Leonardo Novaes Mesquita Damasceno

A Desigualdade de Penrose Riemanniana

Brasil

2018

Leonardo Novaes Mesquita Damasceno

A Desigualdade de Penrose Riemanniana

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Instituto de Matemática – IM

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Maria Fernanda Elbert Guimarães

Brasil

2018

Leonardo Novaes Mesquita Damasceno

A Desigualdade de Penrose Riemanniana/ Leonardo Novaes Mesquita Damasceno. – Brasil, 2018-

140 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Maria Fernanda Elbert Guimarães

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ
Instituto de Matemática – IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. 2. Palavra-chave3. I. Maria Fernanda Elbert Guimarães II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. III. Mestrado em Matemática. IV. A Desigualdade de Penrose Riemanniana

Leonardo Novaes Mesquita Damasceno

A Desigualdade de Penrose Riemanniana

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Brasil, 05 de março de 2018:

Maria Fernanda Elbert Guimarães
Orientadora, IM – UFRJ

Heudson Tosta Mirandola
Professor, IM – UFRJ

Lacramiora Marianty Ionel
Professora, IM – UFRJ

Andrew James Clarke
Professor, IM – UFRJ

Sergio de Moura Almaraz
Professor, IME – UFF

Brasil
2018

Agradecimentos

Primeiramente e acima de tudo, agradeço aos meus pais, Eliana e Geraldo, pelo empenho em priorizar os meus estudos e por ajudar a me tornar quem sou hoje.

Em segundo lugar, agradeço ao meu namorado Thiago e aos meus amigos (não vou citá-los um por um para não privilegiar uns em detrimento de outros) por todo o apoio nessa jornada que foi a graduação e o mestrado.

Também agradeço imensamente aos inúmeros professores que me lecionaram, em especial a minha orientadora, Profª. Maria Fernanda Elbert, pelas suas dicas e conselhos, acadêmicos ou não, sobre como elaborar esta dissertação, e a banca que está incumbida de avaliar este texto.

E por último, mas não menos importante, agradeço a todos os funcionários técnico-administrativos e terceirizados da UFRJ. Sem o trabalho de vocês, a própria universidade não teria a excelência que possui.

Resumo

Uma das principais questões da Relatividade Geral é determinar o que é a "massa" de um espaço-tempo. Para uma certa classe de espaços-tempo, pode-se definir um invariante geométrico chamado de **massa ADM**. Com esta definição, uma questão natural é a seguinte: como estimar a massa de um espaço-tempo? Um resultado importante conhecido como o **Teorema da Massa Positiva**, provado por Schoen e Yau, afirma que, sob certas condições, a massa ADM é não-negativa. A **Desigualdade de Penrose** diz que, sob certas condições, é possível obter uma limitação inferior para a massa ADM de um espaço-tempo envolvendo apenas a área de seus buracos negros. Nesta dissertação, usando métodos isoperimétricos, apresentaremos um resultado parcial da Desigualdade de Penrose para o caso Riemanniano, isto é, quando os dados iniciais do problema de Cauchy para as Equações de Einstein são simétricos em relação ao tempo (a segunda forma fundamental é identicamente 0), provado por Bray em sua tese de Doutorado (BRAY, 1997).

Palavras-chave: geometria, massa ADM, métodos isoperimétricos

Abstract

One of the main questions of General Relativity is to determine what is a "mass" of a spacetime. For a certain class of spacetimes, one can define a geometric invariant called **ADM mass**. With this definition, a natural question is: how one can estimate the mass of a spacetime? A major result known as the **Positive Mass Theorem**, proved by Schoen and Yau, states that under certain conditions, the ADM mass is non-negative. The **Penrose Inequality** says that, under certain conditions, it is possible to obtain a lower bound for the ADM mass of a spacetime involving only the area of its black holes. In this dissertation, using isoperimetric methods, we will a special case for Bray's proof for the Riemannian case, i.e., when the initial data of the Cauchy problem for Einstein Equations is time symmetric (the second fundamental form is identically 0), proved by Bray in his PhD thesis (BRAY, 1997).

Keywords: geometry, ADM mass, isoperimetric methods

Sumário

1 Espaços vetoriais Lorentzianos

Para estudar as variedades semi-Riemannianas e, em particular, as variedades Lorentzianas, é fundamental saber algumas propriedades básicas envolvendo o espaço tangente em um ponto arbitrário da variedade. Neste capítulo, estudaremos os espaços vetoriais com uma estrutura matemática análoga ao produto interno e, em particular, estudaremos o caso Lorentziano, que é de interesse fundamental para o que virá a seguir. O conteúdo do Apêndice A não é fundamental para entender esse capítulo, mas é útil para compreendê-lo melhor. Para mais informações sobre o assunto, veja (VICTORIA; CAJA, 2010; O'NEILL, 1983).

1.1 Espaços com produto escalar

1.1.1 Formas bilineares simétricas

Definição 1.1. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e $b : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Dizemos que ela é

1. **positiva definida** (respectivamente, **negativa definida**) se $b(v, v) > 0$ (respectivamente, $b(v, v) < 0$) para todo $v \in V \backslash \{0\}$;

2. **positiva semidefinida** (respectivamente, **negativa semidefinida**) se $b(v, v) \geq 0$ (respectivamente, $b(v, v) \leq 0$) para todo $v \in V$;

3. **não degenerada** se $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implica em $v = 0$.

Definição 1.2. O **índice** ν de uma forma bilinear simétrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ é o maior inteiro que é a dimensão de um subespaço $W < V$ tal que $b|_W : W \times W \to \mathbb{R}$ é negativa definida.

Da definição acima, obtemos que o índice ν é um inteiro tal que $0 \leq \nu \leq \dim V$ e que $\nu = 0$ se, e somente se, b é positiva semidefinida.

Definição 1.3. Dada uma forma bilinear b, definimos a sua **forma quadrática associada** $q : V \to \mathbb{R}$ por $q(v) := b(v, v)$.

Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de V e b uma forma bilinear em V. Defina a matriz (b_{ij}), onde $b_{ij} = b(e_i, e_j)$. Segue por linearidade que essa matriz determina completamente b. Note que b é simétrica se, e somente se, (b_{ij}) também o for. Além disso:

Lema 1.4. Uma forma bilinear simétrica é não degenerada se, e somente se, sua matriz relativa à uma base é inversível.

Demonstração. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de V e tome $v \in V$.

Suponha que $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$. Então, essa afirmação é equivalente ao fato de que $b(v, e_i) = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Como (b_{ij}) é uma matriz simétrica,

$$b(v, e_i) = b\left(\sum_j v^j e_j, e_i\right) = \sum_j v^j b(e_j, e_i) = \sum_j b_{ij} v^j.$$

Portanto, b é degenerada se, e somente se, existem números $v^1, ..., v^n \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que $\sum_j b_{ij} v^j = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, o que é equivalente ao fato de que as colunas de (b_{ij}) são linearmente dependentes, isto é, (b_{ij}) é singular. □

1.1.2 Produtos escalares

Definição 1.5. Um **produto escalar** b em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica não degenerada em V. Quando b for positiva definida, diremos que b é um **produto interno**.

Exemplo 1.6. Considere $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde

$$b(v, w) = g((v^1, v^2), (w^1, w^2)) = v^1 w^1 - v^2 w^2.$$

É fácil ver que b é bilinear, simétrica e não degenerada (basta tomar $w = e_1$ e depois $w = e_2$). Portanto, b é um produto escalar. Por outro lado, também é fácil provar que b não é definida (isto é, não é positiva e nem negativa definida).

Definição 1.7. Diremos que (V, b) é um **espaço com produto escalar** se V for um espaço vetorial real de dimensão finita e se b for um produto escalar sobre V.

Nas definições e nos lemas seguintes, considere (V, b) um espaço com produto escalar e $n = \dim V$.

Com a definição de produto escalar, podemos analisar o **caráter causal** de um vetor dado. Assim, obtemos a seguinte tricotomia:

Definição 1.8. Dizemos que um vetor $v \in V$ é

1. **tipo espaço** (em inglês, *spacelike*) se $b(v, v) > 0$ ou $v = 0$;
2. **tipo luz** ou **nulo** (em inglês, *lightlike* e *null*, respectivamente) se $b(v, v) = 0$ e $v \neq 0$;
3. **tipo tempo** (em inglês, *timelike*) se $b(v, v) < 0$.

Chamamos o **cone nulo** ou **cone de luz** (em inglês, *nullcone*) em $p \in M$ o conjunto de todos os vetores tipo luz em T_pM.

Assim como no caso euclidiano usual, podemos definir uma noção de ortogonalidade entre vetores de um espaço com produto escalar.

Definição 1.9. Dizemos que dois vetores $v, w \in V$ são **ortogonais** (denotamos $v \perp w$) se $b(v, w) = 0$. Dois subconjuntos $A, B \subset V$ são ortogonais (denotamos $A \perp B$) se, para quaisquer $v \in A$ e $w \in B$, $b(v, w) = 0$.

Definição 1.10. Definimos o **subespaço ortogonal** de um subespaço W por

$$W^\perp := \{v \in V; b(v, w) = 0, \forall w \in W\}.$$

Lema 1.11. Se W é um subespaço de V, então

1. $\dim W + \dim W^\perp = n = \dim V$;
2. $(W^\perp)^\perp = W$.

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso em que b é um produto interno. Para mais informações, veja o Lema 22 do Capítulo 2 de (O'NEILL, 1983). □

Definição 1.12. Dizemos que um subespaço W é **não degenerado** se $b|_W$ for não degenerada.

Lema 1.13. Um subespaço W é não degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^\perp$.

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\dim(W \oplus W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp.$$

De fato:

- Se $W \cap W^\perp = \{0\}$ então o resultado é trivial.
- Agora suponha que $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ e seja $\{e_1, ..., e_k\}$ uma base de $W \oplus W^\perp$, onde $\{e_1, ..., e_r\}$ é uma base de W e $\{e_{r+1}, ..., e_k\}$ é uma base de $W^\perp$. Como $W \cap W^\perp \neq \{0\}$, definindo $s = \dim(W \cap W^\perp)$, temos que existem s vetores de $\{e_1, ..., e_r\}$ que pertencem a $W^\perp$. Portanto, $\dim(W \oplus W^\perp) =: k = r + (k - r) - s = \dim W + \dim W^\perp - \dim(W \cap W^\perp)$, como queríamos demonstrar.

Note que $W \oplus W^\perp = V$ se, e somente se, $W \cap W^\perp = \{0\}$, o que é equivalente a dizer que W é não degenerado. □

Observação 1.14. Como $(W^{\perp})^{\perp} = W$, segue que W será não degenerado se, e somente se, $W^{\perp}$ também o for.

Definição 1.15. 1. Definimos a **norma** de um vetor $v \in V$ como $\|v\| := \sqrt{|b(v,v)|}$;

2. $v \in V$ é dito um **vetor unitário** se $\|v\| = 1$;

3. Um conjunto de vetores unitários mutualmente ortogonais é dito **ortonormal**.

Lema 1.16. Todo espaço com produto escalar $V \neq \{0\}$ admite uma base ortonormal.

Demonstração. Como b é não degenerada, existe $v \in V$ tal que $b(v,v) \neq 0$. Portanto, $\tilde{v} := \dfrac{v}{\|v\|}$ é um vetor unitário. Portanto, basta provar via indução que **qualquer conjunto ortonormal** $\{e_1, ..., e_k\}$**, com** $k < n$**, existe um elemento** $v \in V$ **tal que** $\{e_1, ..., e_k, v\}$ **ainda é ortonormal**. De fato, como $\{e_1, ..., e_k\}$ é um conjunto ortonormal, segue pelo Lema 1.4, que $W = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_k\}$ é um subespaço não degenerado de dimensão $k < n$ (assim como $W^{\perp}$). Como $W^{\perp}$ é não degenerado, é possível escolher $v \in W^{\perp}$ tal que $g(v,v) \neq 0$ e, portanto, $\{e_1, ..., e_k, v/\|v\|\}$ é um conjunto ortonormal. □

Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de V cuja existência é garantida pelo lema anterior. Então, a matriz de b relativa à esta base é diagonal pois $b(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j$, onde $\varepsilon_j = b(e_j, e_j)$.

Quando for conveniente, escreveremos os vetores de uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de V de tal forma que os vetores e_i tais que $b(e_i, e_i) = -1$ serão escritos primeiro. Chamamos de **assinatura** (em inglês, *signature*) de b a lista $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$.

Lema 1.17. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de V com $\varepsilon_i = b(e_i, e_i)$. Então, para todo $v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i b(v, e_i) e_i.$$

Demonstração. A demonstração é análoga ao caso em que b é um produto interno. Para mais informações, veja o Lema 25 do Capítulo 2 de (O'NEILL, 1983). □

Definição 1.18. Definimos a **projeção ortogonal** de V em um subespaço não degenerado W como a transformação linear π tal que $\pi(W^{\perp}) = \{0\}$ e $\pi(v) = v$, para todo $v \in W$.

Como toda base ortonormal $\{e_1, ..., e_k\}$ de W pode ser acrescida de elementos até se tornar uma base de V, para todo $v \in V$,

$$\pi(v) = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i b(v, e_i) e_i.$$

Costuma-se referir ao índice ν do produto escalar b de V como o índice de V, $\nu = \operatorname{ind} V$.

Lema 1.19. Para toda base ortogonal $\{e_1, ..., e_n\}$ de V, o número de termos negativos na assinatura $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ é o índice ν de V.

Demonstração. Assuma que os primeiros m sinais ε_i são os negativos e suponha que $0 < m < n$ (o caso $m = 0$ é trivial). Como $b(e_i, e_i) = -1$ para todo $i \leq m$, segue que b é negativa definida em $S := \text{span}\{e_1, ..., e_m\}$ e, portanto, $\nu \geq m$.

Agora tome W um subespaço arbitrário tal que b é negativa definida nesse subespaço e defina a aplicação linear $\pi : W \to S$ como

$$\pi(w) = -\sum_{i \leq m} b(w, e_i)e_i.$$

Provaremos que π é injetiva. De fato, seja $w \in W$ tal que $\pi(w) = 0$. Então,

$$w = \sum_{j=m+1}^{n} b(w, e_j)e_j.$$

Mas, como $w \in W$,

$$0 \geq b(w, w) = b\left(\sum_{j=m+1}^{n} b(w, e_j)e_j, w\right) = \sum_{j=m+1}^{n} b(w, e_j)^2.$$

Logo, $w = 0$. Como π é injetiva, segue que $\dim W \leq \dim S = m$. Como W é um subespaço vetorial arbitrário, $\nu \leq m$. □

Definição 1.20. Sejam (V_1, b_1) e (V_2, b_2) espaços com produto escalar. Dizemos que uma transformação linear $T : V_1 \to V_2$ preserva o produto escalar se

$$b_2(Tv, Tw) = b_1(v, w), \text{ para todo } v, w \in V_1.$$

Um isomorfismo linear que preserva o produto escalar é dito uma **isometria**.

Lema 1.21. Dois espaços com produto escalar V e W possuem a mesma dimensão e índice se, e somente se, existe uma isometria linear de V em W.

Demonstração. Veja o Lema 27 do Capítulo 2 de (O'NEILL, 1983). □

1.2 Espaços vetoriais Lorentzianos

Definição 1.22. Dizemos que um espaço com produto escalar (V, b) é um **espaço vetorial Lorentziano** se b possui índice 1 e $\dim V \geq 2$.

Nesta seção, todos os espaços com produto escalar são Lorentzianos.

1.2.1 Caráter causal de subespaços

Neste contexto, a noção de caráter causal de um vetor pode ser facilmente generalizada para subespaços vetoriais:

Definição 1.23. Dizemos que um subespaço $W < V$ é:

1. **tipo espaço** se $b|_W$ é positiva definida;
2. **tipo tempo** se $b|_W$ é não degenerada de índice 1;
3. **tipo luz** se $b|_W$ é degenerada.

Note que as três possibilidades acima são mutualmente exclusivas.

Observação 1.24. A definição de caráter causal de um subespaço $W < V$ é consistente com a definição de caráter causal de um elemento $v \in V$, isto é, um subespaço gerado por um vetor tem o mesmo caráter causal que o seu gerador.

Proposição 1.25. Se $v \in V$ é um vetor tipo tempo, então $\{v\}^\perp$ é tipo espaço e $V = \operatorname{span}\{v\} \oplus \{v\}^\perp$.

Demonstração. Como v é tipo tempo, $\operatorname{span}\{v\}$ é não degenerado de índice 1. Portanto, pelo Lema 1.14, $\{v\}^\perp$ é não degenerado e $V = \operatorname{span}\{v\} \oplus \{v\}^\perp$. Como $\operatorname{ind} \operatorname{span}\{v\} = \operatorname{ind} V = 1$, segue que $\{v\}^\perp$ é tipo espaço. $\square$

Com o mesmo argumento da proposição anterior, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 1.26. Um subespaço $W < V$ é tipo tempo se, e somente se, $W^\perp$ é tipo espaço.

Utilizando o corolário acima, obtemos um resultado análogo para os subespaços tipo luz.

Corolário 1.27. Um subespaço W é tipo luz se, e somente se, $W^\perp$ também é tipo luz.

Demonstração. Se $W^\perp$ fosse tipo espaço (respectivamente, tempo), $W = (W^\perp)^\perp$ seria do tipo tempo (respectivamente, espaço), que é uma contradição. $\square$

Como g restrita a um subespaço tipo espaço é não degenerada, todas as propriedades de espaços com produto interno são válidas para esses subespaços. Por exemplo, para vetores tipo espaço, a desigualdade de Cauchy-Schwarz ainda é válida: para quaisquer $v, w \in V$ tipo espaço,

$$|b(v, w)| \leq \|v\|\|w\|,$$

e a igualdade vale se, e somente se, v e w são linearmente dependentes.

Podemos obter critérios para verificar se dado subespaço de um espaço vetorial Lorentziano é tipo tempo ou tipo luz. Para obter caracterizações dos subespaços tipo tempo, utilizamos o seguinte lema:

Lema 1.28. Sejam $v, w \in V$ dois vetores tipo luz. Então, o conjunto $\{v, w\}$ é linearmente dependente se, e somente se, $b(v, w) = 0$.

Demonstração. A primeira afirmação é óbvia. Agora suponha que v e w sejam vetores tipo luz tais que $b(v, w) = 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que nenhum dois vetores seja igual a zero. e que, dada uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$, onde e_n é tipo tempo, $v = \sum_{i=1}^{n-1} v^i e_i + e_n$ e $w = \sum_{i=1}^{n-1} w^i e_i + e_n$. Como,

$$\begin{aligned} 0 &= b(v, w) = b\left(\sum_{i=1}^{n-1} v^i e_i + e_n, \sum_{j=1}^{n-1} w^j e_j + e_n\right) = -1 + \sum_{i=1}^{n-1} v^i w^i \\ &= b(v, v) = -1 + \sum_{i=1}^{n-1} (v^i)^2 \\ &= b(w, w) = -1 + \sum_{i=1}^{n-1} (w^i)^2, \end{aligned}$$

segue que

$$1 = \sum_{i=1}^{n-1} v^i w^i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (v^i)^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (w^i)^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (v^i)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} (w^j)^2\right)$$

e que os vetores $\tilde{v} := \sum_{i=1}^{n-1} v^i e_i$ e $\tilde{w} := \sum_{i=1}^{n-1} w^i e_i$ são colineares ($\tilde{w} = \lambda \tilde{v}$). Como

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda \sum_{i=1}^{n-1} (v^i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} v^i (\lambda v^i) = \sum_{i=1}^{n-1} v^i w^i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} (v^i)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} (w^j)^2\right) = \lambda^2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} v^i\right)^2 = \lambda^2, \end{aligned}$$

segue que $\lambda = 1$ ($\lambda \neq 0$ pois v e w são tipo luz) e, portanto, $v = w$. □

Proposição 1.29. Seja W um subespaço de dimensão pelo menos 2. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. W é tipo tempo e, portanto, um espaço vetorial Lorentziano;

2. W contém dois vetores tipo luz que são linearmente independentes;

3. W contém um vetor tipo tempo.

Demonstração. Suponha que W seja tipo tempo e tome uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_m\}$ de W tal que e_1 é tipo tempo. Defina $v_+ := e_1 + e_2$ e $v_- := e_1 - e_2$. Então, v_+ e v_- são linearmente dependentes e

$$b(v_\pm, v_\pm) = b(e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_2) = b(e_1, e_1) + b(e_2, e_2) = 0.$$

Agora suponha que W contenha dois vetores LI $v, w \in W$ que sejam tipo luz. Pelo lema anterior, $b(v, w) \neq 0$ e, portanto,

$$b(v \pm w, u \pm w) = b(v, v) \pm 2b(v, w) + b(w, w) = \pm 2b(v, w) \neq 0.$$

Logo, $v + w$ ou $v - w$ serão tipo tempo.

Agora suponha que W contenha um vetor tipo tempo $v \in W$. Então, $W^\perp \subset \{v\}^\perp$ e, portanto, $W^\perp$ é tipo espaço, pois $\{v\}^\perp$ é tipo espaço. Logo, W é tipo tempo. $\square$

Como consequência da proposição anterior, obtemos uma caracterização para os subespaços tipo luz.

Proposição 1.30. Seja W um subespaço de V. Então, são equivalentes:

1. W é tipo luz, isto é, degenerado;

2. W contém um vetor tipo luz mas não um tipo tempo;

3. $W \cap \Lambda = L \backslash \{0\}$, onde L é um subespaço unidimensional de W e Λ é o cone de luz de V.

Demonstração. Suponha que W seja tipo luz. Como W é degenerado, existe um vetor tipo luz em W e, pelo lema anterior, não possui vetores tipo tempo.

Agora suponha que W tenha um vetor tipo luz e não tenha nenhum tipo tempo. Então, $W \cap \Lambda \neq \emptyset$. Pelo lema anterior, se houvesse um outro vetor tipo luz formando uma base LI, haveria um vetor tipo tempo. Portanto, $W \cap \Lambda$ é um subespaço unidimensional menos a origem.

Agora suponha que $W \cap \Lambda = L \backslash \{0\}$, onde L é um subespaço unidimensional. Como existem vetores tipo luz em W, W não pode ser tipo espaço e, pelo lema anterior, W não pode ser tipo tempo pois não existe um par de vetores tipo luz LI. $\square$

1.2.2 Cones tipo tempo e desigualdades reversas

Proposição 1.31. O conjunto dos vetores tipo tempo possui duas componentes conexas. Cada uma dessas partes será chamada de **cone tipo tempo**.

Demonstração. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de V, onde e_i é um elemento tipo tempo e tome $v = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i \in V$. Então,

$$b(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} v^i v^j g(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} v^i v^j \varepsilon_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (v^i)^2 = -(v^n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (v^i)^2.$$

Portanto, v é tipo tempo se, e somente se,

$$b(v,v) < 0 \Longleftrightarrow |v^n| > \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (v^i)^2}.$$

Logo, o conjunto dos vetores tipo tempo possui duas componentes conexas e cada componente conexa corresponde ao caso em que $v^n < 0$ e $v^n > 0$. □

Definição 1.32. Uma **orientação temporal** de um espaço vetorial Lorentziano é uma escolha de um dos cones tipo tempo. O cone escolhido será chamado de **futuro** e o outro, **passado**. Dizemos que um vetor tipo tempo **aponta para o futuro** se está no cone escolhido como futuro. Caso contrário, diremos que o vetor **aponta para o passado**.

Dados dois vetores tipo tempo, podemos verificar se eles estão no mesmo cone tipo tempo com a seguinte proposição:

Proposição 1.33. Dois vetores tipo luz $v, w \in V$ estão no mesmo cone se, e somente se, $g(v, w) < 0$.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade que $\|w\| = 1$, e que podemos adicionar vetores tipo espaço de tal forma que $\{e_1, ..., e_{n-1}, w\}$ seja uma base ortonormal. Então, $v = \sum_{i=1}^{n-1} b(v, e_i) e_i - b(v, w) w$ e, portanto, pelo Lema 1.31, v e w estão no mesmo cone se, e somente se, $-b(v, w) > 0$ (pois $b(w, w)^2 > 0$), isto é $g(v, w) < 0$. □

Proposição 1.34. Cada cone tipo tempo é convexo, isto é, para quaisquer $v, w \in V$ no mesmo cone tipo tempo, $\alpha v + \beta w$ está no mesmo cone para quaisquer $\alpha, \beta > 0$.

Demonstração. Primeiramente, provaremos que $\alpha v + \beta w$ é tipo tempo. De fato,

$$b(\alpha v + \beta w, \alpha v + \beta w) = \alpha^2 b(v, v) + 2\alpha\beta b(v, w) + \beta^2 b(w, w) < 0,$$

pois v e w são tipo luz que estão no mesmo cone.

Agora, provaremos que $\alpha v + \beta w$ está no mesmo cone que v e w. De fato,

$$b(\alpha v + \beta w, w) = \alpha b(v, w) + \beta b(w, w) < 0,$$

pois v é tipo tempo e está no mesmo cone que w. □

Observação 1.35. Todas as definições e demonstrações feitas acima podem ser adaptadas substituindo o termo tipo tempo por tipo luz ou causal com as seguintes adaptações.

Podemos obter resultados envolvendo vetores tipo tempo que são análogas ao caso Euclidiano. Uma delas é a desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa:

Teorema 1.36 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa)**.** Se $v, w \in V$ são vetores tipo tempo, então:

1. $|b(v,w)| \geq \|v\|\|w\|$ e a igualdade vale se, e somente se, v e w são colineares;
2. Se v e w estão no mesmo cone, existe um único $\varphi \geq 0$, chamado de **ângulo hiperbólico** entre v e w tal que
$$b(v,w) = -\|v\|\|w\| \cosh(\varphi).$$

Demonstração. 1. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\overline{w} \in V$ tal que $w = \lambda v + \overline{w}$, com $\overline{w} \perp v$ (isso vale por causa do Lema 1.13). Então,
$$b(w,w) = b(\lambda v + \overline{w}, \lambda v + \overline{w}) = \lambda^2 b(v,v) + b(\overline{w}, \overline{w})$$
e, portanto, $\lambda^2 b(v,v) = b(w,w) - b(\overline{w},\overline{w})$. Como $b(\overline{w},\overline{w}) \geq 0$, segue que
$$\begin{aligned} b(v,w)^2 &= b(v, \lambda v + \overline{w})^2 = \lambda^2 b(v,v)^2 = b(v,v)(b(w,w) - b(\overline{w},\overline{w})) \\ &\geq b(v,v)b(w,w) = \|v\|^2\|w\|^2, \end{aligned}$$
e a igualdade vale se, e somente se, $b(\overline{w},\overline{w}) = 0$, que é equivalente a dizer que $\overline{w} = 0$ e $w = \lambda v$.

2. Como v e w estão no mesmo cone, $b(v,w) < 0$ e, portanto,
$$-b(v,w) = |b(v,w)| \geq \|v\|\|w\| \Longrightarrow -\frac{b(v,w)}{\|v\|\|w\|} \geq 1.$$
Como a função $\varphi \mapsto \cosh(\varphi)$ é uma bijeção de $[0,\infty)$ em $[1,\infty)$, existe $\varphi \in [0,\infty)$ tal que
$$-\frac{b(v,w)}{\|v\|\|w\|} = \cosh(\varphi),$$
como queríamos demonstrar. □

Como consequência do resultado acima, obtemos mais uma desigualdade reversa:

Teorema 1.37 (Desigualdade triangular reversa)**.** Sejam $v, w \in V$ vetores tipo tempo que estão no mesmo cone. Então,
$$\|v + w\| \geq \|v\| + \|w\|$$
e a igualdade vale se, e somente se, v e w são colineares.

Demonstração. Sejam $v, w \in V$ dois vetores tipo tempo. Então,

$$\begin{aligned}(\|v\| + \|w\|)^2 &= \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &\leq -b(v,v) - 2b(v,w) - b(w,w) = -b(v+w, v+w) \\ &= \|v+w\|^2,\end{aligned}$$

e a igualdade vale se, e somente se, $\|v\|\|w\| = -b(v,w) = |b(v,w)|$, o que significa que v e w são colineares. □

2 Variedades semi-Riemannianas

Neste capítulo, falaremos sobre variedades semi-Riemannianas, conceito que generaliza a noção de variedade Riemanniana e que é fundamental para o estudo da Relatividade Geral. A principal referência para este assunto é (O'NEILL, 1983). Uma segunda referência para este assunto é (VICTORIA; CAJA, 2010). Neste capítulo, assumiremos que o leitor esteja familiarizado com os conceitos de Geometria Riemanniana e com os conteúdos abordados pelos apêndices. Para mais informações, veja (CARMO, 2011; LEE, 1997).

2.1 Definição e alguns exemplos

Definição 2.1. Uma **métrica** (ou um **tensor métrico**) g em uma variedade diferenciável M de classe C^∞ é um campo tensorial simétrico e não degenerado de tipo $(0,2)$ em M tal que, para qualquer $p \in M$, o índice ν_p de g_p não depende do ponto. Uma **variedade semi-Riemanniana** (ou **pseudo-Riemanniana**) é uma variedade suave M munida com uma métrica g.

Pela definição, uma variedade semi-Riemanniana é um par (M, g) tal que, para todo ponto $p \in M$, $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica não degenerada de índice ν que varia suavemente, isto é, a aplicação $p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ é suave para quaisquer campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. O número ν é dito o **índice** de M.

Uma variedade M é uma variedade Riemanniana se, e somente se, o índice de M é zero. Quando $\nu = 1$, dizemos que M é uma **variedade Lorentziana** e g é uma **métrica Lorentziana**.

De agora em diante, escreveremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_g = g(\cdot, \cdot)$ para denotar a métrica. Não havendo ambiguidades quando for representar a métrica, omitiremos o símbolo em subescrito.

Seja $(x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança $U \subset M$. Então, os componentes da métrica g em U são

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \text{ onde } 1 \leq i, j \leq n.$$

Para campos vetoriais $X = \sum_i X^i \partial_i$ $Y = \sum_j Y^j \partial_j$,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j.$$

Como g é não degenerada, para todo $p \in U$, a matriz $(g_{ij}(p))$ é inversível e sua inversa é denotada por $(g^{ij}(p))$ (as funções g^{ij} são suaves em U).

Como g e simétrica, temos que $g_{ij} = g_{ji}$ e, portanto, $g^{ij} = g^{ji}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Finalmente, em U, a métrica g pode ser escrita como

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Exemplo 2.2. Seja ν um inteiro entre 0 e n e considere o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a seguinte métrica

$$g(v, w) = \langle v, w \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{j=\nu+1}^{n} v^j w^j, \text{ onde } v = \sum_i v^i e_i, w = \sum_j v^j e_j \in T_p\mathbb{R}^n.$$

Então, a métrica definida anteriormente é uma métrica de índice ν. Denotamos $\mathbb{R}^n_\nu = (\mathbb{R}^n, g)$ o espaço semi-Euclidiano. Quando $\nu = 0$, $\mathbb{R}^n_\nu = \mathbb{R}^n$. Para $n \geq 2$, chamamos $\mathbb{R}^n_1$ de **espaço de Minkowski** de dimensão n; o caso $n = 4$ é o exemplo mais simples de um espaço-tempo relativístico (é o espaço-tempo utilizado na Relatividade Restrita).

Observação 2.3. Utilizando a notação de assinatura, podemos escrever a métrica g definida no exemplo anterior como

$$g = \sum_i \varepsilon_i (dx^i)^2,$$

onde os ε_i estão definidos no Lema 1.17.

Observação 2.4. g_N é uma métrica semi-Riemanniana, se e somente se, para cada $p \in N$, T_pN é um subespaço não degenerado de T_pM (relativo à g) e o índice de T_pN é o mesmo para cada p.

Definição 2.5. Seja N uma subvariedade de uma variedade semi-Riemanniana M e $i : N \hookrightarrow M$ a aplicação de inclusão. Se i^*g for uma métrica em N, diremos que N é uma **subvariedade semi-Riemanniana** de M.

Quando N for Riemanniana (respectivamente, Lorentziana), diremos que N é uma **subvariedade Riemanniana** (respectivamente, **subvariedade Lorentziana**).

Seja N uma subvariedade de uma variedade Lorentziana M. Se, para cada $p \in N$, T_pN tiver o mesmo caráter causal que T_pM, então podemos atribuir o mesmo caráter causal em N.

Definição 2.6. Dizemos que uma subvariedade N de uma variedade Lorentziana M é

1. **tipo espaço** se, para cada $p \in N$, T_pN é tipo espaço;
2. **tipo tempo** se, para cada $p \in N$, T_pN é tipo tempo;
3. **tipo luz** se, para cada $p \in N$, T_pN é tipo luz.

2.2 Algumas comparações com o caso Riemanniano

Nesta seção faremos uma comparação sobre alguns tópicos da Geometria Riemanniana com outros tópicos da Geometria semi-Riemanniana.

1. As noções de isometria e isometria local em uma variedade semi-Riemanniana é exatamente a mesma do caso Riemanniano. Todas as propriedades que dependem apenas da métrica vão ser invariantes por isometrias.

2. A definição de conexão afim, a obtenção da derivada covariante de uma conexão afim, a definição e as propriedades sobre o transporte paralelo e a existência e unicidade da conexão de Levi-Civita (sem torção e compatível com a métrica) é exatamente a mesma do caso Riemanniano.

3. As noções de gradiente de uma função, divergência de um tensor e Hessiana e Laplaciano de uma função é a mesma do caso Riemanniano (essa parte está detalhada no apêndice).

4. A definição e as propriedades básicas sobre geodésicas são quase todas as mesmas. A única diferença do caso Riemanniano para o caso semi-Riemanniano é que é há uma tricotomia igual a dos vetores no espaço tangente. Dizemos que uma geodésica é tipo espaço (tipo tempo ou tipo luz, respectivamente) se o seu vetor velocidade for tipo espaço (tipo tempo ou tipo luz, respectivamente).

5. A definição da aplicação exponencial e o conceito de vizinhança normal são exatamente os mesmos do caso Riemanniano. A única diferença é que, dado $p \in M$, a expressão de $g_{ij}(p)$ em coordenadas normais é $g_{ij}(p) = \delta_{ij}\varepsilon_j$, onde $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

6. Boa parte dos resultados básicos sobre o tensor de curvatura R valem para o caso semi-Riemanniano. Para mais detalhes, veja a seção 1.3.

7. Boa parte dos resultados básicos sobre subvariedades Riemannianas valem para o caso semi-Riemanniano. Para mais detalhes, veja a seção 1.4.

8. A primeira grande diferença entre a Geometria Riemanniana e a Geometria semi-Riemanniana é o famoso **Teorema de Hopf-Rinow**, que fala sobre a completude geodésica de uma variedade Riemanniana. Esse teorema é falso quando a variedade é Lorentziana.

2.3 Curvatura

Como utilizaremos os conceitos que envolvem curvatura com mais frequência, trataremos desse assunto com mais detalhes, indicando as demonstrações análogas e idênticas ao caso Riemanniano e demonstrando as outras. Para mais informações sobre o assunto, consulte (CARMO, 2011; O'NEILL, 1983).

2.3.1 O tensor de curvatura

Definição 2.7. Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana e $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ a sua conexão de Levi-Civita. Chamamos a função $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, dada por

$$R(X,Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

de **tensor de curvatura** de M.

Proposição 2.8. A função R é, de fato, um campo tensorial de tipo $(1,3)$ em M.

Observação 2.9. Quando afirmamos que R é um campo tensorial de tipo $(1,3)$, estamos utilizando o fato de que o conjunto $\mathcal{L}(\mathfrak{X}(M)^3, \mathfrak{X}(M))$ de aplicações $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ trilineares é isomorfo ao conjunto dos tensores de tipo $(1,3)$, $\mathfrak{T}^1_3(M)$. Para mais informações, veja a Observação A.6 do apêndice.

Demonstração da Proposição 1.9. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais detalhes, veja o Lema 35 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

Como R é um campo tensorial de tipo $(1,3)$ em M, para cada $p \in M$, podemos considerar a aplicação $R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$, que é o tensor de curvatura restrito a cada espaço tangente.

Assim como no caso Riemanniano, as seguintes simetrias do tensor de curvatura são válidas:

Proposição 2.10. Para quaisquer campos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, valem as seguintes expressões:

1. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$;
2. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$;
3. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (primeira identidade de Bianchi);
4. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

Demonstração. Veja a Proposição 36 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

Como consequência das simetrias acima, obtemos o seguinte resultado que será útil no final da seção.

Proposição 2.11. Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_X R$ possui as mesmas simetrias que R.

Demonstração. 1. Sejam $Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Então,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,Z)W &= \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - \\
&\quad -R(Y,Z)(\nabla_X W) \\
&= -\nabla_X(R(Z,X)W) + R(Z, \nabla_X Y)W + R(\nabla_X Z, Y)W + \\
&\quad +R(Z,Y)(\nabla_X W) \\
&= -(\nabla_X R)(Y,Z)W
\end{aligned}$$

2. Sejam $Y, Z, W, T \in \mathfrak{X}(M)$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_X R)(Y,Z)W, T\rangle &= \langle \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - \\
&\quad -R(Y,Z)(\nabla_X W), T\rangle \\
&= X\langle R(Y,Z)W, T\rangle - \langle R(Y,Z)W, \nabla_X T\rangle - \\
&\quad - \langle R(\nabla_X Y, Z)W + R(Y, \nabla_X Z)W, T\rangle - \langle R(Y,Z)(\nabla_X W), T\rangle \\
&= -X\langle R(Y,Z)T, W\rangle + \langle R(Y,Z)\nabla_X T, W\rangle - \\
&\quad + \langle R(\nabla_X Y, Z)T + R(Y, \nabla_X Z)T, W\rangle + \langle R(Y,Z)T, (\nabla_X W)\rangle \\
&= -\langle (\nabla_X R)(Y,Z)T, W\rangle
\end{aligned}$$

3. Sejam $Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Então,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,Z)W &= \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - \\
&\quad -R(Y,Z)(\nabla_X W) \\
(\nabla_X R)(Z,W)X &= \nabla_X(R(Z,W)Y) - R(\nabla_X Z, W)Y - R(Z, \nabla_X W)Y - \\
&\quad -R(Z,W)(\nabla_X Y) \\
(\nabla_X R)(W,Y)Z &= \nabla_X(R(W,Y)Z) - R(\nabla_X W, Y)Z - R(W, \nabla_X Y)Z - \\
&\quad -R(W,Y)(\nabla_X Z).
\end{aligned}$$

Somando as três expressões acima e aplicando a primeira identidade de Bianchi, obtemos o resultado.

4. Sejam $Y, Z, W, T \in \mathfrak{X}(M)$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_X R)(Y,Z)W, T\rangle &= X\langle R(Y,Z)W, T\rangle - \langle R(Y,Z)W, \nabla_X T\rangle - \\
&\quad - \langle R(\nabla_X Y, Z)W + R(Y, \nabla_X Z)W, T\rangle - \langle R(Y,Z)(\nabla_X W), T\rangle \\
&= X\langle R(W,T)Y, Z\rangle - \langle R(\nabla_X W, T)Y, Z\rangle - \langle R(W, \nabla_X T)Y, Z\rangle - \\
&\quad - \langle R(W,T)(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle R(W,T)Y, \nabla_X Z\rangle \\
&= \langle (\nabla_X R)(W,T)Y, Z\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

Proposição 2.12 (Segunda identidade de Bianchi)**.** Se $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0$$

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais detalhes, veja a Proposição 37 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

Como R é um campo tensorial de tipo $(1,3)$ em M, dado um sistema de coordenadas $\{x^1, ..., x^n\}$ em uma vizinhança de um ponto, podemos escrever

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l R^l_{ijk}\partial_l,$$

onde $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ é a base de T_pM associada ao sistema de coordenadas.

Lema 2.13. Na notação acima,

$$R^l_{ijk} = \partial_j \Gamma^l_{ik} - \partial_i \Gamma^l_{jk} + \sum_m \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}$$

Demonstração. Veja o Lema 38 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

Observação 2.14. Aplicando a Proposição 2.10 e a Proposição 2.12 na base associada $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$, obtemos as seguintes relações: $R^l_{ijk} = -R^l_{jik}$, $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$, $R^l_{ijk} + R^l_{jki} + R^l_{kij} = 0$, $R^l_{ijk} = R^j_{kli}$ e $R^m_{ijk;l} + R^m_{jlk;i} + R^m_{lik;j} = 0$, onde $R_{ijkl} = \sum_m g^{lm} R_{ijkm}$.

2.3.2 Curvatura seccional

Por ser um campo tensorial de tipo $(1,3)$, o tensor de curvatura é difícil de se trabalhar. Portanto, trabalharemos com uma função mais simples que, de certa forma, determina o tensor R.

Chamaremos de **plano tangente** à M em um ponto $p \in M$ um subespaço bidimensional Π de T_pM. Dados dois vetores tangentes $v, w \in T_pM$, defina a forma quadrática

$$Q(v,w) := \langle v,v \rangle \langle w,w \rangle - \langle v,w \rangle^2.$$

Pelo Lema 1.4, um plano tangente Π é não degenerado se, e somente se, $Q(v,w) \neq 0$ para uma (portanto, para qualquer) base $\{v,w\}$ de Π (basta notar que $Q(v,w)$ é o determinante da matriz associada à base $\{v,w\}$).

Observação 2.15. Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de Π ($\langle e_i, e_i \rangle = \varepsilon_i$). Então, dados $v = a_1 e_1 + b e_2, w = c e_1 + d e_2 \in T_pM$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
Q(v,w) &= \langle ae_1 + be_2, ae_1 + be_2 \rangle \langle ce_1 + de_2, ce_1 + de_2 \rangle - \langle ae_1 + be_2, ce_1 + de_2 \rangle^2 \\
&= (\varepsilon_1 a^2 + \varepsilon_2 b^2)(\varepsilon_1 c^2 + \varepsilon_2 d^2) - (\varepsilon_1 ac + \varepsilon_2 bd)^2 \\
&= a^2c^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2(a^2d^2 + b^2c^2) + b^2d^2 - a^2c^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 abcd - b^2d^2 \\
&= \varepsilon_1\varepsilon_2(a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2(ad - bc)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $Q(v,w) > 0$ se $g|_\Pi$ for definida, e $Q(v,w) < 0$ se $g|_\Pi$ for indefinida.

Lema 2.16. Seja Π um plano tangente à M em p não degenerado. Então, o número $K(v,w) := \dfrac{\langle R(v,w)v, w\rangle}{Q(v,w)}$ independe da escolha de uma base de Π. Chamamos a grandeza definida acima de **curvatura seccional** $K(\Pi)$ de Π.

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais detalhes, veja o Lema 39 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

Pela definição acima, a curvatura seccional K de M é uma função definida no conjunto dos planos tangentes à M que toma valores em $\mathbb{R}$. Além disso, o tensor de curvatura R determina K; para mostrar que K determina R, é necessário o seguinte resultado:

Lema 2.17. Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto escalar e $v, w \in V$. Então existem vetores $\tilde{v}, \tilde{w} \in V$, arbitrariamente próximos a v e w, respectivamente, que geram um plano não degenerado.

