q(\mathbf{x})C(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

com $C(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{d-1}, \mathbf{x}]$ homogêneo de grau $\delta_F\delta_Q - \delta_Q$ em $\mathbf{x}$.

Aplicando τ_ω

$$\tau_\omega(T_j(\mathbf{x})) = x_j^{\delta_F\delta_Q} \tau_\omega(\text{Res}(F, Q)) + Q(\mathbf{x})\tau_\omega(C(\mathbf{x})).$$

Calculando em ω

$$\tau_\omega(T_j(\omega)) = \omega_j^{\delta_F\delta_Q} \tau_\omega(\text{Res}(F, Q)) + Q(\omega)\tau_\omega(C(\omega)).$$

Portanto,

$$|\omega_j^{\delta_F\delta_Q} \tau_\omega(\text{Res}(F, Q))| \leq |\tau_\omega(T_j(\omega)) - Q(\omega)\tau_\omega(C(\omega))| \leq \max\{|\tau_\omega(T_j(\omega))|, |Q(\omega)|\tau_\omega(C(\omega))\}.$$

Usando (3.4), temos

$$|\tau_\omega(C(\omega))| \leq c_5(F, Q)|\omega|^{d\delta_F\delta_Q - \delta_Q}. \quad (3.9)$$

Portanto, a partir de (3.7), (3.8), (3.9), temos

$$|\tau_\omega(\text{Res}(F, Q))\omega^{\delta_F\delta_Q}| \leq c(F, Q)|\omega|^{d\delta_F\delta_Q} \max\{\|F\|_\omega, \|Q\|_\omega\},$$

ou seja,

$$|\tau_\omega(\text{Res}(F, Q))| \leq c(F, Q)|\omega|^{d\delta_F\delta_Q - \delta_F\delta_Q} \max\{\|F\|_\omega, \|Q\|_\omega\}. \quad (3.10)$$

Pelo Lema 3.5,

$$H(\sigma_\omega(\text{Res}(F, Q))) \leq \sup |\tau_\omega(\text{Res}(F, Q))|,$$

onde τ_ω é restrito ao subconjunto aberto dos $T^{(i)}$ com $|t_{(i)}^{jk}| \leq 1$ satisfazendo $\tau_\omega(a_i) \neq 0$ para todo i , e obtemos por 3.10

$$\|\text{Res}(F, Q)\|_\omega = \frac{H(\sigma_\omega(\text{Res}(F, Q)))}{|\omega|^{(d-1)\delta_R} H(\text{Res}(F, Q))} \leq \frac{c(F, Q) |\omega|^{d\delta_F\delta_Q - \delta_F\delta_Q} \max\{\|F\|_\omega, \|Q\|_\omega\}}{|\omega|^{(d-1)\delta_R} H(\text{Res}(F, Q))},$$

onde $\delta_R = \deg_{\bar{u}_1} \text{Res}(F, Q)$. Portanto,

$$\|\text{Res}(F, Q)\|_\omega \leq c'(F, Q) |\omega|^{(d-1)\Delta_0} \max\{\|F\|_\omega, \|Q\|_\omega\}, \quad (3.11)$$

onde $\Delta_0 = \delta_F\delta_Q - \delta_R$. Agora, todos os termos de (3.11), exceto o termo $|\omega|^{(d-1)\Delta_0}$, é independente de $|\omega|$, pelo Lema 3.1. Como $d > 1$ e $\text{Res}(F, Q) \neq 0$, se considerarmos o limite em (3.11) quando $|\omega| \rightarrow +\infty$, temos que $\Delta_0 = 0$, pelo Lema 3.2. Isto completa a prova da proposição. $\square$

Agora vamos denotar por $R^*(F, Q)$ a forma de Chow obtida a partir da $R(F, Q)$ omitindo todos os fatores cujos ideais primos correspondentes $\mathfrak{p}$ contém x_0 . Os próximos lemas são propriedades relacionadas à $R^*(F, Q)$, que serão úteis no próximo capítulo.

Lema 3.7. *(Lema 5 de [7]) Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo homogêneo em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ de altura r com $x_0 \in \mathfrak{p}$. Então para $d = n - r + 1$ e qualquer $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$,*

$$\|\mathfrak{p}\|_\omega \geq \left(\frac{|\omega_0|}{|\omega|} \right)^{d\delta_{\mathfrak{p}}}.$$

Demonstração: Como $x_0 \in \mathfrak{p}$, então na notação de (2.4), cada $\alpha_0^\gamma = 0$. Assim, u_{d0} não aparece na forma de Chow F de $\mathfrak{p}$. Pela simetria de F em $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_d$, as

variáveis $u_{10}, \dots, u_{d-1,0}$ não aparecem também. Assim,

$$\begin{aligned} F(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_d) &= F(u_{11}, \dots, u_{1n}; \dots; u_{d1}, \dots, u_{dn}) \\ &= \sum_{\bar{l}} a_{\bar{l}} u_{11}^{l_{11}} \dots u_{1n}^{l_{1n}} \dots u_{d1}^{l_{d1}} \dots u_{dn}^{l_{dn}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $a_{\bar{l}} \in \mathbb{C}$, $\bar{l} = (\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_d)$ e $\mathbf{l}_i = (l_{i1}, \dots, l_{in})$ é uma n -upla de inteiros não negativos com $|\mathbf{l}_i| = l_{i1} + \dots + l_{in} = \delta_F$, para todo $i = 1, \dots, d$.