Demonstração. Podemos assumir que v e w são linearmente independentes pois qualquer par de vetores pode ser aproximado por vetores independentes. Além disso, assuma que o plano gerado por esses dois vetores é degenerado (o resultado é trivial se o plano for não degenerado). Se v for um vetor tipo luz, tome $x \in V$ tal que $\langle v, x\rangle \neq 0$ e, portanto, $Q(v,x) = -\langle v,x\rangle^2 < 0$. Caso v não seja tipo luz (tipo espaço ou tipo tempo), basta tomar $x \neq 0$ de caráter causal oposto (isto é, tipo tempo ou tipo espaço, respectivamente). Portanto, $\langle v,v\rangle\langle x,x\rangle < 0$ e $Q(v,x) < 0$.

Agora seja $\delta > 0$. Então, v e $w + \delta x$ formam um plano não degenerado. De fato, como $Q(v,w) := \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2 = 0$,

$$\begin{aligned} Q(v, w+\delta x) &= \langle v,v\rangle\langle w+\delta x, w+\delta x\rangle - \langle v, w+\delta x\rangle^2 \\ &= 2\delta\left(\langle v,v\rangle\langle w,x\rangle - \langle v,w\rangle\langle v,x\rangle\right) + \delta^2\left(\langle v,v\rangle\langle x,x\rangle - \langle v,x\rangle^2\right) \\ &= 2\delta b + \delta^2 Q(v,x), \end{aligned}$$

onde $b := \langle v,v\rangle\langle w,x\rangle - \langle v,w\rangle\langle v,x\rangle$.

Se $b \neq 0$, a expressão acima será não nula, pois

$$Q(v, w+\delta x) = \delta\left(2b + \delta Q(v,x)\right) \neq 0$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. A expressão será não nula para $b = 0$ pois $Q(v,x) < 0$. □

Uma aplicação desse Lema e da Proposição 1.11 é o seguinte resultado:

Proposição 2.18. Se $K = 0$ em $p \in M$, então $R = 0$ em p, isto é, $R_p(x, y)z = 0$, para todo $x, y, z \in T_pM$, se $K(\Pi) = 0$ para todo plano não degenerado em T_pM.

Ideia da demonstração. Primeiramente, prove que $\langle R_p(v, w)v, w\rangle = 0$, para todo $v, w \in T_pM$. De fato, se v e w geram um plano não degenerado, o resultado é trivial pois $Q(v, w) \neq 0$. Caso contrário, basta aproximar o plano por outros não degenerados. Como o operador de curvatura é linear (e, portanto, contínuo) em $(T_pM)^4$, o resultado vale. Os outros passos da demonstração são inteiramente análogos ao caso Riemanniano; para mais detalhes, veja a Proposição 41 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

Observação 2.19. Dizemos que uma variedade Riemanniana (M, g) é **plana** se o tensor de curvatura R for identicamente nulo. Portanto, pela Proposição anterior, M é plana se, e somente se, K for identicamente nula.

A demonstração anterior nos mostra algo além. Dizemos que uma função multilinear $F : (T_pM)^4 \to \mathbb{R}$ é do **tipo curvatura** (em inglês, *curvaturelike*) se possui as mesmas simetrias descritas na Proposição 2.11. Como a demonstração anterior utiliza apenas as simetrias do tensor de curvatura, segue que se $F(v, w, v, w) = 0$ para quaisquer $v, w \in T_pM$ que geram um plano não degenerado, $F = 0$. Portanto, K determina R no seguinte sentido:

Corolário 2.20. Seja F uma função do tipo curvatura em T_pM tal que

$$K(v, w) = \frac{F(v, w, v, w)}{\langle v, v\rangle \langle v, w\rangle - \langle v, w\rangle^2},$$

para quaisquer vetores v e w que geram um plano não degenerado. Então,

$$\langle R_p(v, w)x, y\rangle = F(v, w, x, y),$$

para quaisquer vetores $v, w, x, y \in T_pM$.

Demonstração. Defina $\phi(v, w, x, y) := F(v, w, x, y) - \langle R_p(v, w)x, y\rangle$ (ϕ também é do tipo curvatura). Por hipótese, se $v, w \in T_pM$ geram um plano não degenerado,

$$\frac{\langle R_p(v, w)v, w\rangle}{\langle v, v\rangle \langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2} = K(v, w) = \frac{F(v, w, v, w)}{\langle v, v\rangle \langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2} \Longrightarrow \phi(v, w, v, w) = 0.$$

Portanto, $\phi = 0$. □

Definição 2.21. Dizemos que (M, g) tem curvatura constante se a sua curvatura seccional é constante.

Corolário 2.22. Se M tem curvatura constante K_0, então

$$R_p(x, y)z = K_0 \left(\langle z, x\rangle y - \langle z, y\rangle x\right).$$

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Corolário 43 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

2.3.3 O tensor de Ricci e a curvatura escalar

Definição 2.23. Seja $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ o tensor de curvatura de uma variedade semi-Riemanniana (M, g). O tensor de Ricci Ric é a contração $\mathbf{C}_2^1(R) \in \mathfrak{T}_2^0(M)$.

Segue imediatamente da definição que, em coordenadas $(x^1, ..., x^n)$,

$$r_{ij} := (\mathrm{Ric})_{ij} = \sum_k R^k_{ikj}.$$

Lema 2.24. O tensor de Ricci é simétrico e, dado um referencial ortonormal $\{E_1, ..., E_n\}$,

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_i \varepsilon_i \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle .$$

Demonstração. A demonstração é análoga ao caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Lema 52 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

Observação 2.25. O Lema anterior mostra que $\mathrm{Ric}(X, Y)$ é o traço da aplicação $V \in \mathfrak{X}(M) \mapsto R(X, V)Y$.

Como corolário imediato, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.26. Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_X \mathrm{Ric}$ é simétrico.

Quando $\mathrm{Ric} \equiv 0$, dizemos que M é **Ricci plana**. É óbvio que, se M for plana, isto é, se o tensor de curvatura R for identicamente nulo, M será Ricci plana.

A curvatura seccional K determina o tensor de Ricci, Ric, de uma forma relativamente simples. Seja $p \in M$, $u \in T_pM$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em T_pM tal que $u = e_1$. Então, pelo Lema anterior,

$$\mathrm{Ric}_p(u, u) = \sum_i \varepsilon_i \langle R_p(u, e_i)u, e_i \rangle = \sum_i \varepsilon_i \langle u, u \rangle \langle e_i, e_i \rangle K(u, e_i) = \langle u, u \rangle \sum_i K(u, e_i).$$

Como Ric_p é linear e simétrico, obtemos a expressão geral via polarização.

Definição 2.27. A **curvatura escalar** S de uma variedade semi-Riemanniana (M, g) é o traço do tensor de Ricci, isto é, $S := \mathrm{tr}_g \mathrm{Ric} \in C^\infty(M)$.

Em coordenadas $(x^1, ..., x^n)$,

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} r_{ij} = \sum_{i,j,k} g^{ij} R^k_{ikj}.$$

Seja $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal. Então, utilizando a expressão de Ric em função das curvaturas seccionais obtida anteriormente,

$$S = \sum_i \mathrm{Ric}(E_i, E_i) = \sum_{i,j} \langle E_i, E_i \rangle K(E_i, E_j) = \sum_{i \neq j} K(E_i, E_j) = 2 \sum_{i<j} K(E_i, E_j).$$

Como aplicação da segunda identidade de Bianchi, obtemos a seguinte relação:

Corolário 2.28. $dS = 2\,\mathrm{div}\,\mathrm{Ric}$.

Demonstração. Primeiramente, note que, para todo j, k, l, m,

$$(\nabla_{\partial_m} R)(\partial_j, \partial_k)\partial_l = \sum_i R^i_{jkl;m}\partial_i.$$

Portanto, pela segunda identidade de Bianchi,

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{kml;j} + R^i_{mjl;k} = 0 \text{ para todo } i.$$

Como $R^i_{mjl;k} = -R^i_{jml;k}$,

$$\begin{aligned} 0 &= R^i_{jkl;m} + R^i_{kml;j} - R^i_{jml;k} = \sum_m R^m_{jkl;m} + \sum_m R^m_{kml;j} - \sum_m R^m_{jml;k} \\ &= \sum_m R^m_{jkl;m} + r_{kl;j} - r_{jl;k}. \end{aligned}$$

Contraindo metricamente em j e l, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j,l,m} g^{jl} R^m_{jkl;m} + \sum_{j,l} g^{jl} r_{kl;j} - \sum_{j,l} g^{jl} r_{jl;k} \\ &= \sum_{j,l,m} g^{jl} R^m_{jkl;m} + \sum_{j,l} g^{jl} r_{kl;j} - S_{;k} \\ &= \sum_{j,l,m} g^{jl} R^m_{jkl;m} + (\mathrm{div}\,\mathrm{Ric})_k - (\nabla S)_k \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{j,l,m} g^{jl} R^m_{jkl;m} &= \sum_{j,l,m,p} g^{jl} g^{mp} R_{jklp;m} = \sum_{j,l,m,p} g^{jl} g^{mp} R_{kjpl;m} \\ &= \sum_{j,m,p} g^{mp} R^j_{kjp;m} = \sum_{m,p} g^{mp} r_{kp;m} \\ &= \sum_m r^m_{k;m} = (\mathrm{div}\,\mathrm{Ric})_k, \end{aligned}$$

substituindo na equação anterior, obtemos

$$0 = 2(\mathrm{div}\,\mathrm{Ric})_k - (\nabla S)_k \Longrightarrow (dS)_k = 2(\mathrm{div}\,\mathrm{Ric})_k \text{ para todo } k.$$

Portanto, $2\,\mathrm{div}\,\mathrm{Ric} = \nabla S = dS$. □

2.4 Subvariedades semi-Riemannianas

Assim como a seção anterior, detalharemos com mais detalhes esse assunto, indicando as demonstrações análogas e idênticas ao caso Riemanniano e demonstrando as outras. Para mais informações sobre o assunto, consulte (CARMO, 2011; O'NEILL, 1983).

Nesta seção, M^m denotará uma subvariedade semi-Riemanniana de $\overline{M}^{n=m+k}$.

2.4.1 Vetores e campos tangentes e normais

Definição 2.29. Seja M apenas uma variedade diferenciável de $\overline{M}$. Dizemos que um campo vetorial X na inclusão $i : M \hookrightarrow \overline{M}$ é um **$\overline{M}$-campo vetorial em** M se, para cada $p \in M$, $X_p \in T_p\overline{M}$. Além disso, X é suave se $Xf \in C^\infty(M)$ para todo $f \in C^\infty(\overline{M})$. Denotamos $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ o conjunto de todos os $\overline{M}$-campos vetoriais suaves em M.

Observação 2.30. Note que, para todo $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, $Y|_M \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$. Portanto, podemos considerar $\mathfrak{X}(M)$ como um submódulo de $\overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Agora, considere $M \subset \overline{M}$ como uma subvariedade semi-Riemanniana. Então, pela Observação 2.4, T_pM é um subespaço não degenerado de $T_p\overline{M}$. Portanto, pelo Observação 1.13, podemos escrever $T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp$ e $T_pM^\perp$ é um subespaço não degenerado de dimensão $n - m = k$.

Definição 2.31. Chamamos de **codimensão** de M em $\overline{M}$ ($\operatorname{codim} M$) a dimensão de $T_pM^\perp$. Analogamente, chamamos de **coíndice** de M em $\overline{M}$ ($\operatorname{coind} M$) o índice de g restrita a $T_pM^\perp$.

Pelo Lema 1.19, $\operatorname{ind} \overline{M} = \operatorname{ind} M + \operatorname{coind} M$.

Definição 2.32. Dizemos que um vetor $v \in T_p\overline{M}$ é **normal à** M se $v \in T_pM^\perp$. Caso contrário, dizemos que v é **tangente à** M. Analogamente, dizemos que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é normal (respectivamente, tangente) à M se $X_p \in T_pM$ (respectivamente, $X_p \in T_pM^\perp$), para todo $p \in \overline{M}$. Denotamos o conjunto de $\overline{M}$-campos de vetores normais em M como $\mathfrak{X}(M)^\perp$.

Como $T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp$, todo vetor $v \in T_pM$ pode ser escrito como $v = v^\parallel + v^\perp$, onde $v^\parallel \in T_pM$ e $v^\perp \in T_pM^\perp$ e as projeções $\pi^\parallel : T_p\overline{M} \to T_pM$, $\pi^\perp : T_p\overline{M} \to (T_pM)^\perp$ são $\mathbb{R}$-lineares. Podemos aplicar o mesmo raciocínio para campos $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ e escrever $X = X^\parallel + X^\perp$, onde $X^\parallel \in \mathfrak{X}(M)$ e $X^\perp \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

2.4.2 A conexão induzida e a segunda forma fundamental

Como M é uma subvariedade semi-Riemanniana de $\overline{M}$, podemos definir a partir da conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$ uma nova aplicação $\mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M)$ chamada de **conexão induzida**, definida da seguinte forma:

Definição 2.33. Definimos a **conexão induzida de** M **em** $\overline{M}$, $\widetilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M)$, como

$$\widetilde{\nabla}_X Y := \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y},$$

onde $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ são extensões locais suaves de X e Y, respectivamente.

A princípio, a aplicação acima não parece estar bem definida. O Lema abaixo garante que a aplicação está bem definida:

Lema 2.34. $\widetilde{\nabla}$ é uma aplicação bem definida, isto é, para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, $\widetilde{\nabla}_X Y$ independe da escolha de extensões suaves de X e Y.

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Lema 1 do Capítulo 4 de (O'NEILL, 1983). □

Corolário 2.35. A conexão induzida $\widetilde{\nabla}$ possui as seguintes propriedades:

1. $\widetilde{\nabla}$ é $C^\infty(M)$-linear na primeira coordenada;
2. $\widetilde{\nabla}$ é $\mathbb{R}$-linear na segunda coordenada;
3. $\widetilde{\nabla}_X(fY) = Xf \cdot Y + f\widetilde{\nabla}_X Y$, para todo $f \in C^\infty(M)$;
4. $[X, Y] = \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X$;
5. $X \langle Y, Z\rangle = \left\langle \widetilde{\nabla}_X Y, Z \right\rangle + \left\langle Y, \widetilde{\nabla}_X Z \right\rangle$.

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Corolário 2 do Capítulo 4 de (O'NEILL, 1983). □

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o vetor $\widetilde{\nabla}_X Y$ não é necessariamente um campo vetorial tangente à M. Então, é natural perguntar qual é o significado de $(\widetilde{\nabla}_X Y)^{\parallel}$ e $(\widetilde{\nabla}_X Y)^{\perp}$.

Lema 2.36. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $(\widetilde{\nabla}_X Y)^{\parallel} = \nabla_X Y$, onde ∇ é a conexão de Levi-Civita em M.

Demonstração. A demonstração é idêntica do caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Lema 3 do Capítulo 4 de (O'NEILL, 1983). □

Lema 2.37. A função $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ definida por $II(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_X Y)^{\perp}$ é $C^\infty(M)$-bilinear e simétrica.

Demonstração. A demonstração é idêntica do caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Lema 4 do Capítulo 4 de (O'NEILL, 1983). □

A aplicação $C^\infty(M)$-bilinear e simétrica definida acima é chamada de **tensor da segunda forma fundamental de** M ou **tensor de forma** (do inglês, *shape tensor*).

Observação 2.38. Como II possui um caráter tensorial, para cada $p \in M$, podemos definir uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear $II_p : T_pM \times T_pM \to T_pM^{\perp}$ que leva (v, w) em $II_p(v, w)$.

Os dois lemas anteriores podem ser resumidos em uma seguinte fórmula: dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y),$$

onde $\nabla_X Y$ e $II(X, Y)$ são as partes tangente e normal de $\widetilde{\nabla}_X Y$, respectivamente.

Como B se comporta como um campo tensorial de tipo $(0, 2)$ com valores em $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$, podemos contraí-lo metricamente para obter um vetor normal à M.

Definição 2.39. Seja $\{e_1, ..., e_m\}$ uma base ortonormal de T_pM. Definimos, para cada $p \in M$, o **vetor de curvatura média** como

$$\vec{H}(p) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i II_p(e_i, e_i).$$

Quando $\vec{H}(p) = 0$, para todo $p \in M$, dizemos que M é uma **subvariedade mínima** de $\overline{M}$.

2.4.3 Hipersuperfícies semi-Riemannianas

Uma **hipersuperfície semi-Riemanniana** M é uma subvariedade semi-Riemanniana de codimensão 1. Como a codimensão é 1, o coíndice de M deve ser apenas 0 ou 1.

Definição 2.40. Definimos o sinal ε de M como

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{se coind}\, M = 0, \text{ isto é, } \langle z, z\rangle > 0 \text{ para todo vetor normal } z \neq 0 \\ -1 & \text{se coind}\, M = 1, \text{ isto é, } \langle z, z\rangle < 0 \text{ para todo vetor normal } z \neq 0 \end{cases}.$$

Se $\varepsilon = 1$, então $\operatorname{ind} M = \operatorname{ind} \overline{M}$ e se $\varepsilon = -1$, então $\operatorname{ind} M = \operatorname{ind} \overline{M} - 1$. Se $\overline{M}$ é uma variedade Riemanniana, então $\varepsilon = 1$ para toda hipersuperfície M (M é Riemanniana).

Para hipersuperfícies semi-Riemannianas, podemos reescrever a segunda forma fundamental da seguinte forma:

Definição 2.41. Seja $U \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$. O tensor A_U de tipo $(1, 1)$ em M é definido como

$$\langle A_U(X), Y\rangle = \langle II(X, Y), U\rangle, \text{ onde } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Podemos obter uma expressão explícita para A:

Proposição 2.42. Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $A_U(X) = -\overline{\nabla}_X U$. Além disso, A_U é uma aplicação auto-adjunta.

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Lema 19 do Capítulo 4 de (O'NEILL, 1983). □

O tensor A_U, assim como o seu tensor metricamente equivalente $B \in \mathfrak{T}^0_2(M)$, é chamado de segunda forma fundamental (ou em inglês, *shape operator*) de M.

2.4.4 As equações de Gauss e Codazzi

Nesta subseção, enunciaremos duas equações fundamentais na teoria de subvariedades semi-Riemannianas, a equação de Gauss e a equação de Codazzi. Essas equações que relacionam a geometria de M com a geometria de $\overline{M}$ serão de importante utilidade na obtenção de conclusões sobre os dados iniciais do problema de Cauchy da Relatividade Geral.

2.4.4.1 A Equação de Gauss

Utilizando da decomposição da conexão induzida, obtemos um resultado fundamental que relaciona a curvatura de M com a curvatura de $\overline{M}$:

Teorema 2.43 (Equação de Gauss)**.** Sejam R e $\overline{R}$ os tensores de curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente e II a segunda forma fundamental de M em $\overline{M}$. Então, para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \left\langle \overline{R}(X,Y)Z, W\right\rangle + \langle II(X,Z), II(Y,W)\rangle - \langle II(X,W), II(Y,Z)\rangle .$$

Essa equação é chamada de **equação de Gauss**.

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Teorema 5 do Capítulo 4 de (O'NEILL, 1983). □

Como corolário da equação de Gauss, podemos relacionar a curvatura seccional K e $\overline{K}$ de um plano tangente formado por uma base não degenerada $\{v, w\}$ de M e $\overline{M}$, respectivamente:

Corolário 2.44. Seja $\{v, w\}$ uma base não degenerada de um plano tangente à M em p. Então,

$$K(v,w) = \overline{K}(v,w) + \frac{\langle II_p(v,v), II_p(w,w)\rangle - \langle II_p(v,w), II_p(v,w)\rangle}{\langle v,v\rangle \langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}.$$

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano (faça $X_p = Z_p = v$ e $Y_p = W_p = w$). □

Utilizando a fórmula para A, podemos reescrever o Corolário 2.44 da seguinte forma.

Corolário 2.45. Seja A_U o operador definido anteriormente na hipersuperfície semi-Riemanniana M. Se $\{v, w\}$ gera um plano tangente não degenerado em M, então

$$K(v,w) = \overline{K}(v,w) + \varepsilon \frac{\langle (A_U)_p(v), v\rangle \langle (A_U)_p(w), w\rangle - \langle (A_U)_p(v), w\rangle^2}{\langle v,v\rangle \langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2},$$

onde ε é o sinal de M.

Como uma segunda aplicação da Equação de Gauss, mostraremos uma relação importante envolvendo as curvaturas escalares de M e $\overline{M}$ e que será utilizada no Capítulo 4.

Corolário 2.46. Suponha que M seja uma hipersuperfície de uma variedade **Riemanniana** $\overline{M}$ e sejam S e $\overline{S}$ as suas curvaturas escalares, respectivamente. Então,

$$\mathrm{Ric}(U,U) = \frac{\overline{S}}{2} - K - \frac{\|B\|^2}{2} + \frac{H^2}{2},$$

onde $U \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ é um campo de vetores unitário e normal a M, Ric é o tensor de Ricci de $\overline{M}$, K é a curvatura Gaussiana de M, definida como a metade de sua curvatura escalar, $\|B\|$ é a norma da segunda forma fundamental de M e H é a curvatura média de M.

Demonstração. Para uma hipersuperfície, a Equação de Gauss pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \left\langle \overline{R}(X,Y)Z,W\right\rangle + B(X,Z)B(Y,W) - B(X,W)B(Y,Z).$$

Dado um referencial ortonormal local $\{E_1,...,E_n\}$ de $\overline{M}$ tal que $\{E_1,...,E_{n-1}\}$ é um referencial ortonormal de M e $E_n = U$, obtemos para todo $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Z) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(X,E_i)Z,E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \overline{R}(X,E_i)Z,E_i\right\rangle + B(X,Z)B(E_i,E_i) - B(X,E_i)B(Z,E_i) \\
&= \overline{\mathrm{Ric}}(X,Z) - \left\langle \overline{R}(X,U)Z,U\right\rangle + HB(X,Z) - \sum_{i=1}^{n-1} B(X,E_i)B(Z,E_i).
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{Ric}(E_j,E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \overline{\mathrm{Ric}}(E_j,E_j) - \sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \overline{R}(E_j,U)E_j,U\right\rangle + H\sum_{j=1}^{n-1} B(E_j,E_j) - \sum_{i,j=1}^{n-1} B(E_i,E_j)^2 \\
&= \overline{S} - \overline{\mathrm{Ric}}(U,U) - \overline{\mathrm{Ric}}(U,U) + \left\langle \overline{R}(U,U)U,U\right\rangle + H^2 - \|B\|^2 \\
&= \overline{S} - 2\,\overline{\mathrm{Ric}}(U,U) + H^2 - \|B\|^2. \quad \square
\end{aligned}$$

2.4.4.2 A Equação de Codazzi

Definição 2.47. A **conexão normal** de M é a função $\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ definida como

$$\nabla^{\perp}_X Z = (\widetilde{\nabla}_X Z)^{\perp}.$$

A expressão definida acima é chamada de **derivada covariante normal** de Y com respeito à X.

Segue diretamente da definição que as seguintes propriedades valem:

Proposição 2.48. As seguintes propriedades valem:

1. $\nabla^\perp$ é $C^\infty(M)$-linear na primeira coordenada e $\mathbb{R}$-linear na segunda;
2. $\nabla^\perp_X(fY) = Xf \cdot Y + f\nabla^\perp_X Y$;
3. $X\langle Y, Z\rangle = \left\langle \nabla^\perp_X Y, Z\right\rangle + \left\langle Y, \nabla^\perp_X Z\right\rangle$.

Teorema 2.49 (Equação de Codazzi)**.** Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\left(\overline{R}(X,Y)Z\right)^\perp = -(\overline{\nabla}_X II)(Y,Z) + (\overline{\nabla}_Y II)(X,Z),$$

onde $(\overline{\nabla}_X II)(Y,Z) := \nabla^\perp_X(II(Y,Z)) - II(\nabla_X Y, Z) - II(Y, \nabla_X Z)$.

Demonstração. A demonstação é a mesma do caso Riemanniano. Para mais informações, veja a Proposição 33 do Capítulo 4 de (O'NEILL, 1983). □

2.4.5 Primeira e segunda variações do volume

Nesta subseção, deduziremos duas equações importantes sobre superfícies mínimas de uma **variedade Riemanniana** $(\overline{M}^3, g)$ que serão utilizadas no Capítulo 3. A principal referência desta subseção é o apêndice de (BRAY, 1997).

Começaremos com algumas definições:

Definição 2.50. Seja M uma superfície compacta sem bordo de $\overline{M}$. Dizemos que $F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$ é uma **variação normal de** M se:

1. $F(p, 0) = p$, para todo $p \in M$,
2. $M_t := \{F(p,t) \in \overline{M}; p \in M\}$ é uma família suave de superfícies;
3. O vetor $\dfrac{\partial F}{\partial t}(p,t)$ é perpendicular à M_t em $F(p,t)$.

Seja $n(p,t)$ o vetor unitário à M_t em $F(p,t)$ que aponta para fora. Então,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p,t) = \eta(p,t)n(p,t),$$

para alguma função real $\eta : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. Chamamos a função η de **taxa de fluxo**.

Observação 2.51. Dada qualquer função $\eta : M \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, podemos obter um $\varepsilon < \delta$ e uma variação $F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$ satisfazendo a identidade acima.

Teorema 2.52. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, seja dV_t a forma de volume em M_t, $B(t)$ a segunda forma fundamental de M_t em $\overline{M}$ e $H(t) := \operatorname{tr}_g(B(t))$ a curvatura média de M_t. Então,

1. $\dfrac{\partial}{\partial t} dV_t = H\eta\, dV_t$;

2. $\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\Delta_{M_t}\eta - \eta \|B\|^2_{\overline{M}} - \eta \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(n,n)$, onde

$$\|B\|^2_{\overline{M}} = \sum_{i,j} B^{ij} B_{ij}.$$

Demonstração. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ uma parametrização local de M. Então, podemos definir uma parametrização local de $\overline{M}$ da seguinte forma: defina $\overline{\phi} : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^3 \to \overline{M}$, onde $\overline{\phi}(x^1, x^2, t) := F(\phi(x^1, x^2), t)$.

Seja $\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ e defina a seguinte matriz quadrada g de ordem 2:

$$g_{ij}(t) = g_{ij}(x^1, x^2; t) := \langle \partial_i, \partial_j \rangle_{\overline{M}},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o *pullback* da métrica de $\overline{M}$ via aplicação $\overline{\phi} : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$. Então, $g(t) = (g_{ij}(t))$ é a métrica em uma vizinhança de M_t tal que

$$dV_t(x^1, x^2) = \sqrt{\det(g(t))}\, dx^1 \wedge dx^2.$$

Então, segue da fórmula

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det A) = (\det A) \operatorname{tr}\left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial t}\right),$$

que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} dV_t &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\det(g(t))}\right) dx^1 \wedge dx^2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det(g(t))}} \det(g(t)) \operatorname{tr}\left(g(t)^{-1} \frac{\partial g}{\partial t}\right) dx^1 \wedge dx^2 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\det(g(t))} \operatorname{tr}\left(g(t)^{-1} \frac{\partial g}{\partial t}\right) dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned}$$

Além disso, como a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$, $\overline{\nabla}$, não tem torção e $\langle n, \partial_i \rangle_{\overline{M}} = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \partial_i, \partial_j \rangle_{\overline{M}} = \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_i, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \partial_i, \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_i \right\rangle_{\overline{M}} \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} \partial_t, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \partial_i, \overline{\nabla}_{\partial_i} \partial_t \right\rangle_{\overline{M}} \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} (\eta n), \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \partial_i, \overline{\nabla}_{\partial_j} (\eta n) \right\rangle_{\overline{M}} \\
&= \eta \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \eta \left\langle \partial_i, \overline{\nabla}_{\partial_j} n \right\rangle_{\overline{M}}.
\end{aligned}$$

Como os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por $B_{ij}(t) = \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \partial_j \right\rangle$ são simétricos, segue que $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial t} = 2\eta B_{ij}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} dV_t &= \frac{1}{2}\sqrt{\det(g)}\,\mathrm{tr}\left(g^{-1}\frac{\partial g}{\partial t}\right) dx^1 \wedge dx^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(2\eta g^{-1} B\right) dV_t \\ &= \mathrm{tr}\left(g^{-1}B\right)\eta dV_t = H\eta dV_t, \end{aligned}$$

o que prova a).

Agora provaremos b). Como $H = \sum_{i,j} g^{ij} B_{ij} = \mathrm{tr}_g\, B$ e

$$\frac{\partial}{\partial t}(AA^{-1}) = \frac{\partial A}{\partial t}A^{-1} + A\frac{\partial A^{-1}}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial A^{-1}}{\partial t} = -A^{-1}\frac{\partial A}{\partial t}A^{-1},$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \sum_{i,j} \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} B_{ij} + g^{ij}\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} - \sum_{i,j,k,l} g^{ij}\frac{\partial g_{jk}}{\partial t} g^{kl} B_{li} \\ &= \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} - \sum_{i,j,k,l} 2\eta g^{ij} B_{jk} g^{kl} B_{li} = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} - 2\eta\sum_{i,l} B^{il} B_{il} \\ &= \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} - 2\eta \|B\|^2_{\overline{M}}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} = \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_t}\overline{\nabla}_{\partial_i} n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_j \right\rangle_{\overline{M}} \\ &= \left\langle \overline{R}(\partial_i, \partial_t)n + \overline{\nabla}_{\partial_i}\overline{\nabla}_{\partial_t} n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_j \right\rangle_{\overline{M}} \\ &= -\left\langle \overline{R}(\partial_t, \partial_i)n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i}\overline{\nabla}_{\partial_t} n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_j \right\rangle_{\overline{M}} \\ &= -\eta\left\langle \overline{R}(n, \partial_i)n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i}\overline{\nabla}_{\partial_t} n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \overline{\nabla}_{\partial_j}\partial_t \right\rangle_{\overline{M}}, \end{aligned}$$

onde $\overline{R}$ é o tensor de curvatura de $\overline{M}$.

Agora, note que $\overline{\nabla}_{\partial_t} n = -\,\mathrm{grad}_{M_t}\,\eta$. De fato,

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} n, \partial_i \right\rangle_{\overline{M}} &= \partial_t \left\langle n, \partial_i \right\rangle_{\overline{M}} - \left\langle n, \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_i \right\rangle_{\overline{M}} = -\left\langle n, \overline{\nabla}_{\partial_i}(\eta n) \right\rangle_{\overline{M}} \\ &= -\left\langle n, (\partial_i \eta) n + \eta\overline{\nabla}_{\partial_i} n \right\rangle_{\overline{M}} = -\partial_i\eta - \eta\left\langle n, \overline{\nabla}_{\partial_i} n \right\rangle_{\overline{M}} \\ &= -\partial_i\eta - \frac{\eta}{2}\partial_i\left\langle n, n \right\rangle = -\partial_i\eta, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} &= -\eta\left\langle \overline{R}(n, \partial_i)n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i}\overline{\nabla}_{\partial_t} n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \overline{\nabla}_{\partial_j}\partial_t \right\rangle_{\overline{M}} \\ &= -\eta\left\langle \overline{R}(n, \partial_i)n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} - \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i}\,\mathrm{grad}_{M_t}\,\eta, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \overline{\nabla}_{\partial_j}(\eta n) \right\rangle_{\overline{M}} \\ &= -\eta\left\langle \overline{R}(n, \partial_i)n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} - \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i}\,\mathrm{grad}_{M_t}\,\eta, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, (\partial_j\eta)n + \eta\overline{\nabla}_{\partial_j} n \right\rangle_{\overline{M}}. \end{aligned}$$

Como $\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, n \rangle_{\overline{M}} = 0$,

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} = -\eta \left\langle \overline{R}(n, \partial_i)n, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} - \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} \operatorname{grad}_{M_t} \eta, \partial_j \right\rangle_{\overline{M}} + \eta \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \overline{\nabla}_{\partial_j} n \right\rangle_{\overline{M}}.$$

Além disso,

$$\sum_{i,j} g^{ij} \left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i} n, \overline{\nabla}_{\partial_j} n \right\rangle_{\overline{M}} = \sum_{i,j} B^{ij} B_{ij} = \|B\|^2_{\overline{M}}.$$

Portanto,

$$\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} = -\eta \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(n,n) - \Delta_{M_t} \eta + \eta \|B\|^2_{\overline{M}}$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\eta \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(n,n) - \Delta_{M_t} \eta - \eta \|B\|^2_{\overline{M}},$$

como queríamos demonstrar. □

2.5 Existência de métricas Lorentzianas e orientação temporal

2.5.1 Orientação temporal

Lembremos que, para cada $p \in M$, o espaço tangente (T_pM, g_p) é um espaço vetorial Lorentziano que possui dois cones tipo tempo. Além disso, podemos escolher um dos dois cones e definir uma orientação temporal. Podemos definir uma noção análoga para variedades Lorentzianas.

Definição 2.53. Uma **orientação temporal** (em inglês, *time orientation*) em uma variedade Lorentziana (M, g) é uma aplicação τ que, para cada $p \in M$, é escolhido um cone tipo tempo $\tau_p \subset T_pM$. Além disso, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança aberta U_p de p e um campo vetorial tipo tempo $X \in \mathfrak{X}(U_p)$ tal que $X_q \in \tau_q$ para todo $q \in U_p$.

Na definição acima, o cone τ_p escolhido é chamado de **futuro** em p e o outro é chamado de **passado**. Uma variedade Lorentziana que admite uma orientação temporal é dita **orientável pelo tempo** (em inglês, *time orientable*). Podemos caracterizar o conceito de orientação temporal com a seguinte proposição:

Observação 2.54. A noção de orientabilidade temporal fica inalterada quando se substitui cones tipo tempo por cones causais.

Proposição 2.55. Uma variedade Lorentziana (M, g) é orientável pelo tempo se, e somente se admite globalmente um campo vetorial tipo tempo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Suponha que (M, g) admite um campo vetorial tipo tempo globalmente definido. Então, para cada $p \in M$, basta escolher o cone tipo tempo $\tau_p \subset T_pM$ tal que $X_p \in \tau_p$.

Agora suponha que (M, g) seja uma variedade orientável pelo tempo e fixe uma orientação τ em M. Tome U_p a vizinhança de um ponto $p \in M$ e $X \in \mathfrak{X}(U_p)$ obtidas pela definição. Seja $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma partição da unidade subordinada a uma subcobertura enumerável $\{U_i := U_{p_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ da cobertura $\{U_p\}_{p\in M}$. Defina $X := \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i X_i$, onde $X_i \in \mathfrak{X}(U_i)$. Então, X é um campo vetorial tipo tempo globalmente definido em M. □

Observação 2.56. O conceito de orientabilidade pelo tempo possui alguns paralelos com a noção de orientabilidade de uma variedade como, por exemplo:

1. Se (M, g) é uma variedade orientável pelo tempo, então M possui exatamente 2^k orientações pelo tempo diferentes, onde k é o número de componentes conexas de M;

2. Todo recobrimento Lorentziano $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ de (M, g) será orientável pelo tempo;

3. Se (M, g) não é orientável pelo tempo, então M admite um recobrimento Lorentziano orientável pelo tempo $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ de duas folhas.

Entretanto, os conceitos são completamente independentes (isto é, existem exemplos de variedades orientáveis e orientáveis pelo tempo, orientáveis e não orientáveis pelo tempo, não orientáveis e orientáveis pelo tempo e não orientáveis e não orientáveis pelo tempo). Para mais informações, veja (VICTORIA; CAJA, 2010; CHOQUET-BRUHAT, 2009).

2.5.2 Existência de métricas Lorentzianas

Sabemos que toda variedade diferenciável paracompacta M admite uma métrica Riemanniana g. Uma das questões mais naturais é obter um resultado análogo para o caso Lorentziano.

Lema 2.57. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores tal que $X(p) \neq 0$ para todo $p \in M$ e g uma métrica Riemanniana em M. Defina $\overline{g}$ como

$$\overline{g} := g - \frac{2}{\langle X, X\rangle}(X^* \otimes X^*).$$

Então, h é uma métrica Lorentziana em M.

Demonstração. Como (M, g) é uma variedade Riemanniana, podemos para cada $p \in M$ decompor o espaço tangente em $T_pM = \operatorname{span}\{X(p)\} \oplus \operatorname{span}\{X(p)\}^{\perp}$.

Agora note que, para $p \in M$,

$$\begin{aligned}\overline{g}(X, X) \quad &:= \quad \langle X, X\rangle - \frac{2}{\langle X, X\rangle}(X^* \otimes X^*)(X, X) = \langle X, X\rangle - 2\frac{\langle X, X\rangle^2}{\langle X, X\rangle} \\ &= \quad -\langle X, X\rangle,\end{aligned}$$

para $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ortogonal a X em p, $\overline{g}(Y,Y) = \langle Y, Y \rangle$. Além disso, para $Y, Z \in \mathbb{X}(M)$ com $\langle Y, Z \rangle = 0$ (podemos supor, sem perda de generalidade $Y = X$ e $Z \in \operatorname{span}\{X\}$),

$$\overline{g}(Y,Z) = \langle Y, Z \rangle - \frac{2}{\langle Y, Y \rangle}(Y^* \otimes Y^*)(Y,Z) = \langle Y, Z \rangle - 2\frac{\langle Y, Y \rangle \langle Y, Z \rangle}{\langle Y, Y \rangle} = \langle Y, Z \rangle . \quad \square$$

Como consequência da Proposição 2.55 e do resultado anterior, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.58. *M admite uma métrica Lorentziana se, e somente se, existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) \neq 0$ para todo $p \in M$.*

Observação 2.59. Dada uma variedade Lorentziana $(M, \overline{g})$ e um campo vetorial unitário tipo tempo $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos definir uma métrica Riemanniana g adaptada à $\overline{g}$ da seguinte forma:

$$g := \overline{g} + 2\,(X^* \otimes X^*)\,.$$

Utilizando alguns conceitos de Topologia Algébrica podemos responder completamente a questão de existência de métricas Lorentzianas em uma variedade diferenciável.

Teorema 2.60. *Seja M uma variedade diferenciável conexa. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *M admite uma métrica Lorentziana;*
2. *M admite uma métrica Lorentziana orientável pelo tempo;*
3. *M admite um campo vetorial que nunca se anula;*
4. *M é não compacta ou a sua característica de Euler $\chi(M)$, é igual a 0.*

Demonstração. É fácil ver que b) implica a) e segue do Lema 2.57 que c) implica b). As afirmações c) e d) são equivalentes (para mais informações, veja (VICK, 1973)).

Agora suponha que a) seja válida e que M seja compacta. Se M for orientável pelo tempo, pela Proposição 2.55, podemos obter um campo vetorial que não se anula em nenhum ponto e, portanto $\chi(M) = 0$. Caso M não admita uma orientação temporal, o seu recobrimento duplo $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ possuirá característica de Euler $\chi(\widetilde{M}) = 0$. Como o recobrimento possui duas folhas, segue que $\chi(\widetilde{M}) = 2\chi(M)$ e, portanto, $\chi(M) = 0$. $\square$

3 Um pouco de Relatividade Geral

Neste capítulo, falaremos sobre alguns conceitos e resultados principais sobre Relatividade que serão utilizados no Capítulo 3. A principal referência para este capítulo são os livros (CHOQUET-BRUHAT, 2009; WALD, 1984). Para as equações de vínculo de Einstein, uma boa referência é (BARTNIK; ISENBERG, 2004).

3.1 Espaços-tempo e as equações de Einstein

3.1.1 Definições e propriedades básicas

Definição 3.1. Seja (M^{n+1}, g) uma variedade semi-Riemanniana. Definimos o tensor de Einstein como

$$G = \operatorname{Ric} - \frac{1}{2} S g,$$

onde Ric é o tensor de Ricci de g e S é a sua curvatura escalar.

Observação 3.2. Dado o tensor de Ricci, podemos obter o tensor de Einstein G e vice-versa. De fato,

$$\operatorname{tr}_g G = \operatorname{tr}_g \operatorname{Ric} - \frac{S}{2} \operatorname{tr}_g g = S - \frac{n+1}{2} S = -\frac{n-1}{2} S.$$

Portanto, $\operatorname{Ric} = G + \frac{S}{2} g = G - \frac{\operatorname{tr}_g G}{n-1} g$. Reciprocamente,

$$S = \operatorname{tr}_g \operatorname{Ric} = \operatorname{tr}_g G - \frac{n+1}{n-1} \operatorname{tr}_g G = -\frac{2}{n-1} \operatorname{tr}_g G.$$

Portanto, $G = \operatorname{Ric} + \frac{\operatorname{tr}_g G}{n-1} g = \operatorname{Ric} - \frac{S}{2} g$.

Proposição 3.3. $\operatorname{div} G = 0$.

Demonstração. Como, para todo $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(Sg))_i &= \sum_{j,k} g^{jk} (\nabla_{\partial_k}(Sg))(\partial_i, \partial_j) \\
&= \sum_{j,k} g^{jk} (\partial_k(Sg(\partial_i, \partial_j)) - Sg(\nabla_{\partial_k}\partial_i, \partial_j) - Sg(\partial_i, \nabla_{\partial_k}\partial_j)) \\
&= \sum_{j,k} g^{jk} (g_{ij}\partial_k S + S(\partial_k g_{ij} - g(\nabla_{\partial_k}\partial_i, \partial_j) - g(\partial_i, \nabla_{\partial_k}\partial_j)) \\
&= \sum_{j} \delta_i^k \partial_k S = \partial_i S,
\end{aligned}$$

segue que $\operatorname{div}(Sg) = dS$ e $\operatorname{div} T = \operatorname{div}\left(\operatorname{Ric} - \frac{1}{2} Sg\right) = \frac{1}{2} dS - \frac{1}{2} dS = 0.$ □

As equações (escritas em notação tensorial)

$$G = \operatorname{Ric} - \frac{1}{2} S g = T,$$

onde $T \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ são chamadas de **equações de Einstein**.

Definição 3.4.
1. Um **espaço-tempo** é um par (M, g), onde M é uma variedade diferenciável conexa e g é uma métrica Lorentziana em M;

2. Diremos que (M, g) é um **espaço-tempo Einsteiniano** se, dado um tensor $T \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ simétrico com $\operatorname{div} T = 0$, g satisfaz as equações de Einstein em M;

3. Diremos que (M, g) é um **solução do vácuo** (em inglês, *vacuum solution* ou *vacuum spacetime*) se $T = 0$.

Em Física, o tensor T é chamado de **tensor de energia-momento** (em inglês, *stress-energy tensor*). O tensor de energia-momento expressa, em notação tensorial, a densidade e o fluxo de energia e momento em um espaço-tempo.