Como $\sigma_\omega(u_{ij}) = \sum_{k=0}^n s_{jk}^{(i)} \omega_k$, para $1 \leq i \leq d$ e $1 \leq j \leq n$, aplicando σ_ω em F , obtemos

$$\sigma_\omega(F) = \sum_{\bar{l}} a_{\bar{l}} \left(\sum_{k=0}^n s_{1k}^{(1)} \omega_k \right)^{l_{11}} \dots \left(\sum_{k=0}^n s_{nk}^{(1)} \omega_k \right)^{l_{1n}} \dots \left(\sum_{k=0}^n s_{1k}^{(d)} \omega_k \right)^{l_{d1}} \dots \left(\sum_{k=0}^n s_{nk}^{(d)} \omega_k \right)^{l_{dn}}.$$

Como $s_{jk}^{(i)} = 0$ se $k = j$, $1 \leq j \leq d$ e $s_{jk}^{(i)}$ são algebricamente independentes, todos os termos $s_{j0}^{(i)} \omega_0, j \neq 0$, ocorrem em $\sigma_\omega(F)$. Vamos analisar o grau desses termos. Para isso, vamos reescrever as somas $\sum_{k=0}^n s_{jk}^{(i)} \omega_k = s_{j0}^{(i)} \omega_0 + \sum_{k=1}^n s_{jk}^{(i)} \omega_k$ e, pela expansão binomial, obtemos que $\left(s_{j0}^{(i)} \omega_0 + \sum_{k=1}^n s_{jk}^{(i)} \omega_k \right)^{l_{ij}} = \left(s_{j0}^{(i)} \omega_0 \right)^{l_{ij}} + G_{ij}$, onde G_{ij} é um polinômio com coeficientes complexos e variáveis $s_{jk}^{(i)}$, no qual $s_{j0}^{(i)} \omega_0$ possui grau estritamente menor que l_{ij} . Logo

$$\begin{aligned} \sigma_\omega(F) &= \sum_{|\bar{l}|=\delta_F} a_{\bar{l}} \left(\left(s_{10}^{(1)} \omega_0 \right)^{l_{11}} + G_{11} \right) \dots \left(\left(s_{n0}^{(1)} \omega_0 \right)^{l_{1n}} + G_{1n} \right) \dots \\ &\quad \cdot \left(\left(s_{10}^{(d)} \omega_0 \right)^{l_{d1}} + G_{d1} \right) \dots \left(\left(s_{n0}^{(d)} \omega_0 \right)^{l_{dn}} + G_{dn} \right) \\ &= \sum_{|\bar{l}|=\delta_F} a_{\bar{l}} \omega_0^{l_{11}+\dots+l_{1n}+\dots+l_{d1}+\dots+l_{dn}} \left(s_{10}^{(1)} \right)^{l_{11}} \dots \left(s_{n0}^{(1)} \right)^{l_{1n}} \left(s_{10}^{(d)} \right)^{l_{d1}} \dots \left(s_{n0}^{(d)} \right)^{l_{dn}} + G \end{aligned}$$

Como $l_{i1} + \dots + l_{in} = |\bar{l}_i| = \delta_F$, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, temos

$$\begin{aligned} \sigma_\omega(F) &= \omega_0^{\delta_F d} \sum_{|\bar{l}|=\delta_F} a_{\bar{l}} \left(s_{10}^{(1)} \right)^{l_{11}} \dots \left(s_{n0}^{(1)} \right)^{l_{1n}} \dots \left(s_{10}^{(d)} \right)^{l_{d1}} \dots \left(s_{n0}^{(d)} \right)^{l_{dn}} + G \\ &= \omega_0^{\delta_F d} F \left(s_{10}^{(1)}, \dots, s_{n0}^{(1)}; \dots; s_{10}^{(d)}, \dots, s_{n0}^{(d)} \right) + G, \end{aligned}$$

onde $G \in \mathbb{C}[s_{jk}^{(i)}]$. Para cada coeficiente não nulo a de F , temos que $a\omega_0^{d\delta_F}$ é coeficiente em $\sigma_\omega(F)$. Portanto, escolhendo a com $|a| = H(F)$,

$$\|\mathbf{p}\|_\omega \geq \frac{|a| |\omega_0|^{d\delta_F}}{|\omega|^{d\delta_F} H(F)} = \frac{|\omega_0|^{d\delta_F}}{|\omega|^{d\delta_F}},$$

como desejado. □

Lema 3.8. *Com as condições da Proposição 3.6, considere $R^*(F, Q)$ a forma de Chow obtida a partir da $R(F, Q)$ omitindo todos os fatores cujos ideais primos correspondentes $\mathfrak{p}$ contém x_0 . Então*

1. $\deg_{\bar{u}_1} R^*(F, Q) \leq \delta_F \delta_Q$, e

2. Se, além disso, $\omega_0 \neq 0$,

$$\|R^*(F, Q)\|_\omega \leq c_6(F, Q) \left(\frac{|\omega|}{|\omega_0|} \right)^{(d-1)\Delta} \max\{\|F\|_\omega, \|Q\|_\omega\},$$

onde $\Delta = \delta_F \delta_Q - \deg_{\bar{u}_1} R^*(F, Q)$ e $c_6(F, Q) > 0$ depende apenas de F e Q .

Demonstração: Segue a partir da Proposição 3.6, Lema 3.7 e desigualdade de Gelfond aplicada a $\sigma_\omega(R^*(F, Q))$. □

O próximo lema nos fornece uma estimativa para o valor absoluto da forma de Chow de um ideal principal. Sua demonstração pode ser encontrada em [10], Proposição 1.