Pela Observação 3.2, dizer que g é uma solução de Einstein no vácuo é equivalente a dizer que $T = 0$, o que condiz com o seu significado físico. De fato, se $\operatorname{Ric} = 0$, então $T = 0$. Reciprocamente, se $T = 0$, então

$$\operatorname{Ric} = \frac{S}{2} g \Longrightarrow S = \operatorname{tr}_g \operatorname{Ric} = \frac{S}{2} \operatorname{tr}_g g = \frac{n}{2} S \Longrightarrow S = 0 \Longrightarrow \operatorname{Ric} = 0.$$

Definição 3.5. Dizemos que o tensor de energia-momento $T \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ satisfaz a

1. **condição de energia fraca** (em inglês, *weak energy condition*) se $T(X, X) \geq 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo tempo;

2. **condição de energia forte** (em inglês, *strong energy condition*) ou **condição de positividade de Ricci** se $\rho(X, X) \geq 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\rho = T - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}_g T) g$;

3. **condição de energia dominante** (em inglês, *dominant energy condition*) se T é tal que $-(T(X, \cdot))_* \in \mathfrak{X}(M)$ é causal e aponta para o futuro para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo tempo que aponta para o futuro.

3.1.2 O espaço-tempo de Schwarzschild

Definição 3.6. Dizemos que um espaço-tempo (M, g) é **estacionário** se admite um grupo a 1-parâmetro de isometrias $\{\phi_t\}_t \cong \mathbb{R}$ com campo de Killing X tipo tempo cujas órbitas são difeomorfas a $\mathbb{R}$ e que geram M.

A definição acima diz que um espaço-tempo é estacionário se, e somente se, $M = M_0 \times \mathbb{R}$ e, para cada $t \in \mathbb{R}$, $M_0 \times \{t\}$ é uma subvariedade tipo espaço e o campo de Killing X pode ser representado como ∂_t. Em um sistema de coordenadas adaptado, podemos escrever a métrica g como

$$g = -\psi^2(dt + a)^2 + g_0,$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é a coordenada na órbita de $X = \partial_t$, $\psi \in C^\infty(M_0)$, $a \in \mathfrak{X}^*(M_0)$ e g_0 é uma métrica Riemanniana em M_0. Em coordenadas locais $(x^1, ..., x^n)$ em M_0, podemos escrever $a = \sum_i a_i dx^i$ e $g_0 = \sum_{i,j} (g_0)_{ij} dx^i dx^j$, onde todos os coeficientes não dependem de t.

Definição 3.7. Dizemos que um espaço-tempo estacionário M é **estático** se as órbitas são ortogonais às subvariedades $M_0 \times \{t\}$.

Segue da definição acima que, se M for estático, podemos escrever a métrica como $g = -\psi^2 dt^2 + g_0$, onde g_0 é uma métrica Riemanniana em M_0.

Observação 3.8. Espaços-tempo estáticos são invariantes pela aplicação $t \mapsto -t$.

Espaços-tempo estáticos são considerados quando se quer representar situações de equilíbrio enquanto espaços-tempo estacionários modelam movimentos permanentes. Ambos os casos possuem um papel importante na dinâmica relativística.

A seguir, mostraremos um critério simples para verificar se um espaço-tempo estacionário é estático.

Proposição 3.9. Um espaço-tempo estacionário é estático se a é uma 1-forma exata, isto é, $a = d\phi$, para alguma função $\phi \in C^\infty(M_0)$.

Demonstração. Suponha que podemos escrever $a = d\phi$ para alguma $\phi \in C^\infty(M_0)$ e considere $\tilde{t} = t + \phi$. Então,

$$g = -\psi^2(dt + a)^2 + g_0 = -\psi^2(d(t + \phi))^2 + g_0 = -\psi^2\, d\tilde{t}^2 + g_0,$$

o que prova o resultado. $\square$

Até o final da seção, iremos supor que o espaço-tempo possui dimensão $3 + 1 = 4$.

Definição 3.10. Dizemos que uma variedade Riemanniana (M, g) é **esfericamente simétrica** se:

1. A variedade M é representada por uma carta (U, Φ) tal que $\Phi(U) = \mathbb{R}^3$ ou $\Phi(U) = \mathbb{R}^3 \backslash B$, onde B é uma bola fechada centrada em algum ponto $p \in \mathbb{R}^3$ e as coordenadas

(ρ, θ, ϕ) em $\Phi(U)$ se relacionam com as coordenadas cartesianas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= \rho \sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= \rho \cos(\theta). \end{aligned}$$

2. Em $\Phi(U)$, g pode ser escrita como

$$e^{h(\rho)} d\rho^2 + f(\rho)^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2),$$

onde $(\rho, \theta, \phi) \in (\rho_0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ e $\rho_0 > 0$ é uma constante.

Podemos interpretar $\Phi(U)$ como uma folheação de esferas euclidianas de raio $\rho = \rho_0$ constante centradas em p cuja área, na métrica g, é

$$A(\rho) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{|\det(g)|}\, d\phi\, d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{f(\rho)^4 \sin(\theta)^2}\, d\phi\, d\theta = 4\pi f(\rho)^2.$$

A métrica g é a forma geral de uma métrica invariante por rotação em $\mathbb{R}^3$ centradas em p. Quando $B = \emptyset$, a métrica é definida em todo o $\mathbb{R}^3$.

A escolha da coordenada $r = f(\rho)$ é dita a escolha padrão, e é admissível se e somente se f for uma função crescente em ρ. O número $r_0 = f(\rho_0)$ corresponde ao raio da bola B.

Definição 3.11. Seja (M, g) um espaço-tempo, onde $M \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Suponha que os subconjuntos $M_t := \{(x, t) \in M; x \in \mathbb{R}^3\}$, com $t \in \mathbb{R}$ fixado, sejam subvariedades tipo espaço, e denote g_t a métrica Riemanniana induzida por g em M_t. Além disso, suponha que as trajetórias dos vetores ∂_t são tipo tempo. Dizemos que (M, g) é **esfericamente simétrico** se:

1. Cada variedade M_t pode ser representada como $\mathbb{R}_3 \backslash B_t$, onde B_t é uma bola fechada centrada na origem (cada subvariedade (M_t, g_t) é esfericamente simétrica) e, em $\mathbb{R}^3 \backslash B_t$,
$$g_t = e^{\lambda(r,t)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2).$$

2. Para cada t, o g-comprimento e o representante da projeção do vetor tangente ∂_t à linha temporal em M_t são invariantes pelo grupo de rotação definido acima.

Lema 3.12. Um espaço-tempo esfericamente simétrico (M, g) admite uma métrica da forma

$$g = -e^{\nu} dt^2 + e^{\lambda} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2),$$

onde λ e ν são funções que dependem apenas de t e r.

Demonstração. Primeiramente, note que uma função em $\mathbb{R}^3 \backslash B_t$ invariante sobre o grupo de rotações dado depende apenas de r e de t. Além disso, um campo de vetores invariante por este grupo é tangente às linhas radiais e a sua norma depende apenas de r, para cada t. Portanto, pela definição acima,

$$g = -a(t,r)^2 dt^2 + 2b(t,r)dtdr + e^{\overline{\lambda}(t,r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2).$$

Defina a 1-forma $\omega := a\,dt - \dfrac{b}{a}\,dr$ e considere ν uma função que depende de r e t tal que

$$e^{-\nu/2}\,\omega = e^{-\nu/2}\left(a\,dt - \frac{b}{a}\,dr\right)$$

é uma forma exata, isto é, existe uma função $\tau : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que

$$d\tau = e^{-\nu/2}\,\omega = e^{-\nu/2}\left(a\,dt - \frac{b}{a}\,dr\right) \iff \begin{cases} e^{-\nu/2}a = \dfrac{\partial \tau}{\partial t} \\ -e^{-\nu/2}\dfrac{b}{a} = \dfrac{\partial \tau}{\partial r} \end{cases} \iff a^2\frac{\partial \tau}{\partial r} + b\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Resolvendo a EDP acima, obtemos τ e ν, ambos dependendo de t e r. Portanto,

$$\begin{aligned} g &= -a^2\,dt^2 + 2b\,dt\,dr + e^{\lambda}\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2\,d\phi^2) \\ &= -(a^2\,dt^2 - 2b\,dt\,dr + a^{-2}b^2\,dr^2) + a^{-2}b^2\,dr^2 + e^{\overline{\lambda}}\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2\,d\phi^2) \\ &= -\left(a\,dt - \frac{b}{a}\,dr\right)^2 + \left(\frac{b^2}{a^2} + e^{\overline{\lambda}}\right)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2\,d\phi^2) \\ &= -e^{\nu}\,d\tau^2 + e^{\lambda}\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2\,d\phi^2), \end{aligned}$$

onde $e^{\lambda} = \dfrac{b^2}{a^2} + e^{\overline{\lambda}}$.

Renomeando τ como t, obtemos o resultado. □

Teorema 3.13. Uma métrica esfericamente simétrica g é uma solução das equações de Einstein no vácuo se, e somente se, g é a métrica de Schwarzschild, que, em coordenadas padrão, é escrita como

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2).$$

Demonstração. Seja $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$ e denote $\cdot$ e $'$ as derivações em relação à t e r, respectivamente. Como g é esfericamente simétrica,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin(\theta)^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (g^{ij}) = \begin{pmatrix} -e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin(\theta)^{-2} \end{pmatrix}.$$

Portanto, segue da fórmula

$$\Gamma_{ij}^{k} = \sum_{l=0}^{3} \frac{g^{kl}}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = \frac{g^{kk}}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

que os únicos símbolos de Christoffel não nulos são:

$$\begin{array}{cccc}
\Gamma_{00}^{0} = \frac{\dot{\nu}}{2} & \Gamma_{00}^{1} = e^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{2} & \Gamma_{01}^{0} = \frac{\nu'}{2} & \Gamma_{01}^{1} = \frac{\dot{\lambda}}{2} \\
\Gamma_{11}^{0} = e^{\lambda-\nu}\frac{\dot{\lambda}}{2} & \Gamma_{11}^{1} = \frac{\lambda'}{2} & \Gamma_{12}^{2} = r^{-1} & \Gamma_{13}^{3} = r^{-1} \\
\Gamma_{22}^{1} = -re^{-\lambda} & \Gamma_{23}^{3} = \cot(\theta) & \Gamma_{33}^{1} = -re^{-\lambda}\sin(\theta)^2 & \Gamma_{33}^{2} = -\cos(\theta)\sin(\theta).
\end{array}$$

Além disso, as componentes não triviais do tensor de Ricci, são:

$$\begin{aligned}
r_{00} &= \frac{e^{\nu-\lambda}\nu'}{r} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} + \frac{e^{\nu-\lambda}\nu'\lambda'}{4} + \frac{e^{\nu-\lambda}(\nu-\lambda)'\nu'}{2} + \frac{e^{\nu-\lambda}\nu''}{2} - \frac{e^{\nu-\lambda}(\nu')^2}{4} \\
r_{01} &= r^{-1}\dot{\lambda} \\
r_{11} &= \frac{\lambda'}{r} + \frac{e^{\lambda-\nu}\ddot{\lambda}}{2} - \frac{e^{\lambda-\nu}\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{e^{\lambda-\nu}\dot{\lambda}(\dot{\lambda}-\dot{\nu})}{2} + \frac{e^{\lambda-\nu}\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu''}{2} - \frac{(\nu')^2}{4} \\
r_{22} &= -e^{-\lambda}\left(1 + \frac{r}{2}(\nu'-\lambda')\right) + 1 \\
r_{33} &= r_{22}\sin(\theta)^2.
\end{aligned}$$

Como g é uma solução das equações de Einstein no vácuo ($r_{ij} = 0$ para todo i, j), segue que $\dot{\lambda} = 0$ e, portanto, λ é uma função que depende apenas de r. Além disso,

$$0 = \dot{r}_{22} = -e^{-\lambda}\frac{r\dot{\nu}'}{2} \Longrightarrow \dot{\nu}' = 0,$$

o que implica que $\nu(r,t) = v(r) + f(t)$, onde v e f são funções suaves.

Defina $\tau = \int e^{f(t)/2}\,dt$. Como $\frac{d\tau}{dt} = e^{f(t)/2} > 0$ e

$$e^{\nu}dt^2 = e^{v}e^{f}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 d\tau^2 = e^{v}e^{f}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-2} d\tau^2 = e^{v}d\tau^2,$$

podemos escrever a métrica como

$$g = -e^{v}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2),$$

onde v não depende de t.

Logo, podemos reescrever r_{00} e r_{11} como

$$\begin{aligned}
r_{00} &= e^{v-\lambda}\left(\frac{v'}{r} - \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{(v')^2}{4} + \frac{v''}{2}\right) \\
r_{11} &= \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'\lambda'}{4} - \frac{v''}{2} - \frac{(v')^2}{4}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= r(e^{\lambda - v} r_{00} + r_{11}) \\ &= r\left(\frac{v'}{r} - \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{(v')^2}{4} + \frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'\lambda'}{4} - \frac{v''}{2} - \frac{(v')^2}{4}\right) \\ &= v' + \lambda' \end{aligned}$$

e

$$v = -\lambda + C, \text{ com } C \in \mathbb{R} \Longrightarrow e^v = e^C e^{-\lambda} = Be^{-\lambda},$$

onde $B > 0$.

Como $r_{22} = 0$,

$$\begin{aligned} -e^{\lambda}(1 - r\lambda') + 1 = 0 &\Longrightarrow e^{-\lambda} + r(e^{-\lambda})' = 1 \\ &\Longrightarrow (e^{-\lambda})' + \frac{e^{-\lambda}}{r} = \frac{1}{r} \\ &\Longrightarrow \frac{d}{dr}(re^{-\lambda}) = r(e^{-\lambda})' + e^{-\lambda} = 1 \\ &\Longrightarrow e^{-\lambda} = 1 + \frac{A}{r}. \end{aligned}$$

Defina $m > 0$ de tal forma que $A = -2m$ e, fazendo uma escala na coordenada t, podemos escolher $B = 1$. Portanto,

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2),$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 3.14. Fisicamente, a métrica de Schwarzschild é um modelo simplificado de um sistema isolado com um buraco negro de massa m. O conceito de buraco negro em um espaço-tempo será definido mais adiante no texto.

Durante a demonstração acima, obtemos um resultado importante sobre a solução das equações de Einstein no vácuo conhecido como **Teorema de Birkhoff**.

Teorema 3.15 (Birkhoff)**.** Um espaço-tempo suave esfericamente simétrico que é solução da equação de Einstein no vácuo é necessariamente estático.

Observação 3.16. Os *slices* de M, isto é, as subvariedades de M obtidas quando t é constante, são conformemente planos. Para observar isso, introduza uma nova variável $\tilde{r}$ tal que r dependa de $\tilde{r}$. Então,

$$dr = \frac{dr}{d\tilde{r}} d\tilde{r} \Longrightarrow dr^2 = \left(\frac{dr}{d\tilde{r}}\right)^2 d\tilde{r}^2$$

e

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tilde{r}}\right)^2 d\tilde{r}^2 + \left(\frac{r}{\tilde{r}}\right)^2 \tilde{r}^2 g_{\mathbb{S}^2},$$

onde $g_{\mathbb{S}^2} := d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2$ é a métrica usual de $\mathbb{S}^2$. Portanto, os slices são conformemente planos se, e somente se,

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tilde{r}}\right)^2 = \left(\frac{r}{\tilde{r}}\right)^2 \implies \frac{dr}{d\tilde{r}} = \frac{r}{\tilde{r}}\left(\frac{r-2m}{r}\right)^{1/2} = \frac{(r^2-2mr)^{1/2}}{\tilde{r}}$$
$$\implies \int \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}} = \int \frac{dr}{\sqrt{r^2-2mr}} = \int \frac{dr}{\sqrt{(r-m)^2-m^2}}.$$

Defina w tal que $r - m = m\cosh(w)$. Então, $dr = m\sinh(w)dw$ e

$$\int \frac{dr}{\sqrt{(r-m)^2-m^2}} = \int \frac{m\sinh(w)}{\sqrt{m^2(\cosh(w)^2-1)}}\,dw = \int dw.$$

Portanto, $w = \log(\tilde{r}) + \tilde{C}$ e, consequentemente, $e^w = C\tilde{r}$, onde C é uma constante real. Então,

$$r = m + m\cosh(w) = m + \frac{m}{2}\left(C\tilde{r} + \frac{1}{C\tilde{r}}\right) \implies \frac{r}{\tilde{r}} = \frac{m}{\tilde{r}} + \frac{mC}{2} + \frac{m}{2C\tilde{r}^2}.$$

Tomando $C = \dfrac{2}{m}$, obtemos

$$\frac{r}{\tilde{r}} = \frac{2m}{2r} + 1 + \frac{m^2}{4\tilde{r}^2} = \left(1+\frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2 \implies r = \tilde{r}\left(1+\frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2.$$

Logo,

$$1-\frac{2m}{r} = 1-\frac{2m}{\tilde{r}}\left(1+\frac{m}{2\tilde{r}}\right)^{-2} = 1-\frac{2m}{\tilde{r}}\frac{4\tilde{r}^2}{(2\tilde{r}+m)^2} = \frac{(2\tilde{r}+m)^2-8m\tilde{r}}{(2\tilde{r}+m)^2} = \left(\frac{2\tilde{r}-m}{2\tilde{r}+m}\right)^2$$

e

$$g = -\left(\frac{2\tilde{r}-m}{2\tilde{r}+m}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{m}{2\tilde{r}}\right)^4\left(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2\left(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2\right)\right).$$

Definindo $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) := \tilde{r}r^{-1}(x,y,z) = (\tilde{r}\sin(\theta)\cos(\phi), \tilde{r}\sin(\theta)\sin(\phi), \tilde{r}\cos(\theta))$, obtemos que $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2 = \tilde{r}^2$ e $d\tilde{x}^2+d\tilde{y}^2+d\tilde{z}^2 = d\tilde{r}^2+\tilde{r}^2\left(d\theta^2+\sin(\theta)^2d\phi^2\right)$. Portanto,

$$g = -\left(\frac{2\tilde{r}-m}{2\tilde{r}+m}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{m}{2\tilde{r}}\right)^4\left(d\tilde{x}^2+d\tilde{y}^2+d\tilde{z}^2\right),$$

como queríamos demonstrar.

3.2 As equações de vínculo de Einstein

Seja $(\overline{M},\overline{g})$ uma variedade Lorentziana e M uma hipersuperfície tipo espaço com métrica Riemanniana induzida g. Seja U um campo vetorial em M tipo tempo definido localmente e considere um tensor $T \in \mathfrak{T}^0_2(\overline{M})$ tal que $(\overline{M},\overline{g})$ satisfaça as equações de Einstein

$$\overline{G} = \overline{\mathrm{Ric}} - \frac{\overline{S}}{2}\overline{g} = T.$$

Defina $\overline{J} := (-T(U,\cdot))_* \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Então,

$$-T(U,\cdot) = \overline{J}^* = \sum_{i,j} \overline{J}^i \overline{g}_{ij} dx^j \implies -T(U,\partial_k) = \sum_i \overline{J}^i \overline{g}_{ik}$$
$$\implies -\sum_k \overline{g}^{kl} T(U,\partial_k) = \sum_{i,k} \overline{J}^i \overline{g}_{ik} \overline{g}^{kl} = \overline{J}^l.$$

Portanto, $\overline{J}^i = -T\left(U, \sum_j \overline{g}^{ij}\partial_j\right)$.

Escreva $\overline{J} = \mu U + J$, onde $J \in \mathfrak{X}(M)$. Então,

$$T(U,U) = -\overline{J}^*(U) = -\left\langle \overline{J}, U\right\rangle = -\mu \langle U,U\rangle = \mu$$

e se $\{E_1,...,E_n\}$ for um referencial ortonormal para TM, então $J = \sum_{i=1}^{3} J^i E_i$ e, para $i \in \{1,...,n\}$,

$$\begin{aligned} T(U,E_i) &= T\left(U, \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}\langle E_i,\partial_k\rangle \partial_j\right) = \sum_{j,k=1}^{n} \langle E_i,\partial_k\rangle_g g^{jk} T(U,\partial_j) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \overline{J}^k \langle E_i,\partial_k\rangle_g = -\left\langle E_i, \overline{J}\right\rangle_{\overline{g}} \\ &= -\left\langle E_i, \mu U + \sum_k J^k E_k \right\rangle_{\overline{g}} = -\sum_{k=1}^{n} J^k \delta_{ik} \\ &= -J_i = -\sum_{k=1}^{n} J^k g_{ik}. \end{aligned}$$

Observação 3.17. Se U apontar para o futuro, segue da condição de energia dominante que $\overline{J}$ é causal e aponta para o futuro. Logo,

$$0 \geq \left\langle \overline{J}, \overline{J}\right\rangle_{\overline{g}} = \langle \mu U + J, \mu U + J\rangle_{\overline{g}} = -\mu^2 + \|J\|_{\overline{g}}^2 \implies \mu \geq \|J\|_g = \left(\sum_{i=1}^{3} J^i J_i\right)^{1/2}.$$

Teorema 3.18. Nas condições acima, valem as seguintes equações em M:

1. $S - \|B\|_g^2 + H^2 = 2\mu$;

2. $\operatorname{div}_g B - d(\operatorname{tr}_g B) = J$.

As equações acima são chamadas de **equações de vínculo** (em inglês, *constraint equations*).

Demonstração. Seja $\{E_1, E_2, E_3\}$ um referencial ortonormal local em M.

1. Aplicando a equação de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \overline{R}(E_i,E_j)E_i,E_j\right\rangle_{\overline{g}} &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle R(E_i,E_j)E_i,E_j\rangle_{\overline{g}} - \langle II(E_j,E_j),II(E_i,E_i)\rangle_{\overline{g}} + \\ &\quad + \langle II(E_i,E_j),II(E_i,E_j)\rangle_{\overline{g}} \\ &= S - \|B\|_g^2 + H^2.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\langle U,U\rangle_{\overline{g}} = -1$, segue que

$$\overline{\mathrm{Ric}}(E_i,E_i) = -\left\langle \overline{R}(E_i,U)E_i,U\right\rangle + \sum_{j=1}^{3}\left\langle \overline{R}(E_i,E_j)E_i,E_j\right\rangle$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \overline{R}(E_i,E_j)E_i,E_j\right\rangle_{\overline{g}} &= \sum_{i=1}^{n}\overline{\mathrm{Ric}}(E_i,E_i) + \left\langle \overline{R}(E_i,U)E_i,U\right\rangle_{\overline{g}} \\ &= \overline{S} + 2\overline{\mathrm{Ric}}(U,U) = 2\left(\overline{\mathrm{Ric}}(U,U) - \frac{1}{2}\overline{S}\overline{g}(U,U)\right) \\ &= 2T(U,U) = 2\mu.\end{aligned}$$

2. Aplicando a equação de Codazzi, obtemos que, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{R}^{\perp}(E_i,X)E_i = \sum_{i=1}^{n} -(\overline{\nabla}_{E_i}II)(X,E_i) + (\overline{\nabla}_X II)(E_i,E_i).$$

Como $\left\langle \overline{R}(U,X)U,U\right\rangle = 0$ e $\left\langle \overline{R}^{\perp}(E_i,X)E_i,U\right\rangle = \left\langle \overline{R}(E_i,X)E_i,U\right\rangle$, segue que

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ric}}(X,U) &= -\left\langle \overline{R}(X,U)U,U\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(X,E_i)U,E_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(E_i,X)E_i,U\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle -(\overline{\nabla}_{E_i}II)(X,E_i) + (\overline{\nabla}_X II)(E_i,E_i),U\right\rangle.\end{aligned}$$

Podemos reescrever o primeiro termo do somatório como

$$\begin{aligned}-(\overline{\nabla}_{E_i}II)(X,E_i) &= -\left(\nabla^{\perp}_{E_i}(II(X,E_i)) - II(\nabla_{E_i}X,E_i) - II(X,\nabla_{E_i}E_i)\right) \\ &= \nabla^{\perp}_{E_i}(B(X,E_i)U) - B(\nabla_{E_i}X,E_i)U - B(X,\nabla_{E_i}E_i)U.\end{aligned}$$

Como $\left\langle \overline{\nabla}_{E_i}U,U\right\rangle = 0$, segue que

$$\nabla^{\perp}_{E_i}(B(X,E_i)U) = (\overline{\nabla}_{E_i}(B(X,E_i)U))^{\perp} = E_i(B(X,E_i))U$$

e

$$-(\overline{\nabla}_{E_i}II)(X,E_i) = E_i(B(X,E_i))U - B(\nabla_{E_i}X,E_i)U - B(X,\nabla_{E_i}E_i)U.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} -(\overline{\nabla}_{E_i} II)(X, E_i) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} B)(X, E_i)U = (\operatorname{div}_g B)(X)U.$$

Para calcular o segundo termo do somatório, assuma que as coordenadas são as coordenadas normais em (M, g) em $p \in M$ e que $\{E_1, ..., E_n\}$ é o referencial obtido do sistema de coordenadas. Então, $(\nabla_X E_i)(p) = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $X \in T_p M$. Como os símbolos de Christoffel são identicamente nulos em p, $d(\operatorname{tr}_g B)\big|_p = d\left(\sum_{i=1}^{n} B(E_i, E_i)\right)\Bigg|_p$, e $\left\langle \overline{\nabla}_X U, U \right\rangle = 0$, segue que, em p:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (\overline{\nabla}_X II)(E_i, E_i) &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_X^{\perp}(II(E_i, E_i)) - 2II(\nabla_{E_i} E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_X^{\perp}(II(E_i, E_i)) = \sum_{i=1}^{n} -X(B(E_i, E_i))U \\
&= -d(\operatorname{tr}_g B)(X)U.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{Ric}}(X, n) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle -(\overline{\nabla}_{E_i} II)(X, E_i) + (\overline{\nabla}_X II)(E_i, E_i), U \right\rangle \\
&= \langle (\operatorname{div}_g B)(X)U - d(\operatorname{tr}_g B)(X)U, U \rangle \\
&= -(\operatorname{div}_g B)(X) + d(\operatorname{tr}_g B)(X).
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $X \perp U$, $\overline{\operatorname{Ric}}(X, U) = T(X, U) = -\langle \mathbb{J}, X \rangle_{\overline{g}} = \langle J, X \rangle_g$. Fazendo $X = E_i$, obtemos o resultado. □

Note que os vínculos obtidos não involvem derivadas com relação à variável tipo tempo de $\overline{g}$.

Observação 3.19. Em termos físicos, podemos pensar μ como a densidade de energia local e J como a densidade de corrente local de um espaço tempo.

Observação 3.20. Considere o caso **simétrico com relação ao tempo** (em inglês, *time symmetric*), isto é, quando $B \equiv 0$. Então, as equações de vínculo podem ser escritas como $S = 2\mu$ e $J = 0$. Pela condição de energia dominante, segue que

$$S = 2\mu \geq 0.$$

Em particular, quando $T \equiv 0$ (vácuo), $S = 0$.

Um dos principais problemas em Relatividade Geral é a obtenção de soluções para as Equações de Einstein a partir de um dado inicial.

Definição 3.21. 1. Um **conjunto de dados iniciais** é uma tripla (M, g, B), onde M é uma variedade n-dimensional, g é uma métrica Riemanniana em M e $B \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ é um tensor simétrico;

2. Um **desenvolvimento** de um conjunto de dados iniciais é um espaço-tempo $(\overline{M}, \overline{g})$ tal que existe um mergulho $i : M \to \overline{M}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

   a) A métrica g é o *pullback* de $\overline{g}$ por i, isto é, $g = i^*\overline{g}$. Em outras palavras, se M é identificado com sua imagem $M_0 := i(M) \subset \overline{M}$, g é a métrica induzida por $\overline{g}$ em M_0;

   b) A imagem de B por i é a segunda forma fundamental de M_0 como subvariedade de $(\overline{M}, g)$.

3. Um desenvolvimento $(\overline{M}, \overline{g})$ de (M, g, B) é dito um **desenvolvimento Einsteiniano** se $\overline{g}$ satisfaz as equações de Einstein em $\overline{M}$.

Segue do Teorema 3.18 que os dados iniciais (g, K) satisfazem as equações de vínculo de Einstein.

Há uma extensa literatura envolvendo a existência e unicidade de soluções para o Problema de Cauchy para as equações de Einstein. Para mais informações, veja os livros (CHOQUET-BRUHAT, 2009; RINGSTRöM, 2009).

3.3 Algumas noções sobre causalidade

Exceto quando mencionado, (M, g) será uma variedade Lorentziana orientável pelo tempo (quando M for um espaço-tempo, ele também será orientável pelo tempo).

Nesta seção, denotaremos I_0 como o compacto $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

3.3.1 Cronologia e causalidade

Definição 3.22. Uma curva tipo tempo que aponta para o futuro (respectivamente, aponta para o passado) é uma curva diferenciável por partes $c : I_0 \to M$ tal que $c'(t^+)$ aponta para o futuro (respectivamente, $c'(t^-)$ aponta para o passado), para todo $t \in I_0$.

A definição de curvas causais ou tipo luz que apontam para o futuro ou passado é análoga à definição acima.

Observação 3.23. Na definição acima, não consideramos curvas cuja imagem é um único ponto.

Definição 3.24. Dizemos que um ponto $q \in M$ está no **futuro cronológico** (em inglês, *chronological future*) de $p \in M$ se existe uma curva tipo tempo que aponta para o futuro que liga p a q. Denotamos $p \ll q$ se q está no futuro cronológico de p e definimos o futuro cronológico de p, $I^+(p)$, como

$$I^+(p) := \{q \in M; p \ll q\}.$$

Podemos adaptar a definição acima e definir o **passado cronológico** (em inglês, *chronological past*) de um ponto $p \in M$ como

$$I^-(p) := \{q \in M; q \ll p\},$$

isto é, existe uma curva tipo tempo que aponta para o passado que liga p a q.

Observação 3.25. Segue da definição acima que, se $p, q, r \in M$ tais que $p \ll q \ll r$, então $p \ll r$. Além disso, se $p \ll q$, então $I^+(q) \subseteq I^+(p)$ e $I^-(p) \subseteq I^-(q)$.

Dado um subconjunto $A \subseteq M$ qualquer, podemos definir o futuro e o passado cronológico de A como

$$I^\pm(A) := \bigcup_{p \in A} I^\pm(p).$$

Assim como fizemos para curvas tipo tempo, podemos fazer o mesmo tratamento para curvas causais.

Definição 3.26. Dizemos que um ponto $q \in M$ está no **futuro causal** (em inglês, *causal future*) de $p \in M$ se existe uma curva causal que aponta para o futuro que liga p a q. Denotamos $p \prec q$ se q está no futuro causal de p e definimos o futuro causal de p, $J^+(p)$, como

$$J^+(p) := \{q \in M; p \prec q\}.$$

Também podemos definir da mesma maneira o **passado causal** (em inglês, *causal past*) de um ponto $p \in M$.

Observação 3.27. Analogamente ao caso cronológico, obtemos o seguinte resultado: dados $p, q, r \in M$, se $p \prec q \prec r$ então $p \prec r$ e, dados $p, q \in M$ com $p \prec q$, obtemos $J^+(q) \subseteq J^+(p)$ e $J^-(p) \subseteq J^-(q)$.

Tamgém podemos definir o futuro e o passado causal de um subconjunto qualquer $A \subseteq M$ como

$$J^\pm(A) := \bigcup_{p \in A} J^\pm(p).$$

A seguir, faremos um exemplo simples que ilustra as propriedades definidas anteriormente.

Exemplo 3.28. Seja (M^{n+1}, g) o espaço de Minkowski de dimensão $n+1$, isto é, $M = \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$g = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2.$$

Esta métrica é invariante por translações em $\mathbb{R}^{n+1}$. Pela Proposição 1.31, podemos definir uma estrutura causal em M da seguinte forma: em cada $x_0 \in M$ um cone $C^+_{x_0}$ no espaço tangente $T_{x_0}\mathbb{R}^{n+1}$, definido por

$$v = (v^0, v^1, ..., v^n) \in C^+_{x_0} \Longleftrightarrow v^0 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} (v^i)^2 \right)^{1/2}.$$

Além disso, a estrutura causal é invariante por translações em $\mathbb{R}^{n+1}$. Portanto, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.29. No exemplo acima,

1. $I^+(x_0) = \left\{ x = (x^0, x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^0 - x^0_0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x^i - x^i_0)^2 > 0, x^0 > x^0_0 \right\}$. Além disso, $I^+(x_0)$ é um conjunto aberto;
2. $J^+(x_0) = \left\{ x = (x^0, x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^0 - x^0_0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x^i - x^i_0)^2 \geq 0, x^0 \geq x^0_0 \right\}$. Além disso $J^+(x_0) = \overline{I^+(x_0)}$;
3. A fronteira $\partial J^+(x_0) = \partial I^+(x_0)$ é o conjunto das geodésicas tipo luz que partem de x_0,
$$\left\{ x = (x^0, x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^0 - x^0_0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x^i - x^i_0)^2 = 0, x^0 \geq x^0_0 \right\}.$$

Demonstração. Primeiramente, note que as geodésicas do espaço de Minkowski que partem de x_0 são as retas que passam por x_0. Em coordenadas locais, elas podem ser parametrizadas por $c(t) - x_0 = at$, onde $c(t) = (x^0(t), x^1(t), ..., x^n(t))$ e $a = (a^0, a^1, ..., a^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Uma geodésica é tipo tempo ou causal que aponta para o futuro se, e somente se, $a^0 > \left(\sum_{i=1}^{n} (a^i)^2 \right)^{1/2}$ se for tipo tempo que aponta para o futuro e $a^0 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} (a^i)^2 \right)^{1/2}$ se for causal que aponta para o futuro. Portanto,

$$\left\{ x = (x^0, x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^0 - x^0_0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x^i - x^i_0)^2 > 0, x^0 > x^0_0 \right\} \subseteq I^+(x_0)$$

e

$$\left\{ x = (x^0, x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^0 - x^0_0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x^i - x^i_0)^2 \geq 0, x^0 \geq x^0_0 \right\} \subseteq J^+(x_0).$$

Agora, tome $x \in I^+(x_0)$ e $c : [0,1] \to M$, $c(t) = (x^0(t), x^1(t), ..., x^n(t))$, uma curva suave por partes, tipo tempo e que aponta para o futuro que liga x_0 a x. Sejam $t_0 = 0, t_1, ..., t_k = 1 \in [0,1]$ tal que $c|_{[t_{j-1},t_j]}$ é uma curva suave para todo $j \in \{1, ..., k\}$. Como $\dfrac{dx^0}{dt} > \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\right)^{1/2}$ para todo $t \in [0,1]$, temos que, para cada $j \in \{1, ..., k\}$,

$$x^0(t_j) - x^0(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{dx^0}{dt}\, dt > \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\right)^{1/2} dt.$$

O lado direito da desigualdade acima é o comprimento da curva

$$\widetilde{c} : t \in [t_{j-1}, t_j] \mapsto (x^1(t), ..., x^n(t)) \in \mathbb{R}^n,$$

que é maior ou igual ao comprimento do segmento de reta que liga $(x^1(t_{j-1}), ..., x^n(t_{j-1})$ a $(x^1(t_j), ..., x^n(t_j))$, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x^i(t_{j-1}) - x^i(t_j)\right)^2\right)^{1/2}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
x^0 - x^0_0 = x^0(1) - x^0(0) &= \sum_{j=1}^{k} x^0(t_j) - x^0(t_{j-1}) \\
&> \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\right)^{1/2} dt \\
&> \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x^i(t_j) - x^i(t_{j-1})\right)^2\right)^{1/2} \\
&\geq \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x^i(1) - x^i(0)\right)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x^i - x^i_0\right)^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Como $c|_{[t_{j-1},t_j]}$ é uma curva tipo tempo que aponta para o futuro, para todo $j \in \{1, ...k\}$, segue que

$$x^0(t_j) - x^0(t_{j-1}) > 0 \text{ para todo } j \in \{1, ...k\} \Longrightarrow x^0 - x^0_0 = \sum_{j=1}^{k} x^0(t_j) - x^0(t_{j-1}) > 0,$$

o que prova a).

A demonstração de b) é análoga a de a) e c) é uma consequência direta de a) e b). □

Observação 3.30. A proposição acima pode ser adaptada para se obter um resultado análogo sobre passados cronológicos e causais do espaço de Minkowski.

3.3.2 Propriedades globais sobre causalidade

Nesta seção, enunciaremos alguns resultados globais sobre passados e futuros cronológicos e causais de um espaço-tempo. Para começar, enunciaremos um resultado que fala sobre a existência de uma base especial para a topologia de um espaço-tempo.

Teorema 3.31. Um espaço-tempo (M, g) admite uma cobertura por uma família de subconjuntos limitados de M, chamados **subconjuntos fundamentais**, da forma $I^+(p, U) \cap I^-(q, U)$, onde $I^+(p, U)$ e $I^-(q, U)$ são as restrições conexas de $I^+(p)$ e $I^-(q)$ para alguma família de conjuntos abertos U contidos nos domínios das cartas de M.

Para provar o resultado acima, precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.32. Toda métrica Lorentziana pode ser escrita localmente como

$$-N^2(dx^0)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i dx^j.$$

Demonstração. Seja $\Phi : (y^0, y^1, ..., y^n) \mapsto (x^0, x^1, ..., x^n)$ uma mudança de cartas com $x^0 = y^0$. Então, para $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_{i0} &= g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^0}\right) = g\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^k}, \sum_{l=0}^{n} \frac{\partial x^l}{\partial y^0}\frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ &= \sum_{k,l=0}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^0} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\left(g_{k0} + \sum_{l=1}^{n} g_{kl}\frac{\partial x^l}{\partial y^0}\right). \end{aligned}$$

Fazendo $\widetilde{g}_{i0} = 0$, obtemos

$$0 = \sum_{k,i=0}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\left(g_{k0} + \sum_{l=1}^{n} g_{kl}\frac{\partial x^l}{\partial y^0}\right) = g_{k0} + \sum_{l=1}^{n} g_{kl}\frac{\partial x^l}{\partial y^0}, \text{ para todo } k \in \{1, ..., n\}.$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $x^l = x^l(y^0, y^1, ..., y^n)$ que satisfaz as condições necessárias. □

Demonstração do Teorema 3.31. Basta provar que cada ponto de um domínio de uma carta de coordenadas Ω admite uma vizinhança contida em um subconjunto descrito pelo enunciado do teorema. Pelo Lema anterior, podemos escrever a métrica g como

$$g = -N^2(dx^0)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i dx^j.$$

Portanto, para cada $p \in M$, os vetores $v \in T_pM$ tipo tempo que apontam para o futuro (respectivamente, passado) satisfazem

$$N^2(p)(v^0)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)v^i v^j > 0 \text{ e } v^0 > 0 \;\; (\text{respectivamente, } \; v^0 < 0).$$

Como a métrica tipo espaço é uniformemente contínua no domínio relativamente compacto Ω para uma topologia definida por uma distância Riemanniana (em particular, a distância euclidiana d_e), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_e(p, q) < \delta \Longrightarrow |N(p) - N(q)| < \varepsilon \text{ e } \left|\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)v^i v^j - g_{ij}(q)v^i v^j\right| < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (v^k)^2.$$

Tome q um ponto na curva tipo tempo que aponta para o passado que parte de um ponto $p_0 \in \Omega$ com coordenadas $x^i(t) = x^i(p_0)$ e tal que $d_e(p_0, q), \delta/2$. Então, para todo $p \in \Omega_0 := \{p \in \Omega; d_e(p_0, p) < \delta/2\}$, vale

$$d_e(p, q) \leq d_e(p, p_0) + d_e(p_0, q) < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que os coeficientes da métrica em q satisfazem

$$N(q) = 1 \text{ e } g_{ij}(q) = \delta_{ij}.$$

Portanto, o cone tipo tempo futuro em q, C_q^+, é

$$v^0 > \left(\sum_{i=1}^{n} (v^i)^2 \right)^{1/2}$$

e, em Ω_0, vale (se $0 < \varepsilon < 1$)

$$\varepsilon > |N(p) - N(q)| = |N(p) - 1| \Longrightarrow 1 - \varepsilon < N(p) < 1 + \varepsilon$$

e

$$(1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} (v^k)^2 < \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p) v^i v^j < (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} (v^k)^2.$$

O cone tipo tempo futuro em p é

$$N(p) v^0 > \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p) v^i v^j \right)^{1/2}$$

e, em p, as curvas tipo tempo que apontam para o futuro satisfazem

$$\frac{dx^0}{dt} > N(p)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(p) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{1/2}.$$

Portanto, segue das desigualdades anteriores que

$$\begin{aligned}
\frac{dx^0}{dt} &> N(p)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(p) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{1/2} > \frac{1}{1+\varepsilon} \left((1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} \\
&> \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Agora considere uma curva $c : I_0 \to C_q^+$, $c(t) = (x^0(t), x^1(t), ..., x^n(t))$, tipo tempo que aponta para o futuro que parte de q (em coordenadas locais, $x(q) = (y^0, y^1, ..., y^n)$, com $y^0 := x^0(q) > 0$ e $y^i = x^i(q) = x^i(p_0)$). Como $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt$ é o comprimento euclidiano da curva $t \to (x^1(t), ..., x^n(t))$, segue que

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt \geq d_e(q, p),$$

onde $p = c(1)$. Portanto, se a imagem de c está contida em Ω_0, os pontos p em $c(I_0)$, que em coordenadas locais podem ser escritos como $x(p) = (x^0, x^1, ..., x^n)$, pertencerão ao conjunto aberto $C^+_{q,a}$, que em coordenadas locais pode ser escrito como

$$\left\{(x^0, x^1, ..., x^n); x^0 - y^0 > \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x^i - y^i\right)^2\right)^{1/2}\right\}.$$

$C^+_{q,a}$ representa um cone com vértice em q.

Por outro lado, considere uma curva que parte de q tal que $\dfrac{dx^0}{dt} = 1$ e $\dfrac{dx^i}{dt} = \alpha^i$, para $i \in \{1, ..., n\}$, onde α^i são constantes que satisfazem

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha^i)^2\right)^{1/2} < \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Pelas desigualdades anteriores, esta curva é tipo tempo que aponta para o futuro pois, para todo ponto p na curva,

$$\begin{aligned} N(p)^{-1}\left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\alpha^i\alpha^j\right)^{1/2} &< N(p)^{-1}\left((1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}(\alpha^k)^2\right)^{1/2} \\ &< \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{1-\varepsilon}\cdot\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} < 1 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{dx^0}{dt} - N(p)^{-1}\left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)^{1/2} = 1 - N(p)^{-1}\left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\alpha^i\alpha^j\right)^{1/2} > 0.$$

Como a união das curvas que satisfazem $\dfrac{dx^0}{dt} = 1$ e $\dfrac{dx^i}{dt} = \alpha^i$, com $\left(\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}(\alpha^i)^2\right)^{1/2} < \dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, é o conjunto aberto $C^+_{q,b}$, que em coordenadas locais pode ser escrito como

$$\left\{(x^0, x^1, ..., x^n); y^0 - x^0 > \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2\right)^{1/2}\right\},$$

e representa um cone com vértice em q que contém o ponto p_0, que em coordenadas locais é descrito como $(0, x^1(q), ..., x^n(q))$. Como $C^+_{q,b}$ é aberto, existe uma vizinhança $V^+ \subseteq M$ de p_0.

Substituindo futuro por passado e vice-versa nos argumentos acima, obtemos que curvas tipo tempo que aponta para o passado e que parte de um ponto r no futuro de p_0 estão contidas em um cone convexo $C^-_{r,a}$ com vértice em r e preenchem um cone convexo $C^-_{r,b}$, ambos invariantes por translação e que contém uma vizinhança $V^- \subseteq M$ de p_0.

Como $C^+_{q,a} \cap C^+_{r,a}$ e $C^-_{q,b} \cap C^-_{r,b}$ são abertos e relativamente compactos, segue que, se $V := V^+ \cap V^-$, então

$$V \subseteq C^+_{q,a} \cap C^-_{r,a} \subseteq I^+(q, \Omega_0) \cap I^-(r, \Omega_0) \subseteq C^+_{q,b} \cap C^-_{r,b},$$

o que prova o Teorema. □

Como consequência do teorema acima, provaremos um resultado importante sobre o passado e o futuro cronológicos de um subconjunto $A \subseteq M$.

Corolário 3.33. Para todo $p, q \in M$, $I^+(p)$ e $I^-(q)$ são abertos em M.

Demonstração. Seja $p_0 \in I^+(p)$ e $c : I_0 \to M$ uma curva tipo tempo que aponta para o futuro que liga p a p_0. Pelo teorema anterior, existe uma vizinhança $U \subseteq M$ de p_0 contida em $I^+(q)$ com $p \ll q \ll p_0$. Então, $q \in I^+(p)$ pois $I^+(q) \subseteq I^+(p)$ quando $q \ll p$. □

Agora enunciaremos alguns resultados locais envolvendo passados e futuros cronológicos que envolvem conceitos de vizinhanças normais. Para mais informações, veja (CHOQUET-BRUHAT, 2009).

Proposição 3.34. Todo ponto de uma variedade Lorentziana admite uma vizinhança aberta $U \subseteq M$ tal que

1. A restrição conexa $\widetilde{\Gamma}^+(p, U)$ de U do conjunto de pontos que podem ser ligados por geodésicas tipo luz que partem de p, $\widetilde{\Gamma}^+(p)$ é difeomorfa a uma bola do cone de luz $\widetilde{\Gamma}^+(p) \subset T_pM$;
2. A restrição conexa a U do conjunto de pontos que podem ser ligados por geodésicas tipo tempo que apontam para o futuro que partem de p é o interior de $\widetilde{\Gamma}^+(p, U)$.

Demonstração. Veja o Teorema 7.4 do Capítulo 12 de (CHOQUET-BRUHAT, 2009). □

Proposição 3.35. Seja U uma vizinhança normal aberta de algum ponto $p_0 \in M$. Então, $p \in I^-(p_0, U)$, isto é, um ponto $p \in U$ pode ser ligado a p_0 por uma curva tipo tempo que aponta para o passado se, e somente se é interior a $\widetilde{\Gamma}^+(p_0, U)$, isto é, seu representante X satisfaz

$$-(X^0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (X^i)^2 < 0 \ , \ X^0 > 0.$$

Além disso, p pode ser ligado a p_0 por uma única geodésica tipo tempo.

Demonstração. Veja o Teorema 7.5 do Capítulo 12 de (CHOQUET-BRUHAT, 2009). □

Proposição 3.36. Seja U uma vizinhança normal aberta de algum ponto $p_0 \in M$.

1. Um ponto $p \in M$ pode ser ligado a p_0 por uma curva causal que aponta para o passado se, e somente se seu representante X satisfaz
$$-(X^0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(X^i)^2 \leq 0 \ , \ X^0 > 0;$$
2. Seja $p \in U$ tal que $p \in J^+(p_0, U) \backslash I^+(p_0, U)$. Então existe uma única curva causal em U de p_0 a p e essa curva é uma geodésica tipo luz;
3. Sejam $p, q \in U$ tais que $p \in J^+(p_0, U)$ e $q \in I^+(p, U)$. Então $q \in I^+(p_0, U)$;
4. $\partial J^+(p_0, U) = \partial I^+(p_0, U)$ é o conjunto de pontos de U que podem ser ligados a p_0 por geodésicas tipo luz em U.

Demonstração. Veja o Teorema 7.7 do Capítulo 12 de (CHOQUET-BRUHAT, 2009). □

Agora provaremos o resultado global.

Teorema 3.37. Sejam $p, q \in M$.

1. Se $p \prec q$ e $q \ll p_0$, então $p \ll p_0$. Em outras palavras, se $q \in J^+(p)$, então $I^+(q) \subseteq I^+(p)$;
2. $J^+(p) \subseteq \overline{I^+(p)}$;
3. Se $q \in J^+(p) \backslash I^+(p)$ então a única curva causal entre p e q é uma geodésica tipo luz;
4. Se $J^+(p)$ é fechado então
   a) $J^+(p) = \overline{I^+(p)}$;
   b) $\partial J^+(p) = \partial I^+(p) = J^+(p) \backslash I^+(p) = \widetilde{\Gamma}(p)$ é o conjunto de pontos de M que podem ser ligados a p por geodésicas tipo luz.

Demonstração. 1. Sejam $p_0 \in I^+(q)$ e considere $c : I_0 \to M$ uma curva causal que aponta para o futuro ligando p a q e $\tilde{c} : I_0 \to M$ uma curva tipo tempo que aponta para o futuro que liga q a p_0. Como $c(I_0)$ é compacto, podemos o cobrir com um número finito de vizinhanças normais U_i com centro em $c(t_i)$, $i \in \{1, ..., n\}$. Além disso, podemos escolher t_i de tal modo que $0 = t_n < t_{n-1} < ... < t_1 = 1$ e $c(t_{i+1}) \in U_i$ para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$. Aplicando o item c) da Proposição 3.37 na vizinhança U_1 centrada em $c(t_1) = q$, podemos ligar qualquer ponto de $c(I_0) \cap U_1$ a qualquer ponto de $\tilde{c}(I_0) \cap U_1$ por uma curva tipo tempo que aponta para o futuro. Como $q_2 := c(t_2) \in U_1$, $q_2 \ll q \ll p_0$. Se $q_2 = p$, não há mais o que demonstrar. Caso contrário, repita o argumento anterior para a vizinhança U_2 centrada em $c(t_2)$. Como o número de vizinhanças $\{U_i\}$ é finito, obteremos uma curva tipo tempo que aponta para o futuro ligando p a p_0.

2. Seja $q \in J^+(p)$. Então, pela representação local via coordenadas normais, existe uma sequência (q_n) em $I^+(q)$ tal que $q_n \to q$. Pelo item anterior, $q_n \in I^+(p)$ e, portanto, $q = \lim q_n \in \overline{I^+(p)}$.

3. Seja $c : I_0 \to M$ uma curva causal que aponta para o futuro ligando p e q. Como $c(I_0)$ é compacto, podemos cobri-la com uma coleção finita de vizinhanças normais $U, U_1, ..., U_{n+1}$ com centros em pontos da curva. Defina $p_0 := p \in U$, $p_{n+1} = q \in U_{n+1}$ e, para cada $m \in \{1, ..., n\}$, tome $p_m, q_m \in U_m \cap c(I_0)$ tais que $p_m \prec q_m$, $p_m \neq q_m$, $p_{m+1} \in U_m$ e p_{m+1} está entre p_m e q_m na curva, enquanto $q_{m+1} \in U_{m+2}$. Então, pelo item b) da Proposição 3.37, a curva c é uma geodésica tipo luz entre p_m e q_m, para todo $m \in \{1, ..., n\}$. Portanto, c é uma geodésica tipo luz que liga p a q.

4. a) Segue do item b) e do fato que $I^+(p) \subseteq J^+(p)$.

   b) Segue do item c) que se $q \in \partial J^+(p)$, então existe uma única curva causal (mais precisamente, uma geodésica tipo luz) ligando p a q. Portanto, $\partial J^+(p)$ é gerado pelas geodésicas tipo luz que partem de p. □

3.3.3 Hiperbolicidade global

Sabe-se que toda variedade diferenciável M pode ser munida de uma métrica Riemanniana e de tal forma que (M, e) é completa (veja o Lema 11.1 de (RINGSTRöM, 2009)). Além disso, toda métrica Riemanniana $\tilde{e}$ compatível com a estrutura diferenciável de M são uniformemente equivalentes em todo subconjunto compacto. Portanto, podemos definir em M uma métrica d_e da seguinte forma: dados $p, q \in M$, defina a distância entre p e q, $d_e(p, q)$ como o comprimento de uma geodésica minimizante em M que liga p a q.

Podemos definir o e-comprimento de uma curva $c : I_0 \to M$ (comprimento de c dada a métrica Riemanniana e) de classe C^1 como

$$\ell_e(c) := \int_0^1 \|c'(t)\| \, dt.$$

A seguir, demonstraremos um resultado útil para a caracterização de certos tipos de espaços-tempo.

Lema 3.38. Em um aberto fundamental do Teorema 3.31, o e-comprimento de uma curva causal é limitado.

Demonstração. Como em um conjunto compacto, todas as métricas Riemannianas são equivalentes, basta provar que para a métrica da Observação 2.59,

$$e = g + 2 \left(X^* \otimes X^* \right),$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vetorial unitário tipo tempo, o e-comprimento de qualquer curva causal é limitado. Seja $c : I_0 \to U$, $c(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$ uma curva causal definida em um aberto fundamental do Teorema 3.31. Então, por hipótese,

$$\sum_{i,j=0}^{n} g_{ij} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = \sum_{i,j=0}^{n} (e_{ij} - 2X_iX_j)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \leq 0 \Longrightarrow \sum_{i,j=0}^{n} e_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \leq 2\left(\sum_{i=0}^{n} X_i \frac{dx^i}{dt}\right)^2.$$

Agora considere uma curva causal que aponta para o futuro, isto é, $\dfrac{dx^0}{dt} > 0$. Escolha x^0 como o parâmetro de arco e tome X um vetor tangente unitário ao eixo coordenado x^0. Então, o e-comprimento de c satisfaz

$$\ell_e(c) = \int_{\widetilde{I}_0} \left(\sum_{i,j=0}^{n} e_{ij}\frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^j}{dx^0}\right)^{1/2} dx^0 \leq \sqrt{2}\int_{\widetilde{I}_0} \sum_{i=0}^{n} X_i \frac{dx^i}{dx^0}\, dx^0 = \sqrt{2}\int_{\widetilde{I}_0} N\, dx^0,$$

onde $N = g(\partial_0, \partial_0)$ do Lema 3.33. Portanto, o e-comprimento de c é limitado. $\square$

Agora considere uma curva $c : I_0 \to M$ de classe C^0 e considere $\mathscr{P} = \{0 = t_1 < t_2 < ... < t_k = 1\}$ uma partição de I_0. Definimos o comprimento da poligonal formada pela partição $\mathscr{P}$ como

$$\ell_e(c(\mathscr{P})) := \sum_{i=1}^{k-1} d_e(c(t_{i+1}), c(t_i)).$$

Segue da desigualdade triangular que, quando refina-se uma partição, o comprimento da poligonal aumenta.

Definição 3.39. Dizemos que uma curva $c : I_0 \to M$ é **retificável** se existe um $M \geq 0$ tal que $\ell_e(c(\mathscr{P})) \leq M$ para toda partição $\mathscr{P}$ de I_0. Além disso, chamamos o número

$$\ell_e(c) := \sup\{\ell_e(c(\mathscr{P})); \mathscr{P} \text{ é uma partição de } I_0\}$$

de **comprimento** da curva c.

Quando a curva c é de classe C^1, o comprimento da curva é igual ao e-comprimento de c.

Definição 3.40. Dados $p, q \in M$, chamamos de $\mathcal{P}(p,q)$ como o conjunto de curvas retificáveis de M que ligam p a q parametrizados proporcionalmente ao seu comprimento de arco.

Podemos definir uma métrica em $\mathcal{P}(p,q)$ da seguinte forma: dadas duas curvas retificáveis $c_1, c_2 : I_0 \to M$ que ligam p a q, defina

$$\mathcal{D}(c_1, c_2) := \sup_{t \in I_0} d_e(c_1(t), c_2(t)) + |\ell_e(c_1) - \ell_e(c_2)|.$$

Lema 3.41. O conjunto $\mathcal{P}(p,q)$ munido com a função $\mathcal{D}$ definida acima é um espaço métrico completo.

Demonstração. Segue das propriedades de d_e e do módulo que $\mathcal{D}$ é uma métrica em $\mathcal{P}(p,q)$. Portanto, basta provar que $\mathcal{D}$ é uma métrica completa em $\mathcal{P}(p,q)$. Seja (c_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{P}(p,q)$.

Primeiramente note que, como $|\ell_e(c_1) - \ell(c_2)| \leq \mathcal{D}(c_1, c_2)$ para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathcal{P}(p,q)$, segue que a função $\ell_e : \mathcal{P}(p,q) \to [0,\infty)$ é Lipschitz-contínua. Portanto, $(\ell_e(c_n))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, portanto, existe $\ell_\infty \in \mathbb{R}$ tal que $\ell_\infty = \lim \ell_e(c_n)$.

Agora provaremos que $\mathcal{D}$ é uma métrica completa. Como (c_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{P}(p,q)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{D}(c_m, c_n) < \varepsilon$, para quaisquer $m, n \geq n_0$. Como

$$\sup_{t \in I_0} d_e(c_m(t), c_n(t)) \leq \mathcal{D}(c_m, c_n) < \varepsilon \text{ para todo } m, n \geq n_0,$$

segue que (c_n) é uma sequência de Cauchy em $C^0(I_0, M)$ com a métrica uniforme

$$\tilde{d}(c, \tilde{c}) = \sup_{t \in I_0} d_e(c(t), \tilde{c}(t)).$$

Como d_e é uma métrica completa de M, segue que $C^0(I_0, M)$ com a métrica uniforme é completo e, portanto, existe $c_\infty \in C^0(I_0, M)$ tal que $c_n \to c_\infty$ nessa métrica. Agora provaremos que $c_\infty \in \mathcal{P}(p,q)$. De fato, seja $\mathscr{P}$ uma partição de I_0. Como $c_n \to c_\infty$ uniformemente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_e(c_{n_0}(t), c_\infty(t)) < \dfrac{1}{2(k-1)}$ para todo $t \in I_0$. Então,

$$\begin{aligned}
\ell_e(c_\infty(\mathscr{P})) &:= \sum_{i=1}^{k-1} d_e(c_\infty(t_{i+1}), c_\infty(t_i)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} d_e(c_\infty(t_{i+1}), c_{n_0}(t_{i+1})) + d_e(c_{n_0}(t_{i+1}), c_{n_0}(t_i)) + d_e(c_{n_0}(t_i), c_\infty(t_i)) \\
&< \ell_e(c_{n_0}) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2(k-1)} \right) = \ell_e(c_{n_0}) + 1.
\end{aligned}$$

Como $(\ell_e(c_n))$ é uma sequência convergente em $\mathbb{R}$, existe $M > 0$ tal que $\ell_e(c_n) \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para toda partição $\mathscr{P}$ de I_0,

$$\ell_e(c_\infty(\mathscr{P})) < \ell_e(c_{n_0}) + 1 \leq M + 1 < \infty,$$

o que prova que $c_\infty \in \mathcal{P}(p,q)$. Logo, $\ell_e(c_\infty) = \ell_e(\lim c_n) = \lim \ell_e(c_n) = \ell_\infty$, o que prova que $\mathcal{D}$ é completa. $\square$

Agora iremos generalizar o conceito de curvas causais para curvas contínuas.

Definição 3.42. Dados $p, q \in M$, dizemos que uma curva contínua $c : I_0 \to M$ é uma curva contínua causal que aponta para o futuro (em inglês, *future-directed continuous causal curve*) se, para cada $t_0 \in I_0$ existe um subintervalo aberto $J \subseteq I_0$ contendo t_0 e uma vizinhança convexa U de $c(t_0)$ tal que se $t_1, t_2 \in I_0$ com $t_1 < t_2$, $c(t_1) \prec c(t_2)$. Denotamos o conjunto de curvas contínuas causais como $\mathcal{C}(p, q)$.

Observação 3.43. Seja $\overline{\mathcal{C}(p,q)}$ o fecho de $\mathcal{C}(p,q)$ com respeito a topologia induzida por $\mathcal{P}(p,q)$ e considere a função $f : I_0 \times \mathcal{P}(p,q) \to M$ definida por $f(t,c) = c(t)$. Então, f é contínua e

$$f(I_0 \times \overline{\mathcal{C}(p,q)}) \subseteq \overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)} \text{ para todo } t_0 \in I_0.$$

De fato, tome $p_0 \in f(I_0 \times \overline{\mathcal{C}(p,q)})$. Então, $p_0 = c(t_0)$ para algum $c \in \overline{\mathcal{C}(p,q)}$ e $t_0 \in I_0$. Como $c \in \overline{\mathcal{C}(p,q)}$, existe uma sequência (c_n) em $\mathcal{C}(p,q)$ tal que $c_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$ e, portanto, $c_n(t_0) \to c(t_0)$. Como $c_n \in \mathcal{C}(p,q)$, existe uma curva suave por partes, causal e que aponta para o futuro ligando p a $c_n(t_0)$ e uma curva suave por partes, causal e que aponta para o futuro ligando $c_n(t_0)$ a q. Logo, $c_n(t_0) \in J^+(p) \cap J^-(q)$ e, consequentemente, $p_0 = c(t_0) \in \overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)}$.

Logo, segue do resultado acima que

$$J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq f(I_0 \times \overline{\mathcal{C}(p,q)}) \subseteq \overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)}.$$

Definição 3.44 (Leray)**.** Dizemos que um espaço-tempo M é **globalmente hiperbólico** (em inglês, *globally hyperbolic*) se, para quaisquer $p, q \in M$, o conjunto $\overline{\mathcal{C}(p,q)}$ é um subconjunto compacto de $\mathcal{P}(p,q)$.

A definição acima foi a primeira definição de um espaço-tempo globalmente hiperbólico e foi utilizada para a existência do Problema de Cauchy de uma EDP hiperbólica. Para mais informações, veja (LERAY, 1953).

Como veremos na proposição a seguir, um espaço-tempo globalmente hiperbólico impossibilita a existência de certos tipos de curvas.

Proposição 3.45. Não existem curvas contínuas fechadas causais que apontam para o futuro em espaços-tempo globalmente hiperbólicos.

Demonstração. Suponha que exista uma curva fechada causal $c : I_0 \to M$ e considere a sequência $c_n : I_0 \to M$, obtida percorrendo n vezes a curva c. Esta sequência não admite uma subsequência convergente pois o comprimento de c_n, $\ell_e(c_n)$ é igual a $n\ell_e(c)$. Portanto, $\mathcal{C}(p,q)$ não é um conjunto compacto. □

Existem vários critérios que dão condições necessárias e suficientes para dizer se um espaço-tempo é globalmente hiperbólico. O primeiro deles é o seguinte:

Teorema 3.46. As seguintes afirmações são equivalentes.

1. M é globalmente hiperbólico;

2. Dada uma métrica Riemanniana completa e em M, todas as curvas contínuas causais que apontam para o futuro ligando dois pontos quaisquer $p, q \in M$ possuem um e-comprimento uniformemente limitado por $K_{p,q}$.

Demonstração. Suponha que a) seja verdadeira. Como, para quaisquer $p, q \in M$, $\overline{\mathcal{C}(p,q)}$ é compacto e ℓ_e é uma função contínua na topologia de $\mathcal{P}(p,q)$ definida anteriormente, ℓ_e admite um máximo $K_{p,q}$ neste conjunto.

Agora suponha que b) seja verdadeira. Como $\overline{\mathcal{C}(p,q)}$ é um subconjunto de

$$\mathcal{P}(p,q) := \{c : I_0 \to (M, e);\ c \text{ é contínua}\},$$

seguirá do Teorema de Arzelà-Ascoli que $\overline{\mathcal{C}(p,q)}$ será compacto se

1. $X_t := \overline{\{c(t); c \in \overline{\mathcal{C}(p,q)}\}}$ é compacto para todo $t \in I_0$;

2. $\overline{\mathcal{C}(p,q)}$ é equicontínuo na topologia de M.

Provaremos que a afirmação anterior é verdadeira. De fato,

1. Fixe $t \in I_0$. Então, para todo $c \in \overline{\mathcal{C}(p,q)}$,

$$d_e(p, c(t)) \leq \ell_e(c|_{[0,t]}) \leq \ell_e(c) \leq K_{p,q},$$

   o que prova que X_t é limitado. Como M é completo, segue que X_t é compacto.

2. Sejam $\varepsilon > 0$ e $c \in \overline{\mathcal{C}(p,q)}$. Como c é parametrizada proporcionalmente pelo comprimento de arco, para todo $t_1, t_2 \in I_0$,

$$\ell_e(c|_{[t_1,t_2]}) = \ell_e(c)(t_1 - t_2) \leq \ell_e(c)|t_1 - t_2| \leq K_{p,q}|t_1 - t_2|.$$

   Logo, se $|t_1 - t_2| < \varepsilon / K_{p,q}$,

$$d_e(c(t_1), c(t_2)) \leq \ell_e(c|_{[t_1,t_2]}) \leq K_{p,q}|t_1 - t_2| < \varepsilon,$$

   o que prova que $\overline{\mathcal{C}(p,q)}$ é equicontínuo. □

Teorema 3.47. Se M é globalmente hiperbólico, então $f(I_0 \times \overline{\mathcal{C}(p,q)})$ é um conjunto compacto de M para todo $p, q \in M$ e $f(I_0 \times \overline{\mathcal{C}(p,q)}) = J^+(p) \cap J^-(q)$, onde $f : I_0 \times \mathcal{P}(p,q) \to M$ é definida por $f(t,c) = c(t)$.

Demonstração. Como f é contínua e $\overline{\mathcal{C}(p,q)}$, $f(I_0 \times \overline{\mathcal{C}(p,q)})$ é um conjunto compacto de M.

Tome $p_0 \in f(I_0 \times \overline{\mathcal{C}(p,q)}) \backslash (\overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)})$. Então existe $c \in \overline{\mathcal{C}(p,q)}$ tal que $p_0 \in c(I_0)$ e uma sequência de curvas contínuas e causais (c_n) tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{D}(c_n, c) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Por outro lado, como $p_0 \notin \overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)}$, existe uma e-vizinhança geodésica U de p_0 em $M \backslash (\overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)})$ de raio $\delta > 0$. Logo,

$$d_e(p', p_0) \geq \delta \text{ para todo } p' \in \overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)},$$

o que é uma contradição. Portanto, $f(I_0 \times \overline{\mathcal{C}(p,q)}) = \overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)}$.

Agora provaremos que $\overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)} = J^+(p) \cap J^-(q)$. De fato, seja $U \subseteq M$ uma vizinhança normal centrada em p. Então, a imagem da restrição conexa a U do conjunto de curvas causais ligando p a q está contida em $J^+(p, U)$, que é um conjunto fechado. Portanto, se uma sequência de curvas causais ligando p a q converge na topologia gerada por $\mathcal{D}$ então a restrição das suas imagens em U está contida em $J^+(p, U)$. Como $\overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)}$ é compacto, podemos cobrí-lo com um número de vizinhanças normais e, portanto, concluimos $\overline{J^+(p)} \cap \overline{J^-(q)} = J^+(p) \cap J^-(q)$. $\square$

Definição 3.48. Dizemos que um subconjunto $A \subseteq M$ é **causalmente convexo** (em inglês, *causally convex*) se e somente se A não intersecta nenhuma curva tipo tempo que aponta para o futuro em um conjunto desconexo.

De maneira equivalente, podemos dizer que um subconjunto $A \subseteq M$ é causalmente convexo se, para quaisquer $p_1, p_2 \in A$, se $p_1 \ll q \ll p_2$ então $q \in A$.

Definição 3.49. Dizemos que um espaço-tempo é **fortemente causal** (em inglês, *strongly causal*) se, para todo $p \in M$ e toda vizinhança de p, $U \subseteq M$, existe uma vizinhança de p, $V \subseteq U$, que é causalmente convexo.

Um espaço-tempo fortemente causal também é **cronológico**, isto é, não admite curvas fechadas tipo tempo que apontam para o futuro.

Proposição 3.50. Não existem curvas fechadas tipo tempo que apontam para o futuro em espaços-tempo M fortemente causais.

Demonstração. Seja $c : I_0 \to M$ uma curva fechada tipo tempo que aponta para o futuro e considere $p \in c(I_0)$ e $U \subseteq M$ uma vizinhança de p tal que $c(I_0) \cap (M \backslash U) \neq \emptyset$. Como M é fortemente causal, existe uma vizinhança de p em U, $V \subseteq U$ tal que V é causalmente convexo. Agora tome $t_0 \in I_0$ tal que $c(t_0) \notin U$. Como $p \ll c(t_0) \ll p$ e $p \in V$, $c(t_0) \in U$, o que é uma contradição. $\square$

Utilizando o conceito acima, podemos dar uma nova caracterização de espaços globalmente hiperbólicos.

Teorema 3.51. Um espaço-tempo é globalmente hiperbólico se, e somente se for fortemente causal e, para quaisquer $p, q \in M$, $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto em M.

Demonstração. Suponha que M seja fortemente causal e que $J^+(p) \cap J^-(q)$ seja compacto e considere e a métrica Riemanniana adaptada à métrica Lorentziana g (ver a Observação 2.59). Como $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto, podemos cobrí-lo com uma quantidade finita de vizinhanças fundamentais U_k que contém apenas um segmento de uma curva causal dada $c : I_0 \to M$ que liga p a q; além disso, o e-comprimento de c é menor ou igual do que a soma dos e-comprimentos dos segmentos obtidos intersectando a imagem de c com U_k. Como $c(I_0)$ é coberto por uma quantidade finita de conjuntos U_k e cada U_k possui apenas um segmento da curva, segue do Lema 3.38 que o e-comprimento de cada segmento em U_k e finito e limitado, portanto, o e-comprimento da curva c é finito e limitado. Portanto, pelo Teorema 3.46, M é globalmente hiperbólico.

Agora suponha que M seja globalmente hiperbólico. Como, para todo $p, q \in M$, o conjunto $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto, basta provar que M é fortemente causal. Para provar que M é fortemente causal, basta provar que os seguintes conjuntos

$$\left\{J^+(U) \cap J^+(U); U \subseteq M\right\}$$

é uma base de vizinhanças de M. Para mais informações, veja (CHOQUET-BRUHAT, 1968). □

3.3.4 Hipersuperfícies de Cauchy

Definição 3.52. Um subconjunto $A \subseteq M$ é dito **acronal** (em inglês, *achronal*) se, para quaisquer dois pontos $p, q \in A$, não existe uma curva tipo tempo que liga p a q.

Substituindo tipo tempo por causal, obtemos a definição de um subconjunto **acausal**.

Lembremos que uma curva $c : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ é dita **estendível** se a sua imagem pode ser mergulhada na imagem de uma outra curva $\widetilde{c} : J \subseteq \mathbb{R} \to M$. Uma curva que não é estendível é dita **inestendível**.

Definição 3.53. Definimos o **domínio de dependência no futuro** (em inglês, *future domain of dependence*) de um subconjunto fechado acronal $A \subseteq M$, denotado por $D^+(A)$, como o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que toda curva causal inextendível que aponta para o passado que parte de p intersecta A.

Segue da definição acima que $A \subseteq D^+(A) \subseteq J^+(A)$. Além disso, como A é acronal, $D^+(A) \cap I^-(A) = \emptyset$.

Analogamente, podemos definir o **domínio de dependência no passado** (em inglês, *past domain of dependence*), $D^-(A)$. Assim, podemos definir o domínio de dependência de A,

$$D(A) = D^+(A) \cup D^-(A)$$

Proposição 3.54. $p \in \overline{D^+(A)}$ se, e somente se, toda curva inextendível tipo tempo que aponta para o passado que parte de p intersecta A.

Demonstração. Seja $X \subseteq M$ o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que toda curva c inextendível tipo tempo que aponta para o passado partindo de p intersecta A. Então $M \backslash X$ é o conjunto de pontos $p \in M$ tais que existe uma curva c inextendível tipo tempo que aponta para o passado partindo de p que **não** intersecta A. Portanto, dado $p \in M \backslash X$, seja $V \subseteq M$ uma vizinhança convexa de p e tome $p_0 \in (V \cap c(I)) \backslash \{p\}$. Como $p \in I^-(p_0, V)$ e $I^-(p_0, V)$ é aberto, existe aberto $U \subseteq I^-(p_0, V)$ contendo p e, portanto, $U \subseteq M \backslash X$, o que prova que X é fechado. Além disso, como $D^+(A) \subseteq X$, segue que $\overline{D^+(A)} \subseteq \overline{X} = X$.

Agora suponha que $p \in X$ e, dada uma curva inextendível tipo tempo que aponta para o passado partindo de p, tome uma sequência de pontos (p_n) pertencentes a imagem da curva e tal que $p_n \to p$. Sabemos pelo item a) do Teorema 3.37 que, para cada ponto q pertencente a uma curva causal que aponta para o passado partindo de p_n pode ser ligada a uma curva tipo tempo que aponta para o passado partindo de p. Além disso, essa curva intersecta A pois $p \in X$. Logo, $p_n \in D^+(A)$ e, portanto, $p \in \overline{D^+(A)}$. □

Definição 3.55. Definimos o **horizonte de Cauchy no futuro** (em inglês, *future Cauchy horizon*) de um subconjunto $A \subseteq M$ fechado e acronal como $H^+(A) := \partial D^+(A)$

Da mesma forma, podemos definir $D^-(A)$ e $H^-(A)$, onde $A \subseteq M$ é um conjunto fechado e acronal.

Definição 3.56. Uma **hipersuperfície de Cauchy** (em inglês, *Cauchy hypersurface*) $S \subseteq M$ e um subconjunto fechado acronal tal que $D(S) = M$.

Segue da definição acima que um subconjunto $S \subseteq M$ é uma hipersuperfície de Cauchy se toda curva causal inextendível intersecta S e, além disso, se a curva for tipo tempo, ela intersectará apenas uma vez.

Teorema 3.57. Uma hipersuperfície de Cauchy de um espaço-tempo de dimensão $n+1$ é uma n-subvariedade C^0 mergulhada em M.

Para provar o Teorema acima, precisaremos da seguinte definição e do seguinte resultado:

Definição 3.58. Dizemos que um ponto $p \in A$ está na **beira** (em inglês, *edge*) de A se existem $p_1 \in I^+(p)$, $p_2 \in I^-(p)$ e uma curva tipo tempo ligando p_1 a p_2 que não intersecta A.

Pela definição acima, um ponto $p \in A$ **não está** na beira de A se, para quaisquer dois pontos $p_1 \in I^+(p)$ e $p_2 \in I^-(p)$, qualquer curva tipo tempo ligando p_1 a p_2 intersecta A.

Lema 3.59. Seja $A \subseteq M$ um subconjunto não vazio, fechado e acronal que não possui pontos na beira. Então, A é uma n-subvariedade C^0 mergulhada de M.

Demonstração. Seja $p \in A$ e $U \subseteq M$ uma vizinhança normal de p com sistema de coordenadas $\varphi = (x^0, x^1, ..., x^n)$ tais que $\dfrac{\partial}{\partial x^0}$ é um vetor tipo tempo que aponta para o futuro. Nestas coordenadas, podemos obter uma vizinhança $V \subseteq U$ de p tal que

1. $\varphi(V) = (a - \delta, b + \delta) \times N \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$
2. $\{p \in V; x^0(p) = a\} \subseteq I^-(p, U)$ e $\{p \in V; x^0(p) = b\} \subseteq I^+(p, U)$.

Para U suficientemente pequeno, dado $q \in N \subseteq \mathbb{R}^n$, a curva coordenada $s \mapsto \varphi^{-1}(s, q)$ deve intersectar A pelo fato da beira de A ser vazia. Como A é acronal, a interseção da curva coordenada com A consiste em um único ponto. Denote a x^0-coordenada desse ponto por $h(q)$.

Provaremos que a função $h : N \subseteq \mathbb{R}^n \to (a, b)$ é contínua. De fato, seja (q_k) uma sequência de pontos em N que converge para algum ponto $q_0 \in N$ tal que $h(q_k) \nrightarrow h(q_0)$. Como a imagem de h é limitada, existe uma subsequência $(h(q_{k_l}))$ convergente para algum ponto $r \neq h(q_0)$. Então, $\varphi^{-1}(r, q_0) \in I^-(\widetilde{p}, V) \cup I^+(\widetilde{p}, V)$, onde $\widetilde{p} = \varphi^{-1}(h(q_0), q_0) \in A$. Como $I^-(\widetilde{p}, V) \cup I^+(\widetilde{p}, V)$ é um conjunto aberto, $\varphi^{-1}(h(q_k), q_k) \in A$, para algum $k \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição. Logo, $h(q_k) \to h(q_0)$, o que prova que h é contínua e, portanto, a aplicação $\phi : A \cap V \to \mathbb{R}^n$, $\phi(p) = \phi(x^0, x^1, ..., x^n) = (x^0 - h(x^1, ..., x^n), x^1, ..., x^n)$ é um homeomorfismo, o que prova que A é uma n-subvariedade de classe C^0. □

Demonstração do Teorema 3.57. Como toda curva tipo tempo que liga dos pontos quaisquer de M intersecta S, segue que a beira de S é vazia, e, pelo Lema 3.59, S é uma n-subvariedade de classe C^0 mergulhada em M. □

Agora enunciaremos o principal resultado dessa seção. Esse resultado nos dá uma caracterização importante dos espaços-tempo globalmente hiperbólicos a partir da existência de uma hipersuperfície de Cauchy.

Teorema 3.60 (Teorema Splitting de Geroch)**.** Seja (M, g) um espaço-tempo.

1. Se M admite uma hipersuperfície de Cauchy S então M é globalmente hiperbólico;
2. Duas hipersuperfícies de Cauchy quaisquer em M são homeomorfas;
3. Se M é globalmente hiperbólico, então M é difeomorfo a um produto $S \times \mathbb{R}$, onde, para cada $t \in \mathbb{R}$, $S_t := S \times \{t\}$ é uma hipersuperfície de Cauchy em M.

Demonstração. A demonstração do Teorema está além do objetivo desta dissertação. Para mais informações, veja (O'NEILL, 1983; WALD, 1984; CHOQUET-BRUHAT, 2009). □

Como consequência imediata do teorema, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.61. Um espaço-tempo é globalmente hiperbólico se, e somente se admite uma hipersuperfície de Cauchy.

3.4 Buracos negros

Assim como na seção anterior, caso seja indicado, denotaremos (M, g) um espaço-tempo.

3.4.1 Congruências e expansões

Definição 3.62. Dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, as trajetórias de X são ditas uma **congruência** de X. Quando X é um campo de vetores tipo tempo (respectivamente, tipo luz ou causal), dizemos que a congruência é tipo tempo (respectivamente, tipo luz ou causal).

Equivalentemente, congruências são soluções $c : I \subseteq \mathbb{R} \to M$, $c(t) = (x^0(t), ..., x^n(t))$, da equação diferencial,

$$c'(t) = X(c(t)).$$

Definição 3.63. Dizemos que uma congruência é geodésica se X é um campo paralelo, isto é, $\nabla_X X = 0$.

Definição 3.64. Dizemos que uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é uma **expansão** de uma congruência com campo tangente X se $f = \operatorname{div}_M X$.

3.4.2 Superfícies presas

Seja $(M, g_M = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço-tempo de dimensão $n+1$ e $\Sigma \subseteq M$ uma subvariedade tipo espaço de dimensão $n-1$. Então, para todo $p \in \Sigma$, $(T_p\Sigma)^\perp$ possui dimensão 2 e é tipo tempo, portanto, Lorentziana. Logo, pela Proposição 1.29, existem dois vetores $\ell_+, \ell_- \in (T_p\Sigma)^\perp$ tipo luz que apontam para o futuro que são linearmente independentes.

Dadas os vetores acima, considere as seguintes aplicações bilineares $B^{\pm} : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ definidas por

$$B^{\pm}(u,v) = \langle \ell_{\pm}, (\nabla_X Y)(p) \rangle_p \, ,$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M e $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ são campos tais que $X(p) = u$ e $Y(p) = v$.

Definição 3.65. Chamamos ambas as aplicações $B^{\pm}$ de **segunda forma fundamental nula**.

Seja $\{\partial_2, ..., \partial_n\}$ um referencial local em Σ ortogonal tanto a ℓ_+ quanto a ℓ_-. Então, os coeficientes $B^{\pm}_{ij} = B^{\pm}(\partial_i, \partial_j)$ são iguais a

$$B^{\pm}_{ij} = B^{\pm}(\partial_i, \partial_j) = \langle \ell_{\pm}, (\nabla_{\partial_i} \partial_j)(p) \rangle_p = \langle (\nabla_{\partial_i} \ell_{\pm})(p), \partial_j \rangle_p \, .$$

Definição 3.66. Definimos as **curvaturas médias nulas** (em inglês, *null mean curvatures*) de Σ, χ^+ e χ^-, como os traços de B^+ e B^- com respeito à métrica induzida $g_\Sigma = \iota^* g_M$, onde $\iota : \Sigma \hookrightarrow M$ é a aplicação de inclusão, isto é,

$$\chi^{\pm} = \mathrm{tr}_{g_\Sigma}(B^{\pm}) = \sum_{i,j=2}^{n} g^{ij}_{\Sigma} B^{\pm}_{ij}.$$

Agora suponha que Σ seja uma subvariedade orientável de dimensão $n-1$ de uma subvariedade $N \subseteq M$ tipo tempo de dimensão n. Então, podemos orientar continuamente o vetor μ normal a Σ e tangente a N e distinguir o interior e o exterior de N.

Lema 3.67. As curvaturas médias nulas χ^+ e χ^- são as expansões das congruências geodésicas nulas definidas por ℓ_+ e ℓ_-, respectivamente.

Demonstração. Seja n o vetor normal a N unitário que aponta para o futuro e μ o vetor normal a Σ em N unitário que aponta para o futuro e que aponta para fora e defina os vetores $\ell_{\pm} := n \pm \mu$. Então, $n = \dfrac{\ell_+ + \ell_-}{2}$, $\mu = \dfrac{\ell_+ - \ell_-}{2}$ e

$$\langle \ell_+, \ell_- \rangle = \langle n, n \rangle + \langle \mu, \mu \rangle = -2.$$

Defina o tensor $h \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ por

$$\begin{aligned} h &= g_M + n^* \otimes n^* - \mu^* \otimes \mu^* \\ &= g_M + \frac{1}{4}\left(((\ell_+)^* + (\ell_-)^*) \otimes ((\ell_+)^* + (\ell_-)^*)\right) - \frac{1}{4}\left(((\ell_+)^* - (\ell_-)^*) \otimes ((\ell_+)^* - (\ell_-)^*)\right) \\ &= g_M + \frac{1}{2}\left((\ell_+)^* \otimes (\ell_-)^* + (\ell_-)^* \otimes (\ell_+)^*\right). \end{aligned}$$

Tomando em M o referencial adaptado de Σ, $\{\ell_+, \ell_-, \partial_2, ..., \partial_n\}$, segue que para todo $i, j \in \{2, ..., n\}$

$$\begin{aligned} h_{ij} &= h(\partial_i, \partial_j) = g_M(\partial_i, \partial_j) + (n^* \otimes n^*)(\partial_i, \partial_j) - (\mu^* \otimes \mu^*)(\partial_i, \partial_j) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \\ h(\partial_i, \ell_\pm) &= g_M(\partial_i, \ell_\pm) + (n^* \otimes n^*)(\partial_i, \ell_\pm) - (\mu^* \otimes \mu^*)(\partial_i, \ell_\pm) = 0 \\ h(\ell_\pm, \ell_\pm) &= g_M(\ell_\pm, \ell_\pm) + \frac{1}{2}\big((\ell_+^* \otimes \ell_-^*)(\ell_\pm, \ell_\pm) + (\ell_-^* \otimes \ell_+^*)(\ell_\pm, \ell_\pm)\big) = 0 \\ h(\ell_\pm, \ell_\mp) &= g_M(\ell_\pm, \ell_\mp) + \frac{1}{2}\big((\ell_+^* \otimes \ell_-^*)(\ell_\pm, \ell_\mp) + (\ell_-^* \otimes \ell_+^*)(\ell_\pm, \ell_\mp)\big) = -2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, h é a métrica induzida $g_\Sigma = \iota^* g_M$. Logo,

$$\chi^\pm = \sum_{i,j=2}^{n} h^{ij} B^\pm(\partial_i, \partial_j) = \sum_{i,j=2}^{n} h^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \ell_\pm, \partial_j \rangle .$$

Como $\ell_\pm$ é um vetor tipo luz,

$$\langle \ell_\pm, \ell_\pm \rangle = 0 \implies \langle \nabla_{\partial_i} \ell_\pm, \ell_\pm \rangle = 0$$

e, como $\ell_\pm$ é tangente a uma congruência geodésica, $\nabla_{\ell_\pm} \ell_\pm = 0$. Portanto,

$$\chi^\pm = \sum_{i,j=2}^{n} h^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \ell_\pm, \partial_j \rangle = \sum_{i,j} g_\Sigma^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \ell_\pm, \partial_j \rangle = \operatorname{div}_\Sigma \ell_\pm,$$

como queríamos demonstrar. □

Definição 3.68. Chamamos de **superfície presa** (em inglês, *trapped surface*) uma subvariedade compacta tipo espaço Σ de dimensão $n-1$ tal que $\chi^\pm < 0$.

Proposição 3.69. A curvatura média nula χ^+ relativa à ℓ_+ é dada por

$$\chi^+(\Sigma) = -H_N + B(\mu, \mu) + H_\Sigma,$$

onde H_N é a curvatura média de N em M, B é a segunda forma fundamental de N em M e H_Σ é a curvatura média de Σ em N.

Demonstração. Sabemos que

$$\chi^+ = \operatorname{div}_\Sigma \ell_+ = \sum_{i,j=2}^{n} g_\Sigma^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \ell_+, \partial_j \rangle = \sum_{i,j} (g_M^{ij} + n^i n^j - \mu^i \mu^j) \langle \nabla_{\partial_i} (n + \mu), \partial_j \rangle .$$

Agora note que, pelo Lema 3.32, podemos escrever localmente g_M como um múltiplo de $(dx^0)^2$ mais uma soma de g_N, isto é,

$$(g_M)_{ij} = -n_i n_j + (g_N)_{ij}.$$

Portanto,

$$\sum_{i,j} (g_M^{ij} + n^i n^j) \langle \nabla_{\partial_i} n, \partial_j \rangle = -\sum_{i,j} g_N^{ij} B(\partial_i, \partial_j) = -H_N.$$

Além disso, como $\mu \in \mathfrak{X}(N)$, segue da Proposição 2.42 que

$$\sum_{i,j} \mu^i \mu^j \langle \nabla_{\partial_i} n, \partial_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \mu^i \mu^j \langle \nabla_{\partial_i} n, \partial_j \rangle = -B(\mu, \mu).$$

Como

$$\sum_{i,j} (g_M^{ij} + n^i n^j - \mu^i \mu^j) \langle \nabla_{\partial_i} \mu, \partial_j \rangle = \sum_{i,j=2}^{n} g_\Sigma^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \mu, \partial_j \rangle = H_\Sigma,$$

obtemos a fórmula desejada. □

3.4.3 Buracos negros

Definição 3.70. Seja (M, g) um espaço-tempo orientável e orientável pelo tempo. Dizemos que (M, g) é **assintoticamente simples** (em inglês, *asymptotically simple*) se existe um espaço-tempo $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ fortemente causal e um mergulho $\Phi : M \to \widetilde{M}$ que mergulha M como uma variedade com bordo suave $\partial M \subset \widetilde{M}$ tal que:

- Existe $f \in C^\infty(\widetilde{M})$ tal que, em $\Phi(M)$, $f > 0$ e $\Phi^*(\widetilde{g}) = f^2 g$, isto é, $\widetilde{g}$ é conforme a g em $\Phi(M)$.
- $f = 0$ e $df \neq 0$ em $\Phi(M)$.
- Toda geodésica tipo luz em M possui dois pontos finais em ∂M.