Lema 3.9. *Seja $I = (P)$ com P homogêneo. Então $\delta_I = \delta_P$ e*

$$\|I\|_\omega \leq \|P\|_\omega (n+1)^{2n\delta_P}.$$

Observação 3.10. $\|I\|_\omega = \|F\|_\omega$, onde F é a forma de Chow de I e $F = P(\Delta_0, \dots, \Delta_n)$, onde Δ_j denota $(-1)^j$ vezes o determinante da matriz quadrada de ordem n que é obtida excluindo a j -ésima coluna da matriz (u_{ik}) , $i = 1, \dots, n$, $k = 0, \dots, n$.

Capítulo 4

Prova de teoremas

Neste capítulo aplicamos os resultados dos capítulos anteriores para obter uma cota inferior no módulo máximo de uma sequência regular sem zeros em comum. Então, utilizando um resultado de H. Skoda [14] em várias variáveis complexas, obtemos uma cota superior nos graus dos coeficientes na equação no Hilbert Nullstellensatz.

Definição 4.1. Dizemos que $Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] := R$ é uma sequência regular se $Q_1 \neq 0$ e para $i = 2, \dots, m$, Q_i não é um divisor de zero de $R/(Q_1, \dots, Q_{i-1})$.

Proposição 4.2 (Proposição 8 de (Br)). Se $Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é uma sequência regular sem zeros comuns em $\mathbb{C}^n$ e $\deg Q_i = D_i > 0, i = 1, \dots, m$, então existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de $Q_1, \dots, Q_m$, tal que para todo $\omega \in \mathbb{C}^n$ não nulo com

$|\omega| := \max\{|\omega_1|, \dots, |\omega_n|\} \geq 1$, temos

$$\max |Q_i(\omega)| \geq C|\omega|^{1-(n-1)D_1 \cdots D_\mu},$$

onde $\mu = \min\{m, n\}$

Demonstração: Para cada k no intervalo $1 \leq k \leq \mu$, consideramos uma afirmação H_k . Vamos mostrar que para $k < \mu$, H_k implica H_{k+1} e que H_μ

implica a afirmação da Proposição. Para um polinômio $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, seja hP a homogeneização ${}^hP := x_0^{\delta_P} P(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$ e analogamente para ideais. Para $1 \leq k \leq m$, seja F_k^* definida indutivamente considerando que F_1^* é a forma de Chow do ideal principal $({}^hQ_1)$ e F_k^* uma forma de Chow obtida a partir de $\text{Res}(F_{k-1}^*, {}^hQ_k)$ excluindo aqueles fatores que foram originados dos ideais primos que continham x_0 . Para $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n$, seja $\omega' := (1, \omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Nossa afirmação H_k consiste de três partes:

1. F_k^* é um produto (na verdade, envolvendo todos) das formas de Chow dos ideais primos associados de ${}^h(Q_1, \dots, Q_k)$,
2. $\Delta_k := \deg_{\tilde{u}_1} F_k^* \leq \Delta_{k-1} D_k$, e
3. Existe uma constante c_k , dependendo apenas de $Q_1, \dots, Q_k$, tal que

$$\begin{aligned} \log \|F_k^*\|_{\omega'} &\leq \sum_{j=1}^k (n-j+1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) \log \|\omega'\| \\ &\quad + \log \max\{\|{}^hQ_1\|_{\omega'}, \dots, \|{}^hQ_k\|_{\omega'}\} + c_k, \end{aligned}$$

onde definimos $\Delta_0 := 1$.

$k = 1$: Neste caso, temos que F_1^* é a forma de Chow do ideal principal hQ_1 , e H_1 segue pelo Lema 3.9, com $\Delta_1 = D_1$.

H_{k-1} implica H_k : Como Q_k não é divisor de zero em $\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(Q_1, \dots, Q_{k-1})}$, Q_k não pertence a nenhum ideal primo associado de $\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(Q_1, \dots, Q_{k-1})}$. Afirmamos que hQ_k não pertence a nenhum ideal primo associado de $\frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]}{{}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1})}$. Para ver isso, suponha que ${}^hQ_k \in \mathfrak{p}$, com $\mathfrak{p} \in \text{Ass}\left(\frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]}{{}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1})}\right)$. Então existe $g \in \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]}{{}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1})}$ homogêneo não nulo tal que ${}^hQ_k \cdot g \in {}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1})$. Considere agora a desomogeneização ${}^{dh}P(x_0, \dots, x_n) := P(1, x_1, \dots, x_n)$ e obtemos ${}^{dh}({}^hQ_k \cdot g) = {}^{dh}({}^hQ_k) \cdot {}^{dh}g = {}^{dh}({}^h f)$, onde $f \in (Q_1, \dots, Q_{k-1})$. Portanto, $Q_k \cdot g(1, x_1, \dots, x_n) = f$. Como Q_k não é um divisor de zero para $\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(Q_1, \dots, Q_{k-1})}$, $g(1, x_1, \dots, x_n) \in (Q_1, \dots, Q_{k-1})$. Logo,