Dizemos que (M, g) é **assintoticamente simples e vazio** (em inglês, *asymptotically simple and empty*) se, além de ser assintoticamente simples, $\mathrm{Ric}_g = 0$ em uma vizinhança aberta de ∂M em M.

Notemos duas consequências imediatas da definição acima:

- Todo parâmetro afim de uma geodésica tipo tempo na métrica g em M assume valores cada vez maiores próximo de ∂M. Isso se deve ao fato de que $\widetilde{g}$ e g são conformes em $\Phi(M)$ com fator de conformidade f^2 e que $f = 0$ em ∂M.
- Se (M, g) for assintoticamente simples e vazio, então ∂M é uma hipersuperfície tipo luz. Isso se deve ao fato de que, como $\widetilde{g}$ e g são conformes em $\Phi(M)$ com fator de conformidade f^2, segue que as curvaturas escalares de $\widetilde{g}$ e g, $\widetilde{S}$ e S, se relacionam da seguinte forma:

  $$f^2 \widetilde{S} - S = -6f \sum_{i,j} (\mathrm{Hess}\, f)_{ij} \widetilde{g}^{ij} + 3 \sum_{i,j} \widetilde{g}^{ij} \partial_i f \partial_j f.$$

  Portanto, na fronteira ∂M, como $f = 0$, $df \neq 0$ e $S = 0$, segue que $\sum_{i,j} \widetilde{g}^{ij} \partial_i f \partial_j f = 0$, o que prova que ∂M é tipo luz.

Agora note que, como ∂M é tipo luz, M está localmente no passado ou no futuro de ∂M. Portanto, ∂M deve possuir duas componentes conexas, que serão denominadas $\mathscr{I}^+$, que são os pontos finais das geodésicas tipo luz em M, e $\mathscr{I}^-$, que são os pontos iniciais das geodésicas tipo luz em M. Não pode haver mais uma componente em ∂M pois, caso contrário, existiria um ponto $p \in M$ tal que existiriam geodésicas tipo luz que apontam para o futuro indo para cada componente, o que chegaria em uma contradição pois o conjunto de vetores tipo luz que apontam para o futuro é conexo.

Definição 3.71. Dizemos que um espaço-tempo (M, g) é **fracamente assintoticamente simples e vazio** (em inglês, *weakly asymptotically simple and empty*) se existe um espaço-tempo assintoticamente simples e vazio (M', g') e uma vizinhança U' de $\partial M'$ de M' tal que $U' \cap M'$ é isométrica a algum conjunto aberto $U \cap M$.

Definição 3.72. Dizemos que um espaço-tempo (M, g) fracamente assintoticamente simples e vazio com uma superfície de Cauchy S é **assintoticamente previsível (para o futuro)** (em inglês, *future asymptotically predictable*) a partir de S se $\mathscr{I}^+ \subset \overline{D^+(S)}^{\widetilde{M}}$, onde $\overline{A}^{\widetilde{M}}$ denota o fecho em $\widetilde{M}$ de um conjunto A.

A seguir, enunciaremos uma série de resultados envolvendo o comportamento dos espaços definidos acima. Para ver as demonstrações desses resultados, veja o excelente livro de (HAWKING; ELLIS, 1973).

Proposição 3.73. Seja (M, g) um espaço-tempo assintoticamente previsível a partir de uma superfície de Cauchy S tal que $\mathrm{Ric}_g(X, X) \geq 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo luz, então uma superfície presa $\Sigma \subset D^+(S)$ não intersecta $J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})$.

Segue do resultado acima que uma superfície presa fechada contida em $D^+(S)$ em um espaço-tempo assintoticamente previsível deve estar contido em $M \backslash J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})$. Com isso, fazemos a seguinte definição:

Definição 3.74. Definimos o **horizonte de eventos** de um espaço-tempo assintoticamente previsível (M, g) como sendo a fronteira de $J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})$, $\partial J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})$.

O horizonte de eventos é a fronteira da região dos pontos que não escapam para o infinito $\mathscr{I}^+$. Além disso, segue que o horizonte de eventos é formada a partir de geodésicas tipo luz que apontam para o passado partindo de $\mathscr{I}^+$ mas que não possuem pontos finais.

Proposição 3.75. Seja (M, g) um espaço-tempo assintoticamente previsível a partir de uma superfície de Cauchy S tal que $\mathrm{Ric}_g(X, X) \geq 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo luz e que possui um horizonte de eventos $\partial J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})$. Então, a expansão das geodésicas tipo luz que geram o horizonte de eventos é não-negativa em $\partial J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M}) \cap D^+(S)$.

Definição 3.76. Dizemos que um espaço-tempo (M, g) é fortemente assintoticamente previsível para o futuro (em inglês, *strongly future asymptotically predictable*) a partir de uma superfície de Cauchy S se $\mathscr{I}^+ \subset \overline{D^+(S)}^{\widetilde{M}}$ e $J^+(S) \cap \overline{J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})} \subset D^+(S)$.

Em outras palavras, em um espaço-tempo fortemente assintoticamente previsível, pode-se prever uma vizinhança do horizonte de eventos partindo de S.

Proposição 3.77. Se (M, g) é um espaço-tempo fortemente assintoticamente previsível com uma hipersuperfície de Cauchy S, então existe um homeomorfismo $\alpha : (0, \infty) \times S \to D^+(S) \backslash S$ tal que, para cada $t \in (0, \infty)$, $S(t) = \{t\} \times S$ é uma hipersuperfície de Cauchy tal que:

- Para quaisquer $t_2 > t_1$, $S(t_2) \subset I^+(S(t_1))$.
- Para cada $t \in (0, \infty)$, a beira de $S(t)$ na variedade conforme $\widetilde{M}$, $D(t)$, é uma esfera tipo espaço de dimensão 2 em $\mathscr{I}^+$ tal que, para $t_2 > t_1$, $D(t_2) \subset I^+(D(t_1))$.
- Para cada $t \in (0, \infty)$, $S(t) \cup (\mathscr{I}^+ \cap J^-(D(t), \widetilde{M}))$ é uma superfície de Cauchy em $\widetilde{M}$.

O resultado acima nos diz que sempre é possível folhear $D^+(S) \backslash S$ por uma família de superfícies tipo espaço $\{S(t)\}_{t>0}$ homeomorfas a S e que intersectam $\mathscr{I}^+$. Podemos pensar nessa família de superfícies como superfícies de tempo constante na região assintoticamente previsível de um espaço-tempo.

Segue da proposição anterior que, para $t > 0$ suficientemente grande, as superfícies $S(t)$ irão intersectar o horizonte de eventos $\partial J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})$ de uma região $D^+(S)$ de um espaço-tempo assintoticamente previsível. Assim, faremos a seguinte definição:

Definição 3.78. Dado um espaço-tempo assintoticamente previsível (M, g), definimos um **buraco negro** na superfície $S(t)$ como sendo uma componente conexa de $\mathscr{B}(t) = S(t) \backslash J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})$.

Em outras palavras, um buraco negro é uma região de $S(t)$ cujos pontos não podem ir para o infinito $\mathscr{I}^+$.

Ao longo do tempo, buracos negros podem se fundir formando novos buracos negros e novos buracos negros podem se formar a partir do colapso de outros corpos. Entretanto, o resultado seguinte nos diz que buracos negros nunca podem se bifurcar.

Proposição 3.79. Seja $\mathscr{B}_1(t_1)$ um buraco negro em $S(t_1)$ e $\mathscr{B}_2(t_2)$ e $\mathscr{B}_3(t_2)$ buracos negros em $S(t_2)$, com $t_2 > t_1$. Se $\mathscr{B}_2(t_2) \cap J^+(\mathscr{B}_1(t_1)) \neq \emptyset$ e $\mathscr{B}_3(t_2) \cap J^+(\mathscr{B}_1(t_1)) \neq \emptyset$, então $\mathscr{B}_2(t_2) = \mathscr{B}_3(t_2)$.

Definição 3.80. Dizemos que um espaço-tempo (M, g) é **regularmente previsível** (em inglês, *regular predictable*) se é fortemente assintoticamente previsível a partir de uma superfície de Cauchy S e se satisfaz as seguintes propriedades:

- $S \cap \overline{J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^3$ menos um conjunto aberto com fecho compacto.
- S é simplesmente conexo.
- Para t suficientemente grande, $S(t) \cap \overline{J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})} \subseteq \overline{J^+(\mathscr{I}^-, \widetilde{M})}$.

Proposição 3.81. Seja (M, g) um espaço-tempo fortemente assintoticamente previsível a partir de uma superfície de Cauchy S e que satisfaz as seguintes condições:

- $S \cap \overline{J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^3$ menos um conjunto aberto com fecho compacto.
- S é simplesmente conexo.

Então, $S(t)$ satisfazem as condições acima e, para cada t, $\partial\mathscr{B}_1(t)$, o bordo em $S(t)$ de um buraco negro $\mathscr{B}_1(t)$, é compacto e conexo.

Teorema 3.82 (Área de Hawking)**.** Seja (M, g) um espaço-tempo regularmente previsível se desenvolvendo a partir de uma superfície de Cauchy S tal que $\mathrm{Ric}_g(X, X) \geq 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo luz. Seja $\mathscr{B}_1(t)$ um buraco negro em $S(t)$ e sejam $\{\mathscr{B}_i(t')\}_{i=1}^N$ os buracos negros em uma superfície $S(t')$, para $t' < t$, tal que $J^+(\mathscr{B}_i(t')) \cap \mathscr{B}_1(t) \neq 0$. Então, se $A_1(t)$ é a área de $\partial\mathscr{B}_1(t)$ e $A_i(t')$ é a área de $\partial\mathscr{B}_i(t')$,

$$A_1(t) \geq \sum_{i=1}^{N} A_i(t'),$$

e se a igualdade for válida, então $N = 1$.

O Teorema acima diz que a área da fronteira de um buraco negro não pode diminuir ao longo do tempo e que, se dois ou mais buracos negros se fundirem para formar um único buraco negro, então a área da fronteira desse novo buraco negro será maior do que a área dos buracos negros originais.

Definição 3.83. Definimos a **região presa** (em inglês, *trapped region*) $\Sigma(t) \subset S(t)$ como sendo o conjunto dos pontos $q \in S(t)$ tal que existe uma superfície presa Σ_q contida em $\Sigma(t)$.

Proposição 3.84. Seja (M, g) um espaço-tempo fortemente assintoticamente previsível se desenvolvendo a partir de uma superfície de Cauchy S tal que $\mathrm{Ric}_g(X, X) \geq 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tipo luz. Então, toda superfície presa $\Sigma \subset D^+(S)$ não intersecta $J^-(\mathscr{I}^+, \widetilde{M})$.

O resultado acima nos diz que a existência de uma região presa $S(t)$ implica a existência de um buraco negro $\mathscr{B}(t)$. Além disso, a região presa estará contida na região de buraco negro para todo t.

Definição 3.85. Chamamos de **horizonte aparente** (em inglês, *apparent horizon*) a fronteira $\partial S_1(t)$ de uma componente conexa $S_1(t)$ da região presa $S(t)$.

Proposição 3.86. Cada componente de $\partial\Sigma(t)$ é uma superfície de dimensão 2 tal que as geodésicas tipo luz que apontam para fora possuem convergência $\chi_\pm$ identicamente nula em $\partial\Sigma(t)$.

Teorema 3.87 (Topologia do Buraco Negro)**.** Toda componente conexa em $J^+(\mathscr{I}^-, \widetilde{M})$ do horizonte $\partial\mathscr{B}(t)$ em um espaço-tempo regularmente previsível e estacionário é homeomorfa a S^2.

A seguir, apresentaremos uma conjectura relacionada aos conceitos acima e que serve de motivação para uma tentativa de justificativa empírica da Desigualdade de Penrose.

Conjectura 3.88 (Censura Cósmica – Fraca)**.** Seja (M, g, B) um conjunto de dados iniciais para o problema de Cauchy para as equações de Einstein, onde (M, g) é uma variedade Riemanniana completa, e o tensor de energia-momento satisfaz a condição de energia dominante. Então, se o desenvolvimento maximal de Cauchy é estendível, para cada $p \in H^+(M)$ em qualquer extensão, ou a condição de causalidade forte é violada em p ou $\overline{I^-(p) \cap M}$ é não-compacto.

Em termos físicos, a Conjectura da Censura Cósmica Fraca diz que, caso haja uma singularidade em um espaço-tempo (M, g), ela não pode ser vista por observadores no infinito.

4 A Desigualdade de Penrose Riemanniana

4.1 Motivação

Uma das principais questões da Relatividade Geral é definir o que é a "massa" e a "energia" de um espaço-tempo $(\overline{M}^4, \overline{g})$. Mesmo sendo possível definir esses conceitos localmente a partir do tensor de energia-momento T, isto é, a partir do tensor de curvatura de $\overline{M}$, só é possível definir esses conceitos globalmente apenas para uma certa classe de espaços-tempo.

Um dos principais resultados envolvendo a massa de um espaço-tempo e a sua geometria são o **Teorema da Massa Positiva**, provado por Schoen e Yau em 1979, e a **Desigualdade de Penrose**, conjectura enunciada por Penrose em 1973 e ainda não provada na sua versão mais geral.

Em ambos os resultados, são consideradas subvariedades tipo espaço (M^3, g) que possuem certas propriedades especiais envolvendo o comportamento assintótico de sua métrica e a sua curvatura escalar.

Para entender a Desigualdade de Penrose, precisamos assumir algumas hipóteses. Seja $(M^3, g, B) \hookrightarrow (\overline{M}^4, \overline{g})$ uma subvariedade tipo espaço de um espaço tempo, onde g é a métrica induzida e B é a segunda forma fundamental de M. Sabemos das equações de vínculo obtidas das Equações de Einstein

$$\overline{G} = T,$$

onde $\overline{G}$ é o tensor de Einstein de $\overline{M}$ e T é o tensor de energia-momento, que

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2}\left(S - \|B\|_g^2 + H^2\right) \\ J &= \operatorname{div}_g B - d(\operatorname{tr}_g B), \end{aligned}$$

onde $\mu \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ é a densidade de energia e $J \in \mathfrak{X}(M)$ é a densidade de corrente. Assumindo a condição de energia dominante, segue da Observação 3.17 que

$$\mu \geq \|J\|_g.$$

Portanto, de agora em diante, assumiremos que o conjunto de dados iniciais (M, g, B) satisfaz a desigualdade acima.

Além disso, assumiremos que (M, g) é **assintoticamente plana**. A grosso modo, podemos dizer que uma variedade é assintoticamente plana se comporta como o espaço $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana fora de um conjunto compacto.

Agora vamos ao argumento de Penrose para a conjectura da Desigualdade: considere $(\overline{M}, \overline{g})$ um espaço-tempo que satisfaz o problema de Cauchy para as equações de Einstein com dados iniciais $(M, g, 0)$. Além disso, suponha que $\overline{M}$ possua densidade de energia não-negativa em todo ponto. Então, pelas equações de vínculo de Einstein, segue que M possui curvatura escalar não-negativa em todo ponto. Também suponha que (M, g) possui um horizonte aparente mais externo de área A, horizonte de eventos de área A_i e massa m_i. Contanto que uma singularidade não se forme, é assumido que o espaço-tempo convirja para algum espaço estacionário. Entretanto, sabe-se que as únicas soluções no vácuo que são estacionárias e que possuem buracos negros são as métricas de Kerr

$$\begin{aligned}
\overline{g} &= \alpha\left(\frac{dr^2}{\beta} + d\theta^2\right) - \left(1 - \frac{2m_\infty r}{\alpha}\right) dt^2 - \frac{4m_\infty ar\sin^2(\theta)}{\alpha}\, dt\, d\phi + \\
&\quad + \left(r^2 + a^2 + \frac{2m_\infty a^2 r\sin^2(\theta)}{\alpha}\right)\sin^2(\theta)\, d\phi^2, \\
\alpha &= r^2 + a^2\cos^2(\theta) \\
\beta &= r^2 - 2m_\infty r + a^2,
\end{aligned}$$

onde m_∞ e a são constantes,

$$\Omega = \{(r, \theta, \phi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi); \alpha > 2mr \text{ e } \beta > 0\}$$

e $(t, r, \theta, \phi) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \backslash \Omega\right)$. Note que para $a = 0$, $\overline{g}$ é a métrica de Schwarzschild. Pode-se provar que o espaço-tempo de Kerr satisfaz a seguinte desigualdade:

$$A_\infty = 8\pi\left(m_\infty^2 + \sqrt{m_\infty^4 - J^2}\right) \leq 16\pi m_\infty^2,$$

onde A_∞ é a área do horizonte de eventos do buraco negro de Kerr, m_∞ é a massa no infinito e $J = m_\infty a$ é o momento angular.

Pelo Teorema da Área de Hawking, a área das seções transversais do horizonte de eventos é crescente. Portanto, $A_\infty \geq A_i$. Além disso, presume-se que alguma energia se irradia para o infinito. Logo, espera-se que $m_i \geq m_\infty$. Daí,

$$A_i \leq A_\infty \leq 16\pi m_\infty^2 \leq 16\pi m_i^2 \implies m_i \geq \sqrt{\frac{A_i}{16\pi}}.$$

Pode-se provar que o horizonte aparente é a fronteira da região em M que contém superfícies presas e superfícies marginalmente presas, isto é, aquelas que satisfazem $\chi^\pm \leq 0$. Como o horizonte de eventos contém o horizonte aparente, segue que $A_i \geq A$ e

$$m_i \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}.$$

Assim, assumindo a validade da Conjectura da Censura Cósmica e mais algumas hipóteses físicas, Penrose conjecturou que dada uma variedade Riemanniana completa e assintoticamente plana (M^3, g) de massa total m com curvatura escalar não-negativa e que possui uma esfera mínima mais externa de área A, então,

$$m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}.$$

O resultado acima, conhecido com **Desigualdade de Penrose Riemanniana**, foi primeiramente provado por Huisken e Ilmanen, anunciado em 1997 e publicado em 2001 (ver (HUISKEN; ILMANEN, 2001)), e uma outra prova foi obtida por Bray também em 2001 (ver (BRAY, 2001)). Utilizando métodos isoperimétricos e assumindo uma hipótese adicional envolvendo o método isoperimétrico a ser descrito, mostraremos um resultado parcial da Desigualdade de Penrose Riemanniana, também provado por Bray em 1999.

4.2 Variedades assintoticamente planas

Nesta e nas próximas seções, faremos todos os resultados preliminares necessários para a demonstração do resultado principal.

Definição 4.1. Dizemos que (M, g) é **assintoticamente plana** (em inglês, *asymptotically flat*) se existe $r_0 > 0$ e um conjunto compacto $K \subseteq M$ e um difeomorfismo $\Phi : M \backslash K \to \mathbb{R}^3 \backslash \overline{B_{r_0}(0)}$ tal que, no sistema de coordenadas definido por Φ,

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

onde

- $g_{ij} = \delta_{ij} + O(\|x\|^{-p})$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$
- $|\partial_k g_{ij}| = O(\|x\|^{-p-1})$ para todo $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$
- $|\partial_k \partial_l g_{ij}| = O(\|x\|^{-p-2})$ para todo $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$
- $|S(g)| = O(\|x\|^{-q})$, onde $S(g)$ é a curvatura escalar de (M, g),

para algum $p > \dfrac{1}{2}$ e $q > 3$.

Lembremos que uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é $O(g)$ (escrevemos $f = O(g)$) se existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \text{ para todo } x \in M.$$

Observação 4.2. Sob as hipóteses acima, podemos garantir a existência do limite

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \sum_{i,j} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii})\, \nu^j\, d\sigma_r,$$

onde S_r é a esfera de raio r centrada na origem e ν é o vetor unitário normal a S_r em $\mathbb{R}^3$ e $d\sigma_r$ é a forma de volume de S_r.

Note que

$$S(g) = \sum_{i,j} \partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_j\partial_j g_{ii} + O(\|x\|^{-2p-2}).$$

De fato, como $\Gamma_{ij}^k = \sum_l \frac{g^{kl}}{2}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)$, podemos escrever

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right) + O((g-\delta)\partial g).$$

Além disso, segue da expressão de R_{ijk}^l que

$$R_{ij} = \sum_l \partial_l \Gamma_{ij}^l - \partial_j \Gamma_{il}^l + \left(\sum_m \Gamma_{ij}^m \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{jm}^l\right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,j} \partial_j \Gamma_{ii}^j - \partial_i \Gamma_{ij}^j + O((g-\delta)\partial^2 g) \\ &= \sum_{i,j} \partial_i\partial_j g_{ij} - \frac{1}{2}\partial_j\partial_j g_{ii} - \frac{1}{2}\partial_i\partial_i g_{jj} + O((g-\delta)\partial^2 g) + O((\partial g)^2) \\ &= \sum_{i,j} \partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_i\partial_i g_{jj} + O((g-\delta)\partial^2 g) + O((\partial g)^2). \end{aligned}$$

Utilizando as hipóteses sobre a métrica, obtemos o resultado.

Como $|S(g)| = O(\|x\|^{-q})$ e com $q, 2p+2 > 3$, segue que $\left|\sum_{i,j} \partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_j\partial_j g_{ii}\right|$ é integrável em M.

Portanto, tomando $r_0 \in (0,\infty)$ tal que

$$\int_{M \setminus B_{r_0}(0)} \left|\sum_{i,j} \partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_j\partial_j g_{ii}\right| dx < \varepsilon,$$

segue que para todo $r_1, r_2 \in (0,\infty)$ tais que $r_2 > r_1$ que

$$\int_{S_{r_2}} \sum_{i,j} \left(\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}\right) \nu^j \, d\sigma_{r_2} - \int_{S_{r_1}} \sum_{i,j} \left(\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}\right) \nu^j \, d\sigma_{r_1} = \int_{B_{r_2}(0)\setminus B_{r_1}(0)} \sum_{i,j} \partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_j\partial_j g_{ii} \, dx.$$

Logo, para $r_2 > r_1 \geq r_0$,

$$\left|\int_{B_{r_2}(0)\setminus B_{r_1}(0)} \sum_{i,j} \partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_j\partial_j g_{ii} \, dx\right| \leq \int_{M\setminus B_{r_1}(0)} \left|\sum_{i,j} \partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_j\partial_j g_{ii}\right| dx < \varepsilon,$$

o que prova que $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{S_r} \sum_{i,j} \left(\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}\right) \nu^j \, d\sigma_r$ existe.

Como o limite acima existe, podemos definir a massa de uma variedade assintoticamente plana.

Definição 4.3. Seja (M, g) assintoticamente plana. Definimos a **massa ADM** de M por

$$m_{\text{ADM}}(g) = \frac{1}{16\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \sum_{i,j} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii})\, \nu^j \, d\sigma_r.$$

Definição 4.4. Dizemos que M é conformemente plana se existe $r_0 > 0$, um conjunto compacto $K \subseteq M$ e um sistema de coordenadas $\Phi : M\backslash K \to \mathbb{R}^3\backslash\overline{B_{r_0}(0)}$ tal que, nas coordenadas de Φ, $g_{ij} = u^4\delta_{ij}$, onde $u : \mathbb{R}^3\backslash\overline{B_{r_0}(0)} \to \mathbb{R}$ é uma função harmônica.

Proposição 4.5. Se $g = u^4 g_{\text{euc}}$, então a curvatura escalar $S(g)$ é dada por

$$S(g) = -8u^{-5}\Delta u,$$

onde Δ é o Laplaciano em $\mathbb{R}^3$.

Demonstração. A demonstração segue diretamente da Equação de Yamabe (veja o Capítulo 5 de (AUBIN, 1998) para mais detalhes) que relaciona as curvaturas escalares de duas métricas conformemente equivalentes. De fato, dadas duas métricas Riemannianas g_1 e $g_2 = u^4 g_1$, as suas curvaturas escalares são relacionadas por

$$-8\Delta u + S(g_1) = S(g_2)u^5.$$

Tomando $g_1 = g_{\text{euc}}$ e $g_2 = g$, obtemos o resultado. □

Teorema 4.6 (Schoen, Yau)**.** Seja (M, g) completa, assintoticamente plana e tal que $S(g) \geq 0$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma métrica Riemanniana $\overline{g}$ tal que $(M, \overline{g})$ é assintoticamente plana, conformemente plana fora de um conjunto compacto, $S(\overline{g}) = 0$ e

$$m_{\text{ADM}}(\overline{g}) < m_{\text{ADM}}(g) + \varepsilon.$$

Como a métrica $\overline{g}$ obtida pelo Teorema 3.6 é conformemente plana, $\Delta u = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{B_{r_0}(0)}$. Além disso, como $(M, \overline{g})$ é assintoticamente plana, $\lim_{\|x\|\to\infty} u(x) = 1$. Expandindo u em termos de harmônicos esféricos do $\mathbb{R}^n$ (para mais informações sobre esse assunto, veja (FOLLAND, 1995)), obtemos

$$u(x) = 1 + \frac{a}{2\|x\|} + O(\|x\|^{-2}).$$

Como podemos escrever

$$\overline{g} = \left(\left(1 + \frac{a}{2\|x\|}\right)^4 + f\right)\delta,$$

com $f = O(\|x\|^{-2})$, temos que

$$\begin{aligned}
\partial_k \overline{g}_{ij} &= -\frac{2a}{\|x\|^3}\left(1+\frac{a}{2\|x\|}\right)^3 \cdot x^k + \partial_k f \\
\sum_i \left(\partial_i \overline{g}_{ij} - \partial_j \overline{g}_{ii}\right) &= -\frac{2a}{\|x\|^3}\left(1+\frac{a}{2\|x\|}\right)^3 \sum_i \left(x^i \delta_{ij} - x^j \delta_{ii}\right) + \sum_i \left(\partial_i f \delta_{ij} - \partial_j f \delta_{ii}\right) \\
\sum_{i,j} \left(\partial_i \overline{g}_{ij} - \partial_j \overline{g}_{ii}\right) \nu^j &= \frac{4a}{\|x\|^2}\left(1+\frac{a}{2\|x\|}\right)^3 - 2\sum_j \frac{x^j \partial_j f}{\|x\|}.
\end{aligned}$$

Pela hipótese de $\overline{g}$ ser assintoticamente plana, segue que $\partial_j f = O(\|x\|^{-(p+1)})$ e, portanto,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \sum_j \frac{x^j \partial_j f}{\|x\|}\, d\sigma_r = 0$$

quando $r \to \infty$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \sum_{i,j} \left(\partial_i \overline{g}_{ij} - \partial_j \overline{g}_{ii}\right) \nu^j\, d\sigma_r &= \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \frac{4a}{r^2}\left(1+\frac{a}{2r}\right)^3 d\sigma_r \\
&= \lim_{r\to\infty} 4a\left(1+\frac{a}{2r}\right)^3 \cdot 4\pi r^2 = 16\pi a,
\end{aligned}$$

o que prova que $m_{\text{ADM}} = a$.

A seguir, demonstraremos uma versão mais forte do Teorema anterior que afirma que podemos escolher uma nova métrica $\widetilde{g}$ tal que $|m_{\text{ADM}}(\widetilde{g}) - m_{\text{ADM}}(g)| < \varepsilon$ e que $\widetilde{g}$ seja "suficientemente parecida" com g.

Definição 4.7. Sejam g_1 e g_2 duas métricas Riemannianas sobre M. Dizemos que g_1 e g_2 são **ε-quase isométricas** (em inglês, *ε-quasi isometric*) se para todo $p \in M$,

$$\left|\frac{(g_2)_p(v,v)}{(g_1)_p(v,v)} - 1\right| < \varepsilon \text{ para todo } v \in T_pM\backslash\{0\}.$$

Definiremos uma métrica $\widetilde{g}$ ε-quase isométrica à métrica original g tal que $\widetilde{g}$ é esfericamente simétrica com curvatura escalar identicamente nula fora de um conjunto compacto. De fato, tome $R > r_0$ e $\delta > 0$ e considere

$$v(x) = A + \frac{B}{\|x\|},$$

onde $A, B > 0$ são tais que

$$\begin{aligned}
A + \frac{B}{R} &= \sup_{\|x\|=R} u(x) + \delta \\
A + \frac{B}{2R} &= \inf_{\|x\|=2R} u(x) - \delta.
\end{aligned}$$

Defina a função w como

$$w(x) = \begin{cases} u(x) & , \text{ se } \|x\| < R \\ \min(u(x), v(x)) & , \text{ se } R \le \|x\| \le 2R \\ v(x) & , \text{ se } \|x\| > 2R \end{cases}.$$

Segue da definição de A e B que w é contínua em $\mathbb{R}^3$.

É fato comum que v é uma função harmônica em $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Além disso, como u é harmônica em $\mathbb{R}^3$, $\min(u,v)$ é fracamente superharmônica e, portanto, w também será fracamente superharmônica.

Agora considere

$$\widetilde{w}(x) := (w * b)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} w(x-y)b(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^3} w(y)b(x-y)\,dy,$$

onde b é uma função C^∞, positiva, esfericamente simétrica e de suporte compacto em $B_\delta(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} b(x)\,dx = 1$. Então, $\widetilde{w}$ é uma função de classe C^∞ e é superharmônica pois

$$\Delta\widetilde{w}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} w(y)\Delta b(x-y)\,dy \leq 0.$$

Além disso, como u é harmônica, segue que para todo $x \in B_{R-\delta}(0)$ e $y \in B_\delta(0)$,

$$\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\| < R - \delta + \delta = R \implies w(x-y) = u(x-y)$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} w(x-y)b(y)\,dy = \int_{B_\delta(0)} w(x-y)b(y)\,dy = \int_{B_\delta(0)} u(x-y)b(y)\,dy \\
&\overset{z=x-y}{=} \int_{B_\delta(x)} u(z)b(x-z)\,dz = \int_0^\delta b(r)\left(\int_{\partial B_r(x)} u\,d\sigma\right)dr \\
&= u(x)\int_0^\delta |\partial B_r(x)| b(r)\,dr = u(x)\int_0^\delta b(r)\left(\int_{\partial B_r(0)} d\sigma\right)dr \\
&= u(x)\int_{B_\delta(0)} b(z)\,dz = u(x).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, como v é harmônica, segue que para todo $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{B_{2R+\delta}(0)}$ e $y \in B_\delta(0)$,

$$\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\| > 2R + \delta - \delta = 2R \implies w(x-y) = v(x-y)$$

e portanto, $\widetilde{w}(x) = v(x)$.

Agora seja $\widetilde{g}$ definida da seguinte forma:

$$\widetilde{g} := \begin{cases} \overline{g} & , \text{ se } \|x\| \leq r_0 \\ \widetilde{w}^4\delta_{ij} & , \text{ se } \|x\| > r_0 \end{cases}.$$

Então, pela Proposição 3.5, em $\mathbb{R}^3\backslash\overline{B_{r_0}(0)}$,

$$S(\widetilde{g}) = -8\widetilde{w}^{-5}\Delta\widetilde{w} \geq 0,$$

pois $\widetilde{w}$ é superharmônica.

Pelo fato de que $\lim_{\|x\| \to \infty} u(x) = 1$ e pela definição de v, podemos tomar R suficientemente grande e δ suficientemente pequeno de tal forma que $\widetilde{g}$ seja ε-quase isométrica à g e

$$|m_{\text{ADM}}(\widetilde{g}) - m_{\text{ADM}}(\overline{g})| < \varepsilon.$$

A afirmação acima segue do fato de que, ao fazer o cálculo de $m_{\text{ADM}}(\widetilde{g})$ de maneira análoga ao cálculo de $m_{\text{ADM}}(\overline{g})$, obtemos $m_{\text{ADM}}(\widetilde{g}) = 2AB$. Logo, escolhendo R suficientemente grande e δ suficientemente pequeno, obtemos A próximo de 1 e B próximo de $\dfrac{m_{\text{ADM}}(\overline{g})}{2}$. Assim, provamos o seguinte Teorema.

Teorema 4.8. Seja (M^n, g), $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana completa, assintoticamente plana e com $S(g) \geq 0$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma métrica $\widetilde{g}$ que é ε-quase isométrica à g tal que $(M, \widetilde{g})$:

- Possui curvatura escalar não-negativa e identicamente nula fora de um conjunto compacto.
- É assintoticamente plana.
- $|m_{\text{ADM}}(\widetilde{g}) - m_{\text{ADM}}(g)| < \varepsilon$.

Observando a demonstração do Teorema acima, podemos fazer a seguinte definição de modo a simplificar o seu enunciado.

Definição 4.9. Definimos a variedade de Schwarzschild de massa m como $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, h)$, onde

$$h = \left(1 + \frac{m}{2\|x\|}\right)^4 g_{\text{euc}}$$

e g_{euc} é a métrica Euclidiana usual. Chamamos a métrica h de métrica tipo espaço de Schwarzschild.

Na seguinte seção enunciaremos algumas propriedades importantes envolvendo esta métrica.

Definição 4.10. Dizemos que uma variedade Riemanniana (M^3, g) é Schwarzschild com massa m no infinito se $(M \backslash K, g)$ é isométrica à $(\mathbb{R}^3 \backslash B, h)$, onde $K \subseteq M$ é algum conjunto compacto e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ é alguma bola fechada centrada na origem.

Com essas definições acima, podemos reescrever o Teorema da seguinte forma:

Teorema 4.11. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa, assintoticamente plana, com curvatura escalar não-negativa e de massa total m_0. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma métrica $\widetilde{g}$ que é ε-quase isométrica à g tal que $(M, \widetilde{g})$:

- Possui curvatura escalar não-negativa.
- É Schwarzschild com massa m no infinito.
- $|m - m_0| < \varepsilon$.

Portanto, como o Teorema da Massa Positiva e a Desigualdade de Penrose são condições fechadas, segue do Teorema anterior que podemos supor sem perda de generalidade que as variedades são Schwarzschild no infinito.

4.3 O problema isoperimétrico para a Desigualdade de Penrose

Nesta seção, descreveremos a estratégia para demonstrar o resultado principal desta dissertação.

Definição 4.12. Suponha que M seja assintoticamente plana, completa e tal que M possui apenas uma esfera mínima maximal Σ_0 e $\widetilde{M}$ o fecho da componente de $M\backslash\Sigma_0$ que possui o fim assintoticamente plano. Definimos a função A da seguinte forma:

$$A(V) := \inf_{\Sigma} \left\{\mathcal{A}(\Sigma); \Sigma \text{ contém um volume } V \text{ fora de } \Sigma\right\},$$

onde Σ_0 é a fronteira de alguma região tridimensional em M e Σ é uma superfície em $\widetilde{M}$ na mesma classe de homologia de $\widetilde{M}$ que Σ_0 e $\mathcal{A}(\Sigma)$ é a área de Σ.

Se Σ conter um volume V fora do horizonte Σ_0 e $\mathcal{A}(\Sigma) = A(V)$, diremos que Σ minimiza a área com a restrição dada.

Na formulação da função A, não é excluída o caso em que Σ possui mais de uma componente conexa. Entretanto, uma de suas componentes deverá conter o horizonte. Com isso, impomos a seguinte condição:

Condição. (M, g) possui um único horizonte Σ_0 e, para cada $V > 0$, se um ou mais minimizantes de área existir para V, então pelo menos um desses minimizantes para o volume V deverá ter exatamente uma componente conexa.

Na condição acima, não é imposta a existência de um minimizante de área para o volume V. Entretanto, com a condição acima, é garantida a existência de um minimizante de área para cada $V \geq 0$ a partir do comportamento de A. Com isso, é possível provar a desigualdade de Penrose Riemanniana.

Teorema 4.13 (Desigualdade de Penrose Riemanniana)**.** Seja (M, g) completa, com curvatura escalar não-negativa, Schwarzschild com massa m no infinito e satisfazendo a Condição acima. Então,

$$m \geq \sqrt{\frac{\mathcal{A}(\Sigma_0)}{16\pi}}.$$

A estratégia da demonstração será a seguinte:

- Obteremos propriedades envolvendo a função A supondo que os tais minimizantes existam, como desigualdades envolvendo a variação da área dessas superfícies.
- Partindo do fato obtido de que podemos considerar variedades que são Schwarzschild no infinito, estudaremos mais a fundo as propriedades do espaço de Schwarzschild $(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, h)$ e, a partir daí, encontraremos uma solução para o problema isoperimétrico para esse espaço.
- Após resolvermos o problema isoperimétrico para a variedade de Schwarzschild, tentaremos resolver, com a ajuda de um resultado preliminar, o problema isoperimétrico inicial para volumes suficientemente grandes utilizando o caso anterior dado a seu comportamento no infinito. Provado isso, poderemos obter um comportamento assintótico de uma função a ser definida.
- Utilizaremos resultados preliminares para obter a existência de solução um problema isoperimétrico auxiliar e, a partir desse problema auxiliar, provar a existência dos minimizantes para o problema inicial.
- Por fim, utlizando o comportamento assintótico e o comportamento do horizonte, chegaremos à desigualdade desejada.

4.4 Propriedades da função A

4.4.1 Propriedades da função A

Teorema 4.14. Seja (M, g) completa, com curvatura escalar não-negativa, Schwarzschild no infinito com massa m e que satisfaz a Condição 1. Então, a função $A(V)$ definida anteriormente satisfaz

$$A''(V) \leq \frac{4\pi}{A(V)^2} - \frac{3A'(V)^2}{4A(V)}$$

no sentido das funções de comparação, isto é, para todo $V_0 \geq 0$ existe uma função $A_{V_0} \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

1. $A_{V_0}(V) \geq A(V)$ para todo $V \geq 0$
2. $A_{V_0}(V_0) = A(V_0)$
3. $A''_{V_0}(V_0) \leq \dfrac{4\pi}{A_{V_0}(V_0)^2} - \dfrac{3A'_{V_0}(V_0)}{4A_{V_0}(V_0)}$.

Demonstração. Para cada $V_0 \geq 0$, considere uma variação normal $F : \Sigma(V_0)\times(-\delta, \delta) \to M$ em $\Sigma(V_0)$ e defina $\Sigma_{V_0}(t) := F(\Sigma(V_0)\times\{t\})$ a superfície obtida ao fluir $\Sigma(V_0)$ de acordo com a variação normal no tempo t. Sem perda de generalidade, parametrizemos as superfícies $\Sigma_{V_0}(t)$ de acordo com o volume V e escreveremos $\Sigma_{V_0}(V)$, onde $\Sigma_{V_0}(V_0)$ é a superfície original $\Sigma(V_0)$. Considere a área de cada superfície $\Sigma_{V_0}(V)$, $A_{V_0}(V) = \mathcal{A}(\Sigma_{V_0}(V))$. Então,

$$A_{V_0}(V_0) = \mathcal{A}(\Sigma_{V_0}(V_0)) = \mathcal{A}(\Sigma(V_0)) = A(V_0),$$

pois $\Sigma(V_0)$ é minimizante e $A_{V_0}(V) \geq A(V)$ pois $\Sigma_{V_0}(V)$ não é necessariamente uma superfície minimizante.

Voltando para a variável t, como $A_{V_0}(t) = \int_{\Sigma_{V_0}(t)} d\sigma$, segue do Teorema 2.52 que

$$A'_{V_0}(t) = \frac{d}{dt}\int_{\Sigma_{V_0}(t)} d\sigma = \int_{\Sigma_{V_0}(t)} H(t)\, d\sigma,$$

onde $H(t)$ é a curvatura média da superfície $\Sigma_{V_0}(t)$. Além disso, como

$$V'(t) = \int_{\Sigma_{V_0}(t)} d\sigma = A_{V_0}(t),$$

segue que em $t = 0$,

$$\frac{dA_{V_0}}{dV} = \frac{dA_{V_0}}{dt}\frac{dt}{dV} = \frac{dA_{V_0}}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right)^{-1} = \frac{\int_{\Sigma(V_0)} H\, d\sigma}{\int_{\Sigma(V_0)} d\sigma} = H,$$

pois $\Sigma(V_0)$ possui curvatura média constante. Derivando novamente em relação a V,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2A_{V_0}}{dV^2} &= \frac{d}{dV}\left(\frac{dA_{V_0}}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right)^{-1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dA_{V_0}}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right)^{-1}\right)\frac{dt}{dV} \\
&= \left(\frac{d^2A_{V_0}}{dt^2}\frac{dV}{dt} - \frac{dA_{V_0}}{dt}\frac{d^2V}{dt^2}\right)\left(\frac{dV}{dt}\right)^{-2}\frac{dt}{dV} \\
&= \left(\frac{d^2A_{V_0}}{dt^2} - \frac{dA_{V_0}}{dV}\frac{d^2V}{dt^2}\right)\left(\frac{dV}{dt}\right)^{-2}.
\end{aligned}$$

Em $t = 0$,

$$\begin{aligned}
A_{V_0}(V_0)^2 A''_{V_0}(V_0) &= A''_{V_0}(t) - HV''(t) \\
&= \frac{d}{dt}\int_{\Sigma(V_0)} H\, d\sigma - H\frac{d}{dt}\int_{\Sigma(V_0)} d\sigma \\
&= \int_{\Sigma(V_0)} \frac{dH}{dt}\, d\sigma \\
&= \int_{\Sigma(V_0)} -\|B\|^2 - \mathrm{Ric}(\nu,\nu)\, d\sigma,
\end{aligned}$$

onde B é a segunda forma fundamental de $\Sigma(V_0)$, Ric é o tensor de Ricci de M e ν é o vetor normal a $\Sigma(V_0)$. Pelo Corolário 2.46, e pela hipótese de $S(g) \geq 0$,

$$\begin{aligned}
A_{V_0}(V_0)^2 A''_{V_0}(V_0) &= \int_{\Sigma(V_0)} -\|B\|^2 - \mathrm{Ric}(\nu,\nu)\, d\sigma \\
&= \int_{\Sigma(V_0)} -\|B\|^2 - \frac{S(g)}{2} + K + \frac{\|B\|^2}{2} - \frac{H^2}{2}\, d\sigma \\
&\leq \int_{\Sigma(V_0)} K - \frac{\|B\|^2}{2} - \frac{H^2}{2}\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet (ver o Teorema 9.7 em (LEE, 1997)),

$$\int_{\Sigma(V_0)} K\, d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma(V_0)) \leq 4\pi.$$

Portanto,

$$A_{V_0}(V_0)^2 A''_{V_0}(V_0) \leq 4\pi - \frac{1}{2}\int_{\Sigma(V_0)} \|B\|^2 + H^2\, d\sigma.$$

Além disso, como $\|B\|^2 \geq \dfrac{H^2}{2}$,

$$A_{V_0}(V_0)^2 A''_{V_0}(V_0) \leq 4\pi - \frac{3}{4}\int_{\Sigma(V_0)} H^2\, d\sigma = 4\pi - \frac{3}{4}H^2 A_{V_0}(V_0).$$

Portanto,

$$A''_{V_0}(V_0) \leq \frac{4\pi}{A_{V_0}(V_0)^2} - \frac{3A'_{V_0}(V_0)^2}{4A_{V_0}(V_0)},$$

o que prova o Teorema. $\square$

Podemos reescrever a expressão obtida no Teorema anterior em uma forma mais conveniente para algumas aplicações. De fato, seja $F(V) := A(V)^{3/2}$. Então, definindo $F_{V_0}(V) = A_{V_0}(V)^{3/2}$, obtemos que para todo $V_0 \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_{V_0}(V_0) &= A_{V_0}(V_0)^{3/2} = A(V_0)^{3/2} = F(V_0) \\ F_{V_0}(V) &= A_{V_0}(V)^{3/2} \geq A(V)^{3/2} = F(V) \text{ para todo } V \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F''_{V_0}(V_0) &= \left((A_{V_0}(V))^{3/2}\right)''\Big|_{V=V_0} = \left(\frac{3}{2}A_{V_0}(V)^{1/2}A'_{V_0}(V)\right)'\Big|_{V=V_0} \\ &= \left(\frac{3}{4}A_{V_0}(V)^{-1/2}A'_{V_0}(V)^2 + \frac{3}{2}A_{V_0}(V)^{1/2}A''_{V_0}(V)\right)\Big|_{V=V_0} \\ &\leq \frac{3A'_{V_0}(V_0)^2}{4A_{V_0}(V_0)^{1/2}} + \frac{3}{2}\cdot A_{V_0}(V_0)^{1/2}\cdot\left(\frac{4\pi}{A_{V_0}(V_0)^2} - \frac{3A'_{V_0}(V_0)^2}{4A_{V_0}(V_0)}\right) \\ &= \frac{6\pi}{A_{V_0}(V_0)^{3/2}} - \frac{3}{8}\frac{A'_{V_0}(V_0)^2}{A_{V_0}(V_0)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{6F_{V_0}(V_0)}\left(36\pi - \frac{9}{4}A_{V_0}(V_0)A'_{V_0}(V_0)^2\right) = \frac{36\pi - F'_{V_0}(V_0)^2}{6F_{V_0}(V_0)}, \end{aligned}$$

o que prova que $F''(V) \leq \dfrac{36\pi - F'(V)^2}{6F(V)}$ no sentido das funções de comparação.

4.4.2 A função m_M

Definição 4.15. Para cada $V \geq 0$, definimos a função de massa de M, m_M, como

$$m_M(V) = \frac{F(V)^{1/3}}{144\pi^{3/2}}\left(36\pi - F'(V)^2\right).$$

Mesmo sabendo que F é contínua, a sua derivada F' pode não existir. Entretanto, como F é não-decrescente, a sua derivada F' existirá quase todo ponto (mais precisamente, exceto em uma quantidade enumerável de pontos). Ainda mais, as suas derivadas laterais, F'_- e F'_+, sempre existem. De fato, dado $V_0 \geq 0$, seja F_{V_0} a função de comparação de F em V_0. Como F''_{V_0} é uniformemente limitada por baixo em um intervalo limitado, é possível adicionar um termo quadrático em F de tal forma que essa nova função seja convexa. Além disso, segue diretamente da propriedade das funções de comparação que, para todo $V \geq 0$, $F'_+(V) \leq F'_-(V)$.

Observação 4.16. Nos pontos onde $F'(V)$ não existe, podemos definir $m_M(V)$ como sendo todos os valores do intervalo $[F'_+(V), F'_-(V)]$, assim, tornando m uma função multivariada. A definição é consistente pois, nos pontos onde $F'(V)$ está bem definida, as suas derivadas laterais serão iguais.

Teorema 4.17. A função massa $m_M(V)$ definida anteriormente é não-decrescente.

Para auxiliar na demonstração do Teorema acima, dado $\delta \neq 0$, considere o operador de diferença finita Δ_δ definido da seguinte forma:

$$\Delta_\delta(f(x)) = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}.$$

Lema 4.18. O operador de diferença finita possui as seguintes propriedades:

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\Delta_\delta(g(x))\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \Delta_{-\delta}(f(x))g(x)\,dx$, onde f e g são funções integráveis em $\mathbb{R}$.

2. $\Delta_\delta((fg)(x)) = \Delta_\delta(f(x))g(x) + f(x+\delta)\Delta_\delta(g(x))$ para quaisquer funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Demonstração. 1. Por definição,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\Delta_\delta(g(x))\,dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta}\,dx \\ &= \frac{1}{\delta}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x+\delta)\,dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx\right).\end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variável $y = x + \delta$ na primeira integral, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x+\delta)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(y-\delta)g(y)\,dy$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\Delta_\delta(g(x))\,dx &= \frac{1}{\delta}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-\delta)g(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-\delta) - f(x)}{\delta} \cdot g(x)\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \Delta_{-\delta}(f(x))g(x)\,dx.\end{aligned}$$

2. A demonstração é imediata. □

Demonstração do Teorema 4.17. Iremos provar que $m'_M(V) \geq 0$ no sentido das distribuições. De fato, podemos escrever a função m_M como

$$m_M(V) = F(V)^{1/3}\left(36\pi - F'_+(V)^2\right)$$

pois $F'_+(V) = F'(V)$ exceto em uma quantidade enumerável de pontos. Além disso, como m_M está definido em $[0, \infty)$, devemos definir $m_M(V)$ para $V < 0$; defina $F(V) = F(0)$, se $V < 0$. Então, $F'(V) = 0$ para $V < 0$ e

$$F''(V) \leq \frac{36\pi - F'(V)^2}{6F(V)}$$

para todo $V \in \mathbb{R}$ no sentido das funções de comparação.

Para provar que $m'_M(V) \geq 0$ no sentido das distribuições, devemos provar que

$$-\int_{\mathbb{R}} m_M(V)\phi'(V)\, dV \geq 0$$

para toda função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $\phi \geq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}} m_M(V)\phi'(V)\, dV &= -\int_{\mathbb{R}} F(V)^{1/3}\left(36\pi - F'_+(V)^2\right)\phi'(V)\, dV \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \lim_{\delta\to 0^+} F(V)^{1/3}\left(36\pi - \Delta_\delta(F(V))^2\right)\Delta_\delta(\phi(V))\, dV \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\delta\to 0^+} \Delta_{-\delta}\left(F(V)^{1/3}\left(36\pi - (\Delta_\delta(F(V)))^2\right)\right)\phi(V)\, dV. \end{aligned}$$

Pelo Lema anterior,

$$\begin{aligned} \Delta_{-\delta}\left(F(V)^{1/3}\left(36\pi - (\Delta_\delta(F(V)))^2\right)\right) &= \Delta_{-\delta}\left(F(V)^{1/3}\right)\left(36\pi - (\Delta_\delta(F(V)))^2\right) + \\ &\quad + F(V-\delta)^{1/3}\Delta_{-\delta}\left(36\pi - (\Delta_\delta(F(V)))^2\right) \\ &= \Delta_{-\delta}\left(F(V)^{1/3}\right)\left(36\pi - (\Delta_\delta(F(V)))^2\right) - \\ &\quad - F(V-\delta)^{1/3}\Delta_{-\delta}\left((\Delta_\delta(F(V)))^2\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\to 0^+} \Delta_{-\delta}\left(F(V)^{1/3}\left(36\pi - (\Delta_\delta(F(V)))^2\right)\right) = \lim_{\delta\to 0^+} F(V)^{1/3}\Big(-\Delta_\delta\left((\Delta_\delta(F(V)))^2\right) + \\ + F'_-(V)\frac{36\pi - (\Delta_\delta(F(V)))^2}{3F(V)}\Big). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} F_{V_0}(V_0+\delta) = \mathcal{A}(\Sigma_{V_0}(V_0+\delta))^{3/2} &\geq \mathcal{A}(\Sigma_{V_0+\delta}(V_0+\delta))^{3/2} = F(V_0+\delta) \\ F_{V_0}(V_0-\delta) &\geq F(V_0-\delta) \\ F_{V_0}(V_0) &= F(V_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_\delta(F(V_0-\delta)) = \frac{F(V_0)-F(V_0-\delta)}{\delta} &\geq \frac{F_{V_0}(V_0)-F_{V_0}(V_0-\delta)}{\delta} = \Delta_\delta(F_{V_0}(V_0-\delta))\\ \Delta_\delta(F(V_0)) = \frac{F(V_0+\delta)-F(V_0)}{\delta} &\leq \frac{F_{V_0}(V_0+\delta)-F_{V_0}(V_0)}{\delta} = \Delta_\delta(F_{V_0}(V_0)),\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\Delta_{-\delta}\left((\Delta_\delta(F(V_0)))^2\right) &= \frac{(\Delta_\delta(F(V_0-\delta)))^2-(\Delta_\delta(F(V_0)))^2}{-\delta}\\ &\leq \frac{(\Delta_\delta(F_{V_0}(V_0-\delta)))^2-(\Delta_\delta(F_{V_0}(V_0)))^2}{-\delta} = \Delta_{-\delta}\left((\Delta_\delta(F_{V_0}(V_0)))^2\right)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}} m_M(V)\phi'(V)\,dV &= -\int_{\mathbb{R}} m_M(V_0)\phi'(V_0)\,dV_0\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\delta\to 0^+} F(V_0)^{1/3}\left(-\Delta_\delta\left((\Delta_\delta(F(V_0)))^2\right)+\right.\\ &\quad \left.+F'_-(V_0)\frac{36\pi-(\Delta_\delta(F(V_0)))^2}{3F(V_0)}\right)\phi(V_0)\,dV_0\\ &\geq \int_{\mathbb{R}} \lim_{\delta\to 0^+} F_{V_0}(V_0)^{1/3}\left(-\Delta_\delta\left((\Delta_\delta(F_{V_0}(V_0)))^2\right)+\right.\\ &\quad \left.+F'_{V_0}(V_0)\frac{36\pi-F'_{V_0}(V_0)^2}{3F_{V_0}(V_0)}\right)\phi(V_0)\,dV_0\\ &= \int_{\mathbb{R}} F_{V_0}(V_0)^{1/3}\left(-2F'_{V_0}(V_0)F''_{V_0}(V_0)+\right.\\ &\quad \left.+F'_{V_0}(V_0)\frac{36\pi-F'_{V_0}(V_0)^2}{3F_{V_0}(V_0)}\right)\phi(V_0)\,dV_0\\ &= \int_{\mathbb{R}} 2F'_{V_0}(V_0)F_{V_0}(V_0)^{1/3}\left(-F''_{V_0}(V_0)+\frac{36\pi-F'_{V_0}(V_0)^2}{6F_{V_0}(V_0)}\right)\phi(V_0)\,dV_0\\ &\geq 0. \quad \square\end{aligned}$$

4.5 Caso particular: o espaço de Schwarzschild

4.5.1 Minimizantes para o espaço de Schwarzschild

Lembremos da seção 3.2 que podemos substituir a hipótese da variedade (M^3, g) ser assintoticamente plana pela hipótese de M ser Schwarzschild com massa m no infinito, isto é, fora de um conjunto compacto K, a métrica pode ser escrita como

$$g = \left(1+\frac{m}{2\|x\|}\right)^4 g_{\text{euc}},$$

onde g_{euc} é a métrica Euclidiana usual. Além disso, como $m_{\text{ADM}}(g) = m$, segue do Teorema da Massa Positiva que $m \geq 0$ e $m = 0$ se, e somente se, $g = g_{\text{euc}}$. Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $m > 0$.

O nosso objetivo nessa seção é obter a existência e a caracterização das superfícies isoperimétricas $\Sigma(V)$ que minimizam a área dada uma certa restrição de volume V.

Antes disso, vamos obter algumas propriedades sobre a métrica tipo espaço de Schwarzschild.

Proposição 4.19. Seja $M = (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, h)$, onde h é a métrica tipo espaço de Schwarzschild definida anteriormente. Então,

1. M é esfericamente simétrica.

2. $S(h) = 0$.

3. M é assintoticamente plana.

4. M possui uma esfera mínima maximal de raio $\dfrac{m}{2}$.

5. A aplicação $\Phi : (r, \theta, \phi) \mapsto \left(\dfrac{m^2}{4r}, \theta, \phi\right)$ é uma isometria. Além disso, M possui dois fins assintoticamente planos.

6. M pode ser mergulhada isometricamente em $\mathbb{R}^4$, e sua imagem é o conjunto

$$F = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; \|(x, y, z)\| = \frac{w^2}{8m} + 2m\right\}.$$

   O conjunto F é chamado de paraboloide de Flamm.

Demonstração. 1. A primeira afirmação é imediata.

2. Segue diretamente do fato da função $u(x) = 1 + \dfrac{m}{2\|x\|}$ ser harmônica em $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ e da Proposição 3.5.

3. De fato, para $\|x\|$ suficientemente grande e $i,j,k,l \in \{1,2,3\}$

$$\begin{aligned}
|h_{ij}-\delta_{ij}| &= \left(\left(1+\frac{m}{2\|x\|}\right)^4-1\right)\delta_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\frac{m^k}{2^k\|x\|^k}\right)\delta_{ij} \leq \frac{C_1}{\|x\|}\delta_{ij}.\\
\partial_k h_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\left(1+\frac{m}{2\|x\|}\right)^4\right)\delta_{ij} = \left(4\left(1+\frac{m}{2\|x\|^3}\right)^3\frac{\partial}{\partial x^k}\left(1+\frac{m}{2\|x\|}\right)\right)\delta_{ij}\\
&= -4\left(1+\frac{m}{2\|x\|}\right)^3\cdot\frac{m}{2}\frac{x^k}{\|x\|^3}\delta_{ij} = -2m\cdot\frac{x^k}{\|x\|^3}\sum_{n=0}^{3}\binom{3}{n}\frac{m^n}{2^n\|x\|^n}\delta_{ij}\\
|\partial_k h_{ij}| &= 2m\cdot\frac{|x^k|}{\|x\|^3}\sum_{n=0}^{3}\binom{3}{n}\frac{m^n}{2^n\|x\|^n}\delta_{ij} \leq \frac{C_2}{\|x\|^2}\delta_{ij}\\
\partial_l\partial_k h_{ij} &= -2m\cdot\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{x^k}{\|x\|^3}\cdot\left(1+\frac{m}{2\|x\|}\right)^3\right)\delta_{ij}\\
&= -2m\cdot\left(\frac{\delta_{kl}\|x\|^3-3x^kx^l\|x\|^{1/2}}{\|x\|^6}\cdot\left(1+\frac{m}{2\|x\|}\right)^3-\right.\\
&\quad\left.-\frac{3m}{2}\frac{x^k}{\|x\|^3}\left(1+\frac{m}{2\|x\|}\right)^2\frac{x^l}{\|x\|^3}\right)\delta_{ij}\\
|\partial_l\partial_k h_{ij}| &\leq 2m\left(\frac{\delta_{kl}\|x\|^3+3\|x\|^{5/2}}{\|x\|^6}\sum_{n=0}^{3}\binom{3}{n}\frac{m^n}{2^n\|x\|^n}+\frac{3m}{2\|x\|^4}\sum_{n=0}^{2}\binom{2}{n}\frac{m^n}{2^n\|x\|^n}\right)\delta_{ij}\\
&\leq 2m\left(\frac{4\widetilde{C_1}}{\|x\|^3}+\frac{3m\widetilde{C_2}}{2\|x\|^4}\right) \leq \frac{C_3}{\|x\|^3}\delta_{ij}
\end{aligned}$$

Como $p = 1 > \dfrac{1}{2} = \dfrac{n-2}{2}$ e $S(h) \equiv 0$, provamos a afirmação.

4. Podemos escrever h como

$$h = u(r)^4\left(dr^2 + r^2\left(d\theta^2+\sin^2(\theta)d\phi^2\right)\right),$$

onde (r,θ,ϕ) são as coordenadas esféricas usuais de $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ e $u(r) = 1+\dfrac{m}{2r}$.

Seja $r_0 > 0$ e defina S como a esfera euclidiana de raio r_0. Como para cada $p \in S$, $T_pS = \operatorname{span}\{\partial_\phi|_p, \partial_\theta|_p\}$ e, portanto o vetor de curvatura média de S, $\vec{H}$ é dado por

$$\vec{H} = II\left(\frac{\partial_\theta}{\|\partial_\theta\|_h},\frac{\partial_\theta}{\|\partial_\theta\|_h}\right)+II\left(\frac{\partial_\phi}{\|\partial_\phi\|_h},\frac{\partial_\phi}{\|\partial_\phi\|_h}\right) = \frac{II(\partial_\theta,\partial_\theta)}{h_{\theta\theta}}+\frac{II(\partial_\phi,\partial_\phi)}{h_{\phi\phi}},$$

onde II é a segunda forma fundamental de S em M.

Como $II(\partial_\theta,\partial_\theta) = (\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta)^\perp = \Gamma^r_{\theta\theta}\partial_r$, $II(\partial_\phi,\partial_\phi) = \left(\nabla_{\partial_\phi}\partial_\phi\right)^\perp = \Gamma^r_{\phi\phi}\partial_r$, $u'(r) = -\dfrac{m}{2r^2}$,

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}\sum_k h^{rk}\left(\partial_\theta h_{\theta k} + \partial_\theta h_{\theta k} - \partial_k h_{\theta\theta}\right) = r\cdot\frac{m-2r}{m+2r}\\
II(\partial_\theta,\partial_\theta) &= r_0\cdot\frac{m-2r_0}{m+2r_0}\,\partial_r\\
\Gamma^r_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}\sum_k h^{rk}\left(\partial_\phi h_{\phi k} + \partial_\phi h_{\phi k} - \partial_k h_{\phi\phi}\right) = r\sin^2(\theta)\cdot\frac{m-2r}{m+2r}\\
II(\partial_\phi,\partial_\phi) &= r_0\sin^2(\theta)\cdot\frac{m-2r_0}{m+2r_0}\,\partial_r,
\end{aligned}$$

temos que

$$\vec{H} = \frac{II(\partial_\theta,\partial_\theta)}{h_{\theta\theta}} + \frac{II(\partial_\phi,\partial_\phi)}{h_{\phi\phi}} = \frac{2}{r_0}\left(1+\frac{m}{2r_0}\right)^{-4}\frac{m-2r_0}{m+2r_0}\,\partial_r.$$

Como $\vec{H} = Hn$, onde H é a curvatura média de S e $n = \dfrac{\partial_r}{\|\partial_r\|}$ é o vetor normal à S tal que $\left\{\dfrac{\partial_\phi}{\|\partial_\phi\|}, \dfrac{\partial_\theta}{\|\partial_\theta\|}, n\right\}$ é uma base ortonormal com orientação positiva,

$$H = \left\langle \vec{H}, \frac{\partial_r}{\|\partial_r\|}\right\rangle = \frac{2}{r_0}\left(1+\frac{m}{2r_0}\right)^{-2}\frac{m-2r_0}{m+2r_0}$$

e, portanto, S é uma superfície mínima se, e somente se, $r_0 = \dfrac{m}{2}$.

5. Primeiramente, é fácil ver que Φ é um difeomorfismo suave. Além disso,

$$d\left(\frac{m^2}{4r}\right) = -\frac{m^2}{4r^2}\,dr \implies d\left(\frac{m^2}{4r}\right)^2 = \frac{m^4}{16r^4}\,dr^2.$$

Portanto, denotando $g_{\mathbb{S}^2} = d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\phi^2$,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{m}{2}\cdot\frac{4r}{m^2}\right)^4\left(d\left(\frac{m^2}{4r}\right)^2 + \left(\frac{m^2}{4r}\right)^2 g_{\mathbb{S}^2}\right) &= \left(1+\frac{2r}{m}\right)^4\left(\frac{m^4}{16r^4}\,dr^2 + \frac{m^2}{16r^4}\cdot r^2 g_{\mathbb{S}^2}\right)\\
&= \left(1+\frac{2r}{m}\right)^4\left(\frac{m}{2r}\right)^4\left(dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2}\right)\\
&= \left(1+\frac{m}{2r}\right)^4\left(dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2}\right).
\end{aligned}$$

Como $M\backslash\overline{B_{m/2}(0)}$ é um fim assintoticamente plano e Φ é uma isometria de M, segue que $B_{m/2}(0)\backslash\{0\} = \Phi\left(M\backslash\overline{B_{m/2}(0)}\right)$ também será um fim assintoticamente plano.

6. Fazendo a transformação $r \in \left(\dfrac{m}{2},\infty\right) \mapsto r\left(1+\dfrac{m}{2r}\right)^2$, a métrica h se tornará

$$h = \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\,d\phi^2\right),$$

onde $(r,\theta,\phi) \in (2m,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$.

Agora considere a aplicação F definida (em coordenadas locais) como $F : (r,\theta,\phi) \in (2m,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi) \mapsto (\sqrt{8m(r-2m)},\theta,\phi)$. A aplicação F é um difeomorfismo entre o espaço de Schwarzschild e o paraboloide de Flamm. De fato, é fácil ver que a aplicação F é diferenciável. Além disso, como

$$\frac{d}{dr}\left(\sqrt{8m(r-2m)}\right) = \sqrt{\frac{2m}{r-2m}} > 0$$

para todo $r > 2m$, segue que F é uma bijeção e um difeomorfismo.

Para mostrar que $(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, h)$ e S com a métrica induzida de $\mathbb{R}^4$, g_S, são isométricas, note que, reescrevendo h nas coordenadas originais, isto é, fazendo a transformação $r \mapsto r\left(1+\frac{m}{2r}\right)^2$, obtemos

$$h = \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^2}, \text{ com } (r,\theta,\phi) \in (2m,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi).$$

Agora calculemos a métrica de S induzida pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}^4$, g_S. De fato, podemos escrever a métrica de $\mathbb{R}^4$ como

$$g_{\mathbb{R}^4} = dw^2 + dr^2 + r^2\, g_{\mathbb{S}^2}.$$

Como $r = \frac{w^2}{8m} + 2m$, temos que

$$dr = \frac{w}{4m}\, dw \implies dr^2 = \frac{w^2}{16m^2}\, dw^2 \implies dw^2 = \frac{16m^2}{w^2}\, dr^2 = \frac{2m}{r-2m}\, dr^2,$$

e portanto,

$$g_S = \left(\frac{2m}{r-2m}+1\right) dr^2 + r^2\, g_{\mathbb{S}^2} = \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, g_{\mathbb{S}^2},$$

que prova a afirmação e o Teorema. □

Agora vamos ao resultado principal da seção.

Teorema 4.20. Na métrica tipo espaço de Schwarzschild de massa $m \geq 0$ definida anteriormente, as esferas esfericamente simétricas de raio constante minimizam a área dentre todas as superfícies na mesma classe de homologia que contém o mesmo volume.

Demonstração. Primeiramente, note que, como há uma quantidade infinita de volume dentro do horizonte do espaço de Schwarzschild, a noção de "conter o mesmo volume"está bem definida entre superfícies na mesma classe de homologia. Além disso, podemos definir equivalentemente o volume contido por uma superfície na mesma classe de homologia do horizonte como o volume contido pela região fora do horizonte (e tomando conta do sinal caso a superfície não esteja contida inteiramente no exterior do horizonte).

Dada uma superfície $\Sigma \subseteq M$, defina a massa de Hawking $m_H(\Sigma)$ como

$$m_H(\Sigma) = \sqrt{\frac{\mathcal{A}(\Sigma)}{16\pi}} \left(1 - \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma H^2 \, d\sigma\right).$$

Agora considere a esfera esfericamente simétrica Σ de raio $r = r_0 > \frac{m}{2}$ (o caso $r_0 < \frac{m}{2}$ é provado ao provar o caso $r_0 > \frac{m}{2}$ e aplicar o item e) da Proposição anterior). Então, a sua área $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Sigma)$ é igual a

$$\mathcal{A} = \int_\Sigma d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_0^2 \left(1 + \frac{m}{2r_0}\right)^4 |\sin(\theta)| \, d\theta \, d\phi = 4\pi r_0^2 \left(1 + \frac{m}{2r_0}\right)^4$$

e a massa de Hawking de Σ é igual a

$$\begin{aligned} m_H(\Sigma) &= \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{16\pi}} \left(1 - \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma H^2 \, d\sigma\right) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi r_0^2}{16\pi} \left(1 + \frac{m}{2r_0}\right)^4} \left(1 - \frac{4}{16\pi r_0^2} \left(1 + \frac{m}{2r_0}\right)^{-4} \left(\frac{m - 2r_0}{m + 2r_0}\right)^2 \cdot 4\pi r_0^2 \left(1 + \frac{m}{2r_0}\right)^4\right) \\ &= m. \end{aligned}$$

Sabemos do Teorema da Massa Positiva que $m > 0$. Portanto,

$$m_H(\Sigma) = m > 0 \implies 1 - \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma H^2 \, d\sigma = 1 - \frac{H^2 \mathcal{A}}{16\pi} > 0 \implies H^2 \mathcal{A} < 16\pi.$$

Além disso, como $r_0 > \frac{m}{2}$, $H > 0$.

Agora construiremos uma nova métrica $(\mathbb{R}^3, k)$ que é isométrica a $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, g)$ fora de Σ e isométrica a uma vizinhança conexa esfericamente simétrica de um vértice de cone esfericamente simétrico dentro de Σ, onde as especificações do cone são tais que a área $\mathcal{A}$ e a curvatura média H de Σ sejam as mesmas que a métrica g. Dessa forma, é possível escrever k como

$$k = u(r)^{-2} \, dr^2 + u(r) r^2 \, g_{\mathbb{S}^2},$$

onde u é uma função diferenciável em $(0, \infty)$. Note que, para $u(r) \equiv a$, k é a métrica de um cone. Além disso, a área e o volume da esfera de raio r são iguais a

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(r) r^2 |\sin(\theta)| \, d\theta \, d\phi = 4\pi r^2 u(r) \\ V &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r r^2 |\sin(\theta)| \, dr \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{3}\pi r^3, \end{aligned}$$

os símbolos de Christoffel não-nulos de k são

$$\begin{array}{lll} \Gamma^r_{rr} = -\dfrac{u'}{r} & \Gamma^r_{\theta\theta} = -\dfrac{r^2 u^2 u' + 2ru^3}{2} & \Gamma^r_{\phi\phi} = -\dfrac{r^2 u^2 u' + 2ru^3}{2} \sin^2(\theta) \\ \Gamma_{r\theta} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \dfrac{ru' + 2u}{2ru} & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot(\theta) & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos(\theta)\sin(\theta) \end{array}$$

e a sua curvatura escalar $S(k)$ é igual a

$$S(k) = -\frac{4r^2u^2u'' + 3r^2u(u')^2 + 20ru^2u' + 4u^3 - 4}{2r^2u}.$$

Para ajudar a visualização, considere a variedade $(\mathbb{R}^3, k)$ mergulhada em $\mathbb{R}^4$ da seguinte forma: considere o paraboloide de Flamm da Proposição anterior e $C \subseteq \mathbb{R}^4$ o cone tangente ao paraboloide de Flamm em Σ. Então, $(\mathbb{R}^3, k)$ é igual a união da parte do cone que está dentro de Σ com a parte do paraboloide que é exterior à Σ.

Agora suponha que Σ está em $r = \overline{r}$ em $(\mathbb{R}^3, k)$. Como esta variedade é um cone dentro de Σ, $u(r) = a$ para todo $r < \overline{r}$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Calculando a curvatura média de Σ, H_Σ,

$$\begin{aligned}
\vec{H}_\Sigma &= \frac{II(\partial_\theta, \partial_\theta)}{k_{\theta\theta}} + \frac{II(\partial_\phi, \partial_\phi)}{k_{\phi\phi}} = \frac{\Gamma^r_{\theta\theta}\partial_r}{a\overline{r}^2} + \frac{\Gamma^r_{\phi\phi}\partial_r}{a\overline{r}^2\sin^2(\theta)} = -\frac{2a^3\overline{r}}{a\overline{r}^2}\,\partial_r = -\frac{2a^2}{\overline{r}}\,\partial_r \\
H_\Sigma &= k\left(\vec{H}_\Sigma, -\frac{\partial_r}{\|\partial_r\|_k}\right) = \frac{2a^2}{\overline{r}}\|\partial_r\|_k = \frac{2a}{\overline{r}}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$16\pi > H_\Sigma^2 A = \left(-\frac{2a}{\overline{r}}\right)^2 \cdot 4\pi a\overline{r}^2 = 16a^3\pi \implies 0 < a < 1.$$

Parametrizando as esferas esfericamente simétricas pelo seu volume, segue do fato da curvatura escalar da métrica de Schwarzschild ser identicamente nula que

$$0 = S(g) = A(V)^2A''(V) - 4\pi - \frac{3}{4}A(V)A'(V)^2 \implies A(V)^2A''(V) = 4\pi - \frac{3}{4}A(V)A'(V)^2.$$

Definindo $\overline{u}(V) := u(r(V)) = u\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)$, segue que $\overline{u}(V) = a$ para $V \leq V_0 := \frac{4}{3}\pi\overline{r}^3$ e, para $V \geq V_0$,

$$\overline{u}(V) = \frac{A(V)}{4\pi} \cdot \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{-2/3} = \frac{A(V)}{\sqrt[3]{36\pi V^2}}.$$

Além disso, $\overline{u}'(V_0) = 0$ pois $\overline{u}$ é suave.

Agora, note que $\overline{u}$ satisfaz $a \leq \overline{u}(V) \leq 1$. De fato, para mostrar que $\overline{u}(V) \leq 1$, observe que, como $S(k) = -\frac{4a^3-4}{2ar^2} \geq 0$ dentro de Σ (segue do fato que $a < 1$), redefinindo A como a área da esfera esfericamente simétrica em $(\mathbb{R}^3, k)$, vale

$$A(V)^2A''(V) \leq 4\pi - \frac{3}{4}A(V)A'(V)^2$$

para todo $V \leq V_0$. Portanto, parametrizando a massa de Hawking de acordo com o volume compreendido pela superfície, temos

$$\begin{aligned}
m_H'(V) &= \frac{d}{dV}\left(\sqrt{\frac{A(V)}{16\pi}}\left(1-\frac{A(V)A'(V)^2}{16\pi}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{16\pi}}\left(\frac{A'(V)}{2A(V)^{1/2}}\left(1-\frac{A(V)A'(V)^2}{16\pi}\right)-\frac{A(V)^{1/2}}{16\pi}\left(A'(V)^3+2A(V)A'(V)A''(V)\right)\right)\\
&= \frac{2A'(V)}{\sqrt{(16\pi)^3A(V)}}\left(4\pi-\frac{3}{4}A(V)A'(V)^2-A(V)^2A''(V)\right)\geq 0
\end{aligned}$$

e, como $m(0)=0$, $m(V)\geq m(0)=0$ para todo $V\geq 0$ e

$$\begin{aligned}
m(V)\geq 0 &\implies A(V)A'(V)^2\geq 16\pi\\
&\implies A(V)^{1/2}A'(V)\leq\sqrt{16\pi}\\
&\implies \frac{2}{3}A(V)^{3/2}=\int_0^V\sqrt{A(\overline{V})}A'(\overline{V})\,d\overline{V}\leq\int_0^V\sqrt{16\pi}\,d\overline{V}=\sqrt{16\pi}V\\
&\implies A(V)^3\leq\left(\frac{3}{2}\sqrt{16\pi}V\right)^2=36\pi V^2,
\end{aligned}$$

o que prova que $\overline{u}(V)\leq 1$.

Para provar que $\overline{u}(V)\geq a$, provaremos que $\overline{u}'(V)\geq 0$ para todo $V\geq 0$. De fato, suponha que $\overline{u}'(V)\leq 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\sqrt{36\pi}\,\overline{u}(V) &= A(V)V^{2/3}\implies\\
\sqrt{36\pi}\,\overline{u}'(V) &= A'(V)V^{2/3}-\frac{2}{3}A(V)V^{-1/3}=\left(A'(V)-\frac{2}{3}\frac{A(V)}{V}\right)V^{-2/3}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $\overline{u}'(V)\leq 0$, $A'(V)\leq\frac{2}{3}\frac{A(V)}{V}$. Derivando novamente $\overline{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{36\pi}\,\overline{u}''(V) &= \left(A''(V)-\frac{2}{3}\frac{A'(V)V-A(V)}{V^2}\right)V^{-2/3}-\frac{2}{3}\left(A'(V)-\frac{2}{3}\frac{A(V)}{V}\right)V^{-5/3}\\
&= A''(V)V^{-2/3}-\frac{4}{3}A'(V)V^{-5/3}+\frac{10}{9}A(V)V^{-8/3}\\
&= \left(A(V^2)A''(V)V^2-\frac{4}{3}A(V)^2A'(V)V+\frac{10}{9}A(V)^3\right)\frac{V^{-8/3}}{A(V)^2}\\
&= \left(\left(4\pi-\frac{3}{4}A(V)A'(V)^2\right)V^2-\frac{4}{3}A(V)^2A'(V)V+\frac{10}{9}A(V)^3\right)\frac{V^{-8/3}}{A(V)^2}\\
&\geq \left(4\pi V^2-\frac{3}{4}A(V)\frac{4}{9}\frac{A(V)^2}{V^2}V^2-\frac{4}{3}A(V)^2\frac{2}{3}\frac{A(V)}{V}V+\frac{10}{9}A(V)^3\right)\frac{V^{-8/3}}{A(V)^2}\\
&= \left(4\pi V^2-\frac{1}{9}A(V)^3\right)\frac{V^{-8/3}}{A(V)^2}\\
&= \frac{V^{-8/3}}{9A(V)^2}\left(36\pi V^2-A(V)^3\right)\geq 0,
\end{aligned}$$

o que prova que $\overline{u}''(V) \geq 0$ e consequentemente, $\overline{u}'(V) = \int_0^V \overline{u}''(\overline{V})\, d\overline{V} \geq 0$, o que é uma contradição. Portanto, $\overline{u}'(V) \geq 0$, provando que $\overline{u}(V) \geq \overline{u}(V_0) = a$ para todo $V \geq V_0$.

Agora mostraremos que Σ é uma superfície isoperimétrica de $(\mathbb{R}^3, k)$. De fato, seja $\widetilde{\Sigma}$ uma outra superfície em $(\mathbb{R}^3, k)$ contendo o mesmo volume V_0 (ou volume maior) e sejam A e $\widetilde{A}$ as áreas de Σ e $\widetilde{\Sigma}$ em $(\mathbb{R}^3, k)$, respectivamente, e A_0 e $\widetilde{A_0}$ as áreas de Σ e $\overline{\Sigma}$ nas coordenadas usuais de $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Como k preserva o volume, Σ e $\widetilde{\Sigma}$ possuem o mesmo volume na métrica euclidiana usual. Portanto, pela desigualdade isoperimétrica, $\widetilde{A_0} \geq A_0$. Entretanto, como $a \leq u(r) \leq 1$, segue que $u(r)^{-2} \geq 1 \geq a$, e como $u(\overline{r}) = a$,

$$\widetilde{A} \geq a\widetilde{A_0} \geq aA_0 = A,$$

o que prova a afirmação.

Note que, como $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, h)$ e $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, k)$ são esfericamente simétricas, elas são conformemente equivalentes. Portanto,

$$h = w^4 k = w(r)^4 \left(u(r)^{-2}\, dr^2 + r^2 u(r)\, g_{\mathbb{S}^2}\right),$$

onde $w \in C^\infty((0, \infty))$. Então, segue da Equação de Yamabe que relaciona as curvaturas escalares de duas métricas conformemente equivalentes,

$$-8\Delta w + S(k) = S(h) w^5,$$

que, como $S(h) \equiv 0$,

$$0 = S(h)w^5 = -8\Delta w + S(k) \implies \Delta w = \frac{1}{8} S(k) \geq 0,$$

pois $S(k) \geq 0$ em todo ponto (identicamente nula na região em que a variedade é Schwarzschild e positiva na região em que a variedade é um cone).

Para finalizar, mostraremos que Σ é um minimizantes para a área dada a restrição de volume no problema isoperimétrico em $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, h)$. De fato, seja $\widetilde{\Sigma}$ uma outra superfície com o mesmo volume V_0 fora do horizonte em $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, h)$. Como $\widetilde{\Sigma}$ contém o mesmo volume que Σ fora do horizonte em $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, h)$, o volume de $\widetilde{\Sigma}$ é maior do que o volume de Σ em $(\mathbb{R}^3, k)$ pois $w \geq 1$. Como Σ é uma superfície isoperimétrica em $(\mathbb{R}^3, k)$, segue que a área de Σ é maior do que a área de $\widetilde{\Sigma}$ em $(\mathbb{R}^3, k)$. Além disso, como $w \geq 1$ e $w(\overline{r}) = 1$, segue que a área de $\widetilde{\Sigma}$ é maior do que a área de Σ em $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, h)$, provando o resultado. □

4.5.2 Existência de minimizantes para volumes suficientemente grandes

A partir de agora consideraremos variedades Riemannianas (M^3, g) completas, com curvatura escalar $S(g) \geq 0$ e que são Schwarzschild de massa m no infinito, isto é, isométricas à $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, h)$ fora de um conjunto compacto. Além disso, sabemos pelo Teorema da Massa Positiva, que $m \geq 0$.

Sabemos da seção anterior, que as esferas esfericamente simétricas são os minimizantes para o problema isoperimétrico em $(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, h)$ definido anteriormente. Então, é natural perguntar-se se, para $V \geq 0$ suficientemente grande, as esferas esfericamente simétricas são minimizantes para o problema isoperimétrico em (M, g). De fato, essa afirmação é verdadeira. E para provar isso, é necessário fazer algumas definições e resultados preliminares.

Definição 4.21. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana.

- Seja $\Sigma \subseteq M^3$ uma superfície que é o bordo de alguma região aberta $U \subseteq M$. Se Σ minimiza a área dentre todas as superfícies que são o bordo de alguma região compacta de M com o mesmo volume $Vol(U)$, diremos que Σ é uma superfície isoperimétrica de M.
- Seja $\Sigma \subseteq M^3$ uma superfície que é o bordo de alguma região aberta $U \subseteq M$. Se Σ minimiza a área dentre todas as superfícies que são o bordo de alguma região compacta de M cujo volume é maior ou igual do que o volume de U, $Vol(U)$, diremos que Σ é uma superfície isoperimétrica exterior de M.

Definição 4.22. Dadas duas variedades Riemannianas (M_1, g_1) e (M_2, g_2), diremos que uma aplicação $\phi : M_1 \to M_2$ é uma aplicação *area nonincreasing* se para todas as superfícies com bordo $\Sigma \subseteq M_1$, a área de $\phi(\Sigma) \subseteq M_2$ é menor ou igual do que a área de Σ.

O seguinte Lema, que envolve os conceitos definidos acima, é fundamental para a demonstração do resultado principal desta seção.

Lema 4.23. Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) duas variedades Riemannianas, $\Sigma \subseteq M_1$ uma superfície que é o bordo de um conjunto compacto $U \subseteq M_1$ e $\phi : M_1 \to M_2$ uma aplicação *area nonincreasing* de classe C^1 que é uma isométrica fora do interior de U, tal que $\phi(\Sigma) = \partial(\phi(U))$ é uma superfície isoperimétrica exterior de M_2. Então, Σ é uma superfície isoperimétrica exterior de M_1.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que ϕ é uma aplicação *volume nonincreasing* dentro de Σ, isto é, para todo $V \subseteq U \subseteq M_1$, $Vol(\phi(V)) \geq Vol(V)$. De fato, seja $\{e_i\}_{i=1}^3$ uma base ortonormal em algum ponto $p \in V$ e defina

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \langle d\phi_p(e_i), d\phi(e_j)\rangle \\ \overline{G}_{ij} &= (G^{-1})_{ij}\det(G). \end{aligned}$$

Então, para todo $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} v^i e_i \in T_pM_1$, $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} v^i v^j G_{ij} = \|d\phi_p(v)\|_{g_1}^2$ e, para v unitário, $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} v^i v^j \overline{G}_{ij}$ é o fator pelo qual as áreas são multiplicadas na direção ortogonal a v. Como, por hipótese, ϕ é *area nonincreasing*, os autovalores de $\overline{G}$ (que é simétrica, e portanto tem todos os seus autovalores reais) são menores ou iguais a 1, o que implica que $\det(\overline{G}) \leq 1$. Logo,

$$1 \geq \det(\overline{G}) = \det(G)^3 \det(G^{-1}) = \det(G)^2 \implies \det(G) \leq 1,$$

o que prova que ϕ é *volume nonincreasing* dentro de Σ.

Agora provaremos que Σ é uma superfície isoperimétrica exterior. De fato, considere uma outra superfície $\overline{\Sigma}$ que possui uma quantidade de volume maior ou igual do que a quantidade de volume que Σ possui. Então, $\phi(\overline{\Sigma})$ contém, pelo menos, a mesma quantidade de volume que $\phi(\Sigma)$. Como $\phi(\Sigma)$ é uma superfície isoperimétrica exterior, $A(\phi(\Sigma)) \leq A(\phi(\overline{\Sigma}))$. Mas, como ϕ é uma isometria em Σ e *area nonincreasing* em M,

$$A(\Sigma) = A(\phi(\Sigma)) \leq A(\phi(\overline{\Sigma})) \leq A(\overline{\Sigma}),$$

o que prova o Lema. □

Agora vamos ao resultado principal.

Teorema 4.24. Considere (M^3, g) satisfazendo as condições descritas no início da subseção. Então, existe $V_0 \geq 0$ tal que para todo $V \geq V_0$, as esferas esfericamente simétricas da métrica de Schwarzschild minimizam a área dentre todas as outras superfícies na sua classe de homologia contendo o mesmo volume V (fora dos horizontes, caso exista).

Demonstração. Como M é isométrica à variedade de Schwarzschild de massa m fora de um conjunto compacto, para algum $A_{\min} \geq 16\pi m^2$, existe uma superfície $\Sigma \subseteq M$ tal que $A = \mathcal{A}(\Sigma) \geq A_{\min}$ e Σ é a esfera esfericamente simétrica de área A da região de M isométrica à Schwarzschild.

Afirmamos que as esferas cuja área satisfazem $A \geq \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{A_{\min}}{m}\right)^2$ devem ser superfícies isoperimétricas exteriores de M. De fato, seja Σ uma esfera cuja área satisfaz a desigualdade anterior. Na demonstração do Teorema principal da subseção anterior, foi construida uma variedade $(\mathbb{R}^3, k)$ que é isométrica à variedade de Schwarzschild de massa m fora de Σ e isométrica a um cone dentro de Σ. Além disso, sabemos que Σ é uma superfície isoperimétrica nessa nova variedade. Utilizaremos essa variedade para construir uma aplicação $\phi : (M, g) \to (\mathbb{R}^3, k)$ satisfazendo as propriedades do Lema anterior. De fato, defina ϕ como a identidade na região fora de Σ e considere $\overline{\Sigma} := \phi(\Sigma)$. Dentro de Σ, faça ϕ esfericamente simétrica na região em que M for esfericamente simétrica. Dessa forma, podemos identificar ϕ como a aplicação $A(\overline{A})$, onde A é a área da pré-imagem (esfericamente simétrica) em M da esfera esfericamente simétrica em $(\mathbb{R}^3, k)$ que possui área igual a $\overline{A}$. Portanto, denotando $A_0 = A(\Sigma) = \mathcal{A}(\phi(\Sigma))$, obtemos $A(A_0) = A_0$.