$g'(x_0, \dots, x_n) \in {}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1})$, onde g' é a homogeneização de $g(1, x_1, \dots, x_n)$. Notamos que $g = x_0^t g'$, onde t é um número natural. Portanto, $g \in {}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1})$, que é uma contradição, pois g era não nulo em $\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{{}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1})}$, e nossa afirmação está provada. Pela hipótese de indução, ítem 1, F_{k-1}^* é um produto das formas de Chow dos ideais primos de ${}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1})$. Como ${}^h Q_k$ não pertence a nenhum ideal primo associado de ${}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1})$, temos que ${}^h Q_k$ não pertence a nenhum ideal primo associado de F_{k-1}^* . Então, pela Proposição 2.16 aplicada em $\text{Res}(F_{k-1}^*, {}^h Q_k)$, obtemos que $\text{Res}(F_{k-1}^*, {}^h Q_k) \sim T_1 \cdot \dots \cdot T_j$, onde $(T_i) = \bar{\mathfrak{q}}_i$, com $\mathfrak{q}_i \in \text{Ass}\left(\frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]}{{}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1}, {}^h Q_k)}\right) = \text{Ass}\left(\frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]}{{}^h(Q_1, \dots, Q_{k-1}, Q_k)}\right)$. Afirmamos agora que x_0 não pertence a nenhum primo associado de ${}^h(Q_1, \dots, Q_k)$. Para ver isso, suponha que x_0 é um divisor de zero de ${}^h(Q_1, \dots, Q_k)$. Então $x_0 f(x_0, \dots, x_n) \in {}^h(Q_1, \dots, Q_k)$, com $f \notin {}^h(Q_1, \dots, Q_k)$. Considerando a desomogeneização, temos que $f(1, x_1, \dots, x_n) \in {}^{dh}({}^h(Q_1, \dots, Q_k)) = (Q_1, \dots, Q_k)$. Logo $f' = {}^h(dh f) \in {}^h(Q_1, \dots, Q_k)$, contradição. E, assim, obtemos o ítem (i) de H_k .

Pela Lema 3.8, ítem (i), $\Delta_k \leq \Delta_{k-1} D_k$.

Como $\text{Res}(F_{k-1}^*, {}^h Q_k) \in \mathbb{C}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-(k-1)}]$ temos, pelo Lema 3.8, ítem (ii),

$$\begin{aligned} \|F_k^*\|_{\omega'} &\leq c' |\omega'|^{(n-(k-1))\Delta} \max\{\|F_{k-1}^*\|_{\omega'}, \|{}^h Q_k\|_{\omega'}\}, \\ &= \max\{c' |\omega'|^{(n-(k-1))\Delta} \|F_{k-1}^*\|_{\omega'}, c' |\omega'|^{(n-(k-1))\Delta} \|{}^h Q_k\|_{\omega'}\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $\Delta = \Delta_{k-1} D_k - \Delta_k$ e $c' > 0$ depende apenas de F_{k-1}^* e ${}^h Q_k$. Pela hipótese de indução, ítem (iii), existe c_{k-1} tal que

$$\|F_{k-1}^*\|_{\omega'} \leq |\omega'|^{\sum_{j=1}^{k-1} (n-j+1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j)} \max\{\|{}^h Q_1\|_{\omega'}, \dots, \|{}^h Q_{k-1}\|_{\omega'}\} e^{c_{k-1}} \quad (4.2)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.2) por $c' |\omega'|^{(n-(k-1))\Delta}$, obtemos

$$\begin{aligned} c' |\omega'|^{(n-(k-1))\Delta} \|F_{k-1}^*\|_{\omega'} &\leq c' |\omega'|^{\sum_{j=1}^k (n-j+1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j)} \max\{\|{}^h Q_1\|_{\omega'}, \dots, \|{}^h Q_{k-1}\|_{\omega'}\} e^{c_{k-1}} \\ &= \max\{c' e^{c_{k-1}} |\omega'|^{B_k} \|{}^h Q_1\|_{\omega'}, \dots, c' e^{c_{k-1}} |\omega'|^{B_k} \|{}^h Q_{k-1}\|_{\omega'}\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $B_k = \sum_{j=1}^k (n-j+1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j)$.

Substituindo (4.3) em (4.1),

$$\begin{aligned}
\|F_k^*\|_{\omega'} &\leq \max\{\max\{c'e^{c_{k-1}}|\omega'|^{B_k}\|{}^hQ_1\|_{\omega'}, \dots, c'e^{c_{k-1}}|\omega'|^{B_k}\|{}^hQ_{k-1}\|_{\omega'}\}, c'|\omega'|^{(n-(k-1))\Delta}\|{}^hQ_k\|_{\omega'}\} \\
&= \max\{c'e^{c_{k-1}}|\omega'|^{B_k}\|{}^hQ_1\|_{\omega'}, \dots, c'e^{c_{k-1}}|\omega'|^{B_k}\|{}^hQ_{k-1}\|_{\omega'}, c'|\omega'|^{(n-(k-1))\Delta}\|{}^hQ_k\|_{\omega'}\} \\
&\leq \max\{c'e^{c_{k-1}}|\omega'|^{B_k}\|{}^hQ_1\|_{\omega'}, \dots, c'e^{c_{k-1}}|\omega'|^{B_k}\|{}^hQ_{k-1}\|_{\omega'}, c'e^{c_{k-1}}|\omega'|^{B_k}\|{}^hQ_k\|_{\omega'}\},
\end{aligned}$$

pois $|\omega'| \geq 1$ e $B_k = (n - k + 1)\Delta + B_{k-1} > (n - k + 1)\Delta$. Portanto, considerando o log em ambos os lados da desigualdade anterior, obtemos H_k , ítem (iii), com $c_k = c_{k-1} + \log c'$. Logo, concluímos que H_{k-1} implica H_k , como desejado. Consequentemente, obtemos H_μ por indução.