Como $A \geq \overline{A}$, os comprimentos das direções esfericamente simétricas diminuem a uma taxa de $\sqrt{\frac{\overline{A}}{A}}$ por ϕ. Então, para definir ϕ de tal forma que seja *area nonincreasing*, devemos definir ϕ de tal forma que os comprimentos aumentem a uma taxa de $\sqrt{\frac{A}{\overline{A}}}$ na direção radial. Portanto, os volumes serão diminuídos localmente a uma taxa de

$$\sqrt{\frac{\overline{A}}{A}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{A}}{A}} \cdot \sqrt{\frac{A}{\overline{A}}} = \sqrt{\frac{\overline{A}}{A}}.$$

Agora considere as funções V em M e $\overline{V}$ em $(\mathbb{R}^3, k)$ que denotam os volumes compreendidos pelas esferas esfericamentes simétricas em M e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Note que, enquanto $\overline{V}$ está definida em todo $\mathbb{R}^3$, V está definida apenas na região em que M é Schwarzschild. Sabemos que podemos escrever a área $\overline{A}$ em função do seu volume $\overline{V}$, e essa expressão é igual a

$$\overline{A}(\overline{V}) = a(36\pi)^{1/3}\overline{V}^{2/3},$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é alguma constante real. Derivando a expressão, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{A}'(\overline{V}) = \frac{2a}{3}(36\pi)^{1/3} \cdot \overline{V}^{-1/3} \quad &\implies \quad \overline{A}'(\overline{V}) = \frac{2a}{3}(36\pi)^{1/3} \cdot \left(\frac{\overline{A}(\overline{V})}{a(36\pi)^{1/3}}\right)^{-1/2} \\ &\implies \quad \overline{A}'(\overline{V}) = a^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{36\pi}{\overline{A}(\overline{V})}}. \end{aligned}$$

Além disso, sabemos que na região de M que é Schwarzschild, a massa de Hawking das esferas esfericamente simétricas é igual a m. Portanto,

$$m = \sqrt{\frac{A(V)}{16\pi}}\left(1 - \frac{1}{16\pi}A(V)A'(V)^2\right) \implies A'(V) = \sqrt{\frac{16\pi}{A(V)}\left(1 - m\sqrt{\frac{16\pi}{A(V)}}\right)}.$$

Ainda mais, como ϕ diminui o volume a uma taxa de $\sqrt{\frac{\overline{A}}{A}}$, $\frac{dV}{d\overline{V}} = \sqrt{\frac{A}{\overline{A}}}$. Portanto,

$$\frac{dA}{dV}\frac{dV}{d\overline{V}} = \frac{dA}{d\overline{A}}\frac{d\overline{A}}{d\overline{V}},$$

o que implica em

$$\begin{aligned} A'(\overline{A}) \quad &= \quad \frac{\frac{dA}{dV}\frac{dV}{d\overline{V}}}{\frac{d\overline{A}}{d\overline{V}}} = \frac{3}{2a^{3/2}}\sqrt{\frac{\overline{A}}{36\pi}} \cdot \sqrt{\frac{16\pi}{A}\left(1 - m\sqrt{\frac{16\pi}{A}}\right)} \cdot \sqrt{\frac{A}{\overline{A}}} \\ &= \quad a^{-3/2}\sqrt{1 - m\sqrt{\frac{16\pi}{A}}} \end{aligned}$$

para todo $\overline{A} \leq A_0$, com a condição inicial $A(A_0) = A_0$. A EDO acima determina $A(\overline{A})$.

Agora afirmaremos que $A(0) \geq A_{\min}$ se $A_0 \geq \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{A_{\min}}{m}\right)^2$. De fato, como para quaisquer $0 \leq y \leq x \leq 1$, $\sqrt{x-y} \leq \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{y}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} A'(\overline{A}) &= a^{-3/2}\sqrt{1 - m\sqrt{\frac{16\pi}{A}}} = a^{-3/2}\sqrt{1 - m\sqrt{\frac{16\pi}{A_0}} - m\sqrt{16\pi}\left(A^{-1/2} - A_0^{-1/2}\right)} \\ &\leq a^{-3/2}\sqrt{1 - m\sqrt{\frac{16\pi}{A_0}}}\left(1 - \frac{m}{2}\sqrt{16\pi}\left(A^{-1/2} - A_0^{-1/2}\right)\right), \end{aligned}$$

pois

$$A_0 \geq \frac{1}{\pi}\left(\frac{A_{\min}}{m}\right)^2 \geq \frac{1}{\pi}(16\pi m)^2 \geq 16\pi m^2 \implies 1 - m\sqrt{\frac{16\pi}{A_0}} \geq 0.$$

Além disso, como as dimensões do cone foram escolhidas de tal forma que a Σ possua a mesma curvatura média tanto do lado de dentro quanto do lado de fora, $A'(A_0) = 1$, isto é,

$$1 = A'(A_0) = a^{-3/2}\sqrt{1 - m\sqrt{\frac{16\pi}{A_0}}}.$$

Portanto,

$$A'(\overline{A}) \leq 1 - \frac{m}{2}\sqrt{16\pi}\left(A^{-1/2} - A_0^{-1/2}\right).$$

Considere $D(\overline{A}) = A(\overline{A}) - \overline{A}$. Então,

$$D'(\overline{A}) \leq -\frac{m}{2}\sqrt{16\pi}\left(A^{-1/2} - A_0^{-1/2}\right) = -\frac{m}{2}\sqrt{16\pi}\left(\left(D(\overline{A}) + \overline{A}\right)^{-1/2} - A_0^{-1/2}\right).$$

Como, para todo $\overline{A} \in [0, A_0]$,

$$A(\overline{A}) \leq A_0 \implies A^{-1/2} \geq A_0^{-1/2} \implies D'(\overline{A}) \leq 0 \implies D(\overline{A}) \geq D(A_0) = 0,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} D'(\overline{A}) &\leq -\frac{m}{2}\sqrt{16\pi}\left(\left(D(0) + \overline{A}\right)^{-1/2} - A_0^{-1/2}\right) \\ -D(0) = D(A_0) - D(0) &= \int_0^{A_0} D'(\overline{A})\, d\overline{A} \\ &\leq -\frac{m}{2}\sqrt{16\pi}\int_0^{A_0} \left(D(0) + \overline{A}\right)^{-1/2} - A_0^{-1/2}\, d\overline{A} \\ &= -\frac{m}{2}\sqrt{16\pi}\left(2\sqrt{D(0) + A_0} - 2\sqrt{D(0)} - \sqrt{A_0}\right). \end{aligned}$$

Além disso, como $\sqrt{D(0) + A_0} \geq \sqrt{A_0}$,

$$-D(0) \leq -\frac{m}{2}\sqrt{16\pi}\left(2\sqrt{D(0) + A_0} - 2\sqrt{D(0)} - \sqrt{A_0}\right) \leq -\frac{m}{2}\sqrt{16\pi}\left(\sqrt{A_0} - 2\sqrt{D(0)}\right),$$

o que implica em

$$D(0) + m\sqrt{16\pi D(0)} \geq \frac{m}{2}\sqrt{16\pi A_0} \geq \frac{m}{2}\sqrt{16\pi} \cdot \frac{A_{\min}}{m\sqrt{\pi}} \geq 2 \cdot 16\pi m^2 = 32\pi m^2.$$

Logo, $D(0) \geq 16\pi m^2$. Portanto,

$$\frac{m}{2}\sqrt{16\pi A_0} \leq D(0)+m\sqrt{16\pi D(0)} \leq 2D(0) \implies D(0) \geq \frac{m}{4}\sqrt{16\pi A_0} = m\sqrt{\pi A_0} \geq A_{\min},$$

o que prova a afirmação pois $D(0) = A(0)$.

Além disso, a afirmação acima nos mostra que, para $A \in [0, A_0]$, a imagem de ϕ está contida na parte esfericamente simétrica de M e que a esfera esfericamente simétrica de área $A(0)$ em M é levada no vértice do cone em $(\mathbb{R}^3, k)$. Portanto, definindo ϕ como sendo o vértice do cone para pontos dentro da esfera, transformamos ϕ em uma aplicação *area nonincreasing*. Assim, obtemos uma aplicação $\phi : M \to (\mathbb{R}^3, k)$ que é uma isometria fora de Σ em M e que é *area nonincreasing* dentro de Σ. Entretanto, não é possível garantir que ϕ seja uma aplicação C^1 na esfera de área $A(0)$ em M. Perturbando ϕ em uma vizinhança dessa esfera de tal forma que ainda seja *area nonincreasing*, obtemos a aplicação desejada.

Como $\overline{\Sigma}$ é isoperimétrica exterior em $(\mathbb{R}^3, k)$ e $\phi(\Sigma) = \overline{\Sigma}$, segue do Lema anterior que Σ é isoperimétrica exterior em M e, portanto, minimiza a área dentre as superfícies que contém o mesmo volume em M, o que prova o Teorema. □

Como estamos supondo (M, g) Schwarzschild no infinito com massa m, para V suficientemente grande, os minimizantes para o problema isoperimétrico são as esferas esfericamente simétricas. Portanto, para esses volumes, a função A (consequentemente F) será suave. Portanto, poderemos escrever a função m_M como

$$\begin{aligned} m_M(V) &= \frac{F(V)^{1/3}}{144\pi^{3/2}}\left(36\pi - F'(V)^2\right) = \frac{A(V)^{1/2}}{144\pi^{3/2}}\left(36\pi - \frac{9}{4}A(V)A'(V)^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{A(V)}{16\pi}}\left(1 - \frac{1}{16\pi}A(V)A'(V)^2\right) = m_H(\Sigma(V)) = m, \end{aligned}$$

o que nos dá o seguinte resultado.

Teorema 4.25. Seja (M, g) completa, com curvatura escalar não-negativa e Schwarzschild no infinito com massa m. Então, $\lim_{V\to\infty} m_M(V) = m$.

4.6 Existência de superfícies minimizantes

4.6.1 Resultados preliminares

Definição 4.26. Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^3$ um domínio tal que $\Sigma = \partial D$ seja suave e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2) &= \{(x, y, z) \in D; x_1 < x < x_2\} \\ \Sigma(x_1, x_2) &= \{(x, y, z) \in \Sigma; x_1 < x < x_2\} \\ C(x_1) &= \{(x, y, z) \in D; x = x_1\} \\ \Delta\mathcal{A}(x_1, x_2) &= \mathcal{A}(C(x_1)) + \mathcal{A}(C(x_2)) + \sqrt{36\pi}V(D(x_1, x_2))^{2/3} - \mathcal{A}(\Sigma(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

Podemos interpretar $\Delta\mathcal{A}(x_1, x_2)$ como sendo a mudança da área de superfície de D ao ser retirada a região de D entre $x = x_1$ e $x = x_2$ e substituída por uma bola de mesmo volume.

Teorema 4.27. Existem $\alpha, \beta > 0$ tais que, se para algum $d > 0$,

1. $\inf\limits_{0 \leq x \leq d} \mathcal{A}(C(x)) > 0$;

2. $\dfrac{\mathcal{A}(\Sigma(0,d))}{d^2} < \alpha$,

então existe $x_1, x_2 \in [0, d]$, $x_1 < x_2$, tais que $\dfrac{\Delta\mathcal{A}(x_1, x_2)}{\mathcal{A}(\Sigma(x_1, x_2))} < -\beta$.

Demonstração. Como o resultado é invariante por mudança de escala, vamos supor que $d = 4$. Dado $\varepsilon \in (0, 1)$, considere os seguintes subintervalos de $[0, 4]$,

$$\begin{aligned} I_1 &= [0, 2\varepsilon] \\ I_2 &= [2\varepsilon, 1 + \varepsilon] \\ I_3 &= [1 + \varepsilon, 2] \\ I_4 &= [2, 3 + \varepsilon] \\ I_5 &= [3 + \varepsilon, 4 - 2\varepsilon] \\ I_6 &= [4 - 2\varepsilon, 4], \end{aligned}$$

e defina, para cada $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p_k = \dfrac{\mathcal{A}(\Sigma(I_k))}{\mathcal{A}(\Sigma(0,4))}$. É fácil ver que $\sum\limits_{k=1}^{6} p_k = 1$.

Agora note que se $\dfrac{\mathcal{A}(\Sigma(x_1, x_2))}{\mathcal{A}(\Sigma(0,4))} < \left(\dfrac{x_2 - x_1}{4}\right)^2$, poderia ser possível iterar a demonstração desse fato substituindo o intervalo (x_1, x_2) pelo intervalo $(0, 4)$ utilizando uma mudança de escala (todas as direções), transformando (x_1, x_2) em $(0, 4)$. Ambas as hipóteses 1 e 2 do enunciado são trivialmente satisfeitas. Portanto, o resultado original segue da versão obtida após fazer a mudança de escala.

Iremos fazer a mudança de escala se a desigualdade acima for satisfeita para I_2, I_3, I_4, I_5, $\bigcup\limits_{k=1}^{5} I_k$ ou $\bigcup\limits_{k=2}^{6} I_k$. Afirmamos que não é possível fazer essa mudança de escala uma quantidade infinita de vezes. De fato, como

$$\mathcal{A}(\Sigma(0,4)) \geq \int_0^4 \ell(\partial C(x))\, dx \geq \int_0^4 \sqrt{4\pi\mathcal{A}(C(x))}\, dx \geq 8\sqrt{\pi a} \implies a \leq \frac{\mathcal{A}(\Sigma(0,4))^2}{64\pi},$$

onde $a = \inf\limits_{x \in [0,4]} \mathcal{A}(C(x))$. Toda vez em que é feita a mudança de escala, o valor de a aumenta pelo menos a uma taxa de $\dfrac{4}{4 - 2\varepsilon}$. Como $a > 0$, concluímos que a mudança de escala só pode ser realizada um número finito de vezes.

Na última iteração, obtemos que $\dfrac{\mathcal{A}(\Sigma(x_1,x_2))}{\mathcal{A}(\Sigma(0,4))} \geq \left(\dfrac{x_2-x_1}{4}\right)^2$ para $[x_1,x_2]$ iguais a I_2, I_3, I_4, I_5, $\bigcup_{k=1}^{5} I_k$ e $\bigcup_{k=2}^{6} I_k$. Portanto, para $k \in \{2,...,5\}$,

$$p_k = \frac{\mathcal{A}(\Sigma(I_k))}{\mathcal{A}(\Sigma(0,4))} \geq \left(\frac{1-\varepsilon}{4}\right)^2$$

e

$$\sum_{k=1}^{5} p_k, \sum_{k=2}^{6} p_k \geq \left(\frac{4-2\varepsilon}{4}\right)^2.$$

Como $\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$, segue que

$$\begin{aligned} p_1 = 1 - \sum_{k=2}^{6} p_k &\leq 1 - \left(\frac{4-2\varepsilon}{4}\right)^2 = \left(1 - \frac{4-2\varepsilon}{4}\right)\left(1 + \frac{4-2\varepsilon}{4}\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{8}(8-2\varepsilon) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos que $p_6 \leq \varepsilon$. Além disso, para $k \in \{2,3,4,5\}$,

$$p_k \geq \left(\frac{1-\varepsilon}{4}\right)^2 = \frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2}{16} \geq \frac{1-2\varepsilon}{16}.$$

Para obter uma cota superior para $\dfrac{\Delta A(x_1,x_2)}{\mathcal{A}(\Sigma(x_1,x_2))}$ na conclusão do teorema, escolha $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ e escolha a região D de tal forma que $\dfrac{\Delta\mathcal{A}(0,4)}{\mathcal{A}(\Sigma(0,4))}$ seja maximizada. Vamos considerar o seguinte argumento de simetrização: dada uma região $D \subseteq \mathbb{R}^3$, simetrize-a em relação ao eixo x definindo D_s sendo a região simétrica em relação ao eixo x cujas seções transversais $x = x_0$ constante possuam a mesma área que D. Como, por definição, as seções transversais de D e D_s possuem a mesma área, D e D_s possuirão o mesmo volume. Além disso, a área de superfície de D_s será menor do que a área de superfície de D pois, como $\mathcal{A}(C(x)) = \mathcal{A}(C_s(x))$ para todo x, segue da desigualdade isoperimétrica que

$$\ell(\partial C(x)) \geq \ell(\partial C_s(x)) \implies \mathcal{A}(\partial D) = \int_0^4 \ell(\partial C(x))\,dx \geq \int_0^4 \ell(\partial C_s(x))\,dx = \mathcal{A}(\partial D_s).$$

Para preservar as desigualdades anteriores, defina $\overline{D}$ como sendo D_s união com as regiões em $\mathbb{R}^3$ tais que $\overline{D}$ possui a mesma área de superfície que D em cada $I_k \times \mathbb{R}^2$. Como $\overline{D}$ possui mais volume do que D, D maximiza $\dfrac{\Delta\mathcal{A}(0,4)}{\mathcal{A}(\Sigma(0,4))}$ se e somente se D for simétrica em relação ao eixo x.

Além disso, segue da fórmula da primeira variação de área, que o bordo Σ da região D ótima deve possui curvatura média constante em cada um dos intervalos I_k. Portando, em cada intervalo, Σ é, ou uma coleção de esferas, ou uma superfície de Delaunay (veja (LóPEZ, 2013) para mais detalhes). Se $\alpha > 0$ for suficientemente pequeno, podemos desconsiderar as superfícies de Delaunay pois elas são instáveis. Também podemos desconsiderar há mais de uma esfera em cada subintervalo por estabilidade, pois ao diminuir a área de uma esfera e aumentar a área de uma outra a uma mesma taxa, o volume aumentará até segunda ordem.

Para facilitar as contas, considere mais uma mudança de escala tal que $\mathcal{A}(\Sigma(0,d)) = 1$. Então, observando todas as possibilidades, obtemos que uma das regiões D que maximiza $\Delta\mathcal{A}(0,d)$ é a metade direita de uma esfera (tendo área de superfície ε) em $I_1 \times \mathbb{R}^2$ com a metade esquerda de uma esfera (também tendo área de superfície ε) em $I_6 \times \mathbb{R}^2$ com uma esfera de área de superfície $\dfrac{1-2\varepsilon}{8}$, centrada em $(I_2 \cup I_3) \times \mathbb{R}^2$, com uma esfera de área de superfície $\dfrac{7(1-2\varepsilon)}{8}$, centrada em $(I_4 \cup I_5) \times \mathbb{R}^2$. Para esta região, temos

$$\mathcal{A}(C(0)), \mathcal{A}(C(d)) = \pi \cdot \frac{\varepsilon}{2\pi} \leq \varepsilon$$

e

$$V(D(0,d)) = \frac{1}{\sqrt{36\pi}} \left((2\varepsilon)^{3/2} + \left(\frac{1-2\varepsilon}{8}\right)^{3/2} + \left(\frac{7(1-2\varepsilon)}{8}\right)^{3/2} \right).$$

Logo,

$$\Delta\mathcal{A}(0,d) \leq 2\varepsilon + \left((2\varepsilon)^{3/2} + \left(\frac{1-2\varepsilon}{8}\right)^{3/2} + \left(\frac{7(1-2\varepsilon)}{8}\right)^{3/2} \right)^{2/3} - 1 = \Phi(\varepsilon).$$

Fazendo $\varepsilon = 0$, obtemos

$$\Phi(0) = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^{3/2} + \left(\frac{7}{8}\right)^{3/2} \right)^{2/3} - 1 < 0.$$

Portanto, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\frac{\Delta\mathcal{A}(0,d)}{\mathcal{A}(\Sigma(0,d))} \leq \Phi(\varepsilon) = -\beta < 0.$$

Como D é a configuração ótima, obtemos o resultado. $\square$

Modificando suficientemente a Proposição acima, podemos provar um resultado parecido.

Proposição 4.28. Considere o espaço de Schwarzschild $(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, h)$ de massa $m \geq 0$ união disjunta com uma esfera de curvatura constante de dimensão 3 com volume V_S. Então, existe $r > 0$ tal que, dado $r_1 > r$ e $r_2 := 2r_1$, então se Σ é qualquer superfície conexa que contém um volume $V \leq V_S$ intersectando ambas as esferas euclidianas de raio r_1 e r_2, é possível modificar Σ fora da bola euclidiana de raio r_1 em três superfícies Σ_1,

Σ_2 e Σ_3, com Σ_1 e Σ_2 na região tridimensional fechada contida por Σ e Σ_3 na esfera de curvatura constante, tal que Σ_1 intersecta a esfera euclidiana de raio r_1 mas não intersecta a esfera euclidiana de raio r_2, Σ_2 intersecta a esfera euclidiana de raio r_2 mas não intersecta a esfera euclidiana de raio r_1, e $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ possui área menor que Σ e contém o mesmo volume V que Σ.

Proposição 4.29. Considere o espaço de Schwarzschild $(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, h)$ de massa $m \geq 0$ união disjunta com uma esfera de curvatura constante de dimensão 3 com volume V_S. Então existe $\overline{r} > 0$ tal que se Σ é qualquer superfície que é fronteira de uma região com volume $V \leq V_S$ inteiramente contida fora da bola euclidiana de raio $\overline{r}$, então a área de Σ é maior do que a área de uma esfera bidimensional de curvatura constante que contém um volume V na esfera tridimensional dada.

Demonstração. Como a métrica de Schwarzschild $(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, h)$ é conforme à métrica Euclidiana com um fator conforme de $\left(1+\dfrac{m}{2r}\right)^4$, segue da Desigualdade Isoperimétrica do $\mathbb{R}^3$ que, para qualquer superfície Σ inteiramente contida fora da esfera Euclidiana de raio $\overline{r}$,

$$\mathcal{A}_h(\Sigma)^{3/2} \geq \left(\mathcal{A}(\Sigma)\left(1+\frac{m}{2\overline{r}}\right)^{-4}\right)^{3/2} \geq \sqrt{36\pi}V(\Sigma)\left(1+\frac{m}{2\overline{r}}\right)^{-6},$$

onde $\mathcal{A}_h(\Sigma)$ é a área de Σ utilizando a métrica h.

Seja $A(V_S, V)$ a área de uma esfera geodésica de volume V na esfera de dimensão 3 com volume V_S. Então, como $A(V_S, V)^{3/2} < \sqrt{36\pi}V$ para $V > 0$, com a desigualdade sendo uniforme para $V \geq \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$, basta escolher $\overline{r}$ grande o suficiente de tal forma que o resultado seja válido para $V \geq \varepsilon$.

Primeiramente, note que

$$A(V_S, V)^{3/2} = \sqrt{36\pi}V\left(1 - k\left(\frac{V}{V_S}\right)^{2/3} + O_2\left(\left(\frac{V}{V_S}\right)^{2/3}\right)\right),$$

onde $k = \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^{2/3}$. Provaremos que, para $V < \varepsilon$, ao escolher $\overline{r} > 0$ suficientemente grande, então, em $(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, h)$, fora de $B_{\overline{r}}(0)$, todas as superfícies com área A contendo um volume V satisfazem

$$A^{3/2} \geq \sqrt{36\pi}V\left(1 - \frac{k}{2}\left(\frac{V}{V_S}\right)^{2/3}\right),$$

o que prova o resultado para $V < \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$ pequeno.

Seja $\Sigma = \partial D$ uma superfície que contém um volume $V = V(D) < \varepsilon$ e inteiramente contida fora de $B_{\overline{r}}(0)$. Além disso, suponha que Σ é suave.

Dado um subconjunto aberto $U \subseteq D$, defina $f(U) := \mathcal{A}(\partial(D\backslash U)) + (36\pi)^{1/3}V(D)^{2/3}$. Note que, como D é limitado, existe um aberto $U_0 \subseteq D$ tal que $f(U_0) \leq f(U)$ para todo

$U \subseteq D$ aberto. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\partial U) &\leq \mathcal{A}(\partial(D\backslash U)) + \mathcal{A}(\partial D) \\ &\leq (36\pi)^{1/3}(V(D) - V(U))^{2/3} + (36\pi)^{1/3}V(D)^{2/3} \\ &\leq 2(36\pi)^{1/3}V(D)^{2/3}, \end{aligned}$$

o que nos garante uma limitação uniforme para $\mathcal{A}(\partial U)$. Além disso, note que

$$f(U_0) \leq f(\emptyset) = \mathcal{A}(\partial D).$$

Agora considere a região $\overline{D}$ definida como a união entre $D\backslash U_0$ e uma bola aberta de volume igual a $V(U_0)$ e que está contida em uma cópia de $\mathbb{R}^3$. Então,

$$\mathcal{A}(\partial\overline{D}) = \mathcal{A}(\partial(D\backslash U_0)) + (36\pi)^{1/3}V(U_0)^{2/3} = f(U_0) \leq \mathcal{A}(\partial D).$$

Portanto, basta mostrar que

$$\mathcal{A}(\partial D)^{3/2} \geq \sqrt{36\pi}V\left(1 - \frac{k}{2}\left(\frac{V}{V_S}\right)^{2/3}\right)$$

para $\overline{D} \subseteq (\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, h) \sqcup \mathbb{R}^3$.

Também é suficiente provar a desigualdade acima para cada componente separadamente. A desigualdade é satisfeita trivialmente para a bola aberta de volume $V(U_0)$ em $\mathbb{R}^3$. Portanto, basta verificar a desigualdade para as componentes em Schwarzschild. Considere $\Sigma_i = \partial\overline{D}_i$ uma das componentes que estão fora de uma bola aberta de raio $\widetilde{r} > 0$ em Schwarzschild. Note que

$$\mathcal{A}(\Sigma_i) \leq (36\pi)^{1/3}V(\Sigma_i)^{2/3}$$

pois, caso contrário $U_0 \cap \overline{D}_i \neq \emptyset$. Além disso,

$$\operatorname{diam}(\Sigma_i) \leq \frac{(36\pi)^{1/6}V(\Sigma_i)^{1/3}}{\sqrt{\alpha}},$$

onde $\alpha > 0$ é a constante do Teorema 4.27, pois, caso contrário,

$$\operatorname{diam}(\Sigma_i) > \frac{(36\pi)^{1/6}V(\Sigma_i)^{1/3}}{\sqrt{\alpha}} \geq \sqrt{\frac{\mathcal{A}(\Sigma_i)}{\alpha}} \implies \frac{\mathcal{A}(\Sigma_i)}{\operatorname{diam}(\Sigma_i)^2} < \alpha$$

e, pelo Teorema 4.27, é possível remover uma parte de Σ_i e substituir por uma bola aberta de $\mathbb{R}^3$ de mesmo volume, diminuindo a área do bordo, o que é uma contradição, pois U_0 estaria incluso na região a retirada para formar uma bola de mesmo volume.

Agora tome $p_0 \in \overline{D}_i \subseteq (\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, h)$ um ponto arbitrário e seja r_0 a coordenada radial de p_0. Como Σ_i está fora da bola euclidiana de raio $\overline{r}$, $r_0 \geq \overline{r}$.

Agora construa uma aplicação ϕ que leva uma vizinhança conexa esfericamente simétrica de p_0 em um vizinhança conexa anelar, isto é, formada pela diferença entre duas vizinhanças esfericamente simétricas de $S^3(R_0)$, onde $S^3(R_0)$ é a esfera de dimensão 3 com raio R_0 em $\mathbb{R}^4$, tal que ϕ seja esfericamente simétrica, que preserva volume localmente e que seja "tangente" em p_0 (a ser explicado mais a frente na demonstração).

Defina

$$u(r)^{-1} = \frac{\|d\phi(\partial_r)\|_{g_0}}{\|\partial_r\|_h},$$

onde ∂_r é o vetor tangente na direção radial em Schwarzschild. Então, $u(r)^{-1}$ é o fator pelo qual os comprimentos das curvas são multiplicados na direção radial. Como queremos que ϕ preserve volume localmente, o fator pelo qual os comprimentos das curvas são multiplicados nas outras direções mutuamente ortogonais será $u(r)^{1/2}$. Além disso, defina ϕ tal que $u(r_0) = 1$ e $\frac{du}{dr}(r_0) = 0$; diremos que ϕ será tangente em $p \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ se satisfazer a condição descrita anteriormente.

Como o volume é preservado localmente pela ϕ, é conveniente parametrizar ϕ pelo volume que as esferas esfericamente simétricas ocupam ou pelo o seu volume relativo. De fato, em Schwarzschild, defina $v(r)$ como sendo o volume da esfera esfericamente simétrica de raio r menos a esfera esfericamente simétrica de raio r_0. Vale observar que, $v(r) < 0$ para $r < r_0$ e $v(r_0) = 0$. Também defina $U(v) = u(r(v))$, isto é, u escrita na variável v e $A_0(v)$ como sendo a área da esfera esfericamente simétrica que ocupa um volume v fora da esfera esfericamente simétrica de raio r_0. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
v(r) &= \int_{r_0}^{r} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} s^2 \left(1 + \frac{m}{2s}\right)^6 |\sin(\theta)|\, d\theta\, d\phi\, ds = 4\pi \int_{r_0}^{r} s^2 \left(1 + \frac{m}{2s}\right)^6 ds \\
v'(r) &= 4\pi r^2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^6 \\
A_0(v) &= A_0(v(r)) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 d\theta\, d\phi = 4\pi r^2 \left(1 + \frac{m}{2r^2}\right)^4 \\
A_0'(v) &= \frac{dA_0}{dr}\frac{dr}{dv} = \frac{1}{4\pi r^2}\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-6} \frac{d}{dr}\left(4\pi r^2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4\right) = \frac{2r - m}{r^2}\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3} \\
A_0''(v) &= \frac{dA_0'}{dr}\frac{dr}{dv} = \frac{1}{4\pi r^2}\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-6} \frac{d}{dr}\left(\frac{2r - m}{r^2}\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-3}\right) \\
&= -\frac{(2r - m)^2}{8\pi r^6}\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-10}
\end{aligned}$$

Além disso, sabemos das contas feitas anteriormente que, para todo $v \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{\frac{A_0(v)}{16\pi}}\left(1 - \frac{A_0(v)A_0'(v)^2}{16\pi}\right) = m.$$

Utilize ϕ para definir v em $(S^3(R_0), g_0)$ e defina $A_1(v)$ como sendo a área da esfera geodésica em $S^3(R_0)$ que ocupa um volume v. Como ϕ preserva volume localmente, a variável v que denota o volume da esfera em $(S^3(R_0), g_0)$ é o mesmo volume relativo na métrica de Schwarzschild.

Agora note que, como

$$g_0 = R_0^2 \left(d\psi^2 + \sin(\psi)^2 \left(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2\right)\right), \quad (\psi, \theta, \phi) \in (0, \pi)^2 \times (0, 2\pi),$$

para $\rho \in (0, \pi)$, onde ρ é o raio da esfera geodésica,

$$\begin{aligned}
v(\rho) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho} R_0^3 \sin(\psi)^2 \sin(\theta)\, d\psi\, d\theta\, d\phi = 4\pi R_0^3 \int_0^{\rho} \sin(\psi)^2\, d\psi \\
v'(\rho) &= 4\pi R_0^3 \sin(\rho)^2 \\
A_1(v) &= A_1(v(\rho)) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R_0^2 \sin(\rho)^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\phi = 4\pi R_0^2 \sin(\rho)^2 \\
A_1'(v) &= \frac{dA_1}{d\rho}\frac{d\rho}{dv} = \frac{4\pi R_0^2 \sin(2\rho)}{4\pi R_0^3 \sin(\rho)^2} = \frac{2}{R_0} \operatorname{cotg}(\rho) \\
A_1''(v) &= \frac{dA_1'}{d\rho}\frac{d\rho}{dv} = -\frac{2}{R_0 \sin(\rho)^2} \cdot \frac{1}{4\pi R_0^3 \sin(\rho)^2} = -\frac{8\pi}{A_1(v)^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{A_1(v)}\left(1 - \frac{A_1(v)A_1'(v)^2}{16\pi}\right) &= \frac{4\pi}{4\pi R_0^2 \sin(\rho)^2}\left(1 - \frac{4\pi R_0^2 \sin(\rho)^2}{16\pi} \cdot \frac{4\cos(\rho)^2}{R_0^2 \sin(\rho)^2}\right) \\
&= \frac{R_0^{-2}}{\sin(\rho)^2} \cdot \left(1 - \cos(\rho)^2\right) = R_0^{-2}.
\end{aligned}$$

No ponto de tangência $v = 0$, temos que $A_0(0) = A_1(0)$ e $A_0'(0) = A_1'(0)$. Portanto,

$$mR_0^2 = \sqrt{\frac{A_0(0)}{16\pi}} \cdot \frac{A_0(0)}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_0(0)}{4\pi}\right)^{3/2}.$$

Portanto, se pudermos tomar p_0 suficientemente distante da origem, isto é, tomar r_0 suficientemente grande, $A_0(0)$, e portanto, R_0, se tornará suficientemente grande. Logo, para garantir R_0 grande o suficiente, basta provar que é possível tomar $\overline{r}$ grande o suficiente.

Além disso, como $A_1(v) = U(v)A_0(v)$, temos que

$$\begin{aligned}
U(v) = \frac{A_1(v)}{A_0(v)} \quad &\Longrightarrow \quad U'(v) = \frac{A_1'(v)A_0(v) - A_1(v)A_0'(v)}{A_0(v)^2} \\
&\Longrightarrow \quad U''(v) = \frac{A_1''(v)A_0(v) - A_1(v)A_0''(v)}{A_0(v)^2} - 2\frac{(A_1'(v)A_0(v) - A_1(v)A_0'(v)) \cdot A_0'(v)}{A_0(v)^3} \\
&\Longrightarrow \quad U''(0) = \frac{A_1''(0) - A_0''(0)}{A_0(0)}.
\end{aligned}$$

Passando de volta para a coordenada r,

$$u(r) = U(v(r)) \implies \frac{du}{dr} = \frac{dU}{dv}\frac{dv}{dr} \implies \frac{d^2u}{dr^2} = \frac{d^2U}{dv^2}\left(\frac{dv}{dr}\right)^2 + \frac{dU}{dv}\frac{d^2v}{dr^2}.$$

Como $U'(0) = 0$ pois $A_0(0) = A_1(0)$ e $A_0'(0) = A_1'(0)$,

$$\begin{aligned} u''(r_0) &= U''(0)(v'(r_0))^2 \\ &= A_0(0)\left(1+\frac{m}{2r_0}\right)^4\left(-\frac{8\pi}{A_1(0)} - A_0''(0)\right) \\ &= 4\pi r_0^2\left(1+\frac{m}{2r_0}\right)^8\left(-\frac{8\pi}{16\pi^2 r_0^4}\left(1+\frac{m}{2r_0}\right)^{-8} + \frac{(2r_0-m)^2}{8\pi r_0^6}\left(1+\frac{m}{2r_0}\right)^{-10}\right) \\ &= -\frac{4m}{r_0^3}\left(1+\frac{m}{2r_0}\right)^{-2}, \end{aligned}$$

o que mostra que $u''(r_0)$ tende a 0 assim como $\dfrac{k_0}{A_0(0)}$, onde k_0 é uma constante real. Portanto, podemos garantir $u''(r_0)$ suficientemente pequeno ao escolher $\overline{r}$ suficientemente grande.

Como $V < \varepsilon$, $\operatorname{diam}(\Sigma_i) \leq \dfrac{(36\pi)^{1/6}\varepsilon^{1/3}}{\sqrt{\alpha}}$, então basta estender ϕ a esta distância de p_0. Portanto, em Σ_i, $u(r) \geq 1 - \delta(r-r_0)^2$, para algum $\delta > 0$ pois $u(r_0) = 1$ e $u'(r_0) = 0$, e podemos tomar δ suficientemente pequeno de tal forma que $u''(r_0)$ também seja seja suficientemente pequeno. Logo, $u(r) \leq 1$, o que prova que ϕ aumenta as áreas pontualmente a um fator menor ou igual a $u(r)^{-1/2}$ e

$$u(r) \leq 1 - \delta\operatorname{diam}(\Sigma_i)^2 \leq 1 - \frac{\delta(36\pi)^{1/3}V^{2/3}}{\alpha}.$$

Como as esferas esfericamente simétricas minimizam áreas dentre as hipersuperfícies de $(S^3(R_0), g_0)$ que contém o mesmo volume, isto é,

$$A^{3/2} \geq \sqrt{36\pi}V,$$

com igualdade se, e somente se, a hipersuperfície for uma esfera. Logo, $A^{3/2} \leq \sqrt{36\pi}V(1 - \delta V^{2/3})$. Como ϕ aumenta áreas a um fator de, no máximo, $u(r)^{-1/2}$, em Schwarzschild,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(\Sigma_i)^{3/2} &\geq u(r)^{3/4}\sqrt{36\pi}V(1-\delta V^{2/3}) \\ &\geq \sqrt{36\pi}V(1-\delta V^{2/3})\left(1 - \frac{\delta(36\pi)^{1/3}V^{2/3}}{\alpha}\right)^{3/4}, \end{aligned}$$

para $V < \varepsilon$ se $\overline{r}$ for suficientemente grande. Como $\delta > 0$ pode ser tomado suficientemente pequeno quanto se queira, $\overline{r}$ foi escolhido grande o suficiente, o que prova a nossa afirmação e o Teorema. □

4.6.2 Existência de solução para o problema isoperimétrico

Utilizando as proposições provadas na subseção anterior, é possível provar a existência de minimizantes para todo $V \geq 0$. Entretanto, para provar esse Teorema, precisamos considerar uma pequena variação do problema isoperimétrico inicial.

Teorema 4.30. Suponha que (M, g) seja completa com curvatura escalar não-negativa, Schwarzschild no infinito com massa m, que contém uma única esfera mínima maximal Σ_0 e que satisfaz a Condição dada. Seja $\widetilde{M}$ o fecho da componente de $M \backslash \Sigma_0$ que contém o fim assintoticamente plano e seja S^3 uma esfera de curvatura constante de volume V_S. Defina

$$A(V) = \inf_{\Sigma} \{\mathcal{A}(\Sigma); \Sigma \text{ contém um volume } V \text{ fora de } \Sigma_0\},$$

onde Σ é a fronteira de alguma região tridimensional em $M \sqcup S^3$ e Σ é uma superfície em $\widetilde{M} \sqcup S^3$ na mesma classe de homologia de $\widetilde{M} \sqcup S^3$ que o horizonte Σ_0.

Então, para todo $V \in [0, V_S]$, existe uma superfície $\Sigma(V)$ contendo um volume V fora de Σ_0 na mesma classe de superfícies descrita acima tal que $\mathcal{A}(\Sigma(V)) = \mathcal{A}(V)$.

Demonstração. Pela definição da função A, existe uma sequência de superfícies $(\Sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $\widetilde{M} \sqcup S^3$ tal que Σ_j contém um volume V fora de Σ_0 e $\mathcal{A}(\Sigma_j) \downarrow A(V)$ quando $j \to \infty$.

Primeiramente, para cada $j \in \mathbb{N}$, substitua $\Sigma_j \cap S^3$ por uma esfera geodésica $S_{j,1}$ de S^3 que contém o mesmo volume e menor área que $\Sigma_j \cap S^3$ e defina $\widetilde{\Sigma}_j := (\Sigma_j \cap M) \sqcup S_{j,1}$. Pela construção anterior, $\widetilde{\Sigma}_j$ contém o mesmo volume e área menor que Σ_j.

Como M é Schwarzschild no infinito, isto é, isométrico a Schwarzschild fora de uma bola geodésica B_{r_0} de raio $r_0 > 0$ em M. Tome $\tilde{r} > \max\{r, \overline{r}, r_0\}$, onde $r > 0$ é o raio obtido pela Proposição 4.28 e $\overline{r} > 0$ é o raio obtido pela Proposição 4.29, $r_1 > \tilde{r}$ e $r_2 := 2r_1$. Então, pela Proposição 4.28 para cada $j \in \mathbb{N}$, podemos modificar $\widetilde{\Sigma}_j \cap M$ em $\widetilde{\Sigma}_j^1$, $\widetilde{\Sigma}_j^2$ e $\widetilde{\Sigma}_j^3$, onde $\widetilde{\Sigma}_j^1 = \Sigma_j \cap \overline{B_{r_1}}$, $\widetilde{\Sigma}_j^2 = \Sigma_j \cap (M \backslash B_{r_2})$, $\widetilde{\Sigma}_j^3 \subset S^3$, e $\bigcup_{k=1}^{3} \widetilde{\Sigma}_j^k$ contém o mesmo volume e área menor que $\widetilde{\Sigma}_j \cap M$. Em S^3, substitua $\widetilde{\Sigma}_j^3$ e $S_{j,1}$ por uma única esfera geodésica $S_{j,2}$ de S^3 que contém o mesmo volume e área menor que $\widetilde{\Sigma}_j^3 \sqcup S_{j,1}$.

Como $\widetilde{\Sigma}_j^2$ está fora da bola geodésica de raio r_2 em M, pela Proposição 4.29, podemos substituir $\widetilde{\Sigma}_j^2$ por uma esfera geodésica $S_{j,3}$ de S^3 que contém o mesmo volume e menor área que $\widetilde{\Sigma}_j^2$. Agora substitua $S_{j,2}$ e $S_{j,3}$ por uma única esfera geodésica S_j de S^3 que contém o mesmo volume e menor área que $S_{j,2} \sqcup S_{j,3}$.

Agora, defina para cada $j \in \mathbb{N}$, Σ'_j como sendo a união disjunta entre $\widetilde{\Sigma}_j^1$ e S_j. Como $\Sigma'_j \subset B_{r_1} \sqcup S^3$, que é um conjunto compacto, segue da compacidade do espaço de correntes retificáveis (MORGAN, 2016) podemos extrair de $(\Sigma'_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma subsequência $(\Sigma'_{j_m})_{m \in \mathbb{N}}$ convergente no espaço de correntes; denotaremos a superfície limite como Σ_∞. Entretanto, como

$$\mathcal{A}(\Sigma_j) \geq \mathcal{A}(\Sigma'_j) \geq A(V),$$

segue que

$$A(V) = \lim_{m \to \infty} \mathcal{A}(\Sigma_{j_m}) \geq A(\Sigma_\infty) = \lim_{m \to \infty} \mathcal{A}(\Sigma'_{j_m}) \geq A(V) \implies \mathcal{A}(\Sigma_\infty) = A(V),$$

o que prova a existência de minimizantes para o problema isoperimétrico do enunciado. □

Utilizando o resultado acima, podemos demonstrar finalmente a existência de superfícies minimizantes para o problema isoperimétrico em M.