Para concluir a demonstração, consideramos dois casos:

a) $m = n + 1$. Note que o ideal $({}^hQ_1) \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ possui altura $n - d + 1 \leq 1$, pelo Teorema de Krull 1.24. Logo $n \leq d$. Mas, por hipótese, $d \leq n$. Portanto $n = d$ e $F_1^* \in \mathbb{C}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n]$. Pela Proposição 2.16, ítem (i), $\text{Res}(F_1^*, {}^hQ_2) \in \mathbb{C}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}]$ e, consequentemente, $\text{Res}(F_{k-1}^*, {}^hQ_k) \in \mathbb{C}[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-(k-1)}]$. Portanto, $\text{Res}(F_n^*, {}^hQ_{n+1}) = c_0 \in \mathbb{C}^*$ e, pela Proposição 3.6,

$$c_0 \leq c \max\{\|F_n^*\|_{\omega'}, \|{}^hQ_{n+1}\|_{\omega'}\}, \quad (4.4)$$

onde c é uma constante que depende apenas de F_n^* e ${}^hQ_{n+1}$. Por H_n , ítem (iii), existe uma constante c_n , dependendo apenas de $Q_1, \dots, Q_n$, tal que

$$\begin{aligned}
\|F_n^*\| &\leq |\omega'|^{B_n} \max\{\|{}^hQ_1\|_{\omega'}, \dots, \|{}^hQ_n\|_{\omega'}\} e^{c_n} \\
&= \max\{|\omega'|^{B_n} e^{c_n} \|{}^hQ_1\|_{\omega'}, \dots, |\omega'|^{B_n} e^{c_n} \|{}^hQ_n\|_{\omega'}\},
\end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $B_n = \sum_{j=1}^n (n - j + 1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j)$. Substituindo (4.5) em (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{c_0}{c} &\leq \max\{|\omega'|^{B_n} e^{c_n} \|{}^hQ_1\|_{\omega'}, \dots, |\omega'|^{B_n} e^{c_n} \|{}^hQ_n\|_{\omega'}, \|{}^hQ_{n+1}\|_{\omega'}\} \\
&\leq \max\{|\omega'|^{B_n} e^{c_n} \|{}^hQ_1\|_{\omega'}, \dots, |\omega'|^{B_n} e^{c_n} \|{}^hQ_n\|_{\omega'}, |\omega'|^{B_n} e^{c_n} \|{}^hQ_{n+1}\|_{\omega'}\},
\end{aligned}$$

pois $|\omega'| \geq 1$ e $B_n \geq 0$. Considerando o log em ambos os lados da desigualdade anterior, encontramos que para alguma constante c_{n+1} ,

$$c_{n+1} \leq \sum_{j=1}^n (n-j+1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) \log |\omega'| + \log \max\{\|{}^h Q_1\|_{\omega'}, \dots, \|{}^h Q_{n+1}\|_{\omega'}\}. \quad (4.6)$$

b) $m \leq n$. Por H_m , ítem (i), F_m^* é um produto das formas de Chow dos primos associados de ${}^h(Q_1, \dots, Q_m)$. Portanto, $Q_1, \dots, Q_m$ devem estar na desomogeneização de algum ideal primo associado de F_m^* . Mas como $Q_1, \dots, Q_m$ não possuem zeros em comum em $\mathbb{C}^n$, eles não podem estar em nenhum desses ideais primos, ou seja, F_m^* é uma constante não nula. Por H_m , ítem (iii), existe uma constante c'_m tal que

$$c'_m \leq \sum_{j=1}^m (n-j+1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) \log \|\omega'\| + \log \max\{\|{}^h Q_1\|_{\omega'}, \dots, \|{}^h Q_m\|_{\omega'}\}. \quad (4.7)$$

Afirmamos que

$$\sum_{j=1}^{\mu} (n-j+1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) \leq (n-1)D_1 D_2 \cdots D_{\mu}. \quad (4.8)$$

Para ver isso, note que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu} (n-j+1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) &= \sum_{j=2}^{\mu} ((n-1) + (2-j))(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) \\ &= \sum_{j=2}^{\mu} (n-1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) + \sum_{j=2}^{\mu} (2-j)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j). \end{aligned}$$

Como $(2-j) \leq 0$, para $2 \leq j \leq \mu$, e $(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) \geq 0$, por H_j ítem (iii), temos $\sum_{j=2}^{\mu} (n-1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) + \sum_{j=2}^{\mu} (2-j)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) \leq \sum_{j=2}^{\mu} (n-1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j)$, portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu} (n-j+1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) &\leq \sum_{j=2}^{\mu} (n-1)(D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) D_{j+1} \cdots D_{\mu} \\ &= (n-1) \sum_{j=2}^{\mu} (D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) D_{j+1} \cdots D_{\mu}, \end{aligned}$$

pois $D_i > 0$. Para concluir a afirmação note também que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\mu} (D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) D_{j+1} \cdots D_{\mu} &= (D_2 \Delta_1 - \Delta_2) D_3 \cdots D_{\mu} + (D_3 \Delta_2 - \Delta_3) D_4 \cdots D_{\mu} \\ &+ (D_4 \Delta_3 - \Delta_4) D_5 \cdots D_{\mu} + \dots + (D_{\mu} \Delta_{\mu-1} - \Delta_{\mu}) D_{\mu} \end{aligned}$$

fazendo as ditributivas, obtemos uma soma telescópica onde apenas o primeiro termo e o último termo restam no final, ou seja,

$$\begin{aligned} (n-1) \sum_{j=2}^{\mu} (D_j \Delta_{j-1} - \Delta_j) D_{j+1} \cdots D_{\mu} &= (n-1) [D_2 \Delta_1 D_3 \cdots D_{\mu} - \Delta_{\mu} D_{\mu}] \\ &= (n-1) D_1 D_2 \cdots D_{\mu} - (n-1) \Delta_{\mu} D_{\mu} \\ &\leq (n-1) D_1 D_2 \cdots D_{\mu}, \end{aligned}$$

pois $\Delta_1 = D_1$, $(n-1) \geq 0$ e $\Delta_{\mu} D_{\mu} \geq 0$. Assim, a afirmação está provada.

Como $|\omega| \geq 1$,

$$\|Q_i\|_{\omega'} = \frac{|Q_i(\omega)|}{H(Q_i)|\omega|^{\delta_{Q_i}}}. \quad (4.9)$$

Substituindo (4.9) e (4.8) em (4.6) e (4.7), obtemos

$$e^{c_{\mu}} \leq |\omega|^{(n-1)D_1 \cdots D_{\mu}} \frac{1}{H(Q_1) \cdots H(Q_{\mu}) |\omega|^{D_1 + \cdots + D_{\mu}}} \max\{|Q_i(\omega)|\}$$

Como $D_1 + \cdots + D_{\mu} > 1$ temos que

$D_1 + \cdots + D_{\mu} - (n-1)D_1 \cdots D_{\mu} > 1 - (n-1)D_1 \cdots D_{\mu}$, portanto,

$$|\omega|^{1-(n-1)D_1 \cdots D_{\mu}} H(Q_1) \cdots H(Q_{\mu}) e^{c_{\mu}} \leq \max |Q_i(\omega)|. \quad \square$$

A seguir, veremos brevemente definições e exemplos de funções de várias variáveis complexas. Para mais detalhes, ver [12] e [13].

Definição 4.3. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}^n$ contido na bola fechada $\bar{B}(0, R)$. Dizemos que uma função u é sub-harmônica em Ω se a aplicação $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ é localmente integrável e com o Laplaciano $\Delta u \geq 0$ em Ω .*

Uma caracterização importante de uma função sub-harmônica é que o seu valor médio sobre uma bola não é maior que o seu valor no centro. Ou seja,

$$u(x_0) \leq \frac{1}{v_n r^n} \int_{B(x_0, r)} u(x) dv(x), \quad (4.10)$$

onde v_n é o volume da bola untária em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.4. Se f é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$, então a função $\psi_\alpha(z) = |f(z)|^\alpha$ é sub-harmônica para todo $\alpha > 0$.

Definição 4.5. Seja u uma função semi-contínua superiormente em um aberto Ω de $\mathbb{C}^n$ com valores em $[-\infty, +\infty[$. Dizemos que u é plurisubharmônica em Ω se para todo polydisco compacto $\{z + tw; t \in \mathbb{C}, |t| \leq 1\}$ em Ω , a aplicação $t \mapsto u(z + tw)$ é sub-harmônica no disco unitário de $\mathbb{C}$.

Exemplo 4.6. As funções $f(z) = |z|^2$ e $u(z) = \log(z)$ são plurisubharmônicas.

Definição 4.7. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ um domínio e $z \in U$. Seja $d_U(z)$ a função que fornece a distância a partir do ponto z à fronteira ∂U . Dizemos que o domínio U é pseudoconvexo se d_U é uma função plurisubharmônica.

Notações: Para $i = 1, \dots, p$, considere $g_i : \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas, onde Ω é aberto em $\mathbb{C}^n$. Considere $g = (g_1, \dots, g_p)$ um sistema de p funções holomorfas em Ω , ou seja, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^p$. Então denotaremos

$$|g| = (|g_1|^2 + \dots + |g_p|^2)^{1/2}.$$

Seja $g^* = (|g_1|, \dots, |g_p|) \in \mathbb{R}^p$. Note que $\|g^*\|_2 = |g|$, portanto $|g^*|_\infty \leq \|g^*\|_2 = |g|$, onde $|g^*|_\infty = \max\{|g_i|; i \in \{1, \dots, p\}\}$ e $\|\cdot\|_2$ é a norma euclidiana.

O próximo teorema é devido a Skoda, [14], baseado no trabalho de L. Hörmander na $\bar{\partial}$ -equação e L^2 -estimativas.

Teorema 4.8 (Teorema 1 de [14]). *Sejam Ω um aberto pseudoconvexo de $\mathbb{C}^n$, ψ uma função plurisubharmônica em Ω , $g_1, \dots, g_p$ funções holomorfas em Ω , $\alpha > 1$ e $q = \inf\{n, p - 1\}$. Se para toda função f holomorfa em Ω tal que*

$$\int_{\Omega} |f|^2 |g|^{-2\alpha q - 2} e^{-\psi} d\lambda < +\infty,$$

então existem p funções h_i holomorfas em Ω tais que

$$f = \sum_{i=1}^p g_i h_i$$

$$e$$

$$\int_{\Omega} |h|^2 |g|^{-2\alpha q} e^{-\psi} d\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_{\Omega} |f|^2 |g|^{-2\alpha q-2} e^{-\psi} d\lambda.$$

O próximo Lema será útil na demonstração do teorema principal.

Lema 4.9. $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^p} d\mathbf{x}$ é finita se, e somente se, $p > n$.

Demonstração: Considere a região $D = [0, +\infty) \times [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$ e a aplicação $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$, assim definida: para $u = (\rho, \theta_{n-1}, \theta_{n-2}, \dots, \theta_1) \in D$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g_1(u) & = & \rho \sin(\theta_{n-1}) \sin(\theta_{n-2}) \cdots \sin(\theta_2) \sin(\theta_1), \\ g_2(u) & = & \rho \sin(\theta_{n-1}) \sin(\theta_{n-2}) \cdots \sin(\theta_2) \cos(\theta_1), \\ g_3(u) & = & \rho \sin(\theta_{n-1}) \sin(\theta_{n-2}) \cdots \cos(\theta_2), \\ \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ g_{n-1}(u) & = & \rho \sin(\theta_{n-1}) \cos(\theta_{n-2}), \\ g_n(u) & = & \rho \cos(\theta_{n-1}). \end{array} \right.$$