Teorema 4.31. Suponha que (M, g) seja completa com curvatura escalar não-negativa, Schwarzschild no infinito com massa m, que contém uma única esfera mínima maximal Σ_0 e que satisfaz a Condição dada. Seja $\widetilde{M}$ o fecho da componente de $M \backslash \Sigma_0$ que contém o fim assintoticamente plano. Defina

$$A(V) = \inf_{\Sigma} \{\mathcal{A}(\Sigma); \Sigma \text{ contém um volume } V \text{ fora de } \Sigma_0\},$$

onde Σ é a fronteira de alguma região tridimensional em $\widetilde{M}$ e Σ é uma superfície em $\widetilde{M}$ na mesma classe de homologia de $\widetilde{M}$ que o horizonte Σ_0. Então, para todo $V \geq 0$, existe uma superfície $\Sigma(V)$ contendo um volume V fora de Σ_0 na mesma classe de homologia descrita acima tal que $\mathcal{A}(\Sigma(V)) = A(V)$.

Demonstração. Seja $V_{\max} \geq 0$ e $V_S > V_{\max}$. Considere novamente $M \sqcup S^3$, onde S^3 é a 3-esfera euclidiana em $\mathbb{R}^4$ com curvatura constante e volume V_S. Sabemos pelo Teorema 4.30 que para $V \in [0, V_S]$ existem superfícies $\Sigma(V)$ que são soluções do problema isoperimétrico em $M \sqcup S^3$; em particular, obtemos superfícies $\Sigma(V)$ que são soluções do problema isoperimétrico para $V \in [0, V_{\max}]$. Pela condição imposta na hipótese, podemos escolher minimizantes $\Sigma(V)$ que possuam no máximo duas componentes, uma em M e uma em S^3.

Provaremos que, para V_S suficientemente grande, os minimizantes possuem volume 0 em S^3, estando portanto inteiramente contidos em M. Seja

$$\widetilde{V} := \sup\left\{V \leq V_{\max}; \Sigma(V) \text{ possui volume 0 em } S^3\right\}.$$

Sabemos que $\widetilde{V} \geq 0$ pois M possui um único horizonte, que é $\Sigma_0 = \Sigma(0)$. Além disso, para $V \in [0, \widetilde{V}]$, $\Sigma(V)$ possui volume 0 em S^3 e, portanto, está inteiramente contido em M. Pelos resultados anteriores, segue que m_M é não-decrescente em $[0, \widetilde{V}]$ e

$$m_M(V) \geq m_M(0) = \sqrt{\frac{\mathcal{A}(\Sigma_0)}{16\pi}}.$$

Para $V \geq \widetilde{V}$, m_M não é necessariamente não-decrescente. Entretanto, ao analisarmos a demonstração dos Teoremas 4.14 e 4.17, podemos obter que $m_M(V) \geq \varepsilon$, para $V \in [0, V_{\max}]$, onde $\varepsilon > 0$ depende apenas de $V_{\max}$ e da área do horizonte Σ_0. De fato, ao analisar a demonstração do Teorema 4.14, obtemos que, para as superfícies $\Sigma(V)$ que são soluções do problema isoperimétrico em $M \sqcup S^3$,

$$A''(V) \leq \frac{8\pi}{A(V)^2} - \frac{3A'(V)^2}{4A(V)}, \text{ para todo } V \in [0, V_S],$$

no sentido das funções de comparação. Isso segue do fato que, nesse caso, as superfícies minimizantes possuírem duas componentes. Definindo a função F da mesma forma que anteriormente, obteremos

$$F''(V) \leq \frac{72\pi - F'(V)^2}{6F(V)}, \text{ para todo } V \in [0, V_S],$$

no sentido das funções de comparação. Assim, imitando a demonstração do Teorema 4.17, temos que, para todo $\phi \in C_c^\infty([0, V_S])$ com $\phi \geq 0$,

$$\begin{aligned}
-\int_0^{V_S} m_M(V)\phi'(V)\,dV &\geq \int_0^{V_S} 2F_{V_0}(V_0)^{1/3}F'_{V_0}(V_0)\left(-F''_{V_0}(V_0) + \frac{36\pi - F_{V_0}(V_0)^2}{6F_{V_0}(V_0)}\right)\phi(V_0)\,dV_0 \\
&\geq -\int_0^{V_S} 2F_{V_0}(V_0)^{1/3}F'_{V_0}(V_0)\frac{36\pi}{6F_{V_0}(V_0)}\phi(V_0)\,dV_0 \\
&= \int_0^{V_S} -\frac{12\pi F'_{V_0}(V_0)}{F_{V_0}(V_0)^{2/3}}\phi(V_0)\,dV_0 \\
&\geq \int_0^{V_S} -\frac{12\pi F'_{V_0}(V_0)}{\mathcal{A}(\Sigma_0)}\phi(V_0)\,dV_0
\end{aligned}$$

o que prova que $m'_M(V) \geq -\dfrac{12\pi}{\mathcal{A}(\Sigma_0)}F'(V)$ no sentido das distribuições para $V \in [0, V_S]$.

Também note que para $V \in [0, V_S]$,

$$\mathcal{A}(\Sigma_0) \leq A(V) \leq \mathcal{A}(\Sigma_0) + (36\pi)^{1/3}V_{\max}^{2/3},$$

onde a limitação superior vem do fato de que podemos comparar $\Sigma(V)$ com a superfície formada pelo horizonte união com uma esfera esfericamente simétrica contendo um volume V no fim assintoticamente plano de M. Além disso, como o horizonte é maximal, $A'(V) \geq 0$ e

$$A''(V) \leq \frac{8\pi}{A(V)^2} - \frac{3A'(V)^2}{4A(V)} \leq \frac{8\pi}{\mathcal{A}(\Sigma_0)^2} \implies A'(V) \leq \frac{8\pi V_{\max}}{\mathcal{A}(\Sigma_0)^2}$$

para $V \in [0, V_{\max}]$. Logo,

$$m'_M(V) \geq -\frac{12\pi}{\mathcal{A}(\Sigma_0)} \cdot \frac{3}{2}A(V)^{1/2}A'(V) \geq -\frac{18\pi}{\mathcal{A}(\Sigma_0)} \cdot \sqrt{\mathcal{A}(\Sigma_0)} \cdot \frac{8\pi V_{\max}}{\mathcal{A}(\Sigma_0)^2} = -\frac{144\pi^2 V_{\max}}{\mathcal{A}(\Sigma_0)^{5/2}}$$

e, portanto,

$$m_M(V) \geq m_M(0) - \frac{144\pi^2 V_{\max}^2}{\mathcal{A}(\Sigma_0)^{5/2}} \geq -\frac{144\pi^2 V_{\max}^2}{\mathcal{A}(\Sigma_0)^{5/2}} = \varepsilon.$$

Como $m_M(V) \geq \varepsilon$ e $A(V) \geq \mathcal{A}(\Sigma_0)$ para $V \in [0, V_{\max}]$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \leq \frac{F(V)^{1/3}}{144\pi^{3/2}}\left(36\pi - F'(V)^2\right) &\implies -(\varepsilon')^2 = \frac{144\pi^{3/2}\varepsilon}{\mathcal{A}(\Sigma_0)^{1/2}} \leq \frac{144\pi^{3/2}\varepsilon}{A(V)^{1/2}} \leq 36\pi - F'(V)^2 \\
&\implies F'(V)^2 \leq 36\pi + (\varepsilon')^2 \leq \left(\sqrt{36\pi} - \varepsilon'\right)^2 \\
&\implies \frac{3}{2}A(V)^{1/2}A'(V) = F'(V) \leq \sqrt{36\pi} - \varepsilon' \\
&\implies A'(V) \leq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{36\pi}{A(V)}} - \frac{2\varepsilon'}{3A(V)^{1/2}} \\
&\implies A'(V) \leq \sqrt{\frac{16\pi}{A(V)}} - \varepsilon'',
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon'' > 0$ é uma constante que depende apenas de $V_{\max}$ e $\mathcal{A}(\Sigma_0)$. Por outro lado, considere a superfície $\Sigma(V)$ para $V \in [0, V_{\max}]$. Como $\Sigma(V)$ possui curvatura média $H(V)$ constante em todas as suas componentes, segue que

$$H(V) \leq \sqrt{\frac{16\pi}{A(V)}} - \varepsilon''.$$

Considere uma esfera euclidiana S de área A em $\mathbb{R}^3$. É fato sabido que a curvatura média de S, H_S é igual a $\sqrt{\frac{16\pi}{A}}$. Agora considere uma esfera geodésica Σ de área A (e raio $\overline{r}$) em uma 3-esfera euclidiana $S^3(R_0)$ em $\mathbb{R}^4$ de volume V_S. Como a métrica induzida g_0 de $S^3(R_0)$ em $\mathbb{R}^4$ é igual a

$$g_0 = R_0^2 \left(dr^2 + \sin(r)^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2)\right), (r, \theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

segue que

$$V_S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R_0^3 \sin(r)^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi = 2\pi^2 R_0^3 \implies R_0 = \left(\frac{V_S}{2\pi^2}\right)^{1/3}.$$

Calculando a área de Σ em função de $\overline{r}$ e a curvatura média de Σ, H_Σ, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R_0^2 \sin(\overline{r})^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\phi = 4\pi R_0^2 \sin(\overline{r})^2 \implies \operatorname{cossec}(\overline{r})^2 = \frac{4\pi R_0^2}{A} \\ \vec{H}_\Sigma &= II\left(\frac{\partial_\theta}{\|\partial_\theta\|_{g_0}}, \frac{\partial_\theta}{\|\partial_\theta\|_{g_0}}\right) + II\left(\frac{\partial_\phi}{\|\partial_\phi\|_{g_0}}, \frac{\partial_\phi}{\|\partial_\phi\|_{g_0}}\right) = \frac{2}{R_0^2} \operatorname{cotg}(\overline{r}) \partial_r \\ H_\Sigma &= \frac{2}{R_0} \operatorname{cotg}(\overline{r}) = \frac{2}{R_0} \sqrt{\operatorname{cossec}(\overline{r})^2 - 1} = \frac{2}{R_0} \sqrt{\frac{4\pi R_0^2 - A}{A}}. \end{aligned}$$

Então,

$$H_\Sigma - H_S = \sqrt{\frac{16\pi R_0^2 - 4A}{A R_0^2}} - \sqrt{\frac{16\pi}{A}} = \sqrt{\frac{16\pi}{A}} \left(\sqrt{1 - \frac{A}{4\pi R_0^2}} - 1\right) \longrightarrow 0$$

quando $V_S \to \infty$.

Agora suponha que $\Sigma(V)$, $V \in [0, V_{\max}]$, tenha uma componente em S^3. Pela construção do Teorema anterior, sabemos que essa componente é uma esfera geodésica de curvatura constante. Portanto, tomando V_S suficientemente grande, violaremos a desigualdade $H(V) \leq \sqrt{\frac{16\pi}{A(V)}} - \varepsilon''$ pois $H_S - H_{\Sigma(V) \cap S^3} \to 0$ quando $V_S \to \infty$. Logo, $\Sigma(V) \subseteq M$ para $V \in [0, V_{\max}]$. Pela definição de $\widetilde{V}$, segue que $\widetilde{V} = V_{\max}$ e, como $V_{\max}$ é arbitrário, obtemos o resultado. $\square$

4.6.3 Demonstração do Teorema Principal

Agora, com todos os passos já demonstrados, basta apenas juntá-los.

Demonstração do Teorema 4.13. Pelos Teoremas 4.17 e 4.25, temos que

$$m = \lim_{V \to \infty} m_M(V) \geq m_M(0).$$

Por outro lado, como o horizonte $\Sigma_0 = \Sigma(0)$ é, por definição, uma superfície mínima, segue que $F'(0) = 0$ e, portanto,

$$m_M(0) = \frac{F(0)^{1/3}}{144\pi^{3/2}} \cdot 36\pi = \sqrt{\frac{\mathcal{A}(\Sigma_0)}{16\pi}}.$$

Juntando as duas afirmações, obtemos o resultado. □

APÊNDICE A – Tensores e produtos escalares

Este apêndice foi criada com a razão de fixar notação e enunciar resultados importantes sobre tensores para os capítulos principais. A principal referência nas duas primeiras seções é (O'NEILL, 1983) e, na terceira seção, a principal referência é (VICTORIA; CAJA, 2010).

A.1 Tensores e campos tensoriais

A.1.1 Definição e propriedades básicas

Definição A.1. Seja $\mathbb{K}$ um anel comutativo com unidade, V um $\mathbb{K}$-módulo e V^* o seu dual. Sejam $r, s \geq 0$ números inteiros não todos nulos. Uma função $\mathbb{K}$-multilinear $A : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{K}$ é dito um tensor de tipo (r, s) sobre V.

Quando $r = 0$ e $s \neq 0$, entendemos um tensor de tipo $(0, s)$ como uma aplicação $\mathbb{K}$-multilinear $A : V^s \to \mathbb{K}$. Analogamente, quando $r \neq 0$ e $s = 0$, entendemos um tensor de tipo $(r, 0)$ como uma aplicação $\mathbb{K}$-multilinear $A : (V^*)^r \to \mathbb{K}$. Quando $r = s = 0$, definimos um tensor de tipo $(0, 0)$ como um elemento de $\mathbb{K}$. Os tensores de tipo $(0, s)$, onde $s \neq 0$, serão chamados de **covariantes** e os tensores de tipo $(r, 0)$, onde $r \neq 0$, serão chamados de **contravariantes**.

Definição A.2. Denotamos $\mathfrak{T}^r_s(V)$ como o conjunto dos tensores de tipo (r, s) sobre V.

Como o conjunto $C^\infty(M)$ de funções suaves sobre uma variedade diferenciável M possui uma estrutura de anel comutativo com unidade e o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ de campos vetoriais suaves sobre M possui uma estrutura de $C^\infty(M)$-módulo, podemos definir o conceito de tensor sobre uma variedade M. Mais precisamente:

Definição A.3. Um **campo tensorial** A em uma variedade M é uma aplicação $C^\infty(M)$-multilinear

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M),$$

onde $\mathfrak{X}^*(M) := (\mathfrak{X}(M))^*$ é o conjunto de 1-formas sobre M.

Denotamos o conjunto dos campos tensoriais de tipo (r, s) como $\mathfrak{T}^r_s(M)$.

Exemplo A.4. A função de evaluação $E : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, definida por $E(\theta, X) := \theta(X)$ é um tensor de tipo $(1, 1)$.

Mesmo $\mathfrak{T}^r_s(M)$ não sendo munido de uma operação de multiplicação de campo de tensores, podemos definir um campo tensorial de tipo $(r+r', s+s')$, com $r, r', s, s' \geq 0$, a partir de dois tensores $A \otimes B \in \mathfrak{T}^{r+r'}_{s+s'}(M)$.

Exemplo A.5. Sejam $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $B \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$. Definimos o **produto tensorial** de A e B, $A \otimes B \in \mathfrak{T}^{r+r'}_{s+s'}(M)$ por

$$(A \otimes B)(\theta^1, ..., \theta^{r+r'}, X_1, ..., X_{s+s'}) := \\ A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)B(\theta^{r+1}, ..., \theta^{r+r'}, X_{s+1}, ..., X_{s+s'}).$$

Se $r' = s' = 0$, definimos o produto tensorial de $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $f \in \mathfrak{T}^0_0(M) = C^\infty(M)$ como

$$A \otimes f = f \otimes A := fA.$$

Obviamente, o produto tensorial entre dois campos tensoriais é associativo e distributivo, mas **não** é comutativo (exceto quando um campo tensorial for covariante e o outro for contravariante).

Observação A.6. Podemos identificar $\mathfrak{T}^0_1(M)$ como $\mathfrak{X}^*(M)$ usando as aplicações

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathfrak{T}^0_1(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^*(M) \\ A & \longmapsto & \Phi(A) : X \longmapsto A(X) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathfrak{X}^*(M) & \longrightarrow & \mathfrak{T}^0_1(M) \\ \theta & \longmapsto & \Psi(\theta) : X \longmapsto \theta(X). \end{array}$$

Identificaremos o tensor $A \in \mathfrak{T}^0_1(M)$ como a sua 1-forma equivalente.

Também podemos identificar $\mathfrak{T}^1_0(M)$ como $\mathfrak{X}(M)$ usando as aplicações

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathfrak{T}^1_0(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ A & \longmapsto & \Phi(A) = \sum_i A(dx^i)\partial_i \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{T}^1_0(M) \\ X & \longmapsto & \theta \longmapsto \theta(X). \end{array}$$

Analogamente, identificaremos o tensor $A \in \mathfrak{T}^1_0(M)$ como o campo de vetores equivalente.

Além disso, podemos identificar $\mathcal{L}(\mathfrak{X}(M)^s, \mathfrak{X}(M))$, o conjunto das aplicações $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ que são $C^\infty(M)$-multilineares, como $\mathfrak{T}^1_s(M)$, utilizando as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{L}(\mathfrak{X}(M)^s, \mathfrak{X}(M)) & \longrightarrow & \mathfrak{T}^1_s(M) \\ A & \longmapsto & \Phi(A) : (\theta, X_1, ..., X_s) \longmapsto \theta\left(A(X_1, ..., X_s)\right) \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi : \mathfrak{T}^1_s(M) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X}(M)^s, \mathfrak{X}(M)) \\ B &\longmapsto \Psi(B) : (X_1, ..., X_s) \longmapsto \sum_i B\left(dx^i, X_1, ..., X_s\right) \partial_i. \end{aligned}$$

Assim como os campos vetoriais e as 1-formas, podemos, de fato, olhar um campo tensorial $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ como um campo em M, isto é, para cada $p \in M$, podemos definir um valor $A_p \in T_pM$, no sentido de que, o valor $A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)$ em $p \in M$ depende **apenas** dos valores de θ^i e X_j em p para cada i e j.

Proposição A.7. Seja $p \in M$ e $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Se $\theta^i, \tilde{\theta}^i \in \mathfrak{X}^*(M)$, $i \in \{1, ..., r\}$ e $X_j, \tilde{X}_j \in \mathfrak{X}(M)$, $j \in \{1, ..., s\}$ são tais que $\theta^i|_p = \tilde{\theta}^i|_p$ e $X_j|_p = \tilde{X}_j|_p$ para todo i e j, então,

$$A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p) = A(\tilde{\theta}^1, ..., \tilde{\theta}^r, \tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_s)(p).$$

Demonstração. Veja a Proposição 2 e o Lema 3 do Capítulo 2 de (O'NEILL, 1983). □

Observação A.8. A proposição anterior implica que, dado um campo tensorial $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, podemos definir, para todo $p \in M$, uma função $A_p : (T^*_pM)^r \times T_pM \to \mathbb{R}$, definida por

$$A_p(\alpha^1, ..., \alpha^r, v_1, ..., v_s) := A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p),$$

onde $\theta^1, ..., \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, ..., X_s \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $\theta^i|_p = \alpha^i$ $(1 \leq i \leq r)$ e $X_j|_p = v_j$ $(1 \leq j \leq s)$.

Daqui em diante, chamaremos de **tensores em** M os campos tensoriais em M.

Como os campos vetoriais, podemos obter uma base e $\mathfrak{T}^r_s(M)$ e definir completamente um tensor a partir de uma certa quantidade de valores.

Definição A.9. Considere $(x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança $U \subset M$. Dado $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, definimos as componentes de A relativa a $(x^1, ..., x^n)$ como as funções

$$A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} := A(dx^{i_1}, ..., dx^{i_r}, X_{j_1}, ..., X_{j_s})$$

em U, onde os índices variam de 1 a $n = \dim M$.

Lema A.10. Seja $(x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança $U \subset M$. Se $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, então, em U,

$$A = \sum A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_s}.$$

Demonstração. Sejam $\theta^i = \sum_{k_i} a_i^{k_i} dx^i \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_j = \sum_{l_j} b_j^{l_j} \partial_l \in \mathfrak{X}(M)$, onde $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$. Então

$$\begin{aligned} A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) &= A\left(\sum_{i_1} a_{i_1}^1 dx^{i_1}, ..., \sum_{i_r} a_{i_r} dx^{i_r}, \sum_{j_1} b_1^{j_1} \partial_{j_1}, ..., \sum_{j_s} b_s^{j_s} \partial_{j_s}\right) \\ &= \sum_{i_1,...,i_r,j_1,...,j_s} A\left(dx^{i_1}, ..., dx^{i_r}, \partial_{j_1}, ..., \partial_{j_s}\right) a_{i_1}^1 ... a_{i_r}^r b_1^{j_1} ... b_s^{j_s}. \end{aligned}$$

O resultado segue pois, para todo $k \in \{1, ..., r\}$,

$$\partial_{i_k}(\theta^k) = \theta^k(\partial_{i_k}) = \left(\sum_l a_l^k dx^l\right)(\partial_{i_k}) = \sum_l a_l^k dx^l(\partial_{i_k}) = \sum_l a_l^k \delta_{i_k}^l = a_{i_k}^k$$

e, para todo $l \in \{1, ..., s\}$,

$$dx^{j_l}(X_l) = dx^{j_l}\left(\sum_k b_l^k \partial_k\right) = \sum_k b_l^k dx^{j_l}(\partial_k) = \sum_k b_l^k \delta_k^{j_l} = b_l^{j_l}. \quad \square$$

A.1.2 Contrações

Podemos definir uma aplicação chamada contração que transforma tensores de tipo (r, s) em campos tensoriais de tipo $(r-1, s-1)$. Para obter essa aplicação, basta observar como essa aplicação funciona em tensores de tipo $(1, 1)$:

Lema A.11. Existe uma única função $C^\infty(M)$-linear $\mathbf{C} : \mathfrak{T}_1^1(M) \to C^\infty(M)$ chamada **contração** tal que $\mathbf{C}(X \otimes \theta) = \theta(X)$ para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. Além disso, dado um sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^n)$,

$$\mathbf{C}(A) = \sum_i A_i^i = \sum_i A(dx^i, \partial_i)$$

e essa expressão independe do sistema de coordenadas escolhido.

Demonstração. Ver o Lema 6 do Capítulo 2 de (O'NEILL, 1983). $\square$

Agora considere um tensor $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e inteiros $i \in \{1, ..., r\}$ e $j \in \{1, ..., s\}$. Fixe $\theta^1, ..., \theta^{r-1} \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, ..., X_s \in \mathfrak{X}(M)$. Então, a função

$$(\theta, X) \longmapsto A(\theta^1, ..., \theta^{i-1}, \theta, \theta^i, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{j-1}, X, X_j, ..., X_{s-1})$$

é um tensor de tipo $(1, 1)$ que pode ser escrito como

$$A(\theta^1, ..., \theta^{i-1}, \cdot, \theta^i, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{j-1}, \cdot, X_j, ..., X_{s-1}).$$

Aplicando a contração no tensor acima obtemos um elemento de $C^\infty(M)$ denotado por

$$(C_j^i A)(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s-1}).$$

Como $C^i_j A$ é $C^\infty(M)$-linear em cada argumento, obtemos um tensor de tipo $(r-1, s-1)$ que será denotado como a **contração** de A sobre i, j.

Dado um sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^n)$, obtemos

$$\begin{aligned}(C^i_j A)^{k_1 \dots k_{r-1}}_{l_1 \dots l_{s-1}} &:= (C^i_j A)(dx^{k_1}, ..., dx^{k_{r-1}}, \partial_{l_1}, ..., \partial_{l_{s-1}}) \\ &= \sum_m A(dx^{k_1}, ..., dx^{k_{i-1}}, dx^m, dx^{k_i}, ..., dx^{k_{r-1}}, \partial_{l_1}, ..., \partial_{l_{j-1}}, \partial_m, \partial_{l_j}, ..., \partial_{l_{s-1}}) \\ &= \sum_m A^{k_1 \dots k_{i-1} m k_i \dots k_{r-1}}_{l_1 \dots l_{j-1} m l_j \dots l_{s-1}}\end{aligned}$$

A.1.3 *Pullback* de um tensor

Dada uma função suave $\phi : M \to N$ entre duas variedades e um tensor covariante $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$, podemos definir um novo campo tensorial covariante de mesmo tipo a partir de ϕ e de A.

Definição A.12. Sejam $\phi \in C^\infty(M, N)$ e $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$, com s um inteiro positivo. Definimos o ***pullback*** de A por ϕ, $\phi^* A \in \mathfrak{T}^0_s(M)$ como

$$(\phi^* A)_p(v_1, ..., v_s) = A_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1), ..., d\phi_p(v_s)),$$

onde $p \in M$ e $v_1, ..., v_s \in T_pM$.

Como ϕ é uma aplicação diferenciável, $d\phi_p$ é uma aplicação linear para todo $p \in M$ e, portanto, $\phi^* A$ é uma aplicação $\mathbb{R}$-multilinear de $(T_pM)^s$ em $\mathbb{R}$. Logo, $\phi^* A$ é, de fato, um campo tensorial covariante de mesmo tipo que A.

Quando $f \in C^\infty(N) = \mathfrak{T}^0_0(N)$, podemos definir o *pullback* de f por A como $\phi^* f := f \circ \phi \in C^\infty(M)$. Além disso, dado $v \in T_pM$,

$$(\phi^*(df))_p(v) = df_{\phi(p)}(d\phi_p(v)) = d(f \circ \phi)_p(v).$$

Portanto, $\phi^*(df) = d(f \circ \phi) = d(\phi^* f)$.

Além das propriedades acima, observe que o *pullback* possui boas propriedades:

Lema A.13.

1. Se $\phi \in C^\infty(M, N)$, então $\phi^* : \mathfrak{T}^0_s(N) \to \mathfrak{T}^0_s(M)$ é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear para cada s inteiro não negativo e, além disso,

$$\phi^*(A \otimes B) = \phi^*(A) \otimes \phi^*(B),$$

para quaisquer campos tensores covariantes $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ e $B \in \mathfrak{T}^0_{s'}(M)$.

2. Se $\phi \in C^\infty(M, N)$ e $\psi \in C^\infty(N, P)$, então

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathfrak{T}^0_s(P) \to \mathfrak{T}^0_{s'}(M),$$

para qualquer s inteiro não negativo.

Demonstração. Ver o Lema 9 do Capítulo 2 de (O'NEILL, 1983). □

APÊNDICE B – Contrações métricas e operadores diferenciais

Assim como o apêndice anterior, este apêndice tem como principal razão a fixação da notação usada nos capítulos principais. A principal referência deste apêndice é (O'NEILL, 1983).

B.1 Contrações métricas e tensores metricamente equivalentes

B.1.1 Levantando e abaixando índices

Proposição B.1. Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Dada $X \in \mathfrak{X}(M)$, defina $X^* \in \mathfrak{X}^*(M)$ tal que

$$Y \longmapsto \langle X, Y \rangle .$$

Então, a função $X \mapsto X^*$ é um isomorfismo entre $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}^*(M)$.

Seja $X = \sum_i X^i \partial_i \in \mathfrak{X}(M)$. Então,

$$X^* = \sum_j X_j dx^j \Longrightarrow \sum_i X^i g_{ik} = \langle X, \partial_k \rangle = \sum_j a_j dx^j(\partial_k) = \sum_j a_j \delta_k^j = a_k.$$

Portanto, $X^* = \sum_{i,j} X^i g_{ij} dx^j$ e, em particular, para $i \in \{1, ..., n\}$, $\partial_i^* = \sum_j g_{ij} dx^j$.

Agora considere $\theta = \sum_i \theta_i dx^i \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $\theta_* = \sum_i a^i \partial_i \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $(\theta_*)^* = \theta$. Então,

$$\theta_i = \sum_j a^j g_{ij} \Longrightarrow \sum_i \theta_i g^{ik} = \sum_{i,j} a^j g_{ij} g^{ik} = a^k.$$

Portanto, $\theta_* = \sum_{i,j} \theta_j g^{ij} \partial_i$ e, em particular, para $i \in \{1, ..., n\}$, $(dx^i)_* = \sum_j g^{ij} \partial_j$.

Definição B.2. Dizemos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ são **metricamente equivalentes** se $\theta = X^*$.

Podemos estender o conceito de metricamente equivalentes para tensores de tipo qualquer.

Definição B.3. Seja $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, $a \in \{1, ..., r\}$ e $b \in \{1, ..., s\}$. Definimos o tensor $\downarrow^a_b A \in \mathfrak{T}^{r-1}_{s+1}(M)$ como

$$(\downarrow^a_b A)(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s+1} := A(\theta^1, ..., \theta^{a-1}, X^*_b, \theta^a ..., \theta^{r-1}, X_1 ..., \widehat{X^b}, ..., X_{s+1}).$$

Definimos o tensor $\uparrow^a_b A \in \mathfrak{T}^{r+1}_{s-1}(M)$ como

$$(\uparrow^a_b A)(\theta^1, ..., \theta^{r+1}, X_1, ..., X_{s-1}) := A(\theta^1, ..., \widehat{\theta^a}, ..., \theta^{r+1}, X_1, ..., X_{b-1}, (\theta^a)_*, X_b, ..., X_{s-1}).$$

Chamamos a operação $\downarrow^a_b \colon \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^{r-1}_{s+1}(M)$ de **abaixar um índice** e a operação $\uparrow^a_b \colon \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^{r+1}_{s-1}(M)$ de **levantar um índice**.

Sejam $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Então,

$$\begin{aligned}
(\downarrow^a_b A)^{i_1 \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{s+1}} &:= (\downarrow^a_b A)(dx^{i_1}, ..., dx^{i_{r-1}}, \partial_{j_1}, ..., \partial_{j_{s+1}}) \\
&= A(dx^{i_1}, ..., dx^{i_{a-1}}, \partial^*_{j_b}, dx^{i_a}, ..., dx^{i_{r-1}}, \partial_{j_1}, ..., \widehat{\partial_{j_b}}, ..., \partial_{j_{s+1}}) \\
&= \sum_k g_{j_b k} A(dx^{i_1}, ..., dx^{i_{a-1}}, dx^k, dx^{i_a}, ..., dx^{i_{r-1}}, \partial_{j_1}, ..., \widehat{\partial_{j_b}}, ..., \partial_{j_{s+1}}) \\
&= \sum_k g_{j_b k} A^{i_1 \dots i_{a-1} k i_a \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{b-1} j_{b+1} \dots j_{s+1}}.
\end{aligned}$$

Analogamente, $(\uparrow^a_b A)^{i_1 \dots i_{r+1}}_{j_1 \dots j_{s-1}} = \sum_k g^{i_a k} A^{i_1 \dots i_{a-1} i_{a+1} \dots i_{r+1}}_{j_1 \dots j_{b-1} k j_b \dots j_{s-1}}$.

Observação B.4. A operação de levantar um índice é inversa da operação de abaixar um índice. De fato,

$$\begin{aligned}
(\uparrow^a_b \downarrow^a_b A)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} &= \sum_k g^{i_a k} (\downarrow^a_b A)^{i_1 \dots i_{a-1} i_{a+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_{b-1} k j_b \dots j_s} = \sum_{k,l} g^{i_a k} g_{kl} A^{i_1 \dots i_{a-1} l i_{a+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_{b-1} j_b \dots j_s} \\
&= \sum_l \delta^{i_a}_l A^{i_1 \dots i_{a-1} l i_{a+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_{b-1} j_b \dots j_s} = A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Dizemos que dois tensores A e B são **metricamente equivalentes** se B pode ser obtido a partir de levantamento e rebaixamento de índices de A.

Exemplo B.5. Seja $A \in \mathfrak{T}^1_s(M)$. Então, podemos olhar A como uma aplicação $C^\infty(M)$-multilinear $\widetilde{A} : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$. Logo,

$$\begin{aligned}
(\downarrow^1_4 A)(X_1, X_2, X_3, Y) &= A(Y^*, X_1, X_2, X_3) \\
&= \sum_{i,j} Y^i g_{ij} A(dx^j, X_1, X_2, X_3) \\
&= \left\langle \sum_j A(dx^j, X_1, X_2, X_3)\partial_j, \sum_i Y^i \partial_i \right\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{A}(X_1, X_2, X_3), Y \right\rangle.
\end{aligned}$$

Em particular, tomando A como o tensor tal que $\widetilde{A}$ é o tensor de curvatura R, obtemos

$$R_{ijkl} := (\downarrow_4^1 A)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l\rangle = \sum_m g_{ml} R_{ijk}^m.$$

Proposição B.6. As operações de levantar e abaixar índices comutam com a conexão de Levi-Civita e a diferencial covariante.

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Lema 45 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

B.1.2 Contrações métricas

Em uma variedade diferenciável M, dado um tensor $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, é possível obter um tensor $\mathbf{C}(A) \in \mathfrak{T}_{s-1}^{r-1}(M)$, isto é, eliminar um índice covariante e um outro contravariante. Quando M é uma variedade semi-Riemanniana, é possível construir, com o auxílio da métrica g, um novo tensor eliminando dois índices covariantes ou dois índices contravariantes, isto é, podemos **contrair metricamente** estes índices.

Definição B.7. Seja $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $a, b \in \{1, ..., s\}$, com $a \neq b$. Então, definimos a **contração métrica** $\mathbf{C}_{ab}(A) \in \mathfrak{T}_{s-2}^r(M)$ como

$$\mathbf{C}_{ab}(A) := \mathbf{C}_b^a(\uparrow_b^a A).$$

Analogamente, se $a, b \in \{1, ..., r\}$, definimos a contração métrica $\mathbf{C}^{ab}(A) \in \mathfrak{T}_s^{r-2}(M)$ como

$$\mathbf{C}^{ab}(A) := \mathbf{C}_b^a(\downarrow_b^a A).$$

Seja $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$. Então,

$$\begin{aligned}(\mathbf{C}_{ab}(A))_{j_1 \dots j_{s-2}}^{i_1 \dots i_r} &= (\mathbf{C}_b^a(\uparrow_b^a A))_{j_1 \dots j_{s-2}}^{i_1 \dots i_r} = \sum_l (\uparrow_b^a A)_{j_1 \dots j_{b-1} l j_b \dots j_{s-2}}^{i_1 \dots i_{a-1} l i_a \dots i_r} \\ &= \sum_{k,l} g^{kl} A_{j_1 \dots j_{a-1} k j_a \dots j_{b-1} l j_b \dots j_{s-2}}^{i_1 \dots i_r}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$(\mathbf{C}^{ab}(A))_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-2}} = \sum_{k,l} g_{kl} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{a-1} k i_a \dots i_{b-1} l i_b \dots i_{r-2}}.$$

Observação B.8. Quando $A \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, denotaremos $\mathbf{C}_{12}(A)$ como $\mathrm{tr}_g A$ e chamaremos a expressão de **traço** de A.

Proposição B.9. As contrações métricas comutam com a conexão de Levi-Civita e a diferencial covariante.

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Lema 45 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

B.2 Operadores diferenciais

B.2.1 Gradiente

Definição B.10. O **gradiente** de uma função $f \in C^\infty(M)$ é o campo vetorial metricamente equivalente à diferencial $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ (pelo isomorfismo descrito na Proposição B.1), isto é,

$$\langle \operatorname{grad}_g f, X \rangle = df(X) = Xf, \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}^*(M).$$

Em um sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^n)$, o gradiente de $f \in C^\infty(M)$ pode ser escrito como

$$\operatorname{grad}_g f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j.$$

B.2.2 Divergência

Definição B.11. Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana e $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Uma **divergência** de A é uma contração (métrica ou não) da diferencial covariante de A, ∇A, em um de seus índices covariantes.

Pela definição acima, dependendo do tipo do tensor A, pode existir mais de uma divergência B. A seguir, mostraremos dois casos em que a divergência de A é única (denotaremos a divergência como $\operatorname{div} A$).

Exemplo B.12. Seja $X \in \mathfrak{X}(M) \cong \mathfrak{T}^1_0(M)$. Então, $\nabla X \in \mathfrak{T}^1_1(M)$. Aplicando a contração em ∇X, obtemos que $\mathbf{C}(\nabla X) \in \mathfrak{T}^0_0(M) = C^\infty(M)$. Portanto, num sistema de coordenadas, $(x^1, ..., x^n)$,

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_i} dx^j)(X) &= \partial_i(dx^j(X)) - dx^j(\nabla_{\partial_i} X) \\
&= \partial_i X^j - dx^j\left(\sum_k \left(\partial_i X^k \partial_k + X^k \sum_l \Gamma^l_{ik} \partial_l\right)\right) \\
&= \partial_i X^j - \sum_k \left(\partial_i X^k \delta^j_k + X^k \sum_l \Gamma^l_{ik} \delta^j_l\right) \\
&= \partial_i X^j - \partial_i X^j - \sum_k X^k \Gamma^j_{ik} \\
&= -\left(\sum_k \Gamma^j_{ik} dx^k\right)(X),
\end{aligned}$$

isto é, $\nabla_{\partial_i} dx^i = -\sum_k \Gamma^j_{ik} dx^k$ e

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_i (\nabla_{\partial_i} X)(dx^i) = \sum_i \partial_i (X(dx^i)) - X(\nabla_{\partial_i} dx^i) \\
&= \sum_i \partial_i X^i + X\left(\sum_j \Gamma^i_{ij} dx^j\right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^i_{ij} X^j\right) = \sum_i X_{;i}
\end{aligned}$$

Quando $M = \mathbb{R}^n_\nu$, $\operatorname{div} X = \sum_i \dfrac{\partial X^i}{\partial x^i}$, que é a fórmula usual para espaços euclidianos.

Observação B.13. Dada uma variedade semi-Riemanniana (M, g), sempre existe (localmente) um elemento de volume $\omega \in \Lambda^n(M)$, isto é, uma n-forma suave tal que $|\omega(e_1, ..., e_n)| = 1$, onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial ortonormal. Pelo Lema 21 do Capítulo 7 de (O'NEILL, 1983),

$$\mathcal{L}_X(\omega) = (\operatorname{div} X)\omega,$$

onde $\mathcal{L}_X$ é a derivada de Lie relativa ao campo X. A partir dessa fórmula, obtemos uma nova expressão para a divergência de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|\det(g)|} X^i\right).$$

Exemplo B.14. Seja $A \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ um tensor simétrico, então $\nabla A \in \mathfrak{T}^0_3(M)$ e, portanto, $\operatorname{div} A = \mathbf{C}_{13}(\nabla A) = \mathbf{C}_{23}(\nabla A) \in \mathfrak{T}^1_0(M) \cong \mathfrak{X}^*(M)$. Portanto, nas coordenadas $(x^1, ..., x^n)$,

$$(\operatorname{div} A)_i = (\mathbf{C}_{23}(\nabla A))_i = \sum_{j,k} g^{jk} (\nabla_{\partial_k} A)(\partial_i, \partial_j) = \sum_{j,k} g^{jk} A_{ij;k} = \sum_j A^j_{i;j}.$$

B.2.3 Hessiana e Laplaciano

Definição B.15. Definimos a **Hessiana** de uma função $f \in C^\infty(M)$ como a segunda diferencial covariante de f, $\operatorname{Hess} f := \nabla(\nabla f) = \nabla(df)$.

Lema B.16. A Hessiana de f, $\operatorname{Hess} f$, é o campo tensorial simétrico de tipo $(0, 2)$ dado por

$$(\operatorname{Hess} f)(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f = \left\langle \nabla_X (\operatorname{grad}_g f), Y \right\rangle.$$

Demonstração. A demonstração é idêntica ao caso Riemanniano. Para mais informações, veja o Lema 49 do Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

Definição B.17. Definimos o **Laplaciano** de uma função $f \in C^\infty(M)$ como a divergência de seu gradiente, $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}_g f) \in C^\infty(M)$.

Pela definição de gradiente e divergente,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}_g f) = \mathbf{C}\nabla(\operatorname{grad}_g f) = \mathbf{C}\nabla(\uparrow_1^1 df) = \mathbf{C}\uparrow_1^1 \nabla(df)\\ &= (\mathbf{C}\uparrow_1^1)(\operatorname{Hess} f) = \operatorname{tr}_g \operatorname{Hess} f,\end{aligned}$$

onde $\mathbf{C}$ é uma contração e $\uparrow_1^1$ é a operação de levantar o primeiro índice.

Em um sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^n)$,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i,j} g^{ij}(\operatorname{Hess} f)_{ij} = \sum_{i,j} g^{ij}(\operatorname{Hess} f)(\partial_i, \partial_j) = \sum_{i,j} g^{ij}\left(\partial_i\partial_j f - (\nabla_{\partial_i}\partial_j)f\right)\\ &= \sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\right).\end{aligned}$$

Observação B.18. Quando $M = \mathbb{R}^n_\nu$, $\Delta f = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$, que é a fórmula usual para espaços euclidianos.

Também podemos escrever o Laplaciano de uma função $f \in C^\infty(M)$ como

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}_g f) = \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|\det(g)|}\left(\sum_j g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|\det(g)|}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right).\end{aligned}$$

Referências

AUBIN, T. *Some Non Linear Problems in Riemannian Geometry*. [S.l.]: Springer, 1998. Citado na página 89.

BARTNIK, R.; ISENBERG, J. The Constraint Equations. In: FRIEDRICH, P. T. C. H. (Ed.). *The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields*. [S.l.]: Birkhäuser, 2004. Citado na página 47.

BRAY, H. L. *The Penrose Inequality in General Relativity and Volume Comparison Theorems Involving Scalar Curvature*. Tese (Doutorado) — Stanford University, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 7, 9 e 40.

BRAY, H. L. Proof of the Riemannian Penrose Inequality Using the Positive Mass Theorem. *Journal of Differential Geometry*, 2001. Citado na página 87.

CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. 5ª. ed. [S.l.]: IMPA, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 25, 28 e 34.

CHOQUET-BRUHAT, Y. Hyperbolic Partial Differential Equations on a Manifold. In: WHEELER, C. M. D. J. A. (Ed.). *Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics*. [S.l.]: Benjamin, 1968. p. 84–106. Citado na página 73.

CHOQUET-BRUHAT, Y. *General Relativity and the Einstein Equations*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2009. (Oxford Mathematical Monographs). Citado 6 vezes nas páginas 44, 47, 58, 65, 66 e 76.

FOLLAND, G. B. *Introduction to Partial Differential Equations*. 2ª. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 1995. Citado na página 89.

HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. 1ª. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1973. Citado na página 80.

HUISKEN, G.; ILMANEN, T. The Inverse Mean Curvature Flow and the Riemannian Penrose Inequality. *Journal of Differential Geometry*, 2001. Citado na página 87.

LEE, J. M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. [S.l.]: Springer, 1997. (Graduate Texts in Mathematics). Citado 2 vezes nas páginas 25 e 96.

LERAY, J. *Hyperbolic Differential Equations*. [S.l.]: IAS, 1953. Citado na página 70.

LóPEZ, R. *Constant Mean Surfaces with Boundary*. [S.l.]: Springer, 2013. Citado na página 115.

MORGAN, F. *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide*. 5ª. ed. [S.l.]: Academic Press, 2016. Citado na página 121.

O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. [S.l.]: Academic Press, 1983. Citado 23 vezes nas páginas 13, 15, 16, 17, 25, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 40, 76, 127, 129, 130, 132, 133, 135 e 137.

RINGSTRöM, H. *The Cauchy Problem in General Relativity*. [S.l.]: European Mathematical Society, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 67.

VICK, J. W. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. [S.l.]: Academic Press, 1973. Citado na página 45.

VICTORIA, M. A. J.; CAJA, M. S. *An Introduction to Lorentzian Geometry and its Applications*. [S.l.]: RiMa, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 13, 25, 44 e 127.

WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.]: The University of Chicago Press, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 76.