Esse é o sistema de coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^n$. Observe que $\|\mathbf{g}(u)\|_2 = \rho$ para todo $u \in D$. Além disso, $\mathbf{g}$ é de classe C^1 no interior de D e pode-se mostrar que

$$|J_g(u)| = |\det \mathbf{g}'(u)| = \rho^{n-1} \sin^{n-2}(\theta_{n-1}) \sin^{n-3}(\theta_{n-2}) \cdots \sin(\theta_2).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\mathbf{x}|_2^p} d\mathbf{x} = \int_D \frac{|J_g(u)|}{\rho^p} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho^{p-n+1}} d\rho I_{n-2} I_{n-3} \cdots I_2 I_1,$$

onde $I_k = \int_0^\pi \sin^k(\theta) d\theta$, $k = 1, 2, \dots, n-2$. Temos que cada I_k é finita e $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho^{p-n+1}} d\rho$ é finita se e, só se, $p - n + 1 > 1$. Ou seja, se $p > n$. $\square$

Teorema 4.10 (Teorema 2 de [7]). *Seja $Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ uma sequência regular com*

$\deg Q_i = D_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, não tendo zeros em comum. Então existem $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ com

$$\deg A_i < \mu n D_1 \cdots D_\mu + \mu D,$$

onde $\mu = \min\{m, n\}$ e $D = \max_{i=1, \dots, m} D_i$, tais que

$$A_1 Q_1 + \dots + A_m Q_m = 1.$$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$. Considere $q = \min\{n, m-1\}$, $-B$ o expoente que aparece na Proposição 4.2, e $|\mathbf{x}|^2 = 1 + |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$, para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Afiramos que a integral

$$I = \int_{\mathbb{C}^n} |Q|^{-2(1+\varepsilon)q-2} |\mathbf{x}|^{-2K} d\lambda$$

é finita se $K > \max\{(q + q\varepsilon + 1)B + n, 0\}$, onde $d\lambda$ denota a medida de Lebesgue.

Para ver isso, notamos que, a partir da equivalência das normas,

$|\mathbf{x}|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} |\mathbf{x}|_\infty$, temos que

$$I \leq \int_{\mathbb{C}^n} \frac{1}{|Q|_\infty^{2(1+\varepsilon)q+2} |\mathbf{x}|_\infty^{2K}} d\lambda = \int_D \frac{1}{|Q|_\infty^{2(1+\varepsilon)q+2} |\mathbf{x}|_\infty^{2K}} d\lambda + \int_{D^c} \frac{1}{|Q|_\infty^{2(1+\varepsilon)q+2} |\mathbf{x}|_\infty^{2K}} d\lambda,$$

onde $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n; |\mathbf{x}| \leq 1\}$ é o disco unitário de $\mathbb{C}^n$ e D^c o seu complementar.

Seja $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Q|_\infty^{2(1+\varepsilon)q+2} |\mathbf{x}|_\infty^{2K}}$. Como $|\mathbf{x}|_\infty \geq 1$, notamos que $F(\mathbf{x})$ é contínua no disco unitário D de $\mathbb{C}^n$. Seja $S = \sup_{\lambda \in D} |F(\lambda)|$.

$$\left| \int_D F(\lambda) d\lambda \right| \leq \int_D |F(\lambda)| d\lambda \leq S \int_D d\lambda = S \text{ volume}(D) < +\infty.$$

Para $|\mathbf{x}| > 1$, temos, pela Proposição 4.2, $|Q|_\infty \geq \frac{C}{|\mathbf{x}|_\infty^B}$, onde C, B são constantes, portanto,

$$\frac{1}{C} \int_{D^c} \frac{|\mathbf{x}|_\infty^{2B(q+q\varepsilon+1)}}{|\mathbf{x}|_\infty^{2K}} = \frac{1}{C} \int_{D^c} \frac{1}{|\mathbf{x}|_\infty^{2K-2B(q+q\varepsilon+1)}}.$$

Para mostrar que $I_1 = \int_{D^c} \frac{1}{|\mathbf{x}|_\infty^{2K-2B(q+q\varepsilon+1)}}$ é finita, vamos usar novamente a equivalência de normas para obter $\frac{1}{\sqrt{n}} I_1 \leq \frac{1}{C} \int_{\mathbb{C}^n} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^{2K-2B(q+q\varepsilon+1)}} =: I_2$ e como $\mathbb{C}^n$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$, temos pelo Lema 4.9, que I_2 é finita se, e somente se, $2K - 2B(q + q\varepsilon + 1) > 2n$.

- Se $\max\{(q + q\varepsilon + 1)B + n, 0\} = 0$, então $K \geq 1$ e

$$(q + q\varepsilon + 1)B + n < 0. \quad (4.11)$$

Multiplicando por 2 ambos os lados da equação (4.11),

$$\begin{aligned} 2n &< -2B(q + q\varepsilon + 1) \\ 2n + 2K &< 2K - 2B(q + q\varepsilon + 1) \\ 2n < 2n + 2K &< 2K - 2B(q + q\varepsilon + 1). \end{aligned}$$

- Se $\max\{(q + q\varepsilon + 1)B + n, 0\} = (q + q\varepsilon + 1)B + n$, então $(q + q\varepsilon + 1)B + n > 0$ e

$$K > (q + q\varepsilon + 1)B + n. \quad (4.12)$$

Multiplicando por 2 ambos os lados da equação (4.12),

$$\begin{aligned} 2K &> 2B(q + q\varepsilon + 1) + 2n \\ 2K - 2B(q + q\varepsilon + 1) &> 2n. \end{aligned}$$

Concluimos que: se $K > \max\{(q + q\varepsilon + 1)B + n, 0\}$, então I é finita.

Então, como um caso especial do Teorema 1 de [Sk], existem funções holomorfas $A_1, \dots, A_m$ tais que

$$1 = A_1 Q_1 + \dots + A_m Q_m$$

e

$$\int_{\mathbb{C}^n} |A|^2 |Q|^{-2(1+\varepsilon)q} |\mathbf{x}|^{-2K} \leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} I < \infty.$$

Como cada $|A_i|^2$ é sub-harmônica, temos por (4.10) que existem constantes C_n e C'_n tais que para qualquer $\xi \in \mathbb{C}^n$ com $|\xi| = r$,

$$|A_i(\xi)|^2 \leq C_n r^{-2n} \int_{B(\xi, r)} |A_i(x)|^2 d\lambda.$$

Multiplicando o integrando por $1 = |Q|^{2(1+\varepsilon)q} |\mathbf{x}|^{2K} |Q|^{-2(1+\varepsilon)q} |\mathbf{x}|^{-2K}$, obtemos

$$|A_i(\xi)|^2 \leq C_n r^{-2n} \sup_{B(\xi, r)} \{|Q|^{2(1+\varepsilon)q} |\mathbf{x}|^{2K}\} \int_{B(\xi, r)} |A_i|^2 |Q|^{-2(1+\varepsilon)q} |\mathbf{x}|^{-2K} d\lambda.$$

Note que, como $Q_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, temos para $\mathbf{x} \in B(\xi, r)$, que $|Q(\mathbf{x})|^{2(1+\varepsilon)q} \leq C'_n r^{2(1+\varepsilon)qD}$, onde C' é uma constante.

Portanto, $|A_i(\xi)|^2 \leq C'_n r^{-2n+2(1+\varepsilon)qD+2K}$.

Assim cada A_i é um polinômio de grau no máximo $(1+\varepsilon)qD + K - n$. Tomando o ínfimo sobre K e ε , encontramos que os A_i são polinômios com

$$\deg A_i \leq \max\{qD - n, qD + (q+1)B\}.$$

Afirmamos que $\max\{qD - n, qD + (q+1)B\} < \{m(n-1)D_1 \cdots D_\nu + q(D-1)\}$.

- Suponha que $\max\{qD - n, qD + (q+1)B\} = qD - n$. Se $q = n$, então obtemos o desejado, pois $m(n-1)D_1 \cdots D_\nu \geq 0$. Se $q = m-1$, então

$$qD - n \leq qD - (m-1).$$

- Suponha agora que $\max\{qD - n, qD + (q + 1)B\} = qD + (q + 1)B$. Se $q = n$, então $q + 1 \leq m$ e

$$qD + (q + 1)(n - 1)D_1 \cdots D_\nu - (q + 1) \leq m(n - 1)D_1 \cdots D_\nu + q(D - 1).$$

Se $q = m - 1$, então $q + 1 \leq n$ e obtemos o desejado. $\square$

Como um corolário do teorema anterior, obtemos o seguinte resultado, que é o teorema principal de Brownawell em [7].

Teorema 4.11 (Teorema 1 de [7]). *Sejam $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ polinômios com $\deg P_i \leq D$ não tendo zeros em comum em $\mathbb{C}^n$. Então existem polinômios $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ com*

$$\deg A_i \leq \mu n D^\mu + \mu D,$$

onde $\mu = \min\{m, n\}$, tais que

$$A_1 P_1 + \dots + A_m P_m = 1.$$

Demonstração: Sejam $Q_1, \dots, Q_i$ $\mathbb{Z}$ -combinações lineares gerais de $P_1, \dots, P_m$. Pelo exercício 1.2.21 de [6], $Q_1, \dots, Q_i$ é uma sequência regular. Logo, $i \leq m$. Como $P_1, \dots, P_m$ não possuem zeros em comum, $I = (P_1, \dots, P_m) = (1)$. Seja $Q_1, \dots, Q_i$ uma sequência regular maximal a partir de $P_1, \dots, P_m$. Então $Q_1, \dots, Q_i$ não possuem zeros em comum. Aplicamos o Teorema 4.10 em $Q_1, \dots, Q_i$ e expressamos os Q_j em termos do P_k para obter as cotas desejadas. $\square$

Bibliografia

- [1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Perseus Books (1969).
- [2] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [3] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974.
- [4] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 52. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [5] Oscar Zariski and Pierre Samuel, *Commutative algebra*. Vols. I, II, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1958.
- [6] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Revised Edition, Cambridge University Press, 1966.
- [7] W. D. Brownawell, *Bounds for the degree in the Nullstellensatz*, Annals of Math. 126 (1987), 577-591.
- [8] Yu. V. Nesterenko, Estimates for the orders of zeros offunctions of a certain class and their applications in the theory of transcendental numbers, Izv.

- Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 41 (1977), 253-284 = Math. USSR Izv. 11 (1977), 239-270.
- [9] , Bounds for the characteristic function of a prime ideal, Mat. Sbornik 123(165), (1984), 11-34 = Math. USSR Sbornik 51 (1985), 9-32.
- [10] , On the algebraic independence No. 4 (1984), 435-459 = Math. USSR Sbornik 51 (1985), 429-454, brief version in Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants, Boston-Basel-New York, Birkhauser Verlag, 1983, pp. 199-220.
- [11] A. O. Gelfond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, GITTL, Moscow, 1952
Dover, New York, 1960.
- [12] L. Hormander. *Introduction to complex analysis in several variables*. Princeton, N.J., Van Nostrand, 1966.
- [13] R. M. Range *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*. Springer-Verlag, New York, 1986; 2nd corrected printing, 1998.
- [14] H. Skoda, *Applications des techniques L^2 à la théorie des idéaux algèbre de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4e sér.), 5 (1972), 545-579.